

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ  
СЕВАСТОПОЛЕ

Факультет «Компьютерной математики»  
Направление подготовки «Прикладная математика и информатика»  
01.03.02 (бакалавр)

**ОТЧЕТ**  
**по лабораторной работе №5**  
**«Локализация цепно-рекуррентного множества в**  
**проективном пространстве»**

Работу выполнил:  
студент группы ПМ-401  
Хаметов Марк Владимирович

Руководитель: профессор  
кафедры прикладной  
математики и информатики  
Осипенко Георгий Сергеевич

Севастополь, 2023

## Оглавление

Оглавление	2
Постановка задачи	3
Теоретическая часть	4
Интерфейс программы	6
Результаты	9
Использованная литература	11

## Постановка задачи

Дана квадратная матрица размерности 3. Матрица выступает в роли оператора преобразования. Необходимо построить визуализацию цепно-рекуррентного множества в 3-х мерном проективном пространстве.

Решение найдено на примере трех матриц. Символический образ ЦРМ проективного пространства зависит от собственных чисел матрицы матрицы. Для разных случаев были выбраны следующие матрицы:

Случай 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет три различных собственных значения.

Случай 2:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет 2 различных собственных значения.

Случай 3:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет комплексные собственных значения.

## Теоретическая часть

Сильно связанные вершины графа – это подмножества таких вершин ориентированного графа, между которыми существует путь в обоих направлениях.

Пусть  $R^{n+1}$  – векторное пространство размерности  $n+1$  над полем  $R$  вещественных чисел.  $V$ -множество векторов данного пространства. Непустое множество  $P$  называется проективным пространством  $n$  размерности, порожденным пространством  $R^{n+1}$ , если задано отображение  $A: V/\{0\} \rightarrow P$ , удовлетворяющие 2 аксиомам проективного пространства:

1.  $A$ -сюръективное отображение.
2.  $A(x)=A(y)$  тогда и только когда  $x$  и  $y$  коллинеарны.

Тогда для трехмерного векторного пространства заданного квадратной матрицей  $3 \times 3$  мы задаем динамическую систему в соответствии с элементами матрицы. Отображение имеет вид:

$$X_{n+1} = A * X_n$$

Для визуализации проективного пространства мы строим символический образ динамической системы и находим в получившемся графе компоненты сильной связности.

Мы представляем проективное пространство в виде трех локальных карт. Карты имеют размер  $[-1;-1] \times [1;1]$ . Где первая карта определена осями  $ou$  и  $oz$ , вторая карта определена осями  $ox$  и  $oz$ , третья карта определена осями  $ox$  и  $ou$ .

Мы проводим нормировку вектора  $X_{n+1}$ . Мы делим все компоненты вектора на максимальное значение компоненты в векторе. Номер максимальной компоненты определяет номер карты, на которой мы закрашиваем ячейку.

Разбиение области на ячейки - это разбиение на прямоугольники одинакового размера. Нумерация ячеек идет в порядке сначала слева направо, затем сверху вниз. Тогда обозначим ячейку  $M(i)$ .

По теореме 5.1 из источника [1]: Пусть  $P(d)$  - это окрестность равная объединению всех ячеек соответствующих возвратным вершинам графа, где  $d$  - это длина стороны ячейки.

$$P(d) = \{ \cup M(i), i - \text{возвратная} \}$$

Тогда аттрактор динамической системы совпадает с пересечением множеств  $P(d)$  по формуле:

$$Q = \bigcap_{d>0} P(d)$$

По теореме 5.2 из источника [1]: При уменьшении размера ячейки новая окрестность оказывается вложена в старую. Из этого следует то, что уменьшение диаметра ячеек приводит к меньшему размеру окрестности. Таким образом, последовательность окрестностей монотонно убывает и сходится к цепно-рекуррентному множеству по формуле:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \bigcap_k P_k = Q.$$

Для подсчета номера ячейки полученного после отображения точки области применяем формулу:

$$n = [(x - x_{\min}) / h_x] + 1 + [(y_{\min} - y) / h_y] * [(x_{\max} - x_{\min}) / h_x]$$

# Интерфейс программы

Локализация цепно-рекуррентного множества в проективном пространстве

Меню

Матрица

1

-1

1

1

1

-1

2

-1

0

Построить итераций и Достроить итераций

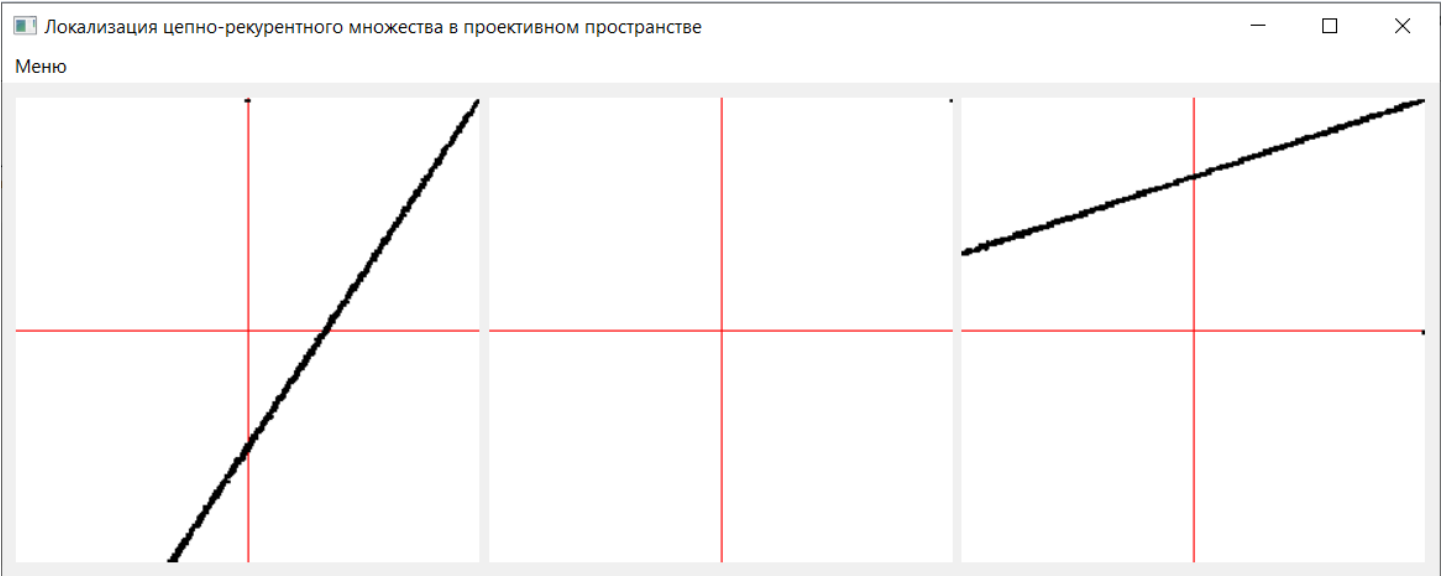
Построить график для итераций:

8

Проитерировать существующий:

1

Построить изображение



Локализация цепно-рекуррентного множества в проективном пространстве

Меню

[[ 1 -1 1]  
[ 1 1 -1]  
[ 2 -1 0]]

Собственные значения: -1.0000000000000004 1.0000000000000009 1.9999999999999993

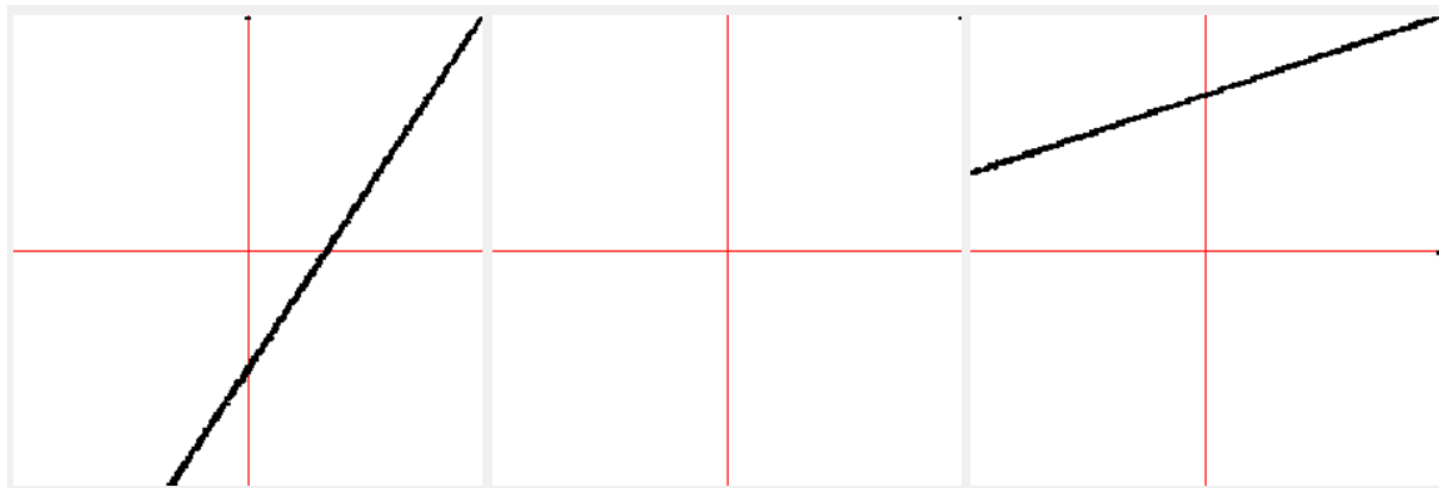
Время подсчета 8 итерации: 2.4488303661346436

Размер ячейки: 0.0078125

## Результаты

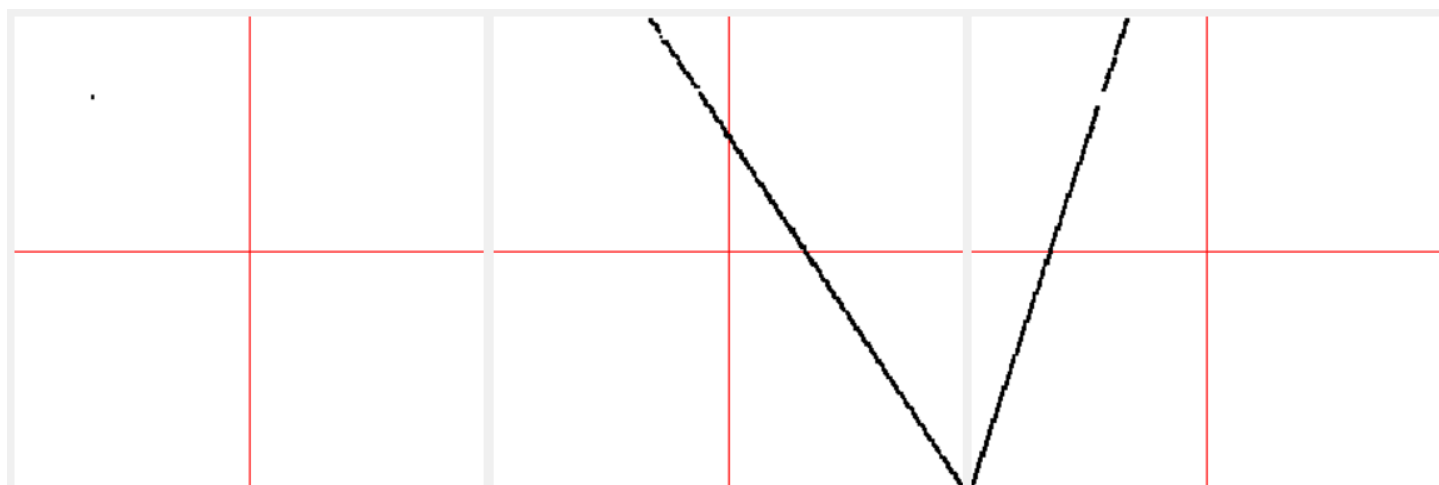
Программа написана на C++. Интерфейс сделан на Python.

Результаты для матрицы A:



```
[[ 1 -1 1]
 [ 1 1 -1]
 [ 2 -1 0]]
Собственные значения: -1.0000000000000004 1.0000000000000009 1.9999999999999993
Время подсчета 8 итераций: 2.4488303661346436
Размер ячейки: 0.0078125
```

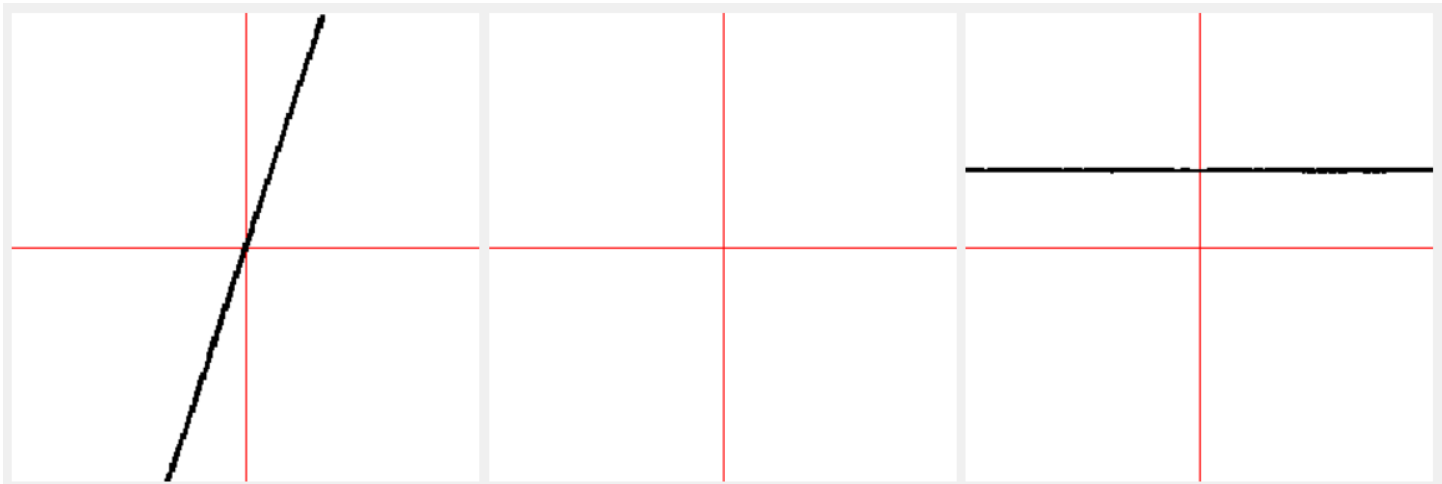
Результаты для матрицы B:



```
[[ 2 -2 1]
 [-2 0 -1]
 [ 2 1 2]]
Собственные значения: 3.9999999999999996 -0.9999999999999998 1.0000000000000002
Время подсчета 8 итераций: 2.3111603260040283
Размер ячейки: 0.0078125
```



Результаты для матрицы C:



[[ 1 -1 -1]  
[ 1 1 0]  
[ 3 0 1]]  
Собственные значения: (1+2j) (1-2j) (1+0j)  
Время подсчета 8 итераций: 2.2933027744293213  
Размер ячейки: 0.0078125

## Использованная литература

1. “Введение в символический анализ динамических систем” Г.С.Осипенко, Н.Б.Ампилова.
2. <https://web.archive.org/web/20090812054837/http://rain.ifmo.ru/cat/view.php/vis/graph-general/scc-2008/algorithm>
3. <https://habr.com/ru/articles/537290/>
4. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Компонента\\_сильной\\_связности](https://ru.wikipedia.org/wiki/Компонента_сильной_связности)
5. <https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-pokazateley-lyapunova-metodamisimvolicheskogo-analiza>
6. [https://en.wikipedia.org/wiki/Coordinate\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Coordinate_system)
7. <https://stackoverflow.com/questions/60918473/how-do-i-convert-pixel-screen-coordinates-to-cartesian-coordinates>
8. <https://eltehhelp.xyz/wp-content/uploads/2021/09/image-2.png>
9. <https://eltehhelp.xyz/wp-content/uploads/2021/09/image-1.png>

