Национальный исследовательский университет
«Университет ИТМО»

Факультет информационных технологий и программирования

Кафедра прикладной математики и информатики

Странные аттракторы

Владислав Павлов, Данила Курябов M3236

Январь 2021
Санкт-Петербург

1 Введение

Аттрактор — компактное подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности. Странный аттрактор — это притягивающее множество неустойчивых траекторий в фазовом пространстве диссипативной динамической системы. В отличие от аттрактора, не является многообразием, то есть не является кривой или поверхностью.

Рассмотрим два странных аттрактора: аттрактор Лоренца и аттрактор Chen - Lee.

2 Аттрактор Лоренца

Аттрактор Лоренца описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = a * (y - x) \\ \dot{y} = x * (b - z) - y \\ \dot{z} = x * y - c * z \end{cases} \tag{1}$$

Распишем ту же систему через дифференциалы. Заметим, что каждое уравнение можно рассматривать как последовательность.

$$\begin{cases} \partial x = a * (y - x) * \partial t = x_{n+1} - x_n \\ \partial y = (x * (b - z) - y) * \partial t = y_{n+1} - y_n \\ \partial z = (x * y - c * z) * \partial t = z_{n+1} - z_n \end{cases} \tag{2}$$

Выражаем следующюю (n + 1) точку по координатно из координат, полученных на предыдущем шаге (n). Таким образом, получаем систему рекурсивно заданных уравнений.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + a * (y_n - x_n) * \partial t \\ y_{n+1} = y_n + (x_n * (b - z_n) - y_n) * \partial t \\ z_{n+1} = z_n + (x_n * y_n - c * z_n) * \partial t \end{cases} \tag{3}$$

Так как каждое уравнение в системе задано рекукрсивно необходимо задать начальные значения. Заметим, что:

$$x_i = y_i = z_i = 0 \Rightarrow \forall j > i : x_j = y_j = z_j = 0$$

Происследуем особую точку P($x = y = z = 0$):

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{\partial(a*(y-x))}{\partial x}|_P - \lambda & \frac{\partial(a*(y-x))}{\partial y}|_P & \frac{\partial(a*(y-x))}{\partial z}|_P \\ \frac{\partial(x*(b-z)-y)}{\partial x}|_P & \frac{\partial(x*(b-z)-y)}{\partial y}|_P - \lambda & \frac{\partial(x*(b-z)-y)}{\partial z}|_P \\ \frac{\partial(x*y-c*z)}{\partial x}|_P & \frac{\partial(x*y-c*z)}{\partial y}|_P & \frac{\partial(x*y-c*z)}{\partial z}|_P - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -a - \lambda & a & 0 \\ b & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} = ((-a - \lambda)(-1 - \lambda) - ab)(-c - \lambda)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{a+1}{2} + \sqrt{\frac{(a+1)^2}{4} - 1 + b} \\ \lambda_2 = -\frac{a+1}{2} - \sqrt{\frac{(a+1)^2}{4} - 1 + b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 1 \Rightarrow \text{Устойчивый узел} \\ b > 1 \Rightarrow \text{Седло} \end{cases}$$

Вывод: таким образом, взять за начальную точку ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$) не имеет смысла. Решением такой подстановки будет единственная точка (0, 0, 0). Следует брать иные начальные значения. Подставив значения параметров (a, b, c), получим решение для данной системы и смоделируем его.

3 Аттрактор Chen - Lee

Аттрактор Chen - Lee описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = a * x - y * z \\ \dot{y} = b * y + x * z \\ \dot{z} = c * z + \frac{x*y}{3} \end{cases} \tag{4}$$

Распишем ту же систему через дифференциалы. Заметим, что каждое уравнение можно рассматривать как последовательность.

$$\begin{cases} \partial x = (a * x - y * z) * \partial t = x_{n+1} - x_n \\ \partial y = (b * y + x * z) * \partial t = y_{n+1} - y_n \\ \partial z = (c * z + \frac{x*y}{3}) * \partial t = z_{n+1} - z_n \end{cases} \tag{5}$$

Выражаем следующюю (n + 1) точку по координатно из координат, полученных на предыдущем шаге (n). Таким образом, получаем систему рекурсивно заданных уравнений.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + (a * x_n - y_n * z_n) * \partial t \\ y_{n+1} = y_n + (b * y_n + x_n * z_n) * \partial t \\ z_{n+1} = z_n + (c * z_n + \frac{x_n*y_n}{3}) * \partial t \end{cases} \tag{6}$$

Так как каждое уравнение в системе задано рекукрсивно необходимо задать начальные значения. Заметим, что:

$$x_i = y_i = z_i = 0 \Rightarrow \forall j > i : x_j = y_j = z_j = 0$$

Происследуем особую точку P($x = y = z = 0$):

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{\partial(a*x-y*z)}{\partial x}|_P - \lambda & \frac{\partial(a*x-y*z)}{\partial y}|_P & \frac{\partial(a*x-y*z)}{\partial z}|_P \\ \frac{\partial(b*y+x*z)}{\partial x}|_P & \frac{\partial(b*y+x*z)}{\partial y}|_P - \lambda & \frac{\partial(b*y+x*z)}{\partial z}|_P \\ \frac{\partial(c*z+\frac{x*y}{3})}{\partial x}|_P & \frac{\partial(c*z+\frac{x*y}{3})}{\partial y}|_P & \frac{\partial(c*z+\frac{x*y}{3})}{\partial z}|_P - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & c - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = b \\ \lambda_3 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \Rightarrow \text{Устойчивый узел} \\ a, b, c < 0 \Rightarrow \text{Неустойчивый узел} \\ \exists s_1, s_2 \in a, b, c : s_1 < 0, s_2 > 0 \Rightarrow \text{Седло} \end{cases}$$

Вывод: таким образом, взять за начальную точку ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$) не имеет смысла. Решением такой подстановки будет единственная точка $(0, 0, 0)$. Следует брать иные начальные значения. Подставив значения параметров (a, b, c), получим решение для данной системы и смоделируем его.

4 Описание модели

Программа моделирует решение системы: строит аттрактор для указанных параметров. В центре окна запущенной программы изображается трехмерная система координат. Значения параметров (a, b, c) и начальные значения ($x_0 = y_0 = z_0$) задаются с помощью ползунков снизу. Программа отрисовывает полученную систему в режиме реального времени.

5 Список литературы

http://www.fizmatlit.narod.ru/webrary/kuzn/CHAPTER3.pdf

http://www.3d-meier.de/tut5/Seite2.html

https://www.deviantart.com/chaoticatmospheres/art/Strange-Attractors-The-Chen-Lee-Attractor-375986645