МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ
СЕВАСТОПОЛЕ

Факультет «Компьютерной математики»
Направление подготовки «Прикладная математика и информатика»
01.03.02 (бакалавр)

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №8
«Построение меры максимальной энтропии»

Работу выполнил:
студент группы ПМ-401
Хаметов Марк Владимирович

Руководитель: профессор
кафедры прикладной
математики и информатики
Осипенко Георгий Сергеевич

Севастополь, 2023

Оглавление

Постановка задачи

Дан ориентированный граф. Необходимо построить меру максимальной энтропии. Граф получен при построении символического образа динамической системы. Визуализировать инвариантную меру с помощью столбчатой трехмерной диаграммы.

Решение найдено на примере отображения Жулия:

$$\begin{cases} x_n & = & x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 + a \\ y_n & = & 2 * x_{n-1} * y_{n-1} + b \end{cases}$$

Использованные значения параметров a=0.3,b=0.2.

В области [-2;-2]x[2;2] необходимо построить достаточно малое разбиение области на ячейки для символического образа аттракторов динамической системы. Затем применить метод балансировки и визуализировать столбчатую трехмерную диаграмму для этой области. Третья координата задана от нуля до максимальной высоты столбца.

Теоретическая часть

Сильно связанные вершины графа – это подмножества таких вершин ориентированного графа, между которыми существует путь в обоих направлениях.

Энтропия графа считается по формуле:

$$h(G) = ln\frac{b_n}{n}$$

По теореме энтропия графа равна логарифму максимального собственного числа матрицы допустимых переходов:

$$h(G) = ln\lambda$$

Рассмотрим применение разработанной техники к оценке метрической энтропии. Пусть на символическом образе G отображения f построен инвариантный поток m={mij}. Как показано выше, любой поток m следует рассматривать как приближение к некоторой инвариантной мере , если диаметр ячеек d достаточно мал. Поток m на G порождает цепь Маркова, у которой состояния системы совпадают с вершинами графа G, а вероятности перехода

$$p_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_i}$$

Как указано выше, матрица вероятностей P=(pij) имеет стационарное распределение m1,m2, ⋯ , mn. Для стационарного распределения (m1,m2, ⋯ , mn) энтропия вычисляется по формуле:

$$h_m = -\sum_i m_i \sum_j p_{ij} ln\, p_{ij}.$$

Источник формулы [1] на стр. 443. Энтропия может вычисляться непосредственно по потоку m_i как

$$E = h_m = \sum_{ij} m_{ij} ln\, m_{ij} + \sum_i m_i\, ln\, m_i$$

Существует поток m на графе, энтропия которого совпадает с энтропией графа:

$$h_m = h(G) = ln\, \lambda$$

Мера, построенная на основе этого потока и есть мера максимальной энтропии.

Пусть П --- матрица допустимых переходов, для которой надо найти левый собственный вектор для максимального собственного числа. В начале алгоритма генерируется случайный вектор r0. Далее проводятся последовательные вычисления по итеративной формуле:

$$r_{k+1} = \frac{r_k \Pi}{|r_k \Pi|}$$

Расстояние от элементов данной последовательности до левого собственного вектора стремится к нулю. При этом последовательность

$$\mu_k = \frac{(r_k, r_k \Pi)}{(r_k, r_k)},$$

где $(\cdot,\cdot)$ --- скалярное произведение, сходится к максимальному собственному значению. В результате алгоритма для матрицы допустимых переходов П мы получаем максимальное собственное число

$$\lambda_{max} = \mu_k$$

и левый собственный вектор

$$e = r_k = \left(e_1, e_2, ..., e_n\right)$$

Построим матрицу

$$P = \left(p_{ij} = \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i}\right)$$

Для матрицы P найдем левый неподвижный вектор $m = (m_1, m_2, ..., m_n)$ такой, что

$$mP = m,\ m_k > 0,\ \sum_k m_k = 1$$

Этот вектор можно найти алгоритмом, описанным выше, при этом начальный вектор удобно выбрать равным вектору e. Для построенных стохастической матрицы P и ее стационарного распределения m определим поток

$$m_{ij} = p_{ij} m_i = \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i$$

Согласно теореме, метрическая энтропия достигает своего максимального значения на построенном потоке mij.

$$E = h_m = ln\,\lambda_{max}$$

Таким образом, можно проверить метод с помощью другой, уже описанной формулы вычисления энтропии.

Разбиение области на ячейки в данной работе - это разбиение на прямоугольники одинакового размера. Длина ребер задается пользователем. Нумерация ячеек идет в порядке сначала слева направо, затем сверху вниз. Тогда обозначим ячейку $M(i)$, где i номер вершины графа.

Тогда вершины графа это номера ячеек. Ребро исходящее из вершины соответствует отображению из соответствующей ячейки в другую ячейку. Номер полученной ячейки задает конечную точку ребра. Так как мы не можем отобразить каждую точку в области, мы отображаем k равномерно распределенных точек каждой ячейки. Это число задается пользователем.

По теореме 5.1 из источника [1]: Пусть P(d) - это окрестность равная объединению всех ячеек соответствующих возвратным вершинам графа, где d - это длина стороны ячейки.

$$P(d) = \{\cup\, M(i),\, i - \text{возвратная}\}$$

Тогда аттрактор динамической системы совпадает с пересечением множеств P(d) по формуле:

$$Q = \bigcap_{d>0} P(d)$$

По теореме 5.2 из источника [1]: При уменьшении размера ячейки новая окрестность оказывается вложена в старую. Из этого следует то, что уменьшение диаметра ячеек приводит к меньшему размеру окрестности. Таким образом, последовательность окрестностей монотонно убывает и сходится к цепно-рекуррентному множеству по формуле:

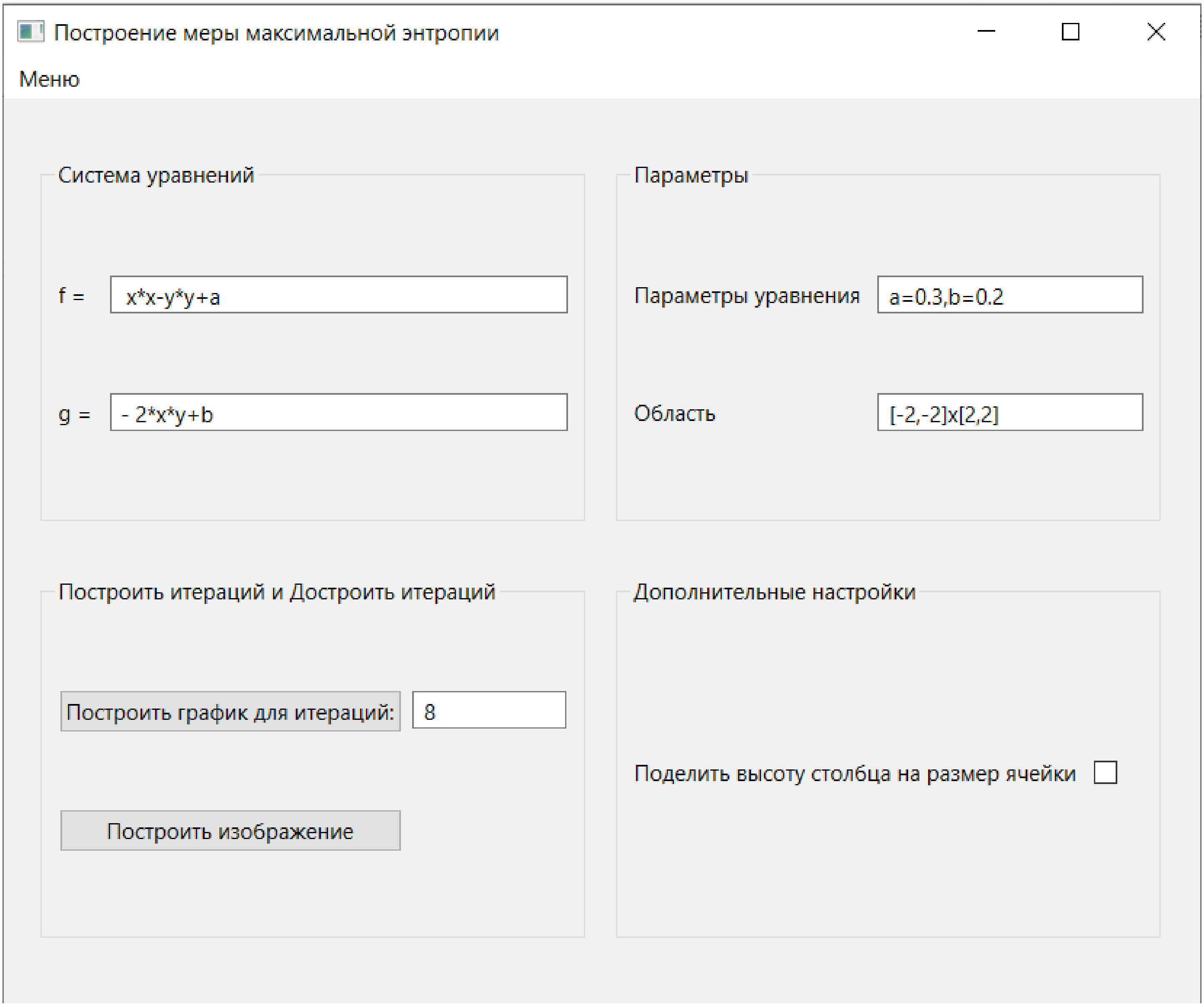
$$\lim_{k\to\infty} P_k = \bigcap_k P_k = Q.$$

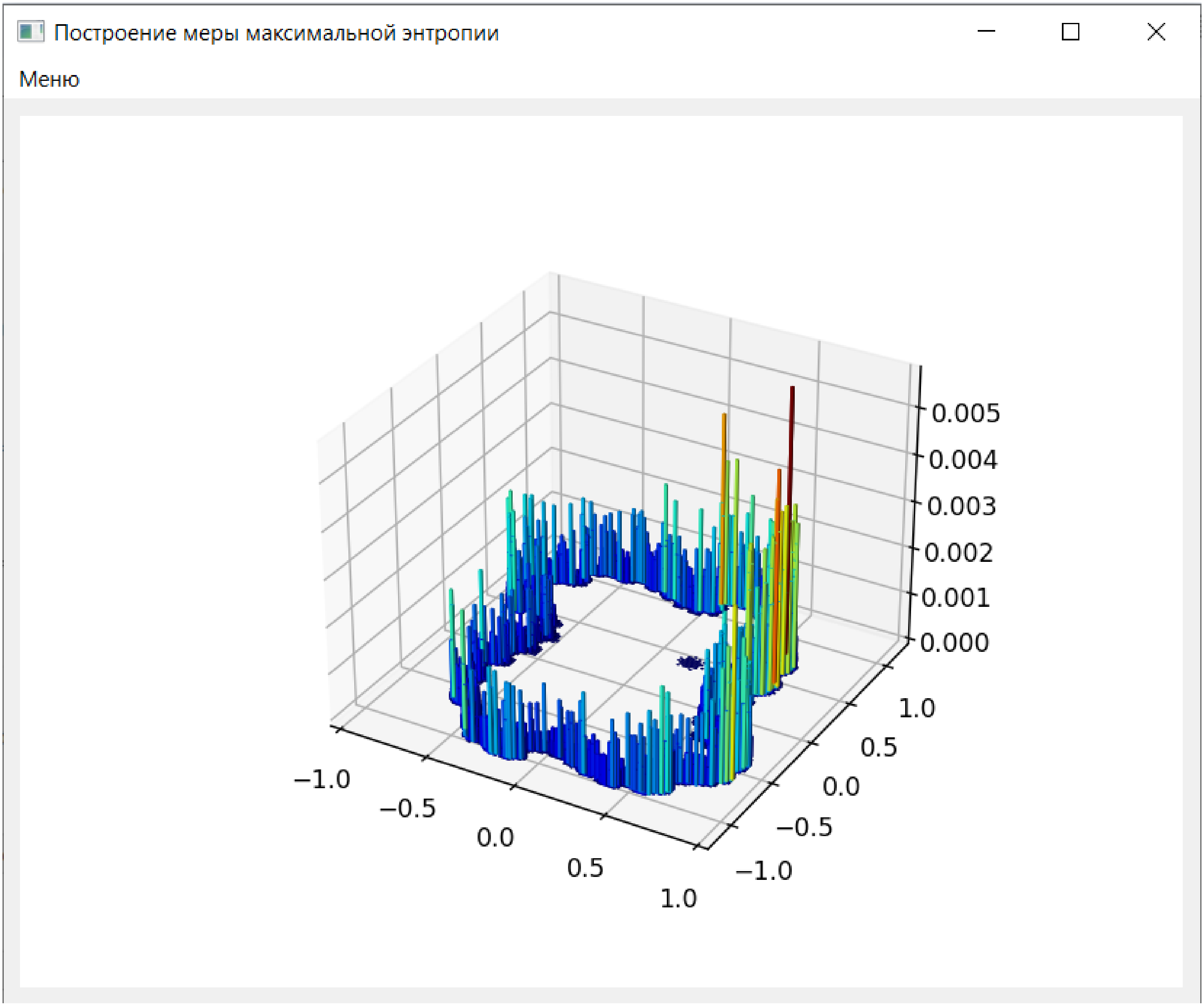
Для подсчета номера ячейки полученного после отображения точки области применяем формулу:

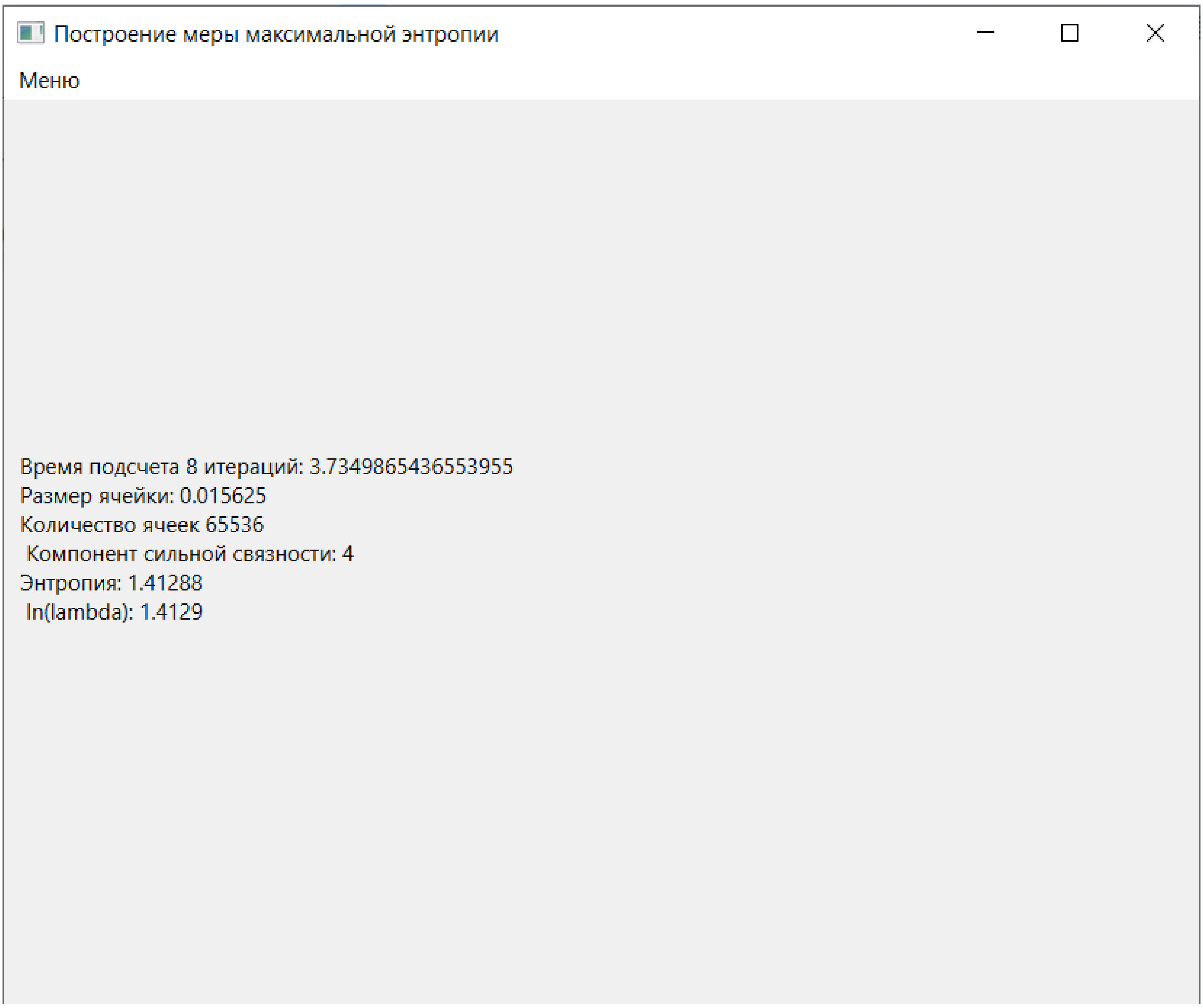
$$n = [(x - x_{min}) / h_x] + 1 + [(y_{min} - y) / h_y] * [(x_{max} - x_{min}) / h_x]$$

Высоту столбца определяем как значение меры в ячейке.

Интерфейс программы



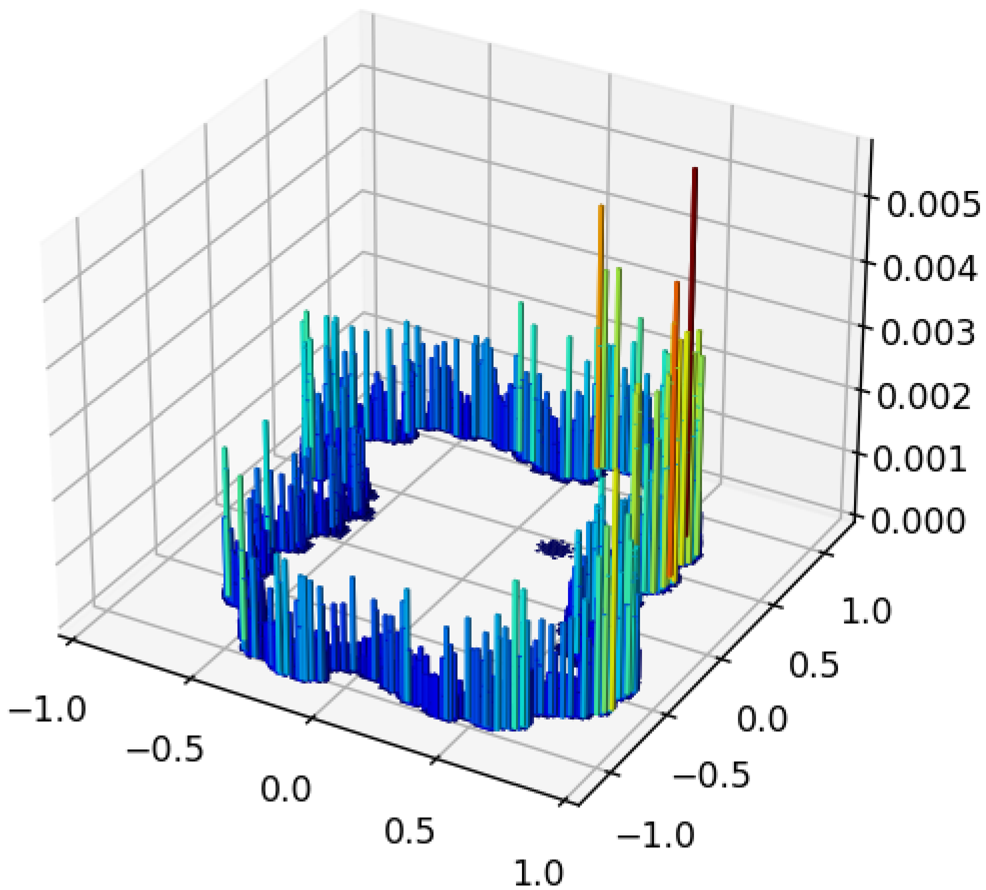

Построение меры максимальной энтропии
Меню
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0.000
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0


Построение меры максимальной энтропии
Меню
Время подсчета 8 итераций: 3.7349865436553955
Размер ячейки: 0.015625
Количество ячеек 65536
Компонент сильной связности: 4
Энтропия: 1.41288
ln(lambda): 1.4129

Результаты

Программа написана на языке C++. Для создания интерфейса использовался язык Python.

Для измерений результатов область задавалась [-2, -2]x[2, 2] и на каждой итерации длина ребра ячейки делилась на два, изначальная длина ребра была равна 0.5 .



Для параметров a=0.3,b=0.2 . Программа исполнялась 11 секунд для 9 итераций. Количество ячеек на финальном изображении равнялось 262144. Диаметр ячейки равен 0.007 . Максимальное значение лямбда было равно 4.08675. Энтропия равна 1.41288.

$log(\lambda) = 1.4129 \approx 1.41288 = h$

Использованная литература

1. “Введение в символический анализ динамических систем” Г.С.Осипенко, Н.Б.Ампилова.
2. https://networkx.org/documentation/stable/reference/index.html
3. https://networkx.org/documentation/stable/reference/algorithms/generated/networkx.algorithms.components.kosaraju_strongly_connected_components.html
4. https://web.archive.org/web/20090812054837/http://rain.ifmo.ru/cat/view.php/vis/graph-general/scc-2008/algorithm
5. https://habr.com/ru/articles/537290/
6. https://ru.wikipedia.org/wiki/Компонента_сильной_связности
7. https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-pokazateley-lyapunova-metodamisimvolicheskogo-analiza
8. https://zetcode.com/gui/pysidetutorial/drawing/
9. https://github.com/Zenoro/ODU-solutions
10. https://www.freecodecamp.org/news/lambda-expressions-in-python/
11. https://www.geeksforgeeks.org/topological-sorting/
12. https://stackoverflow.com/questions/17200117/how-to-get-the-object-name-from-within-the-class
13. https://srinikom.github.io/pyside-docs/PySide/QtCore/QRectF.html
14. https://en.wikipedia.org/wiki/Coordinate_system
15. https://stackoverflow.com/questions/60918473/how-do-i-convert-pixel-screen-coordinates-to-cartesian-coordinates
16. https://www.pythonguis.com/tutorials/pyside6-plotting-pyqtgraph/
17. https://stackoverflow.com/questions/17200117/how-to-get-the-object-name-from-within-the-class
18. https://eltehhelp.xyz/wp-content/uploads/2021/09/image-2.png
19. https://eltehhelp.xyz/wp-content/uploads/2021/09/image-1.png