Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"
Фізико-технічний інститут

КРИПТОГРАФІЯ
КОМП’ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ №4
Вивчення криптосистеми RSA та алгоритму електронного підпису; ознайомлення з методами генерації параметрів для асиметричних криптосистем

Виконали студенти групи ФБ-23:
Кушнарьов Данііл та Присєвок Оксана

Київ - 2024

Мета: Ознайомлення з тестами перевірки чисел на простоту і методами генерації ключів для асиметричної криптосистеми типу RSA; практичне ознайомлення з системою захисту інформації на основі криптосистеми RSA, організація з використанням цієї системи засекреченого зв'язку й електронного підпису, вивчення протоколу розсилання ключів.

Хід роботи:

1. Написати функцію пошуку випадкового простого числа з заданого інтервалу або заданої довжини, використовуючи датчик випадкових чисел та тести перевірки на простоту. В якості датчика випадкових чисел використовуйте вбудований генератор псевдовипадкових чисел вашої мови програмування. В якості тесту перевірки на простоту рекомендовано використовувати тест Міллера-Рабіна із попередніми пробними діленнями. Тести необхідно реалізувати власноруч, використання готових реалізацій тестів не дозволяється.

Виконання завдання:

```
#lab4, v_6
import random
from math import gcd

# Завдання 1: Перевірка числа на простоту
def is_probable_prime(n, iterations=5):
    """Перевіряємо, чи є число n імовірно простим за допомогою
тесту Міллера-Рабіна."""
    if n < 2:
        return False
    if n in (2, 3):
        return True
    if n % 2 == 0 or n % 3 == 0:
        return False

    # Розкладання n-1 у вигляді 2^s * d
    s, d = 0, n - 1
    while d % 2 == 0:
        s += 1
        d //= 2

    # Локальна функція перевірки свідків складеності
    def is_composite(base):
```

```
        result = pow(base, d, n)
        if result in (1, n - 1):
            return False
        for _ in range(s - 1):
            result = pow(result, 2, n)
            if result == n - 1:
                return False
        return True

    for _ in range(iterations):
        candidate = random.randint(2, n - 2)
        if is_composite(candidate):
            return False
    return True

def find_prime(bit_size):
    """Генеруємо випадкове просте число заданого розміру в
бітах."""
    while True:
        num = random.getrandbits(bit_size) | (1 << (bit_size -
1)) | 1
        if is_probable_prime(num):
            return num

# Генерація випадкового простого числа для завдання 1
bit_length = 256
random_prime_number = find_prime(bit_length)
print(f"№1: Згенеровано випадкове просте число ({bit_length}
біт): {random_prime_number}")
```

Результат:

```
PS D:\kpi\crypto 1> & C:/Users/Home/AppData/Local/Programs/Python/Python312/python.exe "d:/kpi/crypto 1/lab4_1.py"
№1: Згенеровано випадкове просте число (256 біт): 81391934231376981079556524360698638819751300463066206681592178426634505468591
```

2. За допомогою цієї функції згенерувати дві пари простих чисел p, q і p1, q1 довжини щонайменше 256 біт. При цьому пари чисел беруться так, щоб $pq \leq p1q1$; p, q - прості числа для побудови ключів абонента A, p1,q1 - абонента B.

Виконання завдання:

```
# Завдання 2: Генерація пар простих чисел
def generate_key_pairs(size=256):
```

```
    """Створюємо дві пари простих чисел (p, q) і (p1, q1),
дотримуючись умови p*q <= p1*q1."""
    while True:
        p, q = find_prime(size), find_prime(size)
        p1, q1 = find_prime(size), find_prime(size)
        if p * q <= p1 * q1:
            return (p, q), (p1, q1)

key_pair_a, key_pair_b = generate_key_pairs()
print("№2: Пара (p, q) A:", key_pair_a)
print("№2: Пара (p1, q1) B:", key_pair_b)
```

Результат:

```
№2: Пара (p, q) A: (73351678178776623360959843497181365522470095200042761386897153916192450781117, 7397674819058846279498064019590837407961819409268768895250588168508774383567 9)
№2: Пара (p1, q1) B: (979888331151036745079857073361704652005202167826666719276441258299317125869 07, 1067774608387021053307036744203921330184516211134171804268390771201745748653 29)
```

3. Написати функцію генерації ключових пар для RSA. Після генерування функція повинна повертати та/або зберігати секретний ключ (d, p, q) та відкритий ключ (n, e). За допомогою цієї функції побудувати схеми RSA для абонентів A і B - тобто, створити та зберегти для подальшого використання відкриті ключі (e, n), (e1, n1) та секретні d і d1.

Виконання завдання:

```
# Завдання 3: Генерація ключів RSA
def rsa_key_generation(prime1, prime2):
    """Генеруємо публічний та приватний ключі RSA на основі двох
простих чисел."""
    modulus = prime1 * prime2
    phi = (prime1 - 1) * (prime2 - 1)

    # Пошук відкритої експоненти e
    public_exponent = 65537  # Стандартне значення
    if gcd(public_exponent, phi) != 1:
        for candidate in range(3, phi, 2):
            if gcd(candidate, phi) == 1:
                public_exponent = candidate
                break

    # Обчислення секретної експоненти d
    private_exponent = pow(public_exponent, -1, phi)
```

```
    # Повернення пари ключів
    return (public_exponent, modulus), (private_exponent, prime1,
prime2)

# Генерація RSA-ключів для абонентів A та B
public_key_a, private_key_a = rsa_key_generation(key_pair_a[0],
key_pair_a[1])
public_key_b, private_key_b = rsa_key_generation(key_pair_b[0],
key_pair_b[1])

print("№3: Відкритий ключ A:", public_key_a)
print("№3: Секретний ключ A:", private_key_a)
print("№3: Відкритий ключ B:", public_key_b)
print("№3: Секретний ключ B:", private_key_b)
```

Результат:

```
№3: Відкритий ключ A: (65537, 542631862598844080218980114643711446799050149994431442406343268003361747163349259613389435631760853711678368820041990470247502692171019588082362524407344 3)
№3: Секретний ключ A: (161439126858908126342519100284161401798798843776666986039014313128912634789366260325863744570289855698539756914092841882332466265771682742414430449630446 5, 733516781787766233609598434971813655224700952000427613868971539161924507811177, 739767481905884627949806401959083740796181940926876889525058816850877438356 79)
№3: Відкритий ключ B: (65537, 104629987905780986331658898120734850698285880493039946813934921281045478037425309595614105200059265794882987703645579653749682335754699343499656237336474 03)
№3: Секретний ключ B: (610167311254870304806395078700026741968321416385170777924192251161981342617495406839630938494296127488261496007784472884009583121393639360037514779858908 9, 979888331151036745079857073361704652005202167826666719276441258299317125869 07, 106777460838702105330703674420392133018451621113417180426839077120174574865329)
```

4. Написати програму шифрування, розшифрування і створення повідомлення з цифровим підписом для абонентів A і B. Кожна з операцій (шифрування, розшифрування, створення цифрового підпису, перевірка цифрового підпису) повинна бути реалізована окремою процедурою, на вхід до якої повинні подаватись лише ті ключові дані, які необхідні для її виконання.

За допомогою датчика випадкових чисел вибрати відкрите повідомлення M і знайти криптограму для абонентів A і B, перевірити правильність розшифрування. Скласти для A і B повідомлення з цифровим підписом і перевірити його.

5. За допомогою раніше написаних на попередніх етапах програм організувати роботу протоколу конфіденційного розсилання ключів з підтвердженням справжності по відкритому каналу за допомогою алгоритму RSA. Протоколи роботи кожного учасника (відправника та приймаючого) повинні бути реалізовані у вигляді окремих

процедур, на вхід до яких повинні подаватись лише ті ключові дані, які необхідні для виконання. Перевірити роботу програм для випадкового обраного ключа $0 < k < n$.

```
# Функція для перетворення рядка в число
def string_to_number(message):
    return int.from_bytes(message.encode('utf-8'), 'big')

# Функція для перетворення числа в рядок
def number_to_string(number):
    byte_length = (number.bit_length() + 7) // 8
    return number.to_bytes(byte_length, 'big').decode('utf-8', errors='ignore')

# Функція шифрування
def encrypt(message, public_key):
    e, n = public_key
    m = string_to_number(message)
    cipher = pow(m, e, n)
    return cipher

# Функція дешифрування
def decrypt(cipher, private_key):
    d, p, q = private_key
    n = p * q
    decrypted = pow(cipher, d, n)
    return number_to_string(decrypted)

# Функція хешування повідомлення (SHA-256)
def hash_message(message):
    return int(hashlib.sha256(message.encode('utf-8')).hexdigest(), 16)

```

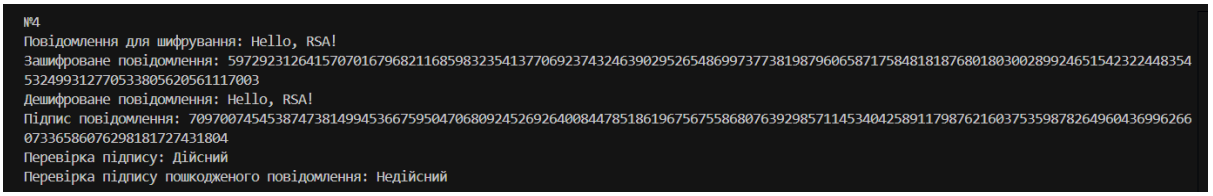
```
# Функція підпису повідомлення
def sign_message(message, private_key):
    d, p, q = private_key
    n = p * q
    message_hash = hash_message(message)
    signature = pow(message_hash, d, n)
    return signature

# Функція перевірки підпису
def verify_signature(message, signature, public_key):
    e, n = public_key
    message_hash = hash_message(message)
    verified_hash = pow(signature, e, n)
    return message_hash == verified_hash

```

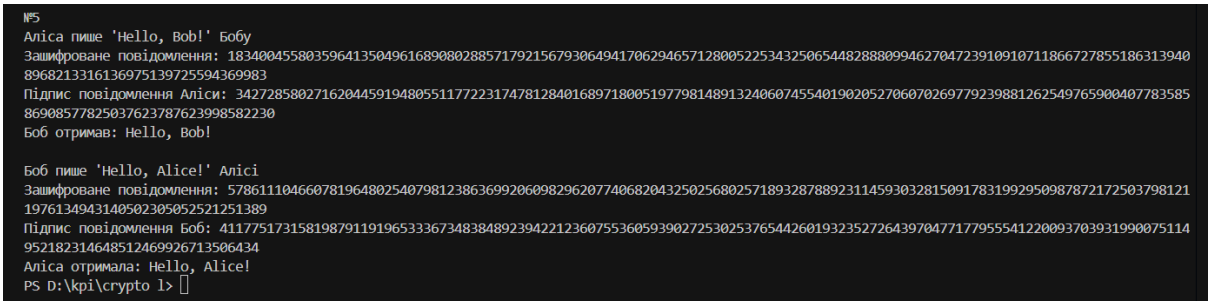
```
# Приклад шифрування та дешифрування
    print('\n№4')
    message = "Hello, RSA!"
    print(f"Повідомлення для шифрування: {message}")
    encrypted_message = rsa.encrypt(message, public_key_a)
    print(f"Зашифроване повідомлення: {encrypted_message}")
    decrypted_message = rsa.decrypt(encrypted_message,
private_key_a)
    print(f"Дешифроване повідомлення: {decrypted_message}")

     # Приклад підпису та перевірки підпису
    signature = rsa.sign_message(message, private_key_a)
    print(f"Підпис повідомлення: {signature}")
    is_valid = rsa.verify_signature(decrypted_message, signature,
public_key_a)
    print(f"Перевірка підпису: {'Дійсний' if is_valid else
'Недійсний'}")

     # Приклад перевірки підпису зміненого повідомлення
    is_valid = rsa.verify_signature(decrypted_message + 'a',
signature, public_key_a)
```

```
    print(f"Перевірка підпису пошкодженого повідомлення:
{'Дійсний' if is_valid else 'Недійсний'}")

    print('\n№5')
    # Create two people (sender and receiver)
    alice = Person('Alice')
    bob = Person('Bob')

    #Exchange public keys
    alice.take_friends_key(bob.public_key)
    bob.take_friends_key(alice.public_key)

    # Alice sends a message to Bob
    message = "Hello, Bob!"
    print(f"Аліса пише '{message}' Бобу")
    encrypted_message, encrypted_message_signature =
alice.send_message(message)
    print(f"Зашифроване повідомлення: {encrypted_message}")
    print(f"Підпис повідомлення Аліси:
{encrypted_message_signature}")

    decrypted_message= bob.receive_message(encrypted_message,
encrypted_message_signature)

    if decrypted_message:
        print(f"Боб отримав: {decrypted_message}")
    else:
        print('Повідомлення пошкоджене')

    # Bob sends a message to Alice
    message = "Hello, Alice!"
    print(f"\nБоб пише '{message}' Алісі")
    encrypted_message, encrypted_message_signature =
bob.send_message(message)
    print(f"Зашифроване повідомлення: {encrypted_message}")
    print(f"Підпис повідомлення Боб:
{encrypted_message_signature}")

    decrypted_message= alice.receive_message(encrypted_message,
encrypted_message_signature)

    if decrypted_message:
        print(f"Аліса отримала: {decrypted_message}")
```

```
    else:
        print('Повідомлення пошкоджене')
```

Результат завдань №4 та №5:





Висновки: після виконання даної лабораторної роботи ми отримали практичні навички як тестувати числа на простоту, генерувати ключі для асиметричної криптосистеми типу RSA, а також організували роботу протоколу конфіденційного розсилання ключів з підтвердженням справжності.