

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

серия основана в 1996 г.



**Г.С. ОСИПЕНКО**

# **КОМПЬЮТЕРНО- ОРИЕНТИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

**znanium.com**  
электронно-библиотечная система

Москва  
ИНФРА-М  
2023

**УДК**  
**ББК**  
**О**

Автор:

*Г.С. Осипенко*, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в Севастополе

Рецензенты:

*О.В. Анашкин*, доктор физико-математических наук, профессор;

*А.И. Песчанский*, доктор технических наук, профессор

**Осипенко Г.С.**

**О**

Компьютерно-ориентированные методы динамических систем: учебное пособие / Г.С. Осипенко. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 295 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/1912470.

ISBN 978-5-16-018137-0 (print)

ISBN 978-5-16-111140-6 (online)

Рассматриваются методы исследования глобальных свойств динамических систем, основанные на построении символического образа данной системы. Символический образ — это ориентированный граф, который является приближением к динамической системе и строится посредством дискретизации фазового пространства. Символическая динамика, порожденная ориентированным графом, отражает динамику исследуемой системы. Символический образ является инструментом теоретического исследования и основой компьютерно-ориентированных методов численного изучения нелокальных свойств динамических систем.

Соответствует требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования последнего поколения.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика». Будет полезно для аспирантов и исследователей, изучающих динамические системы и их применение.

**УДК**  
**ББК**

ISBN 978-5-16-018137-0 (print)  
ISBN 978-5-16-111140-6 (online)

© Осипенко Г.С., 2023

## Предисловие

Предлагаемая читателю книга написана на основе специальных курсов *Компьютерное моделирование динамических систем* и *Символический анализ динамических систем*, которые читались в Санкт-Петербургском Политехническом институте Петра Великого и в Санкт-Петербургском государственном университете, а также в Севастопольском Филиале Московского университета имени М.В. Ломоносова.

Рассматриваемые компьютерно-ориентированные методы исследования глобальных свойств динамических систем основаны на использовании оригинального инструмента исследования, который называется *символическим образом динамической системы*. Символический образ — это ориентированный граф, который является приближением к динамической системе и строится посредством дискретизации фазового пространства. Символическая динамика, порожденная ориентированным графом, отражает динамику исследуемой системы. Символический образ является инструментом теоретического исследования и основой компьютерно-ориентированных методов численного изучения не-локальных свойств динамических систем. Книгу можно рассматривать как продолжение лекций *Dynamical Systems, Graphs, and Algorithms*, серии *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1889 (2007). В предлагаемом издании излагаются теория и практика применения символического анализа. Основное внимание уделяется вопросам, которые не обсуждались или слабо освещены в упомянутой выше работе. Если результат уже доказан в этой работе, то здесь он приводится без доказательства. Для остальных результатов доказательства даются полностью. Материал наиболее полно отражает современное состояние данного направления исследований.

Книга предназначена для студентов (бакалавриата и (или) магистратуры) по направлению **Прикладная математика и информатика**. Кроме того, издание полезно для аспирантов и преподавателей естественно-научных факультетов и для исследователей, изучающих динамические системы и их применение. Для понимания большинства разделов достаточно знаний в объеме двух курсов математики для университетов. В последней главе излагаются алгоритмы теории графов, которые используются для компьютерной реализации описанных методов.

В результате изучения материалов учебного пособия студент будет:

***знать***

- дискретные динамические системы;
- численные методы дифференциальных уравнений;
- построение символического образа динамической системы;
- основные понятия теории графов;
- методы вычисления компонентов сильной связности;
- топологическую сортировку графа;
- алгоритмы определения экстремальных циклов;

***уметь***

- строить символический образ динамической системы;
- размещать и обрабатывать большие графы в компьютере;
- строить окрестность цепно-рекуррентного множества динамической системы;
- применять на практике методы и алгоритмы теории графов;
- строить аттракторы и их области притяжения;
- находить расширенный спектр усреднения функции;
- находить спектр Морса;
- применять численные методы для решения практических задач;

***владеть***

- методами и алгоритмами решения задач нелинейных систем дифференциальных уравнений;
- техникой применения методов теории графов для решения задач качественной теории динамических систем;
- методами решения прикладных задач.

## **СТРУКТУРА КУРСА**

Весь материал разбит на главы, в каждой главе излагаются результаты, которые относятся к выбранной теме. Доказательства новых результатов излагаются полностью.

В главе 1 описаны основные понятия: динамическая система и способы ее задания, кодировка множеств, символическая динамика на ориентированном графе, детерминизм и ограниченная точность реального задания динамической системы.

В главе 2 дано определение символического образа и описаны основные параметры и свойства. Показано, что допустимые пути на символическом образе соответствуют псевдотраекториям системы.

Глава 3 посвящена исследованию связи путей на символическом образе и траекторий динамической системы. Показано, что мно-

жество путей на графе сходится к множеству траекторий системы в тихоновской топологии, если диаметр дискретизации сходится к нулю. Теорема о локализации цепно-рекуррентного множества является результатом этой главы.

В главе 4 изучаются аттракторы, их области притяжения и фильтрации динамических систем. Показано, что с помощью символического образа можно построить поглощающую окрестность любого аттрактора и получить оценку снизу области притяжения. Фильтрация динамической системы строится на основании топологической сортировки вершин символического образа.

Глава 5 посвящена построению инвариантных мер динамической системы. Поток на символическом образе есть вероятностное распределение на ребрах, удовлетворяющее закону Кирхгофа. Потоки являются приближением для инвариантных мер исходной системы. Показано, что множество потоков на символическом образе сходится к множеству инвариантных мер в слабой топологии, если диаметр дискретизации сходится к нулю.

Глава 6 посвящена изучению эргодических мер. Простой поток на графе — это равномерное распределение на замкнутом цикле (без повторения вершин). Простые потоки символического образа являются аналогом эргодических мер. Показано, что согласованные простые потоки сходятся к эргодическим мерам, если диаметр дискретизации сходится к нулю.

В главе 7 определяются топологическая и метрическая энтропии символического образа, исследуется их связь с аналогичными понятиями динамической системы. Показано, что можно построить инвариантную меру максимальной энтропии.

Глава 8 посвящена изучению спектра усреднения функции над псевдотраекториями динамической системы. Показано, что спектр состоит из отрезков, каждый из которых порожден компонентой цепно-рекуррентного множества и совпадает с усреднением функции над инвариантными мерами. Излагается метод вычисления спектра усреднения, который основан на вычислении экстремальных циклов оснащенного символического образа.

Глава 9 посвящена исследованию показателей Ляпунова и вычислению спектра Морса, который есть усреднением функции над псевдотраекториями динамической системы, порожденной дифференциалом  $Df$  на проективном расслоении. Исследован спектр Морса в случае гомоклинического касания.

Глава 10 посвящена исследованию гиперболичности и структурной устойчивости динамической системы. Показано, что система гиперболична в некоторой области, если спектр Морса в этой об-

ласти не содержит нуля. Поэтому символический образ позволяет численно проверить гиперболичность. Изучаются методы проверки структурной устойчивости. Показано, что существует метод, позволяющий проверить структурную устойчивость системы за конечное число шагов, что дает возможность компьютерной проверки.

Глава 11 посвящена численным экспериментам. Описана компьютерно-ориентированная технология исследования динамических систем, основанная на результатах предыдущих глав. Показана локализация цепно-рекуррентного множества отображения Жюлиа, рассмотрен пример построения аттрактора и его области притяжения для уравнения Дуффинга. Реализован тест на гиперболичность цепно-рекуррентного множества отображения Икеды. Описан пример построения гомоклинической траектории. Рассмотрены биологические системы с памятью. Исследована динамика макроэкономической модели *«национальный доход — ставка процента — уровень цен»*, где описан переход к хаосу.

В главе 12 собраны результаты, необходимые для понимания лекций. Излагаются алгоритмы теории графов, которые используются для компьютерной реализации методов символического анализа.

# Глава 1

## ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

### 1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

*Дискретная динамическая система* порождается отображением  $f: M \rightarrow M$ , где  $M$  является ограниченной замкнутой областью в  $R^d$  или компактным римановым многообразием. Предполагается, что  $f$  есть гомеоморфизм, т.е.  $f$  есть непрерывное отображение и существует обратное отображение  $f^{-1}$ , которое является непрерывным. Состояние системы определяется точкой  $x \in M$  и динамика задается итерационным равенством

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1.1)$$

где последующее состояние системы  $x_{n+1}$  однозначно определяется предшествующим состоянием  $x_n$  посредством отображения  $f$ . Равенство (1.1) называют разностным уравнением, а целые числа  $n \in \mathbb{Z}$  трактуются как дискретное время. Эволюция состояния системы определяется последовательностью точек  $\{x_n, x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{Z}\}$ , которая именуется траекторией или орбитой точки  $x = x_0$  и обозначается  $Tr(x)$ . В этом случае

$$Tr(x) = \{x_n = f^n(x), n \in \mathbb{Z}\},$$

где  $f^0(x) = x$ ,  $f^{-n}(x) = (f^{-1})^n(x)$ . Множество  $M$  называют фазовым пространством системы и, как правило, оно обладает некоторой структурой. Например, с теоретической точки зрения удобно считать, что  $M$  есть компактное риманово многообразие. Для дискретной системы выполнено групповое свойство

$$f^{n+m}(x) = f^n(f^m(x)); n, m \in \mathbb{Z}.$$

*Непрерывная динамическая система* обычно задается как автономная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x). \quad (1.2)$$

Пусть  $\Phi(t, x)$  есть решение системы (1.2) с начальными данными  $\Phi(0, x) = x$  и отображение  $\Phi(t, x)$  определено для всех

$t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in M$ . Эволюция состояния непрерывной системы определяется кривой  $\{x = \Phi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$ , которая называется траекторией точки  $x_0$ . Непрерывная динамическая система также обладает групповым свойством [23, с. 27]:

$$\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x)); \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Непрерывная динамическая система порождает дискретную систему посредством отображения  $f(x) = \Phi(1, x)$ , которое есть сдвиг на единицу времени вдоль траекторий системы дифференциальных уравнений (1.2). При этом динамика построенной дискретной системы определяет динамику непрерывной системы (1.2).

*Периодические системы дифференциальных уравнений* имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad (1.3)$$

где  $F(t, x)$  — векторное поле, периодическое по  $t$  с периодом  $T$ . Пусть  $\Phi(t, x)$  есть решение системы (1.3) с начальными данными  $\Phi(0, x) = x$ . Система (1.3) генерирует дискретную динамическую систему посредством отображения  $f(x) = \Phi(T, x)$ , которое является сдвигом на период вдоль решений системы дифференциальных уравнений. Отображение  $\Phi(T, x)$  называют *отображением Пуанкаре*. А. Пуанкаре ввел описанное отображение и показал, что динамика построенной дискретной системы определяет динамику периодической системы дифференциальных уравнений (1.3).

**Постановка задачи.** Пусть динамическая система задана уравнением (1.1). Наша цель состоит в определении глобальных свойств динамики системы компьютерно-ориентированными методами без какой-либо предварительной информации о свойствах системы. Вся информация о динамике может быть получена посредством компьютерно-ориентированных алгоритмов из заданных отображения  $f$  и области  $M$ . Для этого будет разработана и обоснована компьютерно-ориентированная технология исследования динамики, основанная на анализе символического образа. Символический образ динамической системы — это ориентированный граф, построенный для покрытия фазового пространства довольно мелкими ячейками. Такая технология позволяет локализовать множество цепно-рекуррентных траекторий, определить аттракторы и их области притяжения, инвариантные меры, оценить метриче-



скую и топологическую энтропии, построить спектр усреднения функции, вычислить спектр Морса, определить гиперболичность и структурную устойчивость.

## 1.2. КОДИРОВКА

Современная теория и практика динамических систем ставит задачу описания глобальной структуры траекторий и свойств динамики системы. Важнейшим инструментом, позволяющим исследовать такие сложные явления, как хаос, странные аттракторы и т.д., является метод символического анализа динамики систем. Название отражает основную идею: описание динамики посредством кодировки траекторий последовательностями символов.

Как пример, рассмотрим кодировку точек канторова множества, которое получается из отрезка следующим образом. Отрезок делится на три равные части и средний (открытый) отрезок выбрасывается. Каждый из оставшихся отрезков снова делится на три части и выбрасывается средняя часть и т.д. Все что останется после бесконечного повторения описанной процедуры является канторовым множеством. Каждая точка этого множества есть предел вложенных отрезков, длина которых стремится к нулю. Будем кодировать последовательность вложенных отрезков с помощью двух символов 0 и 1. На каждом шаге мы выбираем один из двух отрезков — левый или правый. Выбор левого отрезка кодируем 0, выбор правого отрезка кодируем 1. Например, последовательность 0110... означает, что сначала был выбран левый отрезок, на втором шаге деления выбран правый отрезок, на третьем — снова правый, на четвертом — левый и т.д. Таким образом, бесконечная последовательность из нулей и единиц кодирует последовательность вложенных отрезков, длина которых стремится к нулю, а в пределе будет точка канторова множества. Каждая точка канторова множества однозначно определяется последовательностью из нулей и единиц. Отметим, что вместо 0 и 1 можно взять любые два символа, например, л и п, что интерпретируется как **левый** и **правый**. Тогда каждой точке канторова множества соответствует бесконечная последовательность (слово) из двух символов (букв) л и п. Таким образом, кодировка не зависит от вида конкретных символов, а определяющим является их последовательное чередование.

На множестве всех последовательностей из двух символов можно ввести расстояние, которое порождено расстоянием на исходном отрезке. Для определенности будем считать, что отрезок есть  $[0, 1]$ , а кодировка осуществляется символами 0 и 1. Тогда

при каждом делении число отрезков увеличивается вдвое, а длина отдельного отрезка уменьшается в 3 раза. После  $N$  делений длина отдельного отрезка составляет  $1/3N$ .

Пусть  $\omega$  и  $\sigma$  — две последовательности из нулей и единиц, которые кодируют числа  $\alpha$  и  $\beta$  из канторова множества. Предположим, что в этих последовательностях совпадают первые  $N$  элементов, но  $(N + 1)$ -ые элементы различны. Тогда числа  $\alpha$  и  $\beta$  лежат в одном отрезке длиной  $1/3N$ , но на следующем делении они оказались в разных отрезках, между которыми лежит отрезок длиной  $1/3(N + 1)$ . Следовательно, расстояние  $\rho(\alpha, \beta)$  между  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяет неравенствам

$$1/3(N + 1) \leq \rho(\alpha, \beta) \leq 1/3N.$$

Поэтому мы можем положить расстояние между последовательностями  $\omega$  и  $\sigma$  равным  $1/3N$  или  $1/3(N + 1)$ . Аналогично мы можем определить расстояние для последовательностей из любых символов.

### 1.3 СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Впервые кодировку применил Ж. Адамар в 1898 г. [63] при исследовании геодезических потоков на поверхностях отрицательной кривизны. Основателем методов символической динамики считается Х. Морс [81]. Название *символическая динамика* ввели Х. Морс и Ж. Хедлунд [82].

В 1935 г. Г. Биркгоф [51] впервые применил символическую динамику для кодировки траекторий вблизи гомоклинической орбиты. С. Смейл использовал ту же технику при построении так называемой *подковы* — простой модели хаотической динамики [107]. В.М. Алексеев применил метод символической динамики для исследования задач небесной механики [1, 2]. Он использовал термин *символический образ* для обозначения пространства допустимых последовательностей при кодировании траекторий системы.

**Краткое описание символической динамики.** Пусть имеется конечный набор символов  $S = \{a, b, c, \dots\}$ . Рассмотрим множество бесконечных в обе стороны последовательностей

$$\Sigma = \{x = \{\dots x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}\}$$

символов из  $S$ . В пространстве последовательностей  $\Sigma$  можно ввести расстояние, как это описано выше: если последовательности  $x$  и  $y$  совпадают на отрезке  $|i| \leq N$ , т.е.

$$x_i = y_i \text{ при } |i| \leq N,$$

но не совпадают  $x_i \neq y_i$  при  $|i| = N + 1$ , то расстояние

$$\rho(x, y) = 1/3N.$$

Вместо основания степени 3 можно взять любое число, большее единицы.

Имеются иные способы введения эквивалентного расстояния и топологии в пространстве последовательностей  $\Sigma$  [2, 75]. Динамика в пространстве последовательностей определяется отображением сдвига

$$y = \sigma(x), \text{ где } y_i = x_{i+1}.$$

Отображение  $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$  очевидно имеет обратное  $\sigma^{-1}$ , оба отображения непрерывны в рассмотренной топологии и, следовательно,  $\sigma$  является гомеоморфизмом.

Иногда рассматривается пространство  $\Sigma$ , в которое входят не все возможные последовательности, а только некоторые, которые называют допустимыми. Например, пусть  $G$  — ориентированный граф, причем каждая вершина  $v$  имеет исходящие и входящие ребра. Тогда набор символов  $S = \{v\}$  есть множество вершин, пространство  $\Sigma$  есть множество последовательностей вершин  $\{v_i, i \in \mathbb{Z}\}$ , соответствующих допустимым путям на графе. Пространство  $\Sigma$  и отображение сдвига  $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$  называются *топологической цепью Маркова*. Теоретические основы и приложения символической динамики можно найти в лекциях [1, 75].

*Подкова Смейла* [12, 24]. В работе [108] построен пример, который оказал существенное влияние на теорию хаоса. В этом примере методы символической динамики являются тем инструментом, который позволяет достаточно просто описать природу детерминированного хаоса. Общая схема исследования состоит в следующем.

Определяется некоторая система (1.1) и ее инвариантное множество  $\Omega \subset M$ , строится отображение  $h$  из  $\Omega$  в пространство последовательностей

$$h: \Omega \rightarrow \Sigma \text{ так, что } hf = \sigma h.$$

Тогда  $h$  переводит эволюцию системы (1.1) на  $\Omega$  в динамику сдвига  $\sigma$  в пространстве последовательностей. Смейл показал, что отображение  $h$  является гомеоморфизмом и, следовательно, система (1.1) на  $\Omega$  эквивалентна сдвигу  $\sigma$  в пространстве двоичных последовательностей, которое является канторовым множеством.

Динамика сдвига  $\sigma$  в таком пространстве достаточно прозрачна. Например, периодические последовательности образуют плотное множество в  $\Sigma$ , поэтому периодические траектории плотны в  $\Sigma$ . Аналогично непериодические траектории образуют плотное множество в  $\Sigma$ . Отсюда следует, что сколь угодно малое возмущение начальных данных существенно меняет топологию траекторий. Множество  $\Sigma$  — канторово, поэтому  $\Omega$  также является канторовым множеством.

При этом было показано, что  $C^1$ -возмущенная *подкова* сохраняет описанные свойства. Как отметил В.М. Алексеев [2], предложенная схема не может быть использована для описания динамики на всем многообразии  $M$ , так как пространство последовательностей имеет топологию канторова множества. Поэтому для описания динамики на многообразии мы не можем надеяться, что  $h$  будет гомеоморфизмом и равенство  $hf = \sigma h$  будет иметь место на  $M$ .

#### 1.4. ДИНАМИКА НА ГРАФЕ

В параграфе 1.1 были определены дискретная и непрерывная динамические системы. Рассмотрим другой способ задания динамики.

Пусть система находится в одном из  $n$  различных состояний  $\{i, j, \dots\}$  и каждую единицу времени она меняет свое состояние. При этом не всякий переход возможен, т.е. фиксированы допустимые переходы  $\{i \rightarrow j, \dots\}$ . Допустимый переход вида  $i \rightarrow i$  не исключается. Для описания динамики построим ориентированный граф, который имеет  $n$  вершин  $\{i, j, \dots\}$  и ориентированные ребра вида  $\{i \rightarrow j, \dots\}$ . Тогда допустимый путь на построенном графе задает траекторию изменения состояний системы, и множество  $\Sigma$  (допустимых) путей на графе кодирует динамику этой системы. На множестве путей  $\Sigma$  определяются расстояние и отображение сдвига  $\sigma$ , как это сделано выше. Построенная динамика называется топологической цепью Маркова и имеет достаточно развитую теорию [75].

Рассмотрим топологическую цепь Маркова, у которой для каждого допустимого перехода  $i \rightarrow j$  фиксирована вероятность  $p_{ij}$  такого перехода. В этом случае мы имеем матрицу  $n \times n$

$$P = (p_{ij}).$$

При этом переход вида  $i \rightarrow i$  не исключается и предполагается, что за единицу времени переход из состояния  $i$  в какое-нибудь состояние будет осуществлен с вероятностью 1. Это приводит к тому, что в матрице  $P$  сумма элементов строки

$$\sum_j p_{ij} = 1.$$

Матрица  $P$  называется стохастической и построенная таким образом динамика называется *стохастической цепью Маркова*. Стохастические цепи имеют широкое применение и развитую теорию [71].

Рассмотрим ориентированный граф  $G$ . Распределение  $\{m_{ij}\}$  на ребрах называется потоком, если:

$$m_{ij} \geq 0,$$

$$\sum_{ij} m_{ij} = 1,$$

- $\sum_j m_{ij} = \sum_k m_{ki}$  для каждой вершины  $i$  входящий поток равен исходящему.

В главе 5 будет показано, что, если на графе топологической марковской цепи фиксировать поток, то он порождает стохастическую цепь, и наоборот: каждая стохастическая цепь порождает поток на графе.

**Дискретизация.** В 1987 г. вышла книга C.S. Hsu «Sell to sell mapping», в которой автор описывает аппроксимацию динамической системы путем дискретизации фазового пространства системы (1.1). Область  $M$  разбивается на ячейки  $\{M(i)\}$ , в каждой ячейке выбирается (центральная) точка  $x_i$ ; если образ  $f(x_i)$  лежит в ячейке  $M(j)$ , то считается, что ячейка  $M(i)$  отображилась в ячейку  $M(j)$ . Таким образом, строится конечная аппроксимация динамической системы в виде топологической цепи Маркова, где состояния системы  $\{i\}$  отождествляются с ячейками  $M(i)$ , а допустимый переход  $i \rightarrow j$  определяется образом центральной точки ячейки  $f(x_i) \in M(j)$ . В связи с таким построением, метод получил название «отображение ячейки-в-ячейку». Если ячейки достаточно малы, то численно построенные картинки для конкретных двумерных систем показали, что на этом пути можно получить представление о глобальной динамике системы. Предложенный метод является компьютерно-ориентированным и его реализация не вызывает трудностей. Ясно, что описанная аппроксимация дает хорошей результат, если ячейки покрытия достаточно малы. Примеры показывают, что в этом случае число ячеек измеряется десятками или сотнями тысяч.

В монографии «Sell to sell mapping» рассмотрен более общий случай, когда образ ячейки  $f(M(i))$  состоит из нескольких ячеек  $M(i)$  и каждому допустимому переходу  $i \rightarrow j$  приписывается вероятность, которая пропорциональна объему пересечения  $f(M(i)) \cap M(j)$ . Такой подход приводит к стохастическим марковским цепям. Стохастическая матрица  $P$  имеет существенные размеры, но она является разреженной. Основным недостатком описанной схемы исследования является слабая теоретическая основа. Детали и результаты численных экспериментов содержатся в [65].

## 1.5. ДЕТЕРМИНИЗМ И ОГРАНИЧЕННАЯ ТОЧНОСТЬ

Пусть динамика системы определяется разностным уравнением (1.1), тогда будущее системы однозначно определяется исходным состоянием  $x_0$ . Возникает вопрос, как изменяется динамика при изменении начального значения  $x_0$ ? Теория Ляпунова об устойчивости движения [21] дает условия непрерывной зависимости траектории от начальной точки.

В конце XIX в. А. Пуанкаре, исследуя задачу трех тел, обнаружил двояко-асимптотические траектории, которые приближаются к некоторой периодической траектории при  $t \rightarrow \infty$  и при  $t \rightarrow -\infty$ . Сейчас двояко-асимптотическую траекторию называют гомоклинической. Вблизи гомоклинической траектории сколь угодно малое изменение начального условия  $x_0$  делает траекторию периодической или возвратной в сколь угодно малую свою окрестность. Здесь следует обратить внимание на то, что сколь угодно малое изменение  $x_0$  меняет топологию траектории, т.е. траектория задается абсолютно точным значением  $x_0$ . Таким образом, незаметное изменение начального данного приводит к существенным изменениям траектории.

В 1960-х гг. Д. Йорк ввел термин *хаос* для подобных явлений. Подкова Смейла является типичным примером хаотичной динамики. Действительно, динамика на множестве  $\Omega$  эквивалентна сдвигу  $\sigma$  в пространстве двоичных последовательностей, где периодические (или непериодические) последовательности образуют плотное множество. Более того, существует траектория, которая является плотной в  $\Omega$ . Следовательно, сколь угодно малым шевелением начального условия мы попадаем на плотную траекторию, точки которой оказываются со временем в любой малой окрестности любой точки множества  $\Omega$ . Динамика на такой траектории выглядит как случайное блуждание по инвариантному множеству  $\Omega$ . При этом следует отметить, что динамика Пуанкаре и динамика Смейла являются абсолютно детерминированными процессами.

Практика показывает, что вычисления не производятся с абсолютной точностью. Например, калькулятор при делении 1 на 3 выдает некоторое десятичное число с конечным числом троек после запятой и, следовательно, мы получаем результат с малой ошибкой. Конечно, можно не использовать калькулятор и обойтись точным значением  $1/3$ . Сложнее дело обстоит с иррациональными числами, например, числом  $\pi$ . В настоящее время число  $\pi$  может быть вычислено с любой конечной точностью. Швейцарские математики рассчитали число  $\pi$  с точностью до 62,8 трлн знаков после запятой, но даже в этой ситуации мы вынуждены констатировать наличие очень малой ошибки.

Компьютерные вычисления обычно производятся с точностью  $10^{-19}$ . Все это приводит к тому, что при вычислениях всегда присутствует некоторая неточность, возможно, очень малая. Следовательно, мы можем вычислить динамику системы  $\{x_n : x_{n+1} = f(x_n)\}$  только приближенно. При этом ошибка будет накапливаться по мере роста числа итераций  $n$ .

В прикладных задачах еще более сложная ситуация, так как система и ее параметры определены с ограниченной точностью. В результате вычислений мы получаем псевдотраекторию

$$\{y_n : y_{n+1} = f(y_n) + \varepsilon_n\}, |\varepsilon_n| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon > 0$ .

Возникает вопрос: как результат вычислений связан с реальной динамикой? Здесь возможно два подхода: найти условия, при которых вблизи псевдотраектории найдется точная траектория либо исследовать общие свойства псевдотраекторий системы. Теория отслеживания [95] дает условия, при которых вблизи псевдотраектории найдется точная траектория.

Главной целью предлагаемой работы являются результаты, которые описывают свойства псевдотраекторий путем применения кодировки и символического анализа динамики. Другой целью является обоснование применения такого анализа для создания компьютерных пакетов изучения динамических систем.

### *Контрольные вопросы и задания*

1. Отображение Жюлиа в комплексной плоскости имеет вид  $f(z) = z^2 + C$ . Задаёт ли разностное уравнение  $z_{n+1} = z_n^2 + C$  дискретную динамическую систему?
2. Пусть  $\Omega$  — канторово множество, описанное в параграфе 1.2. Докажите, что это множество компактно.

3. Пусть прибор записывает координаты спутника. Можно ли считать, что эта запись есть кодировка траектории?
4. Граф имеет две вершины и все возможные дуги. Опишите множество допустимых путей на таком графе.
5. Сколько слов длины  $N$  можно закодировать с помощью двух символов?
6. Сколько слов длины не более  $N$  можно закодировать с помощью двух символов?
7. Пусть компьютер вычисляет числовую последовательность  $x_n$ . Задана и остановка счета  $|x_n - x_{n+100}| < 10^{-17}$ . Означает ли это, что последовательность сходится?
8. Приведите пример реальной динамической системы.



## Глава 2

# СИМВОЛИЧЕСКИЙ ОБРАЗ

### 2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИМВОЛИЧЕСКОГО ОБРАЗА

Пусть  $f: M \rightarrow M$  — гомеоморфизм компактного многообразия  $M$ , который порождает дискретную динамическую систему

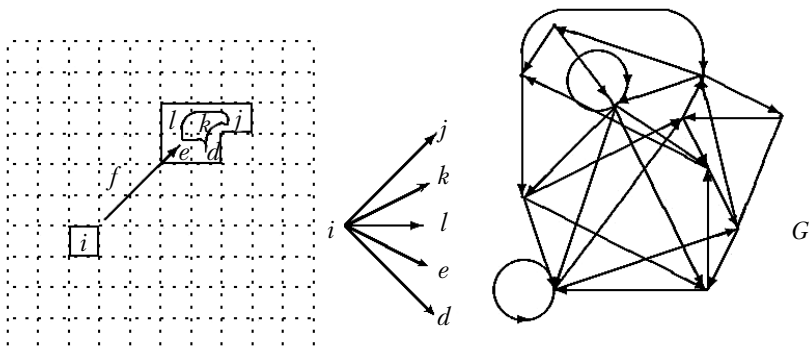
$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.1)$$

и  $\rho(x, y)$  — расстояние на  $M$ .

В основе дальнейшего изложения лежит понятие символического образа динамической системы [89, 92], которое соединило в себе символическую динамику [1, 75, 98] и численные методы [65].

**Определение 2.1.** [29] Пусть  $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$  есть конечное покрытие многообразия  $M$  замкнутыми подмножествами, множество  $M(i)$  будем называть ячейкой индекса  $i$  (рис. 2.1). Символический образ динамической системы (1.1) для покрытия  $C$  есть ориентированный граф  $G$  с вершинами  $\{i\}$ , соответствующими ячейкам  $\{M(i)\}$ . Вершины  $i$  и  $j$  связаны ориентированным ребром (дугой)  $i \rightarrow j$  тогда и только тогда, когда

$$f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset.$$



**Рис. 2.1.** Построение символического образа

Символический образ является геометрическим средством для дискретизации динамической системы. Исследование символического образа позволяет получить полезную информацию о глобальной структуре динамики системы. Символический образ зависит от покрытия  $C$ , изменение которого меняет символический образ.

Существование ребра  $i \rightarrow j$  гарантирует существование точки  $x$  в ячейке  $M(i)$  такой, что ее образ  $f(x)$  лежит в ячейке  $M(j)$ . Другими словами, ребро  $i \rightarrow j$  является следом отображения  $x \rightarrow f(x)$ , где  $x \in M(i)$ ,  $f(x) \in M(j)$ . Если ребра  $i \rightarrow j$  не существует, то нет точек  $x \in M(i)$  таких, что их образ  $f(x) \in M(j)$ . Мы не накладываем ограничений на покрытие  $C$ , но, не ограничивая общности, можно считать, что ячейки  $M(i)$  являются многогранниками, которые пересекаются по граничным дискам. Это следует из теоремы о триангуляции компактного многообразия [40]. В практических расчетах  $M$  есть компактная область в  $\mathbb{R}^d$ , а ячейками  $M(i)$  являются кубы или параллелепипеды.

Пусть покрытие  $C$  состоит из многогранников, которые пересекаются по граничным дискам. При этом будем считать, что ячейки-многогранники являются замыканием своей внутренности. В параграфах, связанных с теорией меры, мы будем переходить от покрытия  $C$  к измеримому разбиению  $C^*$ , приписывая граничные диски к одной из примыкающих ячеек.

## 2.2. ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ СИМВОЛИЧЕСКОГО ОБРАЗА

Е. Петренко в своей диссертации [35] рассмотрел пять способов численного построения символического образа. Здесь мы рассмотрим один из них. Прежде всего, следует отметить, что численное построение символического образа является приближенным вычислением, так как образ ячейки вычисляется приближенно.

Хорошие результаты дает следующий простой способ численного построения символического образа. Пусть покрытие  $C$  состоит из многогранников. В каждой ячейке  $M(i)$  равномерно распределяется некоторое количество точек  $\{x_k, k = 1, 2, \dots, N\}$ , которые называются скан-точками. Обычно для гладких систем  $N = 100$  является вполне достаточным. Вычисляются образы  $f(x_k)$ . Далее полагают, что дуга  $i \rightarrow j$  существует, если существует скан-точка  $x_k \in M(i)$  такая, что  $f(x_k) \in M(j)$ . Таким образом, каждая дуга  $i \rightarrow j$  символического образа реализуется на многообразии парой точек  $x_i \rightarrow f(x_i)$ , где  $\{x_i \in M(i), f(x_k) \in M(j)\}$ . Фиксируя для каждой дуги

$i \rightarrow j$  описанную пару  $x_i \rightarrow f(x_i)$ , мы получим проекцию символического образа на многообразии.

При описанном построении символического образа каждый допустимый путь  $\{i_n, n \in \mathbb{Z}\}$  на символическом образе порождает последовательность точек  $\{x_n = x_{i_n}, n \in \mathbb{Z}\}$  таких, что расстояние

$$\rho(f(x_n), x_{n+1}) \leq d,$$

где  $d$  — максимальный диаметр ячеек.

### Пример 2.1

Рассмотрим геометрический пример построения символического образа. Пусть  $M$  есть замкнутая область на плоскости, изображенная на рис. 2.1. Покрытие  $S$  состоит из 100 квадратов, нумерация которых начинается с левого верхнего квадрата, идет слева направо и сверху вниз, так что левая верхняя ячейка имеет индекс (номер) 1, индекс 10 соответствует правой верхней ячейке, 91 есть номер левой нижней ячейки и 100 есть индекс правой нижней ячейки. Рассмотрим ячейку  $M(i)$  индекса  $i = 63$ . Пусть образ  $f(M(i))$  пересекает ячейки с номерами  $l = 26, k = 26, j = 28, l = 36, d = 37$  (см. рис. 2.1). В результате мы имеем пять дуг, исходящих из вершины  $i$  в вершины  $j, k, l, e, d$ . Прodelывая аналогичное построение для каждой ячейки, мы получим символический образ. Если образ  $f(M(i))$  пересекает ячейку  $M(i)$ , то образуется петля  $i \rightarrow i$ .

## 2.3. ПСЕВДОТРАЕКТОРИИ

Напомним, что бесконечная в обе стороны последовательность точек  $\{x_n\}$  называется траекторией системы (1.1), если  $f(x_n) = x_{n+1}$ .

**Определение 2.2.** Для фиксированного  $\varepsilon > 0$  бесконечная в обе стороны последовательность  $\{x_n\}$  называется  $\varepsilon$ -траекторией или псевдотраекторией, если расстояние между образом  $f(x_n)$  и  $x_{n+1}$  меньше чем  $\varepsilon$ , т.е.

$$\rho(f(x_n), x_{n+1}) < \varepsilon$$

для любого  $n$ .

Практика показывает, что вычисления не производятся с абсолютной точностью. Таким образом, в результате вычислений мы получаем псевдотраекторию.

Напомним, что множество  $\Omega$  называется инвариантным, если из  $x \in \Omega$  следует  $f(x) \in \Omega$  и  $f^{-1}(x) \in \Omega$ . Из определения инвариан-

тности следует, что инвариантное множество есть объединение траекторий.

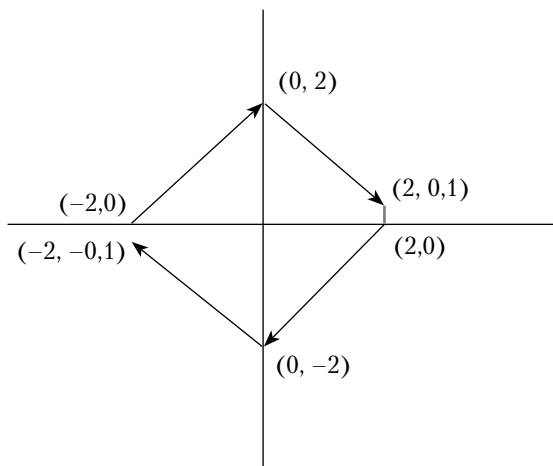
### Пример 2.2

На плоскости  $R^2$  рассмотрим отображение (рис. 2.2) вида

$$f(x, y) = (y, 0,05(1-x^2)y - x)$$

и возьмем последовательность точек

$$x_1 = (2, 0), \quad x_2 = (0, -2), \quad x_3 = (-2, 0), \quad x_4 = (0, 2), \quad x_{k+4} = x_k.$$



**Рис. 2.2.** Псевдотраектория отображения  $f(x, y) = (y, 0,05(1-x^2)y - x)$

Проверим, что данная последовательность является 4-периодической  $\varepsilon$ -траекторией для любого  $\varepsilon > 0,1$ . Действительно,  $f(2, 0) = (0, -2)$ ,  $f(0, -2) = (-2, -0,1)$ ,  $f(-2, 0) = (0, 2)$ ,  $f(0, 2) = (2, 0,1)$ . Таким образом,  $|x_{k+1} - f(x_k)| \leq 0,1$  для  $k = 1, 2, 3, 4$ .

**Определение 2.3.** Бесконечная в обе стороны последовательность  $\{z_k\}$  вершин графа  $G$  называется путем (или допустимым путем), если для каждого  $k \in \mathbb{Z}$  граф  $G$  содержит направленную дугу

$$z_k \rightarrow z_{k+1}.$$

Обозначим  $Ver$  множество вершин графа  $G$ . Символический образ  $G$  можно рассматривать как многозначное отображение  $G$ :

$Ver \rightarrow Ver$  между вершинами, где образ  $G(i)$  есть набор вершин  $j$ , которые являются концами дуг  $i \rightarrow j$ :

$$G(i) = \{j : i \rightarrow j\}.$$

Существует естественное многозначное отображение  $h : M \rightarrow Ver$  из множества  $M$  на множество вершин символического образа, которое точке  $x$  сопоставляет набор вершин  $i$  таких, что  $x \in M(i)$ :

$$h(x) = \{i : x \in M(i)\}.$$

Из определения символического образа следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ Ver & \xrightarrow{G} & Ver \end{array} \quad (2.2)$$

в том смысле, что

$$h(f(x)) \subset G(h(x)). \quad (2.3)$$

Действительно, пусть  $i \in h(x)$  и  $j \in h(f(x))$ . Тогда  $M(j) \cap f(M(i)) \neq \emptyset$  и существует дуга  $i \rightarrow j$ , что означает  $j \in G(i)$  или  $h(f(x)) \in G(h(x))$ . Следовательно,

$$h(f(x)) \subset G(h(x)).$$

Мы не можем гарантировать равенство  $h(f(x)) = G(h(x))$ . Однако, включение (2.2) достаточно для того, чтобы отображение  $h$  трансформировало траектории системы (2.1) в допустимые пути символического образа. Теорема 2.1 описывает более общее свойство отслеживания псевдотраекторий на символическом образе.

**Определение 2.4.** Вершину символического образа назовем возвратной, если через нее проходит периодический путь. Множество возвратных вершин обозначается  $RV$ . Две возвратные вершины  $i$  и  $j$  называются эквивалентными, если существует периодический путь, проходящий через  $i$  и  $j$ .

Таким образом, множество возвратных вершин  $RV$  разбивается на классы эквивалентности  $\{H_{kl}\}$ . В теории графов классы эквива-

лентных возвратных вершин  $H_k$  называют компонентами сильной связности. Существуют алгоритмы построения компонентов сильной связности, основанные на обходе графа в глубину [18, 44, 74]. Наиболее популярным является алгоритм Р. Тарьяна [112, 113], который был удостоен за свои работы премии Тьюринга — высшей награды в области теоретической кибернетики.

## 2.4. ПРИМЕНЕНИЕ СИМВОЛИЧЕСКОГО ОБРАЗА

Символический образ применим к более широким классам динамических систем, чем представлено выше. В работе [49] описаны примеры применения символического образа к отображениям  $f$ , которые могут быть разрывными или не иметь обратного отображения. Конструкция символического образа применима к непрерывным динамическим системам или к системам дифференциальных уравнений.

Например, пусть  $\Phi(t, x_0)$  есть решение автономной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x) \quad (2.4)$$

с начальными  $x = x_0$  при  $t = 0$ . Тогда оператор сдвига на единицу времени вдоль траекторий динамической системы задает гомеоморфизм  $\Phi(1, x) = f(x)$ , который порождает дискретную систему (2.1). В этом случае динамика дискретной системы (2.1) однозначно определяет динамику системы дифференциальных уравнений.

Если правая часть системы

$$\dot{x} = F(t, x) \quad (2.5)$$

зависит периодически от  $t$  с периодом  $\omega$  и  $\Phi(t, x_0)$  есть решение системы с начальными  $x = x_0$  при  $t = 0$ , то оператор сдвига на период вдоль решения  $\Phi(\omega, x_0) = f(x)$  (отображение Пуанкаре) порождает дискретную динамическую систему, которая определяет динамику исходной системы.

Более детальную информацию о применении символического образа к различным видам систем, а также соответствующие примеры см. в статье [49].

## 2.5. ПАРАМЕТРЫ СИМВОЛИЧЕСКОГО ОБРАЗА

Пусть

$$\text{diam} M(i) = \max(\rho(x, y) : x, y \in M(i))$$

есть диаметр ячейки  $M(i)$  и  $d = \text{diam}(C)$  есть наибольший из диаметров ячеек. Число  $d$  назовем диаметром покрытия  $C$ . Пусть  $R_i$  есть объединение ячеек, покрывающих образ  $f(M(i))$ :

$$R_i = \left\{ \bigcup M(j) : f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset \right\}.$$

По определению,  $R_i$  содержит образ  $f(M(i))$  и лежит в замкнутой  $d$ -окрестности образа  $f(M(i))$ :

$$f(M(i)) \subset R_i \subset \{x : \rho(x, y) \leq d, y \in f(M(i))\}.$$

Пусть  $q$  есть наибольший диаметр образов ячеек

$$q = \max \{ \text{diam} f(M(i)) \}.$$

Поскольку для отображения  $f$  существует модуль непрерывности  $\theta(\rho)$ , имеет место оценка

$$q \leq \theta(d).$$

Определим число  $r$  следующим образом. По построению все ячейки замкнуты. Если ячейка и образ не пересекаются,  $M(k) \cap f(M(i)) = \emptyset$ , то расстояние между ними

$$r_{ik} = \rho(f(M(i)), M(k)) = \min \{ \rho(x, y) : x \in f(M(i)), y \in M(k) \}$$

положительно. Число пар  $(i, k)$  описанных выше конечно, поэтому величина

$$r = \min \{ r_{ik} : M(k) \cap f(M(i)) = \emptyset \}$$

является положительной. Таким образом,  $r$  есть наименьшее расстояние между образами  $f(M(i))$  и ячейками  $M(k)$ , которые не пересекаются. Величину  $r$  назовем нижней гранью символического образа. Ясно, что  $r$  зависит от покрытия  $C$ : 0 изменяя  $C$ , можно построить покрытие со сколь угодно малым  $r > 0$ .

**Утверждение 2.1.** Если точка  $x \in M(j)$  и  $\rho(x, f(M(i))) < r$ , то образ  $f(M(i))$  пересекает ячейку  $M(i)$ .

*Доказательство.* Это утверждение есть следствие определения нижней грани символического образа. Действительно,  $r$  есть наименьшее расстояние между образами  $f(M(i))$  и ячейками  $M(k)$ , ко-

торые не пересекаются. Поскольку расстояние  $\rho(x, f(M(i))) < r$  и точка  $x$  лежит в ячейке  $M(j)$ , расстояние  $\rho(M(j), f(M(i))) < r$ . Однако это возможно, только если образ  $f(M(i))$  и ячейка  $M(j)$  пересекаются. Утверждение доказано.

## 2.6. ОТСЛЕЖИВАНИЕ ПСЕВДОТРАЕКТОРИЙ

Существует естественная связь между допустимыми путями на символическом образе  $G$  и траекториями динамической системы. Следующая теорема описывает зависимость  $\varepsilon$ -траекторией и допустимых путей на  $G$ , а также их связь с параметрами символического образа.

**Теорема 2.1 о слабом отслеживании.** 1. Пусть последовательность  $\{z_k\}$  есть допустимый путь на символическом образе  $G$ , тогда существует последовательность точек  $\{x_k\}$ ,  $x_k \in M(z_k)$ , которая является  $\varepsilon$ -траекторией для любого  $\varepsilon > d$ .

В частности, если последовательность  $\{z_1, z_2, \dots, z_p = z_0\}$  является  $p$ -периодической, то  $\varepsilon$ -траектория  $\{x_1, x_2, \dots, x_p = x_0\}$  является  $p$ -периодической.

2. Пусть последовательность  $\{z_k\}$  есть допустимый путь на символическом образе  $G$  и  $x_k \in M(z_k)$ , то последовательность  $\{x_k\}$ , является  $\varepsilon$ -траекторией для любого  $\varepsilon > d + q$ .

В частности, если последовательность  $\{z_1, z_2, \dots, z_p = z_0\}$  является  $p$ -периодической, то  $\varepsilon$ -траектория  $\{x_k\}$  является  $p$ -периодической.

3. Пусть  $r$  есть нижняя грань символического образа. Если последовательность точек  $\{x_k\}$  является  $\varepsilon$ -траекторией,  $\varepsilon < r$  и  $x_k \in M(z_k)$ , то последовательность  $\{z_k\}$  является допустимым путем на символическом образе  $G$ .

В частности, если  $\varepsilon$ -траектория  $\{x_1, x_2, \dots, x_p = x_0\}$  является  $p$ -периодической, то  $\{z_1, z_2, \dots, z_p = z_0\}$  является  $p$ -периодическим путем на  $G$ .

### Доказательство

1. Пусть последовательность вершин  $\{z_k\}$  есть допустимый путь на символическом образе. Следовательно, существует дуга  $z_k \rightarrow z_{k+1}$  для каждого  $k$ , что означает  $f(M(z_k) \cap M(z_{k+1})) \neq \emptyset$ . Поэтому найдется точка  $x_k$  такая, что  $x_k \in M(z_k)$  и  $f(x_k) \in M(z_{k+1})$ . Можно сказать, что дуге  $z_k \rightarrow z_{k+1}$  соответствует отображение  $x_k \rightarrow f(x_k)$ . По построению точки  $f(x_k)$  и  $x_{k+1}$  лежат в ячейке  $M(z_{k+1})$ , что влечет неравенство

$$\rho(f(x_k), x_{k+1}) \leq \text{diam} M(z_{k+1}) \leq d < \varepsilon$$



для любого  $\varepsilon > d$ . Таким образом, построенная последовательность точек  $\{x_k\}$ ,  $x_k \in M(z_k)$  является  $\varepsilon$ -траекторией для любого  $\varepsilon > d$ . Точка  $x_k$  задается неоднозначно, она определяется включением

$$x_k \in M(z_k) \cap f^{-1}(M(z_{k+1})) \neq \emptyset. \quad (2.6)$$

Если последовательность  $\{z_k\}$  является периодической, то  $x_k$  достаточно выбирать синхронно из периодически повторяющегося включения (2.6), чтобы получить периодическую последовательность  $\{x_k\}$ .

2. Пусть  $\{z_k\}$  является допустимым путем на  $G$  и  $x_k \in M(z_k)$ . Тогда существует направленная дуга  $z_k \rightarrow z_{k+1}$  для каждого  $k$ . Это означает, что образ  $f(M(z_k))$  пересекает ячейку  $M(z_{k+1})$ :

$$f(M(z_k)) \cap M(z_{k+1}) \neq \emptyset.$$

Поскольку  $x_{k+1} \in M(z_{k+1})$ , следовательно,

$$\rho(f(x_k), x_{k+1}) \leq \text{diam } f(M(z_k)) + \text{diam } M(z_{k+1}) \leq q + d.$$

Поэтому последовательность  $\{x_k\}$  является  $\varepsilon$ -траекторией отображения  $f$  для любых  $\varepsilon > d + q$ . Если последовательность  $\{z_k\}$  является периодической, то  $x_k$  достаточно выбирать синхронно из периодически повторяющегося включения  $x_k \in M(z_k)$ , чтобы получить периодическую последовательность  $\{x_k\}$ .

3. Пусть  $r > 0$  — нижняя грань символического образа, и последовательность точек  $\{x_k\}$  является  $\varepsilon$ -траекторией отображения  $f$ ,  $0 < \varepsilon < r$  и  $x_k \in M(z_k)$ . Тогда

$$\rho(f(x_k), x_{k+1}) < \varepsilon < r \text{ и } x_{k+1} \in M(z_{k+1}).$$

Следовательно,  $\rho(f(x_k), M(z_{k+1})) < r$ , что гарантирует пересечение  $f(M(z_k)) \cap M(z_{k+1}) \neq \emptyset$  согласно утверждению 2.1. Это означает наличие дуги  $z_k \rightarrow z_{k+1}$  для каждого  $k$ , т.е. последовательность вершин  $\{z_k\}$  является допустимым путем на символическом образе. Если последовательность точек  $\{x_k\}$  является периодической, то неравенства  $\rho(f(x_k), x_{k+1}) < \varepsilon < r$  и включения  $x_{k+1} \in M(z_{k+1})$  повторяются периодически, что гарантирует периодичность последовательности  $\{z_k\}$ .

Доказательство завершено.

**Следствие 2.1.** Если символический образ  $G$  численно построен, как описано в параграфе 2.2, то любой допустимый путь  $\{i_n, n \in \mathbb{Z}\}$

символического образа порождает псевдотраекторию  $\{x_n = x_{i_n}, f(x_{i_n}) \in M(i_n), n \in \mathbb{Z}\}$ , для которой расстояние

$$\rho(f(x_n), x_{n+1}) \leq d,$$

следовательно, реализуется п. 1 теоремы.

**Следствие 2.2.** Допустимый путь символического образа есть след некоторой псевдотраектории и наоборот. Таким образом, пути символического образа можно рассматривать как кодировку псевдотраекторий.

**Следствие 2.3.** Символический образ является компьютерно-ориентированной моделью динамической системы (2.1). Точность этой модели определяется диаметром покрытия  $d$ .

## 2.7. МАТРИЦА ДОПУСТИМЫХ ПЕРЕХОДОВ

Ориентированный граф  $G$  однозначно определяется матрицей инцидентности, смежности или матрицей допустимых переходов  $\Pi = (\pi_{ij})$ . Эта матрица имеет размеры  $n \times n$ , где  $n$  — число вершин графа;  $\pi_{ij} = 1$  тогда и только тогда, когда существует ориентированная дуга  $i \rightarrow j$ , иначе  $\pi_{ij} = 0$ .

Таким образом, каждой вершине  $i$  или ячейке  $M(i)$  соответствует  $i$ -ая строка в матрице  $\Pi$ , на  $j$ -ом месте этой строки стоит 1 или 0 в зависимости от существования или отсутствия (непустого) пересечения образа  $f(M(i))$  и ячейки  $M(j)$ :

$$\pi_{ij} = 1, f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset;$$

$$\pi_{ij} = 0, f(M(i)) \cap M(j) = \emptyset.$$

Символический образ можно определить как матрицу допустимых переходов и вообще не использовать ориентированный граф  $G$ . Однако символический образ как ориентированный граф представляется более удобным геометрическим объектом для использования. Впрочем, некоторые свойства символического образа удобно выражать в терминах матрицы  $\Pi$ . Например, рассмотрим квадрат матрицы переходов

$$\Pi^2 = \left( \pi_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n \pi_{ik} \pi_{kj} \right),$$

где верхний символ 2 в  $\pi_{ij}^2$  нужно воспринимать как индекс, а не степень. Ясно, что произведение  $\pi_{ik} \pi_{kj} = 1$  тогда и только тогда, когда

$\pi_{ik} = 1$  и  $\pi_{kj} = 1$ , иначе  $\pi_{ik}\pi_{kj} = 0$ . Если  $\pi_{ik}\pi_{kj} = 1$ , то существует путь  $i \rightarrow k \rightarrow j$  от  $i$  до  $j$  через  $k$ . Тогда сумма  $\pi_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n \pi_{ik}\pi_{kj}$  есть число путей длины 2 из  $i$  в  $j$ .

Аналогично можно показать, что элемент  $\pi_{ij}^p$  степени матрицы  $\Pi^p$  есть число путей длины  $p$  из  $i$  в  $j$ . В частности, след матрицы  $\Pi^p$

$$\text{tr} \Pi^p = \sum_{i=1}^n \pi_{ii}^p$$

есть число всех  $p$ -периодических путей на символическом образе.

С теоретической точки зрения матрица допустимых переходов — это удобный инструмент исследования символического образа. Однако, как указано выше, для того чтобы символический образ хорошо моделировал динамику системы, нужно использовать довольно мелкое покрытие. Это приводит к огромному числу ячеек  $n$ , а матрица допустимых переходов имеет размеры  $n^2$ . Следует ориентироваться на  $n = 100\,000$  или  $1\,000\,000$  и даже более. При этом число  $k$  непустых пересечений  $f(M(i)) \cap M(j)$  обычно оказывается, меньше 10. Так, в примере, рассмотренном выше,  $n = 100$ ,  $k = 5$ . Следовательно, в  $i$ -ой строке будет стоять 95 нулей и пять единиц.

В практических расчетах большие графы записывают в компьютерах более компактным образом (см. главу 12).

Матрица допустимых переходов зависит от нумерации вершин или ячеек покрытия. Изменение нумерации порождает изменение вида матрицы  $\Pi$ . Существует нумерация, которая отражает динамику системы и приводит матрицу переходов в некоторый канонический вид. Введем отношение квазипорядка между вершинами на символическом образе. Будем писать  $i \mapsto j$  тогда и только тогда, когда существует допустимый путь вида

$$i = i_0, i_1, i_2, \dots, i_m = j.$$

Следовательно, вершина  $i$  будет возвратной тогда и только тогда, когда  $i \mapsto i$ , и пара возвратных вершин  $i, j$  будет эквивалентной тогда и только тогда, когда  $i \mapsto j \mapsto i$ .

**Утверждение 2.2 о каноническом виде матрицы переходов.** Вершины символического образа могут быть перенумерованы таким образом, что:

- эквивалентные возвратные вершины окажутся занумерованными подряд идущими целыми числами,

- новые номера вершин  $i, j$  выбраны таким образом, что  $i < j$ , если существует путь  $i \mapsto j$ , но нет пути  $j \mapsto i$ .

Другими словами, матрица переходов при такой нумерации имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & \ddots & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & P_k & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & P_5 \end{pmatrix},$$

где каждый диагональный блок  $P_k$  либо отвечает одному из классов эквивалентности возвратных вершин  $H_k$ , либо соответствует некоторой невозвратной вершине и состоит из одного нуля. Под диагональными блоками стоят только нули. Такой вид матрицы переходов можно назвать верхним треугольным видом. Доказательство этого утверждения есть в работе [2, с. 69].

В теории графов описанная перенумерация вершин имеет название *топологической сортировки графа*. В главе 12 описана технология топологической сортировки. Здесь следует отметить, что в теории графов часто топологическую сортировку применяют к графам без циклов (ациклический граф). Символический образ всегда имеет циклы, поэтому здесь мы рассматриваем топологическую сортировку для произвольного ориентированного графа.

## 2.8. ПРОЦЕСС ПОДРАЗБИЕНИЯ

Мы будем применять процесс подразбления покрытий и строить последовательность символических образов. Рассмотрим главный шаг процесса подразбления.

Пусть  $C = \{M(i)\}$  — покрытие,  $G$  — символический образ для  $C$ . Предположим, что новое покрытие  $NC$  является подразблением покрытия  $C$ . Это означает, что каждая ячейка  $M(i)$  подразбляется на ячейки  $m(i, k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , т.е.

$$\bigcup_k m(i, k) = M(i).$$

Обозначим  $NG$  символический образ для покрытия  $NC = \{m(i, k)\}$ . Вершины  $NG$  обозначаются как  $(ik)$ . Такое построение генерирует

отображение  $s$  из  $NG$  на  $G$ , которое переводит вершины  $(i, k)$  на вершину  $i$ . Поскольку пересечения образа  $f(m(i, k))$  и  $m(j, l)$  —

$$f(m(i, k)) \cap m(j, l) \neq \emptyset,$$

Следовательно, для малых ячеек гарантирует аналогичное пересечение для больших ячеек  $f(M(i))$  и  $M(j)$  —

$$f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset.$$

Это означает, что отображение  $s$  преобразует дугу  $(i, k) \rightarrow (j, l)$  в дугу  $i \rightarrow j$ . Следовательно,  $s$  отображает ориентированный граф  $NG$  на ориентированный граф  $G$ . Отображение  $s$  является отображением ориентированных графов, поэтому каждый допустимый путь на  $NG$  преобразуется отображением  $s$  на некий допустимый путь на  $G$ . В частности, образ периодического пути есть периодический путь, а образ возвратной вершины есть возвратная вершина. Более того, образ класса  $NH$  эквивалентных возвратных вершин (на  $NG$ ) лежит в классе  $H$  эквивалентных возвратных вершин на  $G$ .

## 2.9. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ СИМВОЛИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ

Пусть  $C = \{M(i)\}$  — покрытие и  $G$  — символический образ для  $C$ . Новое покрытие  $NC$  является подразбиением покрытия  $C$  и  $NG$  есть символический образ для  $NC$ . Многие свойства последовательности символических образов удобно выражать в виде диаграмм. Обозначим  $V$  и  $NV$  вершины графов  $G$  и  $NG$ . Граф  $G$  можно рассматривать как многозначное отображение из  $V$  на  $V$  так, что

$$G(i) = \{j : \text{существует } i \rightarrow j \Leftrightarrow f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset\}.$$

Аналогично, граф  $NG$  есть многозначное отображение

$$NG : NV \rightarrow NV$$

на вершинах  $NG$ . Таким образом, мы получили коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} NV & \xrightarrow{NG} & NV \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ V & \xrightarrow{G} & V, \end{array} \quad (2.7)$$

где коммутативность имеет тот же смысл как ранее, т.е.

$$s(NG(i, k)) \subset G(s(i, k)). \quad (2.8)$$

Пусть  $\{C_t, t \in \mathbb{N}\}$  есть последовательность покрытий многообразия  $M$  ячейками, которые получены последовательными подразбиениями. Обозначим  $M(z')$  ячейки покрытия  $C_t$ , где  $z'$  являются индексом ячейки, и пусть  $d_t$  — максимальный диаметр ячеек покрытия  $C_t$ .

Рассмотрим  $\{G_t\}$  последовательность символических образов отображения  $f: M \rightarrow M$ , относительно покрытий  $C_t$ . Мы получили две последовательности многозначных отображений  $\{s_t\}$  и  $\{G_t\}$ , для которых диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} & s_1 & & s_2 & & s_3 & \\ & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow & \dots \\ V_1 & & V_2 & & V_3 & & \\ G_1 \downarrow & & G_2 \downarrow & & G_3 \downarrow & & \\ & s_1 & & s_2 & & s_3 & \dots \\ V_1 & \leftarrow & V_2 & \leftarrow & V_3 & \leftarrow & \end{array} \quad (2.9)$$

коммутативна.

Рассмотрим предельный случай, когда ячейка состоит из одной точки, т.е.  $M(x) = \{x\}$ . В этом случае множество вершин состоит из множества точек  $M$ , наделенных дискретной топологией. Множество дуг есть набор пар вида  $(x, f(x))$ . Таким образом, мы можем считать, что такой символический образ совпадает с исходным отображением  $f: M \rightarrow M$ .

Пусть  $G$  — символический образ для покрытия  $C = \{M(i)\}$  и  $V$  — множество вершин. Отображение  $h: M \rightarrow V$  сопоставляет точке  $x$  все вершины  $i$  такие, что  $x \in M(i)$ . При этом следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc} V & h & M \\ G \downarrow & & f \downarrow \\ V & h & M, \end{array} \quad (2.10)$$

т.е.  $h(f(x)) \subset G(h(x))$ . Учитывая это, мы можем дополнить диаграмму (2.9) до вида

$$\begin{array}{ccccccccc} & s_1 & & s_2 & & s_3 & & h & \\ & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow \dots & & \leftarrow & M \\ V_1 & & V_2 & & V_3 & & & & \\ G_1 \downarrow & & G_2 \downarrow & & G_3 \downarrow & & & & f \downarrow \\ & s_1 & & s_2 & & s_3 & & h & \\ V_1 & \leftarrow & V_2 & \leftarrow & V_3 & \leftarrow \dots & \leftarrow & M. \end{array} \quad (2.11)$$

Каждое  $s_t$  является отображением ориентированных графов, и оно отображает допустимый путь на допустимый путь. Пусть  $\chi^t = \{z^t(k), k \in \mathbb{Z}\}$  есть путь на символическом образе  $G_t$ . Обозначим  $P_t$  пространство путей на  $G_t$ . Отображение  $s_t : G_{t+1} \rightarrow G_t$  генерирует отображение пространства путей,

$$S_t(P_{t+1}) \subset P_t,$$

однако  $s_t(P_{t+1}) \neq P_t$ , вообще говоря. В дальнейшем мы будем опускать индекс  $t$  отображения  $s$ , если это не приводит к недоразумениям.

### *Контрольные вопросы и задания*

1. В параграфе 2.2 описан способ вычисления символического образа. Для этого нужно вычислить координаты  $(X, Y)$  образа скан-точки и определить номер ячейки, где этот образ лежит. Как определить номер ячейки по координатам  $(X, Y)$ ? Используйте рис. 2.1.
2. Для гладкого отображения оцените модуль непрерывности.
3. В теореме 2.1 в п. 1 и 2 строятся псевдотраектории. Чем они отличаются?
4. Чем отличаются псевдотраектория следствия 2.1 от псевдотраекторий предыдущего вопроса?
5. Определите порядок роста числа ячеек в процессе подразбиения.
6. Определите порядок роста числа элементов матрицы переходов в процессе подразбиения.
7. Опишите способ хранения графа в памяти компьютера.
8. Напишите компьютерную программу построения символического образа для отображения Хенона:  $(x, y) \rightarrow (1 + y - 1,4x^2, 0,3x)$  в области  $[-1,5, 1,5] \times [-1, 1]$ .

## Глава 3

# ОТСЛЕЖИВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ

### 3.1. СОГЛАСОВАННЫЕ ПУТИ

Пусть  $\{C_t, t \in \mathbb{N}\}$  есть последовательность замкнутых покрытий, каждое из которых получено подразбиением предыдущего покрытия и  $\{G_t\}$  есть соответствующая последовательность символических образов. Если фиксировать путь  $\omega^t$  на каждом символическом образе  $G_t$ , то мы получаем последовательность путей  $\{\omega^t \in P_t\}$ , где  $P_t$  — множество допустимых путей на  $G_t$ . Пути  $\omega^t$  для разных  $t$  никак не связаны между собой. Отображение  $h(x)$  сопоставляет точке  $x$  номер ячейки, в которой она лежит. Это отображение, вообще говоря, является многозначным. Траектория  $T(x_0) = \{x_k = f^k(x_0), k \in \mathbb{Z}\}$  генерирует на каждом  $G_t$  допустимый путь

$$\omega^t = h(T(x_0)) = \{z^t(k) : x_k \in M(z^t(k))\},$$

где  $z^t(k) \in h(x_k)$ . Описанный путь  $\omega^t$  является кодировкой траектории  $T(x_0)$  относительно покрытия  $C_t$ . Из диаграммы (2.11) следует, что пути  $\omega^t$  можно выбрать согласованными между собой посредством отображений  $s$ :

$$\omega^t = s(\omega^{t+1}).$$

Это наблюдение приводит к следующему определению.

**Определение 3.1.** Пусть  $\{C_t\}$  есть последовательность замкнутых покрытий, каждое из которых получено подразбиением предыдущего покрытия. Последовательность допустимых путей  $\{\omega^t \in P_t\}$  называется согласованной, если для каждого  $t$  выполнено равенство

$$\omega^t = s(\omega^{t+1}). \quad (3.1)$$

В дальнейшем нам понадобится понятие рекуррентной траектории. Рекуррентная траектория определяется различными авторами по-разному. Так, определение 3.3.2 рекуррентной траектории в работе [70] совпадает с определением траектории устойчивой по Пуассону в книге [23, с. 363]. В статье [4] рассмотрены тонкие взаимодействия описанных понятий. Здесь мы будем использовать определение рекуррентной траектории по Биркгофу.



**Определение 3.2.** Траектория  $K$  называется рекуррентной, если для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется такое целое  $p > 0$ , что  $\varepsilon$  — окрестность любого отрезка этой траектории длины  $p$  содержит всю траекторию  $K$ .

Инвариантное замкнутое множество является минимальным, если оно не содержит истинного подмножества, которое является замкнутым и инвариантным.

**Теорема 3.1 о сильном отслеживании.** Пусть  $\{C_i\}$  есть последовательность замкнутых покрытий, каждое из которых получено подразбиением предыдущего покрытия. Их диаметры  $d_i$  сходятся к нулю, на каждом  $G_i$  задан путь  $\omega^i = \{i_k^i, k \in \mathbb{Z}\}$  и последовательность путей  $\omega^i$  согласована. Тогда верны следующие утверждения.

1. Существует единственная траектория  $T = \{x_k : f(x_k) = x_{k+1}\}$ , для которой  $x_k \in M(i_k^i)$  для любого  $i$ .

2. Пусть псевдотраектории  $T_i = \{\{x_k^i \in M(i_k^i), k \in \mathbb{Z}\}, i \in \mathbb{N}\}$ , тогда для каждого  $k$  существует предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_k^i = x_k$$

и псевдотраектории  $T_i$  сходятся к траектории  $T$  равномерно.

3. Объединения ячеек путей  $\omega^i$

$$Q_i = \left\{ \bigcup_k M(i_k^i) : \{i_k^i\} = \omega^i \right\}$$

имеют следующие свойства:

3.1) последовательность  $Q_i$  является убывающей:

$$Q_i \supset Q_{i+1},$$

3.2) предел компактов  $Q_i$  есть замыкание траектории  $T$ :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i = \bigcap_i Q_i = \bar{T}.$$

4. Если каждый путь  $\omega^i$  является периодическим, то отслеженная траектория  $T$  является рекуррентной и предел  $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i$  есть минимальное множество.

*Доказательство*

1. Пусть  $\omega^i = \{i_k^i, k \in \mathbb{Z}\}$ . Фиксируем  $k$  и рассмотрим последовательность ячеек  $\{M(i_k^i), i = 1, 2, \dots\}$ . Поскольку  $s(i_k^{i+1}) = i_k^i$ , следова-

тельно, ячейка  $M(i_k^{t+1})$  входит в подразбиение ячейки  $M(i_k^t)$ . Тогда имеют место включения

$$M(i_k^1) \supset M(i_k^2) \supset \dots \supset M(i_k^t) \supset M(i_k^{t+1}) \supset \dots. \quad (3.2)$$

Ячейки замкнуты и их диаметры стремятся к нулю вместе с  $d_t$ , поэтому существует единственная точка

$$x_k = \lim_{t \rightarrow \infty} M(i_k^t) = \bigcap_t M(i_k^t).$$

Поскольку путь  $\omega^t = \{i_k^t, k \in \mathbb{Z}\}$  является допустимым, следовательно,

$$f(M(i_k^t)) \cap M(i_{k+1}^t) \neq \emptyset$$

для любого  $t$ . Из (3.2) и  $d_t \rightarrow 0$  следует, что замкнутые множества  $\{f(M(i_k^t)), t = 1, 2, \dots\}$  вложены друг в друга и их диаметры  $q_t$  сходятся к нулю. Тогда существует единственная точка

$$x_{k+1}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} f(M(i_k^t)).$$

Аналогично последовательность замкнутых множеств

$$\{f(M(i_k^t)) \cap M(i_{k+1}^t), t = 1, 2, \dots\}$$

имеет предельную точку

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(M(i_k^t)) \cap M(i_{k+1}^t) = x_{k+1}^{**}.$$

Поскольку

$$x_{k+1}^{**} \in f(M(i_k^t)) \cap M(i_{k+1}^t) \subset M(i_{k+1}^t)$$

для любого  $t$ , следовательно,  $x_{k+1}^{**}$  лежит в  $M(i_{k+1}^t)$  и, значит, она лежит в

$$\bigcap_t M(i_{k+1}^t) = x_{k+1}.$$

Поэтому  $x_{k+1}^{**} = x_{k+1}$ . Поскольку

$$x_{k+1}^{**} \in f\left(M(i_k^t)\right) \cap M(i_{k+1}^t) \subset f\left(M(i_k^t)\right)$$

для любого  $t$ , следовательно,  $x_{k+1}^{**}$  лежит в  $f(M(i_k^t))$  и, значит, она лежит в

$$\bigcap_t f\left(M(i_k^t)\right) = x_{k+1}^*,$$

т.е.  $x_{k+1}^{**} = x_{k+1}^*$ . Поскольку  $f(x_k) \in f(M(i_k^t))$  для любого  $t$ , следовательно,  $f(x_k)$  лежит в

$$f\left(M(i_k^t)\right) = x_{k+1}^*,$$

т.е.  $f(x_k) = x_{k+1}$ . Первое утверждение доказано.

2. В доказательстве предыдущего утверждения построены точки

$$x_k = \lim_{t \rightarrow \infty} M(i_k^t) = \bigcap_t M(i_k^t)$$

и показано, что  $f(x_k) = x_{k+1}$ . Пусть точки  $x_k^t$  лежат в ячейках  $M(i_k^t)$ . Фиксируем  $k$  и покажем, что каждая последовательность  $\{x_k^t : t \in \mathbb{N}\}$  сходится к  $x_k$ . По предположению,  $x_k^t \in M(i_k^t)$  и по предыдущему построению,  $x_k \in M(i_k^t)$ , следовательно, расстояние

$$\rho(x_k, x_k^t) \leq \text{diam } M(i_k^t) \leq d_t \rightarrow 0$$

и предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_k^t = x_k$ . Поскольку расстояние  $\rho(x_k, x_k^t) \leq d_t$  оценивается равномерно по  $k$ , псевдотраектории  $T_t = \{x_{kt}^t, k \in \mathbb{Z}\}$  сходятся равномерно к траектории  $T$ . Второе утверждение доказано.

3. Каждое покрытие  $C_t$  состоит из конечного числа ячеек. Множество

$$Q_t = \left\{ \bigcup_k M(i_k^t) : \{i_k^t\} = \omega^t \right\}$$

есть объединение конечного числа замкнутых ячеек, и, следовательно, является компактом. Для согласованной последовательности путей  $\omega^t$  имеет место равенство  $s(i_k^{t+1}) = i_k^t$ , что дает включение

$M(i_k^{t+1}) \subset M(i_k^t)$ . Отсюда следует монотонное убывание последовательности  $Q_t$ . Каждый компакт  $Q_t$  содержит траекторию  $T$  и ее замыкание  $\bar{T}$ . Тогда пересечение  $\bigcap_t Q_t$  также содержит замыкание  $\bar{T}$ .

Покажем обратное включение  $\bigcap_t Q_t \subset \bar{T}$ . Пусть  $x \in \bigcap_t Q_t$ , тогда

$x \in \left\{ \bigcup_k M(i_k^t) : \{i_k^t\} = \omega^t \right\}$  для любого  $t$ , следовательно,  $x$  лежит в неко-

торой ячейке  $M(i_k^t)$ . В п. 1 показано, что каждая ячейка  $M(i_k^t)$  содержит точку траектории  $T$ . Обозначим эту точку  $y_t$ . Тогда расстояние  $\rho(x, y_t) \leq d_t \rightarrow 0$ . Таким образом, мы определили последовательность точек  $y_t$  на траектории  $T$ , которая сходится к  $x$ . Третье утверждение доказано.

4. Пусть каждый путь  $\omega^t = \{i_k^t, k \in \mathbb{Z}\}$  является периодическим с периодом  $p_t$ , т.е.  $i_{k+p_t}^t = i_k^t$  для любого  $k \in \mathbb{Z}$ . Рассмотрим путь  $\omega^1$  на символическом образе  $G_1$ . Согласно доказательству первого утверждения теоремы построенная траектория  $T = \{x_k : f(x_k) = x_k\}$  лежит в объединении ячеек

$$U_1 = \left\{ \bigcup_k M(i_k^1) : i_k^1 \in \omega^1 \right\}.$$

По условию,  $\omega^1$  — периодический путь периода  $p_1$ , тогда  $U_1$  есть объединение конечного числа ячеек  $M(i_k^1)$ ,  $k = 1, 2, \dots, p_1$ . Пусть  $d_1$  — диаметр покрытия  $C_1$ , тогда шар  $B_k^1$  радиуса  $d_1$  с центром в точке  $x_k \in M(i_k^1)$  содержит ячейку  $M(i_k^1)$ . Следовательно, объединение шаров

$$\bigcup_k B_k^1, \quad k = 1, 2, \dots, p_1$$

содержит траекторию  $T$ . Таким образом,  $d_1$ -окрестность любого отрезка траектории  $T$  длины  $p_1$  содержит всю траекторию  $T$ .

Пусть  $d_m$  — диаметр покрытия  $C_m$ ,  $\omega^m$  — путь на символическом образе  $G_m$  периода  $p_m$ . Повторяя аналогичное рассуждение для покрытия  $C_m$ , можно показать, что объединение шаров  $B_k^m$  радиуса  $d_m$  с центром в точках  $x_k \in M(i_k^m)$ ,  $k = 1, 2, \dots, p_m$ , содержит траекторию  $T$ . Таким образом,  $d_m$ -окрестность любого отрезка траектории  $T$  длины  $p_m$  содержит всю траекторию  $T$ .

Покажем, что траектория  $T$  является рекуррентной. Фиксируем  $\varepsilon > 0$ , найдем  $d_m < \varepsilon$  и период  $p_m$  такой, что  $d_m$  — окрестность любого отрезка траектории  $T$  длины  $p_m$  — содержит всю траекторию  $T$ , сле-

довательно,  $T$  — рекуррентная траектория. Из утверждения п. 3 следует, что предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n$  есть замыкание траектории  $T$ . Теорема Биркгофа (см. [23, с. 404]) утверждает, что замыкание рекуррентной траектории есть компактное минимальное множество. Теорема доказана.

*Замечание.* Согласно доказанной теореме, для последовательности путей  $\omega^t$ , описанной в условии теоремы, существует единственная траектория  $T$ . Обратное утверждение неверно, т.е. существует траектория, которая генерирует более чем одну последовательность  $\omega^t$  описанного вида. Например, траектория  $T$ , проходящая через граничную точку ячеек, генерирует более чем одну последовательность допустимых кодировок.

### 3.2. ТИХОНОВСКАЯ ТОПОЛОГИЯ

Рассмотрим ориентированный граф  $G$  с вершинами  $V = \{i, j, \dots\}$ . Пусть  $\omega = (i_k, k \in \mathbb{Z})$  — путь на  $G$ ,  $P = \{\omega\}$  — пространство путей, наделенное тихоновской топологией. Расстояние в  $P$  можно ввести, например, так:

$$\rho(\omega_1, \omega_2) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \lambda^{|r|} \delta(i_r, j_r),$$

где  $\omega_1 = (i_k, k \in \mathbb{Z})$ ,  $\omega_2 = (j_k, k \in \mathbb{Z})$ ;  $\delta(i, j) = 1$  при  $i \neq j$ , иначе  $\delta(i, j) = 0$ ;  $0 < \lambda < 1$ . В этой топологии пространство  $P$  компактно [15]. Данную топологию можно ввести посредством другого расстояния, полагая

$$\rho(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 2^{-k} & \text{где } k = \max\{m : i_r = j_r \text{ для } |r| \leq m\} \\ 0 & \text{при } \omega_1 = \omega_2. \end{cases}$$

Это означает, что последовательности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  совпадают на отрезке номеров  $|r| \leq m$ , но  $i_{m+1} \neq j_{m+1}$  или  $i_{-(m+1)} \neq j_{-(m+1)}$ . Топологические свойства пространства последовательностей описаны в работе [75, с. 172–181].

Пусть  $\{C_t, t \in \mathbb{N}\}$  есть последовательность покрытий многообразия  $M$  ячейками, которые получены последовательными подразбиениями, их диаметры  $d_t$  сходятся к нулю. Пусть  $\{G_t, t \in \mathbb{N}\}$  есть соответствующая последовательность символических образов. Обозначим  $P_t$  пространство путей на  $G_t$ , наделенное тихоновской топологией. Отображение ориентированных графов  $s: G_{t+1} \rightarrow G_t$  генерирует проекцию в пространстве путей,

$$s: P_{t+1} \rightarrow P_t.$$

Такое отображение является непрерывным в тихоновской топологии, и образ  $s(P_{t+1})$  является компактом в  $P_t$ . Рассмотрим два подразделения  $C_{t+m}$ ,  $m > 0$ . Согласно построению  $C_{t+m}$  является подразбиением покрытия  $C_t$ . Тогда возникают отображение ориентированных графов  $s: G_{t+m} \rightarrow G_t$  и отображение пространств путей  $s: P_{t+m} \rightarrow P_t$ . Пусть на каждом символическом образе  $G_t$  задан путь  $\omega_t$ . Тогда на каждом  $G_t$  возникает последовательность путей  $\omega_t^m = s(\omega_{t+m})$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , т.е.  $\omega_t^m$  есть проекция пути  $\omega_{t+m}$  посредством отображения  $s: P_{t+1} \rightarrow P_t$ .

**Определение 3.3.** Будем говорить, что последовательность  $\omega_t$  слабо сходится, если сходятся последовательности  $\omega_t^m$  в тихоновской топологии при  $m \rightarrow \infty$  для каждого фиксированного  $t$ .

**Теорема 3.2.** Пусть  $\{C_t, t \in \mathbb{N}\}$  есть последовательность покрытий многообразия  $M$  ячейками, которые получены последовательными подразделениями, их диаметры  $d_t$  сходятся к нулю и на каждом  $G_t$  задан путь  $\omega_t = \{i_k^t, k \in \mathbb{Z}\}$ . Если последовательность  $\omega_t$  слабо сходится и  $x_k^t \in M(i_k^t)$ , то существует предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_k^t = x_k$  и последовательность  $\{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$  является траекторией отображения  $f$ .

*Доказательство.* Пространство  $P_t$  является компактом в тихоновской топологии. Каждый путь  $\omega_t^m \subset P_t$  есть проекция пути  $\omega_{t+m}$  под действием отображения  $s: P_{t+m} \rightarrow P_t$ . По предположению теоремы, последовательность  $\{\omega_t^m, m \in \mathbb{N}\}$  сходится при  $m \rightarrow \infty$ . Обозначим

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_t^m = \omega_t^*.$$

Покажем, что имеем равенство

$$s(\omega_{t+1}^*) = \omega_t^*.$$

Действительно,  $\omega_t^m = s(\omega_{t+m})$  и  $\omega_{t+1}^m = s(\omega_{t+1+m})$ . Из непрерывности отображения  $s$  (в тихоновской топологии) следуют равенства

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_t^m = \lim_{m \rightarrow \infty} s(\omega_{t+m}) = \lim_{r \rightarrow \infty} s(\omega_{t+1+r}) = \lim_{r \rightarrow \infty} s(\omega_{t+1}^r) = s\left(\lim_{r \rightarrow \infty} \omega_{t+1}^r\right).$$

Отсюда получаем искомое равенство, т.е. последовательность  $\omega_t^*$  является согласованной. Пусть последовательность  $\omega_t^*$  имеет вид

$\{i_k^{*t}, k \in \mathbb{Z}\}$  и точка  $x_k^{*t}$  лежит в ячейке  $M(i_k^{*t})$ . Согласно утверждению 2 теоремы 3.1, для каждого  $k$  существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_k^{*t} = x_k$$

и полученная последовательность  $\{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$  является траекторией  $T = \{x_k : f(x_k) = x_{k+1}\}$ . Покажем, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_k^t = x_k$ . По условию теоремы каждая точка  $x_k^t$  лежит в ячейке  $M(i_k^t)$ , где  $\omega_t = \{i_k^t, k \in \mathbb{Z}\}$ . Фиксируем  $k$  и  $\varepsilon > 0$ . Для данного  $\varepsilon$  найдем  $\tau$ , для которого диаметр разбиения  $d_\tau < \varepsilon$ . Для данного  $\tau$  найдем номер  $m(l)$  такой, что последовательности  $\omega_t^*$  и  $\omega_t^m$  были так близки в тихоновской топологии, что их элементы с индексами  $k, |k| \leq l$  совпадали:

$$i_k^{*\tau} = s(i_k^{\tau+m}), |k| < l$$

для всех  $m > m(l)$ . Из равенства

$$s(\omega_{t+1}^*) = \omega_t^*$$

следует, что

$$s(\omega_{t+m}^*) = \omega_t^*.$$

Тогда проекции индексов ячеек удовлетворяют равенствам

$$s(i_k^{*\tau+m}) = i_k^{*\tau} = s(i_k^{\tau+m}),$$

где  $s$  — отображение ориентированного графа  $G_{\tau+m}$  на  $G_\tau$ . Это означает, что точки  $x_k^{*\tau+m}$  и  $x_k^{\tau+m}$  лежат в одной ячейке  $M(i_k^{*\tau})$  с диаметром меньшим, чем  $\varepsilon$ .

Тогда для  $t > \tau + m$

$$\rho(x_k^t, x_k^{*t}) < \varepsilon, |k| < l.$$

Поскольку  $\varepsilon$  является любым положительным числом, из равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_k^{*t} = x_k$$

следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_k^t = x_k,$$

и теорема доказана.

**Пространство последовательностей.** Пусть  $\Lambda$  есть множество последовательностей бесконечных в обе стороны  $\xi = \{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$  точек многообразия  $M$ . При этом будем считать, что  $x_k$  есть  $k$ -ая координата последовательности  $\xi$ . Введем расстояние  $r$  на  $\Lambda$  следующим образом.

Пусть  $\xi_1 = \{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\xi_2 = \{y_k, k \in \mathbb{Z}\}$  и  $\rho(x, y)$  — расстояние на  $M$ . Положим

$$r(\xi_1, \xi_2) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x_k, y_k)}{2^{|k|}}.$$

Расстояние  $r$  является аналогом расстояния между путями на графе, порождающего тихоновскую топологию в пространстве путей. Так, определенную топологию в пространстве последовательностей  $\Lambda$  будем называть тихоновской.

*Замечание о сходимости.* В доказательстве утверждения 2 теоремы 3.2 последовательность  $\{x_k^t\}$  сходится к последовательности  $\{x_k\}$  равномерно по  $k$ , так как  $\rho(x_k^t, x_k) \leq d_t$ . В доказательстве теоремы 3.2 последовательность  $\{x_k^t\}$  сходится к последовательности  $\{x_k\}$  в тихоновской топологии пространства последовательностей  $\Lambda$ , так как пути  $\omega_t^*$  и  $\omega_t^m$  были близки в тихоновской топологии.

Из определения расстояния  $r$ , следует неравенство

$$\rho(x_k, y_k) < 2^{|k|} r(\xi_1, \xi_2).$$

Следовательно, если  $\xi_1$  сходится к  $\xi_2$  в тихоновской топологии пространства  $\Lambda$ , то  $x_k$  сходится к  $y_k$  на многообразии  $M$ , т.е. последовательность  $\xi_1$  сходится к  $\xi_2$  покоординатно.

**Утверждение 3.1.** Для компактного многообразия  $M$  из покоординатной сходимости последовательностей следует сходимость в тихоновской топологии.

*Доказательство.* Рассмотрим последовательности  $\xi_t = \{x_k^t, k \in \mathbb{Z}\}$  и  $\xi = \{y_k, k \in \mathbb{Z}\}$ . Пусть  $\rho(x_k, y_k) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  для каждого  $k \in \mathbb{Z}$ . Диаметр компактного многообразия  $d^* = \max\{\rho(x, y); x, y \in M\}$  есть конечное число. Тогда  $\rho(x_k^t, y_k) \leq d^*$  для каждого  $k$  и



$$\begin{aligned}
r(\xi_t, \xi) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x_k^t, y_k)}{2^{|k|}} = \sum_{-m}^m \frac{\rho(x_k^t, y_k)}{2^{|k|}} + \sum_{-\infty}^{-m-1} \frac{\rho(x_k^t, y_k)}{2^{|k|}} + \sum_{m+1}^{\infty} \frac{\rho(x_k^t, y_k)}{2^{|k|}} \leq \\
&\sum_{-m}^m \frac{\rho(x_k^t, y_k)}{2^{|k|}} + \sum_{-\infty}^{-m-1} \frac{d^*}{2^{|k|}} + \sum_{m+1}^{\infty} \frac{d^*}{2^{|k|}} = \\
&\sum_{-m}^m \frac{\rho(x_k^t, y_k)}{2^{|k|}} + \frac{d^*}{2^{m-1}},
\end{aligned}$$

где  $m$  — целое положительное число. Покажем, что  $r(\xi_t, \xi) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Возьмем любое  $\theta$  и для  $\theta/2$  найдем  $m$  такое, что

$$\frac{d^*}{2^{m-1}} < \frac{\theta}{2}.$$

Для найденного  $m$  определим  $t^* > 0$  так, что конечная сумма

$$\sum_{-m}^m \frac{\rho(x_k^t, y_k)}{2^{|k|}} < \frac{\theta}{2}$$

при  $t \geq t^*$ , что возможно, так как  $m$  — фиксировано и каждое  $\rho(x_k^t, y_k) \rightarrow 0$ . В этом случае расстояние в слабой топологии

$$r(\xi_t, \xi) < \theta.$$

Поскольку  $\theta$  — любое положительное число, следовательно  $r(\xi_t, \xi) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и доказательство закончено.

**Следствие 3.1.** Множество  $\Lambda$  является компактом в тихоновской топологии.

*Доказательство.* Пусть  $\xi_t = \{x_k^t, k \in \mathbb{Z}\}$  — последовательность элементов из  $\Lambda$ . Поскольку  $M$  — компакт, значит, для  $k = 0$  существует подпоследовательность  $\tau = t_p \rightarrow \infty$ , для которой сходится 0-я координата:  $x_0^\tau \rightarrow x_0^*$ . Для  $k = \pm 1$  из последовательности  $\xi_\tau$  выделим подпоследовательность, для которой сходятся 1-я и  $(-1)$ -я координаты:

$$x_{\pm 1}^\tau \rightarrow x_{\pm 1}^*.$$

Аналогично строится подпоследовательность, для которой сходятся  $k$ -я и  $(-k)$ -я координаты:

$$x_{\pm k}^\tau \rightarrow x_{\pm k}^*.$$

Затем построим диагональную последовательность, которая сходится покоординатно. Доказательство закончено.

**Утверждение 3.2.** Если  $\xi_t$  — последовательность  $\varepsilon_t$ -траекторий и  $\varepsilon_t$  сходится к нулю, то существует подпоследовательность  $\xi_{t_n}$ , которая сходится к траектории в тихоновской топологии.

*Доказательство.* Пусть  $x_0^t$  — нулевой элемент последовательности  $\xi_t$ . Поскольку точки  $\{x_0^t, t \in \mathbb{N}\}$  лежат в компактном многообразии, существует подпоследовательность  $x_0^\tau$ , индексированная  $\tau = t_m$ , которая сходится к  $x^*$ . Покажем, что траектория, проходящая через точку  $x^*$ , является искомой.

Рассмотрим  $\varepsilon$ -траекторию  $\xi = \{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$ . Оценим расстояние  $\rho(x_k, f^k(x_0))$  через  $\varepsilon$  и модуль непрерывности отображения  $f$ :

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \theta(\rho(x, y)),$$

который можно считать монотонной функцией. Для  $k > 0$  имеем

$$\begin{aligned} \rho(x_k, f^k(x_0)) &\leq \rho(x_k, f(x_{k-1})) + \\ &+ \rho(f(x_{k-1}), f^2(x_{k-2})) + \rho(f^2(x_{k-2}), f^3(x_{k-3})) + \dots + \rho(f^{k-1}(x_1), f^k(x_0)). \end{aligned}$$

Для каждого слагаемого получаем оценку

$$\begin{aligned} \rho(x_k, f(x_{k-1})) &\leq \varepsilon; \\ \rho(f(x_{k-1}), f^2(x_{k-2})) &\leq \theta(\rho(x_{k-1}, f(x_{k-2}))) \leq \theta(\varepsilon); \\ \rho(f^2(x_{k-2}), f^3(x_{k-3})) &\leq \theta(\rho(f(x_{k-2}), f^2(x_{k-3}))) \leq \theta^2(\varepsilon), \end{aligned}$$

где  $\theta^2$  есть суперпозиция функции  $\theta$ , взятая дважды. Аналогично получаем

$$\rho(f^{k-1}(x_1), f^k(x_0)) \leq \theta^{k-1}(\varepsilon).$$

Тогда

$$\rho(x_k, f^k(x_0)) \leq \sum_{l=0}^{k-1} \theta^l(\varepsilon).$$

Отсюда следует, что для фиксированного  $k$

$$\rho(x_k, f^k(x_0)) \rightarrow 0,$$

если  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Используя модуль непрерывности отображения  $f^{-1}$ , можно показать справедливость последней оценки для  $k < 0$ . Из предыдущего утверждения следует, что расстояние в тихоновской топологии

$$r(\xi_\tau, T(x_0^\tau)) \rightarrow 0.$$

Из непрерывности гомеоморфизма  $f$  следует, что траектория  $T(x_0^\tau)$  сходится к траектории  $T(x^*)$  в тихоновской топологии, так как последовательность  $x_0^\tau$  сходится к  $x^*$ . Таким образом,  $\xi_\tau$  сходится к  $T(x^*)$  в тихоновской топологии. Утверждение доказано.

**Следствие 3.2.** Множество траекторий  $Tr \subset \Lambda$  является компактом в тихоновской топологии.

**Теорема 3.3.** Пусть  $\{C_t, t \in \mathbb{N}\}$  есть последовательность покрытий многообразия  $M$  ячейками, которые получены последовательными подразбиениями, их диаметры  $d_t$  сходятся к нулю и на каждом  $G_t$  задан путь  $\omega_t = \{i_k^t, k \in \mathbb{Z}\}$ . Тогда существует подпоследовательность  $\omega_\tau$ , индексированная  $\tau = t_m \rightarrow \infty$ , такая, что для любых  $x_k^\tau \in M(i_k^\tau)$  существует предел

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} x_k^\tau = x_k$$

и последовательность  $\{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$  является траекторией отображения  $f$ .

*Доказательство.* Рассмотрим символический образ  $G_1$  и пространство путей  $P_1$ , на которое спроектируем все пути  $\omega_t$ ,  $t > 1$  посредством отображений вида  $s$ . Тогда в  $P_1$  образуется последовательность путей  $\omega_t^1$ . Поскольку  $P_1$  есть компакт, существует сходящаяся подпоследовательность  $\omega_m^1$ ,  $m = t_r \rightarrow \infty$ .

Затем рассмотрим символический образ  $G_2$  и пространство путей  $P_2$ , на которое спроектируем все отобранные пути  $\omega_t^1$ . Аналогично предыдущему, строим сходящуюся подпоследовательность  $\omega_l^2$ . Повторяя описанную процедуру, построим на каждом  $G_l$  последовательность  $\omega_t^l$ . При этом последовательность  $\omega_t^l$  есть подпоследовательность предыдущей в том смысле, что проекция  $s(\omega_t^l)$  есть подпоследовательность  $\omega_t^{l-1}$ . Если мы возьмем диагональную последовательность  $\omega_\tau^l$ , то получим сходящуюся в тихоновской топологии последовательность путей. Из теоремы 3.2 следует утверждение данной теоремы.

Все рассмотренные результаты предполагали, что диаметр покрытий сходится к нулю. Для практических целей желательно

иметь результат, который описывает отслеживание путями символического образа для покрытия с достаточно малым положительным диаметром. Следующая теорема является основанием для практического применения символического образа. Напомним, что если  $\omega = \{i_k, k \in \mathbb{Z}\}$  есть допустимый путь на символическом образе  $G$ , то последовательность точек  $\{x_k, x_k \in M(i_k)\}$  является псевдотраекторией (согласно теореме 2.1), которая является следом пути  $\omega$ . Пусть  $\Lambda$  есть множество следов путей, допустимых на  $G$  и  $Tr$  есть множество траекторий,  $Tr \subset \Lambda$ .

**Теорема 3.4 об аппроксимации динамики системы.** Пусть  $U$  есть окрестность множества  $Tr$  в тихоновской топологии. Тогда существует  $d_0 > 0$  такое, что для любого символического образа  $G$ , построенного для покрытия  $C$  с диаметром  $d \leq d_0$ , всякий след  $\chi(\omega)$  любого пути  $\omega$ , допустимого на  $G$ , лежит в окрестности  $U$ .

*Доказательство* проведем методом от противного. Пусть существует окрестность  $U$  множества траекторий  $Tr$ , для которой утверждение теоремы не выполнено. Тогда для любого  $d > 0$  имеется покрытие  $C$  диаметра  $d$  такое, что на символическом образе  $G(C)$  имеется допустимый путь  $\omega = \{i_k\}$ , для которого последовательность  $\{x_k, x_k \in M(i_k)\}$  лежит вне  $U$ . Согласно теореме 2.1, последовательность  $\{x_k\}$  является  $\varepsilon$ -траекторией отображения  $f$  для любого  $\varepsilon > q + d$ . Можно взять  $\varepsilon = \theta(d) + d$ ,  $\theta(\cdot)$  — модуль непрерывности для  $f$ . Пусть  $C_t$  есть последовательность покрытий с диаметром разбиения  $d_t \rightarrow 0$ , для которых выполнены описанные выше построения. В результате образуется последовательность  $\xi_t = \{x_k^t\}$   $\varepsilon$ -траекторий с  $\varepsilon_t \rightarrow 0$ , которая лежит вне  $U$ . Согласно утверждению 3.2, существует подпоследовательность  $\xi_\tau$ , которая сходится к траектории  $T$  в тихоновской топологии. Тогда  $T$  не лежит в  $Tr$  и мы получили противоречие. Теорема доказана.

### 3.3. КОДИРОВКА ТРАЕКТОРИЙ

Рассмотрим символический образ  $G$  отображения  $f$ . Множество (допустимых) путей  $P$  на  $G$  наделено тихоновской топологией, и теорема 2.1 описывает связь между путями на  $G$  и псевдотраекториями отображения  $f$ . Любая траектория  $T = \{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$  имеет свой след на  $G$  в виде пути  $\omega = \{i_k : x_k \in M(i_k)\}$ , который естественно назвать кодировкой траектории  $T$ . Многозначное отображение  $h(x) = \{i : x \in M(i)\}$  задает кодировку любой траектории. Обозначим  $Cod$  множество путей, которые являются кодировками траекторий. Наша ближайшая цель состоит в описании вложения  $Cod \subset P$ .

Пусть  $\{C_t\}$  есть последовательность покрытий многообразия  $M$  ячейками, которые получены последовательными подразбиениями, их диаметры  $d_t$  сходятся к нулю. Эти покрытия порождают последовательность символических образов  $G_t$  и множества путей  $P_t$ . Множество кодировок  $Cod_t$  лежит в  $P_t$ . Подразбиение ячеек задает отображение ориентированных графов  $s: G_{t+1} \rightarrow G_t$ , что генерирует отображение путей  $s: P_{t+1} \rightarrow P_t$ . Проекция  $s(P_{t+1})$  является компактом в  $P_t$ . Поскольку покрытие  $C_{t+m}$  есть подразбиение покрытия  $C_t$  для любого  $m > 0$ , существует отображение ориентированных графов  $s: G_{t+m} \rightarrow G_t$  и проекция путей  $s: P_{t+m} \rightarrow P_t$ . Тогда в пространстве путей  $P_t$  возникает последовательность проекций  $P_t^m = s(P_{t+m})$  для  $m > 0$ .

**Теорема 3.5.** Пусть  $\{C_t\}$  есть последовательность покрытий многообразия  $M$  ячейками, которые получены последовательными подразбиениями, их диаметры  $d_t$  сходятся к нулю. Тогда:

- проекции  $\{P_t^m, m \in \mathbb{N}\}$  являются последовательностью вложенных компактов:

$$P_t \supset P_t^1 \supset P_t^2 \supset \dots \supset P_t^m \supset P_t^{m+1} \dots;$$

- множество кодировок  $Cod_t$  является компактом в  $P_t$  и

$$Cod_t = \lim_{m \rightarrow \infty} P_t^m = \bigcap_m P_t^m;$$

- $s$ -образ множества кодировок траекторий есть кодировки траекторий:

$$s(Cod_{t+1}) = Cod_t.$$

#### Доказательство

1. Отображение  $s: G_{t+1} \rightarrow G_t$  ориентированных графов задает отображение путей  $s: P_{t+1} \rightarrow P_t$ , которое непрерывно в тихоновской топологии. Образ  $s(P_{t+1}) = P_t^1$  есть компакт в  $P_t$ . Отображение  $s: P_{t+m} \rightarrow P_t$  является суперпозицией описанных выше отображений  $s: P_{t+1} \rightarrow P_t$ . Отсюда следует компактность всех проекций  $P_t^m = s(P_{t+m})$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Поскольку вложение  $s(P_{t+1}) \subset P_t$  имеет место для любого  $t$ , следовательно,  $\{P_t^m, m \in \mathbb{N}\}$  является последовательностью вложенных компактов.

2. Для каждого  $t$  имеют место включения  $Cod_t \subset P_t$  и  $s(P_{t+1}) \subset P_t$ . Тогда  $Cod_t \subset P_t^m$  для любого  $m > 0$  и, следовательно,

$$Cod_t \subset \bigcap_m P_t^m.$$

Покажем обратное включение. Пусть  $\omega \in \bigcap_m P_t^m$ , тогда существует последовательность  $\omega_m \in P_{t+m}$  такая, что  $s(\omega_m) = \omega$ . Следовательно, последовательность  $\omega_m$  является согласованной и, согласно теореме 3.1, существует траектория  $T = \{x_k\}$ , которая является следом каждого пути  $\omega_m$  и  $\omega$ . Иначе,  $\omega_m$  и  $\omega$  являются кодировками траектории  $T = \{x_k\}$ , что обеспечивает включение  $\omega \in \text{Cod}_t$ .

3. Найдем образ

$$s(\text{Cod}_{t+1}) = s\left(\bigcap_m P_{t+1}^m\right) = \bigcap_m s(P_{t+1}^m) = \bigcap_m P_t^m = \text{Cod}_t.$$

Теорема доказана.

### 3.4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПСЕВДОТРАЕКТОРИИ

Пусть  $\varepsilon$ -траектория  $\{x_n\}$  является периодической, т.е. существует  $k > 0$  такое, что  $x_{n+k} = x_n$  для всех  $n$ . Тогда точки  $x_n$  называются  $\varepsilon$ -периодическими.

**Определение 3.4.** Точка  $x$  называется цепно-рекуррентной, если  $x$  является  $\varepsilon$ -периодической для любого  $\varepsilon > 0$ , т.е. найдется периодическая  $\varepsilon$ -траектория, проходящая через точку  $x$ .

Цепно-рекуррентное множество состоит из всех цепно-рекуррентных точек и обозначается через  $CR$ . Цепно-рекуррентное множество  $CR$  является инвариантным замкнутым и содержит все типы возвратных траекторий: периодические, почти периодические, неблуждающие, гомоклинические и т.д. Отметим, что, если цепно-рекуррентная точка не является периодической и  $\dim M > 1$ , то существует сколь угодно малое возмущение  $f$  в  $C^0$ -топологии, для которого данная точка является периодической [110]. Можно сказать, что цепно-рекуррентные точки порождают периодические траектории при  $C^0$ -возмущениях. Следовательно, при компьютерных вычислениях цепно-рекуррентные точки будут выглядеть как периодические.

**Определение 3.5.** Две цепно-рекуррентные точки назовем эквивалентными, если их можно соединить периодической  $\varepsilon$ -траекторией для любого  $\varepsilon > 0$ . Цепно-рекуррентное множество разбивается на классы эквивалентности  $\{\Omega_i\}$ , которые мы будем называть компонентами цепно-рекуррентного множества.

Заметим, что компонента может не быть изолированной от других компонент. Например, состояние равновесия  $y = 0$  дифференциального уравнения  $y' = y^3 \sin 1 / y$  не является изолиро-

ванным состоянием равновесия. Пусть  $f$  есть сдвиг вдоль траектории этого уравнения на единицу времени. Каждое состояние равновесия уравнения порождает неподвижную точку диффеоморфизма  $f$ , которая является компонентой цепно-рекуррентного множества. Неподвижная точка  $y = 0$  является компонентой, не изолированной от других компонент.

Множество всех  $\varepsilon$ -периодических точек обозначим  $Q(\varepsilon)$ .

**Утверждение 3.3.** Множества  $\varepsilon$ -периодических точек обладают следующими свойствами:

- 1)  $Q(\varepsilon)$  являются открытыми множествами при  $\varepsilon > 0$ ;
- 2) если  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ , то

$$Q(\varepsilon_2) \subset Q(\varepsilon_1). \quad (3.3)$$

#### *Доказательство*

1. Пусть  $x \in Q(\varepsilon)$ , тогда существует периодическая  $\varepsilon$ -траектория  $x_1, x_2, \dots, x_p = x_0, x = x_1$ . Найдем  $r_0 = \max\{\rho(f(x_n), x_{n+1}), n = 1, 2, \dots, p\}$ . По определению,  $r_0 < \varepsilon$ . Пусть  $\varepsilon_0 = \varepsilon - r_0 > 0$ . Поскольку  $M$  — компакт и  $f$  — непрерывное отображение, для него существует модуль непрерывности

$$\theta: \rho(f(x), f(y)) \leq \theta(\rho(x, y)).$$

Пусть  $\delta > 0$  такое число, что  $\max\{\delta, \theta(\delta)\} < \varepsilon_0$ . Покажем, что все точки  $y$  из  $\delta$ -окрестности точки  $x$  лежат в  $Q(\varepsilon)$ . Фиксируем  $y$  и построим периодическую  $\varepsilon$ -траекторию, проходящую через  $y$ . Для этого в последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_p = x_0$  заменим точку  $x = x_1$  на точку  $y$  и покажем, что периодическая последовательность  $y, x_2, \dots, x_p = x_0$  является  $\varepsilon$ -траекторией. Действительно, если  $\rho(x, y) < \delta$ , то  $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon_0$  и  $\rho(x_2, f(y)) \leq \rho(x_2, f(x)) + \rho(f(x), f(y)) < r_0 + \varepsilon_0 = \varepsilon$ . Кроме того,  $\rho(f(x_p), y) \leq \rho(f(x_p), x) + \rho(x, y) < r_0 + \delta < \varepsilon$ . Для остальных  $n = 2, \dots, p-1$  неравенства  $\rho(f(x_n), x_{n+1}) < \varepsilon$  сохраняются, так как точки  $x_n, n = 2, \dots, p$  не менялись.

2. Поскольку при  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$  каждая  $\varepsilon_2$ -траектория является  $\varepsilon_2$ -траекторией, следовательно,  $Q(\varepsilon_2) \subset Q(\varepsilon_1)$ . Утверждение доказано.

Каждая цепно-рекуррентная точка является  $\varepsilon$ -периодической для любого  $\varepsilon > 0$ , поэтому цепно-рекуррентное множество  $CR$  можно получить как предел

$$CR = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q(\varepsilon) = \bigcap_{\varepsilon} Q(\varepsilon).$$

Таким образом, семейство открытых множеств  $\{Q(\varepsilon), \varepsilon > 0\}$  вложены друг в друга и в пределе дают цепно-рекуррентное множество, т.е. они образуют фундаментальную систему окрестностей множества  $CR$ .

**Предельное множество последовательности периодических псевдотраекторий.** Пусть  $\{\chi_n\}$  — последовательность периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . На каждой псевдотраектории  $\chi_n$  отметим точку  $x_n$ . Последовательность  $\{x_n\}$  лежит на компакте  $M$ . Тогда существует подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ , которая сходится к  $x^*$ . Точку  $x^*$  назовем предельной, а множество всех предельных точек назовем предельным множеством последовательности  $\{\chi_n\}$ .

**Утверждение 3.4.** Пусть  $\{\chi_n\}$  — последовательность периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . Тогда предельное множество последовательности  $\{\chi_n\}$  состоит из цепно-рекуррентных точек.

*Доказательство.* На каждой псевдотраектории  $\chi_n$  отметим точку  $x_n$ . Поскольку  $M$  — компакт, существует сходящаяся подпоследовательность такая, что  $x_{n_k} \rightarrow x^*$ , т.е. точка  $x^*$  является предельной. Покажем, что точка  $x^*$  является цепно-рекуррентной. Построим последовательность периодических псевдотраекторий  $\{\omega_k\}$ , заменяя в траектории  $\chi_{n_k}$  точку  $x_{n_k}$  на  $x^*$ . Покажем, что  $\omega_k$  является  $\varepsilon_k^*$ -траекторией с  $\varepsilon_k^* \leq \varepsilon_{n_k} + \gamma_k$ , где  $\gamma_k = \max\{\theta(\delta_k), \delta_k\}$ ,  $\delta_k$  — расстояние между  $x_{n_k}$  и  $x^*$ ,  $\theta(\rho)$  — модуль непрерывности  $f$ . Действительно, по построению имеем  $\rho(f(x_{n_{k-1}}), x_{n_k}) < \varepsilon_{n_k}$  и  $\rho(x_{n_k}, x^*) = \delta_k$ , тогда  $\rho(f(x_{n_{k-1}}), x^*) < \varepsilon_{n_k} + \delta_k$ . Кроме того, имеем  $\rho(f(x_{n_k}), x_{n_{k+1}}) < \varepsilon_{n_k}$  и  $\rho(f(x_{n_k}), f(x^*)) < \theta(\delta_k)$ , тогда  $\rho(f(x^*), x_{n_{k+1}}) < \varepsilon_{n_k} + \theta(\delta_k)$ . Поскольку  $\varepsilon_{n_k}$  и  $\delta_k$  сходятся к нулю, следовательно,  $\varepsilon_k^* \rightarrow 0$ . Таким образом, последовательность периодических  $\varepsilon_k^*$ -траекторий  $\{\omega_k\}$  такая, что каждая  $\omega_k$  проходит через  $x^*$  и  $\varepsilon_k^* \rightarrow 0$ . Значит,  $x^*$  является цепно-рекуррентной. Утверждение доказано.

Заметим, что существуют последовательности  $\{\chi_n\}$  периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  такие, что последовательность  $x_n \in \chi_n$  не имеет предела. Для этого достаточно взять периодические псевдотраектории из разных компонент цепно-рекуррентного множества.

**Теорема 3.6.** Пусть  $\{\chi_n\}$  — последовательность периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , на каждой псевдотраектории  $\chi_n$  отмечена точка  $x_n$  так, что  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , предельная точка  $x^*$  лежит в некоторой компоненте  $\Omega$  цепно-рекуррентного множества. Тогда последовательность  $\{\chi_n\}$  сходится к  $\Omega$  равномерно, т.е. расстояние



$$\rho(\chi_n, \Omega) = \max_i \{\rho(x_i, \Omega), x_i \in \chi_n\} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство* от противного. Пусть существуют  $r > 0$  и последовательность точек  $y_n \in \chi_n$  такие, что  $\rho(x_i, \Omega) > r$ . Поскольку последовательность  $\{y_n\}$  лежит на компакте, существует сходящаяся подпоследовательность  $y_{n_k} \rightarrow y^*$ . Согласно утверждению 3.4,  $y^*$  является цепно-рекуррентной точкой, но лежит в другой компоненте  $\Omega^*$ , так как  $\rho(y^*, \Omega) \geq r > 0$ . Аналогично предыдущему доказательству можно построить последовательность периодических  $\epsilon_k^*$ -траекторий,  $\epsilon_k^* \rightarrow 0$ , проходящих через точки  $x^*$  и  $y^*$ . Это означает, что точки  $x^*$  и  $y^*$  лежат в одной компоненте цепно-рекуррентного множества. Полученное противоречие завершает доказательство.

Пусть  $\{\chi_n\}$  — последовательность периодических  $\epsilon_n$ -траекторий,  $\epsilon_n \rightarrow 0$  и последовательность  $x_0^n \in \chi_n$  нулевых элементов сходится к  $x^*$ . Утверждение 3.2 говорит, что последовательности  $\{\chi_n\}$  сходится к траектории  $Tr(x^*)$  (точки  $x^*$ ) в тихоновской топологии.

**Определение 3.6.** Последовательность  $\chi_n = \{x_k^n, k \in \mathbb{Z}\}$  периодических  $\epsilon_n$ -траекторий,  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , сходится равномерно к траектории  $Tr = \{y_k, k \in \mathbb{Z}\}$ , если  $\sup_k (\rho(x_k^n, y_k))$  сходится к нулю.

**Теорема 3.7.** Если  $\{\chi_n\}$  есть последовательность периодических  $\epsilon_n$ -траекторий,  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , сходится равномерно к траектории  $Tr$ , то эта траектория является рекуррентной. Предельное множество последовательности  $\{\chi_n\}$  совпадает с замыканием траектории  $Tr$  и является минимальным множеством.

*Доказательство.* Псевдотраектория  $\chi_n = \{x_k^n, k \in \mathbb{Z}\}$  является периодической с периодом  $p_n$ , т.е.  $x_{k+p_n}^n = x_k^n$  для любого  $k \in \mathbb{Z}$ . Фиксируем  $n$  и положим  $r_n = \sup_k (\rho(x_k^n, y_k))$ ,  $r_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Пусть  $B(x, r)$  — шар радиуса  $r$  с центром в точке  $x$ . Согласно предположению, объединение  $p_n$  шаров вида

$$U_n = \left\{ \bigcup_k B(x_k^n, r_n), x_k^n \in \chi_n \right\}$$

содержит траекторию  $Tr = \{y_k, k \in \mathbb{Z}\}$ . При этом расстояние  $\rho(y_{k+zp_n}, x_k^n) \leq r_n$  для  $z \in \mathbb{Z}$ . Тогда расстояние  $\rho(y_{k+zp_n}, y_k) \leq 2r_n$  для

$z \in \mathbb{Z}$ . Следовательно, шар радиуса  $2r_n$  с центром в  $y_k$  содержит точки вида  $y_{k+zp_n}$ ,  $z \in \mathbb{Z}$ . Тогда объединение  $p_n$  шаров вида

$$U_n^*(k_0) = \left\{ \bigcup_z B(y_{k_0+z}, 2r_n), 0 < z \leq p_n \right\}$$

содержит всю траекторию  $Tr$  для любого числа  $k_0 z \in \mathbb{Z}$ . Покажем, что траектория  $Tr$  является рекуррентной. Фиксируем  $\varepsilon > 0$ , найдем  $r_n < 1/2\varepsilon$  и период  $p_n$ . Из описанного выше построения следует, что  $r_n$ -окрестность любого отрезка траектории  $Tr$  длины  $p_n$  содержит всю траекторию  $Tr$ , значит,  $Tr$  является рекуррентной траекторией. Поскольку  $r_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , следовательно, предельное множество последовательности  $\chi_n$  совпадает с замыканием траектории  $Tr$ . Теорема Биркгофа (см. [23, с. 404]) утверждает, что замыкание рекуррентной траектории есть компактное минимальное множество. Теорема доказана.

### 3.5. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЦЕПНО-РЕКУРРЕНТНОГО МНОЖЕСТВА

Пусть  $G$  — символический образ относительно покрытия  $C$ ,  $d$  — диаметр покрытия  $C$ . Многозначное отображение  $h: M \rightarrow V$  сопоставляет точке  $x$  все вершины  $i$  такие, что  $x \in M(i)$ .

**Утверждение 3.5.** Отображение  $h$  обладает следующими свойствами.

1. Если  $x$  — цепно-рекуррентная точка и  $i \in h(x)$ , то  $i$  — возвратная вершина.
2. Если  $x_1$  и  $x_2$  лежат в одной компоненте цепно-рекуррентного множества  $\Omega$ ,  $i_1 \in h(x_1)$  и  $i_2 \in h(x_2)$ , то  $i_1$  и  $i_2$  эквивалентные возвратные вершины.
3. Если  $\Omega$  — компонента цепно-рекуррентного множества, то существует единственный класс  $H(\Omega)$  эквивалентных возвратных вершин такой, что  $h(\Omega) \subset H(\Omega)$ .

*Доказательство.* Пусть  $x$  есть цепно-рекуррентная точка и  $i \in h(x)$ , т.е.  $x \in M(i)$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует периодическая  $\varepsilon$ -траектория  $\{x_1, x_2, \dots, x_k = x_0\}$ , проходящая через  $x = x_0$ . Выберем  $\varepsilon < r$ , где  $r$  — нижняя грань символического образа. Рассмотрим периодическую последовательность вершин  $\{i_1, i_2, \dots, i_k = i_0\}$ , где  $x_p \in M(i_p)$ . Поскольку  $\varepsilon < r$ , следовательно, согласно теореме 2.1, периодическая последовательность  $\{i_1, i_2, \dots, i_k = i_0\}$  является допустимым периодическим путем на символическом образе, значит,  $i = i_0$  является возвратной вершиной. Аналогично доказывается утверждение 2. Утверждение 3 есть следствие утверждения 2.

Пусть  $\Omega$  — компонента цепно-рекуррентного множества. Из утверждения 3.5 следует, что образ  $h(\Omega)$  лежит в некотором классе эквивалентных возвратных вершин, который будем обозначать  $H(\Omega)$ , при этом компонента  $\Omega$  лежит в  $\{\bigcup M(i) : i \in H(\Omega)\}$ . Отметим, что класс  $H(\Omega)$  определяется по  $\Omega$  однозначно.

Обозначим  $P(d)$  объединение ячеек  $M(i)$ , для которых вершина является возвратной, т.е.

$$P(d) = \{\bigcup M(i) : i \text{ — возвратная вершина}\}. \quad (3.4)$$

### Теорема 3.8

1. Пусть  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  такие, что  $0 < \epsilon_1 < r < q + d < \epsilon_2$ . Тогда

$$Q(\epsilon_1) \subset P(d) \subset Q(\epsilon_2), \quad (3.5)$$

где  $Q(\epsilon)$  — множество  $\epsilon$ -периодических точек.

2. Множество  $P(d)$  есть замкнутая окрестность цепно-рекуррентного множества  $CR$

$$CR \subset P(d). \quad (3.6)$$

3. Для любой окрестности  $V$  цепно-рекуррентного множества  $CR$  найдется  $d > 0$  такое, что

$$CR \subset P(d) \subset V.$$

4. Цепно-рекуррентное множество  $CR$  совпадает с пересечением множеств  $P(d)$  для всех положительных  $d$ :

$$CR = \bigcap_{d>0} P(d). \quad (3.7)$$

### Доказательство

1. Если точка  $x$  лежит в  $Q(\epsilon_1)$ , то существует периодическая  $\epsilon_1$ -траектория  $\{x_1, \dots, x_p = x_0\}$ , проходящая через  $x = x_1$ . Рассмотрим периодическую последовательность ячеек  $\{M(z_i) : i = 1, \dots, p\}$  таких, что  $x_i \in M(z_i)$ . Поскольку  $\epsilon_1 < r$ , согласно теореме 2.1 периодическая последовательность вершин  $\{z_i\}$  является допустимым периодическим путем, проходящим через  $z_1$ , т.е. вершина  $z_1$  является возвратной и ячейка  $M(z_1)$  лежит в  $P(d)$ . Таким образом,  $Q(\epsilon_1) \subset P(d)$ .

Рассмотрим точку  $x$ , лежащую в  $P(d)$ . Тогда существует ячейка  $M(z)$  такая, что  $x \in M(z)$  и вершина  $z$  является возвратной. Следовательно, на символическом образе  $G$  существует периодический путь  $\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$  и  $z_1 = z$ . Построим периодическую последователь-

ность точек  $\{x_1, \dots, x_p\}$  таких, что  $x_i \in M(z_i)$ . Согласно теореме 2.1 последовательность  $\{x_i\}$  является периодической  $\epsilon_2$ -траекторией для любого  $\epsilon_2 > q + d$ . Следовательно, точка  $x = x_1$  лежит в  $Q(\epsilon_2)$ , т.е.  $P(d) \subset Q(\epsilon_2)$ .

2. Из включений  $CR \subset Q(\epsilon_2) \subset P(d)$  следует, что  $P(d)$  является замкнутой окрестностью цепно-рекуррентного множества.

3. Пусть  $V$  — любая окрестность множества  $CR$ . Поскольку  $f$  равномерно непрерывна на компакте  $M$ , наибольший диаметр  $q$  образов ячеек  $f(M(i))$  стремится к нулю, если диаметр покрытия  $d \rightarrow 0$ . Поскольку  $\{Q(\epsilon), \epsilon > 0\}$  есть фундаментальная система окрестностей множества  $CR$ , существует  $\epsilon^* > 0$  такое, что  $Q(\epsilon^*) \subset V$ . Возьмем  $d > 0$  таким, что  $\epsilon_2 = 3/2(q(d) + d) \leq \epsilon^*$ . Поскольку  $Q(\epsilon)$  зависит монотонно от  $\epsilon$ , следовательно, включение (3.5) означает, что мы имеем

$$P(d) \subset Q(\epsilon_2) \subset Q(\epsilon^*) \subset V.$$

4. Семейство открытых множеств  $\{Q(\epsilon), \epsilon > 0\}$  образуют фундаментальную систему окрестностей цепно-рекуррентного множества  $CR$ . Следовательно,

$$CR = \bigcap_{\epsilon > 0} Q(\epsilon).$$

Из включений (3.5) мы получаем

$$CR \subset \bigcap_{d > 0} P(d) \subset \bigcap_{\epsilon_2} Q(\epsilon_2) = CR,$$

где  $\epsilon_2 = 3/2(q(d) + d)$  и  $\epsilon_2 \rightarrow 0$  при  $d \rightarrow 0$ . Отсюда следует искомое. Теорема доказана.

Предположим, что  $C = C_0$  является исходным покрытием и  $C_1, C_2, \dots$  получены описанным процессом подразбиения, множества  $P_0, P_1, P_2, \dots$  построены согласно (3.4).

**Теорема 3.9.** Последовательность множеств  $P_0, P_1, P_2, \dots$  обладает следующими свойствами.

1.  $P_k$  вложены друг в друга:

$$P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset CR.$$

2. Если диаметры покрытий  $d_k \rightarrow 0$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \bigcap P_k = CR.$$

### Доказательство

1. Пусть  $C = \{M(i)\}$  является покрытием  $M$ ,  $G$  есть символический образ для покрытия  $C$ . Предположим, что новое покрытие  $NC$  есть подразбиение  $C$ . Обозначим  $NG$  символический образ для покрытия  $NC$ . Как и ранее, ячейки покрытия  $NC$  обозначаются  $m(i, k)$  так, что  $\bigcup_k m(i, k) = M(i)$ . Существует многозначное отображение графа  $NG$  на граф  $G$  такое, что вершина  $(i, k)$  отображается на  $i$  и ориентированное ребро  $(i, k) \rightarrow (j, l)$  отображается на ориентированное ребро  $i \rightarrow j$ . В этом случае допустимый путь отображается на допустимый путь. В частности, периодические пути на  $NG$  отображаются в периодические пути графа  $G$ . Таким образом, возвратные вершины графа  $NG$  отображаются в возвратные вершины графа  $G$ , т.е. если  $(i, k)$  — возвратная, то и  $i$  — возвратная. Тогда для множеств

$$P = \{\bigcup M(i) : i \text{ — возвратная вершина на } G\};$$

$$NP = \{\bigcup m(i, k) : (i, k) \text{ — возвратная вершина на } G\}$$

имеет место включение  $NP \subset P$ . Применяя этот результат на каждом шагу процесса измельчения покрытия, получаем вложенную последовательность окрестностей цепно-рекуррентного множества:

$$P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset CR.$$

2. Пусть диаметры покрытий  $d_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Включения

$$Q(\varepsilon_1) \subset P(d) \subset Q(\varepsilon_2), \quad 0 < \varepsilon_1 < r < q + d < \varepsilon_2$$

верны для любого символического образа, в частности, они верны для окрестностей  $P_k$ . Следовательно,  $P_k \subset Q(\varepsilon)$  при  $q_k + d_k < \varepsilon$ , где  $q_k$  — наибольший диаметр образов  $f(M(i))$ . Положим  $\varepsilon_k = 3/2(q_k + d_k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Семейство  $\{Q(\varepsilon), \varepsilon > 0\}$  есть фундаментальная система окрестностей множества  $CR$ ,  $CR \subset P_k \subset Q(\varepsilon_k)$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q(\varepsilon_k) = \bigcap_k Q(\varepsilon_k) = CR$ , поэтому мы получаем включения  $CR \cap_k P_k \subset \bigcap_k Q(\varepsilon_k) = CR$ , что дает равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \bigcap_k P_k = CR.$$

Теорема доказана.

**Следствие 3.3.** Пусть  $\Omega$  является компонентой  $CR$ , тогда

$$\{\bigcup M(i) : i \in H(\Omega)\} = P(\Omega) \quad (3.8)$$

является замкнутой окрестностью компоненты  $\Omega$  и

$$P_0(\Omega) \supset P_1(\Omega) \supset P_2(\Omega) \supset \dots \supset \Omega.$$

Если диаметр  $d_k \rightarrow 0$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(\Omega) = \bigcap_k P_k(\Omega) = \Omega.$$

### Пример 3.1. Локализация хаотического множества

Компонента цепно-рекуррентного множества  $\Omega$  является хаотическим инвариантным множеством, если она содержит плотную непериодическую траекторию, которая непредсказуемо изменяет состояния системы и обладает основными свойствами случайного процесса. В 1970-х гг. японские исследователи под руководством К. Икеды [66, 67] описали динамику в нелинейной оптической системе с помощью дискретной динамической системы в комплексной плоскости. Отображение, которое порождает данную систему, сейчас носит имя Икеды. Оно имеет вид

$$J : z \rightarrow R + C_2 z \exp \left( i \left( C_1 - \frac{C_3}{1 + |z|^2} \right) \right),$$

где  $z$  — комплексная переменная;  $R, C_1, C_2, C_3$  — вещественные постоянные. Отображение Икеды моделирует довольно сложную динамику на плоскости, см. [12, 19, 89]. Икеда показал, что при  $R = 0,9$ ,  $C_1 = 0,4$ ,  $C_2 = 0,9$ ,  $C_3 = 0,9$  динамическая система имеет хаотический аттрактор  $\Omega$ . Подробную информацию об аттракторах мы рассмотрим в главе 4. Основным свойством хаотичного аттрактора является то, что любая траектория из области притяжения достигает  $\Omega$  и аппроксимирует его. Для того чтобы построить такой аттрактор, нужно построить достаточно длинную траекторию, которая покажет, где лежит аттрактор.

Все значительно усложняется, если хаотическое множество  $\Omega$  не является аттрактором. В этом случае, мы воспользуемся методом локализации, описанном в теореме 3.9, в основе которого лежит принцип возвратности псевдотраектории.

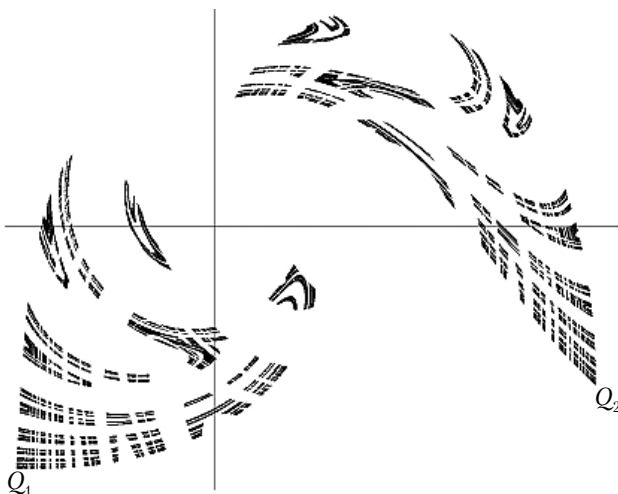
Рассмотрим модифицированное отображение Икеды вида

$$J : (x, y) \rightarrow \left( R + a((x \cos \tau - y \sin \tau, b(x \sin \tau + y \cos \tau)) \right), \quad (3.9)$$

где  $\tau = 0,4 - 6/(1+x^2+y^2)$ ,  $R=1$ ,  $a=-0,9$ ,  $b=1,2$ . Отображение  $J$  имеет гиперболическую неподвижную точку  $H(-0,0950, 2,1937)$ . Существует 2-периодическая гиперболическая траектория  $Q = \{(-1,5584, -1,9046), (3,0088, -1,2438)\}$ , которая порождает гомоклиническую траекторию и хаотическое цепно-рекуррентное множество  $\Omega$ . Множество  $\Omega$  является канторовым, оно было локализовано методом описанным в теореме 3.9. Полученная замкнутая окрестность  $P(\Omega)$  состоит из 874619 ячеек (рис. 3.1). Заметим, что  $\Omega$  состоит из двух частей:  $\Omega_1$  — левая часть и  $\Omega_2$  — правая часть. При этом

$$J: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2; \Omega_2 \rightarrow \Omega_1,$$

т.е. отображение Икеды 2-периодическое на  $\Omega$ .



**Рис. 3.1.** Локализация хаотического цепно-рекуррентного множества.

В главе 11 подробно описаны численные методы и проблемы реализации описанного метода локализации цепно-рекуррентного множества.

### *Контрольные вопросы и задания*

1. В пространстве последовательностей  $\omega = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$  имеется две топологии: тихоновская и равномерная с нормой  $\|\omega\| = \sup_k |x_k|$ . Постройте пример последовательности  $\omega_n$  такой, что  $\|\omega_n\| = 1$  и  $\omega_n$  сходится в тихоновской топологии к  $\{x_k = 0, k \in \mathbb{N}\}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

2. Пусть численно (на компьютере) определили, что точка  $x$  после  $k$  итераций возвращается в исходное состояние. Означает ли это, что она является периодической, цепно-рекуррентной или лежит в ячейке  $M(i)$ ,  $i$  — возвратная вершина?
3. Пусть точка  $x$  лежит в ячейке  $M(i)$  и ее подразбиение есть  $\{m(j)\}$ . Какое утверждение верно: если  $i$  — возвратно, то  $j$  — возвратно или если  $j$  — возвратно, то  $i$  — возвратно?
4. Пусть имеется последовательность подразбиений с диаметром, сходящимся к нулю. Для всех подразбиений точка  $x$  лежит в ячейках  $M(i)$ , где  $i$  — возвратно. Означает ли это, что  $x$  является цепно-рекуррентной точкой?
5. Система имеет всего две компоненты цепно-рекуррентного множества. Может ли процесс локализации после нескольких итераций получить больше чем две компоненты этого множества?
6. Система имеет всего две компоненты цепно-рекуррентного множества. Может ли процесс локализации после нескольких итераций получить одну окрестность этого множества?
7. Локализация цепно-рекуррентного множества сводится к вычислению возвратных вершин символического образа. Предложите алгоритм определения возвратных вершин ориентированного графа.
8. В интернете можно найти алгоритм Тарьяна вычисления сильных компонент графа. Какова его сложность?



## Глава 4

# АТТРАКТОРЫ И ФИЛЬТРАЦИЯ

### 4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

Существенный интерес при изучении динамических систем представляют те инвариантные множества, которые обладают некоторым свойством устойчивости.

**Определение 4.1.** Инвариантное множество  $\Lambda$  называется аттрактором, если существует окрестность  $U$  множества  $\Lambda$  такая, что

$$f(\bar{U}) \subset U, \quad \Lambda = \bigcap_{n>0} f^n(U),$$

при этом множество

$$W^s(\Lambda) = \bigcup_{n<0} f^n(U)$$

называется бассейном или областью притяжения аттрактора.

Открытое множество  $U$ , обладающее свойством  $f(\bar{U}) \subset U$ , называется поглощающим. Траектории, которые входят в  $U$ , там остаются. Таким образом, аттрактор обладает поглощающей окрестностью, в которой  $\Lambda$  является максимальным инвариантным множеством. Множество  $U$  называется фундаментальной окрестностью аттрактора  $\Lambda$ . Мы покажем, что, используя символический образ, можно построить фундаментальную окрестность любого аттрактора и оценить область его притяжения.

**Определение 4.2.** Инвариантное множество  $\Lambda^*$  называется репеллером для  $f$ , если  $\Lambda^*$  есть аттрактор для  $f^{-1}$ .

Пусть множество  $\Lambda$  является аттрактором и  $W^s(\Lambda)$  — его область притяжения. Множество  $\Lambda^* = M \setminus W^s(\Lambda)$  является репеллером [50], который называется дуальным репеллером для  $\Lambda$ , а пара  $\Lambda, \Lambda^*$  называется парой аттрактор-репеллер.

Аттракторы могут иметь довольно сложную структуру. Существуют «странные» аттракторы. Этот термин впервые появился в работе Д. Рюэля и Ф. Такенса [43] и означал существование компактного притягивающего множества, отличного от состояния равновесия, предельного цикла или другой гладкой поверхности. Такие множества имеют дробную размерность, и динамика системы

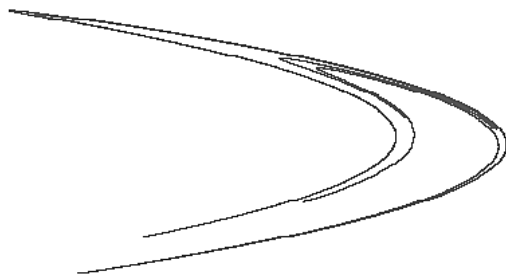
на них является хаотичной. Странный аттрактор имеет всюду плотную траекторию, т.е. траекторию, замыкание которой совпадает со всем аттрактором. Численное моделирование таких аттракторов можно осуществлять с помощью достаточно большого числа итераций произвольной точки, лежащей в области притяжения аттрактора. В этом случае траектория выбранной точки попадает в сколь угодно малую окрестность аттрактора и в силу существования хаотических режимов точки траектории распределяются по всему аттрактору. Хорошо известным примером такого аттрактора является аттрактор Хенона [64].

#### **Пример 4.1. Аттрактор Хенона**

Рассмотрим отображение

$$(x_1, y_1) = (1 + y - ax^2, bx).$$

Известно, что при  $a = 1,4$ ,  $b = 0,3$  у динамической системы, порождаемой описанным отображением, в области  $[-1,5, 1,5] \times [-1, 1]$  существует странный аттрактор, на котором динамика системы является хаотичной. Размерность этого аттрактора равна 1,26, см. [104]. Аттрактор Хенона показан на рис. 4.1.



**Рис. 4.1.** Аттрактор Хенона

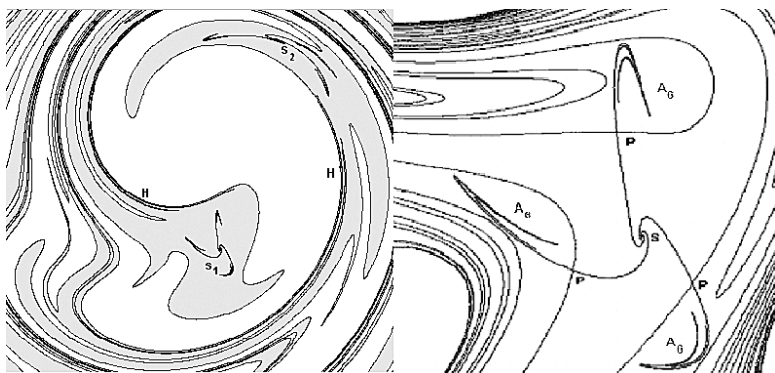
В современной практике важно знать расположение аттрактора и его области притяжения. Основной причиной является то, что, начиная траекторию в области притяжения через конечное число итераций, траектория попадает в достаточно малую окрестность аттрактора. Сама область притяжения также может иметь довольно сложную структуру. Следующий пример показывает, насколько нетривиальными могут быть аттрактор и его область притяжения.

## Пример 4.2

Рассмотрим отображение Икеды

$$f: (x, y) \rightarrow (R + C_2(x \cos \tau - y \sin \tau), C_2(x \sin \tau + y \cos \tau)),$$

где  $\tau = C_1 - C_3 / (1 + x^2 + y^2)$ . Параметры  $C_1 = 0,4$ ,  $C_2 = 0,9$ ,  $C_3 = 6,0$ ,  $R = 0,6$ . В этом случае система имеет 2-периодический аттрактор  $A = S_1 + S_2$  такой, что каждая компонента имеет вид «тройного крюка» (см. рис. 4.2). 2-периодичность означает, что  $f$  отображает  $S_1$  на  $S_2$  и  $S_2$  — на  $S_1$ . На рис. 4.2 слева показана часть области притяжения, которая также является 2-периодической. Границей области притяжения является неустойчивое многообразие гиперболической 2-периодической траектории  $H$  с координатами  $(1,0094, -0,1100)$ ,  $(-0,2110, -0,4211)$ . Центры каждого «тройного крюка»  $S_1$  и  $S_2$  формируют 2-периодическую устойчивую траекторию  $S$  (см. рис. 4.2, справа). Сами «крюки» подобны аттрактору Хенона и образуют 6-периодический «странный» аттрактор  $A_6$ . Таким образом, аттрактор  $A$  имеет хаотическую компоненту  $A_6$ . На рис. 4.2 справа показана компонента аттрактора  $A_2$ , содержащая точку  $(0,2188, -0,7184)$  2-периодического стока  $S$ . Аттрактор  $A$  является замыканием неустойчивого многообразия  $W^u(P)$  6-периодической гиперболической орбиты  $P$  с координатами  $(0,1869, -0,5785)$ ,  $(0,3556, 0,7053)$ ,  $(0,2818, -0,7800)$ ,  $(0,6249, 0,6969)$ ,  $(0,1343, -0,7635)$ ,  $(0,8751, 0,4730)$ .



**Рис. 4.2.** Аттрактор «тройной крюк» и его область притяжения

Каждая компонента связности многообразия  $W^u(P)$  имеет две сепаратрисы (см. рис. 4.2, справа). Одна сепаратриса заканчивается в стоке  $S$ , другая — в хаотическом аттракторе  $A_6$ .

## 4.2. АТТРАКТОР НА СИМВОЛИЧЕСКОМ ОБРАЗЕ

Рассмотрим символический образ  $G$ , соответствующий покрытию с максимальным диаметром ячеек  $d$ . Пусть  $Ver(G)$  есть множество вершин графа  $G$ . Рассмотрим подграф  $G(L)$  с множеством вершин  $L \subset Ver(G)$  и множеством ребер  $i \rightarrow j$ , где вершины  $i$  и  $j$  принадлежат  $L$ . Будем говорить, что  $L$  — инвариантное множество, если для каждой вершины  $i \in L$  существуют ребра  $j \rightarrow i$  и  $i \rightarrow k$  в  $G(L)$ . Для построения инвариантного множества рассмотрим путь  $\omega = \{\dots, i_{-1}, i_0, i_1, \dots\}$  бесконечный в обе стороны. Множество вершин  $Ver(\omega)$  пути  $\omega$  образует инвариантное множество. Другими словами, семейство путей  $S = \{\omega\}$  дает нам инвариантное множество вершин  $Ver(S)$ . Можно сказать, что  $L$  инвариантное, если через каждую вершину  $i \in L$  проходит допустимый, бесконечный в обе стороны путь, лежащий в  $L$ . Согласно теореме 2.1, каждая траектория  $\{x_k\}$  гомеоморфизма  $f$  порождает путь  $\{z_k : x_k \in M(z_k)\}$  на символическом образе  $G$ . Следовательно, инвариантное множество  $\mathbb{X} M$  порождает инвариантное множество вершин вида

$$L(\Lambda) = \{z : M(z) \cap \Lambda \neq \emptyset\}.$$

В частности, множество всех вершин  $Ver(G)$  инвариантное. Пусть  $L$  — инвариантное множество вершин на символическом образе  $G$ . Множество вершин вида

$$En(L) = \{i : i \notin L, \text{ существует ребро } i \rightarrow j, j \in L\}$$

называется входом в множество  $L$ . Множество вершин вида

$$Ex(L) = \{i : i \notin L, \text{ существует ребро } j \rightarrow i, j \in L\}$$

называется выходом из множества  $L$ .

### Определение 4.3

- Будем говорить, что инвариантное множество  $L \subset Ver(G)$  есть аттрактор, если оно не имеет выхода, т.е.  $Ex(L) = \emptyset$ .
- Будем говорить, что инвариантное множество  $L \subset Ver(G)$  есть репеллер, если оно не имеет входа, т.е.  $En(L) = \emptyset$ .

Пусть  $L$  есть аттрактор на символическом образе. Будем говорить, что  $D(L)$  есть область притяжения для  $L$ , если для любого  $j \in D(L)$  допустимый путь, проходящий через вершину  $j$ , заканчивается в  $L$ . Иными словами, для любого пути  $\{\dots, j, \dots, i_k, \dots\}$  существует число  $K$  такое, что вершины  $i_k, k > K$ , принадлежат  $L$ .

**Утверждение 4.1** [89]. Пусть  $L \subset \text{Ver}(G)$  является аттрактором,  $D(L)$  — его область притяжения. Тогда:

- вершины из  $D(L) \setminus L$  невозвратные;
- множество вершин  $L^* = \text{Ver}(G) \setminus D(L)$  есть репеллер.

Репеллер  $L^* = \text{Ver}(G) \setminus D(L)$  назовем дуальным к аттрактору  $L$ , а пару  $L, L^*$  назовем парой аттрактор — репеллер. Следующее утверждение описывает структуру аттрактора на символическом образе.

**Утверждение 4.2** [89]. Каждый аттрактор  $L$  есть объединение некоторых классов эквивалентных возвратных вершин и путей между этими классами.

### 4.3. АТТРАКТОРЫ СИСТЕМЫ И СИМВОЛИЧЕСКОГО ОБРАЗА

Естественно предположить, что существует соответствие между аттракторами динамической системы и аттракторами символического образа. Следующая теорема показывает, что аттрактор символического образа порождает аттрактор динамической системы.

**Теорема 4.1** [89]. Если  $L$  и  $D(L)$  есть аттрактор и его область притяжения на символическом образе  $G$ , то существуют аттрактор  $\Lambda$  гомеоморфизма  $f$  и его область притяжения  $W^s(\Lambda)$  такие, что множество

$$U = \text{Int} \left\{ \bigcup M(i), i \in L \right\}$$

есть фундаментальная окрестность  $\Lambda$  и

$$\left\{ \bigcup M(j), j \in D(L) \right\} \subset W^s(\Lambda).$$

Таким образом, зная аттрактор и его область притяжения на символическом образе, мы можем построить фундаментальную окрестность аттрактора динамической системы и оценить снизу его область притяжения. Следующая теорема показывает, что аттрактор и его область притяжения динамической системы могут быть построены с любой точностью, если выбрать покрытие  $C$  достаточно мелким.

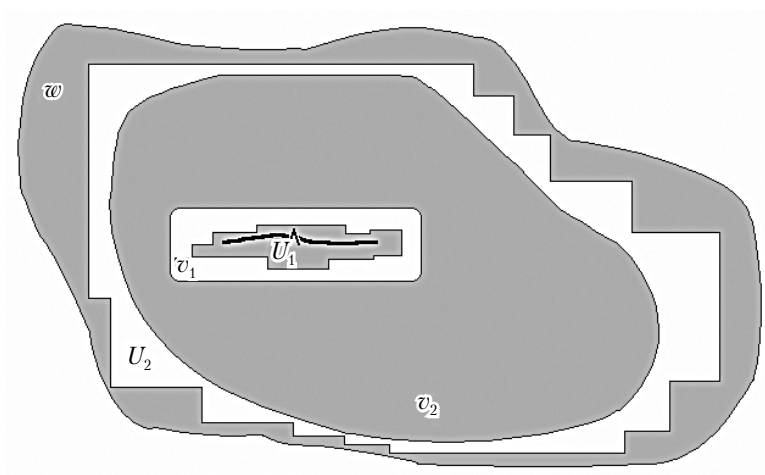
**Теорема 4.2** [89]. Пусть  $\Lambda \subset M$  — аттрактор,  $V_1$  — его произвольно малая окрестность,  $V_2$  — его произвольно большая окрестность такие, что

$$\Lambda \subset V_1 \subset V_2 \subset \bar{V}_2 \subset W^s(\Lambda).$$

Тогда существует  $d_0 > 0$  такое, что каждый символический образ  $G$ , соответствующий покрытию с максимальным диаметром ячеек  $d < d_0$ , имеет аттрактор  $L$  и его область притяжения  $DL$  такие, что

$$\Lambda \subset \{\bigcup M(i), i \in L\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \{\bigcup M(j), j \in D(L)\} \subset W^s(\Lambda).$$

На рис. 4.3 показаны геометрическая интерпретация оценки аттрактора и его области притяжения, построенные на основании теоремы 4.2.



**Рис. 4.3.** Оценка аттрактора и его области притяжения

#### 4.4. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА И АТТРАКТОРЫ

Между вершинами на символическом образе есть отношение квазиупорядка  $i \mapsto j$ , который означает, что существует допустимый путь вида

$$i = i_0, i_1, i_2, \dots, i_m = j.$$

Согласно утверждению 2.2 вершины символического образа  $G$  могут быть перенумерованы таким образом, что эквивалентные вершины окажутся занумерованными подряд идущими целыми числами, новые номера вершин  $i, j$  выбраны таким образом, что  $i < j$ , если  $i \mapsto j$ , но нет пути  $j \mapsto i$ , а матрица переходов имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & \ddots & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & P_k & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & P_s \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где каждый диагональный блок  $P_k$  либо отвечает одному из классов эквивалентности возвратных вершин  $H_k$ , либо соответствует некоторой невозвратной вершине и состоит из одного нуля, под диагональю стоят только нули, над диагональю стоят любые числа. Нумерация, описанная в утверждении 2.2, определена не единственным образом. Мы можем найти аттракторы символического образа следующим способом. Представим матрицу переходов в виде (4.1), где каждый класс эквивалентных возвратных вершин  $H$  дает диагональный блок  $P$ . При такой нумерации класс  $H$  порождает аттрактор  $L = \{i \geq \min(j \in H)\}$ , так как из  $L$  нельзя выйти. Аналогично, класс  $H$  порождает репеллер  $R = \{i \leq \max(j \in H)\}$ , так как в  $R$  нельзя войти. Пересечение  $R \cap L$  есть класс  $H$ . Два соседних ненулевых блока  $P_k$  и  $P_{k+1}$  матрицы (4.1) порождают аттрактор  $L = \{i \geq \min(j \in H_{k+1})\}$  и двойственный репеллер  $L^* = \{i \leq \max(j \in H_k)\}$ . Область притяжения аттрактора  $L$  есть  $D(L) = \{i > \max(j \in H_k)\}$ , так как все вершины  $D(L) \setminus L$  являются проходными (невозвратными). Из утверждений 2.2 и 4.2 следует, что для любого аттрактора  $L = \{i\}$ , его области притяжения  $D(L)$  и соответствующего репеллера  $L^* = \{k\}$  существует перенумерация такая, что  $k < j < i$ , где  $j \in D(L) \setminus L$ . Однако, согласно утверждению 4.1, вершины из множества  $D(L) \setminus L$  невозвратны. Следовательно, матрица переходов принимает вид

$$P = \begin{pmatrix} P_1^* & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_2^* \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где блоки  $P_1^*$  и  $P_2^*$  соответствуют репеллеру  $L^*$  и аттрактору  $L$ , между ними по диагонали стоят нули, под диагональю стоят нули, над диагональю стоят любые числа.

## 4.5. ФИЛЬТРАЦИЯ

Пусть  $f$  — гомеоморфизм многообразия  $M$ .

**Определение 4.4.** Фильтрацией гомеоморфизма  $f$  называется конечная последовательность  $F = \{F_0, F_1, \dots, F_m\}$  открытых множеств таких, что

$$\emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_m = M \text{ и } f(\overline{F_k}) \subset F_k$$

для каждого  $k = 0, 1, \dots, m$ .

Из определения следует, что каждое открытое множество  $F_k$  является поглощающим.

**Утверждение 4.3** [6]. Для фильтрации  $F$  каждое максимальное инвариантное подмножество в  $F_k$

$$A_k = \left\{ \bigcap f^n(F_k) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

есть аттрактор; аттракторы  $A_k$  вложены друг в друга:

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_m = M. \quad (4.3)$$

Из утверждения следует, что множество  $F_k$  является фундаментальной окрестностью аттрактора  $A_k$ . Последовательность аттракторов (4.3), порожденная фильтрацией  $F$ , назовем фильтрацией аттракторов. Множеством Морса называется пересечение аттрактора и репеллера. Максимальное инвариантное множество  $I_k$  в  $F_k \setminus F_{k-1}$  является пересечением аттрактора  $A_k$  и репеллера  $R_{k-1}$ , двойственного (дуального) к  $A_{k-1}$ , т.е.  $I_k = A_k \cap R_{k-1}$ . Описанный набор инвариантных множеств  $\{I_k\}$  называется разложением Морса. Следующие утверждение гарантирует, что фильтрация сохраняет свойства при  $C^0$ -возмущении динамической системы.

**Утверждение 4.4.** [6] Если конечная последовательность  $F$  является фильтрацией для гомеоморфизма  $f$ , то существует его окрестность  $V$  в  $C^0$ -топологии такая, что последовательность  $F$  является фильтрацией для любого отображения  $g$  из окрестности  $V$ .

Обозначим максимальное инвариантное подмножество в  $F_k \setminus F_{k-1}$  через

$$I_k(F) = \left\{ \bigcap f^n(F_k \setminus F_{k-1}) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

и положим  $I(F) = \left\{ \bigcup I_k(F) : k = 1, \dots, m \right\}$ .

**Утверждение 4.5.** [89] Цепно-рекуррентное множество  $CR$  лежит в  $I(F)$ :



$$CR \subset I(F) = \bigcup_k I_k(F).$$

Фильтрацию  $F$  называют тонкой, если имеет место равенство

$$CR = I(F) = \bigcup_k I_k(F).$$

В этом случае цепно-рекуррентное множество состоит из конечного числа компонент

$$CR = \bigcup_k \Omega_k, \quad \Omega_k = I_k(F)$$

и множество  $F_k \setminus \overline{F_{k-1}}$  является изолирующей окрестностью для  $\Omega_k$ .

В общем случае требуются условия, гарантирующие конечность числа компонент цепно-рекуррентного множества. Например, если цепно-рекуррентное множество является гиперболическим, то число компонент цепно-рекуррентного множества конечно. Однако, как было показано, существуют примеры динамических систем, которые имеют бесконечно много компонент цепно-рекуррентного множества, при этом у такой системы имеются неизоллированные компоненты. Это означает, что существуют динамические системы, для которых недостаточно конечной фильтрации, чтобы определить цепно-рекуррентное множество.

#### Определение 4.5

- Фильтрация  $F^* = \{F_0^*, F_1^*, \dots, F_p^*\}$  уточняет фильтрацию  $F = \{F_0, F_1, \dots, F_m\}$ , если для каждого  $\alpha = 1, \dots, p$  существует  $\beta(\alpha)$ ,  $1 \leq \beta(\alpha) \leq m$  такое, что

$$F_\alpha^* \setminus F_{\alpha-1}^* \subset F_{\beta(\alpha)} \setminus F_{\beta(\alpha)-1}.$$

- Последовательность  $F^1, F^2, \dots$  фильтаций для  $f$  называется тонкой, если  $F^{k+1}$  уточняет  $F^k$  и

$$\bigcap_k I(F^k) = CR.$$

Из определения 4.4 следует, что свойство последовательности  $F$  быть фильтрацией сохраняется при  $C^0$ -возмущении динамической системы. Поэтому можно сказать, что последовательность фильтаций контролирует рост цепно-рекуррентного множества. Далее мы покажем, что для любого гомеоморфизма  $f$  существует тонкая

последовательность фильтраций, причем она может быть построена с помощью последовательности символических образов.

#### 4.6. ФИЛЬТРАЦИЯ НА СИМВОЛИЧЕСКОМ ОБРАЗЕ

**Определение 4.6.** Конечная последовательность  $\Phi = \{B_0, B_1, \dots, B_m\}$  множеств вершин на символическом образе  $G$  называется фильтрацией, если выполнены следующие условия:

- 1)  $\emptyset = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_m = \text{Ver}(G)$ ;
- 2) для каждого  $B_k$ , если вершина  $i$  ребра  $i \rightarrow j$  лежит в  $B_k$ , то вершина  $j$  также лежит в  $B_k$ .

Второе условие означает, что не существует выхода из  $B_k$ . Пусть  $L_k$  максимальное инвариантное множество в  $B_k$ .

**Утверждение 4.6** [89]. Каждое максимальное инвариантное множество  $L_k \subset B_k$  есть аттрактор на символическом образе и

$$\emptyset = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_m = \text{Ver}(G).$$

Из теоремы 4.1 следует, что для каждого  $k$  множество  $B_k$  порождает фундаментальную окрестность

$$F_k = \text{Int} \left\{ \bigcup M(z), z \in B_k \right\}$$

аттрактора  $A_k$  и, следовательно, набор открытых множеств  $\emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_m$  образует фильтрацию на  $M$ . Таким образом, каждая фильтрация символического образа порождает фильтрацию динамической системы.

Пусть  $\Phi = \{B_0, B_1, \dots, B_m\}$  — фильтрация на символическом образе. Максимальное инвариантное подмножество множества  $B_k \setminus B_{k-1}$  обозначается как  $J_k(\Phi)$ , и положим

$$J(\Phi) = \bigcup_k J_k(\Phi).$$

В [89] показано, что множество возвратных вершин  $RV$  лежит в  $J(\Phi)$ :

$$RV \subset J(\Phi).$$

Мы будем называть фильтрацию  $\Phi$  тонкой, если множество возвратных вершин  $RV = J(\Phi)$ . Обозначим классы эквивалентных возвратных вершин через  $H_p$ ,  $p = 1, \dots, S$ . Будем писать  $H_p \prec H_q$  в том и только том случае, если существует допустимый путь из  $H_p$  в  $H_q$ . Пусть вершины на символическом образе перенумерованы со-

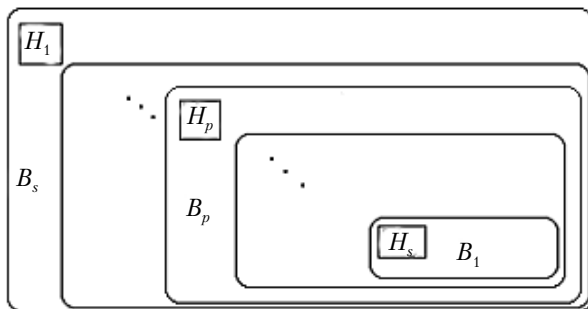
гласно утверждению 2.2. В этом случае матрица переходов принимает вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & \ddots & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \Pi_p & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \Pi_s \end{pmatrix},$$

где каждый диагональный блок  $\Pi_p$  соответствует либо классу эквивалентных возвратных вершин  $H_k$ , либо одной невозвратной вершине. В последнем случае блок  $\Pi_p$  состоит из одного нуля. Введем числа  $n(H_p) = \min\{i : i \in H_p\}$  и построим множества

$$E_p = \{i : i \geq n(H_p)\}, \quad p = 1, \dots, s, \quad E_{s+1} = \emptyset.$$

Положим  $B_k = E_p$ , где  $p = s+1-k$ ,  $k = 0, 1, \dots, s$ . Мы имеем  $B_0 = \emptyset$  и  $B_s = \text{Ver}(G)$ . Эту конструкцию иллюстрирует рис. 4.4.



**Рис. 4.4.** Фильтрация на символическом образе

**Утверждение 4.7** [89]. Построенная конечная последовательность  $\Phi = \{B_0, B_1, \dots, B_m = \text{Ver}(G)\}$  есть тонкая фильтрация на символическом образе  $G$ .

Сейчас мы готовы применить процесс последовательного подразбиения покрытий, чтобы получить тонкую последовательность фильтраций динамической системы. Рассмотрим покрытие  $C = \{M(i)\}$  многообразия  $M$  замкнутыми ячейками и символический образ  $G$  гомеоморфизма  $f$ .

**Теорема 4.3** [89]. Пусть  $C_m$  есть последовательность подразбиений покрытия  $C$  с диаметрами покрытий  $d_m \rightarrow 0$ ,  $G_m$  — последовательность символических образов для покрытий  $C_m$ ,  $\Phi_m$  — тонкие фильтрации на каждом символическом образе  $G_m$ ,  $F_m$  — фильтрации на многообразии  $M$ , порожденные  $\Phi_m$ . Тогда последовательность фильтраций  $\{F_m\}$  на  $M$  будет тонкой для динамической системы.

**Следствие 4.4.** Для каждого гомеоморфизма  $f$  существует тонкая последовательность фильтраций.

Пусть  $G$  — символический образ относительно покрытия  $C$ ,  $d$  — диаметр покрытия  $C$ . Мнозначное отображение  $h: M \rightarrow V$  сопоставляет точке  $x$  все вершины  $i$  такие, что  $x \in M(i)$ . Пусть  $\Omega$  — компонента цепно-рекуррентного множества. Из утверждения 3.5 следует, что образ  $h(\Omega)$  лежит в некотором классе эквивалентных возвратных вершин  $H(\Omega)$ , при этом компонента  $\Omega$  лежит в  $\{\bigcup M(i): i \in H(\Omega)\}$ . Из утверждения 4.7 следует, что класс  $H(\Omega)$  есть пересечение некоторых аттрактора  $L^+$  и репеллера  $L^-$  на символическом образе.

Аттрактор на символическом образе, согласно теореме 4.1, порождает фундаментальную окрестность

$$U^+ = \text{Int}\{\bigcup M(i), i \in L^+\}$$

некоторого аттрактора  $A^+$ , которая содержит окрестность  $\{\bigcup M(i), i \in H(\Omega)\}$  компоненты  $\Omega$ . Аналогично репеллер  $L^-$  на символическом образе порождает фундаментальную окрестность

$$U^- = \text{Int}\{\bigcup M(i), i \in L^-\}$$

некоторого репеллера  $A^-$ , которая содержит окрестность  $\{\bigcup M(i), i \in H(\Omega)\}$  компоненты  $\Omega$ . Пересечение  $A^+ \cap A^-$  образует множество Морса, оно содержит компоненту  $\Omega$ , однако может не совпадать с ней. Согласно теореме 4.2, аттрактор и репеллер могут быть построены с любой точностью при достаточно мелком покрытии. Пусть компонента  $\Omega$  является изолированной, т.е. существует ее окрестность  $V$  такая, что  $\Omega$  является наибольшим инвариантным множеством в  $V$ . В этом случае, согласно следствию 3.3, множество  $\{\bigcup M(i): i \in H(\Omega)\}$  будет лежать в  $V$  при достаточно малом диаметре покрытия  $d$ . Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

**Утверждение 4.8.** Изолированная компонента цепно-рекуррентного множества есть пересечение аттрактора и репеллера, т.е. является множеством Морса. Существует изолирующая окрестность компоненты, которая есть пересечение двух открытых множеств

$U^+ \cap U^-$ , где  $U^+$  есть поглощающее множество для  $f$ ,  $U^-$  есть поглощающее множество для  $f^{-1}$ .

Численное построение аттракторов, их областей притяжения реализованы для уравнения Дуффинга (см. пример 11.2). В параграфе 11.4 рассмотрен пример системы, которая имеет аттрактор в виде ленты Мёбиуса, а также построена фильтрация, содержащая эту ленту.

### *Контрольные вопросы и задания*

1. Приведите примеры аттракторов динамической системы.
2. Приведите примеры аттракторов на ориентированном графе.
3. Аттракторы и их области притяжения определяются установлением квазиупорядка, описанного в утверждении 2.2. Предложите алгоритм перенумерации вершин графа, который реализует данный квазиупорядок.
4. Описанный выше квазиупорядок однозначно определяет перенумерацию?
5. Теорема 4.1 описывает оценку аттрактора и его области притяжения. Опишите характер этих оценок (оценка сверху или снизу).
6. Что происходит с оценками аттрактора и его области притяжения при измельчении покрытия?
7. Для любого символического образа число аттракторов совпадает с числом компонент сильной связности. Если динамическая система имеет бесконечно много аттракторов, то что отражает аттракторы символического образа?
8. Пусть построена фильтрация символического образа  $G_1$  для покрытия  $C_1$ . Покрытие  $C_2$  есть подразбиение  $C_1$  и  $G_2$  является символическим образом для  $C_2$ . Как связаны фильтрации на  $G_1$  и  $G_2$ ?

## Глава 5

# ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ

### 5.1. ПОТОКИ НА СИМВОЛИЧЕСКОМ ОБРАЗЕ

Пусть  $f: M \rightarrow M$  — гомеоморфизм компактного многообразия  $M$ . Далее мы будем использовать понятия измеримого множества, меры, интеграла Лебега и др. Необходимые сведения по этим вопросам кратко изложены в главе 12.

Мера  $\mu$  на  $M$  является инвариантной для гомеоморфизма  $f$ , если для любого измеримого множества  $A \subset M$  выполнены равенства

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A) = \mu(f(A)).$$

Здесь и далее мы будем считать, что все меры являются борелевскими. Теорема Крылова — Боголюбова [70, 72] гарантирует существование инвариантной меры  $\mu$ , нормированной на  $M$ :  $\mu(M) = 1$ . Обозначим множество всех  $f$ -инвариантных нормированных мер  $\mathcal{M}(f)$ . В этой главе мы покажем, что любая  $f$ -инвариантная мера  $\mu$  и множество  $\mathcal{M}(f)$  могут быть построены с помощью последовательности символических образов, когда диаметр покрытий сходится к нулю. Если  $\mu_1, \mu_2$  являются инвариантными мерами и  $\alpha, \beta \geq 0$ ;  $\alpha + \beta = 1$ , то сумма  $\mu = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$  является инвариантной мерой [70]. Следовательно, множество всех  $f$ -инвариантных мер  $\mathcal{M}(f)$  является выпуклым и, более того, это множество является компактом в слабой топологии, см. [23, с. 511]. Сходимость  $\mu_n \rightarrow \mu$  в этой топологии означает, что

$$\int_M \phi d\mu_n \rightarrow \int_M \phi d\mu$$

для любой непрерывной функции  $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Мера  $\mu$  эргодична, если для любого инвариантного измеримого множества  $A$  либо  $\mu(A) = 0$ , либо  $\mu(M \setminus A) = 0$ . Точка  $\mu$  выпуклого множества  $\mathcal{M}(f)$  называется крайней, если  $\mu$  нельзя представить в виде

$$\mu = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2,$$

где  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(f)$  и  $0 < \alpha < 1$ . Известно [70], что крайними точками выпуклого множества  $\mathcal{M}(f)$  являются эргодические меры.

### Пример 5.1

Предположим, что точка  $x$  — периодическая с наименьшим периодом  $p$ , т.е. траектория  $T = \{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$  состоит из  $p$  различных точек и  $f^p(x) = x$ . Пусть мера  $\mu$  равномерно распределена по траектории  $T$ , т.е.  $\mu(x) = \mu(f(x)) = \dots = \mu(f^{p-1}(x)) = 1/p$  и мера множества  $A$  определяется как

$$\mu(A) = \mu(A \cap T) = k/p,$$

где  $k$  число точек траектории  $T$ , лежащих в  $A$ . Легко проверить, что данная мера является инвариантной и эргодической. Она дискретна в том смысле, что сосредоточена в конечном числе точек.

Известен [57, 75] метод построения инвариантной меры Синая — Боуэна — Руелла (SBR-мера), которая обладает рядом хороших свойств. Эта мера является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега и поэтому она называется «естественной» или «физической». Вообще говоря, не всякое отображение  $f$  обладает инвариантной SBR-мерой. Техника метода восходит к работе Улама [114], где по мере Лебега построена аппроксимация оператора Перрона — Фробениуса и последовательность мер, сходящаяся в слабой топологии к некоторой инвариантной мере, которая может не быть SBR-мерой, вообще говоря. В [57, 68] указаны различные условия, при которых описанная мера будет SBR-мерой. Мы будем строить все множество инвариантных мер  $\mathcal{M}(f)$ , при этом предлагаемая техника позволяет построить индивидуальную инвариантную меру, возможно, наделенную некоторыми дополнительными свойствами. Для решения поставленной задачи воспользуемся конструкцией символического образа динамической системы. Пусть  $C = \{M(1), M(2), \dots, M(n)\}$  — конечное покрытие области  $M$ ,  $G$  — символический образ. Не ограничивая общности, будем считать, что ячейки — это многогранники, которые являются замыканием своей внутренности и пересекаются по граничным дискам. Общая схема построения состоит в следующем. Определим на дугах символического образа вероятностное распределение  $m_{ij}$ , которое обладает некоторым свойством инвариантности. Такое распределение позволяет приписать меру ячейкам и получить приближение к инвариантной мере. Множество всех распределений  $\{m = (m_{ij})\}$  на  $G$  образует выпуклый многогранник  $\mathcal{M}(G)$ , который является приближением для множества инвариантных мер  $\mathcal{M}(f)$ . Затем мы рассмотрим последовательность подразбиений исходного разбиения при стремлении максимального диаметра ячеек к нулю. Образуется последовательность символических образов  $\{G_k\}$ , на которых определена последовательность распределений  $\{\mathcal{M}_k\}$ .

Переходя к пределу по  $k$ , получаем искомое семейство мер  $\mathcal{M}(f)$ . Если на каждом символическом образе  $G_k$  фиксировать распределение  $m_k$ , то существует подпоследовательность  $\{m_{k_p}\}$ , которая сходится к инвариантной мере  $\mu$  в слабой топологии. При этом любая инвариантная мера может быть получена описанным предельным переходом.

Для того чтобы понять, каким образом на символическом образе возникает распределение мер, рассмотрим следующее простое наблюдение. Предположим, что существует  $f$ -инвариантная нормированная мера  $\mu$  на многообразии  $M$ . Пусть ячейки покрытия  $C$  являются многогранниками, пересекающимися по граничным дискам. Построим измеримое разбиение  $C^* = \{M^*(i)\}$ , приписывая граничные диски к одной из примыкающих ячеек. Тогда каждой дуге  $i \rightarrow j$  символического образа мы можем приписать меру

$$m_{ij} = \mu(M^*(i) \cap f^{-1}(M^*(j))) = \mu(f(M^*(i)) \cap M^*(j)), \quad (5.1)$$

где последнее равенство является следствием инвариантности меры  $\mu$ . Кроме того, из инвариантности  $\mu$  следуют равенства

$$\begin{aligned} \sum_k m_{ki} &= \sum_k \mu(f(M^*(k)) \cap (M^*(i))) = \mu(M^*(i)) = \\ &= \sum_j \mu(M^*(i) \cap f^{-1}(M^*(j))) = \sum_j m_{ij}. \end{aligned}$$

Сумму  $\sum_k m_{ki}$  можно назвать потоком, входящим в вершину  $i$ , а сумму  $\sum_j m_{ij}$  — потоком, исходящим из  $i$ . Равенство

$$\sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij} \quad (5.2)$$

можно трактовать как закон Кирхгофа: для каждой вершины входящий поток равен исходящему потоку. Кроме того, имеет место равенство

$$\sum_{ij} m_{ij} = \mu(M) = 1, \quad (5.3)$$

которое означает, что распределение  $m_{ij}$  является нормированным или вероятностным. Таким образом, существование инвариантной меры  $\mu$  порождает на символическом образе распределение  $m_{ij}$ , которое удовлетворяет условиям (5.2) и (5.3). Описанное наблюдение приводит нас к следующему определению.



**Определение 5.1.** Пусть  $G$  — ориентированный граф. Поток на  $G$  называется распределение  $\{m_{ij}\}$  на дугах  $\{i \rightarrow j\}$  такое, что

$$\begin{aligned} m_{ij} &\geq 0; \\ \sum_{ij} m_{ij} &= 1; \end{aligned}$$

для любой вершины  $i$  имеет место равенство  $\sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}$ .

Последнее свойство можно назвать инвариантностью потока. Второе свойство нормировки можно записать в виде  $m(G) = 1$ , где под мерой графа понимается сумма мер его дуг. Иногда в теории графов описанное распределение называют замкнутым или инвариантным потоком. Для потока на графе  $G$  мы можем определить меру вершины  $i$  как

$$m_i = \sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}.$$

В таком случае получаем равенство  $\sum_i m_i = m(G) = 1$ . Как показано выше, по инвариантной мере строится поток на символическом образе. Теперь рассмотрим обратное построение. Пусть на символическом образе  $G$  определен поток  $m = \{m_{ij}\}$ , тогда на области  $M$  можно определить меру  $\mu$ , полагая

$$\mu(A) = \sum_i \frac{m_i v(A \cap M(i))}{v(M(i))}, \quad (5.4)$$

где  $v$  — нормированная на  $M$  мера Лебега, при этом предполагается, что мера Лебега каждой ячейки  $v(M(i)) \neq 0$  и мера пересечения ячеек  $v(M(i) \cap M(j)) = 0$  при  $i \neq j$ . В этом случае мера ячейки  $M(i)$  совпадает с мерой вершины  $i$ :

$$\mu(M(i)) = m_i.$$

Поскольку  $v$  — мера Лебега, построенная мера граничных дисков равна нулю и мера ячейки  $\mu(M(i)) = m_i$  не зависит от принадлежности граничных дисков к этой ячейке. Вообще говоря, построенная мера  $\mu$  не является инвариантной для  $f$ . Будет показано, что  $\mu$  сходится в слабой топологии к инвариантной мере, если максимальный диаметр ячеек стремится к нулю.

В параграфе 5.6 рассмотрен другой способ построения меры на многообразии. В каждой ячейке  $M(i)$  фиксируем точку  $x(i)$ , которая не лежит в других ячейках. Рассмотрим поток  $\{m_{ij}\}$  на  $G$  и меру вершины  $i$

$$m_i = \sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}.$$

Построим меру  $\mu^*$ , сосредоточенную в точках  $x(i)$ :

$$\mu^* = \sum_i m_i \delta(x(i)),$$

где  $\delta(x)$  — стандартная дельта-мера сосредоточенная в точке  $x$ . Тогда

$$\mu^*(A) = \sum_{x(i) \in A} m_i. \quad (5.5)$$

В параграфе 5.6 показано, что мера  $\mu^*$  сходится в слабой топологии к инвариантной мере, если диаметр разбиения стремится к нулю.

## 5.2. СВОЙСТВА ПОТОКОВ

Пусть  $G$  — абстрактный ориентированный граф, имеющий  $n$  вершин. Рассмотрим пространство  $\mathcal{M}(G) = \{m\}$  всех потоков на  $G$ . Пусть  $m^1 = \{m_{ij}^1\}$  и  $m^2 = \{m_{ij}^2\}$  — два потока, числа  $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ . Тогда нетрудно проверить, что распределение

$$m = \alpha m^1 + \beta m^2 = \{\alpha m_{ij}^1 + \beta m_{ij}^2\}$$

также является потоком. При этом мы будем говорить, что поток  $m$  является суммой потоков  $m^1$  и  $m^2$  с весами  $\alpha$  и  $\beta$ . Таким образом, пространство всех потоков  $\mathcal{M}(G)$  является выпуклым. Исследуем структуру множества  $\mathcal{M}(G)$ . Периодический путь  $\omega = (i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k = i_0)$  является простым или циклом, если все вершины  $\{i_t, t = 1, 2, \dots, k\}$  различны. Простой путь  $\omega$  порождает поток  $m(\omega)$ , сосредоточенный на  $\omega$  такой, что  $m_{ij} = 1/k$  для всех дуг периодического пути  $\omega$  и  $m_{ij} = 0$  для всех остальных дуг. Построенный поток будем называть простым потоком. Очевидно, что простой поток обладает свойством инвариантности, является единственным потоком, сосредоточенным на  $\omega$  и не раскладывается

в сумму других потоков. Таким образом,  $m(\omega)$  является крайней точкой множества потоков  $\mathcal{M}(G)$ . Поскольку число вершин конечно, следовательно, число циклов и простых потоков также конечно. Теорема Шоке говорит, что любая инвариантная мера раскладывается в интегральную сумму эргодических мер (точная формулировка дана ниже в виде теоремы 6.2). Следующая теорема является аналогом этой теоремы для потоков  $\mathcal{M}(G)$  на графе.

**Теорема 5.1 о разложении потока в сумму простых потоков**

- Любой поток  $m \in \mathcal{M}(G)$  раскладывается в сумму простых потоков:

$$m = \sum_k \alpha_k m(\omega_k),$$

где  $\alpha_k \geq 0$ ,  $\sum_k \alpha_k = 1$  и  $\{\omega_k\}$  есть полный набор циклов на  $G$ .

- Множество  $\mathcal{M}(G)$  является выпуклым многогранником, у которого простые потоки являются вершинами или крайними точками.

*Доказательство.* Пусть  $m = \{m_{ij}\}$  — поток на  $G$ . Рассмотрим множество дуг  $D = \{i \rightarrow j\}$  таких, что  $m_{ij} > 0$ . На этом множестве выполняется закон Кирхгофа (5.2). Это приводит к тому, что через любую дугу из  $D$  можно проложить бесконечный путь  $\omega^*$ , лежащий в  $D$ . Действительно, если существует дуга  $k \rightarrow i$  с  $m_{ki} > 0$ , то, согласно равенству (5.2), существует дуга  $i \rightarrow j$  с  $m_{ij} > 0$ . Граф имеет конечное число дуг, поэтому  $\omega^*$  содержит периодический путь  $\omega$ , который можно считать циклом. Пусть  $p$  — период цикла  $\omega$  и

$$m_{\min} = \min\{m_{ij} : i \rightarrow j \in \omega\} > 0 —$$

наименьшая мера дуги из  $\omega$ . Пусть число  $\alpha > 0$  такое, что

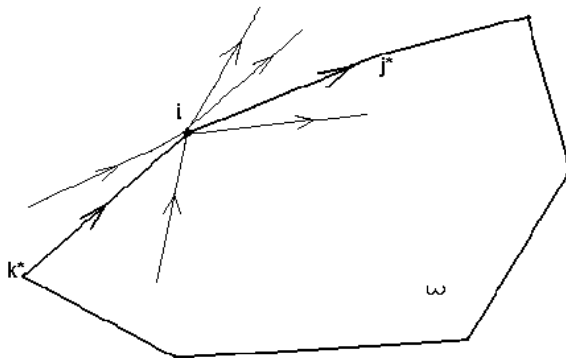
$$\alpha = pm_{\min} \text{ или } \alpha / p = m_{\min}.$$

Построим новое распределение  $m^*$  на дугах  $G$ . Для каждой дуги  $i \rightarrow j$  в  $\omega$  определим новую меру  $m_{ij}^* = m_{ij} - \frac{\alpha}{p} \geq 0$ .

Цикл  $\omega$  содержит  $p$  различных дуг. Если дуга  $i \rightarrow j$  не входит в  $\omega$ , то  $m_{ij}^* = m_{ij}$ . Суммируя меры  $m_{ij}^*$  по всем дугам, получаем равенство

$$\sum_{ij} m_{ij}^* = 1 - \alpha.$$

Покажем, что для меры  $m^*$  выполняется закон Кирхгофа (5.2) (рис. 5.1). Если вершина  $i$  не лежит на цикле  $\omega$ , то  $m_{ij}^* = m_{ij}$ ,  $m_{ki}^* = m_{ki}$  и равенство (5.2) очевидно выполнено. Пусть вершина  $i$  лежит на простом цикле  $\omega$ , тогда в  $\omega$  существуют дуги  $k^* \rightarrow i$  (входящая в  $i$ ) и  $i \rightarrow j^*$  (выходящая из  $i$ ), но не существует других дуг цикла  $\omega$ , связанных с вершиной  $i$ .



**Рис. 5.1.** Проверка закона Кирхгофа

В этом случае в левой и правой частях равенства

$$\sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij} \quad (5.6)$$

имеются слагаемые вида  $m_{k^*i}$  и  $m_{ij^*}$ , которые порождены дугами  $k^* \rightarrow i$  и  $i \rightarrow j^*$ . Остальные слагаемые не связаны с циклом  $\omega$ . Таким образом, равенство (5.6) имеет вид

$$m_{k^*i} + \sum_{k \neq k^*} m_{ki} = m_{ij^*} + \sum_{j \neq j^*} m_{ij}. \quad (5.7)$$

Если из левой и правой частей равенства (5.7) вычесть число  $\frac{\alpha}{p} = m_{\min}$ , то получим равенство

$$m_{k^*i} - \frac{\alpha}{p} + \sum_{k \neq k^*} m_{ki} = m_{ij^*} - \frac{\alpha}{p} + \sum_{j \neq j^*} m_{ij}$$

или

$$\sum_k m_{ki}^* = \sum_j m_{ij}^*.$$

Следовательно, новое распределение  $m^*$  удовлетворяет закону Кирхгофа. При этом множество дуг  $D^* = \{i \rightarrow j\}$  таких, что  $m_{ij}^* > 0$ , не содержит некоторых дуг из цикла  $\omega$ , так как на  $\omega$

$$m_{\min}^* = m_{\min} - \frac{\alpha}{p} = 0.$$

Цикл  $\omega$  порождает простой поток  $m_\omega$ , который равен  $\frac{1}{p}$  на каждой дуге из  $\omega$ , а на остальных дугах равен нулю. Тогда, согласно построению,

$$m_{ij} = m_{ij}^* + \frac{\alpha}{p}$$

для дуг из  $\omega$  и

$$m_{ij} = m_{ij}^*$$

для остальных дуг. Это приводит к равенству для потоков

$$m = m^* + \alpha m_\omega.$$

Повторяя процесс удаления простых циклов из множества  $D$ , через конечное число шагов придем к тому, что каждой дуге будет приписана нулевая мера. В этом случае исходный поток представляется в виде

$$m = \sum_{\omega} \alpha_{\omega} m_{\omega},$$

где  $\alpha_{\omega} \geq 0$ ,  $m_{\omega}$  — простой поток, а сумма берется по всем простым циклам. Из равенств  $m(G) = m_{\omega}(G) = 1$  следует, что  $\sum_{\omega} \alpha_{\omega} = 1$ . Теорема доказана.

*Замечание.* Из теоремы 5.1 следует, что мера  $m_{ij}$  может быть положительной только на дуге  $i \rightarrow j$ , через которую проходит периодический путь, т.е. необходимо, чтобы вершины  $i$  и  $j$  были возвратными.

Множество возвратных вершин разбивается на классы эквивалентности (сильные компоненты). Согласно теореме 3.9, сильные компоненты символического образа порождают окрестности цепно-рекуррентных множеств динамической системы. Известно [70], что инвариантная мера равна нулю вне цепно-рекуррентного

множества. Следовательно, при построении инвариантных мер достаточно рассматривать изолированную инвариантную компоненту цепно-рекуррентного множества. Поэтому, не ограничивая общности, можно предполагать, что граф  $G$  состоит из одной сильной компоненты.

Из теоремы 5.1 и конечности числа циклов следует, что любой поток можно задать следующим образом. Пусть  $\{\omega_z\}$  — множество всех простых путей (циклов),  $\{m(\omega_z)\}$  — множество простых потоков. Каждый простой поток  $m(\omega_z) = \{m_{ij}^z\}$  определяется однозначно и множество простых потоков  $\{m(\omega_z)\}$  является конечным. Согласно теореме 5.1, произвольный поток  $m$  определяется выбором неотрицательных чисел  $a_z$  таких, что  $\sum_z a_z = 1$  и  $m_{ij} = \sum_z a_z m_{ij}^z$ . Коэффициенты  $\{a_z\}$  назовем весами простых циклов  $\{\omega_z\}$ . Следовательно, поток  $m$  может быть представлен точкой на стандартном симплексе

$$\Delta = \left\{ a \in R^N : a_z \geq 0, \sum_z a_z = 1 \right\},$$

где  $N$  — число простых циклов на  $G$ . Число простых циклов  $N$ , как правило, очень велико, поэтому реализация описанного метода построения потоков на компьютере, в котором используются все простые циклы, может потребовать большого времени вычислений. Например, в полном графе (где каждая вершина соединена с каждой) число вершин —  $n$ , число дуг —  $n^2$ , а число простых циклов —  $N = 2^n$ . Ясно, что можно использовать неполный набор простых циклов, считая веса незадействованных циклов равными нулю.

Рассмотрим общие свойства множества потоков на графе. Пусть  $Q$  и  $G$  — ориентированные графы. Отображение  $s: Q \rightarrow G$  является отображением ориентированных графов, если  $s$  отображает вершины и дуги графа  $Q$  в вершины и дуги графа  $G$  и эти отображения согласованы. Иначе говоря, если  $k$  и  $l$  — вершины на  $Q$ ,  $s(k) = i$ ,  $s(l) = j$ , и существует дуга  $k \rightarrow l$ , то существует дуга  $i \rightarrow j$  на  $G$  и  $s(k \rightarrow l) = i \rightarrow j$ . При этом верно и обратное: если  $s(k \rightarrow l) = i \rightarrow j$ , то  $s(k) = i$  и  $s(l) = j$ .

Отображение ориентированных графов порождает отображение допустимых путей, в частности, периодический путь отображается на периодический путь, при этом период может уменьшиться. Возвратные вершины отображаются на возвратные вершины и эквивалентные возвратные вершины отображаются в эквивалентные.

Следовательно, сильные компоненты на  $Q$  отображаются в сильные компоненты на  $G$ .

**Утверждение 5.1.** Пусть  $Q$  и  $G$  — ориентированные графы,  $s: Q \rightarrow G$  является отображением ориентированных графов и существует поток  $m$  на  $Q$ . Тогда индуцируется поток  $m^* = s^* m$  на  $G$  такой, что мера дуги  $i \rightarrow j \in G$  вычисляется как

$$m_{ij}^* = \sum_{s(p \rightarrow q) = i \rightarrow j} m_{pq},$$

где сумма берется по всем дугам  $p \rightarrow q$ , которые отображаются на  $i \rightarrow j$ . Если дуга  $i \rightarrow j$  не имеет прообразов, то  $m_{ij}^* = 0$ .

*Доказательство.* Необходимо проверить выполнение для  $m^*$  двух свойств потока. Свойство нормировки проверяется тривиально, так как суммирование по всем вершинам  $i, j$  графа  $G$  совпадает с суммированием по всем  $p, q$  из  $Q$ :

$$\sum_{ij} m_{ij}^* = \sum_{pq} m_{pq} = 1.$$

Для проверки условия инвариантности фиксируем вершину  $i \in G$ . Если вершина  $i$  не имеет прообразов, т.е.  $s^{-1}(i) = \emptyset$ , то входящие в  $i$  и выходящие из  $i$  дуги также не имеют прообразов. Тогда их меры равны нулю и условие инвариантности тривиально выполняется. Если  $s^{-1}(i) \neq \emptyset$ , то рассмотрим все вершины  $p$  из прообраза  $s^{-1}(i)$ . Для каждой вершины  $p$  выполнено условие инвариантности

$$\sum_r m_{rp} = \sum_t m_{pt}.$$

Суммируя эти равенства по  $p \in s^{-1}(i)$  и учитывая, что  $m_{ij}^* = 0$  для дуг  $r \rightarrow l$ , не имеющих прообразов при отображении  $s$ , получаем искомое равенство

$$\sum_k m_{ki}^* = \sum_j m_{ij}^*$$

для вершины  $i \in G$ . Утверждение доказано.

**Утверждение 5.2.** Пусть  $Q$  и  $G$  — ориентированные графы,  $s: Q \rightarrow G$  является отображением ориентированных графов и существует поток  $m$  на  $Q$ , который является линейной комбинацией потоков:

$$m = \alpha m_1 + \beta m_2, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1.$$

Тогда

$$s^*(m) = \alpha s^*(m_1) + \beta s^*(m_2),$$

т.е.  $s^*$  является линейным отображением.

*Доказательство.* Пусть  $m_1 = \{m_{pq}^1\}$  и  $m_2 = \{m_{pq}^2\}$ . Тогда  $m = \{m_{pq} = \alpha m_{pq}^1 + \beta m_{pq}^2\}$ . По определению,

$$\begin{aligned} s^*(m)_{ij} = m_{ij}^* &= \sum_{s(p \rightarrow q)=i \rightarrow j} (\alpha m_{pq}^1 + \beta m_{pq}^2) = \\ &= \alpha \sum_{s(p \rightarrow q)=i \rightarrow j} m_{pq}^1 + \beta \sum_{s(p \rightarrow q)=i \rightarrow j} m_{pq}^2 = \\ &= \alpha m_{ij}^{1*} + \beta m_{ij}^{2*} = \alpha (s^* m_1)_{ij} + \beta (s^* m_2)_{ij}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

В пространстве потоков введем расстояние. Пусть  $m_k = \{m_{ij}^k\}$ ,  $\rho(f(x_{n_{k-1}}), x^*) < \varepsilon_{n_k} + \delta_k$ , положим расстояние

$$\rho(m_1, m_2) = \sum_{ij} |m_{ij}^1 - m_{ij}^2|.$$

В этой топологии  $\mathcal{M}(G)$  и  $\mathcal{M}(Q)$  являются выпуклыми компакт-ми.

**Утверждение 5.3.** Пусть  $\mathcal{M}(Q)$  — множество потоков на  $Q$ ,  $s: Q \rightarrow G$  есть отображение ориентированных графов. Тогда отображение  $s^*$  является непрерывным на  $\mathcal{M}(Q)$  в метрике  $\rho$  и  $s^*(\mathcal{M}(Q))$  является выпуклым компактом в  $\mathcal{M}(G)$ .

Доказательство утверждения достаточно просто, мы его опускаем. Утверждение 5.1 обосновывает следующие методы построения потоков на графе  $G$ .

**Утверждение 5.4.** Пусть на графе  $G$  существует периодический путь  $\omega$  периода  $N$ . Тогда на  $G$  имеется поток  $m^*$  такой, что

$$m_{ij}^* = \frac{k_{ij}}{N},$$

где  $k_{ij}$  — это количество проходов пути  $\omega$  через дугу  $i \rightarrow j$ .

*Доказательство.* Пусть  $\omega = \{i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_N \rightarrow i_1\}$ . Построим граф  $Q$ , который состоит из одного простого периодического цикла периода  $N$ , т.е.  $Q = \{1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow N \rightarrow 1\}$ . В этом случае на  $Q$  существует единственный поток  $m$  такой, что  $m_{pq} = 1/N$ . Пусть отображение  $s: Q \rightarrow G$  укладывает простой цикл  $Q$  на периодический путь



$\omega$ , т.е.  $s(k) = i_k$ . Согласно утверждению 5.1, на  $G$  иницируется поток такой, что мера дуги  $i \rightarrow j$  есть сумма мер прообразов этой дуги при отображении  $s$ , т.е.  $m_{ij}^* = \frac{k_{ij}}{N}$ , где  $k_{ij}$  — это число проходов пути  $\omega$  через дугу  $i \rightarrow j$ . Утверждение доказано.

Пусть  $G$  состоит из одной сильной компоненты. Тогда любые две вершины или дуги соединяются допустимым путем. Следовательно, существует путь  $\omega$ , который проходит через все вершины. Путь  $\omega$  можно назвать положительным на вершинах. Согласно утверждению 5.4, на  $G$  определяется поток  $m = \{m_{ij}\}$  с положительной мерой  $m_i = \sum_j m_{ij} > 0$  на каждой вершине. Аналогично на  $G$

существует путь  $\omega^*$ , который проходит через все дуги. Описанный путь  $\omega^*$  можно назвать положительным на дугах. Ясно, что путь положительный на дугах является положительным на вершинах. Согласно утверждению 5.4,  $\omega^*$  порождает поток, который является положительным ( $m_{ij} > 0$ ) на каждой дуге  $i \rightarrow j$ . Таким образом, на любом графе существует поток, положительный на каждой возвратной вершине или дуге.

**Утверждение 5.5.** Пусть на  $G$  существует семейство периодических путей  $\omega_1, \dots, \omega_r$  с периодами  $p_1, \dots, p_r$ , положим  $N = p_1 + \dots + p_r$ . Тогда на  $G$  имеется поток  $m$  такой, что

$$m_{ij} = \frac{k_{ij}}{N},$$

где  $k_{ij}$  — общее число проходов путей  $\omega_1, \dots, \omega_r$  через дугу  $i \rightarrow j$ .

*Доказательство* этого утверждения повторяет доказательство утверждения 5.4. Действительно, пусть выполнено предположение данного утверждения. Заметим, что утверждение 5.4 не предполагает, что графы  $G$  и  $Q$  являются связными. Более того, эти графы могут иметь много компонент связности. Построим граф  $Q$ , который состоит из несвязного объединения  $r$  простых периодических циклов  $\text{III.}, \text{I}$  с периодами  $p_1, \dots, p_r$ . Граф  $Q$  имеет  $N$  вершин и  $N$  дуг, где  $N = p_1 + \dots + p_r$ . Нетрудно проверить, что на  $Q$  существует поток  $m^*$  с мерой дуги  $m_{pq}^* = 1/N$ . Отображение  $s: Q \rightarrow G$  укладывает циклы  $\text{III.}, \text{I}$  на периодические пути  $\omega_1, \dots, \omega_r$  соответственно. Согласно утверждению 5.4, мера дуги  $i \rightarrow j$  есть сумма мер прообразов этой дуги при отображении  $s$ , т.е.  $m_{ij} = k_{ij} / N$ , где  $k_{ij}$  — общее число проходов путей  $\omega_1, \dots, \omega_r$  через дугу  $i \rightarrow j$ . Утверждение доказано.

Утверждение 5.5 допускает следующее обобщение.

**Утверждение 5.6.** Пусть на графе  $G$  существует семейство периодических путей  $\omega_1, \dots, \omega_r$  с периодами  $p_1, \dots, p_r$  и числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  такие, что  $\alpha_t \geq 0$ ,  $\sum_t \alpha_t = 1$ . Тогда на  $G$  имеется поток  $m$  такой, что

$$m_{ij} = \sum_{t=1}^r \alpha_t \frac{k_{ij}^t}{p_t},$$

где  $k_{ij}^t$  — число проходов пути  $\omega_t$  через дугу  $i \rightarrow j$ .

Утверждение 5.5 следует из утверждения 5.6, если положить  $\alpha_t = p_t / N$ ,  $N = \sum_t p_t$ . Из теоремы 5.1 следует, что любой поток из  $\mathcal{M}(G)$  может быть построен методом, описанным в утверждении 5.6.

Рассмотрим абстрактный ориентированный граф  $G$  и множество всех потоков  $\mathcal{M}(G)$  на  $G$ . Пусть  $m^1 = \{m_{ij}^1\}$  и  $m^2 = \{m_{ij}^2\}$  лежат в  $\mathcal{M}(G)$ . Расстояние в пространстве потоков  $\mathcal{M}(G)$  определяется как

$$\rho(m^1, m^2) = \max \{ |m_{ij}^1 - m_{ij}^2| \}.$$

Множество потоков  $\mathcal{M}(G)$  является выпуклым компактом в метрике  $\rho$ . Пусть  $H$  есть класс эквивалентных возвратных вершин, тогда множество  $\mathcal{M}(H)$  потоков, концентрированных на  $H$ , также является выпуклым компактом. Каждый периодический путь  $\omega$  порождает поток  $m(\omega)$  согласно утверждению 5.4. Поток  $m(\omega)$  назовем периодическим потоком.

**Теорема 5.2 о плотности периодических потоков.** Пусть  $H$  есть класс эквивалентных возвратных вершин и  $\mathcal{M}(H)$  есть пространство потоков на  $H$ . Тогда множество периодических потоков является плотным на  $\mathcal{M}(H)$  в метрике  $\rho$ .

*Доказательство.* Рассмотрим поток  $m \in \mathcal{M}(H)$ . В соответствии с теоремой 5.1 каждый поток может быть разложен в сумму простых периодических потоков. Предположим, что поток  $m$  раскладывается в сумму двух периодических потоков

$$m = \alpha m(1) + \beta m(2),$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$ ,  $m(1)$  и  $m(2)$  порождены периодическими путями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Покажем, что  $m$  может быть аппроксимирована периодическими потоками. Выберем вершины  $z_1 \in \omega_1$  и  $z_2 \in \omega_2$ ;  $z_1, z_2 \in H$ . Эти вершины являются эквивалентными возвратными, что означает существование периодического пути  $\omega_0$ , проходящего через  $z_1$  и  $z_2$ . Рассмотрим периодический путь  $\omega$  следующего вида: мы стартуем из  $z_1$ , делаем  $N_1$  оборотов по  $\omega_1$  и затем идем к  $z_2$  вдоль

$\omega_0$ , делаем  $N_2$  оборотов по  $\omega_2$  и возвращаемся к  $z_1$  вдоль  $\omega_0$ . Таким образом, можно записать

$$\omega = N_1\omega_1 + N_2\omega_2 + \omega_0.$$

Период периодического пути  $\omega$  есть  $N = p_1N_1 + p_2N_2 + q$ , где  $p_1$ ,  $p_2$  и  $q$  являются периодами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_0$  соответственно. Согласно утверждению 5.4, периодический путь  $\omega$  задает поток вида

$$m_{ij} = \frac{k(1)_{ij} N_1}{N} + \frac{k(2)_{ij} N_2}{N} + \frac{k(0)_{ij}}{N}, \quad (5.8)$$

где  $k(1)_{ij}$ ,  $k(2)_{ij}$  и  $k(0)_{ij}$  являются числами проходов путей  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_0$  через дугу  $i \rightarrow j$  соответственно. Поскольку число  $k(0)_{ij}$  фиксировано, следовательно,

$$\frac{k(0)_{ij}}{N} \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{k(1)_{ij} N_1}{N} + \frac{k(2)_{ij} N_2}{N} &= \frac{k(1)_{ij} p_1 N_1}{p_1 N} + \frac{k(2)_{ij} p_2 N_2}{p_2 N} = \\ &= m(1)_{ij} \frac{p_1 N_1}{N} + m(2)_{ij} \frac{p_2 N_2}{N}. \end{aligned}$$

Выберем целые числа  $V$  и  $W$  так, что  $V, W \rightarrow \infty$  и  $V/W \rightarrow \alpha$ . Поскольку  $0 < \alpha < 1$ , имеем  $W > V$ . Подставляя  $N_1 = p_2 V$  и  $N_2 = p_1(W - V)$ , получаем

$$N = p_1 p_2 V + p_1 p_2 (W - V) + q = p_1 p_2 W + q;$$

$$\frac{p_1 N_1}{N} = \frac{p_1 p_2 V}{p_1 p_2 W + q} = \frac{V}{W} \left( \frac{p_1 p_2}{p_1 p_2 + q/W} \right) \rightarrow \alpha;$$

$$\frac{p_2 N_2}{N} = \frac{p_1 p_2 (W - V)}{p_1 p_2 W + q} \rightarrow 1 - \alpha = \beta;$$

$$m_{ij} = \frac{k(1)_{ij} N_1}{N} + \frac{k(2)_{ij} N_2}{N} + \frac{k(0)_{ij}}{N} \rightarrow \alpha m(1)_{ij} + \beta m(2)_{ij}.$$

Таким образом, сумма периодических потоков  $\alpha m(1) + \beta m(2)$  аппроксимируется построенными периодическими потоками (5.8). Это вместе с теоремой 5.1 гарантирует, что каждый поток из  $\mathcal{M}(H)$  может быть аппроксимирован периодическими потоками. Доказательство закончено.

### 5.3. АППРОКСИМАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР

Рассмотрим гомеоморфизм  $f: M \rightarrow M$ , измеримое разбиение  $\mathcal{C}$  и символический образ  $G$ , порожденный данным разбиением. Исследуем, что происходит с пространством потоков  $\mathcal{M}(G)$  при последовательном измельчении покрытий. Пусть покрытие  $\mathcal{C}$  подвергается подразбиению, т.е. каждая ячейка  $M(i)$  разбивается на несколько ячеек  $M(i1), M(i2), \dots$  так, что  $M(i) = \bigcup_k M(ik)$ . Таким образом, мы получаем новое покрытие  $\mathcal{NC}$  и новый символический образ  $NG$ . Нумерация вершин на  $G$  и  $NG$  задается в виде  $\{i\}$  и  $\{ik\}$  соответственно. Естественное отображение  $s: NG \rightarrow G$  имеет очень простой вид  $s(ik) = i$ . Это отображение является отображением ориентированных графов. Отображение  $s$  позволяет перенести любой поток, заданный на  $NG$ , в поток заданный на  $G$ , как это описано в параграфе 5.2, т.е. построить отображение

$$s^*: \mathcal{M}(NG) \rightarrow \mathcal{M}(G),$$

где  $\mathcal{M}(G)$  и  $\mathcal{M}(NG)$  — множество потоков на  $G$  и  $NG$  соответственно. Действительно, пусть на  $NG$  имеется поток  $m = \{m_{ik,jl}\}$ , т.е. каждой дуге  $(ik) \rightarrow (jl)$  приписана мера  $m_{ik,jl}$ , для которой выполнены равенства

$$\sum_{ikjl} m_{ik,jl} = 1;$$

$$\sum_{kp} m_{kp,iq} = \sum_{jl} m_{iq,jl}.$$

Поток  $s^*(m) = \{m_{ij}\}$  на графе  $G$  определяется равенством

$$m_{ij} = \sum_{kl}^N m_{ik,jl},$$

т.е. мера дуги  $i \rightarrow j$  является суммой мер тех дуг  $(ik) \rightarrow (jl)$ , которые проектируются на  $i \rightarrow j$  отображением  $s: NG \rightarrow G$ . Согласно утвер-

ждениям 5.2 и 5.3, отображение  $s^* : \mathcal{M}(NG) \rightarrow \mathcal{M}(G)$  является непрерывным и линейным, а образ  $\mathcal{M}(NG)$  является выпуклым компактом в  $\mathcal{M}(G)$ . Ясно, что  $s^*(\mathcal{M}(NG)) \neq \mathcal{M}(G)$ , вообще говоря. Будем говорить, что потоки  $m$  и  $m^*$  согласованы, если  $s^*(m) = m^*$ .

Теперь рассмотрим последовательные подразделения  $C_1, C_2, C_3, \dots$  такие, что максимальный диаметр ячеек разбиений  $d_1, d_2, d_3, \dots$  сходится к нулю. При этом каждое покрытие  $C_k$  состоит из ячеек, которые являются многогранниками, пересекающимися по граничным дискам. Такая последовательность порождает последовательность символических образов  $G_1, G_2, G_3, \dots$ , их отображений  $s : G_k \rightarrow G_{k-1}$  и отображений потоков  $s^* : \mathcal{M}(G_k) \rightarrow \mathcal{M}(G_{k-1})$ . Таким образом, определены последовательности отображений символических образов:

$$G_1 \xleftarrow{s} G_2 \xleftarrow{s} G_3 \xleftarrow{s} \dots,$$

что порождает последовательность отображений потоков

$$\mathcal{M}(G_1) \xleftarrow{s^*} \mathcal{M}(G_2) \xleftarrow{s^*} \mathcal{M}(G_3) \xleftarrow{s^*} \dots$$

Отображение  $f : M \rightarrow M$  можно трактовать как бесконечный граф с вершинами  $x \in M$  и ребрами  $x \rightarrow f(x)$ . Для любого символического образа  $G$  существует многозначное отображение  $h : M \rightarrow G$  вида  $h(x) = \{i : x \in M(i)\}$ , т.е. точке  $x$  сопоставляются номера ячеек, в которых она лежит. Данное отображение является отображением ориентированных графов. Мы получаем последовательность вида

$$G_1 \xleftarrow{s} G_2 \xleftarrow{s} G_3 \xleftarrow{s} \dots \xleftarrow{h} \{f : M \rightarrow M\}. \quad (5.9)$$

Для любого символического образа  $G$  существует отображение  $h^* : \mathcal{M}(f) \rightarrow \mathcal{M}(G)$ , которое задается следующим образом. Пусть  $C^* = \{M^*(i)\}$  — разбиение, полученное из  $C$  приписыванием граничных дисков соседних ячеек к одному из них. В этом случае отображение  $h(x) = \{i : x \in M^*(i)\}$  является однозначным. Как было показано, существует поток  $h^*(\mu)$ , который определяется по формуле

$$h^*(\mu) = m = \{m_{ij} = \mu(M^*(i) \cap f^{-1}(M^*(j)))\}.$$

Последовательность (5.9) порождает последовательность вида

$$\mathcal{M}(G_1) \xleftarrow{s^*} \mathcal{M}(G_2) \xleftarrow{s^*} \mathcal{M}(G_3) \xleftarrow{s^*} \dots \xleftarrow{h^*} \mathcal{M}(f). \quad (5.10)$$

Пусть на каждом символическом образе  $G_k$  выбран поток  $m^k \in \mathcal{M}(G_k)$ , причем потоки  $\{m^k\}$  согласованы, т.е.

$$s^*(m^{k+1}) = m^k.$$

Используя меру Лебега, построим меру  $\mu_k$  на  $M$  для каждого  $k$ , полагая

$$\mu_k(A) = \sum_i m_i^k \frac{v(A \cap M(i))}{v(M(i))}, \quad (5.11)$$

где  $A$  — измеримое множество;  $M(i)$  — ячейки разбиения  $C_k$ ;  $v$  — лебегова мера, нормированная на  $M$ . В результате получена последовательность мер  $\{\mu_k\}$  на многообразии  $M$ .

**Теорема 5.3 о согласованной последовательности потоков.**

Пусть  $C_k$  — последовательные подразбиения такие, что максимальный диаметр ячеек  $d_k \rightarrow 0$ . Если  $m^k$  — согласованная последовательность потоков на символических образах  $G_k$ , то существует мера  $\mu$ , инвариантная для  $f$ , такая, что

$$\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k,$$

где сходимость рассматривается в слабой топологии.

*Доказательство.* Пусть  $m^k = \{m_{ij}^k\}$  — согласованная последовательность потоков на  $G_k$ ,  $\varphi$  — непрерывная функция на компакте  $M$  и  $C_k = \{M(i)\}$  — разбиение компакта  $M$ . Каждой ячейке  $M(i)$  припишем меру  $m_i^k$  вершины  $i \in C_k$ . Выберем точку  $x_i \in M(i)$  и построим интегральную сумму

$$F_k(\varphi) = \sum_i \varphi(x_i) m_i^k.$$

Покажем, что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(\varphi) = F(\varphi). \quad (5.12)$$

Для этого достаточно показать, что последовательность  $F_k(\varphi)$  является фундаментальной. Пусть  $C_l$  есть подразбиение покрытия

$C_k$ ,  $l > k$  и ячейки  $M(ir) \in C_l$ ,  $r = 1, 2, \dots$  образуют подразбиение ячейки  $M(i) \in C_k$ . Последовательность потоков согласована, поэтому  $m^k = s^*(m^l)$ , что дает равенство

$$m_i^k = \sum_r m_{ir}^l, \quad (5.13)$$

где  $m_{ir}$  — мера ячейки  $M(ir) \in C_l$  (или вершины  $(ir) \in G_l$ ). Оценим разность

$$|F_k(\varphi) - F_l(\varphi)| = \left| \sum_i \varphi(x_i) m_i^k - \sum_{ir} \varphi(x_{ir}) m_{ir}^l \right|.$$

Учитывая равенство (5.13) и равномерную непрерывность отображения  $\varphi$  на компакте  $M$ , получаем

$$\begin{aligned} |F_k(\varphi) - F_l(\varphi)| &= \left| \sum_{ir} (\varphi(x_i) - \varphi(x_{ir})) m_{ir}^l \right| \leq \sum_{ir} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{ir})| m_{ir}^l \leq \\ &\leq \max_{|x-y| \leq d_k} |\varphi(x) - \varphi(y)| \sum_{ir} m_{ir}^l = \alpha(d_k), \end{aligned}$$

где  $\alpha(d)$  — модуль непрерывности функции  $\varphi$ ;  $d_k$  — максимальный диаметр ячеек из покрытия  $C_k$ . Поскольку  $\alpha(d) \rightarrow 0$  при  $d \rightarrow 0$ , последовательность  $F_k(\varphi)$  является фундаментальной и предел (5.12) существует. Аналогично можно показать, что этот предел не зависит от выбора точек  $x_i \in M(i)$ . Таким образом, определен линейный функционал  $F(\varphi)$ , который является ограниченным:  $|F(\varphi)| \leq \sup_M |\varphi|$  и положительным:  $F(\varphi) \geq 0$  при  $\varphi \geq 0$ . Тогда, согласно теореме Рисса о представлении линейного функционала [23, 70], существует мера  $\mu$  такая, что

$$F(\varphi) = \int_M \varphi d\mu.$$

Поскольку мера  $\mu_k$  определена согласно формуле (5.11), следовательно, мера  $\mu_k$  на ячейке  $M(i)$  отличается от лебеговой постоянным множителем и мера каждой ячейки  $\mu_k(M(i)) = m_i^k$  совпадает с мерой вершины  $i \in G_k$ . Покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \mu$$

в слабой топологии, т.е. нужно показать, что для любой непрерывной функции  $\varphi$

$$\int_M \varphi d\mu_k \rightarrow \int_M \varphi d\mu$$

при  $k \rightarrow \infty$ . По теореме о среднем, для каждой ячейки  $M(i)$  существует точка  $x_i^*$  в замыкании  $\overline{M(i)}$  такая, что

$$\int_{M(i)} \varphi d\mu_k = \varphi(x_i^*) \mu_k(M(i)) = \varphi(x_i^*) m_i^k.$$

Тогда

$$\int_M \varphi d\mu_k = \sum_i \int_{M(i)} \varphi d\mu_k = \sum_i \varphi(x_i^*) m_i^k.$$

Таким образом, нужно доказать равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_i \varphi(x_i^*) m_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_i \varphi(x_i) m_i^k,$$

где  $|x_i^* - x_i| \leq d_k$ . Это можно доказать, используя модуль непрерывности функции  $\varphi$ .

Известно [70], что инвариантность меры  $\mu$  относительно  $f$  следует из равенства

$$\int_M \varphi d\mu = \int_M \varphi(f) d\mu,$$

где  $\varphi$  — любая функция, непрерывная на  $M$ . Рассмотрим интегральную сумму  $F_k(\varphi) = \sum_i \varphi(x_i) m_i^k$ , где

$$m_i^k = \sum_j m_{ij}^k = \sum_r m_{ri}^k.$$

Тогда

$$F_k(\varphi) = \sum_i \varphi(x_i) \sum_r m_{ri}^k = \sum_{ir} \varphi(x_i) m_{ri}^k.$$

Для каждого слагаемого  $\varphi(x_i) m_{ri}^k$  заменим точку  $x_i$  точкой  $x_{ri}$  так, что  $x_{ri} \in f(M(r)) \cap M(i)$ . При этом мы получаем

$$F_k(\varphi) = \sum_{ir} \varphi(x_{ri}) m_{ri}^k + \sum_{ri} (\varphi(x_i) - \varphi(x_{ri})) m_{ri}^k = \sum_{ir} \varphi(x_{ri}) m_{ri}^k + \varepsilon^*,$$



где  $\varepsilon^*$  оценивается модулем непрерывности функции  $\varphi$  и  $\varepsilon^*(d_k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Для каждой точки  $x_{ni} \in f(M(r)) \cap M(i)$  существует точка  $z_{ni} \in M(r) \cap f^{-1}(M(i))$  такая, что  $f(z_{ni}) = x_{ni}$ , т.е.  $z_{ni} = f^{-1}(x_{ni})$ . Получаем

$$F_k(\varphi) = \sum_{ir} \varphi(f(z_{ni})) m_{ni}^k + \varepsilon^*,$$

где все точки  $z_{ni}$ ,  $i=1, i=2, \dots$  лежат в ячейке  $M(r)$ . Заменяем эти точки одной точкой  $z_r \in M(r)$ . Получаем равенство

$$\begin{aligned} F_k(\varphi) &= \sum_{ir} \varphi(f(z_r)) m_{ni}^k + \sum_{ir} (\varphi(f(z_{ni})) - \varphi(f(z_r))) m_{ni}^k + \varepsilon^* = \\ &= \sum_r \varphi(f(z_r)) \sum_i m_{ni}^k + \varepsilon^{**} + \varepsilon^* = \sum_r \varphi(f(z_r)) m_r^k = F_k(\varphi(f)) + \varepsilon^{**} + \varepsilon^*, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon^{**}$  оценивается через модуль непрерывности суперпозиции  $\varphi(f)$  и  $\varepsilon^{**}(d_k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , приходим к искомому равенству

$$F(\varphi) = F(\varphi(f)),$$

т.е. мера  $\mu$  является инвариантной для  $f$ . Теорема доказана.

Как было отмечено ранее, каждая инвариантная мера  $\mu$  порождает (по формуле  $m_{ij} = \mu(f(M^*(i)) \cap M^*(j))$ ) последовательность потоков  $m^k$  на символических образах для последовательности подразбиений  $C_1, C_2, C_3, \dots$ . Нетрудно проверить, что такая последовательность является согласованной. Теорема 5.3 гарантирует обратное: каждая согласованная последовательность потоков  $m^k$  на символических образах  $G_k$  порождает инвариантную меру. Из этого вытекает следующее.

**Следствие 5.1.** Любая инвариантная мера  $\mu$  может быть построена методом, указанным в теореме 5.3.

Таким образом, инвариантная мера и согласованная последовательность потоков однозначно определяют друг друга.

#### 5.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ

Рассмотрим последовательные подразбиения  $C_k$  такие, что максимальный диаметр разбиений сходится к нулю. При этом каждое покрытие  $C_k$  состоит из ячеек, которые являются многогранниками, пересекающимися по граничным дискам. Такая последовательность порождает последовательность символических образов  $G_k$ , их ото-

бражений  $s: G_k \rightarrow G_{k-1}$  и отображений потоков  $s^*: \mathcal{M}(G_k) \rightarrow \mathcal{M}(G_{k-1})$ . Пусть на каждом символическом образе  $G_k$  задан поток  $m^k$  и эти потоки согласованы. Покажем, что инвариантную меру  $\mu$  можно вычислить непосредственно через потоки  $\{m^k\}$ .

Последовательность покрытий  $\{C_k\}$  порождает последовательность измеримых разбиений  $C_k^* = \{M_k^*(i)\}$  приписыванием общих граничных дисков к одной из них. При этом каждое  $C_{k+1}^*$  есть подразбиение  $C_k^*$ . Это означает, что ячейка  $M_k^*(i)$  есть объединение ячеек  $M_{k+1}^*(j)$  для  $j: s(j) = i$  или  $j \in J = s^{-1}(i)$ . Ячейки  $M_{k+1}^*(j)$  не пересекаются, поэтому можно считать, что  $M_k^*(i)$  есть сумма ячеек  $M_{k+1}^*(j)$ ,  $j \in s^{-1}(i)$ :

$$M_k^*(i) = \sum_{j \in s^{-1}(i)} M_{k+1}^*(j).$$

Меры  $\mu_k$  строятся по потокам  $m^k$  согласно (5.11). При этом значение меры  $\mu_k$  на ячейке  $M_k^*(i)$  совпадает с мерой вершины  $i$  потока  $m^k$ :

$$\mu_k(M_k^*(i)) = m_i^k.$$

Описанное наблюдение порождает равенство

$$M_k^*(i) = \sum_{j \in J} M_{k+1}^*(j),$$

которое дает следующее равенство:

$$m_i^k = \sum_{j \in J} m_j^{k+1}, \quad (5.14)$$

где  $J = s^{-1}(i)$ .

Равенство (5.14) задает связь между согласованными потоками  $m^k$  и  $m^{k+1}$ .

Следовательно,

$$\mu_k(M_k^*(i)) = m_i^k = \sum_{j \in J} m_j^{k+1} = \sum_{j \in J} \mu_{k+1}(M_{k+1}^*(j)) = \mu_{k+1}(M_k^*(i)).$$

Последовательно получаем равенство для любого  $t > k$ :

$$\mu_k(M_k^*(i)) = \mu_t(M_k^*(i)).$$

Это означает, что значения всех мер  $\mu_t$  на ячейке  $M_k^*(i)$  не меняются. Переходя к пределу при  $t \rightarrow \infty$ , получаем равенство для  $\mu$ -меры:

$$\mu(M_k^*(i)) = \mu_k(M_k^*(i)).$$

Таким образом, мы имеем равенства для инвариантной  $\mu$ -меры:

$$\mu(M_k^*(i)) = m_i^k \quad (5.15)$$

для любых  $i$  и  $k$ . Наша цель — показать, что  $\mu$  — мера любого борелевского множества однозначно определяется равенствами (5.14) и (5.15). Для этого достаточно вычислить меру любого замкнутого множества. Мера открытого множества  $B$  вычисляется через меру замкнутого множества  $M \setminus B$ :  $\mu(B) = 1 - \mu(M \setminus B)$  и, следовательно, мера  $\mu$  определяется для всех борелевских множеств, см. [23, с. 456–462].

**Теорема 5.4.** Пусть  $C_k$  — последовательные подразбиения такие, что максимальный диаметр ячеек  $d_k \rightarrow 0$ . Если  $\{m^k \in \mathcal{M}(G_k)\}$  — согласованная последовательность потоков,  $A$  — замкнутое множество и  $\mu$  — инвариантная мера построенная в теореме 5.3, то

$$\mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i^k, \quad (5.16)$$

где  $I = \{i : M_k^*(i) \cap A \neq \emptyset\}$ .

*Доказательство.* Исходя из равенств (5.15), найдем значение меры  $\mu$  для любого замкнутого множества  $A$ . Построим покрытие множества  $A$  ячейками покрытия  $C_k^*$ :

$$P_k(A) = \left\{ \bigcup M_k^*(i), i \in I : M_k^*(i) \cap A \neq \emptyset \right\}$$

для всех  $k \rightarrow \infty$ . Покажем, что

$$P_k(A) \supset P_{k+1}(A),$$

т.е. последовательность  $P_k(A)$  является убывающей. Обозначим  $I_k = \{i : M_k^*(i) \cap A \neq \emptyset\}$ . Равенство  $s(j) = i$  означает, что ячейка  $M_{k+1}^*(j)$  входит в разбиение ячейки  $M_k^*(i)$ . Если  $M_{k+1}^*(j) \cap A \neq \emptyset$  и  $s(j) = i$ , то

$$M_k^*(i) \cap A \supset M_{k+1}^*(j) \cap A \neq \emptyset.$$

Следовательно,  $s(I_{k+1}) \subset I_k$  и

$$P_{k+1} = \left\{ \bigcup M_{k+1}^*(j), j \in I_{k+1} \right\} \subset \left\{ \bigcup M_k^*(i), i \in I_k \right\} = P_k.$$

Из убывания последовательности  $P_k(A)$  следует, что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(A) = \bigcap_k P_k(A).$$

Ясно, что имеет место включение  $A \subset \bigcap_k P_k(A)$ . Покажем обратное включение от противного. Действительно, пусть найдется точка  $x \in \bigcap_k P_k(A)$ , которая не лежит в  $A$ . Поскольку  $A$  — замкнутое множество, расстояние  $\rho(x, A) = r > 0$ . Это означает, что ячейка  $M_k^*(i)$  диаметра  $d_k < r$ , содержащая точку  $x$ , не может пересекать множество  $A$ . Следовательно,  $x$  не лежит в пересечении  $\bigcap_k P_k(A)$ . Полученное противоречие приводит к равенству

$$\bigcap_k P_k(A) = A.$$

Поскольку ячейки  $M_k^*(i)$  не пересекаются при фиксированном  $k$ , получаем равенство

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(P_k(A)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} \mu(M_k^*(i)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} \mu(M_k^*(i)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i^k, \end{aligned}$$

где  $I = \{i : M_k^*(i) \cap A \neq \emptyset\}$ . Пределы, описанные выше, существуют по свойству монотонности и аддитивности меры (см. главу 12). Теорема доказана.

**Следствие 5.2.** Если  $B \subset M$  — открытое множество, то

$$\mu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in J} m_j^k,$$

где  $J = \{j : M_k^*(j) \subset B\}$ .

*Доказательство.* Множество  $A = M \setminus B$  является замкнутым и

$$\mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i^k,$$

где  $I = \{i : M_k^*(i) \cap A \neq \emptyset\}$ . Каждая ячейка  $M_k^*(i)$  или пересекает множество  $A = M \setminus B$  или лежит в  $B$ . Тогда множество

$$P_k(A) = \bigcup_{i \in I} M_k^*(i)$$

является дополнением к

$$P_k(B) = \bigcup_{j \in J} M_k^*(j)$$

на многообразии  $M$ . Из убывания последовательности  $P_k(A) \rightarrow A$  следует, что последовательность  $P_k(B)$  монотонно возрастает и сходится к  $B = M \setminus A$ . Тогда

$$\mu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcup_{j \in J} M_k^*(j) \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in J} m_j^k.$$

Утверждение доказано.

## 5.5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕСОГЛАСОВАННЫХ ПОТОКОВ

Перейдем к изучению несогласованной последовательности потоков. Рассмотрим последовательность символических образов  $G_1, G_2, \dots, G_t, \dots$  гомеоморфизма  $f$  для последовательных подразбиений  $C_1, C, \dots, C_t, \dots$ , где максимальный диаметр ячеек  $d_t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Пусть на каждом символическом образе  $G_t$  определен поток  $m^t$ . Потоки  $m^t$ , вообще говоря, не являются согласованными. Используя меру Лебега, по потокам  $m^t$  построим последовательность мер  $\mu_t$  на  $M$  согласно формуле (5.11). На каждом символическом образе  $G_\tau$  определена последовательность потоков  $m_\tau^k$ , которая получается путем проектирования потоков  $m^{\tau+k}$  отображением  $s^*: \mathcal{M}(G_{\tau+k}) \rightarrow \mathcal{M}(G_\tau)$ . В пространстве потоков на любом символическом образе  $G$  введем расстояние  $\rho(m^1, m^2) = \sum_{ij} |m_{ij}^1 - m_{ij}^2|$ , где  $m_{ij}^*$  — мера дуги  $i \rightarrow j$ ,  $m_i^* = \sum_j m_{ij}^*$  — мера ячейки  $M(i)$ .

**Определение 5.2.** Будем говорить, что последовательность потоков  $m^t$  сходится, если последовательность проекций  $m_\tau^k$  сходится в метрике  $\rho$  при  $k \rightarrow \infty$  на каждом  $G_\tau$ .

**Теорема 5.5.** Если последовательность потоков  $m^t$  сходится, то последовательность мер  $\mu_t$  сходится к инвариантной мере в слабой топологии.

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность символических образов  $G_1, G_2, \dots, G_t$ , для последовательных разбиений  $C_1, C, \dots, C_t, \dots$ , где максимальный диаметр ячеек  $d_t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Пусть на каждом символическом образе  $G_t$  определен поток  $m^t$ . Потоки  $m^t$ , вообще говоря, не являются согласованными. Используя меру Лебега, по потокам  $m^t$  построим последовательность мер  $\mu_t$  на  $M$  согласно формуле (5.11). На каждом символическом образе  $G_\tau$  определена последовательность потоков  $m_\tau^k$ , которая получается проектированием потоков  $m^{\tau+k}$  отображением  $s^*: \mathcal{M}(G_{\tau+k}) \rightarrow \mathcal{M}(G_\tau)$ . На каждом символическом образе  $G_\tau$  определен поток  $m_\tau^* = \lim_{k \rightarrow \infty} m_\tau^k$ . По построению, потоки  $m_\tau^*$  согласованы, т.е.  $s_{\tau+1}^*(m_{\tau+1}^*) = m_\tau^*$ . Согласно теореме 5.3, согласованная последовательность  $\{m_\tau^*\}$  порождает последовательность мер  $\mu_\tau^*$ , которая сходится в слабой топологии к инвариантной мере  $\mu$ . Покажем, что исходная последовательность  $m^t$  также сходится в слабой топологии к мере  $\mu$ . Пусть  $t = \tau + k$ ,  $G_\tau$  — символический образ для покрытия  $C_\tau$  и  $M(i)$  — ячейки покрытия  $C_\tau$ . Найдем

$$\int \varphi d\mu_t - \int \varphi d\mu = \sum_i \varphi(x_i) m_i^t - \sum_i \varphi(x_i^*) m_i^*,$$

где  $m_i^t = \mu_t(M(i))$ ,  $m_i^* = \mu(M(i))$ , точки  $x_i$  и  $x_i^*$  лежат в замыкании ячейки  $M(i)$  и определяются по теореме о среднем, примененной для каждой ячейки. По условию мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_i |m_i^t - m_i^*| &= \sum_i |\mu_t(M(i)) - \mu^*(M(i))| = \\ &= \sum_i |m_\tau^k(M(i)) - m_\tau^*(M(i))| \leq \rho(m_\tau^k, m_\tau^*) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $k \rightarrow \infty$ . Оценим разность

$$\begin{aligned} \left| \int \varphi d\mu_t - \int \varphi d\mu \right| &= \left| \sum_i \left[ \varphi(x_i)(m_i^t - m_i^*) + (\varphi(x_i) - \varphi(x_i^*)) m_i^* \right] \right| \leq \\ &\leq \|\varphi\| \sum_i |m_i^t - m_i^*| + \alpha(d_\tau) \sum_i m_i^* \leq \|\varphi\| \rho(m_\tau^k, m_\tau^*) + \alpha(d_\tau), \end{aligned}$$

где  $\|\varphi\| = \sup_M |\varphi(x)|$ ,  $d_\tau$  — наибольший диаметр  $C_\tau$ ,  $\alpha(d)$  — модуль не-прерывности функции  $\varphi$ . Для доказательства сходимости  $\mu_t \rightarrow \mu$  в слабой топологии нужно показать, что для данной функции  $\varphi$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $t_0$  такой, что

$$\left| \int \varphi d\mu_t - \int \varphi d\mu \right| < \varepsilon$$

при  $t > t_0$ . Для этого по  $\varepsilon/2$  и  $\varphi$  найдем  $\tau$  и  $d_\tau > 0$  такие, что  $\alpha(d_\tau) < \varepsilon/2$ . Для фиксированного  $\tau$ ,  $\varepsilon/2$  и  $\|\varphi\|$  найдем номер  $k$  такой, что  $\rho(m_\tau^k, m_\tau^*) < \varepsilon/(2\|\varphi\|)$ , при  $1 \leq \|\varphi\|$  и  $\rho(m_\tau^k, m_\tau^*) < \varepsilon/2$ , при  $\|\varphi\| < 1$ . Положим  $t_0 = \tau + k$ . При  $t > t_0$  имеем

$$\left| \int \varphi d\mu_t - \int \varphi d\mu \right| \leq \|\varphi\| \rho(m_\tau^k, m_\tau^*) + \alpha(d_\tau) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом,  $\int \varphi d\mu_t \rightarrow \int \varphi d\mu$  при  $t \rightarrow \infty$  и, следовательно, последовательность мер  $\mu_t$  сходится к  $\mu$  в слабой топологии. Теорема доказана.

Если последовательность  $m^t$  является согласованной, т.е.  $s^*(m^{t+1}) = m^t$ , то  $m_\tau^k = m^\tau$  и последовательность проекций  $m_\tau^k$  сходится к  $m^\tau$ . Следовательно, теорема 5.5 является обобщением теоремы 5.3. Однако данные теоремы не применимы к последовательности  $m^t$ , если она не удовлетворяет условиям теоремы 5.5. Следующая теорема описывает свойства произвольной последовательности.

**Теорема 5.6.** Пусть на последовательности символических образов  $\{G_t\}$  гомеоморфизма  $f$  определена последовательность потоков  $\{m^t\}$  и максимальный диаметр разбиений  $d_t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда:

- существует подпоследовательность мер  $\mu_{t_k}$  (построенных по формуле (5.11)) сходящаяся в слабой топологии к мере  $\mu$  инвариантной для  $f$ ;
- если некоторая подпоследовательность мер  $\mu_{t_l}$  сходится в слабой топологии к мере  $\mu^*$ , то она является инвариантной для  $f$ .

*Доказательство.* Рассмотрим один из символических образов, например  $G_1$ . Множество потоков на  $G_1$  образует многогранник  $\mathcal{M}_1$ , который описывается как линейная оболочка простых потоков. Каждый поток  $m = \{m_{ij}\}$  является точкой в  $R^N$ , где  $N$  — число вершин. На  $\mathcal{M}_1$  определено расстояние  $\rho(m^1, m^2)$ . Используя естественное отображение  $s^*: \mathcal{M}(G_t) \rightarrow \mathcal{M}(G_1) = \mathcal{M}_1$ , перенесем потоки  $m^t$  на граф  $G_1$  и обозначим их  $m_1^t$ , т.е.  $m_1^t = s^*(m^t)$ . Таким образом, на компакте  $\mathcal{M}_1$  определяется последовательность  $\{m_1^t\}$ , из которой можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, будем считать, что исходная последовательность является сходящейся. Пусть  $m_1^* = \lim_{t \rightarrow \infty} m_1^t$ . Рассмотрим символический образ  $G_2$ ,

на котором построим аналогичным образом поток  $m_2^*$  как предел некоторой подпоследовательности проекций  $s^*(m^t)$  на  $\mathcal{M}_2$ . Так можно построить  $m_t^*$  на каждом символическом образе  $G_t$ . Если взять диаго-

нальную последовательность  $m^{t_k}$ , то для каждого символического образа  $G_t$  проекции  $s^*(m^{t_k})$  сходятся к  $m_t^*$ . Согласно теореме 5.5, последовательность мер  $\mu_{t_k}$  сходится в слабой топологии к инвариантной мере  $\mu$ . Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

*Доказательство* второго утверждения. Пусть существует подпоследовательность мер сходящаяся в слабой топологии к мере  $\mu$ . Не ограничивая общности, будем считать, что сходится исходная последовательность  $\mu_t$ . Согласно предыдущему утверждению, из последовательности  $\mu_t$  можно выделить подпоследовательность, которая сходится к инвариантной мере  $\mu^*$ . Из единственности предела следует равенство  $\mu^* = \mu$ , т.е. мера  $\mu$  — инвариантна. Теорема доказана.

Предыдущие результаты относились к последовательностям потоков, построенных на символических образах для разбиений с максимальными диаметрами  $d_k \rightarrow 0$ . При этом мы получаем хорошее приближение инвариантной меры, если выполнены условий теорем 5.3 или 5.5, либо нужно перейти к подпоследовательности приближений, но как строить такую подпоследовательность — неизвестно. Ясно, что для практического построения инвариантной меры эти результаты малопригодны. Поэтому желательно иметь результат, гарантирующий, что индивидуальный поток, построенный для достаточно мелкого разбиения, хорошо аппроксимирует некоторую инвариантную меру.

**Теорема 5.7 об аппроксимации множества инвариантных мер.** Для любой окрестности (в слабой топологии)  $U$  множества  $\mathcal{M}(f)$  найдется положительное число  $d_0$  такое, что для всякого покрытия  $C$  с максимальным диаметром  $d < d_0$  и любого потока  $m$  на символическом образе  $G$ , построенного относительно покрытия  $C$ , мера  $\mu$ , построенная согласно (5.11) по  $m$ , лежит в окрестности  $U$ .

*Доказательство* проведем от противного. Пусть найдется некоторая окрестность  $U$  множества  $\mathcal{M}(f)$  такая, что для каждого покрытия  $C_k$  с максимальным диаметром  $d_k$  на символическом образе  $G_k$  найдется поток  $m_k$ , для которого мера  $\mu_k$  не лежит в окрестности  $U$  и при этом  $d_k \rightarrow 0$ . Согласно теореме 5.6 существует подпоследовательность  $\{m_{k_p}\}$  такая, что соответствующая последовательность мер  $\mu_{k_p}$  сходится к инвариантной мере  $\mu \in \mathcal{M}(f)$ . Это означает, что, начиная с некоторого номера, вся последовательность  $\mu_{k_p}$  лежит в  $U$ , а это противоречит предположению. Следовательно, наше предположение неверно и теорема доказана.

Теорема гарантирует, что любая мера, построенная по потоку на символическом образе, хорошо аппроксимирует некоторую ин-



вариантную меру, если только диаметр ячеек достаточно мал. В реальных расчетах мы можем построить только конечное число символических образов, поэтому полученный результат дает обоснование практического вычисления приближений инвариантных мер. Более того, теорема гарантирует, что множество всех потоков  $\mathcal{M}(G)$  на символическом образе хорошо аппроксимирует множество инвариантных мер  $\mathcal{M}(f)$ , если только диаметр ячеек достаточно мал.

## 5.6. АППРОКСИМАЦИЯ $\Delta$ -МЕРАМИ

Пусть  $C = \{M(i)\}$  — покрытие многообразия  $M$  многогранниками, которые пересекаются по граничным дискам. Разбиение  $C^* = \{M^*(i)\}$  получено из  $C$  приписыванием граничных дисков к одной из примыкающих ячеек. Ячейки  $M^*(i)$  являются измеримыми, но могут быть незамкнутыми. Пусть на символическом образе  $G$  определен поток  $m = \{m_{ij}\}$ , тогда на  $M$  можно определить меру  $\mu$ , полагая

$$\mu(A) = \sum_i m_i \frac{v(A \cap M(i))}{v(M(i))}, \quad (5.17)$$

где  $m_i = \sum_j m_{ij} = \sum_k m_{ki}$ ,  $v$  — нормированная на  $M$  мера Лебега. В этом случае мера ячейки  $M(i)$  совпадает с мерой вершины  $i$ :

$$\mu(M(i)) = m_i.$$

Поскольку мера Лебега граничных дисков равна нулю, следовательно,

$$\mu(M^*(i)) = m_i.$$

Из приведенных выше теорем следует, что мера, построенная по формуле (5.17), является приближением к инвариантной мере в том смысле, что  $\mu$  сходится в слабой топологии к инвариантной мере, когда максимальный диаметр ячеек стремится к нулю. Равенство меры ячеек  $M^*(i)$ ,  $M(i)$  и меры вершины  $i$  является основным условием связи меры  $\mu$  и потока  $m$ . Равенством (5.17) мы распространяем меру  $\mu$  на подмножества ячейки  $M(i)$ , используя меру Лебега  $v$ . Возникает вопрос: насколько важно использовать меру Лебега при построении меры  $\mu$ . Если  $\phi(x)$  является непрерывной функцией на  $M$ , то, по теореме о среднем, для каждой ячейки  $M^*(i)$  существует (средняя) точка  $x_i$  такая, что

$$\int_{M^*(i)} \varphi d\mu = \varphi(x_i) \mu(M^*(i)) = \varphi(x_i) m_i.$$

О точке  $x_i$  известно только то, что она лежит в замкнутой ячейке  $M(i)$ . Если для распространения меры  $\mu$  на подмножества ячейки использовать другую меру, то точка  $x_i$  начнет меняться, оставаясь в ячейке  $M(i)$ .

**Утверждение 5.7.** Пусть для покрытия  $C = \{M(i)\}$ , описанного выше, и потока  $m = \{m_{ij}\}$  строится мера  $\mu$  по формуле (5.17) и мера  $\mu^*$  такая, что:

- мера ячейки  $\mu^*(M(i)) = m_i = \sum_j m_{ij}$ ;
- для любой непрерывной функции  $\varphi$  имеет место равенство

$$\int_{M^*(i)} \varphi d\mu^* = \varphi(x_i^*) m_i, \quad x_i^* \in M(i).$$

Тогда

$$\left| \int_M \varphi d\mu - \int_M \varphi d\mu^* \right| \leq \alpha(d);$$

$d$  — диаметр покрытия,  $\alpha(\cdot)$  — модуль непрерывности функции  $\varphi(x)$ .  
*Доказательство.* Найдем

$$\int_M \varphi d\mu = \sum_i \int_{M^*(i)} \varphi d\mu = \sum_i \varphi(x_i) \mu(M^*(i)) = \sum_i \varphi(x_i) m_i$$

и

$$\int_M \varphi d\mu^* = \sum_i \int_{M^*(i)} \varphi d\mu^* = \sum_i \varphi(x_i^*) \mu^*(M^*(i)) = \sum_i \varphi(x_i^*) m_i,$$

где точки  $x_i$  и  $x_i^*$  лежат в замкнутой ячейке  $M(i)$ . Тогда

$$\left| \int_M \varphi d\mu - \int_M \varphi d\mu^* \right| \leq \sum_i |\varphi(x_i) - \varphi(x_i^*)| m_i \leq \alpha(d).$$

Утверждение доказано.

Следствием данного утверждения является следующая теорема.

**Теорема 5.8.** Рассмотрим последовательность символических образов  $G_t$  для покрытий с диаметрами  $d_t \rightarrow 0$  и последовательность потоков  $m_t$  на  $G_t$ . Пусть на  $M$  имеется две последовательности мер

$\mu_t$  и  $\mu_t^*$ , где  $\mu_t$  строится по формуле (5.17), а мера  $\mu_t^*$  удовлетворяет условиям утверждения 5.7 для каждого  $t$ . Тогда меры  $\mu_t$  и  $\mu_t^*$  сходятся в слабой топологии к одному пределу.

Это означает, что все предыдущие теоремы об аппроксимации инвариантных мер остаются верными для мер, описанных в утверждении 5.7.

Построим аппроксимацию инвариантных мер мерами, каждая из которых сосредоточена в конечном наборе точек. Пусть  $\delta(x)$  есть мера (функция) Дирака, сосредоточенная в точке  $x$ , т.е.

$$\int_M \varphi d\delta(x) = \varphi(x).$$

В каждой ячейке  $M^*(i)$  выберем точку  $x_i$ . Построим меру

$$\mu^* = \sum_i m_i \delta(x_i). \quad (5.18)$$

Построенную меру будем называть дискретной мерой сосредоточенной в точках  $\{x_i\}$ . Для дискретной меры  $\mu^*$  выполнено равенство

$$\int_M \varphi d\mu^* = \sum_i \varphi(x_i) m_i, \quad x_i \in M(i).$$

Мера ячеек  $M^*(i)$  и  $M(i)$  совпадает с мерой  $m_i$  вершины  $i$ . Таким образом, все условия утверждения 5.7 выполнены и теорема 5.8 гарантирует, что верны следующие теоремы.

**Теорема 5.9.** Пусть на последовательности символических образов  $G_t$  гомеоморфизма  $f$  определены последовательность потоков  $\{m^t\}$  и максимальный диаметр разбиений  $d_t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда:

- существует подпоследовательность дискретных мер  $\mu_{t_k}$ , построенных согласно (5.18), сходящаяся в слабой топологии к мере  $\mu$ , инвариантной для  $f$ ;
- если некоторая подпоследовательность дискретных мер  $\mu_{t_l}$  сходится в слабой топологии к мере  $\mu^*$ , то она является инвариантной для  $f$ .

**Теорема 5.10.** Для любой окрестности (в слабой топологии)  $U$  множества  $\mathcal{M}(f)$  найдется положительное число  $d_0$  такое, что для всякого покрытия  $C$  с максимальным диаметром  $d < d_0$  и любого потока  $m$  на символическом образе  $G$ , построенного относительно покрытия  $C$ , дискретная мера  $\mu$ , построенная согласно (5.18), по  $m$ , лежит в окрестности  $U$ .

## 5.7. МЕТОД БАЛАНСИРОВКИ

Мы уже рассмотрели метод построения потока на графе, который основан на использовании семейства периодических путей (см. утверждение 5.6). Сейчас мы рассмотрим другой метод, который позволяет, исходя из произвольного распределения, итерационным способом построить поток, обладающий экстремальными свойствами.

Пусть матрица  $P = (p_{ij})$  задает распределение неотрицательных чисел на дугах графа  $G$ . Мы будем строить поток только на его положительной части  $G(P^+) = \{i \rightarrow j : p_{ij} > 0\}$ . Множество дуг  $G(P^+)$ , на которых распределение  $P$  положительно, назовем носителем этого распределения. Из теоремы 5.1 следует, что для существования потока на  $G(P^+)$  необходимо, чтобы носитель содержал какой-нибудь периодический путь. Например, для этого достаточно положить  $p_{ij} = 1$  на всех возвратных дугах. Для простоты изложения предположим, что граф  $G$  состоит из одной сильной компоненты.

Пусть  $G$  — произвольный граф и  $n$  — число его вершин. Матрица  $x = (x_{ij})$  задает поток на  $G$  тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$x_{ij} \geq 0;$$

$$\sum_{ij} x_{ij} = 1;$$

$$\bullet \quad \sum_j x_{ij} = \sum_k x_{ki} \text{ для } i = 1, 2, \dots, n.$$

Кроме того, мы хотим найти поток, носитель которого лежит в  $G(P^+)$ . Для этого нужно потребовать, чтобы  $x_{ij} = 0$  при  $p_{ij} = 0$ . Подобная задача возникает в теории выпуклого программирования при решении некоторых экстремальных задач. Мы будем опираться на работу [5], где обоснован итерационный метод решения подобных экстремальных задач. Следует отметить, что, вероятно, впервые, задача о вычислении замкнутого потока на графе возникает как специальная транспортная задача. Архитектор Г.В. Шелейховский в 1940-х гг., проектируя станции метро в Ленинграде, успешно решал такую транспортную задачу методом, который можно назвать методом балансировки [47]. Исходя из произвольного распределения, он предложил последовательно менять его так, чтобы удовлетворить только одно равенство, не заботясь о других. Повторяя такую балансировку циклически, он получил последовательность распределений, которая быстро сходилась к искомому решению. Фактически мы

будем решать нашу задачу таким же методом. Целью настоящего раздела является обоснование применения метода балансировки к задаче вычисления потоков на графе.

Матрица  $x = (x_{ij})$  задается  $n^2$  числами, поток накладывает  $n+1$  условие (уравнения) на эти числа. Следовательно, мы имеем некоторую свободу выбора, которую используем для решения дополнительной экстремальной задачи.

**Теорема 5.11.** Пусть дано произвольное неотрицательное распределение  $P = (p_{ij})$ , для которого носитель  $G(P^+)$  содержит цикл. Тогда существует поток  $Q = (q_{ij})$  такой, что его носитель  $G(Q^+)$  лежит в  $G(P^+)$ , а сам он дает максимум функции

$$g(x) = \sum_{ij} x_{ij} \ln \frac{p_{ij}}{x_{ij}} = \sum_{ij} x_{ij} \ln p_{ij} - \sum_{ij} x_{ij} \ln x_{ij}.$$

*Замечание.* Здесь, как обычно, мы по непрерывности полагаем  $0 \ln 0 = 0$ .

*Доказательство.* Необходимо решить задачу нахождения точки максимума функции  $g$  на описанном выше множестве. Пусть  $d$  — число дуг, входящих в носитель  $G(P^+)$ ,  $d \leq n^2$ . Если ненулевые элементы матрицы  $x = (x_{ij})$ , где  $x_{ij} > 0$  при  $p_{ij} > 0$  и  $x_{ij} = 0$  при  $p_{ij} = 0$ , упорядочить,  $(ij) \rightarrow k = 1, 2, \dots, d$  (например, по строкам сверху вниз), то  $x$  можно рассматривать как точку в пространстве  $S = \{x \in R^d : x_k = x_{ij} > 0\}$ . Обозначим

$$B_0 = \left\{ x \in R^d : x_{ij} > 0, \sum_{ij} x_{ij} = 1 \right\};$$

$$B_i = \left\{ x \in R^d : x_{ij} > 0, \sum_j x_{ij} = \sum_k x_{ki} \right\}$$

для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Пересечение  $D = B_0 \bigcap_i B_i$  является компактом, который лежит в замыкании  $\bar{S}$ , поэтому функция  $g$  достигает своего максимума. Наша задача состоит в том, чтобы найти эту точку максимума. В работе [5] была решена следующая задача выпуклого программирования.

Пусть  $f(x)$  — строго выпуклая функция, непрерывно дифференцируемая на выпуклом множестве  $S \subset R^d$  и непрерывна на замыкании  $\bar{S}$ . Требуется минимизировать функцию  $f$  при линейных условиях

$$Ax = b, \quad x \in \bar{S},$$

где  $b \in R^m$ ,  $A$  — матрица с  $m$  столбцами и  $d$  строками. Применим результаты работы [5] к функции  $f = -g$ . Линейные условия состоят из  $n+1$  уравнения, первое их которых задает нормировку

$$\sum_{ij} x_{ij} = 1, \quad (5.19)$$

а остальные  $n$  уравнений описывают инвариантность (закон Кирхгофа)

$$\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.20)$$

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

1) выберем произвольную точку  $x^0 \in S$ ;

2) если известна точка  $x^t$ , то выбираем некоторым образом  $p_t$ -е уравнение и находим точку  $x^{t+1} \in B_{p_t}$ , которая удовлетворяет выбранному уравнению и, возможно, не удовлетворяет остальным уравнениям. Такая точка находится методом Лагранжа, который будет описан ниже. При этом за один цикл мы должны перебрать все уравнения. Полученную последовательность  $\{x^t\}$  называют релаксационной последовательностью. Последовательность номеров  $\{p_t\}$  уравнений называют управлением релаксацией. Например, можно выбрать управление в обычном циклическом порядке: сначала решать уравнение нормировки, затем подряд — уравнения инвариантности и потом повторять весь цикл снова.

Точка  $x^{t+1}$  вычисляется по  $x^t$  согласно равенствам

$$\text{grad } f(x^{t+1}) = \text{grad } f(x^t) + \lambda A_p; \quad (5.21)$$

$$(A_p, x^{t+1}) = b_p, \quad (5.22)$$

где  $\text{grad } f$  — градиент функции  $f$ ;  $\lambda$  — неизвестный параметр;  $(*, *)$  — скалярное произведение;  $A_p$  — строка коэффициентов левой части  $p$ -го уравнения,  $b_p$  — правая часть этого уравнения, т.е.  $x^{t+1}$  есть решение  $p$ -го уравнения (5.22). Функция  $f(x) = -g(x) = \sum_{ij} x_{ij} \ln \frac{p_{ij}}{x_{ij}}$  удовлетворяет описанным условиям работы [5]. Тогда

$$(\text{grad } f(x))_{ij} = \ln \frac{x_{ij}}{p_{ij}} + 1$$

и для уравнения нормировки (5.19) мы получаем равенство

$$\ln \frac{x_{ij}^{t+1}}{p_{ij}} = \ln \frac{x_{ij}^t}{p_{ij}} + \lambda,$$

$$\sum_{ij} x_{ij}^{t+1} = 1.$$

Из первого уравнения имеем

$$x_{ij}^{t+1} = x_{ij}^t \exp(\lambda),$$

а из второго —

$$\sum_{ij} x_{ij}^t \exp(\lambda) = 1.$$

Отсюда мы получаем обычное преобразование нормировки

$$x_{ij}^{t+1} = \frac{x_{ij}^t}{\sum_{kl} x_{kl}^t}. \quad (5.23)$$

Для  $i$ -го уравнения инвариантности (5.20) мы получаем следующую систему равенств:

$$\ln \frac{x_{ij}^{t+1}}{p_{ij}} = \ln \frac{x_{ij}^t}{p_{ij}} + \lambda,$$

$$\ln \frac{x_{ki}^{t+1}}{p_{ki}} = \ln \frac{x_{ki}^t}{p_{ki}} - \lambda,$$

$$\sum_{j \neq i} x_{ij}^{t+1} - \sum_{k \neq i} x_{ki}^{t+1} = 0.$$

Тогда

$$\exp \lambda = \left( \frac{\sum_{k \neq i} x_{ki}^t}{\sum_{j \neq i} x_{ij}^t} \right)^{1/2}$$

и мы получаем формулы преобразования

$$x_{ij}^{t+1} = x_{ij}^t \left( \frac{\sum_{k \neq i} x_{ki}^t}{\sum_{l \neq i} x_{il}^t} \right)^{1/2} \quad (5.24)$$

для  $j \neq i$  и

$$x_{ki}^{t+1} = x_{ki}^t \left( \frac{\sum_{l \neq i} x_{il}^t}{\sum_{m \neq i} x_{mi}^t} \right)^{1/2} \quad (5.25)$$

для  $k \neq i$ , при этом

$$x_{ii}^{t+1} = x_{ii}^t. \quad (5.26)$$

Формулы (5.24) – (5.26) описывают преобразование элементов  $i$ -й строки и  $i$ -го столбца. Остальные элементы не меняются. Согласно работе [5], полученная последовательность имеет предел, если функция

$$D(x, y) = \sum_{ij} p_{ij} (y_{ij} - x_{ij}) + \sum_{ij} x_{ij} \ln \frac{x_{ij}}{y_{ij}}$$

является такой, что  $D(x, y_k) \rightarrow 0$ , при  $y_k \rightarrow x$ ,  $x \in \bar{S}$  и  $y_k \in S$ . Это свойство легко проверяется. В этом случае предел не зависит от выбранного управления релаксации, а зависит от начального значения  $x^0$ . Для того чтобы предельное значение

$$Q = \lim_{t \rightarrow \infty} x^t$$

решало поставленную экстремальную задачу, достаточно взять начальное значение в точке глобального минимума функции  $f$ , т.е. положить  $x_{ij}^0 = p_{ij} \exp(-1)$ . Принимая во внимание необходимую нормировку, мы можем начать итерационный процесс с

$$x_{ij}^0 = p_{ij}. \quad (5.27)$$

Утверждение доказано.

Доказательство дает формулы (5.23), (5.24), (5.25), (5.26) для балансового метода вычисления последовательности распределений,



которые сходятся к искомому распределению, эти формулы задают итерационный процесс вычисления распределения. Численный пример применения метода балансировки рассмотрен далее.

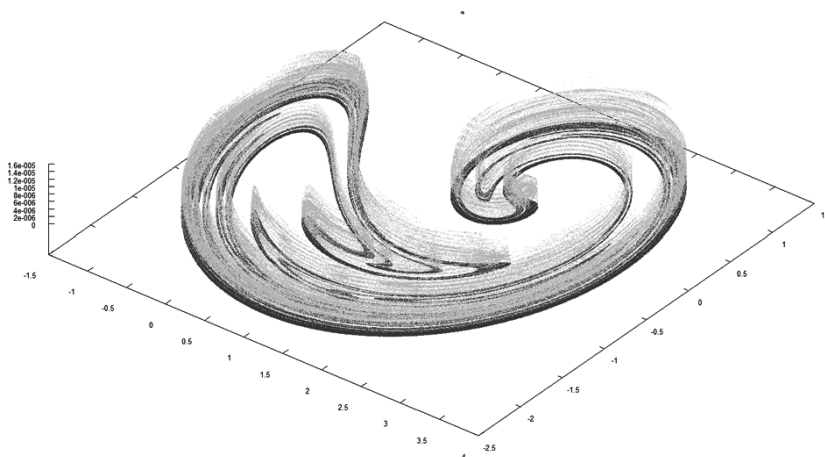
## 5.8. ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ

Ниже представлены численные результаты вычисления инвариантной меры для модифицированного отображения Икеды, которое не удовлетворяет известным условиям существования SBR-меры. Инвариантная мера строится как поток на символическом образе, см. параграф 5.6. Построенное численное приближение задает не только инвариантную меру, но еще обладает тем свойством, что она максимально распределена по цепно-рекуррентному множеству. Модифицированное отображение Икеды [66] имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d + a(x \cos(\tau(x, y)) - y \sin(\tau(x, y))) \\ b(x \sin(\tau(x, y)) + y \cos(\tau(x, y))) \end{pmatrix}; \quad (5.28)$$

$$\tau(x, y) = 0,4 - \frac{6}{1 + x^2 + y^2}, \quad (5.29)$$

где  $d > 0$ ,  $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ . Отображение обладает свойством сжатия площадей. При  $d=2$ ,  $a=-0,9$ ,  $b=0,9$  это отображение меняет ориентацию и имеет глобальный аттрактор в области  $M = [-10, 10] \times [-10, 10]$  (рис. 5.2).



**Рис. 5.2.** Инвариантная мера для модифицированного отображения Икеды

В результате численного эксперимента была построена последовательность подразбиений в соответствии с методом локализации цепно-рекуррентного множества  $CR$ . Размеры ячейки последнего разбиения составляют  $0,026 \times 0,026$ . Затем применен метод балансировки (см. параграф 5.7) с начальным распределением  $\{p_{ij} = \pi_{ij}\}$ , т.е. исходное распределение совпадает с матрицей допустимых переходов  $\Pi$ , которое состоит из нулей и единиц и не является вероятностным распределением. Метод балансировки преобразует последовательным приближением исходную матрицу в поток  $\{m_{ij}\}$  на символическом образе. Полученное распределение  $\left\{ m_i = \sum_j m_{ij} \right\}$  вероятностной меры (на вершинах символического образа) задает меру ячеек  $\{M(i)\}$  и, согласно теореме 5.7, является приближением к инвариантной мере. Из теоремы 5.11 следует, что это распределение обладает экстремальным свойством: функция  $\phi(x_{ij}) = -\sum_{ij} x_{ij} \ln x_{ij}$ , заданная на потоках символического образа, достигает максимума на построенном распределении. Известно, что данная функция достигает максимума, если распределение близко к равномерному распределению. Можно сказать, что получен поток, максимально распределенный на символическом образе. Распределение полученной меры показано на рис. 5.2. В плоскости  $(xy)$  лежит покрытие аттрактора, которое состоит из 44 101 ячеек. По оси  $z$  отмечена величина меры ячейки  $m_i$ , которая аппроксимирует инвариантную меру, максимально распределенную по аттрактору. Численные расчеты проводились Е. Петренко [35]

### *Контрольные вопросы и задания*

1. Инвариантная мера  $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$ , где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — меры построенные в примере 5.1 для периодически траекторий  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Где лежит носитель меры  $\mu$ ?
2. Что можно сказать о единственности разложения потока в рамках теоремы 5.1?
3. Теорема 5.2 описывает свойство множества потоков класса  $H$  цепно-рекуррентного множества. Будет ли верно аналогичное утверждение для всего цепно-рекуррентного множества?
4. Пусть  $M$  есть пространство мер со слабой топологией. Фиксируем функцию  $\phi$  и рассмотрим функционал  $F = \int \phi d\mu$  на  $M$ . Является ли  $F$  непрерывным и линейным?
5. Множество инвариантных мер  $M(f)$  лежит в множестве всех мер  $M$ . Является ли  $M(f)$  компактом в слабой топологии?

6. Пусть  $C_2$  — подразбиение покрытия  $C_1$ . На символических образах  $G_1$  и  $G_2$  построены потоки  $m_1$  и  $m_2$  методом балансировки исходя из матриц допустимых переходов. Что можно сказать о значении функции  $\varphi = -\sum m_{ij} \ln m_{ij}$  на потоках  $m_1$  и  $m_2$ ?
7. Приведите пример аппроксимации  $\delta$ -мерами некоторой меры.
8. Постройте пример разложения потока по простым потокам.

## Глава 6

# ЭРГОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ

### 6.1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть  $C(M)$  — пространство непрерывных функций на  $M$  с нормой  $|\varphi| = \max |\varphi(x)|$ . Любая борелевская мера  $\mu$  на  $M$  определяет линейный положительный функционал на  $C(M)$ :

$$L(\varphi) = \int_M \varphi d\mu, \quad L(\varphi) \geq 0, \text{ если } \varphi \geq 0.$$

Теорема Рисса [23] утверждает обратное: каждому положительному линейному функционалу на  $C(M)$  можно сопоставить некоторую борелевскую меру на  $M$ , причем это соответствие взаимнооднозначное. В частности, меры  $\mu_1$  и  $\mu_2$  различны тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция  $\varphi$  такая, что

$$\int_M \varphi d\mu_1 \neq \int_M \varphi d\mu_2.$$

Нормированные меры соответствуют функционалам, удовлетворяющим условию  $L(1)=1$ . В пространстве мер  $\{\mu\}$  (или в пространстве линейных функционалов  $\{L\}$ ) имеется слабая топология, в которой последовательность  $\mu_k$  сходится к  $\mu$  тогда и только тогда, когда для любой непрерывной функции  $\varphi \in C(M)$  числовая последовательность  $\int_M \varphi d\mu_k$  сходится к  $\int_M \varphi d\mu$ . Обозначим  $L^1(M, \mu)$  пространство интегрируемых на  $M$  по  $\mu$  функций.

**Эргодическая теорема Биркгофа — Хинчина.** [23, с. 480; 45, с. 16] Пусть  $(M, \mu)$  — пространство с вероятностной мерой инвариантной для  $f$ . Тогда:

- для любой функции  $\varphi \in L^1(M, \mu)$  существует среднее

$$\bar{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$$

для почти всех  $x$ ;

- $\bar{\varphi}$  — инвариантна для  $f$ , т.е.  $\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(f(x))$ ;
- $\bar{\varphi} \in L^1(M, \mu)$  и

$$\int_M \bar{\varphi} d\mu = \int_M \varphi d\mu,$$

где  $L^1(M, \mu)$  — пространство интегрируемых функций.

Эквивалентные формулировки эргодичности. [45, с. 22]:

- инвариантная мера  $\mu$  является эргодической, если мера любого инвариантного измеримого множества равна единице или нулю;
- инвариантная мера  $\mu$  является эргодической, если среднее по времени равно среднему по пространству,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) = \int_M \varphi d\mu,$$

для почти всех  $x$ , где  $\varphi \in C^0(M)$  или  $\varphi \in L^1(M, \mu)$ ;

- инвариантная мера  $\mu$  является эргодической, если любая функция  $\varphi \in C^0(M)$  или  $\varphi \in L^1(M, \mu)$ , инвариантная для  $f$  (т.е.  $\varphi(x) = \varphi(f(x))$ ), является константой почти всюду.

Обозначим  $ext(\mathcal{M})$  множество крайних точек выпуклого множества  $\mathcal{M}$ . В книге [8] показано, что крайними точками выпуклого множества  $\mathcal{M}(f)$  являются эргодические меры. Таким образом, возникает еще одна эквивалентная формулировка эргодичности:

- инвариантная мера  $\mu$  является эргодической, если она является крайней точкой множества инвариантных мер:  $\mu \in ext(\mathcal{M}(f))$ .

**Теорема 6.1** [45]. Если гомеоморфизм  $f$  имеет две эргодические меры  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , то они взаимно сингулярны, т.е. существует измеримое разбиение  $M = A + B$  такое, что  $\mu_1(A) = 1$  и  $\mu_2(B) = 1$ .

## 6.2. АППРОКСИМАЦИЯ ЭРГОДИЧЕСКИХ МЕР

Множество инвариантных мер  $\mathcal{M}(f)$  является выпуклым компактом в слабой топологии. Крайними точками множества инвариантных мер являются эргодические меры. Выпуклая оболочка множества  $A$  есть пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество  $A$ . Выпуклая оболочка является выпуклым множеством. Теорема 1.2.2 из [39] утверждает, что выпуклая оболочка множества  $A$  состоит из тех и только тех точек, которые являются выпуклой комбинацией конечного числа точек из  $A$ . Так, построенная выпуклая оболочка может быть незамкнутым множеством. Обозначим  $\mathcal{M}^0$  множество, состоящее из мер, которые являются выпуклой комбинацией конечного числа эргодических мер:

$$\mathcal{M}^0 = \left\{ \mu = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu_k, \mu_k \in ext \mathcal{M}(f), \alpha_k \geq 0, \sum_k \alpha_k = 1 \right\}.$$

Множество  $\mathcal{M}^0$  является выпуклым и

$$\mathcal{M}^0 \subset \mathcal{M}(f).$$

В [23, с. 530–531] показано, что замыкание множества  $\mathcal{M}^0$  в слабой топологии совпадает с  $\mathcal{M}(f)$ :

$$\overline{\mathcal{M}^0} = \mathcal{M}(f).$$

Теорема Шоке утверждает, что любая точка выпуклого компакта может быть разложена в интегральную сумму крайних точек (см. приложение в [70]). Здесь нам понадобится более сильный результат о разложении на эргодические компоненты, см. теорему 4.1.12 из [70].

**Теорема 6.2.** Для каждой инвариантной меры  $\mu \in \mathcal{M}(f)$  существует разбиение (по модулю множеств меры нуль) многообразия  $M$  на инвариантные измеримые подмножества  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , где  $A$  — абстрактное пространство с мерой, каждое  $\Omega_\alpha$  снабжено такой эргодической инвариантной мерой  $\mu_\alpha$ , что для любой интегрируемой функции  $\phi$  выполнено равенство

$$\int_M \phi d\mu = \int \int_{A M} \phi d\mu_\alpha d\alpha. \quad (6.1)$$

Пусть  $S$  является покрытием многообразия  $M$  ячейками, которые являются многогранниками, пересекающимися по граничным дискам, и  $S^*$  есть разбиение, которое получено из  $S$  приписыванием граничных дисков к одному из прилегающих многогранников. Пусть  $G$  — символический образ, построенный для покрытия  $S$ . Существует многозначное отображение  $h: M \rightarrow G$ ,  $h(x) = \{i: x \in M(i)\}$ , которое становится однозначным на разбиении  $S^*$ . Отображение  $h$  порождает отображение  $h^*$  из множества инвариантных мер  $\mathcal{M}(f)$  в множество потоков  $\mathcal{M}(G)$ , которое определяется равенством

$$m_{ij} = \mu(f(M^*(i)) \cap M^*(j)),$$

где  $\mu \in \mathcal{M}(f)$ ,  $M^*(i) \in S^*$ ,  $m = \{m_{ij}\}$  — поток на  $G$ . Отображение  $h^*: \mathcal{M}(f) \rightarrow \mathcal{M}(G)$  является линейным в том смысле, что

$$h^*(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2) = \alpha h^*(\mu_1) + \beta h^*(\mu_2).$$

Заметим, что построенное отображение  $h^* : \mathcal{M}(f) \rightarrow \mathcal{M}(G)$  не является непрерывным как отображение из слабой топологии пространства  $\mathcal{M}(f)$  в метрическое пространство  $\mathcal{M}(G)$  с метрикой  $\rho(m^1, m^2) = \sum_{ij} |m_{ij}^1 - m_{ij}^2|$ . Из теоремы 2.1 монографии [7] следует, что для непрерывности  $h^*$  в точке  $\mu$  достаточно, чтобы мера границ ячеек  $\mu(\partial M(i)) = 0$ .

Если эргодическая мера  $\mu$  лежит в выпуклом множестве  $W \subset \mathcal{M}(f)$ , то  $\mu$  есть крайняя точка множества  $W$ , что следует из определения эргодической меры. Напомним, что простой поток  $t$  порождается простым циклом, и он не разлагается по другим потокам. Если простой поток  $t$  лежит в выпуклом множестве  $V \subset \mathcal{M}(G)$ , то  $t$  есть крайняя точка множества  $V$ .

**Теорема 6.3.** Пусть  $h^* : \mathcal{M}(f) \rightarrow \mathcal{M}(G)$  есть отображение множества инвариантных мер в множество потоков на графе  $G$ , тогда образы  $h^*(\mathcal{M}(f))$  и  $h^*(\mathcal{M}^0)$  являются выпуклыми множествами в  $\mathcal{M}(G)$ , при этом, каждая крайняя точка образа  $h^*(\mathcal{M}^0)$  является образом эргодической меры:

$$\text{ext}(h^*(\mathcal{M}^0)) \subset (\text{ext}(\mathcal{M}(f))).$$

*Доказательство.* Отображение  $h^* : \mathcal{M}(f) \rightarrow \mathcal{M}(G)$  является линейным и, следовательно, образы  $h^*(\mathcal{M}(f))$  и  $h^*(\mathcal{M}^0)$  являются выпуклыми. Выпуклые множества  $\mathcal{M}(f)$  и  $\mathcal{M}^0$  имеют одинаковые крайние точки, которые являются эргодическими мерами. Каждая инвариантная мера  $\mu \in \mathcal{M}^0$  раскладывается в конечную сумму эргодических мер:

$$\mu = \sum_z \alpha_z \mu_z.$$

Тогда образ меры  $\mu$  раскладывается в конечную сумму образов эргодических мер:

$$h^* \mu = \sum_z \alpha_z h^* \mu_z.$$

Пусть  $h^* \mu = t$  есть крайняя точка выпуклого множества  $h^*(\mathcal{M}^0)$ . Поток  $t$  должен раскладываться по образам эргодических мер  $h^* \mu_z$ :

$$t = \sum_z \alpha_z h^* \mu_z.$$

Такое разложение возможно для крайней точки  $m$  только при условии, что образ  $h^*\mu_z$  для  $\alpha_z > 0$  совпадает с  $m$ , сумма таких  $\alpha_z > 0$  равна единице. Отсюда следует, что каждая крайняя точка образа  $h^*(\mathcal{M}^0)$  является образом некоторой крайней точки множества  $\mathcal{M}^0$ . Следовательно, имеет место включение

$$\text{ext}(h^*(\mathcal{M}^0)) \subset h^*(\text{ext}(\mathcal{M}^0)) = h^*(\text{ext}(\mathcal{M}(f))).$$

Теорема доказана.

**Утверждение 6.1.** Пусть  $h^* : \mathcal{M}(f) \rightarrow \mathcal{M}(G)$  есть отображение множества инвариантных мер в множество потоков на графе  $G$  и поток  $m \in \mathcal{M}(G)$ . Тогда:

- 1) прообраз  $h^{*-1}(m) = \mathcal{M}(m)$  есть выпуклое множество;
- 2)  $\mathcal{M}^0(m) = \mathcal{M}^0 \cap \mathcal{M}(m)$  есть выпуклое множество,
- 3) если  $m$  есть крайняя точка выпуклого многогранника  $\mathcal{M}(G)$  и  $\mathcal{M}(m) \neq \emptyset$ , то крайние точки множества  $\mathcal{M}^0(m)$  являются эргодическими мерами:

$$\text{ext}(\mathcal{M}^0(m)) \subset \text{ext}(\mathcal{M}(f)).$$

*Доказательство*

1. Отображение  $h^* : \mathcal{M}(f) \rightarrow \mathcal{M}(G)$  является линейным. Если  $\mu_1$  и  $\mu_2$  лежат в  $\mathcal{M}(f)$ ,  $h^*(\mu_1) = m = h^*(\mu_2)$ ,  $\alpha + \beta = 1$ , то  $h^*(\alpha(\mu_1) + \beta(\mu_2)) = m$ , т.е.  $\mathcal{M}(m)$  — выпуклое множество.

2. Множество  $\mathcal{M}^0(m)$  является выпуклым как пересечение выпуклых множеств  $\mathcal{M}^0$  и  $\mathcal{M}(m)$ . Если  $\mu$  лежит в  $\mathcal{M}^0(m)$ , то  $\mu$  раскладывается в конечную сумму эргодических мер  $\mu = \sum_k \alpha_k \mu_k$  и  $h^*(\mu) = m$ .

3. Пусть мера  $\mu$  лежит в  $\mathcal{M}^0(m)$ . Мера  $\mu$  раскладывается в конечную сумму эргодических мер:

$$\mu = \sum_k \alpha_k \mu_k, \quad \mu_k \in \text{ext} \mathcal{M}^0 = \text{ext} \mathcal{M}(f).$$

Пусть  $m$  — крайняя точка многогранника  $\mathcal{M}(G)$  и  $h^*(\mu) = m$ . Покажем, что все  $\mu_k$  лежат в  $\mathcal{M}^0(m)$ . Действительно, образ

$$h^*(\mu) = \sum_k \alpha_k h^* \mu_k \quad \text{и} \quad m = \sum_k \alpha_k m_k,$$

где  $h^* \mu_k = m_k$ . Поскольку  $m$  — крайняя точка, равенство  $m = \sum_k \alpha_k m_k$  возможно, если для всех  $k$  таких, что  $\alpha_k > 0$ , необходимо  $m_k = m$



и  $\sum_k \alpha_k = 1$ . Это означает, что  $h^* \mu_k = m$  и все эргодические меры  $\mu_k$  лежат в  $M^0(m) \subset M(m)$ . Пусть  $\mu$  — крайняя точка  $M^0(m)$ . Покажем от противного, что  $\mu$  является эргодической мерой. Если  $\mu$  не является эргодической мерой, то она раскладывается по эргодическим мерам

$$\mu = \sum_k \alpha_k \mu_k, \quad \mu_k \in \text{ext } M(f).$$

По доказанному выше все  $\mu_k$  лежат в  $M^0(m)$  и, следовательно,  $\mu$  не является крайней точкой в  $M^0(m)$ . Полученное противоречие завершает доказательство.

**Следствие 6.1.** Если  $m \in h^*(M(f))$  есть простой поток, то  $m$  является образом некоторой эргодической меры  $\mu$ :

$$m = h^*(\mu).$$

**Утверждение 6.2.** Пусть  $M(Q)$  — множество потоков на ориентированном графе  $Q$ ,  $G$  — другой ориентированный граф и  $s: Q \rightarrow G$  есть отображение ориентированных графов, тогда образ  $s^*(M(Q))$  является выпуклым многогранником в  $M(G)$ , при этом вершины многогранника  $s^*(M(Q))$  лежат в образе вершин многогранника  $s^*(M(G))$ , т.е.

$$\text{ext}(s^*(M(Q))) \subset s^*(\text{ext}(M(Q))).$$

*Доказательство.* Согласно утверждению 5.2, отображение  $s^*: M(Q) \rightarrow M(G)$  является линейным и образ  $s^*(M(Q))$  является выпуклым многогранником. Простые потоки являются крайними точками множества  $M(Q)$ , число простых потоков конечно. Согласно теореме 5.1, каждый поток  $m \in M(Q)$  раскладывается в сумму простых потоков:

$$m = \sum_z \alpha_z m_z,$$

где  $\text{ext}(M(Q)) = \{m_z\}$  — полный набор простых потоков в  $M(Q)$ . Тогда образ потока  $m$  имеет вид

$$m^* = s^* m = \sum_z \alpha_z s^* m_z, \quad (6.2)$$

т.е. любой поток на образе  $s^*(\mathcal{M}(Q))$  раскладывается по  $s^*m_z$ . Пусть  $m^*$  есть крайняя точка выпуклого множества  $s^*(\mathcal{M}(Q))$ , т.е.  $m^* \in \text{ext}(s^*(\mathcal{M}(Q)))$ . Поток  $m^*$  должен раскладываться по потокам вида  $\{s^*m_z\}$ :

$$m^* = \sum_z \alpha_z s^*m_z.$$

Поскольку  $m^*$  является крайней точкой, разложение (6.2) возможно только при условии, что образы всех  $s^*m_z$  для  $\alpha_z > 0$  совпадают с  $m^*$  (т.е.  $s^*m_z = m^*$ ) и сумма таких  $\alpha_z > 0$  равна единице. Отсюда следует, что каждая крайняя точка образа  $s^*(\mathcal{M}(Q))$  является образом крайней точки множества  $\mathcal{M}(Q)$ . Следовательно, имеет место включение

$$\text{ext}(s^*(\mathcal{M}(Q))) \subset s^*(\text{ext}(\mathcal{M}(Q))).$$

Утверждение доказано.

Пусть  $s: Q \rightarrow G$  есть отображение ориентированных графов. Рассмотрим поток  $m^* \in \mathcal{M}(G)$ . Тогда возможны два случая:

1)  $m^*$  не является образом некоторого потока при отображении  $s^*$ :

$$m^* \notin s^*(\mathcal{M}(Q));$$

2)  $m^*$  является образом некоторого потока при отображении  $s^*$ :

$$m^* \in s^*(\mathcal{M}(Q)).$$

**Утверждение 6.3.** Пусть  $s: Q \rightarrow G$  является отображением ориентированных графов и  $m^* \in s^*(\mathcal{M}(Q))$ . Тогда:

- прообраз  $s^{*-1}(m^*) = \mathcal{M}(m^*)$  есть выпуклое множество в  $\mathcal{M}(Q)$ ;
- если  $m^*$  есть простой поток на  $G$  и  $\mathcal{M}(m^*) \neq \emptyset$ , то крайние точки множества  $\mathcal{M}(m^*)$  являются простыми потоками:

$$\text{ext}(\mathcal{M}(m^*)) \subset \text{ext}(\mathcal{M}(G)).$$

*Доказательство*

1. Согласно утверждению 5.2, отображение  $s^*: \mathcal{M}(Q) \rightarrow \mathcal{M}(G)$  является линейным. Если  $m_1$  и  $m_2$  лежат в  $\mathcal{M}(Q)$ ,  $s^*(m_1) = m^* = s^*(m_2)$ ,  $\alpha + \beta = 1$ , то  $s^*(\alpha m_1 + \beta m_2) = m^*$  и, следовательно,  $\mathcal{M}(m^*)$  — выпуклое множество.

2. Пусть  $t$  является крайней точкой множества  $\mathcal{M}(m^*) \subset \mathcal{M}(Q)$ . Точка  $t$  раскладывается по простым потокам множества  $\mathcal{M}(Q)$ :

$$t = \sum_k \alpha_k m_k, \quad m_k \in \text{ext} \mathcal{M}(Q).$$

Тогда

$$s^* t = \sum_k \alpha_k s^* m_k \quad \text{или} \quad t^* = \sum_k \alpha_k m_k^*,$$

где  $s^* m_k = m_k^*$ . По предположению,  $t^*$  — крайняя точка  $\mathcal{M}(G)$ , тогда для всех  $k$  таких, что  $\alpha_k > 0$ , необходимо  $t^* = m_k^*$ . Следовательно, все  $m_k$  лежат в прообразе  $s^{*-1}(m^*) = \mathcal{M}(m^*)$ . Поскольку  $t$  — крайняя точка  $\mathcal{M}(m^*)$  и  $m_k \in \mathcal{M}(m^*)$ , следовательно, для равенства  $t = \sum_k \alpha_k m_k$  необходимо существование такого  $k$ , что  $m_k = t$  и  $\alpha_k = 1$ . Это означает, что  $t$  является крайней точкой многогранника  $\mathcal{M}(Q)$ . Доказательство закончено.

**Следствие 6.2.** Если  $t^* \in s^*(\mathcal{M}(Q))$  есть простой поток, то  $t^*$  является образом некоторого простого потока  $t$ :

$$t^* = s^* t.$$

Рассмотрим последовательные подразбиения  $C_1, C_2, C_3, \dots$  такие, что максимальный диаметр ячеек разбиений сходится к нулю. При этом каждое покрытие  $C_k$  состоит из ячеек, которые являются многогранниками, пересекающимися по граничным дискам. Пусть  $C$  есть одно из описанных покрытий.  $C^* = \{M^*(i)\}$  — разбиение, полученное из  $C$  приписыванием граничных дисков соседних ячеек к одному из них. В этом случае отображение  $h(x) = \{i : x \in M^*(i)\}$  является однозначным. Не ограничивая общности, будем считать, что  $C_k^*$  являются последовательными подразбиениями исходного разбиения  $C_1^*$ . Каждая инвариантная мера  $\mu$  порождает поток на символическом образе, который определяется по формуле

$$h^* \mu = t = \left\{ m_{ij} = \mu(M^*(i) \cap f^{-1}(M^*(j))) \right\}.$$

Таким образом, на каждом символическом образе  $G_k$  определяется поток  $t^k = h_k^* \mu$ . Построенные потоки  $t^k$  согласованы:  $s^* t^{k+1} = t^k$ . Пусть  $m_k$  является произвольным потоком на  $G_k$ , тогда возможны альтернативы:

$$m_k \notin s^* \mathcal{M}(G_{k+1}) \quad \text{или} \quad m_k \in s^* \mathcal{M}(G_{k+1}).$$

В первом случае будем говорить, что поток  $m_k$  не имеет продолжения на  $G_{k+1}$ , а во втором случае поток  $m_k$  имеет продолжение на  $G_{k+1}$ . Согласно следствию 6.2, если простой поток  $m_k$  имеет продолжение, то существует простой поток  $m_{k+1}$  такой, что

$$s^* m_{k+1} = m_k.$$

Иначе, если простой поток  $m_k$  имеет продолжение, то его можно выбрать простым.

Пусть на каждом символическом образе  $G_k$  выбран поток  $m^k$ , причем потоки согласованы, т.е.

$$s^* m^{k+1} = m^k.$$

Используя меру Лебега, построим меру  $\mu_k$  на  $M$  для каждого  $k$ , полагая

$$\mu_k(A) = \sum_i m_i^k \frac{v(A \cap M(i))}{v(M(i))},$$

где  $v$  — лебегова мера, нормированная на  $M$ .

**Теорема 6.4.** Пусть  $C_k$  — последовательные подразбиения такие, что максимальный диаметр ячеек  $d_k$  сходится к нулю. Если  $m^k$  — согласованная последовательность простых потоков на символических образах  $G_k$ , то существует инвариантная мера

$$\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k,$$

которая является эргодической.

Сначала докажем следующее утверждение.

**Утверждение 6.4.** Пусть меры  $\mu_1 \neq \mu_2$  и  $C_k$  — последовательные подразбиения такие, что максимальный диаметр ячеек  $d_k \rightarrow 0$ , тогда существует номер  $t^*$  такой, что при всех  $t > t^*$

$$m_1^t = h_t^* \mu_1 \neq m_2^t = h_t^* \mu_2,$$

где  $h_t^* : \mathcal{M}(f) \rightarrow \mathcal{M}(G_t)$  есть отображение инвариантных мер в пространство потоков на  $G_t$ .

*Доказательство* от противного. Пусть  $m_1^t = h_t^* \mu_1$ ,  $m_2^t = h_t^* \mu_2$  и существует последовательность  $t \rightarrow \infty$ , для которой  $m_1^t = m_2^t$ . Согласно построению, каждая из последовательностей  $m_1^t$  и  $m_2^t$  согласована.

Используя меру Лебега, построим меры  $\mu_1^t$  и  $\mu_2^t$  на  $M$  для каждого  $t$ , полагая

$$\mu_{12}^t(A) = \sum_i (m_{12}^t)_i \frac{v(A \cap M(i))}{v(M(i))},$$

где  $A$  — измеримое множество;  $M(i)$  — ячейки разбиения  $C_t$ ;  $v$  — лебегова мера, нормированная на  $M$ . В результате получена последовательность мер  $\mu_1^t$  и  $\mu_2^t$  на многообразии  $M$ . Согласно теореме 5.3, существуют инвариантные меры

$$\mu_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_1^t, \quad \mu_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_2^t.$$

По построению,  $\mu_1^t = \mu_2^t$  для каждого  $t$  и, следовательно,  $\mu_1 = \mu_2$ . Полученное противоречие заканчивает доказательство.

*Доказательство теоремы 6.4.* Согласно теореме 5.3, существует предел  $\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$  в слабой топологии и мера  $\mu$  является инвариантной. Покажем от противного, что  $\mu$  есть эргодическая мера. Пусть  $\mu$  раскладывается в сумму

$$\mu = \alpha \mu_1 + (1 - \alpha) \mu_2,$$

где  $\mu_1 \neq \mu_2$  и  $0 < \alpha < 1$ . Рассмотрим отображение  $h^* : \mathcal{M}(f) \rightarrow \mathcal{M}(G_k)$ , образ

$$h^* \mu = \alpha h^* \mu_1 + (1 - \alpha) h^* \mu_2 = \alpha m_1^t + (1 - \alpha) m_2^t,$$

где потоки  $m_1^t = h^* \mu_1$ ,  $m_2^t = h^* \mu_2$ . Из согласованности последовательности  $m^k$  следует, что

$$h^* \mu = m^k.$$

Согласно предыдущему утверждению, поток  $m_1^k \neq m_2^k$  для всех достаточно больших  $k$ . Тогда мы имеем разложения

$$m^k = \alpha m_1^k + (1 - \alpha) m_2^k,$$

где  $0 < \alpha < 1$  и  $m_1^k \neq m_2^k$ . Следовательно, потоки  $m^k$  не являются простыми для больших  $k$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

### 6.3. НОСИТЕЛЬ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ

Носителем борелевской меры  $\mu$  называется множество

$$\text{sup}(\mu) = \{x \in M : \mu(U) > 0 \text{ для любого открытого } U, x \in U\}.$$

Следующее утверждение доказано в [70], предложения 4.1.17.

#### Утверждение 6.5

- Носитель борелевской меры  $\text{sup}(\mu)$  замкнут.
- Мера дополнения  $\mu(M \setminus \text{sup}(\mu)) = 0$ .
- Любое множество полной меры плотно в  $\text{sup}(\mu)$ .

Множество  $A$  имеет полную меру, если  $\mu(A) = 1$ . Рассмотрим поток  $m = \{m_{ij}\}$  на символическом образе  $G$ . Мера вершины  $i$  определяется равенством

$$m_i = \sum_j m_{ij} = \sum_k m_{ki}.$$

Носителем потока  $m$  будем называть множество вершин

$$\text{sup}(m) = \{i : m_i > 0\}.$$

Согласно теореме 5.1, каждый поток  $m$  раскладывается в сумму простых потоков:

$$m = \sum_k \alpha_k m(\omega_k),$$

где  $\alpha_k \geq 0$ ,  $\sum_k \alpha_k = 1$ . Следовательно, носитель потока лежит в объединении носителей простых потоков:

$$\text{sup}(m) = \bigcup_k \text{sup}(\omega_k).$$

**Утверждение 6.6.** Пусть на многообразии  $M$  имеется покрытие  $S$  замкнутыми многогранниками, пересекающимися по граничным дискам, на символическом образе  $G$  имеется поток  $m$  и мера  $\mu$  построена по  $m$  согласно формуле

$$\mu(A) = \sum_i m_i \frac{v(A \cap M(i))}{v(M(i))},$$

где  $A$  — измеримое множество;  $v$  — мера Лебега. Тогда носитель меры  $\mu$

$$\sup(\mu) = \left\{ \bigcup_i M(i) : i \in \sup(m) \right\}.$$

*Доказательство.* Обозначим

$$Q = \left\{ \bigcup_i M(i) : i \in \sup(m) \right\}.$$

Пусть  $x \in Q$ , тогда  $x \in M(i)$  и  $m_i > 0$ . По построению лебегова мера ячейки  $v(M(i)) > 0$ . Если  $V$  есть окрестность точки  $x$ , то лебегова мера  $v(V \cap M(i)) > 0$  и в этом случае

$$\mu(V) = \sum_i m_i \frac{v(V \cap M(i))}{v(M(i))} > 0.$$

Следовательно,  $x \in \sup \mu$  и  $Q \subset \sup(\mu)$ .

Покажем обратное включение. Пусть  $x \in \sup \mu$ , тогда для любой окрестности  $V$  точки  $x$  мера  $\mu(V) > 0$  или  $\sum_i m_i \frac{v(V \cap M(i))}{v(M(i))} > 0$ . Следовательно, найдется ячейка  $M(i)$ , для которой  $m_i > 0$  и лебегова мера  $v(V \cap M(i)) > 0$ . Последнее означает, что окрестность  $V$  и ячейка  $M(i)$  пересекаются. Поскольку  $V$  — сколь угодно малая окрестность точки  $x$  и  $M(i)$  — компакт, точка  $x$  должна лежать в  $M(i)$ . Поэтому  $x \in Q$  и  $\sup(\mu) \subset Q$ . Доказательство закончено.

Пусть  $C_k$  — последовательные подразбиения такие, что максимальный диаметр ячеек  $d_k \rightarrow 0$ . Если  $m^k$  — согласованная последовательность потоков на символических образах  $G_k$ , то, согласно теореме 5.3, существует мера  $\mu$ , инвариантная для  $f$ , такая, что

$$\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k,$$

где сходимость рассматривается в слабой топологии.

**Теорема 6.5.** Пусть  $C_k$  — последовательные подразбиения такие, что максимальный диаметр ячеек  $d_k \rightarrow 0$  и  $\{m^k\}$  есть согласованная последовательность потоков на символических образах  $G_k$ , тогда последовательность множеств  $Q_k = \left\{ \bigcup_i M(i) : i \in \sup(m^k) \right\}$  удовлетворяет следующим свойствам.

1. Последовательность компактов  $Q_k$  монотонно убывает:

$$Q_{k+1} \subset Q_k.$$

2. Предел множеств  $Q_k$  есть носитель инвариантной меры  $\mu$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = \bigcap_k Q_k = \text{sup}(\mu).$$

*Доказательство*

1. Равенство  $s(j) = i$  означает, что ячейка  $M_{k+1}^*(j)$  входит в разбиение ячейки  $M_k^*(i)$ . Если  $j \in \text{sup}(m^{k+1})$  и  $s(j) = i$ , то  $M_k^*(i) \supset M_{k+1}^*(j)$  и

$$m_i^k = \mu(M_k^*(i)) \geq \mu(M_{k+1}^*(j)) = m_j^{k+1} > 0.$$

Следовательно,  $s(\text{sup}(m^{k+1})) \subset \text{sup}(m^k)$  и

$$Q_{k+1} = \left\{ \bigcup M_{k+1}^*(j), j \in \text{sup}(m^{k+1}) \right\} \subset \bigcup M_k^*(i), \\ i \in \text{sup}(m^k) \Big\} = Q_k.$$

2. Пусть точка  $x$  лежит в  $\bigcap_k Q_k$  и  $U$  — окрестность этой точки.

Поскольку диаметр покрытий сходится к нулю, существует  $k$  такое, что  $x \in M_k^*(i) \subset U$ ,  $i \in \text{sup}(m^k)$ . Тогда

$$\mu(U) \geq \mu(M_k^*(i)) = m_i^k > 0,$$

следовательно,  $x \in \text{sup}(\mu)$  и  $\bigcap_k Q_k \subset \text{sup}(\mu)$ . Покажем обратное включение от противного. Пусть существует точка  $x \in \text{sup}(\mu)$ , которая не лежит в  $\bigcap_k Q_k$ . Множество  $\bigcap_k Q_k$  является компактом, следовательно, расстояние  $\rho\left(x, \bigcap_k Q_k\right) = r > 0$ . Пусть  $V$  — шар радиуса  $r/2$

с центром в точке  $x$ . Покажем, что мера  $\mu(V) = 0$ . Действительно, поскольку  $r > 0$ , следовательно, существует  $k$ , для которого расстояние  $\rho(Q_k, \bar{V}) > 0$ . Тогда  $m_i^k = 0$ , если  $M_k(i) \cap \bar{V} \neq \emptyset$ . Согласно утверждению 5.2, мера замкнутого шара

$$\mu(\bar{V}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_i \mu(M_k^*(i)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i^k,$$

где  $I = \{i : M_k^*(i) \cap \bar{V} \neq \emptyset\}$ . Если  $k$  достаточно велико, то описанные значения  $m_i^k = 0$  и, следовательно, мера замкнутого шара  $\mu(\bar{V}) = 0$ . Тогда и мера открытого шара  $\mu(V)$  также равна нулю. Полученное



противоречие показывает включение  $\text{sup}(\mu) \subset \bigcap_k Q_k$ . Таким образом, утверждение доказано.

Следующее утверждение доказано в [70], предложения 4.1.18.

**Утверждение 6.7**

1. Носитель инвариантной меры лежит в множестве рекуррентных точек (траекторий).

2. Если мера  $\mu$  является эргодической, то в носителе  $\text{sup } \mu$  есть плотная траектория.

3. Если сужение  $f|_{\text{sup } \mu}$  является строго эргодическим, то  $\text{sup } \mu$  является минимальным множеством.

*Замечание к п. 1.* Как было указано ранее, определение 3.3.2 рекуррентной траектории в [70] совпадает с определением траектории, устойчивой по Пуассону, в книге [23, с. 363] и не совпадает с определением рекуррентной траектории по Биркгофу, см. определение в [51]. Таким образом, п. 2 более точно нужно формулировать следующим образом: носитель инвариантной меры лежит в множестве точек, устойчивых по Пуассону,

$$P = \left\{ \begin{array}{l} p: \text{существует } n_k \rightarrow +\infty, \text{ что } p = \lim f^{n_k}(p), \\ \text{существует } n_k \rightarrow -\infty, \text{ что } p = \lim f^{n_k}(p) \end{array} \right\}.$$

Напомним, что  $f|_{\text{sup } \mu}$  является строго эргодическим, когда на  $f|_{\text{sup } \mu}$  существует единственная инвариантная мера. Замкнутое инвариантное множество является минимальным, если у него нет истинных инвариантных замкнутых подмножеств. Вообще говоря, минимальное множество может быть носителем более чем одной инвариантной меры (см. параграф 10 в [94], пример А.А. Маркова на с. 533 в [23] и работу [48]).

Пусть  $C_k$  — последовательные подразбиения такие, что максимальный диаметр ячеек  $d_k$  сходится к нулю. Пусть на каждом символическом образе  $G_k$  выбраны простые потоки  $m^k$ , которые согласованы. Теорема 6.4 гарантирует, что существует эргодическая мера  $\mu$ , которую можно считать пределом потоков  $m^k$ , согласно утверждению 5.2. Простой поток  $m^k$  на символическом образе  $G_k$  порожден периодическим циклом  $\omega_k = \{i_1, i_2, \dots, i_p = i_0\}$  с различными вершинами, на котором  $m_i = 1/p$  и  $m_i = 0$  для всех других вершин. Периодические циклы  $\omega_k$  порождают периодические псевдотраектории  $T_k = \{x_i \in M_k(i) : i \in \omega_k\}$ , согласно теореме [2] об отслеживании.

**Теорема 6.6.** Пусть  $C_k$  — последовательные подразбиения такие, что максимальный диаметр ячеек  $d_k$  сходится к нулю и на каждом

символическом образе  $G_k$  выбраны простые потоки  $m^k$ , которые согласованы. Тогда выполнены следующие утверждения.

1. Периодические псевдотраектории  $T_k$  равномерно сходятся к рекуррентной траектории  $T$ .

2. Объединения ячеек путей  $\omega_k Q_k = \left\{ \bigcup_i M(i) : i \in \omega_k \right\}$  убывают:

$$Q_k \supset Q_{k+1}.$$

3. Последовательность  $Q_k$  сходятся к замыканию траектории  $\bar{T}$  при  $k \rightarrow \infty$ .

4. Предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k$  является минимальным множеством и носителем инвариантной меры  $\mu$ .

*Доказательство.* Теорема 3.1 (утверждения 1 и 2) гарантирует, что псевдотраектории  $T_k$  сходятся к траектории  $T$ . При этом сходимость является равномерной, так как расстояния между  $T_k$  и  $T$  оцениваются через диаметр покрытия. Утверждение 4 этой теоремы говорит, что траектория  $T$  является рекуррентной и предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = \bigcap_k Q_k$  есть минимальное множество. Носитель каждого простого потока  $m^k$  совпадает с циклом  $\omega_k$ . Тогда множество  $Q_k$  совпадает с множеством

$$\left\{ \bigcup M_k(i) : i \in \sup(m^k) \right\}.$$

Теорема 6.5 утверждает, что последовательность множеств  $Q_k$  монотонно убывает и ее предел  $\bigcap_k Q_k = \bar{T}$  есть носитель меры  $\mu$ .

Теорема доказана.

### Контрольные вопросы и задания

1. Пусть  $S$  — окружность с координатами  $x \in [0, 2\pi)$ . Отображение  $f: S \rightarrow S$  есть поворот на угол  $\frac{\pi}{2}$  против часовой стрелки. Используя теорему 6.2, опишите множество инвариантных мер  $\mathcal{M}(f)$ .
2. (Ответ:  $\int \varphi d\mu = \int_{[0, \pi/2)} \frac{1}{4} \left( \varphi(x) + \varphi\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \varphi(x + \pi) + \varphi\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \right) d\alpha$ , где  $\mu \in \mathcal{M}(f)$ ,  $\alpha$  — любая борелевская мера на  $[0, \pi/2)$ ).
3. Приведите примеры эргодических мер (с доказательством).
4. Пусть система имеет эргодическую меру  $\mu^*$  и построен символический образ этой динамической системы. Отображение  $h$  сопоставляет точке  $x$  номера ячеек, где эта точка лежит. Отображение  $h^*$  отображает меры в потоки

5.  $h^*\mu = m = \{m_{ij} = \mu(M^*(i) \cap f^{-1}(M^*(j)))\}.$
6. Какой поток получится для эргодической меры  $\mu^*$ ?
7. Пусть  $\mathcal{M}(Q)$  — множество потоков на ориентированном графе  $Q$ ,  $G$  — другой ориентированный граф и  $s: Q \rightarrow G$  есть отображение ориентированных графов. Отображение  $s^*: \mathcal{M}(Q) \rightarrow \mathcal{M}(G)$  является отображением потоков. Опишите пример, когда  $s^*(\mathcal{M}(Q)) \neq \mathcal{M}(G)$ .
8. Граф  $G$  имеет  $n$  вершин. Сколько простых потоков он может иметь?
9. Граф  $G$  имеет  $n$  вершин. Сколько простых потоков длины  $k$  он может иметь?
10. Пусть  $s: Q \rightarrow G$  есть отображение ориентированных графов,  $\omega$  — простой цикл на  $Q$ ,  $s(\omega) = \sigma$  есть простой путь на  $G$ . Что можно сказать о соотношении длин этих путей?
11. Каждый поток раскладывается по простым потокам. Приведите пример такого разложения.

## Глава 7

# ЭНТРОПИЯ

В 1865 г. появилась работа Р. Клаузиуса «О различных удобных для применения формах второго начала математической теории теплоты», в которой введено важнейшее для термодинамики понятие энтропии. Для объяснения необратимости макроскопических явлений австрийский физик Л. Больцман в 1872 г. ввел в теорию теплоты статистические представления. Он показал, что энтропию можно вычислять как  $S = k \log(P)$ , где  $k$  — фундаментальная мировая постоянная Больцмана,  $P$  — число состояний.

К. Шеннон в статье 1948 г. «Математическая теория связи» определил понятие емкости (capacity) канала информации согласно формуле

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log_2 N(T)}{T},$$

где  $N(T)$  есть число допустимых сигналов в течении времени  $T$ . Далее энтропия определена как мера случайности, которая вычисляется по формуле

$$h = -\sum_i p_i \log_2 p_i.$$

А.Н. Колмогоров в работе 1958 г. «Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега» ввел энтропию в теорию динамических систем. В настоящее время ясно, что энтропия — это очень тонкий инвариант динамической системы, который является мерой хаотичности динамической системы.

### 7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Мотивация.** Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

на компактном многообразии  $M$ , порожденную гомеоморфизмом  $f : M \rightarrow M$ . Пусть  $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$  есть конечное покрытие  $M$  и  $\{x_k = f^k(x), k = 0, \dots, N-1\}$  есть отрезок траектории длины  $N$ . По-

крытие  $C$  порождает кодировку отрезка траектории посредством конечной последовательности  $\chi(x) = \{i_k, k = 0, \dots, N-1\}$ , где  $x_k \in M(i_k)$ . Иначе говоря,  $i_k$  есть номер ячейки покрытия, который содержит точку  $x_k = f^k(x)$ . Вообще говоря, отображение  $x_k \rightarrow i_k$  является многозначным. Построенную последовательность  $\chi = \{i_k\}$  будем называть (допустимой) кодировкой траектории  $\{x_k = f^k(x)\}$  относительно покрытия  $C$ . Предположим, что нам известны все допустимые кодировки длины  $N$  и требуется предсказать последующие кодировки длины  $p$ , т.е. определить допустимые кодировки длиной  $N + p$ . Пусть количество допустимых кодировок  $K(N)$  растет экспоненциально в зависимости от длины  $N$ . Оценим показатель роста посредством числа

$$h = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log_b K(N)}{N}, \quad (7.1)$$

где основание логарифма  $b$  может быть любым числом, большим единицы. Обычно используют  $b = 2$  (следуя Шеннону) или  $b = e$  для натурального логарифма. Существование предела следует из следующей леммы Поля [2, 75].

**Лемма 7.1.** Если последовательность неотрицательных чисел  $a_n$  удовлетворяет неравенству

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m,$$

то существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ .

Для числа допустимых кодировок выполнено неравенство

$$K(n+m) \leq K(n)K(m),$$

тогда для последовательности  $a_n = \log_b K(n)$  существует предел (7.1). Для числа допустимых кодировок  $K(N)$  из (7.1) следует оценка

$$K(N) \sim Bb^{hN},$$

где  $B$  есть некоторая константа. Пусть мы знаем все допустимые кодировки траектории длины  $N$  и хотим предсказать будущее в виде различных кодировок длины  $N + p$ . Если  $h \neq 0$ , то мы имеем отношение

$$\frac{K(N+p)}{K(N)} \sim b^{hp}.$$

Это означает, что неопределенность будущего возрастает с показателем  $hp$  независимо от знания предыдущих кодировок любой длины  $N$ .

Если число различных кодировок растет не экспоненциально (т.е.  $h = 0$ ), например, как степень

$$K(N) \sim BN^A,$$

где  $A$  — положительное число (может быть, большое), то

$$\frac{K(N+p)}{K(N)} \sim \left(1 + \frac{p}{N}\right)^A \rightarrow 1,$$

при  $N \rightarrow \infty$ , т.е. неопределенность будущего убывает с ростом длины известных кодировок  $N$ . Это качественно меняет ситуацию: в экспоненциальном случае неопределенность не зависит от  $N$ , и неопределенность убывает при возрастании  $N$  в случае степенного роста числа допустимых кодировок. Таким образом, величина  $h$  является характеристикой неопределенности (хаотичности) динамики системы.

**Топологическая энтропия.** Определение энтропии будет дано для непрерывного отображения  $f$ . Пусть  $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$  — открытое покрытие многообразия  $M$ . Для целого положительного  $N$  рассмотрим последовательность чисел

$$\omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_N,$$

где каждое  $\omega_k$  есть целое число от 1 до  $n$ . Построим пересечение

$$M(\omega) = M(\omega_1) \cap f^{-1}(M(\omega_2)) \cap \dots \cap f^{-N+1}(M(\omega_N)),$$

которое является открытым множеством. Непустому пересечению отвечает допустимая кодировка  $\omega$ , т.е. существует точка  $x$  в  $M(\omega_1)$  такая, что  $f^k(x) \in M(\omega_{k+1})$ . Последовательность  $\omega$  кодирует отрезок траектории

$$\{f^k(x), k = 0, 1, \dots, N-1\}.$$

Рассмотрим все допустимые кодировки  $\{\omega\}$  длины  $N$  и семейство множеств  $C^N = \{M(\omega)\}$ , которое образует открытое покрытие. Из покрытия  $C^N$  выделим конечное подпокрытие  $C_N$  минимальное

по числу элементов. Пусть  $|C_N|$  обозначает число элементов в  $C_N$ . Тогда, согласно лемме Поля, существует предел

$$H(C) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log |C_N|}{N}. \quad (7.2)$$

**Определение 7.1.** Топологической энтропией отображения  $f: M \rightarrow M$  называется число

$$h(f) = \sup_C H(C),$$

где верхняя грань берется по всем открытым покрытиям  $C$ .

Ясно, что такое определение мало удобно для вычисления энтропии. Рассмотрим некоторые способы вычисления энтропии.

Будем говорить, что покрытие  $C_2$  вписано в  $C_1$ , если каждое  $A \in C_2$  лежит в некотором  $B \in C_1$ . Последовательность открытых покрытий  $C_n$  называется исчерпывающей, если для любого открытого покрытия  $C$  найдется номер  $n^*$  такой, что покрытие  $C_n$  будет вписано в  $C$  при  $n \geq n^*$ .

**Утверждение 7.1** [2, с. 122].

1. Если  $C_n$  есть последовательность открытых покрытий с диаметрами

$$d_n = \max_{A \in C_n} \text{diam } A,$$

сходящимися к нулю, то  $C_n$  есть исчерпывающая последовательность.

2.  $s(\omega) = \sigma$  Энтропия отображения  $f$

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(C_n).$$

Рассмотрим покрытия  $C_2$  и  $C_1$  ячейками, которые являются множествами любого сорта: открытые, замкнутые, измеримые и т.д. Для каждого покрытия построим непустые пересечения, описанные в определении топологической энтропии:

$$M(\omega) = M(\omega_1) \cap f^{-1}(M(\omega_2)) \cap \dots \cap f^{-N+1}(M(\omega_N)),$$

где  $M(i)$  — ячейки соответствующего покрытия. Обозначим построенные наборы множеств  $C_1^N$  и  $C_2^N$ . В каждом наборе выберем

подпокрытия, минимальные по числу, которые обозначим  $C_{N_1}$  и  $C_{N_2}$  соответственно.

**Утверждение 7.2.** Если  $C_2$  вписано в  $C_1$ , то число элементов

$$|C_{N_1}| \leq |C_{N_2}|.$$

*Доказательство.* Если  $A_1 \subset B_1$  и  $A_2 \subset B_2$ , то  $A_1 \cap f^{-1}(A_2)$  лежит в  $B_1 \cap f^{-1}(B_2)$ . Аналогично можно показать, что элементы множества  $C_2^N$  лежат в соответствующих элементах множества  $C_1^N$ . Выберем наименьшие подпокрытия  $C_{N_1}$  и  $C_{N_2}$ . По покрытию  $C_{N_2}$  построим покрытие  $C_{N_1}^*$ , собрав туда все элементы из  $C_1^N$ , которые содержат соответствующие элементы минимального покрытия  $C_{N_2}$ . Тогда  $|C_{N_1}| \leq |C_{N_1}^*| \leq |C_{N_2}|$ , так как  $C_{N_1}$  — подпокрытие для  $C_1^N$ , наименьшее по числу элементов. Доказательство закончено.

**Следствие 7.1.** Пусть  $C_2$  вписано в  $C_1$ , числа  $H(C_1)$  и  $H(C_2)$  найдены по формуле (7.2), тогда

$$H(C_1) \leq H(C_2).$$

## 7.2. ЭНТРОПИЯ СИМВОЛИЧЕСКОГО ОБРАЗА

Пусть  $G$  — граф с матрицей допустимых переходов  $\Pi$ . Обозначим  $b_n$  число допустимых путей длины  $n$  на  $G$ .

**Определение 7.2.** Энтропией графа  $G$  называется число

$$h(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{b_n}{n}.$$

Напомним, что элемент степени матрицы  $(\Pi^n)_{ij}$  есть число допустимых путей из  $i$  в  $j$  длины  $n$ . Тогда число допустимых путей длины  $n$

$$b_n = \sum_{ij} (\Pi^n)_{ij}.$$

**Теорема 7.1.** Пусть  $C_n$  — последовательность подразбиений замкнутого покрытия ячейками, которые являются многогранниками, пересекающимися по граничным дискам, с диаметрами подразбиений  $d_n$ , сходящихся к нулю, и  $G_n$  — соответствующие символические образы отображения  $f: M \rightarrow M$ . Тогда энтропия отображения  $f$  удовлетворяет неравенству



$$h(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} h(G_n).$$

*Доказательство.* Пусть  $C_n = \{M(i)\}$  — покрытие описанной последовательности,  $G_n$  — символический образ отображения  $f$  для  $C_n$ . Рассмотрим множество  $P_N$  кодировок отрезков траекторий длины  $N$  относительно замкнутого покрытия  $C_n$ . Ясно, что число кодировок траекторий длины  $N$  не превышает числа допустимых путей длины  $N$  на  $G_n$ . Отсюда следует, что число  $|C^N|$  непустых пересечений вида

$$M(\omega) = M(\omega_1) \cap f^{-1}(M(\omega_2)) \cap \dots \cap f^{-N+1}(M(\omega_N))$$

не превосходит  $b_N$  числа допустимых путей длины  $N$  на  $G_n$ . Следовательно,

$$H(C_n) \leq h(G_n).$$

Если  $C$  — открытое покрытие, то найдется номер  $n^*$  такой, что покрытие  $C_n$  будет вписано в  $C$  при  $n \geq n^*$ . Тогда, согласно утверждению 7.2,

$$H(C) \leq H(C_n) \leq h(G_n).$$

Теперь рассмотрим исчерпывающую последовательность открытых покрытий  $\{\tilde{C}_m\}$ . Пусть  $n(m)$  есть номер  $n^*$ , построенный для покрытия  $\tilde{C}_m$ , тогда

$$H(\tilde{C}_m) \leq H(C_{n(m)}) \leq h(G_{n(m)}),$$

где  $n \geq n(m)$ . Пусть  $m \rightarrow \infty$ , тогда из утверждения 7.1 следует неравенство

$$h(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} H(\tilde{C}_m) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} h(G_n).$$

Теорема доказана.

**Теория Перрона — Фробениуса.** Если матрица  $A$  имеет неотрицательные (положительные) коэффициенты, то ее называют неотрицательной (положительной). В частности, матрица допустимых переходов  $P$  является неотрицательной. Матрица  $A$  размером  $n \times n$  называется разложимой, если она допускает инвариантное подпро-

странство размерности меньше, чем  $n$ . Из утверждения 2.2 следует, что матрица  $\Pi$  будет неразложимой, если символический образ состоит из одного класса эквивалентных возвратных вершин. Если для неотрицательной матрицы  $A$  существует целое  $s > 0$  такое, что все элементы матрицы  $A^s$  будут положительными, то матрица  $A$  называется примитивной.

**Теорема 7.2** [11, 75]

1. Если  $A$  — неразложимая матрица с неотрицательными элементами, то  $A$  имеет собственный вектор  $e$  с положительными координатами и положительным собственным числом  $\lambda$  кратности 1, а все остальные собственные числа  $\mu$  удовлетворяют неравенству  $|\mu| \leq \lambda$ .

2. Если  $A$  — неразложимая матрица с неотрицательными элементами и  $|\mu| < \lambda$ , то матрица  $A$  является примитивной.

3. Если  $A$  — неразложимая матрица с неотрицательными элементами и  $A$  имеет  $h$  собственных чисел, по модулю равных  $\lambda$ ,  $h > 1$ , то матрица  $A$  не является примитивной и согласованной перенумеровкой строк и столбцов матрицу  $A$  можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & A_{h-1h} \\ A_{h1} & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

где  $A_{ij}$  — квадратные блоки, а  $A^h$  распадается на  $h$  примитивных блоков. В последнем случае число  $h$  называется индексом импримитивности.

**Теорема 7.3.** Энтропия графа  $G$  равна логарифму максимального собственного числа матрицы допустимых переходов

$$h(G) = \ln \lambda.$$

*Доказательство*

1. Рассмотрим случай, когда граф  $G$  состоит из одного класса эквивалентных возвратных вершин. Пусть  $e$  — положительный собственный вектор для максимального собственного числа  $\lambda$ :

$$\Pi e = \lambda e.$$

Для степени матрицы получаем равенство  $\Pi^n e = \lambda^n e$  или в координатах имеем

$$\sum_j (\Pi^n)_{ij} e_j = \lambda^n e_i. \quad (7.3)$$

Пусть  $c = \min\{e_i\}$  и  $d = \max\{e_i\}$ , согласно Теореме Перрона — Фробениуса  $c > 0$ . Тогда мы имеем неравенства

$$c \sum_j (\Pi^n)_{ij} \leq \sum_j (\Pi^n)_{ij} e_j \leq d \lambda^n.$$

Отсюда получаем оценку

$$\sum_j (\Pi^n)_{ij} \leq \frac{d}{c} \lambda^n$$

для любого  $i$ . Суммируя по  $i$ , получаем неравенство

$$b_n = \sum_{ij} (\Pi^n)_{ij} \leq \frac{dr}{c} \lambda^n,$$

где  $r$  — число строк в матрице допустимых переходов  $\Pi$ . Из равенства (7.3) следует

$$c \lambda^n \leq \lambda^n e_i = \sum_j (\Pi^n)_{ij} e_j \leq d \sum_j (\Pi^n)_{ij} \leq d \sum_{ij} (\Pi^n)_{ij}.$$

Отсюда имеем оценку

$$\frac{c}{d} \lambda^n \leq \sum_{ij} (\Pi^n)_{ij} = b_n.$$

Таким образом, получаем неравенства

$$\frac{c}{d} \lambda^n \leq b_n \leq \frac{dr}{c} \lambda^n.$$

Отсюда следует справедливость искомого равенства.

2. Рассмотрим общий случай, когда имеется более одного класса эквивалентных возвратных вершин, т.е. матрица  $\Pi$  является разложимой. В таком случае, согласно утверждению 2.2, перенумерацией вершин матрицу допустимых переходов можно привести к виду

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & \ddots & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \Pi_k & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \Pi_s \end{pmatrix},$$

где каждый диагональный блок  $\Pi_k$  либо отвечает одному из классов эквивалентности возвратных вершин  $H_k$ , либо соответствует некоторой невозвратной вершине и состоит из одного нуля. Под диагональными блоками стоят только нули. Каждый класс  $H_k$  получает свою энтропию

$$h(H_k) = \ln \lambda_k,$$

где  $\lambda_k$  является максимальным собственным числом матрицы  $\Pi_k$ . По определению, энтропия символического образа

$$h(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{b_n}{n}.$$

Рассмотрим допустимый путь  $\omega$  длины  $n$ . Пусть на  $G$  имеется  $s$  классов  $H_k$  эквивалентных возвратных вершин. Путь  $\omega$  проходит через вершины классов  $H_k$  и через невозвратные вершины между этими классами. Обозначим  $\omega_k$  участки пути  $\omega$ , которые лежат в классе  $H_k$ . Если из  $\omega$  убрать все участки  $\omega_k$ , то останутся различные пути  $\sigma_l$ , проходящие через невозвратные вершины. Можно сказать, что путь  $\omega$  есть сумма путей  $\omega_k$  и  $\sigma_l$ . Объединим все пути  $\sigma_l$  в одну последовательность  $\sigma$ , которая, вообще говоря, не является допустимым путем. Пусть  $K$  — число невозвратных вершин на  $G$ , тогда последовательность  $\sigma$  содержит невозвратные вершины без повторений. Поэтому число таких последовательностей  $\sigma$  не превосходит количество перестановок из  $K$  элементов, которое равно  $K!$ .

Обозначим  $n(k)$  длину пути  $\omega_k$ , лежащего в классе  $H_k$ . Тогда  $n(1) + n(2) + \dots + n(s) \leq n$ . Согласно изложенному выше, для каждого класса  $H_k$  найдется число  $d$  такое, что число  $b_k(n(k))$  различных путей  $\omega_k$  длиной  $n(k)$  оценивается следующим образом:

$$b_k(n(k)) \leq d \lambda_k^{n(k)} \leq d \lambda^{n(k)},$$

где  $\lambda = \max \lambda_k$ . Тогда число различных путей  $\omega_k$ , лежащих в  $\omega$ , оценивается сверху числом

$$\prod_k b_k(n(k)) \leq d^s \lambda^{n(1)+n(2)+\dots+n(s)} \leq d^s \lambda^n.$$

Суммируя полученные результаты, получаем оценку

$$b_n \leq K! d^s \lambda^n.$$

Отсюда получаем оценку сверху для энтропии:

$$h(G) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln [K! d^s \lambda^n] = \ln \lambda.$$

Покажем обратное неравенство. Заметим, что число допустимых путей на  $G$  больше числа допустимых путей в классе  $H_k$ . Тогда  $h(G) \geq h(H_k) = \ln \lambda_k$  для любого  $k$ , что дает оценку снизу

$$h(G) \geq \ln \lambda.$$

Окончательно имеем равенство

$$h(G) = \ln \lambda.$$

Доказательство закончено.

### 7.3. МЕТРИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ

Пусть  $\mu$  — нормированная инвариантная мера гомеоморфизма  $f: M \rightarrow M$  и  $C = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  — измеримое разбиение многообразия  $M$ .

**Определение 7.3.** Энтропия разбиения  $C$  есть число

$$H(C) = -\sum_i \mu(A_i) \ln \mu(A_i).$$

Построим покрытие  $C^N$ , состоящее из непустых пересечений вида

$$A_{i_1} \cap f^{-1}(A_{i_2}) \cap \dots \cap f^{-N+1}(A_{i_N}).$$

Если такое пересечение не пусто, то последовательность  $i_1, i_2, \dots, i_N$  является допустимой кодировкой относительно по-

крытия  $C$ . Метрическая энтропия отображения  $f$  для покрытия  $C$  есть среднее

$$H(f, C) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} H(C^N).$$

Существование предела следует из леммы Поляка.

**Определение 7.4.** Энтропия отображения  $f$  для инвариантной меры  $\mu$  есть число

$$h(f, \mu) = \sup_C H(f, C),$$

где верхняя грань берется по всем измеримым конечным разбиениям.

Существует связь между топологической и метрической энтропиями, которую описывает следующая теорема.

**Теорема 7.4.** [13, 62] Топологическая энтропия есть верхняя грань метрических энтропий:

$$h(f) = \sup_{\mu} h(f, \mu).$$

## 7.4. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ МАРКОВА

Стохастическая цепь Маркова [11, 75] определяется набором состояний системы  $\{i = 1, 2, \dots, n\}$  и вероятностями перехода  $P_{ij}$  из состояния  $i$  в состояние  $j$ . Матрица вероятностей переходов  $P = (P_{ij})$  называется стохастической матрицей, она удовлетворяет следующим условиям:  $P_{ij} \geq 0$  и  $\sum_j P_{ij} = 1$  для каждого  $i$ . Распределение вероятностей  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $\sum_i p_i = 1$  называется стационарным, если

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix} = (p_1, p_2, \dots, p_n),$$

т.е.  $p$  является левым неподвижным вектором матрицы  $P$ .

Покажем, что существует взаимно-однозначное соответствие между цепями Маркова и потоками на графе с вершинами, соответствующими состояниям положительной меры.

Пусть  $m = \{m_{ij}\}$  есть поток на графе  $G$ . Мера вершины  $i$  вычисляется как  $m_i = \sum_j m_{ij} = \sum_k m_{ki}$ . Выберем вершины  $\{i\}$  с ненулевой мерой, следовательно, вершина  $i$  является возвратной. Нетрудно проверить, что каждый инвариантный поток  $m = \{m_{ij}\}$  на графе  $G$  порождает стохастическую цепь Маркова, у которой состояния  $i$  совпадают с вершинами  $\{i : m_i \neq 0\}$ , а вероятности перехода  $i \rightarrow j$  вычисляются как

$$P_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_i}.$$

В этом случае стохастическая матрица  $P = \left( \frac{m_{ij}}{m_i} \right)$  имеет стационарное распределение, совпадающее с распределением меры по вершинам  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ , что следует из равенства

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) \begin{pmatrix} \frac{m_{11}}{m_1} & \frac{m_{12}}{m_1} & \dots & \frac{m_{1n}}{m_1} \\ \frac{m_{21}}{m_2} & \frac{m_{22}}{m_2} & \dots & \frac{m_{2n}}{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{m_{n1}}{m_n} & \frac{m_{n2}}{m_n} & \dots & \frac{m_{nn}}{m_n} \end{pmatrix} = (m_1, m_2, \dots, m_n).$$

Таким образом, любой инвариантный поток  $m = \{m_{ij}\}$  на графе  $G$  порождает стохастическую цепь Маркова, для которой распределение меры по вершинам  $(m_i)$  является стационарным.

Покажем обратное: для любой стохастической матрицы  $P = (P_{ij})$  и ее стационарного распределения  $p = (p_i)$  существует инвариантный поток  $m = \{m_{ij}\}$  на некотором графе  $G$ , для которого  $m_i = p_i$ .

Действительно, пусть  $P$  — стохастическая матрица и  $pP = p$ . Рассмотрим граф  $G$ , который имеет  $n$  вершин  $\{i\}$ , и дуга  $i \rightarrow j$  существует, если  $P_{ij} > 0$ . Построим распределение на дугах  $m_{ij} = P_{ij}p_i$  и покажем, что это распределение является потоком на  $G$ . Поскольку  $P$  — стохастическая матрица, следовательно,  $\sum_j P_{ij} = 1$  для любого  $i$ .

Тогда

$$\sum_j m_{ij} = \sum_j P_{ij}p_i = p_i \sum_j P_{ij} = p_i.$$

Поскольку  $pP = p$ , значит,  $\sum_k p_k P_{ki} = p_i$ . Тогда

$$\sum_k m_{ki} = \sum_k p_k P_{ki} = p_i = \sum_j m_{ij},$$

т.е. для распределения  $m_{ij}$  выполнен закон Кирхгофа. Кроме того,  $\sum_{ij} m_{ij} = \sum_i p_i = 1$ .

Из описанных рассуждений следует, что технология построения потока на графе эквивалентна цепям Маркова. В работах [57, 68] используются стохастические матрицы вида

$$P_{ij} = \frac{v(M(i) \cap f^{-1}(M(j)))}{v(M(i))},$$

где  $v$  — мера Лебега. В этих работах показано, что при некоторых дополнительных условиях методом стохастической матрицы строится инвариантная SBR-мера. Ясно, что построение стохастической матрицы по мере, отличной от лебеговой, также приводит к некоторой инвариантной мере, отличной от SBR-меры. Более того, стохастическую матрицу можно получить исходя из матрицы допустимых переходов  $\Pi = (\pi_{ij})$ , где  $\pi_{ij} = 1$ , если есть дуга  $i \rightarrow j$ , иначе  $\pi_{ij} = 0$ . Считая, что

$$P_{ij} = \frac{\pi_{ij}}{\sum_k \pi_{ik}},$$

мы получим стохастическую матрицу, для которой можно построить стационарное распределение, а по нему построить поток и приближение к инвариантной мере.

## 7.5. ЭНТРОПИЯ ПОТОКА

Рассмотрим применение разработанной техники к оценке метрической энтропии. Пусть на символическом образе  $G$  отображения  $f$  построен инвариантный поток  $m = \{m_{ij}\}$ . Как показано выше, любой поток  $m$  следует рассматривать как приближение к некоторой инвариантной мере  $\mu$ , если диаметр ячеек  $d$  достаточно мал. Поток  $m$  на  $G$  порождает цепь Маркова, у которой состояния системы совпадают с вершинами графа  $G$ , а вероятности перехода

$$p_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_i}.$$



Как указано выше, матрица вероятностей  $P = (p_{ij})$  имеет стационарное распределение  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ . Для стационарного распределения  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  энтропия вычисляется по формуле (см. [75, с. 443])

$$h_m = -\sum_i m_i \sum_j p_{ij} \ln p_{ij}.$$

Подставим  $p_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_i}$  и найдем

$$\begin{aligned} h_m &= -\sum_i m_i \sum_j \frac{m_{ij}}{m_i} \ln \frac{m_{ij}}{m_i} = -\sum_{ij} m_{ij} \ln \frac{m_{ij}}{m_i} = \\ &= -\sum_{ij} m_{ij} \ln m_{ij} + \sum_{ij} m_{ij} \ln m_i = -\sum_{ij} m_{ij} \ln m_{ij} + \sum_i m_i \ln m_i. \end{aligned}$$

Таким образом, энтропия может вычисляться непосредственно по потоку  $m_i$  как

$$h_m = \sum_{ij} m_{ij} \ln m_{ij} + \sum_i m_i \ln m_i. \quad (7.4)$$

Это позволяет оценить энтропию отображения  $f$  для инвариантной меры  $\mu$  по формуле (7.4), где поток  $m$  является приближением к  $\mu$ .

### Пример 7.1. Энтропия простого потока

Рассмотрим простой поток  $m = \{m_{ij}\}$ , который порожден простым путем (циклом)  $\omega = \{i_1, i_2, \dots, i_p, i_{p+1} = i_1\}$ . Простой поток  $m$  является таким, что  $m_{ij} = 1/p$ , если дуга  $i \rightarrow j$  лежит на  $\omega$ ; иначе  $m_{ij} = 0$ . Если вершина  $i \in \omega$ , то существует только одна дуга  $j \rightarrow i \in \omega$  которая заканчивается в  $i$ . Следовательно, мера вершины  $m_i = 1/p$ . Если вершина  $i$  не лежит в  $\omega$ , то  $m_i = 0$ . Таким образом, энтропия простого потока  $m$

$$h_m = -\sum_{ij} m_{ij} \ln m_{ij} + \sum_i m_i \ln m_i = \ln p - \ln p = 0.$$

### Пример 7.2. Энтропия потока с фиксированным ветвлением

Предположим, что граф  $G$  имеет  $n$  вершин, из каждой вершины исходит  $k$  дуг и в каждую вершину входит  $k$  дуг. Следовательно, число дуг равно  $nk$ . Тогда существует поток  $m$ , равномерно распределенный на  $G$ :

$$m_{ij} = \frac{1}{nk}, \quad m_i = \frac{1}{n}.$$

Поэтому энтропия потока  $m$  вычисляется как

$$h_m = -\sum_{ij} m_{ij} \ln m_{ij} + \sum_i m_i \ln m_i = \ln nk - \ln n = \ln k.$$

## 7.6. ПОТОК МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

Пусть  $\Pi$  — матрица допустимых переходов некоторого графа  $G$ . Наша цель состоит в том, чтобы построить поток, энтропия которого достигает наибольшего значения среди всех потоков на данном графе. Поскольку любой поток сосредоточен на некоторой компоненте эквивалентности возвратных вершин, можно считать, что весь граф  $G$  является одной компонентой. В этом случае матрица допустимых переходов  $\Pi$  является неразложимой.

**Теорема 7.5.** Существует поток  $m$  на графе  $G$ , энтропия которого совпадает с энтропией графа  $G$ :

$$h_m = h(G) = \ln \lambda.$$

*Доказательство*

1. Собственные числа любой действительной матрицы  $A$  и транспонированной (сопряженной) матрицы  $A^*$  совпадают. Действительно,  $\det A = \det A^*$ , поэтому

$$\det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E)^* = \det(A^* - \bar{\lambda} E).$$

Следовательно, собственному числу  $\lambda$  матрицы  $A$  соответствует сопряженное собственное значение  $\bar{\lambda}$  транспонированной матрицы  $A^*$ . Корни действительного характеристического уравнения являются либо действительными, либо комплексно сопряженными, значит, собственные числа матриц  $A$  и  $A^*$  совпадают.

2. Пусть  $\Pi$  есть матрица допустимых переходов графа  $G$ ,  $\lambda$  — максимальное собственное число из теоремы Перрона — Фробениуса. Тогда для матрицы  $\Pi$  существует левый собственный вектор

$$e\Pi = \lambda e, \quad \Pi^* e = \lambda e,$$

который имеет положительные координаты  $e_i$  и  $\sum_i e_i = 1$ . Следовательно, для каждого  $i$  выполнено равенство

$$\sum_j \pi_{ji} e_j = \lambda e_i. \quad (7.5)$$

Это дает равенство

$$\sum_j \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} = 1$$

для каждого  $i$ . Следовательно, матрица вида

$$P = \left( p_{ij} = \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} \right)$$

является стохастической матрицей, для которой существует левый неподвижный вектор стационарного распределения:

$$mP = m.$$

Согласно результатам, приведенным в параграфе 7.4, распределение на дугах  $i \rightarrow j$ , определенное равенством

$$m_{ij} = p_{ij} m_i = \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i, \quad (7.6)$$

есть поток  $m$  на графе  $G$  с мерой  $i$ -й вершины  $m_i$ . Энтропия этого потока вычисляется согласно формуле

$$h_m = -\sum_{ij} m_{ij} \ln m_{ij} + \sum_i m_i \ln m_i.$$

Тогда

$$h_m = -\sum_{ij} \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i \ln \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i + \sum_i m_i \ln m_i.$$

Здесь полагается  $0 \ln 0 = 0$ . Это означает, что сумма берется по  $ij$ , для которых  $\pi_{ij} = 1$ . Имеем

$$\begin{aligned} -\sum_{ij} \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i \ln \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i &= -\sum_{ij} \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i (\ln \pi_{ji} + \ln e_j + \ln m_i - \ln \lambda - \ln e_i) = \\ &= \ln \lambda \sum_{ij} \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i - \sum_{ij} \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i \ln m_i + \sum_{ij} \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i (\ln e_i - \ln e_j) = \\ &= \ln \lambda \sum_i \left( \sum_j \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i \right) - \sum_i \left( \sum_j \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} \right) m_i \ln m_i + \sum_{ij} \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i (\ln e_i - \ln e_j). \end{aligned}$$

Учитывая равенства

$$\sum_j \left( \sum_i \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i \right) = \sum_j m_j = 1; \quad \sum_j \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} = 1,$$

получаем

$$\begin{aligned} h_m &= \ln \lambda - \sum_i m_i \ln m_i + \sum_i m_i \ln m_i + \sum_{ij} \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i (\ln e_i - \ln e_j) = \\ &= \ln \lambda + \sum_{ij} \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i (\ln e_i - \ln e_j) = \\ &= \ln \lambda + \sum_i \left( \sum_j \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} \right) m_i \ln e_i - \sum_j \left( \sum_i \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i \right) \ln e_j = \\ &= \ln \lambda + \sum_i m_i \ln e_i - \sum_j m_j \ln e_j = \ln \lambda. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

## 7.7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТОКА МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

Сначала рассмотрим метод вычисления левого собственного вектора для максимального собственного числа. Этот алгоритм предложен Р. фон Мизесом и Н. Полячек-Герингером в 1929 г. [80]. Алгоритм прост и сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Предположим, что символический образ имеет один класс эквивалентных возвратных вершин. В силу того, что алгоритм сводится к последовательному умножению вектора на заданную матрицу, он хорошо работает для больших разреженных матриц. Пусть  $\Pi$  — матрица допустимых переходов, для которой нужно найти левый собственный вектор для максимального собственного числа. В начале алгоритма генерируется случайный вектор  $r_0$ . Далее проводятся последовательные вычисления по итеративной формуле

$$r_{k+1} = \frac{r_k \Pi}{|r_k \Pi|}.$$

Расстояние от элементов данной последовательности до левого собственного вектора стремится к нулю. При этом последовательность

$$\mu_k = \frac{(r_k, r_k \Pi)}{(r_k, r_k)},$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение, которое сходится к максимальному собственному значению. В результате алгоритма для матрицы допустимых переходов  $\Pi$  мы получаем максимальное собственное число

$$\lambda_{\max} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$$

и левый собственный вектор

$$e = \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = (e_1, e_2, \dots, e_n).$$

Построим стохастическую матрицу

$$P = \left( p_{ij} = \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} \right).$$

Для матрицы  $P$  найдем левый неподвижный вектор  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  такой, что

$$mP = m, \quad m_k > 0, \quad \sum_k m_k = 1.$$

Этот вектор можно найти алгоритмом, описанным выше, при этом начальный вектор удобно выбрать равным вектору  $e$ . Для построенных стохастической матрицы  $P$  и ее стационарного распределения  $m$  определим поток

$$m_{ij} = p_{ij} m_i = \frac{\pi_{ji} e_j}{\lambda e_i} m_i.$$

Согласно теореме 7.5, метрическая энтропия достигает своего максимального значения на построенном потоке  $m_{ij}$ :

$$h_m = \ln \lambda_{\max}.$$

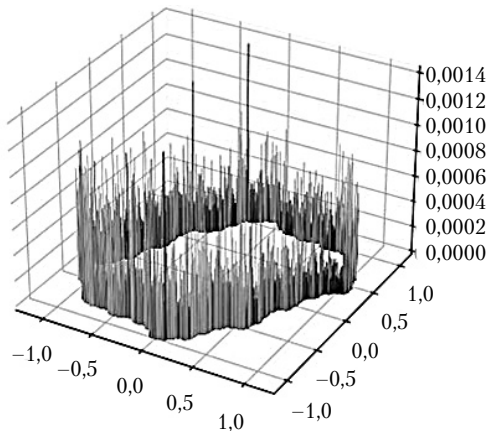
### Пример 7.3

Вычислим инвариантную меру максимальной энтропии для отображения Жюлиа, которое имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + a \\ 2xy + b \end{pmatrix}.$$

Мы исследуем случай  $a=0, b=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ . Цепно-рекуррентное множество такого отображения имеет две компоненты  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Компонента  $\Omega_1$  является границей множества Жюлиа  $Q$  и имеет достаточно сложную фрактальную структуру. Компонента  $\Omega_2$  является устойчивой неподвижной точкой внутри области  $Q$ . Траектории системы в области  $Q$  начинаются на неустойчивом инвариантном множестве  $\Omega_1$  и заканчиваются в устойчивой неподвижной точке  $\Omega_2$ . Система на  $\Omega_1$  имеет хаотическую динамику с ненулевой энтропией. Применим к этому примеру описанную выше технику вычисления инвариантной меры максимальной энтропии. Сначала мы локализуем цепно-рекуррентное множество и построим достаточно малые окрестности компонент  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Для этого выбирается покрытие с ячейками, которые являются квадратами со стороной  $\Delta=0,000976563$ . На рис. 7.1 изображены окрестности компонент  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  в плоскости  $(xy)$ , эти окрестности состоят из 25 044 ячеек. Затем, используя матрицу  $\Pi$  допустимых переходов символического образа, мы найдем левый собственный вектор для максимального собственного числа матрицы  $\Pi$  согласно описанному выше алгоритму.

Таким образом, поток максимальной энтропии вычисляется по формуле (7.6). Полученное распределение меры максимальной энтропии изображено на рис. 7.1, где в плоскости  $(xy)$  лежат окрестности



**Рис. 7.1.** Распределение меры максимальной метрической энтропии отображения Жюлиа

компонент  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , а значения  $\frac{m_i}{s_i}$  откладываются на оси  $Z$ , где  $m_i = \sum_j m_{ij}$  есть мера ячейки  $M(i)$ ,  $s_i = \frac{1}{Z}$  есть площадь ячейки  $M(i)$ . Таким образом, можно сказать, что на оси  $Z$  отмечается плотность распределения.

### *Контрольные вопросы и задания*

1. Энтропия выражает неопределенность системы. Для ориентированного графа неопределенность возникает, когда из вершины выходит несколько дуг. Можно ли оценить энтропию символического образа через количество дуг, выходящих из вершины?
2. Если символический образ содержит несколько сильных компонент, то что определяет энтропию этого образа?
3. Пусть  $P$  матрица допустимых переходов и  $P^k$  — матрица допустимых переходов за  $k$  шагов, ее элементы могут быть больше единицы. Как энтропия связана с собственными числами матрицы  $P^k$ ?
4. Определите энтропию для компоненты сильной связности графа.
5. Граф называется полным, если из каждой вершины  $i$  есть дуга в любую вершину. Определите энтропию такого графа.
6. Определите максимальное собственное число стохастической матрицы.
7. Пусть  $P$  — матрица допустимых переходов,  $R$  — матрица потока, полученная из  $P$  методом балансировки. Определите метрическую энтропию этого потока.
8. Почему энтропия  $h_m$  любого потока на графе не превосходит  $\ln \lambda$  максимального собственного числа матрицы допустимых переходов?

## Глава 8

# УСРЕДНЕНИЕ

### 8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим дискретную динамическую систему порожденную гомеоморфизмом  $f: M \rightarrow M$  компактного многообразия  $M$

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (8.1)$$

Усреднением функции  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$  над конечной последовательностью точек  $\chi = \{x_k, 0 < k \leq n\}$  называется среднее арифметическое значений функции в заданных точках:

$$\lambda(\chi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(x_k).$$

В частности, если  $\chi$  является периодической псевдотраекторией, то  $\lambda(\chi)$  есть среднее значение функции  $\varphi$  на периоде. Например, усреднение логарифма модуля определителя дифференциала  $\varphi(x) = \ln |\det Df(x)|$  задает показатель изменения объема вдоль периодической псевдотраектории.

Если  $\chi = \{x_k, k \in \mathbb{N}^+\}$  является  $\varepsilon$ -полутраекторией, то предел

$$\lambda(\chi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(x_k)$$

назовем усреднением на полутраектории, если такой предел существует. В том случае, когда данный предел не существует, найдется подпоследовательность  $n_m \rightarrow \infty$ , для которой предел

$$\lambda(\chi, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m} \sum_{k=0}^{n_m} \varphi(x_k) \quad (8.2)$$

существует. Такие подпоследовательности назовем сходящимися.

**Определение 8.1.** Спектр усреднения функции  $\varphi$  над  $\varepsilon$ -полутраекторией  $\chi = \{x_k, k \in \mathbb{N}^+\}$  есть предельное множество усреднений над сходящимися подпоследовательностями

$$\Sigma(\chi) = \{\lambda \text{ существуют } n_m \rightarrow \infty \text{ такие, что } \lambda = \lambda(\chi, n_m)\}$$



Если  $\chi$  является периодической  $\varepsilon$ -траекторией, то спектр  $\Sigma(\chi)$  состоит из одного числа — среднего арифметического по периоду.

**Определение 8.2.** Спектром усреднения функции  $\phi$  над псевдотраекториями системы (8.1) называется множество чисел

$$\Sigma = \left\{ \lambda : \text{существует последовательность } \varepsilon_n\text{-траекторий } \{\chi_n\}, \right. \\ \left. \varepsilon_n \rightarrow 0, \lambda_n \in \Sigma(\chi_n), \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \right\}.$$

Таким образом, спектр  $\Sigma$  есть предельное множество усреднений над  $\varepsilon$ -траекториями при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## 8.2. СВОЙСТВА СПЕКТРА

**Утверждение 8.1.** Пусть  $\chi = \{x_k, k \in \mathbb{N}^+\}$  является  $\varepsilon$ -полутраекторией и существует сходящаяся подпоследовательность

$$\lambda(\chi, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m} \sum_{k=0}^{n_m} \phi(x_k).$$

Тогда найдется последовательность периодических  $2\varepsilon$ -траекторий  $\{\chi_p\}$ ,  $p \rightarrow \infty$  таких что,

$$\lambda(\chi_p) \rightarrow \lambda(\chi, n_m) \text{ при } p \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Предел  $\lambda(\chi, n_m)$  не зависит от конечного числа начальных точек последовательности  $\chi = \{x_k, k \in \mathbb{N}^+\}$ , т.е. если вместо последовательности  $\chi$  рассмотрим последовательность  $\chi(N_0) = \{x_k, k \geq N_0\}$ , то

$$\lambda(\chi, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m - N_0} \sum_{k=N_0}^{n_m-1} \phi(x_k), \text{ где } n_m > N_0.$$

Поскольку последовательность  $\{x_{n_m}\}$  лежит на компакте, существует подпоследовательность, сходящаяся к некоей точке  $x^*$ . Не ограничивая общности, можно считать, что сама последовательность  $\{x_{n_m}\}$  сходится к  $x^*$ . По предположению, исходная последовательность  $\chi$  является  $\varepsilon$ -полутраекторией. Пусть  $U$  есть  $\varepsilon/2$ -окрестность точки  $x^*$ . Существует номер  $N_0$  такой, что все  $\{x_{n_m}, n_m \geq N_0\}$  лежат в  $U$  и, следовательно, расстояние между ними менее  $\varepsilon$ . Тогда конечная последовательность  $\chi_p = \{x_k, N_0 \leq k < n_p\}$  является периодической  $2\varepsilon$ -траекторией. Действительно, по предпо-

ложению,  $\{x_k\}$  является  $\varepsilon$ -траекторией, следовательно, нужно оценить расстояние между  $f(x_{n_p-1})$  и  $x_{N_0}$ . По построению  $\rho(x_{N_0}, x_{n_p}) < \varepsilon$  и  $\rho(f(x_{n_p-1}), x_{n_p}) < \varepsilon$ , тогда  $\rho(f(x_{n_p-1}), x_{N_0}) < 2\varepsilon$ . Усреднение на  $\chi_p = \{x_k, N_0 \leq k < n_p\}$

$$\lambda(\chi_p) = \frac{1}{n_p - N_0} \sum_{k=N_0}^{n_p-1} \varphi(x_k).$$

Таким образом,  $\lambda(\chi, n_m) = \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda(\chi_p)$ . Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения следует, что спектр  $\Sigma$  может быть определен как предельное множество усреднений над периодическими  $\varepsilon$ -траекториями при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , т.е.

$$\Sigma = \left\{ \lambda \text{ существует последовательность периодических } \varepsilon_n\text{-траекторий } \{\chi_n\}, \varepsilon_n \rightarrow 0, \text{ таких, что } \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\chi_n) \right\}.$$

Пусть  $\{\chi_n\}$  последовательность периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . Согласно утверждению 3.4, предельное множество последовательности  $\{\chi_n\}$  состоит из цепно-рекуррентных точек. Теорема 3.6 утверждает, что если на каждой псевдотраектории  $\chi_n$  отмечена точка  $x_n$  так, что  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  и предельная точка  $x^*$  лежит в некоторой компоненте  $\Omega$  цепно-рекуррентного множества, то последовательность  $\{x_n\}$  равномерно сходится к  $\Omega$ .

Рассмотрим последовательность  $\{\chi_n\}$  периодических  $\varepsilon_n$ -траекторией,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , такую, что  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\chi_n)$  и ее предельная точка  $x^*$  лежит в некоторой компоненте  $\Omega$  цепно-рекуррентного множества. В этом случае мы будем говорить, что усреднение  $\lambda$  реализуется на компоненте  $\Omega$ .

**Утверждение 8.2.** Пусть  $\{\chi_n\}$  — последовательность периодических псевдотраекторий, описанных выше, и  $x^*$  есть ее предельная точка,  $x^* \in \Omega$ . Тогда существует последовательность  $\{\omega_n\}$  периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий, проходящих через  $x^*$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , таких, что  $\lambda(\omega_n) \rightarrow \lambda$ .

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность периодических  $\varepsilon_n^*$ -траекторий  $\{\omega_n\}$ , построенную при доказательстве утверждения 3.4. По построению каждая псевдотраектория  $\omega_n$  получена из  $\chi_n$  заменой точки  $x_n$  на предельную точку  $x^*$ ,  $\omega_n$  является периодической  $\varepsilon_n^*$ -траекторией,  $\varepsilon_n^* \rightarrow 0$ . Расстояние  $\rho(x_n, x^*) < \delta_n \rightarrow 0$ . Если  $\chi_n = \{x_1, x_2, \dots, x_k = x_0\}$  есть периодическая траектория с отмеченной

точкой  $x_0$ , которая совпадает с  $x_n$ , то  $\omega_n = \{x_1, x_2, \dots, x_k^* = x_0^*\}$ , где  $x_0^* = x^*$  и  $\rho(x_0, x_0^*) = \rho(x_n, x^*) = \delta_n$ . Найдём усреднение

$$\begin{aligned}\lambda(\chi_n) &= \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_i) = \frac{1}{k} \left( \sum_{i=1}^{k-1} \varphi(x_i) + \varphi(x^*) \right) + \frac{1}{k} (\varphi(x_n) - \varphi(x^*)) = \\ &= \lambda(\omega_n) + E_n,\end{aligned}$$

где  $E_n = \frac{1}{k} (\varphi(x_n) - \varphi(x^*)) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Утверждение доказано.

**Утверждение 8.3.** Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  реализуются на компоненте  $\Omega$ , то любое число  $\lambda$  между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  также реализуется на  $\Omega$ .

*Доказательство.* По предположению, существуют две последовательности периодических  $\varepsilon$ -траекторий  $\{\chi_n\}$  и  $\{\psi_n\}$  такие, что

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\chi_n);$$

$$\lambda_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\psi_n).$$

Предельное множество каждой последовательности  $\{\chi_n\}$  и  $\{\psi_n\}$  лежит в  $\Omega$ . Следовательно, найдутся две последовательности точек  $\{x_n \in \chi_n\}$  и  $\{y_n \in \psi_n\}$ , которые сходятся к двум точкам  $x^* \in \Omega$  и  $y^* \in \Omega$  соответственно. Согласно утверждению 8.2, можно считать, что периодические псевдотраектории  $\{\chi_n\}$  проходят через  $x^*$  и периодические псевдотраектории  $\{\psi_n\}$  проходят через  $y^*$ . Поскольку  $x^*$  и  $y^*$  лежат в одной компоненте  $\Omega$ , для любого  $\varepsilon_n > 0$  найдется периодическая  $\varepsilon_n$ -траектория  $\{\chi^*\}$ , проходящая через  $x^*$  и  $y^*$ . При этом переход от  $x^*$  к  $y^*$  вдоль  $\chi^*$  назовем первой половиной  $\chi^*$ , а переход от  $y^*$  к  $x^*$  — второй половиной  $\chi^*$ . Построим периодическую псевдотраекторию  $\xi_n$  из трех периодических псевдотраекторий  $\chi^*$ ,  $\chi_n$  и  $\psi_n$ . Начнем с точки  $x^*$  и сделаем  $N$  оборотов по  $\chi_n$ , затем идем по первой половине траектории  $\chi^*$  до точки  $y^*$ , затем делаем  $K$  оборотов по  $\psi_n$  и возвращаемся к исходной точке  $x^*$  по второй половине траектории  $\chi^*$ . Усреднение вдоль  $\xi_n$  зависит от чисел оборотов  $N$  и  $K$ , которые можно выбирать произвольно большими. При этом усреднение вдоль соединяющей псевдотраектории  $\chi^*$  фиксировано. Любое число  $\lambda$  между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеет вид

$$\lambda = \alpha \lambda_1 + (1 - \alpha) \lambda_2,$$

где  $0 < \alpha < 1$ . Период построенной траектории  $\xi_n$  равен  $NT_1 + KT_2 + T_3$ , где  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  — периоды  $\chi_n$ ,  $\psi_n$  и  $\chi^*$  соответственно. Усреднение вдоль  $\xi_n$

$$\lambda(\xi_n) = \frac{1}{NT_1 + KT_2 + T_3} \sum_{z=0}^{NT_1 + KT_2 + T_3 - 1} \varphi(x_z). \quad (8.3)$$

Сумма состоит из трех частей, первая часть порождена  $N$  оборотами по псевдотраектории  $\chi_n$ , вторая часть порождена  $K$  оборотами по псевдотраектории  $\psi_n$  и последняя часть порождена псевдотраекторией  $\chi^*$ . Приведем подобные и перепишем усреднение в виде

$$\lambda(\xi_n) = \frac{1}{NT_1 + KT_2 + T_3} (NT_1 \lambda(\chi_n) + KT_2 \lambda(\psi_n) + T_3 \lambda(\chi^*)).$$

Выберем числа  $N$  и  $K$  так, чтобы

$$\begin{aligned} \frac{NT_1}{NT_1 + KT_2 + T_3} &\rightarrow \alpha, \quad \frac{KT_2}{NT_1 + KT_2 + T_3} \rightarrow (1 - \alpha), \\ \frac{T_3}{NT_1 + KT_2 + T_3} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$  и  $K \rightarrow \infty$ . Для этого мы построим последовательность целых чисел  $V$  и  $W$  таких, что  $V$  и  $W \rightarrow \infty$  и  $V/W \rightarrow \alpha$ . Поскольку  $0 < \alpha < 1$ , следовательно,  $0 < V < W$ . Определим последовательность чисел  $N$  и  $K$  так, что

$$\frac{NT_1}{NT_1 + KT_2} = \frac{V}{W}.$$

Например,

$$N = T_2 V, \quad K = T_1 (W - V). \quad (8.4)$$

Если  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  фиксированы, то

$$\begin{aligned} \frac{T_3}{NT_1 + KT_2 + T_3} &\rightarrow 0; \\ \frac{NT_1}{NT_1 + KT_2 + T_3} &= \frac{NT_1}{NT_1 + KT_2} \frac{NT_1 + KT_2}{NT_1 + KT_2 + T_3} \rightarrow \alpha \end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$  и  $K \rightarrow \infty$ . Выберем последовательности  $N_n \rightarrow \infty$  и  $K_n \rightarrow \infty$ , как описано выше. Таким образом, мы получили последовательность  $\xi_n$  такую, что

$$\lambda(\xi_n) = \alpha\lambda(\chi_n) + (1-\alpha)\lambda(\psi_n) + \delta_n,$$

где  $\delta_n \rightarrow 0$ . Отсюда следует, что

$$\lambda(\xi_n) \rightarrow \alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2,$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Утверждение доказано.

**Теорема 8.1.** Спектр  $\Sigma$  усреднения функции  $\phi$  состоит из отрезков  $[a_k, b_k]$ . Каждый отрезок генерируется компонентой цепно-рекуррентного множества  $\mathbb{I}_k$ , где  $a_k = \lambda_{\inf}(\Omega_k)$  и  $b_k = \lambda_{\sup}(\Omega_k)$  — нижняя и верхняя грани усреднений, реализуемых на компоненте  $\Omega_k$ .

*Доказательство.* Из утверждений 3.4, 3.5 и 8.2 следует, что любое  $\lambda \in \Sigma$  реализуется на некоторой компоненте  $\Omega$ . Фиксируем компоненту  $\Omega$  и рассмотрим все  $\lambda$ , которые реализуются на  $\Omega$ , найдем  $a = \inf\{\lambda\}$ . Покажем, что  $a$  реализуется на  $\Omega$ . Действительно, существует последовательность  $\lambda_k \rightarrow a$  при  $k \rightarrow \infty$  и каждая  $\lambda_k$  реализуется на  $\Omega$ . Для каждого  $k$  найдется последовательность  $\omega_{nk}$  периодических  $\varepsilon_{nk}$ -траекторий таких, что  $\lambda(\omega_{nk}) \rightarrow \lambda_k$  и  $\varepsilon_{nk} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $k^*$  такое, что  $|\lambda_{k^*} - a| < \varepsilon/2$ . Фиксируем  $k^*$  и для него найдем  $n^*$  такое, что  $|\lambda_{k^*} - \lambda(\omega_{n^*k^*})| < \varepsilon/2$  и  $\varepsilon_{n^*k^*} < \varepsilon$ . Тогда  $|a - \lambda(\omega_{n^*k^*})| < \varepsilon$ . Поскольку  $\varepsilon$  — любое, следовательно,  $a$  лежит в спектре. Согласно утверждению 8.2, можно считать, что периодические псевдотраектории  $\omega_{nk}$  проходят через точку  $x^* \in \mathbb{I}$ . Из утверждения 3.5 следует, что  $a$  реализуется на  $\Omega$ . Аналогично можно показать, что  $b = \sup\{\lambda\}$  реализуется на  $\Omega$ . Из утверждения 8.3 следует, что отрезок  $[a, b]$  лежит в  $\Sigma$ . Теорема доказана.

### 8.3. УСРЕДНЕНИЕ НА ГРАФЕ

Пусть  $G$  — произвольный ориентированный граф. Функцией на  $G$  назовем распределение чисел  $\{a[ij]\}$  на дугах графа  $\{i \rightarrow j\}$ . Усреднение функции над конечным путем  $\omega = \{z_0, z_1, \dots, z_p\}$  есть среднее арифметическое

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p a[z_{k-1}z_k].$$

В частности, если  $\omega = \{z_0, z_1, \dots, z_p = z_0\}$  является периодическим путем, то  $\lambda(\omega)$  есть среднее значение функции на периоде. Если  $\omega = \{z_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$  является бесконечным путем, то предел

$$\lambda(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a[z_{k-1} z_k]$$

назовем усреднением над  $\omega$ , если такой предел существует. В том случае, когда данный предел не существует, то (так как функция ограничена) найдется подпоследовательность  $n_m \rightarrow \infty$ , для которой предел

$$\lambda(\omega, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m} \sum_{k=0}^{n_m-1} a[z_k z_{k+1}] \quad (8.5)$$

существует. Такие подпоследовательности назовем сходящимися. Спектр усреднения функции над  $\omega$  есть предельное множество усреднений над сходящимися подпоследовательностями

$$\Sigma(\omega) = \{\lambda \text{ существуют } n_m \rightarrow \infty \text{ такие, что } \lambda = \lambda(\omega, n_m)\}$$

**Определение 8.3.** Спектр усреднения функции есть предельное множество усреднений над всеми допустимыми путями

$$\Sigma(G) = \left\{ \lambda : \lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m, \lambda_m \in \Sigma(\omega_m), \omega_m \text{ — допустимый путь} \right\}.$$

Таким образом, спектр  $\Sigma(G)$  есть замыкание множества спектров над всеми допустимыми путями  $\Sigma(G) = \overline{\bigcup \Sigma(\omega)}$ .

**Утверждение 8.4.** Пусть  $\omega = \{z_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$  является бесконечным путем на  $G$  и найдется сходящаяся подпоследовательность (8.5). Тогда найдется последовательность периодических путей  $\{\omega_p\}$ ,  $p \rightarrow \infty$ , таких, что  $\lambda(\omega_p) \rightarrow \lambda(\omega, n_m)$  при  $p \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Предел (8.5) не зависит от конечного числа начальных точек последовательности  $\omega$ , т.е.

$$\lambda(\omega, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n - n_0} \sum_{k=n_0}^{n_m-1} a[z_k z_{k+1}].$$

Поскольку граф содержит конечное число вершин, найдется вершина  $z^* = z_{n_0}$ , которая повторяется в  $\omega$  бесконечно много раз,

$z^* = z_{n_p}$ ,  $p \rightarrow \infty$ . Тогда конечная последовательность  $\omega_p = \{z_k, n_0 \leq k \leq n_p\}$  является периодическим путем на  $G$ . Усреднение над  $\omega_p$

$$\lambda(\omega_p) = \frac{1}{n_p - n_0} \sum_{k=n_0}^{n_p-1} a[z_k z_{k+1}].$$

Таким образом,  $\lambda(\omega, n_m) = \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda(\omega_p)$ . Утверждение доказано.

**Следствие 8.1.** Спектр  $\Sigma(G)$  совпадает с предельным множеством усреднений над периодическими путями:

$$\Sigma(G) = \left\{ \lambda \text{ существует последовательность периодических путей } \omega_n \text{ таких, что } \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\omega_n) \right\}$$

Таким образом, спектр усреднения определяется на возвратных вершинах  $RV$ . Множество  $RV$  разбито на  $\{H_m\}$  классы эквивалентных возвратных вершин. Рассмотрим последовательность периодических путей  $\{\omega_n\}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , на которой достигается  $\lambda \in \Sigma(G)$ . Если последовательность  $\{\omega_k\}$  лежит в классе  $H$  и  $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(\omega_k)$ , то будем говорить, что показатель  $\lambda$  реализуется в классе  $H$ . Спектр класса  $H$  определяется как

$$\Sigma(H) = \left\{ \lambda \text{ существует последовательность периодических путей } \omega_n \subset H \text{ таких, что } \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\omega_n) \right\}$$

**Утверждение 8.5.** Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  реализуются в классе  $H$ , то любое число  $\lambda$  между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  также реализуется в классе  $H$ .

Доказательство данного утверждения повторяет доказательство утверждения 8.3.

**Утверждение 8.6.** Спектр класса  $H$  есть отрезок  $[a(H), b(H)]$ , где  $a = \lambda_{\inf}(H)$  и  $b = \lambda_{\sup}(H)$  — нижняя и верхняя грани усреднений над периодическими путями из  $H$ .

*Доказательство.* Пусть  $b = \sup\{\lambda \in \Sigma(H)\}$ . Тогда существует последовательность  $\lambda_k \in \Sigma(H)$  такая, что  $\lambda_k \rightarrow b$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для каждого  $k$  найдется последовательность периодических путей  $\omega_{nk}$  в  $H$  таких, что  $\lambda(\omega_{nk}) \rightarrow \lambda_k$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда диагональная последовательность путей  $\omega_{nn}$  порождает последовательность усреднений  $\lambda_k = \lambda(\omega_{nn})$ , которая сходится к  $b$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $b$  лежит в спектре  $\Sigma(H)$ . Аналогично  $a$  лежит в спектре  $\Sigma(H)$ . Из утверждения 8.5 следует, что отрезок  $[a, b]$  лежит в  $\Sigma(H)$ .

Из определения чисел  $a$  и  $b$  следует, что  $[a, b] = \Sigma(H)$ . Утверждение доказано.

Напомним, что периодический путь  $\omega = \{z_1, \dots, z_p = z_0\}$  является простым или циклом, если его вершины  $z_1, \dots, z_p$  являются различными. Покажем, как любой периодический путь можно разложить в сумму циклов. Действительно, пусть  $\omega = \{z_1, \dots, z_p = z_0\}$  является периодическим путем периода  $p$ . Если  $\omega$  не является простым, то существует вершина  $z^*$  такая, что  $z^* = z_l = z_{l+p_1}$ ,  $0 < p_1 < p$ . Рассмотрим две конечные последовательности  $\omega^* = \{z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+p_1}, \dots, z_p = z_0\}$  и  $\omega^{**} = \{z_{l+1}, \dots, z_{l+p_1} = z_l\}$ . Поскольку путь  $\omega$  является допустимым, существуют дуги  $z_{l-1} \rightarrow z_l = z_{l+p_1}$  и  $z_{l+p_1} = z_l \rightarrow z_{l+1}$ , поэтому последовательности  $\omega^*$  и  $\omega^{**}$  являются периодическими допустимыми путями с периодами  $p_1$  и  $p_2 = p - p_1$  соответственно. В этом случае мы будем говорить, что путь  $\omega$  есть сумма периодических путей  $\omega^*$  и  $\omega^{**}$ , и писать

$$\omega = \omega^* + \omega^{**}.$$

Мы можем применить описанное разложение к путям  $\omega^*$  и  $\omega^{**}$ . Повторяя этот процесс разложения, придем к разложению  $\omega$  в сумму периодических путей  $\omega_1, \dots, \omega_q$  периодов  $p_1, \dots, p_q$ ,  $p_1 + \dots + p_q = p$ . Ясно, что этот процесс конечен и финальное разложение  $\omega = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_r$  состоит только из простых периодических путей. Циклы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$  могут совпадать. Если путь  $\omega^*$  повторяется  $k$  раз в разложении  $\omega$ , то будем писать

$$\omega = k\omega^* + \omega^{***}.$$

Поскольку число вершин конечно, следовательно, число циклов также конечно. Пусть  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q$  есть набор всех циклов класса  $H$  с периодами  $p_1, \dots, p_q$ . Найдем усреднения на этих циклах:

$$\lambda(\varphi_j) = \frac{1}{p_j} \sum_{k=1}^{p_j} a \left[ z_{k-1}^j z_k^j \right].$$

Рассмотрим периодический путь  $\omega \subset H$  и предположим, что  $\omega = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \dots + k_q\varphi_q$  есть разложение на простые периодические пути, период  $\omega$  есть  $p = k_1p_1 + k_2p_2 + \dots + k_qp_q$ . Не ограничивая общности, мы можем считать, что каждый цикл  $\varphi_j$  входит в  $\omega$  с коэффициентом  $k_j \geq 0$ , при этом случай  $k_j = 0$  означает, что  $\omega$  реально



не проходит через  $\varphi_j$ . Если  $\omega = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \dots + k_q\varphi_q$ , то будем говорить, что цикл  $\varphi_j$  входит в  $\omega$  с весом  $\mu_j = k_j p_j / p$ . Ясно, что  $\sum_{j=1}^q \mu_j = 1$ .

**Утверждение 8.7.** Усреднение функции над периодическим путем  $\omega = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \dots + k_q\varphi_q$  вычисляется по формуле

$$\lambda(\omega) = \sum_{j=1}^q \mu_j \lambda(\varphi_j),$$

где  $\mu_j = \frac{k_j p_j}{p}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\omega = \{i_1, \dots, i_p\}$  есть периодический путь на символическом образе  $G$ . Предположим, что  $\omega = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \dots + k_q\varphi_q$  — его разложение и  $p = k_1 p_1 + k_2 p_2 + \dots + k_q p_q$  — его период. По определению усреднение над периодическим путем  $\omega$  есть

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{r=1}^p a[i_r i_{r+1}].$$

Группируя члены по периодическим путям  $\varphi_s$ , получаем

$$\begin{aligned} \lambda(\omega) &= \frac{1}{p} \sum_{s=1}^q k_s \sum_{l=1}^{p_s} a[i_l i_{l+1}] = \frac{1}{p} \sum_{s=1}^q k_s p_s \lambda(\varphi_s) = \\ &= \sum_{s=1}^q \frac{k_s p_s}{p} \lambda(\varphi_s) = \sum_{s=1}^q \mu_s \lambda(\varphi_s). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\lambda(\omega)$  есть средне взвешенное усреднений над периодическими путями  $\varphi_s$  с весами  $\mu_s$ . В частности, пути  $\{\varphi_s\}$  можно выбрать циклами. Доказательство закончено.

Пусть

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(H) &= \min \{ \lambda(\varphi_j), j = 1, \dots, q \}; \\ \lambda_{\max}(H) &= \max \{ \lambda(\varphi_j), j = 1, \dots, q \} \end{aligned}$$

есть минимальное и максимальное значения усреднения на циклах класса  $H$ . Из утверждения 8.7 следует следующее.

**Утверждение 8.8.** Спектр усреднения класса  $H$

$$\Sigma(H) = [\lambda_{\min}(H), \lambda_{\max}(H)].$$

**Теорема 8.2.** Спектр усреднения функции на графе состоит из интервалов  $[\lambda_{\min}(H), \lambda_{\max}(H)]$ , где  $\{H_k\}$  есть полное семейство классов эквивалентных возвратных вершин графа  $G$ .

*Доказательство.* Согласно утверждению 8.8, спектр  $\Sigma(G)$  содержит интервалы  $[\lambda_{\min}(H), \lambda_{\max}(H)]$ , где  $\{H_k\}$  есть полное семейство классов эквивалентных возвратных вершин. Покажем, что других чисел в спектре нет. Пусть существует  $\lambda \in \Sigma(G)$ , которое не лежит в интервалах  $[\lambda_{\min}(H), \lambda_{\max}(H)]$ . По определению спектра существует последовательность периодических путей  $\omega_n$  таких, что

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\omega_n). \quad (8.6)$$

Каждый периодический путь  $\omega_n$  лежит в некотором классе  $H$ . Если в классе  $H$  лежит конечное число путей из последовательности  $\omega_n$ , то предел (8.6) не зависит от этих путей. Число классов  $H$  конечно. Поэтому найдется класс  $H$ , который содержит бесконечное число путей последовательности  $\omega_n$ . Такие пути образуют подпоследовательность  $\omega_{n_k}$ ,  $n_k \rightarrow \infty$ . Любая подпоследовательность сходящейся последовательности имеет тот же предел. Поэтому подпоследовательность  $\lambda(\omega_{n_k})$  сходится к  $\lambda$ . Поскольку все  $\omega_{n_k}$  лежат в классе  $H$ , следовательно,  $\lambda \in [\lambda_{\min}(H), \lambda_{\max}(H)]$ , что противоречит предположению о расположении числа  $\lambda$ . Теорема доказана.

#### 8.4. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРА УСРЕДНЕНИЯ

Рассмотрим символический образ  $G$  динамической системы  $x_{n+1} = f(x_n)$  и непрерывную функцию  $\varphi: M \rightarrow R$ . Для вычисления спектра  $\Sigma$  усреднения мы построим функцию на символическом образе, фиксируя величину  $a[ij]$  для каждого ребра  $i \rightarrow j$ , следующим образом. Пусть  $i \rightarrow j$  — дуга на  $G$ . Возьмем точку  $x$  из ячейки  $M(i)$  и положим  $a[ij] = \varphi(x)$ . Отметим, что значение  $a[ij]$  не зависит от  $j$  и, если  $x^*$  — другая точка в  $M(i)$ ,  $a^*[ij] = \varphi(x^*)$ , то мы имеем оценку

$$|a^*[ij] - a[ij]| = |\varphi(x) - \varphi(x^*)| < \theta(d),$$

где  $\theta(d)$  — модуль непрерывности функции  $\varphi$ ;  $d$  — диаметр покрытия.

Рассмотрим фиксированный символический образ и его функцию. Согласно предыдущей теореме 8.2. мы можем найти спектр усреднения функции символического образа за конечное

число шагов. Возникает вопрос об оценке спектра  $\Sigma$  усреднения функции  $\varphi$  через спектр символического образа  $\Sigma(G)$ .

### Теорема 8.3

1. Спектр  $\Sigma$  усреднения функции  $\varphi$  лежит в расширенном спектре символического образа  $\Sigma^*$ , который состоит из интервалов  $[\lambda_{\min}(H_k) - \theta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \theta(d)]$ , где  $\{H_k\}$  есть полное семейство классов эквивалентных возвратных вершин символического образа,  $d$  — диаметр покрытия и  $\theta(d)$  — модуль непрерывности функции  $\varphi$ .

2. Если диаметр покрытия  $d \rightarrow 0$ , то расширенный спектр  $\Sigma^*$  и спектр символического образа  $\Sigma(G)$  сходятся к  $\Sigma$  в метрике Хаусдорфа.

*Метрика Хаусдорфа.* Пусть  $X$  и  $Y$  подмножества компакта  $K$  и  $\rho(x, y)$  — расстояние на  $K$ . Расстояние между множествами  $\text{dist}(X, Y) = \sup\{\rho(x, Y), \rho(y, X) : x \in X, y \in Y\}$ , где  $\rho(x, Y) = \inf\{\rho(x, y) : y \in Y\}$ . Если  $X \subset Y$ , то  $\rho(x, Y) = 0$  и  $\text{dist}(X, Y) = \sup\{\rho(y, X) : y \in Y\}$ .

*Доказательство первого утверждения.* Пусть  $\sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_p = x_0\}$  есть периодическая  $\varepsilon$ -траектория. Согласно теореме 2.1 об отслеживании найдется  $r > 0$  такое, что если  $\varepsilon < r$  и  $x_k \in M(z_k)$ , то периодический путь  $\omega = \{z_1, z_2, \dots, z_p = z_0\}$  является допустимым. Найдем усреднение функции  $\varphi$  на  $\sigma$ :

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \varphi(x_k),$$

а также усреднение оснащения на периодическом пути  $\omega$ :

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \varphi(x_k^*),$$

где точки  $x_k$  и  $x_k^*$  лежат в ячейке  $M(z_k)$ . При этом  $\varphi(x_k) - \varphi(x_k^*) = \alpha_k$ ,  $|\alpha_k| < \theta(d)$ .

Тогда

$$\lambda(\sigma) = \lambda(\omega) + E,$$

где  $|E| = \left| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \alpha_k \right| < \theta(d)$ . Пусть  $\lambda$  лежит в спектре  $\Sigma$  усреднения функции  $\varphi$ , т.е. существует последовательность периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий  $\{\chi_n\}$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  таких, что  $\lambda(\chi_n) \rightarrow \lambda$  при  $n \rightarrow \infty$ . Рассмотрим ту часть последовательности, где  $\varepsilon_n < r$ . Построим перио-

дические допустимые пути  $\{\omega_n\}$ , как это сделано выше. Тогда мы имеем оценку

$$\lambda(\chi_n) = \lambda(\omega_n) + E_n,$$

где  $|E_n| < \theta(d)$ . Не ограничивая общности, мы можем считать, что последовательности  $\lambda(\omega_n)$  и  $E_n$  сходятся к  $\lambda^*$  и  $E^*$ . Если это не так, то можно перейти к подпоследовательностям. Таким образом, мы имеем равенство

$$\lambda = \lambda^* + E^*, \quad |E^*| \leq \theta(d). \quad (8.7)$$

Предельное значение  $\lambda^*$  лежит в спектре символического образа  $\Sigma(G)$ , тогда  $\lambda$  лежит в расширенном спектре  $\Sigma^*$ .

*Доказательство второго утверждения.* Спектр символического образа  $\Sigma(G)$  лежит в его расширенном спектре  $\Sigma^*$ . Расстояние Хаусдорфа между ними равно  $\theta(d)$  и  $\theta(d) \rightarrow 0$  при  $d \rightarrow 0$ . Из включения  $\Sigma \subset \Sigma^*$  следует

$$\Sigma \subset \lim_{d \rightarrow 0} \Sigma^* = \lim_{d \rightarrow 0} \Sigma(G).$$

Таким образом,  $\text{dist}(\Sigma^*, \Sigma) = \sup\{\rho(\lambda, \Sigma) : \lambda \in \Sigma^*\}$ . Покажем от противного, что этот предел  $\lim_{d \rightarrow 0} \text{dist}(\Sigma^*, \Sigma)$  равен нулю. Пусть это не так, тогда существуют последовательности  $d_n \rightarrow 0$ ,  $\lambda_n \in E^*$  такие, что  $\rho(\lambda_n, \Sigma) > q > 0$ , т.е.  $\lambda_n$  равномерно отделены от спектра. Включение  $\lambda_n \in E^*(G_n)$  означает, что на символическом образе  $G_n$  есть периодический путь  $\omega_n$ ,  $\lambda_n = \lambda(\omega_n) + \varepsilon_n$ ,  $|\varepsilon_n| \leq \theta(d_n)$ . Согласно теореме 2.1, периодический путь  $\omega_n$  порождает периодическую  $\varepsilon$ -траекторию  $\sigma_n$  для любого  $\varepsilon > d_n$ , например  $\varepsilon = \frac{3}{2}d_n$ . При этом  $\lambda(\sigma_n) = \lambda(\omega_n) + \delta_n$ , где  $|\delta_n| < \theta(d_n)$ . Не ограничивая общности, можно считать, что все последовательности сходятся. Тогда  $\lim \lambda(\sigma_n) = \lim \lambda(\omega_n)$  и  $\lambda(\omega_n)$  отделены от спектра. Следовательно,  $\lim \lambda(\sigma_n)$  не лежит в спектре  $\Sigma$ , что противоречит определению спектра. Доказательство закончено.

Таким образом, для оценки спектра усреднения исходной системы нам нужно найти спектр оснащенного символического образа. Эта задача сводится к нахождению циклов с минимальным и максимальным средними. Понятно, что поиск таких циклов с помощью перебора невозможен в наших условиях, так как при итерационных построениях символического образа число циклов резко возрастает.

Поэтому для достижения цели можно использовать метод специальной транспортной задачи линейного программирования [88] или метод вычисления циклов с наименьшей характеристикой [60].

### 8.5. УСРЕДНЕНИЕ И ПОТОКИ

Рассмотрим абстрактный ориентированный граф  $G$ , на котором определена функция  $a[ij]$ . Пусть  $m = \{m_{ij}\}$  есть поток на  $G$ . Величину

$$b(m) = \sum_{ij} a[ij] m_{ij}$$

назовем усреднением функции  $a[ij]$  над потоком  $m$ . Согласно утверждению 5.4, каждый периодический путь  $\omega = \{z_0, z_1, \dots, z_p = z_0\}$  генерирует поток вида

$$m(\omega) = \left\{ m_{ij} = \frac{k_{ij}(\omega)}{p} \right\},$$

где  $k_{ij}(\omega)$  есть число проходов пути  $\omega$  через дугу  $i \rightarrow j$ . Такой поток будем называть периодическим. Сравним усреднение  $\lambda(\omega)$  над периодическим путем  $\omega$  и усреднение  $b(m)$  над потоком  $m(\omega)$ , порожденным периодическим путем  $\omega$ .

**Утверждение 8.9.** Пусть  $H$  есть класс эквивалентных возвратных вершин. Множество периодических средних значений

$$\Delta_{\text{per}}(H) = \left\{ \lambda(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p a[z_k z_{k+1}], \omega = \{z_0, z_1, \dots, z_p = z_0\} \subset H \right\}$$

совпадает с множеством усреднений над периодическими потоками

$$\Delta_{\text{flow}}(H) = \left\{ b(m) = \sum_{ij} a[ij] m_{ij}, \{m_{ij}\} - \text{периодический поток на } H \right\}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим периодический путь  $\omega = \{z_0, z_1, \dots, z_p = z_0\}$  на  $H$ . Группируя подобные члены в среднем арифметическом  $\lambda(\omega)$ , мы получаем

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p a[z_k z_{k+1}] = \frac{1}{p} \sum_{ij} k_{ij}(\omega) a[ij] = \sum_{ij} \frac{k_{ij}(\omega)}{p} a[ij],$$

где  $k_{ij}(\omega)$  есть число проходов пути  $\omega$  через дугу  $i \rightarrow j$ . В соответствии с утверждением 5.4, набор  $m(\omega) = \left\{ m_{ij} = \frac{k_{ij}(\omega)}{p} \right\}$  есть поток, генерируемый путем  $\omega$ . Мы получаем равенство

$$\lambda(\omega) = b(m).$$

Таким образом, для любого периодического пути  $\omega$  среднее значение на нем совпадает с усреднением над потоком  $m(\omega)$ . Доказательство завершено.

Из определения спектра класса эквивалентных возвратных вершин получим следующее.

**Следствие 8.2.** Спектр  $\Sigma(H)$  усреднения класса  $H$  есть замыкание усреднений над периодическими потоками в  $H$ :

$$\Sigma(H) = \overline{\Delta_{\text{flow}}(H)}.$$

**Теорема 8.4.** Пусть  $G$  — ориентированный граф,  $\{a[ij]\}$  — функция на  $G$ . Тогда ее спектр усреднения  $\Sigma(G)$  есть объединение отрезков

$$\Sigma(G) = \bigcup_k [a_k, b_k],$$

где каждый отрезок  $[a_k, b_k]$  есть множество усреднений функции над потоками класса  $H_k$  и  $\{H_k\}$  есть полный набор классов эквивалентных возвратных вершин.

*Доказательство.* Достаточно показать, что аналогичное утверждение выполнено для каждого класса эквивалентных возвратных вершин. Рассмотрим  $H$  — класс эквивалентных возвратных вершин. Для каждого периодического пути  $\omega \subset H$  выполнено равенство

$$\lambda(\omega) = b(m(\omega)),$$

где  $m(\omega)$  является потоком, порожденным  $\omega$ . Пусть  $\lambda \in \Sigma(H)$ , тогда существует последовательность периодических путей  $\omega_n$  таких, что  $\lambda(\omega_n)$  сходится к  $\lambda$ . Нужно показать, что существует поток  $m^*$ , для которого  $\lambda = b(m^*)$ . Последовательность потоков  $m(\omega_n)$  лежит в компакте, поэтому существует подпоследовательность  $m(\omega_{n_k})$  такая, что  $m(\omega_{n_k})$  сходится к  $m^*$  в метрике  $\rho$ . Тогда усреднение над потоками

$$b(m(\omega_{n_k})) \rightarrow b(m^*)$$

при  $k \rightarrow \infty$ . Для подпоследовательности выполнено

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\omega_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(\omega_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b(m(\omega_{n_k})) = b(m^*).$$

Теорема доказана.

## 8.6. УСРЕДНЕНИЕ И ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ

Пусть  $\Omega$  — компонента цепно-рекуррентного множества. Обозначим  $\mathcal{M}(\Omega)$  множество нормированных инвариантных мер, сосредоточенных на  $\Omega$ . Рассмотрим непрерывную функцию  $\varphi: M \rightarrow R$  и меру  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Будем говорить, что интеграл

$$\int_M \varphi d\mu = \lambda(\mu)$$

есть усреднение функции  $\varphi$  по мере  $\mu$ . Следующая теорема устанавливает связь спектра усреднения с инвариантными мерами.

**Теорема 8.5.** Спектр усреднения функции  $\varphi$  над псевдотраекториями динамической системы есть объединение отрезков

$$\Sigma = \bigcup_k [a_k, b_k],$$

где каждый отрезок  $[a_k, b_k] = \Sigma(\Omega_k)$  есть множество усреднений функции  $\varphi$  по инвариантным мерам, сосредоточенным на компоненте  $\Omega_k$  цепно-рекуррентного множества, т.е.

$$\Sigma(\Omega_k) = \left\{ \lambda = \int_M \varphi d\mu, \mu \in \mathcal{M}(\Omega_k) \right\},$$

где  $\{\Omega_k\}$  есть полное семейство цепно-рекуррентных компонент.

*Доказательство*

*Часть I.* Пусть  $\Omega$  есть компонента цепно-рекуррентного множества отображения. Рассмотрим инвариантную меру  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  и покажем, что усреднение  $\int_M \varphi d\mu$  лежит в спектре  $\Sigma$ . Фиксируем

$\varepsilon > 0$  и покажем, что найдется периодическая псевдотраектория  $\omega = \{x_i, i = 1, 2, \dots, p\}$ , для которой разность между средним арифметическим  $b(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \varphi(x_i)$  и усреднением по мере  $\int_M \varphi d\mu$  будет меньше, чем  $\varepsilon$ . Псевдотраектория  $\omega$  будет строиться следующим образом. На символическом образе  $G$  меры  $\mu$  порождает поток  $m$

(согласно формуле (5.1), вблизи потока  $m$  имеется периодический поток  $m^*$  (согласно теореме 5.2), который порожден периодическим путем  $\omega^*$  на  $G$ , путь  $\omega^*$  порождает искомую периодическую псевдотраекторию  $\omega$  (согласно теореме 2.1).

Пусть  $C = \{M(i)\}$  является покрытием многообразия  $M$ , причем ячейками являются замкнутые многогранники, которые пересекаются по граничным дискам. Пусть  $G$  — символический образ относительно покрытия  $C$ . Построим оснащение символического образа следующим образом. Фиксируем точку  $x_i$  в каждой ячейке  $M(i)$  и положим  $b[i] = \varphi(x_i)$ . Ясно, что такое оснащение зависит от выбора точек  $x_i \in M(i)$ . Согласно следствию 3.3 о локализации цепно-рекуррентного множества, для компоненты  $\Omega$  найдется класс эквивалентных возвратных вершин  $H(\Omega)$  таких, что  $U = \{\bigcup M(i), i \in H(\Omega)\}$  является замкнутой окрестностью множества  $\Omega$  и при этом, если диаметр покрытия  $d$  стремится к нулю, то  $U \rightarrow \cdot$ .

Из покрытия  $C = \{M(i)\}$  построим разбиение  $C^* = \{M^*(i)\}$ , состоящее из многогранников, где граничные диски будут принадлежать только одной из соседних ячеек. Полагая

$$m_{ij} = \mu(f(M^*(i)) \cap M^*(j)) = \mu(M^*(i) \cap f^{-1}(M^*(j))),$$

мы построим поток на символическом образе. Поскольку мера  $\mu$  сосредоточена на  $\Omega \subset \{\bigcup M(i), i \in H(\Omega)\}$ , поток  $m$  сосредоточен на  $H(\Omega)$ . В этом случае величина  $\mu(M^*(i)) = \sum_j m_{ij} = \sum_k m_{ki} = m_i$  задает меру вершины  $i$ . Усреднением оснащения над потоком  $m_{ij}$  назовем число

$$\sum_{ij} m_{ij} b[i] = \sum_i m_i b[i] = \sum_i \mu(M^*(i)) \varphi(x_i).$$

Мы получили интегральную сумму, которая зависит от выбора точек  $x_i$  в  $M(i)$ . Если  $x_i^*$  — другая точка в  $M(i)$ , то мы имеем

$$\left| \sum_i \varphi(x_i) \mu(M^*(i)) - \sum_i \varphi(x_i^*) \mu(M^*(i)) \right| \leq \theta(d) \sum_i \mu(M^*(i)) = \theta(d),$$

где  $\theta(d)$  — модуль непрерывности функции  $\varphi$ ;  $d$  — диаметр покрытия. По теореме о среднем мы имеем



$$\int_M \varphi(x) d\mu = \sum_i \int_{M^*(i)} \varphi(x) d\mu = \sum_i \varphi(x_i^*) \mu(M^*(i)),$$

где средняя точка  $x_i^*$  лежит в ячейке  $M(i)$ . Мы получили

$$\left| \sum_i m_i b[i] - \int_M \varphi(x) d\mu \right| \leq \theta(d). \quad (8.8)$$

Выбирая  $d$  достаточно малым, мы можем сделать разность между усреднением по потоку и усреднением по мере достаточно малой.

Периодические потоки плотны в пространстве всех потоков на  $\Omega$ . Это означает, что для любого  $\delta > 0$  найдется периодический поток  $m^* = \{m_{ij}^*\}$ , для которого  $\sum_{ij} |m_{ij} - m_{ij}^*| < \delta$ . Поток  $m^*$  порожден периодическим путем  $\omega^* = \{i_k, k=1, 2, \dots, p\}$  так, что  $m_{ij}^* = k_{ij} / p$ , где  $k_{ij}$  есть число проходов пути  $\omega^*$  через дугу  $i \rightarrow j$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_i m_i b[i] - \sum_i m_i^* b[i] \right| &= \left| \sum_i b[i] \sum_j (m_{ij} - m_{ij}^*) \right| \leq \\ &\leq K \sum_{ij} |m_{ij} - m_{ij}^*| < K\delta, \end{aligned}$$

где  $K = \max |\varphi|$ . Усреднение по периодическому потоку  $m^*$  равно

$$\sum_i m_i^* b[i] = \sum_{ij} m_{ij}^* b[i] = \frac{1}{p} \sum_{ij} k_{ij} b[i] = \frac{1}{p} \sum_k \varphi(x_{i(k)}),$$

где  $x_{i(k)} \in M(i_k)$ ,  $k=1, 2, \dots, p$ . Отметим, что усреднение по потоку  $m^*$  совпадает с усреднением по периодическому пути  $\omega$ :

$$\frac{1}{p} \sum_k \varphi(x_{i(k)}) = b(\omega).$$

В соответствии с теоремой 2.1, существует периодическая последовательность точек  $\omega = \{x_k, k=1, 2, \dots, p\}$  таких, что  $x_k \in M(i_k)$  и  $\omega$  есть  $\varepsilon_1$ -траектория для любого  $\varepsilon_1 > d$ . Положим  $\varepsilon_1 = \frac{3}{2}d$ . Поскольку  $x_{i(k)}$  и  $x_k$  лежат в  $M(i_k)$ , мы имеем

$$\left| \frac{1}{p} \sum_k \varphi(x_{i(k)}) - \frac{1}{p} \sum_k \varphi(x_{i_k}) \right| < \theta(d).$$

Суммируя полученные неравенства, получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_M \varphi d\mu - b(\omega) \right| &= \left| \int_M \varphi d\mu - \frac{1}{p} \sum_k \varphi(x_k) \right| \leq \\ &\leq \left| \int_M \varphi d\mu - \sum_i m_i b[i] \right| + \left| \sum_{ij} m_{ij} b[i] - \sum_{ij} m_{ij}^* b[i] \right| + \\ &+ \left| \sum_{ij} m_{ij}^* b[i] - \frac{1}{p} \sum_k \varphi(x_k) \right| < 2\theta(d) + K\delta. \end{aligned}$$

Пусть  $d > 0$  и  $\delta > 0$  такие, что  $2\theta(d) + K\delta \leq \varepsilon$ . В этом случае разность между усреднением  $b(\omega)$  по периодической псевдотраектории  $\omega$  и усреднением по мере  $\int_M \varphi d\mu$  меньше, чем  $\varepsilon$ . Описанная технология дает нам возможность построить последовательность периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий  $\{\omega_n, \varepsilon_n \rightarrow 0\}$ , усреднение на которых  $b(\omega_n)$  сходится к усреднению по мере  $\int_M \varphi d\mu$ . Следовательно, множество

усреднений по мерам  $\left\{ \int_M \varphi d\mu, \mu \in \mathcal{M}(\Omega) \right\}$  лежит в спектре.

*Часть II.* Покажем обратное включение, т.е. для любого элемента спектра  $\lambda \in \mathbb{T}$ , что реализуется на компоненте  $\Omega$ , найдется инвариантная мера  $\mu$  с носителем в  $\lambda$  такая, что  $\lambda = \int_M \varphi d\mu$ .

Рассмотрим последовательность периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий  $\omega_n, \varepsilon_n \rightarrow 0$ , усреднения над которыми сходятся к  $\lambda$ :

$$\omega_n = \{x_k, k = 1, 2, \dots, p_n\}, \quad b(\omega_n) = \frac{1}{p_n} \sum_k \varphi(x_k), \quad b(\omega_n) \rightarrow \lambda.$$

По предположению,  $\lambda$  реализуется на компоненте  $\Omega$ , поэтому последовательность  $\{\omega_n\}$  сходится равномерно к  $\Omega$ , согласно утверждению 3.5. Пусть  $C = \{M(i)\}$  есть покрытие ячейками  $M(i)$ , которые являются многогранниками, пересекающимися по граничным дискам, и  $G$  — символический образ относительно  $C$ . Пусть  $H(\Omega)$  — единственный класс эквивалентных возвратных вершин таких, что  $U = \{\bigcup M(i), i \in H(\Omega)\}$  является замкнутой окрестностью множества  $\Omega$ , согласно утверждению 3.5. В соответствии с теоремой 2.1, если  $\varepsilon_n > 0$  достаточно мало, то последовательность  $\sigma = \{i_k, x_k \in M(i_k)\}$  является допустимым путем на графе  $G$ . Если  $n$  достаточно велико, то  $\omega_n$  лежит в окрестности  $U = \{\bigcup M(i), i \in H(\Omega)\}$  и периодический

путь  $\sigma$  лежит в  $H$ . Пусть  $\{b[i] = \varphi(x_i), x_i \in M(i)\}$  задает оснащение на  $G$  и  $b(\sigma) = \frac{1}{p_n} \sum_k \varphi(x_k)$  есть среднее арифметическое над  $\sigma$ . При этом имеет место оценка

$$|b(\omega_n) - b(\sigma)| < \theta(d).$$

Периодический путь  $\sigma$  генерирует поток

$$m = \left\{ m_{ij} = \frac{k_{ij}}{p_n} \right\},$$

где  $k_{ij}$  — число проходов пути  $\sigma$  через дугу  $i \rightarrow j$ . В этом случае усреднение по потоку  $b(m) = \sum_i m_i b[i]$  совпадает с  $b(\sigma)$ . Поток  $m$  генерирует меру  $\mu$  такую, что

$$\mu(A) = \sum_i m_i \frac{v(A \cap M(i))}{v(M(i))},$$

где  $m_i = \sum_j m_{ij}$  есть мера ячейки  $M(i)$  и  $v$  есть лебегова мера. Согласно построению, мера  $\mu$  сосредоточена на  $U = \{\bigcup M(i), i \in H(\Omega)\}$ . Усреднение по мере

$$\int_M \varphi d\mu = \sum_i \int_{M^*(i)} \varphi d\mu = \sum_i \varphi(x_i^*) m_i,$$

где  $x_i^*$  есть (средняя) точка, лежащая в  $M(i)$ . Следовательно,

$$\left| \int_M \varphi d\mu - b(m) \right| = \left| \sum_i \varphi(x_i^*) m_i - \sum_i \varphi(x_i) m_i \right| < \theta(d)$$

и

$$\left| \int_M \varphi d\mu - b(\omega_n) \right| \leq \left| \int_M \varphi d\mu - b(m) \right| + |b(\sigma) - b(\omega_n)| < 2\theta(d).$$

Рассмотрим последовательность подразбиений  $C_k$  покрытия  $C$  с диаметрами  $d_k \rightarrow 0$ . Используя описанную технику, мы построим последовательность мер  $\mu_k$ . В соответствии с теоремой 5.6, суще-

ствует подпоследовательность  $\mu_{k(t)}$ , которая сходится (в слабой топологии) к инвариантной мере  $\mu_0$ .

Согласно теореме 3.9 о локализации, окрестности  $U$  сходятся к компоненте  $\Omega$  при  $d \rightarrow 0$ . Следовательно, мера  $\mu_0$  сосредоточена на  $\Omega$ . Исходная последовательность псевдотраекторий  $\{\omega_n\}$  содержит подпоследовательность  $\{\omega_{n(t)}\}$ , соответствующую  $\{\mu_{n(t)}\}$ . Без потери общности мы будем считать, что  $\{\omega_n\}$  соответствует последовательности  $\mu_n \rightarrow \mu_0$ . Таким образом, мы имеем последовательность  $\{\omega_n\}$  периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий с  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ,  $b(\omega_n) \rightarrow \lambda$  и последовательность мер  $\mu_n \rightarrow \mu_0$  в слабой топологии,  $\mu_0$  — инвариантная мера такая, что

$$\left| \int_M \varphi d\mu_n - b(\omega_n) \right| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Следовательно,  $\int_M \varphi d\mu_n \rightarrow \int_M \varphi d\mu_0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $\int_M \varphi d\mu_0 = \lambda$ . Теорема доказана.

## 8.7. ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ЭРГОДИЧЕСКИХ МЕР

Множество инвариантных мер  $\mathcal{M}(\Omega)$ , сосредоточенных на компоненте цепно-рекуррентного множества  $\Omega$ , образуют выпуклый компакт в слабой топологии. Эргодические меры являются крайними точками  $\text{ext } \mathcal{M}(\Omega)$  множества  $\mathcal{M}(\Omega)$ . Согласно теореме Шоке, любая точка выпуклого компакта может быть разложена в интегральную сумму крайних точек. Напомним, что множество инвариантных мер, которые являются выпуклой комбинацией конечного числа эргодических мер

$$\mathcal{M}^0 = \left\{ \mu = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu_k, \mu_k \in \text{ext } \mathcal{M}(\Omega), \alpha_k \geq 0, \sum_k \alpha_k = 1 \right\},$$

является выпуклым и замыкание множества  $\mathcal{M}^0$  в слабой топологии совпадает с  $\mathcal{M}(\Omega)$ :

$$\overline{\mathcal{M}^0} = \mathcal{M}(\Omega).$$

Фиксируем непрерывную функцию  $\varphi$  и рассмотрим функционал на пространстве мер  $\Phi : \mathcal{M}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  вида

$$\Phi(\mu) = \int_M \varphi d\mu.$$

Этот функционал является линейным относительно  $\mu$ . Действительно, если  $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$ ,  $\alpha > 0$ , то из определения интеграла Лебега следует равенство

$$\int_M \varphi d\mu = \alpha \int_M \varphi d\mu_1 + (1-\alpha) \int_M \varphi d\mu_2.$$

Следовательно,

$$\Phi(\mu) = \alpha\Phi(\mu_1) + (1-\alpha)\Phi(\mu_2). \quad (8.9)$$

Функционал  $\Phi$  является непрерывным в слабой топологии и поэтому отображает выпуклый компакт  $\mathcal{M}(\Omega)$  на выпуклый компакт в  $\mathbb{R}$ , который является отрезком  $[a, b]$ , где

$$a = \min_{\mathcal{M}(\Omega)} \Phi(\mu), \quad b = \max_{\mathcal{M}(\Omega)} \Phi(\mu).$$

Согласно теореме 8.5, отрезок  $[a, b]$ , является спектром усреднения функции  $\varphi$  над периодическими псевдотраекториями компоненты  $\Omega$ .

**Теорема 8.6.** Пусть отрезок  $[a, b]$  есть спектр усреднения функции  $\varphi$  над компонентой  $\Omega$ . Тогда:

- множество

$$\mathcal{M}(b) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}(\Omega) : \int_M \varphi d\mu = b \right\}$$

является непустым выпуклым компактом в  $\mathcal{M}(\Omega)$ ;

- крайние точки множества  $\mathcal{M}(b)$  состоят из эргодических мер  $\mu^*$  таких, что  $\int_M \varphi d\mu^* = b$ ;
- для любой меры  $\mu \in \mathcal{M}(b)$  существует разбиение (по модулю множеств меры нуль) многообразия  $M$  на инвариантные измеримые подмножества  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , где  $A$  — абстрактное пространство Лебега с мерой  $\beta$ , каждое  $\Omega_\alpha$  снабжено такой эргодической инвариантной мерой  $\mu_\alpha \in \text{ext } \mathcal{M}(b)$ , что для любой интегрируемой функции  $\varphi$  выполнено равенство

$$\int_M \varphi d\mu = \int_A \left( \int_M \varphi d\mu_\alpha \right) d\beta; \quad (8.10)$$

- аналогичные утверждения верны для числа  $a = \min_{\mathcal{M}(\Omega)} \Phi(\mu)$ .

*Доказательство*

1. Согласно теореме 8.5, найдется мера  $\mu^*$  такая, что  $b = \int_M \varphi d\mu^*$ .

Следовательно, множество  $\mathcal{M}(b)$  непустое. Из линейности и непрерывности функционала  $\Phi(\mu)$  следует, что множество  $\mathcal{M}(b) = \Phi^{-1}(b)$  является выпуклым компактом в слабой топологии.

2. Согласно теореме 6.2, существует разбиение (по модулю множеств меры ноль) многообразия  $M$  на инвариантные подмножества  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , каждое  $\Omega_\alpha$  снабжено эргодической мерой  $\mu_\alpha$  так, что мы имеем равенство

$$b = \int_M \varphi d\mu^* = \int_A \left( \int_M \varphi d\mu_\alpha \right) d\beta, \quad (8.11)$$

где  $A$  есть абстрактное пространство Лебега с мерой  $\beta$ . Положим

$$\psi(\alpha) = \int_M \varphi d\mu_\alpha,$$

тогда  $b = \int_A \psi(\alpha) d\beta$ , где  $\psi(\alpha)$  — измеримая функция. Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и построим множества  $A_1 = \psi^{-1}([a, b - \varepsilon])$  и  $A_2 = \psi^{-1}((b - \varepsilon, b])$ , которые являются  $\beta$ -измеримыми. Тогда множество  $A$  разлагается в сумму  $A = A_1 + A_2$ . Покажем от противного, что мера  $\beta(A_1) = 0$ . Пусть  $\beta$ -мера множества  $A_1$  есть  $\delta > 0$ , тогда  $\beta$ -мера множества  $A_2$  равна  $1 - \delta$ . Найдем

$$b = \int_A \psi(\alpha) d\beta = \int_{A_1} \psi(\alpha) d\beta + \int_{A_2} \psi(\alpha) d\beta \leq (b - \varepsilon)\delta + b(1 - \delta) = b - \varepsilon\delta.$$

Если  $\delta > 0$ , то мы получим противоречие  $b \leq b - \varepsilon\delta$ . Таким образом,  $\beta$ -мера множества  $A_2 = \psi^{-1}((b - \varepsilon, b])$  равна единице для любого  $\varepsilon > 0$ . Мы получили монотонную последовательность вложенных множеств  $\{\psi^{-1}((b - \varepsilon, b]), \varepsilon > 0\}$  такую, что

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \psi^{-1}((b - \varepsilon, b]) = \psi^{-1}(b).$$

Из монотонности меры следует, что мера

$$\beta(\psi^{-1}(b)) = \beta\left(\bigcap_{\varepsilon > 0} \psi^{-1}(b - \varepsilon, b]\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta\left(\bigcap_{\varepsilon > 0} \psi^{-1}(b - \varepsilon, b]\right) = 1.$$

Пространство Лебега  $A$  определено с точностью до множеств нулевой  $\beta$ -меры. Поэтому мы можем считать, что  $A$  совпадает с

$$\psi^{-1}(b) = \left\{ \mu_\alpha \in \text{ext}(\mathcal{M}(\Omega)) : \int_M \varphi d\mu_\alpha = b \right\}.$$

Из доказанного и формулы (8.11) следует, что семейство эргодических мер  $\left\{ \mu_\alpha \in \text{ext}(\mathcal{M}(\Omega)) : \int_M \varphi d\mu_\alpha = b \right\}$  является множеством крайних точек выпуклого множества  $\mathcal{M}(b)$ .

3. Из доказанного утверждения и теоремы 6.2 следует справедливость третьего утверждения теоремы.

### 8.8. СХОДИМОСТЬ В СРЕДНЕМ

**Определение 8.4.** Будем говорить, что последовательность  $\omega_n = \{x_{nk}, k \in \mathbb{Z}\}$  периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий сходится в среднем при  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , если для любой непрерывной функции  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$  средние значения на периоде

$$\bar{\varphi}(\omega_n) = \frac{1}{p_n} \sum_{k=1}^{p_n} \varphi(x_{nk})$$

сходятся при  $n \rightarrow \infty$ , где  $p_n$  — период псевдотраектории  $\omega_n$ .

**Теорема 8.7.** Пусть последовательность  $\omega_n$  периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий сходится в среднем, тогда существует инвариантная мера  $\mu$  такая, что для любой непрерывной функции  $\varphi$  имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(\omega_n) = \int \varphi d\mu.$$

*Доказательство.* Определим функционал  $\Phi$  на пространстве непрерывных функций  $C^0$ , полагая

$$\Phi(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(\omega_n).$$

Построенный функционал является линейным, ограниченным и положительным. Тогда, по теореме Рисса, он представляется в виде интеграла

$$\Phi(\varphi) = \int \varphi d\mu,$$

где  $\mu$  есть мера на многообразии  $M$ . Для того чтобы показать инвариантность построенной меры  $\mu$ , нужно проверить равенство  $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi(f))$ , что равносильно равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(\omega_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(f(\omega_n)),$$

где последовательность  $\omega_n = \{x_1, x_2, \dots, x_p = x_1\}$ , а последовательность  $f(\omega_n) = \{y_1, y_2, \dots, y_p = y_1\}$ ,  $y_i = f(x_i)$ . Последовательность  $f(\omega_n)$  является периодической. Покажем, что  $f(\omega_n)$  есть  $\eta(\varepsilon)$ -траектория, где  $\eta(d)$  — модуль непрерывности отображения  $f$ . Действительно,  $\omega_n$  есть периодическая  $\varepsilon$ -траектория, тогда расстояние  $\rho(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ . Найдем

$$\begin{aligned} \rho(f(y_i), y_{i+1}) &= \rho(f(y_i), f(x_{i+1})) < \eta(\rho(y_i, x_{i+1})) = \\ &= \eta(\rho(f(x_i), x_{i+1})) \leq \eta(\varepsilon). \end{aligned}$$

Тогда  $f(\omega_n)$  есть периодическая  $\eta(\varepsilon)$ -траектория. Найдем

$$|\varphi(x_{i+1}) - \varphi(y_i)| = |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(f(x_i))| < \eta(\rho(x_{i+1}, f(x_i))) < \eta(\varepsilon),$$

где  $\eta(d)$  — модуль непрерывности функции  $\varphi$ . Имеем

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\omega) &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \varphi(x_i) = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \varphi(x_{i+1}) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \varphi(y_i) + \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} (\varphi(x_{i+1}) - \varphi(y_i)) = \bar{\varphi}(f(\omega_n)) + E, \end{aligned}$$

где  $|E| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(y_i)| < \eta(\varepsilon)$ . Если  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , то  $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$  и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(\omega_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(f(\omega_n)).$$

Теорема доказана.

Если  $\omega_n$  является последовательностью периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , и на каждой псевдотраектории  $\omega_n$  отмечена точка  $x_n$  так, что  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , то, согласно утверждению 3.5, предельное множество последовательности  $\omega_n$  лежит в некоторой компоненте  $\Omega$  цепно-рекуррентного множества,  $x^* \in \Omega$ . Компонента  $\Omega$  однозначно



определяется точкой  $x^*$ . При этом последовательность  $\omega_n$  равномерно сходится к  $\Omega$ .

**Теорема 8.8.** Пусть  $\omega_n = \{x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{np_n} = x_{n0}\}$  есть последовательность периодических  $\epsilon_n$ -траекторий и  $\epsilon_n$  сходится к нулю. Тогда существуют подпоследовательность  $\omega_{n_k}$  и инвариантная мера  $\mu$  такие, что  $\omega_{n_k}$  сходится в среднем и для любой непрерывной функции  $\phi$  ее среднее значение на периодической псевдотраектории  $\omega_{n_k}$  сходится к ее среднему по мере  $\mu$ :

$$\bar{\phi}(\omega_{n_k}) = \frac{1}{p_{n_k}} \sum_{j=1}^{p_{n_k}} \phi(x_{n_k j}) \rightarrow \int \phi d\mu$$

при  $k \rightarrow \infty$ . При этом носитель меры  $\mu$  лежит в некоторой компоненте  $\Omega$  цепно-рекуррентного множества.

*Доказательство.* Не ограничивая общности, будем считать, что точки  $x_{n_0}$  сходятся к некоторой точке  $x^*$  при  $n \rightarrow \infty$ . Если это не так, то нужно перейти к подпоследовательности.

Пусть  $C = \{M(i)\}$  есть замкнутое покрытие ячейками, которые являются многогранниками, пересекающимися по граничным дискам, и  $G$  есть символический образ отображения  $f$  для покрытия  $C$ . В соответствии с теоремой 2.1, если  $\epsilon_n$  достаточно мало, то периодическая псевдотраектория  $\omega_n$  отслеживается на  $G$  периодическим путем  $\zeta$  периода  $p$ . Согласно утверждению 5.4, периодический путь  $\zeta$  задает поток

$$m = \left\{ m_{ij} = \frac{k_{ij}}{p} \right\},$$

где  $k_{ij}$  есть число проходов периодического пути  $\zeta$  через дугу  $i \rightarrow j$ . Поток  $m$  порождает меру  $\mu$ :

$$\mu(A) = \sum_i m_i \frac{v(A \cap M(i))}{v(M(i))},$$

где  $v$  — мера Лебега,  $m_i = \sum_j m_{ij}$ . При этом мера ячейки  $M(i)$  вычисляется как

$$\mu(M(i)) = \sum_j m_{ij} = \sum_j \frac{k_{ij}}{p} = \frac{k_i}{p},$$

где  $k_i$  есть число проходов вершины  $i$  периодическим путем  $\zeta$ . Теперь рассмотрим последовательность подразбиений  $C_k$  покрытия  $C$

с диаметрами разбиения  $d_k$ , сходящимися к нулю. Пусть  $G_k$  есть соответствующая последовательность символических образов. Используя описанную выше технику, мы построим подпоследовательность периодических  $\varepsilon_k$ -траекторий, последовательность потоков  $m_k$  на  $G_k$  и последовательность мер  $\mu_k$  на  $M$ . Согласно теореме 5.6, найдется подпоследовательность мер  $\mu_{k_t}$ , которая сходится к инвариантной мере  $\mu$  в слабой топологии. Это означает, что для любой функции  $\phi$

$$\int \phi d\mu_{k_t} \rightarrow \int \phi d\mu$$

при  $t \rightarrow \infty$ . В процессе построения искомой последовательности мы выделяли подпоследовательности два раза: первая подпоследовательность  $\omega_{n_k}$  получена при построении последовательности потоков  $m_k$  на  $G_k$ ; вторая подпоследовательность получена из  $\omega_{n_k}$  для построения сходящейся последовательности мер  $\mu_{k_t}$  на  $M$ . В дальнейшем, чтобы избежать сложностей в обозначениях, будем считать, что все подпоследовательности совпадают с исходной последовательностью.

Для завершения доказательства нужно показать, что

$$|\bar{\phi}(\omega_n) - \int \phi d\mu_n| \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ , где  $\omega_n = \{x_1, x_2, \dots, x_p = x_0\}$ . Учитывая, что мера Лебега граничных дисков равна нулю, мы можем записать

$$\int \phi d\mu_n = \sum_i \int_{M(i)} \phi d\mu_n = \sum_i \phi(x_i) \mu_n(M(i)) = \sum_i \phi(x_i) \frac{k_i}{p},$$

где  $x_i$  есть точка из  $M(i)$ , определенная по теореме о среднем. Число  $k_i$  совпадает с числом проходов псевдотраектории  $\omega_n$  через ячейку  $M(i)$ . Среднее значение

$$\bar{\phi}(\omega_n) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \phi(x_j)$$

можно переписать следующим образом. Соберем вместе слагаемые, соответствующие точкам  $x_j \in M(i)$ , затем просуммируем их по  $i$  и получим

$$\bar{\varphi}(\omega_n) = \frac{1}{p} \sum_i \sum_{x_j \in M(i)} \varphi(x_j).$$

Число слагаемых в последней сумме равно числу проходов псевдотраектории  $\omega_n$  через ячейку  $M(i)$ . Тогда мы можем записать

$$|\bar{\varphi}(\omega_n) - \int \varphi d\mu_n| = \frac{1}{p} \sum_i \sum_{x_j \in M(i)} |\varphi(x_j) - \varphi(x_i)| \leq \eta(d_n),$$

где  $x_i$  и  $x_j$  лежат в ячейке  $M(i)$ ;  $\eta(d_n)$  — модуль непрерывности функции  $\varphi$ ;  $d_n$  — диаметр покрытия  $C_n$  и  $d_n \rightarrow 0$ . Следовательно, предел средних по периоду совпадает со средним по мере.

Согласно теореме 3.6, предельное множество последовательности  $\omega_n$  лежит в некоторой компоненте цепно-рекуррентного множества. По выбору подпоследовательности, предельная точка  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_0}$  лежит в компоненте  $\Omega$ . Последовательность  $\omega_n$  сходится к  $\Omega$  равномерно. Многозначное отображение  $h: M \rightarrow V$  сопоставляет точке  $x$  все вершины  $i$  такие, что  $x \in M(i)$ . Согласно утверждению 3.5, образ  $h(x)$  цепно-рекуррентной точки состоит из возвратных вершин и существует единственный класс  $H(\Omega)$  эквивалентных возвратных вершин такой, что  $h(\Omega) \subset H(\Omega)$ . Согласно следствию 3.5 из теоремы 3.9 о локализации цепно-рекуррентного множества, объединение  $U = \{\bigcup M(i), i \in H(\Omega)\}$  является замкнутой окрестностью компоненты  $\Omega$  и, если диаметр покрытия  $d$  стремится к нулю, то  $U$  сходится к  $\Omega$ . По построению носитель меры  $\mu_k$  лежит в  $U_k = \{\bigcup M(i), i \in H(\Omega), M(i) \in C_k\}$ , следовательно, носитель меры  $\mu$  лежит в компоненте  $\Omega = \bigcap_k U_k$ . Теорема доказана.

Теорема 8.7 говорит о том, что последовательность периодических псевдотраекторий определяет инвариантную меру. Следующая теорема утверждает обратное: инвариантная мера определяет последовательность периодических псевдотраекторий, которая сходится в среднем к усреднению по данной мере.

**Теорема 8.9.** Если носитель инвариантной меры  $\mu$  лежит в одной компоненте цепно-рекуррентного множества, то найдется последовательность периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий  $\omega_n$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , такая, что для любой непрерывной функции  $\varphi$  среднее по периоду  $\bar{\varphi}(\omega_n)$  сходится к  $\int \varphi d\mu$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство* этой теоремы, по существу, повторяет первую часть доказательства теоремы 8.5, поэтому мы кратко опишем основные этапы построения последовательности псевдотраекторий  $\omega_n$ .

Пусть  $C = \{M(i)\}$  является покрытием многообразия  $M$  замкнутыми многогранниками, которые пересекаются по граничным дискам. Пусть  $G$  — символический образ относительно покрытия  $C$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и определим периодическую псевдотраекторию  $\omega = \{x_i, i = 1, 2, \dots, p\}$ , для которой разность между средним арифметическим  $\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \varphi(x_i)$  и усреднением по мере  $\int \varphi d\mu$  будет меньше, чем  $\varepsilon$ . Псевдотраектория  $\omega$  будет строиться следующим образом. На символическом образе  $G$  мера  $\mu$  порождает поток  $m$ , вблизи потока  $m$  имеется периодический поток  $m^*$  (согласно теореме 5.2), который порожден периодическим путем  $\omega^*$  на  $G$ , путь  $\omega^*$  порождает искомую периодическую псевдотраекторию  $\omega$  (согласно теореме 2.1 об отслеживании). Детали см. в доказательстве теоремы 8.5.

## 8.9. РЕКУРРЕНТНОСТЬ И ПЕРИОДИЧНОСТЬ

Пусть  $\omega_n$  — последовательность периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , на каждой псевдотраектории  $\omega_n$  отмечена точка  $x_n$  такая, что  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , предельная точка  $x^*$  лежит в некоторой компоненте  $\Omega$  цепно-рекуррентного множества. Тогда последовательность  $\omega_n$  сходится к компоненте  $\Omega$  равномерно (согласно утверждению 3.5) и псевдотраектории  $\omega_n$  сходятся к траектории  $Tr(x^*) = \{y(k) = f^k(x^*), k \in \mathbb{Z}\}$  поточечно.

**Теорема 8.10.** Если последовательность  $\omega_n$  периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , сходится равномерно к траектории  $Tr$ , то эта траектория является рекуррентной. Предельное множество последовательности  $\omega_n$  совпадает с замыканием траектории  $Tr$  и является минимальным множеством.

*Доказательство.* Псевдотраектория  $\omega_n = \{x_n(k), k \in \mathbb{Z}\}$  является периодической с периодом  $p_n$ , т.е.  $x_n(k + p_n) = x_n(k)$  для любого  $k \in \mathbb{Z}$ . Фиксируем  $n$  и положим  $r_n = \sup_k (x_n(k), y(k))$ . Тогда, согласно предположению о равномерной сходимости,  $r_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Пусть  $B(x, r)$  — шар радиуса  $r$  с центром в точке  $x$ . Поскольку псевдотраектория  $\omega_n$  является  $p_n$ -периодической, объединение  $p_n$  шаров вида

$$U_n = \left\{ \bigcup_{k=1}^{p_n} B(x_n(k), r_n), x_n(k) \in \omega_n \right\}$$

содержит всю траекторию  $Tr = \{y(k), k \in \mathbb{Z}\}$ . При этом  $x_n(k) = x_n(k + zp_n)$ ,  $z \in \mathbb{Z}$ , и расстояние

$$\rho(y(k+zp_n), x_n(k)) = \rho(y(k+zp_n), x_n(k+zp_n)) \leq r_n$$

для  $z \in \mathbb{Z}$ . Следовательно, расстояние  $\rho(y(k+zp_n), y(k)) \leq 2r_n$  для  $z \in \mathbb{Z}$ , и шар радиуса  $2r_n$  с центром в  $y(k)$  содержит точки вида  $y(k+zp_n)$ ,  $z \in \mathbb{Z}$ . Тогда объединение  $p_n$  шаров вида

$$U_n^*(k_0) = \left\{ \bigcup_z B(y(k_0+z), 2r_n), 0 < z \leq p_n \right\}$$

содержит всю траекторию  $Tr$  для любого числа  $k_0 \in \mathbb{Z}$ . Покажем, что траектория  $Tr$  является рекуррентной. Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Поскольку  $r_n \rightarrow 0$ , найдем  $r_n < 1/2\varepsilon$ , что определит номер  $n$  и период  $p_n$  псевдотраектории  $\omega_n$ . Из описанного выше построения следует, что  $2r_n$ -окрестность любого отрезка траектории  $Tr$  длины  $p_n$  содержит всю траекторию  $Tr$ . Следовательно,  $Tr$  является рекуррентной траекторией. Поскольку  $r_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , предельное множество последовательности  $\omega_n$  совпадает с замыканием траектории  $Tr$ . Теорема Биркгофа ([23], с. 404) утверждает, что замыкание рекуррентной траектории есть компактное минимальное множество. Теорема доказана.

Пусть полутраектория  $T = \{x(k) = f^k(x(0)), k \in \mathbb{Z}^+\}$  имеет предельную точку  $x^*$ , т.е. существует последовательность  $x(k_m) \rightarrow x^*$  при  $m \rightarrow \infty$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся точки  $x(k_1), x(k_2)$  такие, что расстояние между ними  $\rho(x(k_1), x(k_2)) < \varepsilon$ ,  $k_1 \neq k_2$ . Пусть  $k_1 < k_2$ , тогда  $\rho(f^{k_2-k_1}(f^{k_1}(x(0))), f^{k_1}(x(0))) < \varepsilon$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega = \{y(0) = f^{k_1}(x(0)), y(1) = f^{k_1+1}(x(0)), \dots, y(p-1) = \\ = f^{k_2-1}(x(0)), y(p) = y(0)\} \end{aligned}$$

является  $p$ -периодической  $\varepsilon$ -траекторией. Аналогично построим последовательность  $\omega_n$  периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . На каждой псевдотраектории  $\omega_n$  отмечена точка  $y_n = f^{k_n}(x(0)) \rightarrow x^*$  при  $n \rightarrow \infty$ . Согласно теореме 8.8, существуют подпоследовательность  $\omega_{n_m}$  и инвариантная мера  $\mu$  такие, что среднее значение на  $\omega_{n_m}$  любой непрерывной функции сходится к ее усреднению по мере  $\mu$ :

$$\bar{\varphi}(\omega_{n_m}) = \frac{1}{p_m} \sum_{k=0}^{p_m-1} \varphi(y(k)) \rightarrow \int_M \varphi d\mu$$

при  $m \rightarrow \infty$ . Носитель меры  $\mu$  лежит в  $\omega$ -предельном множестве траектории  $T$ .

Теперь рассмотрим рекуррентную траекторию  $Tr = \{x(k) = f^k(x(0)), k \in \mathbb{Z}\}$ . В этом случае отмеченная и предельная точки совпадают с начальной точкой

$$y_n = x(0) = x^*, \quad k_1 = 0 \text{ и } y(k) = f^k(x^*).$$

Это приводит к тому, что для рекуррентной траектории  $Tr$  существует последовательность целых чисел  $p_n \rightarrow \infty$  и инвариантная мера  $\mu$ , для которых выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p_n} \sum_{k=0}^{p_n-1} \varphi(f^k(x(0))) = \int \varphi d\mu. \quad (8.12)$$

При этом носитель меры  $\mu$  совпадает с замыканием рекуррентной траектории  $\overline{Tr}$ , которое является минимальным множеством. Возникает вопрос, как инвариантная мера связана с подпоследовательностью  $p_m \rightarrow \infty$ ? Здесь нам понадобятся результаты работы [94].

Точка  $x \in$  называется квазирегулярной, если для любой непрерывной функции  $\varphi$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)). \quad (8.13)$$

В работе [94] имеется пример минимального множества с нерегулярной точкой. Это означает, что предел подпоследовательности (8.12) всегда существует, но общего предела (8.13) может не существовать. Имеет место следующая теорема.

**Теорема 8.11** [94]. Всякое минимальное множество либо является эргодическим множеством, либо содержит, по крайней мере, одну не квазирегулярную точку, т.е. существуют точка  $x \in \Omega$  и непрерывная функция  $\varphi$ , для которых предел

$$\overline{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(f^k(x))$$

не существует.

В последнем случае замыкание  $\overline{Tr}$  рекуррентной траектории является носителем более одной эргодической меры. Следующая теорема доказана в [94], утверждение 5.5.

**Теорема 8.12.** Для компактной динамической системы  $(\Omega, f)$  следующие условия на точку  $p \in \Omega$  эквивалентны:

- для каждой непрерывной функции  $\varphi$  последовательность

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(f^{k+s}(p))$$

сходится равномерно по  $s \in \mathbb{Z}$  при  $m \rightarrow \infty$ ;

- подсистема  $(\overline{Tr}, f)$  является строго эргодической (допускающей единственную инвариантную меру).

**Теорема 8.13.** Если последовательность  $\omega_n$  периодических  $\varepsilon_n$ -траекторий сходится в среднем при  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  и сходится равномерно к траектории  $Tr$  при  $n \rightarrow \infty$ , то замыкание траектории  $Tr$  является минимальным и строго эргодическим множеством.

*Доказательство.* Теорема 8.10 утверждает, что в наших условиях траектория  $Tr$  является рекуррентной и замыкание  $\overline{Tr}$  является минимальным множеством. Из теоремы 8.12 следует: для завершения доказательства нужно показать, что последовательность

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(f^{k+s}(p))$$

сходится равномерно по  $s \in \mathbb{Z}$  при  $m \rightarrow \infty$ , где  $p \in Tr$ .

Пусть  $\omega_n = \{x_n(k), k \in \mathbb{Z}\}$  есть последовательность периодических  $\varepsilon_n$ -траекторией,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , и  $p_n$  есть период  $\omega_n$ . Среднее значение функции  $\varphi$

$$\bar{\varphi}(\omega_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(x_n(k)) = \frac{1}{p_n} \sum_{k=0}^{p_n-1} \varphi(x_n(k)).$$

Не ограничивая общности, будем считать, что  $x_n(0)$  сходится к точке  $p$ . Тогда  $y(0) = p$ , траектория  $Tr = \{y(k) = f^k(p), k \in \mathbb{Z}\}$  и  $r_n = \sup_k (x_n(k), y(k))$  сходится к нулю, при  $n \rightarrow \infty$ . Разность средних

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(f^{k+s}(p)) - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(x_n(k+s)) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} |\varphi(f^{k+s}(p)) - \varphi(x_n(k+s))| \leq \theta(r_n), \end{aligned}$$

где  $\theta(r)$  — модуль непрерывности функции  $\varphi$ ;  $m$  и  $s$  — любые. По предположению, последовательность  $\omega_n$  сходится в среднем, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(\omega_n) = \int_M \varphi d\mu,$$

где  $\mu$  — инвариантная мера. Покажем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(f^{k+s}(p)) = \int_M \varphi d\mu$$

и эта сходимость равномерна по  $s$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(f^{k+s}(p)) - \int_M \varphi d\mu \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(f^{k+s}(p)) - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(x_n(k+s)) \right| + \\ & + \left| \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(x_n(k+s)) - \bar{\varphi}(\omega_n) \right| + \left| \bar{\varphi}(\omega_n) - \int_M \varphi d\mu \right| \leq \\ & \leq \theta(r_n) + \left| \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(x_n(k+s)) - \frac{1}{p_n} \sum_{k=0}^{p_n-1} \varphi(x_n(k)) \right| + \delta_n, \end{aligned}$$

где  $\delta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Выбором  $n$  можно добиться, чтобы первое и последнее слагаемые были достаточно малы при любых  $m$  и  $s$ . Покажем, что если  $m$  достаточно велико, то величина

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(x_n(k+s)) - \frac{1}{p_n} \sum_{k=0}^{p_n-1} \varphi(x_n(k)) \right|$$

будет достаточно малой равномерно по  $s$  и фиксированному  $n$ . Поскольку последовательность  $\omega_n$  является периодической с периодом  $p_n$ , следовательно,

$$\sum_{k=0}^{p_n-1} \varphi(x_n(k+s)) = p_n \bar{\varphi}(\omega_n)$$

для любого  $s$ . Пусть  $m = tp_n + r$ , где  $t$  — целая часть дроби  $m / p_n$ , остаток  $r$  удовлетворяет неравенству  $0 \leq r < p_n$ . Тогда



$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(x_n(k+s)) &= \frac{1}{m} \left( \sum_{k=0}^{p_n-1} \varphi(x_n(k+s)) + \sum_{k=0}^{p_n-1} \varphi(x_n(k+p_n+s)) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{p_n-1} \varphi(x_n(k+(t-1)p_n+s)) + \sum_{k=0}^{r-1} \varphi(x_n(k+tp_n+s)) \right) = \\ &= \frac{1}{m} \left( tp_n \bar{\varphi}(\omega_n) + \sum_{k=0}^{r-1} \varphi(x_n(k+tp_n+s)) \right) = \bar{\varphi}(\omega_n) + \alpha(t), \end{aligned}$$

где

$$\alpha(t) = \frac{-r}{tp_n + r} \bar{\varphi}(\omega_n) + \frac{1}{tp_n + r} \sum_{k=0}^{r-1} \varphi(x_n(k+tp_n+s)).$$

Учитывая ограниченность функции  $\varphi$ ,  $|\varphi| < C$  и неравенство  $r < p_n$ , получаем оценку  $|\alpha(t)| \leq 2C/(t-1)$ . Таким образом, показано, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно выбрать  $n$ , для которого  $\theta(r_n) + \delta_n \leq 2\varepsilon/3$ , затем выбрать  $t^*$  так, что  $2C/(t^*-1) \leq \varepsilon/3$ . Тогда

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(f^{k+s}(p)) - \int_M \varphi d\mu \right| \leq \varepsilon$$

при  $m > t^* p_n$  равномерно по  $s$ . В этом случае, согласно теореме 8.10, предельное множество последовательности  $\omega_n$  совпадает с замыканием рекуррентной траектории  $Tr$  и является минимальным множеством с единственной эргодической мерой  $\mu$ . Теорема доказана.

## 8.10. ПЕРИОДИЧНОСТЬ И ЭРГОДИЧНОСТЬ

Рассмотрим последовательность  $C_t = \{M_t(i)\}$  подразбиений исходного покрытия  $C$ , диаметр  $d_t$  которых сходится к нулю. Пусть  $G_t$  — соответствующая последовательность символических образов, на которых действует отображение  $s: G_{t+1} \rightarrow G_t$  ориентированных графов.

**Теорема 8.14.** Пусть на каждом  $G_t$  задан периодический путь  $\omega_t = \{i_t(1), i_t(2), \dots, i_t(p_t) = i_t(0)\}$  периода  $p_t$  и последовательность путей  $\omega_t$  согласована, т.е.  $\omega_t = s(\omega_{t+1})$ . Тогда верны следующие утверждения.

1. Существует рекуррентная траектория  $T = \{x_k : x_{k+1} = f(x_k)\}$ , для которой  $x_k \in M(i_{t(k)})$  для любого  $t$ .

## 2. Последовательность периодических псевдотраекторий

$$T_t = \{x_t(k) \in M_t(i_t(k)), k \in \mathbb{Z}\}$$

(которые являются следами путей  $\omega_t$ ) сходится к траектории  $T$  равномерно так, что  $\sup_k \sup_t \sup_t (x_t(k), x_k) \leq d_t$ .

3. Последовательность замкнутых множеств  $P_t(\omega_t) = \bigcup_k M_t(i_t(k))$  является убывающей:  $P_{t+1} \subset P_t$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t = \bigcap_t P_t$  совпадает с замыканием траектории  $T$ .

4. Последовательность периодических псевдотраекторий  $T_t$  сходится в среднем и существует инвариантная мера  $\mu$  такая, что для любой непрерывной функции  $\phi$  средние на периоде  $\bar{\phi}(\omega_t)$  сходятся к  $\int \phi d\mu$  при  $t \rightarrow \infty$ .

5. Замыкание траектории  $T$  является минимальным и строго эргодическим множеством меры  $\mu$ , носитель этой меры

$$\text{supp } \mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \bigcup_k M_t(i_t(k)).$$

6. Если  $\{x_t(n) \in M_t(i_t(k)), 1 \leq n \leq p_t\}$  есть след периодического пути  $\omega_t$ , то дискретная мера

$$\mu_t^* = \frac{1}{p_t} \sum_{n=1}^{p_t} \delta(x_t(n))$$

сходится к эргодической мере  $\mu$  при  $t \rightarrow \infty$  в слабой топологии, где  $\delta(x)$  является  $\delta$ -функцией (мера) Дирака.

*Доказательство.* В условиях теоремы мы имеем последовательность подразбиений  $C_t = \{M_t(i)\}$ , последовательность символических образов  $G_t$ , связанных отображением  $s: G_{t+1} \rightarrow G_t$ , последовательность пространств потоков  $\mathcal{M}(G_t)$ , связанных отображением  $s^*: \mathcal{M}(G_{t+1}) \rightarrow \mathcal{M}(G_t)$ . Каждый периодический путь  $\omega_t = \{i_t(1), i_t(2), \dots, i_t(p_t) = i_t(0)\}$  периода  $p_t$  лежит на символическом образе  $G_t$ .

Утверждения 1 и 2 (данной теоремы) являются следствием теоремы 3.1, поэтому мы кратко напомним доказательства этих утверждений.

*Доказательство утверждения 1.* Фиксируем  $k$  и рассмотрим последовательность ячеек  $\{M_t(i_t(k)), t = 1, 2, \dots\}$  из последовательности подразбиений  $C_t$ . Из согласованности периодических путей

$\omega_t$  следует, что  $s(i_{t+1}(k)) = i_t(k)$ . Это означает, что ячейка. . входит в подразбиение ячейки  $M_t(i_t(k))$ . В таком случае имеют место включения

$$M_1(i_1(k)) \supset M_2(i_2(k)) \supset \dots \supset M_t(i_t(k)) \supset M_{t+1}(i_{t+1}(k)) \supset \dots \quad (8.14)$$

Поскольку ячейки замкнуты и их диаметры стремятся к нулю вместе с  $d_t$ , значит, существует единственная точка

$$x_k = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t(i_t(k)) = \bigcap_t M_t(i_t(k)).$$

Аналогично последовательность замкнутых множеств  $\{f(M_t(i_t(k))) \cap M_t(i_t(k+1))\}$  имеет предельную точку

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(M_t(i_t(k))) \cap M_t(i_t(k+1)) = x_{k+1},$$

при этом  $f(x_k) = x_{k+1}$ . Детали см. в доказательстве теоремы 3.1.

Для доказательства рекуррентности построенной траектории заметим, что для каждого  $t$  вся траектория  $T = \{x_k\}$  лежит в объединении ячеек периодического пути  $\omega_t = \{i_t(1), i_t(2), \dots, i_t(p_t) = i_t(0)\}$ :

$$T \subset P(\omega_t) = \bigcup_t M_t(i_t(k)).$$

Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и найдем  $t$  такое, что  $d_t < \varepsilon$ . Для этого  $t$  определим период  $p_t$  пути  $\omega_t$ . Тогда вся траектория  $T = \{x_k\}$  лежит в  $P(\omega_t) = \bigcup_k M_t(i_t(k))$ . Поскольку точка  $x_k$  траектории  $T$  лежит в  $M_t(i_t(k))$ , следовательно, шар  $B(r, x)$  радиуса  $r = d_t$  с центром в точке  $x = x_k$  содержит ячейку  $M_t(i_t(k))$ . Значит, объединение шаров

$$H = \bigcup_k B(d_t, x_k) \supset P(\omega_t)$$

содержит траекторию  $T$ . Возьмем любой отрезок  $\{x_k, k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + p_t - 1\}$  длины  $p_t$  траектории  $T$ . Путь  $\omega_t$  имеет период  $p_t$ , поэтому описанный отрезок лежит в  $P(\omega_t)$ . Таким образом,  $\varepsilon$ -окрестность любого отрезка траектории  $T$  длины  $p_t$  содержит всю траекторию  $T$ , т.е.  $T$  является рекуррентной траекторией.

*Доказательство утверждения 2.* Пусть  $\omega_t = \{i_t(k), 1 \leq k \leq p_t\}$  — согласованная последовательность периодических путей на  $G_t$ . Фиксируя  $t$ , определим псевдотраекторию  $T_t = \{x_t(k) \in M_t(i_t(k)), 1 \leq k \leq p_t\}$ . Согласно построению, точка  $x_t(k)$  псевдотраектории  $T_t$  и точка  $x_k$  траектории  $T$  лежат в одной ячейке  $M_t(i_t(k))$  для каждой  $k$  и  $t$ . Тогда расстояние между этими точками не превосходит диаметра ячейки  $d_t$ . Согласно теореме 2.1,  $T_t$  является периодической  $\varepsilon$ -траекторией для любого  $\varepsilon > d_t + \theta(d_t)$ , где  $\theta$  — модуль непрерывности отображения  $f$ . Поскольку последовательность периодических путей согласована, следовательно, последовательность псевдотраекторий  $T_t$  сходится равномерно к рекуррентной траектории  $T = \{x_k\}$ , при этом расстояние  $\rho(x(k), x_t(k)) < d_t$ .

*Доказательство утверждения 3.* Из согласованности путей  $\omega_t = s(\omega_{t+1})$  следует, что  $i_t(k) = s(i_{t+1}(k))$  для каждого  $k$ . Это означает, что ячейка  $M_{t+1}(i_{t+1}(k))$  входит в подразбиение ячейки  $M_t(i_t(k))$  и

$$M_{t+1}(i_{t+1}(k)) \subset M_t(i_t(k)).$$

Тогда, объединяя эти включения по  $k$ , получаем

$$P_{t+1} = U_k M_{t+1}(i_{t+1}(k)) \subset U_k M_t(i_t(k)) = P_t.$$

Каждое замкнутое множество  $P_t$  содержит траекторию  $T$  и ее замыкание  $\bar{T}$ , следовательно,  $\bar{T} \subset \bigcap_t P_t$ . Обратное включение покажем от противного. Пусть существует точка  $x \in \bigcap_t P_t$ , которая не лежит в замыкании  $\bar{T}$ . Тогда расстояние  $\rho(x, \bar{T}) = r > 0$ . Из включения  $x \in \bigcap_t P_t$  следует, что  $x \in P_t$  для любого  $t$ . Каждое  $P_t$  есть объединение конечного числа ячеек  $M_t(i_t(k))$ . Тогда найдется ячейка  $M_t(i_t(k))$ , содержащая точку  $x$ . Однако ячейка  $M_t(i_t(k))$  содержит точку  $x_k \in T$  и, следовательно, расстояние  $\rho(x, \bar{T}) \leq d_t$ . Если  $d_t < r$ , то мы получаем противоречие с предположением  $\rho(x, \bar{T}) = r$ . Поэтому необходимо  $\bar{T} \supset \bigcap_t P_t$ . Таким образом,  $\bar{T} = \bigcap_t P_t$ .

*Доказательство утверждения 4.* Если на символическом образе  $G$  имеется периодический путь  $\omega$  периода  $N$ , то на  $G$  имеется поток  $m$  такой, что  $m_{ij} = k_{ij} / N$ , где  $k_{ij}$  есть число проходов пути  $\omega$  через дугу  $i \rightarrow j$ . Описанный поток  $m(\omega)$  называется потоком, порожденным периодическим путем  $\omega$ . Таким образом, согласованная последовательность  $\omega_t = \{i_t(k)\}$  периодических путей порождает со-

гласованную последовательность периодических потоков  $m(\omega_t)$ . Каждый поток  $m(\omega_t)$  порождает меру  $\mu_t$  вида

$$\mu_t = \sum_i m_t(i) \delta(x_t(i)), \quad m_t(i) = \sum_j m_t(ij) = \sum_j \frac{k_t(ij)}{p_t} = \frac{k_t(i)}{p_t},$$

где  $p_t$  — период пути  $\omega_t$ ;  $k_t(ij)$  — число проходов пути  $\omega_t$  через дугу  $i \rightarrow j$ ;  $k_t(i)$  — число проходов пути  $\omega_t$  через вершину  $i$ . Для любой непрерывной функции  $\varphi$

$$\int \varphi d\mu_t = \sum_i m_t(i) \varphi(x_t(i)) = \sum_i \frac{k_t(i)}{p_t} \varphi(x_t(i)). \quad (8.15)$$

Согласно теореме 2.1, периодическая последовательность

$$T_t = \{x_t(k) \in M_t(i_t(k)), 0 \leq k \leq p_t\}$$

является следом периодического пути  $\omega_t$ . В этом случае точка  $x_t(k)$  зависит от  $k$ . Иначе говоря, возможно, что вершины  $i_t(k_1), i_t(k_2)$  совпадают, но  $x_t(k_1) \neq x_t(k_2)$ . В этом случае точки  $x_t(k_1)$  и  $x_t(k_2)$  лежат в одной ячейке, т.е. расстояние  $\rho(x_t(k_1), x_t(k_2)) \leq d_t$ . Наша цель — показать, что для любой непрерывной функции среднее значение

$$\bar{\varphi}(T_t) = \frac{1}{p_t} \sum_{k=1}^{p_t} \varphi(x_t(k))$$

сходится при  $t \rightarrow \infty$ . Число проходов  $k_t(i)$  пути  $\omega_t$  через вершину  $i$  совпадает с числом проходов псевдотраектории  $T_t$  через ячейку  $M_t(i)$ . Отсюда следует, что  $k_t(i) \neq 0$  в (8.15) только для вершин периодического пути  $\omega_t = \{i_t(k), 1 \leq k \leq p_t\}$ . При этом  $\sum_i k_t(i) = p_t$ . Подставляя в (8.15)

$$k_t(i) \varphi(x_t(k)) = \sum_{i_t(k)=i} \varphi(x_t(i_t(k))),$$

получаем

$$\int \varphi d\mu_t = \frac{1}{p_t} \sum_{k=1}^{p_t} \varphi(x_t(i_t(k))).$$

Покажем, что среднее значение  $\bar{\varphi}(T_t)$  функции  $\varphi$  на периодической псевдотраектории  $T_t$  и интеграл  $\int \varphi d\mu_t$  имеют общий предел при  $t \rightarrow \infty$ . Согласно построению, точки  $x_t(k)$  и  $x_t(i_t(k))$  лежат в одной ячейке  $M_t(i_t(k))$ , следовательно, расстояние  $\rho(x_t(k), x_t(i_t(k))) \leq d_t$ . Тогда

$$\left| \int \varphi d\mu_t - \bar{\varphi}(T_t) \right| \leq \frac{1}{p_t} \sum_{k=1}^{p_t} \left| \varphi(x_t(i_t(k))) - \varphi(x_t(k)) \right| \leq \eta(d_t) \rightarrow 0,$$

где  $\eta$  — модуль непрерывности функции  $\varphi$  и диаметр разбиения  $d_t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Это означает, что среднее значение  $\bar{\varphi}(T_t)$  и интеграл  $\int \varphi d\mu_t$  сходятся к общему пределу. Последовательность мер  $\mu_t$  сходится к инвариантной мере  $\mu$  в слабой топологии, поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(T_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_t = \int \varphi d\mu,$$

т.е. последовательность периодических псевдотраекторий  $T_t$  сходится в среднем.

*Доказательство утверждения 5.* Согласно предыдущему утверждению, последовательность  $T_t$  периодических псевдотраекторий сходится в среднем. Согласно утверждению 2, последовательность  $T_t$  сходится равномерно к траектории  $T$ . По теореме 8.13 замыкание траектории  $T$  является минимальным и строго эргодическим множеством, следовательно, инвариантная мера  $\mu$  является эргодической. Замыкание траектории  $T$  является носителем этой меры. Согласно утверждению 3, носитель

$$\text{supp } \mu = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t = \bigcap_t \left( \bigcup_k M_t(i_t(k)) \right).$$

*Доказательство утверждения 6.* Пусть  $T_t = \{x_t(n) \in M_t(i_t(n)), 1 \leq n \leq p_t\}$  есть след периодического пути  $\omega_t$  и пусть дискретная мера  $\mu_t$  имеет вид

$$\mu_t = \frac{1}{p_t} \sum_{n=1}^{p_t} \delta(x_t(n)).$$

Тогда

$$\int \varphi d\mu_t = \frac{1}{p_t} \sum_{n=1}^{p_t} \varphi(x_t(n)) = \bar{\varphi}(T_t).$$

По доказательству утверждения 4, средние значения  $\bar{\varphi}(T_t)$  сходятся к интегралу  $\int \varphi d\mu$  при  $t \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что дискретная мера  $\mu_t$  сходится к эргодической мере  $\mu$  в слабой топологии. Теорема доказана.

**Следствие 8.3.** Утверждение 6 доказанной теоремы позволяет построить численную аппроксимацию эргодической меры  $\mu$ .

## 8.11. УСРЕДНЕНИЕ НА ОКРУЖНОСТИ

1. Рассмотрим простую динамическую систему, порожденную дифференциальным уравнением  $\varphi' = \cos \varphi$  на единичной окружности  $S$ , которая лежит на плоскости  $R^2$ , где  $\varphi$  — угол от положительного направления оси  $OX$  против часовой стрелки (рис. 8.1).

Система имеет два состояния равновесия  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ . Состояние равно-

весия  $N$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (в координатах плоскости  $N = (0, 1)$ ) является асимптотически устойчивым, а состояние равновесия  $S = (0, -1)$  или

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$  является асимптотически неустойчивым. Остальные траек-

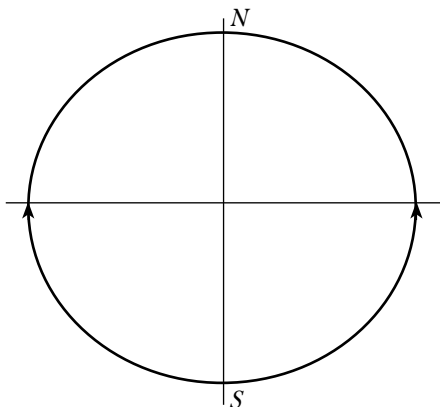
тории идут от  $S$  к  $N$ . Сдвиг на единицу времени порождает дискретную динамическую систему. Система имеет две инвариантные дельта-меры  $\delta(S)$  и  $\delta(N)$ , сосредоточенные в  $S$  и  $N$  соответственно. Множество  $\mathcal{M}$  всех инвариантных мер есть линейная оболочка  $\delta(S)$  и  $\delta(N)$ . Цепно-рекуррентное множество состоит из состояний равновесия  $S$  и  $N$ , которые образуют две его компоненты. Согласно теореме 8.5, спектр усреднения над псевдотраекториями дает два

значения функции в точках  $S$  и  $N$ ,  $\mathbb{Y} \left\{ \varphi \left( \frac{\pi}{2} \right), \varphi \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right\}$ . Например,

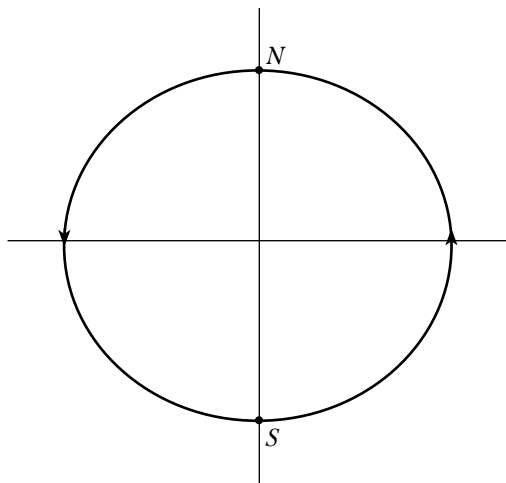
спектр усреднения ординаты  $y(\varphi)$  состоит из двух значений 1 и  $-1$ . Усреднение по всем инвариантным мерам  $\mathcal{M}$  функции  $y(\varphi)$  дает отрезок  $[-1, 1]$ . Это означает, что усреднение над псевдотраекториями системы порождает не все инвариантные меры, а именно, инвариантные меры вида  $\alpha\delta(S) + \beta\delta(N)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$  не порождены таким усреднением.

2. Рассмотрим систему, порожденную дифференциальным уравнением  $\varphi' = \cos^2 \varphi$  единичной окружности  $S$ , которая лежит на плоскости  $R^2$ . Сдвиг на единицу времени порождает дискретную динамическую систему. Система имеет две неподвижные точки  $S$  и  $N$ , но эти неподвижные точки — «проходящие» (рис. 8.2). Производная  $\varphi' > 0$  при  $\varphi \neq \pm \pi/2$ , поэтому  $\varphi(t)$  возрастает и траектории идут против часовой стрелки от  $S$  к  $N$  и от  $N$  к  $S$ . Инвариантные

меры останутся прежними, как в предыдущем примере,  $\mathcal{M} = \{\alpha\delta(S) + \beta\delta(N), \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1\}$ . Однако цепно-рекуррентное множество имеет одну компоненту, совпадающую с окружностью  $S$ . Согласно теореме 8.5, спектр усреднения функции  $y(\varphi)$  есть отрезок  $[-1, 1]$ , который получается при усреднении функции  $y(\varphi)$  над описанными мерами  $\mathcal{M}$ .



**Рис. 8.1.**  $\varphi' = \cos \varphi$

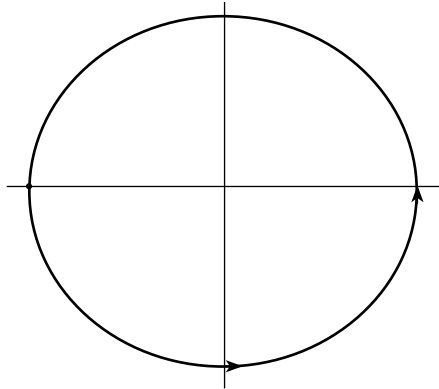


**Рис. 8.2.**  $\varphi' = \cos^2 \varphi$

3. Наконец, рассмотрим систему, порожденную дифференциальным уравнением  $\varphi' = \cos^2(\varphi/2)$  (рис. 8.3). Система имеет только



одно состояние равновесия  $\varphi = \pi$  и одну инвариантную меру, которая сосредоточена в  $\varphi = \pi$ , т.е.  $\mathcal{M} = \{\delta(\pi)\}$ . Цепно-рекуррентное множество имеет одну компоненту, совпадающую с окружностью  $S$ . Согласно теореме 8.5, спектр усреднения функции  $y(\varphi)$  состоит из одного значения 0, которое получается при усреднении функции  $y(\varphi)$  над  $\delta(\pi)$ .



**Рис. 8.3.**  $\varphi' = \cos^2(\varphi / 2)$

## 8.12. ПОКАЗАТЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ ОБЪЕМА

Рассмотрим диффеоморфизм  $f : M \rightarrow M$  гладкого многообразия. Дифференциал  $Df = (\partial f / \partial x)$  действует в касательном пространстве  $TM$  из  $T_x M$  в  $T_{f(x)} M$ . Модуль определителя дифференциала  $|\det Df|$  является коэффициентом изменения объема при отображении  $f$ . Справедлива рекуррентная формула

$$|\det Df^n(x)| = |\det Df(f^{n-1}(x))| |\det Df^{n-1}(x)|.$$

Отсюда следует, что

$$|\det Df^n(x)| = \prod_{k=1}^n |\det Df(f^{k-1}(x))|.$$

Величина

$$\frac{1}{n} \ln |\det Df^n(x)| = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |\det Df(x_k)|, \quad x_k = f(x_{k-1}), \quad x_0 = x,$$

есть показатель изменения объема вдоль отрезка траектории  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ . Этот показатель есть среднее арифметическое функции  $\varphi = \ln|\det Df(x)|$  на  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ . Пусть последовательность  $x_k$  является псевдотраекторией диффеоморфизма  $f$ , величину

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln|\det Df(x_k)|$$

назовем показателем изменения объема вдоль отрезка псевдотраектории. Спектром изменения объема назовем спектр  $\Sigma$  усреднения функции  $\varphi = \ln|\det Df(x)|$  над псевдотраекториями диффеоморфизма  $f$ . Согласно теореме 8.5, спектр изменения объема состоит из отрезков  $[a_k, b_k]$ , каждый отрезок порожден цепно-рекуррентной компонентой  $\Omega_k$  и совпадает с множеством усреднений функции  $\ln|\det Df(x)|$  над инвариантными мерами, сосредоточенными на данной компоненте:

$$\Sigma(\Omega_k) = \left\{ \lambda = \int_M \ln|\det Df(x)| d\mu, \mu \in \mathcal{M}(\Omega_k) \right\},$$

где  $\{\Omega_k\}$  есть полное семейство цепно-рекуррентных компонент.

**Утверждение 8.10.** Пусть  $G$  — символический образ динамической системы  $x_{n+1} = f(x_n)$  относительно покрытия  $C$ ,  $\Omega$  — цепно-рекуррентная компонента,  $H(\Omega)$  — класс эквивалентных возвратных вершин таких, что  $\Omega \subset \{\bigcup M(i), i \in H(\Omega)\}$ , и расширенный спектр  $\Sigma(H)$  класса  $H(\Omega)$  есть отрезок  $[a, b]$ . Тогда существуют числа  $K^*$  и  $K^*$  такие, что если последовательность  $\chi = \{x_k = f^k(x), k = 0, 1, \dots, p\}$  является частью траектории точки  $x = x_0$  и путь  $\omega = \{z_k : x_k \in M(z_k), k = 0, 1, \dots, p\}$  лежит в  $H(\Omega)$ , то существуют положительные числа  $K^*$  и  $K^*$  такие, что

$$K^* \exp(pa) \leq |\det Df^p(x)| \leq K^* \exp(pb).$$

В частности, если  $\chi = \{x_k = f^k(x)\}$  есть траектория из  $\Omega$ , то экспоненциальные оценки выполнены для любого  $p$ .

В параграфе 9.2 будут рассмотрены аналогичные экспоненциальные оценки для действия дифференциала.

**Следствие 8.4.** Если  $b < 0$ , то динамическая система сжимает объем вдоль траектории из  $\Omega$ .

В параграфе 9.2 рассмотрен пример системы, которая имеет аттрактор в виде ленты Мёбиуса. В частности, вычислен показатель объема и показано, что любой аттрактор системы имеет нулевой объем.

### *Контрольные вопросы и задания*

1. Покажите, что усреднение  $\lambda(\omega)$  не зависит от конечного числа начальных точек последовательности  $\omega = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ .
2. Покажите, что спектр усреднения над периодической последовательностью  $\omega = \{x_0, x_2, \dots\}$  состоит из одного числа.
3. При каких условиях спектр усреднения над псевдотраекториями совпадает с усреднением над инвариантными мерами?
4. Когда спектр усреднения над псевдотраекториями не совпадает с усреднением над инвариантными мерами?
5. Покажите, что спектр усреднения над инвариантными мерами всегда состоит из одного отрезка.
6. Постройте пример отображения, для которого показатель изменения объема является отрицательным.
7. Найдите показатель изменения объема отображения Жюлиа.

## Глава 9

# ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА

### 9.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим дискретную динамическую систему, порожденную диффеоморфизмом  $f : M \rightarrow M$  компактного многообразия. Дифференциал  $Df$  есть линейное отображение, которое в локальных координатах является матрицей частных производных или матрицей Якоби

$$Df(x) = \left( \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right).$$

Дифференциал действует в касательном расслоении

$$Df(x) : TM_x \rightarrow TM_{f(x)}.$$

Дифференциал задает линейное расширение дискретной системы

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n), \\ v_{n+1} &= Df(x_n)v_n. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Любое невырожденное линейное отображение  $A : R^d \rightarrow R^d$  можно представить в виде

$$Av = |Av| \frac{Av}{|Av|} = r |Ae| \frac{Ae}{|Ae|} = r |Ae| A_s(e),$$

где  $r = |v|$ ,  $|v| \neq 0$ ,  $e = v / |v| \in S^{d-1}$ ,  $S^{d-1}$  — единичная сфера. Таким образом, линейное отображение  $A : v \rightarrow Av$  есть произведение двух отображений

$$e \rightarrow A_s(e) = \frac{Ae}{|Ae|} \text{ и } r \rightarrow r |Ae|,$$

где первое действует на сфере  $S^{d-1}$ , а второе — на положительной полупрямой  $R^+$ . Проективное пространство  $P^{d-1}$  может быть полу-

чено путем отождествления диаметрально противоположных точек сферы  $S^{d-1}$ . Симметричность отображения  $A_s(e)$ , относительно изменения знака  $A_s(\pm e) = \pm A_s(e)$ , позволяет нам определить отображение  $PA(e) = Ae / |Ae|$  на проективном пространстве  $P^{d-1}$ , отождествляя противоположные точки на сфере.

Для точек пространства  $P^{d-1}$  мы сохраним обозначение  $e$ , т.е.  $e$  обозначает одномерное подпространство и (или) единичный вектор на нем, что не приводит к недоразумениям.

Таким образом, мы получаем отображение

$$Pf(x, e) = \left( f(x), \frac{Df(x)e}{|Df(x)e|} \right)$$

на проективном расслоении  $P = \{(x, e) : x \in M, e \in P^{d-1}(x)\}$ , которое порождает дискретную динамическую систему вида

$$x_{n+1} = f(x_n); \quad (9.2)$$

$$e_{n+1} = \frac{Df(x_n)e_n}{|Df(x_n)e_n|} \quad (9.3)$$

на проективном расслоении  $P$ . Положительное число  $a(x, e) = |Df(x)e|$  есть коэффициент изменения длины на подпространстве  $e$  под действием дифференциала в точке  $x$ . Проективное расслоение  $P$  является компактным многообразием с метрикой [55, с. 531–539], которую можно трактовать как сумму расстояния на многообразии  $M$  и угла между подпространствами.

**Определение 9.1.** Пусть  $\xi = \{(x_k, e_k), k = 0, 1, 2, \dots\}$  является полу-траекторией системы (9.2), (9.3). Показателем Ляпунова этой полу-траектории называется верхний предел

$$\lambda(\xi) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \ln |Df^n(x_0)e_0| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |Df^k(x_0)e_0| \right\}. \quad (9.4)$$

Для нормы  $|Df^n(x_0)e_0|$  выполнены следующие равенства:

$$\begin{aligned} |Df^n(x_0)e_0| &= |Df(f^{n-1}(x_0))Df^{n-1}(x_0)e_0| = \\ &= \left| Df(x_{n-1}) \frac{Df^{n-1}(x_0)e_0}{|Df^{n-1}(x_0)e_0|} \right| |Df^{n-1}(x_0)e_0| = \\ &= |Df(x_{n-1})e_{n-1}| |Df^{n-1}(x_0)e_0|. \end{aligned}$$

Применяя полученную рекуррентную формулу, получим равенство

$$|Df^n(x_0)e_0| = \prod_{k=0}^{n-1} |Df(x_k)e_k|,$$

которое позволяет записать показатель Ляпунова в виде

$$\lambda(\xi) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |Df(x_k)e_k|. \quad (9.5)$$

В таком случае найдется подпоследовательность  $n_m \rightarrow \infty$ , для которой предел

$$\lambda(\xi) = \overline{\lim}_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m} \sum_{k=0}^{n_m-1} \ln |Df(x_k)e_k| \quad (9.6)$$

существует и совпадает с показателем Ляпунова  $\lambda(\xi)$ . Полученные формулы позволяют определить показатель Ляпунова псевдотраектории и рассматривать его как усреднение функции  $\varphi(x, e) = \ln |Df(x)e|$  над псевдотраекториями.

Если последовательность  $\xi = \{(x_k, e_k)\}$  является  $p$ -периодической, то все перечисленные выше пределы существуют и совпадают со средним арифметическим функции  $\ln |Df(x)e|$  по периоду:

$$\begin{aligned} \lambda(\xi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |Df(x_k)e_k| = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \ln |Df(x_k)e_k| = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \varphi(x_k, e_k). \end{aligned} \quad (9.7)$$

**Определение 9.2.** Спектр Морса — это спектр усреднения функции  $\varphi(x, e) = \ln |Df(x)e|$  над псевдотраекториями системы (9.2), (9.3).

Из утверждения 7.2 следует, что спектр Морса совпадает с предельным множеством усреднений над периодическими  $\varepsilon$ -траекториями при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , т.е.

$\Sigma = \{\lambda \text{ существует последовательность периодических}$

$\varepsilon_n$ -траекторий  $\xi_n$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  таких, что  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\xi_n)\}$ .

Каждая компонента  $\Omega_{ik}$  цепно-рекуррентного множества  $CR(Pf)$  на проективном расслоении  $P$  проектируется на некую компоненту  $\Omega_i$  цепно-рекуррентного множества  $CR(f)$  отображения  $f$  на многообразии  $M$ . Число цепно-рекуррентных компонент на  $M$  может быть неограниченным. Например, уравнение  $x' = x^2 \sin 1/x$  имеет бесконечное число состояний равновесия. Если отображение  $f$  есть сдвиг на единицу времени вдоль траектории данной непрерывной системы, то состояния равновесия этой системы совпадают с цепно-рекуррентными компонентами отображения  $f$ . Число компонент  $\Omega_{ik}$  проективного расслоения, которые проектируются на фиксированную компоненту  $\Omega_i \subset M$ , не превышает размерности многообразия  $M$  [6, 55, 105]. Следующая теорема является следствием теоремы 8.5.

**Теорема 9.1.** Спектр Морса есть объединение отрезков

$$\Sigma = \bigcup_k [a_{ik}, b_{ik}],$$

каждый отрезок есть множество усреднений функции  $\varphi(x, t) = \ln |Df(x)|$  по инвариантным мерам системы (9.2), (9.3), сосредоточенным на компоненте  $\Omega_{ik}$  цепно-рекуррентного множества  $CR(Pf)$ :

$$[a_{ik}, b_{ik}] = \Sigma(\Omega_{ik}) = \left\{ \lambda = \int_M \varphi d\mu, \mu \in \mathcal{M}(\Omega_{ik}) \right\}.$$

Таким образом, для того чтобы приближенно построить спектр Морса, мы должны оценить бесконечно много интервалов, что невозможно в общем случае. Однако, как мы увидим в нашей ситуации, эти интервалы, так же как и компоненты цепно-рекуррентного множества, сгущаются, как это имеет место в рассмотренном выше примере. Это позволяет для фиксированной величины аппроксимации  $\varepsilon > 0$  построить оценку посредством конечного числа интервалов, некоторые из которых содержат бесконечно много интервалов спектра. Ясно, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  число аппроксимирующих интервалов может расти до бесконечности. Основным инструментом вычисления спектра является символический образ динамической системы. Теорема 8.3 дает возможность оценить спектр Морса, используя технику символического образа отображения  $Pf$  проективного расслоения.

Пусть  $G$  — символический образ отображения  $Pf$  для покрытия  $C = \{M(i)\}$  проективного пространства  $P$ ,  $\{H_k\}$  — полное семейство

классов эквивалентных возвратных вершин графа  $G$ . Для вычисления спектра определим функцию (распределение) на символическом образе. Если  $i \rightarrow j$  — ребро на  $G$ , то, фиксируя точку  $(x, e)$  в ячейке  $M(i)$ , положим  $a[ij] = \ln|Df(x)e|$ . Спектр усреднения  $\Sigma(G)$  функции  $a[ij]$  над периодическими путями графа  $G$  есть оценка спектра Морса.

Пусть

$$\lambda_{\min} = \min\{\lambda(\psi_j), j = 1, \dots, q\},$$

$$\lambda_{\max} = \max\{\lambda(\psi_j), j = 1, \dots, q\}$$

есть минимальное и максимальное значения усреднения на циклах (простых периодических путях) класса  $H$ . Поскольку число циклов конечно, описанные величины вычисляются за конечное число шагов. Для достижения цели можно использовать метод линейного программирования [88] или метод вычисления циклов с наименьшей характеристикой [60]. Согласно теореме 8.2, спектр символического образа  $\Sigma(G)$  состоит из интервалов  $[\lambda_{\min}(H_k), \lambda_{\max}(H_k)]$ , где  $\{H_k\}$  есть полное семейство классов эквивалентных возвратных вершин символического образа. Следующая теорема является следствием теоремы 8.3.

### Теорема 9.2

1. Спектр Морса лежит в расширенном спектре оснащенного символического образа

$$\Sigma^* = \bigcup_k [\lambda_{\min}(H_k) - \eta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \eta(d)],$$

где  $\{H_k\}$  есть полное семейство классов эквивалентных возвратных вершин символического образа  $G$ ;  $d$  — диаметр покрытия;  $\eta$  — модуль непрерывности функции  $\ln|Df(x)e|$ .

2. Если диаметр покрытия сходится к нулю, то расширенный спектр  $\Sigma^*$  сходится к спектру Морса в метрике Хаусдорфа.

## 9.2. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Применим полученные результаты для оценки действия дифференциала. Пусть  $C = \{M(i)\}$  есть покрытие проективного расслоения  $P$ ,  $G$  — символический образ отображения  $Pf$ . Напомним, что существует многозначное отображение  $h$ , сопоставляющее точке  $(x, e)$  номера ячеек, в которых лежит эта точка. Если  $(x, e)$  — цепно-рекуррентная точка, то  $h(x, e)$  — возвратные вершины. Образ  $h(\Omega)$



компоненты цепно-рекуррентного множества лежит в некотором классе эквивалентных возвратных вершин. Следовательно, если  $\Omega$  — компонента цепно-рекуррентного множества, то существует единственная компонента  $H(\Omega)$ , которая содержит  $h(\Omega)$ . Рассмотрим  $\varepsilon$ -траекторию  $\chi = \{(x_k, e_k)\}$  отображения  $Pf$ . Согласно теореме 2.1 об отслеживании, если  $\varepsilon < r$  ( $r$  — нижняя грань символического образа), то существует допустимый путь  $\omega = \{i_k : (x_k, e_k) \in M(i_k)\}$ , который отслеживает псевдотраекторию  $\chi$  на символическом образе.

### Теорема 9.3

1. Пусть  $[a, b]$  есть расширенный спектр класса  $H \subset G$ . Тогда существуют положительные константы  $K_*$  и  $K^*$  такие, что для любой конечной  $\varepsilon$ -траектории  $\chi = \{(x_0, e_0), (x_1, e_1), \dots, (x_p, e_p)\}$ ,  $\varepsilon < r$ , чей допустимый путь  $\omega = \{i_k : (x_k, e_k) \in M(i_k)\}$  лежит в  $H$ , выполнены следующие оценки:

$$K_* \exp(pa) \leq \prod_{k=0}^{p-1} |Df(x_k)e_k| \leq K^* \exp(pb). \quad (9.8)$$

2. Пусть  $\Omega$  — компонента цепно-рекуррентного множества отображения  $Pf$  и  $[a, b]$  — расширенный спектр класса  $H(\Omega)$ , тогда неравенства

$$K_* \exp(pa)|v| \leq |Df^p(x)v| \leq K^* \exp(pb)|v|$$

выполнены для любого вектора  $v$  из подпространства  $e \in \Omega$ .

#### Доказательство

1. Пусть  $[a, b]$  есть расширенный спектр класса  $H$  символического образа. Сначала мы рассмотрим  $\varepsilon$ -траекторию  $\chi$ , которая отслеживается циклом  $\omega = \{i_1, \dots, i_p = i_0\}$  класса  $H$ . Среднее значение

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} a[i_k i_{k+1}]$$

лежит в спектре класса  $H$ . Величина  $a[ij] = \ln |Df(x_i^*)e_i^*|$  определяется фиксированной точкой  $(x_i^*, e_i^*)$  в ячейке  $M(i)$ . Среднее значение

$$\lambda(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \ln |Df(x_k)e_k|$$

определяется точками  $(x_k, e_k)$ , которые лежат в ячейках  $M(i_k)$  и разность

$$|\ln|Df(x_k)e_k| - \ln|Df(x_i^*)e_i^*|| \leq \eta(d).$$

Следовательно, среднее значение  $\lambda(\chi)$  лежит в расширенном спектре  $[a, b]$ . Это означает, что

$$a \leq \sum_{k=0}^{p-1} \ln|Df(x_k)e_k| \leq b.$$

Отсюда следует оценка

$$\exp(pa) \leq \prod_{k=0}^{p-1} |Df(x_k)e_k| \leq \exp(pb).$$

Рассмотрим произвольную  $\varepsilon$ -траекторию  $\chi = \{(x_0, e_0), (x_1, e_1), \dots, (x_p, e_p)\}$ , которая отслеживается путем  $\omega = \{z_0, z_1, \dots, z_p\}$ , лежащим в классе  $H$ . Разложим  $\omega$  в сумму простых путей и остаток следующим образом. Если путь  $\omega$  проходит через вершину  $z^*$  дважды, т.е.  $z^* = z_l = z_{l+s}$ , то образуются два пути  $\omega_1 = \{z_0, \dots, z_l = z_{l+s}, \dots, z_p\}$  и  $\omega_2 = \{z_l, \dots, z_{l+s}\}$ . Путь  $\omega_2$  является периодическим с периодом  $s$ . Путь  $\omega$  есть сумма путей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Повторяя далее процесс разложения, мы получим сумму простых путей (циклов) из  $H$  и остаточного пути  $\omega_0$ , который проходит через различные вершины и лежит в  $H$ . Мы получим разложение вида

$$\omega = k_1\psi_1 + k_2\psi_2 + \dots + k_q\psi_q + \omega_0,$$

где  $\psi_j$  — циклы класса  $H$ ; целое число  $k_j \geq 0$  есть число повторений цикла  $\psi_j$  в разложении пути  $\omega$ . Если  $p_1, p_2, \dots, p_q$  — периоды циклов и  $p_0$  есть длина пути  $\omega_0$ , то  $p = k_1p_1 + k_2p_2 + \dots + k_qp_q + p_0$ . Поскольку все вершины остаточного пути  $\omega_0$  различны, следовательно,  $p_0$  не превосходит максимального периода простого пути класса  $H$ , т.е.  $p_0 < t = \max\{p_j, j = 1, \dots, q\}$ .

Рассмотрим произведение

$$\Pi(\omega) = \prod_{k=0}^{p-1} \alpha[z_k], \quad (9.10)$$

где  $\alpha[z_k] = |Df(x_k)e_k|$ ,  $(x_k, e_k) \in M(z_k)$ . Переставим сомножители произведения (9.10) в соответствии с разложением

$$\omega = k_1\psi_1 + k_2\psi_2 + \dots + k_q\psi_q + \omega_0$$

и получим представление в виде

$$\Pi(\omega) = \prod_{j=1}^q \prod_{i=1}^{k_j} \Pi_i(\psi_j) \cdot \Pi(\omega_0).$$

Для каждого сомножителя  $\Pi_i(\psi_j)$  мы имеем оценку

$$\exp(p_j a) \leq \Pi_i(\psi_j) \leq \exp(p_j b). \quad (9.11)$$

Остаток  $\Pi(\omega_0)$  имеет не более чем  $t$  сомножителей и удовлетворяет оценке

$$(K_{\min})^t \leq \Pi(\omega_0) \leq (K_{\max})^t, \quad (9.12)$$

где  $K_{\min} \leq \alpha[z] \leq K_{\max}$  есть оценка величины  $\alpha[z]$  на  $H$ , при этом мы полагаем  $K_{\min} \leq 1 \leq K_{\max}$ , что не противоречит общности. Из (9.11) и (9.12) следует оценка

$$(K_{\min})^t \exp\left(a \sum_{j=1}^q k_j p_j\right) \leq \Pi(\omega) \leq (K_{\max})^t \exp\left(b \sum_{j=1}^q k_j p_j\right).$$

Таким образом, мы получаем оценку

$$K_* \exp(pa) \leq \Pi(\omega) \leq K^* \exp(pb), \quad (9.13)$$

где

$$K_* = \begin{cases} (K_{\min})^t \exp(-at) & \text{при } a > 0, \\ (K_{\min})^t & \text{при } a \leq 0; \end{cases}$$

$$K^* = \begin{cases} (K_{\max})^t \exp(-bt) & \text{при } b < 0, \\ (K_{\max})^t & \text{при } b \geq 0. \end{cases}$$

Полученные оценки дают требуемые неравенства (9.8).

2. Доказательство оценки (9.9). Поскольку траектория является  $\varepsilon$ -траекторией для любого  $\varepsilon > 0$ , оценка (9.8) верна для траектории

$\chi$ , лежащей в  $\Omega$ . Если  $(x_0, e_0) = (x, e) \in \Omega$  и  $(x_1, e_1) = Pf(x, e)$ , то базисный вектор имеет вид

$$e_1 = \frac{Df(x_0)e_0}{|Df(x_0)e_0|}.$$

Следовательно, мы имеем

$$|Df(x_1)e_1||Df(x_0)e_0| = \left| Df(f(x)) \frac{Df(x)e}{|Df(x)e|} \right| |Df(x)e| = |Df^2(x)e|.$$

Таким же образом можно получить равенство

$$\prod_{k=0}^{p-1} |Df(x_k)e_k| = |Df^p(x)e|,$$

где  $e = v/|v|$ . В таком случае неравенства (9.8) принимают вид

$$K_* \exp(pa)|v| \leq |Df^p(x)v| \leq K^* \exp(pb)|v|.$$

Теорема доказана.

### 9.3. ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ

**Определение 9.3.** Гладкая динамическая система  $x_{n+1} = f(x_n)$  называется гиперболической на инвариантном множестве  $\Lambda \subset M$ , если существуют инвариантные подрасслоения  $E^s$  и  $E^u$  касательного пространства  $TM|_{\Lambda}$ , постоянные  $K > 0$  и  $\alpha > 0$  такие, что

$$TM|_{\Lambda} = E^s \oplus E^u;$$

$$|Df^n(x)v| \leq K|v|\exp(-\alpha n), \quad x \in \Lambda, \quad v \in E^s(x), \quad n > 0;$$

$$|Df^{-n}(x)v| \leq K|v|\exp(-\alpha n), \quad x \in \Lambda, \quad v \in E^u(x), \quad n > 0,$$

где инвариантность подрасслоения  $E^*$  означает равенство

$$Df(x)E^*(x) = E^*(f(x)).$$

Число  $\alpha$  называется показателем гиперболичности.

**Теорема 9.4** [6, 55, 105]. Пусть  $x_{n+1} = f(x_n)$  — гладкая система на компактном многообразии  $M$ ,  $\Omega$  является компонентой цепно-

рекуррентного множества и  $\pi : TM \rightarrow M$  есть проекция из касательного пространства на многообразие. Тогда:

1) цепно-рекуррентное множество сужения  $Pf(x, e) = \left( f(x), \frac{Df(x)e}{|Df(x)e|} \right)$  на  $P|_{\Omega}$  имеет  $l$  компонент  $\Omega_1, \dots, \Omega_l$ ,  $1 \leq l \leq \dim E$ ;

1\*) каждое множество  $\Omega_k$  определяет (непрерывное, постоянной размерности) подпространство  $E_k$  над  $\Omega$  вида

$$E_k = \left\{ v \in \pi^{-1}(\Omega) : v \neq 0 \Rightarrow \frac{v}{|v|} = e \in \Omega_k \right\};$$

2) имеет место разложение

$$TM|_{\Omega} = E_1 \oplus \dots \oplus E_l;$$

3) каждая цепно-рекуррентная компонента  $\Omega^*$  на расслоении  $P|_{\Omega}$  проектируется на цепно-рекуррентную компоненту  $P|_{\Omega}$  и имеет свойства, описанные в п. 1\*.

Разложение, описанное в теореме 9.4, называют тонким разложением Морса касательного расслоения.

Пусть  $C(M) = \{m(j)\}$  является покрытием многообразия  $M$  и  $C(P) = \{M(z)\}$  есть согласованное покрытие проективного расслоения  $P$ , т.е., проекция ячейки есть ячейка. Обозначим  $G(f)$  и  $G(Pf)$  символические образы отображений  $f$  и  $Pf$  соответственно. Согласованность покрытий порождает естественное отображение  $\pi^*(z) = j$  из  $G(Pf)$  на  $G(f)$ , которое есть отображение ориентированных графов. Пусть  $\Omega \subset M$  и  $\Omega_k \subset P$  — компоненты, которые описаны в теореме 9.4, и  $H_k = H(\Omega_k)$ . Тогда проекция  $\pi^* H_k = H(\Omega)$ . Следующая теорема является следствием теоремы 9.3.

**Теорема 9.5. Тест на гиперболичность.** Если ноль не лежит в расширенном спектре классов  $\{H_k\}$ , то диффеоморфизм  $f$  является гиперболическим на  $\Omega$ .

*Доказательство.* Сначала рассмотрим следующее простое наблюдение. Пусть линейное отображение  $A$  удовлетворяет неравенству  $c|v| \leq |Av|$  и существует обратное отображение  $A^{-1}$ , тогда выполнено  $|A^{-1}v| \leq 1/c|v|$ . Действительно, если в неравенство  $c|w| \leq |Aw|$  подставить  $w = A^{-1}v$ , то получим искомое неравенство. Поэтому из неравенства

$$K * \exp(na)|v| \leq |Df^n(x)v|, \quad n > 0$$

следует неравенство

$$|Df^{-n}(x)v| \leq \frac{1}{K_*} \exp(-na)|v|, \quad n > 0.$$

Рассмотрим все классы  $H_k$  с положительным расширенным спектром  $[a_k, b_k]$ ,  $a_k > 0$ . Положим  $a = \min\{a_k > 0\} > 0$ . Согласно теореме 9.4, каждый класс  $H_k$  порождает инвариантное подрасслоение  $E_k$ , для которого выполнено

$$K_* \exp(na_k)|v| \leq |Df^n(x)v| \leq K^* \exp(pb_k)|v|,$$

где  $n > 0$ ,  $v \in E_k$ . Пусть неустойчивое подрасслоение  $E^u$  есть сумма подпространств  $E_k$  с положительным расширенным спектром. Тогда неравенство

$$|Df^{-n}(x)v| \leq K \exp(-na)|v|$$

выполнено для  $v \in E^u$ ,  $n > 0$  и некоторого  $K > 1$ .

Аналогично классы  $H_k$  с отрицательным расширенным спектром  $[a_k, b_k]$ ,  $b_k < 0$  порождают расслоения  $E_k$  и устойчивое подрасслоение  $E^s$ , которое есть сумма подпространств  $E_k$  с отрицательным расширенным спектром. Неравенство

$$|Df^n(x)v| \leq K \exp(nb)|v|$$

выполнено для  $v \in E^s$ ,  $n > 0$  и  $b = \max\{b_k < 0\} < 0$ .

Из теоремы 9.4 следует

$$TM|_{\Omega} = E^u \oplus E^s.$$

Теорема доказана.

В параграфе 11.5 рассмотрен пример вычисления расширенного спектра Морса и численной проверки гиперболичности нетривиального инвариантного множества.

## 9.4. $\Omega$ -УСТОЙЧИВОСТЬ

**Определение 9.4.** Точка  $x$  называется неблуждающей, если для любой ее окрестности  $U$  найдется  $N > 0$  такое, что  $f^N(U) \cap U \neq \emptyset$ . Множество неблуждающих точек обозначается  $\Omega$ .

Из определения следует, что неблуждающая точка является цепно-рекуррентной и  $\in CR$ . Следующий пример показывает, что описанное включение является строгим.

### Пример 9.1

Рассмотрим систему, порожденную дифференциальным уравнением  $\varphi' = \cos^2 \varphi$  на единичной окружности. Сдвиг на единицу времени порождает дискретную динамическую систему. Система имеет две неподвижные точки  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  и  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ , которые образуют множество неблуждающих точек  $\Omega$ . Производная  $\varphi' > 0$  при  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ , поэтому  $\varphi(t)$  возрастает и траектории идут против часовой стрелки. Цепно-рекуррентное множество имеет одну компоненту, совпадающую с окружностью  $S \supset \Omega$ .

Введем расстояние в пространство гладких отображений. Пусть  $f: M \rightarrow M$  и  $g: M \rightarrow M$  — непрерывные отображения, тогда  $C^0$ -расстояние

$$d_0(f, g) = \sup_M (f(x), g(x)).$$

Если отображения  $f$  и  $g$  являются гладкими, то  $C^1$ -расстояние

$$d_1(f, g) = d_0(f, g) + \sup_M |Df(x) - Dg(x)|.$$

Предположим, что цепно-рекуррентное множество является гиперболическим. Из леммы Аносова о замыкании [70] следует, что в этом случае имеет место равенство  $\Omega = CR$ , периодические траектории плотны в цепно-рекуррентном множестве и верна следующая теорема о структурной устойчивости гиперболических множеств.

**Теорема 9.6** [14, 70, 84]. Пусть компактное инвариантное множество  $\Lambda$  является гиперболическим для диффеоморфизма  $f$ . Тогда для любой окрестности  $V$  множества  $\Lambda$  и любого  $\delta > 0$  существует  $\varepsilon > 0$  такое, что если  $C^1$ -расстояние  $d_1(f, g) < \varepsilon$ , то найдутся гиперболическое инвариантное множество  $\Lambda(g) \subset V$  для  $g$  и гомеоморфизм  $h: \Lambda(g) \rightarrow \Lambda$ , удовлетворяющие условиям

$$h \circ g|_{\Lambda(g)} = f|_{\Lambda} \circ h,$$

расстояния  $d_0(Id, h) + d_0(Id, h^{-1}) < \varepsilon$ ,  $Id$  — тождественное отображение, а гомеоморфизм  $h$  является единственным для достаточно малого  $\delta$ .

Теорема 9.6 гарантирует существование замены координат  $y = h(x)$ , которая переводит  $\Lambda(g)$  в  $\Lambda$  и отображение  $f$  — в  $g$ :  $g(x) = h^{-1}(f(h(x)))$ . Теорема имеет сугубо локальный характер, она ничего не говорит о динамике вне окрестности инвариантного множества  $\Lambda$ . Эту теорему можно применять как к цепно-рекуррентному множеству  $CR$  в целом, так и к его изолированной компоненте.

Возникает вопрос: если цепно-рекуррентное множество  $CR$  гиперболично для  $f$  и  $g$   $C^1$ -близко к  $f$ , то что можно сказать о цепно-рекуррентном множестве  $CR(g)$  для  $g$  и динамике на нем? Прежде чем отвечать на этот вопрос, заметим, что аналогичный вопрос для неблуждающего множества  $\Omega$  приводит к нетривиальному ответу: неблуждающее множество может резко возрастать при  $C^1$ -возмущении диффеоморфизма  $f$ , даже если неблуждающее множество  $\Omega$  является гиперболическим. Это явление носит название  $\Omega$ -взрыва, и в книге [24] приведен его пример.

**Определение 9.5.** Диффеоморфизм  $f$   $\Omega$ -устойчив, если существует его  $C^1$ -окрестность  $U$  отображения  $f$  такая, что для любого диффеоморфизма  $g \in U$  найдется гомеоморфизм  $h: \Omega(g) \rightarrow \Omega(f)$  такой, что  $f \circ h = h \circ g$ .

Для  $\Omega$ -устойчивости кроме гиперболичности неблуждающего множества необходимо дополнительное условие — отсутствие циклов [24]. В этом случае имеет место равенство  $\Omega = CR$ . Вернемся к свойствам цепно-рекуррентного множества  $CR$ . В работе [6] показано, что отображение  $f \rightarrow CR(f)$  полунепрерывно сверху в  $C^0$ -топологии, т.е. если  $x_n$  цепно-рекуррентная точка отображения  $f_n$  и  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $f_n \rightarrow f_0$  в  $C^0$ -топологии, то  $x_0$  есть цепно-рекуррентная точка отображения  $f_0$ . Таким образом, цепно-рекуррентное множество не допускает взрывов при  $C^0$ -возмущениях системы. Однако цепно-рекуррентное множество может резко уменьшиться при возмущении системы.

### Пример 9.2

Рассмотрим дифференциальное уравнение  $\varphi' = \cos \varphi$  на единичной окружности. Уравнение имеет два состояния равновесия:  $N\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$  — устойчивое и  $S\left(\varphi = \frac{3\pi}{2}\right)$  — неустойчивое. Остальные траектории идут от  $S$  к  $N$ . Пусть  $h(\varphi)$  — положительная функция для всех  $\varphi$ , кроме  $\varphi = 0$ ,  $h(0) = 0$ . Уравнение вида  $\varphi' = (h(\varphi) + \epsilon) \times \cos \varphi$ ,  $\epsilon > 0$ , имеет те же состояния равновесия, что и исходная система. Однако при  $\epsilon = 0$  уравнение получает дополнительное состояние равновесия  $\varphi = 0$ , которое является «проходящим». Если  $f_\epsilon$



есть сдвиг на единицу времени вдоль траекторий уравнения  $\varphi' = (h(\varphi) + \varepsilon) \cos \varphi$ ,  $\varepsilon \geq 0$ , то дискретная система  $\varphi_{n+1} = f_\varepsilon(\varphi_n)$  при  $\varepsilon = 0$  имеет цепно-рекуррентное множество, состоящее из трех неподвижных точек  $\varphi = 0, \pi/2, 3\pi/2$ , а при  $\varepsilon > 0$  состояние равновесия  $\varphi = 0$  исчезает. Таким образом, цепно-рекуррентное множество резко уменьшилось при возмущении динамической системы.

Из теоремы 9.6 следует, что если цепно-рекуррентное множество гиперболично, то оно и динамика на нем устойчивы при  $C^1$ -возмущении диффеоморфизма  $f$  [110]. Как уже отмечено, если цепно-рекуррентное множество гиперболично, то имеет место равенство  $\Omega = CR$ . Отсюда следует, что при гиперболичности цепно-рекуррентного множества система  $\Omega$ -устойчива.

**Теорема 9.7.** Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) диффеоморфизм  $f$  является гиперболическим на цепно-рекуррентном множестве  $CR$ ;
- 2) спектр Морса не содержит нуля;
- 3) существует  $d_0 > 0$  такое, что расширенный спектр символического образа для покрытия (проективного пространства) диаметра  $d < d_0$  не содержит нуля.

*Доказательство.* Импликация  $2) \Rightarrow 1)$  следует из теорем 9.2 и 9.5. Покажем обратную импликацию  $1) \Rightarrow 2)$ . Пусть  $f$  является гиперболическим на цепно-рекуррентном множестве  $CR$  и  $\alpha$  есть показатель гиперболичности. Покажем, что спектр Морса  $\Sigma$  не содержит интервал  $[-\beta, \beta]$ , где  $0 < \beta < \alpha$ . По определению спектра, мы должны рассмотреть периодическую  $\varepsilon$ -траекторию  $\chi = \{(x_k, e_k)\}$  на цепно-рекуррентном множестве  $CR(P)$  проективного расслоения. Обозначим  $[E(x)] = P(x)$  проекцию из касательного пространства на проективное расслоение. Поскольку  $f$  является гиперболическим на  $CR$ , следовательно, согласно работам [6, 56], проекция неустойчивого расслоения  $[E^u|_{CR}] = PE^u$  является аттрактором и проекция устойчивого расслоения  $[E^s|_{CR}] = PE^s$  является его двойственным репеллером для отображения  $Pf$ . Тогда цепно-рекуррентное множество  $CR(P)$  лежит в  $PE^u \cup PE^s$ . Обозначим  $d > 0$  расстояние между  $PE^u$  и  $PE^s$ . Покажем, что если  $\varepsilon < d$ , то псевдотраектория  $\chi$  будет лежать либо в  $PE^u$ , либо в  $PE^s$ . Предположим противоположное: найдутся элементы последовательности такие, что  $(x_k, e_k)$  лежит в  $PE^u$  и  $(x_{k+1}, e_{k+1})$  лежит в  $PE^s$ . Из инвариантности  $PE^u$  следует  $Pf(x_k, e_k) \in PE^u$ . Поскольку  $\rho(Pf(x_k, e_k), (x_{k+1}, e_{k+1})) < \varepsilon$  и  $(x_{k+1}, e_{k+1}) \in PE^s$ , получаем  $d \leq \rho(Pf(x_k, e_k), (x_{k+1}, e_{k+1})) < \varepsilon$ . Это противоречит неравенству  $d > \varepsilon$ .

Пусть  $\chi = \{(x_1, e_1), \dots, (x_N, e_N)\}$  есть  $\varepsilon$ -траектория длины  $N$ , которая лежит в  $PE^s$ . Фиксируем целое число  $q > 0$  и разобьем цепь  $\chi$

на  $m$  кусков длины  $q$  и остаток длины  $r$ ,  $0 \leq r < q$ , т.е.  $N = mq + r$ . Из компактности  $P$  мы получаем оценку

$$\ln \prod_{i=0}^q |Df(x_i)e_i| - \ln |Df^q(x_1)e_1| \leq \delta(q, \varepsilon),$$

где  $q$  фиксировано,  $\delta(q, \varepsilon)$  стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно относительно  $(x_i, e_i)$ . По определению гиперболичности, мы имеем

$$|Df^q(x)e| \leq K \exp(-\alpha q),$$

где  $e \in E^s$ . Показатель псевдотраектории  $\chi = \{(x_k, e_k)\}$  допускает оценку

Добавим и вычтем выражение вида  $\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{m-1} \ln |Df^q(x_{pq+1})e_{pq+1}|$ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{m-1} \left( \ln \prod_{i=1}^q |Df(x_{(p-1)q+i})e_{(p-1)q+i}| - \ln |Df^q(x_{pq+1})e_{pq+1}| \right) + \\ & + \frac{1}{N} \sum_{k=mq+1}^N \ln |Df(x_k)e_k| + \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{m-1} \ln |Df^q(x_{pq+1})e_{pq+1}| \leq \\ & \leq \frac{m}{N} \delta(q, \varepsilon) + \frac{rC}{N} + \frac{m}{N} (\ln K - \alpha q), \end{aligned}$$

где  $|Df| \leq C$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} \lambda(\chi) & \leq -\alpha + \frac{N-mq}{N} \alpha + \frac{\ln K}{q} + \delta(q, \varepsilon) + \frac{rC}{N} = \\ & = -\alpha + \frac{\ln K}{q} + \delta(q, \varepsilon) + \frac{r(C+\alpha)}{N} \leq \\ & \leq -\alpha + \frac{\ln K}{q} + \delta(q, \varepsilon) + \frac{C+\alpha}{m}. \end{aligned}$$

Выберем  $q$  так, что  $\frac{\ln K}{q} < \frac{\alpha - \beta}{6}$ . Для выбранного  $q$  положим  $\varepsilon > 0$  так, что  $\delta(q, \varepsilon) < \frac{\alpha - \beta}{6}$ . Наконец, пусть  $m$  будет таким большим, что  $\frac{C+\alpha}{m} < \frac{\alpha - \beta}{6}$ . Таким образом, мы получили оценку

$$\lambda(\chi) \leq -\alpha + \frac{\alpha - \beta}{2} < -\beta.$$

Аналогично можно показать: если  $\chi \in PE^u$ , то

$$\lambda(\chi) \geq \alpha - \frac{\alpha - \beta}{2} > \beta.$$

Таким образом, мы имеем эквивалентность  $1) \Leftrightarrow 2)$ .

Из второго утверждения теоремы 8.3 следует, что расстояние Хаусдорфа между спектром Морса и расширенным спектром символического образа стремится к нулю, если диаметр покрытия  $d \rightarrow 0$ . Учитывая замкнутость этих спектров, мы получаем эквивалентность  $2) \Leftrightarrow 3)$ . Доказательство закончено.

Применение символического образа динамической системы позволяет локализовать цепно-рекуррентное множество и проверить гиперболичность на нем. Таким образом, показано, что символический образ хорошо приспособлен к проверке гиперболичности и  $\Omega$ -устойчивости. В параграфе 11.5 рассмотрен численный пример такой проверки для нетривиального цепно-рекуррентного множества.

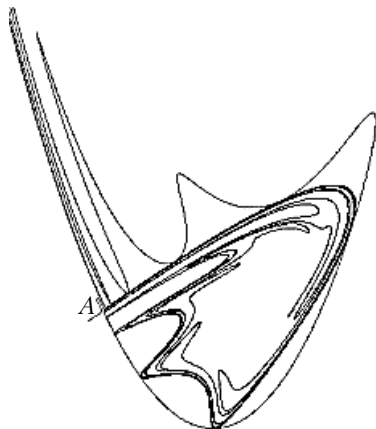
## 9.5. ГОМОКЛИНИЧЕСКОЕ КАСАНИЕ

Пусть  $f$  — диффеоморфизм плоскости с гиперболической неподвижной точкой  $O$ . Обозначим через  $W^s$  и  $W^u$  устойчивое и неустойчивое многообразия точки  $O$ . Предположим, что существует точка  $Q \neq O$ , в которой эти многообразия касаются. Это означает, что точка  $Q$  является гомоклинической и касательные пространства  $TW^s(Q)$  и  $TW^u(Q)$  совпадают. Такой случай мы будем называть гомоклиническим касанием. Примером такого отображения может быть

$$f(x, y) = (bx + y + ax(1-x), y + ax(1-x))$$

при  $a = 1,511717565$ ,  $b = 0,93$ . Динамическая система  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n)$  имеет неподвижную точку  $(0, 0)$ . Устойчивое и неустойчивое многообразия этой точки можно видеть на рис. 9.1. Поскольку  $\det Df(x, y) = b < 1$ , мы находимся в условиях работы Ньюхауса [85]. Здесь описан феномен Ньюхауса: в любой окрестности диффеоморфизма с невырожденным гомоклиническим касанием существует множество диффеоморфизмов, которые допускают бесконечно много периодических стоков. В работе [53] построен пример гомоклинического касания, динамика которого обладает следу-

ющими свойствами. Существует последовательность периодических траекторий, сходящихся к гомоклинической орбите.



**Рис. 9.1.** Гомоклиническое касание

Периодические траектории являются гиперболическими и, при этом, характеристические показатели этих траекторий равномерно отделены от нуля. Однако угол между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами не отделен от нуля, что является естественным в случае гомоклинического касания. Существуют примеры диффеоморфизмов [10], которые имеют устойчивые периодические траектории в любой окрестности гомоклинической траектории, и их показатели Ляпунова отделены от нуля.

Мы покажем, что в случае гомоклинического касания цепно-рекуррентное множество в проективном расслоении содержит весь слой  $P^1$  над гиперболической точкой  $O$  и, как следствие, спектр Морса содержит отрезок  $[\lambda_s, \lambda_u]$ , где  $\lambda_s$  и  $\lambda_u$  — устойчивый и неустойчивый характеристические показатели точки  $O$ .

**Теорема 9.8.** Пусть  $f$  — диффеоморфизм плоскости с гиперболической неподвижной точкой  $O$ , ее устойчивое и неустойчивое многообразия касаются в некоторой точке. Тогда:

1) цепно-рекуррентное множество действия дифференциала  $Df$  на проективном расслоении содержит произведение  $\Omega \times P^1$ , где  $\Omega$  — замыкание гомоклинической орбиты,  $P^1$  — одномерное проективное пространство;

2) спектр Морса отображения  $f$  содержит отрезок  $[\lambda_s, \lambda_u]$ , где  $\lambda_s$  и  $\lambda_u$  — устойчивый и неустойчивый показатели Ляпунова в гиперболической неподвижной точке  $O$ .

*Доказательство.* Рассмотрим цепно-рекуррентное множество  $CR$  отображения

$$Pf(x, e) = \left( f(x), \frac{Df(x)e}{|Df(x)e|} \right)$$

на проективном расслоении  $P = R^2 \times P^1$ , где через  $P^1$  обозначено одномерное проективное пространство, которое является окружностью длины  $\pi$ . Расстоянием на  $P^1$  является угол между прямыми (подпространствами), которые можно отождествить с единичными векторами  $e$ , определенными с точностью до знака.

**Утверждение 9.1.** Цепно-рекуррентное множество  $CR(Pf)$  отображения  $Pf$  на проективном расслоении содержит одномерное проективное пространство  $P^1(O)$ , т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  и любого подпространства  $e \in P^1(O)$  существует периодическая  $\varepsilon$ -траектория отображения  $Pf$ , проходящая через  $e$ .

*Доказательство.* Над неподвижной точкой  $O$  отображение  $Pf(O)$  действует на  $P^1(O)$ , где имеет два неподвижных подпространства  $e^s = TW^s(O)$  и  $e^u = TW^u(O)$ , которые являются касательными к устойчивому и неустойчивому многообразиям. При этом  $e^s$  является источником (репеллером) и  $e^u$ -стоком (аттрактором), двойственным к  $e^s$ , а все другие траектории начинаются в  $e^s$  и заканчиваются в  $e^u$ . Рассмотрим подпространство  $e$  отличное от  $e^s$  и  $e^u$ . Траектория  $Tr(O, e)$  подпространства  $e$  начинается в  $e^s$  и заканчивается в  $e^u$ . Гомоклиническая траектория  $Tr(Q)$  точки  $Q$  начинается и заканчивается в гиперболической точке  $O$ . Рассмотрим траекторию  $Tr(Q, e^*)$  подпространства  $e^* = TW^s(Q) = TW^u(Q)$  (над точкой  $Q$ ) под действием проективного отображения  $Pf$ . Из инвариантности устойчивых и неустойчивых подпространств следует, что

$$Tr(Q, e^*) = \{TW^s(x) = TW^u(x), x \in Tr(Q)\}.$$

Эта траектория начинается в  $O \times e^u$  и заканчивается в  $O \times e^s$ . Таким образом, мы построили две траектории  $Tr(O, e)$  и  $Tr(Q, e^*)$  на проективном расслоении, которые образуют цикл вида

$$(O, e^s) \rightarrow (O, e) \rightarrow (O, e^u) \rightarrow (Q, e^*) \rightarrow (O, e^s).$$

Покажем, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует периодическая  $\varepsilon$ -траектория отображения  $Pf$ , проходящая через  $e$ . Пусть рас-

стояние  $\rho$  на проективном расслоении  $P = R^2 \times P^1$  определяется как максимум между расстоянием на плоскости и углом между подпространствами. Построим  $\varepsilon$ -окрестность  $U$  гиперболической точки  $O$ .

Поскольку траектория  $Tr(Q)$  начинается и заканчивается в  $O$ , существует целое положительное число  $k$  такое, что  $f^{-k}(Q) \in U$ ,  $f^0(Q) = Q$  и  $f^k(Q) \in U$ . При этом число  $k$  можно выбрать достаточно большим. Выберем это число так, что углы  $\angle(Df^{-k}e^*, e^u) < \varepsilon/2$  и  $\angle(Df^k e^*, e^s) < \varepsilon/2$ . Поскольку траектория  $Tr(O, e)$  подпространства  $e$  начинается в  $e^s$  и заканчивается в  $e^u$ , существует целое положительное число  $n$  такое, что углы  $\angle(Df^{-n}e, e^s) < \varepsilon/2$  и  $\angle(Df^n e, e^u) < \varepsilon/2$ . Тогда расстояния

$$\rho((f^{-k}(Q), Df^{-k}e^*), (O, Df^n e)) < \varepsilon;$$

$$\rho((f^k(Q), Df^k e^*), (O, Df^{-n}e)) < \varepsilon,$$

что позволяет построить периодическую  $\varepsilon$ -траекторию вида

$$\chi^* = \{(O, Df^i e), -n \leq i \leq n; (f^j(Q), Df^j e^*), -k \leq j \leq k\}$$

на проективном расслоении. Эта псевдотраектория проходит через подпространство  $e$ , имеет период  $2(k+n)$ , величины  $k$  и  $n$  определяются величиной  $\varepsilon$ . Поскольку  $e$  было произвольным подпространством в  $O \times P^1$ , отличным от  $e^s$  и  $e^u$ , вся окружность  $O \times P^1$  состоит из цепно-рекуррентных точек. Утверждение доказано.

*Замечание.* Из утверждения следует, что цепно-рекуррентное множество отображения  $Pf$  содержит траекторию  $Tr(Q, e^*)$ ,  $e^* = TW^s(Q) = TW^u(Q)$  и окружность  $O \times P^1$ .

Пусть  $f$  — описанный выше диффеоморфизм плоскости с гиперболической неподвижной точкой и гомоклинической орбитой. Обозначим  $\lambda_s$  и  $\lambda_u$  показатели Ляпунова гиперболической точки  $O$ ,  $\lambda_s < 0 < \lambda_u$ .

**Утверждение 9.2.** Если устойчивое и неустойчивое многообразия гиперболической точки пересекаются касаясь, то спектр Морса содержит интервал  $[\lambda_s, \lambda_u]$ .

*Доказательство.* В доказательстве утверждения 9.1 мы построили две траектории в проективном расслоении  $Tr(O, e)$  и  $Tr(Q, e^*)$ , формирующие цикл

$$(O, e^s) \rightarrow (O, e) \rightarrow (O, e^u) \rightarrow (Q, e^*) \rightarrow (O, e^s).$$

Используя этот цикл мы строили периодическую псевдотраекторию. Устойчивое и неустойчивое подпространства  $e^s$  и  $e^u$  гиперболической точки являются неподвижными точками для отображения  $Pf$ . Точки  $Tr(O, e^s) = (O, e^s)$  и  $Tr(O, e^u) = (O, e^u)$  являются траекториями для  $Pf$ . Это позволяет включить данные точки в построенный цикл. Таким образом, мы получаем следующий цикл:

$$(O, e^s) \rightarrow (O, e) \rightarrow (O, e^u) \rightarrow (Q, e^*) \rightarrow (O, e^s) \rightarrow (O, e^s)$$

и периодическую  $\varepsilon$ -траекторию

$$\chi = \left\{ (O, Df^i e), -n \leq i \leq n; (O, Df^p e^u), 0 \leq p \leq N; \right. \\ \left. (f^j(Q), Df^j e^*), -k \leq j \leq k; (O, Df^q e^s), 0 \leq q \leq K \right\}.$$

Эта траектория проходит через подпространство  $e$ , является  $2(k+n)+N+K$ -периодической, числа  $k$  и  $n$  фиксированы и определяются величиной  $\varepsilon$ , а  $N$  и  $K$  являются произвольно большими целыми положительными числами. Вычислим показатель Ляпунова построенной псевдотраектории:

$$\lambda(\chi) = \frac{1}{2(k+n)+N+K} \sum_{z=0}^{2(k+n)+N+K-1} \ln |Df(x_z) e_z|. \quad (9.15)$$

Сумма состоит из трех частей: первая часть  $\sum_0$  содержит члены, порожденные псевдотраекторией  $\chi^*$ , и имеет  $2(k+n)$  членов; вторая часть  $\sum_s$  порождена действием дифференциала на устойчивом подпространстве  $e^s$  и имеет  $K$  членов; последняя часть  $\sum_u$  генерируется действием дифференциала на неустойчивом подпространстве  $e^u$  и имеет  $N$  членов. Числа  $k$  и  $n$  фиксированы, а  $N$  и  $K$  будут выбираться такими большими, что  $\lambda(\chi)$  будет аппроксимировать (любое) число из сегмента  $[\lambda_s, \lambda_u]$ .

Первая сумма ограничена  $\sum_0 = C$ , вторая сумма  $\sum_s = K\lambda_s$ , а третья сумма  $\sum_u = N\lambda_u$ . Таким образом, мы имеем

$$\lambda(\chi) = \frac{1}{2(k+n)+N+K} (C + K\lambda_s + N\lambda_u) = \\ = \frac{C}{2(k+n)+N+K} + \left( \frac{N+K}{2(k+n)+N+K} \right) \left( \frac{1}{N+K} \right) (K\lambda_s + N\lambda_u).$$

Для  $N + K \rightarrow \infty$

$$\frac{C}{2(k+n)+N+K} \rightarrow 0 \text{ и } \frac{N+K}{2(k+n)+N+K} \rightarrow 1.$$

Пусть  $0 < \alpha < 1$ . Построим последовательность положительных чисел  $N$  и  $K$  такую, что  $N + K \rightarrow \infty$  и  $K / (N + K) \rightarrow \alpha$ . Если  $\alpha$  является рациональным числом, то выберем  $N$  и  $K$  как решение уравнения

$$\frac{K}{N+K} = \alpha,$$

т.е. положим  $\frac{N}{K} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ . Существует бесконечно много таких чисел, и мы можем выбрать их так, что  $N + K \rightarrow \infty$ . Если  $\alpha$  является иррациональным числом, то достаточно взять  $\frac{N}{K} \rightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha}$ , тогда  $N + K \rightarrow \infty$ . При описанном выборе  $N$  и  $K$  мы имеем

$$\lambda(\chi) \rightarrow \alpha\lambda_s + (1-\alpha)\lambda_u,$$

т.е. спектр Морса содержит число  $\alpha\lambda_s + (1-\alpha)\lambda_u$ . Если  $\alpha$  есть произвольное число между 0 и 1, то спектр Морса содержит любое число из сегмента  $[\lambda_s, \lambda_u]$ . Утверждение доказано.

Рассмотрим проективное пространство  $P^1(Q)$  над гомоклинической точкой  $Q$ . Здесь имеется подпространство  $e^* = TW^s(Q) = TW^u(Q)$ , которое обладает следующими свойствами. Если  $\bar{e}^*$  — единичный вектор в  $e^*$ , то

$$|Df^n \bar{e}^*| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty$$

и

$$|Df^n \bar{e}^*| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow -\infty.$$

Если  $e \in P^1(Q)$  отлично от  $e^*$  и  $\bar{e}$  — единичный вектор в  $e$ , то

$$|Df^n \bar{e}| \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow +\infty$$

и

$$|Df^n \bar{e}| \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow -\infty$$



**Утверждение 9.3.** Цепно-рекуррентное множество  $CR(Pf)$  отображения  $Pf$  на проективном расслоении  $P$  содержит одномерное проективное пространство  $P^1(Q)$ , т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  и любого подпространства  $e \in P^1(Q)$  существует периодическая  $\varepsilon$ -траектория отображения  $Pf$ , проходящая через  $e$ .

*Доказательство.* Пусть  $e \in P^1(Q)$  является подпространством, отличным от  $e^*$ . Напомним, что отображение  $Pf(O)$  над неподвижной точкой  $O$  имеет две неподвижные точки  $e^s = TW^s(O)$  и  $e^u = TW^u(O)$ . При этом все другие траектории начинаются в  $e^s$  и заканчиваются в  $e^u$ . Тогда итерации  $Pf^n e$  при достаточно больших  $|n|$  ведут себя аналогичным образом, а именно:

$$Pf^n e \rightarrow e^u \text{ при } n \rightarrow +\infty$$

и

$$Pf^n e \rightarrow e^s \text{ при } n \rightarrow -\infty$$

Таким образом, имеется траектория вида

$$e^s \rightarrow e \rightarrow e^u.$$

Кроме того, имеется траектория гомоклинического касания

$$e^u \rightarrow e^* \rightarrow e^s.$$

Объединяя две эти траектории, мы получим цикл

$$e^s \rightarrow e \rightarrow e^u \rightarrow e^* \rightarrow e^s,$$

который дважды проходит над  $\Omega$  — замыканием гомоклинической траектории. Используя построенный цикл и действуя аналогично утверждению 9.1, построим периодическую псевдотраекторию, проходящую через  $e$ . Утверждение доказано.

Из доказанных утверждений следует справедливость теоремы 9.8.

### *Контрольные вопросы и задания*

1. Постройте пример вычисления спектра Морса.
2. Постройте покрытия проективного расслоения.

3. Постройте символический образ для динамической системы (9.2), (9.3).
4. Оцените разницу между спектром Морса и расширенным спектром Морса.
5. Опишите алгоритм проверки гиперболичности.
6. При каких условиях неблуждающее множество совпадает с цепно-рекуррентным множеством?
7. Найдите спектр Морса линейного отображения.
8. Найдите спектр Морса отображения Жюлиа.

# Глава 10

## СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

### 10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Качественное изучение динамики систем состоит в геометрическом описании множества ее траекторий. Это приводит к тому, что нужно узнать, когда пространства траекторий двух систем имеют одинаковые качественные черты, т.е. требуется определить некоторое отношение эквивалентности. Естественно считать, что замена координат переводит к эквивалентной системе. Иначе говоря, динамическая система  $x_{n+1} = f(x_n)$  является эквивалентной системе  $y_{n+1} = g(y_n)$ , если существует замена координат  $y = h(x)$ , которая переводит траектории первой системы на траектории другой системы. Возникает вопрос о свойствах замены координат  $y = h(x)$ . Примеры показывают, что наиболее естественной заменой координат является гомеоморфизм. В этом случае имеет место равенство

$$f(x) = h^{-1}g(h(x)) = (h^{-1} \circ g \circ h)(x).$$

Таким образом, мы приходим к следующему определению.

**Определение 10.1.** Дiffeоморфизмы  $f: M \rightarrow M$  и  $g: M \rightarrow M$  топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм  $h: M \rightarrow M$  такой, что  $g \circ h = h \circ f$ .

Структурная устойчивость является фундаментальным свойством динамической системы, которое означает, что на качественное поведение траекторий не влияют небольшие возмущения системы. Во всякой динамической системе, возникающей при решении практических задач, коэффициенты известны только приближенно. Поэтому возникает проблема исследования изменения динамики системы при малых возмущениях системы. Крайне важно знать условия, при которых основные характеристики динамики одинаковы для любого небольшого возмущения «модельной» системы.

**Определение 10.2.** Дiffeоморфизм  $f$  называется структурно устойчивым, если найдется такая его окрестность  $U$  в пространстве диффеоморфизмов, что любой диффеоморфизм  $g$  из  $U$  топологически эквивалентен диффеоморфизму  $f$ .

Структурная устойчивость системы означает сохранение динамики системы при малых возмущениях. Концепция структурной устойчивости особенно полезна для практического использования результатов математических исследований.

А.А. Андронов, специалист в области электротехники, радиофизики и прикладной механики, впервые инициировал задачу изучения сохранения динамики системы при возмущениях. В 1932 г. он обратился к Л.С. Понтрягину с предложением начать совместную научную работу в этом направлении. Их статья «Грубые системы» была опубликована в Докладах АН СССР в 1937 г. [3]. Из этой четырехстраничной статьи выросла теперь обширная теория динамических систем. Ученые рассматривали автономную систему дифференциальных уравнений на двумерном диске. Предполагалось, что векторное поле на границе направлено строго вовнутрь диска. Требовалось найти условия, при которых траектории возмущенной системы малым гомеоморфным преобразованием переводятся в траектории исходной системы с сохранением направления движения. Описанное свойство было названо грубостью системы. Для того чтобы система была грубой, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- 1) существует конечное число особых точек (состояний равновесия);

- 2) эти особые точки имеют ненулевые показатели Ляпунова, т.е. они могут быть устойчивыми и неустойчивыми состояниями равновесия или гиперболическими состояниями равновесия;

- 3) существует конечное число периодических траекторий;

- 4) эти периодические траектории имеют ненулевые показатели Ляпунова;

- 5) не существует траекторий (сепаратрис), соединяющих гиперболические состояния равновесия или траекторий, начинающихся и кончающихся в одном и том же гиперболическом состоянии равновесия.

Современный термин «структурная устойчивость» для грубых систем введен С. Лефшецем [73]. До начала 1960-х гг. была надежда, что условия Андронова — Понтрягина являются необходимыми и достаточными для структурной устойчивости. Однако в 1961 г. С. Смейл построил пример (подкову Смейла) структурно устойчивого диффеоморфизма на плоскости с бесконечным множеством периодических траекторий [108]. В 1980-х гг. усилиями Дж. Робина, К. Робинсона и Р. Мане были найдены необходимые и достаточные условия структурной устойчивости (см. формулировки ниже). Этот классический результат носит абстрактный характер,

но, к сожалению, малоприменим к практическому применению. Следует отметить, что современная компьютерная технология позволяет проверить условия Андронова — Понтрягина.

Наша цель состоит в том, чтобы трансформировать условия Робина — Робинсона — Мане в эквивалентные, но компьютерно проверяемые условия, что дает возможность проверить структурную устойчивость за конечное число шагов. В главе 11 приведены примеры приложений компьютерных программ, которые локализуют цепно-рекуррентное множество и проверяют гиперболичность дискретных динамических систем на таком множестве. При этом гиперболичность проверяется для системы, имеющей нетривиальное хаотическое множество с бесконечным числом периодических траекторий.

## 10.2. УСЛОВИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ

Пусть  $f$  — диффеоморфизм компактного многообразия  $M$ . Для каждой точки  $x \in M$  определим устойчивое  $S(x)$  и неустойчивое  $U(x)$  подпространства:

$$S(x) = \{v \in TM_x : |Df^n(x)v| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty\};$$

$$U(x) = \{v \in TM_x : |Df^n(x)v| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow -\infty\},$$

где  $TM_x$  — касательное пространство к  $M$  в точке  $x$ .

**Определение 10.3.** Будем говорить, что условие трансверсальности выполнено на многообразии  $M$ , если

$$TM_x = S(x) + U(x)$$

в любой точке  $x \in M$ .

Суммируя результаты Дж. Роббина [96], К. Робинсона [98] и Р. Мане [78, 79] мы можем сформулировать следующую теорему.

**Теорема 10.1.** Диффеоморфизм  $f$  является структурно устойчивым тогда и только тогда, когда условие трансверсальности выполнено на многообразии  $M$ .

Таким образом, теорема 10.1 описывает необходимое и достаточное условие. Практическое применение этого результата ограничено трудностями проверки условия трансверсальности.

**Связь между условием трансверсальности и гиперболичностью.** Пусть условие трансверсальности выполнено и диффеомор-

физм  $f$  гиперболичен на инвариантном множестве  $\Lambda$ . Возникает вопрос о соотношении инвариантных подпространств  $E^s(x)$ ,  $E^u(x)$  из определения гиперболичности и инвариантных подпространств  $S(x)$ ,  $U(x)$  из определения трансверсальности. Согласно определению гиперболичности, дифференциал экспоненциально сжимает на  $E^s$  и экспоненциально растягивает на  $E^u$ . Отсюда следуют включения  $E^s(x) \subset S(x)$  и  $E^u(x) \subset U(x)$ . Следующая теорема показывает, что эти подпространства совпадают над цепно-рекуррентным множеством, т.е.  $E^s(x) = S(x)$  и  $E^u(x) = U(x)$ ,  $x \in CR$ .

**Теорема 10.2** [6, 78]. Если выполнено условие трансверсальности, то:

- 1) множество  $\Lambda = \{x \in M : TM_x = S(x) \oplus U(x)\}$  является замкнутым и инвариантным;
- 2) диффеоморфизм  $f$  является гиперболическим на  $\Lambda$  и  $S(x) = E^s(x)$ ,  $U(x) = E^u(x)$ ,  $x \in \Lambda$ ;
- 3) цепно-рекуррентное множество  $CR$  лежит в  $\Lambda$ .

### 10.3. ДВОЙСТВЕННЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Дифференциал  $Df : TM \rightarrow TM$  является естественным примером линейного расширения отображения  $f : M \rightarrow M$ . Рассмотрим другой пример линейного расширения — двойственный дифференциал  $\hat{D}f$ , который определяется следующим образом.

Пусть  $(v, u)$  — скалярное произведение в касательном пространстве  $TM$ ,  $A$  — линейное отображение, тогда сопряженное отображение  $A^*$  определяется равенством

$$(Av, u) = (v, A^*u).$$

Если  $A$  является матрицей, то  $A^*$  является транспонированной матрицей. Матрица  $A^{*-1}$  является обратной к транспонированной. При этом операции транспонирования и обращения матрицы можно менять местами:

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Двойственный дифференциал определяется по формуле

$$\hat{D}f(x) = \left( (Df(x))^* \right)^{-1}.$$

Покажем, что двойственный дифференциал действует из  $TM_x$  в  $TM_{f(x)}$ . Действительно, дифференциал  $Df(x)$  действует из  $TM_x$  в  $TM_{f(x)}$ , левая часть равенства

$$(Df(x)v, u) = \left( v, (Df(x))^* u \right)$$

вычисляется в  $TM_{f(x)}$ , а правая часть вычисляется в  $TM_x$ . Это означает, что  $(Df(x))^*$  действует из  $TM_{f(x)}$  в  $TM_x$ . Тогда обратное отображение  $((Df(x))^*)^{-1}$  действует из  $TM_x$  в  $TM_{f(x)}$ . В локальных координатах матрица Якоби  $Df(x) = A(x)$  имеет своими элементами частные производные

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Тогда обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_{ij})^*,$$

где  $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение к  $a_{ij}$ . В таком случае, двойственный дифференциал имеет вид

$$\hat{D}f(x) = (Df(x)^*)^{-1} = \frac{1}{\det Df(x)} (A_{ij}(x)).$$

Главное свойство двойственного дифференциала выражается формулой инвариантности

$$(Dfv, \hat{D}fu) = (v, u),$$

т.е. скалярное произведение не меняется под действием дифференциала и двойственного дифференциала [6, с. 80–81]. Двойственный дифференциал  $\hat{D}f$  порождает следующую динамическую систему:

$$(x_{n+1}, e_{n+1}) = \left( f(x_n), \frac{\hat{D}f(x_n)e_n}{|\hat{D}f(x_n)e_n|} \right) \equiv P(\hat{D}f)(x_n, e_n) \quad (10.1)$$

на проективном расслоении  $P$ .

**Определение 10.4.** Двойственный дифференциал  $\hat{D}f(x)v$  называется гиперболическим на инвариантном множестве  $\Lambda \subset M$ , если существует инвариантные подрасслоения  $\hat{E}^s$  и  $\hat{E}^u$  касательного пространства  $TM|_{\Lambda}$ , постоянные  $K > 0$  и  $\alpha > 0$  такие, что

$$TM|_{\Lambda} = \hat{E}^s \oplus \hat{E}^u;$$

$$|\hat{D}f^n(x)v| \leq K|v|\exp(-\alpha n), \quad x \in \Lambda, \quad v \in \hat{E}^s(x), \quad n > 0;$$

$$|\hat{D}f^{-n}(x)v| \leq K|v|\exp(-\alpha n), \quad x \in \Lambda, \quad v \in \hat{E}^u(x), \quad n > 0.$$

Инвариантность подрасслоения  $\hat{E}^*$  означает равенство

$$\hat{D}f(x)\hat{E}^*(x) = \hat{E}^*(f(x)).$$

Следующая теорема описывает условия, при которых гиперболичность дифференциала эквивалентна гиперболичности двойственного дифференциала.

**Теорема 10.3** [6, 102]. Диффеоморфизм  $f$  является гиперболическим на цепно-рекуррентном множестве  $CR(f)$  тогда и только тогда, когда двойственный дифференциал  $\hat{D}f$  является гиперболическим на этом множестве. При этом устойчивое подпространство  $\hat{E}^s$  для  $\hat{D}f(x)$  перпендикулярно устойчивому подпространству  $E^s$  для  $Df$  и неустойчивое подпространство  $\hat{E}^u$  перпендикулярно неустойчивому подпространству  $E^u$ .

Спектр двойственного дифференциала  $\hat{D}f$  определим как спектр усреднения функции  $\varphi(x, e) = \ln|\hat{D}f(x)e|$  над псевдотраекториями системы (10.1). Рассмотрим покрытие  $C(P)$  проективного расслоения и построим символический образ  $G$  отображения  $P(\hat{D}f)$ . Выбирая точку  $(x_i, e_i)$  в каждой ячейке  $M(i)$ , построим распределение  $a[ij] = \varphi(x_i, e_i)$  на ребрах символического образа  $G$ . Мы можем найти спектр  $\Sigma(G)$  символического образа и его расширение, используя модуль непрерывности функции  $\varphi(x, e) = \ln|\hat{D}f(x)e|$ .

**Теорема 10.4.** Следующие утверждения эквивалентны:

1) двойственный дифференциал  $\hat{D}f$  является гиперболическим на цепно-рекуррентном множестве  $CR(f)$ ;



2) спектр  $\Sigma(\hat{D}f)$  двойственного дифференциала не содержит нуля;

3) существует  $d_0 > 0$  такое, что расширенный спектр символического образа двойственного дифференциала для покрытия  $C(P)$  с максимальным диаметром  $d < d_0$  не содержит нуля.

Данная теорема является аналогом теоремы 9.7, поэтому ее доказательство опускается.

**Определение 10.5** [6, 106]. Будем говорить, что двойственный дифференциал имеет только тривиальные ограниченные траектории, если любая ограниченная траектория

$$(x_{n+1}, v_{n+1}) = (f(x_n), \hat{D}f(x_n)v_n), |v_n| \leq C, C \in R^+, n \in \mathbb{Z}$$

является нулевой, т.е.  $v_n = 0$ .

Следующая теорема описывает условие трансверсальности в терминах двойственного дифференциала, см. утверждение 8.46 из [6].

**Теорема 10.5** [6, 79]. Условие трансверсальности выполняется тогда и только тогда, когда двойственный дифференциал имеет только тривиальные ограниченные траектории.

На первый взгляд, кажется, что проверить описанное свойство двойственного дифференциала так же трудно, как и условие трансверсальности. Однако мы покажем, что отсутствие нетривиальных ограниченных траекторий двойственного дифференциала можно проверить конструктивно, используя символический образ двойственного дифференциала  $\hat{D}f$  на проективном расслоении.

#### 10.4. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ УСЛОВИЯ

Пусть спектр двойственного дифференциала не содержит нуля, тогда  $\Sigma(\hat{D}f)$  состоит из двух частей: положительной части  $\Sigma^+$  и отрицательной части  $\Sigma^-$ . Спектр любого усреднения состоит из отрезков  $[a, b]$ , каждый из которых порожден компонентой цепно-рекуррентного множества  $\Omega$ . В связи с этим каждая компонента  $\Omega$  цепно-рекуррентного множества  $CR(P\hat{D}f)$  отображения  $\hat{D}f$  получает знак «плюс» или «минус» в зависимости от того, какой отрезок она порождает — положительный или отрицательный. В таком случае цепно-рекуррентное множество делится на две части —  $CR^+$  и  $CR^-$  так, что в  $CR^+$  входят все положительные компоненты, а в  $CR^-$  входят все отрицательные компоненты. Пусть  $e$  — точка проективного расслоения, обозначим через  $E(e)$  одномерное подпро-

странство касательного расслоения, натянутое на  $e$ . Если  $v \in TM$  — вектор касательного расслоения, то проекция  $Pv = e$  — точка проективного расслоения. По построению спектр  $\Sigma(\hat{D}f)|_{E(CR^+)}$  является положительным, а спектр  $\Sigma(\hat{D}f)|_{E(CR^-)}$  — отрицательным. Множества  $CR^+$  и  $CR^-$  назовем, соответственно, положительным и отрицательным цепно-рекуррентными множествами двойственного дифференциала на проективном расслоении. Следующая теорема описывает эквивалентные условия для существования только тривиальных ограниченных траекторий двойственного дифференциала.

Пусть

$$\hat{S} = \left\{ v \in TM_x : \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{D}f^n(x)v = 0 \right\};$$

$$\hat{U} = \left\{ v \in TM_x : \lim_{n \rightarrow -\infty} \hat{D}f^n(x)v = 0 \right\}$$

и  $P\hat{S}, P\hat{U}$  есть проекции этих подпространств в проективное расслоение.

**Теорема 10.6.** Двойственный дифференциал имеет только тривиальные ограниченные траектории тогда и только тогда, когда на проективном расслоении проекция  $P\hat{U}$  является аттрактором, а  $P\hat{S}$  — его двойственным репеллером.

Теорему доказали И.У. Бронштейн [6, с. 132] и независимо Д. Саламон, Э. Зендер [103, теорема 2.7]. Если диффеоморфизм является структурно устойчивым, то из теорем 10.1–10.4 следует, что спектр двойственного дифференциала не содержит нуля. Далее будем рассматривать такой диффеоморфизм.

Пусть траектория  $\chi = \{(x_n, e_n) = P\hat{D}f^n(x, e), n \in \mathbb{Z}\}$  не является цепно-рекуррентной. Напомним, что  $\alpha$ -предельное множество траектории является предельным множеством точек траектории при  $n \rightarrow -\infty$ ,  $\omega$ -предельное множество траектории является предельным множеством точек траектории при  $n \rightarrow +\infty$ . Поскольку траектория  $\chi$  не является цепно-рекуррентной, ее  $\alpha$ -предельное множество лежит в некоторой компоненте  $\Omega_1$  цепно-рекуррентного множества и  $\omega$ -предельное множество лежит в другой компоненте  $\Omega_2$ . Можно сказать, что траектория  $\chi$  начинается в  $\Omega_1$  и заканчивается в  $\Omega_2$ .

Пусть  $C = \{M(i)\}$  — замкнутое покрытие проективного расслоения  $P$  и  $G$  — символический образ отображения  $P\hat{D}f$ . Построим

функцию  $a[ij]$  на ребрах графа  $G$ , полагая  $\left\{a[ij] = \ln \left| P\hat{D}f(x_i)e_i \right| \right\}$ , где  $(x_i, e_i) \in M(i)$ . Расширенный спектр символического образа  $G$  содержит спектр двойственного дифференциала. Согласно теореме 8.3, если диаметр покрытия  $d \rightarrow 0$ , то расширенный спектр сходится к спектру двойственного дифференциала в метрике Хаусдорфа. По предположению, мы рассматриваем диффеоморфизм, у которого спектр двойственного дифференциала не содержит нуля. Пусть диаметр покрытия является таким малым, что ноль не лежит в расширенном спектре.

**Утверждение 10.1.** Пусть  $H$  есть класс эквивалентных возвратных вершин на  $G$  и  $[a, b]$  есть расширенный спектр класса  $H$ . Тогда существуют положительные константы  $K_*$  и  $K^*$  такие, что:

1) для любого положительного отрезка траектории вида  $\chi = \{(x_k, e_k) = P\hat{D}f^k(x, e), k = 0, 1, \dots, p\}$ , чей допустимый путь  $\omega = \{z_k : (x_k, e_k) \in M(z_k), k = 0, 1, \dots, p\}$  лежит в классе  $H$ , выполнено

$$K_* \exp(pa)|v| \leq \left| \hat{D}f^p(x)v \right| \leq K^* \exp(pb)|v|,$$

где вектор  $v$  лежит в подпространстве  $e_0$ ;

2) для любого отрицательного отрезка траектории вида  $\chi = \{(x_k, e_k) = P\hat{D}f^k(x, e), k = 0, -1, \dots, -p\}$ , чей допустимый путь  $\omega = \{z_k : (x_k, e_k) \in M(z_k), k = 0, -1, \dots, -p\}$  лежит в классе  $H$ , выполнено

$$K_* \exp(-pb)|v| \leq \left| \hat{D}f^{-p}(x)v \right| \leq K^* \exp(-pa)|v|,$$

где вектор  $v$  лежит в подпространстве  $e_0$ .

*Доказательство.* Первое утверждение является аналогом теоремы 9.3, поэтому мы его опускаем. Доказательство второго утверждения следует из следующего наблюдения. Если линейное отображение  $A$  удовлетворяет неравенству  $c_1|v| \leq |Av| \leq c_2|v|$  и существует  $A^{-1}$ , то, подставляя  $v = A^{-1}w$ , получим неравенство  $c_1|A^{-1}w| \leq |w| \leq c_2|A^{-1}w|$ . Следовательно, отображение  $A^{-1}$  удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{c_2}|w| \leq |A^{-1}w| \leq \frac{1}{c_1}|w|.$$

Из этого следует справедливость второго утверждения. Доказательство закончено.

Пусть спектр двойственного дифференциала не содержит нуля. Будем говорить, что существует связь  $CR^+ \rightarrow CR^-$ , если найдется траектория  $\chi$  отображения  $P\hat{D}f$  такая, что ее  $\alpha$ -предельное множество лежит в  $CR^+$ , а  $\omega$ -предельное множество лежит в  $CR^-$ .

**Теорема 10.7.** Диффеоморфизм  $f$  является структурно устойчивым тогда и только тогда, когда спектр  $\Sigma(P\hat{D}f)$  двойственного дифференциала не содержит нуля и нет связи  $CR^+ \rightarrow CR^-$ .

*Достаточность.* Пусть спектр  $\Sigma(P\hat{D}f)$  двойственного дифференциала не содержит нуля и не существует связь  $CR^+ \rightarrow CR^-$ . Покажем, что двойственный дифференциал имеет только тривиальные ограниченные траектории. Если спектр двойственного дифференциала не содержит нуля, то цепно-рекуррентное множество  $CR(P\hat{D}f)$  раскладывается в сумму  $CR^+ + CR^-$  положительной и отрицательной частей. Поскольку спектр  $\Sigma(P\hat{D}f)$  замкнут, существует отрезок  $[-\beta, \beta]$ ,  $\beta > 0$ , который не содержит точек спектра.

Пусть  $\chi = \{(x_k, v_k)\}$  является ненулевой траекторией двойственного дифференциала  $\hat{D}f$  и  $P\chi = \{(x_k, e_k), e_k = Pv_k\}$  есть проекция траектории  $\chi$  в проективное расслоение  $P$ . Если  $P\chi$  является цепно-рекуррентной траекторией, то  $P\chi$  лежит в  $CR^+ \cup CR^-$  и  $\chi$  является гиперболической и неограниченной траекторией, согласно теореме 10.4. Предположим, что  $P\chi$  не является цепно-рекуррентной траекторией. Тогда ее  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельные множества лежат в  $CR^+ \cup CR^-$ . Будем говорить, что  $P\chi$  начинается в  $CR^+$ , если ее  $\alpha$ -предельное множество лежит в  $CR^+$ , и  $P\chi$  начинается в  $CR^-$ , если ее  $\alpha$ -предельное множество лежит в  $CR^-$ . Аналогично  $P\chi$  заканчивается в  $CR^+$ , если  $\omega$ -предельное множество лежит в  $CR^+$ , и  $P\chi$  заканчивается в  $CR^-$ , если  $\omega$ -предельное множество лежит в  $CR^-$ .

Пусть  $P\chi$  заканчивается в  $CR^+$ . Рассмотрим покрытие  $C = \{M(i)\}$  проективного расслоения  $P$  и символический образ  $G$  отображения  $P\hat{D}f$  для данного покрытия. Построим функцию  $a[ij]$  на ребрах графа  $G$ , полагая  $\{a[ij] = \ln |\hat{D}f(x_i)e_i|, \text{ где } (x_i, e_i) \in M(i)\}$ . Таким образом, определяется расширенный спектр символического образа. Согласно теореме 8.3, если диаметр покрытия  $d \rightarrow 0$ , то расширенный спектр сходится к спектру двойственного дифференциала в метрике Хаусдорфа. По предположению, мы рассматриваем диффеоморфизм, у которого спектр двойственного дифференциала не содержит нуля. Пусть диаметр покрытия является таким малым, что ноль не лежит в расширенном спектре. При этом траектория  $P\chi$  заканчивается в некоторой компоненте  $\Omega \subset CR^+$ . Пусть  $H = H(\Omega)$  —

класс эквивалентных возвратных вершин компоненты  $\Omega$  с положительным спектром. Тогда, согласно утверждению 10.1, выполнено

$$K_* \exp(pa) |v_0| \leq |\hat{D}f^p(x_0)v_0|,$$

где  $a \geq \beta > 0$  и  $p > 0$ . Следовательно, положительная полутраектория  $\chi^+$  будет неограниченной. Аналогично, если  $P\chi$  оканчивается в  $CR^-$ , то

$$|\hat{D}f^p(x_0)v_0| \leq K^* \exp(pb) |v_0|,$$

где  $b \leq -\beta < 0$  и  $p > 0$ . В этом случае положительная полутраектория  $\chi^+$  будет ограниченной. Таким же методом можно показать, что если  $P\chi$  начинается в  $CR^+$ , то отрицательная полутраектория  $\chi^-$  является ограниченной, и если  $P\chi$  начинается в  $CR^-$ , то отрицательная полутраектория  $\chi^-$  является неограниченной. Тогда ненулевая траектория  $\chi$  является ограниченной, если и только если  $P\chi$  начинается в  $CR^+$  и заканчивается в  $CR^-$ . Однако в этом случае мы имеем связь  $CR^+ \rightarrow CR^-$ . Это противоречит предположениям теоремы. Таким образом, любая ненулевая траектория двойственного дифференциала является неограниченной. Тогда из теорем 10.1 и 10.5 следует, что диффеоморфизм  $f$  является структурно устойчивым.

*Необходимость.* Предположим, что  $f$  является структурно устойчивым. Согласно теоремам 10.1 и 10.2,  $f$  является гиперболическим на цепно-рекуррентном множестве  $CR(f)$ . По теореме 10.3 спектр двойственного дифференциала не содержит нуля и вследствие его замкнутости не содержит некоторый отрезок  $[-\beta, \beta]$ ,  $\beta > 0$ . Спектр разбивается на две части  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$ . Аналогично цепно-рекуррентное множество  $CR(\hat{D}f)$  двойственного дифференциала на проективном расслоении также разбивается на две части  $CR^+$  и  $CR^-$ , как это описано выше. Согласно теореме 10.5, двойственный дифференциал должен иметь только тривиальные ограниченные траектории.

Покажем от противного, что связь  $CR^+ \rightarrow CR^-$  отсутствует. Наличие связи  $CR^+ \rightarrow CR^-$  порождает траекторию  $\omega = \{(x_k, e_k)\}$  отображения  $P\hat{D}f$ , которая начинается в  $CR^+$  и заканчивается в  $CR^-$ . Траектория  $\omega$ , в свою очередь, порождает траекторию двойственного дифференциала  $\hat{D}f$  вида

$$\chi = \{(x_k, v_k), x_k = f^k(x_0), v_k = \hat{D}f^k(x_0)v_0, v_0 \in e_0, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Согласно построению,  $P\chi = \omega$ . Траектория  $\omega$  начинается в  $CR^+$  и, следовательно, отрицательная полутраектория  $\chi^-$  ограничена. Траектория  $\omega$  заканчивается в  $CR^-$  и, следовательно, положительная полутраектория  $\chi^+$  ограничена. В этом случае  $\chi$  является ограниченной траекторией, что приводит к противоречию. Следовательно, связь  $CR^+ \rightarrow CR^-$  отсутствует. Теорема доказана.

## 10.5. ПРОВЕРКА СТРУКТУРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Покажем, что условия теоремы 10.7 можно конструктивно проверить посредством символического образа двойственного дифференциала. Рассмотрим символический образ  $G$  двойственного дифференциала на проективном расслоении  $P\hat{D}f: P \rightarrow P$ . Пусть спектр двойственного дифференциала не содержит нуля. Тогда существует  $d_0 > 0$  такое, что для любого покрытия  $C(P)$  проективного расслоения диаметра  $d < d_0$  расширенный спектр символического образа не содержит нуля. Каждый класс эквивалентных возвратных вершин  $H_k$  получает расширенный спектральный интервал

$$[a_k, b_k] = [\lambda_{\min}(H_k) - \eta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \eta(d)],$$

который является положительным при  $a_k > 0$  или отрицательным при  $b_k < 0$ . Обозначим  $H^+$  объединение классов с положительными спектральными интервалами:  $H^+ = \{\bigcup H_k, a_k > 0\}$  и  $H^- = \{\bigcup H_k, b_k < 0\}$  — с отрицательными спектральными интервалами. Множества  $H^+$  и  $H^-$  естественно назвать положительными и отрицательными классами возвратных вершин. Согласно теореме 3.9, множество

$$P = \{\bigcup M(i) : i \text{ — возвратная}\} = \{\bigcup M(i) : i \in H^+ \cup H^-\}$$

является замкнутой окрестностью цепно-рекуррентного множества.

В частности,

$$P^+ = \{\bigcup M(i) : i \in H^+\}$$

является окрестностью множества  $CR^+$  и

$$P^- = \{\bigcup M(i) : i \in H^-\}$$

является окрестностью множества  $CR^-$ .

**Определение 10.6.** Будем говорить, что на символическом образе  $G$  существует связь  $H^+ \rightarrow H^-$ , если существует допустимый путь из  $H^+$  в  $H^-$ .

**Теорема 10.8.** Дiffeоморфизм  $f$  структурно устойчив тогда и только тогда, когда существует  $d_0 > 0$  такое, что для любого покрытия  $C$  проективного расслоения  $P$  с диаметра  $d < d_0$  расширенный спектр символического образа двойственного дифференциала не содержит нуля и связь  $H^+ \rightarrow H^-$  отсутствует.

*Достаточность.* Пусть существует  $d_0 > 0$  такое, что для покрытия  $C(P)$  проективного расслоения диаметра  $d < d_0$  расширенный спектр символического образа  $G(\hat{P}\hat{D}f)$  двойственного дифференциала не содержит нуля и связь  $H^+ \rightarrow H^-$  отсутствует. Фиксируем описанное покрытие и построим символический образ. Тогда из теоремы 10.4 следует, что спектр двойственного дифференциала не содержит нуля и двойственный дифференциал гиперболичен на цепно-рекуррентном множестве  $CR(f)$ . Цепно-рекуррентное множество  $CR(\hat{P}\hat{D}f)$  разбивается на две части  $CR^+ + CR^-$ , при этом множество  $P^+ = \{\bigcup M(i) : i \in H^+\}$  является окрестностью  $CR^+$  и множество  $P^- = \{\bigcup M(i) : i \in H^-\}$  является окрестностью  $CR^-$ .

Покажем от противного, что не существует связи  $CR^+ \rightarrow CR^-$ . Действительно, если существует траектория  $\chi = \{(x_k, e_k)\}$  отображения  $\hat{P}\hat{D}f$ , которая начинается в  $CR^+$  и заканчивается в  $CR^-$ , то  $\chi$  порождает допустимый путь  $\omega = \{z_k : (x_k, e_k) \in M(z_k)\}$  из  $H^+$  в  $H^-$  на  $G$ . Это дает связь  $H^+ \rightarrow H^-$ , что противоречит предположению теоремы. Из теоремы 10.7 следует, что диффеоморфизм  $f$  является структурно устойчивым.

*Необходимость.* Пусть диффеоморфизм  $f$  является структурно устойчивым. Тогда из теоремы 10.7 следует, что спектр двойственного дифференциала не содержит нуля и не существует связи  $CR^+ \rightarrow CR^-$ . Из теоремы 10.4 следует существование  $d_1 > 0$  такого, что расширенный спектр символического образа двойственного дифференциала для покрытия диаметром  $d < d_1$  не содержит нуля. Классы эквивалентных возвратных вершин разбиваются на положительные и отрицательные  $H^+$  и  $H^-$  так, что  $P^+ = \{\bigcup M(i) : i \in H^+\}$  является окрестностью  $CR^+$  и множество  $P^- = \{\bigcup M(i) : i \in H^-\}$  является окрестностью  $CR^-$ . Пусть

$$\hat{S} = \left\{ v \in TM_x : \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{D}f^n(x)v = 0 \right\};$$

$$\hat{U} = \left\{ v \in TM_x : \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{D}f^n(x)v = 0 \right\}$$

и  $P\hat{S}, P\hat{U}$  есть проекции подпространств  $\hat{S}, \hat{U}$  в проективное расслоение. Пусть точка  $(x, v)$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{D}f^n(x)v = 0$ . Проекция траектории  $(x_n, v_n) = (f^n(x), \hat{D}f^n(x)v)$  на проективное расслоение имеет вид

$$(x_n, e_n) = \left( f^n(x), \frac{\hat{D}f^n(x)e}{|\hat{D}f^n(x)e|} \right),$$

где  $e_0 = v/|v|$ . Предельное множество этой траектории лежит в некоторой компоненте цепно-рекуррентного множества  $CR(P\hat{D}f) = CR^+ + CR^-$ . Предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{D}f^n(x)v = 0$ , если только  $\omega$ -предельное множество траектории  $(x_n, e_n)$  лежит в  $CR^-$ . Устойчивое многообразие инвариантного множества  $CR^-$  имеет вид

$$W^s(CR^-) = \left\{ (x, e) : P\hat{D}f^n(x)e \rightarrow CR^- \text{ при } n \rightarrow \infty \right\}.$$

Отсюда следует, что устойчивое многообразие  $W^s(CR^-)$  совпадает с проекцией  $P\hat{S}$ . Аналогично  $P\hat{U} = W^u(CR^+)$ . Из теорем 10.1, 10.5, 10.6 следует, что  $P\hat{U}$  является аттрактором, а  $P\hat{S}$  — его двойственным репеллером для действия двойственного дифференциала на проективном расслоении. Таким образом, если диффеоморфизм  $f$  является структурно устойчивым, то неустойчивое многообразие  $W^u(CR^+)$  является аттрактором, а устойчивое многообразие  $W^s(CR^-)$  — его двойственным репеллером. Из теоремы 4.2 следует, что существует  $d_2 > 0$  такое, что каждый символический образ  $G$ , соответствующий покрытию с максимальным диаметром ячеек  $d < d_2$ , имеет аттрактор  $L^+$  и двойственный репеллер  $L^-$  такие, что  $U^+ = \left\{ \bigcup M(i) : i \in L^+ \right\}$  есть замкнутая окрестность  $W^u(CR^+)$  и  $U^- = \left\{ \bigcup M(i) : i \in L^- \right\}$  есть замкнутая окрестность  $W^s(CR^-)$ . Множество  $U^+$  является поглощающей окрестностью для аттрактора  $W^u(CR^+)$  и  $U^-$  является отталкивающей окрестностью для двойственного репеллера  $W^s(CR^-)$ , при этом траектории вне  $U^- \cup U^+$  идут из  $U^-$  в  $U^+$ . Если выбрать  $d_0 = \min(d_1, d_2)$  и  $d < d_0$ , то существуют  $L^+$  — аттрактор, а  $L^-$  — двойственный репеллер на символическом образе,



описанные выше. Согласно утверждению 2.2, матрица допустимых переходов графа  $G$  перенумерацией вершин приводится к виду

$$\begin{pmatrix} (L^-) & * & \dots & * & * & * \\ \ddots & 0 & * & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & (L^+) \end{pmatrix},$$

где под диагональю стоят нули, по диагонали нули соответствуют невозвратным (проходящим) вершинам, диагональные блоки  $(L^-)$  и  $(L^+)$  соответствуют вершинам  $L^-$  и  $L^+$ , выше диагонали могут стоять нули или единицы (детали см. в доказательстве теоремы 4.2). При такой матрице допустимых переходов возможен путь только из  $L^-$  в  $L^+$ , но обратного пути нет. Поскольку  $H^+ \subset L^+$  и  $H^- \subset L^-$ , путь из  $H^+$  в  $H^-$  невозможен на символическом образе. Теорема доказана.

Таким образом, структурная устойчивость может быть проверена следующим методом:

1) строится двойственный дифференциал  $\hat{D}f : TM \rightarrow TM$  и определяется  $P\hat{D}f$  — действие этого дифференциала на проективном расслоении;

2) выбирается покрытие  $C = \{M(i)\}$  проективного расслоения и строится символический образ  $G$  отображения  $P\hat{D}f$ ;

3) определяются сильные компоненты  $\{H_k\}$  символического образа  $G$ , что дает окрестность

$$U = \left\{ \bigcup_i M(i), i \in \bigcup_k H_k \right\}$$

цепно-рекуррентного множества отображения  $P\hat{D}f$ ;

4) строится распределение

$$a[ij] = \ln \left| \hat{D}f(x_i)e_i \right|, (x_i, e_i) \in M(i)$$

на ребрах графа  $G$ ;

5) определяется спектр и расширенный спектр символического образа  $G$ . Если расширенный спектр не содержит нуля, то двойст-

венный дифференциал гиперболичен на цепно-рекуррентном множестве;

6) если расширенный спектр не содержит нуля, то определяется разбиение множества возвратных вершин на положительную часть  $H^+$  и отрицательную часть  $H^-$ ;

7) проводится топологическая сортировка графа  $G$  и проверяется отсутствие связи  $H^+ \rightarrow H^-$ .

Если все описанные действия выполнены, то динамическая система является структурно устойчивой согласно теореме 10.8.

*Компьютерная реализация.* В настоящее время известны все алгоритмы для компьютерной реализации описанной схемы. Опишем эти алгоритмы теории графов и их применение к динамическим системам. Книга [89] и статья [49] описывают компьютерную технику построения символического образа. Отметим, что данные расчеты проводились на персональных компьютерах. Основной технической трудностью является огромное число вершин символического образа. Начнем с процесса локализации цепно-рекуррентного множества. Такой алгоритм описан в параграфе 3.5, в статье [90] и в книге [89]. Для этого нужно определить классы эквивалентных возвратных вершин  $H_k$  или компоненты сильной связности символического образа. Существует довольно много алгоритмов для решения задачи вычисления компонент сильной связности на графе [44], и алгоритм Тарьяна [113] является наиболее популярным. В статье [49] приводятся результаты описанной локализации для двух- и трехмерных динамических систем с нетривиальными хаотическими цепно-рекуррентными множествами.

Следующей задачей является определение расширенного спектра символического образа, которая сводится к вычислению отрезка  $[a_k, b_k]$ , для каждого класса  $H_k$ , где  $a_k$  — наименьшее и  $b_k$  — наибольшее средние значения оснащения на простых путях в  $H_k$ . Существует много алгоритмов [54, 60, 69] для решения данной задачи на графе и алгоритм Романовского был первым [99], который решил поставленную задачу. Работа [90] описывает результаты компьютерной проверки гиперболичности системы с цепно-рекуррентным множеством, которое гомеоморфно канторовому множеству. В статье вычисляется символический образ действия дифференциала в проективном расслоении и определяется расширенный спектр Морса, который не содержит нуля.

Последней задачей является проверка отсутствия связи  $H^+ \rightarrow H^-$ , которая может быть реализована на основании топологической сортировки символического образа. В параграфе 12.5 указан компьютерный алгоритм, который осуществляет топологическую

сортировку графа [44]. Согласно утверждению 2.2, топологическая сортировка задает нумерацию вершин так, что матрица переходов символического образа  $G$  имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} (P_1) & \dots & * & \dots & \dots & * \\ & \ddots & & \ddots & & \\ 0 & & (P_k) & & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & & * \\ & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 & & (P_s) \end{pmatrix},$$

где каждый диагональный блок  $P_k$  либо отвечает одному из классов эквивалентности возвратных вершин  $H_k$ , либо соответствует некоторой невозвратной вершине и состоит из одного нуля, под диагональными блоками стоят только нули. При такой нумерации вершин возможны только пути из верхних блоков (классов) в нижние блоки (классы), что дает возможность проверить отсутствия связи  $H^+ \rightarrow H^-$ .

Согласно теореме 10.8, для структурно устойчивого диффеоморфизма существует  $d_0 > 0$  такое, что описанный метод реализует проверку структурной устойчивости для любого покрытия с максимальным диаметром ячеек  $d < d_0$ . Если  $C$  — произвольное покрытие, то конечное число подразбиений задает покрытие с диаметром разбиения  $d < d_0$ . Таким образом, описанный метод осуществляет конструктивную проверку структурной устойчивости за конечное число шагов.

### Контрольные вопросы и задания

1. Приведите пример структурно неустойчивого диффеоморфизма.
2. Приведите пример структурно устойчивого диффеоморфизма.
3. Является ли диффеоморфизм  $y = x^3$  структурно устойчивым?
4. Вычислите двойственный дифференциал диффеоморфизма плоскости.
5. Пусть  $A$  — линейное отображение. При каких условиях выполняется условие трансверсальности для  $A$ ?
6. Постройте пример, для которого условие трансверсальности не выполнено.
7. Пусть отображение на единичной окружности в  $R^2$  есть поворот на угол  $\pi/4$ . Такое отображение является структурно устойчивым?
8. Пусть  $A: R^2 \rightarrow R^2$  — линейное гиперболическое отображение,  $e$  — одномерное подпространство. Динамическая система определяется разностным уравнением  $e_{n+1} = Ae_n$ . Будет ли эта система структурно устойчивой?

# Глава 11

## ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

### 11.1. КОМПЬЮТЕРНО-ОРИЕНТИРОВАННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

Символический образ является инструментом компьютерного исследования глобальной структуры динамической системы. Теоретические результаты предыдущих глав дают основу численных методов исследования динамики системы в целом.

В главах 2 и 3 показано, что множество путей символического образа аппроксимируют траектории динамической системы в тихоновской топологии. На этой основе строятся компьютерно-ориентированные алгоритмы исследования топологических свойств структуры множества траекторий. Метод локализации цепного-рекуррентного множества описывается в параграфе 3.5. Здесь дается пример вычисления достаточно малой окрестности такого множества траекторий отображения Икеды.

В главе 4 описаны результаты, позволяющие локализовать аттрактор и оценить его область притяжения. Показано, что фильтрацию динамической системы можно построить на основе топологической сортировки символического образа.

В главах 5 и 6 показано, что пространство потоков символического образа аппроксимирует множество инвариантных мер динамической системы в слабой топологии. Это позволяет численно строить инвариантные меры и определять их свойства. В параграфе 5.7, описывается численный метод балансировки для построения потока, обладающего некоторым экстремальным свойством.

В главе 7 приведены формулы для оценки метрической энтропии, которая вычисляется через поток символического образа. В частности, указывается метод аппроксимации меры максимальной метрической энтропии.

Глава 8 посвящена вычислению спектра усреднения функции над псевдотраекториями динамической системы. Показано, что этот спектр аппроксимируется спектром усреднения функции над периодическими путями символического образа. Вычисление спектра символического образа сводится к задаче вычисления минимального среднего значения на циклах символического образа. Эта задача решается в рамках теории графов.

В главе 9 описанная выше техника применяется к вычислению спектра Морса, который содержит показатели Ляпунова всех псевдотраекторий. В частности, показано, что динамическая система является гиперболической, если спектр Морса не содержит нуля. Это позволяет численно проверить гиперболичность динамической системы.

В главе 10 полученные результаты применяются к решению задачи о структурной устойчивости динамической системы. Показано, что структурная устойчивость системы может быть проверена численно за конечное число шагов с использованием символического образа динамической системы.

Схема исследования динамической системы с помощью символического образа состоит в следующем. Выбирается конечное покрытие  $C$  области исследования  $M$  и строится символический образ  $G$ . Формулируется поставленная задача в терминах символического образа, что приводит к некоторой задаче на ориентированном графе  $G$ . Используя методы и алгоритмы теории графов, решается задача на графе  $G$ . Далее преобразуем полученную информацию для символического образа  $G$  в информацию о динамической системе. Как правило, полученное решение исходной задачи носит приближенный характер. При этом точность такого решения определяется максимальным диаметром покрытия  $C$ , для которого строился символический образ. Для получения необходимой точности нужно применять последовательные подразбиения покрытия  $C$ , строить новые покрытия  $C_n$ , строить символические образы  $G_n$ , производить аналогичные исследования и получить более точную информацию о динамической системе. В связи с этим необходимо установить критерии прекращения дальнейших подразбиений. Любое исследование символического образа встроено в описанную схему вычислений. Мы обсудим те аспекты, которые необходимо учитывать для эффективной реализации. Предлагаемая здесь базовая структура вычислений была реализована и протестирована в рамках проекта AnT [49].

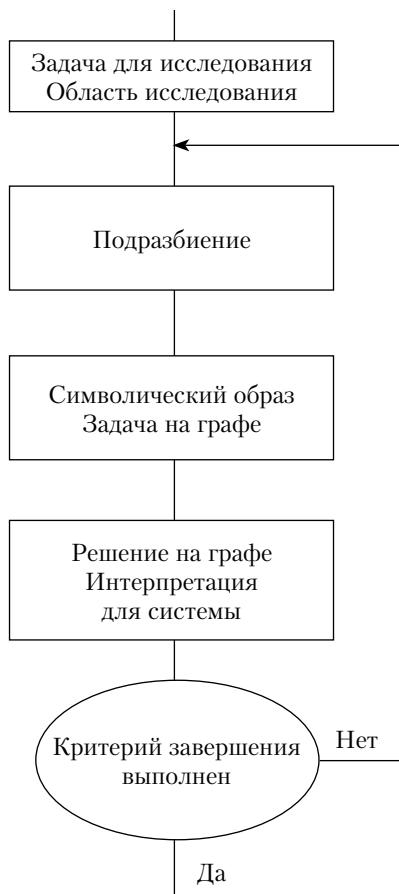
Описанный метод символического образа можно рассматривать как итерационный процесс, который будет повторяться при увеличении уровней дискретизации фазового пространства. На каждом уровне расчет включает три основных шага.

1. Разделение выбранных ячеек фазового пространства на более мелкие ячейки.

2. Построение символического образа для текущей дискретизации фазового пространства. Преобразование задачи для динамической системы в задачу для ориентированного графа.

3. Применение исследовательского метода теории графов. Решение задачи на графе и его интерпретация для динамической системы. В результате выделяются части фазового пространства для дальнейшего более точного исследования.

Таким образом, схема работает циклу, представленному на рис. 11.1.



**Рис. 11.1.** Схема описываемого исследования

Согласно описанной схеме эти шаги будут повторяться до тех пор, пока не будет выполнен критерий завершения. Окончание зависит от желаемой точности, а также от доступной вычислительной мощности. Критерии завершения могут определяться задачей. Например, если проблема заключается в проверке гиперболичности,

то процесс останавливается, когда ноль не принадлежит расширенному спектру символического образа. Ясно, что вычислительный процесс может быть прекращен по усмотрению пользователя.

В описанной выше теории символического образа нет ограничений на геометрию исследуемой области  $M$  и на геометрию ячеек  $M(i)$ , за исключением того, что они должны быть компактными. В общем случае областью  $M$  может быть любая ограниченная часть фазового пространства. Ниже мы будем численно изучать динамическую систему в прямоугольной области  $M$ , которая разбивается на прямоугольные ячейки  $M(i)$ . Численное построение символического образа является достаточно изученной задачей. Способы построения символического образа рассмотрены в работах [35, 49, 58]. Здесь имеется ряд проблем, которые нужно учитывать при построении образа ячейки. Ячейки  $M(i)$ , как правило, покрытия выбираются прямоугольными параллелепипедами. Для построения ребра  $i \rightarrow j$  нужно проверить, что  $f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset$ . Численно образ ячейки  $f(M(i))$  и пересечение  $f(M(i)) \cap M(j)$  могут быть найдены лишь приближенно. Это приводит к тому, что мы можем построить лишние стрелки, когда образ  $f(M(i))$  построен с увеличением, или можно потерять стрелки, когда образ построен с уменьшением. Численные эксперименты показывают, что хорошие результаты дает следующий простой способ построения стрелок. Ячейка  $M(i)$  равномерно заполняется некоторым количеством так называемых скан-точек  $\{x_k, k = 1, 2, \dots, N\}$ , затем строятся образы  $f(x_k)$  этих точек. Число точек  $N$  выбирается пользователем и может быть параметром компьютерной программы. Обычно для гладких систем  $N = 100$  является вполне достаточным. Далее определяются ячейки, в которые попали точки  $f(x_k)$ . Полагают, что стрелка  $i \rightarrow j$  существует, если существует скан-точка  $x_k \in M(i)$  такая, что  $f(x_k) \in M(j)$ . Если для каждой дуги  $i \rightarrow j$  мы фиксируем скан-точку  $x \in M(i)$  такую, что  $f(x) \in M(j)$ , то мы построим проекцию дуг символического образа  $G$  на многообразие  $M$ . В этом случае любой допустимый путь  $\omega = \{i_n, n \in \mathbb{Z}\}$  на  $G$  отображается на псевдотраекторию  $\eta(\omega) = \{x_n \in M(i_n)\}$  такую, что  $x_n$  — скан-точка, соответствующая дуге  $i_n \rightarrow i_{n+1}$ ,  $f(x_n) \in M(i_{n+1})$ . При таком построении, точки  $x_{n+1}$  и  $f(x_n)$  лежат в ячейке  $M(i_{n+1})$  и, следовательно, расстояние  $\rho(f(x_n), x_{n+1}) \leq d$ , где  $d$  — диаметр покрытия  $S$  символического образа, т.е.  $\eta(\omega)$  является  $\varepsilon$ -траекторией для любого  $\varepsilon > d$ .

Следует отметить, что задача, которую решает исследователь, может определять метод построения символического образа. Например, если мы локализуем цепно-рекуррентное множество  $CR$ , то лишние стрелки могут добавить возвратные вершины и увели-

читать окрестность  $U \supset CR$ , но исчезновение настоящих стрелок может привести к потере возвратных вершин и потере части цепно-рекуррентного множества. При этом в первом случае окрестность искомого множества можно уменьшить за счет последующих подразбиений, но потерю части цепно-рекуррентного множества восстановить уже невозможно. Поэтому при локализации цепно-рекуррентного множества лучше строить образ ячейки с запасом, чтобы избежать потери стрелок. Заметим, что многие изложенные ранее доказательства являются конструктивными и могут быть реализованы в виде алгоритмов.

## 11.2. ЦЕПНО-РЕКУРРЕНТНОЕ МНОЖЕСТВО

В параграфе 3.5 обоснован процесс локализации цепно-рекуррентного множества и компонент дискретной динамической системы. На основании полученных результатов построим следующий алгоритм.

1. Выбираем исходное покрытие  $C$  компакта  $M$ . Находим символический образ  $G$  отображения  $f$ . Заметим, что ячейки исходного покрытия могут иметь произвольный диаметр  $d_0$ .

2. Выделяем на графе  $G$  возвратные вершины  $\{i\}$ . Используя их, находим замкнутую окрестность  $P = \{\bigcup M(i) : i — \text{возвратная}\}$  цепно-рекуррентного множества  $CR$ .

3. Ячейки  $\{M(j)\}$ , соответствующие невозвратным вершинам  $\{j\}$ , удаляются из рассмотрения.

4. Ячейки  $M(i)$ , соответствующие возвратным вершинам  $\{i\}$ , разбиваются на мелкие ячейки с диаметром в несколько раз меньше предыдущего. Таким образом, определяем новое покрытие.

5. Строим символический образ  $G$  для нового покрытия.

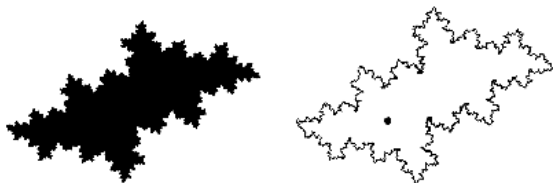
6. Переходим к п. 2.

Повторяя процесс последовательного измельчения покрытия, согласно теореме 3.9, мы получаем последовательность вложенных окрестностей  $P_0, P_1, P_2, \dots$  цепно-рекуррентного множества  $CR$  и последовательность наибольших диаметров  $d_0, d_1, d_2, \dots$  ячеек, соответствующих возвратным вершинам символического образа для покрытия  $C_k$ . Согласно построению,  $d_{k+1} \leq \lambda d_k$ ,  $0 < \lambda < 1$  и, следовательно, диаметр покрытия сходится к нулю. Таким образом, описанный алгоритм дает монотонно убывающую последовательность окрестностей, сходящуюся к цепно-рекуррентному множеству. Предложенный метод локализации одинаково хорошо работает как с устойчивыми, так и с неустойчивыми цепно-рекуррен-



тными траекториями, так как в его основу положен принцип возвратности псевдотраектории.

**Реализация алгоритма.** Пусть  $G$  — ориентированный граф,  $M$  — множество вершин,  $E$  — множество ребер. Было показано, что задача о локализации цепно-рекуррентного множества заданной динамической системы сводится к исследованию соответствующего символического образа и выделению на нем классов эквивалентных возвратных вершин. Как отмечалось, классы эквивалентных возвратных вершин в теории графов называются компонентами сильной связности. Имеются хорошо обоснованные алгоритмы построения компонентов сильной связности (см. параграф 12.4 или работы [37, 113]). Они обладают линейной оценкой сложности, число операций оценивается как  $O(n + m)$ , где  $n$  — количество узлов,  $m$  — количество ребер. Более того, эти алгоритмы реализованы в кодах, и их можно найти в интернете. В книге [89] приведен пример локализации цепно-рекуррентного множества дифференциального уравнения Ван-дер-Поля, которое служит математической моделью (при ряде упрощающих предположений) лампового генератора на триоде в случае кубической характеристики лампы [115]. Здесь мы рассмотрим другой пример локализации цепно-рекуррентного множества отображения Жюлиа (рис. 11.2).



**Рис. 11.2.** Множество Жюлиа и его цепно-рекуррентные компоненты,  $a = b = -0,5$

### Пример 11.1

В 1918 г. 25-летний француз Гастон Жюлиа залечивал свои раны в госпитале. Изнывая от безделья, он заинтересовался поведением точек последовательности  $z_{n+1} = z_n^2 + C$  на комплексной плоскости. Множество Жюлиа — это набор точек комплексной области, которые не уходят в бесконечность при описанных итерациях. Оказалось, что такие множества существенно зависят от постоянного числа  $C$  и имеют непростую фрактальную структуру. Сейчас множества Жюлиа хорошо изучены, получены красивые картинки, которые используются в дизайне. Наша цель состоит в локализации цепно-рекуррентного множества отображения Жюлиа, которые

входят в описанное множество, но могут не совпадать с ним. Отображение Жюлиа порождает систему разностных уравнений на плоскости вида

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + a; \\ y_{n+1} &= 2xy + b.\end{aligned}$$

Заданное отображение не является гомеоморфизмом и является примером применения символического образа для полудинамических систем. Здесь мы приведем численные результаты для  $a = b = -0,5$ , область исследования  $M = [-2, 2] \times [-2, 2]$ . Множество Жюлиа представлено в левой части рис. 11.2, которое при данных параметрах представляет собой двумерную замкнутую область  $\Omega$  с нетривиальной фрактальной границей. Для локализации цепно-рекуррентного множества применялся описанный выше алгоритм. Выбираем исходное покрытие  $C$  компакта  $M$  квадратами со стороной  $h = 0,25$ . Было построено пять подразбиений и получена окрестность цепно-рекуррентного множества, которое изображено в правой части рис. 11.2. Это инвариантное множество имеет две компоненты:  $\Omega_1$  совпадает с границей множества Жюлиа, а  $\Omega_2$  расположена близко к началу координат. Используя обычный итерационный процесс, можно показать, что  $\Omega_1$  является репеллером, а  $\Omega_2$  — аттрактором. Таким образом, любая траектория вне  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  начинается на границе  $\Omega_1$  и заканчивается в аттракторе  $\Omega_2$ .

### 11.3. АТТРАКТОРЫ

Здесь будет показано, что результаты, приведенные в параграфе 4.1, могут быть реализованы в виде компьютерно-ориентированных алгоритмов. Рассмотрим дискретную динамическую систему  $x_{n+1} = f(x_n)$  на компакте  $M$ . Пусть  $C = \{M(i)\}$  — замкнутое покрытие множества  $M$ ,  $G$  — символический образ для  $C$ . Согласно утверждению 2.2, вершины символического образа  $G$  могут быть перенумерованы таким образом, что матрица переходов имеет канонический вид

$$P = \begin{pmatrix} \Pi_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \Pi_k & \cdots & \cdots \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \Pi_s \end{pmatrix},$$

где каждый диагональный блок  $\Pi_k$  либо отвечает одному из классов эквивалентности возвратных вершин  $H_k$ , либо соответствует некоторой невозвратной вершине и состоит из одного нуля. Мы можем найти аттракторы символического образа следующим способом. Представим матрицу переходов в описанном выше виде, где каждый класс эквивалентных возвратных вершин  $H_k$  дает диагональный блок  $\Pi_k$ . При такой нумерации каждый класс  $\Pi_k$  порождает множество вершин

$$L = \{i \geq \min(j \in H_k)\}.$$

Из структуры матрицы допустимых переходов следует, что, вообще говоря, в  $L$  можно войти, но из  $L$  нельзя выйти. Это означает, что  $L$  является аттрактором на символическом образе и замкнутое множество

$$A = \{\bigcup M(i), i \in L\}$$

является поглощающей окрестностью некоторого аттрактора исходной динамической системы. Из утверждений 2.2 и 4.2 следует, что при описанной нумерации вершин матрица допустимых переходов представляется в виде

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi^* & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 0 & \dots & \dots \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \Pi & \end{pmatrix},$$

где блок  $\Pi$  соответствует аттрактору  $L = \{i\}$ . Нули стоят по диагонали между блоками  $\Pi$  и  $\Pi^*$ . Блок  $\Pi^*$  соответствует репеллеру  $L^*$ , двойственному к  $L$ . Диагональные нули между  $\Pi$  и  $\Pi^*$  соответствуют области притяжения аттрактора

$$D(L) = \{i : \max(j \in L^*) < i < \min(k \in L)\}$$

на символическом образе. Траектории всех точек множества

$$W = \{\bigcup M(i), i \in D(L)\}$$

заканчиваются в поглощающем множестве  $A$ . Таким образом,  $A$  есть оценка (сверху) аттрактора и  $W$  есть оценка (снизу) области

притяжения. Теоремы 4.1 и 4.2 являются основой следующего алгоритма.

*Алгоритм построения аттрактора, его области притяжения и репеллера динамической системы*

1. Пусть  $C$  есть покрытие компакта  $M$  ячейками с максимальным диаметром  $d$ . Строим символический образ  $G$ , соответствующий данному покрытию.

2. Выделяем на графе  $G$  аттрактор  $L$ , его область притяжения  $D(L)$  и репеллер  $L^*$ .

3. Определяем множества

$$A = \{\bigcup M(i), i \in L\}, \quad W = \{\bigcup M(j), j \in D(L)\},$$

$$R = \{\bigcup M(k), k \in L^*\}.$$

Пусть  $d_1 = \max\{diam M(i), diam M(k): i \in L, k \in L^*\}$ .

4. Ячейки, соответствующие аттрактору  $L$  и репеллеру  $L^*$ , подразбиваются, остальные не меняются. Строится новое покрытие.

5. Строим символический образ  $NG$  для нового покрытия,  $NL \cup NL^*$  — вершины, соответствующие новым ячейкам.

6. Строим новые аттрактор  $L$  и репеллер  $L^*$  как максимальные инвариантные множества в  $NL$  и  $NL^*$  соответственно. Положим  $D = Ver(NG) \setminus L^*$ .

7. Переходим к п. 3.

Повторяя этот процесс, мы получаем последовательность множеств

$$A_1, A_2, \dots; \quad W_1, W_2, \dots; \quad R_1, R_2, \dots$$

и последовательность чисел  $d_1, d_2, \dots$

**Теорема 11.1** [89]

1. Описанный алгоритм определяет последовательности вложенных друг в друга множеств

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots,$$

$$W_1 \subset W_2 \subset \dots,$$

$$R_1 \supset R_2 \supset \dots$$

2. Если  $d_s \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A_s = \bigcap_s A_s = \Lambda \text{ — аттрактор,}$$

$\lim_{s \rightarrow \infty} W_s = \bigcup W_s = W^s(\Lambda)$  — его область притяжения,

$\lim_{s \rightarrow \infty} R_s = \bigcap R_s = \Lambda^*$  — репеллер, соответствующий  $\Lambda$ .

3. Каждый аттрактор  $\Lambda$  может быть построен с помощью такого алгоритма.

Вообще говоря, число возможных аттракторов на символическом образе растет при уменьшении максимального диаметра покрытия  $d$ . При этом структура аттракторов может быть довольно сложной, и их число может быть неограниченным при  $d \rightarrow 0$ . Структуру аттракторов описывает фильтрация. При этом символический образ всегда имеет конечное число аттракторов. Следовательно, существует фильтрация символического образа, которая описывает все аттракторы. Однако динамическая система может иметь бесконечное число аттракторов, и тогда тонкая последовательность фильтратий описывает структуру аттракторов динамической системы. Теорема 11.1 обосновывает следующий алгоритм построения тонкой последовательности фильтратий.

1. Пусть  $C$  — произвольное конечное покрытие компакта  $M$  замкнутыми ячейками. Построим символический образ  $G$  для данного покрытия. Выбираем нумерацию вершин в соответствии с утверждением 2.2.

2. Выделяем классы  $H_p$  эквивалентных возвратных вершин. Пусть

$$n(H_p) = \min\{i : i \in H_p\}$$

и

$$d = \max\{\text{diam } M(i) : i \text{ — возвратные}\}.$$

3. Полагая  $B_k = \{i : i \geq n(H_p), p = s + 1 - k\}$ , получаем тонкую фильтрацию  $\Phi = \{B_0, B_1, \dots, B_s\}$  на символическом образе  $G$ .

4. По фильтрации  $\Phi$  строим фильтрацию для динамической системы

$$F = \{F_0, F_1, \dots, F_s\},$$

где  $F_k = \{\bigcup M(i) : i \in B_k\}$ .

5. Ячейки  $\{M(i) : i \text{ — возвратные}\}$ , соответствующие возвратным вершинам, подвергаются подразбиению так, что диаметр нового по-

крытия  $d^*$  меньше предыдущего  $d^* < \lambda d$ ,  $\lambda < 1$ . Таким образом, определяется новое покрытие.

6. Строим символический образ  $G$  для нового покрытия. Выбираем нумерацию вершин в соответствии с утверждением 2.2.

7. Возвращаемся к п 2.

Описанный алгоритм дает последовательность символических образов  $G_m$ , фильтратий  $\Phi_m$  на каждом  $G_m$ , последовательность фильтратий  $F_m$  динамической системы и последовательность диаметров  $d_m$  покрытий  $C_m$ . Согласно теореме 4.3, мы получаем последовательность фильтратий таких, что каждая следующая фильтрация уточняет предыдущую.

Рассмотрим пример численного построения аттрактора и его области притяжения, а также построение фильтрации. Описанный выше алгоритм был реализован Д. Фундингером в 2004 г.

### **Пример 11.2. Уравнение Дуффинга**

Дифференциальное уравнение для осциллятора Дуффинга имеет вид

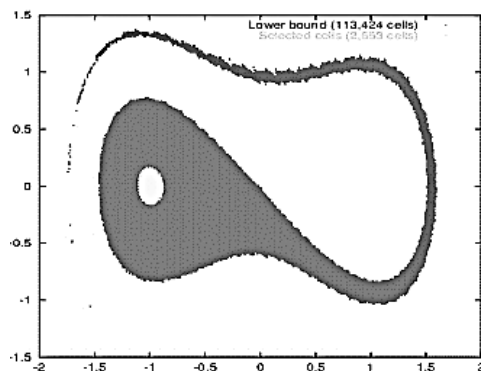
$$m\ddot{x} = ax + bx^3 + c\dot{x} + d \cos \omega t,$$

где  $m$  и  $x$  — масса и координаты частицы, находящейся под действием внешней периодической силы  $F = d \cos \omega t$ . Уравнение впервые было изучено немецким инженером Г. Дуффингом в 1918 г. Рассмотрим уравнение при  $a=1$ ,  $b=-1$ ,  $c=-0,15$  и без внешней силы, т.е.  $d=0$ . Это уравнение исследуется в [12]. Введем обозначение  $\dot{x} = y$  и перейдем к системе уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 + cy.\end{aligned}$$

Для построения гомеоморфизма  $f: R^2 \rightarrow R^2$ , порожденного системой дифференциальных уравнений, строилось (численно) отображение  $f(x, y)$ , которое есть сдвиг на единицу времени вдоль траекторий. Изучение системы проведено в области  $M = [-2, 2] \times [-1,5, 1,5]$ . Система имеет три состояния равновесия  $(0, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ . Первое состояние равновесия является гиперболическим, остальные являются фокусами, т.е. состояния равновесия  $(-1, 0)$  и  $(1, 0)$  являются (минимальными) аттракторами. Максимальный аттрактор есть замыкание неустойчивого многообразия  $W^u$  точки  $(0, 0)$ . Это многообразие заканчивается в точках  $A(-1, 0)$  и  $B(1, 0)$ . Других аттракторов система не имеет. Для аттрактора  $A$  получены оценки его фундаментальной окрестности

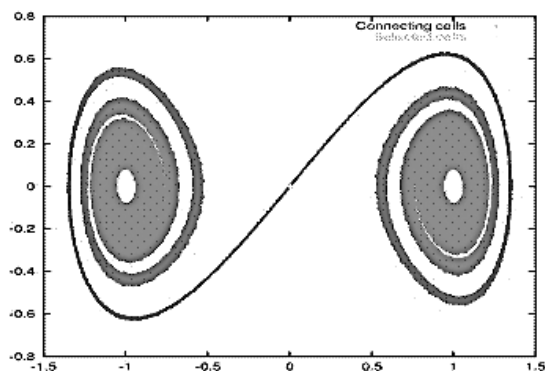
и области притяжения. Для получения хорошей локализации аттрактора (для оценки фундаментальной окрестности) потребовалось 2653 ячеек, а для оценки области притяжения — 113424 ячейки. Выделенная на рис. 11.3 часть области притяжения меньше, чем на самом деле, поскольку вычисления ограничены областью исследования  $[-2, 2] \times [-1,5, 1,5]$ .



**Рис. 11.3.** Оценка аттрактора  $A$  и его области притяжения для уравнения Дуффинга

Для исследуемого уравнения также была получена оценка аттрактора, максимального в данной области. Результат показан на рис. 11.4. Здесь мы видим фильтрацию аттракторов

$$\emptyset \subset A \subset (A \cup B) \subset \overline{W^u(0,0)} \subset R^2.$$



**Рис. 11.4.** Оценка максимального аттрактора и фильтрации для уравнения Дуффинга

Другие примеры применения символического образа для численного построения аттракторов и их областей притяжения можно найти в работах [49, 58].

#### 11.4. ЛЕНТА МЁБИУСА КАК АТТРАКТОР

Рассмотрим дискретную систему, которая описывает динамику пищевой цепи, состоящей из трех трофических уровней. Например, рассмотрим динамику пищевой цепи состоящей из растительности, травоядных и плотоядных животных в замкнутом ареале. Эта система предложена Т. Линстремом [76] как обобщенный дискретный вариант непрерывных систем описанных в работах [61, 100, 101].

Переменные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  являются безразмерными, можно считать, что  $x$  и  $z$  линейно зависят от объемов растительной пищи и численности плотоядных животных соответственно. Зависимость  $y$  от объема травоядных животных является нелинейной с положительной производной. Детальное описание модели можно найти в работе [76]. Динамическая система задается в виде

$$x_{n+1} = \frac{M_0 x_n e^{-y_n}}{1 + x_n \max(e^{-y_n}, g(z_n)g(y_n))};$$

$$y_{n+1} = M_1 x_n y_n e^{-z_n} g(y_n) g(M_2 y_n z_n);$$

$$z_{n+1} = M_2 y_n z_n,$$

где

$$g(s) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-s}}{s}, & \text{если } s \neq 0, \\ 1, & \text{если } s = 0. \end{cases}$$

По построению динамика рассматривается при положительных значениях  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Данная система исследовалась в работах [49, 59, 89], где рассмотрены бифуркации топологической структуры и переход к хаосу при изменении параметров. Система имеет четыре состояния равновесия:  $E_0$  — начало координат,  $E_1$  лежит на оси  $x$ ,  $E_2$  лежит в положительной части плоскости  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $E_3$  лежит в положительной части пространства  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$  (детали см. в [76]).



Здесь мы рассмотрим применение описанных ранее методов и покажем появление аттрактора в виде ленты Мёбиуса. Фиксируем  $M_1 = 1$ ,  $M_2 = 4$  и будем менять  $M_0$  от 2 до 3,4. Если  $M_0$  меняется от 2 до 2,9, то состояние равновесия  $E_3$  устойчиво и является единственным аттрактором в  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ , при этом координаты  $E_3$  меняются непрерывно. Детали этого исследования см. в [89], здесь нас интересует случай  $M_0 = 3,3701$ .

При  $M_0 \approx 2,93$  состояние равновесия  $E_3$  теряет устойчивость и происходит бифуркация Неймарка — Саккера: рождается устойчивая инвариантная кривая  $C$ , которая является границей двумерного неустойчивого многообразия  $W^u(E_3)$  состояния равновесия  $E_3$ . Применение символического образа легко локализует  $E_3$  и кривую  $C$ , которая заполнена цепно-рекуррентными траекториями.

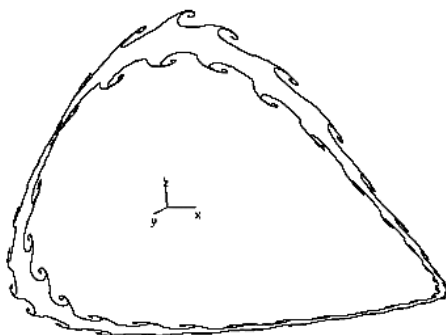
Мы определили, что расширенный спектр усреднения логарифма определителя дифференциала  $\ln|\det(Df)|$  лежит в отрицательном отрезке  $[-0,58055, -0,186926]$ , когда  $3 \leq M_0 \leq 4$ . Это означает, что объем (под действием системы) экспоненциально стремится к нулю, следовательно, все аттракторы имеют нулевой объем.

При  $M_0 \approx 3,366$  инвариантная кривая  $C$  теряет устойчивость и вблизи нее появляется устойчивая инвариантная кривая  $C^*$  длиной в 2 раза больше, т.е. происходит бифуркация, подобная удвоению периода, — «бифуркация Фейгенбауна». При этом кривая  $C$  имеет двумерные устойчивое и неустойчивое многообразия. Граница неустойчивого многообразия  $W^u(C)$  — инвариантная кривая  $C^*$ , которая является аттрактором. Покажем, что при  $M_0 = 3,3701$  неустойчивое многообразие  $W^u(C)$  — это лента Мёбиуса, которая является аттрактором (рис. 11.5 и 11.6). На границе многообразия  $W^u(C)$  лежит устойчивая 55-периодическая траектория  $Tr(P)$  точки  $P(1,519275, 0,140199, 0,847081)$ , которая локализуется с использованием символического образа (см. рис. 11.6). Точки  $R(1,631969, 0,105806, 0,778837)$  и  $Q(1,456810, 0,157710, 0,718353)$  также лежат на траектории  $Tr(P)$  (см. рис. 11.6). Гиперболическая 55-периодическая траектория  $Tr(H)$  точки  $H(1,582335, 0,118405, 0,815238)$  лежит на границе  $C^* = \partial W^u(C)$ . Вычисления собственных чисел дифференциала  $Df^{55}$  в точке  $P$  показывают, что  $P$  является фокусом на  $W^u(C)$ .

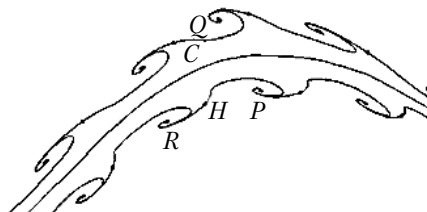
Теперь будем следить за направлением вращения этого фокуса вдоль траектории  $Tr(P)$ . Если двигаться по траектории  $Tr(P)$  вдоль ленты от  $P$  к  $R$  и т.д., то, как следует из рис. 11.6, направление вращения сохраняется. Однако если сравнить направления вращения в точках  $Q$  и  $P$  (см. рис. 11.6), лежащих по разные стороны

от средней линии  $C$ , то эти вращения оказываются противоположными. Это возможно только тогда, когда неустойчивое многообразие  $W^u(C)$  не является ориентированным, т.е.  $W^u(C)$  является лентой Мёбиуса. Граница ленты  $W^u(C)$  образуется замыканием неустойчивого многообразия  $W^u(Tr(H))$  гиперболической траектории  $Tr(H)$  (см. рис. 11.5 и 11.6). Таким образом, лента Мёбиуса  $W^u(C)$  является аттрактором, который содержит аттрактор  $\overline{W^u(Tr(H))}$ , включающий устойчивую орбиту  $Tr(P)$ . В результате мы получили фильтрацию аттракторов

$$\emptyset \subset Tr(P) \subset \overline{W^u(Tr(H))} \subset W^u(C) \subset \{x > 0, y > 0, z > 0\}.$$



**Рис. 11.5.** Лента Мёбиуса как аттрактор,  $M_0 = 3,3701$



**Рис. 11.6.** Деталь ленты Мёбиуса:

$P, Q, R$  — точки 55-периодической устойчивой траектории;  $H$  — точка 55-периодической гиперболической траектории;  $C$  — неустойчивая инвариантная кривая, центральная ось ленты Мёбиуса

## 11.5. ТЕСТ НА ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ

Согласно теореме 9.7, диффеоморфизм  $f$  является гиперболическим на цепно-рекуррентном множестве, если расширенный спектр

символического образа дифференциала не содержит нуля. Это дает нам тест на гиперболичность.

Рассмотрим модифицированное отображение Икеды:

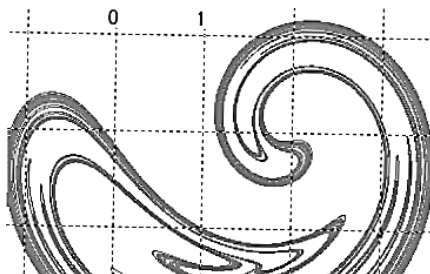
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d + a(x \cos \tau(x, y) - y \sin \tau(x, y)) \\ b(x \cos \tau(x, y) + y \sin \tau(x, y)) \end{pmatrix}; \quad (11.2)$$

$$\tau(x, y) = 0,4 - \frac{6}{1 + x^2 + y^2}, \quad (11.3)$$

где  $d > 0$ ,  $-1 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ . Отображение обладает свойством сжатия площадей. При  $d=2$ ,  $a=-0,9$ ,  $b=0,9$  это отображение меняет ориентацию и имеет глобальный аттрактор  $A$  в области  $M = [-10, 10] \times [-10, 10]$  (часть аттрактора на рис. 11.7). Существует единственная гиперболическая неподвижная точка  $H(1,3815, -2,4746)$ . Кроме того, отображение имеет единственную 2-периодическую траекторию  $P_2 = \{(0,2338, -0,7031), (1,9995, 0,6681)\}$ , устойчивое и неустойчивое многообразия которой пересекаются и образуют гомоклинический цикл. Если спектр Морса не содержит нуля, то цепно-рекуррентное множество системы является гиперболичным (см. теорему 9.5) и, следовательно,  $\Omega$ -устойчивым. Вычисления показывают, что аттрактор  $A$  не является гиперболическим. Однако нам нужно найти нетривиальное инвариантное множество, которое окажется гиперболическим. Для этого рассмотрим часть аттрактора  $A$ , которая является цепно-рекуррентным множеством  $\Omega_0$ , максимальным в области  $M = [-1,1, 3,5] \times [-1,5, 1,8]$  (см. рис. 11.7). Применение описанной ранее техники локализации цепно-рекуррентного множества дает следующие результаты. При начальном разбиении области  $M$  стартовые размеры ячейки были  $0,46 \times 0,33$ . После нескольких подразбиений (при размерах ячейки  $0,0071 \times 0,0051$ ) окрестность множества  $\Omega_0$  распадается на две части, содержащие компоненты  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Окрестности множеств  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответствуют двум компонентам сильной связности символического образа.

Инвариантное множество  $\Omega_1$  оказалось 6-периодической траекторией. Для лучшей локализации  $\Omega_1$  проведено несколько подразбиений до момента, когда размеры ячейки составили  $0,00045 \times 0,00032$ . Построение оснащенного символического образа проводилось до момента, пока размер ячейки в проективном пространстве (угол) не стал равен  $0,0003$ . При таких данных расстояние между спектром Морса исходной системы и спектром символического образа

не превосходит 0,01. В результате вычислений на проективном рас-  
слоении получены две компоненты, при этом спектр Морса над  
множеством  $\Omega_1$  лежит в объединении интервалов  $[0,522, 0,523]$   
и  $[-0,734, -0,733]$ . Это означает, что расширенный спектр состоит  
из отрезков  $[0,512, 0,533]$  и  $[-0,744, -0,723]$ . Эти отрезки содержат  
спектр Морса над инвариантным множеством  $\Omega_1$ , отсюда следует,  
что  $\Omega_1$  является 6-периодической гиперболической траекторией.  
Эти вычисления были проверены прямым вычислением показате-  
лей Ляпунова 6-периодической траектории  $\Omega_1$ .



**Рис. 11.7.** Часть аттрактора модифицированного отображения Икеды

Инвариантное множество  $\Omega_2$  оказалось нетривиальным канто-  
ровым множеством. Подразбиения множества  $M$  проводились  
до размера ячейки  $0,00089 \times 0,00058$ . Построение оснащенного сим-  
волического образа проводилось до момента, пока размер ячейки  
в проективном пространстве по углу не стал равен  $0,00038$ . Анало-  
гично спектр Морса исходной системы над  $\Omega_2$  отличается от спектра  
символического образа на  $0,01$ . В результате получены два интер-  
вала  $[0,632, 0,793]$  и  $[-1,004, -0,843]$ , которые являются расширен-  
ными интервалами оснащенного символического образа. Спектр  
Морса множества  $\Omega_2$  лежит в построенных интервалах. Эти интер-  
валы не содержат нуля, следовательно, множество  $\Omega_2$  является ги-  
перболическим и  $\Omega$ -устойчивым, т.е. оно будет сохраняться при  
 $C^1$ -возмущениях системы. Описанные численные расчеты проводи-  
лись Е. Петренко [35] в соответствии с работой [92].

## 11.6. ПОСТРОЕНИЕ ГОМОКЛИНИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Пусть  $p$  — неподвижная точка диффеоморфизма  $f: R^n \rightarrow R^n$ , т.е.  
 $f(p) = p$ . Для изучения поведения траекторий вблизи  $p$  перейдем  
к линейному отображению  $x \rightarrow Ax$ , где  $A = Df(p) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right) -$

матрица Якоби отображения  $f$ , вычисленная в точке  $p$ . Если  $A$  не имеет собственных чисел, равных по модулю единице, то неподвижная точка  $p$  является гиперболической. В этом случае ее собственные числа  $\{\lambda_i, i=1, \dots, n\}$  распадаются на две части: устойчивую  $\{|\lambda_i| < 1, i=1, \dots, k\}$  и неустойчивую  $\{|\lambda_j| > 1, j=k+1, \dots, n\}$ . Возможны случаи  $k=n$  (притягивающая неподвижная точка) или  $k=0$  (отталкивающая неподвижная точка). Если  $0 < k < n$ , то точка называется седловой. Собственное подпространство  $E^s$ , соответствующее устойчивой части, именуется устойчивым подпространством, а собственное подпространство  $E^u$ , соответствующее неустойчивой части, называется неустойчивым подпространством. Согласно построению,

$$E^s + E^u = R^n, \quad E^s \cap E^u = 0.$$

Следующая теорема, известная как теорема Перрона, описывает структуру локальных инвариантных многообразий в окрестности гиперболической точки.

**Теорема 11.2** [38]. Пусть  $p$  — неподвижная гиперболическая точка диффеоморфизма  $f$ , тогда существуют окрестность  $U$  этой точки, локально устойчивое и локально неустойчивое многообразия, которые имеют вид

$$W_{loc}^s(p) = \{x \in U : f^k(x) \rightarrow p \text{ при } k \rightarrow +\infty\};$$

$$W_{loc}^u(p) = \{x \in U : f^k(x) \rightarrow p \text{ при } k \rightarrow -\infty\}.$$

Подпространства  $E^s$  и  $E^u$  являются касательными пространствами для многообразий  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$  в точке  $p$ .

Локальные многообразия  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$  определяются однозначно в том смысле, что построенные для разных окрестностей  $V_1, V_2$ , они совпадают на пересечении  $V_1 \cap V_2$ . Можно считать, что окрестность  $U$  является шаром достаточно малого радиуса, а локальные многообразия являются дисками размерности  $k$  и  $n-k$ .

Глобальные устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижной точки  $p$  определяются следующим образом:

$$W^s(p) = \{x \in R^n : f^k(x) \rightarrow p \text{ при } k \rightarrow +\infty\} = \bigcup f^k(W_{loc}^s(p)), \quad k \in \mathbb{Z}^-;$$

$$W^u(p) = \{x \in R^n : f^k(x) \rightarrow p \text{ при } k \rightarrow -\infty\} = \left\{ \bigcup_k f^k(W_{loc}^s(p)), k \in \mathbb{Z}^+ \right\},$$

где  $\mathbb{Z}^- = \{0, -1, -2, \dots\}$ ,  $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Иначе говоря, глобальное устойчивое многообразие является образом локального устойчивого многообразия при отрицательных итерациях отображения  $f$ , а глобальное неустойчивое многообразие является образом локального неустойчивого многообразия при положительных итерациях. Построенные многообразия являются взаимнооднозначными образами евклидовых пространств  $R^k$  и  $R^{n-k}$ .

Инвариантные многообразия  $W^s(p)$  и  $W^u(p)$  не только определяют динамику вблизи точки  $p$ , но и существенно влияют на глобальную структуру траекторий, особенно в случае пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий. Точка пересечения  $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$ ,  $q \neq p$  устойчивого и неустойчивого многообразий называется гомоклинической точкой. Поскольку  $W^s(p)$  и  $W^u(p)$  являются инвариантными многообразиями, гомоклинические точки образуют инвариантное множество, поэтому можно говорить о гомоклинических траекториях. Мы будем говорить, что многообразия  $W_1$  и  $W_2$  пересекаются в точке  $q \in W_1 \cap W_2$  трансверсально, если сумма касательных пространств  $TW_1(q) + TW_2(q)$  есть объемлющее пространство  $R^n$ . В дальнейшем будем изучать гиперболическую точку в плоском случае  $n = 2$ . Тогда устойчивое и неустойчивое многообразия являются кривыми, которые называются сепаратрисами, причем каждая сепаратриса имеет две ветви такие, что малая окрестность гиперболической точки разбивается сепаратрисами на четыре сектора.

Смейл [107, 108] показал, что вблизи трансверсальной гомоклинической траектории имеется инвариантное множество  $\Omega$ , траектории которого можно закодировать всевозможными последовательностями из двух символов, т.е. на  $\Omega$  имеет место хаотическая динамика. Таким образом, наличие трансверсальной гомоклинической точки гарантирует хаос. Нашей целью является компьютерно ориентированный метод построения гомоклинической точки с трансверсальным пересечением, если такая имеется. Данный метод был обоснован и представлен в книгах [25, 89].

Прежде всего, отметим, что неустойчивое многообразие обратного отображения  $f^{-1}$  является устойчивым многообразием прямого отображения  $f$ . Построение устойчивого многообразия аналогично построению неустойчивого многообразия. Различие состоит

в том, что для построения неустойчивого многообразия мы используем прямое отображение  $f$ , а для построения устойчивого многообразия — обратное отображение  $f^{-1}$ . Поэтому мы ограничимся построением неустойчивого многообразия.

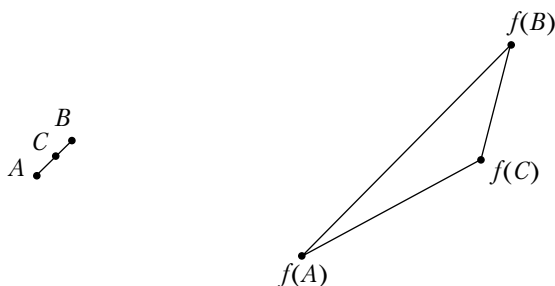
Рассмотрим гиперболическую неподвижную точку диффеоморфизма  $f: R^2 \rightarrow R^2$ . Пусть  $O$  — неподвижная точка. Найдем матрицу Якоби  $A = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(O)$ , ее собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2$  и собственные век-

торы  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. Если  $O$  — гиперболическая точка, то  $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ . Устойчивое и неустойчивое подпространства  $E^s(O)$  и  $E^u(O)$  натянуты на  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. Рассмотрим достаточно малый отрезок  $L$ , проходящий через  $O$  в направлении  $E^u(O)$ . Неустойчивая сепаратриса  $W^u(O)$  есть гладкий образ прямой  $R$ , причем точка  $O$  есть образ  $0$ . При этом, образ диска конечного радиуса есть компактная часть неустойчивого многообразия  $W^u(O)$ .

**Теорема 11.3** [89]. Пусть  $O$  — неподвижная гиперболическая точка диффеоморфизма  $f$ ,  $L$  — достаточно малый отрезок, описанный выше. Тогда итерации  $f^m(L)$  сходятся к компактной части неустойчивого многообразия  $W^u(O)$  в  $C^1$ -топологии при  $m \rightarrow \infty$ . При этом итерации  $f^m(L)$  сходятся к глобальному неустойчивому многообразию  $W^u(O)$  поточечно.

Рассмотрим алгоритм приближенного построения неустойчивой сепаратрисы седловой точки с помощью итераций отрезка касательной. При компьютерной обработке естественным является представление кривой в виде ломаной с вершинами на кривой. При этом итерация кривой рассматривается как итерация вершин ломаной. Длина звена ломаной растет при итерациях и, следовательно, такая ломаная не может хорошо аппроксимировать сепаратрису. Поэтому мы будем добавлять новые вершины ломаной при итерациях следующим способом. Фиксируем достаточно малое число  $h > 0$  и будем строить ломаную так, чтобы длина звена не превосходила этого числа. Выбор параметра  $h$  осуществляется пользователем для достижения необходимой точности. Пусть аппроксимирующая ломаная имеет звено  $[AB]$  и расстояние  $\rho(f(A), f(B)) > h$  (рис. 11.8). В этом случае на отрезке  $[AB]$  введем точку  $C$  и будем считать, что аппроксимирующая ломаная вместо звена  $[AB]$  имеет два звена  $[AC]$  и  $[CB]$ . Если расстояния  $\rho(f(A), f(C)) < h$  и  $\rho(f(C), f(B)) < h$ , то процесс деления прекращается, иначе нужно осуществить новое деление каждого звена, длина образа которого больше  $h$ . Таким образом, строится новая аппроксимирующая ломаная с длиной звена меньше числа  $h$ . Для лучшего графического

изображения можно использовать факт, что кривая и ломаная будут неразличимы на экране (т.е. мы будем получать на экране сплошную линию), если расстояние между узлами ломаной меньше, чем пиксель. Иными словами, при соответствующем выборе масштаба изображение на экране будет создавать достаточно хорошее впечатление «непрерывности». Заметим, что для визуализации кривой (при малом  $h$ ) достаточно отображать на экране только узлы ломаной.



**Рис. 11.8.** Выбор звена ломаной

Устойчивая сепаратриса строится аналогично с использованием итераций обратного отображения  $f^{-1}$  и достаточно малого отрезка  $L^*$ , проходящего через  $O$  в направлении  $E^s(0)$ . Для построения гомотоклинической точки нужно построить два приближения  $W_m = f^m(L)$  и  $W_m^* = f^{-m}(L^*)$ , причем для хорошего приближения необходимо брать  $m$  достаточно большим и отрезки  $L$  и  $L^*$  — достаточно малыми. Следующий шаг состоит в определении пересечения  $W_m$  и  $W_m^*$ , а затем — оценке угла пересечения через угловые коэффициенты звеньев ломаных.

В качестве примера построим таким способом сепаратрисы седловых точек для системы, порожденной отображением вида

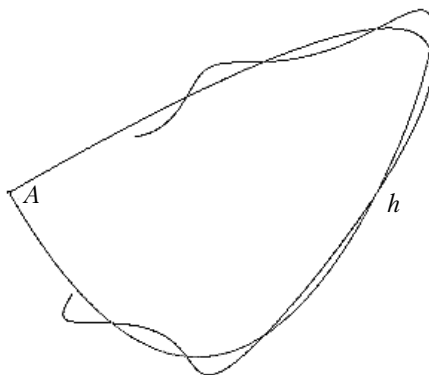
$$\begin{aligned} x_1 &= x + y + ax(1-x); \\ y_1 &= y + ax(1-x), \end{aligned} \quad (11.4)$$

где  $a = 1,35$ . Неподвижная точка  $A(0, 0)$  является гиперболической. Для построения обратного отображения к отображению (11.4) нужно эту систему решить относительно  $x$  и  $y$ , что дает

$$\begin{aligned} x &= x_1 + y_1; \\ y &= y_1 - a(x_1 + y_1)(1 - x_1 - y_1). \end{aligned} \quad (11.5)$$



Построенные устойчивое и неустойчивое многообразия  $W^s(A)$  и  $W^u(A)$  (точнее, их правые сепаратрисы) пересекаются в восьми точках (рис. 11.9). Расположение инвариантных многообразий отображения (11.4) показано на рис. 11.9.



**Рис. 11.9.** Трансверсальное пересечение сепаратрис гиперболической точки  $A$

Программа указывает приближенные значения координат и углов пересечения сепаратрис. Например, в точке пересечения  $H(0,666939952599, 0,416901386849)$  угол между сепаратрисами составляет  $0,587379298048$  радиан. Для уточнения координат и угла нужно отметить точку  $H$  (подвести стрелку на экране в окрестность точки  $H$  и мышкой отметить ее). Программа выбирает ближайшую точку пересечения и отрезает лишние куски сепаратрис. Таким образом, получают приближения сепаратрис  $L^s$  и  $L^u$ . Затем строятся образ  $f(L^u)$  и прообраз  $f^{-1}(L^s)$  и снова находятся точки и углы пересечения. Нетрудно понять, что в данном случае будут три точки пересечения, одна из которых является новым приближением к искомой гомоклинической точке.

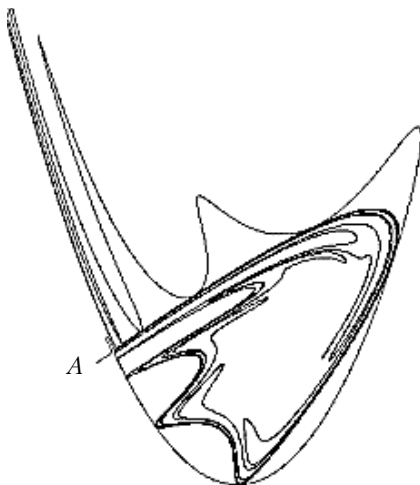
Описанный метод позволяет найти параметры, при которых происходит касание устойчивой и неустойчивой сепаратрис.

В качестве примера рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} x_1 &= bx + y + ax(1-x); \\ y_1 &= y + ax(1-x). \end{aligned} \tag{11.6}$$

Для значений параметров  $a = 1,511717565$  и  $b = 0,93$  имеет место касание устойчивой и неустойчивой сепаратрис (рис. 11.10), где параметр  $b$  фиксирован, приближенное значение параметра  $a$  полу-

чено методом половинного деления отрезка, когда на одном конце есть пересечение сепаратрис, а на другом такого пересечения нет.



**Рис. 11.10.** Гомоклинические точки касания для отображения (11.6)

Описанный метод построения итераций кривых может быть успешно применен для построения инвариантных многообразий в трехмерном пространстве. Так, инвариантная лента Мебиуса (см. рис. 11.5 и 11.6), рассмотренная в параграфе 11.4, построена аналогичным методом. Граница этой ленты есть неустойчивое одномерное многообразие  $W^u(H)$  55-периодической гиперболической траектории  $H$ . Кривая  $W^u(H)$  строилась как итерация достаточно малого отрезка  $L$ , проходящего через одну из точек  $H$  в направлении одномерного неустойчивого подпространства  $E^u(H)$ . Компьютерная программа построения неустойчивых многообразий реализована М. Сеньковым.

## 11.7. БИОЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПАМЯТЬЮ

Пусть разностное уравнение  $x_{n+1} = \Phi(x_n)$  описывает динамику биологической системы, где  $x_n \in R^d$  — параметры состояния системы в  $n$ -й период времени,  $n \in \mathbb{Z}$ . На практике отображение  $\Phi(x)$  определяется очень приближенно или оно неизвестно. Часто существует наблюдаемая величина  $u(x_n)$ , которая корректно определяется в каждый  $n$ -й период времени. Например, отображение  $\Phi(x)$  описывает динамику рыбных ресурсов системы «река-море», наблюдаемая величина  $u(x_n)$  есть численность (биомасса) лосося,

который каждый год проходит по реке на нерест. Построить динамическую систему  $x_{n+1} = \Phi(x_n)$  очень сложно, однако существуют методы, которые позволяют довольно хорошо оценить численность лосося  $u(x_n)$ , проходящего на нерест каждый год. Последовательность наблюдений  $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$  называется временным рядом. Задача состоит в том, чтобы описать динамику в терминах наблюдаемой величины. Следующая теорема Такенса является основой решения поставленной задачи.

**Теорема 11.4** [111]. Пусть имеется динамическая система  $x_{n+1} = \Phi(x_n)$  с фазовым пространством  $M$ ,  $\dim M = d$ . Пусть имеется наблюдаемая скалярная величина

$$u_n = h(\Phi(x_n)).$$

Построим  $m$ -векторы  $z_i = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+m-1})$ , тогда в типичном случае (в случае общего положения) при  $m \geq 2d + 1$  существует отображение  $F: R^m \rightarrow R^m$ , которое задает динамическую систему

$$z_{i+1} = F(z_i). \quad (11.7)$$

Последнее уравнение системы (11.7) является уравнением с запаздыванием вида

$$u_{i+m} = F_m(u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+m-1}), \quad (11.8)$$

которое по  $m$  наблюдаемым значениям  $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+m-1}$  задает следующее значение  $u_{i+m}$ . Уравнение с запаздыванием (с задержкой) (11.8) можно рассматривать как описание биологической системы с памятью. Эффект задержки в биологических системах хорошо известен [83] и объясняется тем, что биологическая система реагирует на изменения параметров с некоторым запаздыванием. В рассматриваемой ситуации динамика такова, что значение наблюдаемой величины определяется  $m$  предыдущими значениями. Это позволяет обойти отсутствие общей информации о системе. Например, система «хищник-жертва» содержит два уравнения. При этом численность жертвы  $x$  измеряется (контролируется), а численность хищника  $y$  исследователю недоступна. Теорема Такенса гарантирует, что численность жертвы можно прогнозировать, не зная численности хищника. Для этого достаточно знать численность жертвы в настоящее время и четыре предыдущих значения. В каждом конкретном случае необходимое число определяющих значений оказывается меньше, чем  $2d + 1$ .

В работе [26] показано, что динамика численности (массы) биологического вида естественно описывается уравнением с запаздыванием. Рассмотрены модели, содержащие одно и два запаздывания. Полученные численные результаты указывают, что динамика биомассы существенно определяется коэффициентом воспроизводства, внутривидовой конкуренцией и взаимовлиянием поколений. Внешнее воздействие среды обитания моделируется возмущением уравнений с запаздыванием. Исследованные системы показали богатую динамику, в которой изменение параметров приводит к бифуркациям от устойчивых периодических режимов к хаосу.

Рассмотрим пример динамики биологического вида с большим коэффициентом воспроизводства  $a$ . Уравнение с запаздыванием имеет вид

$$u_{n+1} = au_n \frac{1 - bu_{n-2} - cu_{n-1} - ru_n}{1 + d(u_{n-2} + u_{n-1} + u_n)},$$

где параметры имеют следующие значения:  $a = 175$ ,  $b = 0,24$ ,  $c = 0,24$ ,  $r = 1$  и  $d = 30$ . Переменная  $u$  есть безразмерная величина, которая является отношением текущей массы к максимально возможной массе данного биологического вида. Таким образом,  $u$  лежит между нулем и единицей. Параметры  $b$ ,  $c$ ,  $r$  характеризуют внутривидовую конкуренцию, число  $d$  характеризует среду обитания вида. Эта система показывает нетривиальные хаотические режимы и имеет явно выраженный многомерный характер.

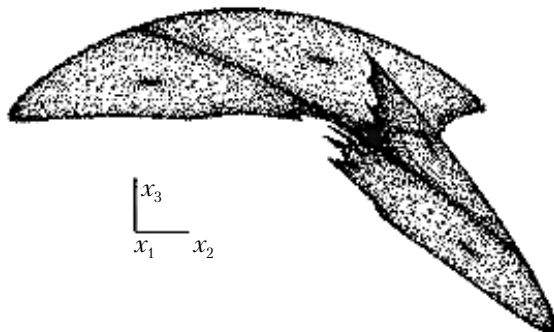
Стандартный переход к соответствующей трехмерной системе приводит систему к виду

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n; \\ y_{n+1} &= z_n; \\ z_{n+1} &= az_n \frac{1 - bx_n - cy_n - rz_n}{1 + d(x_n + y_n + z_n)}. \end{aligned} \tag{11.9}$$

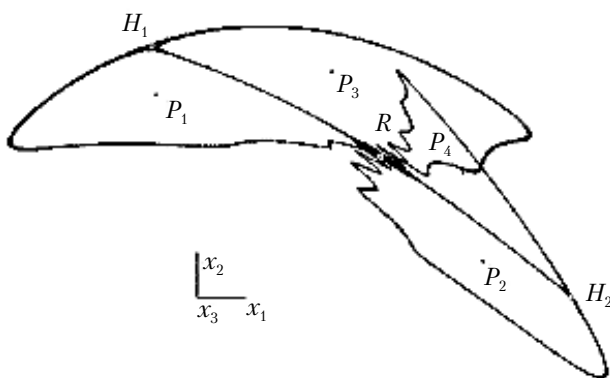
Система имеет аттрактор  $A$ , который был локализован посредством символического образа (рис. 11.11).

Структура данного аттрактора формируется следующим порядком. Система (11.9) имеет неподвижную гиперболическую точку  $R$  с координатами  $(0,504896, 0,504896, 0,504896)$  (рис. 11.12). Неустойчивое многообразие является одномерным, устойчивое многообразие — двумерным. Кроме того, имеется гиперболическая 2-периодическая траектория  $H$   $(0,347739, 0,630034, 0,347735)$ ,

(0,63003435, 0,347737, 0,63003435). Размерности устойчивых и неустойчивых многообразий траекторий  $R$  и  $H$  совпадают:  $\dim(W^{u(s)}(R)) = \dim(W^{u(s)}(H))$ . Отображение (11.9) меняет ориентацию, так как определитель дифференциала меньше нуля, при этом ориентация меняется на  $W^u(R)$ . Неустойчивое многообразие  $W^u(R)$  строится согласно методу, описанному в параграфе 11.6 (рис. 11.12).



**Рис. 11.11.** Аттрактор системы (11.9)



**Рис. 11.12.** Неустойчивое многообразие неподвижной точки  $R$

Это многообразие достигает окрестности орбиты  $H$ , где пересекает  $W^s(H)$ , затем достигает окрестность точки  $R$  вдоль  $W^u(H)$ . В окрестности точки  $R$  многообразие  $W^u(R)$  пересекает трансверсально устойчивое многообразие  $W^s(R)$ , замыкая гомоклинический цикл. Согласно теореме Смейла — Биркгофа [70], в окрестности многообразия  $W^u(R)$  существует инвариантное хаотическое множество  $\Omega$ , динамика на котором эквивалентна сдвигу в пространстве

двоичных последовательностей. Множество  $\Omega$  является канторовым и, следовательно, нигде — неплотным. При этом  $\Omega$  является компонентой цепно-рекуррентного множества. Аттрактор  $A$  формируется замыканием двумерного неустойчивого многообразия  $W^u(P)$  гиперболической 4-периодической траектории  $P$  (см. рис. 11.11 и 11.12). Координаты 4-периодической точки  $P_1$  допускают оценку  $(0,359478, 0,562376, 0,484335)$ . Внутри аттрактора  $A = \overline{W^u(P)}$  лежит другой аттрактор  $A_0 = \overline{W^u(R)}$ , который является замыканием неустойчивого многообразия точки  $R$ .

## 11.8. МАКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Рассмотрим динамику макроэкономической системы «национальный доход — ставка процента — уровень цен». Такая динамика описывается «IS-LM»-моделью, которая является базовой для описания современной рыночной экономики [22, 46]. Для моделирования макроэкономической динамики будем использовать дискретную динамическую систему

$$u_{n+1} = F(u_n), \quad (11.10)$$

где  $u_n$  описывает состояние экономики во время  $t = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . В работе [20] представлена дискретная динамическая система вида (11.10), которая моделирует взаимодействие описанных выше параметров экономической системы. Система имеет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp\left(a\left(1 - x_n y_n^{m/s} z_n\right)\right), \\ y_{n+1} &= y_n \exp\left(b\left(1 - x_n y_n^{m/s} z_n\right)\right), \\ z_{n+1} &= z_n \exp\left(c\left(y_n - z_n\right)\right), \end{aligned} \quad (11.11)$$

где  $x = P / P_e$ ,  $P$  — уровень цен,  $P_e$  — равновесное значение уровня цен;  $y = (r_e / r)^s$ ,  $r$  — ставка процента,  $r_e$  — равновесное значение ставки процента;  $z = Y / Y_e$ ,  $Y$  — национальный доход,  $Y_e$  — равновесное значение национального дохода. Все переменные являются безразмерными положительными величинами, а их изменение отражает отклонение от равновесного состояния. Все параметры  $a, b, c, m, s$  являются положительными,  $0 < s < 1$ . Можно сказать, что переменная  $x$  пропорциональна уровню цен, переменная  $z$  пропорциональна национальному доходу и переменная  $y$  обратно пропорциональна  $s$ -й степени ставки процента. В работе [20, с. 285] пред-

ставлены численные эксперименты и показано наличие периодических орбит.

Сравнивая динамику общего случая  $m \geq 0$  и частного случая  $m = 0$ , можно заметить некоторую аналогию. Действительно, имеет место топологическая эквивалентность этих систем.

**Утверждение 11.1** [91]. Отображение  $\Phi$  вида

$$\begin{aligned} X &= xy^{m/s}, \\ Y &= y, \\ Z &= z \end{aligned} \quad (11.12)$$

переводит дискретную систему

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp\left(a\left(1 - x_n y_n^{m/s} z_n\right)\right), \\ y_{n+1} &= y_n \exp\left(b\left(1 - x_n y_n^{m/s} z_n\right)\right), \\ Z_{n+1} &= Z_n \exp\left(c\left(y_n - z_n\right)\right) \end{aligned} \quad (11.13)$$

в систему вида

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n \exp\left(d\left(1 - X_n Z_n\right)\right), \\ Y_{n+1} &= Y_n \exp\left(b\left(1 - X_n Z_n\right)\right), \\ Z_{n+1} &= Z_n \exp\left(c\left(Y_n - Z_n\right)\right), \end{aligned} \quad (11.14)$$

где  $d = a + \frac{bm}{s}$ .

*Замечание.* Отображение  $\Phi$  является диффеоморфизмом в области  $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$ , где заданы системы (11.13) и (11.14). Учитывая, что  $x = \frac{P}{P_e}$ ,  $y = (r_e / r)^s$ ,  $P$  — уровень цен,  $r$  — ставка процента, введенная координата

$$X = P / P_e \left( (r_e / r)^s \right)^{m/s} = \frac{P / r^m}{r_e^m / P_e}.$$

С экономической точки зрения координата  $X$  пропорциональна уровню цен и обратно пропорциональна  $m$ -й степени ставки процента.

### 11.8.1. Динамика вблизи неподвижных точек

Рассмотрим дискретную динамическую систему (11.11). Из утверждения 11.1 следует, что достаточно исследовать случай

$m = 0$ . Это несколько упрощает вычисления и показывает суть динамики. Состояние баланса определяется неподвижными точками системы (11.10), т.е. уравнением  $F(u) = u$ . Переходя к координатам  $(x, y, z)$  и к системе (11.11), мы получаем равенства  $xy - 1 = 0$  и  $y - z = 0$ . Таким образом, неподвижные точки системы заполняют кривую  $K = \{xy = 1, y = z\}$ . Проекция  $K$  на плоскость  $(xy)$  является гиперболой  $xy = 1$ , а проекция  $K$  на плоскость  $(yz)$  есть прямая  $y = z$ . Топологический тип неподвижной точки  $u^* \in K$  системы (11.10) определяется мультипликаторами или собственными числами дифференциала  $DF(u^*)$ . Инвариантность кривой  $K$  приводит к тому, что касательный вектор к  $K$  является собственным вектором дифференциала. Более того, поскольку отображение  $F$  на  $K$  является тождественным, следовательно,  $\lambda = 1$  есть собственное значение дифференциала  $DF|_K$ . На кривой  $K$  дифференциал правой части системы (11.11) при  $m = 0$  имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & -ax^2 \\ -by^2 & 1 & -b \\ 0 & cz & 1-cz \end{pmatrix}. \quad (11.15)$$

Мультипликаторы неподвижных точек определяются уравнением

$$\det(D - \lambda E) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda(2 - a - cy) + 1 - a + (b + a - 1)cy).$$

Ясно, что мультипликатор  $\lambda = 1$  соответствует кривой неподвижных точек  $K$ . Остальные мультипликаторы  $\lambda_{12}$  определяются уравнением

$$\lambda^2 - \lambda(2 - a - cy) + 1 - a + (b + a - 1)cy = 0. \quad (11.16)$$

Отсюда имеем

$$\lambda_{12} = \frac{2 - a - cy \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

где дискриминант  $\Delta = c^2 y^2 - 2cy(a + 2b) + a^2$ . Легко проверить, что  $\lambda_{12} \neq 1$  при  $y > 0$ . Отсюда следует, что собственное подпространство  $E$  для  $\lambda_{12}$  является трансверсальным к  $K$ . Если  $|\lambda_{12}| < 1$ , то дифференциал действует как сжатие на  $E$ . При  $|\lambda_{12}| > 1$  дифференциал растягивает на  $E$ . Если  $|\lambda_1| < 1$  и  $|\lambda_2| > 1$ , то мы имеем гиперболическую



динамику на  $E$ . Дискриминант  $\Delta$  будет отрицательным, когда  $y$  лежит между корнями  $y_1$  и  $y_2$  уравнения

$$c^2 y^2 - 2cy(a+2b) + a^2 = 0, \quad (11.17)$$

где

$$y_{12} = \frac{(a+2b) \pm 2\sqrt{b(a+b)}}{c}.$$

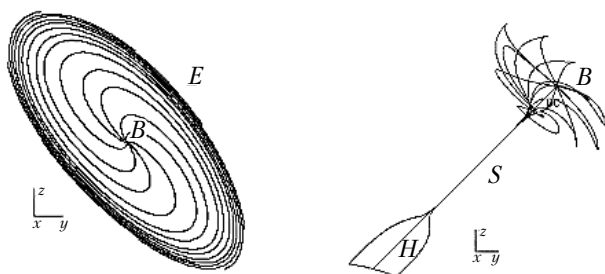
Например, для  $a = 2,4$ ,  $b = 0,87$ ,  $c = 0,9$  имеем  $y_1 = 0,852$ ,  $y_2 = 7,51$ . Следовательно, при  $0,852 < y < 7,51$  мультипликаторы  $\lambda_{12}$  являются комплексными сопряженными. В этом случае свободный член уравнения (11.16) есть квадрат модуля мультипликатора

$$1 - a + (b + a - 1)cy = \lambda_1 \lambda_2 = |\lambda|^2,$$

что дает возможность определить области устойчивости и неустойчивости неподвижных точек. Для  $a = 2,4$ ,  $b = 0,87$ ,  $c = 0,9$  и  $y = 0,852$  имеем  $|\lambda|^2 = 0,3406$ , т.е. в плоскости трансверсальной к кривой неподвижных точек мы имеем устойчивый фокус. Численные эксперименты показывают, что при  $1 - a + (b + a - 1)cy = 1$  происходит бифуркация Неймарка — Саккера: состояние равновесия теряет устойчивость и от него отделяется устойчивая инвариантная кривая, гомеоморфная окружности. Для  $a = 2,4$ ,  $b = 0,87$ ,  $c = 0,9$  бифуркация наступает при  $y = 1,174743$ . На кривой  $K$  между точками  $0,852 < y < 1,174743$ , расположены устойчивые состояния равновесия, а для  $y > 1,174743$  состояния равновесия неустойчивы.

Согласно теореме сведения Плисса [38, с. 1139–1150], [87, с. 939], вблизи кривой  $K$  над каждой неподвижной точкой лежит инвариантный диск, который является устойчивым многообразием  $W^s$  при  $|\lambda| < 1$  ( $0,852 < y < 1,174743$ ) или неустойчивым многообразием  $W^u$  при  $|\lambda| > 1$  ( $1,174743 < y < 7,51$ ). В левой части рис. 11.13 показан инвариантный диск. . для точки  $B$  ( $0,851, 1,175, 1,175$ ). На кривой  $K$  между точками с  $0,700 < y < 0,852$  расположены состояния равновесия с двумя отрицательными мультипликаторами, которые по модулю меньше единицы. При  $0,685 < y < 0,700$  возникает гиперболический случай: один мультипликатор больше единицы по модулю, а другой — меньше единицы по модулю. Вблизи  $y = 0,685$  один мультипликатор становится равным нулю. Это означает, что якобиан правой части системы (11.11)  $\det D = 0$ . При

$y < 0,685$  один мультипликатор является положительным, а другой — отрицательным. В этом случае дифференциал меняет ориентацию (на неустойчивом многообразии).



**Рис. 11.13.** Динамика вблизи кривой  $K$  неподвижных точек системы (11.11)

Знак якобиана  $\det D$  определяет, сохраняет или нет ориентацию динамическая система в данной точке. Следовательно, уравнение  $\det D(x, y, z) = 0$  задает поверхность  $\Pi$ , на которой система меняет ориентацию. Таким образом, каждое состояние равновесия в плоскости, трансверсальной к  $K$ , может быть устойчивым, неустойчивым с комплексными мультипликаторами и гиперболическим. В последнем случае один мультипликатор отрицательный, а другой меняет знак на  $\Pi$ . В правой части рис. 11.13 показаны отрезки:  $H = \{\text{гиперболические неподвижные точки}\}$ ;  $S = \{\text{устойчивые неподвижные точки}\}$ ;  $UC = \{\text{неустойчивые неподвижные точки с комплексными мультипликаторами}\}$ .

### 11.8.2. Слоение с инвариантными слоями

В этом подпараграфе мы покажем, что существует функция  $(x, y, z)$ , поверхности уровня которой  $U(x, y, z) = \text{const}$  являются инвариантными для дискретной системы

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp(a(1 - x_n z_n)); \\ y_{n+1} &= y_n \exp(b(1 - x_n z_n)); \\ z_{n+1} &= z_n \exp(c(y_n - z_n)). \end{aligned} \quad (11.18)$$

Функция  $U(x, y, z)$  является аналогом интеграла для автономной системы дифференциальных уравнений. Для определения функции  $U$  заметим, что первое и второе уравнения системы (11.18) различаются только показателями  $a$  и  $b$ . Если первое уравнение возвести в степень  $b$ , а второе — в степень  $a$ , то мы получим одинаковое вы-

ражение  $\exp(ab(1-x_n z_n))$ . Это дает возможность построить функцию  $U$ .

**Утверждение 11.2** [91]. Поверхности уровня функции

$$U = \frac{x^b}{y^a}$$

являются инвариантными для системы (11.18).

Каждая поверхность

$$W = \left\{ (x, y, z) : x = hy^{\frac{a}{b}} \right\}, \quad h = \text{const}$$

трансверсальна кривой неподвижных точек  $K$ . Кроме того, вблизи  $K$  существуют инвариантные диски  $W^{su}$ , как показано выше. Вследствие инвариантности диски  $W^{su}$  должны лежать в слоях  $W$ . Таким образом, инвариантное слоение, порожденное устойчивыми  $W^s$  и неустойчивыми дисками  $W^u$ , существует не только вблизи кривой  $K$ , но и определено глобально. Поскольку переменная  $z$  явно

не входит в функцию  $U$ , инвариантный слой  $W = \left\{ (x, y, z) : x = hy^{\frac{a}{b}} \right\}$ ,

$h = \text{const}$ , является линейчатой поверхностью с прямыми, параллельными  $z$ -оси. Система на поверхности  $W = \left\{ (x, y, z) : x = hy^{\frac{a}{b}} \right\}$  задается в виде

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n \exp\left(b\left(1 - hy_n^{a/b} z_n\right)\right), \\ z_{n+1} &= z_n \exp\left(c\left(y_n - z_n\right)\right), \end{aligned} \quad (11.19)$$

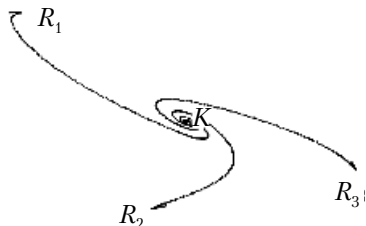
где число  $h > 0$  задает инвариантный слой. Так,  $h = 1$  задает поверхность, проходящую через состояние равновесия  $(1, 1, 1)$ . Для произвольной поверхности  $W(h)$  состояние равновесия определяется равенствами

$$xy = 1, \quad y = z, \quad x = hy^{a/b}.$$

Отсюда следует, что состояние равновесия имеет координаты

$$\left( h^{b/(a+b)}, h^{-b/(a+b)}, h^{-b/(a+b)} \right)$$

на каждом слое  $W(h)$ . Исследуем, как меняется динамика системы в слоях  $W(h) = \{(x, y, z) : x = hy^{a/b}\}$  в зависимости от значения  $h$ . Иначе говоря, рассмотрим бифуркации системы (11.19) при изменении параметра  $h$ . На каждом слое  $W(h)$  имеется точка  $W(h) \cap K$ , которая является неподвижной для системы (11.19). Если слой фиксирован, то будем обозначать неподвижную точку  $K^*$ . Рассмотрим систему (11.19) при  $a = 2,4$ ;  $b = 0,9$ ;  $c = 0,9$ . На слое  $W(h=1)$  имеется устойчивое состояние равновесия  $K^*(1,1)$  с комплексными мультипликаторами. При уменьшении значения  $h$  характер устойчивости начинает меняться. Так, на слое  $W(h=0,8)$  (рис. 11.14) имеется 3-периодическое инвариантное множество  $R = \{R_1, R_2, R_3\}$ , от которого траектории уходят к устойчивому состоянию равновесия  $K^*$ .

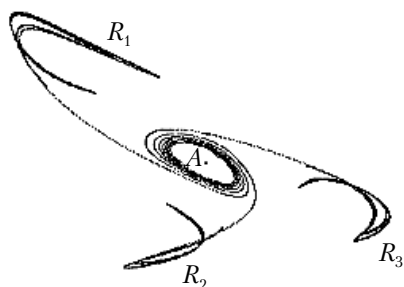


**Рис. 11.14.** Устойчивое состояние равновесия при  $h = 0,8$

При изменении параметра  $h$  от 0,8 к 0,58 из устойчивого состояния равновесия рождается устойчивый инвариантный эллипс  $A$ , а состояние равновесия  $K^*$  теряет устойчивость, т.е. происходит бифуркация Неймарка — Саккера (рис. 11.15). При этом инвариантное множество  $R$  увеличивается в размере. При дальнейшем уменьшении параметра  $h$  на устойчивом эллипсе  $A$  рождается гиперболическая 3-периодическая траектория  $P$  (рис. 11.16, слева). Когда  $h$  достигает значения 0,515970, неустойчивое многообразие  $W^u(P_3)$  пересекается трансверсально с устойчивым многообразием  $W^s(P_1)$  орбиты  $P$  (0,8037147, 1,33638665) (см. рис. 11.16, справа).

Построение этих многообразий и оценка трансверсальности проводилась в соответствии с [25, с. 204], [89, с. 188]. Согласно теореме Смейла [70, с. 351], трансверсальное пересечение порождает хаос вблизи точек пересечения. При этом множество  $A$  теряет устойчивость и сливается с множеством  $R$ , образуя одно инвариантное множество  $\Omega$ , которое есть замыкание неустойчивого многообразия  $W^u(P)$  траектории  $P$  (см. рис. 11.16, слева). Отметим,

что траектория, которая начинается вблизи состояния равновесия  $K^*(1,1977742, 1,1977742)$ , достигает множества  $\Omega$  и затем блуждает на нем. Энтропия системы на инвариантном множестве  $\Omega$  была оценена как показатель (по основанию 2) роста длины кривой [86]. Получена оценка снизу  $E = 0,69314$ . Поскольку энтропия является мерой хаоса, мы можем утверждать, что на множестве  $\Omega$  система допускает хаос.



**Рис. 11.15.** Рождение устойчивого инвариантного эллипса при изменении  $h$  от 0,8 к 0,58



**Рис. 11.16.** Хаос на инвариантном слое  $W(h = 0,515970)$ , замыкание неустойчивого многообразия  $W^u(P)$ . Пересечение неустойчивого и устойчивого многообразий 3-периодической точки  $P$

### 11.8.3. Неконтролируемое возмущение системы

Обычно экономическая система подвергается возмущениям, которые являются неконтролируемыми и случайными. Для моделирования возмущения используем зависимость

$$q(n+1) = 1 - 2q^2(n), \quad q \in [-1, 1].$$

Известно [104, с. 60], что для почти каждого (по мере Лебега) начального данного  $q(0)$  траектория  $\{q(n)\}$  является хаотической и распределена на отрезке  $[-1, 1]$  с плотностью

$$\rho = \frac{1}{\pi(1-x^2)^{1/2}}.$$

Возмущенная система имеет вид

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n \exp\left(a\left(1 - x_n y_n^{m/s} z_n\right)\right) + \varepsilon_1 q_1(n), \\y_{n+1} &= y_n \exp\left(b\left(1 - x_n y_n^{m/s} z_n\right)\right) + \varepsilon_2 q_2(n), \\z_{n+1} &= z_n \exp\left(c\left(y_n - z_n\right)\right) + \varepsilon_3 q_3(n),\end{aligned}\tag{11.20}$$

где числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  являются малыми и положительными, а  $q_i$  удовлетворяет уравнению

$$q_i(n+1) = 1 - 2q_i^2(n).\tag{11.21}$$

Начальные значения  $q_i(0) \in [-1, 1]$  задаются для каждого  $i = 1, 2, 3$  случайным образом. Таким образом, исследуется 6-мерная система, состоящая из уравнений системы (11.20) и уравнений вида (11.21),  $i = 1, 2, 3$ . Следует ожидать, что описанные возмущения не сохраняют инвариантное слоение. Однако в каждом инвариантном слое невозмущенной системы существует аттрактор с некоторой областью притяжения, которая должна сохраняться при малых возмущениях. Результаты, описанные выше, показывают, что аттракторы формируются из устойчивых состояний равновесия кривой  $K$ , а при потере устойчивости этих состояний равновесия рождаются аттракторы, которые меняются непрерывно от слоя к слою. Послойное объединение таких аттракторов создает множество, которое при возмущении не исчезает.

Это хорошо видно в правой части рис. 11.17, где изображена траектория точки  $(1, 1, 1)$  возмущенной системы (11.20) для параметров  $a = 2,45$ ,  $b = 0,6$ ,  $c = 0,9$ ,  $m = 0$  и величины хаотического возмущения  $\varepsilon_i = 0,01$ . Следует отметить, что хаотическое возмущение заставляет траекторию двигаться вверх и вниз вблизи аттракторов невозмущенной системы. При этом возмущение может не только перевести траекторию в хаотическую область (см. верхнюю часть рис. 11.17, справа), но и вернуть ее из этой области.

С экономической точки зрения существуют возмущения, которые мы можем контролем свести к нулю или сделать их незначи-

тельными, а есть возмущения, которые мы не способны существенно уменьшить. Например, центральный банк может контролировать ставку процента и не допускать ее хаотических возмущений. Однако мы не можем избавиться от хаотических возмущений уровня цен. Таким образом, желательно выяснить, какие возмущения существенно влияют на динамику системы, а какие — нет. Отметим, что возмущение последнего уравнения сохраняет инвариантные слои, так как каждый слой является линейчатой поверхностью параллельный оси  $z$ . Таким образом, возмущение вида  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 0$  и  $\varepsilon_3 \neq 0$  сохраняет слои невозмущенной системы и возмущает систему в слое. Это означает, что возмущение национального дохода (производства) существенно не изменяет динамику вблизи аттракторов на слоях. Слабый контроль уровня цен приводит к возмущению первого уравнения.



**Рис. 11.17.** Траектория точки  $(1, 1, 1)$  возмущенной системы (11.20) с  $\varepsilon_i = 0,01$ ; траектория точки  $(1, 1, 1)$  системы (11.20) с  $\varepsilon_1 = 0,01$ ,  $\varepsilon_{2,3} = 0$

В правой части рис. 11.17 показана траектория точки  $(1, 1, 1)$  системы (11.20) с  $\varepsilon_1 = 0,01$ ;  $\varepsilon_{2,3} = 0$ . Из результатов численного расчета следует, что возмущение уровня цен приводит к бифуркациям  $y$  и  $z$ . Возрастание  $y$  означает уменьшение ставки процента.

Следует отметить, что наиболее сильные бифуркации к хаосу наблюдаются при слабом контроле ставки процента. Численные эксперименты для системы (11.20) с  $\varepsilon_2 = 0,01$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$ , показывают, что поведение решений такой системы почти не отличается от возмущенной системы общего типа (11.20) с  $\varepsilon_i = 0,01$  (см. рис. 11.17, слева). Малые возмущения общего вида приводят к тому, что траектория начинает смещаться вдоль состояний равновесия и попадает сначала в неустойчивое состояние равновесия, а затем в слой, где наблюдается хаос. Величина хаоса может как увеличиваться, так и уменьшаться при возмущении.

Подведем итоги.

Проведено исследование дискретной макроэкономической модели (11.11). Показано, что эта система  $C^1$ -эквивалентна системе (11.11) с  $m = 0$ . Она имеет кривую, заполненную состояниями равновесия, а трансверсально к этой кривой лежат инвариантные поверхности уровня функции  $U = x^b / y^a$ , которые образуют слоение. Можно считать, что состояния равновесия являются центром каждой инвариантной поверхности. На каждом слое имеется аттрактор, к которому стремятся почти все орбиты. Данный аттрактор может быть состоянием равновесия или иметь довольно сложное (хаотическое) строение. При изменении поверхности уровня происходит бифуркация динамики системы от устойчивого состояния равновесия к хаосу. Отметим, что хаос в данной макроэкономической модели является внутренним свойством системы. При этом хаос не всегда порождает экономический кризис. В данном случае хаос — это невозможность долгосрочного прогнозирования. Численные результаты показывают, что имеются слои, где хаос достигает громадных размеров, тогда происходит разбалансировка экономической системы и наступает кризис. Малое внешнее возмущение может разрушить описанную топологическую структуру орбит системы. Численные эксперименты и экономическая практика показывают, что не все возмущения одинаково влияют на динамику системы. Так, возмущение национального дохода ( $z$ ) не меняет инвариантного слоения, возмущение уровня цен ( $x$ ) приводит к слабому изменению динамики, сохраняя аттракторы слоев. Существенное влияние на динамику системы оказывает возмущение процентной ставки. Малые возмущения приводят к тому, что траектория начинает смещаться вдоль состояний равновесия и попадает сначала в неустойчивое состояние равновесия, а затем в слой, где наблюдается хаос, величина которого может увеличиваться, достигая значительных размеров.

#### *Контрольные задания*

1. Составьте компьютерную программу по локализации цепно-рекуррентного множества.
2. Составьте компьютерную программу, осуществляющую топологическую сортировку графа.
3. Составьте компьютерную программу построения аттрактора.
4. Составьте компьютерную программу построения фильтрации динамической системы.
5. Составьте компьютерную программу итерации кривой и постройте устойчивую сепаратрису гиперболической точки.



6. Составьте компьютерную программу вычисления спектра Морса.
7. Составьте компьютерную программу проверки гиперболичности инвариантного множества.
8. Составьте компьютерную программу определения спектра двойственного дифференциала.

# Глава 12

## ДОПОЛНЕНИЕ

### 12.1. МЕРА И ТОПОЛОГИЯ

#### Мера и измеримые множества [17, 23, 70]

**Определение 12.1.** Рассмотрим множество  $M$ . Непустая совокупность  $\Sigma$  его подмножеств называется  $\sigma$ -алгеброй, если выполнены следующие условия:

- 1)  $\Sigma$  содержит множество  $M$ ;
- 2) если множество  $A$  лежит в  $\Sigma$ , то его дополнение  $M \setminus A$  также лежит в  $\Sigma$ ;
- 3) объединение и пересечение счетного семейства множеств из  $\Sigma$  принадлежат  $\Sigma$ .

Множества из  $\Sigma$  называются измеримыми, и мера этих множеств определяется следующим образом.

Мерой называется неотрицательная функция  $\mu$ , определенная на  $\Sigma$ , которая удовлетворяет свойствам:

- 1)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- 2) если  $A \subset B$ , то  $\mu(A) \leq \mu(B)$ ;
- 3) функция  $\mu$  является  $\sigma$ -аддитивной, т.е. мера объединения не более чем счетного числа дизъюнктивных множеств равна сумме мер этих множеств:

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i),$$

где множества  $A_i$  попарно не пересекаются, а число множеств может быть конечным или счетным.

Поскольку мера всякого множества неотрицательна, справа стоящий ряд сходится к некоторому неотрицательному значению или к  $+\infty$ . Мы рассматриваем конечные меры, для которых  $\mu(A)$  принимает конечное значение.

Мера обладает свойством непрерывности:

- 1) для последовательности измеримых вложенных множеств

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \text{ множество } A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

является измеримым и мера

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n);$$

2) для последовательности измеримых расширяющихся множеств

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \text{множество } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

является измеримым и мера

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Пространство с мерой — это тройка  $\{M, \Sigma, \mu\}$ , состоящая из множества  $M$ ,  $\sigma$ -алгебры  $\Sigma$  и меры  $\mu$ . Пространство с мерой, где  $\mu(M) = 1$ , называется вероятностным пространством, а мера  $\mu$  называется нормированной. Если мера объемлющего пространства  $\mu(M) = t$  конечна, то  $\mu^* = \frac{\mu}{t}$  является нормированной. Если многообразие  $M$  компактно, то, не ограничивая общности, можно считать, что рассматриваемая мера является нормированной.

Пусть множество  $M$  обладает топологической структурой, т.е. определены открытые и замкнутые множества. Будем говорить, что  $\sigma$ -алгебра согласована с топологической структурой, если она порождена замкнутыми подмножествами множества  $M$ . В этом случае говорят, что  $\Sigma$  есть борелевская  $\sigma$ -алгебра, а мера  $\mu$  называется мерой Бореля. Борелевская мера обладает свойством регулярности: для каждого измеримого множества  $A \in \Sigma$

$$\mu(A) = \inf \{ \mu(B), A \subset B, B \text{ — открыт} \} = \sup \{ \mu(K), K \subset A, K \text{ — компактно} \}.$$

### Интеграл Лебега [23]

Пусть на многообразии  $M$  имеется  $\sigma$ -алгебра борелевских множеств  $\Sigma$  и мера  $\mu$ . Функция  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$  называется измеримой, если для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$  множество  $\{x: \varphi(x) > \alpha\}$  является измеримым. Если функция  $\varphi$  — измерима, то множества  $\{x: \alpha < \varphi(x) < \beta\}$ , и  $\{x: \varphi(x) = \alpha\}$  являются измеримыми, где  $\alpha$  и  $\beta$  — любые числа

из  $R$ . Пусть функция  $\varphi$  — ограничена, т.е. существуют  $p$  и  $q$  такие, что  $p \leq \varphi(x) \leq q$ . Разобьем отрезок  $[p, q]$  промежуточными точками  $l_0 = p < l_1 < l_2 < \dots < l_n = q$  и составим интегральную сумму:

$$\sum_{k=0}^n l_k \mu(E_k) + \sum_{k=0}^n l_k \mu(E_k^*),$$

где  $E_k = \{x : l_k < \varphi(x) < l_{k+1}\}$  и  $E_k^* = \{x : \varphi(x) = l_k\}$ . Если наибольшая из разностей  $l_{k+1} - l_k$  стремится к нулю, то существует предел интегральных сумм, который называется интегралом Лебега функции  $\varphi$  по мере  $\mu$  и обозначается как

$$\int_M \varphi d\mu = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \sum_{k=0}^n l_k \mu(E_k) + \sum_{k=0}^n l_k \mu(E_k^*) \right),$$

где  $\tau = \max |l_{k+1} - l_k|$ . В этом случае функция  $\varphi$  называется суммируемой. Если функция  $\varphi \geq 0$  является неограниченной, то функция

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \varphi(x) \leq n, \\ n, & \varphi(x) > n. \end{cases}$$

Тогда, по определению, считаем

$$\int_M \varphi d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \varphi_n d\mu.$$

Если этот предел конечен, то функция  $\varphi$  называется суммируемой. Аналогично определяется интеграл от отрицательной измеримой функции. Наконец, любая измеримая функция представляется в виде суммы

$$\varphi = \varphi^+ + \varphi^-,$$

где

$$\varphi^+(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \varphi(x) > 0, \\ 0, & \varphi(x) \leq 0; \end{cases}$$

$$\varphi^-(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \varphi(x) < 0, \\ 0, & \varphi(x) \geq 0. \end{cases}$$

Тогда, по определению,

$$\int_M \varphi d\mu = \int_M \varphi^+ d\mu + \int_M \varphi^- d\mu,$$

если оба интеграла в правой части конечны. В этом случае функция  $\varphi$  называется  $\mu$ -суммируемой.

Будем говорить, что мера  $\mu$  абсолютно непрерывна относительно меры  $\sigma$ , если существует измеримая функция  $\varphi$  такая, что для любого измеримого множества  $A$  имеет место равенство

$$\mu(A) = \int_M \varphi d\sigma.$$

### Пространство суммируемых функций $L_1$ [17]

Рассмотрим пространство  $M$ ,  $\mu$  с нормированной мерой и множество суммируемых функций. Далее все интегралы берутся по множеству  $M$ , поэтому мы будем его опускать в интегралах. Если функция  $\varphi$  суммируема, то существует  $\int |\varphi| d\mu$  и эту величину можно взять за норму. Получим банахово пространство суммированных функций или пространство Лебега, которое обозначается  $L_1$  или  $L_1(M, \mu)$ , если нужно указать пространство и (или) меру.

**Теорема 12.1** [17]. Множество всех непрерывных функций плотно в  $L_1$ .

Характеристическая функция или индикатор множества  $A$  определяется как

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \in A \\ 0 & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

Для каждого компакта  $K$  и любой открытой окрестности  $U \supset K$  существует непрерывная функция  $\varphi: M \rightarrow [0, 1]$  такая, что  $\chi_K(x) \leq \varphi(x) \leq \chi_U(x)$ . Вложенная последовательность окрестностей  $U_n$ , стягивающаяся к  $K$ , порождает последовательность непрерывных функций  $\varphi_n$ , которая поточечно сходится к характеристической функции  $\chi_K$ .

## 12.2. ГРАФЫ

**Терминология.** Ориентированный граф  $G$  есть набор вершин (узлов)  $V = \{i, j, r, \dots\}$  и множество ориентированных ребер (дуг)  $E = \{i \rightarrow j, k \rightarrow i, \dots\}$ . Петли  $i \rightarrow i$  допускаются. Два ребра, имеющие

общую исходную вершину  $v \rightarrow u_1$  и  $v \rightarrow u_2$ , называются смежными. Если имеется ребро  $v \rightarrow u$ , то говорят:  $v$  есть предок  $u$ , а  $u$  есть потомок  $v$ , при этом вершины  $u$  и  $v$  являются смежными. На графе  $G$  есть два отображения  $b, e$  из множества дуг во множество вершин, которые задают начало и конец дуги:

$$b(i \rightarrow j) = i, e(i \rightarrow j) = j.$$

Последовательность  $\omega = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$  есть путь на  $G$ , если для каждого  $n$  существует ребро  $i_n \rightarrow i_{n+1}$ , при этом  $i_1$  есть начало и  $i_m$  есть конец этого пути. Если существует путь  $\omega$ , который начинается в вершине  $v$  и заканчивается в вершине  $u$ , то вершина  $u$  называется достижимой из  $v$ , символ « $\mapsto$ » будет обозначать достижимость. Последовательность  $\omega^* = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$  является цепью на  $G$ , если для каждого  $n$  существует ребро вида  $i_n \rightarrow i_{n+1}$  или вида  $i_{n+1} \rightarrow i_n$ , т.е. цепь не учитывает ориентацию дуг. Цепь  $\omega^*$  является замкнутой, если  $i_1 = i_m$ . Компонентой связности называется такое максимальное по включению подмножество вершин  $H \subset G$ , что любые две вершины соединены цепью. Очевидно, что граф  $G$  распадается на компоненты связности.

Связный граф (компонента) называется деревом, если у него нет замкнутых цепей. Следующая теорема доказана в работе [42, с. 106].

**Теорема 12.2.** Следующие определения дерева эквивалентны:

- 1) связный граф без замкнутых цепей;
- 2) граф без замкнутых цепей, у которого число дуг на единицу меньше числа вершин;
- 3) связный граф, у которого число дуг на единицу меньше числа вершин;
- 4) граф без замкнутых цепей, в котором добавление дуги приводит к появлению замкнутой цепи;
- 5) связный граф, который перестает быть связным после удаления любой дуги;
- 6) граф, у которого любые две вершины соединяются цепью и притом только одной.

Компонентой сильной связности называется такое максимальное по включению подмножество вершин  $H \subset G$ , что любые две вершины этого подмножества достижимы друг из друга:

$$u, v \in H : u \mapsto v, v \mapsto u.$$

*Компьютерное задание графа.* Как сказано выше, в теоретических исследованиях граф  $G$  удобно задавать матрицей допустимых

$$P = (\pi_{ij}),$$

где  $\pi_{ij} = 1$ , если существует дуга  $i \rightarrow j$ , иначе  $\pi_{ij} = 0$ . На практике матрица допустимых переходов имеет большие размеры и является разреженной, т.е. матрица  $P$  содержит много нулей и мало единиц. Оперировать с такими матрицами в компьютере неудобно. Поэтому обычно, граф задается *списком смежности*. Для каждой вершины  $u$  создается список вершин, смежных с данной, что равносильно перечислению дуг, исходящих из  $u$ . Например, список смежности  $S(u) = (u; i_1, i_2, \dots)$  означает, что граф  $G$  имеет вершину  $u$ , из которой исходят ребра  $u \rightarrow i_1, u \rightarrow i_2, \dots$ . В этом случае число элементов в списке  $S(u)$  на единицу больше, чем число единиц в строке матрицы  $P$ , соответствующей вершине  $u$ . Граф  $G$  задается перечислением списков смежности

$$S(u_1),$$

$$S(u_2),$$

$$\vdots$$

Полученный список списков является достаточно компактным заданием графа с большим числом вершин. Представление графа описанным списком требует объем памяти, равный  $O(n + m)$ , где  $n$  — число вершин,  $m$  — число дуг.

### 12.3. ОБХОД ГРАФА В ГЛУБИНУ

Целью данного алгоритма является оптимальный обход всех вершин графа по ориентированным дугам, при этом не все дуги могут быть использованы. Из названия этого метода обхода графа ясно, что в процессе поиска мы идем «вглубь» графа настолько, насколько возможно. Следуя алгоритму, мы последовательно обойдем все вершины графа, которые доступны из начальной вершины. Если ребро ведет в не пройденную до этого момента вершину, то мы идем по этому ребру. В случае если ребер, которые ведут в нерассмотренную вершину, больше нет, происходит возврат назад. Для того чтобы знать состояние вершины, часто используют метку в виде

цвета: белый, серый, черный. Белый цвет вершины говорит о том, что вершина не рассматривалась, т.е. изначально все вершины являются белыми. Серый цвет вершины означает, что вершина находится в работе и она уже посещалась, но исследование всех исходящих ребер не закончено. Вершина серого цвета находится в нисходящем пути некоторого дерева. Черный цвет вершины означает, что исследование вершины закончено, все исходящие ребра исследованы и нужно вернуться на одно ребро назад, если такое ребро имеется.

Вершину, с которой начинается обход в глубину, назовем «корневой вершиной». Если корневая вершина окрашивается в черный цвет, то мы построили максимальное дерево обхода из этой вершины. Заметим, что если  $u$  есть корневая вершина, то построенное дерево обхода в глубину содержит все вершины, достижимые из  $u$ , и других вершин не имеет. Если в графе имеются вершины белого цвета, то необходимо продолжить обход, начиная с любой белой вершины. Таким образом, обход заканчивается, когда всех вершины приобретают черный цвет.

### Пример построения дерева обхода в глубину

Рассмотрим, как будут изменяться цвета вершин при обходе в глубину графа (рис. 12.1).

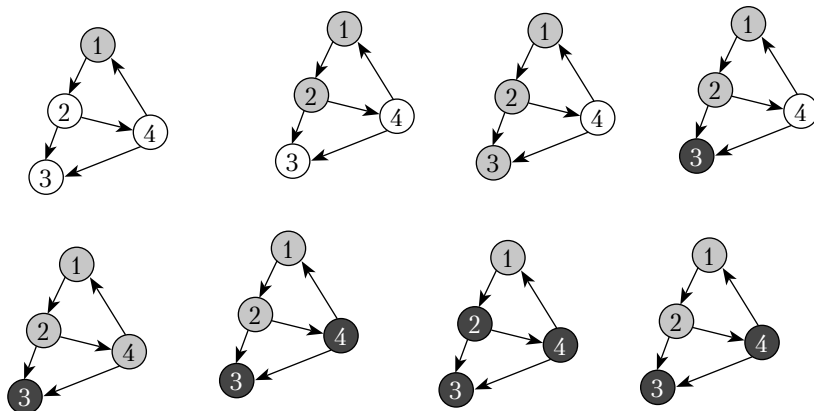


Рис. 12.1. Обход графа в глубину

#### Описание шага обхода

1. Присваиваем всем вершинам белый цвет. Заходим в первую вершину и раскрашиваем ее в серый цвет.

2. Пробуем войти в вершину с номером 2. Проверяем, что она белая, и переходим в нее. Окрашиваем ее в серый цвет.



3. Пробуем войти в вершину с номером 3. Проверяем, что она белая, и переходим в нее. Окрашиваем ее в серый цвет.

4. Проверяем, что из вершины с номером 3 не исходит ни одного ребра. Помечаем ее в черный цвет и возвращаемся в вершину с номером 2.

5. Пробуем войти в вершину с номером 4. Проверяем, что она белая, и переходим в нее. Окрашиваем ее в серый цвет.

6. Пробуем войти в вершину с номером 3. Видим, что она черного цвета, и остаемся на месте. Пробуем войти в вершину с номером 1. Видим, что она серого цвета, и остаемся на месте.

7. Из вершины с номером 4 больше нет исходящих ребер. Помечаем ее в черный цвет и возвращаемся в вершину с номером 2.

8. Из вершины с номером 2 больше нет исходящих ребер. Помечаем ее в черный цвет и возвращаемся в вершину с номером 1.

9. Из вершины с номером 1 больше нет исходящих ребер. Помечаем ее в черный цвет и проверяем, что все вершины окрашены в черный цвет. Алгоритм завершен.

Алгоритм не использовал ребра  $4 \rightarrow 3$  и  $4 \rightarrow 1$ . Если эти ребра убрать из графа, то получим дерево обхода в глубину. Полученное дерево является подграфом исходного графа. Ясно, что дерево обхода зависит от выбора начальной вершины. Если мы начнем обход с вершины 4, то получим другое дерево. Если исходный граф является достаточно богатым, то мы получаем набор деревьев, которые называют лесом обхода в глубину. Для нас будет удобным обход в глубину с метками времени вместо цвета вершин.

*Обход в глубину с метками времени.* Обход графа в глубину с метками времени отличается от описанного выше обхода тем, что вместо изменения цвета вводятся некоторые числовые характеристики вершины. Для каждой вершины  $u$  установим два числа: «время» входа —  $entry[u]$  и «время» выхода —  $leave[u]$ . Модифицируем процедуру выше описанного алгоритма следующим образом. Сначала введем счетчик времени  $t$  и положим  $t = 0$ . Пусть имеется нерассмотренная (белая) вершина  $u$ , для нее опишем процедуру  $DFS(u)$ : увеличиваем «текущее время»  $t$  на единицу и полагаем время входа  $entry[u] = t$  (вместо того, чтобы перекрашивать вершину в серый цвет). Для всякой вершины  $v$ , смежной с вершиной  $u$ , у которой нет метки  $entry[v]$  (окрашенной в белый цвет), выполняем процедуру  $DFS(v)$ . В случае если ребер, которые ведут в нерассмотренную вершину, больше нет, происходит возврат назад. Если для вершины  $u$  все смежные вершины  $v$  имеют метку  $entry[v]$ , то увеличиваем «текущее время» на единицу и полагаем время выхода  $leave[u] = t$  (вместо того чтобы перекрашивать вершину  $u$

в черный цвет). Очевидно, для любой вершины  $entry[u] < leave[u]$ . Если мы закончили построение дерева с корневой вершиной  $u$  и со временем выхода  $leave[u]$ , то переходим к новой нерассмотренной (белой) вершине  $v$ , счет времени продолжается и вершина  $v$  получает время входа  $leave[v] = leave[u] + 1$ . Таким образом, по завершению обхода каждая вершина получает два числа:  $entry[u]$  и  $leave[u]$ .

## 12.4. КОМПОНЕНТЫ СИЛЬНОЙ СВЯЗНОСТИ

По определению, компонента сильной связности есть множество вершин  $H$  таких, что для каждой пары  $u, v$  из  $H$  существует замкнутый путь, проходящий через  $u$  и  $v$ :

$$H = \{u, v \in H : u \mapsto v, v \mapsto u\}.$$

Отсюда следует, что из любой вершины  $u \in H$  достигаются все вершины множества  $H$ . Это наблюдение позволяет построить компоненту сильной связности, содержащую данную вершину  $u$ . Для этого достаточно построить дерево обхода в глубину из корневой вершины  $u$ . Обозначим  $W^+(u)$  множество вершин достижимых из  $u$  на  $G$ . Рассмотрим транспонированный граф  $G^T$ , т.е. граф, полученный из  $G$  изменением направления каждого ребра на противоположное. Построим дерево обхода в глубину из корневой вершины  $u$  на графе  $G^T$ . Обозначим  $W^-(u)$  множество вершин, достижимых из  $u$  на  $G^T$ .

**Утверждение 12.1.** Пересечение  $W^+(u) \cap W^-(u)$  дает либо одну вершину  $u$ , либо компоненту сильной связности  $H$ , содержащую данную вершину  $u$ . В первом случае вершина  $u$  является либо невозвратной, либо возвратной вида «петли»:  $u \rightarrow u$ .

*Доказательство.* Рассмотрим вершину  $v \in W^+(u) \cap W^-(u)$ , отличную от  $u$ . Согласно построению, существует путь  $u \mapsto v$  на графе  $G$  и существует путь  $u \mapsto v$  на графе  $G^T$ . Последнее означает, что существует путь  $v \mapsto u$  на графе  $G$ , что дает замкнутый путь вида  $u \mapsto v \mapsto u$  на графе  $G$ . Следовательно, любая вершина пересечения  $H = W^+(u) \cap W^-(u)$  соединяется с  $u$  периодическим путем. Отсюда следует, что

$$H = \{u, v \in H : u \mapsto v, v \mapsto u\}$$

является компонентой сильной связности.

Если пересечение  $H = W^+(u) \cap W^-(u)$  состоит из одной вершины  $u$ , то  $H$  является компонентой только в случае наличия петли  $u \rightarrow u$ . В противном случае,  $u$  есть невозвратная вершина. Утверждение доказано.

Следующий алгоритм был предложен независимо Р. Косарайю и М. Шариром [109]. Это очень простой в реализации алгоритм, основанный на двух сериях поисков в глубину и потому работающий за время  $O(n + m)$ , где  $n$  — число вершин,  $m$  — число дуг [44].

На первом этапе алгоритма выполняется серия обходов в глубину. Для этого мы проходим по всем вершинам графа и из каждой еще не посещенной вершины вызываем обход в глубину. При этом для каждой вершины  $u$  определяется время выхода  $leave[u]$ . Время выхода играет ключевую роль в алгоритме, эта роль выражена в приведенной ниже теореме.

Сначала введем обозначение: время выхода  $leave[H]$  из компоненты  $H$  сильной связности определим как максимум из значений  $leave[u]$  для всех  $u \in H$ . Определим время входа  $entry[H]$  для каждой компоненты сильной связности как минимум из величин  $entry[u]$  для всех  $u \in H$ .

Понятно, что компоненты сильной связности для данного графа  $G$  не пересекаются. Отсюда логично определение конденсации  $G^*$  как графа, получаемого из данного графа сжатием каждой компоненты сильной связности в одну вершину. В результате граф конденсации содержит вершины двух видов:

1) вершина  $i$ , соответствующая некоторой компоненте сильной связности  $H_i$ ;

2) вершина  $i$ , соответствующая невозвратной (проходной) вершине исходного графа  $G$ , в этом случае будем считать, что  $\{i\} = H_i$ .

Ориентированные ребра между двумя вершинами  $i$  и  $j$  графа конденсации  $G^*$  существуют только между разными вершинами. Этим исключаются петли  $i \rightarrow i$ . Ребро  $i \rightarrow j$  существует на  $G^*$ , если на  $G$  существует ребро из некоторого элемента  $H_i$  в некоторый элемент  $H_j$ .

Согласно построению, граф конденсации  $G^*$  имеет только невозвратные вершины. В этом случае говорят, что граф является ациклическим.

**Теорема 12.3.** Пусть  $i$  и  $j$  — две различные вершины графа конденсации и путь между ними есть  $i \mapsto j$ . Тогда  $leave[H_i] > leave[H_j]$ .

*Доказательство.* При обходе графа  $G$  в глубину возникают два принципиально различных случая в зависимости от того, в какое

множество вершин  $H_i$  или  $H_j$  впервые зайдет обход, т.е. в зависимости от соотношения между  $entry[H_i]$  и  $entry[H_j]$ .

1. Пусть множество  $H_i$  достигается раньше чем  $H_j$ , т.е.  $entry[H_i] < entry[H_j]$ . Это означает, что в момент времени  $t = entry[H_i]$  обход в глубину заходит в некоторую вершину  $v \in H_i$ , при этом все остальные вершины множеств  $H_i$  и  $H_j$  еще не посещены. По условию, в графе конденсации есть путь  $i \mapsto j$ , тогда существует путь  $H_i \mapsto H_j$ . Это означает существование пути  $w \mapsto u$ , где  $w \in H_i$ ,  $u \in H_j$ . Если  $H_i$  — компонента,  $v \in H_i$ ,  $w \in H_i$ , то либо  $v = w$ , либо существует путь  $v \mapsto w$ . Тогда из вершины  $v$  будет достижима не только вся компонента  $H_i$ , но и вся компонента  $H_j$ . Это означает, что обход из вершины  $v$  пройдет по всем вершинам компонент  $H_i$  и  $H_j$ , т.е. для любой вершины  $u \in H_i \cup H_j$ ,  $u \neq v$ , будет выполнено  $leave[v] > leave[u]$ .

2. Пусть первой была достигнута компонента  $H_j$ , т.е.  $entry[H_j] < entry[H_i]$ . Это означает, что в момент времени  $t = entry[H_j]$  обход в глубину заходит в некоторую вершину  $v \in H_j$ , причем все остальные вершины компонент  $H_i$  и  $H_j$  не посещены. Поскольку по условию в графе конденсации существовал путь  $i \mapsto j$ , значит вследствие ацикличности графа конденсации не существует обратного пути  $j \mapsto i$ , т.е. обход в глубину из вершины  $v$  не достигнет вершин  $H_i$ . Это означает, что они будут посещены обходом в глубину позже, откуда и следует  $leave[H_i] > leave[H_j]$ . Теорема доказана.

Доказанная теорема является основой алгоритма поиска компонент сильной связности. Из нее следует, что любой путь  $i \mapsto j$  в графе конденсации идет из компоненты с большей величиной  $leave$  в компоненту с меньшим значением  $leave$ .

Таким образом, если мы отсортируем все вершины  $v$  в порядке убывания времени выхода  $leave[v]$ , то первой окажется некоторая вершина  $u$  с максимальным значением  $leave[v]$ , принадлежащая «корневой» компоненте сильной связности  $H(u)$ . Для построения «корневой» сильной компоненты  $H(u)$  рассмотрим транспонированный граф  $G^T$ , т.е. граф, полученный из  $G$  изменением направления каждого ребра на противоположное. Нетрудно понять, что в этом графе будут те же компоненты сильной связности, что и в исходном графе. Более того, граф конденсации  $(G^T)^*$  для него будет равен транспонированному графу конденсации  $(G^*)^T$  исходного графа. Это означает, что на  $G^T$  из компоненты  $H(u)$  не будут выходить ребра, т.е. в  $H(u)$  можно войти и нельзя из нее выйти.

Таким образом, чтобы обойти всю компоненту сильной связности  $H(u)$ , содержащую некоторую вершину  $u$ , достаточно запустить обход из вершины  $u$  в графе  $G^T$ . Этот обход посетит все вершины этой компоненты сильной связности и только их. Далее мы можем удалить вершины  $H$  из графа  $G$  вместе с ребрами, исходящими из  $H$ . Затем находим очередную вершину  $v$  с максимальным значением  $leave[v]$ . Эта вершина может быть невозвратной, если в нее можно войти только из «корневой» сильной компоненты  $H$ . Тогда после удаления  $H$  вместе с ребрами, исходящими из нее,  $v$  будет невозвратной, если нет ребер вида  $w \rightarrow v$ . В этом случае вершину  $v$  следует удалить из графа  $G$  вместе с ребрами, исходящими из нее. Если  $v$  — возвратная, то запускаем обход в глубину на транспонированном графе из нее.

Итак, мы построили следующий алгоритм выделения компонент сильной связности.

Шаг 1. Совершим обход в глубину графа  $G$  и упорядочим вершины в порядке убывания времени выхода  $leave[v]$ .

Шаг 2. Построим транспонированный граф  $G^T$ .

Шаг 3. Определим вершину  $v \in G$  с максимальным значением  $leave[v]$ .

Шаг 4. Проверим существование ребра вида  $w \rightarrow v$ . (Наличие ребра  $w \rightarrow v$  при максимальном значении  $leave[v]$  означает, что  $v$  — возвратная вершина.) Если такое ребро существует, то идем в шаг 5, иначе полагаем  $H(v) = \{v\}$  и идем в шаг 6.

Шаг 5. Запустим обход в глубину графа  $G^T$  из вершины  $v$ , получим компоненту  $H(v)$  и запишем ее в список компонент.

Шаг 6. Удалим из  $G$  и  $G^T$  вершины  $H(v)$  вместе с ребрами, исходящими из них. Если  $G \neq \emptyset$  (т.е. остались не удаленные вершины), то идем в шаг 3.

Если  $G = \emptyset$ , то алгоритм завершен.

Заметим, что удаление вершины  $u$  вместе с ребрами, исходящими из них, можно осуществить заданием метки  $u^*$ .

## 12.5. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СОРТИРОВКА

Рассмотрим ориентированный граф  $G$ . Введем отношение квазипорядка между вершинами графа  $G$ . Будем писать  $i \rightarrow j$  тогда и только тогда, когда существует допустимый путь вида

$$i = i_0, i_1, i_2, \dots, i_m = j.$$

Напомним, что вершина  $i$  является возвратной тогда и только тогда, когда  $i \rightarrow i$ , и пара возвратных вершин  $i, j$  будет эквивалент-

тной тогда и только тогда, когда  $i \rightarrow j \rightarrow i$ , т.е. существует общий замкнутый путь. Матрица допустимых переходов зависит от нумерации вершин, и изменение нумерации порождает изменение вида матрицы переходов  $\Pi$ . Утверждение 2.2 гарантирует существование нумерации, которая приводит матрицу переходов в канонический вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \Pi_k & \cdots & \cdots \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \Pi_s \end{pmatrix},$$

где каждый диагональный блок  $\Pi_k$  либо отвечает компоненте сильной связности  $H_k$ , либо соответствует некоторой невозвратной вершине и состоит из одного нуля. Под диагональными блоками стоят только нули. Наша цель состоит в описании алгоритма, который осуществит данную перенумерацию. Предлагаемый алгоритм является модификацией описанного выше алгоритма определения компонентов сильной связности, где порядок удаления построенных компонент определяет новую нумерацию вершин, которая задается параметром  $no(u)$  для вершины  $u$ . Алгоритм перенумерации состоит в следующем.

Шаг 1. Совершим обход в глубину графа  $G$  и упорядочим вершины в порядке убывания времени выхода  $leave[v]$ .

Шаг 2. Построим транспонированный граф  $G^T$ . Положим  $no = 0$ .

Шаг 3. Определим вершину  $v \in G$  с максимальным значением  $leave[v]$ .

Шаг 4. Проверим существование ребра вида  $w \rightarrow v$ ,  $w \in G$ . Если такое ребро существует, то идем в шаг 5, иначе полагаем  $H(v) = \{v\}$  и идем в шаг 6.

Шаг 5. Запустим обход в глубину графа  $G^T$  из вершины  $v$ , получим компоненту  $H(v)$ .

Шаг 6. Пусть компонента  $H(v)$  содержит  $k$  вершин, пронумеруем вершины класса  $H(v)$  подряд от  $no + 1$  до  $no + k$ . Таким образом, каждая вершина  $u \in H(v)$  получает номер  $no(u)$ . Полагаем, что  $no := no + k$ . Удаляем из  $G$  и  $G^T$  вершины  $H(v)$  вместе с ребрами, исходящими из них. Если  $G \neq \emptyset$ , то идем в шаг 3; если  $G = \emptyset$ , то алгоритм завершен.

В результате описанного алгоритма каждая вершина  $u$  получает номер  $no(u)$ . Полученная нумерация приводит матрицу переходов  $\Pi$  в канонический вид.

## 12.6. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ

Рассмотрим граф  $G$ , из каждой вершины которого исходит хотя бы одна дуга  $e = (i \rightarrow j)$ . Заметим, что описанный граф всегда имеет замкнутые пути, так как мы можем построить бесконечный путь, двигаясь вперед, а число вершин конечно. Поэтому вершины на таком пути повторяются, что дает замкнутые пути. Напомним, что замкнутый путь  $\omega = \{i_0, i_1, \dots, i_p = i_0\}$  является циклом, если все вершины  $i_1, \dots, i_p$  различны. Будем говорить, что на графе  $G$  задано оснащение, если каждой дуге  $e = i \rightarrow j$  сопоставлено действительное число  $c(e) = c_{ij}$ . Таким образом матрица  $A = (c_{ij})$  задает оснащение графа. Любой цикл  $\omega = \{i_0, i_1, \dots, i_p = i_0\}$  получает среднее значение оснащения

$$\eta(\omega) = \sum_{e \in \omega} \frac{c(e)}{p},$$

которое назовем характеристикой цикла. Задача состоит в нахождении цикла, для которого характеристика достигает максимального (минимального) значения на циклах компоненты сильной связности.

Согласно теореме 8.1, спектр усреднения функции состоит из отрезков, каждый отрезок порожден некоторой компонентой  $\Omega$  цепно-рекуррентного множества. Согласно теореме 8.2, каждый отрезок  $[a, b]$  спектра оценивается спектром усреднения оснащения над компонентой сильной связности  $H(\Omega)$  символического образа, при этом  $a$  есть наименьшее среднее значение, а  $b$  — наибольшее среднее на циклах компоненты. Наша задача — найти описанные экстремальные значения и экстремальные циклы.

В работах [54, 60, 69, 99] рассмотрены методы решения поставленной задачи, при этом существуют два подхода к решению задачи. Первый основан на введении потенциалов для каждой вершины, поэтому мы будем его называть методом потенциала. Впервые метод потенциалов предложен И.В. Романовским [99]. Другой подход предложен Р.М. Карпом [69] и сводится к вычислению некоторой величины (минимального веса) для путей длиной  $n$ , где  $n$  — число вершин графа. В работе [54] рассмотрен алгоритм Ховарда, который относится к первому типу. Показано численно, что на больших графах такой алгоритм имеет преимущество перед алгоритмом Карпа. Сначала изучим алгоритм И.В. Романовского. Затем рассмотрим решение поставленной задачи алгоритмом Ховарда.

**Алгоритм И.В. Романовского [88].** В теории графов часто вместо термина «цикл» используется термин «контур». В частности, его применяет И.В. Романовский. Не ограничивая общности, мы предполагаем, что граф состоит из одной компоненты сильной связности. Если это не так, то следует применить предлагаемый алгоритм для каждой компоненты сильной связности по отдельности.

Рассмотрим алгоритм для поиска цикла, на котором достигается минимум усреднения. Запись  $G = (M, N)$  будет обозначать ориентированный граф с множеством вершин  $M$  и множеством дуг  $N$ . Пусть граф  $G$  имеет оснащение. Для дуги  $j \in N$  обозначим  $e(j)$  — вершину, куда входит ребро  $j$ , а  $b(j)$  — вершину, из которой ребро  $j$  выходит.

Подграф  $G_1 \subset G$  назовем деревом с корнем  $i$ , если в нем есть пути из  $i$  во все остальные вершины. Компонента сильной связности допускает дерево с корнем в любой вершине этой компоненты. Это дерево строится обходом графа в глубину. Мы будем строить дерево, к которому добавлена одна дуга, ведущая в корневую вершину. Такая дуга порождает цикл  $(M_c, N_c)$ .

Пусть  $z$  есть характеристика цикла. Согласно теории [42, 88],  $z$  есть искомая характеристика, если существует набор переменных  $v(i)$ ,  $i \in M$ , которые удовлетворяют неравенствам

$$z + v(e(j)) - v(b(j)) \leq c(j), \quad j \in N,$$

при этом равенство

$$z + v(e(j)) - v(b(j)) = c(j), \quad j \in N_c$$

выполнено на цикле  $(M_c, N_c)$ . Переменные  $v(i)$ ,  $i \in M$  называются потенциалом, так как  $v(i)$  определяется с точностью до общей постоянной.

При построении дерева все множество вершин разбивается на три подмножества  $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2$ , где  $M_0$  — множество обработанных алгоритмом вершин;  $M_1$  — множество вершин, ждущих обработки;  $M_2$  — вершины, до которых алгоритм еще не добрался. Вершины  $M_1$  организованы в очередь. В любой момент у нас имеется направленное дерево с множеством вершин  $M_0 \cup M_1$  с корнем в некоторой вершине  $i_0$ , при этом для всех вершин  $M_0 \cup M_1$  вычислены (возможно, не окончательно) значения потенциала  $v(k)$ . Алгоритм начинает работу с некоторого базисного цикла  $(M_c, N_c)$ ,  $i_0 \in M_c$ ,  $M_0 = \emptyset$ .



### Алгоритм построения дерева

1. Вычислить среднее значение  $z$  на цикле  $(M_c, N_c)$  и положить  $v(i_0) = 0$ .

2. Для всех дуг  $j \in N_c$  вычислить потенциал

$$z + v(e(j)) - v(b(j)) = c(j)$$

в порядке следования вершин на цикле.

3. Удалить дугу  $j$  цикла, входящую в  $i_0$ , и положить все вершины  $M_c$  в список  $M_1$ .

4. Пока список  $M_1$  непуст, необходимо:

4.1) исключить из  $M_1$  первую вершину  $i_1$  и положить  $M_0 := M_0 \cup i_1$ .

4.2) для всех дуг  $j = (i_1 \rightarrow i_2)$  с началом в  $i_1$  вычислить

$$w = v(i_1) + c(j) - z;$$

4.2.1) если  $i_2 \in M_2$ , то считаем  $v(i_2) = w$ , добавляем к дереву дугу  $j$  и перемещаем вершину  $i_2$  из  $M_2$  в конец списка  $M_1$ ;

4.2.2) если  $i_2 \in M_0 \cup M_1$  и  $w \geq v(i_2)$ , то закончить обработку дуги;

4.2.3) если  $i_2 \in M_0 \cup M_1$  и  $w < v(i_2)$ , то возможны два варианта:

а) если  $i_2$  предшествует  $i_1$  в построенном дереве, то найденный путь замыкает цикл со средним значением меньшим чем  $z$ . Выберем этот цикл как базисный и повторим алгоритм заново,

б) если  $i_2$  не предшествует  $i_1$  в построенном дереве, то включить дугу  $j$  в дерево, удаляя какое-либо ребро, входящее в  $i_2$ . Если при этом  $i_2 \in M_0$ , то переместить эту вершину из  $M_0$  в начало списка  $M_1$ ;

5) если вычисления дошли до этого пункта, то построено дерево и потенциал, которые удовлетворяют требуемым неравенствам и базисный цикл реализует минимальное среднее значение оснащения.

### Поиск начального цикла

Для выбора начального базисного контура И.В. Романовский предложил довольно эффективную процедуру [88].

1. Для каждой вершины  $i \in M$  среди выходящих из  $i$  дуг выбрать дугу  $j(i)$  с наименьшим  $c(j)$ . Множество отобранных дуг обозначим через  $N^*$ . Подсчитать для каждой вершины  $i$  ее степень  $s[i]$  — число входящих в нее отобранных дуг.

2. Составить список вершин  $M^*$  с нулевой степенью.

3. Пока список не пуст, выполнять следующие действия:

3.1) исключить из списка  $M^*$  первую вершину  $i_i$ ;

3.2) исключить ребро  $j(i_1)$  из  $N^*$ ;

3.3) уменьшить на единицу степень вершины  $i_2 = e(j)$ . Если эта степень стала нулевой, то включить  $i_2$  в список  $M^*$ ;

4) если список  $M^* = \emptyset$ , то дуги, входящие в  $N^*$ , образуют изолированные циклы. Полученные циклы нужно просмотреть и выбрать цикл с минимальным средним.

**Алгоритм Р.А. Ховарда** [54]. Будем решать задачу нахождения цикла  $\omega = \{i_0, i_1, \dots, i_p = i_0\}$  с максимальной характеристикой

$$\eta(\omega) = \sum_{e \in \omega} \frac{w(e)}{p},$$

где  $w(e)$  — оснащение графа. Стратегия — это отображение  $\pi$ , которое каждой вершине  $i$  сопоставляет дугу  $\pi(i) = (i \rightarrow i_1)$ . Таким образом, стратегия определяет некоторый подграф  $G(\pi)$ , имеющий те же вершины. Из каждой вершины  $i$  есть только один выход по дуге  $\pi(i)$ . На  $G(\pi)$  существует цикл, так как движение вперед на  $G(\pi)$  определяется однозначно и допускает бесконечное число шагов, поэтому всякий периодический путь является простым или циклом. Движение в обратную сторону (противоположную ориентации) допускает неоднозначность или ветвления, движение назад допускает конечное число шагов. Из каждой вершины достижим только один цикл, так как в противном случае появляется вершина с несколькими выходами, что невозможно на  $G(\pi)$ .

*Первая часть алгоритма* состоит в том, что для фиксированной стратегии  $\pi$  определяются числа  $\eta_i, x_i$  для каждой вершины  $i$ , где  $\eta_i$  — оценка для искомого среднего значения. Величину  $x_i$  можно назвать потенциалом, так как в условиях задачи только разность значений  $x_i - x_j$  определяется однозначно.

1. Фиксируем любой цикл  $\omega$  на  $G(\pi)$  и определим среднее значение

$$\eta = \frac{1}{p} \sum_{e \in \omega} w(e)$$

на  $\omega$ .

2. Фиксируем вершину  $i$  на  $\omega$ , полагаем  $\eta_i = \eta$  и  $x_i = 0$ .

3. Посещаем все вершины  $j$ , из которых достижима вершина  $i$  (по выбранной стратегии), при этом посещаем вершины  $j$  в обратном порядке стратегии  $\pi$ , начиная с  $k = i$ . Полагаем

$$\eta_j = \eta,$$

$$x_j = w(j \rightarrow k) - \eta + x_k.$$

4. Если существует непустое множество вершин  $V^* = \{j\}$ , из которых недостижима  $i$ , то повторяем описанный алгоритм на подграфе с вершинами  $V^*$ .

Таким образом, каждая вершина  $i$  получает пару  $(\eta_i, x_i)$ .

*Вторая часть алгоритма* меняет стратегию так, чтобы увеличить среднее значение  $\eta$ .

1. Полагаем

$$J = \{i : \max_{i \rightarrow j} \eta_j > \eta_i\};$$

$$K(i) = \arg \max_{i \rightarrow j} \eta_j, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$I = \{i : \max_{i \rightarrow j \in K(i)} (w(i \rightarrow j) - \eta_j + x_j) > x_i\};$$

$$L(i) = \arg \max_{i \rightarrow j \in K(i)} (w(i \rightarrow j) - \eta_j + x_j), \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь  $\arg \max_e f(e)$  есть множество элементов  $e^*$ , на которых реализуется  $\max_e f(e) = f(e^*)$ .

2. Если  $J = \emptyset$  и  $I = \emptyset$ , то алгоритм закончен.

3.1. Если  $J \neq \emptyset$ , мы меняем стратегию и полагаем

$$\pi^*(i) = \begin{cases} \text{любому } (i \rightarrow j) \text{ из } K(i), & \text{если } i \in J, \\ \pi(i), & \text{если } i \notin J. \end{cases}$$

3.2. Если  $J = \emptyset$ , но  $I \neq \emptyset$ , мы меняем стратегию и полагаем

$$\pi^*(i) = \begin{cases} \text{любому } (i \rightarrow j) \text{ из } L(i), & \text{если } i \in I, \\ \pi(i), & \text{если } i \notin I. \end{cases}$$

Затем переходим к первой части алгоритма.

После завершения алгоритма (реализуется п. 2 второй части алгоритма) мы имеем стратегию  $\pi$ , для каждой вершины  $i$  на  $G(\pi)$  определены пара значений  $\{\eta_i, x_i\}$ , где  $\eta_i = \eta$  есть искомое среднее значение на цикле, который лежит в  $G(\pi)$ .

### *Контрольные вопросы задания*

1. Опишите отличие интеграла Лебега от интеграла Римана.
2. Составьте компьютерную программу, осуществляющую обход графа в глубину.
3. Составьте компьютерную программу, осуществляющую обход графа в глубину с метками времени.
4. В интернете есть программа Р. Тарьяна определяющая сильные компоненты графа. Найдите ее и постройте сильные компоненты символического образа.
5. Чем различаются алгоритм Р. Тарьяна и алгоритм Р. Косарайю и М. Шарира [109]?
6. Составьте компьютерную программу, реализующую алгоритм И.В. Романовского.
7. Опишите различия алгоритмов И.В. Романовского и Р.А. Ховарда.
8. Составьте компьютерную программу вычисления экстремальных циклов на графе.

## Библиографический список

1. *Алексеев В.М.* Квазислучайные колебания и качественные вопросы небесной механики [Текст] / В.М. Алексеев. — Киев: изд-во ин-та математики АН УССР, 1972.
2. *Алексеев В.М.* Символическая динамика [Текст] / В.М. Алексеев. — Киев: изд-во ин-та математики АН УССР, 1976.
3. *Андронов А.А.* Грубые системы [Текст] / А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин // Доклады Академии наук СССР. — 1937. — Т. 14, № 4, С. 247–250.
4. *Афанасьев А.П.* Типическое поведение движений динамических и непрерывных периодических систем: новый взгляд на устойчивость по Пуассону [Текст] / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба, А.П. Пьянов // Труды ИСА РАН. — 2006. — Т. 25. — С. 148–165.
5. *Брегман Л.М.* Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для задач выпуклого программирования [Текст] / Л.М. Брегман // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1967. — Т. 7, № 3. — С. 630–631.
6. *Бронштейн И.У.* Неавтономные динамические системы [Текст]. — Кишинев: Штиинца, 1984.
7. *Биллингслей П.* Сходимость вероятностных мер [Текст] / П. Биллингслей. — М.: Наука, 1977.
8. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация [Текст] / П. Биллингслей. — М.: Мир, 1969.
9. *Васильев В.А.* Топология для младшекурсников [Текст] / В.А. Васильев. — М.: МЦНМО, 2014.
10. *Васильева Е.В.* Гладкие диффеоморфизмы плоскости с устойчивыми периодическими точками, лежащими в окрестности гомоклинической точки [Текст] / Е.В. Васильева // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 10. — С. 1355–1360.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц [Текст] / Ф.Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1967.
12. *Гукенхеймер Дж.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей [Текст]: пер. с англ. / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
13. *Динабург Е.И.* Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем [Текст] / Е.И. Динабург // Известия АН СССР, серия Математика. — 1971. — Т. 35, № 2. — С. 324–366.
14. *Ильяшенко Ю.* Нелокальные бифуркации [Текст] / Ю. Ильяшенко, Вейгу Ли. — М.: МЦНМО-ЧеРо, 1999.
15. *Каток А.Б.* Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой [Текст] / А.Б. Каток, Я.Г. Синай, А.М. Степин // Итоги науки и техн. сер. Мат. анализ. — 1975. — Т. 13. — С. 129–262.

16. *Колмогоров А.Н.* Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега [Текст] / А.Н. Колмогоров // ДАН СССР. — 1958. — Т. 119, № 5. — С. 861–864.
17. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1976.
18. *Кормен Т.Х.* Алгоритмы: построение и анализ [Текст]: пер. с англ. / Т.Х. Кормен, Ч.И. Лейзерсон, Р.Л. Ривест, К. Штайн. — М.: Вильямс, 2011.
19. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос [Текст] / С.П. Кузнецов. — М.: Физматлит, 2006.
20. *Лебедев В.В.* Математическое моделирование нестационарных экономических процессов [Текст] / В.В. Лебедев, К.В. Лебедев. — М.: ООО «еТест», 2011.
21. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения [Текст] / А.М. Ляпунов. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
22. *Макконнелл К.Р.* Экономикс [Текст] / К.Р. Макконнелл, С.Л. Брю. — М.: ИНФРА-М, 1992.
23. *Немыцкий В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений [Текст] / В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. — М.; Л.: ГИТЛ, 1949.
24. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику [Текст] / З. Нитецки. — М.: Мир, 1975.
25. *Осипенко Г.С.* Введение в символический анализ динамических систем [Текст] / Г.С. Осипенко, Н.Б. Ампилова. — СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2005.
26. *Осипенко Г.С.* Динамика биологических систем с памятью [Текст] / Г.С. Осипенко // Динамические системы. — 2012. — Т. 2, № 1–2. — С. 121–136.
27. *Осипенко Г.С.* К вопросу об аппроксимации инвариантных мер динамических систем [Электронный ресурс] / Г.С. Осипенко // Дифференциальные уравнения и процессы управления, эл. журн. — 2008. — № 2. — С. 57–79. — URL: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.
28. *Осипенко Г.С.* Кодировка траекторий и инвариантных мер [Текст] / Г.С. Осипенко // Математический сборник. — 2020. — Т. 211, № 7. — С. 151–176.
29. *Осипенко Г.С.* О символическом образе динамической системы [Текст] / Г.С. Осипенко // Краевые задачи. Сб. трудов. — Пермь, 1983. — С. 101–105.
30. *Осипенко Г.С.* Показатели Ляпунова и инвариантные меры на проективном расслоении [Текст] / Г.С. Осипенко // Математические заметки. — 2017. — Т. 101, № 4. — С. 549–561.
31. *Осипенко Г.С.* Потоки на графах и инвариантные меры динамических систем [Электронный ресурс] / Г.С. Осипенко // Дифференциальные уравнения и процессы управления, эл. журн. — 2021. — № 3. — С. 51–70. — URL: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.
32. *Осипенко Г.С.* Спектр усреднения функции над псевдотраекториями динамической системы [Текст] / Г.С. Осипенко // Математический сборник. — 2018. — Т. 209, № 8. — С. 114–137.

33. *Осипенко Г.С.* Сходимость в среднем периодических псевдотраекторий и инвариантные меры динамических систем [Текст] / Г.С. Осипенко // Математические заметки. — 2020. — Т. 108, № 6. — С. 882–898.
34. *Палис Ж.* Геометрическая теория динамических систем [Текст] / Ж. Палис, В. Ди Мелу. — М.: Мир, 1986.
35. *Петренко Е.И.* Компьютерное исследование динамических систем на основе метода символического образа [Текст]: дис. ... канд. физ. — мат. наук / Е.И. Петренко. — СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2009.
36. *Пилюгин С.Ю.* Введение в грубые системы дифференциальных уравнений [Текст] / С.Ю. Пилюгин. — Л.: ЛГУ, 1988.
37. *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц [Текст] / С. Писсанецки. — М.: Мир, 1988.
38. *Плисс В.А.* К теории инвариантных поверхностей [Текст] / В.А. Плисс // Дифференциальные уравнения. — 1966. — Т. 2, № 9. — С. 1139–1150.
39. *Половинкин Е.С.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа [Текст] / Е.С. Половинкин, М.В. Балашов. — М.: Физматлит, 2004.
40. *Прасолов В.В.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии [Текст] / В.В. Прасолов. — М.: Изд. МЦНМО, 2004.
41. *Ризниченко Г.Ю.* Математические модели в биофизике и экологии [Текст] / Г.Ю. Ризниченко. — М.; Ижевск: Центр компьютерных исследований, 2003.
42. *Романовский И.В.* Алгоритмы решения экстремальных задач / И.В. Романовский. — М.: Наука, 1977.
43. *Рюэль Д.* О природе турбулентности. Странные аттракторы [Текст] / Д. Рюэль, Ф. Такенс. — М.: Мир, 1981. — С. 117–151.
44. *Седжвик Р.* Фундаментальные алгоритмы на  $S^{++}$ . Алгоритмы на графах [Текст] / Р. Седжвик. — СПб.: ООО ДиаСофтЮП, 2002.
45. *Синай Я.Г.* Современные проблемы эргодической теории [Текст] / Я.Г. Синай. — М.: Физматлит, 1995.
46. *Столерю Л.* Равновесие и экономический рост [Текст] / Л. Столерю. — М.: Статистика, 1974.
47. *Шелейховский Г.В.* Композиция городского плана как проблема транспорта [Текст] / Г.В. Шелейховский, 1946.
48. *Штильман М.С.* О числе инвариантных мер с максимальной энтропией для сдвига в пространстве последовательностей [Текст] / М.С. Штильман // Математические заметки. — 1971. — Т. 9, вып. 3. — С. 291–302.
49. *Avrutin V.* Investigation of dynamical systems using symbolic images: efficient implementation and applications [Text] / V. Avrutin, P. Levi, V. Schanz [et al.] // International J. of Bifurcation and Chaos. — 2006. — Vol. 16, № 12. — P. 3451–3496.
50. *Bhatia N.P.* Stability theory of dynamical systems [Text] / N.P. Bhatia, G.P. Szego. — N.Y.: Springer, 1970.

51. *Birkhoff G.D.* Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques [Text] / G.D. Birkhoff // Mem. Pont. Acad. Novi Lyncaei. — 1935. — № 1. — P. 85–216.
52. *Blank M.* Ruelle-Perron-Frobenius spectrum for Anosov maps [Text] / M. Blank, G. Keller, C. Liverani // Nonlinearity. — 2002. — № 15. — P. 1905–1973.
53. *Cao Y.* Some non-hyperbolic systems with strictly non-zero Lyapunov exponents for all invariant measures: horseshoes with internal tangencies [Text] / Y. Cao, S. Luzzatto, I. Rios // Discrete and continuous dynamical systems. — 2006. — Vol. 15, № 1. — P. 61–71.
54. *Cochet-Terrason J.* Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra [Text] / J. Cochet-Terrason, G. Cohen, S. Gaubert [et al.] // IFAC Conference on System Structure and Control. — 1998, July 8–10.
55. *Colonius F.* The Dynamics of Control [Text] / F. Colonius, W. Kliemann. — Burkhauser, 2000.
56. *Franke J.* Hyperbolicity and chain recurrence [Text] / J. Franke, J.J. Selgrade // Differential Equations. — 1977. — № 26. — P. 27–36.
57. *Froyland G.* On Ulam approximation of the isolated spectrum and eigenfunctions of hyperbolic maps [Text] / G. Froyland // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2007. — Vol. 17, № 3. — P. 203–221.
58. *Funding D.* Investigating Dynamics by Multilevel Phase Space Discretization [Text]: PhD thesis / D. Funding. — Stuttgart University, 2006.
59. *Funding D.* On the appearance of multiple attractors in discrete food-chains [Text] / D. Funding, T. Lindström, G.S. Osipenko // Applied Mathematics and Computation. — 2007. — № 184 (2). — P. 429–444.
60. *Georgiadis L.* An experimental study of minimum mean cycle algorithms [Text] / L. Georgiadis, A.V. Goldberg, R.E. Tarjan, R.F. Werneck // Proc. 6th International Workshop on Algorithm Engineering and Experiments. — 2009. — P. 1–13.
61. *Gradnami A.* Food chains in the chemostat: Relation between mean yield and complex dynamics [Text] / A. Gradnami, O. De Feo, S. Rinaldi // Bulletin of Mathematical Biology. — 1998. — Vol. 60. — P. 703–719.
62. *Goodman T.N.* Relating topological entropy and measure theoretic entropy [Text] / T.N. Goodman // Bulletin of London Math. Soc. — 1971. — Vol. 3, № 2. — P. 176–180.
63. *Hadamard J.* Les surfaces à courbures opposées et leur lignes géodésiques [Text] / J. Hadamard // Journal de mathématiques pures et appliquées. — 1898. — 5e ser., № 4. — P. 27–73.
64. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with strange attractor [Text] / M. Hénon // Comm. Math. Phys. — 1976. — № 50. — P. 69–77.
65. *Hsu C.S.* Cell-to-Cell Mapping [Text] / C.S. Hsu. — N.Y.: Springer-Verlag, 1987.
66. *Ikeda K.* Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system [Text] / K. Ikeda // Opt. Comm. — 1979. — Vol. 30. — P. 257–261.



67. *Ikeda K.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity [Text] / K. Ikeda, H. Daido, O. Akimoto // Phys. Rev. Lett. — 1980. — Vol. 45. — P. 709–712.
68. *Jiu D.* Finite approximation of Frobenius-Perron operators, a solution of Ulam's conjecture to multi-dimensional transformation [Text] / D. Jiu, Zh. Aihui // Physica D. — 1992. — Vol. 92, № 1–2. — P. 61–66.
69. *Karp R.M.* A characterization of the minimum mean-cycle in a digraph [Text] / R.M. Karp // Discrete Mathematics. — 1978. — № 23. — P. 309–311.
70. *Katok A.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems [Text] / A. Katok, B. Hasselblat. — Cambridge University Press, 1995.
71. *Kemeny J.G.* Finite Markov chains [Text] / J.G. Kemeny, J.L. Snell // The University Series in Undergraduate Mathematics Princeton. — Van Nostrand, 1960.
72. *Kryloff N.* La théorie générale de la mesure dans son application a l'etude das systemes dynamiques de la mécanique non linéaire [Text] / N. Kryloff, N. Bogollouboff // Ann. Math. — 1937. — Vol. 38, № 1. — P. 65–113.
73. *Lefschetz S.* Differential Equations: Geometric Theory [Text] / S. Lefschetz. — N.Y.: Interscience Publishers, 1957.
74. *Levitin A.* Introduction to the Design and Analysis of Algorithms [Text] / A. Levitin. — Boston: Addison-Wesley, 2003.
75. *Lind D.* An introduction to symbolic dynamics and coding [Text] / D. Lind, B. Marcus. — Cambridge University Press, 1995.
76. *Lindström T.* On the dynamics of discrete food chains: Low- and high-frequency behavior and optimality of chaos [Text] / T. Lindström // Journal of Mathematical Biology. — 2002. — Vol. 45. — P. 396–418.
77. *Lozovanu D.* Algorithms for finding the minimum cycle mean in the weighted directed graph [Text] / D. Lozovanu, C. Petic // Computer Science Journal of Moldova. — 1998. — Vol. 6, № 1. — P. 27–34.
78. *Mañé R.* Characterization of AS diffeomorphisms [Text] / R. Mañé // Lect. Notes in Math. — 1977. — Vol. 597. — P. 389–394.
79. *Mañé R.* A proof of the  $C^1$  stability conjecture [Text] / R. Mañé // Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. — 1988. — Vol. 66. — P. 161–610.
80. *Mises R. von.* Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung [Text] / R. von Mises, H. Pollaczek-Geiringer // ZAMM 9. — 1929. — P. 152–164.
81. *Morse H.M.* A one-to-one representation of geodesics on a surface of negative curvature [Text] / H.M. Morse // Amer. J. of Math. — 1921. — Vol. 43, № 1. — P. 33–51.
82. *Morse H.M.* Symbolic dynamics I, II [Text] / H.M. Morse, G.A. Hedlung // Amer. J. of Math. — 1938. — Vol. 60. — P. 815–866; 1940. — Vol. 62. — P. 1–42.
83. *Murray J.D.* Mathematical biology, an introduction [Text] / J.D. Murray. — Springer, 2002.
84. *Nitecki Z.* Filtrations, decompositions and explosions [Text] / Z. Nitecki, M. Shub // Amer. J. of Math. — 1975. — Vol. 97, № 4. — P. 1029–1047.

85. *Newhouse S.* Diffeomorphisms with infinitely many sinks [Text] / S. Newhouse // Topology. — 1974. — Vol. 12. — P. 9–18.
86. *Newhouse S.* On the estimation of topological entropy [Text] / S. Newhouse, T. Pignataro // J. Stat. Phys. — 1993. — Vol. 72. — P. 1331–1351.
87. *Osipenko G.S.* Center manifold [Text] / G.S. Osipenko // Encyclopedia of Complexity and Systems Science / ed. by R.A. Meyers. — N.Y.; Berlin: Springer, 2009. — P. 936–951.
88. *Osipenko G.S.* Computation of the Morse Spectrum [Text] / G.S. Osipenko, J.V. Romanovsky, N.B. Ampilova, E.I. Petrenko // J. of Mathematical Sciences. — 2004. — Vol. 120, № 2. — P. 1155–1166.
89. *Osipenko G.S.* Dynamical systems, Graphs, and Algorithms [Text] / G.S. Osipenko // Lectures Notes in Mathematics. — Berlin: Springer, 2007.
90. *Osipenko G.S.* Localization of the chain recurrent set by symbolic dynamics methods [Text] / G.S. Osipenko // Proceedings of Dynamics Systems and Applications. — 1994. — Vol. 1. — P. 227–282.
91. *Osipenko G.S.* Nonlinear Dynamics of the Interaction of National Income. Interest Rate and Price Level [Text] / G.S. Osipenko // J. of Mathematical Sciences. — 2015. — Vol. 205, is. 6. — P. 806–820.
92. *Osipenko G.S.* Spectrum of a dynamical system and applied symbolic dynamics [Text] / G.S. Osipenko // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 252, № 2. — P. 587–616.
93. *Osipenko G.S.* Symbolic images and invariant measures of dynamical systems [Text] / G.S. Osipenko // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 2010. — Vol. 30. P. 1217–1237.
94. *Oxtoby J.C.* Ergodic sets [Text] / J.C. Oxtoby // Bull. of the American Math. Soc. — 1952. — Vol. 58, № 2. — P. 116–136.
95. *Pilyugin S. Yu.* Shadowing in dynamical system [Text] / S. Yu. Pilyugin // Lecture Notes in Mathematics, 1706. — Berlin: Springer, 1999.
96. *Robbin J.* A structural stability theorem [Text] / J. Robbin // Ann. Math. — 1971. — Vol. 94, № 3. — P. 447–493.
97. *Robinson C.* Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos [Text] / C. Robinson. 1995.
98. *Robinson C.* Structural stability of  $C^1$ -diffeomorphism [Text] / C. Robinson // J. Differential Equations. — 1976. — Vol. 22, № 1. — P. 28–73.
99. *Romanovskii I.V.* Optimization of stationarly control of a discrete deterministic process [Text] / I.V. Romanovskii // Cybernetics. — 1967. — Vol. 3. — P. 52–62.
100. *Rosenzweig M.L.* Exploitation in three trophic levels / M.L. Rosenzweig // The American Naturalist. — 1973. — Vol. 107. — P. 275–294.
101. *Rosenzweig M.L.* Graphical representation and stability conditions of predator-pray interactions [Text] / M.L. Rosenzweig, R.H. MacArthur // The American Naturalist. — 1963. — Vol. 97. — P. 209–223.
102. *Sacker R.* Existence of dichotomies and invariant splitting for linear differential systems I–III [Text] / R. Sacker, G. Sell // J. Diff. Eq. — 1974. — Vol. 15, № 3. — P. 429–458; 1976. — Vol. 22, № 2. — P. 476–522.

103. *Salamon D.* Flows on vector bundles and hyperbolic sets [Text] / D. Salamon, E. Zehnder // Trans. AMS. — 1988. — Vol. 306, № 2. — P. 623–649.
104. *Schuster H.G.* Deterministic Chaos [Text] / H.G. Schuster, W. Just. — Weinheim: WILEY-VCH, 2005.
105. *Selgrade J.* Isolated invariant sets for flows on vector bundles [Text] / J. Selgrade // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 203. — P. 359–390.
106. *Sell G.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics / G. Sell // Trans. AMS. — 1967. — Vol. 127. — P. 241–283.
107. *Smale S.* Diffeomorphisms with many periodic points [Text] / S. Smale // Differential and combinatorial topology. — Princeton Univ. Press, 1965. — P. 63–80.
108. *Smale S.* Structurally stable diffeomorphisms with infinitely many periodic points [Text] / S. Smale // Proc. Intern. Conf. Nonlinear Oscill. — 1963. — Vol. 2. — P. 365–366.
109. *Sharir M.* A strong-connectivity algorithm and its applications to data flow analysis [Text] / M. Sharir // Computers and Mathematics with Applications. — 1981. — Vol. 7 (1). — P. 67–72.
110. *Shub M.* Stabilité globale de systèmes dynamiques [Text] / M. Shub // Astérisque. — 1978. — Vol. 56. — P. 1–21.
111. *Takens F.* Detecting strange attractor in turbulence [Text] / F. Takens // Lect. Notes in Math. — 1981. — Vol. 898. — P. 89–94.
112. *Tarjan R.* Algorithm design [Text] / R. Tarjan // Communications of the ACM. — 1987. — Vol. 30, № 3. — P. 204–212.
113. *Tarjan R.* Depth-first search and linear graph algorithms [Text] / R. Tarjan // SIAM Journal on Computing. — 1972. — Vol. 1. — P. 146–160.
114. *Ulam S.* Problems in Modern Mathematics [Text] / S. Ulam. — N.Y.: Wiley, 1964.
115. *Van der Pol B.* On relaxation-oscillations [Text] / B. Van der Pol // The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. J. of Sci. — 1927. — Vol. 2 (7). — P. 978–992.

# Оглавление

<b>Предисловие.....</b>	<b>3</b>
<b>Структура курса .....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Динамические системы.....</b>	<b>7</b>
1.1. Определения.....	7
1.2. Кодировка.....	9
1.3. Символическая динамика.....	10
1.4. Динамика на графе.....	12
1.5. Детерминизм и ограниченная точность.....	14
<i>Контрольные вопросы и задания .....</i>	<i>15</i>
<b>Глава 2. Символический образ .....</b>	<b>17</b>
2.1. Определение символического образа.....	17
2.2. Численное построение символического образа.....	18
2.3. Псевдотраектории.....	19
2.4. Применение символического образа.....	22
2.5. Параметры символического образа.....	22
2.6. Отслеживание псевдотраекторий .....	24
2.7. Матрица допустимых переходов .....	26
2.8. Процесс подразбиения .....	28
2.9. Последовательность символических образов .....	29
<i>Контрольные вопросы и задания .....</i>	<i>31</i>
<b>Глава 3. Отслеживание траекторий .....</b>	<b>32</b>
3.1. Согласованные пути .....	32
3.2. Тихоновская топология.....	37
3.3. Кодировка траекторий.....	44
3.4. Периодические псевдотраектории.....	46
3.5. Локализация цепно-рекуррентного множества .....	50
<i>Контрольные вопросы и задания .....</i>	<i>55</i>
<b>Глава 4. Аттракторы и фильтрация .....</b>	<b>57</b>
4.1. Определения и примеры .....	57
4.2. Аттрактор на символическом образе .....	60
4.3. Аттракторы системы и символического образа .....	61
4.4. Матрица перехода и аттракторы .....	62
4.5. Фильтрация.....	64
4.6. Фильтрация на символическом образе .....	66
<i>Контрольные вопросы и задания .....</i>	<i>69</i>
<b>Глава 5. Инвариантные меры .....</b>	<b>70</b>
5.1. Поток на символическом образе.....	70
5.2. Свойства потоков.....	74
5.3. Аппроксимация инвариантных мер .....	84
5.4. Вычисление инвариантной меры .....	89

5.5. Последовательность несогласованных потоков .....	93
5.6. Аппроксимация $\delta$ -мерами .....	97
5.7. Метод балансировки .....	100
5.8. Пример вычисления инвариантной меры .....	105
<i>Контрольные вопросы и задания</i> .....	106
<b>Глава 6. Эргодические меры .....</b>	<b>108</b>
6.1. Необходимые сведения .....	108
6.2. Аппроксимация эргодических мер .....	109
6.3. Носитель инвариантной меры .....	118
<i>Контрольные вопросы и задания</i> .....	122
<b>Глава 7. Энтропия .....</b>	<b>124</b>
7.1. Определения .....	124
7.2. Энтропия символического образа .....	128
7.3. Метрическая энтропия .....	133
7.4. Стохастические цепи Маркова .....	134
7.5. Энтропия потока .....	136
7.6. Поток максимальной энтропии .....	138
7.7. Вычисление потока максимальной энтропии .....	140
<i>Контрольные вопросы и задания</i> .....	143
<b>Глава 8. Усреднение .....</b>	<b>144</b>
8.1. Определения .....	144
8.2. Свойства спектра .....	145
8.3. Усреднение на графе .....	149
8.4. Локализация спектра усреднения .....	154
8.5. Усреднение и потоки .....	157
8.6. Усреднение и инвариантные меры .....	159
8.7. Экстремальное свойство эргодических мер .....	164
8.8. Сходимость в среднем .....	167
8.9. Рекуррентность и периодичность .....	172
8.10. Периодичность и эргодичность .....	177
8.11. Усреднение на окружности .....	183
8.12. Показатель изменения объема .....	185
<i>Контрольные вопросы и задания</i> .....	187
<b>Глава 9. Показатели Ляпунова .....</b>	<b>188</b>
9.1. Определения .....	188
9.2. Экспоненциальные оценки .....	192
9.3. Гиперболичность .....	196
<b>9.4. <math>\Omega</math>-устойчивость .....</b>	<b>198</b>
9.5. Гомоклиническое касание .....	203
<i>Контрольные вопросы и задания</i> .....	209
<b>Глава 10. Структурная устойчивость .....</b>	<b>211</b>
10.1. Определения .....	211
10.2. Условие трансверсальности .....	213
10.3. Двойственный дифференциал .....	214
10.4. Эквивалентные условия .....	217

10.5. Проверка структурной устойчивости .....	222
<i>Контрольные вопросы и задания .....</i>	<i>227</i>
<b>Глава 11. Численные эксперименты .....</b>	<b>228</b>
11.1. Компьютерно-ориентированная технология.....	228
11.2. Цепно-рекуррентное множество .....	232
11.3. Аттракторы.....	234
11.4. Лента Мёбиуса как аттрактор .....	240
11.5. Тест на гиперболичность .....	242
11.6. Построение гомоклинических точек.....	244
11.7. Биологические системы с памятью.....	250
11.8. Макроэкономическая динамика .....	254
11.8.1. Динамика вблизи неподвижных точек .....	255
11.8.2. Слоение с инвариантными слоями.....	258
11.8.3. Неконтролируемое возмущение системы .....	261
<i>Контрольные задания .....</i>	<i>264</i>
<b>Глава 12. Дополнение .....</b>	<b>266</b>
12.1. Мера и топология .....	266
12.2. Графы .....	269
12.3. Обход графа в глубину .....	271
12.4. Компоненты сильной связности .....	274
12.5. Топологическая сортировка.....	277
12.6. Экстремальные циклы .....	279
<i>Контрольные вопросы задания .....</i>	<i>284</i>
<b>Библиографический список .....</b>	<b>285</b>

*По вопросам приобретения книг обращайтесь:*  
**Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):**  
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1  
Тел. (495) 280-33-86 (доб. 222, 564)  
E-mail: books@infra-m.ru

•

**Отдел «Книга—почтой»:**  
тел. (495) 280-33-86 (доб. 222)

---

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11
----------------	---

*Учебное издание*

**Осипенко Георгий Сергеевич**

# **КОМПЬЮТЕРНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

## **УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

Оригинал-макет подготовлен в НИЦ ИНФРА-М  
ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»  
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1  
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29  
E-mail: books@infra-m.ru <http://www.infra-m.ru>

Подписано в печать 11.09.2022.  
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Petersburg.  
Печать цифровая. Усл. печ. л. 14,13.  
Тираж 500 экз. (I — 50). Заказ № 00000  
ТК 690880-1000210-110922

Отпечатано в типографии ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»  
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1  
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29