МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ
СЕВАСТОПОЛЕ

Факультет «Компьютерной математики»
Направление подготовки «Прикладная математика и информатика»
01.03.02 (бакалавр)

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №7

«Построение инвариантной меры Методом Балансировки»

Работу выполнил:
студент группы ПМ-401
Хаметов Марк Владимирович

Руководитель: профессор
кафедры прикладной
математики и информатики
Осипенко Георгий Сергеевич

Севастополь, 2023

Оглавление

Постановка задачи

Дан ориентированный граф. Необходимо построить инвариантную меру с помощью метода балансировки. Граф получен при построении символического образа динамической системы. Визуализировать инвариантную меру с помощью столбчатой трехмерной диаграммы.

Решение найдено на примере отображения Жулия:

$$\begin{cases} x_n &= \quad x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 + a \\ y_n &= \quad 2 * x_{n-1} * y_{n-1} + b \end{cases}$$

Использованные значения параметров a=0.3,b=0.2.

В области [-2;-2]x[2;2] необходимо построить достаточно малое разбиение области на ячейки для символического образа аттракторов динамической системы. Затем применить метод балансировки и визуализировать столбчатую трехмерную диаграмму для этой области. Третья координата задана от нуля до максимальной высоты столбца.

Теоретическая часть

Инвариантная мера — это мера в фазовом пространстве, не изменяющаяся с течением времени при изменении состояния динамической системы.

Для компактного многообразия M существует гомеоморфизм f, такой что для $f: M \to M$ выполняется:

$$\forall A \subset M: \ \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) = \mu(f(A))$$

Поток на ориентированном графе - это распределение m_{ij} такое, что:

$$m_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{ij} m_{ij} = 1$$

Для любой вершины интенсивность потока на входе и на выходе для любой вершины i выполняется равенство

$$\sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}$$

Для потока на графе G мы можем определить меру вершины i как

$$m_i = \sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}.$$

В таком случае получаем равенство $\sum_i m_i = m(G) = 1.$

Теорема 17. *Пусть* C_k *--- последовательные подразбиения такие, что максимальный диаметр ячеек* $d_k \to 0$. *Если* $\{m^k \in M(G_k)\}$ *--- согласованная последовательность потоков ,* A *--- замкнутое множество и* μ *--- инвариантная мера построенная в теореме 16, то*

$$\mu(A) = \sum_{i \in I} m_i^k, \qquad (5.16)$$

где $I = \{i: \ M_k^*(i) \cap A \neq \emptyset\}$

Выберем меру как сумму таких произведений:

$$\mu^* = \sum_i m_i \delta\left(x_i\right). \qquad (5.18)$$

Построенную меру будем называть дискретной мерой сосредоточенной в точках $\left\{x_i\right\}$. Для дискретной меры μ^* выполнено

$$\int_M \varphi \, d\mu^* = \sum_i \varphi(x_i) m_i, \;\; x_i \in M(i).$$

Мера ячеек $M^*(i)$ и $M(i)$ совпадает с мерой m_i вершины i.

Пусть на последовательности символических образов G_t *гомеоморфизма* f *определена последовательность потоков* $\{m^t\}$ *и максимальный диаметр разбиений* $d_t \to 0$ при $t \to \infty$. *Тогда*

■*существует подпоследовательность дискретных мер* μ_{t_k}*, построенных согласно (5.18), сходящаяся в слабой топологии к мере* μ *инвариантной для* f*;*

■ *если некоторая подпоследовательность дискретных мер* μ_{t_l} *сходится в слабой топологии к мере* μ^**, то она является инвариантной для* f.

Теорема 23. *Для любой окрестности (в слабой топологии)* U *множества* $M(f)$ *найдется положительное число* d_0 *такое, что для всякого разбиения* C *с максимальным диаметром* $d < d_0$ *и любого потока* m *на символическом образе* G*, построенного относительно разбиения* C*, дискретная мера* μ*, построенная согласно (5.18), по* m*, лежит в окрестности* U.

Теперь мы можем построить приближение инвариантной меры на символическом образе с заданным диаметром ячеек. Используем для этого метод балансировки:

Возьмем в качестве начального состояния матрицы X матрицу переходов $\Pi=\{\pi_{ij}\}$, элементы которой равны 1 в случае наличия ребра графа символического образа из вершины i в j, и 0 в противном случае. Будем применять к ней по очереди преобразования нормировки, и пересчета строк:

$$x_{ij}^{t+1} = \frac{x_{ij}^t}{\sum_{kl} x_{kl}^t} - \text{ преобразование нормировки}$$

$$x_{ij}^{t+1} = x_{ij}^t \left(\frac{\sum_{k \ne i} x_{ki}^t}{\sum_{l \ne i} x_{il}^t} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{для } j \ne i$$

Или

$$x_{ki}^{t+1} = x_{ki}^t \left(\frac{\sum_{l \ne i} x_{il}^t}{\sum_{m \ne i} x_{mi}^t} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{для } k \ne i$$

что равнозначно, а также для элементов на главной диагонали:
$x_{ii}^{t+1} = x_{ii}^{t}$

Метод Балансировки описан в соответсвии с 100 стр. источника [1].

Сильно связанные вершины графа – это подмножества таких вершин ориентированного графа, между которыми существует путь в обоих направлениях.

Разбиение области на ячейки в данной работе - это разбиение на прямоугольники одинакового размера. Длина ребер задается пользователем. Нумерация ячеек идет в порядке сначала слева направо, затем сверху вниз. Тогда обозначим ячейку $M(i)$, где i номер вершины графа.

Тогда вершины графа это номера ячеек. Ребро исходящее из вершины соответствует отображению из соответствующей ячейки в другую ячейку. Номер полученной ячейки задает конечную точку ребра. Так как мы не можем отобразить каждую точку в области, мы отображаем k равномерно распределенных точек каждой ячейки. Это число задается пользователем.

По теореме 5.1 из источника [1]: Пусть P(d) - это окрестность равная объединению всех ячеек соответствующих возвратным вершинам графа, где d - это длина стороны ячейки.

$$P(d) \ = \ \{\cup \ M(i), \ i - \text{возвратная}\}$$

Тогда аттрактор динамической системы совпадает с пересечением множеств P(d) по формуле:

$$Q = \bigcap_{d>0} P(d)$$

По теореме 5.2 из источника [1]: При уменьшении размера ячейки новая окрестность оказывается вложена в старую. Из этого следует то, что уменьшение диаметра ячеек приводит к меньшему размеру окрестности. Таким образом, последовательность окрестностей монотонно убывает и сходится к цепно-рекуррентному множеству по формуле:

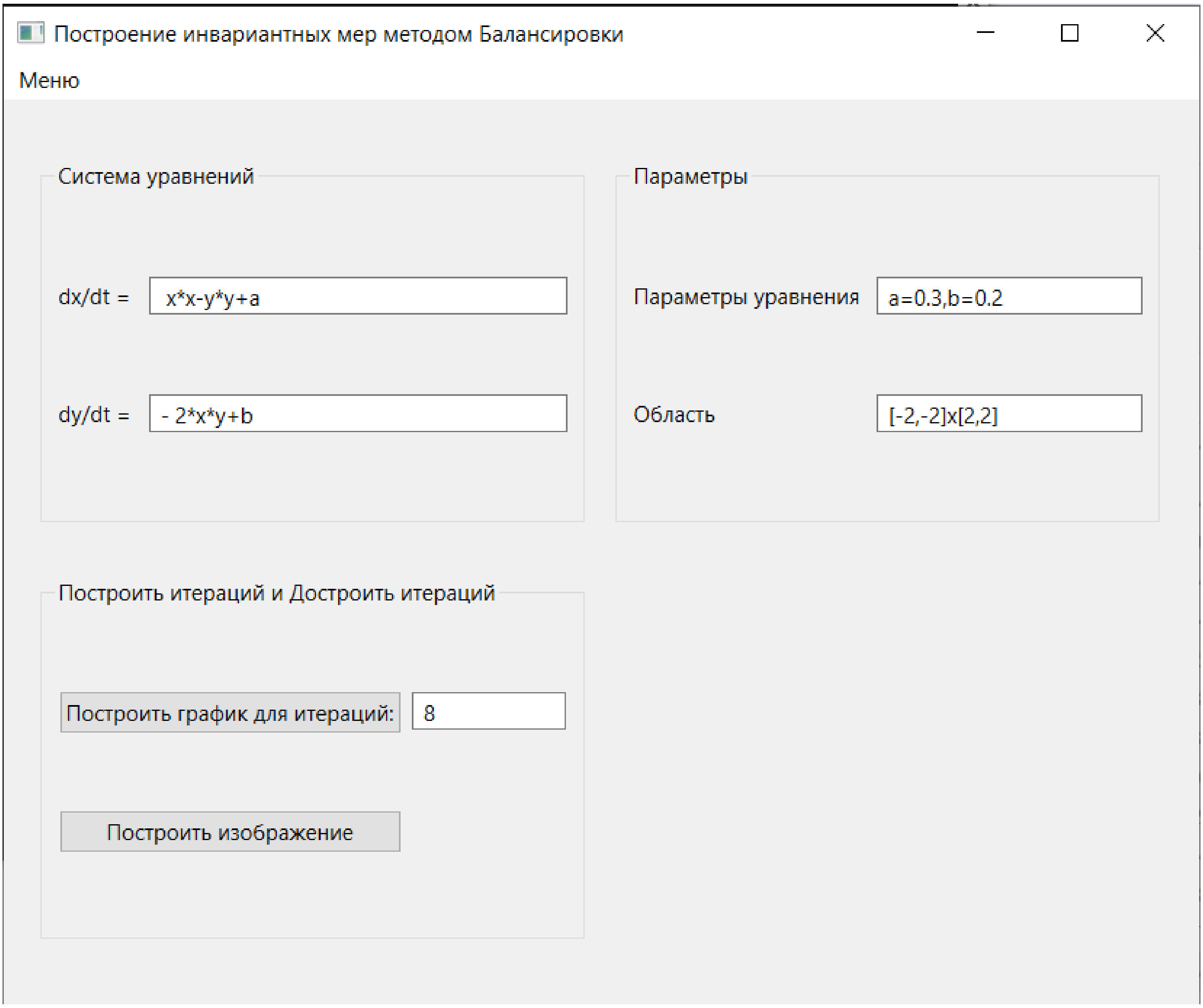
$$\lim_{k\to\infty} P_k = \bigcap_k P_k = Q.$$

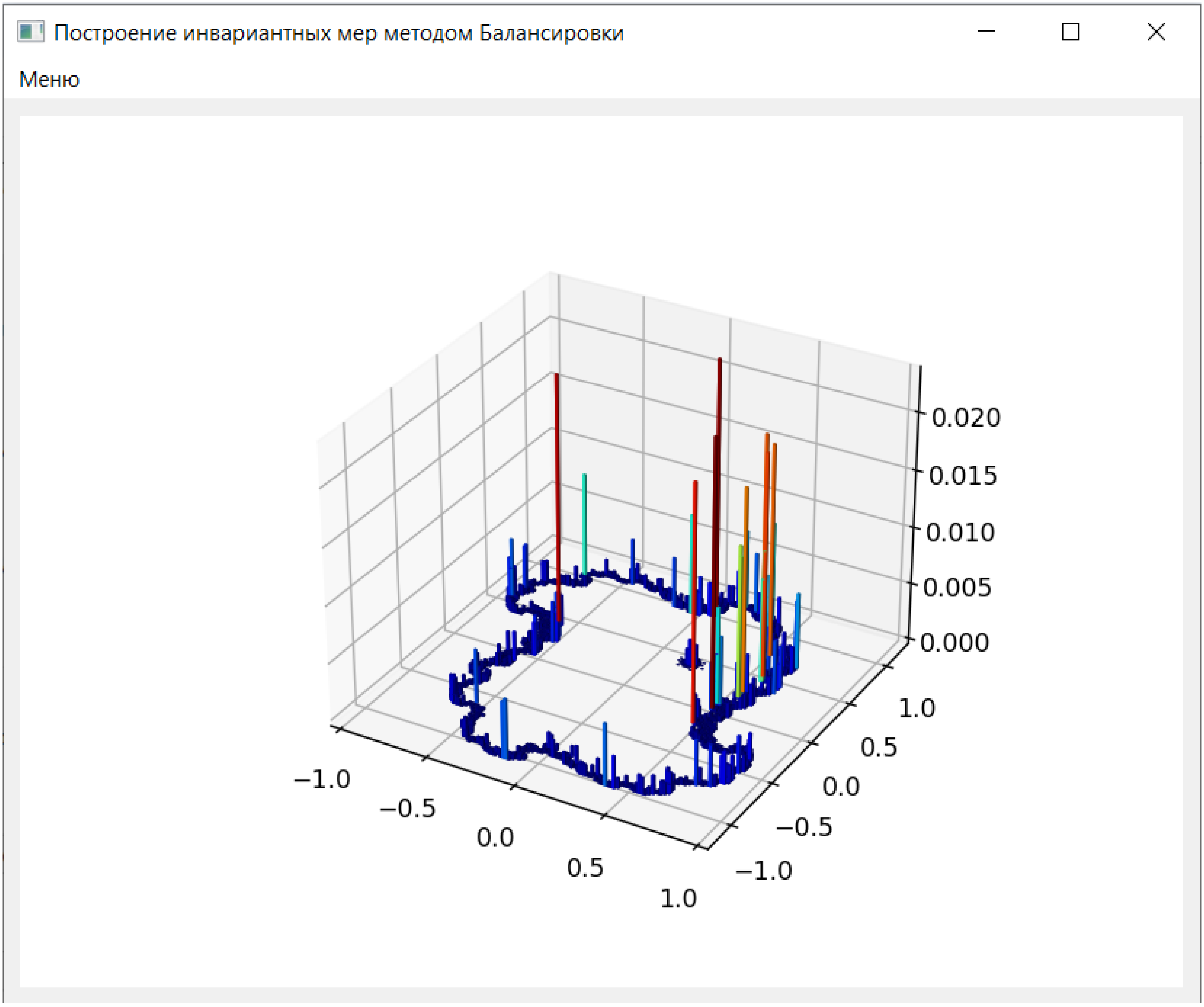
Для подсчета номера ячейки полученного после отображения точки области применяем формулу:

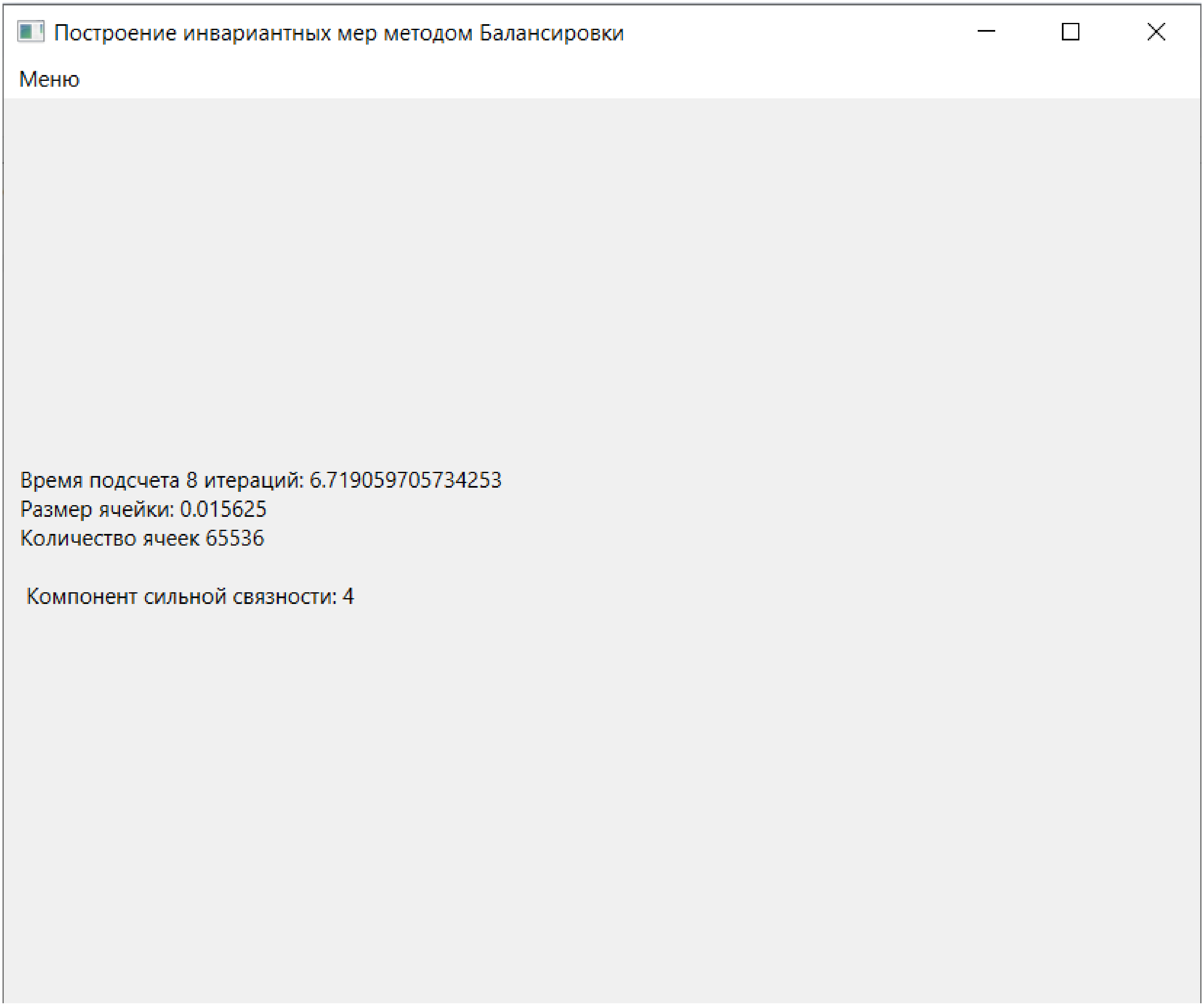
$$n = [(x - x_{min}) / h_x] + 1 + [(y_{min} - y) / h_y] * [(x_{max} - x_{min}) / h_x]$$

Высоту столбца определяем как значение меры в ячейке.

Интерфейс программы



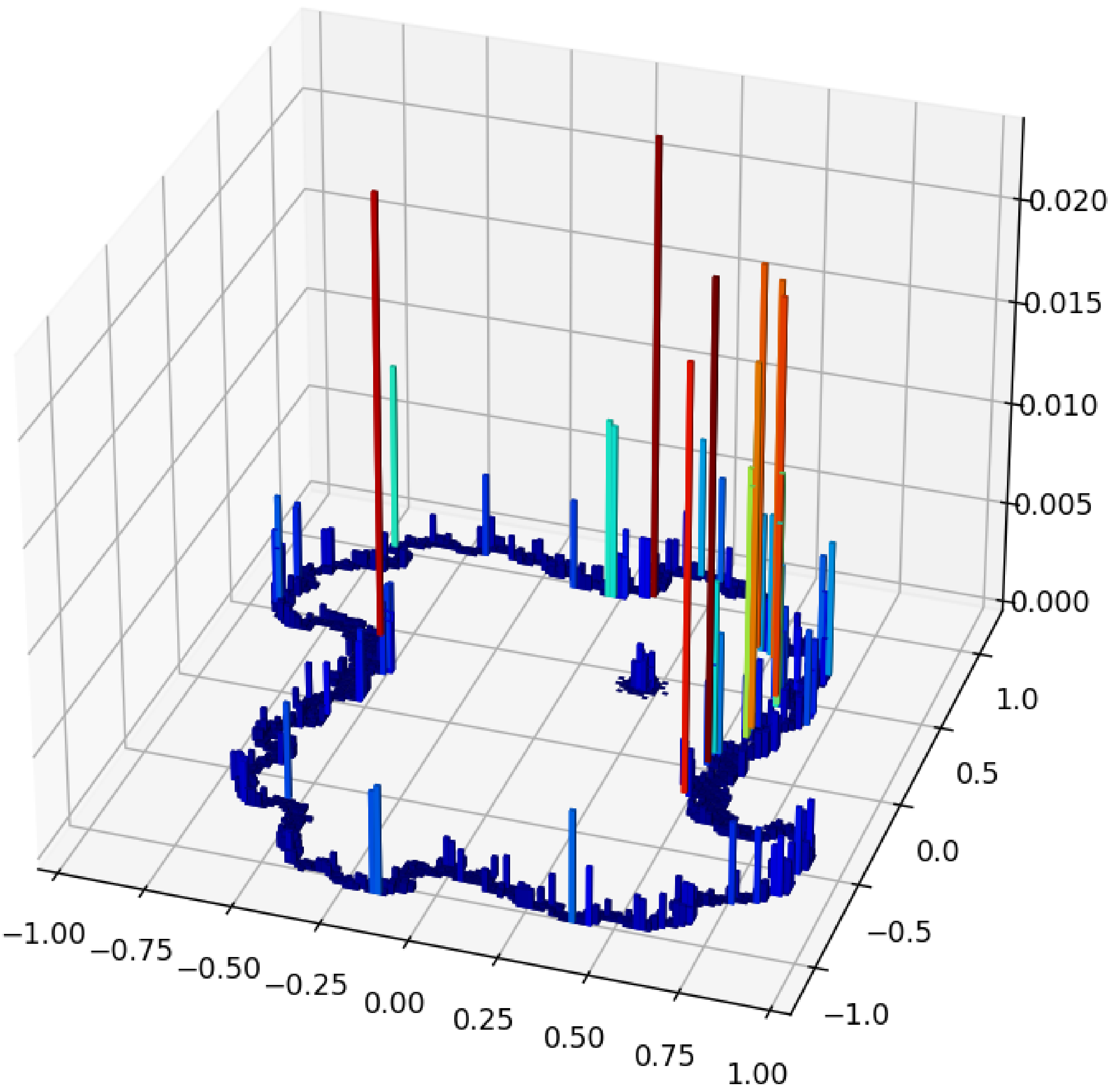

Построение инвариантных мер методом Балансировки
Меню
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0


Построение инвариантных мер методом Балансировки
Меню
Время подсчета 8 итераций: 6.719059705734253
Размер ячейки: 0.015625
Количество ячеек 65536
Компонент сильной связности: 4

Результаты

Программа написана на языке C++. Для создания интерфейса использовался язык Python.

Для измерений результатов область задавалась [-2, -2]x[2, 2] и на каждой итерации длина ребра ячейки делилась на два, изначальная длина ребра была равна 0.5 .



Для параметров a=0.3,b=0.2 . Программа исполнялась 8 секунд для 8 итераций. Количество ячеек на финальном изображении равнялось 65536.

Было найдено 4 предполагаемых аттрактора.

Использованная литература

1. “Введение в символический анализ динамических систем” Г.С.Осипенко, Н.Б.Ампилова.
2. https://ru.wikipedia.org/wiki/Инвариантная_мера
3. https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1304520
4. https://networkx.org/documentation/stable/reference/index.html
5. https://github.com/Zenoro/ODU-solutions
6. https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Косарайю
7. https://web.archive.org/web/20090812054837/http://rain.ifmo.ru/cat/view.php/vis/graph-general/scc-2008/algorithm
8. https://habr.com/ru/articles/537290/
9. https://ru.wikipedia.org/wiki/Компонента_сильной_связности
10. https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-pokazateley-lyapunova-metodamisimvolicheskogo-analiza
11. https://zetcode.com/gui/pysidetutorial/drawing/