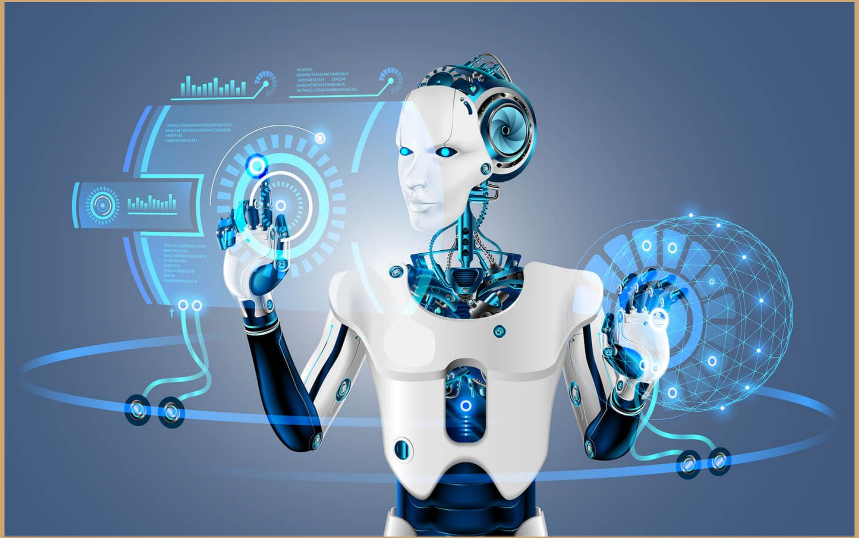
O Método do Lugar das Raízes

Djonathan Quadras

Introdução



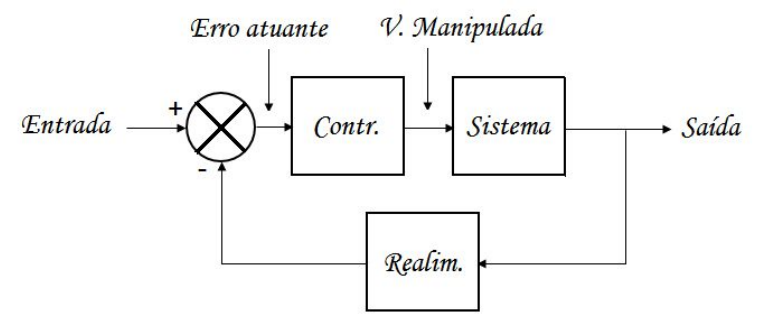
Introdução

- Técnica que apresenta como mudanças em um dos parâmetros de um sistema modifica as raízes de sua equação característica (os pólos de malha fechada), e assim, altera a resposta dinâmica do sistema.

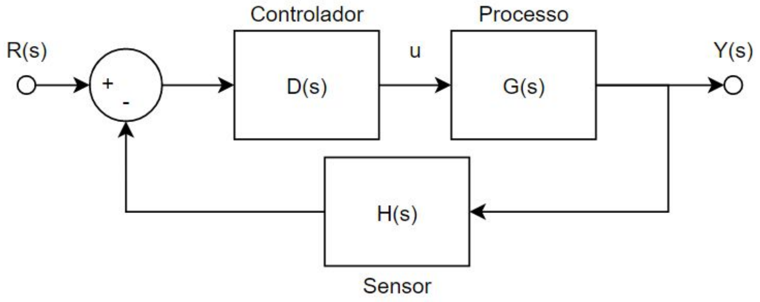
- O lugar das raízes é usado normalmente para o estudo do efeito da variação de um ganho de malha.

- Pode ser usado para traçar gráficos das raízes da equação característica quando o ganho de um sensor de velocidade em realimentação é alterado, ou o parâmetro pode ser um parâmetro físico do sistema como a inércia ou a indutância de armadura de um motor.

Lugar das Raízes de um Sistema de Realimentação Básico



Lugar das Raízes de um Sistema Realimentado Básico



Função de Transferência

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)H(s)}$$

Equação Característica

$$1 + D(s)G(s)H(s) = 0$$

Equação Característica

$$1 + KL(s) = 0$$

Lugar das Raízes de um Sistema Realimentado Básico

$$1 + KL(s) = 0 \implies L(s) = -\frac{1}{K}$$

$$\Downarrow$$

$$L(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + K\frac{b(s)}{a(s)} = 0 \implies a(s) + Kb(s) = 0$$

- Estas equações são referenciadas como as formas da equação característica de Evans.

- O lugar das raízes é um conjunto de valores de s para os quais essas equações são satisfeitas para K > 0.

Exemplo I

Obtenha o LGR correspondente, ou seja, faça o gráfico do plano s contendo todos os pólos de malha-fechada possíveis. Em seguida, calcule o ganho K para que o sistema opere no ponto indicado do LGR.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s+0.5}, \quad s = -1.25$$

Exemplo I - Resolução

$$\boxed{\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s+0.5}, \quad s = -1.25}$$

<u>Como:</u>

$$1 + KL(s) = 0 \quad \Longrightarrow$$

<u>Então:</u>

$$L(s) = \frac{1}{s+0.5}$$

$$L(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \quad \Longrightarrow \quad b(s) = 1, \quad a(s) = s + 0.5$$

Exemplo I - Resolução

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s+0.5}, \quad s = -1.25$$

$$\boxed{b(s) = 1, \quad a(s) = s + 0.5}$$

Assim:

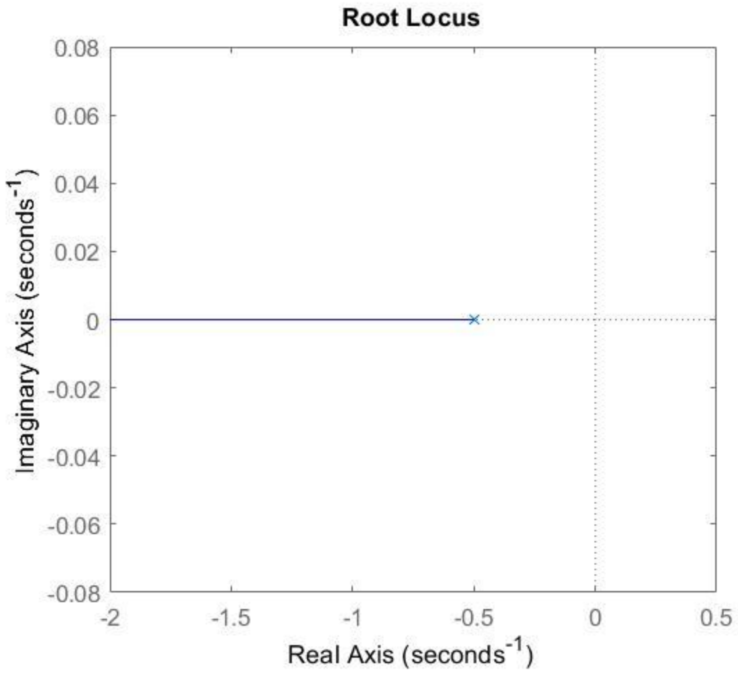
$$a(s) + Kb(s) = 0$$

$$s + 0.5 + K = 0$$

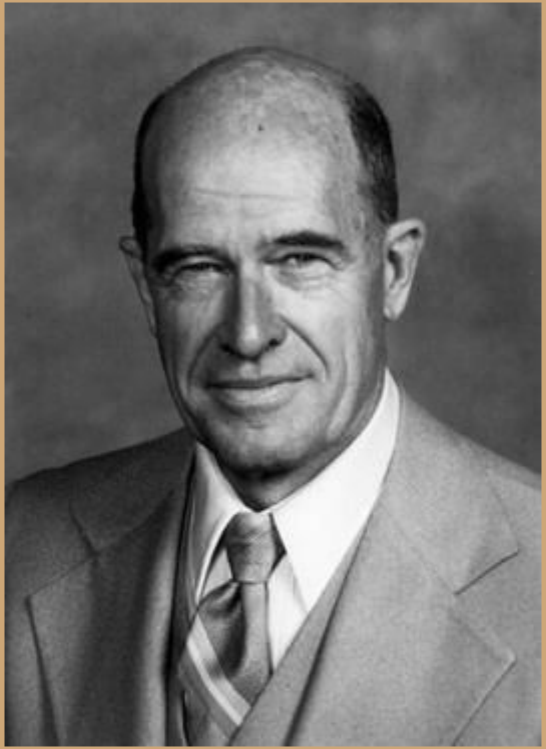
$$\boxed{s = -0.5 - K}$$

Portanto, para s = 1.25:

$$-1.75 = -0.5 - K \implies \boxed{K = 0.75}$$



Método de Evans



Método de Evans

- O método apresentado anteriormente não é muito útil uma vez que deve ser feito o cálculo para cada valor de K.

- Para solucionar este problema, ao final da década de 1940 Walter R. Evans publicou diversos estudos nos quais ele propunha que deveria se considerar variações infinitas de algum parâmetro (a princípio o ganho K).

- Esse método é composto por 9 regras, que serão explicadas a seguir.

Regra 1 - Número de Ramos do LGR

- Um sistema de controle tem maioria de pólos em relação a zeros. O número de ramos de um LGR será igual ao número de pólos contidos na função de transferência de malha-fechada.

- Por ramo, se entende toda trajetória que segue um determinado pólo de malha-fechada como consequência da variação de ganho, de modo que haverá tantos ramos quanto corresponda ao grau da função de transferência de malha-aberta.

Regra 2 - Princípio e fim do LGR

- Os Lugares Geométricos se iniciam nos pólos e terminam nos zeros.

- Se não existirem zeros, os LG terminarão no infinito.

- A função dos zeros é atrair os lugares que vêm dos pólos.

Regra 3 - Lugares Geométricos no Eixo Real

- Os Lugares Geométricos que existem no eixo real se situam à esquerda dos elementos ímpares, mas começam com o elemento mais à direita.

Regra 4 - Simetria dos Lugares Geométricos Complexos

- Esta regra é, na realidade, uma consequência lógica uma vez que é característica dos lugares geométricos onde a parte real é mesma e a componente imaginária sempre será o complexo conjugado do ramo associado.

Regra 5 - Assíntotas

- Para ganhos elevados, e em ausência de zeros, os ramos do lugar geométrico tendem a se comportar como linhas retas de modo assíntoto, as quais abandonam o eixo real com um ângulo dado por

$$\theta = \frac{180 + 360k}{n - m}$$

- Onde n é o número de pólos, m o número de zeros e k um número inteiro

Regra 6 - Centróide

- O centróide é o ponto no eixo real do qual as assíntotas divergem e é determinado por

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} G(s)H(s) - \sum_{i=1}^{m} G(s)H(s)}{n - m}$$

- Onde n é o número de pólos, m o número de zeros.

Regra 7 - Cruzamento do LG com o eixo imaginário

- Os pontos nos quais os LG cruzam o eixo imaginário $j\omega$, assim como o valor do ganho K neste ponto, são obtidos substituindo s por $j\omega$ na equação característica.

- Essa regra é de grande importância uma vez que os valores de ganho e o cruzamento do eixo $j\omega$, assim com a frequência neste ponto, são fundamentais para o desenho dos controladores.

Regra 8 - Ângulos de saída e chegada

- O ângulo de saída de um ramo associado com um pólo complexo corresponde à soma das contribuições angulares de todos os pólos restantes de G(s)H(s) ao polo de baixa consideração. A soma de todas as contribuições angulares dos zeros de G(s)H(s) ao polo de baixa consideração $+\varphi = 180^\circ$.

- O ângulo de chegada associado a um zero complexo corresponde a soma das contribuições angulares de todos os pólos de G(s)H(s) ao zero de baixa consideração. A soma de todas as contribuições angulares dos zeros restantes de G(s)H(s) ao zero de baixa consideração $-\varphi = 180^\circ$.

Regra 9 - Pontos de saída e pontos de chegada

- Os lugares geométricos que saem do eixo real o farão com o máximo ganho possível que pode ocorrer entre a região real delimitada pelos pólos adjacentes.

- Os ramos dos lugares geométricos chegam ao eixo real com um ganho que corresponde ao valor mínimo possível, dentro de um intervalo limitado sobre o eixo real.

Exemplo II

Com respeito à função de transferência de malha-aberta abaixo, justifique por que se aplica ou não cada uma das regras para se obter o LGR respectivo.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+6)(s+8)} = \frac{K}{s^3 + 15s^2 + 62s + 48}$$

Exemplo II - Resolução

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+6)(s+8)} = \frac{K}{s^3 + 15s^2 + 62s + 48}$$

Pode-se perceber de início que o sistema proposto não possui zeros e possui 3 pólos ($p1 = -1$, $p2 = -6$, $p = -8$).

Número de ramos do LGR: O LGR contará com três ramos pois G(s)H(s) possui três pólos.

Princípio e fim do LGR: Os três lugares geométricos irão terminar no infinito já que não possuem zeros na configuração.

Lugares geométricos no eixo real: Haverá dois LG no eixo real

- $-6 < s < -1$
- $-\infty < s < -8$

Exemplo II - Resolução

$$\boxed{G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+6)(s+8)} = \frac{K}{s^3 + 15s^2 + 62s + 48}}$$

Simetria dos LG complexos: A presença de pólos adjacentes assegura que, com incrementos de ganho, dois dos ramos terão comportamento complexo, pelo qual haverá simetria de tais elementos em relação ao eixo real.

Assíntotas: Como os três lugares geométricos tendem ao infinito, são necessárias três assíntotas.

$$\theta(k=0) = 60^\circ, \quad \theta(k=-1) = -60^\circ, \quad \theta(k=1) = 180^\circ$$

Exemplo II - Resolução

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+6)(s+8)} = \frac{K}{s^3 + 15s^2 + 62s + 48}$$

Centróide: Como os três lugares geométricos tendem ao infinito, é necessário um centróide para localizar o ponto de divergência das assíntotas sobre o eixo real.

$$\sigma = \frac{-8 - 6 - 1 - 0}{3 - 0} = -5$$

Exemplo II - Resolução

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+6)(s+8)} = \frac{K}{s^3 + 15s^2 + 62s + 48}$$

Cruzamento do LG com o eixo imaginário: Devido ao fato de que duas assíntotas se localizam a ±60º, se supõe que com incrementos de ganho os lugares geométricos cruzarão o eixo jω. A função de transferência de malha-fechada T(s) associada G(s)H(s) de onde se supõe que H(s) = 1 corresponde a:

$$T(s) = \frac{K}{s^3 + 15s^2 + 62s + (48 + K)}$$

Exemplo II - Resolução

$$\boxed{G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+6)(s+8)} = \frac{K}{s^3 + 15s^2 + 62s + 48}}$$

Desta forma, substituindo s por jω na equação característica, tanto o ganho K no ponto de cruzamento com o eixo imaginário jω quanto a frequência w no referido ponto de cruzamento obtém-se:

$$s^3 + 15s^2 + 62s + (48 + K)\Big|_{s=j\omega}$$

Sendo o polinômio 1 + G(s)H(s) = 0, onde o ganho K está implícito no fator G(s). Para o caso:

$$1 + \frac{K}{(s+1)(s+6)(s+8)} = 0$$

Exemplo II - Resolução

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+6)(s+8)} = \frac{K}{s^3 + 15s^2 + 62s + 48}$$

Onde o ganho máximo é de

$$\frac{dK}{ds} = 0 = -3s^2 - 30s - 62$$

As raízes da equação são

- r1 = −7.0817
- r2 = −2.9183.

O que indica que o ponto de saída é em s = −2.9183 com ganho K = 30.04.

Exemplo II - Resolução

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+6)(s+8)} = \frac{K}{s^3 + 15s^2 + 62s + 48}$$

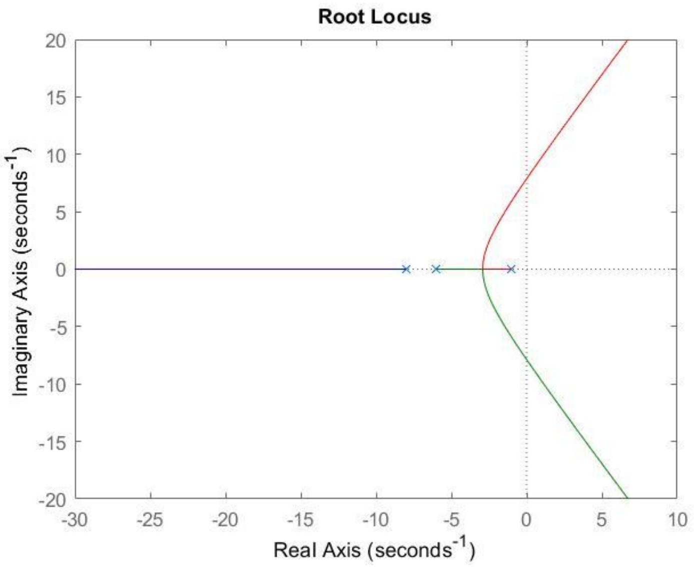
Ângulo de saída e ângulo de chegada: Posto que G(s)H(s) não apresenta pólos nem zeros complexos, não existirão ângulos de saída nem de entrada.

Pontos de saída e chegada: A presença de dois pólos adjacentes $p1 = -1$ e $p2 = -6$ confirmam a existência de um ponto de saída, o qual se situa em $s = -2.9183$. Como não existem zeros no eixo real, não se apresentarão pontos de chegada.

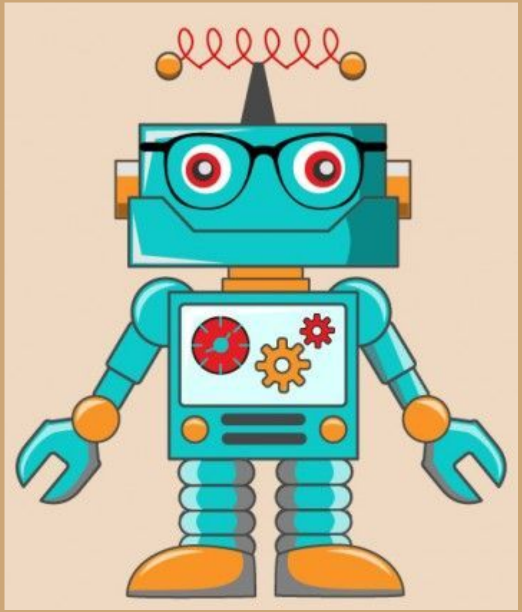
Exemplo II - Resolução

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+6)(s+8)} = \frac{K}{s^3 + 15s^2 + 62s + 48}$$

Lugar Geométrico: O gráfico abaixo é resultado obtido pelo matlab. Percebe-se que está de acordo com o modelo teórico



Conclusão



Conclusão

Foi possível perceber que as mudanças em um dos parâmetros de um sistema (no caso, o ganho K) modifica as raízes de sua equação característica, e assim, altera a resposta dinâmica do sistema.

Esse método se mostra como uma ferramenta de grande utilidade no projeto de sistemas de controle por permitir ao projetista definir adequadamente a estrutura do controlador apropriado a cada problema.

Obrigado!