Глава 3.1. Паросочетания, независимые множества и покрытия

Билет 1. Независимые множества, паросочетания и покрытия в графе. Теорема Галлаи.

1. Множество вершин $U \subset V(G)$ называется **независимым**, если никакие две его вершины не смежны.

> *Обозначение*: $\alpha(G)$ - **количество вершин** в **максимальном** независимом множестве графа G.

2. Множество рёбер $M \subset E(G)$ называется **паросочетанием**, если никакие два его ребра не имеют общей вершины.

> *Обозначение*: $\alpha'(G)$ - **количество рёбер** в **максимальном** паросочетании графа G.

3. Будем говорить, что множество вершин $W \subset V(G)$ **покрывает** ребро $e \in E(G)$, если существует вершина $w \in W$, инцидентная e.

4. Будем говорить, что множество рёбер $F \subset E(G)$ **покрывает** вершину $v \in V(G)$, если существует ребро $f \in F$, инцидентное v .

5. Паросочетание M графа G называется совершенным, если оно покрывает все вершины графа.

6. Множество вершин $W \subset V(G)$ называется вершинным покрытием, если оно покрывает все рёбра графа.

> *Обозначение*: $\beta(G)$ **количество вершин** в **минимальном** вершинном покрытии графа G .

7. Множество рёбер $F \subset E(G)$ называется рёберным покрытием, если оно покрывает все вершины графа.

> *Обозначение*: $\beta'(G)$ **количество рёбер** в **минимальном** рёберном покрытии графа G .

Лемма 1

1. $U \subset V(G)$ – независимое множество, если и только если $V(G) \setminus U$ – вершинное покрытие.
2. $\alpha(G) + \beta(G) = v(G)$. (Верно для любого графа).

> *Повторение*: $\alpha(G)$ - **количество вершин** в **максимальном** независимом множестве графа G.
> *Повторение*: $\beta(G)$ **количество вершин** в **минимальном** вершинном покрытии графа G

Доказательство

$U \subset V(G)$ – максимальное независимое множество, если и только если $V(G) \setminus U$ – минимальное вершинное покрытие

Теорема Галлаи

(T. Gallai, 1959) Пусть G – граф с $\delta(G) > 0$. Тогда $\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$

> *Повторение*: $\delta(G)$ - минимальная степень вершины графа G.
> *Повторение*: $\alpha'(G)$ - **количество рёбер** в **максимальном** паросочетании графа G.
> *Повторение*: $\beta'(G)$ **количество рёбер** в **минимальном** рёберном покрытии графа G .

Доказательство (сначала $\leq$ потом $\geq$)

$\leq$

- Пусть M – **максимальное паросочетание**, U – множество **не покрытых** M вершин графа, тогда $|U| = v(G) - 2\alpha'(G)$.
- Так как $\delta(G) > 0$, можно выбрать множество F из $|U|$ рёбер, покрывающее U.
- Тогда $M \cup F$ – покрытие, следовательно, $\beta'(G) \leq |M \cup F| = \alpha'(G) + v(G) - 2\alpha'(G)$, откуда $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq v(G)$.

$\geq$

- Пусть L – минимальное рёберное покрытие $(|L| = \beta'(G))$, а $H = (V(G), L)$.

> *Обьяснение*: $H = (V(G), L)$ - граф H образован из вершин графа G и ребёр покрытия L.

- Так как в графе H нет вершин степени 0, в каждой компоненте графа H можно выбрать по ребру, в результате получится паросочетание N в графе H (а значит, и в G).
- Следовательно, $\alpha'(G) \geq |N| = c(H)$ и $\beta'(G) = |L| = e(H) \geq v(H) - c(H) = v(G) - c(H) \geq v(G) - \alpha'(G)$, откуда следует $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq v(G)$.

> *Повторение*: $c(H)$ - число компонент связности графа H

- Получаем, что $\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$.

Билет 2. Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.

Пусть M — паросочетание в графе G.

1. Назовём путь M-***чередующимся***, если в нём чередуются рёбра из M и рёбра, не входящие в M.
2. Назовём M-чередующийся путь M-***дополняющим***, если его начало и конец не покрыты паросочетанием M.

> *Уточнение:* в этот путь могут входить и не все рёбра из M

• В M-***дополняющем*** пути нечётное число рёбер, причем рёбер из паросочетания M на одно меньше, чем рёбер, не входящих в M

Теорема Бержа

(C. Berge, 1957) Паросочетание M в графе G является *максимальным* тогда и только тогда, когда нет M-***дополняющих*** путей.

Доказательство

$\Rightarrow$

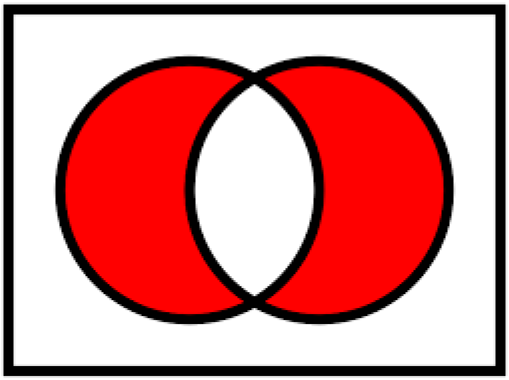
- Пусть в графе G существует M-**дополняющий путь** $S = a_1 a_2 \dots a_{2k}$.
- Тогда **заменим** входящие в M рёбра $a_2 a_3, \dots, a_{2k-2} a_{2k-1}$ на не входящие в M рёбра $a_1 a_2, a_3 a_4, \dots, a_{2k-1} a_{2k}$, и тем самым получим **большее паросочетание**. Противоречие.

$\Leftarrow$

- Пусть M — **не максимальное** паросочетание, тогда рассмотрим максимальное паросочетание M', $|M'| > |M|$.
- Пусть $N = M \Delta M'$, $H = G(N)$. Для любой вершины $v \in V(H)$ мы имеем $d_H(v) \in \{1, 2\}$, следовательно, H — объединение нескольких путей и циклов.

> *Объяснение*: H — это подграф графа G, порождённый рёбрами из N

- В каждом из этих путей и циклов рёбра паросочетаний M и M' **чередуются**. Так как рёбер из M' в $E(H)$ больше, хотя бы одна компонента P графа H — **путь нечётной длины**, в котором больше рёбер из M'. Легко понять, что P — это M**-дополняющий** путь. Противоречие.

> *Объяснение*: $M \Delta M'$ - это симметрическая разность: $M \Delta M' = (M \setminus M') \cup (M' \setminus M)$
>
> 

Билет 3. Теорема Холла.

- Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф с долями V_1 и V_2.

(P. Hall, 1935.) В двудольном графе G есть паросочетание, покрывающее все вершины доли V_1, **если и только если** для **любого** множества $U \subset V_1$ выполняется $|U| \leq |N_G(U)|$.

> *Повторение*: $|N_G(U)|$ окрестность множества вершин U — множество всех вершин графа G , смежных с вершинами из U.
> *Повторение*: Граф называется **двудольным**, если его вершины можно
> разбить на два множества (т.е. две доли), внутри которых **нет** рёбер.

• Условие о размере окрестности из теоремы Холла мы
будем называть **условием Холла** для доли V_1.

Доказательство

$\Rightarrow$
Очевидно, так как концы рёбер паросочетания, покрывающих вершины из U — разные вершины из $N_G(U)$.
$\Leftarrow$
Докажем по индукции по количеству вершин в графе:
База для $|V_1| = 1$ очевидна.

Индукционный переход: Предположим, что для меньшего чем G графа утверждение уже доказано. Разберём два случая.

Случай 1:

Существует такое непустое множество $A \subsetneq V_1$, что $|A| = |N_G(A)|$.

- Введём обозначения $B = N_G(A)$, $A' = V_1 \setminus A$, $B' = V_2 \setminus B$. Пусть $G_1 = G(A \cup B)$, $G_2 = G(A' \cup B')$.
- Очевидно, для двудольного графа G_1 и его доли A выполняется условие Холла. По индукционному предположению в графе G_1 существует паросочетание M_1, покрывающее A.
- Проверим условие Холла для двудольного графа G_2 и его доли A'. Рассмотрим $U \subset A'$. Тогда $|U| + |A| = |U \cup A| \leq |N_G(U \cup A)| = |N_{G_2}(U) \cup B| = |N_{G_2}(U)| + |B| = |N_{G_2}(U)| + |A|$, откуда следует $|U| \leq |N_{G_2}(U)|$.
- Значит, в графе G_2 существует паросочетание M_2, покрывающее все вершины из A'. Тогда $M_1 \cup M_2$ – паросочетание в G , покрывающее V_1.

Случай 2:

Для любого непустого множества $A \subsetneq V_1$ выполняется $|N_G(A)| > |A|$.

- Рассмотрим произвольную вершину $a \in V_1$ и смежную с ней вершину $b \in V_2$.
- Пусть $G' = G - a - b$. Проверим условие Холла для двудольного графа G' и его доли $V_1 \setminus a$. Для любого множества $A \subset V_1 \setminus \{a\}$ выполняется $|A| \leq |N_G(A)| - 1 \leq |N_G(A) \setminus \{b\}| = |N_{G'}(A)|$.
- Поэтому в графе G' существует паросочетание, покрывающее $V_1 \setminus \{a\}$. Вместе с ребром ab получаем искомое паросочетание.

Билет 4. Следствия из теоремы Холла: паросочетания в двудольном графе, где степени одной доли больше чем другой, а также в регулярном двудольном графе.

Следствие 1

В двудольном графе $G = (V_1, V_2, E)$ все вершины из V_1 имеют степени не меньше k, а все вершины V_2 имеют степени не больше k. Тогда есть паросочетание, покрывающее V_1.

Доказательство

- Проверим условие Холла для доли V_1.
  Пусть $A \subset V_1(G)$, тогда из вершин A выходит не менее чем $k \cdot |A|$ рёбер к вершинам из $N_G(A)$, а в каждую вершину $b \in N_G(A)$ входит не более, чем k рёбер из вершин множества A.
- Таким образом,
  $k|A| \le e_G(A, N_G(A)) \le k|N_G(A)|$,
  откуда $|A| \le |N_G(A)|$

> *Обозначение*: $e_G(A, N_G(A))$ - количество рёбер, соединяющих вершины множества A с вершинами множества $N_G(A)$

Следствие 2

(D. König, 1916.) Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ – регулярный двудольный граф степени k. Тогда G есть объединение k своих совершенных паросочетаний.

Доказательство

- По Следствию 1 в G существует паросочетание M, покрывающее V_1.
- Так как степени всех вершин равны по k, а каждое ребро соединяет V_1 и V_2, мы имеем $k|V_1| = e(G) = k|V_2|$.
- Следовательно, $|V_1| = |V_2|$. Поэтому, паросочетание M покрывает и долю V_2, то есть, M – совершенное.
- $G - M$ – регулярный двудольный граф степени $k-1$. Продолжая выделять совершенные паросочетания, мы разобьём граф G на k паросочетаний.

Билет 5. Теорема о гареме.

В одной далекой стране проживают юноши $\{A_1, \ldots, A_n\}$.
Для каждого $i \in \{1, ..., n\}$, юноша A_i хочет завести гарем из k_i знакомых ему девушек (естественно, $k_i \in \mathbb{N}$).
Они могут это одновременно сделать тогда и только тогда, когда для любого множества юношей количество знакомых хотя бы одному из них девушек не меньше, чем сумма желаемых ими размеров гаремов.

Доказательство

- Построим двудольный граф $G = (V_1, V_2, E)$.
- Вершины доли V_1 соответствуют юношам — каждому A_i соответствует k_i вершин $a_{i,1}, \ldots, a_{i,k_i}$ (назовем их копиями A_i).
- Вершины доли V_2 соответствуют девушкам. Каждая вершина $a_{i,j} \in V_1$ соединена в точности с теми девушками из V_2, с которыми знаком юноша A_i.
- Проверим, что для доли V_1 выполнено условие Холла.
- Пусть $M \subset V_1$, а $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ — все юноши, чьи копии есть в M.
- Тогда $|N_G(M)| \geq k_{i_1} + \cdots + k_{i_m}$ (в $N_G(M)$ входят все девушки, знакомые с $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$).
- В то же время, $|M| \leq k_{i_1} + \cdots + k_{i_m}$ (в M не может входить больше копий $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$, чем их существует).
- Таким образом, в G есть паросочетание, покрывающее V_1.
- Для каждого A_i девушки, входящие в пары с его копиями, образуют гарем желаемого размера.

Билет 6. Теорема Кёнига и ее следствие.

Теорема Кёнига

(D. König, 1931.) Пусть G — двудольный граф. Тогда $\alpha'(G) = \beta(G)$

> *Повторение*: $\alpha'(G)$ - **количество рёбер** в **максимальном** паросочетании графа G.
> *Повторение*: $\beta(G)$ **количество вершин** в **минимальном** вершинном покрытии графа G
> *Повторение* [билет 1]

Доказательство (сначала $\leq$, потом $\geq$)

$\leq$
Так как рёбра паросочетания не имеют общих концов, то в любом вершинном покрытии не меньше вершин, чем в любом паросочетании рёбер. Следовательно, $\alpha'(G) \leq \beta(G)$.

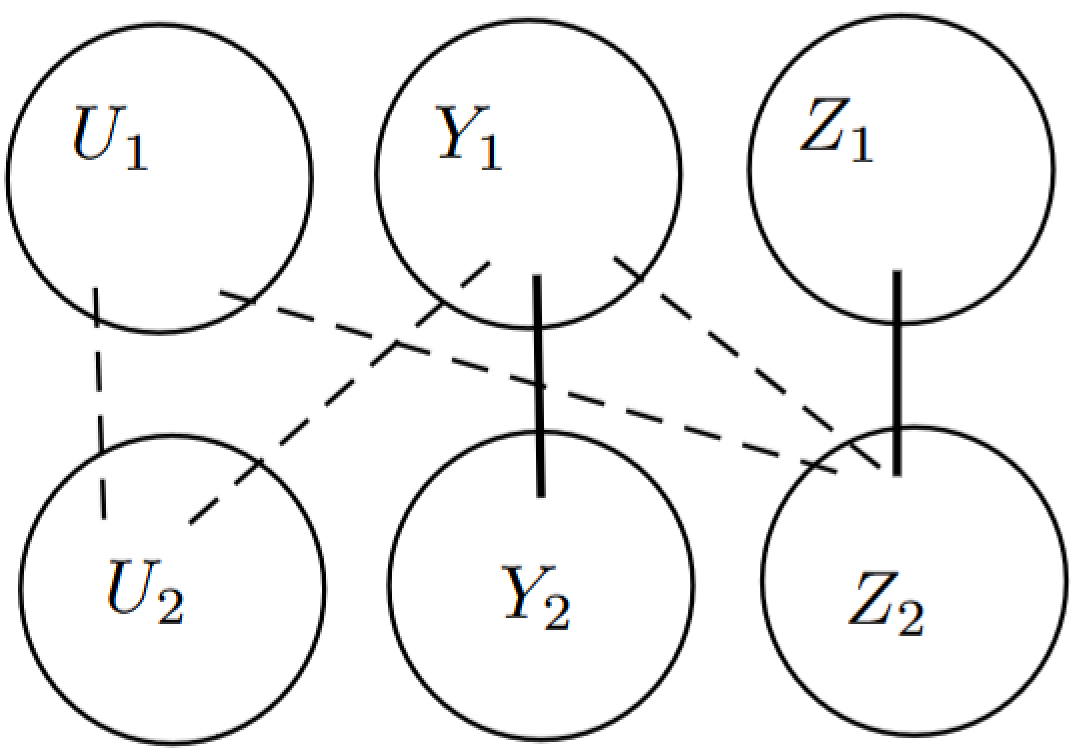
$\geq$

- Пусть M — максимальное паросочетание в графе G,
  U_1 — множество всех непокрытых этим паросочетанием вершин V_1,
  U_2 — множество непокрытых M вершин V_2.
- Разобьём все покрытые паросочетанием M вершины V_1 на два множества: Y_1 — те вершины, до которых можно дойти от U_1 по M-чередующимся путям, а Z_1 — вершины, до которых дойти таким образом нельзя.

- Разобьём все покрытые паросочетанием M вершины $V_2(G)$ на два множества: Y_2 – те вершины, до которых можно дойти от U_1 по M-чередующимся путям, а Z_2 – вершины, до которых дойти таким образом нельзя
- Выясним, как должны проходить рёбра паросочетания M и остальные рёбра графа G между определенными выше множествами вершин. На рисунке сплошными линиями показаны рёбра паросочетания M, пунктирными линиями – невозможные рёбра.
  Далее мы объясним, почему граф устроен именно так.
- Любой M-чередующийся путь приходит в вершины множества Y_1 по ребрам из M, поэтому предыдущая вершина перед Y_1 на таком пути должна лежать в Y_2.
- Рёбра паросочетания M не могут соединять Y_2 с Z_1 (иначе был бы M-чередующийся путь от U_1 до Z_1).
  Следовательно, паросочетание M соединяет друг с другом Y_1 и Y_2 а также Z_1 и Z_2

Докажем, что $B = Z_1 \cup Y_2$ — вершинное покрытие.

- $E_G(U_1 \cup Y_1, Z_2) = \varnothing$. (Рёбра не из M не могут соединять вершины из $U_1 \cup Y_1$ с вершинами из Z_2: иначе был бы M-чередующийся путь от U_1 до Z_2)
- $E_G(U_1 \cup Y_1, U_2) = \varnothing$. (Если бы такое ребро существовало, то существовал бы M -дополняющий путь, что по теореме Бержа для максимального паросочетания M невозможно.)
  Так как B – вершинное покрытие и $|M| = |B|$, имеем $\alpha'(G) \geq \beta(G)$.



Следствие из теорем Кенига и Галлаи

Пусть G – двудольный граф с $\delta(G) > 0$. Тогда $\alpha(G) = \beta'(G)$.

Доказательство

- По Теореме Кёнига для двудольного графа выполняется соотношение $\alpha'(G) = \beta(G)$.
- По Лемме 1 для любого графа
  $\alpha(G) + \beta(G) = v(G)$
- По Теореме Галлаи , так как $\delta(G) > 0$, то
  $\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$
  Решив систему, следует, что $\alpha(G) = \beta'(G)$.

Билет 7. Паросочетания с предпочтениями. Теорема Гэйла-Шепли.

> Иногда вершинам не всё равно, с какими вершинами “вступать в паросочетание”.
> Предположим, что каждая вершина имеет список предпочтений, то есть, упорядочивает инцидентные ей рёбра.
> Построим такое паросочетание M (не обязательно максимальное), что в нём не будет ребра $e = ab$, которое обе вершины a и b хотели бы поменять на свободные рёбра. Дадим строгие определения

1. Пусть для каждой вершины $v \in V(G)$ задано линейное отношение (нестрогого) порядка $\leq_v$ на множестве всех инцидентных v рёбер из $E(G)$. Тогда $\leq = \{\leq_v\}_{v \in V(G)}$ – **множество предпочтений**.

> Например, если у вершины v есть рёбра e_1, e_2,e_3, то она может сказать, что $e_1 \leq_v e_2 \leq_v e_3$, где e_1 наименее предпочтительное ребро, а e_3 — наиболее

2. Паросочетание M называется стабильным для множества предпочтений $\leq$, если для любого ребра $f \notin M$ существует такое ребро $e \in M$, что e и f имеют общий конец v и $f \leq_v e$.

> *Объяснение* $f \leq_v e$: вершина v предпочитает ребро e, уже включённое в паросочетание, ребру f, которого нет в паросочетании.
>
> Ни одно ребро $f \notin M$ не может “разрушить” стабильность, потому что для вершины v, которая соединена с f, уже существует ребро $e \in M$, которое для этой вершины лучше (или равно по предпочтению), чем f, а значит ребро f не может быть включёно в стабильное паросочетание.

Stable marriage theorem (теорема о деревенских свадьбах)

(D. Gale, L. Shapley, 1962.) Пусть G — двудольный граф. Тогда для любого множества предпочтений $\leq$ в графе G существует стабильное паросочетание.

Доказательство

- Будем считать вершины **одной доли мужчинами**, а вершины **другой доли — женщинами**, а наше паросочетание будет состоять из семейных пар. **Изначально наше паросочетание пусто**, оно будет изменяться пошагово.

Опишем шаг алгоритма изменения паросочетания.

- Сначала действуют **мужчины**:
  каждый **неженатый** (то есть, не покрытый паросочетанием) **мужчина выбирает женщину**, которая ему больше всех нравится (то есть, наивысшую в своем предпочтении) из тех, **которым он еще не делал предложения** (если такие есть), после чего делает ей предложение.
- Затем действуют **женщины**:
  каждая из них **рассматривает всех мужчин**, кто сделал ей предложение и нравится ей строго больше, чем ее муж (если он есть). Если это множество непусто, она **выбирает из них того, кто нравится ей больше всего** (если таких несколько, то любого из них) и выходит за него замуж (вместо ее прежнего мужа, если он был) ~~ш-общительная~~.
- Конечность алгоритма очевидна: никакой мужчина **не делает предложение одной женщине дважды**. Пусть в результате получилось паросочетнание M.

Докажем, что M стабильно.

- Рассмотрим любое ребро $uw \in E(G) \setminus M$ (где u — мужчина).
- Если u делал предложение w , то
  - либо w ему отказала,
  - либо сначала приняла предложение, но потом бросила,
- Значит w нашла мужа u', который ей нравится не меньше, чем u (то есть, существует ребро $u'w \in M$, для которого $uw \leq_w u'w$).
- Если же u не делал предложения w , то в процессе алгоритма нашел жену w', которая нравится ему не меньше, чем w (то есть, существует ребро $uw' \in M$, для которого $uw \leq_u uw'$).
- Таким образом, построеннное паросочетание стабильно по определению.

Билет 8. Теорема Татта о совершенном паросочетании.

> *Обозначение*: $o(G)$ - количество нечётных компонент связности произвольного графа G (то есть, компонент связности, содержащих нечётное число вершин).

Теорема Татта

(W. T. Tutte, 1947.) В графе G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subset V(G)$ выполняется условие $o(G{-}S) \leq |S|$

> *Повторение* Совершенное паросочетание M графа G - покрывающее все вершины графа.
> *Повторение* билет 1

Доказательство

$\Rightarrow$

- Необходимость условия почти очевидна.
- Пусть $S \subset V(G)$, а M — совершенное паросочетание.
- Тогда одна из вершин каждой нечетной компоненты связности графа $G{-}S$ должна быть соединена с вершиной из S ребром паросочетания M и все эти вершины — разные!

> *Объяснение*: должна быть соединена с вершиной из S (*в нечетной компоненте связности нечётное число вершин* $\Rightarrow$ *останется ровно одна вершина, непокрытая паросочетанием*),
> *Объяснение*: все эти вершины разные (*так как паросочетание совершенное*)

- А значит должно выполняться $o(G{-}S) \leq |S|$

$\Leftarrow$

- Предположим, что граф удовлетворяет условию, но не имеет совершенного паросочетания. Тогда, в частности, $o(G - \varnothing) \leq |\varnothing| = 0$, то есть, $v(G)$ чётно.
- Пусть G^* — максимальный надграф G на том же множестве вершин, не имеющий совершенного паросочетания. Мы построим совершенное паросочетание в G^* и придем к противоречию.
- Для любого $S \subset V(G)$ очевидно, выполняется неравенство $o(G^*{-}S) \leq o(G{-}S) \leq |S|$.
- Пусть $U = \{u \in V(G) : d_{G^*}(u) = v(G){-}1\}$. Очевидно, G^* — не полный граф, поэтому $U \neq V(G)$.

> *Объяснение*: из-за $d_{G^*}(u) = v(G){-}1$ мы получили, что вершины U смежны всем вершинам подграфа G

Докажем, что граф $G^* - U$ – объединение нескольких несвязанных друг с другом полных графов

Поддоказательство

- Предположим, что это не так. Тогда существуют такие вершины x, y , $z \in V(G) \setminus U$, что xy, $yz \in E(G^*)$, но $xz \notin E(G^*)$.
- Так как $y \notin U$, то существует такая вершина $w \notin U$, что $yw \notin E(G^*)$.
- Ввиду максимальности графа G^* существует совершенное паросочетание M_1 в графе $G^* + xz$ и совершенное паросочетание M_2 в графе $G^* + yw$. Так как в графе G^* нет совершенного паросочетания, $xz \in M_1$ и $yw \in M_2$.
- Пусть $H = (V(G), M_1 \Delta M_2)$. Очевидно, граф H – несвязное объединение чётных циклов, в каждом из которых чередуются рёбра паросочетаний M_1 и M_2.

> *Объяснение*: $M_1 \Delta M_2$ - симметрическая разность

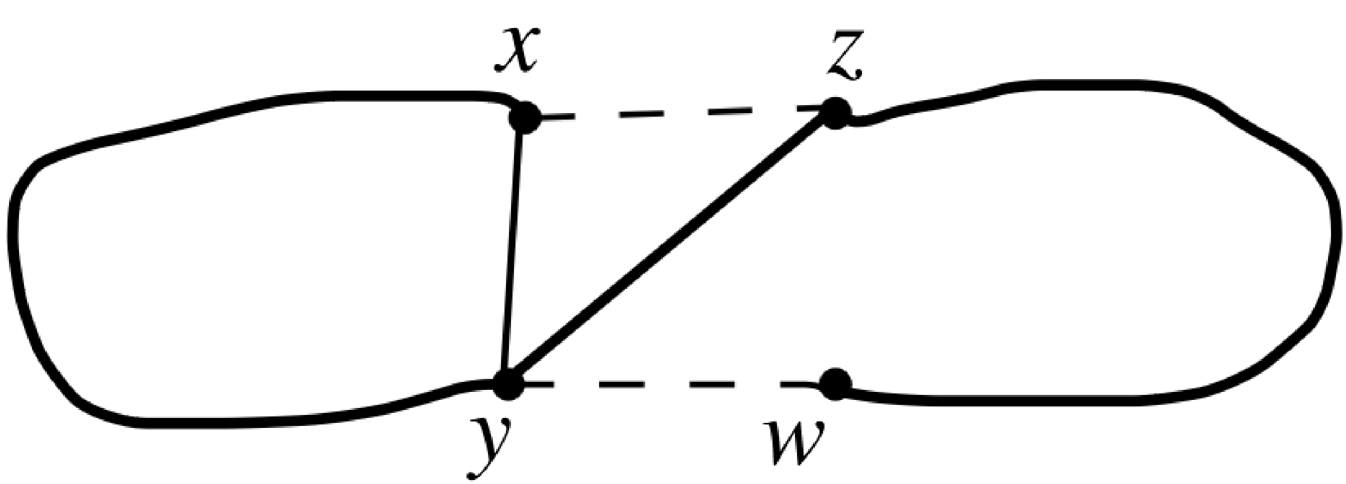
- Рёбра xz и yw принадлежат ровно одному из паросочетаний M_1 и M_2, и потому лежат в $E(H)$.
- На вершинах любой компоненты связности графа H существует совершенное паросочетание с рёбрами из M_1 и совершенное паросочетание с рёбрами из M_2.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Рёбра xz и yw лежат в разных компонентах C_1 и C_2 графа H

- Тогда на вершинах C_1 мы выберем рёбра паросочетания M_2, на вершинах C_2 мы выберем рёбра паросочетания M_1, а в остальных компонентах графа H – любое из этих паросочетаний.
- В итоге получится совершенное паросочетание графа G^*, противоречие.

Случай 2. Рёбра xz и yw лежат в одной компоненте C графа H.



- В силу симметричности x и z можно считать, что вершины расположены в чётном цикле C в порядке $ywzx$ (см. рисунок).
- Рассмотрим простой путь $P = xCyzCw$, состоящий из двух дуг цикла C и ребра yz. Тогда $V(P) = V(C)$ и $E(P) \subset E(G^*)$. Следовательно, существует совершенное паросочетание $M_C \subset E(G^*)$ на вершинах компоненты связности W.
- В остальных компонентах графа H выберем рёбра любого из паросочетаний M_1 и M_2. В итоге получится совершенное паросочетание графа G^*, противоречие.

Вернёмся к основному доказательству

- Граф $G^* - U$ есть объединение нескольких несвязанных полных графов. В силу условия, среди них не более чем $|U|$ имеет нечетное число вершин.
- В каждой чётной компоненте графа $G^* - U$ мы построим полное паросочетание, в каждой нечётной компоненте — паросочетание, покрывающее все вершины, кроме одной, а оставшуюся вершину соединим с вершиной из U (при этом мы используем различные вершины множества U: их хватит ввиду $o(G^* - U) \leq |U|$).
- Наконец, мы разобём на пары оставшиеся непокрытыми вершины множества U: это можно сделать, так как каждая из этих вершин смежна в графе G^* со всеми остальными. Таким образом, мы получили совершенное паросочетание в графе G^*, противоречие.

Билет 9. Теорема Петерсена о совершенном паросочетании в регулярном графе степени 3.

1. **Кубический граф** - граф, все вершины которого имеют степень 3.
2. **Мост графа** — ребро, не входящее ни в один цикл

Теорема Петерсена

(J. Petersen, 1891.) Пусть G — связный кубический граф, в котором не более двух мостов. Тогда в графе G есть совершенное паросочетание.

Доказательство

- Предположим, что совершенного паросочетания в G нет. Тогда по Теореме Татта существует такое множество $S \subset V(G)$, что $o(G - S) > |S|$.
- Так как в кубическом графе четное число вершин, то $S \neq \varnothing$ и $o(G - S) \equiv |S| \pmod 2$.

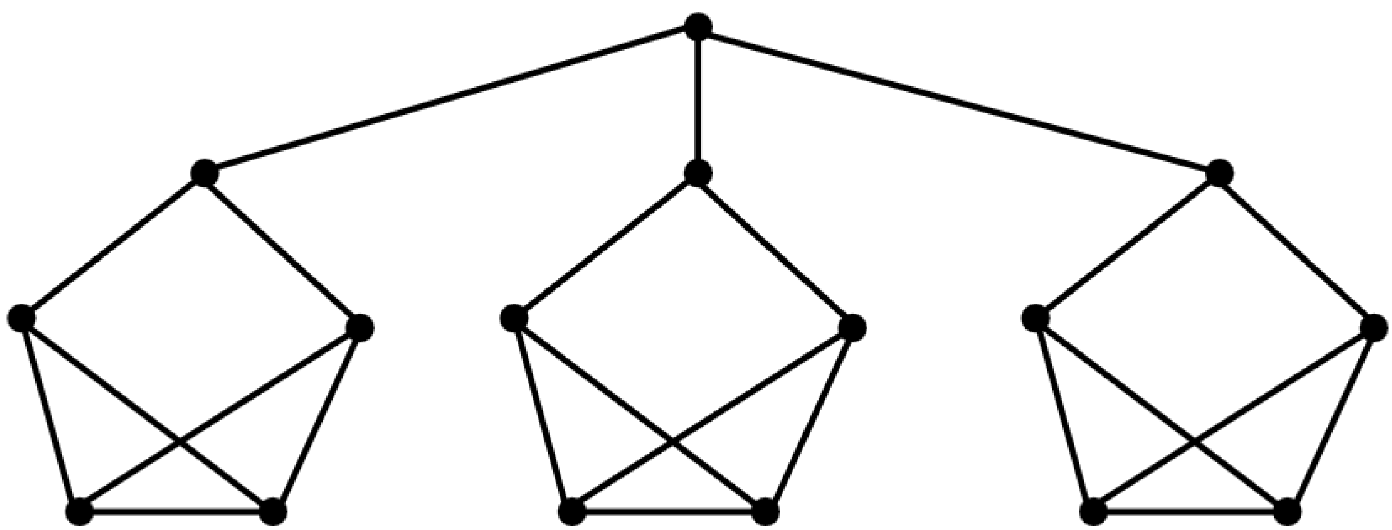
> *Объяснение*: в кубическом графе четное число вершин по лемме о рукопожатиях

- Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — все нечётные компоненты связности графа $G{-}S$. Тогда $n \geq |S| + 2$.
- Пусть $m_i = e_G(U_i, S)$. Тогда $m_i = (\sum_{v \in U_i} d_G(v)) {-} 2e(G(U_i)) = 3|U_i| {-} 2e(G(U_i))$ — очевидно, нечетно.

> *Объяснение:* Число рёбер, соединяющих U_i с S равно общему числу рёбер, инцидентных вершинам U_i, без внутренних рёбер.
> *Объяснение:* $\sum_{v \in U_i} = 3|U_i|$, так как граф кубический

- Так как не более чем два ребра графа G — мосты, то не более, чем два числа из $m_1, \ldots, m_n$ равны 1, а все остальные — не менее, чем 3.
- Тогда $3|S| = \sum_{v \in S} d_G(v) \geq \sum_{i=1}^{n} m_i \geq 3(n{-}2) + 2 = 3n{-}4 \geq 3(|S| + 2){-}4 > 3|S|$, противоречие.

Результат теоремы Петерсона в некотором смысле наилучший возможный.
Пример связного кубического графа с тремя мостами, у которого нет совершенного паросочетания:



Билет 10. Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в 2k-регулярном графе и ее следствия о регулярных факторах.

1. k-**фактором** графа G называется его остовный регулярный подграф степени k.

> *Повторение*: остовный подграф - покрывает все вершины графа
> *Повторение*: регулярный граф - все степени вершин равны

> Совершенное паросочетание — это 1-фактор.

Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в 2k-регулярном графе

(J. Petersen, 1891.) У регулярного графа степени $2k$
есть 2-*фактор*.

Доказательство

- Граф G имеет эйлеров цикл. Обойдем его в некотором направлении и ориентируем каждое ребро в направлении обхода. Тогда в каждую вершину G входит и выходит ровно по k стрелок.

> *Повторение*: Эйлеров цикл - по всем рёбрам ровно 1 раз
>
> *Повторение*: Условие эйлерова цикла - все степени вершин чётны

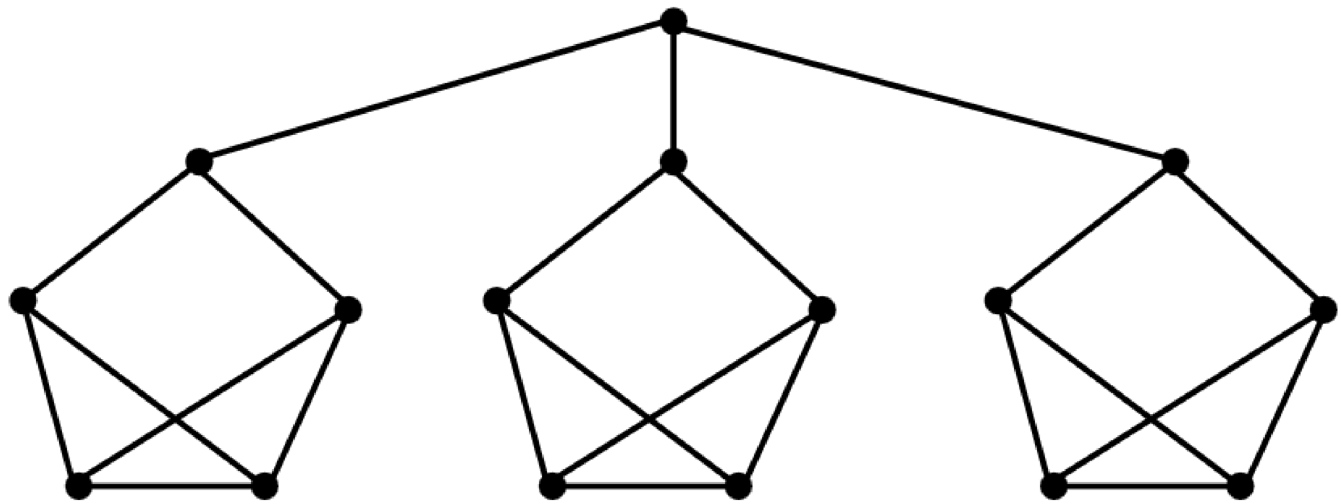
- Построим граф G^* следующим образом. Разделим каждую вершину $v \in V(G)$ на две вершины v_1 и v_2.
- Если ребро $xy \in E(G)$ ориентировано в обходе Эйлерова цикла от x к y , то проведем в графе G^* ребро x_1y_2.
- Таким образом, существует биекция $\varphi : E(G) \to E(G^*)$,
  заданная правилом $\varphi(xy) = x_1y_2$.
- G^* — регулярный двудольный граф степени k с долями
  $\{v_1\}_{v\in V(G)}$ и$\{v_2\}_{v\in V(G)}$.
- По 2 следствию из теоремы Холла в графе G^* есть совершенное паросочетание M^*.
- Пусть $M = \varphi^{-1}(M^*)$ (M состоит из рёбер графа G — прообразов рёбер M^* при биекции φ).
- Для любой вершины $x \in V(G)$ каждая из вершин $x_1, x_2 \in V(G^*)$ инцидентна ровно одному ребру из M^*.
- Поэтому x инцидентна ровно двум рёбрам из M, то есть, M — это 2-*фактор* графа G .

Следствия о регулярных факторах

1. Регулярный граф степени $2k$ есть объединение k своих
   2-факторов.
2. Для любого $r \le k$ регулярный граф степени $2k$ имеет
   $2r$-фактор.

> Все остальные утверждения вида “у регулярного графа степени k есть фактор степени r ” без дополнительных условий на граф неверны.

Пример графа, на котором подобные утверждения не будут работать:



Билет 11. Теорема Томассена о почти регулярном факторе почти регулярного графа.

(C. Thomassen, 1981.) Пусть G – граф, степени всех вершин которого равны k или $k+1$, а $r<k$. Тогда существует остовный подграф H графа G, степени всех вершин которого равны либо r, либо $r+1$.

Доказательство

(Докажем по индукции спуском по r вниз)
База для $r=k$ очевидна, в этом случае подойдет $H=G$
Индукционный переход $r \to r{-}1$

- Пусть граф G имеет остовный подграф F, степени вершин которого равны r или $r+1$.
- Начиная с графа F , пока это возможно, будем производить следующую операцию: удалять ребро, соединяющее две вершины степени $r+1$. В результате получится подграф F' графа F , степени вершин которого равны r или $r+1$, в котором никакие две вершины степени $r+1$ не смежны.
- Пусть V_{r+1} – множество всех вершин степени $r+1$ в графе F'. Можно считать, что $V_{r+1} \neq \varnothing$, иначе граф F' нам подходит и теорема доказана.
- Пусть $V_r = V(G) \setminus V_{r+1}$, а B – двудольный граф с долями V_{r+1} и V_r , ребра которого – это $E_{F'}(V_{r+1}, V_r)$.
- Для каждой вершины $x \in V_{r+1}$ мы имеем $d_B(x) = r+1$, а для каждой вершины $y \in V_r$ мы имеем $d_B(y) \leq r$.

- По [1 следствию из теоремы Холла](), в графе B существует паросочетание M, покрывающее все вершины из V_{r+1}.
- Степени всех вершин графа $H = F' - M$ равны r или $r-1$.

Билет 12. Дефицит графа. Формула Бержа.

1. Пусть $S \subset V(G)$ таково, что $o(G - S) > |S|$. Мы будем называть S **множеством Татта** графа G .

> По [теореме Татта](), если в графе G нет совершенного паросочетания, то в нём есть хотя бы одно множество Татта.

2. **Дефицитом** графа G мы будем называть величину $\mathrm{def}(G) := v(G) - 2\alpha'(G)$.

> *Повторение:* $\alpha'(G)$ - **количество рёбер** в **максимальном** паросочетании графа G.
> *Повторение* [билет 1]()

> Дефицит графа G — это количество вершин, не покрытых максимальным паросочетанием графа G.

- Очевидно, $\mathrm{def}(G) = 0$ тогда и только тогда, когда в графе G есть совершенное паросочетание.
- Определение дефицита можно переписать в виде формулы для вычисления размера максимального паросочетания:

$$\alpha'(G) = \frac{v(G) - \mathrm{def}(G)}{2}$$

Формула Бержа

(C. Berge, 1958.) Для любого графа G выполняется равенство

$$\mathrm{def}(G) = \max_{S \subset V(G)} (o(G - S) - |S|)$$

?

Доказательство

$\geq$

- Пусть M — максимальное паросочетание графа G,
$S \subset V(G)$, $n = o(G - S)$, а $U_1, \ldots, U_n$ — все нечётные компоненты связности графа $G - S$.
- В каждой нечётной компоненте U_i существует хотя бы одна вершина u_i, которая не покрыта ребром M или покрыта ребром $e_i = u_i x_i \in M$, где $x_i \in S$.
- Следовательно, не менее, чем $n - |S|$ из вершин $u_1, \ldots, u_n$ не покрыты паросочетанием M, откуда следует неравенство

$$\operatorname{def}(G) \geq o(G - S) - |S|$$

$\leq$

- Пусть

$$k = \max_{S \subset V(G)} (o(G - S) - |S|)$$

?

- Если $k = 0$, то по теореме Татта в графе G есть совершенное паросочетание и $\operatorname{def}(G) = 0$, этот случай тривиален.
- Пусть $k > 0$, W — множество из k новых вершин $(W \cap V(G) = \varnothing)$, а граф H получен присоединением к G вершин множества W, причём каждая из вершин множества W будет смежна со всеми остальными вершинами графа H.

Покажем, что для графа H выполняется условие Татта.

- Понятно, что $k \equiv v(G) \pmod 2$, поэтому $v(H) = v(G) + k$ чётно. Таким образом, достаточно проверить условие для непустых множеств $T \subset V(H)$.
- Если $T \not\supset W$, то граф $H - T$ связен и $o(H - T) \leq 1 \leq |T|$.
- Если $T = W \cup S$, где $S \subset V(G)$, то
$o(H - T) = o(G - S) \leq k + |S| = |T|$.
- В обоих случаях условие Татта выполняется и по теореме Татта в графе H есть совершенное паросочетание N.
- Тогда в графе G существует такое паросочетание M, что $|M| \geq |N| - k$, следовательно,

$$\alpha'(G) \geq |M| = |N| - k = \frac{v(H)}{2} - k = \frac{v(G) + k}{2} - k = \frac{v(G) - k}{2}$$

- откуда получим $k \geq v(G) - 2\alpha'(G)$
- подставив k и дефицит графа по его определению, получим искомое неравенство:

$$\operatorname{def}(G) \leq \max_{S \subset V(G)} (o(G - S) - |S|)$$

Глава 3.2. Элементарная комбинаторика

Билет 1. Число сочетаний из n элементов по k. Формула для числа сочетаний.

Число сочетаний из n элементов по k — это количество k-элементных подмножеств в n -элементном множестве (где $0 \leq k \leq n$).

- Возможные обозначения: C_n^k или $\binom{k}{n}$⍰.
- Это число можно интерпретировать как
  - число **строго** монотонно возрастающих функций $f : [1..k] \to [1..n]$;
  - число способов разложить k одинаковых шаров по n пронумерованным ящикам (в каждый ящик помещается не более одного шара)

Формула для числа сочетаний

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Доказательство

Пусть $|X| = n$.
• Есть $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ способов выбрать последовательность из k различных элементов X.
• Каждая такая последовательность задает k-элементное подмножество X.
• Каждое подмножество посчитано $k!$ раз, ибо его элементы можно упорядочить $k!$ способами.
Итого, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ различных подмножеств.

> *Повторение:* A_n^k Число размещений из n элементов по k — это количество последовательностей длины k, составленных из различных элементов n-элементного множества.

Билет 2. Число сочетаний с повторениями из n элементов по k. Формула для числа сочетаний с повторениями.

- **Число сочетаний с повторениями** из n элементов по k — это количество *неупорядоченных* наборов из k элементов n-элементного множества (в отличии от множества, в наборе один и тот же элемент может встречаться несколько раз).
- Возможные обозначения: $\widetilde{C}_n^k$ или $\left(\binom{n}{k}\right)$.
- Это число можно интерпретировать как
  - число **нестрого** монотонно возрастающих функций $f : [1..k] \to [1..n]$;
  - число способов разложить k неразличимых шаров по n ящикам (в ящик можно класть любое число шаров);
  - число способов выбрать k предметов, если есть предметы n типов
    (на складе есть хотя бы по k предметов каждого типа;
    предметы одного типа абсолютно неразличимы).

Лемма

Число решений уравнения

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = k \tag{1}$$

в $\mathbb{N}_0$ равно $\widetilde{C}_n^k$.

Доказательство.

- Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
- Строим биекцию между решениями уравнения (1) и неупорядоченными наборами из k элементов множества X.
- Каждому решению $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ставим в соответствие набор, состоящий из t_1 экземпляров элемента x_1, t_2 экземпляров $x_2, \ldots, t_n$ экземпляров x_n.
- Обратно, каждому набору $\mathcal{T}$ ставим в соответствие решение $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где t_i — число экземпляров x_i в $\mathcal{T}$.

Формула для числа сочетаний с повторениями

$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$

Доказательство

- Расположим в ряд k шариков и $n-1$ перегородку.
- Всего есть C_{n+k-1}^k таких расположений.

- Обозначим через t_1 число шариков до первой перегородки; t_2 — между первой и второй перегородками; $\ldots$; t_n — после $(n-1)$-й перегородки.
- Получаем биекцию между решениями уравнения (1) и такими расположениями шаров и перегородок, а значит $C^k_{n+k-1} = \widetilde{C}^k_n$.

Билет 3. Простейшие свойства биномиальных коэффициентов. Алгебраические и комбинаторные доказательства. Треугольник Паскаля.

Свойство 1

$C_n^k = C_n^{n-k}$ (очевидно)

Свойство 2

$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$

Алгебраическое доказательство

$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!\cdot(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!\cdot(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!\cdot(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}$

Комбинаторное доказательство

- Пусть $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.
- $(k+1)$-элементные подмножества X бывают двух видов: содержащие x_0 и не содержащие x_0.
- Если $x_0 \notin S \subset X$, то $S \subset X' = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Таких подмножеств C_n^{k+1}.
- Если $x_0 \in S \subset X$, то удалим x_0 из S. Получим подмножество $S' \subset X'$, где $|S'| = k$. Таких подмножеств C_n^k.

Треугольник Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Алгебраическое доказательство

$kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = nC_{n-1}^{k-1}$.

Комбинаторное доказательство

Как в левой, так и в правой части формулы записано число k-элементных подмножеств n -элементного множества, в которых один элемент отмечен.

Билет 4. Бином Ньютона. Сумма и знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов (алгебраические и комбинаторные доказательства).

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Доказательство

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ скобок}};$
- слагаемое $a^{n-k}b^k$ получается, если из k скобок выбрать b, а из остальных — a.
- Это можно сделать C_n^k способами.

Другое название чисел C_n^k — **биномиальные коэффициенты**.

Свойство 1

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

Комбинаторное доказательство

- В левой и в правой части записано
  число подмножеств n-элементного множества.

Свойство 2

$$C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0$$

Комбинаторное доказательство

Докажем, что $C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots$

- Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- Построим биекцию между всеми четными и всеми нечетными подмножествами X.
- Пусть $f(S) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} S \cup \{x_n\}, & x_n \notin S, \\ S \setminus \{x_n\}, & x_n \in S. \end{cases}$
- Получаем отображение $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, обладающее следующим свойством: $\forall S (f(f(S)) = S)$
  - Отображение, обладающее таким свойством называется **инволюцией**.
  - В частности, это означает, что f обратно самому себе, следовательно, f — биекция.
- При этом, $|S|$ и $|f(S)|$ всегда имеют разную четность.
- Таким образом, f также задает биекцию между всем четными и всеми нечетными подмножествами X

Свойство 3

$$C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots = 2^{n-1}$$

Билет 5. Мультиномиальные коэффициенты. Определение и формула. Обобщенный бином Ньютона.

Пусть $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$, где $m \in \mathbb{N}$ и $n, k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0$.

- **Мультиномиальным коэффициентом** (или **полиномиальным коэффициентом**) - число способов разбить n-элементное множество X на m непересекающихся подмножеств $X_1, X_2, \ldots, X_m$, где $|X_i| = k_i$, обозначается $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$.

Формула мультиномиального коэффициента

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$$

Доказательство

- Есть $n!$ способов упорядочить элементы множества X.
- Для каждого способа, помещаем первые k_1 элементов в X_1; следующие k_2 элементов в X_2 и т. д.
- Получаем разбиение X на подмножества нужного размера.
- Каждое разбиение посчитано $k_1! k_2! \ldots k_m!$ раз.

Обобщенный бином Ньютона

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$$

Доказательство

Аналогично доказательству Бинома Ньютона

- При раскрытии скобок слагаемое $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$ получается, если выбрать из k_1 скобок слагаемое a_1, из k_2 скобок слагаемое $a2, \ldots,$ из k_m скобок слагаемое a_m.
- Такой выбор можно сделать в точности $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$ способами.

Билет 6. Формула включений-исключений. Переформулировка этой формулы в терминах свойств.

1. Пусть A, B — конечные множества. Тогда $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

2. Пусть A, B, C – конечные множества. Тогда
   $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$

Формула включений-исключений

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – конечные множества. Тогда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\varnothing \neq I \subset [1..n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \tag{1}$$

> *Объяснение*: $\varnothing \neq I \subset [1..n]$ - I пробегает все непустые подмножества множества индексов $[1..n]$.

Доказательство

- Пусть $x \in A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ и x не принадлежит остальным A_j.
- Тогда x учитывается в формуле (1) с коэффициентом $\sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell+1} C_k^{\ell} = 1$
- Так как каждый элемент учитывается ровно 1 раз, то формула (1) верна

Формула включений-исключений в терминах свойств

Пусть X – конечное множество, $|X| = N$;

- $P_1, \ldots, P_n$ – свойства элементов множества X (т. е. одноместные предикаты на X);

> *Повторение*: **Предикат** — это логическая функция или высказывание, зависящее от одного(**одноместный**) или нескольких(**многоместный**) аргументов, которое может быть либо **истинно**, либо **ложно**.

- $N_{i_1, \ldots, i_k}$ – число элементов, удовлетворяющих $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$;
- $N(0)$ – число элементов, не удовлетворяющих ни одному свойству.
  Тогда

$$N(0) = N - \sum_{i} N_i + \sum_{i_1 < i_2} N_{i_1, i_2} - \\ \cdots + (-1)^k \sum_{i_1 < \cdots < i_k} N_{i_1, \ldots, i_k} + \cdots + (-1)^n N_{1, \ldots, n} \tag{2}$$

Билет 7. Субфакториалы. Определение и рекуррентное соотношение для субфакториалов. Связь с обычными факториалами.

1. **Перестановкой** на множестве M называется произвольная биекция $\sigma : M \to M$.
2. **Неподвижной точкой** перестановки σ называется такой элемент $x \in M$, что $\sigma(x) = x$.
3. S_n – множество всех перестановок на $[1..n]$.

> *Повторение:* $|S_n| = n!$

4. $D(n)$ – (**Субфакториал**) число перестановок из S_n, **не имеющих** *неподвижных точек*.

Рекуррентная формула субфакториала

$D(n+1) = n(D(n) + D(n{-}1))$

Доказательство

Пусть $\sigma \in S_{n+1}; k = \sigma(n+1); \ell = \sigma^{-1}(n+1)$

> *Объяснение:* k - куда переставили $(n+1)$-й элемент, а ℓ - откуда переставили

- Возможны два случая: $k \neq \ell$ или $k = \ell$.
    1. Пусть $k \neq \ell$:
        - Тогда $\sigma'(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \sigma(x), & x \neq \ell, \\ k, & x = \ell, \end{cases}$ – перестановка из S_n без неподвижных точек.
        - Для каждого $k \in [1..n]$ есть $D(n)$ таких перестановок.
    2. Пусть $k = \ell$:
        - Тогда $\sigma|_{[1..n]\setminus\{k\}}$ – перестановка на $[1..n] \setminus \{k\}$ без неподвижных точек.
        - Для каждого $k \in [1..n]$ есть $D(n{-}1)$ таких перестановок.
- Итого, получаем $nD(n) + nD(n{-}1)$ перестановок без неподвижных точек.

> $D(n)$ – **Субфакториал**, так как для обычных факториалов выполняется такое же соотношение: $(n+1)! = n(n! + (n{-}1)!)$

Билет 8. Явная формула для субфакториала. Следствие о ближайшем целом числе к $\frac{n!}{e}$.

Явная формула субфакториала

$$D(n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Доказательство

Пусть $X = S_n$

- P_i – свойство "$\sigma(i) = i$" для перестановки $\sigma \in S_n$
- Тогда $N = n!$ и $N_{i_1,...,i_k} = (n-k)!$
- По формуле включений-исключений имеем: $D(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)! C_n^k = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Следствие

$D(n) = \mathrm{round}(\frac{n!}{e})$; более того, $|D(n) - \frac{n!}{e}| < \frac{1}{n+1}$

Доказательство

Напомним, что $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, тогда

> *Абсолютно очевидные действия:*
> Разложим $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ с использованием бинома Ньютона:
> $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_k^n \left(\frac{x}{n}\right)^k\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{x}{n}\right)^k\right) =$
> $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \frac{x^k}{n^k}\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

- $\frac{n!}{e} = n! \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + n! \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = D(n) + (-1)^{n+1} \sum\limits_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!}$;
- $\left|D(n) - \frac{n!}{e}\right| = \left|\sum\limits_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!}\right| =$
  $\left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots\right|$
- $\sum\limits_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!} = \left(\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{n!}{(n+2)!}\right) + \left(\frac{n!}{(n+3)!} - \frac{n!}{(n+4)!}\right) + \dots > 0$

- $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!} = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{n!}{(n+2)!} - \frac{n!}{(n+3)!}\right) - \left(\frac{n!}{(n+4)!} - \frac{n!}{(n+5)!}\right) - \cdots < \frac{1}{n+1}$.

Билет 9. Функция Эйлера. Определение и формула (доказательство с помощью формулы включений-исключений).

1. Натуральные числа a и b называются **взаимно простыми**, если у них нет общего натурального делителя, отличного от единицы.
2. $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел, меньше либо равных n и взаимно простых с n (**функция Эйлера**).

Формула функции Эйлера

Пусть $n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ (где $p_1, \ldots, p_s$ — различные простые и $a_1, \ldots, a_s$ — натуральные числа). Тогда

$$\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_s})$$

Доказательство

Пусть $X = [1..n]$.

- P_i — свойство "$x \vdots p_i$" для числа $x \in X$
- Тогда $N_{i_1, \ldots, i_k} = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}$
- По формуле включений-исключений имеем:

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq s} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} = n(1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_s})$$

Билет 10. Формула для числа сюръекций.

Формула числа сюръективных отображений

Пусть $f : [1..k] \to [1..n]$ - сюръекция, тогда
$\sum\limits_{s=1}^{n} (-1)^{n-s} C_n^s s^k$ - число сюръекций

Доказательство

- Пусть X — множество всех отображений $f : [1..k] \to [1..n]$
- P_i — свойство "$f^{-1}(i) = \varnothing$" для отображения $f \in X$
  - Тогда $N = |X| = n^k$
  - $N_{i_1, \ldots, i_\ell} = (n - \ell)^k$ — количество функций, удовлетворяющих данным ℓ свойствам.
  - $f \in X$ — сюръекция $\Leftrightarrow$ f не удовлетворяет ни одному из свойств. Следовательно, число сюръекций равно $N(0)$.

> $N(0)$ — число элементов, не удовлетворяющих ни одному свойству

- По формуле включений-исключений имеем:

$$N(0) = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell C_n^\ell (n - \ell)^k = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n-s} C_n^s s^k$$

> Последнее равенство получено заменой переменной $s = n - \ell$