Глава 3.1. Паросочетания, независимые множества и покрытия

Билет 1. Независимые множества, паросочетания и покрытия в графе. Теорема Галлаи.

1. Множество вершин $U \subset V(G)$ называется **независимым**, если никакие две его вершины не смежны.

> *Обозначение*: $\alpha(G)$ - **количество вершин** в **максимальном** независимом множестве графа G.

2. Множество рёбер $M \subset E(G)$ называется **паросочетанием**, если никакие два его ребра не имеют общей вершины.

> *Обозначение*: $\alpha'(G)$ - **количество рёбер** в **максимальном** паросочетании графа G.

3. Будем говорить, что множество вершин $W \subset V(G)$ **покрывает** ребро $e \in E(G)$, если существует вершина $w \in W$, инцидентная e.

4. Будем говорить, что множество рёбер $F \subset E(G)$ **покрывает** вершину $v \in V(G)$, если существует ребро $f \in F$, инцидентное v .

5. Паросочетание M графа G называется совершенным, если оно покрывает все вершины графа.

6. Множество вершин $W \subset V(G)$ называется вершинным покрытием, если оно покрывает все рёбра графа.

> *Обозначение*: $\beta(G)$ **количество вершин** в **минимальном** вершинном покрытии графа G .

7. Множество рёбер $F \subset E(G)$ называется рёберным покрытием, если оно покрывает все вершины графа.

> *Обозначение*: $\beta'(G)$ **количество рёбер** в **минимальном** рёберном покрытии графа G .

Лемма 1

1. $U \subset V(G)$ – независимое множество, если и только если $V(G) \setminus U$ – вершинное покрытие.
2. $\alpha(G) + \beta(G) = v(G)$. (Верно для любого графа).

> *Повторение*: $\alpha(G)$ - **количество вершин** в **максимальном** независимом множестве графа G.
> *Повторение*: $\beta(G)$ **количество вершин** в **минимальном** вершинном покрытии графа G

Доказательство

$U \subset V(G)$ – максимальное независимое множество, если и только если $V(G) \setminus U$ – минимальное вершинное покрытие

Теорема Галлаи

(T. Gallai, 1959) Пусть G – граф с $\delta(G) > 0$. Тогда $\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$

> *Повторение*: $\delta(G)$ - минимальная степень вершины графа G.
> *Повторение*: $\alpha'(G)$ - **количество рёбер** в **максимальном** паросочетании графа G.
> *Повторение*: $\beta'(G)$ **количество рёбер** в **минимальном** рёберном покрытии графа G .

Доказательство (сначала $\leq$ потом $\geq$)

$\leq$

- Пусть M – **максимальное паросочетание**, U – множество **не покрытых** M вершин графа, тогда $|U| = v(G) - 2\alpha'(G)$.
- Так как $\delta(G) > 0$, можно выбрать множество F из $|U|$ рёбер, покрывающее U.
- Тогда $M \cup F$ – покрытие, следовательно, $\beta'(G) \leq |M \cup F| = \alpha'(G) + v(G) - 2\alpha'(G)$, откуда $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq v(G)$.

$\geq$

- Пусть L – минимальное рёберное покрытие $(|L| = \beta'(G))$, а $H = (V(G), L)$.

> *Обьяснение*: $H = (V(G), L)$ - граф H образован из вершин графа G и ребёр покрытия L.

- Так как в графе H нет вершин степени 0, в каждой компоненте графа H можно выбрать по ребру, в результате получится паросочетание N в графе H (а значит, и в G).
- Следовательно, $\alpha'(G) \geq |N| = c(H)$ и $\beta'(G) = |L| = e(H) \geq v(H) - c(H) = v(G) - c(H) \geq v(G) - \alpha'(G)$, откуда следует $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq v(G)$.

> *Повторение*: $c(H)$ - число компонент связности графа H

- Получаем, что $\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$.

Билет 2. Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.

Пусть M — паросочетание в графе G.

1. Назовём путь M-***чередующимся***, если в нём чередуются рёбра из M и рёбра, не входящие в M.
2. Назовём M-чередующийся путь M-***дополняющим***, если его начало и конец не покрыты паросочетанием M.

> *Уточнение:* в этот путь могут входить и не все рёбра из M

• В M-***дополняющем*** пути нечётное число рёбер, причем рёбер из паросочетания M на одно меньше, чем рёбер, не входящих в M

Теорема Бержа

(C. Berge, 1957) Паросочетание M в графе G является *максимальным* тогда и только тогда, когда нет M-***дополняющих*** путей.

Доказательство

$\Rightarrow$

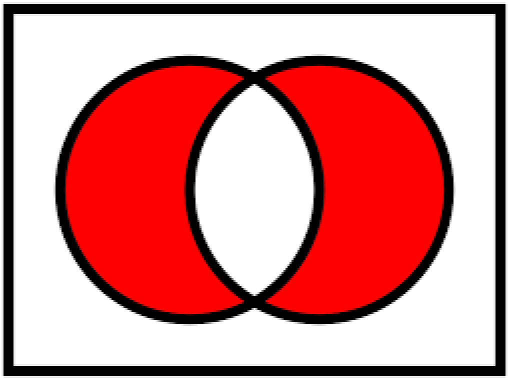
- Пусть в графе G существует M-**дополняющий путь** $S = a_1 a_2 \dots a_{2k}$.
- Тогда **заменим** входящие в M рёбра $a_2 a_3, \dots, a_{2k-2} a_{2k-1}$ на не входящие в M рёбра $a_1 a_2, a_3 a_4, ..., a_{2k-1} a_{2k}$, и тем самым получим **большее паросочетание**. Противоречие.

$\Leftarrow$

- Пусть M — **не максимальное** паросочетание, тогда рассмотрим максимальное паросочетание M', $|M'| > |M|$.
- Пусть $N = M \Delta M'$, $H = G(N)$. Для любой вершины $v \in V(H)$ мы имеем $d_H(v) \in \{1, 2\}$, следовательно, H — объединение нескольких путей и циклов.

> *Объяснение*: H — это подграф графа G, порождённый рёбрами из N

- В каждом из этих путей и циклов рёбра паросочетаний M и M' **чередуются**. Так как рёбер из M' в $E(H)$ больше, хотя бы одна компонента P графа H — **путь нечётной длины**, в котором больше рёбер из M'. Легко понять, что P — это M**-дополняющий** путь. Противоречие.

> *Объяснение*: $M \Delta M'$ - это симметрическая разность: $M \Delta M' = (M \setminus M') \cup (M' \setminus M)$
>
> 

Билет 3. Теорема Холла.

- Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф с долями V_1 и V_2.

(P. Hall, 1935.) В двудольном графе G есть паросочетание, покрывающее все вершины доли V_1, **если и только если** для **любого** множества $U \subset V_1$ выполняется $|U| \leq |N_G(U)|$.

> *Повторение*: $|N_G(U)|$ окрестность множества вершин U — множество всех вершин графа G , смежных с вершинами из U.
> *Повторение*: Граф называется **двудольным**, если его вершины можно разбить на два множества (т.е. две доли), внутри которых **нет** рёбер.

• Условие о размере окрестности из теоремы Холла мы будем называть **условием Холла** для доли V_1.

Доказательство

$\Rightarrow$
Очевидно, так как концы рёбер паросочетания, покрывающих вершины из U — **разные** вершины из $N_G(U)$.
$\Leftarrow$
Докажем **по индукции** по количеству вершин в графе:
База для $|V_1| = 1$ очевидна.

Индукционный переход: Предположим, что для меньшего чем G графа утверждение уже доказано.

Разберём два случая.

Случай 1:

Существует такое непустое множество $A \subsetneq V_1$, что $|A| = |N_G(A)|$.

- Введём **обозначения** $B = N_G(A)$, $A' = V_1 \setminus A$, $B' = V_2 \setminus B$.
  Пусть $G_1 = G(A \cup B)$, $G_2 = G(A' \cup B')$.
- Очевидно, для двудольного графа G_1 и его доли A **выполняется условие Холла**. По индукционному предположению в графе G_1 существует паросочетание M_1, покрывающее A.
- Проверим **условие Холла** для двудольного графа G_2 и его доли A'. Рассмотрим $U \subset A'$.
  Тогда
  $|U| + |A| = |U \cup A| \leq |N_G(U \cup A)| = |N_{G_2}(U) \cup B| = |N_{G_2}(U)| + |B| = |N_{G_2}(U)| + |A|$, откуда следует $|U| \leq |N_{G_2}(U)|$.
- Значит, в графе G_2 **существует** паросочетание M_2, покрывающее все вершины из A'. Тогда $M_1 \cup M_2$ – паросочетание в G , покрывающее V_1.

Случай 2:

Для любого непустого множества $A \subsetneq V_1$ выполняется $|A| < |N_G(A)|$.

- Рассмотрим произвольную вершину $a \in V_1$ и смежную с ней вершину $b \in V_2$.
- Пусть $G' = G - a - b$.
- **Проверим условие Холла** для двудольного графа G' и его доли $V_1 \setminus a$.
- Для любого множества $A \subset V_1 \setminus \{a\}$ выполняется
  $|A| \leq |N_G(A)| - 1 \leq |N_G(A) \setminus \{b\}| = |N_{G'}(A)|$.
- Поэтому в графе G' существует паросочетание, покрывающее $V_1 \setminus \{a\}$. Вместе с ребром ab получаем искомое паросочетание.

Билет 4. Следствия из теоремы Холла: паросочетания в двудольном графе, где степени одной доли больше чем другой, а также в регулярном двудольном графе.

Следствие 1

В двудольном графе $G = (V_1, V_2, E)$ все вершины из V_1 имеют степени **не меньше** k, а все вершины V_2 имеют степени **не больше** k. *Тогда* есть **паросочетание**, покрывающее V_1.

Доказательство

- Проверим **условие Холла** для доли V_1.
  Пусть $A \subset V_1(G)$, тогда из вершин A **выходит не менее** чем $k \cdot |A|$ рёбер к вершинам из $N_G(A)$, а в каждую вершину $b \in N_G(A)$ **входит не более**, чем k рёбер из вершин множества A.
- Таким образом,
  $k|A| \le e_G(A, N_G(A)) \le k|N_G(A)|$,
  откуда $|A| \le |N_G(A)|$

> *Обозначение*: $e_G(A, N_G(A))$ - количество рёбер, соединяющих вершины множества A с вершинами множества $N_G(A)$

Следствие 2

(D. König, 1916.) Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ – **регулярный двудольный граф степени** k. Тогда G есть объединение k своих **совершенных паросочетаний**.

Доказательство

- По Следствию 1 в G существует **паросочетание** M, покрывающее V_1.
- Так как степени всех вершин **равны по** k, а каждое ребро соединяет V_1 и V_2, мы имеем $k|V_1| = e(G) = k|V_2|$.
- Следовательно, $|V_1| = |V_2|$.
- Поэтому, паросочетание M **покрывает и долю** V_2, то есть, M – **совершенное**.
- $G - M$ – **регулярный двудольный граф степени** $k-1$. Продолжая выделять совершенные паросочетания, мы разобьём граф G на k паросочетаний.

Билет 5. Теорема о гареме.

В одной далекой стране проживают юноши $\{A_1, \dots, A_n\}$.
Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, юноша A_i хочет **завести гарем** из k_i знакомых ему девушек (естественно, $k_i \in \mathbb{N}$).
Они могут это **одновременно сделать** *тогда и только тогда, когда* для **любого** множества юношей

количество знакомых **хотя бы одному** из них девушек **не меньше**, чем сумма желаемых ими размеров гаремов.

Доказательство

- Построим **двудольный граф** $G = (V_1, V_2, E)$.
- Вершины доли V_1 соответствуют **юношам** — каждому A_i **соответствует** k_i **вершин** $a_{i,1}, \dots, a_{i,k_i}$ (назовем их копиями A_i).
- Вершины доли V_2 соответствуют **девушкам**. Каждая **вершина** $a_{i,j} \in V_1$ **соединена** в точности с теми девушками из V_2, с которыми **знаком юноша** A_i.
- *Проверим, что для доли* V_1 *выполнено условие Холла.*
- Пусть $M \subset V_1$, а $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ — все юноши, **чьи копии есть в** M.

> *Объяснение:* индекс i у $A_{i_1} \neq$ индексу i у A_{i_m}

- Тогда $|N_G(M)| \geq k_{i_1} + \dots + k_{i_m}$ (в $N_G(M)$ входят **все девушки**, знакомые с $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$).
- В то же время, $|M| \leq k_{i_1} + \dots + k_{i_m}$ (в M не может входить больше копий $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$, чем их существует).
- Таким образом, в G есть **паросочетание, покрывающее** V_1.
- Для каждого A_i **девушки, входящие в пары** с его копиями, **образуют гарем** желаемого размера.

Билет 6. Теорема Кёнига и ее следствие.

Теорема Кёнига

(D. König, 1931.) Пусть G — двудольный граф. Тогда $\alpha'(G) = \beta(G)$

> *Повторение*: $\alpha'(G)$ - **количество рёбер** в **максимальном** паросочетании графа G.
> *Повторение*: $\beta(G)$ **количество вершин** в **минимальном** вершинном покрытии графа G
> *Повторение* билет 1

Доказательство (сначала $\leq$, потом $\geq$)

$\leq$

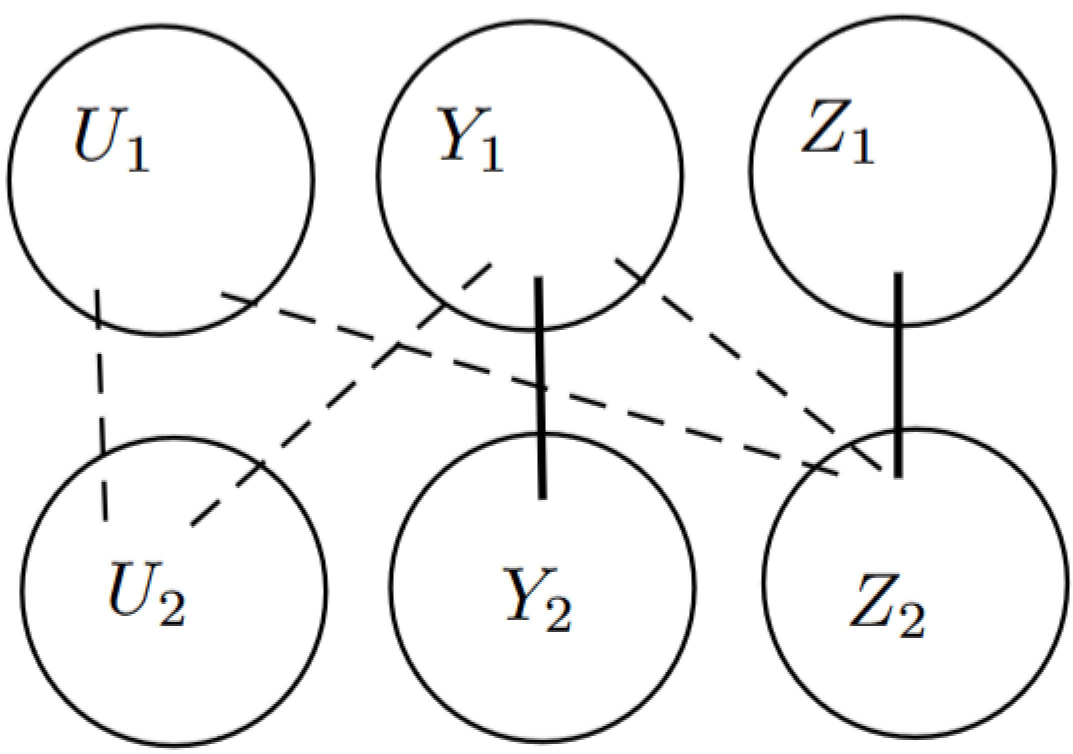
- Так как рёбра паросочетания **не имеют общих концов**, то в любом вершинном покрытии **не меньше вершин**, чем в любом паросочетании рёбер. Следовательно, $\alpha'(G) \leq \beta(G)$.

$\geq$

- Пусть M — **максимальное паросочетание** в графе G,
  U_1 — множество всех **непокрытых** этим паросочетанием **вершин** V_1,
  U_2 — множество **непокрытых** M **вершин** V_2.
- **Разобьём** все покрытые паросочетанием M **вершины** V_1 на два множества:
  Y_1 — те вершины, до которых **можно дойти** от U_1 по M-**чередующимся** путям,
  а Z_1 — вершины, до которых **дойти таким образом нельзя**.
- **Разобьём** все покрытые паросочетанием M **вершины** V_2 на два множества:
  Y_2 — те вершины, до которых **можно дойти** от U_1 по M-**чередующимся** путям,
  а Z_2 — вершины, до которых **дойти таким образом нельзя**.

Выясним, как должны проходить рёбра паросочетания M и остальные рёбра графа G ***между*** *определенными выше* ***множествами вершин***.

- На рисунке **сплошными линиями** показаны **рёбра паросочетания** M, **пунктирными линиями — невозможные рёбра**.
  Далее мы объясним, почему граф устроен именно так.
- Любой M-**чередующийся путь** приходит в вершины множества Y_1 по ребрам из M, поэтому **предыдущая вершина** перед Y_1 на таком пути **должна лежать в** Y_2.
- **Рёбра** паросочетания M **не могут соединять** Y_2 с Z_1 (иначе был бы M-чередующийся путь от U_1 до Z_1).
- Следовательно, **паросочетание** M **соединяет** друг с другом Y_1 **и** Y_2 а также Z_1 **и** Z_2



Докажем, что $B = Z_1 \cup Y_2$ **— вершинное покрытие.**

- $E_G(U_1 \cup Y_1, Z_2) = \varnothing$. (Рёбра не из M **не могут соединять вершины** из $U_1 \cup Y_1$ **с вершинами** из Z_2: иначе был бы M-**чередующийся** путь от U_1 до Z_2)
- $E_G(U_1 \cup Y_1, U_2) = \varnothing$. (Если бы такое ребро существовало, то существовал бы M -**дополняющий** путь, что по теореме Бержа для **максимального паросочетания** M невозможно.)
  Так как B – **вершинное покрытие** и $|M| = |B|$, имеем $\alpha'(G) \geq \beta(G)$.

Следствие из теорем Кенига и Галлаи

Пусть G – **двудольный граф** с $\delta(G) > 0$. Тогда $\alpha(G) = \beta'(G)$.

> *Обозначение*: $\alpha(G)$ - **количество вершин** в **максимальном** независимом множестве графа G
> *Обозначение*: $\beta'(G)$ **количество рёбер** в **минимальном** рёберном покрытии графа G .
> *Повторение*: билет 1

Доказательство

- По Теореме Кёнига для двудольного графа выполняется соотношение $\alpha'(G) = \beta(G)$.
- По Лемме 1 для любого графа
  $\alpha(G) + \beta(G) = v(G)$
- По Теореме Галлаи , так как $\delta(G) > 0$, то
  $\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$
- Решив систему, следует, что $\alpha(G) = \beta'(G)$.

Билет 7. Паросочетания с предпочтениями. Теорема Гэйла-Шепли.

> Иногда вершинам не всё равно, с какими вершинами “вступать в **паросочетание**”.
> Предположим, что каждая вершина имеет **список предпочтений**, то есть, **упорядочивает** инцидентные ей рёбра.
> Построим такое **паросочетание** M (не обязательно максимальное), что в нём не будет ребра $e = ab$, которое обе вершины a и b **хотели бы поменять** на свободные рёбра. Дадим строгие определения

1. Пусть для каждой вершины $v \in V(G)$ задано **линейное отношение** (нестрогого) порядка $\leq_v$ **на множестве** всех инцидентных v **рёбер** из $E(G)$.
   Тогда $\leq = \{\leq_v\}_{v \in V(G)}$ – **множество предпочтений**.

> Например, если у вершины v есть рёбра e_1, e_2,e_3, то она может сказать, что $e_1 \leq_v e_2 \leq_v e_3$, где e_1 **наименее предпочтительное** ребро, а e_3 — **наиболее**

2. Паросочетание M называется **стабильным** для множества предпочтений $\leq$, если **для любого ребра** $f \notin M$ существует такое ребро $e \in M$, что e и f имеют **общий конец** v и $f \leq_v e$.

> *Объяснение* $f \leq_v e$: вершина v **предпочитает** ребро e, уже включённое в паросочетание, ребру f, которого нет в паросочетании.

> Ни одно ребро $f \notin M$ **не может “разрушить” стабильность**, потому что для вершины v, которая соединена с f, **уже существует ребро** $e \in M$, которое для этой вершины **лучше** (или равно по предпочтению), чем f, а значит ребро f **не может быть включёно** в стабильное паросочетание.

Stable marriage theorem (теорема о деревенских свадьбах)

(D. Gale, L. Shapley, 1962.) Пусть G — **двудольный граф**. Тогда для любого множества предпочтений $\leq$ в графе G существует **стабильное паросочетание**.

Доказательство

- Будем считать вершины **одной доли мужчинами**, а вершины **другой доли — женщинами**, а наше паросочетание будет состоять из семейных пар. **Изначально наше паросочетание пусто**, оно будет изменяться пошагово.

Опишем шаг алгоритма изменения паросочетания.

- Сначала действуют **мужчины**:
  каждый **неженатый** (то есть, не покрытый паросочетанием) **мужчина выбирает женщину**, которая ему больше всех нравится (то есть, наивысшую в своем предпочтении) из тех, **которым он еще не делал предложения** (если такие есть), после чего делает ей предложение.
- Затем действуют **женщины**:
  каждая из них **рассматривает всех мужчин**, кто сделал ей предложение и нравится ей строго больше, чем ее муж (если он есть). Если это множество непусто, она **выбирает из них того, кто нравится ей больше всего** (если таких несколько, то любого из них) и выходит за него замуж (вместо ее прежнего мужа, если он был) ~~ш-общительная~~.
- Конечность алгоритма очевидна: никакой мужчина **не делает предложение одной женщине дважды**. Пусть в результате получилось паросочетнание М.

Докажем, что M *стабильно.*

- Рассмотрим любое ребро $uw \in E(G) \setminus M$ (где u — мужчина).
- Если u **делал предложение** w , то
  - либо w ему **отказала**,
  - либо сначала **приняла** предложение, но потом **бросила**,
- Значит w **нашла мужа** u', который ей нравится **не меньше, чем** u (то есть, существует ребро $u'w \in M$, для которого $uw \le_w u'w$).
- Если же u **не делал предложения** w , то в процессе алгоритма **нашел жену** w', которая нравится ему **не меньше, чем** w (то есть, существует ребро $uw' \in M$, для которого $uw \le_u uw'$).
- Таким образом, построеннное паросочетание **стабильно по определению**.

Билет 8. Теорема Татта о совершенном паросочетании.

> *Обозначение*: $o(G)$ - **количество нечётных компонент связности** произвольного графа G (то есть, компонент связности, содержащих нечётное число вершин).

Теорема Татта

(W. T. Tutte, 1947.) В графе G существует **совершенное паросочетание** *тогда и только тогда, когда* для любого $S \subset V(G)$ **выполняется условие** $o(G - S) \le |S|$

> *Повторение:* Совершенное паросочетание - покрывающее все вершины графа.
>
> *Повторение:* билет 1

Доказательство

$\Rightarrow$
Необходимость условия почти очевидна.

- Пусть $S \subset V(G)$, а M — совершенное паросочетание.
- Тогда **одна из вершин каждой нечетной компоненты** связности графа $G - S$ должна быть **соединена с вершиной из** S ребром паросочетания M и все эти вершины — разные!

> *Объяснение*: "должна быть соединена с вершиной из S" (*в* ***нечетной*** *компоненте связности* ***нечётное*** *число вершин* $\Rightarrow$ *останется ровно одна вершина,* ***непокрытая*** *паросочетанием*),

- А значит должно выполняться $o(G - S) \le |S|$

$\Leftarrow$
Докажем от противного

- Предположим, что граф удовлетворяет условию, но **не имеет совершенного паросочетания**. Тогда, в частности, $o(G - \varnothing) \le |\varnothing| = 0$, то есть, $v(G)$ **чётно**.
- Пусть G^* — **максимальный надграф** G на том же множестве вершин, **не имеющий совершенного паросочетания**. Мы **построим** совершенное паросочетание в G^* и придем к противоречию.
- Для любого $S \subset V(G)$ очевидно, выполняется неравенство $o(G^* - S) \le o(G - S) \le |S|$.
- Пусть $U = \{u \in V(G) : d_{G^*}(u) = v(G) - 1\}$.
  Очевидно, G^* — **не полный граф**, поэтому $U \neq V(G)$.

> *Объяснение*: из-за $d_{G^*}(u) = v(G) - 1$ мы получили, что вершины U смежны всем вершинам подграфа

Докажем, что граф $G^* - U$ — объединение нескольких несвязанных друг с другом полных графов

Поддоказательство (от противного)

- Предположим, что это не так. Тогда **существуют** такие **вершины** x, y , $z \in V(G) \setminus U$, что $xy, yz \in E(G^*)$, но $xz \notin E(G^*)$.
- Так как $y \notin U$, то **существует** такая **вершина** $w \notin U$, что $yw \notin E(G^*)$.
- Ввиду максимальности графа G^* существуют:
  совершенное паросочетание M_1 в графе $G^* + xz$,
  совершенное паросочетание M_2 в графе $G^* + yw$.
  Так как в графе G^* нет совершенного паросочетания, $xz \in M_1$ и $yw \in M_2$.
- Пусть $H = (V(G), M_1 \Delta M_2)$. Очевидно, граф H — **несвязное объединение чётных циклов**, в каждом из которых **чередуются** рёбра паросочетаний M_1 и M_2.

> *Объяснение*: Так как $M_1 \Delta M_2$ - **симметрическая разность**, в графе H будет **равное количество рёбер** из M_1 и M_2.
> *Объяснение*: **Нечётных циклов** быть **не может**, так как **рёбра** после удаления повторяющихся **чередуются**, а их **количество** в каждой компоненте **одинаково**.
> *Объяснение*: **Путей** быть **не может**, так как паросочетания были **совершенными** и мы удаляли только повторяющиеся рёбра.

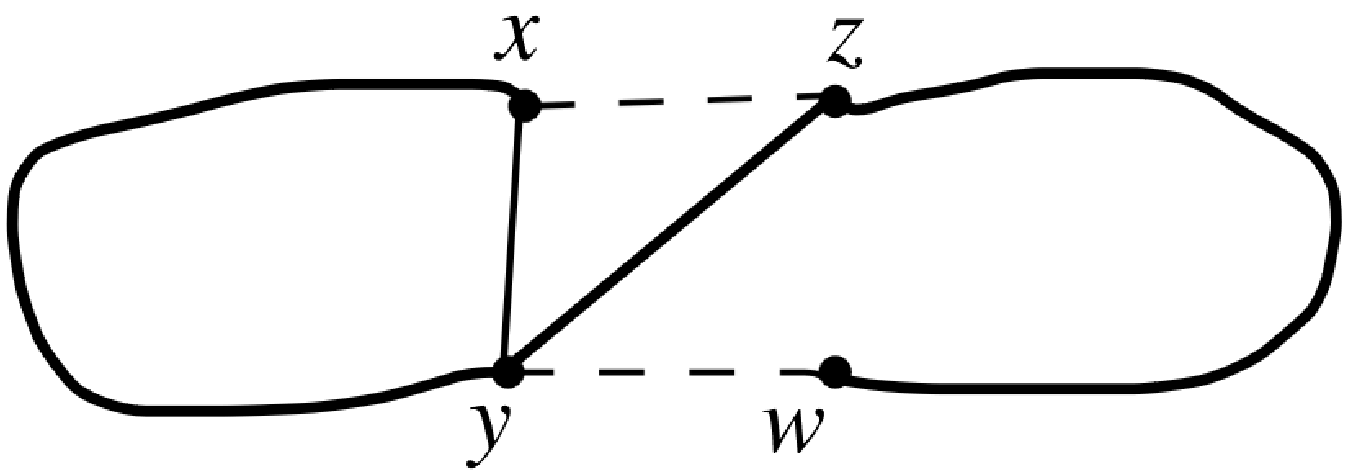
- Рёбра xz и yw принадлежат **ровно одному из паросочетаний** M_1 и M_2, и потому **лежат в** $E(H)$.
- На вершинах **любой компоненты** связности графа H **существует совершенное паросочетание** с рёбрами из M_1 и **совершенное паросочетание** с рёбрами из M_2.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Рёбра xz и yw лежат в разных компонентах C_1 и C_2 графа H

- Тогда на вершинах C_1 мы **выберем рёбра паросочетания M_2**,
  на вершинах C_2 мы **выберем рёбра паросочетания M_1**,
  а в остальных **компонентах** графа H — **любое из этих паросочетаний**.
- В итоге получится **совершенное паросочетание** графа G^*, противоречие.

Случай 2. Рёбра xz и yw лежат в одной компоненте C графа H.



- В силу **симметричности** x и z можно считать, что вершины расположены **в чётном цикле** C в порядке $ywzx$ (см. рисунок).
- Рассмотрим **простой путь** $P = xCyzCw$, состоящий из **двух дуг цикла** C и **ребра** yz (*оно есть в графе G^* по построению*).
- Тогда $V(P) = V(C)$ и $E(P) \subset E(G^*)$.
- Следовательно, существует **совершенное паросочетание** $M_C \subset E(G^*)$ **на вершинах компоненты** связности C.
- В остальных **компонентах** графа H выберем рёбра **любого из паросочетаний** M_1 и M_2.
- В итоге получится **совершенное паросочетание** графа G^*, противоречие.

Вернёмся к [основному доказательству]()

- **Граф** $G^* - U$ есть **объединение** нескольких **несвязанных полных графов**. В силу условия $o(G-U) \le |U|$, среди них **не более чем** $|U|$ имеет **нечетное** число вершин.
- В каждой **чётной компоненте** графа $G^* - U$ мы построим **полное паросочетание**,
- В каждой **нечётной компоненте** — **паросочетание**, покрывающее все вершины, **кроме одной**, а оставшуюся вершину **соединим с вершиной из** U (*при этом мы используем **различные вершины** множества U: их хватит ввиду $o(G^* - U) \le |U|$*).

- Наконец, мы **разобьём на пары оставшиеся** непокрытыми вершины множества U (*это можно сделать, так как каждая из этих вершин* ***смежна*** *в графе* U *со всеми остальными по построению графа* U).
- Таким образом, мы получили **совершенное паросочетание** в графе G^*, противоречие.

Билет 9. Теорема Петерсена о совершенном паросочетании в регулярном графе степени 3.

1. **Кубический граф** - граф, все вершины которого имеют степень 3.
2. **Мост графа** — ребро, не входящее ни в один цикл

Теорема Петерсена

(J. Petersen, 1891.) Пусть G — **связный кубический граф**, в котором не более **двух мостов**. *Тогда* в графе G есть **совершенное паросочетание**.

Доказательство

- Предположим, что **совершенного паросочетания** в G **нет**. Тогда по Теореме Татта существует такое множество $S \subset V(G)$, что $o(G - S) > |S|$.
- Так как в кубическом графе **четное число вершин**, то $S \neq \varnothing$ и $o(G - S) \equiv |S| \pmod 2$.

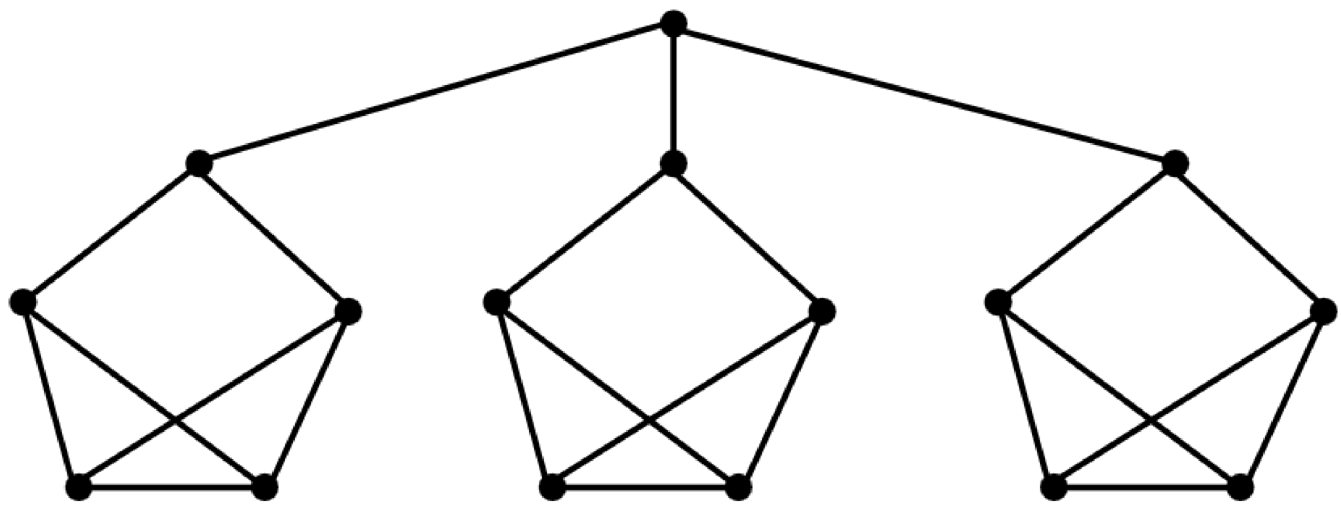
> *Объяснение*: в кубическом графе четное число вершин **по лемме о рукопожатиях** (*любой конечный неориентированный граф имеет* ***чётное*** *число* ***вершин нечётных степеней***)

- Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — все **нечётные компоненты** связности графа $G - S$.
  Тогда $n \geq |S| + 2$.
- Пусть $m_i = e_G(U_i, S)$.
  Тогда $m_i = (\sum\limits_{v \in U_i} d_G(v)) - 2e(G(U_i)) = 3|U_i| - 2e(G(U_i))$ — очевидно, нечетно.

> *Объяснение:* Число рёбер, соединяющих U_i с S равно общему числу рёбер, инцидентных вершинам U_i, без внутренних рёбер.
> *Объяснение:* $\sum\limits_{v \in U_i} = 3|U_i|$, так как граф кубический

- Так как **не более чем два** ребра графа G — **мосты**, то
  не более, чем два числа из $m_1, \ldots, m_n$ равны 1,
  а все остальные — **не менее, чем** 3.

- Тогда $3|S| = \sum\limits_{v \in S} d_G(v) \geq \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \geq 3(n-2) + 2 = 3n-4 \geq 3(|S|+2)-4 > 3|S|$, противоречие.

> *Результат теоремы Петерсона в некотором смысле наилучший возможный.*
> *Пример связного кубического графа с тремя мостами, у которого нет совершенного паросочетания:*
>
> 

Билет 10. Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в 2k-регулярном графе и ее следствия о регулярных факторах.

1. k-**фактором** графа G называется его **остовный регулярный** подграф степени k.

> *Повторение*: **остовный** подграф - покрывает все вершины графа
> *Повторение*: **регулярный** граф - все степени вершин равны

> Совершенное паросочетание — это 1-фактор.

Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в 2k-регулярном графе

(J. Petersen, 1891.) У регулярного графа **степени** $2k$ есть 2-***фактор***.

Доказательство

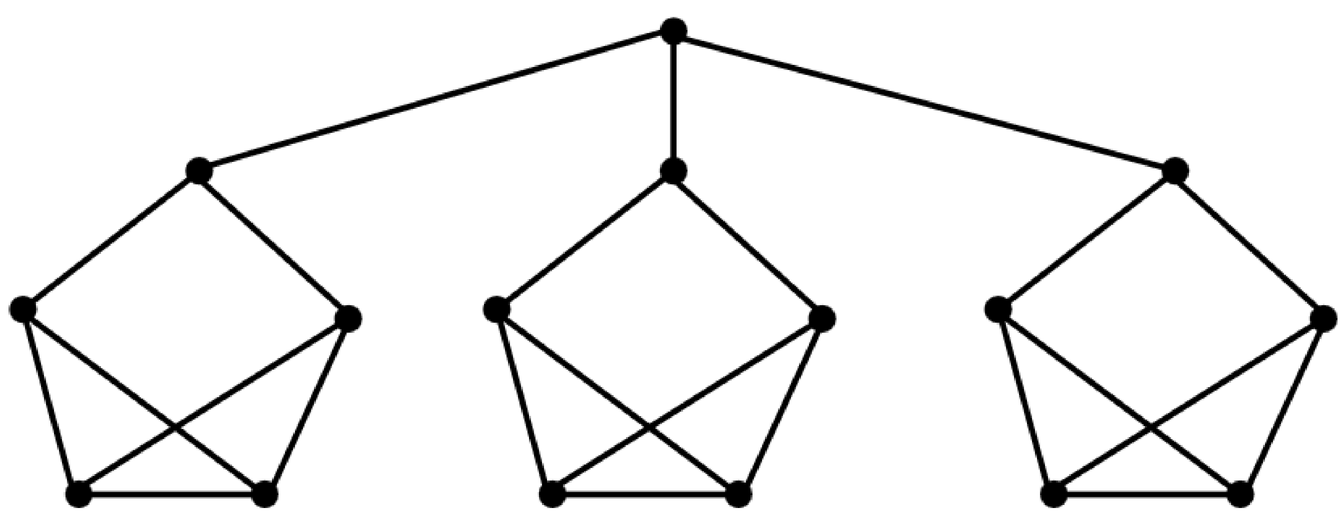
- Граф G имеет **эйлеров цикл**. Обойдем его в некотором направлении и **ориентируем** каждое ребро в направлении обхода. Тогда в каждую вершину G входит и выходит **ровно по** k стрелок.

> *Повторение*: Эйлеров цикл - по всем рёбрам ровно 1 раз
>
> *Повторение*: Условие эйлерова цикла - все степени вершин чётны

- Построим **граф** G^* следующим образом. **Разделим** каждую вершину $v \in V(G)$ на две вершины v_1 и v_2.
- Если ребро $xy \in E(G)$ ориентировано в обходе Эйлерова цикла от x к y , то **проведем в графе** G^* **ребро** x_1y_2.
- Таким образом, существует **биекция** $\varphi : E(G) \to E(G^*)$, заданная правилом $\varphi(xy) = x_1y_2$.
- G^* – **регулярный двудольный граф** степени k с долями $\{v_1\}_{v\in V(G)}$ и$\{v_2\}_{v\in V(G)}$.
- По [2 следствию из теоремы Холла]() в графе G^* есть **совершенное паросочетание** M^*.
- Пусть $M = \varphi^{-1}(M^*)$ (M *состоит из рёбер графа* G – ***прообразов рёбер*** M^* *при биекции* φ).
- Для **любой вершины** $x \in V(G)$ каждая из вершин $x_1, x_2 \in V(G^*)$ **инцидентна ровно одному** ребру из M^*.
- Поэтому x **инцидентна ровно двум** рёбрам из M, то есть, M – это 2-*фактор* графа G.

Следствия о регулярных факторах

1. **Регулярный граф** степени $2k$ есть объединение k своих 2-факторов.
2. Для любого $r \le k$ **регулярный граф** степени $2k$ имеет $2r$-фактор.

> *Все остальные утверждения вида "у регулярного графа степени k есть фактор степени r" без дополнительных условий на граф неверны.*
> *Пример графа, на котором подобные утверждения не будут работать:*
>
> 

Билет 11. Теорема Томассена о почти регулярном факторе почти регулярного графа.

(C. Thomassen, 1981.) Пусть G – **граф**, степени всех вершин которого **равны** k **или** $k+1$, а $r<k$. *Тогда* существует **остовный подграф** H графа G, степени всех вершин которого **равны либо** r, **либо** $r+1$.

Доказательство

(*Докажем по индукции спуском по r вниз*)
База для $r=k$ очевидна, в этом случае подойдет $H=G$
Индукционный переход $r\to r{-}1$

- Пусть **граф** G имеет **остовный подграф** F, степени вершин которого **равны** r или $r+1$.
- Начиная с графа F , пока это возможно, будем производить **следующую операцию**: **удалять ребро**, соединяющее две вершины степени $r+1$.
- В результате получится подграф F' графа F, степени вершин которого равны r или $r+1$, в котором **никакие две** вершины степени $r+1$ **не смежны**.
- Пусть V_{r+1} – множество **всех вершин степени** $r+1$ в графе F'. Можно считать, что $V_{r+1}\neq\varnothing$, иначе граф F' нам подходит и теорема доказана.
- Пусть $V_r=V(G)\setminus V_{r+1}$, а B – **двудольный граф** с долями V_{r+1} и V_r , ребра которого – это $E_{F'}(V_{r+1},V_r)$.
- Для **каждой вершины** $x\in V_{r+1}$ мы имеем $d_B(x)=r+1$,
  а для каждой вершины $y\in V_r$ мы имеем $d_B(y)\le r$.
- По 1 следствию из теоремы Холла, в графе B существует **паросочетание** M, **покрывающее** все вершины из V_{r+1}.
- Степени всех вершин **графа** $H=F'{-}M$ равны r или $r{-}1$.

Билет 12. Дефицит графа. Формула Бержа.

1. Пусть $S\subset V(G)$ таково, что $o(G{-}S)>|S|$. Мы будем называть S **множеством Татта** графа G .

> По теореме Татта, если в графе G **нет совершенного паросочетания**, то в нём есть хотя бы одно **множество Татта**.

2. **Дефицитом** графа G мы будем называть величину $\operatorname{def}(G):=v(G)-2\alpha'(G)$.

> *Повторение:* $\alpha'(G)$ - **количество рёбер** в **максимальном** паросочетании графа G.
> *Повторение* билет 1

> **Дефицит графа** G – это количество вершин, **не покрытых** максимальным паросочетанием графа G.

- Очевидно, $\operatorname{def}(G) = 0$ *тогда и только тогда, когда* в графе G есть **совершенное паросочетание**.
- Определение дефицита можно переписать в виде формулы для вычисления **размера максимального паросочетания**:

$$\alpha'(G) = \frac{v(G) - \operatorname{def}(G)}{2}$$

Формула Бержа

(C. Berge, 1958.) Для любого графа G выполняется равенство

$$\operatorname{def}(G) = \max_{S \subset V(G)} \left(o(G - S) - |S|\right)$$

Доказательство

$\geq$

- Пусть M – **максимальное паросочетание** графа G;
  $S \subset V(G)$; $n = o(G - S)$;
  $U_1, \ldots, U_n$ – все **нечётные компоненты** связности графа $G - S$.
- В каждой **нечётной компоненте** U_i существует хотя бы одна **вершина** u_i, которая **не покрыта ребром** M или покрыта ребром $e_i = u_i x_i \in M$, где $x_i \in S$.
- Следовательно, **не менее, чем** $n - |S|$ из вершин $u_1, \ldots, u_n$ **не покрыты паросочетанием** M, откуда следует неравенство

$$\operatorname{def}(G) \geq o(G - S) - |S|$$

$\leq$

- Пусть

$$k = \max_{S \subset V(G)} \left(o(G - S) - |S|\right)$$

- Если $k = 0$, то по теореме Татта в графе G **есть совершенное паросочетание** и $\operatorname{def}(G) = 0$, этот случай **тривиален**.

- Пусть $k > 0$, W – **множество** из k новых **вершин** $(W \cap V(G) = \varnothing)$, а **граф** H получен **присоединением к** G **вершин** множества W, причём каждая из вершин множества W будет **смежна со всеми** остальными вершинами графа H.

Покажем, что для графа H выполняется условие Татта.

- Понятно, что $k \equiv v(G) \pmod 2$, поэтому $v(H) = v(G) + k$ **чётно**. Таким образом, достаточно проверить **условие для непустых** множеств $T \subset V(H)$.
- Если $T \not\supset W$, то **граф** $H - T$ **связен** и $o(H - T) \leq 1 \leq |T|$.
- Если $T = W \cup S$, где $S \subset V(G)$, то $o(H - T) = o(G - S) \leq k + |S| = |T|$.
- В обоих случаях **условие Татта выполняется** и по теореме Татта в графе H есть **совершенное паросочетание** N.
- Тогда в **графе** G существует такое **паросочетание** M, что $|M| \geq |N| - k$, следовательно,

$$\alpha'(G) \geq |M| = |N| - k = \frac{v(H)}{2} - k = \frac{v(G) + k}{2} - k = \frac{v(G) - k}{2}$$

- откуда получим $k \geq v(G) - 2\alpha'(G)$
- подставив k и дефицит графа по его определению, получим искомое неравенство:

$$\operatorname{def}(G) \leq \max_{S \subset V(G)} (o(G - S) - |S|)$$

Глава 3.2. Элементарная комбинаторика

Билет 1. Число сочетаний из n элементов по k. Формула для числа сочетаний.

1. **Число сочетаний** из n элементов по k – это количество k-элементных подмножеств в n-элементном множестве (где $0 \leq k \leq n$).

- Возможные обозначения: C_n^k или $\binom{k}{n}$⍰.
- Это число можно интерпретировать как
  - число **строго** монотонно возрастающих функций $f : [1..k] \to [1..n]$;
  - число способов разложить k одинаковых шаров по n пронумерованным ящикам (*в каждый ящик помещается **не более одного** шара*).

Формула для числа сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Доказательство

Пусть $|X| = n$
• **Есть** $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ **способов** выбрать последовательность из k различных элементов X.
• Каждая такая последовательность задает k-**элементное подмножество** X.
• Каждое подмножество посчитано $k!$ раз, ибо его элементы можно упорядочить $k!$ способами.
Итого, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ различных подмножеств.

> *Повторение:* A_n^k **Число размещений** из n элементов по k — это количество последовательностей длины k, составленных из различных элементов n-элементного множества.
> *Объяснение:* в **размещениях** порядок **важен**, а в **сочетаниях** порядок **не** важен

Билет 2. Число сочетаний с повторениями из n элементов по k. Формула для числа сочетаний с повторениями.

---

1. **Число сочетаний с повторениями** из n элементов по k — это количество *неупорядоченных* наборов из k элементов n-элементного множества
(*в отличии от множества, в наборе один и тот же элемент может встречаться несколько раз*).

- Возможные обозначения: $\widetilde{C}_n^k$ или $\left(\binom{n}{k}\right)$.
- Это число можно интерпретировать как
  - число **нестрого** монотонно возрастающих функций $f : [1..k] \to [1..n]$;
  - число способов разложить k неразличимых шаров по n ящикам (*в ящик можно класть **любое** число шаров*);
  - число способов выбрать k предметов, если есть предметы n типов
(*на складе есть хотя бы по k предметов каждого типа; предметы одного типа абсолютно неразличимы*).

Лемма

Число решений уравнения

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = k \tag{1}$$

в $\mathbb{N}_0$ равно $\widetilde{C}_n^k$.

Доказательство.

- Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
- Строим **биекцию** между решениями **уравнения** (1) и **неупорядоченными наборами** из k элементов множества X.
- Каждому решению $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ **ставим в соответствие набор**, состоящий из t_1 экземпляров элемента x_1, t_2 экземпляров $x_2, \ldots, t_n$ экземпляров x_n.
- Обратно, каждому набору $\mathcal{T}$ ставим в соответствие решение $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где t_i — число экземпляров x_i в $\mathcal{T}$.

Формула для числа сочетаний с повторениями

$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$

Доказательство

- Расположим в ряд k шариков и $n-1$ перегородку.
- Всего есть C_{n+k-1}^k таких расположений.
- Обозначим через t_1 число шариков до первой перегородки; t_2 — между первой и второй перегородками; $\ldots$; t_n — после $(n-1)$-й перегородки.
- Получаем **биекцию** между решениями уравнения (1) и такими расположениями шаров и перегородок, а значит $C_{n+k-1}^k = \widetilde{C}_n^k$.

Билет 3. Простейшие свойства биномиальных коэффициентов. Алгебраические и комбинаторные доказательства. Треугольник Паскаля.

Свойство 1

$C_n^k = C_n^{n-k}$ *(очевидно)*

Свойство 2

$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$

Алгебраическое доказательство

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!\cdot(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!\cdot(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!\cdot(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}$$

Комбинаторное доказательство

- Пусть $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.
- $(k+1)$-*элементные* подмножества X бывают двух видов:
  содержащие x_0 и не содержащие x_0.
- Если $x_0 \notin S \subset X$, то $S \subset X' = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Таких подмножеств C_n^{k+1}.
- Если $x_0 \in S \subset X$, то удалим x_0 из S. Получим подмножество $S' \subset X'$, где $|S'| = k$. Таких подмножеств C_n^k.

Треугольник Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Алгебраическое доказательство

$$kC_n^k = k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = nC_{n-1}^{k-1}$$

Комбинаторное доказательство

Как в левой, так и в правой части формулы записано число k-элементных подмножеств n -элементного множества, в которых один элемент отмечен.

Билет 4. Бином Ньютона. Сумма и знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов (алгебраические и комбинаторные доказательства).

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Доказательство

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ скобок}};$
- Слагаемое $a^{n-k}b^k$ получается, если из k скобок выбрать b, а из остальных — a.
- Это можно сделать C_n^k способами.

Другое название чисел C_n^k — **биномиальные коэффициенты**.

Свойство 1

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

Комбинаторное доказательство

- В левой и в правой части записано число подмножеств n-элементного множества.

Свойство 2

$$C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0$$

Комбинаторное доказательство

Докажем, что $C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots$

- Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Построим **биекцию** между всеми **четными** и всеми **нечетными** подмножествами X.

- Пусть $f(S) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} S \cup \{x_n\}, & x_n \notin S, \\ S \setminus \{x_n\}, & x_n \in S. \end{cases}$
- Получаем отображение $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, обладающее следующим свойством: $\forall S(f(f(S)) = S)$
    - Отображение, обладающее таким свойством называется **инволюцией**.
    - В частности, это означает, что f обратно самому себе, следовательно, f — **биекция**.
- При этом, $|S|$ и $|f(S)|$ всегда имеют разную четность.
- Таким образом, f также задает **биекцию** между всем четными и всеми нечетными подмножествами X

Свойство 3

$$C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$$

Билет 5. Мультиномиальные коэффициенты. Определение и формула. Обобщенный бином Ньютона.

Пусть $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$, где $m \in \mathbb{N}$ и $n, k_1, k_2, ..., k_m \in \mathbb{N}_0$.

- **Мультиномиальным коэффициентом** (или **полиномиальным коэффициентом**) - число способов разбить n-элементное множество X на m непересекающихся подмножеств $X_1, X_2, \ldots, X_m$, где $|X_i| = k_i$, обозначается $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$

Формула мультиномиального коэффициента

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$$

Доказательство

- Есть $n!$ способов **упорядочить** элементы множества X.
- Для **каждого способа**, помещаем первые k_1 элементов в X_1; следующие k_2 элементов в X_2 и т. д.
- Получаем **разбиение** X на подмножества нужного размера.
- Каждое разбиение посчитано $k_1!k_2!\ldots k_m!$ раз.

Обобщенный бином Ньютона

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$$

Доказательство

Аналогично доказательству [*Бинома Ньютона*]

- **При раскрытии скобок** слагаемое $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$ получается, если выбрать из k_1 скобок слагаемое a_1, из k_2 скобок слагаемое $a_2, \dots$, из k_m скобок слагаемое a_m.
- Такой выбор можно сделать в точности $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$ способами.

Билет 6. Формула включений-исключений. Переформулировка этой формулы в терминах свойств.

1. Пусть A, B — конечные множества. Тогда
   $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
2. Пусть A, B, C — конечные множества. Тогда
   $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$

Формула включений-исключений

Пусть $A_1, \dots, A_n$ — конечные множества. Тогда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\varnothing \neq I \subset [1..n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \tag{1}$$

> *Объяснение*: $\varnothing \neq I \subset [1..n]$ - I пробегает по всем непустым подмножества множествам индексов $[1..n]$.

Доказательство

- Пусть $x \in A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ и x не принадлежит остальным A_j.
- Тогда x учитывается в формуле (1) с коэффициентом $\sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell+1} C_k^\ell = 1$

- Так как каждый элемент учитывается ровно 1 раз, то формула (1) верна

Формула включений-исключений в терминах свойств

Пусть X — конечное множество, $|X| = N$;

- $P_1, \dots, P_n$ — свойства элементов множества X (*т. е. одноместные предикаты на* X)

> *Повторение*: **Предикат** — это логическая функция или высказывание, зависящее от одного(**одноместный**) или нескольких(**многоместный**) аргументов, которое может быть либо **истинно**, либо **ложно**.

- $N_{i_1,\dots,i_k}$ — число элементов, удовлетворяющих $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$
- $N(0)$ — число элементов, не удовлетворяющих ни одному свойству.

Тогда

$$N(0) = N - \sum_i N_i + \sum_{i_1<i_2} N_{i_1,i_2} - \dots + (-1)^k \sum_{i_1<\dots<i_k} N_{i_1,\dots,i_k} + \dots + (-1)^n N_{1,\dots,n} \quad (2)$$

Билет 7. Субфакториалы. Определение и рекуррентное соотношение для субфакториалов. Связь с обычными факториалами.

1. **Перестановкой** на множестве M называется произвольная биекция $\sigma : M \to M$.
2. **Неподвижной точкой** перестановки σ называется такой элемент $x \in M$, что $\sigma(x) = x$.
3. S_n — множество всех перестановок на $[1..n]$.

> *Повторение:* $|S_n| = n!$

4. $D(n)$ — (**Субфакториал**) число перестановок из S_n, **не имеющих** *неподвижных точек*.

Рекуррентная формула субфакториала

$D(n+1) = n(D(n) + D(n-1))$

Доказательство

Пусть $\sigma \in S_{n+1}; k = \sigma(n+1); \ell = \sigma^{-1}(n+1)$

> *Объяснение:* k - куда переставили $(n+1)$-й элемент, а ℓ - откуда переставили

- Возможны *два случая*: $k \neq \ell$ или $k = \ell$.
  1. Пусть $k \neq \ell$:
     - Тогда $\sigma'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sigma(x), & x \neq \ell, \\ k, & x = \ell, \end{cases}$ – перестановка из S_n без неподвижных точек.
     - Для каждого $k \in [1..n]$ есть $D(n)$ таких перестановок.
  2. Пусть $k = \ell$:
     - Тогда $\sigma|_{[1..n]\setminus\{k\}}$ – перестановка на $[1..n] \setminus \{k\}$ без неподвижных точек.
     - Для каждого $k \in [1..n]$ есть $D(n-1)$ таких перестановок.
- Итого, получаем $nD(n) + nD(n-1)$ перестановок без неподвижных точек.

> $D(n)$ – **Субфакториал**, так как для обычных факториалов выполняется такое же соотношение: $(n+1)! = n(n! + (n-1)!)$

Билет 8. Явная формула для субфакториала. Следствие о ближайшем целом числе к $\frac{n!}{e}$.

Явная формула субфакториала

$$D(n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Доказательство

Пусть $X = S_n$

- P_i – свойство "$\sigma(i) = i$" для перестановки $\sigma \in S_n$
- Тогда $N = n!$ и $N_{i_1,\ldots,i_k} = (n-k)!$
- По формуле включений-исключений имеем: $D(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)! C_n^k = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Следствие

$D(n) = \mathrm{round}(\frac{n!}{e})$; более того, $|D(n) - \frac{n!}{e}| < \frac{1}{n+1}$

Доказательство

Напомним, что $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, тогда

> *Для тех, кто забыл "очевидное":*
> Разложим $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ с использованием бинома Ньютона:
> $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_k^n \left(\frac{x}{n}\right)^k\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{x}{n}\right)^k\right) =$
> $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\frac{x^k}{n^k}\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$

- $\frac{n!}{e} = n!\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = n!\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} + n!\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = D(n) + (-1)^{n+1}\sum\limits_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell+1}n!}{(n+\ell)!}$;
- $\left|D(n) - \frac{n!}{e}\right| = \left|\sum\limits_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell+1}n!}{(n+\ell)!}\right| =$
  $\left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots\right|$
- $\sum\limits_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell+1}n!}{(n+\ell)!} = \left(\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{n!}{(n+2)!}\right) + \left(\frac{n!}{(n+3)!} - \frac{n!}{(n+4)!}\right) + \cdots > 0$
- $\sum\limits_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell+1}n!}{(n+\ell)!} = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{n!}{(n+2)!} - \frac{n!}{(n+3)!}\right) - \left(\frac{n!}{(n+4)!} - \frac{n!}{(n+5)!}\right) - \cdots < \frac{1}{n+1}$.

Билет 9. Функция Эйлера. Определение и формула (доказательство с помощью формулы включений-исключений).

1. Натуральные числа a и b называются **взаимно простыми**, если у них **нет общего** натурального **делителя**, отличного от единицы.
2. $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел, меньше либо равных n и взаимно простых с n (**функция Эйлера**).

Формула функции Эйлера

Пусть $n = p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s}$ (*где $p_1, \ldots, p_s$ — различные простые и $a_1, \ldots, a_s$ — натуральные числа*). Тогда

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)$$

Доказательство

- Пусть $X = [1..n]$.
- P_i – свойство "$x \vdots p_i$" для числа $x \in X$
- Тогда $N_{i_1,\ldots,i_k} = \dfrac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}$
- По формуле включений-исключений имеем:

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le s} \frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}} = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)$$

Билет 10. Формула для числа сюръекций.

Формула числа сюръективных отображений

Пусть $f : [1..k] \to [1..n]$ - сюръекция, тогда
$\sum\limits_{s=1}^{n}(-1)^{n-s}C_n^s s^k$ - **число сюръекций**

Доказательство

- Пусть X – множество всех отображений $f : [1..k] \to [1..n]$
- P_i – свойство "$f^{-1}(i) = \varnothing$" для отображения $f \in X$
    - Тогда $N = |X| = n^k$
    - $N_{i_1,\ldots,i_\ell} = (n-\ell)^k$ – количество функций, **удовлетворяющих** данным ℓ свойствам.
    - $f \in X$ – сюръекция $\Leftrightarrow$ f не удовлетворяет ни одному из свойств. Следовательно, число сюръекций равно $N(0)$.

> *Повторение:* $N(0)$ – число элементов, **не удовлетворяющих** ни одному свойству

- По формуле включений-исключений имеем:

$$N(0) = \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell C_n^\ell (n-\ell)^k = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{n-s}C_n^s s^k$$

> *Уточнение:* Последнее равенство получено заменой переменной $s = n - \ell$