

Глава 3.1. Паросочетания, независимые множества и покрытия

Билет 1. Независимые множества, паросочетания и покрытия в графе. Теорема Галлаи.

1. Множество вершин $U \subset V(G)$ называется **независимым**, если никакие две его вершины не смежны.

Обозначение: $\alpha(G)$ - количество вершин в максимальном независимом множестве графа G .

2. Множество рёбер $M \subset E(G)$ называется **паросочетанием**, если никакие два его ребра не имеют общей вершины.

Обозначение: $\alpha'(G)$ - количество рёбер в максимальном паросочетании графа G .

3. Будем говорить, что множество вершин $W \subset V(G)$ **покрывает** ребро $e \in E(G)$, если существует вершина $w \in W$, инцидентная e .
4. Будем говорить, что множество рёбер $F \subset E(G)$ **покрывает** вершину $v \in V(G)$, если существует ребро $f \in F$, инцидентное v .
5. Паросочетание M графа G называется совершенным, если оно покрывает все вершины графа.
6. Множество вершин $W \subset V(G)$ называется вершинным покрытием, если оно покрывает все рёбра графа.

Обозначение: $\beta(G)$ количество вершин в минимальном вершинном покрытии графа G .

7. Множество рёбер $F \subset E(G)$ называется рёберным покрытием, если оно покрывает все вершины графа.

Обозначение: $\beta'(G)$ количество рёбер в минимальном рёберном покрытии графа G .

Лемма 1

1. $U \subset V(G)$ — независимое множество, если и только если $V(G) \setminus U$ — вершинное покрытие.
2. $\alpha(G) + \beta(G) = v(G)$. (Верно для любого графа).

Повторение: $\alpha(G)$ - количество вершин в максимальном независимом множестве графа G .

Повторение: $\beta(G)$ количество вершин в минимальном вершинном покрытии графа G

Доказательство

$U \subset V(G)$ — максимальное независимое множество, если и только если $V(G) \setminus U$ — минимальное вершинное покрытие

Теорема Галлаи

(Т. Gallai, 1959) Пусть G — граф с $\delta(G) > 0$. Тогда $\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$

Повторение: $\delta(G)$ - минимальная степень вершины графа G .

Повторение: $\alpha'(G)$ - количество рёбер в максимальном паросочетании графа G .

Повторение: $\beta'(G)$ количество рёбер в минимальном рёберном покрытии графа G .

Доказательство (сначала \leq потом \geq)

\leq

- Пусть M — максимальное паросочетание, U — множество не покрытых M вершин графа, тогда $|U| = v(G) - 2\alpha'(G)$.
- Так как $\delta(G) > 0$, можно выбрать множество F из $|U|$ рёбер, покрывающее U .
- Тогда $M \cup F$ — покрытие, следовательно,
 $\beta'(G) \leq |M \cup F| = \alpha'(G) + v(G) - 2\alpha'(G)$, откуда
 $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq v(G)$.

\geq

- Пусть L — минимальное рёберное покрытие ($|L| = \beta'(G)$), а $H = (V(G), L)$.

Объяснение: $H = (V(G), L)$ - граф H образован из вершин графа G и рёбер покрытия L .

- Так как в графе H нет вершин степени 0, в каждой компоненте графа H можно выбрать по ребру, в результате получится паросочетание N в графе H (а значит, и в G).
- Следовательно, $\alpha'(G) \geq |N| = c(H)$ и
 $\beta'(G) = |L| = e(H) \geq v(H) - c(H) = v(G) - c(H) \geq v(G) - \alpha'(G)$, откуда следует
 $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq v(G)$.

Повторение: $c(H)$ - число компонент связности графа H

- Получаем, что $\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$.

Билет 2. Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.

Пусть M — паросочетание в графе G .

1. Назовём путь M -**чередующимся**, если в нём чередуются рёбра из M и рёбра, не входящие в M .
2. Назовём M -чередующийся путь M -**дополняющим**, если его начало и конец не покрыты паросочетанием M .

Уточнение: в этот путь могут входить и не все рёбра из M

- В M -**дополняющем** пути нечётное число рёбер, причем рёбер из паросочетания M на одно меньше, чем рёбер, не входящих в M

Теорема Бержа

(C. Berge, 1957) Паросочетание M в графе G является **максимальным** тогда и только тогда, когда нет M -**дополняющих** путей.

Доказательство

\Rightarrow

- Пусть в графе G существует M -**дополняющий** путь $S = a_1 a_2 \dots a_{2k}$.
- Тогда **заменяем** входящие в M рёбра $a_2 a_3, \dots, a_{2k-2} a_{2k-1}$ на не входящие в M рёбра $a_1 a_2, a_3 a_4, \dots, a_{2k-1} a_{2k}$, и тем самым получим **большее паросочетание**. Противоречие.

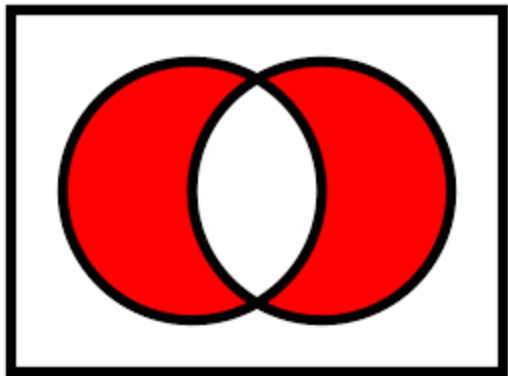
\Leftarrow

- Пусть M — **не максимальное** паросочетание, тогда рассмотрим максимальное паросочетание M' , $|M'| > |M|$.
- Пусть $N = M \Delta M'$, $H = G(N)$. Для любой вершины $v \in V(H)$ мы имеем $d_H(v) \in \{1, 2\}$, следовательно, H — объединение нескольких путей и циклов.

Объяснение: H — это подграф графа G , порождённый рёбрами из N

- В каждом из этих путей и циклов рёбра паросочетаний M и M' **чередуются**. Так как рёбер из M' в $E(H)$ больше, хотя бы одна компонента P графа H — **путь нечётной длины**, в котором больше рёбер из M' . Легко понять, что P — это M -**дополняющий** путь. Противоречие.

Объяснение: $M \Delta M'$ — это симметрическая разность: $M \Delta M' = (M \setminus M') \cup (M' \setminus M)$



Билет 3. Теорема Холла.

- Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф с долями V_1 и V_2 .

(Р. Hall, 1935.) В двудольном графе G есть паросочетание, покрывающее все вершины доли V_1 , **если и только если** для **любого** множества $U \subset V_1$ выполняется $|U| \leq |N_G(U)|$.

Повторение: $|N_G(U)|$ окрестность множества вершин U — множество всех вершин графа G , смежных с вершинами из U .

Повторение: Граф называется **двудольным**, если его вершины можно разбить на два множества (т.е. две доли), внутри которых **нет** рёбер.

- Условие о размере окрестности из теоремы Холла мы будем называть **условием Холла** для доли V_1 .

Доказательство

\Rightarrow

Очевидно, так как концы рёбер паросочетания, покрывающих вершины из U — **разные** вершины из $N_G(U)$.

\Leftarrow

Докажем **по индукции** по количеству вершин в графе:

База для $|V_1| = 1$ очевидна.

Индукционный переход: Предположим, что для меньшего чем G графа утверждение уже доказано.

Разберём два случая.

Случай 1:

Существует такое непустое множество $A \subsetneq V_1$, что $|A| = |N_G(A)|$.

- Введём **обозначения** $B = N_G(A)$, $A' = V_1 \setminus A$, $B' = V_2 \setminus B$. Пусть $G_1 = G(A \cup B)$, $G_2 = G(A' \cup B')$.
- Очевидно, для двудольного графа G_1 и его доли A **выполняется условие Холла**. По индукционному предположению в графе G_1 существует паросочетание M_1 , покрывающее A .
- Проверим **условие Холла** для двудольного графа G_2 и его доли A' . Рассмотрим $U \subset A'$. Тогда
 $|U| + |A| = |U \cup A| \leq |N_G(U \cup A)| = |N_{G_2}(U) \cup B| = |N_{G_2}(U)| + |B| = |N_{G_2}(U)| + |A|$, откуда следует $|U| \leq |N_{G_2}(U)|$.
- Значит, в графе G_2 **существует** паросочетание M_2 , покрывающее все вершины из A' . Тогда $M_1 \cup M_2$ — паросочетание в G , покрывающее V_1 .

Случай 2:

Для любого непустого множества $A \subsetneq V_1$ выполняется $|A| < |N_G(A)|$.

- Рассмотрим произвольную вершину $a \in V_1$ и смежную с ней вершину $b \in V_2$.
- Пусть $G' = G - a - b$.
- Проверим условие Холла** для двудольного графа G' и его доли $V_1 \setminus a$.
- Для любого множества $A \subset V_1 \setminus \{a\}$ выполняется
 $|A| \leq |N_G(A)| - 1 \leq |N_G(A) \setminus \{b\}| = |N_{G'}(A)|$.
- Поэтому в графе G' существует паросочетание, покрывающее $V_1 \setminus \{a\}$. Вместе с ребром ab получаем искомое паросочетание.

Билет 4. Следствия из теоремы Холла: паросочетания в двудольном графе, где степени одной доли больше чем другой, а также в регулярном двудольном графе.

Следствие 1

В двудольном графе $G = (V_1, V_2, E)$ все вершины из V_1 имеют степени **не меньше** k , а все вершины V_2 имеют степени **не больше** k . Тогда есть **паросочетание**, покрывающее V_1 .

Доказательство

- Проверим **условие Холла** для доли V_1 .

Пусть $A \subset V_1(G)$, тогда из вершин A **выходит не менее** чем $k \cdot |A|$ рёбер к вершинам из $N_G(A)$, а в каждую вершину $b \in N_G(A)$ **входит не более**, чем k рёбер из вершин множества A .

- Таким образом,

$$k|A| \leq e_G(A, N_G(A)) \leq k|N_G(A)|,$$

откуда $|A| \leq |N_G(A)|$

Обозначение: $e_G(A, N_G(A))$ - количество рёбер, соединяющих вершины множества A с вершинами множества $N_G(A)$

Следствие 2

(D. König, 1916.) Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — **регулярный двудольный граф степени k** . Тогда G есть объединение k своих **совершенных паросочетаний**.

Доказательство

- По [Следствию 1](#) в G существует **паросочетание** M , покрывающее V_1 .
- Так как степени всех вершин **равны по k** , а каждое ребро соединяет V_1 и V_2 , мы имеем $k|V_1| = e(G) = k|V_2|$.
- Следовательно, $|V_1| = |V_2|$.
- Поэтому, паросочетание M **покрывает и долю V_2** , то есть, M — **совершенное**.
- $G - M$ — **регулярный двудольный граф степени $k-1$** . Продолжая выделять совершенные паросочетания, мы разобьём граф G на k паросочетаний.

Билет 5. Теорема о гареме.

В одной далекой стране проживают юноши $\{A_1, \dots, A_n\}$.

Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, юноша A_i хочет **завести гарем** из k_i знакомых ему девушек (естественно, $k_i \in \mathbb{N}$).

Они могут это **одновременно сделать** тогда и только тогда, когда для **любого** множества юношей

количество знакомых **хотя бы одному** из них девушек **не меньше**, чем сумма желаемых ими размеров гаремов.

Доказательство

- Построим **двудольный граф** $G = (V_1, V_2, E)$.
- Вершины доли V_1 соответствуют **юношам** — каждому A_i соответствует k_i вершин $a_{i,1}, \dots, a_{i,k_i}$ (назовем их копиями A_i).
- Вершины доли V_2 соответствуют **девушкам**. Каждая вершина $a_{i,j} \in V_1$ соединена в точности с теми девушками из V_2 , с которыми **знаком юноша** A_i .
- Проверим, что для доли V_1 выполнено условие Холла.
- Пусть $M \subset V_1$, а A_{i_1}, \dots, A_{i_m} — все юноши, **чьи копии есть в M** .

Объяснение: индекс i у $A_{i_1} \neq$ индексу i у A_{i_m}

- Тогда $|N_G(M)| \geq k_{i_1} + \dots + k_{i_m}$ (в $N_G(M)$ входят **все девушки**, знакомые с A_{i_1}, \dots, A_{i_m}).
- В то же время, $|M| \leq k_{i_1} + \dots + k_{i_m}$ (в M не может входить больше копий A_{i_1}, \dots, A_{i_m} , чем их существует).
- Таким образом, в G есть **паросочетание, покрывающее V_1** .
- Для каждого A_i **девушки, входящие в пары** с его копиями, **образуют гарем** желаемого размера.

Билет 6. Теорема Кёнига и ее следствие.

Теорема Кёнига

(D. König, 1931.) Пусть G — двудольный граф. Тогда $\alpha'(G) = \beta(G)$

Повторение: $\alpha'(G)$ - количество рёбер в максимальном паросочетании графа G .

Повторение: $\beta(G)$ количество вершин в минимальном вершинном покрытии графа G

Повторение [билет 1](#)

Доказательство (сначала \leq , потом \geq)

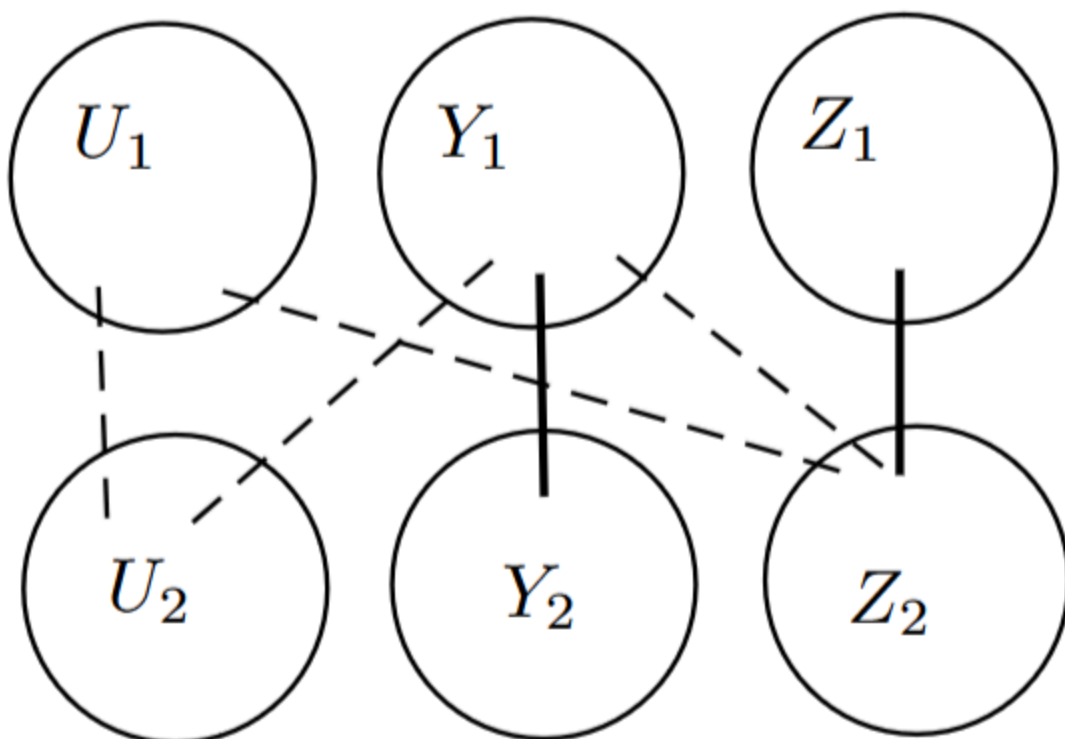
\leq

- Так как рёбра паросочетания **не имеют общих концов**, то в любом вершинном покрытии **не меньше вершин**, чем в любом паросочетании рёбер. Следовательно, $\alpha'(G) \leq \beta(G)$.

- Пусть M — **максимальное паросочетание** в графе G ,
 U_1 — множество всех **непокрытых** этим паросочетанием **вершин** V_1 ,
 U_2 — множество **непокрытых** M **вершин** V_2 .
- Разобьём** все покрытые паросочетанием M **вершины** V_1 на два множества:
 Y_1 — те вершины, до которых **можно дойти** от U_1 по M -**чередующимся** путям,
а Z_1 — вершины, до которых **дойти таким образом нельзя**.
- Разобьём** все покрытые паросочетанием M **вершины** V_2 на два множества:
 Y_2 — те вершины, до которых **можно дойти** от U_1 по M -**чередующимся** путям,
а Z_2 — вершины, до которых **дойти таким образом нельзя**.

Выясним, как должны проходить рёбра паросочетания M и остальные рёбра графа G **между** **определёнными выше множествами вершин**.

- На рисунке **сплошными линиями** показаны **рёбра паросочетания** M , **пунктирными линиями** — **невозможные рёбра**.
Далее мы объясним, почему граф устроен именно так.
- Любой M -**чередующийся путь** приходит в вершины множества Y_1 по ребрам из M , поэтому **предыдущая вершина** перед Y_1 на таком пути **должна лежать в** Y_2 .
- Рёбра** паросочетания M **не могут соединять** Y_2 с Z_1 (иначе был бы M -чередующийся путь от U_1 до Z_1).
- Следовательно, **паросочетание** M **соединяет** друг с другом Y_1 и Y_2 а также Z_1 и Z_2



Докажем, что $B = Z_1 \cup Y_2$ — **вершинное покрытие**.

- $E_G(U_1 \cup Y_1, Z_2) = \emptyset$. (Рёбра не из M не могут соединять вершины из $U_1 \cup Y_1$ с вершинами из Z_2 : иначе был бы M -чередующийся путь от U_1 до Z_2)
- $E_G(U_1 \cup Y_1, U_2) = \emptyset$. (Если бы такое ребро существовало, то существовал бы M -дополняющий путь, что [по теореме Бержа](#) для максимального паросочетания M невозможно.)

Так как B — вершинное покрытие и $|M| = |B|$, имеем $\alpha'(G) \geq \beta(G)$.

Следствие из теорем Кенига и Галлаи

Пусть G — двудольный граф с $\delta(G) > 0$. Тогда $\alpha(G) = \beta'(G)$.

Обозначение: $\alpha(G)$ — количество вершин в максимальном независимом множестве графа G

Обозначение: $\beta'(G)$ — количество рёбер в минимальном рёберном покрытии графа G .

Повторение: [билет 1](#)

Доказательство

- По [Теореме Кёнига](#) для двудольного графа выполняется соотношение $\alpha'(G) = \beta(G)$.
- По [Лемме 1](#) для любого графа

$$\alpha(G) + \beta(G) = v(G)$$
- По [Теореме Галлаи](#), так как $\delta(G) > 0$, то

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$$
- Решив систему, следует, что $\alpha(G) = \beta'(G)$.

Билет 7. Паросочетания с предпочтениями. Теорема Гэйла-Шепли.

Иногда вершинам не всё равно, с какими вершинами “вступать в паросочетание”.

Предположим, что каждая вершина имеет **список предпочтений**, то есть, упорядочивает инцидентные ей рёбра.

Построим такое **паросочетание** M (не обязательно максимальное), что в нём не будет ребра $e = ab$, которое обе вершины a и b **хотели бы поменять** на свободные рёбра. Дадим строгие определения

1. Пусть для каждой вершины $v \in V(G)$ задано **линейное отношение** (нестрогое) порядка \leq_v на множестве всех инцидентных v рёбер из $E(G)$.

Тогда $\leq = \{\leq_v\}_{v \in V(G)}$ — **множество предпочтений**.

Например, если у вершины v есть рёбра e_1, e_2, e_3 , то она может сказать, что $e_1 \leq_v e_2 \leq_v e_3$, где e_1 **наименее предпочтительное** ребро, а e_3 — **наиболее**

2. Паросочетание M называется **стабильным** для множества предпочтений \leq , если **для любого ребра $f \notin M$ существует такое ребро $e \in M$, что e и f имеют общий конец v и $f \leq_v e$.**

Объяснение $f \leq_v e$: вершина v **предпочитает** ребро e , уже включённое в паросочетание, ребру f , которого нет в паросочетании.

Ни одно ребро $f \notin M$ **не может “разрушить” стабильность**, потому что для вершины v , которая соединена с f , **уже существует ребро $e \in M$** , которое для этой вершины **лучше** (или равно по предпочтению), чем f , а значит ребро f **не может быть включено** в стабильное паросочетание.

Stable marriage theorem (теорема о деревенских свадьбах)

(D. Gale, L. Shapley, 1962.) Пусть G — **двудольный граф**. Тогда для любого множества предпочтений \leq в графе G существует **стабильное паросочетание**.

Доказательство

- Будем считать вершины **одной доли мужчинами**, а вершины **другой доли — женщинами**, а наше паросочетание будет состоять из семейных пар. **Изначально наше паросочетание пусто**, оно будет изменяться пошагово.

Опишем шаг алгоритма изменения паросочетания.

- Сначала действуют **мужчины**:
каждый **неженатый** (то есть, не покрытый паросочетанием) **мужчина выбирает женщину**, которая ему больше всех нравится (то есть, наивысшую в своем предпочтении) из тех, **которым он еще не делал предложения** (если такие есть), после чего делает ей предложение.
- Затем действуют **женщины**:
каждая из них **рассматривает всех мужчин**, кто сделал ей предложение и нравится ей строго больше, чем ее муж (если он есть). Если это множество непусто, она **выбирает из них того, кто нравится ей больше всего** (если таких несколько, то любого из них) и выходит за него замуж (вместо ее прежнего мужа, если он был) ~~ш-общительная~~.
- Конечность алгоритма очевидна: никакой мужчина **не делает предложение одной женщине дважды**. Пусть в результате получилось паросочетание M .

Докажем, что M стабильно.

- Рассмотрим любое ребро $uw \in E(G) \setminus M$ (где u — мужчина).
- Если u **делал предложение** w , то
 - либо w ему **отказала**,
 - либо сначала **приняла** предложение, но потом **бросила**,
- Значит w **нашла мужа** u' , который ей нравится **не меньше, чем** u (то есть, существует ребро $u'w \in M$, для которого $uw \leq_w u'w$).
- Если же u **не делал предложения** w , то в процессе алгоритма **нашел жену** w' , которая нравится ему **не меньше, чем** w (то есть, существует ребро $uw' \in M$, для которого $uw \leq_u uw'$).
- Таким образом, построенное паросочетание **стабильно по определению**.

Билет 8. Теорема Татта о совершенном паросочетании.

Обозначение: $o(G)$ - количество нечётных компонент связности произвольного графа G (то есть, компонент связности, содержащих нечётное число вершин).

Теорема Татта

(W. T. Tutte, 1947.) В графе G существует **совершенное паросочетание** тогда и только тогда, когда для любого $S \subset V(G)$ выполняется условие $o(G-S) \leq |S|$

Повторение: Совершенное паросочетание - покрывающее все вершины графа.

Повторение: [билет 1](#)

Доказательство

\Rightarrow

Необходимость условия почти очевидна.

- Пусть $S \subset V(G)$, а M — совершенное паросочетание.
- Тогда **одна из вершин каждой нечетной компоненты** связности графа $G-S$ должна быть **соединена с вершиной из S** ребром паросочетания M и все эти вершины — разные!

Объяснение: "должна быть соединена с вершиной из S " (в **нечетной** компоненте связности **нечётное** число вершин \Rightarrow останется ровно одна вершина, **непокрытая** паросочетанием),

- А значит должно выполняться $o(G-S) \leq |S|$



Докажем от противного

- Предположим, что граф удовлетворяет условию, но **не имеет совершенного паросочетания**. Тогда, в частности, $o(G - \emptyset) \leq |\emptyset| = 0$, то есть, $v(G)$ **чётно**.
- Пусть G^* — **максимальный надграф** G на том же множестве вершин, **не имеющий совершенного паросочетания**. Мы **построим** совершенное паросочетание в G^* и придем к противоречию.
- Для любого $S \subset V(G)$ очевидно, выполняется неравенство $o(G^* - S) \leq o(G - S) \leq |S|$.
- Пусть $U = \{u \in V(G) : d_{G^*}(u) = v(G) - 1\}$.
Очевидно, G^* — **не полный граф**, поэтому $U \neq V(G)$.

Объяснение: из-за $d_{G^*}(u) = v(G) - 1$ мы получили, что вершины U смежны всем вершинам подграфа

Докажем, что граф $G^* - U$ — объединение нескольких несвязанных друг с другом полных графов

Поддоказательство (от противного)

- Предположим, что это не так. Тогда **существуют** такие **вершины** $x, y, z \in V(G) \setminus U$, что $xy, yz \in E(G^*)$, но $xz \notin E(G^*)$.
- Так как $y \notin U$, то **существует** такая **вершина** $w \notin U$, что $yw \notin E(G^*)$.
- Ввиду максимальной графа G^* существуют:
совершенное паросочетание M_1 в графе $G^* + xz$,
совершенное паросочетание M_2 в графе $G^* + yw$.
Так как в графе G^* нет совершенного паросочетания, $xz \in M_1$ и $yw \in M_2$.
- Пусть $H = (V(G), M_1 \Delta M_2)$. Очевидно, граф H — **несвязное объединение чётных циклов**, в каждом из которых **чередуются** рёбра паросочетаний M_1 и M_2 .

Объяснение: Так как $M_1 \Delta M_2$ — **симметрическая разность**, в графе H будет **равное количество рёбер** из M_1 и M_2 .

Объяснение: **Нечётных циклов** быть **не может**, так как **рёбра** после удаления повторяющихся **чередуются**, а их **количество** в каждой компоненте **одинаково**.

Объяснение: **Путей** быть **не может**, так как паросочетания были **совершенными** и мы удаляли только повторяющиеся рёбра.

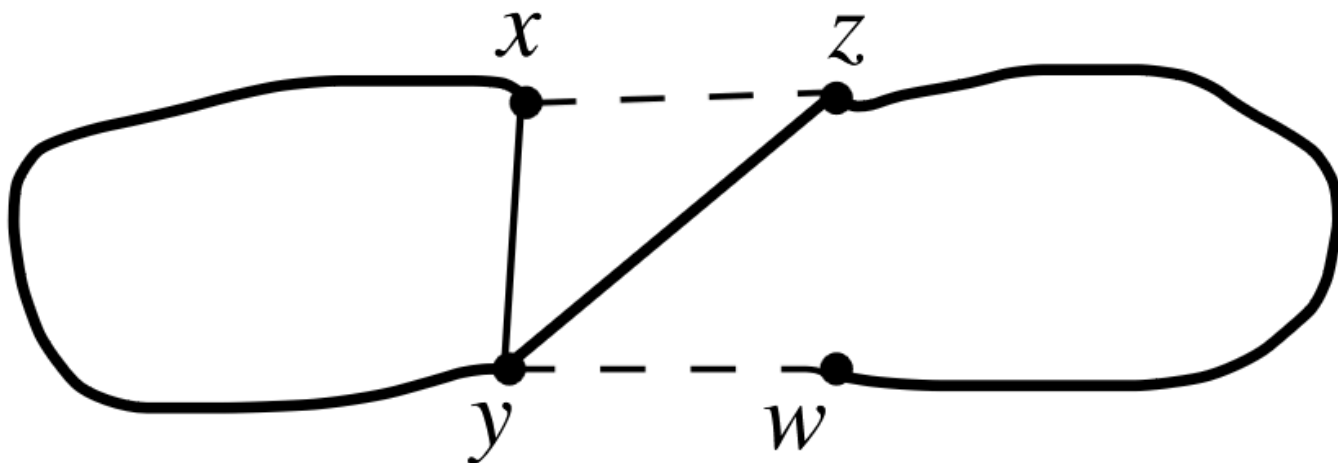
- Рёбра xz и yw принадлежат **ровно одному из паросочетаний** M_1 и M_2 , и потому **лежат в** $E(H)$.
- На вершинах **любой компоненты** связности графа H **существует совершенное паросочетание** с рёбрами из M_1 и **совершенное паросочетание** с рёбрами из M_2 .

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Рёбра xz и yw лежат в разных компонентах C_1 и C_2 графа H

- Тогда на вершинах C_1 мы **выберем рёбра паросочетания** M_2 ,
на вершинах C_2 мы **выберем рёбра паросочетания** M_1 ,
а в остальных **компонентах** графа H — **любое из этих паросочетаний**.
- В итоге получится **совершенное паросочетание** графа G^* , противоречие.

Случай 2. Рёбра xz и yw лежат в одной компоненте C графа H .



- В силу **симметричности** x и z можно считать, что вершины расположены **в чётном цикле** C в порядке $yzwx$ (см. рисунок).
- Рассмотрим **простой путь** $P = xCyzCw$, состоящий из **двух дуг цикла** C и **ребра** yz (оно есть в графе G^* по построению).
- Тогда $V(P) = V(C)$ и $E(P) \subset E(G^*)$.
- Следовательно, существует **совершенное паросочетание** $M_C \subset E(G^*)$ на вершинах **компоненты** связности C .
- В остальных **компонентах** графа H выберем рёбра **любого из паросочетаний** M_1 и M_2 .
- В итоге получится **совершенное паросочетание** графа G^* , противоречие.

Вернёмся к [основному доказательству](#).

- **Граф** $G^* - U$ есть **объединение** нескольких **несвязанных полных графов**. В силу условия $o(G - U) \leq |U|$, среди них **не более чем** $|U|$ имеет **нечётное** число вершин.
- В каждой **чётной компоненте** графа $G^* - U$ мы построим **полное паросочетание**,
- В каждой **нечётной компоненте** — **паросочетание**, покрывающее все вершины, **кроме одной**, а оставшуюся вершину **соединим с вершиной из** U (при этом мы используем **различные вершины** множества U : их хватит ввиду $o(G^* - U) \leq |U|$).

- Наконец, мы **разобьём на пары оставшиеся** непокрытыми вершины множества U (это можно сделать, так как каждая из этих вершин **смежна** в графе U со всеми остальными по построению графа U).
- Таким образом, мы получили **совершенное паросочетание** в графе G^* , противоречие.

Билет 9. Теорема Петерсена о совершенном паросочетании в регулярном графе степени 3.

1. **Кубический граф** - граф, все вершины которого имеют степень 3.
2. **Мост графа** — ребро, не входящее ни в один цикл

Теорема Петерсена

(J. Petersen, 1891.) Пусть G — **связный кубический граф**, в котором не более **двух мостов**. Тогда в графе G есть **совершенное паросочетание**.

Доказательство

- Предположим, что **совершенного паросочетания** в G **нет**. Тогда по [Теореме Татта](#) существует такое множество $S \subset V(G)$, что $o(G-S) > |S|$.
- Так как в кубическом графе **четное число вершин**, то $S \neq \emptyset$ и $o(G-S) \equiv |S| \pmod{2}$.

Объяснение: в кубическом графе четное число вершин **по лемме о рукопожатиях** (любой конечный неориентированный граф имеет **чётное** число **вершин нечётных степеней**)

- Пусть U_1, \dots, U_n — все **нечётные компоненты** связности графа $G-S$.
Тогда $n \geq |S| + 2$.
- Пусть $m_i = e_G(U_i, S)$.
Тогда $m_i = (\sum_{v \in U_i} d_G(v)) - 2e(G(U_i)) = 3|U_i| - 2e(G(U_i))$ — очевидно, нечетно.

Объяснение: Число рёбер, соединяющих U_i с S равно общему числу рёбер, инцидентных вершинам U_i , без внутренних рёбер.

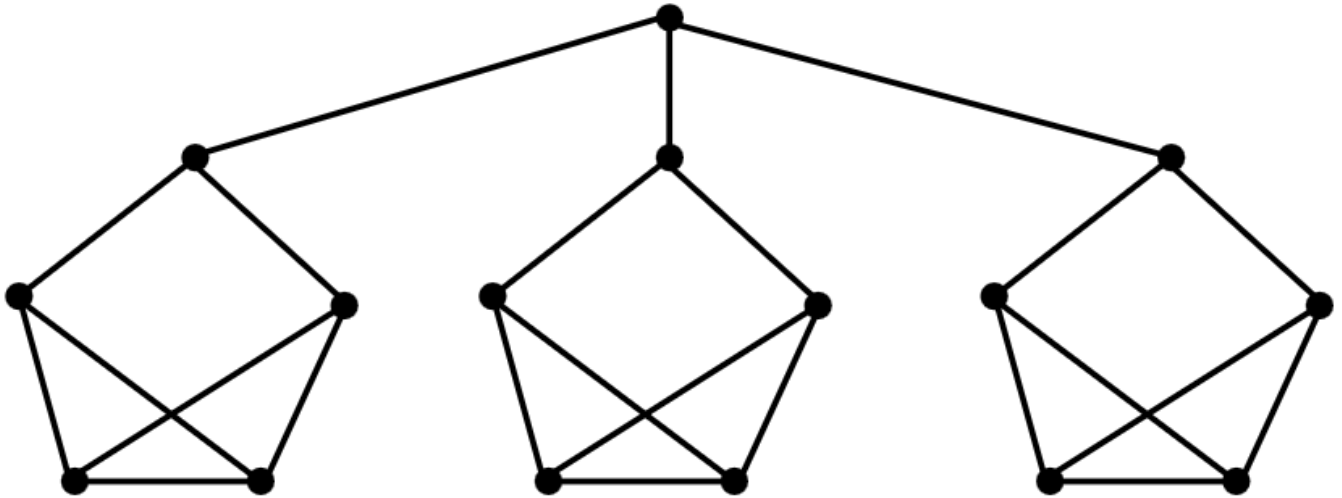
Объяснение: $\sum_{v \in U_i} d_G(v) = 3|U_i|$, так как граф кубический

- Так как **не более чем два** ребра графа G — **мосты**, то **не более, чем два числа** из m_1, \dots, m_n равны 1, а все остальные — **не менее, чем 3**.

- Тогда $3|S| = \sum_{v \in S} d_G(v) \geq \sum_{i=1}^n m_i \geq 3(n-2) + 2 = 3n-4 \geq 3(|S| + 2) - 4 > 3|S|$,
противоречие.

Результат теоремы Петерсона в некотором смысле наилучший возможный.

Пример связного кубического графа с тремя мостами, у которого нет совершенного паросочетания:



Билет 10. Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в $2k$ -регулярном графе и ее следствия о регулярных факторах.

1. **k -фактором** графа G называется его остовный регулярный подграф степени k .

Повторение: остовный подграф - покрывает все вершины графа

Повторение: регулярный граф - все степени вершин равны

Совершенное паросочетание — это 1-фактор.

Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в $2k$ -регулярном графе

(J. Petersen, 1891.) У регулярного графа степени $2k$ есть 2-фактор.

Доказательство

- Граф G имеет эйлеров цикл. Обойдем его в некотором направлении и ориентируем каждое ребро в направлении обхода. Тогда в каждую вершину G входит и выходит ровно по k стрелок.

Повторение: Эйлеров цикл - по всем рёбрам ровно 1 раз

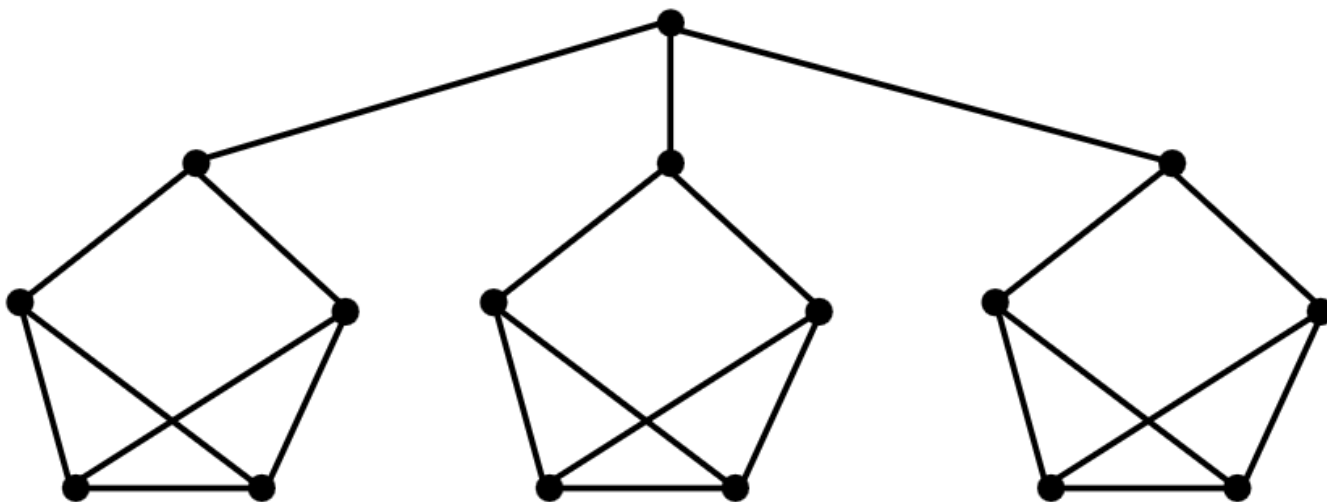
Повторение: Условие эйлерова цикла - все степени вершин чётны

- Построим граф G^* следующим образом. Разделим каждую вершину $v \in V(G)$ на две вершины v_1 и v_2 .
- Если ребро $xy \in E(G)$ ориентировано в обходе Эйлерова цикла от x к y , то проведем в графе G^* ребро x_1y_2 .
- Таким образом, существует биекция $\varphi : E(G) \rightarrow E(G^*)$, заданная правилом $\varphi(xy) = x_1y_2$.
- G^* — регулярный двудольный граф степени k с долями $\{v_1\}_{v \in V(G)}$ и $\{v_2\}_{v \in V(G)}$.
- По [2 следствию из теоремы Холла](#) в графе G^* есть совершенное паросочетание M^* .
- Пусть $M = \varphi^{-1}(M^*)$ (M состоит из рёбер графа G — прообразов рёбер M^* при биекции φ).
- Для любой вершины $x \in V(G)$ каждая из вершин $x_1, x_2 \in V(G^*)$ инцидентна ровно одному ребру из M^* .
- Поэтому x инцидентна ровно двум рёбрам из M , то есть, M — это 2-фактор графа G .

Следствия о регулярных факторах

1. Регулярный граф степени $2k$ есть объединение k своих 2-факторов.
2. Для любого $r \leq k$ регулярный граф степени $2k$ имеет $2r$ -фактор.

Все остальные утверждения вида “у регулярного графа степени k есть фактор степени r ” без дополнительных условий на граф неверны.



Билет 11. Теорема Томассена о почти регулярном факторе почти регулярного графа.

(C. Thomassen, 1981.) Пусть G — граф, степени всех вершин которого равны k или $k + 1$, а $r < k$. Тогда существует остовный подграф H графа G , степени всех вершин которого равны либо r , либо $r + 1$.

Доказательство

(Докажем по индукции спуском по r вниз)

База для $r = k$ очевидна, в этом случае подойдет $H = G$

Индукционный переход $r \rightarrow r - 1$

- Пусть граф G имеет остовный подграф F , степени вершин которого равны r или $r + 1$.
- Начиная с графа F , пока это возможно, будем производить следующую операцию: удалять ребро, соединяющее две вершины степени $r + 1$. В результате получится подграф F' графа F , степени вершин которого равны r или $r + 1$, в котором никакие две вершины степени $r + 1$ не смежны.
- Пусть V_{r+1} — множество всех вершин степени $r + 1$ в графе F' . Можно считать, что $V_{r+1} \neq \emptyset$, иначе граф F' нам подходит и теорема доказана.
- Пусть $V_r = V(G) \setminus V_{r+1}$, а B — двудольный граф с долями V_{r+1} и V_r , ребра которого — это $E_{F'}(V_{r+1}, V_r)$.
- Для каждой вершины $x \in V_{r+1}$ мы имеем $d_B(x) = r + 1$, а для каждой вершины $y \in V_r$ мы имеем $d_B(y) \leq r$.

- По [1 следствию из теоремы Холла](#), в графе B существует паросочетание M , покрывающее все вершины из V_{r+1} .
- Степени всех вершин графа $H = F' - M$ равны r или $r-1$.

Билет 12. Дефицит графа. Формула Бержа.

1. Пусть $S \subset V(G)$ таково, что $o(G-S) > |S|$. Мы будем называть S **множеством Татта** графа G .

По [теореме Татта](#), если в графе G нет совершенного паросочетания, то в нём есть хотя бы одно множество Татта.

2. **Дефицитом** графа G мы будем называть величину $\text{def}(G) := v(G) - 2\alpha'(G)$.

Повторение: $\alpha'(G)$ - **количество рёбер** в **максимальном** паросочетании графа G .

Повторение [билет 1](#)

Дефицит графа G — это количество вершин, не покрытых максимальным паросочетанием графа G .

- Очевидно, $\text{def}(G) = 0$ тогда и только тогда, когда в графе G есть совершенное паросочетание.
- Определение дефицита можно переписать в виде формулы для вычисления размера максимального паросочетания:

$$\alpha'(G) = \frac{v(G) - \text{def}(G)}{2}$$

Формула Бержа

(C. Berge, 1958.) Для любого графа G выполняется равенство

$$\text{def}(G) = \max_{S \subset V(G)} (o(G-S) - |S|)$$

?

Доказательство

\geq

- Пусть M — максимальное паросочетание графа G ,
 $S \subset V(G)$, $n = o(G-S)$, а U_1, \dots, U_n — все нечётные компоненты связности графа $G-S$.
- В каждой нечётной компоненте U_i существует хотя бы одна вершина u_i , которая не покрыта ребром M или покрыта ребром $e_i = u_i x_i \in M$, где $x_i \in S$.
- Следовательно, не менее, чем $n - |S|$ из вершин u_1, \dots, u_n не покрыты паросочетанием M , откуда следует неравенство

$$\text{def}(G) \geq o(G-S) - |S|$$

\leq

- Пусть

$$k = \max_{S \subset V(G)} (o(G-S) - |S|)$$

?

- Если $k = 0$, то по [теореме Татта](#) в графе G есть совершенное паросочетание и $\text{def}(G) = 0$, этот случай тривиален.
- Пусть $k > 0$, W — множество из k новых вершин ($W \cap V(G) = \emptyset$), а граф H получен присоединением к G вершин множества W , причём каждая из вершин множества W будет смежна со всеми остальными вершинами графа H .

Покажем, что для графа H выполняется условие Татта.

- Понятно, что $k \equiv v(G) \pmod{2}$, поэтому $v(H) = v(G) + k$ чётно. Таким образом, достаточно проверить условие для непустых множеств $T \subset V(H)$.
- Если $T \not\supset W$, то граф $H-T$ связан и $o(H-T) \leq 1 \leq |T|$.
- Если $T = W \cup S$, где $S \subset V(G)$, то
 $o(H-T) = o(G-S) \leq k + |S| = |T|$.
- В обоих случаях условие Татта выполняется и по [теореме Татта](#) в графе H есть совершенное паросочетание N .
- Тогда в графе G существует такое паросочетание M , что $|M| \geq |N| - k$, следовательно,

$$\alpha'(G) \geq |M| = |N| - k = \frac{v(H)}{2} - k = \frac{v(G) + k}{2} - k = \frac{v(G) - k}{2}$$

- откуда получим $k \geq v(G) - 2\alpha'(G)$
- подставив k и дефицит графа по его определению, получим искомое неравенство:

$$\text{def}(G) \leq \max_{S \subset V(G)} (o(G-S) - |S|)$$

Глава 3.2. Элементарная комбинаторика

Билет 1. Число сочетаний из n элементов по k . Формула для числа сочетаний.

Число сочетаний из n элементов по k — это количество k -элементных подмножеств в n -элементном множестве (где $0 \leq k \leq n$).

- Возможные обозначения: C_n^k или $\binom{k}{n}$?
- Это число можно интерпретировать как
 - число **строго** монотонно возрастающих функций $f : [1..k] \rightarrow [1..n]$;
 - число способов разложить k одинаковых шаров по n пронумерованным ящикам (в каждый ящик помещается не более одного шара)

Формула для числа сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Доказательство

Пусть $|X| = n$.

- Есть $A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ способов выбрать последовательность из k различных элементов X .
 - Каждая такая последовательность задает k -элементное подмножество X .
 - Каждое подмножество посчитано $k!$ раз, ибо его элементы можно упорядочить $k!$ способами.
- Итого, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ различных подмножеств.

Повторение: A_n^k Число размещений из n элементов по k — это количество последовательностей длины k , составленных из различных элементов n -элементного множества.

Билет 2. Число сочетаний с повторениями из n элементов по k . Формула для числа сочетаний с повторениями.

- **Число сочетаний с повторениями** из n элементов по k — это количество *неупорядоченных* наборов из k элементов n -элементного множества (в отличие от множества, в наборе один и тот же элемент может встречаться несколько раз).
- Возможные обозначения: \tilde{C}_n^k или $\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right)$.
- Это число можно интерпретировать как
 - число **нестрого** монотонно возрастающих функций $f : [1..k] \rightarrow [1..n]$;
 - число способов разложить k неразличимых шаров по n ящикам (в ящик можно класть любое число шаров);
 - число способов выбрать k предметов, если есть предметы n типов (на складе есть хотя бы по k предметов каждого типа; предметы одного типа абсолютно неразличимы).

Лемма

Число решений уравнения

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = k \tag{1}$$

в \mathbb{N}_0 равно \tilde{C}_n^k .

Доказательство.

- Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- Строим биекцию между решениями уравнения (1) и неупорядоченными наборами из k элементов множества X .
- Каждому решению (t_1, t_2, \dots, t_n) ставим в соответствие набор, состоящий из t_1 экземпляров элемента x_1 , t_2 экземпляров x_2 , \dots , t_n экземпляров x_n .
- Обратно, каждому набору \mathcal{T} ставим в соответствие решение (t_1, t_2, \dots, t_n) , где t_i — число экземпляров x_i в \mathcal{T} .

Формула для числа сочетаний с повторениями

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$$

Доказательство

- Расположим в ряд k шариков и $n-1$ перегородку.
- Всего есть C_{n+k-1}^k таких расположений.

- Обозначим через t_1 число шариков до первой перегородки; t_2 — между первой и второй перегородками; \dots ; t_n — после $(n-1)$ -й перегородки.
- Получаем биекцию между решениями уравнения (1) и такими расположениями шаров и перегородок, а значит $C_{n+k-1}^k = \tilde{C}_n^k$.

Билет 3. Простейшие свойства биномиальных коэффициентов. Алгебраические и комбинаторные доказательства. Треугольник Паскаля.

Свойство 1

$$C_n^k = C_n^{n-k} \text{ (очевидно)}$$

Свойство 2

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$$

Алгебраическое доказательство

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}$$

Комбинаторное доказательство

- Пусть $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.
- $(k+1)$ -элементные подмножества X бывают двух видов: содержащие x_0 и не содержащие x_0 .
- Если $x_0 \notin S \subset X$, то $S \subset X' = \{x_1, \dots, x_n\}$. Таких подмножеств C_n^{k+1} .
- Если $x_0 \in S \subset X$, то удалим x_0 из S . Получим подмножество $S' \subset X'$, где $|S'| = k$. Таких подмножеств C_n^k .

Треугольник Паскаля

			1					
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
	1	4		6		4	1	
1		5	10		10	5		1

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}.$$

Алгебраическое доказательство

$$kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = nC_{n-1}^{k-1}.$$

Комбинаторное доказательство

Как в левой, так и в правой части формулы записано число k -элементных подмножеств n -элементного множества, в которых один элемент отмечен.

Билет 4. Бином Ньютона. Сумма и знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов (алгебраические и комбинаторные доказательства).

Бином Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

Доказательство

- $(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b) \cdots (a + b)}_{n \text{ скобок}};$
- слагаемое $a^{n-k} b^k$ получается, если из k скобок выбрать b , а из остальных — a .
- Это можно сделать C_n^k способами.

Другое название чисел C_n^k — **биномиальные коэффициенты**.

Свойство 1

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$$

Комбинаторное доказательство

- В левой и в правой части записано число подмножеств n -элементного множества.

Свойство 2

$$C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = (1 - 1)^n = 0$$

Комбинаторное доказательство

Докажем, что $C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots$

- Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- Построим биекцию между всеми четными и всеми нечетными подмножествами X .
- Пусть $f(S) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} S \cup \{x_n\}, & x_n \notin S, \\ S \setminus \{x_n\}, & x_n \in S. \end{cases}$
- Получаем отображение $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, обладающее следующим свойством:
 $\forall S (f(f(S)) = S)$
 - Отображение, обладающее таким свойством называется **инволюцией**.
 - В частности, это означает, что f обратен самому себе, следовательно, f — биекция.
- При этом, $|S|$ и $|f(S)|$ всегда имеют разную четность.
- Таким образом, f также задает биекцию между всем четными и всеми нечетными подмножествами X

Свойство 3

$$C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots = 2^{n-1}$$

Билет 5. Мультиномиальные коэффициенты. Определение и формула. Обобщенный бином Ньютона.

Пусть $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$, где $m \in \mathbb{N}$ и $n, k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0$.

- **Мультиномиальным коэффициентом** (или **полиномиальным коэффициентом**) - число способов разбить n -элементное множество X на m непересекающихся подмножеств X_1, X_2, \dots, X_m , где $|X_i| = k_i$, обозначается $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$.

Формула мультиномиального коэффициента

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

Доказательство

- Есть $n!$ способов упорядочить элементы множества X .
- Для каждого способа, помещаем первые k_1 элементов в X_1 ; следующие k_2 элементов в X_2 и т. д.
- Получаем разбиение X на подмножества нужного размера.
- Каждое разбиение посчитано $k_1! k_2! \dots k_m!$ раз.

Обобщенный бином Ньютона

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$$

Доказательство

Аналогично доказательству [Бинома Ньютона](#)

- При раскрытии скобок слагаемое $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$ получается, если выбрать из k_1 скобок слагаемое a_1 , из k_2 скобок слагаемое a_2 , ..., из k_m скобок слагаемое a_m .
- Такой выбор можно сделать в точности $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$ способами.

Билет 6. Формула включений-исключений. Переформулировка этой формулы в терминах свойств.

1. Пусть A, B — конечные множества. Тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

2. Пусть A, B, C — конечные множества. Тогда

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

Формула включений-исключений

Пусть A_1, \dots, A_n — конечные множества. Тогда

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subset [1..n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \quad (1)$$

Объяснение: $\emptyset \neq I \subset [1..n]$ - I пробегает все непустые подмножества множества индексов $[1..n]$.

Доказательство

- Пусть $x \in A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ и x не принадлежит остальным A_j .
- Тогда x учитывается в формуле (1) с коэффициентом $\sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell+1} C_k^\ell = 1$
- Так как каждый элемент учитывается ровно 1 раз, то формула (1) верна

Формула включений-исключений в терминах свойств

Пусть X — конечное множество, $|X| = N$;

- P_1, \dots, P_n — свойства элементов множества X (т. е. одноместные предикаты на X);

Повторение: **Предикат** — это логическая функция или высказывание, зависящее от одного(**одноместный**) или нескольких(**многоместный**) аргументов, которое может быть либо **истинно**, либо **ложно**.

- N_{i_1, \dots, i_k} — число элементов, удовлетворяющих P_{i_1}, \dots, P_{i_k} ;
- $N(0)$ — число элементов, не удовлетворяющих ни одному свойству.

Тогда

$$\begin{aligned} N(0) = N - \sum_i N_i + \sum_{i_1 < i_2} N_{i_1, i_2} - \\ \dots + (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} N_{i_1, \dots, i_k} + \dots + (-1)^n N_{1, \dots, n} \end{aligned} \quad (2)$$

Билет 7. Субфакториалы. Определение и рекуррентное соотношение для субфакториалов. Связь с обычными факториалами.

1. **Перестановкой** на множестве M называется произвольная биекция $\sigma : M \rightarrow M$.
2. **Неподвижной точкой** перестановки σ называется такой элемент $x \in M$, что $\sigma(x) = x$.
3. S_n — множество всех перестановок на $[1..n]$.

Повторение: $|S_n| = n!$

4. $D(n)$ — **(Субфакториал)** число перестановок из S_n , **не имеющих неподвижных точек**.

Рекуррентная формула субфакториала

$$D(n+1) = n(D(n) + D(n-1))$$

Доказательство

Пусть $\sigma \in S_{n+1}$; $k = \sigma(n+1)$; $\ell = \sigma^{-1}(n+1)$

Объяснение: k - куда переставили $(n+1)$ -й элемент, а ℓ - откуда переставили

- Возможны два случая: $k \neq \ell$ или $k = \ell$.
 1. Пусть $k \neq \ell$:
 - Тогда $\sigma'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sigma(x), & x \neq \ell, \\ k, & x = \ell, \end{cases}$ — перестановка из S_n без неподвижных точек.
 - Для каждого $k \in [1..n]$ есть $D(n)$ таких перестановок.
 2. Пусть $k = \ell$:
 - Тогда $\sigma|_{[1..n] \setminus \{k\}}$ — перестановка на $[1..n] \setminus \{k\}$ без неподвижных точек.
 - Для каждого $k \in [1..n]$ есть $D(n-1)$ таких перестановок.
- Итого, получаем $nD(n) + nD(n-1)$ перестановок без неподвижных точек.

$D(n)$ — **Субфакториал**, так как для обычных факториалов выполняется такое же соотношение:
 $(n+1)! = n(n! + (n-1)!)$

Билет 8. Явная формула для субфакториала. Следствие о ближайшем целом числе к $\frac{n!}{e}$.

Явная формула субфакториала

$$D(n) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Доказательство

Пусть $X = S_n$

- P_i — свойство “ $\sigma(i) = i$ ” для перестановки $\sigma \in S_n$
- Тогда $N = n!$ и $N_{i_1, \dots, i_k} = (n-k)!$

- По формуле [включений-исключений](#) имеем: $D(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k)! C_n^k = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

Следствие

$$D(n) = \text{round}\left(\frac{n!}{e}\right); \text{ более того, } \left|D(n) - \frac{n!}{e}\right| < \frac{1}{n+1}$$

Доказательство

Напомним, что $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, тогда

Абсолютно очевидные действия:

Разложим $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ с использованием бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{x}{n}\right)^k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{x}{n}\right)^k\right) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \frac{x^k}{n^k}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{n!}{e} &= n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = D(n) + (-1)^{n+1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!}; \\ \bullet \quad \left|D(n) - \frac{n!}{e}\right| &= \left|\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!}\right| = \\ &= \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots\right| \\ \bullet \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!} &= \left(\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{n!}{(n+2)!}\right) + \left(\frac{n!}{(n+3)!} - \frac{n!}{(n+4)!}\right) + \dots > 0 \end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!} = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{n!}{(n+2)!} - \frac{n!}{(n+3)!} \right) - \left(\frac{n!}{(n+4)!} - \frac{n!}{(n+5)!} \right) - \dots < \frac{1}{n+1}.$$

Билет 9. Функция Эйлера. Определение и формула (доказательство с помощью формулы включений-исключений).

1. Натуральные числа a и b называются **взаимно простыми**, если у них нет общего натурального делителя, отличного от единицы.
2. $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел, меньше либо равных n и взаимно простых с n (функция Эйлера).

Формула функции Эйлера

Пусть $n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ (где p_1, \dots, p_s — различные простые и a_1, \dots, a_s — натуральные числа).

Тогда

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$$

Доказательство

Пусть $X = [1..n]$.

- P_i — свойство “ $x : p_i$ ” для числа $x \in X$
- Тогда $N_{i_1, \dots, i_k} = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}$
- По формуле [включений-исключений](#) имеем:

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$$

Билет 10. Формула для числа сюръекций.

Формула числа сюръективных отображений

Пусть $f : [1..k] \rightarrow [1..n]$ - сюръекция, тогда

$\sum_{s=1}^n (-1)^{n-s} C_n^s s^k$ - число сюръекций

Доказательство

- Пусть X — множество всех отображений $f : [1..k] \rightarrow [1..n]$
- P_i — свойство “ $f^{-1}(i) = \emptyset$ ” для отображения $f \in X$
 - Тогда $N = |X| = n^k$
 - $N_{i_1, \dots, i_\ell} = (n - \ell)^k$ — количество функций, удовлетворяющих данным ℓ свойствам.
 - $f \in X$ — сюръекция $\Leftrightarrow f$ не удовлетворяет ни одному из свойств. Следовательно, число сюръекций равно $N(0)$.

$N(0)$ — число элементов, не удовлетворяющих ни одному свойству

- По формуле [включений-исключений](#) имеем:

$$N(0) = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell C_n^\ell (n - \ell)^k = \sum_{s=1}^n (-1)^{n-s} C_n^s s^k$$

Последнее равенство получено заменой переменной $s = n - \ell$