Projektni zadatak

Predmet: Nelinearno programiranje i optimalno upravljanje
Tema: Optimalno upravljanje. Matematičko modelovanje i upravljanja pandemijom COVID-19

SIR model predstavlja osnovni matematički model epidemije i kao takav može se iskoristiti za modelovanje pandemije COVID-19. Matematički model opisan je sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I. \end{aligned} \tag{1}$$

Gdje su:

- S(t) - broj stanovnika podložnih zarazi,
- I(t) - broj zaraženih stanovnika, odnosno broj zaraženih koji mogu preneti zarazu na druge,
- R(t) - broj oporavljenih stanovnika, odnosno broj imunih na zarazu,
- β - stopa razboljevanja - verovatnoća da podložni budu zaraženi
- γ - stopa oporavka - vjerovatnoća da će zaraženi postati imuni.

Zadatak 1: Odrediti numerička rešenja SIR modela i prikazati ih ukoliko su početni uslovi[1]:

$$[S(0), I(0), R(0)] = [82135, 771, 59],$$

dok su vrednosti β i γ [2]: 0.3238 i 0.0478, respektivno.

[1]Podaci su preuzeti za period od januara 2020. godine do maja 2020. godine za Republiku Kinu.
[2]Vrednosti parametara su dobijene estimacijom primenom PSO algoritma

Pretpostavimo da hoćemo da primenimo mere samoizolacije na prethodni model. Kriterijum optimalnosti koji želimo da optimizujemo je sledeći:

$$J = \int_0^{t_f} (A_1 S(t) + A_2 I(t) + A_3 R(t) + C_1 u_1^2(t))dt,$$

gde su A_1, A_2, A_3 i C_1 konstante dobijene numeričkim eksperimentom.

Jednačine SIR modela sa upravljačkim parametrom samoizalacije su date sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -(1-u_1)\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= (1-u_1)\beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I. \end{aligned} \tag{2}$$

Zadatak 2: Formirati Hamiltonovu funkciju i odrediti kanonske jednačine.

Zadatak 3: Ukoliko su poznate vrednosti konstanti za mere samoizolacije:

$$[A_1, A_2, A_3, C_1] = [-1, 1, 0, 0.5]$$

vrednosti promenljivih stanja u početnom trenutku:

$$[S(0), I(0), R(0)] = [82135, 771, 59],$$

odrediti uslove transverzalnosti.
Maksimalna vrednost u_1 iznosi 0.5, dok su vrednosti β i γ: 0.3238 i 0.0478, respektivno.
Numerički rešiti problem optimalnog upravljanja i uporediti rezultate modela bez upravljanja i sa upravljanjem.

Ukoliko primenimo mere lečenja na prethodni model. Kriterijum optimalnosti koji želimo da optimizujemo je sledeći:

$$J = \int_0^{t_f} (A_1 S(t) + A_2 I(t) + A_3 R(t) + C_2 u_2^2(t))dt,$$

gde su A_1, A_2, A_3 i C_2 konstante dobijene numeričkim eksperimentom.

Jednačine SIR modela sa upravljačkim parametrom mera lečenja su date sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - u_2 I \\ \frac{dR}{dt} &= u_2 I. \end{aligned} \tag{3}$$

Zadatak 4: Formirati Hamiltonovu funkciju i odrediti kanonske jednačine.

Zadatak 5: Ukoliko su poznate vrednosti konstanti za mere lečenja

$$[A_1, A_2, A_3, C_2] = [0, 1.5, 0, 0.5]$$

vrednosti promenljivih stanja u početnom trenutku:

$$[S(0), I(0), R(0)] = [82135, 771, 59],$$

odrediti uslove transverzalnosti.
Maksimalna vrednost u_2 iznosi 0.1, dok su vrednosti β i γ: 0.3238 i 0.0478, respektivno.
Numerički rešiti problem optimalnog upravljanja i uporediti rezultate modela bez upravljanja i sa upravljanjem.

Pretpostavimo da hoćemo da primenimo mere vakcinacije na prethodni model. Kriterijum optimalnosti koji želimo da optimizujemo je sledeći:

$$J = \int_0^{t_f} (A_1 S(t) + A_2 I(t) + A_3 R(t) + C_3 u_3^2(t))dt,$$

gde su A_1, A_2, A_3 i C_3 konstante dobijene numeričkim eksperimentom.

Jednačine SIR modela sa upravljačkim parametrom vakcinacije su date sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI - u_3 S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I + u_3 S. \end{aligned} \tag{4}$$

Zadatak 6: Formirati Hamiltonovu funkciju i odrediti kanonske jednačine.

Zadatak 7: Ukoliko su poznate vrednosti konstanti za mere vakcinacije

$$[A_1, A_2, A_3, C_3] = [0, 10, 0, 0.5]$$

vrednosti promenljivih stanja u početnom trenutku:

$$[S(0), I(0), R(0)] = [82135, 771, 59],$$

odrediti uslove transverzalnosti.
Maksimalna vrednost u_3 iznosi 0.1, dok su vrednosti β i γ: 0.3238 i 0.0478, respektivno.
Numerički rešiti problem optimalnog upravljanja i uporediti rezultate modela bez upravljanja i sa upravljanjem.

Napomena: Pored rešenja problema, neophodno je dostaviti i dokumentaciju.