

# Laboratório de Sistemas de Controle

Djonathan Luiz de Oliveira Quadras

2020-11-02



# Contents

<b>Apresentação</b>	<b>7</b>
<b>1 Simulação de Sistemas</b>	<b>9</b>
<b>2 Efeitos de Pólos e Zeros na Dinâmica</b>	<b>11</b>
2.1 Pólos e Zeros . . . . .	11
<b>Problemas Laboratório 2</b>	<b>13</b>
Problema 2.1 . . . . .	13
Problema 2.2 . . . . .	18
Problema 2.3 . . . . .	20
Problema 2.4 . . . . .	24
Problema 2.5 . . . . .	29
Problema 2.6 . . . . .	34
<b>3 Identificação de Sistemas</b>	<b>37</b>
3.1 Modelagem de Sistemas Lineares . . . . .	37
3.2 Identificação de sistemas de primeira ordem . . . . .	38
3.3 Identificação de Sistemas de Segunda Ordem . . . . .	39
<b>Problemas Laboratório 3</b>	<b>43</b>
Problema 3.1 . . . . .	43
Problema 3.2 . . . . .	44
Problema 3.3 . . . . .	46

<b>4 Rastreamento de Referências e Rejeição de Perturbações - Erro em Regime Permanente</b>	<b>51</b>
4.1 Tipos de Sistemas . . . . .	51
4.2 Erro em regime permanente. . . . .	52
<b>Problemas Laboratório 4</b>	<b>57</b>
Problema 4.1 . . . . .	57
Problema 4.2 . . . . .	59
Problema 4.3 . . . . .	65
Problema 4.4 . . . . .	69
<b>5 Projeto de Controladores por Métodos Algébricos</b>	<b>71</b>
5.1 Controladores Clássicos . . . . .	71
5.2 Método Algébrico de Projeto de Controladores . . . . .	72
5.3 Erro em Regime Permanente . . . . .	73
<b>Problemas Laboratório 5</b>	<b>77</b>
Problema 5.1 . . . . .	77
Problema 5.2 . . . . .	80
Problema 5.3 . . . . .	84
Problema 5.4 . . . . .	85
<b>6 Linearização de Sistemas Não-Lineares</b>	<b>89</b>
6.1 Sistema de um tanque . . . . .	89
6.2 Pontos de equilíbrio . . . . .	90
6.3 Linearização de sistemas não-lineares . . . . .	91
<b>Problemas Laboratório 6</b>	<b>95</b>
Problema 6.1 . . . . .	95
Problema 6.2 . . . . .	95
Problema 6.3 . . . . .	96
Problema 6.4 . . . . .	96

<i>CONTENTS</i>	5
<b>7 Controle de Sistemas Não-Lineares</b>	<b>97</b>
7.1 Controladores lineares para o sistema de um tanque . . . . .	97
7.2 Projeto de um controlador integral para o sistema de um tanque	99
<b>Problemas Laboratório 7</b>	<b>101</b>
Problema 7.1 . . . . .	101
Problema 7.2 . . . . .	102
<b>8 Análise pelo Lugar das Raízes</b>	<b>105</b>
8.1 Método do Lugar Geométrico das Raízes . . . . .	105
8.2 Estabilidade e Influência de Pólos e Zeros no LGR . . . . .	106
8.3 Determinação do ganho $K$ para sistemas em malha-fechada de primeira e segunda ordem . . . . .	107
<b>Problemas Laboratório 8</b>	<b>109</b>
Problema 8.1 . . . . .	109
Problema 8.2 . . . . .	112
Problema 8.3 . . . . .	113
Problema 8.4 . . . . .	120
Problema 8.5 . . . . .	124
Problema 8.6 . . . . .	125
<b>9 Projeto de Controladores pelo Lugar das Raízes</b>	<b>127</b>
<b>Problemas Laboratório 9</b>	<b>129</b>
<b>10 Projeto do controlador atraso de fase</b>	<b>131</b>
<b>Problemas Laboratório 10</b>	<b>133</b>
<b>11 Análise pelos Diagramas de Bode e Nyquist</b>	<b>135</b>
<b>Problemas Laboratório 11</b>	<b>137</b>
<b>12 Projeto de Controladores pelo Diagrama de Bode</b>	<b>139</b>

<b>Problemas Laboratório 12</b>	<b>141</b>
<b>13 Digitalização de Controladores Analógicos</b>	<b>143</b>
<b>Problemas Laboratório 13</b>	<b>145</b>

# Apresentação

Working on it :)





## Chapter 1

# Simulação de Sistemas

Este laboratório consistiu apenas na apresentação da disciplina, da ferramenta e do método que será aplicado. Não teve nenhuma atividade desenvolvida.



## Chapter 2

# Efeitos de Pólos e Zeros na Dinâmica

Nesta experiência, verificaremos a influência dos pólos e zeros de uma Função de Transferência na resposta dinâmica para entradas do tipo degrau e também para entradas senoidais. Utilizaremos o Matlab para realizar as simulações.

### 2.1 Pólos e Zeros

Considere uma função de Transferência da forma

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \dots + b_m s + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

onde  $Y(s)$  é a saída,  $U(s)$  é a entrada,  $n \geq m$  e todos os coeficientes são reais. Temos as seguintes definições:

1. Os pólos  $G(s)$  são as raízes de  $D(s)$  ( $D(s) = 0$ );
2. Os zeros de  $G(s)$  são as raízes de  $N(s)$  ( $N(s) = 0$ );
3.  $G(s)$  é *estável* quando todos os pólos possuem parte real negativa, ou seja, estão no semi-plano esquerdo (SPE) do plano  $s$ ;
4.  $G(s)$  é *instável* quando existe ao menos um pólo com parte real positiva, ou seja, no semi-plano (SPD);
5.  $G(s)$  é de *fase não-mínima* quando há pólos ou zeros no SPE.

Considere que  $G(s)$  é estável, ou seja, todos os pólos estão no SPE. Em geral, para entradas do tipo degrau, temos:

1. A componente da resposta dinâmica referente a um pólo afastado da origem (do plano  $s$ ) é relativamente rápida;
2. A componente da resposta dinâmica referente a um pólo próximo da origem é relativamente lenta;
3. Um zero tende a fazer com que a resposta dinâmica apresente sobressinal. Quanto mais próximo da origem estiver o zero, maior o sobressinal. E, quanto mais longe da origem, menor se torna o sobressinal, podendo o mesmo não existir. Assim, um sistema de segunda ordem com pólos reais e um zero poderá apresentar um sobressinal dependendo do posicionamento do zero no plano  $s$ ;
4. Um zero bem próximo de um pólo tende a anular os efeitos dos mesmos na resposta dinâmica.

# Problemas Laboratório 2

Estes problemas são relacionados ao assunto abordado no Laboratório 2.

## Problema 2.1

Considere o sistema de primeira ordem

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1},$$

onde  $\tau = 1$ ,  $\tau = 0.5$ . Para cada valor de  $\tau$ , determine o pólo e sua posição no plano  $s$  (use os comandos `zpk` e `pzmap` no Matlab), e conclua sobre a estabilidade e a rapidez da resposta do sistema. Simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Analise e compare os resultados. Agora, repita o procedimento para o sistema

$$G(s) = \frac{1}{s - 1}.$$

### Resolução

A resolução será feita em quatro partes: (1) a resolução para  $\tau = 1$  usando `pzmap`, (2) a resolução para  $\tau = 0.5$  usando `pzmap`, (3) a simulação e comparação dos resultados e, por fim, (4) a resolução para  $G(s) = \frac{1}{s-1}$ .

**2.1.0.0.1 Parte 1** Para  $\tau = 1$ , temos a função de transferência dada por

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}.$$

O código implementado no `Matlab` foi o apresentado abaixo.

```
g = tf([1], [1 1])
[p, z] = pzmap(g)
pzmap(g)
```

Tendo como resultados de pólos e zeros:

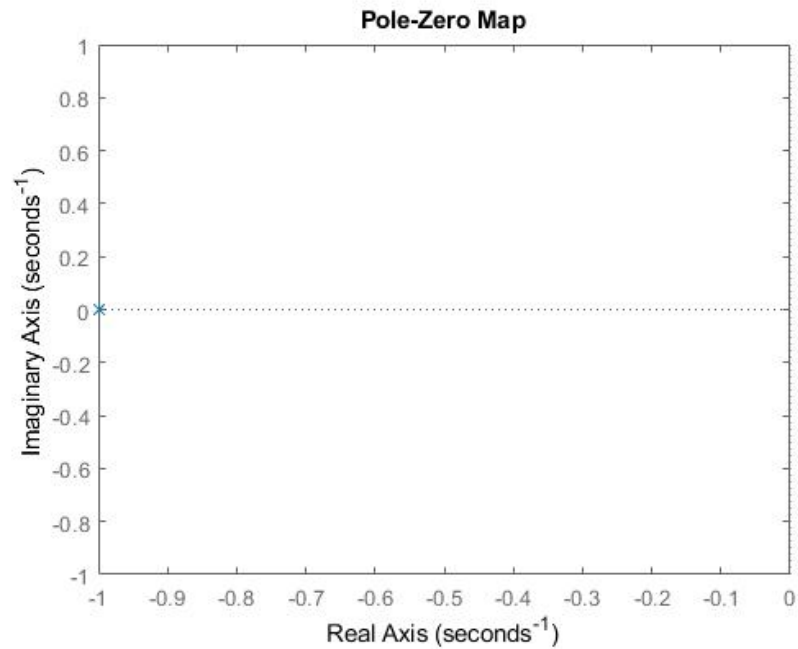
`p =`

`-1`

`z =`

`0×1 empty double column vector`

Ou seja, a função de transferência não apresenta zeros e tem seu pólo em  $s = -1$ . A sua posição no plano é apresentada na figura abaixo.



Como o pólo da função de transferência se encontra na SPE, conclui-se que o sistema se comportará de uma forma estável.

**2.1.0.0.2 Parte 2** Para  $\tau = 0.5$ , temos a função de transferência dada por

$$G(s) = \frac{1}{0.5s + 1}.$$

O código implementado no `Matlab` foi o apresentado abaixo.

```
g = tf([1], [0.5 1])  
[p, z] = pzmap(g)  
pzmap(g)
```

Tendo como resultados de pólos e zeros:

p =

-2

z =

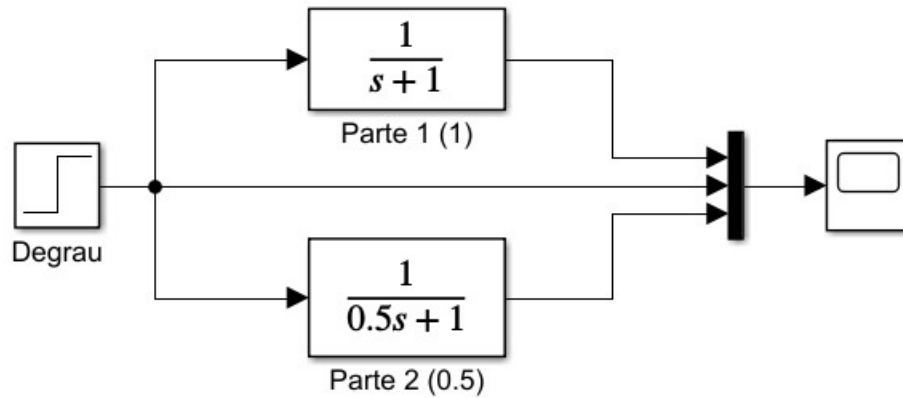
0×1 empty double column vector

Ou seja, a função de transferência não apresenta zeros e tem seu pólo em  $s = -2$ . A sua posição no plano é apresentada na figura abaixo

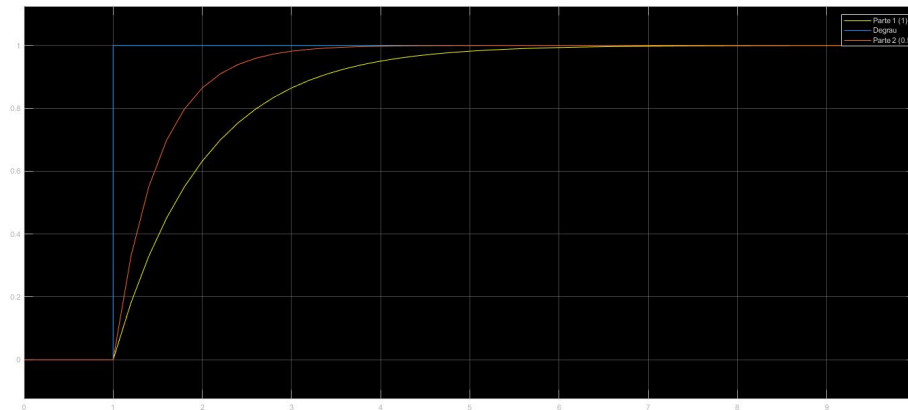


Como o pólo da função de transferência se encontra na SPE, conclui-se que o sistema se comportará de uma forma estável. Também é possível concluir que o sistema alcança a estabilidade mais rápido para  $\tau = 0.5$ .

**2.1.0.0.3 Parte 3** A simulação do sistema implementada em Matlab está apresentada na figura abaixo.



O resultado apresentado pelo *scope* é apresentado na figura abaixo.



Percebe-se que, assim como esperado, o sistema se comporta de forma estável e tem uma convergência mais rápida para  $\tau = 0.5$ .

**2.1.0.0.4 Parte 4** Para a última etapa temos a função de transferência dada por

$$G(S) = \frac{1}{s-1}.$$

O código implementado no Matlab foi o apresentado abaixo.

```
g = tf([1], [1 -1])
[p, z] = pzmap(g)
pzmap(g)
```



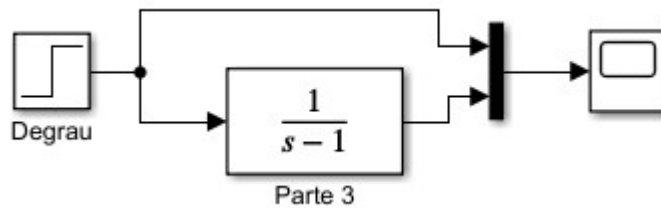
Tendo como resultados de pólos e zeros:

```
p =  
  
    1  
  
z =  
  
0×1 empty double column vector
```

Ou seja, a função de transferência não apresenta zeros e tem seu pólo em  $s = 1$ . A sua posição no plano é apresentada na figura abaixo



Como o pólo da função de transferência se encontra na SPD, conclui-se que o sistema se comportará de uma forma instável. A simulação em **Matlab** está apresentada na figura abaixo.



O resultado apresentado pelo *scope* é apresentado na figura abaixo.



O resultado comprova o esperado. O sistema se comporta de forma instável para a função de transferência dada por  $G(s) = \frac{1}{s-1}$ .

## Problema 2.2

Considere o sistema de primeira ordem (integrador)

$$G(s) = \frac{1}{s}.$$

Determine o pólo e a sua posição no plano  $s$  e simule para uma entrada do tipo degrau unitário e também para  $\sin(t)$  (para  $\sin(t)$ , escolha **Max Step Size** = **0.1** em **Simulation**  $\Rightarrow$  **Configurariion Parameters**). Note que a saída é a integral da entrada. Tais resultados eram esperados? Dica: lembre que  $Y(s) = G(s)U(s)$ , e que se  $x(t) \Leftrightarrow X(s)$ , então  $\int_0^t x(\tau)d\tau \Leftrightarrow X(s)/s$ .

### Resolução

O código utilizado no **Matlab** é apresentado abaixo.

```
g = tf([1], [1 0])  
[p,z] = pzmap(g)  
pzmap(g)
```

Obtendo como resultado:

p =

0

z =

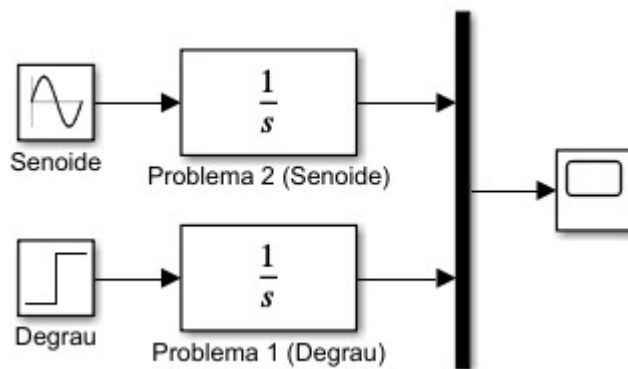
0×1 empty double column vector

Conclue-se então que a função de transferência  $G(s) = \frac{1}{s}$  não tem zeros e tem pólo em  $s = 0$ . O mapa da posição no plano é mostrado na figura abaixo.

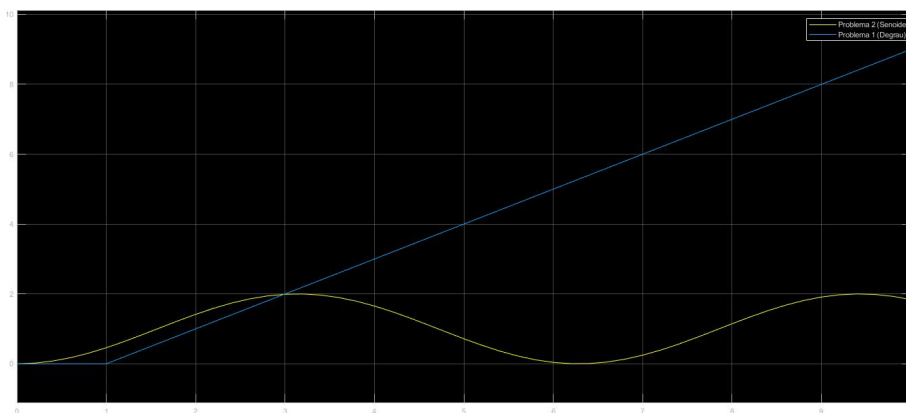


Isso mostra que o sistema é um caso crítico. Neste caso a resposta em regime permanente do sistema a uma entrada de amplitude limitada será uma senóide.

A simulação feita em Matlab está apresentada na figura abaixo.



O resultado da simulação é apresentado na figura abaixo.



O resultados eram esperados, uma vez que em um estado crítico a função de transferência pode estar em um estado permanente senoidal caso a entrada seja senoidal ou pode divergir caso a entrada seja um sinal constante.

## Problema 2.3

Considere o sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 25}.$$

Determine os pólos e suas posições no plano  $s$ . Simule para as seguintes entradas: degrau unitário,  $\sin(4t)$ ,  $\sin(6t)$ . Observe que a saída é limitada. Agora, semule para a entrada  $\sin(5t)$ . Note que a amplitude de saída cresce indefinidamente. Tal fenômeno é denominado de *ressonância*. De moro mais geral, para

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_0^2},$$

teremos ressonância quando aplicamos uma entrada senoidal da forma  $\sin(\omega_0 t + \phi)$ . Note que a *frequência de ressonância*  $\omega_0$  é igual a parte imaginária dos pólos de  $G(s)$ .

### Resolução

O código utilizado no **Matlab** é apresentado abaixo.

```
g = tf([1], [1 0 25])
[p,z] = pzmap(g)
pzmap(g)
```

Obtendo como resultado:

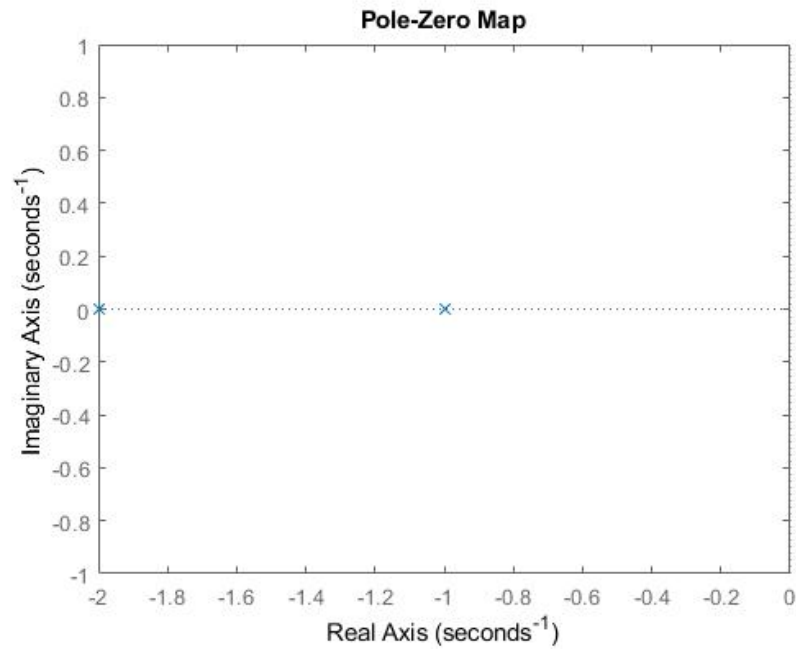
p =

```
0.0000 + 5.0000i
0.0000 - 5.0000i
```

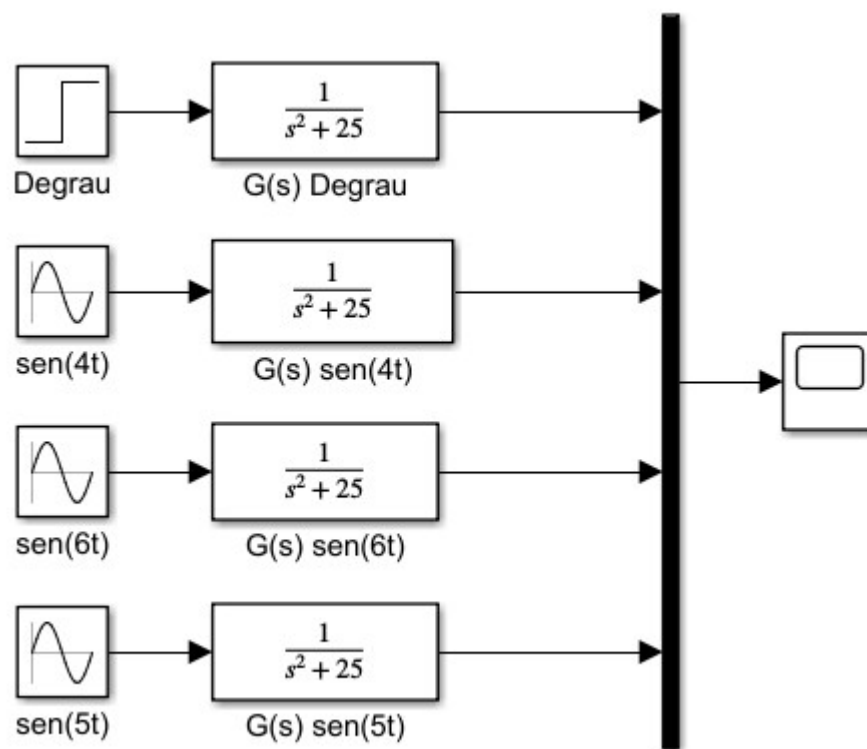
z =

```
0×1 empty double column vector
```

Conclue-se então que a função de transferência  $G(s) = \frac{1}{s^2+25}$  não tem zeros e tem pólo em  $s = \pm 5i$ . O mapa da posição no plano é mostrado na figura abaixo.



De acordo com o mapa de posição, pode-se concluir que a função de transferência é classificada como um caso crítico. A figura abaixo apresenta o modelo de simulação criado no **Simulink**.



O resultado da simulação é apresentado abaixo.



É fácil perceber que o modelo se comporta de maneira instável com a entrada  $u(t) = \sin(5t)$ , se mostrando estável nas demais situações.

## Problema 2.4

Considere o sistema de segunda orde

$$G(s) = \frac{1.6}{(s+1)(s+2)} = \frac{0.8}{0.5s^2 + 1.5s + 1}.$$

Determine os pólos e suas posições no plano  $s$  e simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Note que não há sobressinal. Tal resultado era esperado? Justifique.

Agora, adicionando um zero, temos

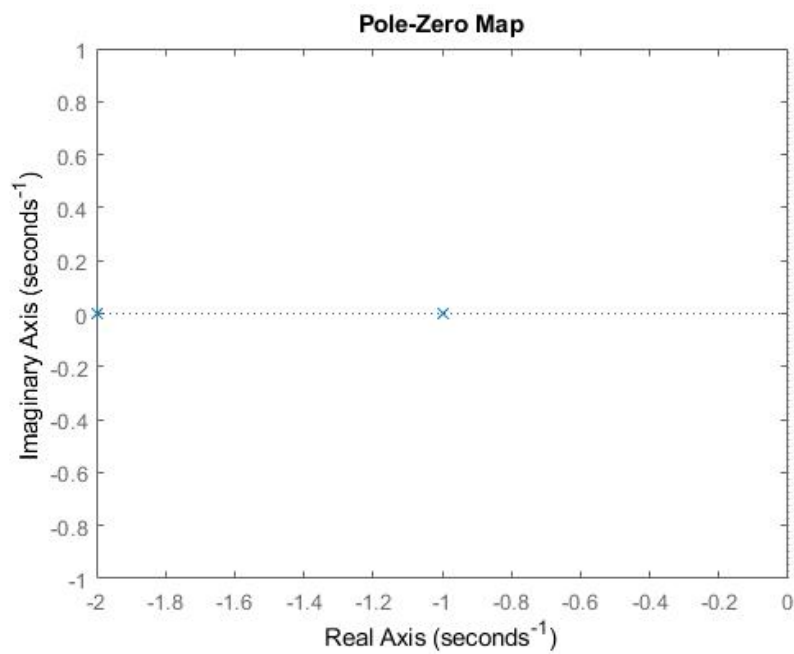
$$G(s) = \frac{1.6(\beta s + 1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{0.8(\beta s + 1)}{0.5s^2 + 1.5s + 1},$$

onde  $\beta = 0.1$ ,  $\beta = 0.6$ ,  $\beta = 0.99$ ,  $\beta = 1.2$ ,  $\beta = 2$ ,  $\beta = 10$ . Para cada valor de  $\beta$ , determine os pólos e zeros, suas posições no plano  $s$  e simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Analise e compare os resultados. Note que dependendo da posição do zero o sobressinal será maior ou menor, podendo também não estar presente.



**Resolução**

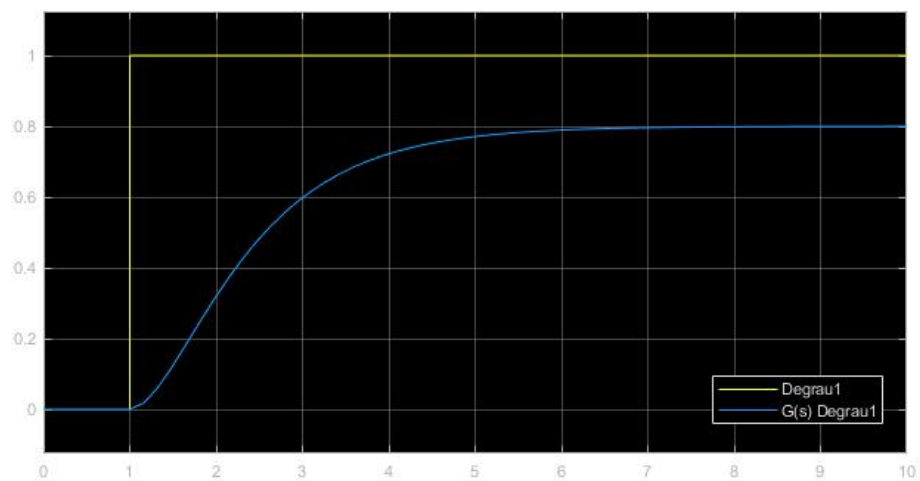
Utilizando a função `pzmap()` do `Matlab` para encontrar os pólos da função de transferência  $G(s) = \frac{0.8}{0.5s^2 + 1.5s + 1}$  temos que a função não possui zeros e possui pólos para  $s = -2$  e  $s = -1$ . O mapa de posições é apresentado na figura abaixo.



O resultado da função de transferência é apresentado na figura abaixo.

Table 2.1: Valores de Pólo e Zero variando  $\beta$ 

	Pólos	Zeros
$\beta = 0.1$	-2, -1	-10.0
$\beta = 0.6$	-2, -1	-1.67
$\beta = 0.99$	-2, -1	-1.01
$\beta = 1.2$	-2, -1	-0.83
$\beta = 2$	-2, -1	-0.50
$\beta = 10$	-2, -1	-0.10



O resultado não era esperado pois, para uma Função de Transferência de segundo grau é esperado que a resposta tenha sobressinal. Agora, considerando a função de transferência

$$G(s) = \frac{0.8(\beta s + 1)}{0.5s^2 + 1.5s + 1},$$

e substituindo os valores de  $\beta$  pelos valores propostos temos os valores de zero e pólo apresentados na tabela abaixo.

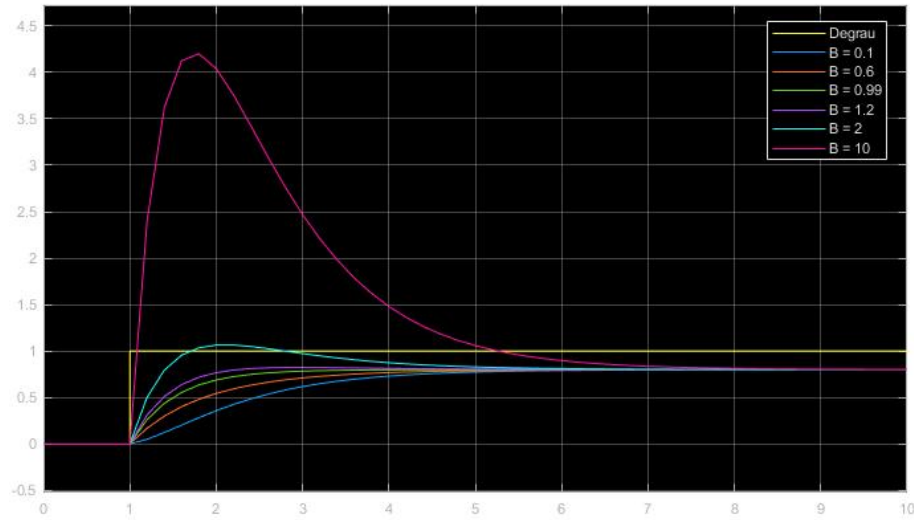
Os gráficos de posição estão apresentados abaixo.



A simulação feita em Matlab está apresentada na figura abaixo.



O resultado da simulação está apresentado na figura abaixo.



É possível perceber que quanto mais alto o valor de  $\beta$  maior o sobressinal. Também é possível perceber que há um intervalo no qual o tempo de reação aumenta, encontrando seu tempo de reação mínimo, voltando então a aumentar.

## Problema 2.5

Considere o sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{0.9}{s^2 + s + 1}.$$

Determine os pólos e suas posições no plano  $s$  e simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Note que há sobressinal. Tal resultado era esperado? Justifique.

Agora, adicionando um zero, temos

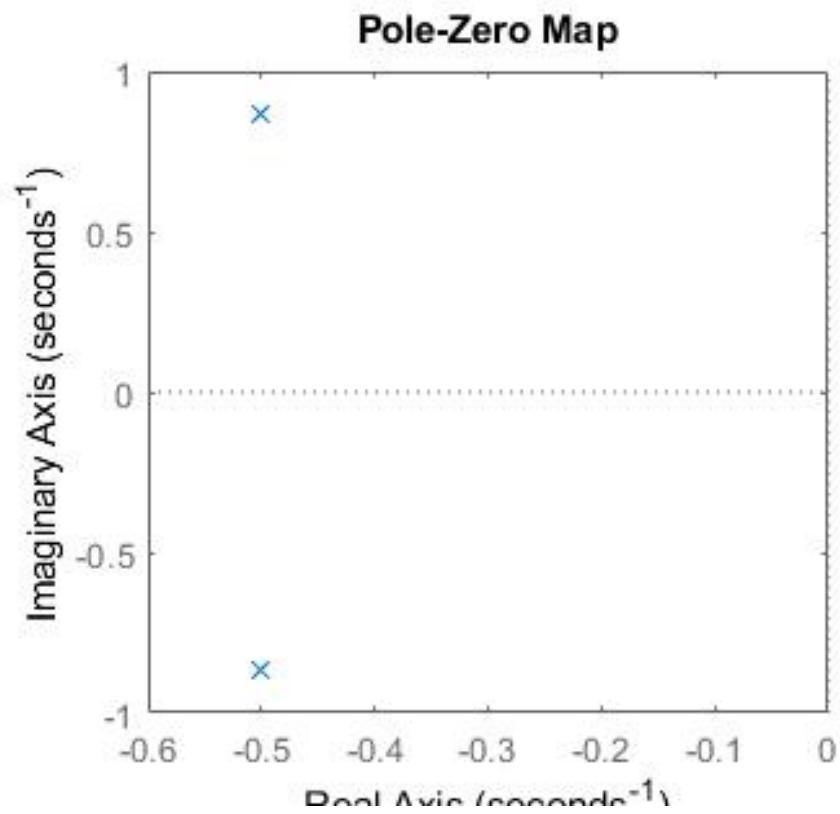
$$G_z(s) = \frac{0.9(\beta s + 1)}{s^2 + s + 1},$$

onde  $\beta = 0.05$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\beta = 1$  e  $\beta = 2.5$ . Para cada valor de  $\beta$  determine os pólos e zeros, suas posições no plano  $s$  e simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Analise e compare os resultados.

## Resolução

Utilizando a função `pzmap()` do `Matlab` para encontrar os pólos da função de transferência  $G(s) = \frac{0.9}{s^2 + s + 1}$  temos que a função não possui zeros e possui pólos

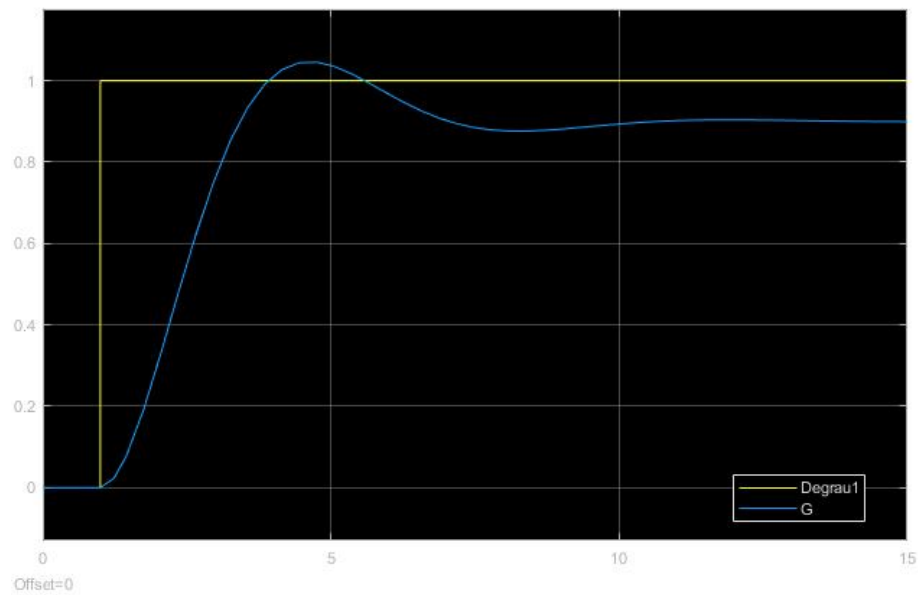
para  $s = -0.5 + 0.86i$  e  $s = -0.5 - 0.86i$ . O mapa de posições é apresentado na figura abaixo.



O resultado da função de transferência é apresentado na figura abaixo.

Table 2.2: Valores de Pólo e Zero variando  $\beta$ 

	Pólos	Zeros
$\beta = 0.05$	$-0.5 \pm 0.86i$	-20.0
$\beta = 0.5$	$-0.5 \pm 0.86i$	-2.0
$\beta = 1$	$-0.5 \pm 0.86i$	-1.0
$\beta = 2.5$	$-0.5 \pm 0.86i$	-0.4



É possível perceber que há sobressinal.

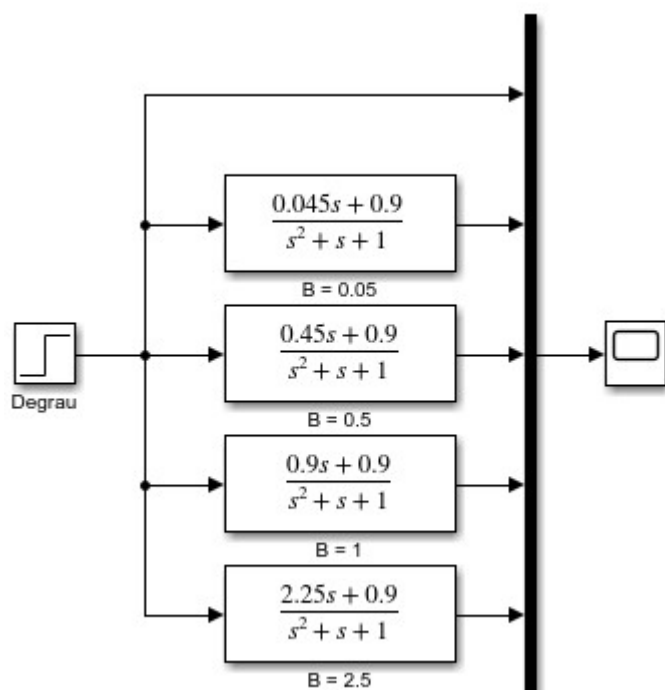
Agora, considerando a função de transferência  $G_z(s) = \frac{0.9(\beta s + 1)}{s^2 + s + 1}$ , e substituindo os valores de  $\beta$  pelos valores propostos temos os valores de zero e pólo apresentados na tabela abaixo.

Os gráficos de posição estão apresentados abaixo.

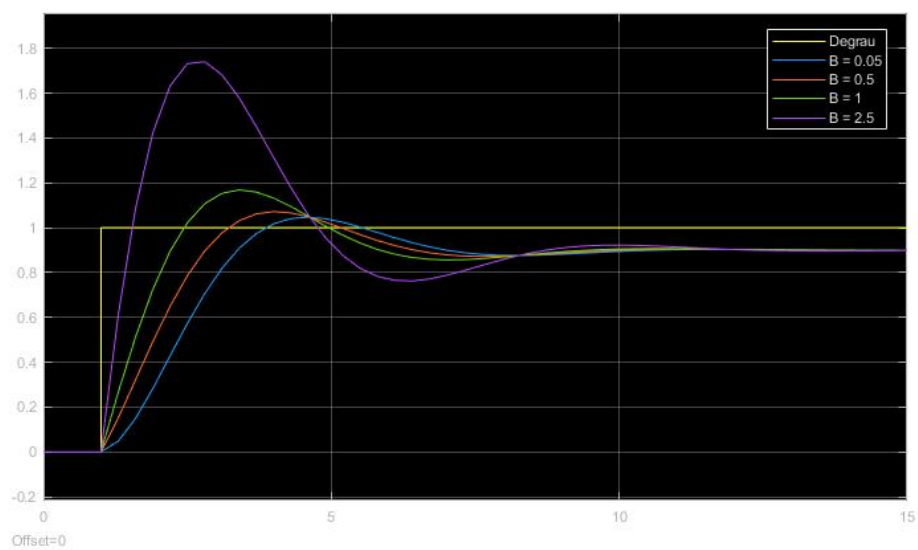


A simulação feita em Matlab está apresentada na figura abaixo.





O resultado da simulação está apresentado na figura abaixo.



É possível perceber que quanto mais alto o valor de  $\beta$  maior o sobressinal e o tempo de resposta do sistema.

## Problema 2.6

Considere o sistema de segunda ordem de fase não-mínima

$$G(s) = \frac{-s + 1}{0.5s^2 + 1.5s + 1}.$$

Determine os pólos e o zero, suas posições no plano  $s$  e simule para uma entrada do tipo degrau unitário. Note que a resposta é negativa nos instantes iniciais. Justificaremos tal comportamento no que se segue.

Escrevemos

$$G(s) = \frac{-s + 1}{0.5s^2 + 1.5s + 1} = \frac{\overbrace{1}^{G_1(s)}}{0.5s^2 + 1.5s + 1} - \frac{\overbrace{s}^{G_2(s)=sG_1(s)}}{0.5s^2 + 1.5s + 1}.$$

Assim,

$$Y(s) = G(s)U(s) = G_1(s)U(s) - G_2(s)U(s) = \underbrace{G_1(s)U(s)}_{Y_1(s)} - \underbrace{sG_1(s)U(s)}_{Y_2(s)=sY_1(s)}.$$

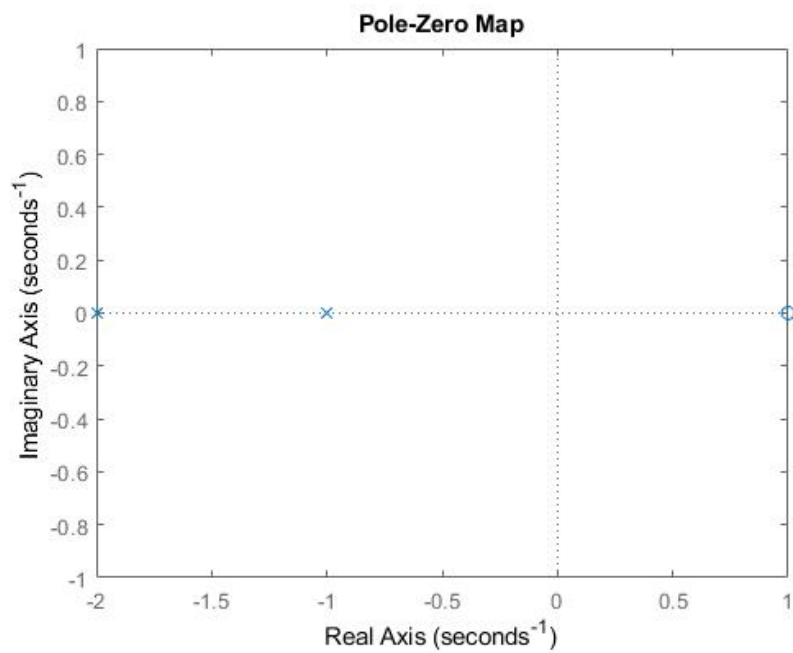
Relembre-se que se  $x(t) \iff X(s)$  com  $x(0) = 0$ , então  $dx(t)/dt \iff sX(s)$ . Portanto,

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t) = y_1(t) - \frac{dy_1(t)}{dt}.$$

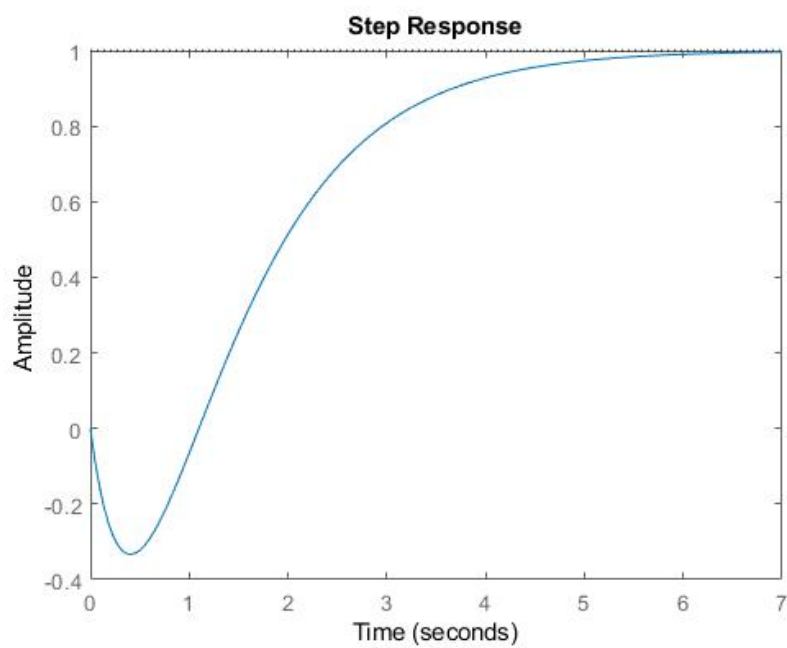
Verifique a validade da equação acima no Simulink (utilize o bloco **Derivative** no Simulink) para uma entrada do tipo degrau unitário. Analise o motivo da resposta ser negativa nos instantes iniciais.

### Resolução

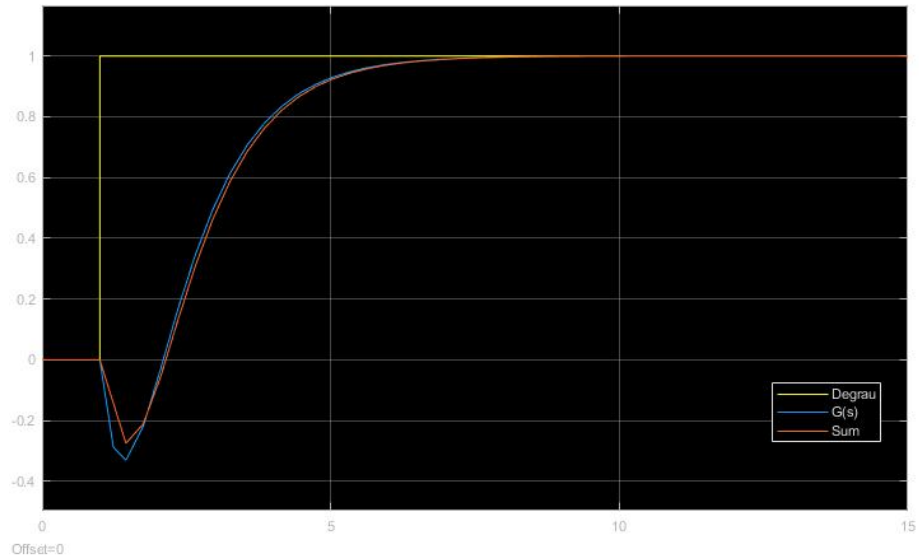
Utilizando a função `pzmap()` do `Matlab` para encontrar os pólos da função de transferência  $G(s) = \frac{-s+1}{0.5s^2+1.5s+1}$  temos que a função possui zeros para  $s = 1$  e possui pólos para  $s = -2$  e  $s = -1$ . O mapa de posições é apresentado na figura abaixo.



A resposta de  $G(s)$  a uma função degrau unitário é apresentada na figura abaixo.



A validade da equação proposta pelo programa é apresentada na figura abaixo. Pode-se perceber que a equação é válida pois as curvas são satisfatoriamente similares.



O motivo da resposta ser negativa se deve ao fato de o zero da função  $G(s)$  se encontrar no SPD.

## Chapter 3

# Identificação de Sistemas

Nesta experiência, veremos como modelar matematicamente um sistema linear por uma Função de Transferência. Identificaremos os parâmetros de uma Função de Transferência de primeira e de segunda ordem. Compararemos a dinâmica do sistema com a do modelo matemático.

### 3.1 Modelagem de Sistemas Lineares

Encontrar um modelo matemático que capture as características dinâmicas relevantes de um sistema real é de fundamental importância para a análise e controle do sistema. No Laboratório 1 estudamos um modelo linear com motor CC. Tal modelo pode ser obtido a partir das leis da física (mecânica e eletromagnetismo) e os valores dos parâmetros dependem de constantes e coeficientes físicos (indutância do enrolamento, resistência do enrolamento, constante de torque do motor, coeficiente de atrito viscoso). Em situações reais, não conheceremos uma estimativa para os mesmos. Por exemplo, todo resistor possui um valor nominal e uma faixa de tolerância percentual (e.g.  $R = 100\Omega \pm 5\%$ ). Além disso, muitas vezes a determinação de um modelo matemático para um sistema a partir de leis naturais é extremamente difícil e, mesmo no caso em que isso é possível, o modelo obtido pode ser demasiadamente complexo para ser estudado matematicamente.

Devido às dificuldades que acabamos de expor, em geral buscamos um modelo matemático relativamente simples mas que capture, ao menos aproximadamente, as características dinâmicas relevantes do sistema. Assim, primeiramente fixamos um modelo (*modelagem* do sistema) e em seguida determinamos de maneira aproximada o valor de seus parâmetros (*identificação* dos parâmetros).

Nesta experiência, consideraremos apenas sistemas lineares que possam ser modelados por uma função de Transferência  $G(s)$  de primeira ordem ou de segunda

ordem. Veremos então como identificar os parâmetros de  $G(s)$ .

### 3.2 Identificação de sistemas de primeira ordem

Toda Função de Transferência  $G(s)$  de primeira ordem pode ser escrita na forma padrão como

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}. \quad (3.1)$$

Suponha que  $G(s)$  é estável, ou seja,  $\tau > 0$ . considere uma entrada  $u(t) = A$  do tipo degrau de magnitude  $A$ . Temos que a saída correspondente é

$$y(t) = AK(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

O valor da saída em regime permanente é

$$y(\infty) = AK,$$

e o tempo de acomodação de 5% é dado por

$$0.95KA = KA(1 - e^{-\frac{t_s(5\%)}{\tau}}) \Rightarrow t_s(5\%) = 3\tau.$$

Isto é ilustrado na figura 1.



Figure 3.1: Figura 1: Resposta de um sistema de primeira ordem ao degrau.

Logo,

$$K = \frac{y(\infty)}{A}, \tau = \frac{t_s(5\%)}{3}. \quad (3.2)$$

### 3.3 Identificação de Sistemas de Segunda Ordem

Toda Função de Transferência  $G(s)$  de segunda ordem com pólos não-nulos pode ser escrita como

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (3.3)$$

onde  $\omega_n > 0$ . Os pólos de  $G(s)$  são:

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2 - 1}.$$

Temos as seguintes situações:

1. Sistema não-amortecido ( $\xi = 0$ ): os pólos são complexos com  $p_{1,2} = \pm j\omega_n$ , e a resposta a uma entrada do tipo degrau é senoidal.
2. Sistema sub-amortecido ( $0 < \xi < 1$ ): os pólos são complexos com  $p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$  e a resposta ao degrau apresenta oscilação e sobressinal.
3. Sistema criticamente amortecido ( $\xi = 1$ ): os pólos são reais e iguais com  $p_{1,2} = -\xi\omega_n$  e a resposta ao degrau não apresenta oscilação nem sobressinal.
4. Sistema super-amortecido ( $\xi > 1$ ): os pólos são reais, negativos e diferentes e a resposta ao degrau não apresenta oscilação nem sobressinal.
5. Sistema instável ( $\xi < 0$ ): os pólos possuem parte real positiva.

#### Sistemas sub-amortecidos

Suponha que  $G(s)$  é estável com  $0 < \xi < 1$  (sub-amortecido). Considere uma entrada  $u(t) = A$  do tipo degrau de magnitude  $A$ . A resposta correspondente  $y(t)$  é ilustrada na figura 2.

Temos que

$$y(\infty) = KA, \quad M_p = \frac{y_p - y(\infty)}{y(\infty)} = e^{\frac{-(\xi\pi)}{\sqrt{1-\xi^2}}}, \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Logo,

$$K = \frac{y(\infty)}{A}, \quad M_p = \frac{y_p - y(\infty)}{y(\infty)}, \quad \xi = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{(\ln M_p)^2 + \pi^2}}, \quad \omega_n = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (3.4)$$

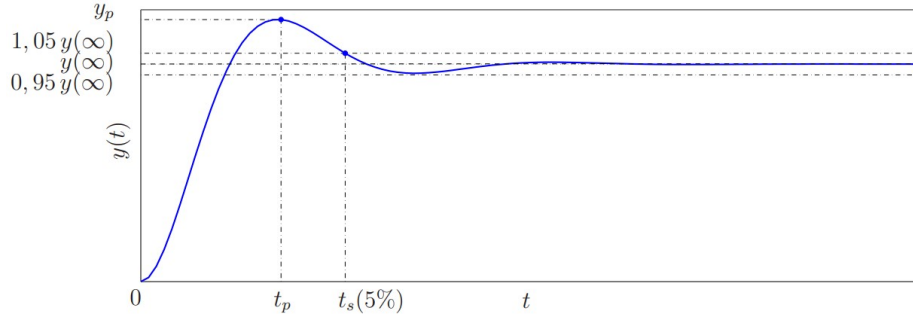


Figure 3.2: Figura 2: Resposta de um sistema de segunda ordem sub-amortecido ao degrau.

### Sistemas criticamente amortecidos e super-amortecidos

Suponha que  $G(s)$  é estável com  $\xi \geq 1$  (criticamente amortecido ou super-amortecido). Neste caso, os dois pólos de  $G(s)$  são reais e a resposta ao degrau se assemelha ao de um sistema de primeira ordem (não apresenta oscilação nem sobressinal). Podemos identificar  $G(s)$  indiretamente através da identificação da Função de Transferência  $F(s)$  em malha-fechada. Considere o diagrama de blocos em malha-fechada mostrando na Figura 3, onde  $K_c > 0$  é o ganho de um controlador proporcional e  $r$  é a referência.

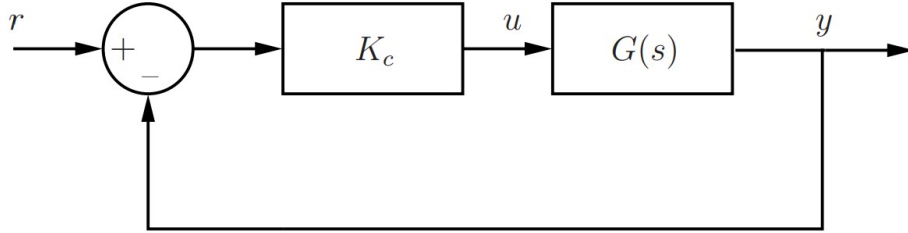


Figure 3.3: Figura 3: Diagrama de blocos em malha-fechada.

Relembre que

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_c G(s)}{1 + K_c G(s)}.$$

Para qualquer  $K_c > 0$ , temos que  $F(s)$  é um sistema de segunda ordem estável. E, quando  $K_c > 0$  for suficientemente grande, temos que  $F(s)$  será um sistema de segunda ordem sub-amortecido. Assim, escolhemos  $K_c$  de modo que  $F(s)$  seja sub-amortecido e então identificamos  $F(s)$  conforme descrito na seção anterior aplicando uma referência  $r(t) = A$  do tipo degrau de magnitude  $A$ . Desta maneira, identificaremos  $G(s)$  indiretamente pois



$$F(s) = \frac{K_c G(s)}{1 + K_c G(s)} \implies G(s) = \frac{F(s)}{K_c - K_c F(s)}. \quad (3.5)$$



# Problemas Laboratório 3

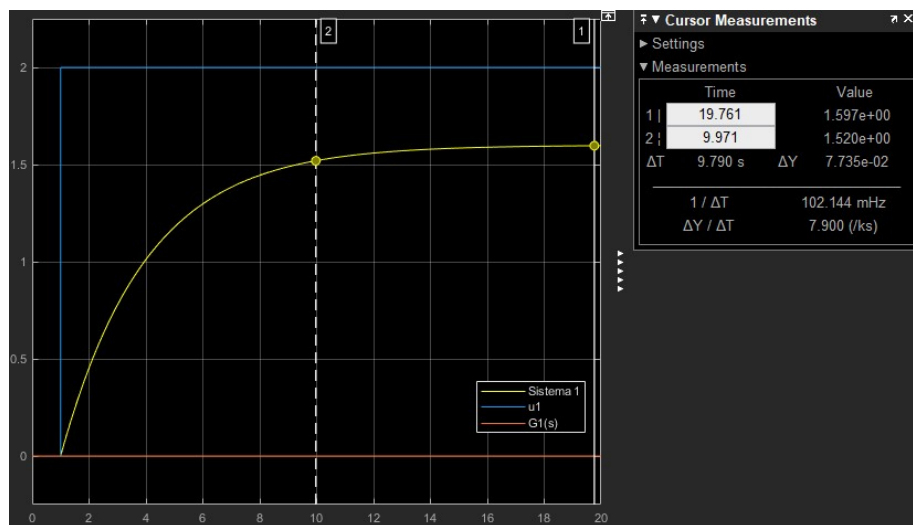
Estes problemas são relacionados ao assunto abordado no Laboratório 3.

## Problema 3.1

Aplique um degrau  $u(t) = 2$  no Sistema 1 do arquivo `MatLab3.mdl` do Simulink. Pelas características da resposta, modele o Sistema 1 como uma Função de Transferência  $G_1(s)$  de primeira ou segunda ordem. Em seguida, identifique os parâmetros do modelo utilizando a equação (3.2) ou (3.4). Compare a resposta do modelo identificado com a do Sistema 1.

### Resolução

Simulando o sistema do modelo 1 obtemos o resultado abaixo.



Pela curva feita espera-se que a Função de Transferência seja de primeira ordem. Utilizando as ferramentas fornecidas pelo **Simulink** foi estimado que

$$y(\infty) = 1.60.95y(\infty) = 1.52 \Rightarrow t_s(5\%) = 9.97s \Rightarrow \tau = 3.33$$

Assim,

$$G_1(s) = \frac{0.8}{3.33s + 1}.$$

Simulando  $G_1(s)$ , temos o resultado apresentado abaixo.



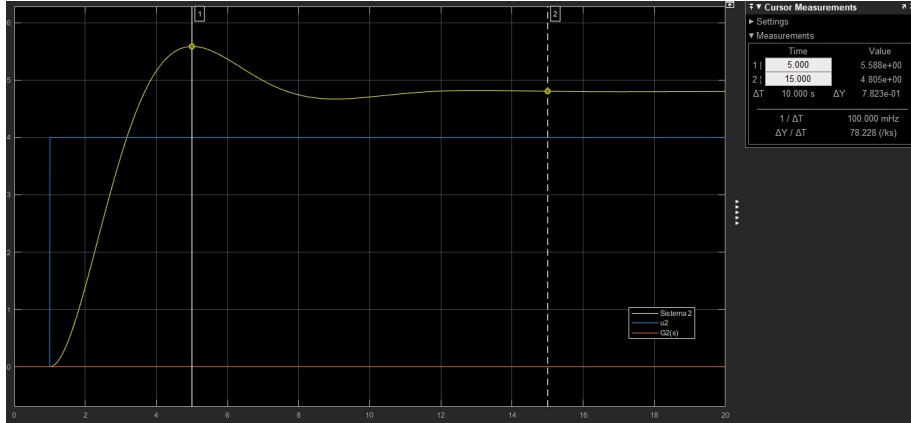
Percebe-se, assim, que a Função de Transferência  $G_1(s)$  se aproxima satisfatoriamente bem do Sistema 1.

## Problema 3.2

Aplique um degrau  $u(t) = 4$  no Sistema 2. Pelas características da resposta modele o Sistema 2 como uma Função de Transferência  $G_2(s)$  de primeira ou segunda ordem. Em seguida, identifique os parâmetros do modelo utilizando a equação (3.2) ou (3.4). Realize os cálculos na linha de comando do **Matlab** ( $\ln(x) \Rightarrow \log(x)$  e  $\sqrt{x} \Rightarrow \text{sqrt}(x)$ ). Compare a resposta do modelo identificando com a do Sistema 2.

### Resolução

Simulando o sistema do modelo 1 obtemos o resultado abaixo.



Pela curva feita espera-se que a Função de Transferência seja de segunda ordem. Utilizando as ferramentas fornecidas pelo **Simulink** foi estimado que

$$y_p = 5.588y(\infty) = 4.805t_p = 5s$$

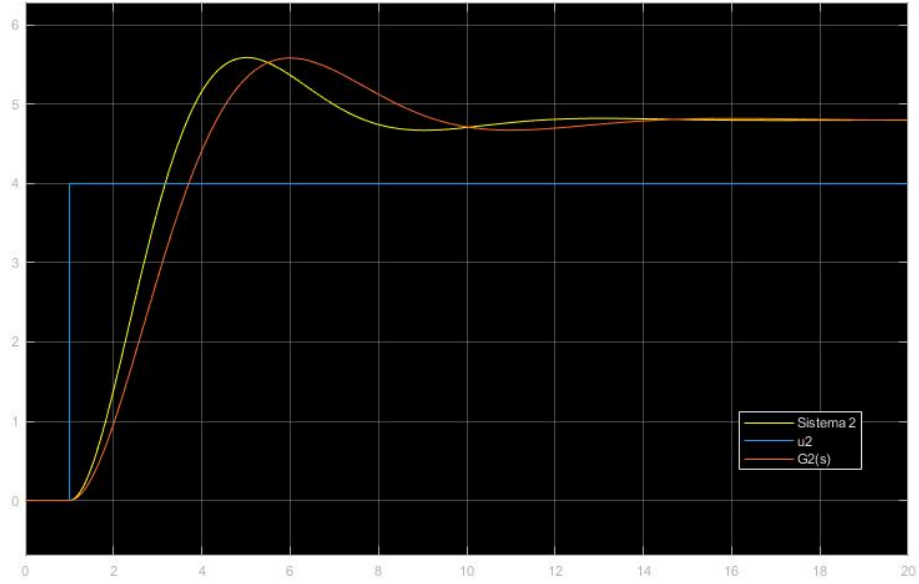
Dessa forma, aplicando as equações 3.4, temos que

$$K = 1.2, \quad M_p = 0.163, \quad \xi = 0.5 \quad \text{e} \quad \omega_n = 0.7255.$$

Dessa forma, a Função de Transferência  $G_2(s)$  será

$$G_2(s) = \frac{0.6316}{s^2 + 0.7255s + 0.5264}.$$

Simulando  $G_2(s)$ , temos o resultado apresentado abaixo.



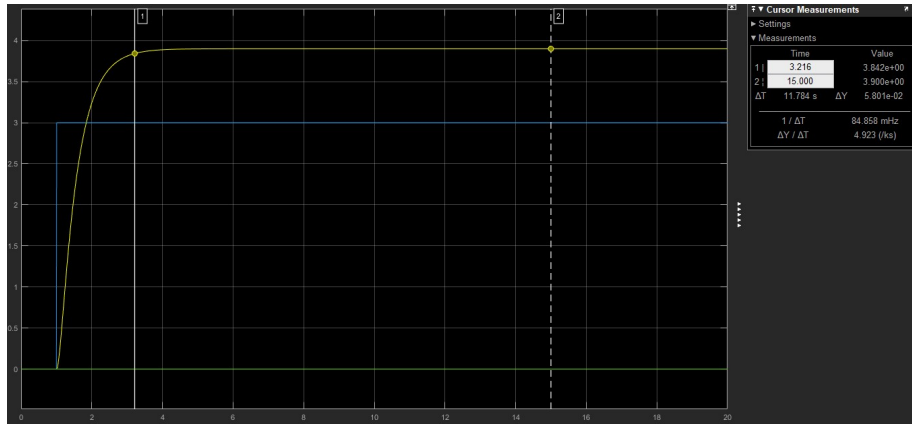
Percebe-se, assim, que a Função de Transferência  $G_2(s)$  se assemelha ao Sistema 2, porém, com menor precisão que a função  $G_1(s)$  se aproximou do Sistema 2.

### Problema 3.3

#### Parte A

Aplique um degrau  $u(t) = 3$  no Sistema 3. Obtenha um modelo aproximado para o Sistema 3 como uma Função de Transferência  $G(s)$  de primeira ordem. Agora implemente o diagrama de blocos em malha fechada da Figura 3 para o Sistema 3 com  $r(t) = 1$  do tipo degrau e  $K_c = 3$ . Observamos que, na Figura 3, se  $G(s)$  é de primeira ordem, então a Função de Transferência em malha fechada  $F(s)$  também será de primeira ordem para qualquer valor de  $K_c > 0$ . A resposta do Sistema 3 em malha-fechada está de acordo com tal propriedade? O que pode estar errado?

**3.3.0.0.1 Resolução** Simulando o sistema do modelo 1 obtemos o resultado abaixo.



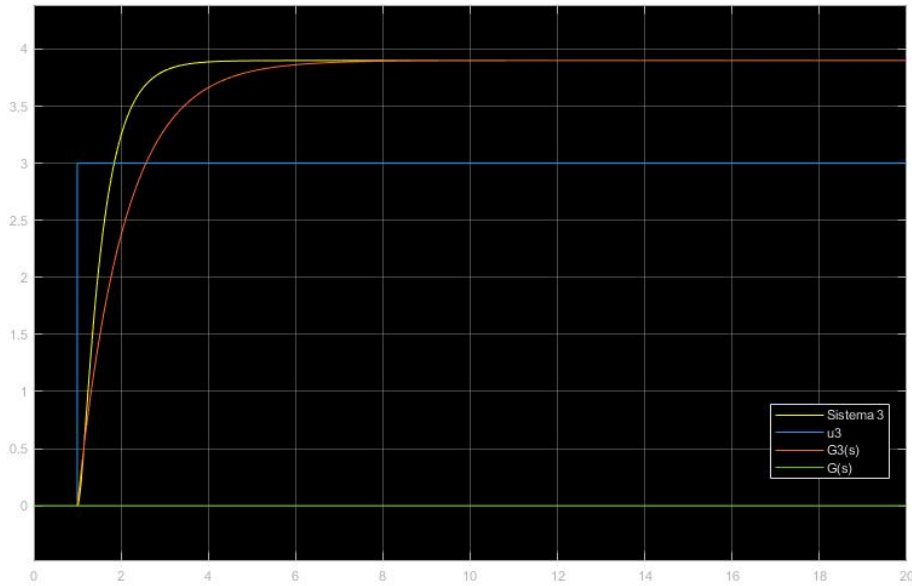
Pela curva feita espera-se que a Função de Transferência seja de primeira ordem. Utilizando as ferramentas fornecidas pelo Simulink foi estimado que

$$y(\infty) = 3.90.95y(\infty) = 3.8415 \Rightarrow t_s(5\%) = 3.22s \Rightarrow \tau = 1.072$$

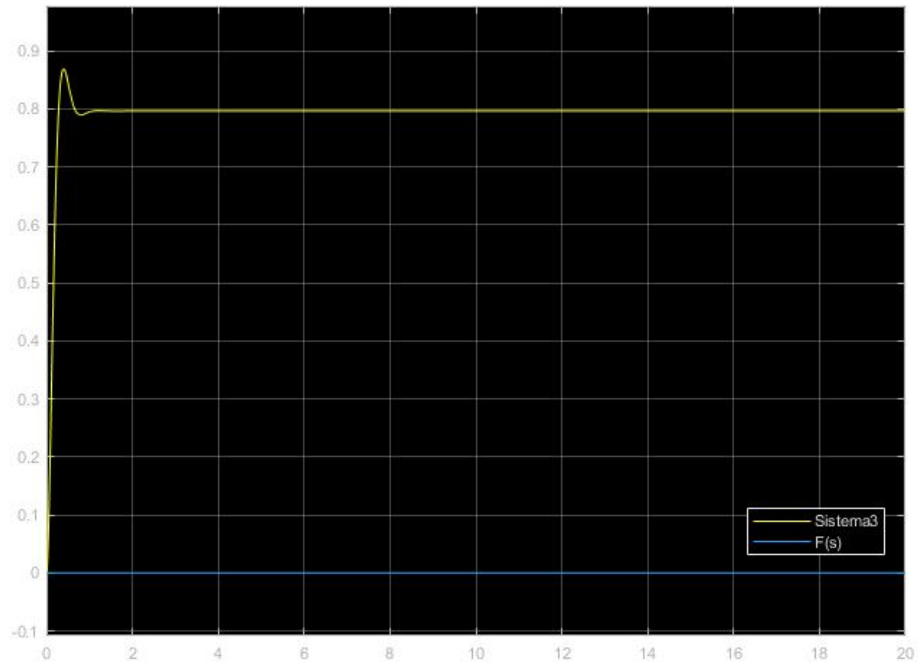
Assim,

$$G_3(s) = \frac{1.3}{1.072s + 1}.$$

Simulando  $G_1(s)$ , temos o resultado apresentado abaixo.



Percebe-se, assim, que a Função de Transferência  $G_B(s)$  não se aproxima satisfatoriamente bem ao Sistema 3. Aplicando a malha fechada vista na figura 3, temos o resultado apresentado abaixo.



Como  $K_c = 3 > 0$  e a Função de Transferência em malha fechada retornou um sistema de segunda ordem, percebe-se a resposta não está de acordo com a propriedade estabelecida. Desta forma, presume-se que  $G(s)$  não é de primeira ordem e sim de segunda.

### Parte B

Identifique  $F(s)$ . Em seguida, identifique  $G(s)$  indiretamente através da equação (??). Para isto, utilize os seguintes comandos no Matlab:

```
F = tf([K*wn^2], [1 2*ksi*wn wn^2])
G = F/(Kc-Kc*F)
G = zpk(minreal(G)) % minreal simplifica e zpk fatora
```

Note que  $G(s)$  é de segunda ordem com pólos reais. Neste momento, temos condições de responder o que estava errado em nossa modelagem inicial do Sistema 3 como um sistema de primeira ordem. Compare a resposta em malha-aberta de  $G(s)$  (identificando indiretamente) com a do Sistema 3 para  $u(t) = 3$  do tipo degrau.



**3.3.0.0.2 Resolução** Simulando o sistema do Sistema 3 em malha fechada e utilizando as ferramentas fornecidas pelo **Simulink** foi estimado que

$$y_p = 0.868y(\infty) = 0.796t_p = 0.4s$$

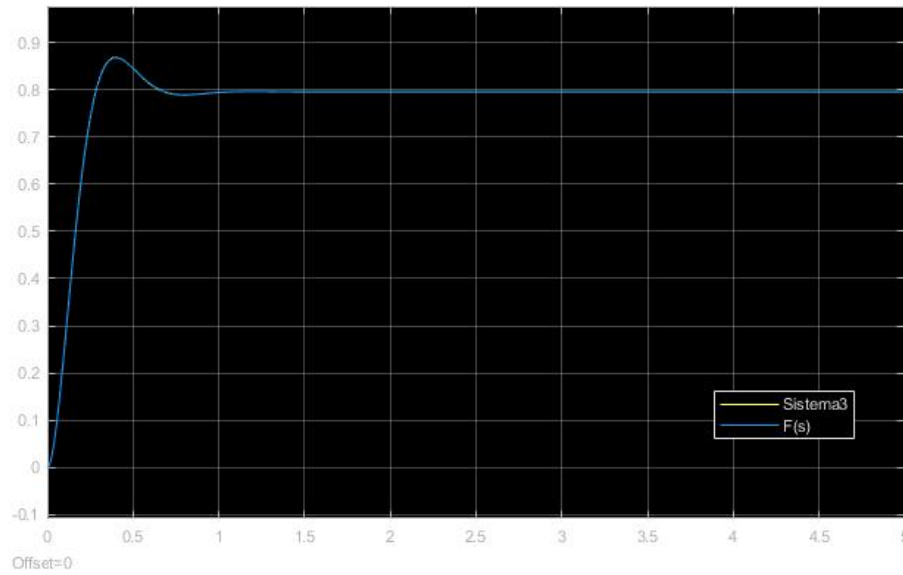
Assim, tem-se que:

$$K = 0.796, \quad M_p = 0.09, \quad \xi = 0.61 \quad \text{e} \quad \omega_n = 9.888.$$

Dessa forma, tem-se que

$$F(s) = \frac{77.83}{s^2 + 12.01s + 97.77}$$

que gera a curva abaixo.



Assim, é possível calcular  $G(s)$  a partir de  $F(s)$ , tendo como resultado

$$G(s) = \frac{25.94}{s^2 + 12.025s + 19.96}.$$

Agora é possível comparar  $G(s)$  com sua curva anterior, gerando o resultado abaixo.



Percebe-se que, considerando o modelo como uma Função de Transferência de segundo grau obtida através de  $F(s)$  é possível encontrar a curva exata correspondente ao Sistema 3.

## Chapter 4

# Rastreamento de Referências e Rejeição de Perturbações - Erro em Regime Permanente

Nesta experiência analisaremos o erro em regime permanente de sistemas em malha-fechada para o rastreamento de referências e a rejeição de perturbações. Consideraremos referências e perturbações do tipo degrau, rampa e parábola. Comprovaremos os resultados teóricos através de simulações no Simulink/Matlab.

### 4.1 Tipos de Sistemas

Considere a Função de Transferência

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

onde  $N(s)$  e  $D(s)$  são polinômios em  $s$  sem raízes em comum e com  $\text{grau}(N) \leq \text{grau}(D)$ . Temos a seguinte classificação para  $G(s)$ :

- Tipo 0:  $G(s)$  não possui pólos em  $s = 0$ . Denominamos  $K_p = G(0)$  de *constante de posição*. Note que  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$ .
- Tipo 1:  $G(s)$  tem um (e apenas um) pólo em  $s = 0$ . Podemos então escrever

$$G(s) = \frac{1}{s} G_0(s),$$

onde  $G_0(s) = \frac{N(s)}{D_0(s)}$  não possui pólos em  $s = 0$ . Chamamos  $K_v = G_0(0) \neq 0$  de *constante de velocidade*. Note que  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$ .

- Tipo 2:  $G(s)$  tem dois (e apenas dois) pólos em  $s = 0$ . Podemos escrever

$$G(s) = \frac{1}{s^2} G_0(s),$$

onde  $G_0(s) = \frac{N(s)}{D_0(s)}$  não possui pólos em  $s = 0$ . Denominamos  $K_a = G_0(0) \neq 0$  de *constante de aceleração*. Note que  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$ .

## 4.2 Erro em regime permanente.

Considere o sistema em malha-fechada com realimentação unitária mostrado na Figura @ref{fig:fig41}, onde:

$$\begin{cases} y(t) & : \text{saída} \\ r(t) & : \text{referência} \\ e(t) = r(t) - y(t) & : \text{erro de rastreamento} \\ w(t) & : \text{perturbação externa que não é possível de ser medida} \end{cases}$$

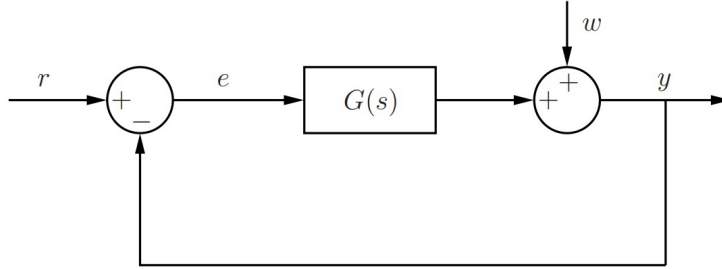


Figure 4.1: Sistema em malha-fechada com perturbação na saída.

Desejamos analisar o erro em regime permanente ( $t \rightarrow \infty$ ) quando existem perturbações externas. Temos que

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - [G(s)E(s) + W(s)] \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) - \frac{1}{1 + G(s)} W(s) \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} [R(s) - W(s)]$$

Note que  $E = E_R$  quando  $W = 0$  e que  $Y = Y_W$  quando  $R = 0$ . Podemos então analisar  $E$  através de  $E_R$  e  $Y_R$ . O erro em regime permanente é dado por

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_r(\infty) - y_w(\infty), \quad (4.1)$$

desde que os limites  $e_r(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t)$  e  $y_w(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_w(t)$  existam. Dizemos que há *rastreamento de referência* quando  $e_r(\infty) = 0$ . De maneira semelhante, dizemos que há *rejeição de perturbação* quando  $y_w(\infty) = 0$ . Portanto, quando há rastreamento de referência e rejeição de perturbação teremos que  $e(\infty) = 0$ .

Iremos agora analisar  $e_r(\infty)$  e  $y_w(\infty)$  através de  $E_R(s)$  e  $Y_W(s)$ , respectivamente, considerando que a referência  $r$  e a perturbação externa  $w$  são do tipo degrau, rampa ou parábola. Relembramos que:

1. Degrau:  $x(t) = A \iff X(s) = \frac{A}{s}$
2. Rampa:  $x(t) = Bt \iff X(s) = \frac{B}{s^2}$
3. Parábola:  $x(t) = Ct^2 \iff X(s) = \frac{2C}{s^3}$

Suponha que  $D(s) + N(s) = 0$  possui todas as raízes no SPE (Semi-Plano Esquerdo do plano  $s$ ) e que  $D(s)R(s)$  e  $D(s)W(s)$  possuem no máximo um pólo em  $s = 0$ . Isto garante que  $e_r(\infty)$  e  $y_w(\infty)$  existem e, assim, o Teorema do Valor Final pode ser aplicado. Ressaltamos que as raízes de  $D(s) + N(s) = 0$  nada mais são do que os pólos da Função de Transferência de malha-fechada quando não há perturbação ( $w = 0$ )

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{N(s)}{D(s) + N(s)}, \quad (\text{para } w = 0).$$

Desse modo, estamos assumindo que  $F(s)$  é estável para  $w = 0$ . Com base no Teorema do Valor Final, podemos construir a tabela 4.1 e a tabela 4.2 mostradas abaixo. Note que os valores de  $e_r(\infty)$  e de  $y_w(\infty)$  (regime permanente) dependem apenas da constante de posição  $K_p$ , da constante de velocidade  $K_v$  e da constante de aceleração  $K_a$ . Tl nomenclatura tem origem em sistemas mecânicos de controle. Por exemplo, para um sistema Tipo 0 e  $r(t) = A$  (degrau) temos que (Teorema do Valor Final)

$$e_r(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D(s)}{D(s) + N(s)} \frac{A}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{AD(s)}{D(s) + N(s)} = \frac{AD(0)}{D(0) + N(0)} = \frac{A}{1 + N(0)/D(0)} = \frac{A}{1 + G(0)} = \frac{A}{1 + G(0)}$$

pois como  $D(0) + N(0) \neq 0$  ( $F(s)$  é estável) e  $D(0) \neq 0$  ( $G(0)$  é de Tipo 0) não há divisão por zero!

E, para um sistema Tipo 2 e  $r(t) = Bt$  (rampa), temos  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{s^2 D_0(s)}$  e

$$e_r(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{D(s)}{D(s) + N(s)} \frac{B}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 D_0(s)}{D(s) + N(s)} \frac{B}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sBD_0(s)}{D(s) + N(s)} = \frac{0BD(0)}{N(0) + D(0)} = 0,$$

Table 4.1: Valores de  $e_r(\infty)$  ( $w = 0$ )

Sistema $G(s)$ / Referência	$r(t) = A$	$r(t) = Bt$	$r(t) = Ct^2$
Tipo 0	$\frac{A}{1+K_p}$	$\infty$	$\infty$
Tipo 1	0	$\frac{B}{K_v}$	$\infty$
Tipo 2	0	0	$\frac{2C}{K_a}$

Table 4.2: Valores de  $y_r(\infty)$  ( $r = 0$  e  $w$  na saída de  $G(s)$ )

Sistema $G(s)$ / Perturbação	$w(t) = A$	$w(t) = Bt$	$w(t) = Ct^2$
Tipo 0	$\frac{A}{1+K_p}$	$\infty$	$\infty$
Tipo 1	0	$\frac{B}{K_v}$	$\infty$
Tipo 2	0	0	$\frac{2C}{K_a}$

pois  $D(0) + N(0) \neq 0$  ( $F(s)$  é estável) e não há divisão por zero!

Observamos que a tabela 4.1 e a tabela 4.2 são válidas apenas para sistemas com realimentação unitária com perturbação na saída (veja a Figura 4.1) e tais que a Função de Transferência em malha-fechada é estável para  $w = 0$ .

Agora, considere o sistema mostrado na Figura 4.2 e assumo que  $G_2(s)$  não possui zeros em  $s = 0$ . Para tal sistema, a Tabela 4.1 continua válida para  $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ . No entanto, a Tabela 4.2 deve ser substituída pela Tabela 4.3. Ressaltamos que os valores  $\neq 0$  na Tabela 4.3 podem ser calculados analiticamente a partir de  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ . Entretanto, isso não é o objeto de estudo desta experiência.



Figure 4.2: Sistema em malha-fechada com perturbação na entrada de  $G_s(s)$  e  $G_2(s)$  não possui \*zeros\* em  $s = 0$ .

Table 4.3: Valores de  $y_r(\infty)$  ( $r = 0$  e  $w$  na saída de  $G_2(s)$ )

Sistema $G(s)$ / Perturbação	$w(t) = A$	$w(t) = Bt$	$w(t) = Ct^2$
Tipo 0	$\neq 0$	$\infty$	$\infty$
Tipo 1	0	$\neq 0$	$\infty$
Tipo 2	0	0	$\neq 0$





# Problemas Laboratório 4

Estes problemas são relacionados ao assunto abordado no Laboratório 4.

Em todos os itens abaixo consideramos o sistema em malha-fechada mostrado na Figura 4.3 onde  $C(s)$  é o controlador,  $G(s)$  é a planta (processo) e  $u(t)$  é o sinal de controle.



Figure 4.3: Sistema em malha-fechada.

## Problema 4.1

Considere que

$$G(s) = \frac{1}{0.5s + 1}, \quad C(s) = K_c \quad (\text{proporcional}), \quad w = 0 \quad (\text{sem perturbação}).$$

- Simule para  $r(t) = 1$  (degrau unitário) e  $K_c = 1$ . Determine  $e(\infty) = e_r(\infty)$  por simulação e compare com a Tabela 4.1 (note que  $K_p = K_c$ ). Repita para  $K_c = 10$  e  $K_c = 100$ , analisando também o regime transitório de saída  $y(t)$ .
- Percebemos que  $e(\infty)$  diminui à medida que aumentamos o ganho  $K_c$  do controlador. Poderíamos então escolher  $K_c = \infty$  para que  $e(\infty) = 0$ ? Justifique sua resposta (dica: observe o sinal de controle  $u(t)$ ).
- Com  $K_c = 1$  simule para  $r(t) = t$  (rampa) e  $r(t) = 0.5t^2$  (parábola). Determine o erro em regime permanente e verifique se os resultados estão de acordo com o esperado.

### Resolução

#### Parte A

Por meio da simulação foi encontrado o valor de  $e(\infty) = e_r(\infty) = 0.5$  conforme apresenta a Figura 4.4.

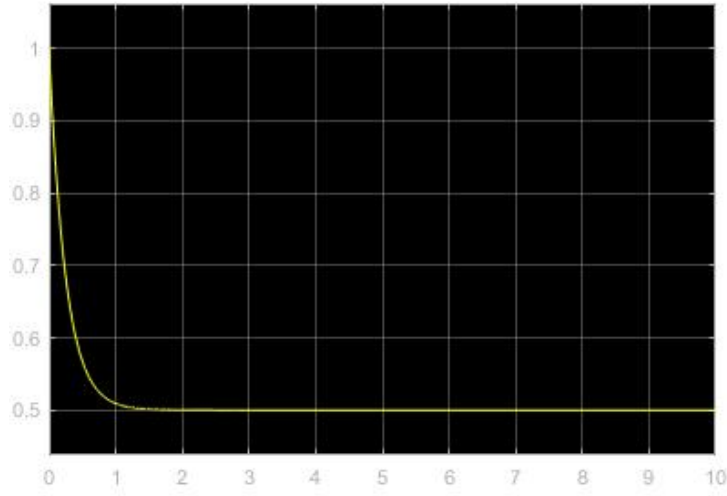


Figure 4.4: Valor de  $e(r)$ .

Utilizando a Tabela 4.1 temos que  $e_r(\infty) = \frac{A}{1+K_p}$ . Assim, tendo  $A = 1$  e  $K_c = 1$ , temos que  $e_r(\infty) = \frac{1}{2} = 0.5$ , o que está de acordo com o resultado encontrado na simulação. A figura 4.5 apresenta os valores de  $e(s) = e_r(s)$  e  $Y(s)$  para  $K_c = 10$  e  $K_c = 100$ .

#### Parte B

Teoricamente, é possível encontrar um erro nulo  $e(\infty) = 0$  se utilizado um ganho infinito  $K_c = \infty$ . Pois, de acordo com a Tabela 4.1, temos que

$$e(\infty) = \frac{A}{1 + K_c} = \frac{A}{1 + \infty} = 0.$$

Entretanto, não existe um sistema prático que retorne um ganho infinito. O ideal seria considerar um sistema que seja de Tipo 1 ou 2 para que, ao aplicar uma entrada do tipo degrau ele retorne um erro nulo.

Figure 4.5: Valores para  $K_c = 10$  e  $K_c = 100$ .

### Parte C

A Figura 4.6 apresenta os valores de  $y(s)$  e  $e(s)$  para uma entrada  $r(t) = t$  (rampa).

A Figura 4.7 apresenta os valores de  $y(s)$  e  $e(s)$  para uma entrada  $r(t) = 0.5t^2$  (parábola).

É possível perceber que, como o esperado,  $e(\infty) = e_r(\infty) = \infty$  para ambos os casos.

## Problema 4.2

Considere que

$$G(s) = \frac{1}{0.5s + 1}, \quad C(s) = \frac{K_c}{s} \text{ (integral)}, \quad w = 0 \text{ (sem perturbação)}.$$

- Simule para  $r(t) = 1$  (degrau unitário) e  $K_c = 1$ . Determine  $e(\infty) = e_r(\infty)$  por simulação e compare com a Tabela 4.1. Analise também o regime transitório da saída para  $y(t)$  (sobressinal, por exemplo). Repita para  $K_c = 10$ . Observe o aumento no sobressinal.
- Simule para  $K_c = 2$  e  $r(t) = t$  (rampa). Determine  $e(\infty)$  por simulação e compare com a Tabela 4.1 (note que  $K_v = K_c$ ). Encontre analiticamente

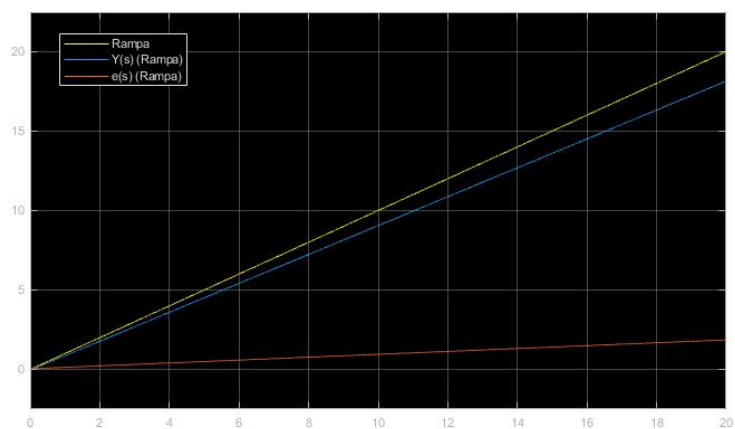


Figure 4.6: Valores para entrada do tipo rampa.

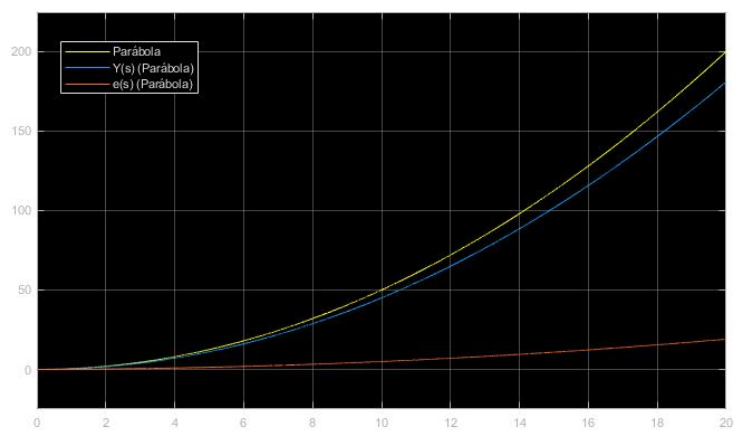


Figure 4.7: Valores para entrada do tipo parábola.

$K_c$  de modo que o erro à rampa  $r(t) = t$  em regime permanente seja igual a 0.1. Agora verifique se as simulações estão de acordo com o valor calculado de  $K_c$ .

- c. Simule para  $K_c = 2$  e  $r(t) = 0.5t^2$  (parábola). Determine o erro em regime permanente por simulação e analise os resultados.
- d. Agora suponha que

$$G(s) = \frac{-s+2}{0.5s+1}, \quad C(s) = \frac{2}{s}, \quad r(t) = 1 \text{ (degrau)}.$$

Determine  $e(\infty)$  por simulação. Note que o erro não converge para zero. O resultado está de acordo com o esperado? Relembre que a Tabela 4.1 e a Tabela 4.2 são validas apenas quando o sistema em malha-fechada para  $w = 0$  é estável (os pólos estão no SPE).

## Resolução

**4.2.0.0.1 Parte A** Aplicando um controle  $C(s) = \frac{K_c}{s}$  em série a uma função  $G(s) = \frac{1}{0.5s+1}$  temos como resultado a Função de Transferência

$$G_t(s) = C(s)G(s) = \frac{K_c}{s} \frac{1}{0.5s+1} = \frac{K_c}{s(0.5s+1)},$$

que não possui zeros e possui pólos em  $s = 0$  e  $s = 2$ . Deste modo, o sistema se caracteriza como um sistema do Tipo 1. Simulando o sistema temos como resultado a Figura 4.8.

Simulando para  $K_c = 10$ , temos o resultado abaixo.

**4.2.0.0.2 Parte B** Simulando o sistema para um  $K_c = 2$  e uma entrada tipo rampa, temos que o sistema tem  $e(\infty) = 0.5$ , o que está de acordo com a Tabela 4.1. O resultado da simulação está apresentado abaixo.

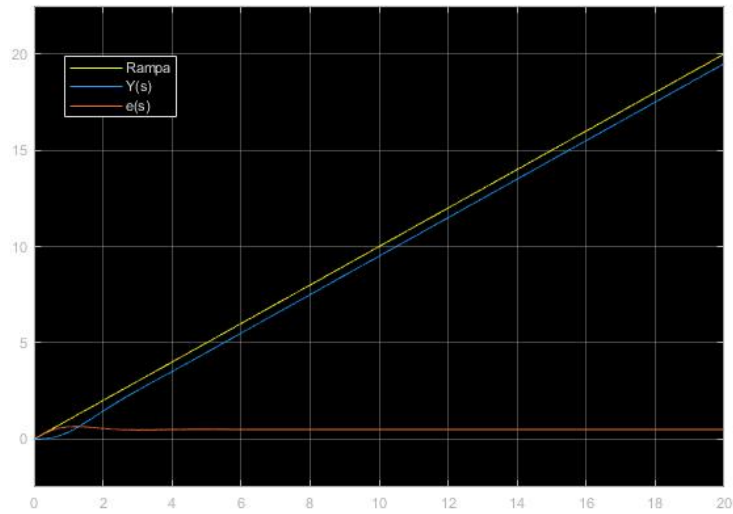
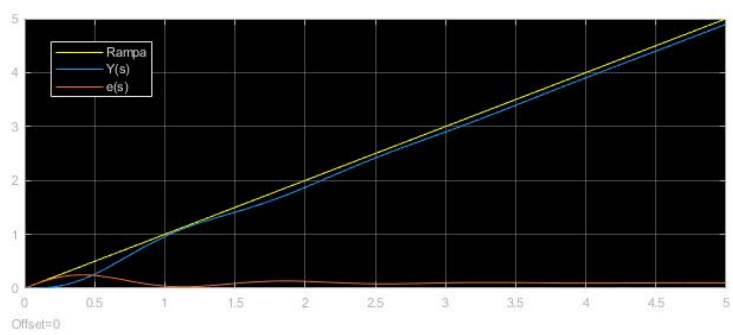
Analiticamente, é possível calcular o valor de  $K_v$  para que  $e(\infty) = 0.1$ .

$$0.1 = \frac{1}{K_v} \implies K_v = 10$$

Simulando o sistema o valor foi comprovado.

**4.2.0.0.3 Parte C** Simulando o sistema para  $K_c = 2$  e uma entrada do tipo parábola, temos  $e(\infty) = \infty$ , o que está de acordo com a Tabela 4.1.

Figure 4.8: Valores para  $K_c = 1$ .Figure 4.9: Valores para  $K_c = 10$ .

Figure 4.10: Valores para  $K_c = 2$  e entrada do tipo rampa.Figure 4.11: Valores para  $K_c = 10$  e entrada do tipo rampa.

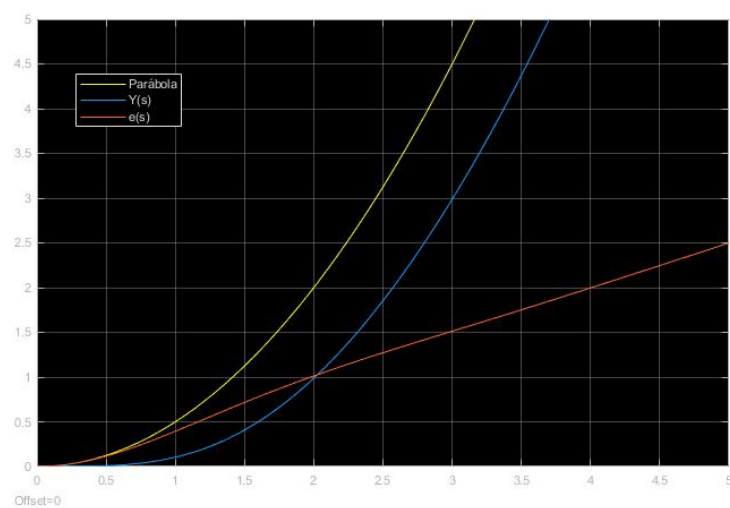


Figure 4.12: Valores para  $K_c = 2$  e entrada do tipo parábola.

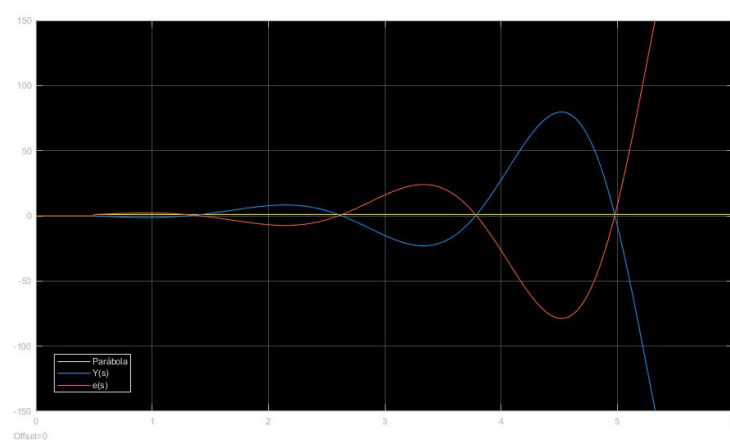


Figure 4.13: Valores de  $e(s)$  e  $y(s)$ .



**4.2.0.0.4 Parte D** Simulando a Função de Transferência  $G(s) = \frac{-s+2}{0.5s+1}$ , controle  $C(s) = \frac{2}{s}$  e entrada do tipo degrau temos o resultado apresentado na Figura 4.13.

Diferentemente do esperado (que o  $e(\infty) = 0$ ) uma vez que segundo a Tabela 4.1 para sistemas do Tipo 1 para entrada igual degrau o erro esperado é nulo, o erro não converge. Na realidade, é possível notar que o sistema não se comportou de forma estável.

## Problema 4.3

Considere que

$$G(s) = \frac{1}{0.5s+1}, \quad C(s) = \frac{2}{s} \text{ (integral).}$$

- Determine  $y(\infty) = y(\infty)$  por simulação para  $w = 1$  (degrau unitário) e  $r = 0$ . Compare com a Tabela 4.2.
- Considere que  $r(t) = 5$  (degrau em  $t = 0$ ) e aplique uma perturbação  $w = 1$  (degrau) no instante  $t = 9$ . Determine  $e(\infty)$  e analise os resultados (talvez seja necessário aumentar o tempo de simulação).
- Considere que  $r(t) = 2t$  (rampa) e  $w = 0$ . Determine  $e(\infty) = e_r(\infty)$  por simulação e compare com a Tabela 4.1.
- Considere que  $r(t) = 0$  e  $w = t$  (rampa). Determine  $y(\infty) = y_w(\infty)$  por simulação e compare com a Tabela 4.2.
- Considere que  $r(t) = 2t$  (rampa) e  $w = t$  (rampa). Determine  $e(\infty)$  por simulação e verifique que tal valor é a diferença dos valores obtidos nas letras c e d. Tal resultado era esperado? Justifique (relembre (4.1)).

## Resolução

**4.2.0.0.5 Parte A** Simulando o sistema com uma referência em zero e uma perturbação do tipo degrau unitário, temos o resultado apresentando na Figura 4.14 que está de acordo com o resultado esperado da Tabela 4.2, retornando um valor de  $y(\infty) = 0$

**4.2.0.0.6 Parte B** Simulando o sistema tendo uma entrada degrau de amplitude 5 e uma perturbação de amplitude 1, temos o resultado apresentado na figura 4.15. O resultado mostra que o sistema era estável e havia convergido para 0. Ao receber a perturbação, o sistema se comportou de forma semelhante (a resposta voltou ao pico do sobressinal que havia chegado inicialmente) ao início da simulação, voltando a convergir para 0 em  $t = \infty$ .

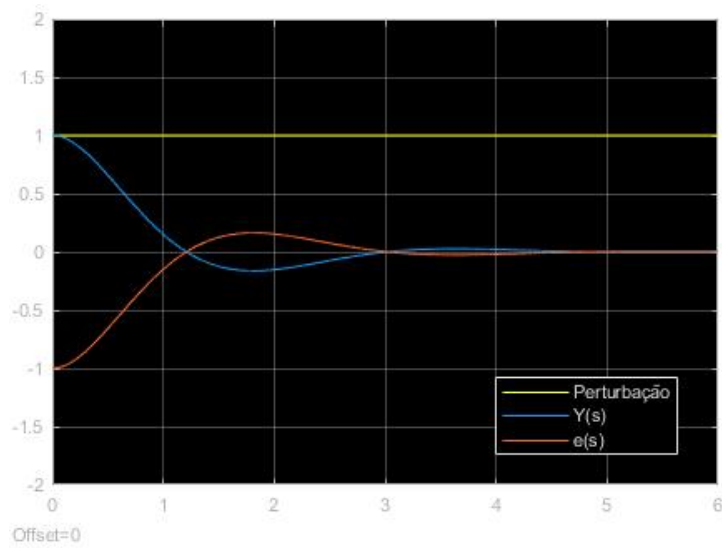


Figure 4.14: Valores para sistema sem referência, apenas com perturbação.

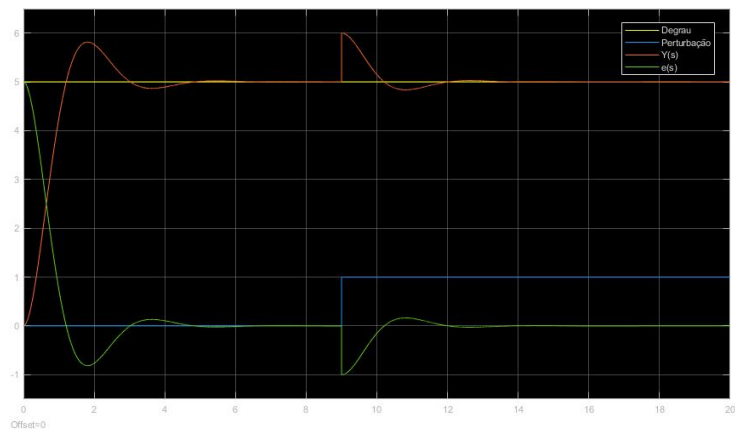


Figure 4.15: Valores para referência tipo degrau com perturbação.

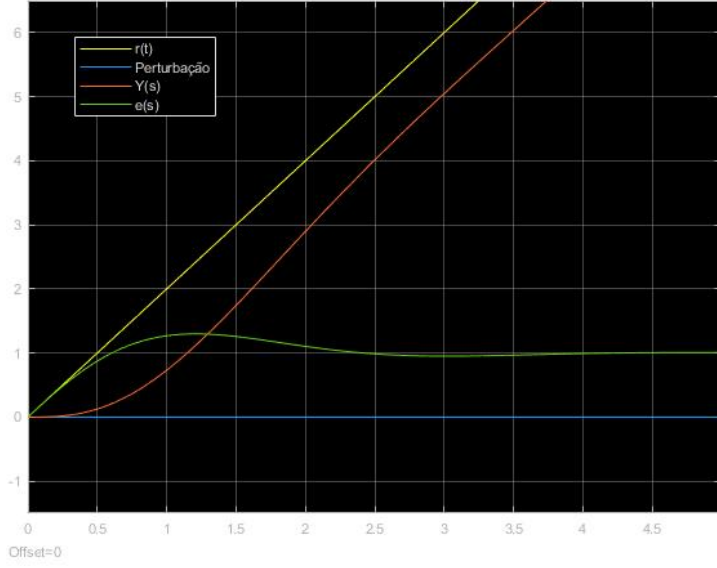


Figure 4.16: Valores para rampa sem perturbação.

**4.2.0.0.7 Parte C** A simulação para um sistema com referência  $r(t) = 2t$  e sem perturbação é mostrada na Figura 4.16.

Percebe-se que o resultado está de acordo com o esperado, pois, de acordo com a tabela 4.1, temos que

$$e(\infty) = \frac{B}{K_v} = \frac{2}{2} = 1.$$

**4.2.0.0.8 Parte D** A simulação para um sistema com referência nula e perturbação  $w(t) = t$  é mostrada na Figura 4.17.

Percebe-se que o resultado está de acordo com o esperado, pois, de acordo com a tabela 4.2, temos que

$$y(\infty) = \frac{B}{K_v} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

**4.2.0.0.9 Parte E** A simulação para um sistema com referência  $r(t) = 2t$  e perturbação  $w(t) = t$  é mostrada na Figura 4.18.

Percebe-se que o resultado está de acordo com o esperado, pois, de acordo com a equação (4.1), temos que

$$e(\infty) = e_r(\infty) - y_w(\infty) = 1 - 0.5 = 0.5$$

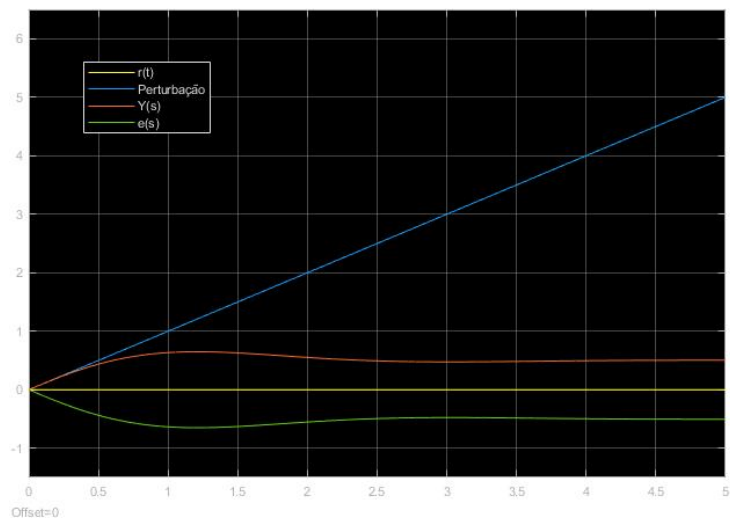


Figure 4.17: Valores para rampa sem perturbação.

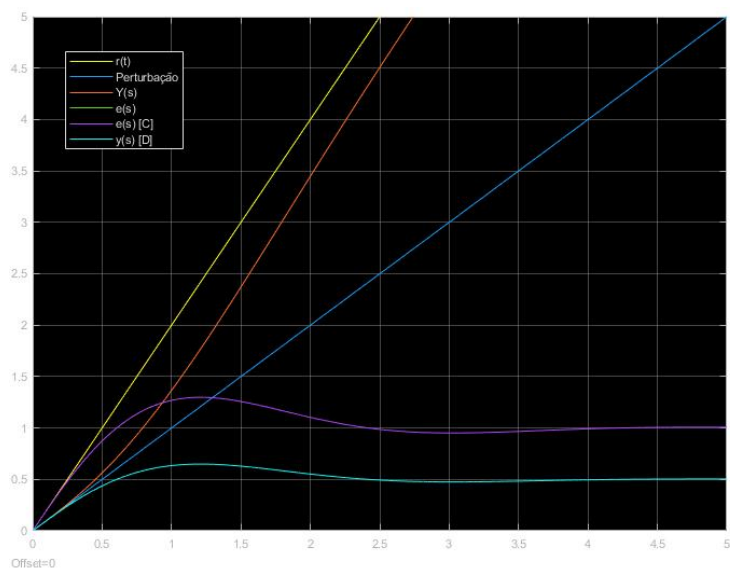


Figure 4.18: Valores para referência e perturbação tipo rampa.

## Problema 4.4

Considere que

$$G(s) = \frac{2s + 1}{0.5s + 1}, \quad C(s) = \frac{K_c}{s^2}, \quad r(t) = t, \quad w(t) = 0.1t.$$

- Considere que  $K_c = 1$ . Determine  $e(\infty)$  por simulação. O Resultado está de acordo com o esperado?
- Considere que  $K_c = 2$ ,  $r(t) = t^2$ ,  $w(t) = 0.5t^2$ . Determine  $e(\infty)$  por simulação e verifique se o mesmo está de acordo com o esperado. Note que  $K_a = K_c$ .

### Parte A

O resultado da simulação está apresentado na Figura 4.19.



Figure 4.19: Valores para rampa com perturbação.

O resultado era esperado pois, para uma entrada tipo rampa com perturbação tipo rampa, um sistema do Tipo 2 retorna  $e_r(\infty) = 0$  e  $y_w(\infty) = 0$ , resultando em  $e(\infty) = 0$ .

### Parte B

O resultado da simulação está apresentado na Figura 4.20.

O resultado era esperado pois temos ( $e_r(\infty)$  e  $y_w(\infty)$  obtidos por meio de simulação)

$$e_r(\infty) = 0.5y_w(\infty) = 0.25e(\infty) = 0.25.$$

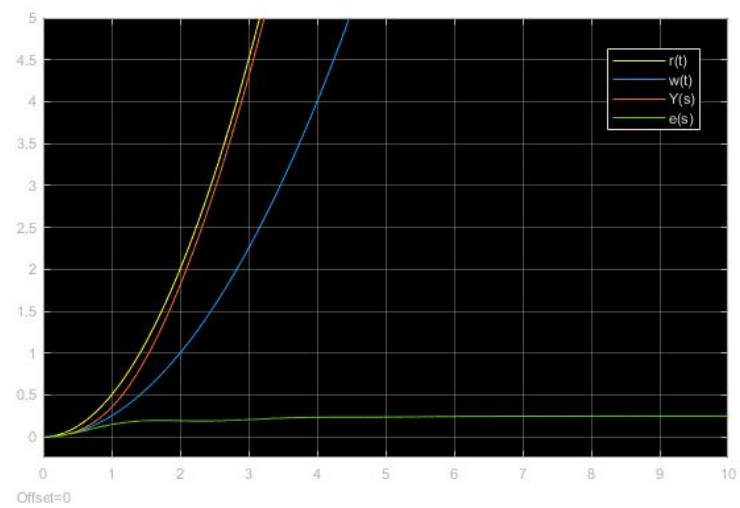


Figure 4.20: Valores para parábola com perturbação.

## Chapter 5

# Projeto de Controladores por Métodos Algébricos

Nesta experiência projetaremos controladores que atendam determinadas especificações de regime transitório e de regime permanente em malha-fechada por métodos algébricos. Comprovaremos por simulação no Matlab o desempenho do sistema em malha-fechada.

### 5.1 Controladores Clássicos

Considere o diagrama de blocos  $G(s)$  em malha-fechada da Figura 5.1 onde  $r(t)$  é a referência,  $w(t)$  é uma perturbação externa,  $y(t)$  é a saída,  $e(t) = r(t) - y(t)$  é o erro de rastreamento,  $u(t)$  é o controle e  $C(s)$  é o controlador a ser projetado.

Relembremos que se  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  então os *zeros* de  $G(s)$  são as raízes de  $N(s)$  e os *pólos* de  $G(s)$  são as raízes de  $D(s)$ . Além disso, uma Função de Transferência é estável quando todos os pólos estão no SPE (Semi-Plano Esquerdo do plano complexo) e instável quando existe algum pólo no SPD (Semi-Plano Direito).

*Projetar* um controlador significa definir uma estrutura para

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

e então escolher adequadamente os parâmetros correspondentes de modo que o sistema em malha-fechada atenda determinadas especificações de regime transitório (tempo de acomodação e sobressinal, por exemplo) e de regime permanente (erro nulo em regime permanente para referências e perturbações do tipo degrau, por exemplo). Na prática as seguintes estruturas de controladores são amplamente utilizadas, onde  $K_c > 0$ :

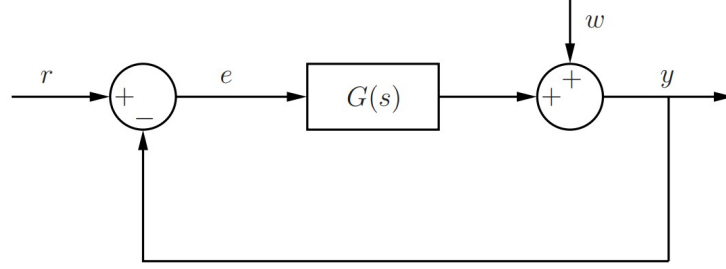


Figure 5.1: Diagrama de blocos do processos  $G(s)$  em malha-fechada com perturbação  $w$ .

1. Proporcional (P):  $C(s) = K_c$
2. Integral (I):  $C(s) = \frac{K_c}{s}$
3. Proporcional-Integral (PI):  $C(s) = \frac{K_c(s + z)}{s}$

É importante ressaltar que em situações reais devemos sempre procurar utilizar controladores com a estrutura mais simples possível. Isto implica em menos dificuldades na implementação e em menores custos. Na próxima seção veremos um método algébrico de projeto de controladores.

## 5.2 Método Algébrico de Projeto de Controladores

Considerando que  $w = 0$  (sem perturbação), temos que a Função de Transferência em malha-fechada da figura 5.1 é

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{N_c(s)N(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)}, \quad \text{para } w = 0.$$

Uma maneira de projetarmos o controlador é primeiramente escolhermos a estrutura de  $C(s)$  de modo que as especificações de regime permanente sejam atendidas e que  $F(s)$  seja uma função de Transferência de primeira ou de segunda ordem (relembre que a ordem de  $F(s)$  é igual a ordem de  $C(s)G(s)$ ). Em muitos casos, isto pode ser alcançado através de um cancelamento entre um zero de  $C(s)$  e um pólo de  $G(s)$ . Em seguida os parâmetros de  $C(s)$  são determinados por igualdade polinomial. Na prática,  $F(s)$  sempre deverá ser estável. Assim, sempre consideramos que  $F(s)$  é estável. No entanto, tal método algébrico apresenta algumas restrições.



1. Em geral, o método é válido para  $G(s)$  de primeira ou segunda ordem;
2. Cancelamentos pólo-zero em  $C(s)G(s)$  que estão no SPD (instável) não podem ser efetuados;
3. Mesmo quando fazemos cancelamento pólo-zero em  $C(s)G(s)$  que está no SPE (estável), temos que o regime transitório referente à perturbação  $w$  será influenciado pelo pólo de  $G(s)$  que foi cancelado. Desse modo, se o pólo cancelado de  $G(s)$  é muito lento, ou seja, está muito próximo do eixo imaginário, a dinâmica da rejeição de tais perturbações também será bastante lenta;
4. Quando desejamos que  $F(s)$  seja de segunda ordem, muitas vezes não conseguimos atender simultaneamente as especificações de tempo de acomodação ( $t_s(5\%)$ ) e de sobressinal ( $M_p$ ).

### 5.3 Erro em Regime Permanente

Relembramos o Teorema do Valor Final:

**Teorema 5.1** (Teorema do Valor Final). *Seja  $X(s)$  a Transformada de Laplace de um sinal  $x(t)$ . Suponha que  $X(s)$  ou  $sX(s)$  tem todos os pólos no SPE. Então, o limite  $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  existe e é dado por*

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

Analisaremos agora o erro de rastreamento  $e(t) = e(t) - y(t)$  em regime permanente ( $t \rightarrow \infty$ ) para referências e perturbações do tipo degrau. Suponha que  $F(s)$  é estável, ou seja, todas as raízes de

$$D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)$$

estão no SPE. Isto garante que  $e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  existe e, assim, o Teorema do Valor Final pode ser aplicado.

Temos que

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - [C(s)G(s)E(s) + G(s)W(s)] \implies E(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}W(s) \implies E$$

Considere que  $r(t)$  e  $w(t)$  são do tipo degrau de magnitudes  $A$  e  $B$ , respectivamente. Assim,

$$R(s) = \frac{A}{s}, \quad W(s) = \frac{B}{s}.$$

**$B = 0$  (sem perturbação)**

Suponha que  $D_c(s)D(s) = s\bar{D}(s)$ , ou seja,  $C(s)G(s)$  tem um pólo em  $s = 0$  (integrador). Temos que

$$E(s) = \frac{D_c(s)D(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)} R(s) = \frac{s\bar{D}(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)} \frac{A}{s} = \frac{A\bar{D}(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)}$$

e (Teorema do Valor Final)

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sA\bar{D}(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)} = \frac{0A\bar{D}(0)}{D_c(0)D(0) + N_c(0)N(0)} \boxed{= 0}$$

pois  $D_c(0)D(0) + N_c(0)N(0) \neq 0$  ( $F(s)$  é estável) então há divisão por zero! Desse modo,  $e(\infty) = 0$  independente da magnitude  $A$  de  $r(t)$ . Isto significa que a saída  $y(t)$  rastreia a referência  $r(t)$  do tipo degrau em regime permanente.

 **$B \neq 0$  (com perturbação)**

Suponha que  $D_c(s) = s\bar{D}_c(s)$ , ou seja,  $C(s)$  tem um pólo em  $s = 0$  (integrador). Temos que

$$E(s) = \frac{D_c(s)D(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)} R(s) - \frac{D_c(s)N(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)} W(s) = \frac{s\bar{D}(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)} \frac{A}{s} - \frac{D_c(s)N(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)} W(s)$$

e 5.1

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A\bar{D}_c(s)D(s) - B\bar{D}_c(s)N(s)}{D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)} = \frac{0[A\bar{D}_c(0)D(0) - B\bar{D}_c(0)N(0)]}{D_c(0)D(0) + N_c(0)N(0)} = \boxed{0}$$

pois  $D_c(0)D(0) + N_c(0)N(0) \neq 0$  ( $F(s)$  é estável) então há divisão por zero! Desse modo,  $e(\infty) = 0$  independente da magnitude  $A$  e  $B$  de  $r(t)$  e  $w(t)$ , respectivamente. Portanto, em regime permanente, a saída  $y(t)$  rastreia a referência  $r(t)$  com rejeição da perturbação  $w(t)$ .

 **$F(s)$  de primeira ordem**

Suponha que  $F(s)$  é uma Função de Transferência de primeira ordem da forma

$$F(s) = \frac{1}{\tau s + 1},$$

onde  $\tau > 0$  (pólo estável em  $s = -\frac{1}{\tau}$ ). Para referências  $r(t)$  do tipo degrau, não há sobressinal em  $y(t)$  e

$$\boxed{t_s(5\%) = 3\tau, \quad e(\infty) = 0}.$$

**$F(s)$  de segunda ordem**

Suponha que  $F(s)$  é uma Função de Transferência de segunda ordem da forma

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

onde  $0 < \xi < 1$  e  $\omega_n > 0$  (pólos estáveis em  $s = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n$ ). Para referências  $r(t)$  do tipo degrau temos que

$$M_p = \frac{y_p - y(\infty)}{y(\infty)}, \quad \xi = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{(\ln M_p)^2 + \pi^2}}, \quad t_s(5\%) \cong \frac{3}{\xi\omega_n}, \quad e(\infty) = 0.$$

( $M_p$  é o sobressinal relativo e  $y(\infty)$  é o valor em regime permanente da saída  $y(t)$ ).

**Exemplo 5.1.** Seja

$$G(s) = \frac{1}{s+2}.$$

Queremos projetar  $C(s)$  de modo que tenhamos: (i) erro nulo em regime permanente ara referências e perturbações do tipo degrau e (ii)  $M_p = 0.05$  (sobressinal de 5%) para referências do tipo degrau. Para que (i) seja entendida,  $C(s)$  deve ter um integrador (pólo em  $s = 0$ ) (desde que  $F(s)$  seja estável). Escolhemos então um controlador integral

$$C(s) = \frac{K_c}{s}.$$

Logo,

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{\frac{K_c}{s} \frac{1}{s+2}}{1 + \frac{K_c}{s} \frac{1}{s+2}} = \frac{K_c}{s^2 + 2s + K_c} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

e

$$M_p = 0.05 \implies \boxed{\xi = 0.69}.$$

Por igualdade polinomial, obtemos que

$$\xi\omega_n = 1 \implies \omega = \frac{1}{0.69}K_c = \omega_n^2 \implies K_c = 2.1$$

Assim,

$$\boxed{C(s) = \frac{2.1}{s}}.$$



# Problemas Laboratório 5

Estes problemas são relacionados ao assunto abordado no Laboratório 5.

## Problema 5.1

Considere

$$G(s) = \frac{0.5}{10s + 1}.$$

- (a) Simule  $G(s)$  em malha-aberta para  $u(t) = 1$  do tipo degrau. Conforme o esperado, observe que  $t_s(5\%) = 30$  e  $y(\infty) = G(0) = 0.5$ . Agora, aplique uma perturbação  $w(t) = 0.25$  do tipo degrau em  $t = 100$ . Note que a perturbação não é rejeitada.
- (b) Projete  $C(s)$  de modo que se tenha: (i) erro nulo em regime permanente para  $r(s)$  e  $w(s)$  do tipo degrau; (ii)  $t_s^{MF}(5\%) = \frac{t_s^{MA}(5\%)}{2}$  e a saída  $y(t)$  não apresenta sobressinal para referências do tipo degrau. Dica: utilize um controlador PI  $C(s) = \frac{K_c(10s+1)}{s}$  (cancelamento pólo-zero).
- (c) Simule o sistema em malha-fechada para  $r(t) = 1$  e  $w(t) = 0.25$  do tipo degrau, aplicando  $w(t)$  em  $t = 100$ . Verifique se os requisitos de desempenho foram realmente atendidos e visualize o sinal de controle  $u(t)$ . Note que  $u(\infty) = \frac{1}{G(0)} - 0.25 = 1.75$ . Isto era esperado? Justifique.
- (d) Mantendo o mesmo controlador  $C(s)$  repita o item anterior para  $G(s) = \frac{0.45}{9.9s+1}$ . Explique o motivo pelo qual ainda temos  $e(\infty) = 0$ .

## Resolução

**5.3.0.0.1 Parte A** O resultado da simulação está apresentado na figura 5.2. Conforme esperado, tem-se que  $t_s(5\%) = 30$  e  $y(\infty) = G(0) = 0.5$ .

Simulando agora com uma perturbação temos o resultado presente na figura 5.3. A perturbação não é rejeitada e o sistema alcança um novo valor para  $y(\infty)$ .



Figure 5.2: Simulação A1



Figure 5.3: Simulação A2

**5.3.0.0.2 Parte B** Para calcular  $C(s)$  utilizamos  $F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$ , sendo  $G(s) = \frac{0.5}{10s+1}$  e  $C(s) = \frac{k_c(10s+1)}{s}$ . Assim,

$$F(s) = \frac{\frac{k_c(10s+1)}{s} \frac{0.5}{10s+1}}{1 + \frac{k_c(10s+1)}{s} \frac{0.5}{10s+1}} F(s) = \frac{\frac{0.5K_c}{s}}{\frac{s+0.5K_c}{s}} \boxed{F(s) = \frac{0.5K_c}{s + 0.5K_c}}$$

Comparando com uma Função de Transferência de primeira ordem, temos

$$F(s) = \frac{0.5K_c}{s + 0.5K_c} = \frac{1}{\tau s + 1}.$$

E como  $t_s^{MF}(5\%) = \frac{t_s^{MA}(5\%)}{2}$  e  $t_s(5\%) = 3\tau$ , temos que

$$t_s^{MF}(5\%) = \frac{t_s^{MA}(5\%)}{2} = 3\tau \Rightarrow \frac{30}{2} = 3\tau \Rightarrow \boxed{\tau = 5}.$$

Portanto,

$$\frac{0.5K_c}{s + 0.5K_c} = \frac{1}{5s + 1} \Rightarrow \boxed{K_c = 0.4}.$$

Portanto,

$$C(s) = \frac{0.4(10s + 1)}{s}$$

**5.3.0.0.3 Parte C** O resultado da simulação está apresentado na figura 5.4.

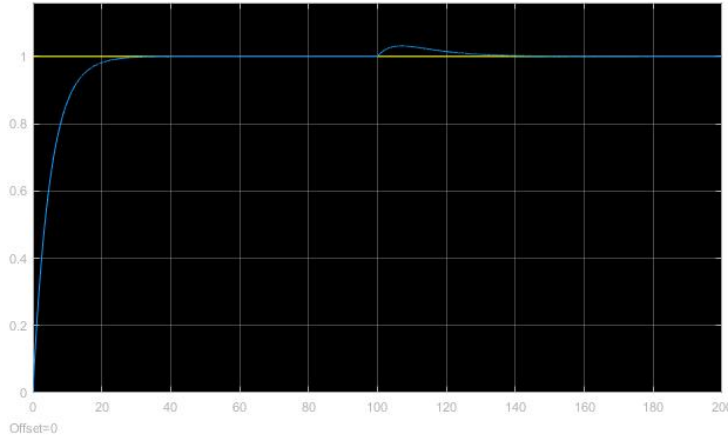
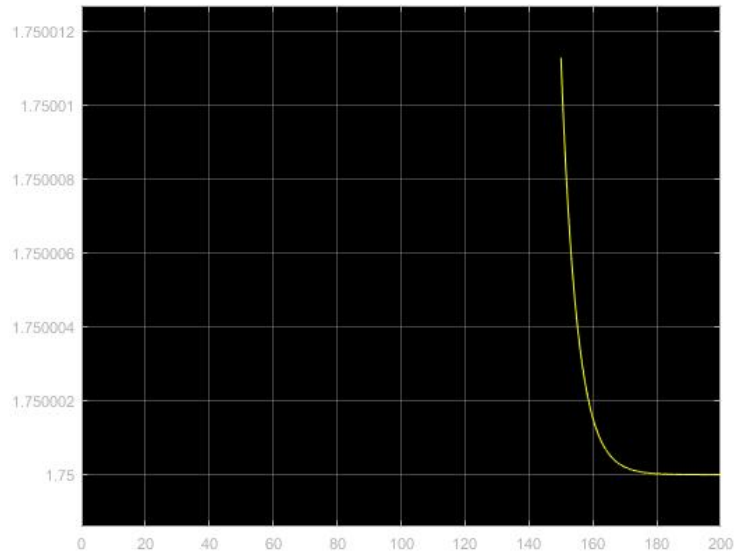


Figure 5.4: Simulação A3

Percebe-se que como esperado o erro é nulo para regime permanente,  $t_s = 15$  e não há sobressinal. O resultado de  $u(s)$  está apresentado na figura 5.5.

Assim como o esperado,  $u(\infty) = 1.75$ .

Figure 5.5:  $u(s)$ 

**5.3.0.0.4 Parte D** O resultado da simulação está apresentado na figura 5.6.

O erro continua convergindo para 0 pois a mudança foi realizada no valor que multiplica o  $s$  o que interfere no sobressinal e na amplitude do sinal enquanto o valor independente interfere no erro.

## Problema 5.2

Considere que não há perturbações ( $w = 0$ ) e

$$G(s) = \frac{0.9}{s(s+1)}.$$

- Note que  $G(s)$  tem um pólo em  $s = 0$ . Simule  $G(s)$  em malha-aberta para  $u(t) = 5$  do tipo degrau e analise os resultados. Note que  $y(t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Isto era esperado? Justifique.
- Projete  $C(s)$  de modo que  $M_p = 0.2$  (sobressinal de 20%) e que se tenha erro nulo em regime permanente para  $r(t)$  do tipo degrau (dica: utilize um controlador proporcional  $C(s) = K_c$ ).
- Simule o sistema em malha-fechada para  $r(t) = 5$  do tipo degrau e verifique se os requisitos de desempenho foram realmente atendidos. Visualize o sinal de controle  $u(t)$ .



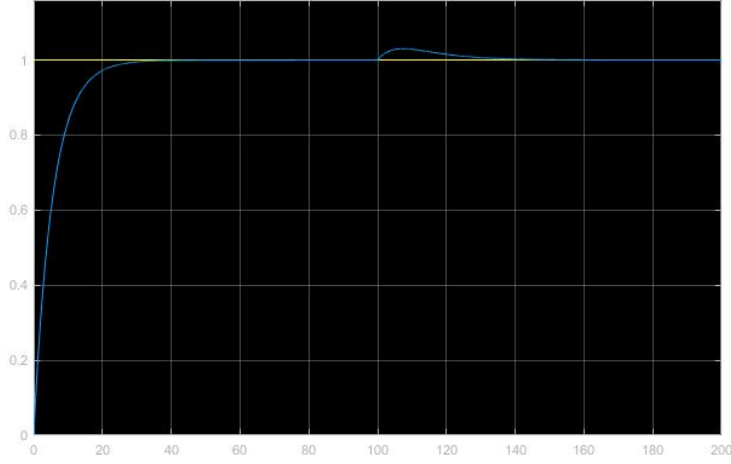


Figure 5.6: Simulação A4

- (d) Repita o item anterior, mas agora aplicando uma perturbação do tipo degrau  $w(t)$  não nula. Explique o motivo pelo qual  $e(\infty) \neq 0$ .

### Resolução

**5.3.0.0.5 Parte A** O resultado da simulação está apresentado na figura 5.7. O resultado era esperado pois o sistema é um sistema do Tipo 1.

**5.3.0.0.6 Parte B** Utilizando  $C(s) = K_c$  temos que

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \Rightarrow F(s) = \frac{\frac{0.9K_c}{s(s+1)}}{1 + \frac{0.9K_c}{s(s+1)}} \Rightarrow \boxed{\frac{0.9K_c}{s^2 + s + K_c} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}}.$$

Como temos que  $M_p = 0.2$  e

$$\xi = \sqrt{\frac{\ln(M_p)^2}{\ln(M_p)^2 + \pi^2}}, \quad 2\xi\omega_n = 1, \quad K_c = \frac{\omega_n^2}{0.9}$$

encontramos que

$$\xi = 0.4559 \quad \omega_n = 1.0967 \Rightarrow \boxed{K_c = 1.3364}.$$

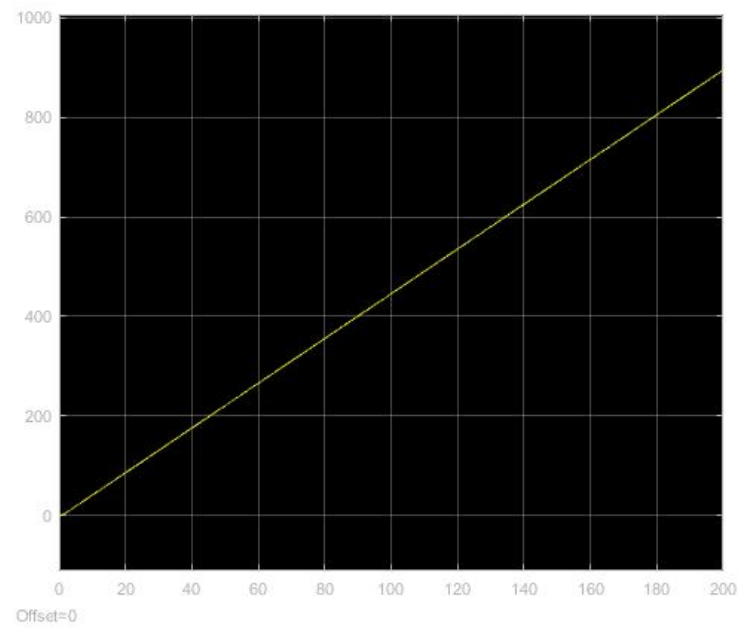


Figure 5.7: Simulação B1

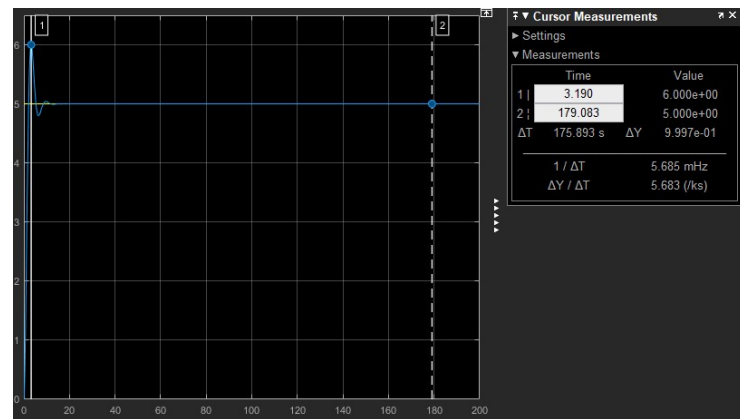


Figure 5.8: Simulação B3

**5.3.0.0.7 Parte C** O resultado da simulação está apresentado na figura 5.8. Percebe-se que os requisitos de desempenho foram atendidos.

O valor de  $u(t)$  está apresentado abaixo. Percebe-se que o valor é praticamente nulo.

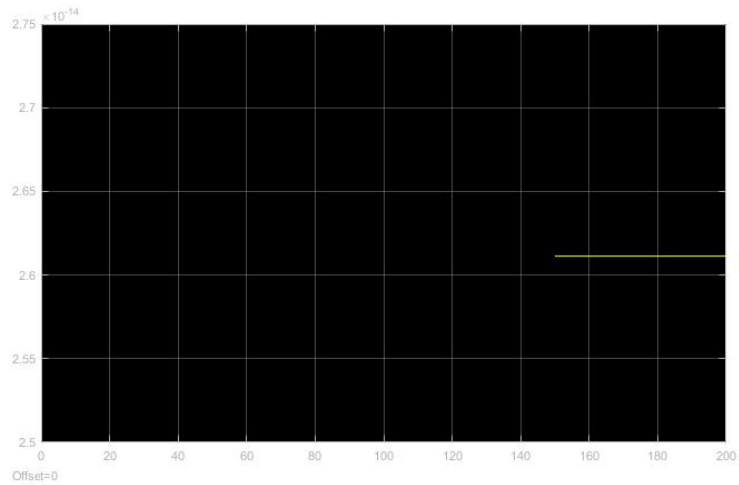


Figure 5.9:  $u(s)$

**5.3.0.0.8 Parte D** O resultado da simulação está apresentado na figura 5.10. O controlador é do tipo P (um ganho), entretanto, para que  $e(\infty) = 0$  quando  $\omega \neq 0$  seria necessário de um controlador PI.

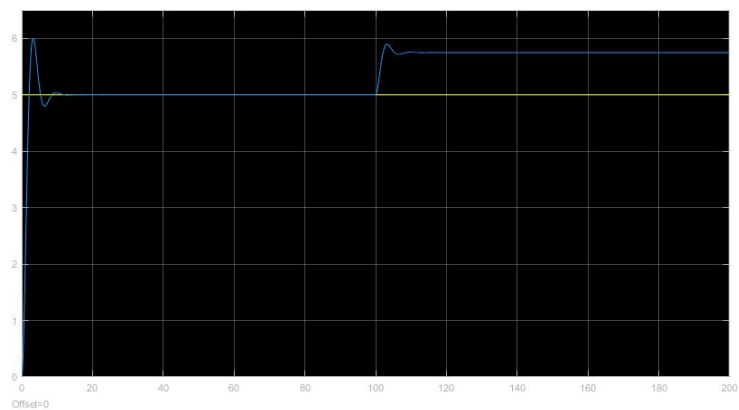


Figure 5.10: Simulação B4

### Problema 5.3

Considere

$$G(s) = \frac{1.2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1.2}{(s+1)(s+3)}.$$

- Simule  $G(s)$  em malha-aberta para  $u(t) = 3$  do tipo degrau e analise os resultados. Note que a saída  $y(t)$  não apresenta sobressinal. Isto era esperado? Justifique.
- Projete  $C(s)$  de modo que se tenha erro nulo em regime permanente para  $r(t)$  e  $w(t)$  do tipo degrau unitário e que  $M_p = 0.05$  (sobressinal de 5%) para referências do tipo degrau. Dica: utilize um controlador PI que cancele o polo mais lento de  $G(s)$  ( $s = -1$ ) para que se obtenha um  $t_s(5\%)$  menor.
- Simule o sistema em malha-fechada para  $r(t) = 3$  e  $w(t) = 0.5$  do tipo degrau, aplicando  $w(t)$  em  $t = 15$ . Verifique se os requisitos de desempenho foram realmente atendidos. Visualize o sinal de controle  $u(t)$ .

### Resolução

**5.3.0.0.9 Parte A** O resultado da simulação está apresentado na figura 5.11. O resultado não era esperado pois, para Funções de Transferência do segundo grau é esperado um sobressinal.

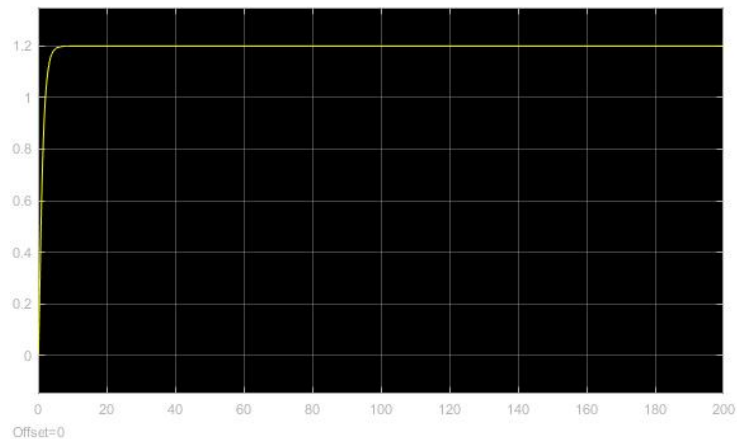


Figure 5.11: Simulação C1

**5.3.0.0.10 Parte B** Utilizando um controlador do tipo  $C(s) = \frac{K_c(s+1)}{s}$  temos que

$$F(s) = \frac{\frac{K_c(s+1)}{s} \frac{1.2}{(s+1)(s+3)}}{1 + \frac{K_c(s+1)}{s} \frac{1.2}{(s+1)(s+3)}} \Rightarrow F(s) = \frac{1.2K_c}{s^2 + 3s + 1.2K_c} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Utilizando  $M_p = 0.05$  encontramos que

$$\xi = 0.6901, \quad \omega_n = 2.1736 \Rightarrow K_c = 3.937.$$

Portanto, o controlador calculado é

$$C(s) = \frac{3.937(s+1)}{s}.$$

**5.3.0.0.11 Parte C** O resultado da simulação está apresentado na figura 5.12. Percebe-se que os requisitos de desempenho foram alcançados.

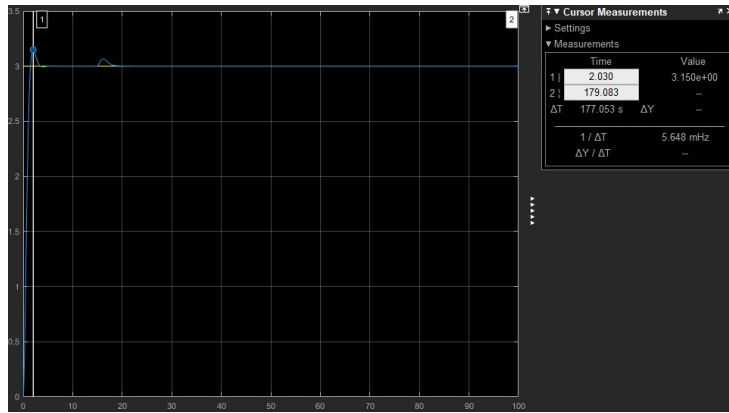


Figure 5.12: Simulação C2

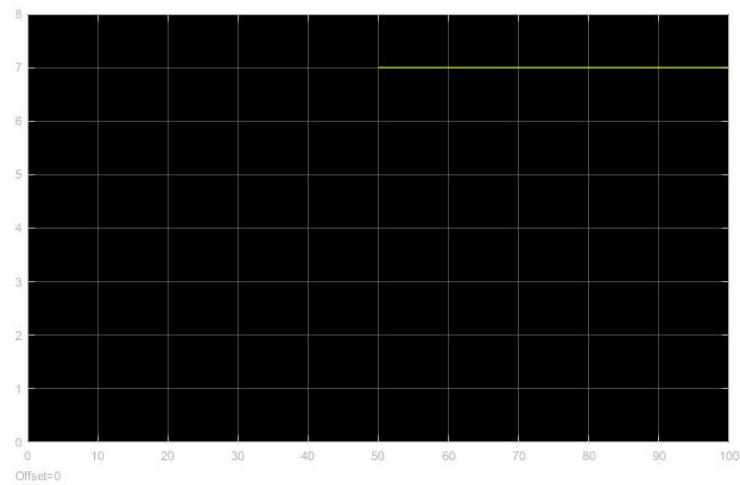
O valor de  $u(t)$  está apresentado na figura 5.13

## Problema 5.4

Repita o problema 1 para

$$G(s) = \frac{0.5}{s-1} \quad (\text{instável}),$$

e simule (dica: basta mudar o numerador do PI projetado no Problema 1 para  $s-1$ ). Agora mantenha o mesmo controlador  $C(s)$  obtido mas altere o denominador

Figure 5.13:  $u(t)$ 

de  $G(s)$  para  $s = 0.99$  (incerteza de 1% no pólo de  $G(s)$ ) e simule. Observe que  $y(t) \rightarrow -\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Isto mostra o motivo pelo qual não podemos efetuar cancelamentos pólo-zero instáveis em  $C(s)G(s)$ .

### Resolução

O resultado da simulação está apresentado na figura 5.14. Conforme esperado o sistema se comporta de forma instável.

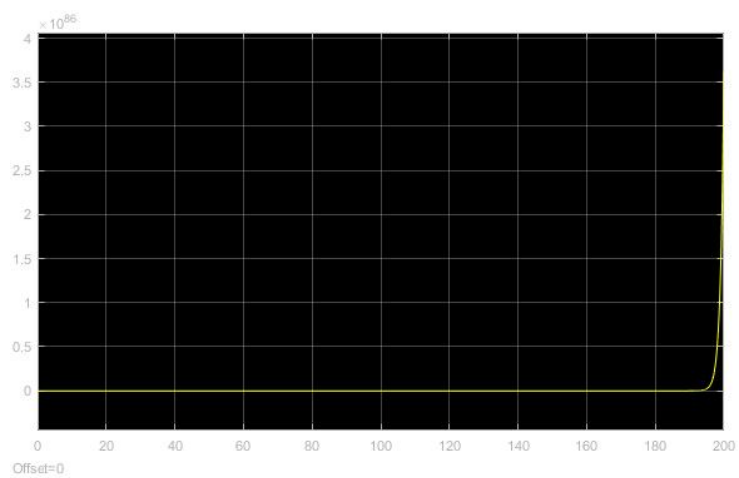


Figure 5.14: Simulação D1





## Chapter 6

# Linearização de Sistemas Não-Lineares

Nesta experiência, veremos como podemos simular um sistema não-linear utilizando pacotes computacionais de simulação. Analisaremos os resultados de simulação do sistema de um tanque do Simulink/Matlab e verificaremos a noção de ponto de equilíbrio. Por fim, com base na Função de Transferência do sistema linearizado, compararemos a dinâmica do mesmo com a dinâmica do sistema não-linear original por simulação.

### 6.1 Sistema de um tanque

Considere o sistema de um tanque ilustrado na Figura 6.1. A equação diferencial que descreve a dinâmica da altura do nível  $H$  do tanque é

$$H(t) = \frac{1}{A}(Q_e(t) - Q_s(t)) = \boxed{\frac{1}{A}(Q_e(t) - \beta\sqrt{H(t)})},$$

onde

$$\begin{cases} H & : \text{altura do nível,} \\ Q_e & : \text{vazão de entrada,} \\ Q_s = \beta\sqrt{H} & : \text{vazão de saída,} \\ \beta \geq 0 & : \text{parâmetro do tanque,} \\ A & : \text{área da base do tanque.} \end{cases}$$

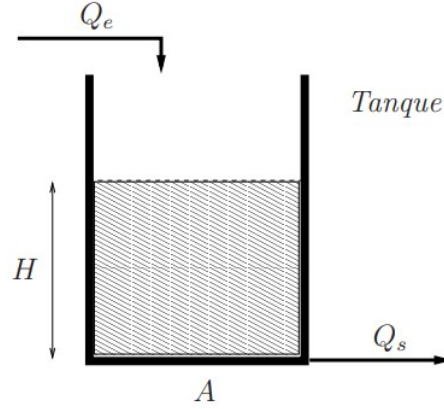
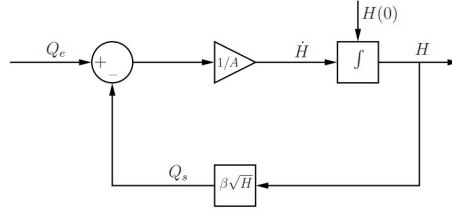


Figure 6.1: Tanque

Note que (6.1) é uma equação diferencial não-linear. O diagrama de blocos correspondente à equação diferencial (6.1) é mostrado abaixo, onde  $H(0)$  é a condição inicial.

Figure 6.2: Diagrama de blocos da dinâmica da altura do nível  $H$  do tanque.

A implementação deste diagrama de blocos em um pacote computacional de simulação fornece a solução da equação diferencial (6.1) através de métodos numéricos de integração. Consequentemente, podemos analisar o comportamento dinâmico da altura do nível  $H(t)$  em função do tempo  $t$  para uma determinada escolha da vazão de entrada  $Q_e(t)$ ,  $t \geq 0$ .

## 6.2 Pontos de equilíbrio

Intuitivamente, pensamos que um sistema está em *equilíbrio* quando o mesmo apresenta um comportamento estático, ou seja, o sistema não exibe qualquer dinâmica. Veremos agora como definir matematicamente tal noção.

Considere um sistema não-linear descrito pela equação diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^m$  é o controle (ou entrada). Dizemos que um par ordenado  $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  é um *ponto de equilíbrio* (ou *ponto de operação*) do sistema (6.2) quando  $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ , ou seja,  $\dot{x} = 0$ . Isto é equivalente a dizer que se aplicarmos a entrada constante  $u(t) = \bar{u}$  no sistema (6.2) com condição inicial  $x(0) = \bar{x}$ , obteremos a solução constante (ou *solução estacionária*)  $x(t) = \bar{x}, t \geq 0$ . Note que, neste caso, o sistema permanece estático, sem dinâmica.

Determinaremos então os pontos de equilíbrio do sistema de um tanque. De (6.1) e do fato de que  $u = Q_e$  é o controle (ou entrada) do sistema, obtemos

$$\dot{H} = \frac{1}{A}(Q_e - Q_s) = 0 \implies \bar{u} = Q_e = Q_s = \beta\sqrt{\bar{H}} \implies \boxed{\bar{H} = \frac{\bar{u}^2}{\beta^2}}.$$

Como era de se esperar, o equilíbrio ocorre quando no tanque a vazão de entrada é igual à vazão saída ( $Q_e = Q_s$ ). Assim, dado qualquer  $\bar{u}$ , temos que  $(\bar{H}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^2$  é um ponto de equilíbrio do sistema (6.1), onde  $\bar{H} = \frac{\bar{u}^2}{\beta^2}$ .

Em situações práticas, nem sempre conheceremos completamente a equação diferencial que descreve a dinâmica de um sistema. Entretanto, podemos mesmo assim determinar alguns de seus pontos de equilíbrio com base na propriedade abaixo.

**Propriedade 1.** *Se a trajetória  $x(t)$  (solução) do sistema para uma dada condição inicial  $x(0)$  satisfaz  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$  ao aplicarmos a entrada constante  $u(t) = \bar{u}, t \geq 0$ , então  $(\bar{x}, \bar{u})$  é um ponto de equilíbrio do sistema.*

## 6.3 Linearização de sistemas não-lineares

Considere um sistema não-linear descrito pelas equações diferenciais

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x(t), u(t)), \dots, \dot{x}_n(t) = f_n(x(t), u(t))$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}$  é o controle. Suponha que  $f_1, \dots, f_n$  são continuamente diferenciáveis e que  $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  é um ponto de equilíbrio do sistema, isto é,

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{x}, \bar{u}) = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Do mesmo modo que a reta tangente no ponto  $(t_0, g'(t_0))$  aproxima o gráfico de  $g$  na proximidade de  $t_0$  (i.e. para  $\Delta t = t - t_0 \cong 0$ ), podemos encontrar um sistema linear cuja dinâmica aproxima a dinâmica do sistema não-linear (6.3) nas proximidades de  $(\bar{x}, \bar{u})$ . Veremos como aplicar técnicas lineares ao referido sistema linear que possibilitam analisar o sistema não-linear (6.3) em torno de  $(\bar{x}, \bar{u})$ .

Suponha que (6.3) está no equilíbrio  $(\bar{x}, \bar{u})$  em  $t = 0$ , isto é,  $x(0) = \bar{x}$  e  $u(t) = \bar{u}$  para  $t \geq 0$ . Agora, considere que  $x(t)$  é a solução de (6.3) com condição inicial

$x(0) = \bar{x}$  e uma *outra* entrada  $u(t) \neq \bar{u}$ . Seja  $\delta x(t) = x(t) - \bar{x}$  o *desvio* em relação à  $\bar{x}$ , e  $\delta u(t) = u(t) - \bar{u}$  o *desvio* em relação à entrada de equilíbrio  $\bar{u}$ . Assim,  $x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$  e  $u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$ . Note que  $\delta x(0) = 0$ . Nosso objetivo é relacionar de modo linear a dinâmica de  $\delta x(t)$  com  $\delta u(t)$ , ao menos aproximadamente.

Utilizando a série de Taylor de ordem 1 da função  $f_i$  em  $(\bar{x}, \bar{u})$ , temos que a dinâmica do desvio  $\delta x_i(t) = x_i(t) - \bar{x}_i$  é descrita por

$$\dot{\delta x}_i(t) = \dot{x}_i(t) - \underbrace{\dot{\bar{x}}_i}_{=0} = \dot{x}_i(t) = f_i(x(t), u(t)) \cong \underbrace{f_i(\bar{x}, \bar{u})}_{=0} + \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta x_k(t) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta u(t), \implies \boxed{\dot{\delta x}_i(t) \cong \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta x_k(t) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta u(t)}$$

Esta aproximação é válida para pequenos desvios em torno do ponto de equilíbrio  $(\bar{x}, \bar{u})$ , ou seja,  $\delta x(t) \cong 0$  e  $\delta u(t) \cong 0$ . O sistema de equações lineares

$$\dot{\delta x}_1(t) = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta x_1(t) + \dots + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta x_n(t) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta u(t), \quad \delta x_1(0) = 0 : \dot{\delta x}_n(t) = \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta x_1(t) + \dots + \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta x_n(t) + \left. \frac{\partial f_n}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta u(t),$$

onde  $\delta u \in \mathbb{R}$  é o controle, é denominado de *sistema linearizado* associado ao sistema não-linear (6.3) no ponto de equilíbrio  $(\bar{x}, \bar{u})$ . Note que a condição inicial de (6.3) é de  $\delta x(0) = 0$ . Assim, temos que a dinâmica do sistema linearizado (6.3) aproxima a dinâmica do sistema não-linear (6.3) para pequenos desvios em torno do ponto de equilíbrio  $(\bar{x}, \bar{u})$ . Isto significa que, quando (6.3) está no equilíbrio  $(\bar{x}, \bar{u})$  em  $t = 0$ , teremos

$$\boxed{\delta u(t) \cong 0 \implies x(t) \cong \bar{x} + \delta x(t), \quad t \geq 0},$$

onde  $\delta x(t)$  é a solução do sistema linearizado (6.3) com a entrada  $\delta u(t)$ , e  $x(t)$  é solução do sistema não-linear original (6.3) com a entrada  $u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$ .

Determinaremos então o sistema linearizado associado ao sistema de um tanque. Fazendo  $u = Q_e$  (o controle é a vazão de entrada do tanque), rescrevemos (6.1) como

$$\dot{H}(t) = f(H(t), u(t)) = \frac{1}{A}(u(t) - \beta\sqrt{H(t)}).$$

Para um dado ponto de equilíbrio  $(\bar{H}, \bar{u})$ , obtemos de (6.3) que o sistema linearizado associado é descrito por

$$\delta \dot{H}(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial H} \right|_{(\bar{H}, \bar{u})} \delta H(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\bar{H}, \bar{u})} \delta u(t) = \boxed{\frac{-\beta}{2A\sqrt{\bar{H}}} \delta H(t) + \frac{1}{A} \delta u(t), \quad \delta H(0) = 0},$$

Note que os coeficientes dependem do ponto de equilíbrio  $(\bar{H}, \bar{u})$  escolhido.

De agora em diante assumiremos que os parâmetros do tanque são dados por  $\beta = 0.01$ ,  $A = 1$  e escolhemos como ponto de equilíbrio  $(\bar{H}, \bar{u}) = (4, 0.02)$ .

Desse modo, concluímos a partir de (6.3) que o sistema linearizado associado ao sistema de um tanque no ponto de equilíbrio  $(4, 0.002)$  é

$$\delta \dot{H}(t) = -0.0025\delta H(t) + \delta u(t), \quad \delta H(0) = 0.$$

Supondo que  $y = H$  é a *saída do sistema*, determinaremos no que se segue a Função de Transferência  $G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)}$  do sistema linearizado (6.3) onde  $\Delta U(s)$  e  $\Delta Y(s)$  são as Transformadas de Laplace da entrada  $\delta u$  e da saída  $\delta y = \delta H$  do sistema linearizado, respectivamente. Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os lados de (6.3) obtemos que<sup>1</sup>

$$s\Delta H(s) = -0.0025\Delta H(s) + \Delta U(s) \implies G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta U(s)} = \frac{1}{s + 0.0025},$$

onde  $\Delta H(s)$  é a Transformada de Laplace de  $\delta H$ . Observe que  $G(s)$  é uma Função de Transferência de primeira ordem.

O diagrama de blocos da Figura 6.3 mostra como podemos comparar a dinâmica do sistema linearizado em  $(\bar{H}, \bar{u}) = (4, 0.02)$  com a dinâmica do sistema não-linear 6.1. O bloco “SNL” é o sistema não-linear com condição inicial  $H(0) = 0$ , e  $G(s)$  é a Função de Transferência em (6.3). Para fazermos tal comparação, primeiramente escolhemos um controle que coloque o sistema não-linear no ponto de equilíbrio  $(\bar{H}, \bar{u}) = (4, 0.02)$ . Assim, aplicamos em  $t = 0$  um controle do tipo degrau de amplitude  $\bar{u} = 0.02$ . Suponha que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \bar{H} = 4.$$

Tomamos  $t_1 > 0$  tal que

$$H(t) \cong \bar{H} = 4, \quad \text{para } t \geq t_1.$$

Aplicamos então  $\delta u(t)$  no instante  $t = t_1$ . Relembre que  $u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$  e que  $\delta u(t)$  é a entrada do sistema linearizado. Portanto,

$$\delta u(t) \cong 0 \implies H(t) \cong \bar{H} + \delta H(t), t \geq t_1,$$

onde  $\delta H(t)$  é a solução do sistema linearizado (6.3) com entrada  $\delta u(t)$ , e  $H(t)$  é a solução do sistema não-linear original (6.1) com entrada  $u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$ .

Seja  $X(s)$  a Transformada de Laplace de um sinal  $x(t)$ . Suponha que  $X(s)$  ou  $sX(s)$  tem todos os polos no semiplano esquerdo no eixo imaginário. Então, para  $\sigma > 0$ , temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

<sup>1</sup>Para condições iniciais nulas, lembre que  $\mathcal{L}\{f(t)\} = sF(s)$ , onde  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ .

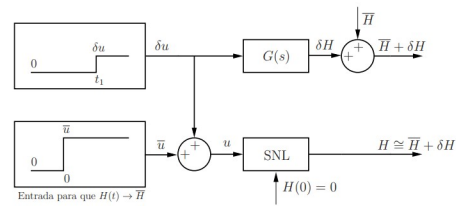


Figure 6.3: Comparação das dinâmicas (  $\delta u \cong 0$  e  $H(t) \cong \bar{H} + \delta H(t), t \geq t_1$  ).

# Problemas Laboratório 6

Estes problemas são relacionados ao assunto abordado no Laboratório 6.

## Problema 6.1

Considere a equação diferencial (6.1), com  $\beta = 0.01$ ,  $A = 1$ . Implemente o diagrama de blocos da Figura 6.2 no Simulink/Matlab com o objetivo de simular a dinâmica da altura do nível  $H$  do tanque. Simule o sistema para a condição  $H(0) = 0$  e vazões de entrada  $Q_e = 0.01$ ,  $Q_e = 0.02$ ,  $Q_e = 0.1$  do tipo degrau. Analise os resultados. Observe a não-linearidade do sistema: ao dobrarmos a vazão de entrada de  $Q_e = 0.01$  para  $Q_e = 0.02$  o valor final de  $H(t)$  quadruplicou.

### Resolução

Working on it :)

## Problema 6.2

Utilizando os mesmos dados do item anterior simule o sistema para a condição inicial  $H(0) = 4$  e a vazão de entrada  $Q_e = 0.02$  do tipo degrau. O comportamento observado era esperado? Justifique (dica: veja (6.2) e relembre o conceito de ponto de equilíbrio). Em seguida, modifique a vazão de entrada para  $Q_e = 0.019$  e simule. Analise os resultados (veja a Propriedade 1 e (6.2)).

### Resolução

Working on it :)

### Problema 6.3

Considere  $G(s)$  em (6.3), que é a Função de Transferência do sistema linearizado associado ao sistema de um tanque (6.3) no ponto de equilíbrio  $(\bar{H}, \bar{u}) = (4, 0.02)$ . Implemete no Simulink/Matlab o diagrama de blocos apresentado na Figura 6.3 com o objetivo de comparar a dinâmica de  $\bar{H} + \delta H(t)$  com a dinâmica de  $H(t)$  do sistema não-linear (6.3). Para isto, escolha  $\bar{u} = 0.02, \delta u = 0$ , e determine  $t_1 > 0$  por simulação (veja (6.3)). Simule para  $\delta u = 0.0001, \delta u = 0.001, \delta u = 0.01$  do tipo degrau e analise os resultados. Baseado no que vimos em aulas anteriores, quais são as características dinâmicas de saída  $\delta y(t) = \delta H(t)$  do sistema linearizado (por exemplo: sobressinal, tempo de acomodação, valor em regime permanente)? Tais características eram esperadas? Justifique sua resposta (dica: veja (6.3)).

#### Resolução

Working on it :)

### Problema 6.4

No item anterior, mude o ponto de equilíbrio do sistema de um tanque para  $(\bar{H}, \bar{u}) = (16, 0.04)$ , mas mantenha a mesma Função de Transferência  $G(s)$  de antes. Simule e analise os resultados. Tal comportamento era esperado? Justifique sua resposta.

#### Resolução

Working on it :)



## Chapter 7

# Controle de Sistemas Não-Lineares

Nesta experiência, veremos como controlar um sistema não-linear nas proximidades de um ponto de equilíbrio utilizando um controlador linear. Projetaremos um controlador integral (I) para o sistema de um tanque com base na Função de Transferência do sistema linearizado. Compararemos a dinâmica em malha-fechada do sistema linearizado com a dinâmica em malha-fechada do sistema não-linear original por simulação.

### 7.1 Controladores lineares para o sistema de um tanque

No Laboratório 6, vimos que a dinâmica da altura do nível  $H(t)$  do sistema de um tanque é descrita por

$$\dot{H}(t) = f(H(t), u(t)) = \frac{1}{A}(u(t) - \beta\sqrt{H(t)}),$$

onde  $u(t) = Q_e(t)$  é o controle (o controle é a vazão de entrada do sistema). Encontramos também que o sistema linearizado associado num ponto de equilíbrio  $(\bar{H}, \bar{u})$  é dado por

$$\delta\dot{H}(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial H} \right|_{(\bar{H}, \bar{u})} \delta H(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\bar{H}, \bar{u})} \delta u(t) = \boxed{\frac{-\beta}{2A\sqrt{\bar{H}}} \delta H(t) + \frac{1}{A} \delta u(t)}.$$

Ressaltamos que os coeficientes dependem do ponto de equilíbrio  $(\bar{H}, \bar{u})$  escolhido. Para  $\beta = 0.01$ ,  $A = 1$  e  $(\bar{H}, \bar{u}) = (4, 0.02)$ , obtivemos que

$$G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta U(s)} = \frac{1}{s + 0.0025},$$

onde  $\Delta U(s)$  e  $\Delta Y(s)$  são as Transformadas e Laplace da entrada  $\delta u(t)$  e da saída  $\delta y(t) = \delta H(t)$  do sistema linearizado, respectivamente.

Nosso objetivo é projetar um controlador linear de modo que a saída  $y(t) = H(t)$  do sistema não-linear (7.1) rastreie referências do tipo degrau com erro nulo em regime permanente ( $t \rightarrow \infty$ ), e que a dinâmica de  $y(t) = H(t)$  atenda certas especificações desejadas durante o regime transitório (sobressinal e tempo de acomodação, por exemplo), ao menos nas proximidades de  $\bar{H} = 4$ . Por se tratar de um sistema não-linear, não podemos aplicar diretamente a (7.1) técnicas lineares de projeto de controladores. Com base no sistema linearizado, no entanto, isso pode ser feito indiretamente em dois passos:

1. projetamos um controlador linear  $C(s)$  para controlar em malha-fechada a saída  $\delta y(t) = \delta H(t)$  de  $G(s)$  em (7.1), como mostrado na Figura 7.1. O controlador  $C(s)$  deve assegurar que o erro de rastreamento  $\delta e(t) = \delta H(t) - \delta r(t)$  seja nulo em regime permanente ( $t \rightarrow \infty$ ) para referências  $\delta r(t)$  do tipo degrau e que as especificações de regime transitório desejadas para  $y(t) = H(t)$  sejam atendidas por  $\delta y(t) = \delta H(t)$ ;
2. Implementamos então o controlador determinado  $C(s)$  diretamente no sistema não-linear (7.1) (bloco “SNL”) em malha-fechada, conforme ilustrado na parte inferior da Figura 7.2. Devemos realizar seguinte procedimento:
  - (a) Escolhemos uma referência  $r$  do tipo degrau para colocar o sistema não-linear no ponto de equilíbrio  $(\bar{H}, \bar{u})$ . Assim, aplicamos em  $t = 0$  uma referência  $r$  do tipo degrau de amplitude  $\bar{H} = 4$ , e *esperamos* que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \bar{H} = 4.$$

Em geral, não temos certeza de que tal convergência realmente ocorrerá nem que as especificações de regime transitório serão atendidas, pois como a condição inicial do sistema não-linear é nula ( $H(0) = 0$ ), poderemos ter um desvio inicial “grande demais” em relação ao ponto de equilíbrio  $(\bar{H}, \bar{u}) = (4, 0.02)$ . relembre que a Função de Transferência  $G(s)$  aproxima a dinâmica do sistema não-linear original nas proximidades do ponto de equilíbrio  $(\bar{H}, \bar{u})$ , ou seja, quando  $H(t) - \bar{H} \cong 0, u(t) - \bar{u} \cong 0$ ;

- (b) Suponha que (2a) é válida. Tome  $t_1 > 0$  tal que

$$H(t) \cong \bar{H} = 4, \text{ para todo } t \geq t_1,$$

onde  $\delta H(t)$  é a saída do sistema linearizado (7.1) em malha-fechada e  $H(t)$  é a saída do sistema não-linear (7.1) em malha-fechada (veja a Figura 7.2 e a Figura 6.1). Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \bar{H} + \delta r = 4 + \delta r.$$

Em síntese,

$$\boxed{\delta r \cong \implies u(t) \cong \bar{u} + \delta u(t) \implies H(t) \cong \bar{H} + \delta H(t), t \geq t_1}.$$



o que vimos na seção anterior, devemos projetar um controlador linear para a Função de Transferência  $G(s)$  do sistema linearizado em  $(\bar{H}, \bar{u}) = (4, 0.02)$  de modo que a saída  $\delta y(t) = \delta H(t)$  atenda estas mesmas especificações.

A Figura 7.1 apresenta o diagrama de blocos do sistema linearizado em malha-fechada, onde  $\delta r$  é a referência a ser rastreada pela saída  $\delta y(t) = \delta H(t)$ ,  $\delta e(t) = \delta r(t) - \delta H(t)$  é o erro de rastreamento,  $C(s)$  é o controlador a ser determinado e  $\delta u(t)$  é o controle gerado por  $C(s)$ .

Relembre que se  $C(s)G(s)$  tiver um pólo em  $s = 0$  (sistema Tipo 1) e a Função de Transferência do sistema em malha-fechada for estável, isto é, todos os pólos possuem parte real negativa, então o erro de rastreamento será nulo em regime permanente para referências  $\delta r$  do tipo degrau. Escolhemos então um controlador integral (I) da forma

$$C(s) = \frac{K}{s},$$

onde  $K > 0$  é o ganho do controlador. Determinaremos o valor de  $K$  que assegure sobressinal máximo de 5%. A partir de (7.1) e da Figura 7.1, temos que a Função de Transferência em malha-fechada é dada por

$$F(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{\frac{K}{s} \frac{1}{(s+0.0025)}}{1 + \frac{K}{s} \frac{1}{(s+0.0025)}} \Rightarrow F(s) = \frac{K}{s^2 + 0.0025s + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

onde  $\Delta R(s)$  e  $\Delta H(s)$  são as Transformadas de Laplace de  $\delta r(t)$  e  $\delta H(t)$ , respectivamente. Para o sistema na forma acima, temos que se  $0 < \xi < 1$  (sub-amortecimento), então a parte real dos pólos complexos conjugados de  $F(s)$  é negativa, ou seja,  $F(s)$  é estável. Além disso, a relação entre  $\xi$  e o sobressinal máximo (percentual)  $M_p$  é

$$\xi = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{(\ln M_p)^2 + \pi^2}}.$$

Para  $M_p = 0.05$  (5% de sobressinal), temos que  $\xi = 0.69$ . Obtemos então de (7.2) por igualdade polinomial que

$$2\xi\omega_n = 0.0025 \Rightarrow 2 \cdot 0.69 \cdot \omega_n = 0.0025 \Rightarrow \omega_n = \frac{0.0025}{1.38}, K = \omega_n^2 \Rightarrow K \cong 3.3 \cdot 10^{-6}.$$

Portanto, o controlador integral (I) a ser implementado é

$$C(s) = \frac{3.3 \cdot 10^{-6}}{s}.$$

# Problemas Laboratório 7

Estes problemas são relacionados ao assunto abordado no Laboratório 7.

## Problema 7.1

Considere a Função de Transferência  $G(s)$  em (7.1) referente ao sistema linearizado associado ao sistema de um tanque (7.1) no ponto de equilíbrio  $(\bar{H}, \bar{u}) = (4, 0.02)$  e o controlador integral  $C(s)$  em (7.2).

- (a) Implemente no Simulink/Matlab o diagrama de blocos apresentado na Figura 7.2 com o objetivo de comparar a dinâmica de  $\bar{H} + \delta H(t)$  do sistema linearizado em malha-fechada com a dinâmica de  $H(t)$  do sistema não-linear em malha-fechada. Para isto, escolha  $r = \bar{H} = 4$ ,  $\delta r = 0$  e determine  $t_1$  por simulação (veja (2b)). Talvez seja necessário escolher ‘**Max step size = 0.1**’ em **Simulation**  $\Rightarrow$  **Configuration Parameters** no Simulink para a simulação. Verifique se as especificações de regime transitório foram atendidas. Isto era esperado? Justifique sua resposta.
- (b) Agora, simule para as seguintes *variações* na referência (não é perturbação!):  $\delta r = 0.01$ ,  $\delta r = 0.05$ ,  $\delta r = 0.1$ ,  $\delta r = 0.5$ ,  $\delta r = 2$ ,  $\delta r = 10$ ,  $\delta r = 100$ . Analise os resultados. As especificações de regime permanente e de regime transitório foram atendidas? Tais resultados eram esperados? Justifique sua resposta. Dica: veja (2b) e compare o sinal de controle  $u(t)$  do sistema não-linear com o sinal de controle  $\delta u(t)$  do sistema linearizado, lembrando que  $\bar{u} = 0.02$ .

## Resolução

**7.2.0.0.1 Parte A** O resultado da simulação está apresentado na Figura 7.3.  $t_1 = 6000$ . É possível notar que  $e(\infty) = 0$  e  $M_p = 0.018 < 0.05$ .

**7.2.0.0.2 Parte B** O resultado da simulação está apresentado na Figura 7.4. Percebe-se que quanto maior o valor de  $\delta r$  mais instável se comporta o sistema

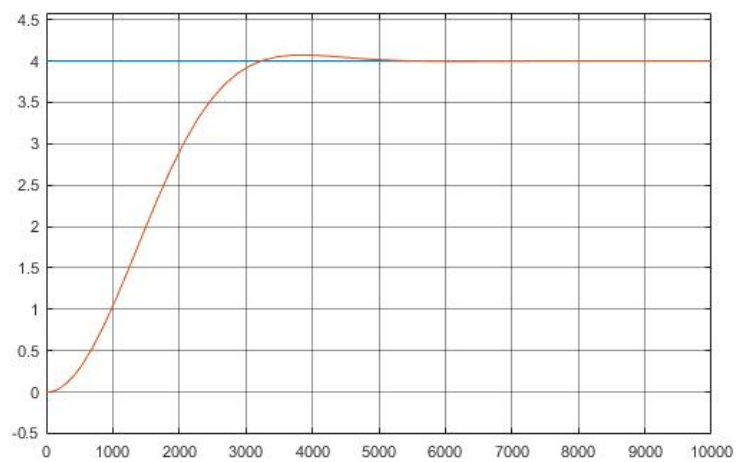


Figure 7.3: Simulação 1 do Problema 1A

e mais distante das especificações. Isso é esperado pois, de acordo com (2b), o sistema foi projetado para  $\delta r \cong 0$ .

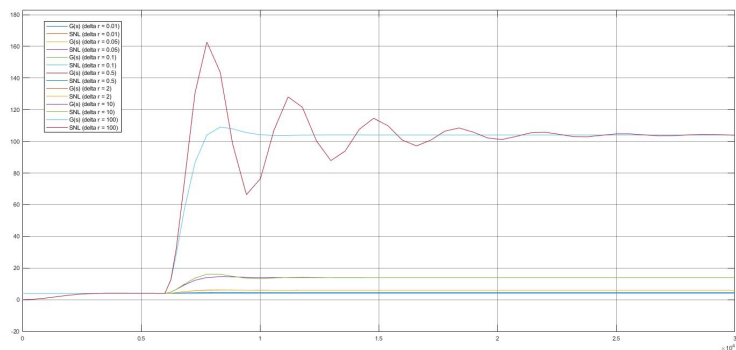


Figure 7.4: Simulações do Problema 1B

## Problema 7.2

Reprojete o controlador integral da seção anterior considerando que, nas especificações de regime transitório, o sobressinal máximo seja de 20%. Repita o Item 1 para o controlador  $C(s)$  obtido.

### Resolução

Para  $M_p = 0.2$ , temos  $\xi = 0.318$ . Assim,  $\omega_n = \frac{0.0025}{0.636}$  e, finalmente,  $K = 15.42 \cdot 10^{-6}$ . Os resultados do novo sistema são apresentados na Figura 7.4. Apesar de modificar o parâmetro, ele ainda está sendo projetado para  $\delta r \cong 0$ .

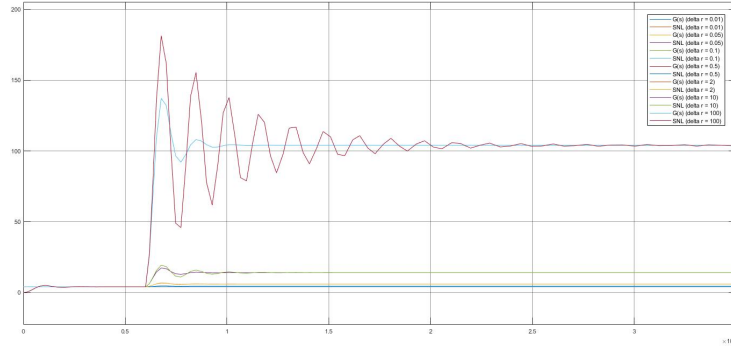


Figure 7.5: Simulações do Problema 1B





## Chapter 8

# Análise pelo Lugar das Raízes

Nesta experiência estudaremos o Lugar Geométrico das Raízes (LGR) através do Matlab. Analisaremos a influência de pólos e zeros no LGR. Veremos, ainda, como utilizar o LGR para que o sistema em malha-fechada atenda certas especificações de desempenho.

### 8.1 Método do Lugar Geométrico das Raízes

Considere o diagrama de blocos do processo  $G(s)$  em malha-fechada da Figura 8.1, onde  $r(t)$  é a referência,  $y(t)$  é a saída,  $u(t)$  é o controle e  $K > 0$  é um ganho que pode ser ajustado.

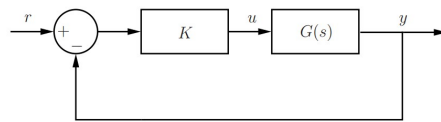


Figure 8.1: Diagrama de blocos do processo em malha-fechada.

Suponha que

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

com  $\text{grau}(N) \leq \text{grau}(D) = n$ , ou seja,  $G(s)$  é de ordem  $n$ . A Função de Transferência em malha-fechada do diagrama de blocos da Figura 8.1 é

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}.$$

Assim,

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \frac{N(s)}{D(s)}}{1 + k \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{KN(s)}{D(s) + KN(s)}.$$

Note que os zeros de  $F(s)$  (malha-fechada) são os mesmos que os de  $G(s)$  (malha-aberta), e que a equação característica é dada por

$$D(s) + KN(s) = 0$$

e depende do ganho  $K$ . Como os pólos de  $F(s)$  são as raízes da equação característica, concluímos que cada escolha de  $K > 0$  resulta em um conjunto de  $n$  pólos de  $F(s)$ , os quais podem ser representados no plano  $s$ . Desse modo, os  $n$  pólos de  $F(s)$  formam uma curva no plano  $s$  à medida que variamos o ganho  $K$  da maneira contínua no intervalo  $[0, \infty)$ . Tal curva é denominada de Lugar Geométrico das Raízes (LGR) ou, simplesmente, de Lugar das Raízes (LR).

Nesta experiência, determinamos o LGR com o auxílio do Matlab. No entanto, devemos ter em mente algumas de suas propriedades principais:

1. **Número de segmentos:** o número total de segmentos do LGR é igual ao número de pólos de  $G(s)$ ;
2. **Simetria:** O LGR é simétrico em relação ao eixo real (pois se um número complexo for raiz da equação característica, então o seu complexo conjugado também será);
3. **Pontos Iniciais e Terminais:** O LGR começa no pólo  $G(s)$  e termina nos zeros de  $G(s)$ . Isto significa que os pólos de  $G(s)$  pertencem ao LGR para  $K = 0$  e que os zeros de  $G(s)$  pertencem ao LGR para  $K \rightarrow \infty$ ;
4. **Segmentos do eixo real (horizontal):** Um segmento do eixo real pertence ao LGR quando o número total de pólos e zeros de  $G(s)$  à direita do segmento for ímpar. Caso contrário, o segmento não pertence ao LGR.

## 8.2 Estabilidade e Influência de Pólos e Zeros no LGR

Relembre que uma Função de Transferência é estável quando todos os pólos estão no SPE (possuem parte real negativa). Desse modo, podemos determinar através do LGR as faixas de valores de  $K > 0$  em que o sistema em malha-fechada é estável ou instável.

A introdução de pólos e zeros em  $G(s)$  influencia o LGR. De modo geral, a introdução de pólos estáveis tende a “empurrar” o LGR para a direita e, consequentemente, a instabilizar o sistema em malha-fechada. A introdução de zeros tende a “atrair” o LGR em sua direção. Assim, se o zero introduzido está no SPE, existe uma tendência de se estabilizar o sistema em malha-fechada. E, se o zero está no SPD, existe uma tendência de se instabilizar o sistema em malha-fechada.

### 8.3 Determinação do ganho $K$ para sistemas em malha-fechada de primeira e segunda ordem

Considere a Função de Transferência de malha-fechada  $F(s)$  é estável para um determinado ganho  $K > 0$ . Se  $F(s)$  é de primeira ordem com o pólo em  $s = -a$ , onde  $a > 0$ , então  $t_s(5\%) = \frac{3}{a}$  e não há oscilação para referências do tipo degrau. Se  $F(s)$  é de segunda ordem com pólos complexos conjugados em  $s = -a \pm jb = -\xi\omega_n \pm j\omega\sqrt{1-\xi^2}$ , onde  $a = \xi\omega_n > 0$ , então para referências do tipo degrau temos que  $t_s(5\%) \cong \frac{3}{a}$  e  $\xi = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{(\ln M_p)^2 + \pi^2}}$ , onde  $M_p$  é o sobressinal. Em síntese,

$$s = -a \implies \boxed{t_s(5\%) = \frac{3}{a}}, s = -a \pm jb = -\xi\omega_n \pm j\omega\sqrt{1-\xi^2} \implies \boxed{t_s(5\%) \cong \frac{3}{a}, \quad \xi = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{(\ln M_p)^2 + \pi^2}}}.$$

Desse modo, se  $F(s)$  é de primeira ou segunda ordem, podemos verificar pelo LGR se existem valores para  $K > 0$  em que as especificações de desempenho  $t_s(5\%)$  e  $M_p$  são atendidas. No caso de existirem tais valores, seremos capazes de determiná-los facilmente através do Matlab.



# Problemas Laboratório 8

Estes problemas são relacionados ao assunto abordado no Laboratório 8.

Utilize o comando `rlocus` e o pacote `rltool` do Matlab para determinar o LGR de cada  $G(s)$  abaixo.

## Problema 8.1

Considere o sistema de primeira ordem

$$G(s) = \frac{0.5}{10s + 1}$$

- Determine o LGR e observe que o sistema em malha-fechada é estável para qualquer  $K > 0$ .
- Encontre  $K$  de modo que o pólo em malha-fechada seja  $s = -0.2$  e simule para  $r(t)$  do tipo degrau unitário. Determine  $t_s(5\%)$  e visualize o sinal de controle.
- Repita o item anterior para  $s = -0.4$  e compare. Note que  $t_s(5\%)$  diminui pela metade e que a amplitude do sinal de controle aumentou. Justifique tal comportamento (dica: veja (8.3)).

## Resolução

**8.3.0.0.1 Parte A** O LGR está apresentado na Figura 8.2. É possível perceber que como o LGR está no SPE, ele é estável para qualquer  $K > 0$ .

**8.3.0.0.2 Parte B** O ganho do sistema de modo que  $s = -0.2$  é  $K = 2$ . O sistema simulado para um degrau unitário está apresentado na Figura 8.3. O valor de  $t_s(5\%)$  para um ganho  $K = 2$  é  $t_s(5\%) = 15s$ .

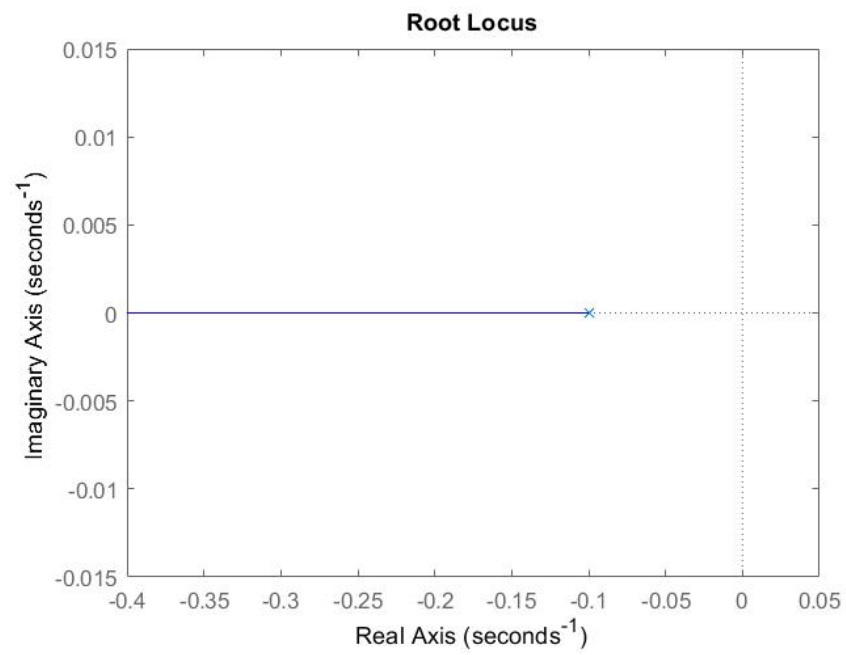


Figure 8.2: Localização das Raízes

### 8.3. DETERMINAÇÃO DO GANHO $K$ PARA SISTEMAS EM MALHA-FECHADA DE PRIMEIRA E SEGUNDA

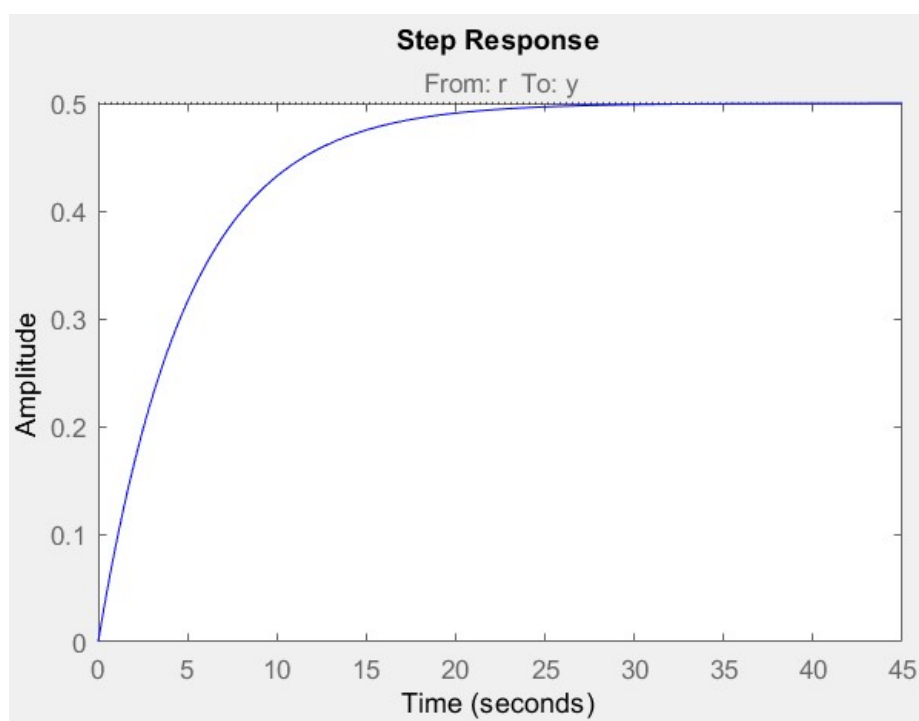


Figure 8.3: Sistema Simulado

**8.3.0.0.3 Parte C** O ganho do sistema de modo que  $s = -0.4$  é  $K = 6$ . O sistema simulado para um degrau unitário está apresentado na Figura 8.4. O valor de  $t_s(5\%)$  para um ganho  $K = 6$  é  $t_s(5\%) = 7.44s$ .

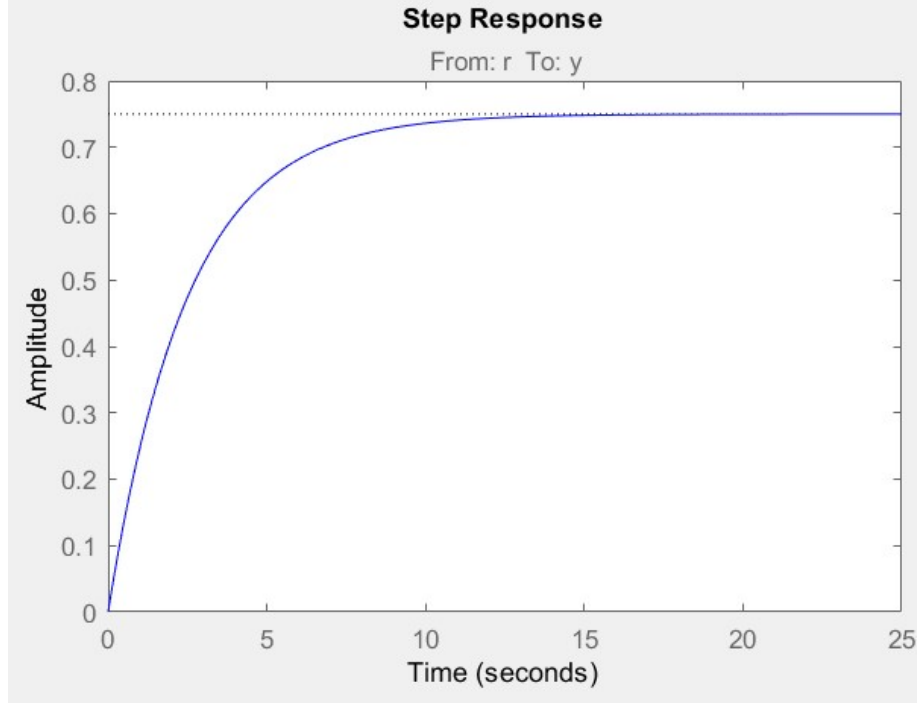


Figure 8.4: Sistema Simulado

Pode-se perceber que  $t_s(5\%)$  caiu pela metade e que a amplitude aumentou de 0.5 para 0.75. Tal comportamento era esperado. Como não há zeros que atraiam os pólos o LGR tem sem inicio em  $s = -0.1$  com ganho 0 e, conforme  $s$  diminui a partir desse ponto  $K$  também aumenta. Conforme o ganho  $K$  aumenta, maior será a amplitude de saída em um tempo menor.

## Problema 8.2

Considere o sistema de primeira ordem

$$G(s) = \frac{0.5}{s - 1} \text{ (instável)}$$

- Determine o LGR. Encontre a faixa de valores de  $K$  no sistema em malha-fechada é instável e a faixa de valores em que é estável.
- Escolha  $K = 1$  (instável) e  $K = 3$  (estável) e simule para  $r(t)$  do tipo degrau unitário.



### 8.3. DETERMINAÇÃO DO GANHO $K$ PARA SISTEMAS EM MALHA-FECHADA DE PRIMEIRA E SEGUNDA

#### Resolução

**8.3.0.0.4 Parte A** O LGR está apresentado na Figura 8.5. É possível perceber que o sistema é instável para  $0 < K < 2$  e estável para  $K > 2$ .

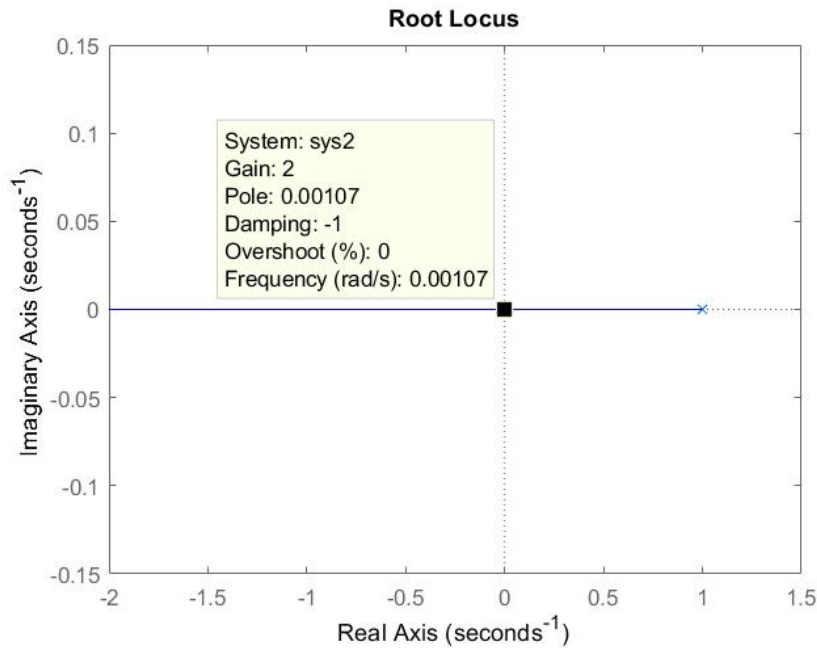


Figure 8.5: Localização das Raízes

**8.3.0.0.5 Parte B** O sistema simulado para  $K = 1$  está apresentado na Figura 8.6.

O sistema simulado para  $K = 3$  está apresentado na Figura 8.7.

## Problema 8.3

Considere o sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{0.9}{s(s+1)} = \frac{0.9}{s^2 + s}$$

- Determine o LGR e observe que o sistema em malha-fechada é estável para qualquer  $K > 0$ .

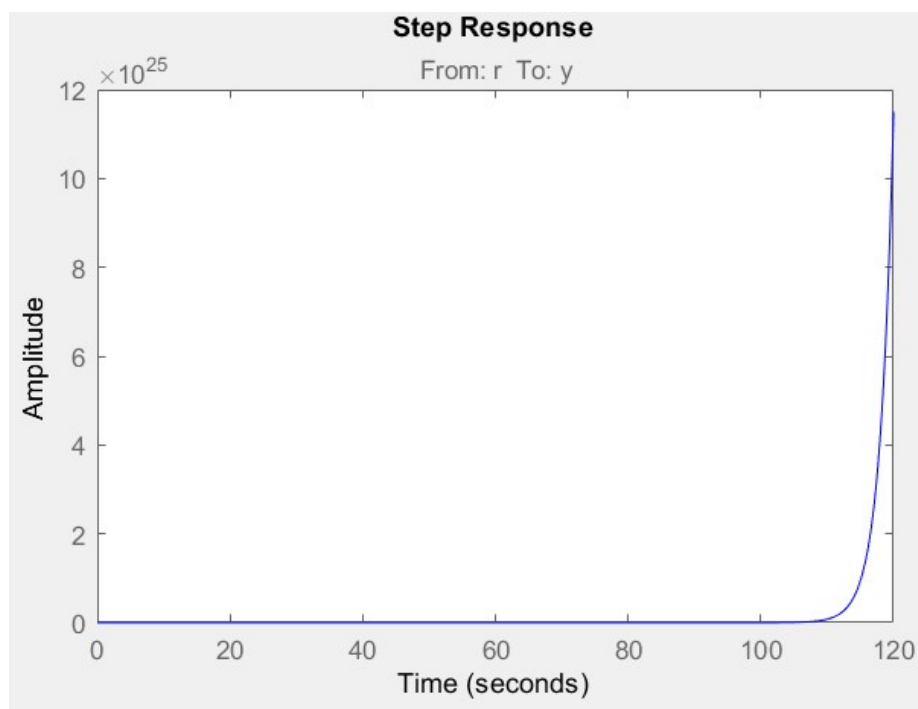


Figure 8.6: Simulação

### 8.3. DETERMINAÇÃO DO GANHO $K$ PARA SISTEMAS EM MALHA-FECHADA DE PRIMEIRA E SEGUNDA

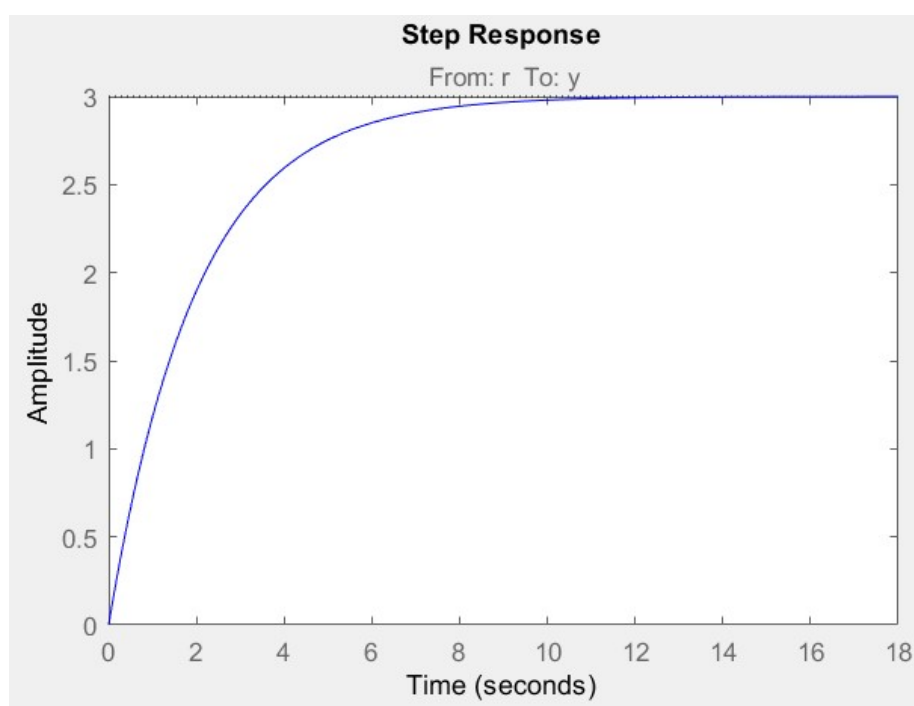


Figure 8.7: Simulação

- b. Determine a faixa e valores de  $K$  em que os pólos são reais. Simule para  $K = 0.2$  com  $r(t)$  do tipo degrau unitário. Observe que, conforme o esperado, não há sobressinal. Justifique.
- c. Determine a faixa de valores  $K$  em que os pólos são complexos conjugados. Simule para  $K = 0.55$  e  $K = 1.3$  com  $r(t)$  do tipo degrau unitário. Analise os resultados. Note que, conforme o esperado, o sobressinal aumentou. Justifique.

### Resolução

**8.3.0.0.6 Parte A** O LGR está apresentado na Figura 8.8. É possível perceber que como o LGR está no SPE, ele é estável para qualquer  $K > 0$ .

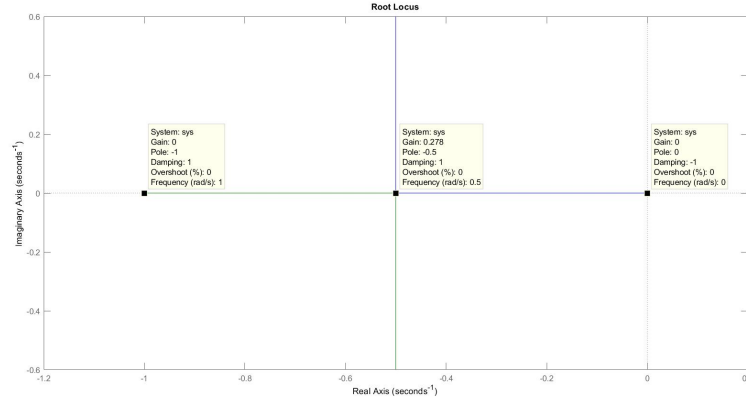


Figure 8.8: Localização das Raízes

**8.3.0.0.7 Parte B** De acordo com a Figura 8.8, é possível determinar que os pólos são reais para  $0 < K < 0.278$ . A simulação para  $K = 0.2$  está apresentado na Figura 8.9.

**8.3.0.0.8 Parte C** De acordo com a Figura 8.8, é possível determinar que os pólos são complexos para  $K \geq 0.278$ . A simulação para  $K = 0.55$  está apresentada na figura 8.10.

A simulação para  $K = 1.3$  está apresentada na figura 8.11.

Conforme esperado o sobressinal aumenta conforme  $K$  aumenta uma vez que  $K$  aumenta conforme os pólos complexos aumentam.

### 8.3. DETERMINAÇÃO DO GANHO $K$ PARA SISTEMAS EM MALHA-FECHADA DE PRIMEIRA E SEGUNDA

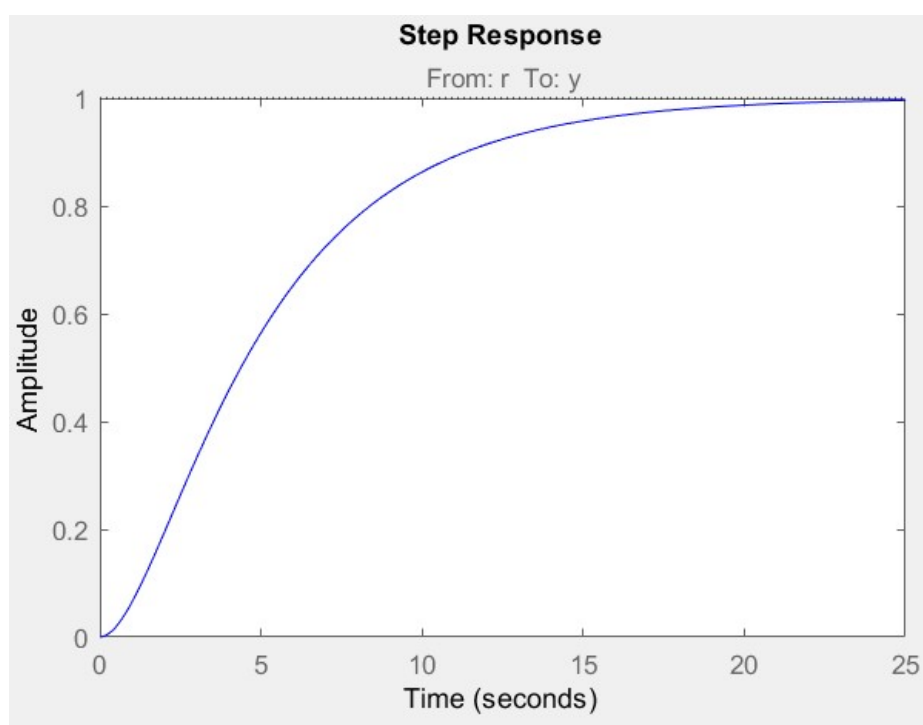


Figure 8.9: Localização das Raízes

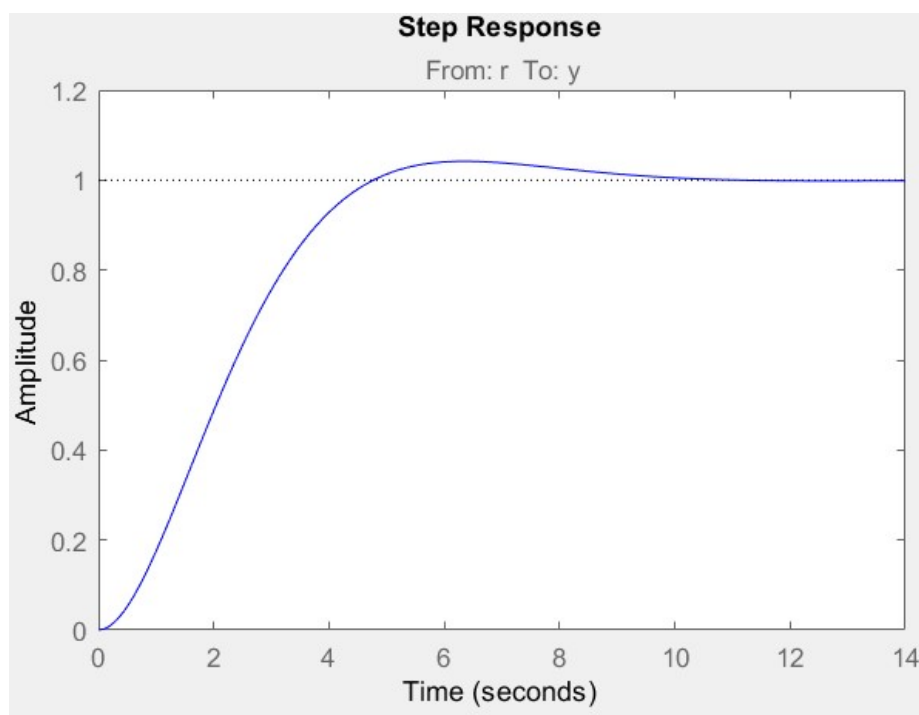


Figure 8.10: Localização das Raízes

### 8.3. DETERMINAÇÃO DO GANHO $K$ PARA SISTEMAS EM MALHA-FECHADA DE PRIMEIRA E SEGUNDA

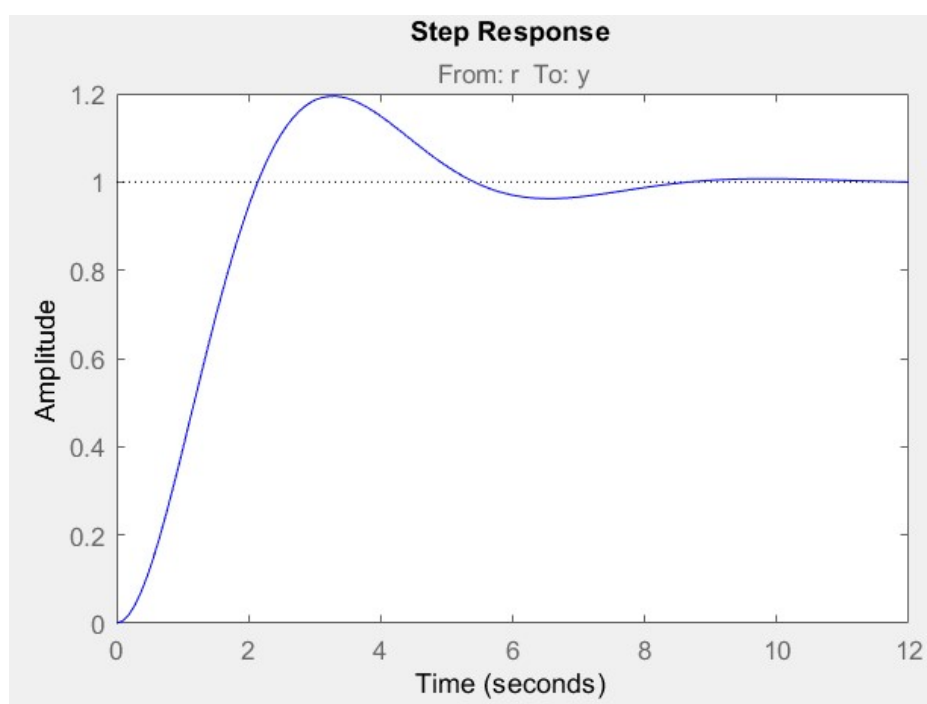


Figure 8.11: Localização das Raízes

## Problema 8.4

Considere o sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{1.2}{(s+1)(s+3)} = \frac{1.2}{s^2 + 4s + 3}$$

- Determine o LGR e observe que o sistema em malha-fechada é estável para qualquer  $K > 0$ .
- Adicione um pólo em  $s = 0$  (integrador). Note que o LGR foi “empurrado” para a direita. Determine a faixa de valores de  $K$  em que o sistema em malha-fechada é estável e a faixa em que é instável. Simule para  $K = 2.5$  com  $r(t)$  do tipo degrau unitário e perceba que  $e(\infty) = 0$ . Isto era esperado? Justifique (dica: determine os pólos de malha-fechada e note que eles estão no SPE).
- Mantenha o pólo em  $s = 0$  e adicione um zero em  $s = -2$ . Note que o LGR foi “atraído” em sua direção e que temos estabilidade para qualquer  $K > 0$ . Por fim, mude a posição do zero para  $s = 2$  (sistema de fase não-mínima). Determine a faixa de valores de  $K$  em que o sistema em malha-fechada é estável e a faixa de valores em que é instável. Isto mostra que sistemas de fase não-mínima exigem bastante cuidado em termos de estabilidade. Simule para  $K = 6$  com  $r(t)$  do tipo degrau unitário. Como  $G(s)$  tem um pólo em  $s = 0$ , não deveríamos ter que  $e(\infty) = 0$ ? Justifique.

### Resolução

**8.3.0.0.9 Parte A** O LGR está apresentado na Figura 8.12. É possível perceber que como o LGR está no SPE, ele é estável para qualquer  $K > 0$ .

**8.3.0.0.10 Parte B** Adicionando um pólo em  $s = 0$  temos

$$G(s) = \frac{1.2}{(s+1)(s+3)} = \frac{1.2}{s^3 + 4s^2 + 3s}$$

O LGR está apresentado na Figura 8.13. É possível perceber que o sistema é estável para qualquer  $K < 10$  e instável para  $K > 10$ .

O sistema simulado está apresentado na Figura 8.14. De acordo com o esperado,  $e(\infty) = 0$ . Isso se dá devido ao fato de o sistema se comportar de forma estável para  $K < 4$ .



8.3. DETERMINAÇÃO DO GANHO  $K$  PARA SISTEMAS EM MALHA-FECHADA DE PRIMEIRA E SEGUNDA

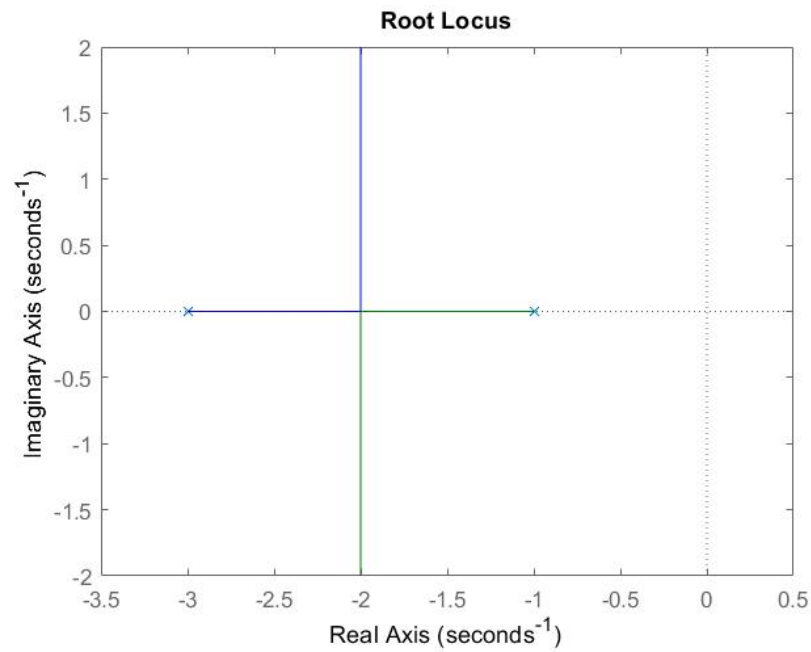


Figure 8.12: Localização das Raízes

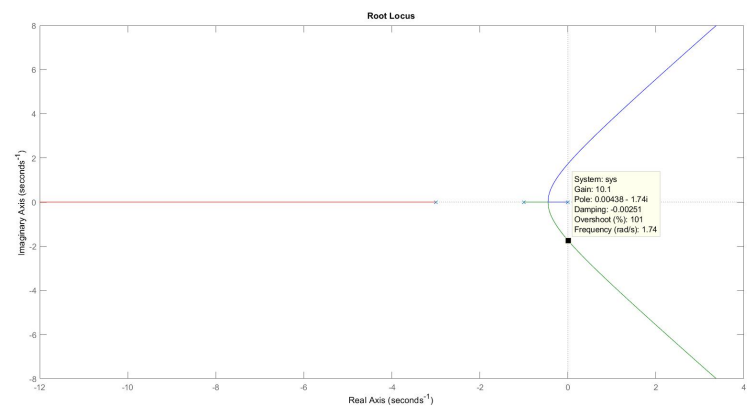


Figure 8.13: Localização das Raízes

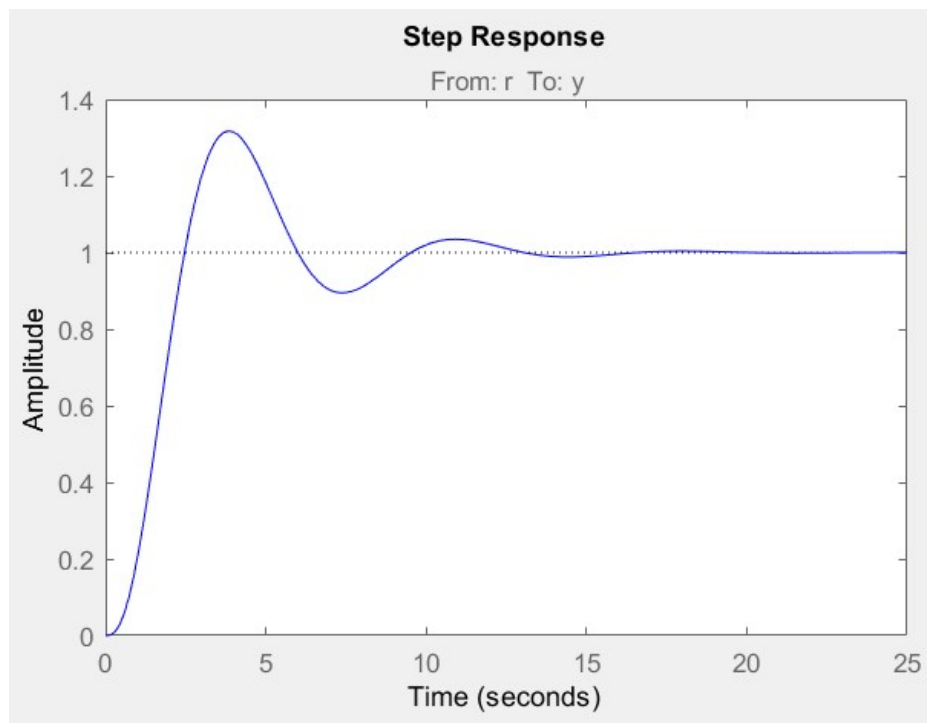


Figure 8.14: Localização das Raízes

### 8.3. DETERMINAÇÃO DO GANHO $K$ PARA SISTEMAS EM MALHA-FECHADA DE PRIMEIRA E SEGUNDA

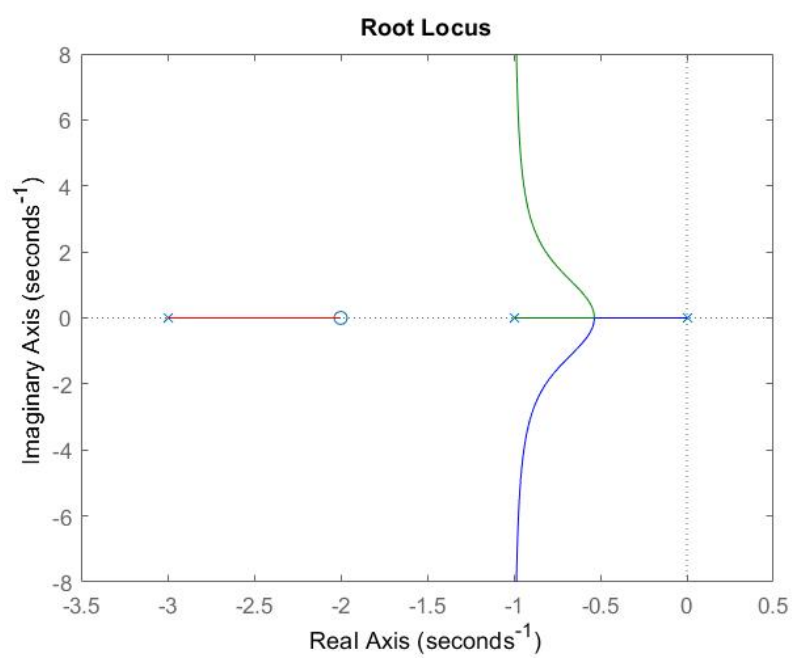


Figure 8.15: Localização das Raízes

**8.3.0.0.11 Parte C** Mantendo o pólo e adicionando um zero em  $s = -2$ . Percebe-se que agora o sistema se mantém estável para qualquer  $K > 0$ . o LGR está apresentado na Figura 8.15.

Mantendo o pólo e adicionando um zero em  $s = 2$ . O LGR está apresentado na Figura 8.16.

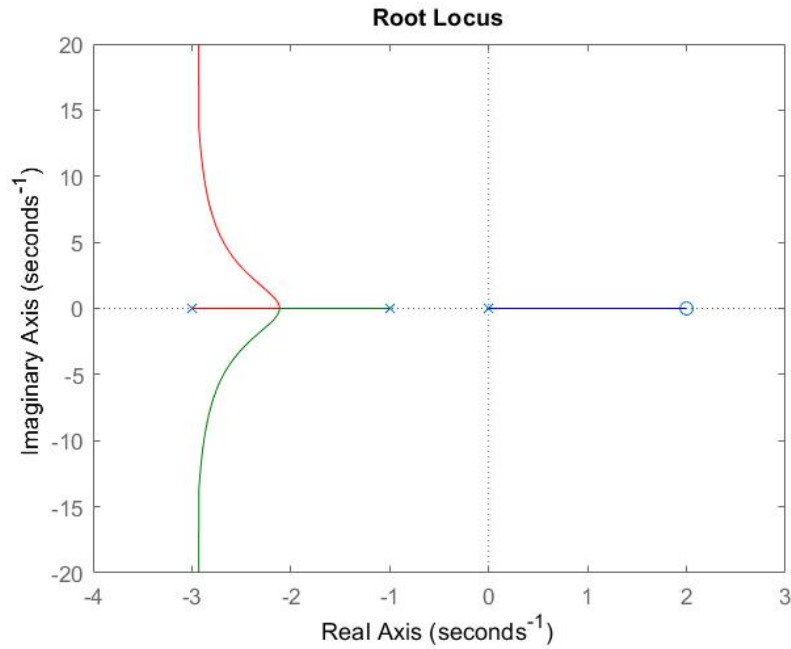


Figure 8.16: Localização das Raízes

## Problema 8.5

Considere o sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{0.8}{s(s+3)} = \frac{0.8}{s^2 + 3s}$$

- Determine a região do LGR em que o sistema em malha-fechada apresenta  $M_p \leq 5\%$  ( $\Rightarrow \xi \geq 0.7$ ).
- Escolha  $K$  de modo que  $M_p = 5\%$  ( $\xi = 0.7$ ). Determine os pólos de malha-fechada e simule para  $r(t)$  do tipo degrau unitário. Verifique se o sobressinal resultante está de acordo com  $K$ . Note que  $e(\infty) = 0$ . Isto era esperado? Justifique.

### 8.3. DETERMINAÇÃO DO GANHO $K$ PARA SISTEMAS EM MALHA-FECHADA DE PRIMEIRA E SEGUNDA

#### Resolução

Working on it :)

## Problema 8.6

Analise o LGR de

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+4)} = \frac{s+1}{s^3+4s^2}$$

#### Resolução

O LGR está apresentado na Figura 8.17.

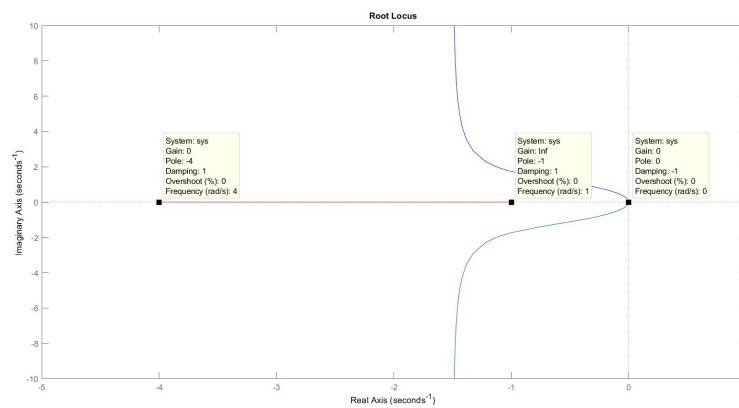


Figure 8.17: Localização das Raízes



## Chapter 9

# Projeto de Controladores pelo Lugar das Raízes

Working on it :)





# Problemas Laboratório 9

Working on it :)



## Chapter 10

# Projeto do controlador atraso de fase

Working on it :)



# Problemas Laboratório 10

Working on it :)



## Chapter 11

# Análise pelos Diagramas de Bode e Nyquist

Working on it :)





# Problemas Laboratório 11

Working on it :)



## Chapter 12

# Projeto de Controladores pelo Diagrama de Bode

Working on it :)



# Problemas Laboratório 12

Working on it :)



## Chapter 13

# Digitalização de Controladores Analógicos

Working on it :)





# Problemas Laboratório 13

Working on it :)