

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ  
СЕВАСТОПОЛЕ

Факультет «Компьютерной математики»  
Направление подготовки «Прикладная математика и информатика»  
01.03.02 (бакалавр)

**ОТЧЕТ**  
**по лабораторной работе №5**  
**«Локализация цепно-рекуррентного множества в**  
**проективном пространстве»**

Работу выполнил:  
студент группы ПМ-401  
Хаметов Марк Владимирович

Руководитель: профессор  
кафедры прикладной  
математики и информатики  
Осипенко Георгий Сергеевич

Севастополь, 2023

## Оглавление

Оглавление.....	2
Постановка задачи.....	3
Теоретическая часть.....	5
Интерфейс программы.....	7
Результаты.....	8
Использованная литература.....	10

## Постановка задачи

Дана квадратная матрица размерности 3. Матрица выступает в роли оператора преобразования. Необходимо построить визуализацию цепно-рекуррентного множества в 3-х мерном проективном пространстве.

Решение найдено на примере трех матриц. Символический образ ЦРМ проективного пространства зависит от собственных чисел матрицы матрицы. Для разных случаев были выбраны следующие матрицы:

Случай 1:

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.7 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет 2 комплексных значения и одно действительное.

Случай 2:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет 2 различных собственных значения, то есть 2 действительных собственных значения совпадают.

Случай 3:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет 3 различных действительных собственных значения.

Собственные значения были найдены в программе.

## Теоретическая часть

Сильно связанные вершины графа – это подмножества таких вершин ориентированного графа, между которыми существует путь в обоих направлениях.

Пусть  $R^{n+1}$  – векторное пространство размерности  $n+1$  над полем  $R$  вещественных чисел.  $V$ -множество векторов данного пространства. Непустое множество  $P$  называется проективным пространством  $n$  размерности, порожденным пространством  $R^{n+1}$ , если задано отображение  $A: V/\{0\} \rightarrow P$ , удовлетворяющие 2 аксиомам проективного пространства:

1.  $A$ -сюръективное отображение.
2.  $A(x)=A(y)$  тогда и только когда  $x$  и  $y$  коллинеарны.

Тогда для трехмерного векторного пространства заданного квадратной матрицей  $3 \times 3$  мы задаем динамическую систему в соответствии с элементами матрицы. Отображение имеет вид:

$$X_{n+1} = A * X_n$$

Для визуализации проективного пространства мы строим символический образ динамической системы и находим в получившемся графе компоненты сильной связности.

Мы представляем проективное пространство в виде трех локальных карт. Карты имеют размер  $[-1;-1] \times [1;1]$ . Где первая карта определена осями  $ou$  и  $oz$ , вторая карта определена осями  $ox$  и  $oz$ , третья карта определена осями  $ox$  и  $ou$ .

Мы проводим нормировку вектора  $X_{n+1}$ . Мы делим все компоненты вектора на максимальное значение компоненты в векторе. Номер максимальной компоненты определяет номер карты, на которой мы закрашиваем ячейку.

Разбиение области на ячейки - это разбиение на прямоугольники одинакового размера. Нумерация ячеек идет в порядке сначала слева направо, затем сверху вниз. Тогда обозначим ячейку  $M(i)$ .

По теореме 5.1 из источника [1]: Пусть  $P(d)$  - это окрестность равная объединению всех ячеек соответствующих возвратным вершинам графа, где  $d$  - это длина стороны ячейки.

$$P(d) = \{ \cup M(i), i - \text{возвратная} \}$$

Тогда аттрактор динамической системы совпадает с пересечением множеств  $P(d)$  по формуле:

$$Q = \bigcap_{d>0} P(d)$$

По теореме 5.2 из источника [1]: При уменьшении размера ячейки новая окрестность оказывается вложена в старую. Из этого следует то, что уменьшение диаметра ячеек приводит к меньшему размеру окрестности. Таким образом, последовательность окрестностей монотонно убывает и сходится к цепно-рекуррентному множеству по формуле:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \bigcap_k P_k = Q.$$

Для подсчета номера ячейки полученного после отображения точки области применяем формулу:

$$n = [(x - x_{\min}) / h_x] + 1 + [(y_{\min} - y) / h_y] * [(x_{\max} - x_{\min}) / h_x]$$

# Интерфейс программы

Локализация цепно-рекуррентного множества в проективном пространстве

Меню

Матрица

0.7

-0.5

0

0.5

0.7

0

1

2

5

Построить итераций и Достроить итераций

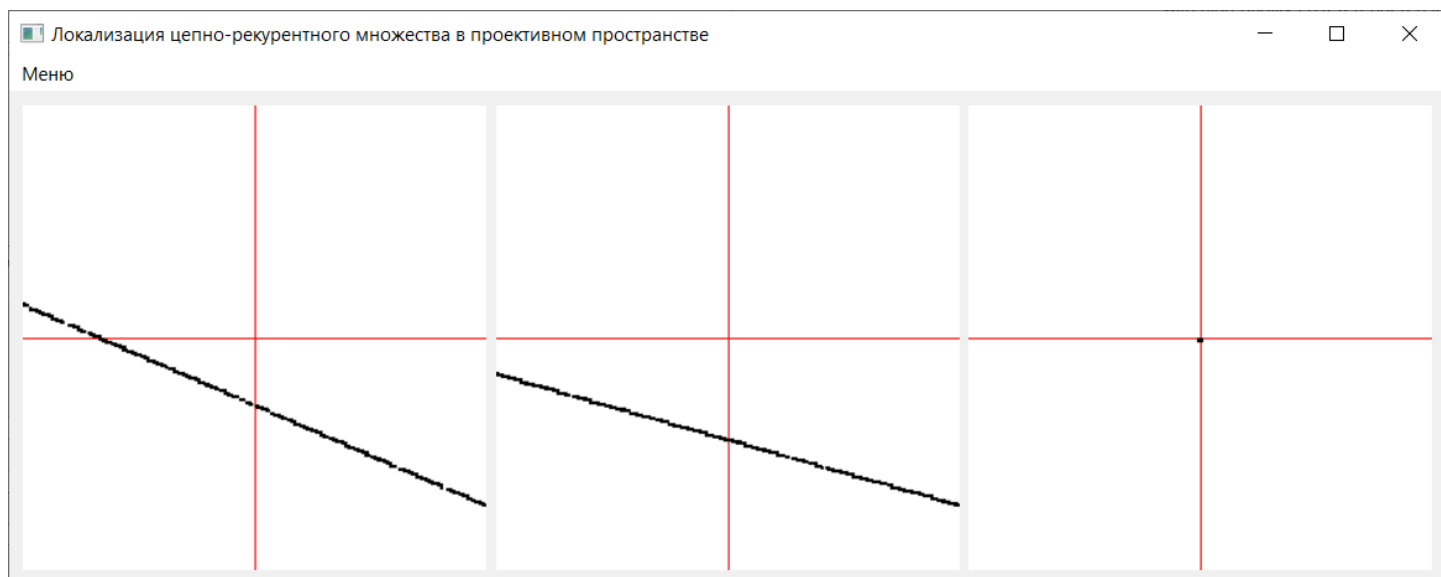
Построить график для итераций:

8

Проитерировать существующий:

1

Построить изображение



Локализация цепно-рекуррентного множества в проективном пространстве

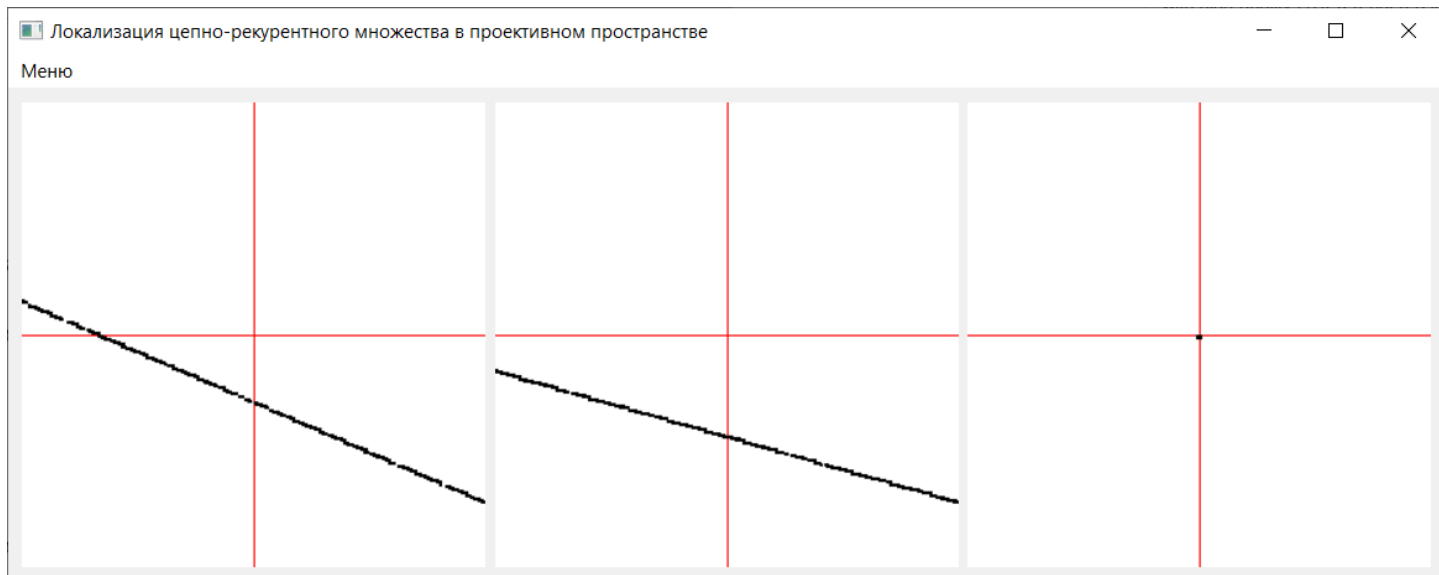
Меню

[[ 0.7 -0.5 0.]  
[ 0.5 0.7 0.]  
[ 1. 2. 5.]]  
Собственные значения: (5 (0.7+0.50000000000000001j)) (0.7-0.50000000000000001j)  
Время подсчета 8 итераций: 6.884779214859009  
Размер ячейки: 0.0078125

## Результаты

Программа написана на C++. Интерфейс сделан на Python.

Результаты для матрицы A:

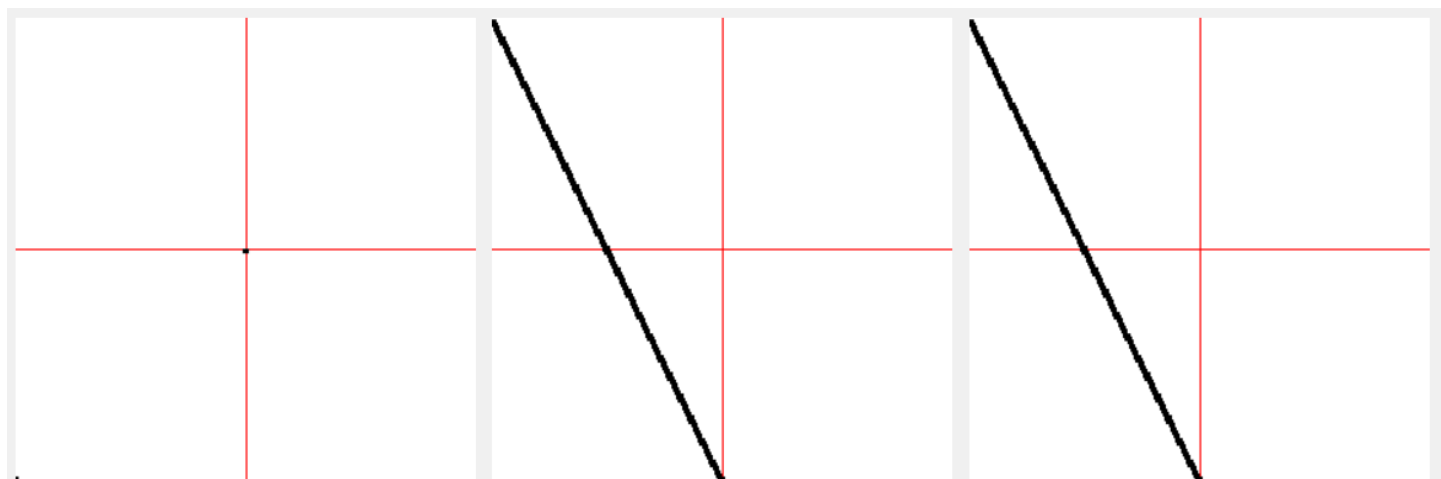


```
[[ 0.7 -0.5  0.]  
 [ 0.5  0.7  0.]  
 [ 1.   2.   5.]]  
Собственные значения: (5 (0.7+0.50000000000000001j) (0.7-0.50000000000000001j)  
Время подсчета 8 итераций: 6.884779214859009  
Размер ячейки: 0.0078125
```

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0.7 + 0.5j, \lambda_3 = 0.7 - 0.5j$$

Результаты для матрицы B:

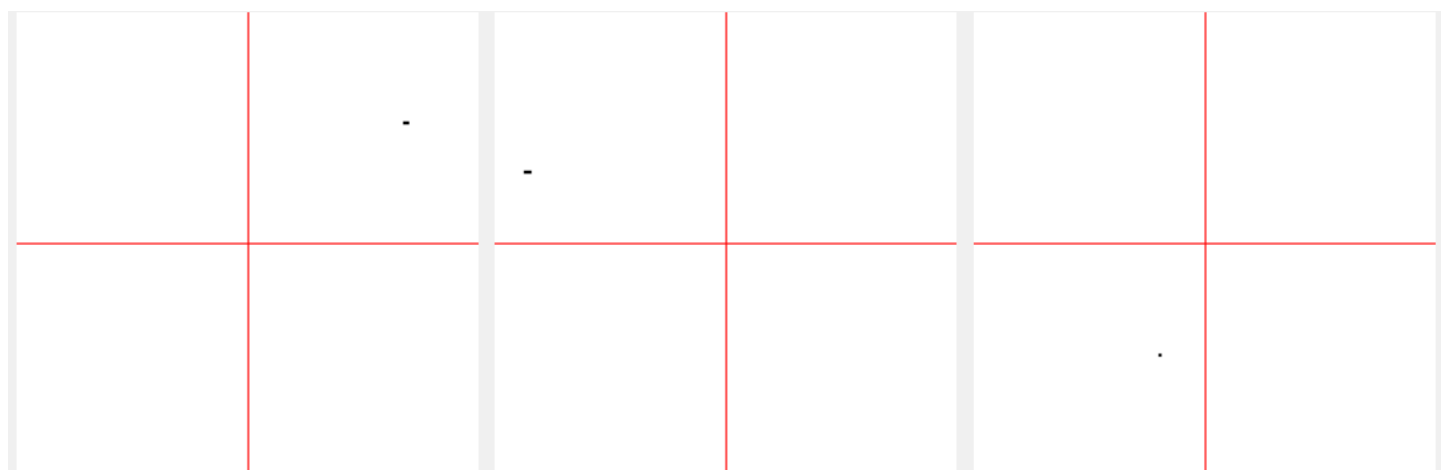




[[4 1 1]  
[0 2 0]  
[0 0 2]]  
Собственные значения: 4.0 2.0 2.0  
Время подсчета 8 итераций: 7.5444536209106445  
Размер ячейки: 0.0078125

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2$$

Результаты для матрицы C:



[[3 1 1]  
[1 2 1]  
[1 1 1]]  
Собственные значения: 4.2143197433775335 1.460811127189109 0.32486912943335383  
Время подсчета 8 итераций: 6.049314975738525  
Размер ячейки: 0.0078125

$$\lambda_1 = 4.214, \lambda_2 = 1.46, \lambda_3 = 0.385$$

## Использованная литература

1. “Введение в символический анализ динамических систем” Г.С.Осипенко, Н.Б.Ампилова.
2. <https://web.archive.org/web/20090812054837/http://rain.ifmo.ru/cat/view.php/vis/graph-general/scc-2008/algorithm>
3. <https://habr.com/ru/articles/537290/>
4. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Компонента\\_сильной\\_связности](https://ru.wikipedia.org/wiki/Компонента_сильной_связности)
5. <https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-pokazateley-lyapunova-metodamisimvolicheskogo-analiza>
6. [https://en.wikipedia.org/wiki/Coordinate\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Coordinate_system)
7. <https://stackoverflow.com/questions/60918473/how-do-i-convert-pixel-screen-coordinates-to-cartesian-coordinates>
8. <https://eltehhelp.xyz/wp-content/uploads/2021/09/image-2.png>
9. <https://eltehhelp.xyz/wp-content/uploads/2021/09/image-1.png>

