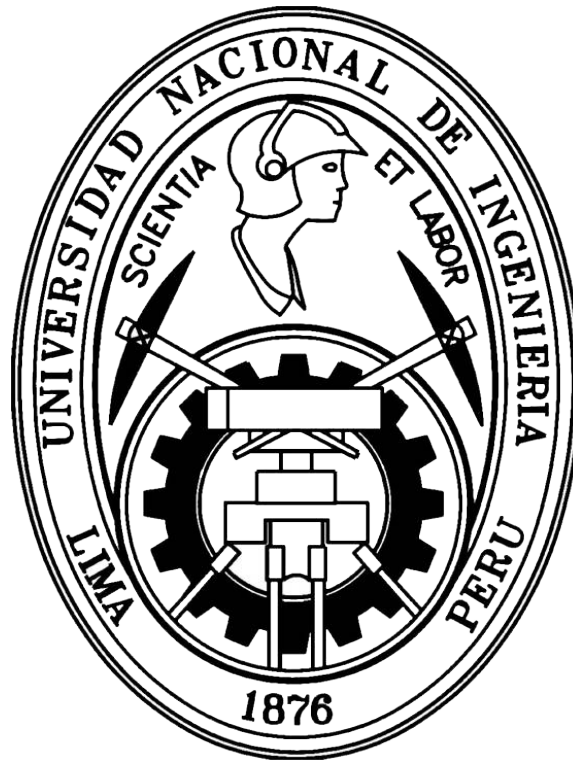


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS



SEMINARIO DE TESIS III

**Descomposición Acelerada de Benders aplicada al  
problema de compromiso de unidades con restricciones  
de red**

ELABORADO POR  
DAVID WILLIAMS MORANTE MORAN

ASESORES  
ELADIO OCAÑA ANAYA  
ERNESTO ORÉ ALBORNOZ

LIMA-PERÚ  
2022



---

## Table of Contents

Capítulo 1: Marco Teórico .....	1
1.1 Descomposición Generalizada de Benders.....	1
1.1.1 Solución al problema maestro.....	5
1.1.2 Procedimiento Computacional.....	7
1.2 Cortes Clásicos de Benders para problemas de programación lineal entera mixta.....	12
1.2.1 Descomposición Acelerada de Benders.....	19
Capítulo 2: Aplicación; Compromiso de unidades con restricciones de red..	27
2.1 Formulación del problema .....	27
2.1.1 Horizonte de Planeamiento.....	27
2.1.2 Unidades de Generación.....	28
2.1.3 Disponibilidad de unidades de Generación.....	28
2.1.4 Estado Operativo.....	29
2.1.5 Curva de producción o costos.....	29
2.1.6 Límite de Potencias.....	31
2.1.7 Arranque y parada.....	31
2.1.8 Cantidad máxima de arranque.....	32
2.1.9 Cantidad máxima de paradas.....	32
2.1.10 Tiempo mínimo de operación.....	32
2.1.11 Tiempo mínimo fuera de servicio.....	33
2.1.12 Unidades de ciclo combinado.....	33
2.1.13 Estados de los modos de un ciclo combinado.....	33
2.1.14 Transición de un modo inferior a un modo superior.....	34
2.1.15 Transición de un modo superior a un modo inferior.....	35
2.1.16 Costo de Arranque y transición.....	35
2.1.17 Red de Transmisión.....	36
2.1.18 Restricción de Suma de Flujos.....	38
2.2 Aplicación del método de descomposición clásica de Benders al problema de compromiso de unidades con restricción de red....	40
2.3 Aplicación del método de descomposición acelerada de Benders al problema de compromiso de unidades con restricción de red....	43

Table of Contents

2.4 Resultados Numéricos.....	46
Capítulo 3: Conclusiones.....	51
Bibliografía	



### 1.1 Descomposición Generalizada de Benders

Consideremos el siguiente problema de optimización, el cual supondremos a lo largo de este trabajo que es factible:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}) \quad & \min_{x,y} f(x,y) \\
 & s.a \quad T(y) \leq b \\
 & \quad G(x,y) \leq h \\
 & \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \\
 & \quad y \in Y \subseteq \mathbb{R}^{n_2}
 \end{aligned}$$

donde  $b \in \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $h \in \mathbb{R}^{m_2}$  son vectores y  $T: \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $G: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ ,  $f: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones no lineales (o posiblemente lineales). El vector  $y$  será llamado vector de variables complicantes, en el sentido de que al fijar el valor de  $y$ , puede suceder alguna de las siguientes situaciones:

1. Si  $Y \subseteq \mathbb{Z}^{k_1} \times \mathbb{R}^{n_2-k_1}$ , entonces solo queda optimizar sobre variables continuas.
2. Se consigue la separabilidad del problema  $(\mathcal{P})$ , optimizando subproblemas independientes envolviendo cada uno diferentes subvectores de  $x$ .
3.  $(\mathcal{P})$  asume una estructura especial, para la cual ya existen algoritmos disponibles. Por ejemplo, podemos obtener un problema lineal o cuadrático.
4. Se elimina la no convexidad conjunta  $x$ - $y$ , dejandonos un problema convexo en  $x$ .

En conclusión, al fijar  $y$ , obtenemos un problema menos complicado de resolver. La idea principal del algoritmo de Benders es particionar el problema  $(\mathcal{P})$  en dos problemas; un problema de optimización que trate solo con las variables complicantes y otro con las características mencionadas arriba.

Sea  $y \in Y$  tal que  $T(y) \leq b$ . Definimos el siguiente problema de optimización conocido como problema primal:

$$\begin{aligned} v(y) = \min_x & f(x, y) \\ \text{s.a.} & G(x, y) \leq h \\ & x \in X \end{aligned} \quad (\mathcal{P}_y)$$

Donde  $v(y)$  es el valor óptimo para un valor fijo de  $y$ , y por ser variable complicante, entonces  $(\mathcal{P}_y)$  es más sencillo de resolver que  $(\mathcal{P})$  en si mismo. Puede ocurrir que para cierto valor de  $y$ , no exista  $x \in X$  tal que  $G(x, y) \leq h$ , y por lo tanto  $(\mathcal{P}_y)$  resulte ser infactible. Por ello, definimos:

$$V = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} : G(x, y) \leq h \text{ para algún } x \in X\}$$

Luego tenemos que la función  $v: \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que

$$v(y) = \begin{cases} < \infty & y \in V \\ +\infty & y \notin V \end{cases}$$

Como el problema  $(\mathcal{P})$  es factible, entonces el valor óptimo de  $y$  debe estar en  $V \cap Y$ . Por lo tanto, en vez de resolver el problema  $(\mathcal{P})$  se opta por resolver el siguiente problema equivalente:

$$\begin{aligned} \min_y & v(y) \\ \text{s.a.} & T(y) \leq b \\ & y \in Y \cap V \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde  $v(y) = \min_{x \in X} [f(x, y) : G(x, y) \leq h]$ . Este problema es conocido como **problema proyectado** sobre el espacio  $y$ . Es fácil ver que en efecto son equivalentes pues, si  $y^*$  es una solución óptima de (1.1) y si  $x^*$  es solución óptima de  $(\mathcal{P}_{y^*})$  entonces  $(x^*, y^*)$  es solución óptima de  $(\mathcal{P})$ . Recíprocamente, si  $(x^*, y^*)$  es solución óptima de  $(\mathcal{P})$  entonces  $x^*$  debe ser solución óptima de  $(\mathcal{P}_{y^*})$ .

Con el fin de obtener una mejor implementación computacional de (1.1), es necesario tener una mejor representación de  $v(y)$  y  $V$  pues solo se conocen de manera implícita. Geoffrion en [5] utilizó sus representaciones duales para obtener los siguientes teoremas:

**Teorema 1.1.** *Suponga que  $X$  es un conjunto convexo y que  $G$  sea convexo en  $X$ . Asuma además para todo  $y \in Y$ , el conjunto  $Z_y = \{z \in \mathbb{R}^{m_2} : \exists x \in X, G(x, y) \leq z\}$  sea cerrado. Entonces  $\tilde{y} \in V \cap Y$  si y solo si*

$$\inf_{x \in X} \lambda^t(G(x, \tilde{y}) - h) \leq 0 \quad (1.2)$$

$$\forall \lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^{m_2} : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m_2} \lambda_i = 1\}.$$

*Demostración.* Si  $\tilde{y} \in Y \cap V$  entonces existe  $x \in X$  tal que  $G(x, \tilde{y}) \leq h$  y multiplicándolo con un vector de entradas no negativas  $\lambda$  obtendríamos

$$\lambda^t(G(x, \tilde{y}) - h) \leq 0$$

tomando el ínfimo sobre  $X$  concluimos que para todo  $\lambda \in \Lambda$  se cumple

$$\inf_{x \in X} \lambda^t(G(x, \tilde{y}) - h) \leq 0$$

Recíprocamente, supongamos que  $\tilde{y} \in Y$  cumpla (1.2), entonces

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \inf_{x \in X} \lambda^t(G(x, \tilde{y}) - h) \leq 0 \quad (1.3)$$

Se debe demostrar que  $\tilde{y} \in V$ , es decir, que existe un vector  $x \in X$  tal que  $G(x, \tilde{y}) \leq h$ , lo cual es equivalente a demostrar que el problema

$$\min_x [0^t x : G(x, \tilde{y}) \leq h] \quad (1.4)$$

es factible. Mediante un reescalamiento de la relación (1.3), obtenemos:

$$\sup_{\lambda \geq 0} \inf_{x \in X} \lambda^t(G(x, \tilde{y}) - h) \leq 0$$

El lado izquierdo de esta desigualdad representa el problema dual de (1.4) cuyo valor óptimo es 0, para  $\lambda = 0$ . Por ser  $Z_{\tilde{y}}$  cerrado entonces (1.4) debe ser factible, con esto concluimos que  $\tilde{y} \in V$ .

**Teorema 1.2.** *Supongamos que el conjunto  $X$  es convexo y que las funciones  $f$  y  $G$  sean convexas en  $X$  para cada  $y$  fijo. Asuma además que para  $y \in Y \cap V$  al menos una de las siguientes condiciones se cumpla:*

1.  $v(y) < \infty$  y  $(\mathcal{P}_y)$  tiene un valor óptimo dual.
2.  $v(y) < \infty$ ,  $G$  y  $f$  son continuas en  $X$  cerrado y que el conjunto solución  $\varepsilon$ -óptimo de  $(\mathcal{P}_y)$  es no vacío y acotado para algún  $\varepsilon \geq 0$ .

entonces para todo  $y \in Y \cap V$ :

$$v(y) = \sup_{u \geq 0} \inf_{x \in X} \{f(x, y) + u^t(G(x, y) - h)\} \quad (1.5)$$



*Demostración.* Se prueba directamente de la teoría de la dualidad convexa.

En conclusión para problemas donde las funciones  $f$  y  $G$  son convexas en  $X$  convexo, verificandose ciertas condiciones de regularidad; podemos escribir el problema (1.1) como:

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y} \quad & v(y) \\ \text{s.a} \quad & T(y) \leq b \\ & 0 \geq \inf_{x \in X} \lambda^t(G(x, y) - h), \lambda \in \Lambda \end{aligned} \quad (1.6)$$

con  $v(y) = \sup_{u \geq 0} \inf_{x \in X} \{f(x, y) + u^t(G(x, y) - h)\}$  y  $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^{m_2}: \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m_2} \lambda_i = 1\}$ .

Ahora, de la definición de supremo como la cota superior más pequeña, e introduciendo una variable escalar  $\alpha$ , obtenemos el siguiente problema de optimización equivalente conocido como **Problema Maestro** :

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y, \alpha} \quad & \alpha \\ \text{s.a} \quad & T(y) \leq b \\ & \alpha \geq \inf_{x \in X} \{f(x, y) + u^t(G(x, y) - h)\}, \quad \forall u \geq 0 \\ & 0 \geq \inf_{x \in X} \lambda^t(G(x, y) - h), \quad \forall \lambda \in \Lambda \end{aligned} \quad (1.7)$$

Desde ahora nos referiremos a la restricción

$$\alpha \geq \inf_{x \in X} \{f(x, y) + u^t(G(x, y) - h)\} \quad (1.8)$$

como corte de optimalidad, y a la restricción

$$0 \geq \inf_{x \in X} \lambda^t(G(x, y) - h) \quad (1.9)$$

como corte de factibilidad.

*Observación 1.3.* Es apropiado resaltar que el problema (1.7) es equivalente al problema proyectado (1.1), solo cuando  $X$  es un conjunto convexo y las funciones  $f$  y  $G$  son convexas en la variable  $x$ . Sin embargo cuando  $X$  no es un conjunto convexo y/o no se cumple la convexidad de las funciones  $f$  y  $G$  en la variable  $x$ , existe una brecha de dualidad entre  $v(y)$  y su valor dual. En tal situación, el teorema de dualidad

debil nos dice que el problema maestro solo brinda una cota inferior al problema proyectado, pues

$$\begin{aligned} v(y) &= \min_{x \in X} [f(x, y) : G(x, y) \leq h] \\ &\geq \sup_{u \geq 0} \inf_{x \in X} \{f(x, y) + u^t(G(x, y) - h)\} \end{aligned}$$

luego

$$\min_{\substack{y \in Y \cap V \\ T(y) \leq b}} v(y) \geq \min_{\substack{y \in Y \cap V \\ T(y) \leq b}} \left[ \sup_{u \geq 0} \inf_{x \in X} \{f(x, y) + u^t(G(x, y) - h)\} \right]$$

## 1 Solución al Problema Maestro

El problema maestro (1.7) sigue siendo aún muy difícil de resolver debido a la infinidad incluso no contable de restricciones. En estos casos, la estrategia más natural es la relajación, que consiste en resolver una versión reducida del problema maestro que ignora un subconjunto de restricciones de (1.8) y (1.9) y con la solución obtenida verificar si satisface las restricciones ignoradas. Si eso ocurre, entonces la solución óptima del problema maestro relajado es la solución óptima del problema maestro original; caso contrario, se añade al problema relajado la restricción no satisfecha y se vuelve a proceder de esta manera hasta que la solución al problema relajado verifique todas las restricciones ignoradas, o se satisfaga un criterio de parada aceptable.

El Problema Maestro Relajado se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y, \alpha} \quad & \alpha \\ \text{s.a.} \quad & T(y) \leq b \\ & \alpha \geq \inf_{x \in X} \{f(x, y) + u_j^t(G(x, y) - h)\}, \quad \forall u_j \in \mathcal{T}^k \quad (\mathcal{MP}^k) \\ & 0 \geq \inf_{x \in X} \lambda_i^t(G(x, y) - h), \quad \forall \lambda_i \in \mathcal{S}^k \end{aligned}$$

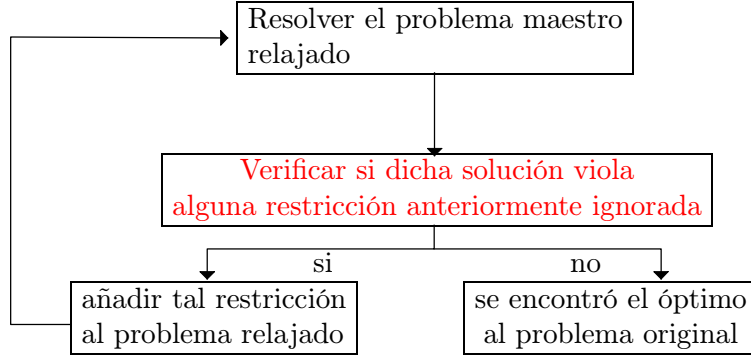
donde  $\mathcal{T}^k$  determina un subconjunto de restricciones de (1.8) y  $\mathcal{S}^k$  un subconjunto de restricciones de (1.9). Sea  $(\hat{y}^k, \hat{\alpha}^k)$  solución óptima de  $(\mathcal{MP}^k)$ . ¿Cuándo cumplirá con todas las restricciones (1.8) y (1.9) ?

$$\begin{aligned} (\hat{y}^k, \hat{\alpha}^k) \text{ satisface (1.9)} &\Leftrightarrow 0 \geq \inf_{x \in X} \lambda^t(G(x, \hat{y}^k) - h), \forall \lambda \in \Lambda \\ &\Leftrightarrow \hat{y}^k \in V \\ &\Leftrightarrow (\mathcal{P}_{\hat{y}^k}) \text{ es factible} \end{aligned}$$

Si, además estamos bajo las hipótesis de la representación de  $v$  entonces

$$\begin{aligned}
 (\hat{y}^k, \hat{\alpha}^k) \text{ satisface (1.8)} &\Leftrightarrow \hat{\alpha}^k \geq \inf_{x \in X} \{f(x, \hat{y}^k) + u^t(G(x, \hat{y}^k) - h)\}, \forall u \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \hat{\alpha}^k \geq \sup_{u \geq 0} \inf_{x \in X} \{f(x, \hat{y}^k) + u^t(G(x, \hat{y}^k) - h)\} \\
 &\Leftrightarrow \hat{\alpha}^k \geq v(\hat{y}^k)
 \end{aligned}$$

En conclusión, para verificar que la solución óptima  $(\hat{y}^k, \hat{\alpha}^k)$  del problema maestro relajado  $(\mathcal{MP}^k)$  verifique las restricciones ignoradas basta con resolver el problema primal  $(\mathcal{P}_{\hat{y}^k})$ , lo cual es conveniente realizar en cada paso pues este problema es fácil de resolver según lo especificado al principio.



**Fig. 1.1.** Diagrama de solución. La verificación del incumplimiento de las restricciones (1.8) y (1.9) es un paso crucial.

Cuando se intenta resolver el problema  $(\mathcal{P}_{\hat{y}^k})$  puede ocurrir que sea factible acotado, no acotado o infactible; analizaremos a continuación las tres situaciones.

1. Cuando  $(\mathcal{P}_{\hat{y}^k})$  es infactible: Supongamos que la solución  $(\hat{y}^k, \hat{\alpha}^k)$  obtenida del problema relajado  $(\mathcal{MP}^k)$  sea tal que  $(\mathcal{P}_{\hat{y}^k})$  es infactible. Entonces existe  $\bar{\lambda} \in \Lambda$  tal que

$$0 < \inf_{x \in X} \bar{\lambda}^t(G(x, \hat{y}^k) - h) \quad (1.10)$$

entonces se debe agregar al problema maestro relajado ( $\mathcal{MP}^k$ ) la restricción

$$0 \geq \inf_{x \in X} \bar{\lambda}^t (G(x, y) - h) \quad (1.11)$$

Se puede obtener tal  $\bar{\lambda}$  resolviendo cualquier algoritmo de Fase I. En particular Floudas en [22] propone resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, x} \quad & \alpha \\ \text{s.a.} \quad & G(x, \hat{y}^k) - I_{m_2} \alpha \leq 0 \\ & x \in X, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Como  $(\mathcal{P}_{\hat{y}^k})$  es infactible, sabemos que este problema tiene solución (solución positiva). El  $\bar{\lambda}$  buscado es entonces el valor dual óptimo asociado a la restricción  $G(x, \hat{y}^k) - I_{m_2} \alpha \leq 0$ . Donde  $I_{m_2}$  es la matriz identidad de orden  $m_2$ .

2. Cuando  $(\mathcal{P}_{\hat{y}^k})$  es factible acotado: Supongamos que la solución  $(\hat{y}^k, \hat{\alpha}^k)$  obtenida del problema maestro relajado ( $\mathcal{MP}^k$ ) sea factible pero que  $\hat{\alpha}^k < v(\hat{y}^k)$ , entonces existe  $\bar{u} \geq 0$  tal que

$$\hat{\alpha}^k < \inf_{x \in X} \{f(x, \hat{y}^k) + \bar{u}^t (G(x, \hat{y}^k) - h)\}$$

Entonces se debe agregar al problema ( $\mathcal{MP}^k$ ) la restricción

$$\alpha \geq \inf_{x \in X} \{f(x, y) + \bar{u}^t (G(x, y) - h)\} \quad (1.12)$$

3. Cuando  $(\mathcal{P}_{\hat{y}^k})$  es factible pero no acotado: En este caso se tendría que  $v(\hat{y}^k) = -\infty$  y por lo tanto el valor óptimo del problema proyectado es también  $-\infty$ . Con lo cual en realidad esto no ocurriría nunca.

## 2 Procedimiento Computacional

En todo momento supondremos las hipótesis de los teoremas de representación y que  $(\mathcal{P})$  tenga valor óptimo finito. Sea

$$L^*(y, u) = \inf_{x \in X} \{f(x, y) + u^t (G(x, y) - h)\}, y \in Y, u \geq 0 \quad (1.13)$$

$$L_*(y, u) = \inf_{x \in X} \lambda^t (G(x, y) - h), y \in Y, u \geq 0 \quad (1.14)$$

Las iteraciones deben comenzar ( $k=0$ ) con una versión relajada del problema maestro, esto implica especificar  $\mathcal{T}^0$  y  $\mathcal{S}^0$ .

El procedimiento computacional, por lo tanto, es el siguiente:

**Algoritmo 1.1**

1. Tomar  $\bar{y} \in Y \cap V$ . Resolver  $(\mathcal{P}_{\bar{y}})$  y obtener un óptimo valor  $\bar{u}$  y  $L^*(y, \bar{u})$ . Hacer  $k = 0$ ,  $\mathcal{S}^k = \emptyset$ ,  $\mathcal{T}^k = \{\bar{u}\}$ ,  $\text{UBD} = v(\bar{y})$ <sup>1.1</sup>. Seleccionar la tolerancia  $\varepsilon > 0$ . Si el  $y$  inicial no está en  $V$  entonces ver el paso 3B.
2. Resolver el problema maestro relajado actual
 
$$\begin{aligned} \min_{y \in Y, \alpha} \quad & \alpha \\ \text{s.a.} \quad & \alpha \geq L^*(y, u_j), \forall u_j \in \mathcal{T}^k \quad (\mathcal{MP}^k) \\ & 0 \geq L_*(y, \lambda_i), \forall \lambda_i \in \mathcal{S}^k \end{aligned}$$

Sea  $(\hat{y}^k, \hat{\alpha}^k)$  solución óptima de  $(\mathcal{MP}^k)$ . Hacer  $\text{LBD} = \hat{\alpha}^k$ , si  $\text{UBD} \leq \hat{\alpha}^k + \varepsilon$  PARAR. Sino, ir al siguiente paso
3. Resolver el subproblema  $(\mathcal{P}_{\hat{y}^k})$ . Uno de los siguientes casos puede ocurrir.
  - 3A.  $v(\hat{y}^k) < \infty$ : Si  $v(\hat{y}^k) \leq \hat{\alpha}^k + \varepsilon$ , PARAR. Se dirá que  $\hat{y}^k$  es  $\varepsilon$ -optimal. Caso contrario, determinar  $\hat{u}$  y el valor de  $L^*(y, \hat{u})$ , luego actualizar  $\mathcal{T}^k$  a  $\mathcal{T}^k \cup \{\hat{u}\}$ ,  $k = k + 1$ . Adicionalmente si  $v(\hat{y}^k) < \text{UBD}$ , hacer  $\text{UBD} = v(\hat{y}^k)$  y volver al paso 2.
  - 3B.  $(\mathcal{P}_{\hat{y}^k})$  es infactible: Determinar  $\hat{\lambda} \in \Lambda$  que satisfaga (1.10), luego determinar  $L_*(y, \hat{\lambda})$ . Actualizar  $\mathcal{S}^k$  a  $\mathcal{S}^k \cup \{\hat{\lambda}\}$ ,  $k = k + 1$  y volver al paso 2.

*Observación 1.4.* Tener en cuenta que :

- i. Los valores de  $u_j$  y  $\lambda_i$  actúan como parámetros en las restricciones.
- ii. Las funciones  $L^*(\cdot, u_j)$  y  $L_*(\cdot, \lambda_i)$  en  $Y$ , se conocen implícitamente mediante la función  $\inf$ .

Una forma, en la cual podemos obtener una regla de correspondencia explícita de las funciones  $L^*$  y  $L_*$  es cuando se cumple la siguiente propiedad conocida como Propiedad  $P$ .

**Propiedad P:** Para cada  $u \geq 0$ , la función  $L^*(\cdot, u): Y \rightarrow \mathbb{R}$  y para cada  $\lambda \in \Lambda$ , la función  $L_*(\cdot, \lambda): Y \rightarrow \mathbb{R}$  pueden ser resueltas facilmente para cualquier valor particular de  $y$ . Esto es, que el valor del problema de minimización interna no dependa de  $y$ .

*Ejemplo 1.5.* Si  $f$  y  $G$  son linealmente separables en  $x$  e  $y$  entonces cumplen la Propiedad P. En efecto, si

$$f(x, y) = f_1(x) + f_2(y), \quad G(x, y) = G_1(x) + G_2(y)$$

entonces para cada  $u \geq 0$  y  $\lambda \in \Lambda$ , se tienen las siguientes igualdades para  $y \in Y$ :

$$L^*(y, u) = \inf_{x \in X} \{f_1(x) + u^t(G_1(x) - h)\} + f_2(y) + u^t G_2(y)$$

$$L_*(y, \lambda) = \inf_{x \in X} \lambda^t(G_1(x) - h) + \lambda^t G_2(y)$$

A continuación enunciaremos un ejemplo en el cual se puede aplicar la descomposición de Benders generalizada y otro en el que no necesariamente alcanzamos un óptimo global con cualquier punto inicial.

*Ejemplo 1.6.* Problemas con función objetivo separable y restricciones separables

$$\min_{y_1, \dots, y_6} [2y_1^2 - y_1y_2 + 4y_2^2 + (y_3 - 4)^2 + (y_4 - 3)^2 + 8y_5^2 + y_6^2 - 3y_5]$$

sujeto a

$$y_1 \geq 1, y_2 \geq 0, y_3 \geq 3, y_4 \geq 2, y_5 \geq 3, y_6 \geq 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5 + y_6^2 \leq 50$$

En problemas, donde tanto la función objetivo como las funciones de restricción son sumas de funciones dependientes de subvectores de variables de decisión. Una de las formas de obtener la separabilidad es introduciendo las variables  $z = (z_1, z_2, z_3)$  y definir

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_{1,1}, x_{1,2}) = (y_1, y_2) \\ x_2 &= (x_{2,1}, x_{2,2}) = (y_3, y_4) \\ x_3 &= (x_{3,1}, x_{3,2}) = (y_5, y_6) \end{aligned}$$

luego definimos

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1) &= 2x_{1,1}^2 - x_{1,1}x_{1,2} + 4x_{1,2}^2 \\
 X_1 &= \{(x_{1,1}, x_{1,2}) \in \mathbb{R}^2 : x_{1,1} \geq 1, x_{1,2} \geq 0\} \\
 f_2(x_2) &= (x_{2,1} - 4)^2 + (x_{2,2} - 3)^2 \\
 X_2 &= \{(x_{2,1}, x_{2,2}) \in \mathbb{R}^2 : x_{2,1} \geq 3, x_{2,2} \geq 2\} \\
 f_3(x_3) &= 8x_{3,1}^2 + x_{3,2}^2 - 3x_{3,1} \\
 X_3 &= \{(x_{3,1}, x_{3,2}) \in \mathbb{R}^2 : x_{3,1} \geq 3, x_{3,2} \geq 0\} \\
 f_0(z) &= 0
 \end{aligned}$$

Las variables artificiales que se introdujeron actuarán de la siguiente manera :

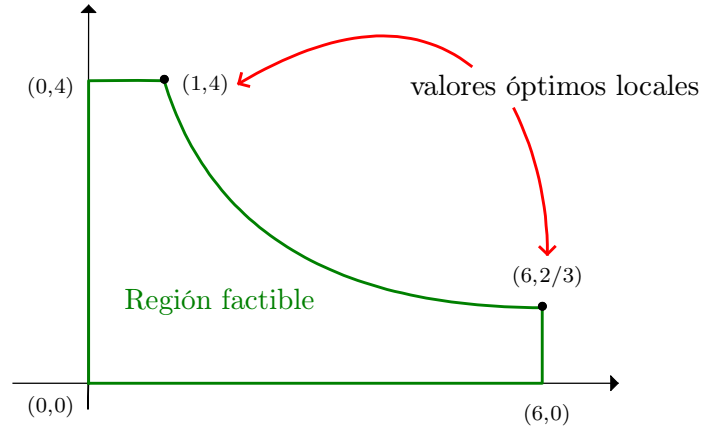
$$\begin{aligned}
 x_{1,1} + x_{1,2} &\leq z_1 \\
 x_{2,1}^2 + x_{2,2}^2 &\leq z_2 \\
 x_{3,1} + x_{3,2}^2 &\leq z_3
 \end{aligned}$$

con el conjunto  $Y = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 : z_1 + z_2 + z_3 \leq 50\}$ . Finalmente al definir a  $z$  como la variable complicante el subproblema se puede resolver de manera paralela.

*Ejemplo 1.7.* Considere el siguiente problema

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y} \quad & -x - y \\
 \text{s.a} \quad & xy \leq 4 \\
 & 0 \leq x \leq 6 \\
 & 0 \leq y \leq 4
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Este problema es no lineal no convexo, debido a la restricción  $xy \leq 4$ . La gráfica de la región factible es la siguiente:



con  $f(1, 4) = -5$  y  $f(6, 2/3) = -6.67$ . A pesar de que el segundo punto es el óptimo global, mostraremos en la siguiente tabla que para diferentes valores iniciales de  $y$  podemos incluso no obtener un óptimo local.

Punto inicial: $y = 0$					Punto inicial: $y = 4$					Punto inicial: $y = 1.25$				
it	$y$	$x$	UBD	LBD	it	$y$	$x$	UBD	LBD	it	$y$	$x$	UBD	LBD
1	0	6	-6	-10	1	4	1	-5	-5	1	1.25	3.2	-4.45	-6.4
2	4	1	-6	-5						2	0	6	-6	-6.1563
										3	0.1536	6	-6.1563	-6.1563

¿A que se debe esto? El subproblema que se forma al fijar  $y \in [0, 4]$  es

$$v(y) = \min_x -x - y \quad (1.16)$$

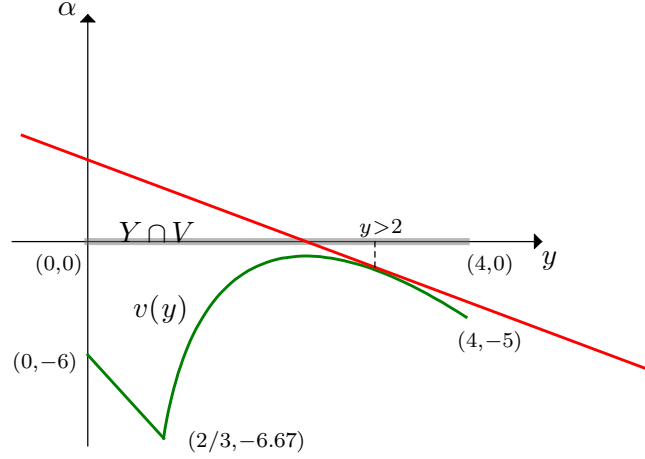
$$s.a. \quad xy \leq 4$$

$$0 \leq x \leq 6$$

al ser un problema de programación lineal es facil ver que  $x^* = 6$  si  $y \in [0, 2/3]$  y  $x^* = 4/y$  si  $y \in [2/3, 4]$ . Además es facil notar que  $V = \{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\}$ . Entonces en  $Y \cap V$

$$v(y) = \begin{cases} -6 - y & , \text{ si } 0 \leq y \leq 2/3 \\ -4/y - y & , \text{ si } 2/3 \leq y \leq 4 \end{cases} \quad (1.17)$$

cuya gráfica en el espacio  $y$ - $\alpha$  es:





Si comenzamos en un punto  $y > 2$ , el corte de Benders que se genera (línea roja) hace que el algoritmo nos lleva al mínimo local  $y = 4$ . Si comenzamos en  $y = 2$  nos lleva al máximo  $y = 2$ . Si comenzamos con  $y \in ]2/3, 2[$  el algoritmo nos lleva a un punto que ni siquiera es óptimo. Si se comienza con  $y \in [0, 2/3[$  llegamos al mismo punto. Sólo cuando se comienza en  $y = 2/3$  conseguimos el óptimo global. Esto se debe a que el corte de Benders no funciona como soporte a la función  $v(y)$  en todo  $y \in Y \cap V$  y esto sucede porque la función  $v(y)$  no es convexa.

## 1.2 Cortes clásico de Benders para problemas de programación lineal de variable mixta.

En esta sección, se presentará un caso particular del problema  $(\mathcal{P})$  y una forma especial que adoptan los cortes factibilidad y optimalidad en el algoritmo de descomposición de Benders.

Para el caso lineal de variable mixta, el problema  $(\mathcal{P})$  queda formulado como sigue:

$$\min_{x,y} [c_1^t x + c_2^t y : Dx + By \leq h, x \in X, y \in Y] \quad (1.18)$$

donde  $c_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $h \in \mathbb{R}^m$ ;  $D$  y  $B$  son matrices con apropiada dimensión. Además  $Y \subset \mathbb{R}^{n_2}$  es un poliedro de las variables complicantes y  $X \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$  es el poliedro que contiene a las variables restantes. Por ejemplo, si  $x$  es una variable continua e  $y$  es una variable entera, el problema (1.18) se convierte en un problema lineal entero mixto (MILP) con estructura de escalera.

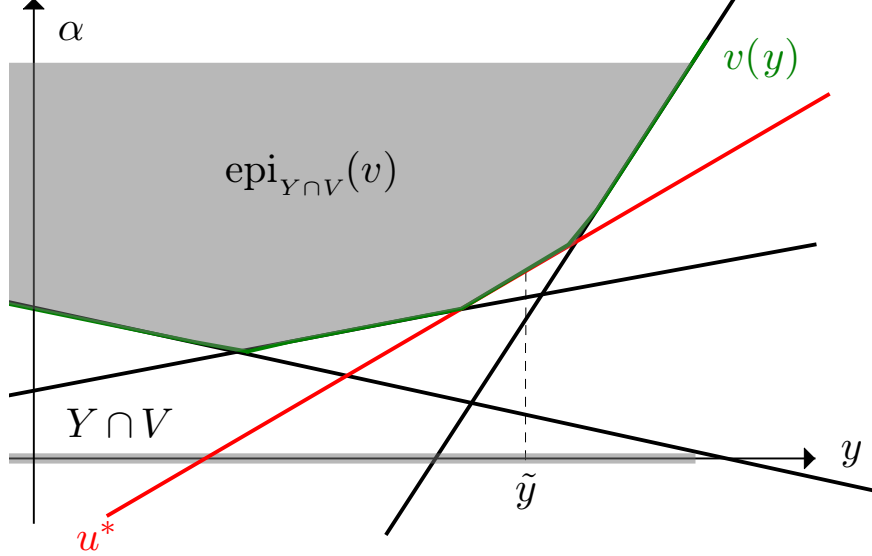
De (1.18), el problema proyectado (definido sobre  $Y \cap V$ ) es :

$$\min_{y \in Y \cap V} v(y) \quad (1.19)$$

donde  $v(y) = \inf_{x \in X} [c_2^t y + c_1^t x : Dx \leq h - By]$  y  $V = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in X, Dx \leq h - By\}$ . Por la dualidad fuerte en programación lineal, tenemos que

$$v(y) = \sup_{u_1, u_2} [c_2^t y + u_1^t (By - h) - u_2^t b : (u_1, u_2) \in U] \quad (1.20)$$

donde  $U = \{u = (u_1, u_2) : c_1 + D^t u_1 + A^t u_2 = 0, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\}$ . De esto se desprende que  $v$  es una función convexa lineal por partes ya que es el máximo puntual de funciones afines.



**Fig. 1.2.** La función en línea verde es la función  $v$  restringida a nuestro dominio de interés  $Y \cap V$ .  $v(\tilde{y})$  es el valor que corresponde al supremo de todas las evaluaciones de los hiperplanos de soporte de  $v$  en  $\tilde{y}$ . Dicho valor se alcanza en la línea roja ( $u^* \in U$ ).

Por otro lado, definamos la función  $r: \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$r(y) = \inf_{s \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x} [s: Dx - s1_m \leq h - By, Ax \leq b],$$

Esta función indica cuando  $y$  estará en  $V$ : Si  $r(y) = 0$ , significa que la restricción  $Dx \leq h - By$  cumple para algún  $x \in X$ , i.e.,  $y \in V$ . Si  $r(y) > 0$ , significa que para todo  $x \in X$ , debe existir una pequeña perturbación de la restricción para que esta sea válida, i.e.,  $y \notin V$ . Claramente si  $y \in V$  entonces  $r(y) = 0$ , y si  $y \notin V$  implicaría que  $r(y) > 0$ .

La representación dual de  $r$  es :

$$r(y) = \sup_{\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0} [\lambda_1^t (By - h) - \lambda_2^t b: 1 \geq \lambda_1^t 1_m, \lambda_1^t D + \lambda_2^t A = 0]. \quad (1.21)$$

Por lo tanto, podemos caracterizar el conjunto  $V$  como

$$y \in V \Leftrightarrow 0 = \sup_{\lambda_1, \lambda_2} [\lambda_1^t (By - h) - \lambda_2^t b : 1 \geq \lambda_1^t 1_m, \lambda_1^t D + \lambda_2^t A = 0]$$

Sustituyendo esta equivalencia y (1.20) en (1.19) obtenemos el problema maestro

$$\min_{y, \alpha} \left[ \alpha : \begin{array}{l} \alpha \geq c_2^t y + u_1^t (By - h) - u_2^t b, \forall (u_1, u_2) \in U, \\ 0 \geq \lambda_1^t (By - h) - \lambda_2^t b, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda. \end{array} \right] \quad (1.22)$$

donde

$$U = \{(u_1, u_2) : c_1 + D^t u_1 + A^t u_2 = 0, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\}$$

y

$$\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2) : 1 \geq \lambda_1^t 1_m, \lambda_1^t D + \lambda_2^t A = 0\}$$

Finalmente, la versión relajada de (1.22) es:

$$\min_{y \in Y, \alpha} \left[ \alpha : \begin{array}{l} \alpha \geq c_2^t y + (u_1^j)^t (By - h) - (u_2^j)^t b, \forall (u_1^j, u_2^j) \in U^k, \\ 0 \geq (\lambda_1^i)^t (By - h) - (\lambda_2^i)^t b, \forall (\lambda_1^i, \lambda_2^i) \in \Lambda^k. \end{array} \right] \quad (1.23)$$

Los siguientes resultados son una caracterización de los cortes de optimalidad y factibilidad a insertar en (1.23) a lo largo del proceso iterativo del Algoritmo 1.1. Estas caracterizaciones nos ayudarán más que todo en la implementación computacional, mas no brindan ninguna aceleración al proceso.

**Proposición 1.8.** *Sea  $(\hat{y}, \hat{\alpha})$  solución optimal global al problema maestro relajado (1.23). Si  $v(\hat{y}) < \infty$ , entonces*

$$c_2^t \hat{y} + (u_1^*)^t (By - h) - (u_2^*)^t b = v(\hat{y}) + (\pi^*)^t (y - \hat{y})$$

donde  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$  es la solución óptima asociada al problema (1.20) para  $y = \hat{y}$ , y  $\pi^* \in \partial v(\hat{y})$ .

*Demostración.*  $v(\hat{y}) = \inf_x [c_2^t y + c_1^t x : Dx \leq h - B\hat{y}, Ax \leq b]$  puede ser reescrito como

$$\inf_{x, y} [c_2^t y + c_1^t x : Dx + By \leq h, Ax \leq b, y = \hat{y}],$$

entonces

$$v(\hat{y}) = c_2^t \hat{y} + \sup_{u_1, u_2, u_3} \left[ \begin{array}{l} c_1 + D^t u_1 + A^t u_2 = 0, \\ -u_1^t h - u_2^t b - u_3^t \hat{y} : u_1^t B + u_3^t = 0, \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{array} \right]$$

Desde que  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$  es la variable óptima asociada al problema (1.20) para  $y = \hat{y}$ , entonces  $u_3^* = -(u_1^*)^t B$ . Consecuentemente:

$$\begin{aligned} (u_1^*)^t (By - h) - (u_2^*)^t b &= (u_1^*)^t (B\hat{y} - h) - (u_2^*)^t b + (u_1^*)^t B(y - \hat{y}) \\ &= (v(\hat{y}) - c_2^t \hat{y}) - (u_3^*)^t (y - \hat{y}) \end{aligned}$$

escribiendo  $\pi^* = -u_3^*$  se establece la igualdad. Es claro que  $\pi^* \in \partial v(\hat{y})$ , pues  $v$  es una función convexa lineal por partes.

**Proposición 1.9.** Sea  $(\hat{y}, \hat{\alpha})$  una solución óptima global al problema maestro relajado (1.23). Si  $r(y) > 0$ , entonces:

$$(\lambda_1^*)^t (By - h) - (\lambda_2^*)^t b = r(\hat{y}) + (\theta^*)^t (y - \hat{y})$$

donde  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$  es la variable óptima asociada al problema (1.21) para  $y = \hat{y}$ , y  $\theta^* \in \partial r(\hat{y})$ .

*Demostración.*  $r(\hat{y}) = \inf_{s \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x \in X} [s: Dx - s1_m \leq h - By]$  puede ser reescrito como

$$r(\hat{y}) = \inf_{s \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x} [s: Dx + By - s1_m \leq h, Ax \leq b, y = \hat{y}]$$

entonces, por la dualidad fuerte:

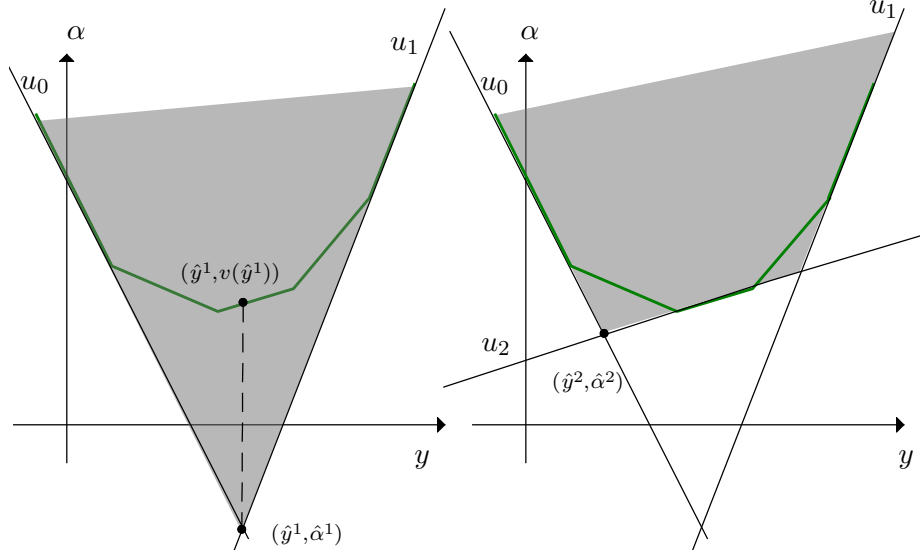
$$r(\hat{y}) = \sup_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} \left[ \begin{array}{l} 1 \geq \lambda_1^t 1_m, \\ -\lambda_1^t h - \lambda_2^t b - \lambda_3^t \hat{y} : \lambda_1^t D + \lambda_2^t A = 0, \\ \lambda_1^t B + \lambda_3^t = 0, \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \end{array} \right]$$

Desde que  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$  es la solución óptima asociada al problema (1.21) para  $y = \hat{y}$ ; entonces  $\lambda_3^* = -(\lambda_1^*)^t B$ . Consecuentemente

$$\begin{aligned} (\lambda_1^*)^t (By - h) - (\lambda_2^*)^t b &= (\lambda_1^*)^t (B\hat{y} - h) - (\lambda_2^*)^t b + (\lambda_1^*)^t B(y - \hat{y}) \\ &= r(\hat{y}) - \lambda_3^*(y - \hat{y}) \end{aligned}$$

escribiendo  $\theta^* = -\lambda_3^*$  obtenemos la igualdad deseada. Es claro que  $\theta^* \in \partial r(\hat{y})$ , pues  $r$  es una función convexa lineal por partes.

A continuación se muestra una interpretación gráfica de cómo funciona el algoritmo de descomposición



**Fig. 1.3.** Representación del problema maestro relajado en la iteración 1 (izquierda) e iteración 2 (derecha). La función de verde es la función  $v(y)$ .

En la primera iteración; con los cortes iniciales  $u_0$  y  $u_1$  se obtiene a  $(\hat{y}^1, \hat{\alpha}^1)$  como solución al problema maestro, luego se evalúa el valor de  $v(\hat{y}^1)$ . Se observa que  $v(\hat{y}^1) > \hat{\alpha}^1$  y para eliminar esta brecha en la vertical de  $\hat{y}^1$ , se debe agregar el corte  $u_2$  formandonos así el problema maestro relajado para la segunda iteración.

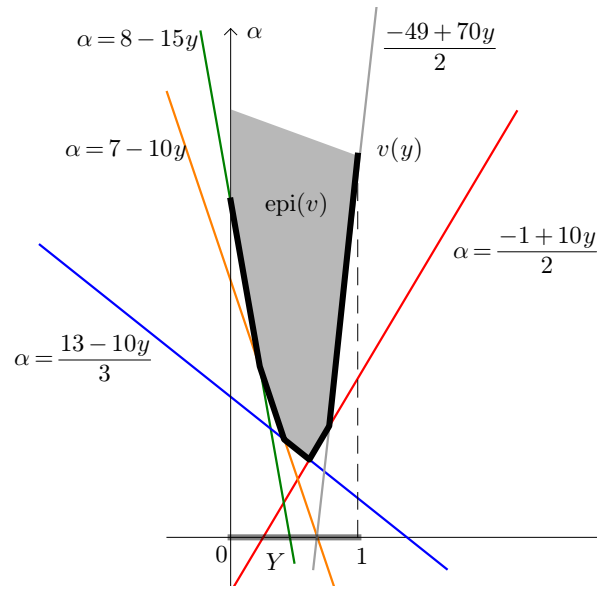
*Ejemplo 1.10.* Dado el siguiente problema

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y} \quad & x \\
 \text{s.t.} \quad & x + 15y \geq 8 \\
 & 3x + 10y \geq 13 \\
 & x + 10y \geq 7 \\
 & 2x - 10y \geq -1 \\
 & 2x - 70y \geq -49 \\
 & x \geq 0, y \in [0, 1]
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

Consideremos la variable  $y$  como la variable complicante. Es facil notar que para cualquier valor de  $y \in [0, 1]$  siempre existirá  $x \geq 0$  tal que cumpla todas las restricciones de (1.24). La función  $v$  será :

$$\begin{aligned} v(y) = \min_x \quad & x \\ \text{s.t} \quad & x + 15y \geq 8 \quad (\lambda_1) \\ & 3x + 10y \geq 13 \quad (\lambda_2) \\ & x + 10y \geq 7 \quad (\lambda_3) \\ & 2x - 10y \geq -1 \quad (\lambda_4) \\ & 2x - 70y \geq -49 \quad (\lambda_5) \end{aligned} \quad (1.25)$$

donde los  $\lambda_i$  son las variables duales asociadas a las restricciones.



**Fig. 1.4.** La gráfica para la función  $v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  esta dada por la función gruesa

Según la proposición 1.8, al agregar la restricción  $y = \tilde{y}$ , el corte que se genera al resolver (1.25) es  $\alpha \geq v(\tilde{y}) + \tilde{\lambda}_6(y - \tilde{y})$ , donde  $\tilde{\lambda}_6$  es el valor óptimo de la variable dual de la restricción  $y = \tilde{y}$ . Por lo tanto, el problema maestro en la iteración  $k$  es:

$$\min_{y \in [0, 1], \alpha} \left[ \alpha: \alpha \geq v(y^i) + \lambda^i(y - y^i), \forall i = 1, \dots, k \right] \quad (1.26)$$

El proceso completo es el siguiente:

**Inicialización:** Se resuelve el problema maestro sin cortes

$$\min_{y \in [0,1], \alpha} \alpha \quad (1.27)$$

Una de las solución óptima es  $y = 0.58$  (se pudo escojer otro valor, pero con fines interpretativos se eligió este.) y  $\alpha = -\infty$ . El dual del problema (1.25) para  $y = 0.58$  es

$$\begin{aligned} v(0.58) = \max \quad & 8\lambda_1 + 13\lambda_2 + 7\lambda_3 - \lambda_4 - 49\lambda_5 + 0.58\lambda_6 \\ \text{s.t} \quad & \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 \leq 1 \\ & 15\lambda_1 + 10\lambda_2 + 10\lambda_3 - 10\lambda_4 - 70\lambda_5 + \lambda_6 = 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

cuyo valor óptimo es  $v(0.58) = 2.4$ . Como  $v(0.58) > \alpha$  entonces se debe generar un corte de factibilidad utilizando el valor óptimo de  $\lambda_6$ . Dicho corte es

$$\alpha \geq 2.4 + 5(y - 0.58)$$

**Iteración 1:** Resolvemos el nuevo problema maestro

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, y} \quad & \alpha \\ \text{s.t} \quad & \alpha \geq 2.4 + 5(y - 0.58) \\ & 1 \geq y \geq 0 \end{aligned}$$

La solución óptima es  $y = 0$ ,  $\alpha = -0.5$ . Luego resolvemos el subproblema (1.25) para  $y = 1$ , obtenemos  $v(0) = 8$ ,  $\lambda_6 = -15$ . Como  $v(0) = 8 > \alpha = -0.5$  por lo tanto se forma el corte

$$\alpha \geq 8 - 15(y - 0)$$

**Iteración 2:** Resolvemos el nuevo problema maestro

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, y} \quad & \alpha \\ \text{s.t} \quad & \alpha \geq 2.4 + 5(y - 0.58) \\ & \alpha \geq 8 - 15y \\ & 1 \geq y \geq 0 \end{aligned}$$

La solución óptima es  $y = 0.425$ ,  $\alpha = 1.625$ . Luego resolvemos el subproblema (1.25) para  $y = 0.425$ , obtenemos  $v(0.425) = 2.91667$ ,  $\lambda_6 = -10/3$  y por lo tanto el corte

$$\alpha \geq 2.91667 - \frac{10}{3}(y - 0.425)$$

**Iteración 3:** Resolvemos el nuevo problema maestro

$$\begin{array}{ll} \min_{\alpha, y} & \alpha \\ \text{s.t} & \alpha \geq 2.4 + 5(y - 0.58) \\ & \alpha \geq 8 - 15y \\ & \alpha \geq 2.91667 - \frac{10}{3}(y - 0.425) \\ & 1 \geq y \geq 0 \end{array}$$

La solución óptima es  $y = 0.58$ ,  $\alpha = 2.4$ . Luego resolvemos el subproblema (1.25) para  $y = 0.58$  obteniendo  $v(y) = 2.4$  y por lo tanto alcanzando el óptimo del problema original.

Cabe notar que en este ejemplo, mediante el algoritmo de Benders se alcanzó el óptimo en tres iteraciones para el punto inicial elegido  $y = 0.58$ . En el siguiente capítulo veremos cómo Magnanti-Wong idearon una técnica para poder reducir el número de iteraciones mediante una buena selección de los cortes de factibilidad cuando el problema primal tenga múltiples soluciones duales.

### 1.2.1 Descomposición Acelerada de Benders

La descomposición clásica de Benders fue aplicada exitosamente en una variedad de problemas. Florian (1976) en la programación del movimiento de las locomotoras, Richardson (1976) al enrutamiento de las aerolíneas, etc. Sin embargo, no en todas las aplicaciones se consiguió un resultado exitoso. Wong (1978) observó que la aplicación directa del algoritmo de Benders a problemas de diseño de red convergen muy lentamente, requiriendo la solución de una gran cantidad de problemas



enteros. Esto motivó el estudio de técnicas que ayuden a mejorar las propiedades de convergencia de un problema. Entre las posibilidades de mejora, tenemos:

1. Hacer una buena selección de cortes iniciales, es decir, los conjuntos  $\mathcal{T}^0$  y  $\mathcal{S}^0$
2. Modificar el problema maestro para alterar la elección de  $\hat{y}^k$  en cada iteración.
3. Formular de una mejor manera el problema.
4. Una buena selección de cortes a agregar en el problema maestro en cada iteración.

En muchas aplicaciones, tales como los problemas con restricciones de red, el problema

$$v(\tilde{y}) = \max_{\substack{u_1, u_2 \\ s.a.}} c_2^t \tilde{y} + u_1^t (B \tilde{y} - h) - u_2^t b \\ (u_1, u_2) \in U$$

con  $U = \{(u_1, u_2): D^t u_1 + A^t u_2 = c_1, u_1 \leq 0, u_2 \leq 0\}$  posee múltiples soluciones, entonces múltiples cortes pueden ser potencialmente generados en cada iteración.

**Notación 1.11.** *Para simplificar notación, haremos el siguiente cambio*

$$g_1^t(u) = c_2 + B^t u_1, \quad g_2(u) = -u_1^t h - u_2^t b$$

Magnanti y Wong desarrollaron en [8] una técnica que ayuda a generar los cortes más fuertes posibles. Donde la fortaleza entre dos cortes es comparada mediante la siguiente definición:

**Definición 1.12.** *Diremos que el corte  $\alpha \geq g_1(u)y + g_2(u)$  domina o es más fuerte que el corte  $\alpha \geq g_1(u')y + g_2(u')$ , si*

$$g_1(u)y + g_2(u) \geq g_1(u')y + g_2(u'), \forall y \in Y$$

*con desigualdad estricta en al menos un  $y \in Y$ .*

**Definición 1.13.** Un corte  $\alpha \geq g_1(u)y + g_2(u)$  será llamado *Pareto-optimal* si no existe otro que lo domine. Similarmente el vector  $u \in U$  será llamado *Pareto-optimal* si su corte asociado es *Pareto-optimal*.

El siguiente teorema provee un método para escoger un corte Pareto-optimal de entre todos los cortes posibles que puede producir el subproblema.

**Teorema 1.14.** Sea  $\tilde{y} \in Y$  con el respectivo subproblema

$$v(\tilde{y}) = \max_{\substack{u \\ s.a. \quad u \in U}} g_1(u)\tilde{y} + g_2(u) \quad (1.29)$$

donde  $U = \{u = (u_1, u_2): D^t u_1 + A^t u_2 = c_1, u_1 \leq 0, u_2 \leq 0\}$ . Sea  $y^0 \in \text{ri}(\text{con}(Y))$  y  $U(\tilde{y})$  el conjunto de soluciones óptimas de (1.29). Si  $u^0$  es solución al siguiente problema

$$n(\tilde{y}, y^0) = \max_{\substack{u \\ s.a. \quad u \in U(\tilde{y})}} g_1(u)y^0 + g_2(u) \quad (1.30)$$

entonces  $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$  es *Pareto-optimal*.

*Demostración.* Supongamos que  $u^0$  no es Pareto-optimal, entonces existe  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in U$  tal que  $\bar{u}$  domina a  $u^0$ ; esto es:

$$g_1(\bar{u})y + g_2(\bar{u}) \geq g_1(u^0)y + g_2(u^0), \forall y \in Y \quad (1.31)$$

además, para todo  $w \in \text{conv}(Y)$  también se cumple que

$$g_1(\bar{u})w + g_2(\bar{u}) \geq g_1(u^0)w + g_2(u^0)$$

debido a que  $w = \sum_{j=1}^p \lambda_j y_j$ ,  $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$ ,  $\lambda_j \geq 0$  para una cantidad finita de puntos  $y_1, \dots, y_p \in Y$ . Notemos también que para  $y = y^0$  en (1.31),  $\bar{u}$  debe ser solución óptima de (1.29), es decir,  $\bar{u} \in U(\tilde{y})$ . De (1.31) y

(1.30) se tiene que

$$g_1(\bar{u})y^0 + g_2(\bar{u}) = g_1(u^0)y^0 + g_2(u^0) \quad (1.32)$$

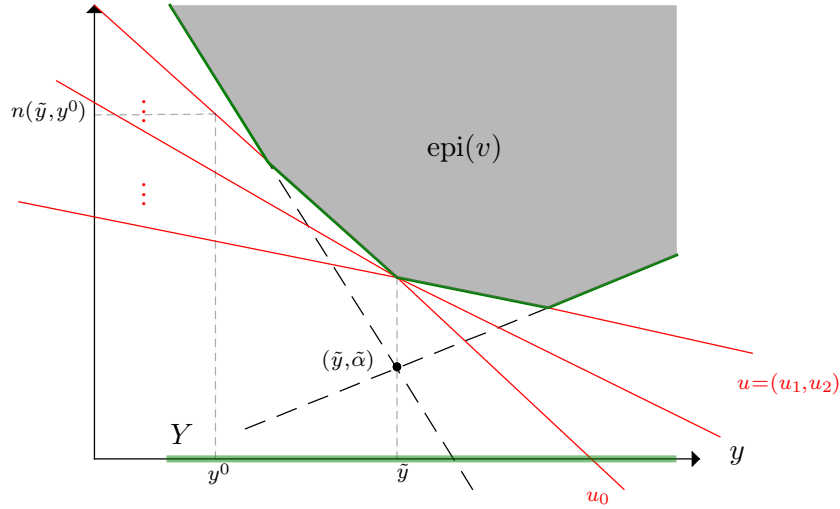
Desde que  $\bar{u}$  domina a  $u^0$ , debe existir  $\bar{y} \in Y$  tal que

$$g_1(\bar{u})y + g_2(\bar{u}) > g_1(u^0)y + g_2(u^0) \quad (1.33)$$

Además, como  $y^0 \in \text{ri}(\text{conv}(Y))$ , existe un escalar  $\theta > 1$  tal que  $w = \theta y^0 + (1 - \theta)\bar{y} \in \text{conv}(Y)$ . Multiplicando (1.32) por  $\theta$  y (1.33) por  $1 - \theta$  obtenemos sumando

$$g_1(u^0)w + g_2(u^0) > g_1(\bar{u})w + g_2(\bar{u})$$

lo cual es una contradicción ya que  $\bar{u}$  domina a  $u^0$ . Por lo tanto  $u^0$  es Pareto-optimal.



**Fig. 1.5.** Al resolver el problema maestro (minimizar la función de líneas punteadas verdes) se obtiene el punto  $(\tilde{y}, \tilde{\alpha})$ . Luego se resuelve el subproblema  $v(\tilde{y})$ . El conjunto de soluciones óptimas es  $U(\tilde{y})$  y los cortes que representan a  $u \in U(\tilde{y})$  son las líneas rojas. Al resolver el nuevo subproblema vemos que el valor de  $n(\tilde{y}, y^0)$  indica el máximo entre todas las evaluaciones de  $g_1(u)y^0 + g_2(u)$  con  $u = (u_1, u_2) \in U(\tilde{y})$ .

Con esta implementación, el algoritmo 1.1 adaptado al caso lineal queda de la siguiente manera

**Algoritmo 1.2**

1. Tomar  $\bar{y} \in Y \cap V$ . Resolver (1.20) para  $\bar{y}$  y obtener un óptimo valor  $\bar{u}$  y el corte inicial

$$\alpha \geq c_2^t y + (\bar{u}_1^j)^t (By - h) - (\bar{u}_2^j)^t b$$

Hacer  $k = 0$ ,  $\Lambda^k = \emptyset$ ,  $U^k = \{\bar{u}\}$ ,  $UBD = v(\bar{y})$ . Seleccionar la tolerancia  $\varepsilon > 0$ .

2. Resolver el problema maestro relajado en la iteración  $k$ .

$$\min_{y \in Y, \alpha} \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & \alpha \geq c_2^t y + (u_1^j)^t (By - h) - (u_2^j)^t b, \forall (u_1^j, u_2^j) \in U^k, \\ & 0 \geq (\lambda_1^i)^t (By - h) - (\lambda_2^i)^t b, \forall (\lambda_1^i, \lambda_2^i) \in \Lambda^k. \end{aligned}$$

Sea  $(\hat{y}^k, \hat{\alpha}^k)$  solución. Hacer  $LBD = \hat{\alpha}^k$ , si  $UBD \leq \hat{\alpha}^k + \varepsilon$  PARAR. Sino, ir al siguiente paso.

3. Resolver el subproblema (1.20) para  $\hat{y}^k$ . Uno de los siguientes casos puede ocurrir.

- 3A.  $v(\hat{y}^k) < \infty$ : Si  $v(\hat{y}^k) \leq \hat{\alpha}^k + \varepsilon$ , PARAR. Se dirá que  $\hat{y}^k$  es  $\varepsilon$ -optimal. Caso contrario, determinar  $\hat{u}$  resolviendo el subproblema

$$\begin{aligned} v(\hat{y}^k) = \max_u & g_1(u) \hat{y}^k + g_2(u) \\ \text{s.a.} \quad & u \in U \end{aligned} \quad (1.34)$$

- Si (1.34) posee una única solución  $\hat{u}$ , hacer  $U^k = U^k \cup \{\hat{u}\}$ .
- Si (1.34) posee múltiples soluciones entonces escoger un punto  $y^0 \in \text{ri}(\text{conv}(Y))$  tal que  $y^0 \neq \hat{y}^k$  y resolver el problema

$$\begin{aligned} n(\tilde{y}, y^0) = \max_{s.a.} & g_1(u) y^0 + g_2(u) \\ & u \in U(\tilde{y}) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Luego, hacer  $U^k = U^k \cup \{\hat{u}, u^0\}$  donde  $\hat{u}$  es la solución obtenida en (1.34) y  $u^0$  la obtenida en (1.35).

Hacer  $k = k + 1$ . Adicionalmente si  $v(\hat{y}^k) < UBD$ , hacer  $UBD = v(\hat{y}^k)$  y volver al paso 2.

- 3B. (1.20) es infactible: Determinar  $\hat{\lambda} \in \Lambda$  resolviendo el problema

$$r(y) = \sup_{\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0} [\lambda_1^t (By - h) - \lambda_2^t b : 1 \geq \lambda_1^t 1_m, \lambda_1^t D + \lambda_2^t A = 0]$$

Actualizar  $\Lambda^k$  a  $\Lambda^k \cup \{\hat{\lambda}\}$ ,  $k = k + 1$  y volver al paso 2.

*Ejemplo 1.15.* Consideremos nuevamente el problema del ejemplo 1.10. Lo resolveremos mediante el Algoritmo 2.2 : Luego de obtener el corte

$$\alpha \geq 2.4 + 5(y - 0.58)$$

elegimos  $y^0 = 0.425$  y resolvemos el nuevo subproblema de Magnanti-Wong para obtener un corte Pareto-optimal

$$\begin{aligned} \max \quad & 8\lambda_1 + 13\lambda_2 + 7\lambda_3 - \lambda_4 - 49\lambda_5 + 0.425\lambda_6 \\ \text{s.t} \quad & \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 \leq 1 \\ & 15\lambda_1 + 10\lambda_2 + 10\lambda_3 - 10\lambda_4 - 70\lambda_5 + \lambda_6 = 0 \\ & \color{blue}{8\lambda_1 + 13\lambda_2 + 7\lambda_3 - \lambda_4 - 49\lambda_5 + 0.58\lambda_6 = 2.4} \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0 \end{aligned} \tag{1.36}$$

obteniendo  $\lambda_6^0 = -10/3$ , formandose el nuevo corte

$$\alpha \geq 2.4 - \frac{10}{3}(y - 0.58)$$

**Iteración 1:** A diferencia de la primera iteración en el ejemplo 1.10, nuestro problema maestro relajado es

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, y} \quad & \alpha \\ \text{s.t} \quad & \alpha \geq 2.4 + 5(y - 0.58) \\ & \alpha \geq 2.4 - \frac{10}{3}(y - 0.58) \\ & 1 \geq y \geq 0 \end{aligned}$$

cuya solución óptima es  $y = 0.58$ ,  $\alpha = 2.4$ . Luego resolvemos el subproblema (1.25) para  $y = 0.58$  obteniendo  $v(y) = 2.4$  y por lo tanto alcanzando el óptimo del problema original.

*Observación 1.16.* La restricción en azul del problema (1.36) asegura que en corte Pareto-optimal aún sea un hiperplano de soporte para la función  $v(y)$  en  $y = \hat{y}^k$ .

*Observación 1.17.* Diferentes elecciones para  $y^0$  pueden generar diferentes cortes pareto óptimal. En particular para  $Y \subseteq \mathbb{R}$  para elegir  $y^0 \neq \hat{y}^k$  tenemos dos opciones:  $y^0$  a la izquierda de  $\hat{y}^k$  o a la derecha de  $\hat{y}^k$ . Y para  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  podemos tener más elecciones para  $y^0 \neq \hat{y}^k$ ; esto incurriría en resolver una gran cantidad de subproblemas en el paso 3A.





## Aplicación: Compromiso de unidades con restricciones de seguridad

La operación de los sistemas de energía involucra la coordinación de múltiples unidades generadoras que se utilizan para abastecer la demanda eléctrica. Esta coordinación requiere considerar diferentes aspectos técnicos de las unidades generadoras, por ejemplo, límites de potencia, disponibilidades, ciclos combinados, etc; así como también diferentes restricciones del sistema de energía en su conjunto, por ejemplo, redes de transmisión y sus límites de capacidad, además de los voltajes de nodos (subestaciones).

Además de garantizar el suministro fiable de energía a los consumidores, también se debe considerar una gestión económica eficiente; por ello se debe considerar los costos operativos, costo de arranque y parada de una térmica, etc. En este sentido se define el problema de compromiso de unidades con restricciones de red que consiste en determinar, sobre todo el horizonte de planeamiento, el estado de operación y cantidad de energía a entregar por cada unidad generadora de manera que se satisfaga la demanda, se cumplan los requerimientos de seguridad del sistema y se minimice el costo operativo total.

### 2.1 Formulación del problema de compromiso de unidades con restricciones de red

A continuación se describirá los aspectos a tener en cuenta en el modelamiento del compromiso de unidades con restricciones de red

#### 2.1.1 Horizonte de Planeamiento

Un horizonte de planeamiento típico es un día dividido en 24 horas. Si los intervalos entre tiempos son denotados por el índice  $t$ , el horizonte



de planeamiento consiste en los siguientes periodos de tiempo

$$t = 1, 2, \dots, T$$

donde  $T$  es el número de periodos de tiempo en el horizonte de planeamiento. Por ejemplo, si se divide en medias horas  $T = 48$ .

### 2.1.2 Unidades de Generación

Parte del objetivo general del compromiso de unidades es determinar el arranque y apagado de cada unidad generadora en un sistema de potencias. Estas unidades generadoras son indexadas por  $g$ :

$$g = 1, 2, \dots, N_G$$

donde  $N_G$  es el número total de generadores. Por cuestión de simplicidad solo unidades térmicas serán consideradas en esta aplicación.

### 2.1.3 Disponibilidad de las unidades de generación

Las unidades de generación térmica pueden estar totalmente o parcialmente indisponibles por periodos de tiempo. Efectos de temperatura, intervenciones o mantenimientos realizados a las unidades de generación reducen su disponibilidad. Esta reducción se expresa en porcentaje y se aplica al límite de potencia máximo nominal  $P_g^{\max}$  de la unidad térmica  $g$ , obteniendo en cada etapa  $t$  una potencia máxima  $P_{g,t}^{\max}$  dada por:

$$P_{g,t}^{\max} = P_g^{\max} \cdot \left(1 - \frac{\text{Find}_g}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{\text{Mant}_{g,t}}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{\text{Temp}_{g,t}}{100}\right)$$

donde los siguientes parámetros toman valores de entre  $[0, 100]$

- $\text{Find}_g$  : factor de indisponibilidad de la unidad térmica  $g$ .
- $\text{Mant}_{g,t}$  : indisponibilidad por mantenimiento de la unidad térmica  $g$  en la etapa  $t$
- $\text{Temp}_{g,t}$  : indisponibilidad por temperatura de la unidad térmica  $g$  en la etapa  $t$ .

Debe aclararse que la reducción de su disponibilidad afecta solamente a la potencia máxima mientras que la potencia mínima es igual para cada periodo de tiempo, es decir:

$$P_g^{\min} = P_g^{\min}$$

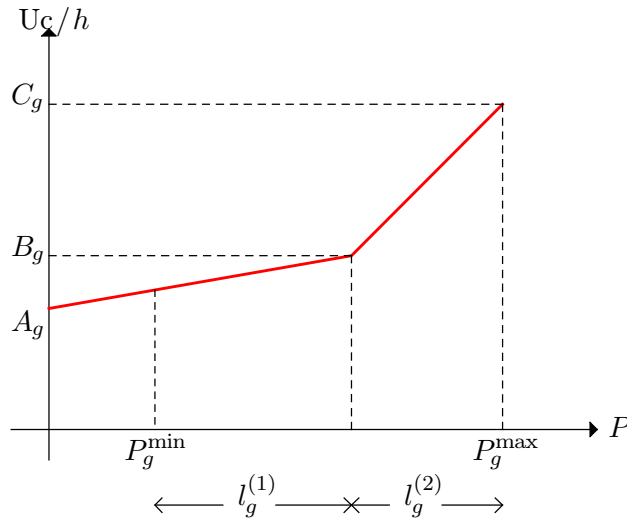
#### 2.1.4 Estado Operativo

Para indicar que una unidad de generación térmica  $g$  está operando o no en la etapa  $t$  se utilizará una variable binaria  $u_{g,t}$ , la cual toma el valor de 1 cuando la térmica  $g$  está operativa en la etapa  $t$  y 0 en caso contrario.

#### 2.1.5 Curva de Producción o costos

La curva de costos de producción de una unidad térmica  $g$  se calcula como la suma del costo variable combustible y los costos de operación y mantenimiento. Esta curva nos indica cuánto costaría operar la unidad térmica a cierta cantidad de potencia.

1. Costo Variable combustible (CVC): Se forma a partir de la curva de eficiencia, la cual nos indica la cantidad de combustible por hora que consume la unidad térmica al operar a cierta cantidad potencia. Esta curva por lo general es no lineal, sin embargo, un estudio de ensayos de potencia efectiva y rendimiento realizada por el área del SGI del COES [22], nos brinda puntos de medición necesarios para poder aproximarla mediante una función convexa lineal por partes.



**Fig. 2.1.** Curva de eficiencia de la unidad térmica  $g$ . En el eje  $x$  se indica la potencia a despachar y en el eje  $y$  se mapea la cantidad de combustible por hora correspondiente.

donde  $A_g, B_g, C_g, l_g^{(1)}, l_g^{(2)}$  son parámetros asociados a cada unidad de generación  $g$ . Una manera de escribir esta función convexa lineal por partes es mediante el modelo incremental [11]. Aplicando esta técnica a la curva de eficiencias y considerando el estado de operación de la unidad térmica vemos que la variable potencia  $p_{g,t}$  entregada por la unidad térmica  $g$  en el periodo  $t$  puede expresarse como la suma de potencias de cada tramo de la curva de producción:

$$p_{g,t} = u_{g,t} \cdot P_g^{\min} + l_g^{(1)} \cdot \delta_{1,t} + l_g^{(2)} \cdot \delta_{2,t}$$

donde

$$\begin{cases} 0 \leq \delta_{2,t} \leq b_t \leq \delta_{1,t} \leq u_{g,t} \\ \delta_{i,t} \in \mathbb{R}_+, i = 1, 2 \\ b_t \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (2.1)$$

Sin embargo, debido a que la curva de eficiencia forma parte de la función objetivo de un problema de minimización, entonces podemos prescindir de la variable binaria  $b_t$  pues las pendientes de los tramos se comportan de manera creciente. Así, la restricción (2.1) se modela finalmente como:

$$\begin{cases} 0 \leq \delta_{2,t}, \delta_{1,t} \leq u_{g,t}, i = 1, 2 \\ \delta_{i,t} \in \mathbb{R}_+, i = 1, 2 \\ u_{g,t} \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (2.2)$$

Con esto, el costo variable combustible de una térmica  $g$  en la etapa  $t$  está dado por

$$\begin{aligned} \text{CVC}_{g,t} = \text{CC}_{g,t} \cdot & \left[ A_g \cdot u_{g,t} + \frac{B_g - A_g}{P_g^{\min} + l_g^{(1)}} \cdot (dp_{g,t}^{(1)} + u_{g,t} \cdot P_g^{\min}) \right. \\ & \left. + \frac{C_g - B_g}{l_g^{(2)}} \cdot dp_{g,t}^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  $dp_{g,t}^{(i)} = l_g^{(i)} \cdot \delta_{i,t}$  para  $i = 1, 2$  indica la potencia por tramo y  $\text{CC}_{g,t}$  es el costo de combustible que usa la unidad  $g$  en la etapa  $t$ .

2. Costo de Operación y mantenimiento (COM): Es una función lineal con respecto a la potencia generada y pasa por el origen de coordenadas. Está dada por la siguiente expresión

$$\text{COM}_{g,t} = \text{CVNC}_{g,t} \cdot (u_{g,t} \cdot P_g^{\min} + dp_{g,t}^{(1)} + dp_{g,t}^{(2)}) \quad (2.4)$$

Finalmente, sumando (2.3) y (2.4) obtenemos la expresión que nos indica el costo de producción  $\text{CTer}_{g,t}$  de una unidad térmica  $g$  para el periodo de tiempo  $t$  :

$$\text{CTer}_{g,t} = \text{CVC}_{g,t} + \text{COM}_{g,t} \quad (2.5)$$

### 2.1.6 Límite de Potencias

Una vez determinada la potencia máxima con la cual se trabajará para unidad generadora  $g$  se tiene que

$$p_{g,t} \leq P_{g,t}^{\max} \cdot u_{g,t}$$

además, de lo desarrollado en la sección de curva de producción

$$\begin{aligned} p_{g,t} &= u_{g,t} \cdot P_g^{\min} + l_g^{(1)} \cdot \delta_{1,t} + l_g^{(2)} \cdot \delta_{2,t} \\ &= u_{g,t} \cdot P_g^{\min} + dp_{g,t}^{(1)} + dp_{g,t}^{(2)} \end{aligned}$$

luego la restricción de límite de potencias para una unidad generadora  $g$  queda de la siguiente manera

$$dp_{g,t}^{(1)} + dp_{g,t}^{(2)} \leq (P_{g,t}^{\max} - P_g^{\min}) \cdot u_{g,t} \quad (2.6)$$

$$dp_{g,t}^{(i)} \geq 0, i = 1, 2 \quad (2.7)$$

$$dp_{g,t}^{(i)} \leq l_g^{(i)} \quad (2.8)$$

### 2.1.7 Arranque y Parada

El arranque  $y_{g,t}$  o parada  $w_{g,t}$  de una unidad térmica  $g$  suceden cuando hay un cambio del estado de operación  $u_{g,t}$  de un periodo a otro. Cualquier unidad térmica que está activa actualmente, puede apagarse en el siguiente periodo pero no arrancar. Análogamente cualquier unidad que está apagada actualmente puede arrancar en el siguiente periodo pero no apagarse. Entonces, para vincular el arranque y parada con el estado de operación, se formula las siguientes restricciones para cada periodo  $t$ :

$$\begin{aligned} y_{g,t} - w_{g,t} &= u_{g,t} - u_{g,t-1}, \forall g, t \\ y_{g,t} + w_{g,t} &\leq 1, \forall g, t \\ y_{g,t}, w_{g,t} &\in \{0, 1\}, \forall g, t \end{aligned} \quad (2.9)$$

Note que la primera restricción en (2.9) incluye variables binarias de los periodos  $t$  y  $t - 1$ . Así, es necesario especificar la restricción para el primer periodo del horizonte de planeamiento como:

$$y_{g,1} - w_{g,1} = u_{g,1} - U_{g,1}, \forall g \quad (2.10)$$

donde  $U_{g,1}$  es igual a 1 si la unidad  $g$  estaba activada antes de empezar el horizonte y 0 si estaba apagada. A continuación se muestra un cuadro con las posibles combinaciones de los valores que toman las variables en (2.9):

$u_{g,t-1}$	$u_{g,t}$	$y_{g,t}$	$w_{g,t}$
0	0	0	0
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	0

### 2.1.8 Cantidad máxima de arranques

El numero de arranques totales en todo el horizonte de planeamiento de una unidad térmica  $g$  puede estar restringida a una cantidad máxima  $Ar_g^{\max}$  ( En [23] se indica cómo interviene el numero de arranques de una unidad térmica en los costos de mantenimiento, por ello es que se restringe a una cantidad máxima.). Para aquellas unidades que tienen esta restricción, el numero de arranques se limita mediante la siguiente formulación:

$$\sum_{t=1}^T y_{g,t} \leq Ar_g^{\max} \quad (2.11)$$

### 2.1.9 Cantidad máxima de paradas

El numero de paradas totales en todo el horizonte de planeamiento de una unidad térmica  $g$  puede estar restringida a una cantidad máxima  $Par_g^{\max}$ . Para aquellas unidades que tienen esta restricción, el numero de paradas se limita mediante la siguiente formulación:

$$\sum_{t=1}^T w_{g,t} \leq Par_g^{\max} \quad (2.12)$$

### 2.1.10 Tiempo mínimo de Operación

l tiempo mínimo de operación  $Tmin_g^{\text{op}}$  de una unidad  $g$  obliga a que esta opere como mínimo una cantidad de  $Tmin_g$  etapas después del arranque.

Esta restricción se modela para la etapa  $t$  mediante el arranque y estado de operación de la siguiente manera:

$$\sum_{\substack{s \leq t \\ s > t - \text{Tmin}_g^{\text{op}}}} y_{g,s} \leq u_{g,t} \quad (2.13)$$

*Observación 2.1.* Existen otras formulaciones para el tiempo mínimo de operación [18],[21]. Sin embargo, con el fin de reducir la dimensionalidad del problema maestro se elaboró en [19] esta alternativa. La ganancia es cada vez más significativa cuando aumenta el número de unidades generadoras. De manera análoga para los tiempos mínimos fuera de servicio.

#### 2.1.11 Tiempo mínimo fuera de servicio

El tiempo mínimo fuera de servicio  $\text{Tmin}_g^{\text{fs}}$  de una unidad  $g$  obliga a que esta no opere como mínimo una cantidad de  $\text{Tmin}_g^{\text{fs}}$  etapas después de una parada. Esta restricción se modela para la etapa  $t$  mediante la parada y estado de operación de la siguiente manera:

$$\sum_{\substack{s \leq t \\ s > t - \text{Tmin}_g^{\text{fs}}}} w_{g,s} \leq 1 - u_{g,t} \quad (2.14)$$

#### 2.1.12 Unidades de Ciclo Combinado

En [14] se muestra una manera eficiente de lidiar con las plantas térmicas de ciclos combinados. Se modelan todos los modos de operación posible de una planta de ciclo combinado como unidades térmicas independientes, debido a que es posible medir sus parámetros tales como potencia máxima, mínima y curva de eficiencia. Esto lleva a considerar también las transiciones de un modo a otro y el costo de esta transición en la función objetivo. A un grupo de modos que pertenecen a una unidad de ciclo combinado lo denotaremos por

$$\Gamma_m$$

#### 2.1.13 Estados de los modos de un ciclo combinado

Los múltiples modos de operación de un ciclo combinado son mutuamente excluyentes, es decir, mientras un modo está activado los demás se consideran apagados. Por lo tanto, los estados de operación de un

grupo de modos de un ciclo combinado en la etapa  $t$ , se restringen por la siguiente ecuación:

$$\sum_{g \in \Gamma_m} u_{g,t} \leq 1, \forall t \quad (2.15)$$

*Ejemplo 2.2.* Dada una central térmica de ciclo combinado que cuenta con dos unidades térmicas TG1, TG2 y una turbina de vapor TV, podemos obtener los siguientes modos de operación:

TG1	TG2	TG1 + TV(CC1)	TG2 + TV(CC2)	TG1 + TG2 + TV(CC12)
-----	-----	---------------	---------------	----------------------

Los grupos se forman con respecto a las combinaciones posibles hechas con una unidad. En este ejemplo se pueden formar los grupos:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{\text{TG1}, \text{CC1}, \text{CC12}\} \\ \Gamma_2 &= \{\text{TG2}, \text{CC2}, \text{CC12}\} \\ \Gamma_3 &= \{\text{CC1}, \text{CC2}, \text{CC12}\} \end{aligned}$$

donde  $\Gamma_1$  es el conjunto que agrupa los modos que se forman a partir de las combinaciones posibles con la unidad térmica TG1,  $\Gamma_2$  es el conjunto que agrupa los modos que se forman a partir de las combinaciones posibles con la unidad térmica TG2 y  $\Gamma_3$  es el conjunto de modos en los cuales se usa la turbina de vapor.<sup>2.1</sup> Así, si suponemos que en la etapa  $t$  está operando el modo CC1 obtendríamos las siguientes conclusiones según (2.15):

1. Como CC1 pertenece al grupo  $\Gamma_3$  entonces en la etapa  $t$  no se opera el modo CC2 ni el modo CC12.
2. Como CC1 pertenece al grupo  $\Gamma_1$  entonces en la etapa  $t$  no se opera TG1 aisladamente ni el modo CC12.
3. CC1 no pertenece al grupo  $\Gamma_2$ , además los modos CC2 y CC12 no están activas en la etapa  $t$ , por lo tanto, es posible operar TG2 aisladamente en la etapa  $t$  ya que no incumpliría la restricción.

#### 2.1.14 Transición de un modo inferior hacia un modo superior

Diremos que un modo de operación  $g'$  es superior con respecto al modo  $g$ , si  $g'$  funciona con uno o más componentes acoplados a los componentes de  $g$ .

---

<sup>2.1.</sup> Para revisar más sobre las características físicas de las unidades de ciclo combinado ver [24].

En [14] se definen la variable binaria  $w_{g,t}$  que toma el valor de 1 cuando el modo  $g$  se apaga en la etapa  $t$ , después de haber arrancado un modo superior  $g'$  en la etapa  $t + 1$ , y 0 en caso contrario. Esta variable indica en qué etapa ocurre una transición de un modo inferior hacia un modo superior. Además, es vinculada con las variables de arranque y parada de la siguiente manera:

$$w_{g,t} + \sum_{g' \in \text{Msp}_g} y_{g',t} \leq w_{g,t} + 1 \quad (2.16)$$

$$w_{g,t} \geq w_{g,t} \quad (2.17)$$

$$\sum_{g' \in \text{Msp}_g} y_{g',t} \geq w_{g,t} \quad (2.18)$$

donde  $\text{Msp}_g$  representa el grupo de modos de operación superior al modo  $g$ .

#### 2.1.15 Transición de un modo superior hacia un modo inferior

Diremos que un modo de operación  $g$  es inferior con respecto al modo  $g'$  si  $g$  es obtenido al desacoplar algunos componentes del modo  $g'$ .

En [14] se definen la variable binaria  $y_{g,t}$  que toma el valor de 1 cuando el modo  $g$  arranca en la etapa  $t$ , después de haberse apagado un modo superior  $g'$  en la etapa  $t + 1$ , y 0 en caso contrario. Esta variable indica en qué etapa ocurre una transición de un modo superior hacia un modo inferior. Además, es vinculada con las variables de arranque y parada de la siguiente manera:

$$y_{g,t} + \sum_{g' \in \text{Msp}_g} w_{g',t} \leq y_{g,t} + 1 \quad (2.19)$$

$$y_{g,t} \geq y_{g,t} \quad (2.20)$$

$$\sum_{g' \in \text{Msp}_g} w_{g',t} \geq y_{g,t} \quad (2.21)$$

#### 2.1.16 Costo de Arranque y Transición

Es el costo incurrido por el arranque de unidades de generación térmica que inicialmente estaban fuera de servicio. Con respecto a las plantas de ciclo combinado se incluye el costo de transición de un modo superior o



inferior, por lo tanto, para una etapa  $t$ , el costo de arranque y transición de una unidad generadora  $g$  es calculado de la siguiente manera:

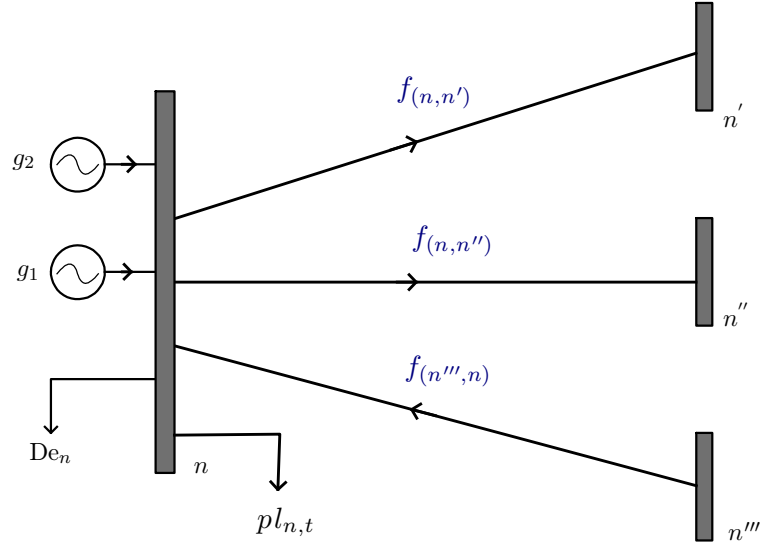
$$\text{Cost}_g^{\text{arr}} \cdot (y_{g,t} - w r_{g,t} - y r_{g,t})$$

donde  $\text{Cost}_g^{\text{arr}}$  es el costo fijo de arranque para la unidad  $g$ .

### 2.1.17 Red de Transmisión

La red de transmisión está compuesta por líneas de transmisión y transformadores que se conectan mediante los nodos (centros desde donde se distribuye la energía eléctrica a la mayoría de consumidores). Cada uno de estos elementos ( $\in \mathbf{L}$  conjunto de líneas y transformadores) está conectado entre dos nodos y tiene como parámetro a su susceptancia  $B_l$  y su capacidad de transmisión  $f_l^{\text{max}}$ .

Si una línea está conectada entre los nodos  $n$  y  $n'$  ( $\in \mathbf{N}$  conjunto de nodos) denotaremos a la variable flujo por  $f_{(n,n')}$ . La demanda en el nodo  $n$  se denota por  $\text{De}_n$  y las pérdidas de línea  $pl_{n,t}$  por simplicidad se establecen como demanda nodal ficticia.



**Fig. 2.2.** El flujo de potencia activa total que sale de una barra es igual a la suma de cada flujo de elementos de la red de transmisión conectadas a dicha barra.

El flujo de potencia activa total que sale de una barra es igual a la suma de cada flujo de elementos de la red de transmisión que están conectadas a dicha barra. Por otro lado en cada nodo  $n$  del sistema y en cada instante de tiempo  $t$ , se cumple que la potencia que se inyecta es igual a la potencia que se retira de ese nodo. La potencia que se inyecta proviene de unidades de generación conectados a o líneas de transmisión que llegan a ese nodo y la potencia que se retira es la demanda y la que se transporta por las líneas de transmisión. Entonces, mediante la ley de Kirchhoff obtenemos la siguiente ecuación conocida como balance nodal de energía

$$\sum_{l \in I(n)} f_{l,t} - \sum_{l \in E(n)} f_{l,t} + prb_{n,t} - pex_{n,t} = \sum_{g \in G(n)} p_{g,t} - De_{n,t} - K_{\text{per}} \cdot pl_{n,t} \quad (2.22)$$

donde

- $I(n)$  es el conjunto de líneas que ingresan al nodo  $n$ .
- $E(n)$  es el conjunto de líneas que salen del nodo  $n$ .
- $G(n)$  es el conjunto de generadores colocados en el nodo  $n$ .
- $pex_{n,t}$  es la variable de holgura que representa el exceso de potencia en el nodo  $n$  en la etapa  $t$ . El costo asociado es el parámetro Rex.
- $prb_{n,t}$  es la variable de holgura que representa la potencia racionada en el nodo  $n$  en la etapa  $t$ . El costo asociado es el parámetro Rac.
- $De_{n,t}$  es la demanda en el nodo  $n$  para la etapa  $t$ .
- $K_{\text{per}}$  es una constante de pérdidas de flujo.

*Observación 2.3.* Las variables de holgura que representan el racionamento y exceso fueron introducidas en el modelamiento con sus respectivos costos (holgura penalizada), ya que –como veremos más adelante– se evitan los cortes de factibilidad y una serie de problemas computacionales (errores de máquina) que entorpecen la obtención de la solución. Ver [15] para más detalles.

Lo siguientes es lo que diferencia a un simple compromiso de unidades de un compromiso de unidades con restricciones de red. Si  $l$  es un elemento de la red que se conecta entre los nodos  $n$  y  $n'$  entonces:

$$f_{l,t} = B_{n,n'}(\delta_{n,t} - \delta_{n',t}) \quad (2.23)$$

donde  $\delta_{n,t}$  y  $\delta_{n',t}$  representa el ángulo de voltaje para el nodo  $n$  y  $n'$  respectivamente. Estos valores también están acotados de la siguiente manera:

$$\delta_{n,t} \leq \frac{\pi}{2}, -\delta_{n,t} \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.24)$$

y  $\delta_{\text{ref},t} = 0$  es el ángulo de voltaje del nodo de referencia. Además las líneas de transmisión están sujeto a las capacidades de transmisión:

$$f_{l,t} \leq f_l^{\max}, -f_{l,t} \leq f_l^{\max} \quad (2.25)$$

#### 2.1.18 Restricción de Suma de Flujos

Para un grupo de líneas, se restringe el flujo total que pasa por estas. Sea  $\Gamma(i)$  un grupo de líneas, entonces esta restricción se modela como

$$\sum_{l \in \Gamma(i)} f_{l,t} \leq \text{SF}_{i,t}^{\max}, -\sum_{l \in \Gamma(i)} f_{l,t} \leq -\text{SF}_{i,t}^{\max} \quad (2.26)$$

donde  $\text{SF}_{i,t}^{\max}$  es el flujo máximo al cual puede llegar la suma de flujos de las líneas  $l \in \Gamma(i)$ .

Finalmente, considerando todas las definiciones y explicaciones en las secciones anteriores, el problema de compromiso de unidades con restricciones de red queda formulado como sigue: Sea  $\Xi = \{u_{g,t}, dp_{g,t}^{(1)}, dp_{g,t}^{(2)}, p_{g,t}, y_{g,t}, w_{g,t}, yr_{g,t}, wr_{g,t}, f_{l,t}, prb_{n,t}, pex_{n,t}, \delta_{n,t}, \forall g, t, n, l\}$  el conjunto de variables a optimizar, entonces tenemos el siguiente problema

de programación lineal entera mixta (MILP) de grán dimensión:

$$\begin{aligned}
 \min_{\Xi} \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{g=1}^{N_G} \text{CC}_{g,t} \cdot \left[ A_g \cdot u_{g,t} + \frac{B_g - A_g}{P_g^{\min} + l_g^{(1)}} \cdot (dp_{g,t}^{(1)} + u_{g,t} \cdot P_g^{\min}) + \frac{C_g - B_g}{l_g^{(2)}} \cdot dp_{g,t}^{(2)} \right] \\
 & + \sum_{t=1}^T \sum_{g=1}^{N_G} \text{CVNC}_{g,t} \cdot (u_{g,t} \cdot P_g^{\min} + dp_{g,t}^{(1)} + dp_{g,t}^{(2)}) + \\
 & + \sum_{t=1}^T \sum_{g=1}^{N_G} \text{Cost}_g^{\text{arr}} \cdot (y_{g,t} - w_{r,g,t} - y_{r,g,t}) + \sum_{t=1}^T \sum_n [\text{Rex} \cdot \text{pex}_{n,t} + \text{Rac} \cdot \text{prb}_{n,t}]
 \end{aligned}$$

s.a.  $\forall g, t, \Gamma_m, n, n', l, \Gamma(i)$ :

$$\begin{aligned}
 & p_{g,t} = u_{g,t} \cdot P_g^{\min} + dp_{g,t}^{(1)} + dp_{g,t}^{(2)}, \\
 & dp_{g,t}^{(1)} + dp_{g,t}^{(2)} \leq (P_g^{\max} - P_g^{\min}) \cdot u_{g,t}, \\
 & dp_{g,t}^{(i)} \geq 0, i = 1, 2, \\
 & dp_{g,t}^{(i)} \leq l_g^{(i)}, \\
 & y_{g,t} - w_{g,t} = u_{g,t} - u_{g,t-1}, \\
 & y_{g,t} + w_{g,t} \leq 1, \\
 & y_{g,t}, w_{g,t} \in \{0, 1\}, \\
 & y_{g,1} - w_{g,1} = u_{g,1} - U_{g,1}, \\
 & \sum_{t=1}^T y_{g,t} \leq \text{Ar}_g^{\max}, \sum_{t=1}^T w_{g,t} \leq \text{Par}_g^{\max}, \\
 & \sum_{\substack{s \leq t \\ s > t - \text{Tmin}_g^{\text{op}}}} y_{g,s} \leq u_{g,t}, \quad \sum_{\substack{s \leq t \\ s > t - \text{Tmin}_g^{\text{fs}}}} w_{g,s} \leq 1 - u_{g,t}, \\
 & \sum_{g \in \Gamma_m} u_{g,t} \leq 1, w_{g,t} + \sum_{g' \in \text{Msp}_g} y_{g,t} \leq w_{r,g,t} + 1, w_{g,t} \geq w_{r,g,t}, \sum_{g' \in \text{Msp}_g} y_{g',t} \geq w_{r,g,t}, \\
 & y_{g,t} + \sum_{g' \in \text{Msp}_g} w_{g,t} \leq y_{r,g,t} + 1, y_{g,t} \geq y_{r,g,t}, \sum_{g' \in \text{Msp}_g} w_{g',t} \geq y_{r,g,t}, \\
 & \sum_{l \in \mathbf{I}(n)} f_{l,t} - \sum_{l \in \mathbf{E}(n)} f_{l,t} + \text{prb}_{n,t} - \text{pex}_{n,t} = \sum_{g \in \mathbf{G}(n)} p_{g,t} - \text{De}_{n,t} \\
 & \quad \quad \quad - K_{\text{per}} \cdot pl_{n,t}, \\
 & f_{l,t} = B_{n,n'}(\delta_{n,t} - \delta_{n',t}), (l: \text{linea entre los nodos } n, n') \\
 & \delta_{n,t} \leq \frac{\pi}{2}, -\delta_{n,t} \leq \frac{\pi}{2}, \delta_{\text{ref},t} = 0, \\
 & f_{l,t} \leq f_l^{\max}, -f_{l,t} \leq f_l^{\max}, \\
 & \sum_{l \in \Gamma(i)} f_{l,t} \leq \text{SF}_{i,t}^{\max}, \\
 & - \sum_{l \in \Gamma(i)} f_{l,t} \leq -\text{SF}_{i,t}^{\max}.
 \end{aligned}$$

## 2.2 Aplicación del método de Descomposición clásica de Benders al compromiso de unidades con restricciones de red

Para obtener la descomposición del problema formulado arriba, indentificamos el conjunto de variables complicantes como el siguiente subconjunto de  $\Xi$

$$\Xi_C = \{u_{g,t}, dp_{g,t}^{(1)}, dp_{g,t}^{(2)}, p_{g,t}, y_{g,t}, w_{g,t}, yr_{g,t}, wr_{g,t}, \forall g, t\}$$

este conjunto contiene a todas las variables binarias y a la potencia de una unidad generadora debido a la ecuación (2.6) que la vincula con su estado operativo. Luego, el complemento de este conjunto formarán las variables del subproblema

$$\Xi_{SP} = \{f_{l,t}, prb_{n,t}, pex_{n,t}, \delta_{n,t}, \forall n, t, l\}$$

Notemos también que con estas variables, el subproblema es separable con respecto al tiempo, i.e, para cada  $t = 1, \dots, T$  se forma el subproblema que resulta ser un problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_t &= \min_{\Xi_{SP}(t)} \sum_{n \in N} (\text{Rac} \cdot prb_{n,t} + \text{Rex} \cdot pex_{n,t}) \\ \text{s.a. } &\forall n \in N: \\ &\sum_{l \in I(n)} f_{l,t} - \sum_{l \in E(n)} f_{l,t} + prb_{n,t} - pex_{n,t} = \sum_{g \in G(n)} \hat{P}_{g,t} - \text{De}_{n,t} \\ &\quad - K_{\text{per}} \cdot pl_{n,t}, (\gamma_{n,t}) \\ &f_{l,t} = B_{n,n'}(\delta_{n,t} - \delta_{n',t}), \quad \forall l \in L, \quad (w_{l,t}^1) \\ &f_{l,t} \leq f_l^{\max}, \quad \forall l \in L, \quad (w_{l,t}^2) \\ &-f_{l,t} \leq f_l^{\max}, \quad \forall l \in L, \quad (w_{l,t}^3) \\ &\sum_{l \in \Gamma(i)} f_{l,t} \leq \text{SF}_{i,t}^{\max}, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (\sigma_{i,t}^1) \\ &-\sum_{l \in \Gamma(i)} f_{l,t} \leq -\text{SF}_{i,t}^{\min}, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (\sigma_{i,t}^2) \\ &\delta_{n,t} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \forall n \in N, \quad (\xi_{n,t}^1) \\ &-\delta_{n,t} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \forall n \in N, \quad (\xi_{n,t}^2) \\ &\delta_{\text{ref},t} = 0, \quad (\xi_{n,t}^0) \end{aligned} \tag{2.27}$$

donde es el valor de potencia  $\hat{P}_{g,t}$  obtenido en el problema maestro para la variable complicante  $p_{g,t}$ . El conjunto  $\Xi_{SP(t)} \subset \Xi_{SP}$  agrupa todas las variables correspondientes al tiempo  $t$ .

Se discutió en el capítulo 1, sección 1.2 que para una implementación computacional más facil, es preferible escribir el problema (2.27) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}_t = \min_{\substack{\Xi_{SP'(t)} \\ s.a}} \quad & \sum_{\substack{n \in \mathbf{N} \\ \forall n \in \mathbf{N}}} (\text{Rac} \cdot \textcolor{blue}{prb}_{n,t} + \text{Rex} \cdot \textcolor{blue}{pex}_{n,t}) \\
 & \sum_{l \in \mathbf{I}(n)} \textcolor{blue}{f}_{l,t} - \sum_{l \in \mathbf{E}(n)} \textcolor{blue}{f}_{l,t} + \textcolor{blue}{prb}_{n,t} - \textcolor{blue}{pex}_{n,t} = \sum_{g \in \mathbf{G}(n)} \textcolor{blue}{p}_{g,t} - \text{De}_{n,t} \\
 & \quad - K_{\text{per}} \cdot p_{n,t}^l, (\gamma_{n,t}) \\
 & \textcolor{blue}{f}_{l,t} = B_{n,n'}(\delta_{n,t} - \delta_{n',t}), \quad \forall l \in \mathbf{L}, \quad (w_{l,t}^1) \\
 & \textcolor{blue}{f}_{l,t} \leq f_l^{\max}, \quad \forall l \in \mathbf{L}, \quad (w_{l,t}^2) \\
 & -\textcolor{blue}{f}_{l,t} \leq f_l^{\max}, \quad \forall l \in \mathbf{L}, \quad (w_{l,t}^3) \\
 & \sum_{l \in \Gamma(i)} \textcolor{blue}{f}_{l,t} \leq \text{SF}_{i,t}^{\max}, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (\sigma_{i,t}^1) \\
 & -\sum_{l \in \Gamma(i)} \textcolor{blue}{f}_{l,t} \leq -\text{SF}_{i,t}^{\min}, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (\sigma_{i,t}^2) \\
 & \delta_{n,t} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad (\xi_{n,t}^1) \\
 & -\delta_{n,t} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad (\xi_{n,t}^2) \\
 & \textcolor{blue}{\delta}_{\text{ref},t} = 0, \quad (\xi_{n,t}^0) \\
 & \textcolor{blue}{p}_{g,t} = \hat{P}_{g,t}, \quad \forall g = 1, \dots, N_G \quad (\lambda_{g,t})
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

con  $\Xi_{SP'(t)} = \Xi_{SP(t)} \cup \{\textcolor{blue}{p}_{g,t}, \forall g\}$ , donde el valor de  $\textcolor{blue}{p}_{g,t}$  se fija mediante la última restricción. Si  $\hat{\alpha}_t$  es mayor que cierto valor  $\varepsilon^{2.2}$ (tolerancia), se agrega el corte de Benders (2.29) al problema maestro para corregir los valores de potencias  $\textcolor{blue}{p}_{g,t}$ .

$$\alpha_t \geq \hat{\alpha}_t + \sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{g \in \mathbf{G}(n)} \hat{\lambda}_{g,t}(p_{g,t} - \hat{P}_{g,t}) \tag{2.29}$$

---

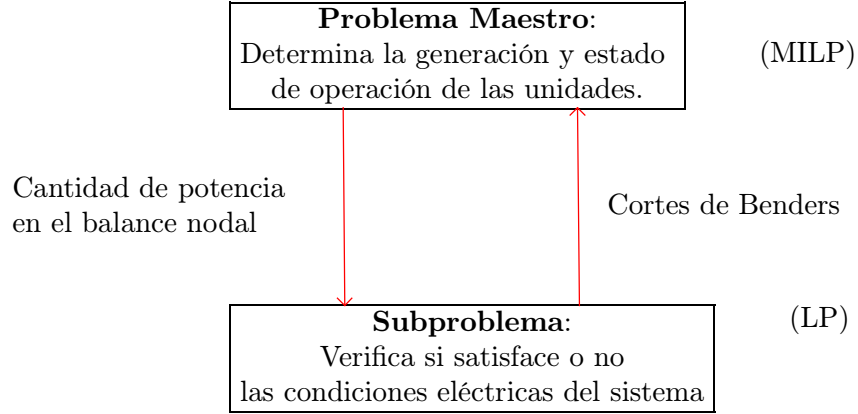
2.2. Físicamente, el valor de  $\hat{\alpha}_t$  indican el costo por no cumplir las restricciones de red y por lo tanto se da una violación a las condiciones del sistema. El valor de  $\varepsilon$  es la magnitud que representa la cantidad de error el sistema puede tolerar.

donde  $\{\hat{\lambda}_{g,t}\}_g$  son los valores óptimos duales asociados a la restricción que fija las potencias de las unidades generadoras.

donde el problema maestro en la iteración  $k$  es el siguiente problema lineal entero mixto:

$$\begin{aligned}
\min_{\Xi_C \cup \{\alpha_t\}} \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{g=1}^{N_G} \text{CC}_{g,t} \cdot \left[ A_g \cdot u_{g,t} + \frac{B_g - A_g}{P_g^{\min} + l_g^{(1)}} \cdot (dp_{g,t}^{(1)} + u_{g,t} \cdot P_{g,t}^{\min}) + \frac{C_g - B_g}{l_g^{(2)}} \cdot dp_{g,t}^{(2)} \right] \\
& + \sum_{t=1}^T \sum_{g=1}^{N_G} \text{CVNC}_{g,t} \cdot (u_{g,t} \cdot P_{g,t}^{\min} + dp_{g,t}^{(1)} + dp_{g,t}^{(2)}) + \\
& + \sum_{t=1}^T \sum_{g=1}^{N_G} \text{Cost}_g^{\text{arr}} \cdot (y_{g,t} - w_{g,t} - y_{r,g,t}) + \sum_{t=1}^T \alpha_t \\
s.a \quad & \forall g, t, \Gamma_m: \\
& p_{g,t} = u_{g,t} \cdot P_g^{\min} + dp_{g,t}^{(1)} + dp_{g,t}^{(2)}, \\
& dp_{g,t}^{(1)} + dp_{g,t}^{(2)} \leq (P_{g,t}^{\max} - P_g^{\min}) \cdot u_{g,t}, \\
& dp_{g,t}^{(i)} \geq 0, i = 1, 2, \\
& dp_{g,t}^{(i)} \leq l_g^{(i)}, \\
& y_{g,t} - w_{g,t} = u_{g,t} - u_{g,t-1}, \\
& y_{g,t} + w_{g,t} \leq 1, \\
& y_{g,t}, w_{g,t} \in \{0, 1\}, \\
& y_{g,1} - w_{g,1} = u_{g,1} - U_{g,1}, \\
& \sum_{t=1}^T y_{g,t} \leq \text{Ar}_g^{\max}, \sum_{t=1}^T w_{g,t} \leq \text{Par}_g^{\max}, \\
& \sum_{\substack{s \leq t \\ s > t - \text{Tmin}_g^{\text{op}}}} y_{g,s} \leq u_{g,t}, \quad \sum_{\substack{s \leq t \\ s > t - \text{Tmin}_g^{\text{fs}}}} w_{g,s} \leq 1 - u_{g,t}, \\
& \sum_{g \in \Gamma_m} u_{g,t} \leq 1, w_{g,t} + \sum_{g' \in \text{Msp}_g} y_{g,t} \leq w_{r,g,t} + 1, w_{g,t} \geq w_{r,g,t}, \sum_{g' \in \text{Msp}_g} y_{g',t} \geq w_{r,g,t}, \\
& y_{g,t} + \sum_{g' \in \text{Msp}_g} w_{g,t} \leq y_{r,g,t} + 1, y_{g,t} \geq y_{r,g,t}, \sum_{g' \in \text{Msp}_g} w_{g',t} \geq y_{r,g,t}, \\
& \alpha_t \geq \hat{\alpha}_t^r + \sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{g \in \mathbf{G}(n)} \hat{\lambda}_{g,t}^r (p_{g,t} - \hat{P}_{g,t}^r), \forall t, \forall r = 1, \dots, k
\end{aligned}$$

donde  $\hat{\alpha}_t^r, \hat{\lambda}_{g,t}^r$  son obtenidos del subproblema (2.28) y  $\hat{P}_{g,t}^r$  es el valor de potencia obtenido en la resolución del problema maestro en las iteraciones anteriores.



**Fig. 2.3.** Esquema de comunicación entre el subproblema y el problema maestro.

### 2.3 Aplicación del método de Descomposición acelerada de Benders al compromiso de unidades con restricciones de red

En el capítulo 1, se desarrolló a detalle la técnica de Magnanti-Wong para acelerar la convergencia del método de descomposición de Benders. En esta sección será explicada la idea de Lei Wu y Mohamed Shahidepour de como obtener un punto  $y^0 \in \text{ri}(\text{conv}(Y))$  adaptada al compromiso de unidades con restricciones de red. Para nuestro problema

$$y = (u_{g,t}, dp_{g,t}^{(1)}, dp_{g,t}^{(2)}, p_{g,t}, y_{g,t}, w_{g,t}, yr_{g,t}, wr_{g,t}) \in Y$$

donde  $Y$  es el producto cartesiano de los conjuntos donde viven cada coordenada. Siguiendo esta notación entonces

$$y^0 = (u_{g,t}^0, dp_{g,t}^{(1)0}, dp_{g,t}^{(2)0}, p_{g,t}^0, y_{g,t}^0, w_{g,t}^0, yr_{g,t}^0, wr_{g,t}^0)$$

donde cada una de sus coordenadas será un valor fijado por nosotros.

La técnica para fijar dichos valores consiste en subdividir el conjunto



de nodos  $N$  en dos conjuntos disjuntos  $N_1, N_2$ , i.e  $N = N_1 \cup N_2$  y  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ . Luego para cada generador  $g \in G(n)$  con  $n \in N_1$  escojer la coordenada de  $y^0$  que corresponde a  $p_{g,t}^0$  y asignarle

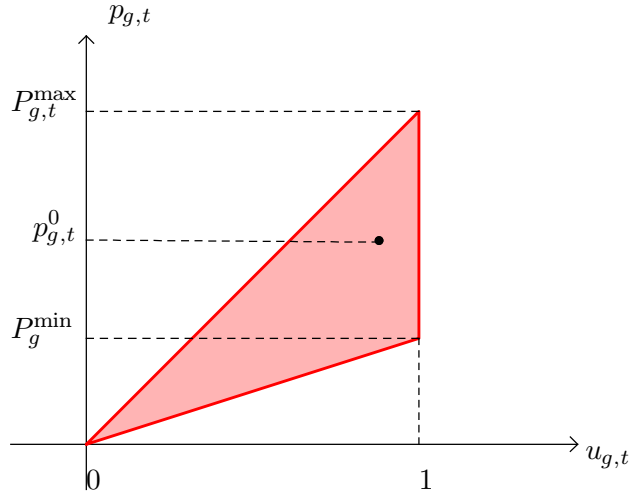
$$p_{g,t}^0 = P_{g,t}^{\max} - \varepsilon_1 \quad (2.30)$$

análogamente para cada generador  $g \in G(n')$  con  $n' \in N_2$  escojer la coordenada de  $y^0$  que corresponde a  $p_{g,t}^0$  y asignarle

$$p_{g,t}^0 = P_g^{\min} + \varepsilon_2 \quad (2.31)$$

Como  $p_{g,t} \in \{0, [P_g^{\min}, P_{g,t}^{\max}]\}$  entonces  $p_{g,t}^0 \in \text{ri}(\text{conv}(\{0, [P_g^{\min}, P_{g,t}^{\max}]\}))$ .

*Observación 2.4.* Los valores que toma  $y^0$  en las demás coordenadas no necesitan ser conocidos, ya que no intervienen en el subproblema de Magnanti-Wong.



**Fig. 2.4.** vemos que la coordenada  $p_{g,t}^0$  pertenece al interior de  $\text{conv}(\{0, [P_g^{\min}, P_{g,t}^{\max}]\})$ .

Finalmente, se obtendrá el siguiente problema de Magnanti-Wong

(forma dual) para cada etapa  $t$ , el cual nos dará cortes Pareto-optimales.

$$\begin{aligned}
 \max_{\Xi_{\text{dual}}^{\text{SP}}} \quad & \sum_{n \in \mathbf{N}_1} \left( \sum_{g \in \mathbf{G}(n)} (P_{g,t}^{\max} - \varepsilon_1) - \text{De}_{n,t} - K_{\text{per}} \cdot p_{n,t}^l \right) \gamma_{n,t} + \\
 & \sum_{n \in \mathbf{N}_2} \left( \sum_{g \in \mathbf{G}(n)} (P_{g,t}^{\min} + \varepsilon_2) - \text{De}_{n,t} - K_{\text{per}} \cdot p_{n,t}^l \right) \gamma_{n,t} + \\
 & \sum_{l \in \mathbf{L}} f_l^{\max}(w_{l,t}^2 + w_{l,t}^3) + \sum_i \text{SF}_{i,t}^{\max} \sigma_{i,t}^1 - \sum_i \text{SF}_{i,t}^{\min} \sigma_{i,t}^2 + \\
 & \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{\pi}{2} (\xi_{n,t}^1 + \xi_{n,t}^2)
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

s.a Restricciones duales de (2.27) y

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n \in \mathbf{N}} \left( \sum_{g \in \mathbf{G}(n)} \hat{P}_{g,t} - \text{De}_{n,t} - K_{\text{per}} \cdot p_{n,t}^l \right) \gamma_{n,t} + \\
 & \sum_{l \in \mathbf{L}} f_l^{\max}(w_{l,t}^2 + w_{l,t}^3) + \sum_i \text{SF}_{i,t}^{\max} \sigma_{i,t}^1 - \sum_i \text{SF}_{i,t}^{\min} \sigma_{i,t}^2 + \\
 & \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{\pi}{2} (\xi_{n,t}^1 + \xi_{n,t}^2) = \hat{\alpha}_t
 \end{aligned}$$

donde  $\Xi_{\text{dual}}^{\text{SP}} = \{\gamma_{n,t}, w_{l,t}^1, w_{l,t}^2, w_{l,t}^3, \sigma_{i,t}^1, \sigma_{i,t}^2, \xi_{n,t}^1, \xi_{n,t}^2, \xi_{n,t}^0\}$  es el conjunto de variables a optimizar. Resolviendo este problema obtendremos un valor Pareto-optimal  $\gamma_{n,t}^0$ . Luego de esto se forma el corte

$$\alpha_t \geq \hat{\alpha}_t + \sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{g \in \mathbf{G}(n)} \gamma_{n,t}^0 (p_{g,t} - \hat{P}_{g,t}) \tag{2.33}$$

con esto último notamos que los valores duales asociados a generadores

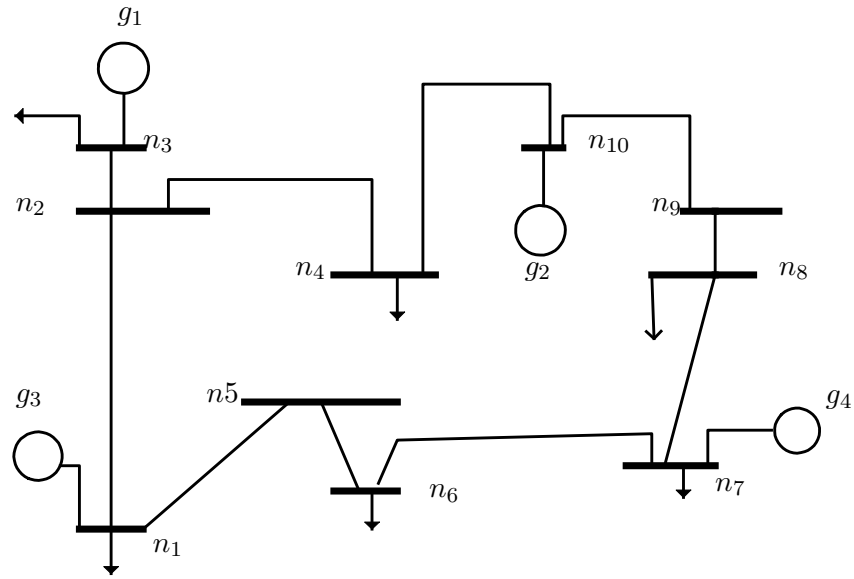
en un mismo nodo son los mismos. Con esto, el problema maestro a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned}
& \min_{\Xi_C \cup \{\alpha_t\}} \quad \sum_{t=1}^T \sum_{g=1}^{N_G} \text{CC}_{g,t} \cdot \left[ A_g \cdot u_{g,t} + \frac{B_g - A_g}{P_g^{\min} + l_g^{(1)}} \cdot (dp_{g,t}^{(1)} + u_{g,t} \cdot P_{g,t}^{\min}) + \frac{C_g - B_g}{l_g^{(2)}} \cdot dp_{g,t}^{(2)} \right] \\
& \quad + \sum_{t=1}^T \sum_{g=1}^{N_G} \text{CVNC}_{g,t} \cdot (u_{g,t} \cdot P_{g,t}^{\min} + dp_{g,t}^{(1)} + dp_{g,t}^{(2)}) + \\
& \quad + \sum_{t=1}^T \sum_{g=1}^{N_G} \text{Cost}_g^{\text{arr}} \cdot (y_{g,t} - wr_{g,t} - yr_{g,t}) + \sum_{t=1}^T \alpha_t \\
& \text{s.a} \quad \forall g, t, \Gamma_m: \\
& \quad p_{g,t} = u_{g,t} \cdot P_g^{\min} + dp_{g,t}^{(1)} + dp_{g,t}^{(2)}, \\
& \quad dp_{g,t}^{(1)} + dp_{g,t}^{(2)} \leq (P_{g,t}^{\max} - P_g^{\min}) \cdot u_{g,t}, \\
& \quad dp_{g,t}^{(i)} \geq 0, i = 1, 2, \\
& \quad dp_{g,t}^{(i)} \leq l_g^{(i)}, \\
& \quad y_{g,t} - w_{g,t} = u_{g,t} - u_{g,t-1}, \\
& \quad y_{g,t} + w_{g,t} \leq 1, \\
& \quad y_{g,t}, w_{g,t} \in \{0, 1\}, \\
& \quad y_{g,1} - w_{g,1} = u_{g,1} - U_{g,1}, \\
& \quad \sum_{t=1}^T y_{g,t} \leq \text{Ar}_g^{\max}, \sum_{t=1}^T w_{g,t} \leq \text{Par}_g^{\max}, \\
& \quad \sum_{\substack{s \leq t \\ s > t - \text{Tmin}_g^{\text{op}}}} y_{g,s} \leq u_{g,t}, \sum_{\substack{s \leq t \\ s > t - \text{Tmin}_g^{\text{fs}}}} w_{g,s} \leq 1 - u_{g,t}, \\
& \quad \sum_{g \in \Gamma_m} u_{g,t} \leq 1, w_{g,t} + \sum_{g' \in \text{Msp}_g} y_{g',t} \leq wr_{g,t} + 1, w_{g,t} \geq wr_{g,t}, \sum_{g' \in \text{Msp}_g} y_{g',t} \geq wr_{g,t}, \\
& \quad y_{g,t} + \sum_{g' \in \text{Msp}_g} w_{g',t} \leq yr_{g,t} + 1, y_{g,t} \geq yr_{g,t}, \sum_{g' \in \text{Msp}_g} w_{g',t} \geq yr_{g,t}, \\
& \quad \alpha_t \geq \hat{\alpha}_t^r + \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{g \in \mathcal{G}(n)} \hat{\lambda}_{g,t}^r (p_{g,t} - \hat{P}_{g,t}^r), \forall t, \forall r = 1, \dots, k \\
& \quad \alpha_t \geq \hat{\alpha}_t^r + \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{g \in \mathcal{G}(n)} \gamma_{n,t}^{0,r} (p_{g,t} - \hat{P}_{g,t}^r), \forall t, \forall r = 1, \dots, k
\end{aligned}$$

*Observación 2.5.* Este problema maestro contiene más información que el problema maestro en la técnica clásica, pero la ganancia es que con los cortes Pareto-optimales agregados se resolverán menos problemas maestros, ver [17].

## 2.4 Resultados Numéricos

Considere el siguiente problema de 10 nodos y 4 generadores



**Fig. 2.5.** Sistema de 10 buses, 4 generadores y 6 puntos de demanda.

Con los siguientes datos para las unidades generadoras

$g$	$P_{\min}$	$P_{\max}$	$T_{\min}_g^{\text{op}}$	$T_{\min}_g^{\text{fs}}$	$\text{Cost}_g^{\text{arr}}$	$A_g$	$B_g$	$C_g$
1	10	270	3h	1h	1200	0.1	5	200
2	10	310	6h	2h	1500	0.15	6	2000
3	10	250	5h	2h	1500	0.12	2	1500
4	10	120	4h	1h	1700	0.14	1	500

con los costos de racionamiento y exceso igual a 6000.

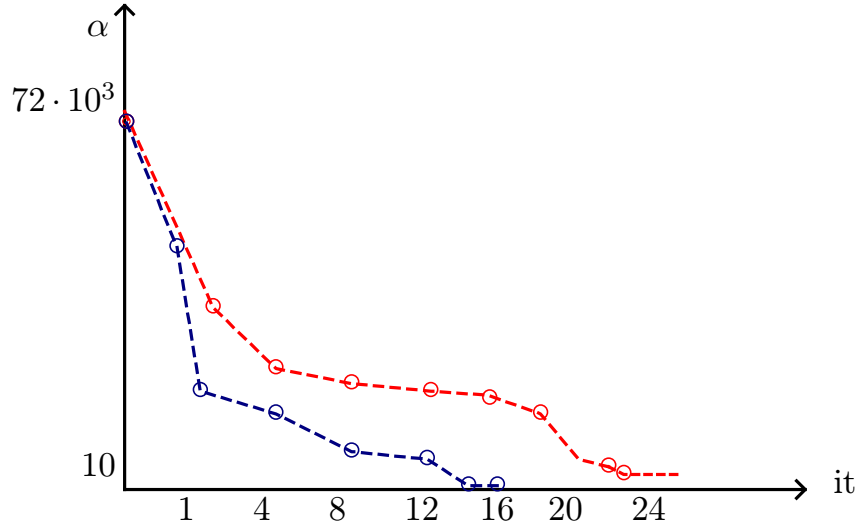
Para las líneas de transmisión:

Nodo inicia	Nodo final	Reactancia(Ohm)
$n1$	$n2$	64.57
$n3$	$n2$	43.23
$n2$	$n4$	144.56
$n1$	$n5$	40.67
$n7$	$n6$	100.65
$n7$	$n8$	55.78
$n9$	$n8$	5.67
$n10$	$n9$	64.37
$n10$	$n4$	90.87
$n5$	$n6$	10.76

Con los datos de demanda

Nodo	$n_1$	$n_3$	$n_4$	$n_6$	$n_7$	$n_8$
Hora						
1	94.98	75.14	101.27	75.37	104.37	116.82
2	80.67	128.36	133.03	127.86	85.56	16.07
3	104.57	115.28	96.43	93.86	82.35	90.73
4	117.8	115.95	98.2	113.87	115.78	95.06
5	135.96	118.64	90.95	92.19	92.19	128.06
6	93.31	114.97	85.67	92.66	32.69	84.85
7	103.44	131.7	108.34	108.75	127.46	76.07
8	98.17	72.82	176.33	80.2	122.63	74.58
9	85.73	107.13	125.21	115.93	104.53	104.27
10	129.3	107.03	119.11	112.56	135.78	123.37
11	76.47	121.85	88.02	105.42	82.06	116.07
12	130.98	87.68	88.56	118.46	117.66	90.73

Se obtiene mediante el método clásico y acelerado el siguiente comportamiento para el valor de  $\alpha = \sum_{t=1}^{12} \alpha_t$



**Fig. 2.6.** La grafica azul representa el decrecimiento del costo por restricciones de red calculado con el método acelerado de Benders. La gráfica roja representa el decrecimiento del costo por restricciones de red calculado con el método clásico de Benders. Se utilizó una tolerancia de 10.

Con este caso particular corroboramos lo que se presenta casi siempre al resolver un problema mediante el algoritmo de Benders, el cual es

la rápida caída en las primeras iteraciones y la lenta convergencia en los pasos finales. En [15] se presenta una técnica heurística que lidia con este problema; al modelar este problema no se aplicó ninguna heurística. Para el método clásico se obtuvo la convergencia en 23 iteraciones y para el acelerado en 14 iteraciones. Se utilizó el Software GAMS para la implementación.



## Conclusiones

1. El algoritmo clásico de Benders es un primer enfoque que gana ventaja computacional con respecto a técnicas que atacan directamente problemas de optimización a gran escala, en particular problemas lineales enteros mixto.
2. El algoritmo de Benders Generalizado planteado por Geoffrion, debe implementarse teniendo en cuenta como se comporta el problema proyectado, ya que en para algunos puntos iniciales se llega a alcanzar solo óptimos locales, o inclusive puntos que ni siquiera son extremos locales.
3. La selección de las variables complicantes a la hora de particionar el problema, es un paso fundamental en el algoritmo de Benders, pues nos determinan la dimensionalidad del problema maestro y la naturaleza del subproblema. En conclusión, se debe manejar de la mejor manera esta selección, con el fin de tener una convergencia más rápida.
4. Se concluye mediante la técnica de Magnanti-Wong, que una gran mejora al algoritmo clásico de Benders es tener una buena selección de los cortes en cada iteración, pues de esta manera el problema maestro se resuelve menos veces reduciendo así el tiempo de convergencia.
5. La técnica de Magnanti-Wong si se combina con una buena selección de cortes iniciales, puede acelerar aún más la obtención del punto óptimo.



6. Se ha demostrado que problemas como el despacho económico de corto plazo con modelamiento de líneas de transmisión se resuelven satisfactoriamente utilizando el algoritmo clásico de Benders y también al agregar la mejora de Magnanti-Wong, ya que el subproblema posee soluciones múltiples y por lo tanto es posible elegir las que son Pareto optimales para agregarlas al problema maestro y lograr una reducción en el tiempo de convergencia.

---

## Referencias

- [1] M.J. Bagajewicz, V. Manousiouthakis. On the Generalized Benders Decomposition. Computers chem. Engng, Vol. 15, No. 10, pp 691-700, 1991.
- [2] J.F. Benders. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. Numerische Mathematik 4, 238-252 (1962).
- [3] R. Brandenber, P. Stursberg. Refined cut selection for benders decomposition: applied to network capacity expansion problems,. Mathematical Methods of Operations Research (2021) pp 383-412.
- [4] G. Miranda. Improving Benders decomposition via a non-linear cut selection procedure. Annals of Operations Research manuscript, 2012.
- [5] A. M. Geoffrion. Generalized Benders Decomposition. Journal of Optimization Theory and Applications: Vol. 10, No. 4, 1972.
- [6] A. Grrothey, S. Leyffer and K.I.M. McKinnon. A note on feasibility in Benders Decomposition. Numerical Analysis Report No. 188, Department of Mathematics, University of Dundee. (2000).
- [7] A. Karbowski. Generalized Benders Decomposition Method to Solve Big Mixed-Integer Nonlinear Optimization Problems with Convex Objective and Constraints Functions. Energies 2021, 14, 6503. (2021)
- [8] T.L. Magnanti, R.T. Wong. Accelerating Benders Decomposition: Algorithmic Enhancement and Model selection Criteria. Operations Research. Vol. 29, No. 3, May-June 1981.
- [9] R. Rahmaniani, S. Ahmed, T.G. Crainic, M. Gendreau. The Benders dual decomposition method. CIRRELT, July, 2019.
- [10] N.V. Sahinidis, I. E. Grossmann. Convergence Properties of Generalized Benders Decomposition. Computers chem. Engng, Vol. 15, No. 7, pp 481-491, 1991.

- [11] S. Sridhar, J. Linderoth, J. Luedtke. Locally Ideal Formulations for Piecewise Linear Functions with Indicator Variables. University of Wisconsin-Madison.
- [12] N. Papadakos, Practical Enhancements to the Magnanti-Wong method. *Operations Research Letters* 36, pp 444-449 (2008).
- [13] L. Tang, W. Jiang, G. Saharidis. An improved Benders decomposition algorithm for the logistics facility location problem with capacity expansions, Springer, January 2012.
- [14] P. Serna, M. Mondragon. Unit Commitment PROblem Considering Multiple Combined Cycle Modes and Appliaance of Benders Decomposition. Research Gate, DOI: RG.2.2.19030.80960, 2020.
- [15] W. Sifuentes. Despacho económico activo-reactivo de corto plazo multiembalse multinodal. Aplicación de técnicas de descomposición, Ph.D. tesis, Instituto de Energía Eléctrica, Universidad Nacional de San Juan, Argentina, Aug.2006.
- [16] N. B. Asl, S.A. MirHassani. Accelerating Benders decomposition: multiple cuts via multiple solutions. *Journal of Combinatorial Optimization*, June 2018.
- [17] L. Wu, M. Shahidehpour. Accelerating the Benders decomposition for network-constrained unit commitment problems. *Energy Syst* (2010). DOI 10.1007/s12667-010-0015-4.
- [18] N. Alguacil. Multiperiod optimal power flow using Benders decomposition. Article in *Power Systems, IEEE Transactions*, March 2000.
- [19] Manual de Metodología Modelo Yupana. Comité de Operación Económica del Sistema Interconectado Nacional (COES). Versión 1.1, Febrero 2020.
- [20] Y. Fu, Z. Li, M. Shahidepour. Security-Constrained Unit Commitment With AC Constraints. Article in *Power Systems, IEEE Transactions on* June 2005.
- [21] A. J. Conejo, L. Baringo. *Powe Systems Operations*. Springer, Power Electronics and Power Systems, 2018.
- [22] C. A. Floudas, A. Argharwal, A. R. Ciric. Global optimum search for nonconvex NLP and MINLP problems. *Computer chem. Engng* 13, 10 (1989).
- [23] Procedimiento Técnico del COES N° 17, Determinación de la potencia efectiva y rendimiento de las unidades de generación termoeléctrica.

