

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ  
СЕВАСТОПОЛЕ

Факультет «Компьютерной математики»  
Направление подготовки «Прикладная математика и информатика»  
01.03.02 (бакалавр)

**ОТЧЕТ**  
**по лабораторной работе №9**  
**«Вычисление Спектра Усреднения»**

Работу выполнил:  
студент группы ПМ-401  
Хаметов Марк Владимирович

Руководитель: профессор  
кафедры прикладной  
математики и информатики  
Осипенко Георгий Сергеевич

Севастополь, 2023

## Оглавление

Оглавление.....	2
Постановка задачи.....	3
Теоретическая часть.....	4
Интерфейс программы.....	6
Результаты.....	9
Использованная литература.....	10

## Постановка задачи

Дан ориентированный граф. Необходимо рассчитать спектр усреднения. Граф получен при построении символического образа динамической системы.

Решение найдено на примере отображения Жулия:

$$\begin{cases} x_n &= x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 + a \\ y_n &= 2 * x_{n-1} * y_{n-1} + b \end{cases}$$

В области  $[-2;-2] \times [2;2]$  необходимо построить достаточно малое разбиение области на ячейки для символического образа аттракторов динамической системы.

Для построения символического образа берется область. Эту область впоследствии разбивают на ячейки. Это разбиение называют покрытием. Затем необходимо применить Алгоритм Романовского.

## Теоретическая часть

Сильно связанные вершины графа – это подмножества таких вершин ориентированного графа, между которыми существует путь в обоих направлениях.

Разбиение области на ячейки в данной работе - это разбиение на прямоугольники одинакового размера. Длина ребер задается пользователем. Нумерация ячеек идет в порядке сначала слева направо, затем сверху вниз. Тогда обозначим ячейку  $M(i)$ , где  $i$  номер вершины графа.

Тогда вершины графа это номера ячеек. Ребро исходящее из вершины соответствует отображению из соответствующей ячейки в другую ячейку. Номер полученной ячейки задает конечную точку ребра. Так как мы не можем отобразить каждую точку в области, мы отображаем  $k$  равномерно распределенных точек каждой ячейки. Это число задается пользователем.

По теореме 5.1 из источника [1]: Пусть  $P(d)$  - это окрестность равная объединению всех ячеек соответствующих возвратным вершинам графа, где  $d$  - это длина стороны ячейки.

$$P(d) = \{ \cup M(i), i - \text{возвратная} \}$$

Тогда аттрактор динамической системы совпадает с пересечением множеств  $P(d)$  по формуле:

$$Q = \bigcap_{d>0} P(d)$$

По теореме 5.2 из источника [1]: При уменьшении размера ячейки новая окрестность оказывается вложена в старую. Из этого следует то, что уменьшение диаметра ячеек приводит к меньшему размеру окрестности. Таким образом, последовательность окрестностей монотонно убывает и сходится к цепно-рекуррентному множеству по формуле:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \bigcap_k P_k = Q.$$

Для подсчета номера ячейки полученного после отображения точки области применяем формулу:

$$n = [(x - x_{\min}) / h_x] + 1 + [(y_{\min} - y) / h_y] * [(x_{\max} - x_{\min}) / h_x]$$

Утверждение 39 из источника [1]. Усреднение функции над периодическим путем:

$$\lambda(w) = \sum_{j=1}^q \mu_j \lambda(\varphi_j), \text{ где } \mu_j = k_j p_j / p$$

Утверждение 40 из источника [1]. Спектр усреднения класса:

$\Sigma(H) = [\lambda_{\min}(H), \lambda_{\max}(H)]$ ,  $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$  - нижняя и верхняя грани усреднений над периодическими путями.

Для применения Алгоритма Романовского теория из источника [1] стр. 272:

1) Вычислить среднее значение  $z$  на цикле  $(M_c, N_c)$  и положить  $v(i_0) = 0$ .

2) Для всех дуг  $j \in N_c$  вычислить потенциал

$$z + v(e(j)) - v(b(j)) = c(j)$$

в порядке следования вершин на цикле.

3) Удалить дугу  $j$  цикла, входящую в  $i_0$  и положить все вершины  $M_c$  в список  $M_1$ .

4) Пока список  $M_1$  не пуст необходимо:

4.1) Исключить из  $M_1$  первую вершину  $i_1$  и положить  $M_0 := M_0 \cup i_1$ .

4.2) Для всех дуг  $j = (i_1 \rightarrow i_2)$  с началом в  $i_1$  вычислить

$$w = v(i_1) + c(j) - z.$$

4.2.1) Если  $i_2 \in M_2$ , то считаем  $v(i_2) = w$ , добавляем к дереву дугу  $j$  и перемещаем вершину  $i_2$  из  $M_2$  в конец списка  $M_1$ .

4.2.2) Если  $i_2 \in M_0 \cup M_1$  и  $w \geq v(i_2)$ , то закончить обработку дуги.

4.2.3) Если  $i_2 \in M_0 \cup M_1$  и  $w < v(i_2)$ , то возможны два варианта:

а) Если  $i_2$  предшествует  $i_1$  в построенном дереве, то найденный путь замыкает цикл со средним значением меньшим чем  $z$ . Выберем этот цикл как базисный и повторим алгоритм заново.

б) Если  $i_2$  не предшествует  $i_1$  в построенном дереве, то включить дугу  $j$  в дерево, удаляя какое-либо ребро, входящее в  $i_2$ . Если при этом  $i_2 \in M_0$ , то переместить эту вершину из  $M_0$  в начало списка  $M_1$ .

5) Если вычисления дошли до этого пункта, то построено дерево и потенциал, которые удовлетворяют требуемым неравенствам и базисный цикл реализует минимальное среднее значение оснащения.

# Интерфейс программы

Построение меры максимальной энтропии

— □ ×

Меню

Система уравнений

f =

g =

Параметры

Параметры уравнения

Область

Построить итераций и Достроить итераций

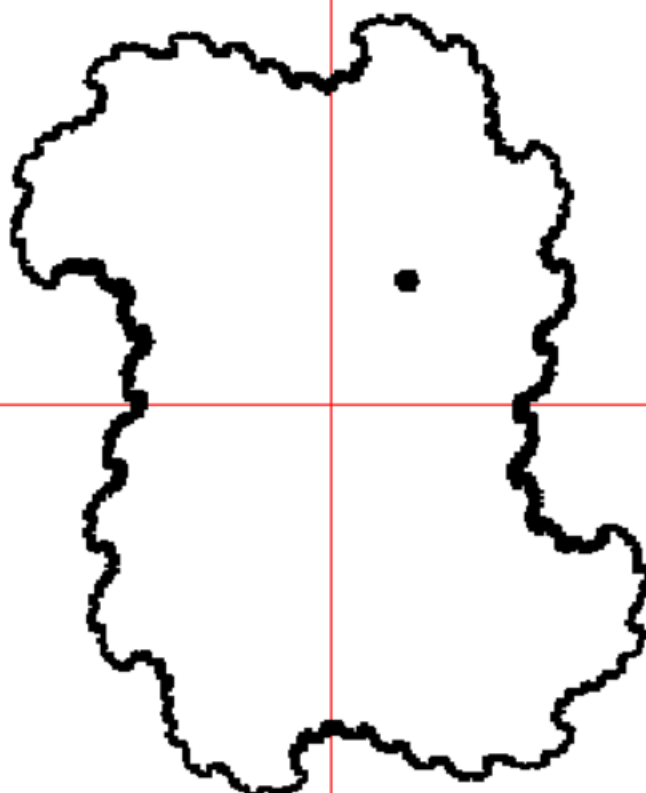
Построить график для итераций:

Построить изображение

Функция оснащения

φ(x,y) =

Меню



Меню

Время подсчета 9 итераций: 13.797364950180054

Размер ячейки: 0.0078125

Количество ячеек 262144

Компонент сильной связности: 5

Для компоненты 1

Лучшее нижнее значение 0.172516 Лучшее верхнее значение 0.181549

Для компоненты 2

Лучшее нижнее значение 0.524445 Лучшее верхнее значение 1.33264

Для компоненты 3

Лучшее нижнее значение 0.724152 Лучшее верхнее значение 0.724152

Для компоненты 4

Лучшее нижнее значение 0.718536 Лучшее верхнее значение 0.718536

Для компоненты 5

Лучшее нижнее значение 0.50945 Лучшее верхнее значение 0.509471



## Результаты

Программа написана на языке C++. Для создания интерфейса использовался язык Python.

Для измерений результатов область задавалась  $[-2, -2] \times [2, 2]$  и на каждой итерации длина ребра ячейки делилась на два, изначальная длина ребра была равна 0.5 .

Программа исполнялась 14 секунд для 9 итераций. Количество ячеек на финальном изображении равнялось 262144. Для параметров  $a = 0.3$  ,  $b = 0.2$ . Было найдено 5 компонент сильной связности. На самом деле их должно быть две. Для каждой компоненты сильной связности были найдены нижняя и верхняя грани усреднений:

Для 1 компоненты  $\lambda_{min} = 0.172516 < \lambda_{max} = 0.181549$

Для 2 компоненты  $\lambda_{min} = 0.524445 < \lambda_{max} = 1.33264$

Для 3 компоненты  $\lambda_{min} = 0.724152 = \lambda_{max} = 0.724152$

Для 4 компоненты  $\lambda_{min} = 0.718536 = \lambda_{max} = 0.718536$

Для 5 компоненты  $\lambda_{min} = 0.50945 < \lambda_{max} = 0.509471$

## Использованная литература

1. “Компьютерно-ориентированные методы динамических систем”  
Г.С.Осипенко.
2. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Компонента\\_сильной\\_связности](https://ru.wikipedia.org/wiki/Компонента_сильной_связности)
3. <https://zetcode.com/gui/pysidetutorial/drawing/>
4. <https://www.freecodecamp.org/news/lambda-expressions-in-python/>
5. <https://www.geeksforgeeks.org/topological-sorting/>
6. <https://stackoverflow.com/questions/17200117/how-to-get-the-object-name-from-within-the-class>
7. <https://srinikom.github.io/pyside-docs/PySide/QtCore/QRectF.html>
8. [https://en.wikipedia.org/wiki/Coordinate\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Coordinate_system)
9. <https://stackoverflow.com/questions/60918473/how-do-i-convert-pixel-screen-coordinates-to-cartesian-coordinates>
10. <https://www.pythonguis.com/tutorials/pyside6-plotting-pyqtgraph/>
11. <https://stackoverflow.com/questions/17200117/how-to-get-the-object-name-from-within-the-class>
12. <https://eltehhhelp.xyz/wp-content/uploads/2021/09/image-2.png>
13. <https://eltehhhelp.xyz/wp-content/uploads/2021/09/image-1.png>