UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Dipartimento di Ingegneria "Enzo Ferrari"

Analisi matematica I, Ingegneria Informatica
Prof.ssa Maria Manfredini

Lezione 7 (successioni)
(Terza parte)

- Def di o piccolo e di equivalenza
- Esempi fondamentali
  - pol, log, exp, radici,
- esercizi

Problema:

Nelle forme ind. dei polinomi x es.

$$n^{2} + \underbrace{7}_{=7n^0} - 5n^{3}$$

si raccoglie $n^{\boxed{\text{potenza + alta}}}$ (il termine "più grande")

(analog. se x es abbiamo

$$n^{3/2} + n^{1} - n^{5/4}$$)

Ma se abbiamo x es.

$$n - e^{n} + \log n - e^{-n}$$

$n \downarrow -\infty \qquad e^{n} \downarrow +\infty$

allora chi è la cr. "+ grande"

Definizione di o-piccolo

Definizione

Siano $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ Tali che

$b_n \neq 0 \ \forall n$ (oppure definiti)

Diremo che $(a_n)_n$ è un o-piccolo di $(b_n)_n$ per $n \to +\infty$ e scriveremo

$$a_n = o(b_n) \text{ per } n \to +\infty$$

se

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

es $a_n = n^2$ $\qquad b_n = n^7 + 1$

$a_n = o(b_n)$? per $n \to +\infty$ Sì

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n^7+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

es $a_n = \frac{1}{n^2}$ $\qquad b_n = \frac{1}{n}$ $\qquad a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$? Sì

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Confronto tra monomi:

$$\boxed{n^{\alpha} = o(n^{\beta}) \text{ se } \cancel{\text{solo}}\ \text{se } \alpha < \beta}$$

$\Updownarrow$ per $n \to +\infty$

$$\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}} = \frac{1}{n^{\beta-\alpha}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\beta - \alpha > 0$

$n^{\beta-\alpha} \to +\infty$

Proprietà dell' o-piccolo

Cons. $(a_n), (b_n)_n, (c_n)_n$ $(d_n)_n$

① Se $a_n = o(c_n)$ per $n \to +\infty$

$b_n = o(c_n)$ per $n \to +\infty$.

$\Rightarrow a_n \pm b_n = o(c_n) \quad n \to +\infty$

infatti

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n} = \overset{\text{x ip.} \to 0}{\frac{a_n}{c_n}} \pm \overset{\text{x ip.} \to 0}{\frac{b_n}{c_n}} \longrightarrow 0 \quad n \to +\infty$$

Scriveremo

qui c'è una succ. che è un o di c_n per $n \to +\infty$

$$o(c_n) \pm o(c_n) = o(c_n) \quad n \to +\infty$$

⚠ non valgono le regole usuali di semplificazione dei numeri reali

② Se $a_n = o(c_n)$ per $n \to +\infty$

$b_n = o(d_n)$ per $n \to +\infty$.

$\Rightarrow a_n \cdot b_n = o(d_n c_n) \quad n \to +\infty$

$o(c_n)\, o(d_n) = o(c_n d_n)$

③ Se $a_n = o(c_n)$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow a_n \cdot d_n = o(c_n d_n) \quad n \to +\infty$

4) Se $a_n = \underbrace{o}\left(\underbrace{o}(c_n)\right) \Rightarrow a_n = \underbrace{o}(c_n) \quad n \to +\infty$

OSS Scriveremo $\boxed{\frac{o(a_n)}{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$ (*)

infatti, dalla def a numeratore si ha una succ. che è un $o(a_n)$

allora $\frac{o(a_n)}{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

OSS Scrivere $a_n = o(1) \quad n \to +\infty$

significa che $\frac{a_n}{1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ cioè

$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Quozienti di polinomi usando l'o-piccolo

$\downarrow$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^7-2n+1}{n^2+5n}$

$$n^7-2n+1 = n^7+o(n^7)+o(n^7) = $$
$$= n^7+o(n^7)$$

$$n^2+5n = n^2+o(n^2)$$

$$\frac{n^7-2n+1}{n^2+5n} = \frac{n^7+o(n^7)}{n^2+o(n^2)} = \frac{n^{\cancel{7}\,5}\overbrace{\left(1+\frac{o(n^7)}{n^7}\right)}^{\to 1}}{\cancel{n^2}\underbrace{\left(1+\frac{o(n^2)}{n^2}\right)}_{\to 1}}$$

$\frac{o(n^7)}{n^7} \to 0$ per (*)

$\frac{o(n^2)}{n^2} \to 0$ per (*)

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

OSS Situazione tipica

$$\frac{c_n}{d_n} = \frac{a_n+o(a_n)}{b_n+o(b_n)} = \frac{a_n\overbrace{\left(1+\frac{o(a_n)}{a_n}\right)}^{\to 1}}{b_n\underbrace{\left(1+\frac{o(b_n)}{b_n}\right)}_{\to 1}} = \dots$$

si spera che $\frac{a_n}{b_n}$ + semplice di $\frac{c_n}{d_n}$

es $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+(-1)^n+n}{n^2+1}$

succ. limitata

oss che

$$(-1)^n = o(n^2) \quad \text{per } n\to+\infty$$

$$\frac{n^2+(-1)^n+n}{n^2+1} = \frac{n^2+\overbrace{o(n^2)+o(n^2)}^{=o(n^2)}}{n^2+o(n^2)} =$$

$$= \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{o(n^2)}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{o(n^2)}{n^2}\right)} \longrightarrow 1$$

Definizione di succ. equivalenti

Siano $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ succ reali
Diremo che

a_n è equiv. a b_n per $n \to +\infty$

se

$\exists (c_n)_n : \quad c_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ e

$a_n = c_n b_n \quad \forall n$ (definit.) oppure

e scriveremo

$a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$

OSS se $b_n \neq 0 \ \forall n$ allora $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{c_n \cancel{b_n}}{\cancel{b_n}} = c_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

allora

$$\boxed{\underset{n \to +\infty}{a_n \sim b_n} \iff \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \to +\infty} 1}$$

es $\quad a_n = n^2 + 2 \qquad b_n = n^2 + n + 1$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1 n^2 + 2}{1 n^2 + n + 1} \longrightarrow 1$$

(definit. $b_n \neq 0$) $\Rightarrow a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$

OSS (importante)

Se $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$

e $b_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ $\Longrightarrow$ $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

infatti x ip. $\exists c_n$ $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$:

$$a_n = c_n \cdot b_n \longrightarrow \ell$$
$$\quad\; \downarrow \quad \downarrow$$
$$\quad\; 1 \quad\; \ell$$

Idea :

partire da succ. a_n complicata

succ. + semplice

$$a_n = \dots\dots \sim \dots\dots = \dots \sim b_n$$

Prop. dell' $\sim$ $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ succ reali

Supp. $b_n \sim c_n$ $n \to +\infty$. Allora

(1) $a_n \cdot b_n \sim a_n \cdot c_n$

(2) Se $b_n \neq 0$ e $c_n \neq 0$

$$\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{a_n}{c_n}$$

⚠ non ci sono proprietà che coinvolgano la somma

$\Longrightarrow$ non si può usare l' $\sim$ con le somme

Se $a_n \sim c_n$
$b_n \sim d_n$ $\;\not\Longrightarrow\;$ $a_n + b_n \sim c_n + d_n$

controes.

$a_n = n + (-1)^n \qquad b_n = -n$

$a_n \sim n$ infatti $\qquad b_n \sim -n \quad \Rightarrow \quad a_n + b_n =$

$= (-1)^n$

$$\frac{a_n}{n} = \frac{n}{n} + \frac{(-1)^n}{n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 1$$

$\not\sim \; n \; -n = 0$

per $n \to +\infty$

<u>OSS</u> (<u>importante</u>) riprendiamo la situazione tipica

$$\frac{a_n + o(a_n)}{b_n + o(b_n)} = \frac{a_n \cdot \left(1 + \frac{o(a_n)}{a_n}\right)}{b_n \cdot \left(1 + \frac{o(b_n)}{b_n}\right)}$$

$\left(1 + \frac{o(a_n)}{a_n}\right) \to 1 \sim 1$, $\quad \left(1 + \frac{o(b_n)}{b_n}\right) \to 1 \sim 1$

possiamo usare l'$\sim$

$$\sim \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a_n}{b_n} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_n + o(a_n)}{b_n + o(b_n)} \sim \frac{a_n}{b_n}$$

succ che tende a zero

⚠ NON si può scrivere $\frac{1+o(1)}{1+o(1)} = 1$

$o(1)$ vuol dire solo che lì c'è una succ che tende a zero.

$$\left(\frac{1+o(1)}{1+o(1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \right)$$

fino a qua

Lezione 7
seconda parte

Riprendiamo i concetti di $\sim$ e di o piccolo:

Def $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$ $b_n \neq 0$ $\forall n$

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Def $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$ $b_n \neq 0$ $\forall n$

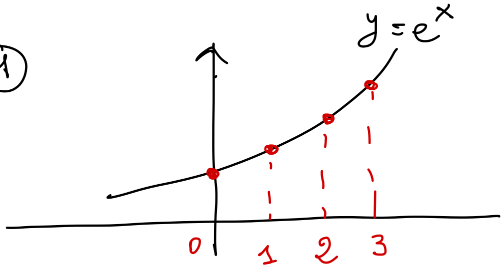
$$\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

$$\left(\text{Se } b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \right)$$

<u>non</u> si può usare con le somme

Limiti fondamentali

(1)



$a_n = e^n$

vale per l'esp. in base $a > 1$

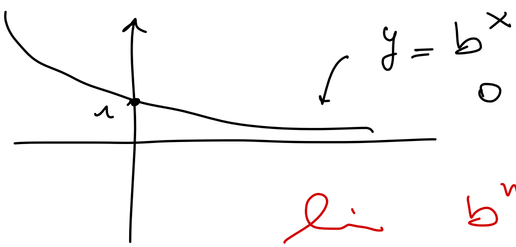
(analog. per $a_n = b^n$ con $b > 1$)

· $\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ ← $e^n \nearrow$ $\exists \lim_{n\to+\infty} e^n = \sup\{e^n\} = +\infty$

· Se $(a_n)_n$ è tale che $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Se } \ell \in \mathbb{R} & \Longrightarrow & e^{a_n} \to e^{\ell} \\ \text{Se } \ell = +\infty & \Longrightarrow & e^{a_n} \to +\infty \\ \text{Se } \ell = -\infty & \Longrightarrow & e^{a_n} \to 0 \end{array}\right\} \; n \to +\infty$$

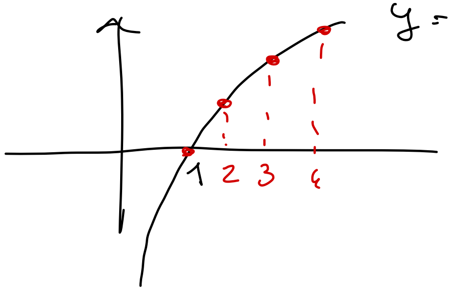
Analog. per b^{a_n} con $\underline{0 < b < 1}$



$0 < b < 1$

$\lim_{n\to+\infty} b^n = 0$

(2)



$y = \log x$ ← base $a > 1$, $\log_a x$

$a_n = \log n \qquad n > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \log n = +\infty$$

Se $(a_n)_n$ è tale che $a_n \to l \in [0, +\infty[$

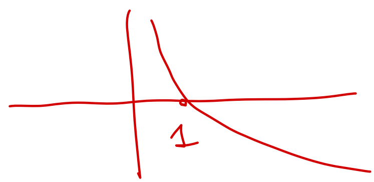
Se $l > 0 \Rightarrow \log(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \log l$

Se $l = +\infty \Rightarrow \log(a_n) \longrightarrow +\infty \quad n \to +\infty$

Se $l = 0 \Rightarrow \log(a_n) \longrightarrow -\infty \quad$ "

· Se $\log_b x \qquad b \in]0,1[$

$$\lim_{n \to +\infty} \log n = -\infty$$



<u>Problema</u>: Tutte forme indeterminate

$\dfrac{n}{\log n}$? | $\dfrac{n}{e^n}$? $\qquad \dfrac{e^n}{\log n}$?

del tipo "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

③ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} = 0 \quad \forall \alpha,\beta>0$$

scriveremo sempre (equivalente a ③)

$$(\log n)^\alpha = o(n^\beta) \text{ per } n\to+\infty \quad \forall \alpha,\beta>0$$

↑ confronto tra log e pol.

④ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad \forall a>1 \ \forall \alpha$$

$$n^\alpha = o(a^n) \text{ per } n\to+\infty \quad \forall a>1 \ \forall \alpha$$

↑ confronto tra exp e pol.

⇓

⑤ $$\frac{(\log n)^\alpha}{a^n} = \underbrace{\frac{(\log n)^\alpha}{n}}_{\to 0 \text{ x ③}} \cdot \underbrace{\frac{n}{a^n}}_{\to 0 \text{ per ④}} \quad n\to+\infty \quad \forall\alpha>0 \ \forall a>1$$

$$\Longrightarrow (\log n)^\alpha = o(a^n) \quad n\to+\infty \quad \forall \alpha>0 \ \forall a>1$$

Esempio

$a_n = \cos n$ (analog. $b_n = \operatorname{sen} n$)

(analog. $c_n = (-1)^n$)

succ. limitata

$\nexists \lim_{n \to +\infty} (\cos n)$

$\cos n = o(\text{polinomio grado} \geq 1)$ ...

⑥ radice k-sima

Se $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \geq 0$ allora

$$\sqrt[k]{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} \sqrt[k]{l} & \text{se } l \in \mathbb{R},\ l > 0 \\ +\infty & \text{se } l = +\infty \end{cases}$$

(no dim)

Esercizi

$n \to +\infty$

① $$\frac{n^2+n-2}{n^3-n+1} = \frac{n^2+o(n^2)}{n^3+o(n^3)} \sim \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^3}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\frac{a_n+o(a_n)}{b_n+o(b_n)} \sim \frac{a_n}{b_n}$$

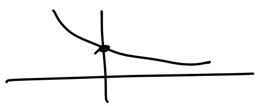
la succ di partenza è equiv. ad una succ che tende a zero $\Rightarrow$ la succ data tende a zero

② $$\frac{n^2+\log n+\underbrace{\operatorname{sen} n}_{\text{succ limitata}}}{n^2+e^{-n}} =$$

$$= \frac{n^2+o(n^2)}{n^2+o(n^2)} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$$\left(e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right.$$

$1/e < 1$



$\Rightarrow$ e^{-n} è limitata)

$\Rightarrow$ la succ data $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

exp. con base > 1

polinomi

log

succ limitate

③ $$\frac{2^n+3^n+(-1)^n}{5^n+\log n+\cos n}$$

(3) $\dfrac{2^n+3^n+(-1)^n}{5^n+\log n+\cos n} \sim$

per $n \to +\infty$

$$N = 2^n + 3^n + (-1)^n = 3^n + o(3^n) \sim 3^n$$

limitata

$$D = 5^n + \log n + \cos n = 5^n + o(5^n) + o(5^n)$$

$$= 5^n + o(5^n)$$

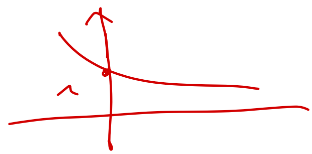
$$\sim 5^n$$

$\log n = o(5^n)$

$\cos n$ limitata $= o(5^n)$

$$\sim \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\frac{3}{5} < 1$



$\Rightarrow$ la succ data tende a zero

OSS (approssimazione per $n \to +\infty$)

$$\underbrace{n^2} + \log^7 n + \underbrace{n} + (-1)^n + \operatorname{sen} n$$
limitata

$$+ e^{-n} =$$
limitata

$$= n^2 + o(n^2) \qquad \text{per } n \to +\infty$$

ho approssimato la succ di partenza con una succ. più semplice $(= n^2)$ con errore che è un $o(n^2)$ (che $\to 0$ quando lo divido per n^2)

(b) $\sqrt[n]{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} ?$ $\qquad \sqrt[n]{n} \longrightarrow ?$

$$\sqrt[n]{2} = 2^{1/n} = e^{\log 2^{1/n}} = e^{\frac{\log 2}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^0 = 1$$

$\frac{\log 2}{n} \to 0$

$$\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\log n}{n}} \longrightarrow e^0 = 1$$

$\frac{\log n}{n} \to 0$

$$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\log n^{1/n}} =$$

$$= e^{\frac{1}{n} \log n}$$

esercizi

(4) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = ?$ "$\infty - \infty$"

I tentativo: raccogliamo n $n \to +\infty$

$$= \underbrace{\sqrt{n}}_{\to +\infty} \underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{\to 1} - 1 \right)}_{\to 0}$$

"$\infty \cdot 0$" ???

$(a-b)(a+b)$

II tentativo

$$\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\underbrace{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}_{+\infty}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$n \to +\infty$

(5) $\sqrt[7]{n+1} - \sqrt[7]{n}$??

vedremo + avanti per le funzioni

⑥ $\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^n \quad n \to +\infty$

$\frac{n^2+2}{n^2+1} \to 1$, $n \to +\infty$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

(*) $$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \quad \text{dove } a_n \to +\infty}$$

$$\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^n = \left(1+\frac{n^2+2}{n^2+1}-1\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{\cancel{n^2}+2-\cancel{n^2}-1}{n^2+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^n \quad \text{con } a_n = n^2+1$$

$$= \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+1}}_{\to\, e \text{ per } (*)}\Bigg]^{\frac{n}{n^2+1}} \longrightarrow e^0 = 1$$

$\frac{n}{n^2+1} \to 0$

per $n \to +\infty$

⑦ $a_n = \frac{n^2+\log n}{n+e^{-n}+(-1)^n} \qquad b_n = (-1)^n a_n$

successione

$$a_n = \frac{n^2+o(n^2)}{n+o(n)} \sim \frac{n^2}{n} = n \longrightarrow +\infty$$

$\Rightarrow a_n \to +\infty \quad$ per $n \to +\infty$

$$b_n = (-1)^n a_n = \begin{cases} a_n & n \text{ pari} \leftarrow \\ -a_n & n \text{ dispari} \leftarrow \end{cases}$$

$(-1)^n$: non ha limite; $a_n \to +\infty$

$\Rightarrow b_{2n} \to +\infty$

$b_{2n+1} \to -\infty$ $\Big\} \neq$ $\nexists \lim b_n$

Lez 7 parte Tieffo

⑧ $$a_n = \frac{((-1)^n + n)\cdot(\log n + 2^{-n} + n^2)}{1 - 2n^3} \sim$$

$N \sim n \cdot n^2$

$D = -2n^3 + 1 = -2n^3 + o(n^3) \sim -2n^3$

$(-1)^n + n = n + o(n) \sim n$

$(\log n + 2^{-n} + n^2) = n^2 + o(n^2) \sim n^2$

$\log n = o(n^2)$

2^{-n} limitata (xché $2^{-n} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

$$\sim \frac{\cancel{n}\cdot \cancel{n^2}}{-2\cancel{n^3}} = -\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad a_n \to -\frac{1}{2} \quad n \to +\infty$$

⑨ $$a_n = \frac{(e^n - 1)(\sqrt{n} + n)}{n^2 + 5^n}$$

$N = (e^n - 1)\cdot(\sqrt{n} + n) \sim e^n \cdot n$

$e^n - 1 = e^n + o(e^n) \sim e^n$

$\sqrt{n} + n = n + o(n) \sim n$

$D = n^2 + 5^n = 5^n + o(5^n) \sim 5^n$

$$\Rightarrow a_n \sim \frac{e^n n}{5^n} = \left(\frac{e}{5}\right)^n \cdot n$$

$\left(\frac{e}{5}\right)^n \to 0$ ($e/5 < 1$), $n \to +\infty$

$$\left(\frac{e}{5}\right)^n n = \frac{n \longrightarrow +\infty}{\left(\frac{5}{e}\right)^n \longrightarrow +\infty} \longrightarrow 0$$

$$\frac{5}{e} > 1$$

$$a > 1 \qquad \frac{a^n}{\text{pol grado} \geq 1} \longrightarrow +\infty \quad n \to +\infty$$

$\Downarrow$ $\times$ il Teor del reciproco

$$\frac{\text{pol grado} \geq 1}{a^n} \longrightarrow 0 \quad n \to +\infty$$

$\Downarrow$

$a_n \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$

(10) $a_n = \dfrac{\overbrace{(n^2+n^3)}^{\sim n^3} \; (\overbrace{\log n + n}^{=O(n)})^2}{2n^4 + \underbrace{2^{-n} + \operatorname{sen} n}_{}} \sim$

$\sim \dfrac{n^{\cancel{3}} \cdot \cancel{n^2}}{2\cancel{n^4}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ succ limitate

$(\log n + n)^2 = (n+o(n))^2 = (n+o(n))(n+o(n))$

$\sim n \cdot n = n^2$

$\Downarrow$

$a_n \longrightarrow +\infty$ per $n \longrightarrow +\infty$

(11) $a_n = \dfrac{(\log^3 n + 2(n+1)^2 + n) \cdot (3 + (-1)^n)}{(n+2)^4 + 3}$

$(\log^3 n + 2(n+1)^2 + n) =$

$= (\log^3 n + 2(n^2 + o(n^2)) + n) =$

$= (\log^3 n + \underline{\underline{2n^2}} + o(n^2) + n) =$

$= 2n^2 + o(n^2) \sim 2n^2$

$(n+2)^4 + 3 = n^4 + o(n^4) + o(n^4) \sim n^4$

$$a_n = \frac{\left(\log^3 n + 2(n+1)^2 + n\right)\cdot\left(3+(-1)^n\right)}{(n+2)^4+3} \sim$$

$$\sim \frac{2\cancel{n^2}}{n^{\cancel{4}}} \underbrace{\left(3+(-1)^n\right)}_{} $$

$\frac{2n^2}{n^4} \to 0$

$\left(3+(-1)^n\right) = \begin{cases} 4 & n \text{ pari} \\ 2 & n \text{ disp.} \end{cases}$

è limitato

$\underbrace{\qquad\qquad}$

$\downarrow$ Teor (casi particolari)

0

$\Downarrow$

$a_n \to 0$ per $n \to +\infty$

"Es. di Teoria" V/F

① la succ $a_n = \dfrac{5^n + \log n + \cos n}{6^n + \sin n + 2^n}\, e^{\frac{2n+2}{n+1}}$

è limitata? sì

$$\frac{5^n + \log n + \cos n}{6^n + \sin n + 2^n} \sim \frac{5^n}{6^n} = \left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad n \to +\infty$$

$$e^{\frac{2n+2}{n+1}} \longrightarrow e^2 \qquad \frac{2n+2}{n+1} \to 2$$

$$\Rightarrow \quad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

a_n è limitata

② Se $a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ per $n \to +\infty$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\dfrac{a_n}{n^3} \longrightarrow 0$ sì

$$\frac{a_n}{n^3} = \underbrace{\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}}}_{\to 0 \text{ x ip.}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{n^3} \longrightarrow 0$$

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{n^3} = \frac{1}{n^5} \to 0$$

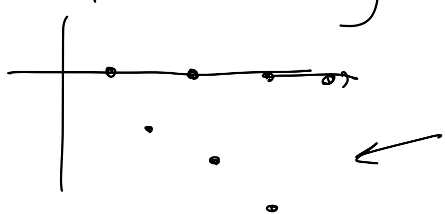
$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ -n & n \text{ dispari} \end{cases}$$

③ Se a_n non è limitata inferiormente

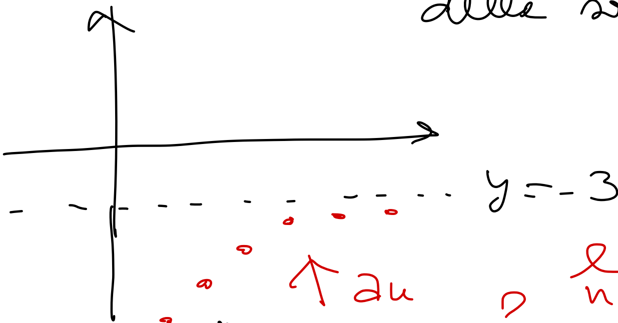
$\overset{?}{\Rightarrow}$ $\exists \lim_n a_n = -\infty$

no

sì $(\Leftarrow)$



(4) Se $a_n \nearrow \overset{?}{\Rightarrow} \underbrace{\exists \lim_{n\to+\infty}}_{\text{vero x il T. sull'}\exists\text{ limite delle succ monot.}} a_n \geq 0$ no



$\lim_{n\to+\infty} a_n = -3 < 0$?

(5) Se $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \overset{?}{\Rightarrow}$

- $\frac{(-1)^n}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sì
- $\frac{a_n+1}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ sì
- $a_n - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\leftarrow$ no

non ha limite

$$\left|\frac{(-1)^n}{a_n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|a_n|} = \frac{1}{|a_n|} \underset{a_n>0 \text{ definit.}}{=} \frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$a_n \to +\infty$

T. del reciproco

$$\Rightarrow \frac{(-1)^n}{a_n} \to 0$$

$$\frac{a_n+1}{a_n} = \frac{a_n + o(a_n)}{a_n} \sim \frac{a_n}{a_n} = 1$$

controesempio

$a_n = n^2$ $\quad n^2 - n = n^2 + o(n^2) \sim n^2 \longrightarrow +\infty \neq 0$