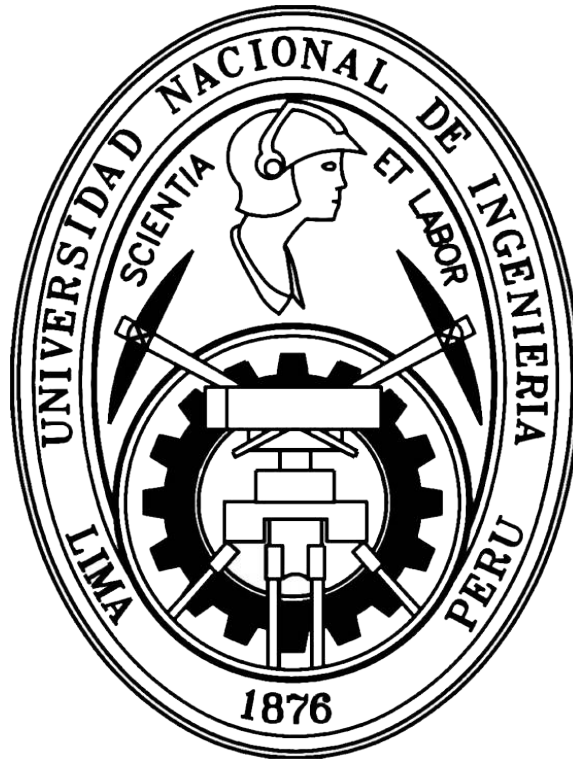


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS



SEMINARIO DE TESIS I

Programación dinámica aplicada al problema de despacho hidrotérmico

ELABORADO POR
DAVID WILLIAMS MORANTE MORAN

ASESORES
ELADIO OCAÑA ANAYA
ERNESTO ORÉ ALBORNOZ

LIMA-PERÚ
2021

Índice

1	Introducción	3
1.1	Objetivos de operación de sistemas hidrotérmicos	3
1.2	Características del problema de operación de sistemas puramente térmicos	3
1.3	Característica del problema de operación de sistemas hidrotérmicos	3
1.4	Antecedentes	5
1.5	Organización del trabajo	5
2	Conceptos previos	7
2.1	Programación Lineal	7
2.1.1	Formulación estandar	7
2.2	El método Simplex	8
2.2.1	Tratamiento de degeneraciones	9
2.2.2	Un ejemplo	9
2.2.3	Interpretación dual del simplex	10
2.2.4	Búsqueda de un vértice factible	11
2.2.5	Método Simplex Revisado	11
2.3	Métodos de optimización a gran escala	12
2.3.1	Descomposición de Dantzig-Wolfe	12
2.3.2	Método de planos de corte	14
2.3.3	Descomposición de Bender	14
2.4	Programación Lineal Estocástica	16
2.4.1	Formulación general de un problema en dos etapas	16
2.4.2	Problema determinístico asociado	16
2.4.3	Descomposición de Bender aplicado al problema determinístico asociado	16
3	Despacho probabilístico - Sistemas térmicos	19
3.1	Formulación del Problema	19
3.1.1	Representación de la demanda	20
3.1.2	Representación de la falla en los equipamientos	21
3.2	Reformulación del problema	21
3.3	Solución	22
3.3.1	Enumeración de escenarios	22
3.3.2	Esquema de Balériaux	23
3.3.2.1	Caso determinístico	23
3.3.2.2	Caso probabilístico	24
3.4	Ejemplo	25
3.4.1	Solución por enumeración	26
3.4.2	Solución por el método de Balériaux	27
4	Despacho probabilístico-Sistemas hidrotérmicos	31

4.1	Formulación del problema para la implementación de una hidroeléctrica	31
4.2	Solución	32
4.2.1	Algoritmo Tradicional	33
4.2.2	Descomposición de Dantzig-Wolfe	35
4.2.2.1	Criterio de parada	36
4.3	Ejemplo	36
4.3.1	Solución por algoritmo tradicional	36
4.3.2	Solución por el algoritmo de Dantzig-Wolfe	38
	Resumen	39
4.4	Formulación del problema para la implementación de múltiples hidroeléctricas . . .	41
4.4.1	Caso de estudio	42
	Solución del problema	42
5	Costos marginales de demanda	45
5.1	Cálculo de los costos marginales en el método de Baleriaux	45
5.2	Cálculo de los costos marginales en la descomposición de Dantzig-Wolfe	46
5.2.1	Cálculo de $\frac{\partial z(e_p)}{\partial d}$	46
5.2.2	Cálculo de $\frac{\partial e_p}{\partial d}$	47
6	Despacho hidrotérmico multietapa	49
6.1	Función de costo inmediato y función de costo futuro	49
6.1.1	Formulación del problema	49
6.1.1.1	Reformulación del problema	50
6.2	Restricciones en las hidroeléctricas	51
6.2.1	Formulación del problema	51
6.2.1.1	Ecuación de recursión	52
6.3	Escenarios de afluencia	54
6.4	Solución	55
6.4.1	Recursión SDP	56
6.4.1.1	Solución del despacho hidrotérmico en una etapa	59
6.4.2	Recursión SDDP	60
6.4.2.1	Cálculo de una cota superior	62
6.4.2.2	Criterio de parada	63
6.4.2.3	Nueva iteración	63
7	Conclusiones	65

Capítulo 1

Introducción

Dentro de las energías renovables, se ha venido observando un crecimiento explosivo de las energías eólica, solar y biomasas, sin embargo; a nivel mundial la que sigue dominando el mercado es la energía hidroeléctrica ([Renewable Energy - Our World in Data](#) nos describe la contribución por año de estas energías renovables). La característica principal de este tipo de energías es que tienen un costo operativo mucho menor que al de las energías no renovables, es por eso que se acoplan plantas hidroeléctricas a los sistemas térmicos para reducir el costo operativo total.

1.1 Objetivos de operación de sistemas hidrotérmicos

El objetivo principal de este trabajo es presentar una metodología para el problema del despacho hidrotérmico, que consiste en asignar a cada una de las centrales energéticas la generación óptima minimizando el costo operativo total a lo largo del horizonte de planeamiento sujeto a abastecer la demanda. Se considerará el efecto estocástico de las afluencias; propios de los generadores hidrotérmicos, las fallas de los equipamientos; propios de los generadores térmicos y efecto de las fluctuaciones de demanda.

1.2 Características del problema de operación de sistemas puramente térmicos

En sistemas compuestos solamente de plantas térmicas, el costo operativo depende básicamente de su costo de combustible (combustible fósil, carbón, etc). Por lo tanto, el problema es determinar cuanta potencia debe generar cada planta térmica para minimizar el costo total operativo sin dejar de atender la demanda. El problema de operación de sistemas térmicos tiene las siguientes características básicas

- a) Es un problema estocástico, debido a las fallas aleatorias de los generadores.
- b) Es desacoplado en el tiempo, es decir, una decisión operativa hoy no tiene efecto en el costo operativo de la próxima etapa.
- c) La operación de una planta térmica no afecta la capacidad de generación o disponibilidad de otra, es decir, no hay interferencia.

1.3 Característica del problema de operación de sistemas hidrotérmicos

En contraste con los sistemas donde solo intervienen plantas térmicas, el problema del despacho en sistemas donde también hay una participación de plantas hidroeléctricas es mucho más complejo debido a dos factores producto de las características de esta fuente:

1. Almacenamiento de energía en los reservorios, esta energía puede ser utilizada para atender la demanda, de esta forma se evita gastos de combustibles en las unidades termoeléctricas.
2. Alta variabilidad en los flujos de entrada a las centrales hidroeléctricas, debido a cambios climáticos y fenómenos naturales.

Debido a la característica 1 es conveniente utilizar lo máximo posible de generación hidroeléctrica, sin embargo, la disponibilidad de energía hidroeléctrica está limitada a la capacidad de su reservorio. Esto introduce una relación entre una decisión operativa en una determinada etapa, y las consecuencias futuras de esa decisión (problema dinámico).

En otras palabras, si las provisiones de energía hidroeléctrica son utilizadas hoy y en un futuro ocurre una sequía, entonces será necesario utilizar generación termoeléctrica de alto costo en el futuro, ó incluso interrumpir el suministro de energía. Por otro lado, si los niveles de embalse se mantienen debido al uso más intenso de las termoeléctricas, puede que en un futuro haya vertimiento de agua, lo cual significa desperdicio de energía y en consecuencia, un aumento en el costo operativo. Esta situación se muestra en el siguiente árbol de decisiones :

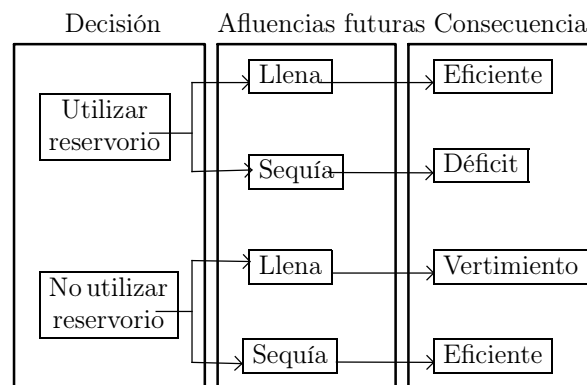


Figura 1.1. Proceso de decisiones para el problema del despacho hidrotérmico

Por lo tanto, la solución óptima para este problema es un equilibrio entre el beneficio presente del uso de agua y el beneficio futuro de su almacenamiento, medido en términos de la economía esperada del gasto en combustibles de las plantas térmicas.

1.4 Antecedentes

La percepción de que era necesario considerar el efecto de las fallas de los equipamientos en el cálculo de los costos operativos siempre existió. En un principio, esto fue aproximado a través de la *reducción de capacidad* (*derating*), que consiste en representar un generador de p MW de capacidad con una probabilidad de falla de $\lambda\%$, por un generador con una capacidad equivalente de $p \times (100 - \lambda)\%$ MW. La principal desventaja de esta aproximación es que el costo operativo era siempre estimado por debajo del costo operativo real.

A partir de los años 40 comenzaron a ser propuestos métodos probabilísticos para representar las fallas aleatorias de los equipamientos. No obstante, estas metodologías no fueron desenvueltas debido a la falta de recursos computacionales. A partir de los años 60, gracias al uso más intensivo de los computadores, el método de reducción de capacidad comenzó a ser sustituido por la simulación de un gran número de escenarios utilizando técnicas de Monte Carlo para el sorteo de fallas aleatorias en los equipamientos. Estos métodos a pesar de ser más precisos y realistas requieren un esfuerzo computacional elevado. Es por eso que en 1967, Baleriaux, Jamouille y Guertechin publicaron una metodología que facilitaba esto. Posteriormente este método se convertiría en la base para los modelos llamados de *curva de demanda equivalente*. La gran ventaja de estos métodos es su eficiencia computacional y la posibilidad de representar analíticamente todas las combinaciones de escenarios de falla.

1.5 Organización del trabajo

En el capítulo 2 se desarrollan las herramientas necesarias para poder formular y solucionar el problema de despacho hidrotérmico, principalmente los algoritmos de descomposición.

En el capítulo 3 se describe en detalle el problema del despacho probabilístico de una etapa para sistemas puramente térmicos. Se presenta el método de enumeración de escenarios, el método de Baleriaux en el caso determinístico y probabilístico, el cual permite calcular el valor esperado del costo operativo y de las generaciones de las plantas basándose en la adición sucesiva de las unidades generadoras en orden creciente de costo operativo y calculando las distribuciones de probabilidad de la resta de dos variables aleatorias mediante la convolución.

En el capítulo 4 se presenta el problema del despacho hidrotérmico de una etapa y una metodología para representar plantas hidroeléctricas cuyas generaciones están limitadas por cierta meta energética la cual representa un límite en la cantidad de agua que se puede turbinar para producir energía. La metodología de solución se basa en la descomposición de Dantzig-Wolfe, donde el problema maestro representa las decisiones de la generación hidroeléctrica y el subproblema corresponde a un despacho probabilístico donde las hidroeléctricas tienen un costo implícito dado por la solución óptima de las variables duales en el problema maestro.

El capítulo 5 describe la obtención de costos marginales, esto es estudiado posteriormente al desarrollo de la interpretación dual del simplex hecha en el capítulo 2. Se mostrará como calcular los costos marginales tanto para la metodología de Baleriaux como para la de Dantzig-Wolfe.

En el capítulo 6 se introduce el problema de despacho hidrotérmico multietapa y se muestra como una decisión para la etapa actual puede repercutir en el costo operativo de la etapa futura hasta el final del periodo de estudio, esta dependencia es planteada mediante la ecuación de balance hídrico (restricciones de las hidroeléctricas). El problema de despacho probabilístico trata con dos conceptos fundamentales los cuales son función de costo inmediato y función de costo futuro, se pretende que esa suma sea la mínima. Para eso se desarrollan métodos de programación dinámica estocástica y finalmente se muestra la comparación entre esos métodos.

Capítulo 2

Conceptos previos

2.1 Programación Lineal

La formulación general de un problema de programación lineal es

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \min \langle c_1, u_1 \rangle + \langle c_2, u_2 \rangle \\ \text{s.a. } & M_{11}u_1 + M_{12}u_2 \leq d_1 \\ & M_{21}u_1 + M_{22}u_2 = d_2 \\ & u_2 \geq 0\end{aligned} \quad (P)$$

donde $c_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ y $d_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ para $i = 1, 2$, la matriz M_{ij} , $i, j = 1, 2$ es una matriz $p_i \times m_j$. Sin pérdida de generalidad, y con el fin de eliminar restricciones redundantes, vamos a suponer que la matriz (M_{21}, M_{22}) es de rango p_2 .

2.1.1 Formulación estandar

Transformaremos el problema (P) de su formulación general a una formulación estándar a la cual se le aplicará el llamado algoritmo simplex. Se introduce antes que todo, las variables de holgura de manera que se transforma las restricciones de desigualdad en restricciones de igualdad. El problema se escribe como

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \min \langle c_1, u_1 \rangle + \langle c_2, u_2 \rangle + \langle 0, u_3 \rangle \\ \text{s.a. } & M_{11}u_1 + M_{12}u_2 + u_3 = d_1 \\ & M_{21}u_1 + M_{22}u_2 + 0u_3 = d_2 \\ & u_2 \geq 0, u_3 \geq 0\end{aligned}$$

Sea aún su forma más condensada

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \min \langle a, y \rangle + \langle e, x \rangle \\ \text{s.a. } & Ry + Sx = f \\ & x \geq 0\end{aligned}$$

Por construcción (adición de las variables de holgura), las filas de la matriz (R, S) son linealmente independientes. Se transforma seguidamente el sistema lineal $Ry + Sx = f$ con, si es necesario, permutaciones de filas y de columnas, de manera que se obtenga el siguiente sistema lineal equivalente

$$\begin{pmatrix} I & R_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Las filas de la matriz S_2 son linealmente independientes. Colocando y_1 en función de x y y_2 , el problema se reduce a la forma

$$\bar{\alpha} - \alpha_0 = \min_{S_2 x = f_2, x \geq 0} \langle a_2, y_2 \rangle + \langle c, x \rangle$$

Si $a_2 \neq 0$, entonces $\bar{\alpha} = -\infty$. Caso contrario el problema se reduce a la forma

$$\begin{array}{ll} \min & \langle c, x \rangle \\ \text{s.a} & Ax = a, x \geq 0 \end{array} \quad (F_s)$$

donde $c \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^p$ y A es una matriz $p \times n$ de rango p . Se dice que el problema está en forma estándar.

2.2 El método Simplex

Coloquemos

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = a, x \geq 0\}$$

el cual suponemos no vacío. Debido al teorema fundamental de la programación lineal, si $\alpha > -\infty$, el mínimo es obtenido en uno de los vértices de C . Si x es un vértice, entonces al menos $q = n - p$ entre los x_i son nulos y C tiene un número finito de vértices.

Una alternativa es determinar todos los vértices y considerar aquel que dá el valor óptimo. Esto conduce a resolver $\frac{n!}{p!q!}$ sistemas lineales de p ecuaciones con n incógnitas y testar a continuación las restricciones de positividad, lo cual es costoso.

El algoritmo simplex consiste en partir de un vértice y desplazarse de vértice en vértice mejorando el valor objetivo. El algoritmo presupone el conocimiento de un vértice, más adelante veremos como determinar uno.

Supongamos que tenemos un vertice s , mostraremos como encontrar el siguiente vértice \hat{s} . Existe J con $\text{card}(J) = q$ tal que $s_j = 0$ para todo $j \in J$ y $s_i \geq 0$ para todo $i \in I$, donde I es el complemento de J . El vector $x \in \mathbb{R}^n$ se descompone en $x = (x_I, x_J)$ y el sistema $Ax = a$ es descompuesto en la forma

$$Nx_J + Bx_I = a \quad (2.1)$$

donde B es inversible. Luego $Gx_J + x_I = b$, con $B^{-1}a = b$ y $G = B^{-1}N = [g_{ij}]$. Se observa entonces que $s = (s_I, s_J) = (b, 0)$ y que existe $d_J \in \mathbb{R}^q$ tal que

$$\langle c, x \rangle = \langle c, s \rangle - \langle d_J, x_J \rangle - \langle d_I, x_I \rangle \quad \text{con} \quad d_I = 0, d_j = \langle c_I, Ge_j \rangle - c_j \quad \text{para todo } j \in J.$$

Observación 2.1. Al valor $\bar{c}_j = -d_j$ tambien se le denomina costo reducido de la variable j .

Las variables x_i , $i \in I$, son llamadas variables básicas, las variables x_j , $j \in J$ son llamadas variables no básicas.

1. Si $d_J \leq 0$, **PARAR** : s es solución optimal.
2. Caso contrario elegir $k \in J$ con $d_k = \max_{j \in J} d_j$
3. Si $g_{ik} \leq 0$ para todo $i = 1, \dots, p$, **PARAR** : $\alpha = -\infty$. Para ver eso hacer $x_k = t$, $x_j = 0$ si $j \in J, j \neq k$ y $x_i = b_i - tg_{ik}$ para todo $i \in I$. Hacer enseguida $t \rightarrow +\infty$.

4. Caso contrario, tomar $r \in I$ tal que $b_{rk} > 0$ y

$$\frac{b_r}{g_{rk}} = \min_k \left[\frac{b_i}{g_{ik}} : g_{ik} > 0 \right]$$

5. Si $b_r = 0$, se está en presencia de una degeneración. Ver tratamiento de las degeneraciones.
6. Caso contrario dividir la fila r del sistema

$$\begin{pmatrix} G & I \\ d_J^t & d_I^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \langle c, s \rangle \end{pmatrix}$$

y aplicar eliminación gaussiana tomando como pivote a la entrada $\frac{g_{rk}}{g_{rk}} = 1$. Obteniéndose una nueva matriz \hat{G} y nuevos vectores \hat{b} y \hat{d} . Por construcción $\hat{b} \geq 0$ y $d_{\hat{I}} = 0$.

Se reemplaza r en J por k , y k en I por r . Se obtiene así \hat{I} y \hat{J} . El sistema lineal $Ax = a$ se pone sobre la forma $x_{\hat{I}} + \hat{G}x_{\hat{J}} = \hat{b}$. Se tiene $\langle c, x \rangle = \langle c, \hat{s} \rangle - \langle \hat{d}_{\hat{J}}, x_{\hat{J}} \rangle - \langle \hat{d}_{\hat{I}}, x_{\hat{I}} \rangle$. Además

$$\langle c, \hat{s} \rangle = \langle c, s \rangle - d_k \frac{b_r}{g_{rk}} < \langle c, s \rangle$$

El nuevo vertice \hat{s} es pues, mejor que el anterior. Se repite el proceso. Este proceso termina en número finito de etapas en ausencia de degeneración. Existen muchas formas de presentar las tablas describiendo la sucesión de cálculos, el resto es lo mismo.

2.2.1 Tratamiento de degeneraciones

Existen muchas formas de resolver el tratamiento de las degeneraciones, una forma simple consiste en hacer perturbaciones. Dado un valor $\varepsilon > 0$ pequeño, en caso de degeneraciones se reemplaza $b_i = 0$ por $b_i = \varepsilon$ y se continua el proceso. A fin de evitar problemas de ciclo, utilizar ε^2 en vez de ε y así sucesivamente.

2.2.2 Un ejemplo

Un fabricante de bebidas dispone de 240 kg de maíz, 5 kg de lúpulo y 595 kg de malta. Para fabricar un tonel de cebada rubia, el necesita, 2.5 kg de maíz, 0.125 kg de lúpulo y 17.5 kg de malta. Para un tonel de cebada negra, el necesita 7.5 kg de maíz, 0.125 de lúpulo y 10 kg de malta. El fabricante gana 65 euros por el tonel de cebada rubia y 115 euros por el de cebada negra. La programación óptima que minimiza el monto que debo de pagar al fabricante por su materia prima corresponde al problema siguiente

$$\begin{array}{ll} \min & 240x_1 + 5x_2 + 595x_3 \\ \text{s.a} & 2.5x_1 + 0.125x_2 + 17.5x_3 \geq 65 \\ & 7.5x_1 + 0.125x_2 + 10x_3 \geq 115 \end{array} \quad (S)$$

Luego de inculir las variables de holgura y las variables artificiales, procedemos según 2.2.4 . La tabla de la primera fase es

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
2.5	1/8	35/2	-1	0	1	0	65
7.5	1/8	10	0	-1	0	1	115
0	0	0	0	0	-1	-1	0

Los índices de las variables básicas para la tabla inicial siguiente $I = \{6, 7\}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
2.5	1/8	35/2	-1	0	1	0	65
7.5	1/8	10	0	-1	0	1	115
10	1/4	55/2	0	0	0	0	0

De acuerdo a 2 se elige $j = 3$, entonces de acuerdo con 4 se elige $i = 6$. Hacemos las operaciones indicadas en 6. Se obtiene la tabla siguiente

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1/7	1/140	1	-2/35	0	2/35	0	26/7
85/14	3/56	0	4/7	-1	-4/7	1	545/7
85/14	3/56	0	4/7	-1	-11/7	0	545/7

Se toma ahora $j = 1$, entonces $i = 7$. Haciendo las operaciones indicadas en 6. Se obtiene la tabla siguiente

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	1/170	1	-6/85	2/85	6/85	-2/85	32/7
1	3/340	0	8/85	-14/85	-8/85	14/85	218/7
0	0	0	0	0	-1	-1	0

Según lo dicho en 2.2.4 estamos en presencia de un vértice $(218/7, 0, 32/7)$, este será entonces nuestro vértice inicial por lo tanto podemos eliminar las variables artificiales. Seguidamente continuamos con el método simplex teniendo la siguiente tabla

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1/170	1	-6/85	2/85	32/7
1	3/340	0	8/85	-14/85	218/7
0	21/34	0	-330/17	-434/17	71260/17

donde la última fila corresponde al vector d . Tomando $I = \{1, 3\}$ y $J = \{2, 4, 5\}$ según 2, elegir $j = 2$, entonces de acuerdo con 4, es toma $i = 1$. Haciendo las operaciones indicadas en 6 se obtiene la siguiente tabla

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	170	-12	4	320
1	0	-3/2	1/5	-1/5	10
0	0	-105	-12	-28	4000

Debido a que $d \leq 0$, estamos en presencia de una solución optimal. Esto corresponde a 320 euros el kilo de lúpulo, 10 euros el kilo de maíz y 0 euros el kg de malta. El costo mínimo es de 4000 euros.

2.2.3 Interpretación dual del simplex

Supongamos que el problema inicial está dado por de la siguiente forma

$$\begin{array}{ll} \min & \langle c, x \rangle \\ \text{s.a} & Ax \geq b, x \geq 0 \end{array} \quad (P)$$

el dual de (P) es

$$\begin{array}{ll} \max & \langle b, u \rangle \\ \text{s.a} & A^t u \leq c, u \geq 0 \end{array} \quad (Q)$$

Sea \bar{x} una solución optimal de (P) y $\bar{y} = A\bar{x} - b$ la variable de holgura asociada. Cuando el simplex termina, se está en presencia de un vector $\bar{d} = (\bar{d}_x, \bar{d}_y)$ tal que $\bar{d} \leq 0$, $\langle \bar{d}_x, \bar{x} \rangle = \langle \bar{d}_y, \bar{y} \rangle = 0$ y $\langle c, x \rangle = \langle c, \bar{x} \rangle - \langle \bar{d}_x, x \rangle - \langle \bar{d}_y, y \rangle$ para todo (x, y) tal que $Ax + y = b$. Luego

$$\langle c, x \rangle = \langle c, \bar{x} \rangle - \langle \bar{d}_x, x \rangle - \langle \bar{d}_y, Ax - b \rangle$$

Despues para todo x

$$\langle c + \bar{d}_x + A^t \bar{d}_y, x \rangle = \langle c, \bar{x} \rangle + \langle \bar{d}_y, b \rangle$$

se deduce que $c = -\bar{d}_x - A^t \bar{d}_y$ y $\langle c, \bar{x} \rangle = \langle -\bar{d}_y, b \rangle$. Haciendo $\bar{u} = -\bar{d}_y$ entonces \bar{u} es una solución factible de (Q) y además $\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{u} \rangle$ entonces \bar{u} es la solución optimal de (Q) . Así, la tabla optimal del simplex ofrece al mismo tiempo una solución óptima del problema primal y una solución óptima del problema dual.

Con mucha frecuencia se puede obtener una interpretación de las variables duales. En el caso del ejemplo tratado previamente, si el fabricante gana una cantidad suplementaria de δ_r por tonel de cebada rubia entonces el costo aumentaría en $12\delta_r$, si gana una cantidad sumplentaria δ_n por el tonel de cebada negra entonces el costo aumentaría en $28\delta_n$. El problema dual de (S) sería el siguiente

$$\begin{array}{llll} \max & 65u_1 & + & 115x_2 \\ \text{s.a} & 2.5u_1 & + & 0.125x_2 \leq 5 \\ & 0.125u_1 & + & 0.125x_2 \leq 5 \\ & 17.5u_1 & + & 10x_2 \leq 595 \\ & u_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

2.2.4 Búsqueda de un vértice factible

Existen muchas formas de considerar un vértice factible. Uno de los métodos más empleados consiste en resolver un problema de programación lineal adicional. Sea pues el poliedro convexo

$$C = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, Ax + y = b\}$$

Si $b \geq 0$, entonces $(0, b)$ es un vértice que será el punto de partida para el simplex. Caso contrario, considere el problema de programación lineal siguiente llamado Primera Fase :

$$\begin{array}{ll} \gamma = \min & \langle 0, x \rangle + \langle 0, y \rangle + \langle e, v \rangle \\ \text{s.a} & Ax + y + v = b \\ & x \geq 0, y \geq 0, v \geq 0 \end{array} \quad (P_0)$$

Si $b_i \geq 0$ entonces tomamos $x = 0, y_i = b$ y $v_i = 0$, si $b_i < 0$ tomamos $y_i = 0$ y $v_i = -b_i$. Se tiene un vértice de partida para el simplex aplicado a (P_0) . Si el simplex conduce a la solución óptimal (x, y, v) , entonces $\gamma = 0, v = 0$ y (x, y) es un vértice de partida para el simplex aplicado al problema inicial. Las variables v son llamadas variables artificiales.

2.2.5 Método Simplex Revisado

Esta ligera modificación del algoritmo simplex, trabaja solo con información pertinente, almacenandola en un pequeño arreglo. Esto hace que se reduzca considerablemente el espacio de memoria usada.

Algoritmo 2.1

1. Sea $x = (x_B, x_N)$ el vértice actual con matriz básica B y $x_B = B^{-1}b = \bar{b}$.

2. Calcular el mínimo costo reducido, es decir, $\bar{c}_k = \min_{j \in J} \bar{c}_j = \min_{j \in J} \{c_j - \langle c_B, B^{-1}A_j \rangle\}$. Si $0 \leq \bar{c}_k$, **PARAR** : El óptimo es x . Caso contrario ir al paso 3.
3. Calcular $u = B^{-1}A_k$. Si $u \leq 0$, **PARAR** : El óptimo es $-\infty$. Caso contrario, ir al paso 4.
4. Calcular

$$\frac{\bar{b}_r}{u_{r,k}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{u_{i,k}}, u_{i,k} > 0 \right\}$$

5. Para la nueva base reemplazar $A_{B(r)}$ por A_k . Si y es la nueva solución básica factible, los valores de sus coordenadas son $y_k = \bar{b}_r / u_{r,k}$ y $y_{B(i)} = x_{B(i)} - \bar{b}_r / u_{r,k}$ si $i \neq r$.
6. Formar la matriz aumentada $[B^{-1}|u]$. Agregue a cada una de sus filas un múltiplo de la r -ésima fila para que la última columna sea igual al vector unitario e_r . Las primeras m columnas serán la nueva B^{-1} . volver al paso 1.

Observación 2.2. En lugar de trabajar con la tabla simplex completa, el algoritmo nos sugiere simplemente trabajar con el siguiente arreglo denominado arreglo maestro :

$c_B B^{-1}$	$c_B \bar{b}$
B^{-1}	\bar{b}

2.3 Métodos de optimización a gran escala

Considere el problema de programación lineal en su forma estandar

$$\min [\langle c, x \rangle : Ax = b, x \geq 0] \quad (2.2)$$

donde A es una matriz $m \times n$ de rango m , con $m \ll n$. Es bien sabido que para resolver este tipo de problemas se hace uso del método simplex revisado, sin embargo, esto nos deja con la dificultad de determinar la optimalidad de la base actual, es decir, determinar cada costo reducido \bar{c}_j . Esto es logrado facilmente resolviendo el siguiente subproblema

$$\min_{1 \leq j \leq n} \bar{c}_j \quad (2.3)$$

La solución nos permitirá determinar la optimalidad y en caso no se de, la columna entrante a la base. La llave está entonces en resolver eficientemente el problema (2.3). A continuación veremos un método que gracias a la estructura del problema, se consigue dicha eficiencia.

2.3.1 Descomposición de Dantzig-Wolfe

Consideremos el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min \quad \langle c_1, x_1 \rangle + \langle c_2, x_2 \rangle \\ & \text{s.a} \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 = b_0 \\ & \quad \quad D_1 x_1 = b_1 \\ & \quad \quad \quad D x_2 = b_2 \\ & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde $c_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $A_i \in \mathbb{R}^{p_0 \times m_i}$, $D_i \in \mathbb{R}^{p_i \times m_i}$ para $i = 1, 2$. Se dice que este problema tiene una estructura de bloques. Con el fin de conseguir que el problema de minimizar los costos reducidos sea sencillo de resolver, reformularemos (P).

Consideremos los poliedros $X_i = \{x_i \in \mathbb{R}^{m_i} : D_i x_i = b_i, x_i \geq 0\}$ con $i = 1, 2$; los cuales son representados como

$$x_i = \sum_{j \in J_i} \lambda_i^j x_i^j + \sum_{k \in K_i} \mu_i^k d_i^k : \lambda_i^j, \mu_i^k \geq 0, \sum_{j \in J_i} \lambda_i^j = 1 \quad (2.4)$$

donde x_i^j y d_i^k son los puntos extremos y direcciones extremas de X_i , con $j \in J_i$ y $k \in K_i, i = 1, 2$. Sustituyendo (2.4) en (P) obtenemos el problema equivalente llamado *problema maestro*

$$\begin{aligned} (\text{MP}) \quad \min \quad & \sum_{i=1}^2 \sum_{j \in J_i} \langle c_i, x_i^j \rangle \lambda_i^j + \sum_{i=1}^2 \sum_{k \in K_i} \langle c_i, d_i^k \rangle \mu_i^k \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^2 \sum_{j \in J_i} \lambda_i^j \begin{bmatrix} A_i x_i^j \\ e_i \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^2 \sum_{k \in K_i} \mu_i^k \begin{bmatrix} A_i d_i^k \\ 0e_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ e_1 + e_2 \end{bmatrix} \quad (w) \\ & \lambda_i^j, \mu_i^k \geq 0 \quad (\alpha) \end{aligned}$$

donde w, α son las variables duales asociadas a las restricciones de igualdad. Proseguimos en seguida a partir de una base B para (MP) y calcular los costos reducidos de todas las variables (incluyendo las básicas), es decir, hallar :

$$\begin{aligned} \bar{c}(\lambda_i^j) &= \langle c_i, x_i^j \rangle - \langle w, A_i x_i^j \rangle - \langle \alpha, e_i \rangle, \\ \bar{c}(\mu_i^k) &= \langle c_i, d_i^k \rangle - \langle w, A_i d_i^k \rangle \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pero al ser una cantidad enorme de variables resolver (2.5) directamente sería ineficiente. El algoritmo de Dantzig-Wolfe consiste en reemplazar el cálculo de (2.5) por la resolución de pequeños subproblemas que gracias a la estructura de bloques de (P), estos son de una dimensión menor y de la siguiente forma :

$$(\text{SP}_i) \quad z_i = \min [\langle c_i, x_i \rangle - \langle w, A_i x_i \rangle - \langle \alpha, e_i \rangle : x_i \in X_i], \quad i = 1, 2 \quad (2.6)$$

Resuelto (SP_i) para cada i se continua con el proceso del método simplex revisado. En resumen, el método es como sigue :

Algoritmo 2.2

1. Inicialización : Se parte de una base B para el problema (MP), cuyo conjunto de índices básicos es I .
2. Se forma el arreglo maestro para B .
3. Se resuelve cada *subproblema* (SP_i) para $i = 1, 2$. Ocurrirá una sola de las tres posibilidades
 - Si $\min_{i=1,2} z_i = -\infty$, se genera la columna entrante $C = \begin{bmatrix} A_i d_i^{\hat{k}} \\ 0e_i \end{bmatrix}$, donde \hat{k} es tal que $\langle c_i, d_i^{\hat{k}} \rangle - w^t A_i d_i^{\hat{k}} < 0$. Ir al paso 4.
 - Si $-\infty < \min_{i=1,2} z_i < 0$, se genera la columna entrante $C = \begin{bmatrix} A_i x_i^{\hat{j}} \\ e_i \end{bmatrix}$, donde \hat{j} es tal que $\langle c_i, x_i^{\hat{j}} \rangle - \langle w, A_i x_i^{\hat{j}} \rangle - \langle \alpha, e_i \rangle < 0$. Ir al paso 4.
 - Si $\min_{i=1,2} z_i \geq 0$, **PARAR** : La base B es optima.
4. Se añade la columna $B^{-1}C$ al arreglo maestro en 1, y se determina la variable básica saliente, actualizar I y volver al paso 2.

2.3.2 Método de planos de corte

Considere el problema de programación lineal en su forma estandar

$$(P) \quad \min [\langle c, x \rangle : Ax = b, x \geq 0]$$

donde A es una matriz $m \times n$ de rango m , con $m \ll n$, y su dual

$$(D) \quad \max [\langle b, w \rangle : \langle A_i, w \rangle \leq c_i, i = 1, \dots, n].$$

donde A_i son las columnas de A . Asumiremos que (P) posee solución. Observamos que (D) tiene un número grande de restricciones, de las cuales puede haber un gran cantidad de ellas que no necesitemos. Una técnica para resolver (D) es considerar el *problema dual relajado* :

$$(D_I) \quad \max [\langle b, w \rangle : \langle A_i, w \rangle \leq c_i, i \in I]$$

donde se considera solo un subconjunto de restricciones I . El método de planos de corte es como sigue :

Algoritmo 2.3

1. Resolver (D_I) . Sea w^* es su solución óptima.
2. Resolver $u = \min_{1 \leq i \leq n} [c_i - \langle A_i, w^* \rangle]$. Hay dos posibilidades
 - $u \geq 0$, **PARAR** : w^* es solución óptima para (D) .
 - $u < 0$, adicionar la restricción $\langle A_k, w^* \rangle \leq c_k$ al problema dual relajado, donde k es tal que $u = c_k - \langle A_k, w^* \rangle$. Actualizar I a $I \cup \{k\}$ y volver al paso 1.

El paso 2 nos indica si w^* es factible o no para (D) . Si no lo es, se busca alguna restricción de (D) que no cumpla y se agrega al problema dual relajado (D_I) . Caso contrario, si w^* también es solución de (D) , también sera optimal para (D) y se finaliza la búsqueda.

2.3.3 Descomposición de Bender

Consideremos el siguiente problema de programación lineal

$$(P) \quad \begin{aligned} z = \min \quad & \langle c_1, x \rangle + \langle c_2, y \rangle \\ \text{s.a} \quad & Ax + Dy = b \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Sea $X = \{x \in \mathbb{R}^m : \exists y \geq 0, Dy = b - Ax\}$. Fijemos $\bar{x} \in X$ y consideramos el siguiente problema

$$\theta(\bar{x}) = \min_{\substack{\langle c_2, y \rangle \\ \text{s.a} \quad Dy = b - A\bar{x} \\ y \geq 0}} \quad (w) \quad (2.7)$$

donde $w \in \mathbb{R}^p$ es la variable dual asociada. El problema dual de (2.7) es :

$$\max_{\substack{\langle b - A\bar{x}, w \rangle \\ \text{s.a} \quad w \in R}} \quad (2.8)$$

donde $R = \{w \in \mathbb{R}^p: D^t w \leq c_2\}$. Si $R = \emptyset$ entonces $\theta(\bar{x}) = -\infty$. Por otro lado, si $R \neq \emptyset$ entonces existe solución finita para (2.8) y en consecuencia también para (2.7). Por lo tanto el problema (P) puede ser formulado como :

$$(P') \quad z = \min_{x \in X} \left[\langle c_1, x \rangle + \max_{w \in R} \{ \langle b - Ax, w \rangle \} \right]$$

Estudiemos el caso cuando $R \neq \emptyset$ y posee por lo menos un punto extremo. Sean p_1, \dots, p_r y d_1, \dots, d_s puntos extremos y direcciones extremas de R respectivamente. Si $x \in X$ entonces $\theta(x) < \infty$, luego

$$\langle b - Ax, d_j \rangle \leq 0, \quad j = 1, \dots, s$$

y como la solución se alcanza en un vértice, entonces

$$\theta(x) = \max_{1 \leq i \leq r} \langle b - Ax, p_i \rangle.$$

Escribiendo $\theta(x) = \min [\theta \in \mathbb{R}: \langle b - Ax, p_i \rangle \leq \theta, i = 1 \text{ a } r]$ y reemplazando en (P') obtenemos el llamado *problema maestro* :

$$(MP) \quad \begin{aligned} z = \min \quad & \langle c_1, x \rangle + \theta \\ \text{s.a} \quad & \langle b - Ax, p_i \rangle \leq \theta, \quad i = 1, \dots, r \\ & \langle b - Ax, d_j \rangle \leq 0, \quad j = 1, \dots, s \\ & x \in X \end{aligned}$$

Observemos que el número de restricciones puede ser demasiado grande, por lo tanto podemos resolverlo aplicando el método de planos de corte, considerando inicialmente el problema maestro relajado

$$(MP_{I,J}) \quad \begin{aligned} z_{I,J} = \min \quad & \langle c_1, x \rangle + \theta \\ \text{s.a} \quad & \langle b - Ax, p_i \rangle \leq \theta, \quad i \in I \\ & \langle b - Ax, d_j \rangle \leq 0, \quad j \in J \\ & x \in X \end{aligned}$$

El método es como sigue

Algoritmo 2.4

1. Se calcula una solución óptima (x^*, θ^*) del problema maestro relajado $(MP_{I,J})$. Para verificar la optimalidad, resolvemos el subproblema

$$(SP) \quad u = \min_{w \in R} [\theta^* - \langle b - Ax^*, w \rangle].$$

2. Si (SP) es no acotado entonces añadir la restricción $\langle b - Ax, d_{\bar{j}} \rangle \leq 0$ a $(MP_{I,J})$, donde $1 \leq \bar{j} \leq s$ es tal que $\langle b - Ax^*, d_{\bar{j}} \rangle > 0$, actualizar J a $J \cup \{\bar{j}\}$ y volver al paso 1.
3. Caso contrario, (SP) es factible y proseguir según uno de los dos caso
 - a) Si $u \geq 0$, **PARAR** : (x^*, θ^*) es solución óptima de (MP).
 - b) Si $u < 0$, actualizar I a $I \cup \{\bar{i}\}$ y volver al paso 1, donde \bar{i} corresponde al índice tal que

$$u = \theta^* - \langle b, Ax^*, p_{\bar{i}} \rangle.$$

4. Si no se dá 2 ni 3, (SP) es infactible. **PARAR** : El problema es infactible o no acotado.

2.4 Programación Lineal Estocástica

2.4.1 Formulación general de un problema en dos etapas

La formulación general de un problema de programación lineal estocástico en dos etapas es

$$(P_1) \quad \min_{\text{s.a.}} \quad \langle c, x \rangle + \mathbb{E}[Q(x, \xi)] \\ Ax = b, x \geq 0$$

donde

$$(P_2) \quad Q(x, \xi) = \min_{\text{s.a.}} \quad \langle q_\xi, y \rangle \\ T_\xi x + W_\xi y = h_\xi \quad (w_\xi) \\ y \geq 0$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{p_1 \times m}$, ξ es un resultado posible de cierto Ω , donde (Ω, P) es un espacio medible de probabilidad y $T_\xi \in \mathbb{R}^{p_2 \times m}$, $W_\xi \in \mathbb{R}^{p_2 \times n}$, $h_\xi \in \mathbb{R}^{p_2}$ cuyas entradas dependen de ξ , y $w_\xi \in \mathbb{R}^{p_2}$ es la variable dual asociada.

La variable x es llamada variable de la primera etapa y la variable y es llamada variable de la segunda etapa. El valor de y se calcula una vez conocido el resultado ξ .

2.4.2 Problema determinístico asociado

Supongamos que existan finitos resultados ξ , digamos $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$, entonces

$$\mathbb{E}_\xi[Q(x, \xi)] = \sum_{k=1}^N P(\xi_k) Q(x, \xi_k)$$

Luego el problema (I) es transformado en un problema de programación lineal determinístico

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle c, x \rangle + \sum_{k=1}^N P(\xi_k) \langle q_{\xi_k}, y_{\xi_k} \rangle \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & T_{\xi_k} x + W_{\xi_k} y_{\xi_k} = h_{\xi_k}, 1 \leq k \leq N \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde $T_{\xi_k} \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $W_{\xi_k} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $h_{\xi_k} \in \mathbb{R}^p$ corresponden a los valores tomados por T_ξ, W_ξ, h_ξ en el escenario ξ_k , para $k = 1, \dots, N$.

2.4.3 Descomposición de Bender aplicado al problema determinístico asociado

Con los resultados de la sección anterior, el problema 2.9 puede ser puesto en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle c, x \rangle + \sum_{k=1}^N P(\xi_k) Q_{\xi_k} \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & \langle h_{\xi_k} - T_{\xi_k} x, p_{ik} \rangle \leq Q_{\xi_k}, \quad i = 1, \dots, r(\xi_k) \\ & \langle h_{\xi_k} - T_{\xi_k} x, d_{jk} \rangle \leq 0, \quad j = 1, \dots, s(\xi_k) \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde p_{ik}, d_{jk} son los puntos extremos y direcciones extremas de la región $R_k = \{w_{\xi_k} : W_{\xi_k}^t w_{\xi_k} \leq q_{\xi_k}\}$ y $Q(x, \xi_k) = \min [Q_{\xi_k} \in \mathbb{R} : \langle h_{\xi_k} - T_{\xi_k} x, p_{ik} \rangle \leq Q_{\xi_k}, i = 1 \text{ a } r(\xi_k)]$. Finalmente, este se resuelve aplicando el Algoritmo 2.4.

Capítulo 3

Despacho probabilístico - Sistemas térmicos

En este capítulo formularemos el problema del despacho probabilístico para sistemas térmicos. Será presentado primero el esquema de solución de Baleriaux para el caso determinístico y luego extendido al caso probabilístico.

3.1 Formulación del Problema

El problema del despacho probabilístico (DP) para sistemas térmicos consiste en calcular el valor esperado de costo de generación teniendo en cuenta las fluctuaciones de la demanda y las fallas aleatorias de los equipamientos. El despacho probabilístico para N sistemas térmicos puede ser formulado como el siguiente problema de optimización estocástica:

Determinar el valor esperado de z , donde

$$\begin{aligned} z = \min \quad & \sum_{i=1}^N c_i g_i + c_\delta \delta \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^N g_i + \delta = d \\ & 0 \leq g_i \leq \bar{g}_i, \quad i = 1, \dots, N \\ & 0 \leq \delta \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde

- c_i : costo unitario por operación del i -ésimo generador.
- g_i : potencia del i -ésimo generador.
- c_δ : costo por no suplir la demanda de energía térmica
- δ : energía térmica no suplida
- d : demanda de energía (variable aleatoria).
- \bar{g}_i : capacidad del i -ésimo generador variable aleatoria.

Explicaremos a continuación como la demanda puede ser vista como una variable aleatoria discreta y las fallas en los equipamientos térmicos como una variable aleatoria discreta con

distribución de Bernoulli.

3.1.1 Representación de la demanda

En el caso de la demanda, la siguiente figura muestra un ejemplo de los datos cronológicos de la demanda horaria para un día típico

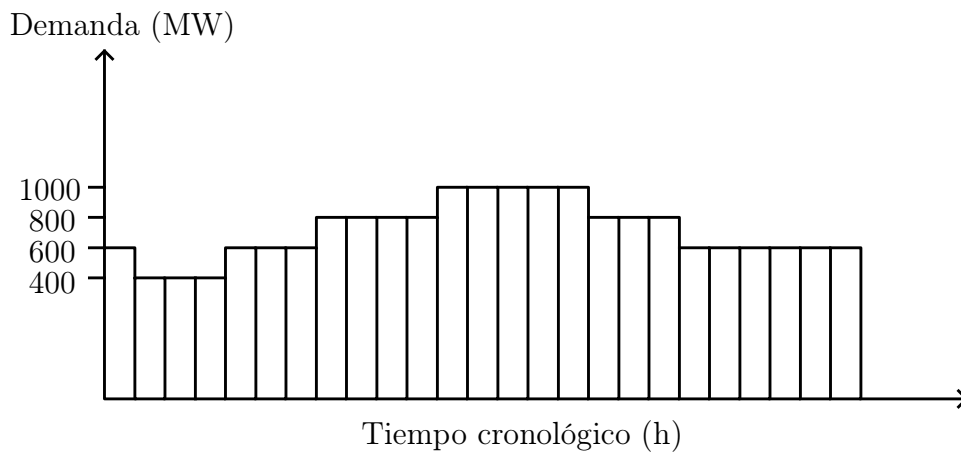


Figura 3.1. Demanda instantanea horaria

La figura siguiente muestra la curva de duración de demanda, obtenida por reordenamiento de las demandas históricas en orden decreciente del valor. Observe que en esta curva se pierde la información cronológica de las demandas, pero esto no importa porque el despacho térmico es independiente para cada hora.

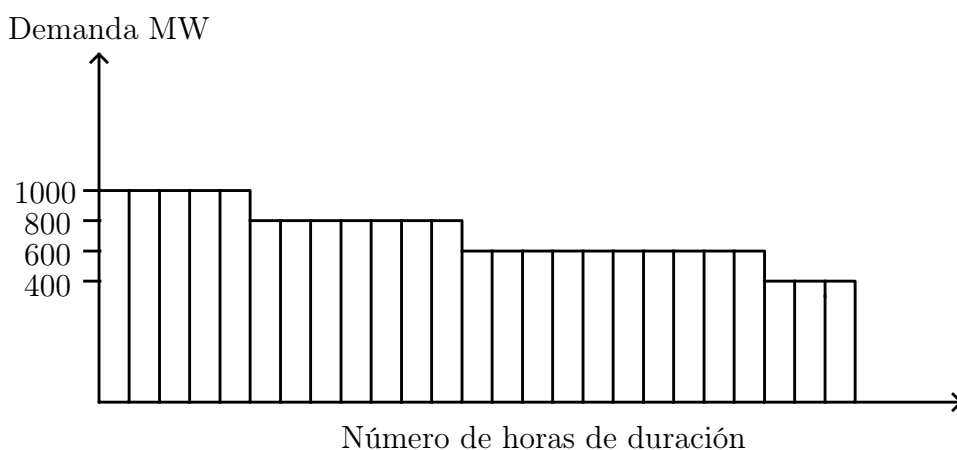


Figura 3.2. Curva de duración de demanda (no cronológica)

Vemos todos los valores que toma la demanda en un día y cual es su duración porcentual. Esto puede ser interpretado como una función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria, en este caso discreta.

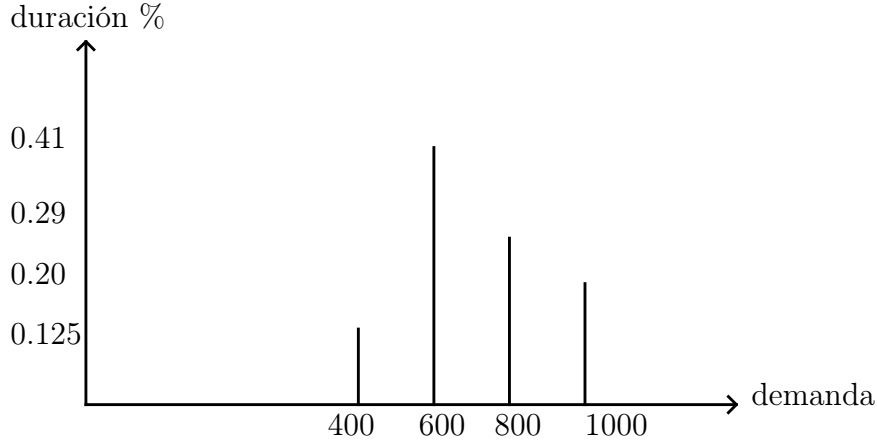


Figura 3.3. Duración porcentual de la demanda vista como una distribución

Luego, podemos ver a la demanda como una variable aleatoria discreta d , cuyos valores son los escalones de demanda y las probabilidades asociadas a cada uno de estos escalones representa su duración porcentual. Denotaremos por \mathcal{Q} al número de escalones de demanda y q_j la probabilidad del escalón j , con $j \in \{1, \dots, \mathcal{Q}\}$.

3.1.2 Representación de la falla en los equipamientos

El problema del despacho probabilístico para sistemas térmicos está sujeto a fallas de los generadores térmicos, en tales casos se puede considerar la capacidad de generación de una térmica \bar{g}_i como una variable aleatoria que tiene una distribución de Bernoulli (éxito, fracaso) de la siguiente forma:

$$\bar{g}_i = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } r_i \\ G_i & \text{con probabilidad } 1 - r_i \end{cases}$$

donde G_i representa la capacidad operativa límite del generador i con probabilidad de que falle r_i .

Sea $\Omega = \{(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_N) \in \{0, G_1\} \times \dots \times \{0, G_N\}\}$ el conjunto total de escenarios posibles de capacidad, los cuales son obtenidos por combinación de los escenarios de éxito y falla en el funcionamiento de cada uno de los generadores, y sea $K = \{1, \dots, \mathcal{R} = 2^N\}$ el conjunto que indexa a los escenarios, entonces la probabilidad p_k asociada al escenario k es obtenida por la multiplicación de las probabilidades de falla y éxito en el funcionamiento de cada generador.

3.2 Reformulación del problema

El problema (3.1) puede ser discretizado, según la sección 2.4, mediante el análisis de escenarios, obteniendo el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} z^* = \min \quad & \sum_{k=1}^{\mathcal{R}} p_k \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j \left(\sum_{i=1}^N c_i g_{i,j,k} + c_\delta \delta_{j,k} \right) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^m g_{i,j,k} + \delta_{j,k} = d_j, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\ & 0 \leq g_{i,j,k} \leq \bar{g}_{i,j,k}, \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\ & 0 \leq \delta_{j,k} \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde

- i : indexa los generadores térmicos (N generadores térmicos)
- j : indexa los escalones de demanda (Q escalones de demanda)
- k : indexa los escenarios (\mathcal{R} escenarios)
- p_k : probabilidad del escenario k
- q_j : duración del escalón de demanda j
- $g_{i,j,k}$: generación de la i -ésima planta en el escalón j , escenario k
- c_δ : costo por no suplir la demanda de energía térmica
- $\delta_{j,k}$: energía no suplida en el escalón j , escenario k (también llamado corte de carga)
- d_j : demanda del escalón j
- $\bar{g}_{i,k}$: capacidad máxima del generador i , escenario k

La primera restricción nos indica que el atendimento a la demanda en cada escalón de demanda debe ser suplido en cualquier escenario, caso contrario se aplicará una penalidad. El costo c_δ normalmente es mucho mayor en comparación con los costos operativos unitarios de las plantas térmicas.

Si bien, debido al caracter combinatorio del problema, el número de restricciones crece exponencialmente con el número de generadores (por ejemplo, si consideramos un sistema con 30 generadores, siendo la capacidad de generación de cada una de ellas una variable aleatoria con distribución de Bernoulli, el número total de escenarios es por lo tanto 2^{30}), el problema puede ser descompuesto en subproblemas agrupando algunas restricciones. A continuación se presenta dos soluciones a este problema.

3.3 Solución

3.3.1 Enumeración de escenarios

El problema (3.2) puede ser descompuesto en $\mathcal{R} \times Q$ subproblemas debido a la estructura de las restricciones. Sean pues k y j fijos, se forma

$$\begin{aligned}
 z_{k,j} = \min & \sum_{i=1}^N c_i g_{i,j,k} + c_\delta \delta_{j,k} \\
 s.a. & \sum_{i=1}^N g_{i,j,k} + \delta_{j,k} = d_j \\
 & 0 \leq g_{i,j,k} \leq \bar{g}_{i,k}, \quad i = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

el cual es un problema determinístico factible y acotado. El valor $z_{k,j}$ representa el costo operativo por generar energía para satisfacer el escalón de demanda d_j dado el escenario k . Luego, como cada escalón de demanda tiene su duración porcentual q_j y cada escenario tiene una probabilidad p_k entonces :

$$z^* = \sum_{\substack{j=1, \dots, Q \\ k=1, \dots, \mathcal{R}}} p_k q_j z_{k,j} \tag{3.4}$$

Así, el algoritmo de enumeración de escenarios se resume en lo siguiente :

Algoritmo 3.1

1. Para cada $k \in \{1, \dots, \mathcal{R}\}$ se resuelve para todos los $j \in \{1, \dots, \mathcal{Q}\}$ el subproblema (3.3) devolviendonos un valor $z_{k,j}$
2. Calculamos z^* según (3.4).

Aún así, el número de subproblemas aumenta si es que aumenta el número de escalones de demanda y la cantidad de escenarios, por lo que Baleriaux propuso una nueva metodología.

3.3.2 Esquema de Balériaux

El algoritmo de Baleriaux se basa también en la descomposición de subproblemas del despacho probabilístico y permite resolverlos analíticamente. En primer lugar, describiremos este esquema para el caso determinístico, luego lo extenderemos hacia el caso probabilístico.

3.3.2.1 Caso determinístico

Consideremos el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^N c_i g_i \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^N g_i = d \\
 & 0 \leq g_i \leq \bar{g}_i, \quad i = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Utilizando el método simplex, este problema puede ser resuelto colocando los generadores en orden creciente de costo unitario hasta alcanzar su capacidad máxima de generación o atender la demanda. Por lo tanto la energía producida por cada generador esta dada por

$$g_i = \min \{ \bar{g}_i, w_{i-1} \} \tag{3.6}$$

donde $w_{i-1} = \max \{ 0, d - \sum_{j=1}^{i-1} \bar{g}_j \}$ y puede ser interpretado como la *energía no suplida* de un sistema en el cual solamente los primeros $i - 1$ generadores están disponibles. Mostraremos ahora que g_i puede ser calculado como la diferencia entre la energía no suplida antes de adicionar el generador i y la energía no suplida despues de adicionar el generador i , es decir :

$$g_i = w_{i-1} - w_i$$

En efecto, al adicionar el generador g_i tenemos dos casos:

- a) Si $g_i = \bar{g}_i$ entonces $w_{i-1} = d - \sum_{j=1}^{i-1} \bar{g}_j$ y $w_i = d - \sum_{j=1}^i \bar{g}_j$, por lo tanto $g_i = w_{i-1} - w_i$.
- b) Si $g_i < \bar{g}_i$ entonces $g_i = \max \{ 0, d - \sum_{j=1}^{i-1} \bar{g}_j \} = w_{i-1}$. Como ya hemos atendido toda la demanda, entonces $w_i = 0$, por lo tanto $g_i = w_{i-1} - 0 = w_{i-1} - w_i$.

En resumen, el problema puede ser resuelto con el siguiente algoritmo:

Algoritmo 3.2

1. Calcular la energía no suplida despues de adicionar cada generador

$$w_i = \max \left\{ 0, d - \sum_{j=1}^i \bar{g}_j \right\}, \forall i \in \{1, \dots, N\} \tag{3.7}$$

2. Calcular la energía producida por cada generador:

$$g_i = w_{i-1} - w_i, \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (3.8)$$

3. Calcular el costo operativo $\sum_{i=1}^N c_i g_i$.

Debido a que este algoritmo es simplemente la formulación del simplex aplicado a un problema particular el cual es factible y acotado, entonces los valores calculados de g_i son óptimos y el costo es el mínimo.

3.3.2.2 Caso probabilístico

Volviendo al problema (3.2)

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^{\mathcal{R}} p_k \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j \left(\sum_{i=1}^N c_i g_{i,j,k} + c_\delta \delta_{j,k} \right) \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^m g_{i,j,k} + \delta_{j,k} = d_j, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\ & 0 \leq g_{i,j,k} \leq \bar{g}_{i,j,k}, \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\ & 0 \leq \delta_{j,k} \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \end{aligned}$$

Podemos también expresarlo de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N c_i \sum_{j,k} p_k q_j g_{i,j,k} + c_\delta \sum_{j,k} p_k q_j \delta_{j,k} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^N p_k q_j g_{i,j,k} + p_k q_j \delta_{j,k} = p_k q_j d_j, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\ & 0 \leq p_k q_j g_{i,j,k} \leq p_k q_j \bar{g}_{i,j,k}, \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\ & 0 \leq p_k q_j \delta_{j,k} \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \end{aligned} \quad (3.9)$$

En términos de esperanza

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{E}[g_i] + c_\delta \mathbb{E}[\delta] \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[g_i] + \mathbb{E}[\delta] = \mathbb{E}[d] \\ & 0 \leq \mathbb{E}[g_i] \leq \mathbb{E}[\bar{g}_i] \quad i = 1, \dots, N \\ & 0 \leq \mathbb{E}[\delta] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ya que $\mathbb{E}[d]$ y $\mathbb{E}[\bar{g}_i]$ son conocidas, pues sabemos cual es su distribución, entonces el esquema de Baleriaux puede ser aplicado a esta formulación, por lo que el algoritmo es el siguiente :

Algoritmo 3.3

1. Calcular el valor esperado de la energía no suplida despues de adicionar cada generador

$$\mathbb{E}[w_i] = \mathbb{E} \left[\max \left\{ 0, d - \sum_{j=1}^i \bar{g}_j \right\} \right], \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (3.11)$$

2. Calcular el valor esperado de la energía producida por cada generador como la diferencia de energías no suplidas

$$\mathbb{E}[g_i] = \mathbb{E}[w_{i-1}] - \mathbb{E}[w_i], \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (3.12)$$

3. Calcular el valor esperado del costo total de generación

$$\mathbb{E}[z] = \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{E}[g_i] + c_\delta \mathbb{E}[\delta] \quad (3.13)$$

En resumen, el esquema de solución de Balériaux descompone el problema del despacho en N subproblemas de determinar el valor esperado de la energía no suplida. Estos problemas son conocidos como problemas de *confiabilidad de generación*.

3.4 Ejemplo

Consideremos un sistema compuesto de dos plantas térmicas, con los siguientes datos:

Planta	Capacidad (MW)	Taza de avería (%)	Costo operativo (\$/MWh)
T ₁	500	20	5
T ₂	200	10	10

Tabla 3.1. Sistema térmico de dos plantas

La penalidad por el no atendimento a la demanda, que es representado como una térmica de capacidad infinita, es de 100\$/MWh. Los datos sobre la demanda son los siguientes:

Demanda (MW)	Duración (%)
600	50
400	50

Tabla 3.2. Escalones de demanda con su respectiva duración

Dado que estamos considerando solo dos plantas térmicas, cada una con dos posibles escenarios de capacidad, entonces el número total de escenarios es $2^2 = 4$. Las capacidades y probabilidades asociadas a estos escenarios son los siguientes:

Escenario k	\bar{g}_{1k}	\bar{g}_{2k}	Probabilidad p_k
1	500	200	$0.8 \times 0.9 = 0.72$
2	500	0	$0.8 \times 0.1 = 0.08$
3	0	200	$0.2 \times 0.9 = 0.18$
4	0	0	$0.2 \times 0.1 = 0.02$

Tabla 3.3. Escenarios de capacidad con sus respectivas probabilidades

Luego, el problema formulado es

$$\begin{aligned}
\min \quad & 0.72 \times 0.5 \times 5 \times g_{111} + 0.72 \times 0.5 \times 10 \times g_{211} + 0.72 \times 0.5 \times 100 \times \delta_{11} + \\
& 0.72 \times 0.5 \times 5 \times g_{121} + 0.72 \times 0.5 \times 10 \times g_{221} + 0.72 \times 0.5 \times 100 \times \delta_{21} + \\
& 0.08 \times 0.5 \times 5 \times g_{112} + 0.08 \times 0.5 \times 10 \times g_{212} + 0.08 \times 0.5 \times 100 \times \delta_{12} + \\
& 0.08 \times 0.5 \times 5 \times g_{122} + 0.08 \times 0.5 \times 10 \times g_{222} + 0.08 \times 0.5 \times 100 \times \delta_{22} + \\
& 0.18 \times 0.5 \times 5 \times g_{113} + 0.18 \times 0.5 \times 10 \times g_{213} + 0.18 \times 0.5 \times 100 \times \delta_{13} + \\
& 0.18 \times 0.5 \times 5 \times g_{123} + 0.18 \times 0.5 \times 10 \times g_{223} + 0.18 \times 0.5 \times 100 \times \delta_{23} + \\
& 0.02 \times 0.5 \times 5 \times g_{114} + 0.02 \times 0.5 \times 10 \times g_{214} + 0.02 \times 0.5 \times 100 \times \delta_{14} + \\
& 0.02 \times 0.5 \times 5 \times g_{124} + 0.02 \times 0.5 \times 10 \times g_{224} + 0.02 \times 0.5 \times 100 \times \delta_{24} + \\
\text{s.a} \quad & g_{111} + g_{211} + \delta_{11} = 600, g_{121} + g_{221} + \delta_{21} = 200 \\
& 0 \leq g_{111}, g_{121} \leq 500, 0 \leq g_{211}, g_{221} \leq 200, 0 \leq \delta_{11}, \delta_{21} \\
& g_{112} + g_{212} + \delta_{12} = 600, g_{122} + g_{222} + \delta_{22} = 200 \\
& 0 \leq g_{112}, g_{122} \leq 500, 0 \leq g_{212}, g_{222} \leq 0, 0 \leq \delta_{12}, \delta_{22} \\
& g_{113} + g_{213} + \delta_{13} = 600, g_{123} + g_{223} + \delta_{23} = 200 \\
& 0 \leq g_{113}, g_{123} \leq 0, 0 \leq g_{213}, g_{223} \leq 200, 0 \leq \delta_{13}, \delta_{23} \\
& g_{114} + g_{214} + \delta_{14} = 600, g_{124} + g_{224} + \delta_{24} = 200 \\
& 0 \leq g_{114}, g_{124} \leq 0, 0 \leq g_{214}, g_{224} \leq 0, 0 \leq \delta_{14}, \delta_{24}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

3.4.1 Solución por enumeración

El problema (3.14) es separable en subproblemas para cada escenario y para cada escalón de demanda. El costo operativo asociado al generador i , escalón j , escenario k se obtienen multiplicando la energía generada g_{ijk} por el costo unitario de operación c_i y por la duración del escalón de demanda, q_j , esto es, $q_j \times c_i \times g_{ijk}$.

Para obtener el costo asociado a cada escenario, basta sumar los costos operativos en cada escalón de demanda como se muestra en las siguientes tablas:

Generador	Escalón 1 MW	Escalón 1 Costo (\$)	Escalón 2 MW	Escalón 2 Costo (\$)
T ₁	500	$0.5 \times 5 \times 500 = 1250$	400	$0.5 \times 5 \times 400 = 1000$
T ₂	100	$0.5 \times 10 \times 500 = 500$	0	0
Déficit	0	0	0	0
Total	600	1750	400	1000
Costo de escenario = \$2750				

Tabla 3.4. Escenario 1

Generador	Escalón 1 MW	Escalón 1 Costo (\$)	Escalón 2 MW	Escalón 2 Costo (\$)
T ₁	500	$0.5 \times 5 \times 500 = 1250$	400	$0.5 \times 5 \times 400 = 1000$
T ₂	0	0	0	0
Déficit	100	$0.5 \times 100 \times 100 = 5000$	0	0
Total	600	6250	400	1000
Costo de escenario = \$7250				

Tabla 3.5. Escenario 2

Generador	Escalón 1 MW	Escalón 1 Costo (\$)	Escalón 2 MW	Escalón 2 Costo (\$)
T ₁	0	0	0	0
T ₂	200	$0.5 \times 10 \times 200 = 1000$	200	$0.5 \times 10 \times 200 = 1000$
Déficit	400	$0.5 \times 100 \times 400 = 20000$	200	$0.5 \times 100 \times 200 = 10000$
Total	600	21000	400	11000
Costo de escenario = \$32000				

Tabla 3.6. Escenario 3

Generador	Escalón 1 MW	Escalón 1 Costo (\$)	Escalón 2 MW	Escalón 2 Costo (\$)
T ₁	0	0	0	0
T ₂	0	0	0	0
Déficit	600	$0.5 \times 100 \times 600 = 30000$	400	$0.5 \times 100 \times 400 = 20000$
Total	600	30000	400	20000
Costo de escenario = \$50000				

Tabla 3.7. Escenario 4

El costo operativo total se obtiene ponderando los costos operativos de cada escenario por su probabilidad asociada p_k . De esta forma, el valor esperado del costo operativo es

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \text{costo del escenario } k \times p_k &= 2750 \times 0.72 + 7250 \times 0.08 + 32000 \times 0.18 + 50000 \times 0.02 \\ &= \$9320 \end{aligned}$$

3.4.2 Solución por el método de Balériaux

Inicialización . Primero calculamos el valor esperado de la energía no suplida cuando no se ha adicionado ningún generador térmico, esto equivale al valor esperado de la demanda, es decir

$$w_0 = \mathbb{E}[d] = 0.5 \times 600 + 0.5 \times 400 = 500 \text{ MW}$$

Iteración 1. Adicionamos la térmica más barata T₁. El valor esperado de la energía no suplida es

$$w_1 = \mathbb{E}[\max \{0, d - \bar{g}_1\}]$$

Aplicando convolución obtenemos la distribución de la variable aleatoria $\max \{0, d - \bar{g}_1\}$, dada por :

$\max \{d - \bar{g}_1\}$	Probabilidad
600	0.1
400	0.1
100	0.4
0	0.4

Tabla 3.8. Distribución de la variable aleatoria $\max \{0, d - \bar{g}_1\}$

Entonces $w_1 = 0.1 \times 600 + 0.1 \times 400 + 0.4 \times 100 + 0.4 \times 0 = 140\text{MW}$. Por lo tanto el valor esperado de la generación de la térmica T_1 es

$$\mathbb{E}[g_1] = w_0 - w_1 = 500 - 140 = 360\text{MW}$$

Iteración 2. Adicionando la segunda térmica más barata T_2 . El valor esperado de la energía no suplida es

$$w_2 = \mathbb{E}[\max\{0, d - \bar{g}_1 - \bar{g}_2\}]$$

Como ya tenemos la distribución de $d - \bar{g}_1$, aplicando convolución con \bar{g}_2 obtenemos

$\max\{d - \bar{g}_1 - \bar{g}_2\}$	Probabilidad
600	0.01
400	0.10
200	0.09
100	0.04
0	0.76

Tabla 3.9. Distribución de la variable aleatoria $\max\{0, d - \bar{g}_1 - \bar{g}_2\}$

Entonces $w_2 = 0.01 \times 600 + 0.1 \times 400 + 0.09 \times 200 + 0.04 \times 100 + 0.76 \times 0 = 68\text{MW}$. Por lo tanto el valor esperado de la generación de la térmica T_2 es

$$\mathbb{E}[g_2] = w_1 - w_2 = 140 - 68 = 72\text{MW}$$

Finalmente el valor esperado del costo operativo es dado por la suma de los valores de generación multiplicado por los costos operativos

$$z = 5 \times 360 + 10 \times 72 + 100 \times 68 = \$9320$$

Capítulo 4

Despacho probabilístico-Sistemas hidrotérmicos

En este capítulo formularemos el despacho hidrotérmico de un nivel y discutimos las dificultades de aplicar directamente la técnica de Balériaux presentada en el capítulo anterior. Se presenta una metodología basada en la descomposición de Dantzig-Wolfe que permite la solución del problema de forma eficiente utilizando la técnica del despacho probabilístico (DP) para los subproblemas.

4.1 Formulación del problema para la implementación de una hidroeléctrica

Consideremos un sistema compuesto por N generadores térmicos y una planta hidroeléctrica, cuya producción de energía está limitada a un valor máximo E , que representa por ejemplo, un límite en el agua disponible para la generación. El problema de despacho resulta

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^{\mathcal{R}} p_k \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j \left(\sum_{i=1}^N c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} \right) \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^N g_{i,j,k} + h_{j,k} + \delta_{j,k} = d_j, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq g_{i,j,k} \leq \bar{g}_{i,k} \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq h_{j,k} \leq \bar{h} \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j h_{j,k} \leq E \quad 1 \leq k \leq \mathcal{R}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde

- i : indexa los generadores (N generadores térmicos)
- j : indexa los escalones de demanda (\mathcal{Q} escalones)
- k : indexa los escenarios (\mathcal{R} escenarios)
- p_k : probabilidad del escenario k
- q_j : duración del escalón de demanda j
- g_{ijk} : potencia producida por el generador i en el escalón de demanda j , escenario k
- c_δ : penalidad por el no atendimento a la demanda
- δ_{jk} : corte de carga en el escalón j , escenario k , debido a la insuficiencia de generación
- d_j : demanda en el escalón j
- \bar{g}_{ik} : capacidad del generador i , escenario k
- h_{jk} : potencia producida por la hidroeléctrica en el escalón de demanda j , escenario k
- E : límite energético de la hidroeléctrica
- \bar{h} : capacidad de generación de la hidroeléctrica

La última restricción indica que la energía generada por la hidroeléctrica en cada escenario no debe exceder el límite energético E . Justamente es por eso que no se puede utilizar el método de Baleriaux presentado en el capítulo anterior, pues Baleriaux dice que el orden de carga de los generadores es siempre de menor a mayor costo, es decir no depende de los escenarios. Y para no violar el límite energético, el generador hídrico debe ser cargado en ordenes distintos dependiendo el escenario.

4.2 Solución

Multipliquemos la última restricción de (4.1) por la probabilidad de cada escenario y sumando esas \mathcal{R} desigualdades obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{R}} p_k \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j h_{jk} \leq E$$

Esta restricción exige que el límite energético sea atendido en media, con respecto a los escenarios. Esto significa que en los escenarios que hay mayor falla en los equipamientos térmicos puede ser utilizado el recurso hídrico con más intensidad compensando este exceso en los escenarios de amplia disponibilidad térmica. De esta manera, consideremos entonces la nueva formulación

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^{\mathcal{R}} p_k \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j \left(\sum_{i=1}^N c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} \right) \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^N g_{i,j,k} + h_{j,k} + \delta_{j,k} = d_j, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\ & 0 \leq g_{i,j,k} \leq \bar{g}_{i,k} \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\ & 0 \leq h_{j,k} \leq \bar{h} \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\ & e \leq E \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $e = \sum_{k=1}^{\mathcal{R}} p_k \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j h_{j,k}$, es decir, si el valor medio de la generación hídrica se denota por $\mathbb{E}[h]$, entonces $\mathbb{E}[h] = e$. Luego escribimos el problema (4.2) como

$$\begin{aligned} \min \quad & 0e + \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{E}[g_i] + c_\delta \mathbb{E}[\delta] \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[g_i] + e + \mathbb{E}[\delta] = \mathbb{E}[d] \\ & 0 \leq \mathbb{E}[g_i] \leq \mathbb{E}[\bar{g}_i] \quad i = 1, \dots, N \\ & e \leq E \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ahora, supongamos que se ha escogido una decisión e tal que $e \leq E$. Definamos

$$\begin{aligned} z(e) = \min \quad & \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{E}[g_i] + c_\delta \mathbb{E}[\delta] \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[g_i] + \mathbb{E}[\delta] = d - e \\ & 0 \leq \mathbb{E}[g_i] \leq \mathbb{E}[\bar{g}_i] \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \tag{4.4}$$

Luego, el problema (4.2) se reformula como :

$$\begin{aligned} \min \quad & z(e) \\ \text{s.a} \quad & e \leq E \end{aligned} \quad (4.5)$$

Proposición 4.1. Sea $\theta(x): X \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\begin{aligned} \theta(x) = \min \quad & \langle c_2, y \rangle \\ \text{s.a} \quad & Dy = b - Ax \quad (w) \\ & y \leq \bar{y} \\ & y \geq 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

para todo $x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n: \exists y \in \mathbb{R}^n \text{ con } Dy = b - Ax, 0 \leq y \leq \bar{y}\}$. Entonces θ es una función lineal por partes con respecto a x .

Demostración. El dual de (4.6) es

$$\begin{aligned} \theta(x) = \max \quad & \langle b - Ax, w_1 \rangle - \langle \bar{y}, w_2 \rangle \\ \text{s.a} \quad & D^t w_1 - w_2 \leq c \\ & w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Sea $R = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^{2m}: D^t w_1 - w_2 \leq c, w_2 \geq 0\}$. Sean $(w_1^1, w_2^1), \dots, (w_1^r, w_2^r)$ los puntos extremos de R . Como el problema es factible y acotado, entonces el máximo es alcanzado en uno de ellos, es decir

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \max_{1 \leq i \leq r} \langle b - Ax, w_1^i \rangle - \langle \bar{y}, w_2^i \rangle \\ &= \max_{1 \leq i \leq r} \langle x, A^t w_1^i \rangle - (\langle \bar{y}, w_2^i \rangle + \langle b, w_1^i \rangle) \end{aligned}$$

por lo tanto θ es una función lineal por partes con respecto a x . □

En particular, $z(e)$ entonces es una función lineal por partes con respecto a e . Luego, podemos escribir $z(e)$ como combinación convexa de sus puntos de quiebra, es decir :

$$(e, z(e)) = \lambda_1(e_1, z(e_1)) + \dots + \lambda_{\mathcal{L}}(e_{\mathcal{L}}, z(e_{\mathcal{L}}))$$

donde $\lambda_p \in [0, 1]$ para $p = 1, \dots, \mathcal{L}$ y con $\sum_{p=1}^{\mathcal{L}} \lambda_p = 1$. Así, ponemos el problema (4.5) en la siguiente forma

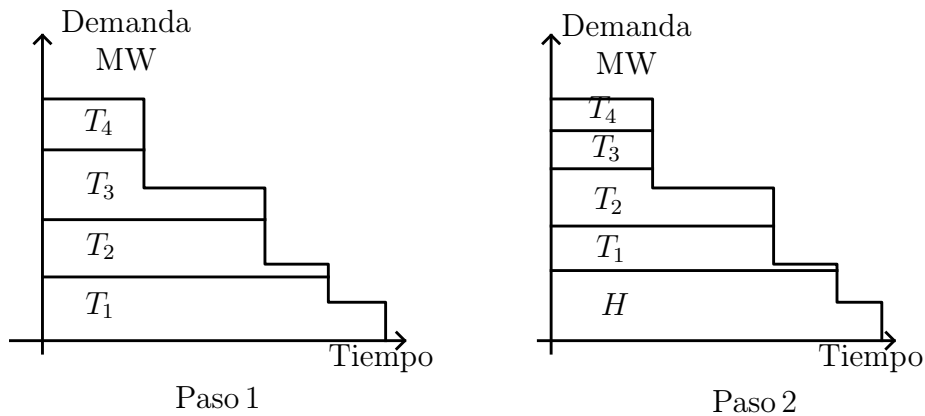
$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{p=1}^{\mathcal{L}} \lambda_p z(e_p) \\ \text{s.a} \quad & \sum_{p=1}^{\mathcal{L}} \lambda_p e_p \leq E \\ & \sum_{p=1}^{\mathcal{L}} \lambda_p = 1 \\ & \lambda_p \geq 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2.1 Algoritmo Tradicional

Como se comentó anteriormente, el número total de escenarios de capacidad térmica aumenta exponencialmente con el número de plantas. Por lo tanto, el problema (4.2) puede tener una dimensión elevada lo que impide su solución por métodos tradicionales de programación lineal. Podemos utilizar el método de Balériaux para resolver este problema de manera eficiente, a través del siguiente procedimiento, esto gracias a que la función z es lineal por partes con

respecto a la generación hídrica

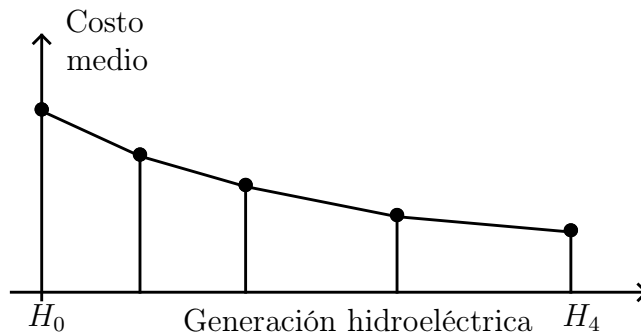
1. Resolvemos el problema del DP utilizando el método de Balériaux sin considerar la planta hidroeléctrica, es decir, solo consideraremos las plantas térmicas ingresándolas de menor a mayor costo $\{T_1, \dots, T_m\}$. Calculamos la energía media producida por cada generador y el costo esperado por operación del sistema.
2. Ahora consideremos la planta hidroeléctrica y la ingresamos en la primera posición, como si fuese la planta que tiene menor costo unitario de generación, es decir, $\{H, T_1, \dots, T_m\}$, y resolvemos el problema DP utilizando el método de Balériaux



3. En una gráfica de generación hidroeléctrica media por costo operativo total colocar como puntos extremos las generaciones hidroeléctricas obtenidas en los pasos 1 y 2 con sus respectivos costos de operación del sistema.



4. Calculamos los costos operativos y la energía hidroeléctrica media producida por las hidroeléctricas cuando estas son colocadas en posiciones intermedias, por ejemplo $\{T_1, H, T_2, \dots, T_m\}$.
5. Colocar los puntos intermedios calculados en el paso 4 en el gráfico del paso 3.



6. Por interpolación lineal calcular el valor correspondiente al límite energético E

La principal desventaja de este método es que se tienen que generar todos los puntos extremos y por lo tanto mientras más número de hidroeléctricas tenga el sistema, mayor número de puntos extremos tendrá la curva de costo futuro multidimensional. Por ejemplo, como mínimo para generar los puntos extremos en un sistema de M hidroeléctricas se necesitará solucionar una cantidad de 2^M problemas de despacho probabilístico (vía el método de Baleriaux). Es por eso que se plantea una nueva metodología, aprovechando que la función de costo es justamente lineal por partes.

4.2.2 Descomposición de Dantzig-Wolfe

Reescribiendo el problema (4.7) en su forma canónica, tenemos :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{p=1}^{\mathcal{L}} \lambda_p z(e_p) \\
 s.a \quad & - \sum_{p=1}^{\mathcal{L}} \lambda_p e_p \geq -E \quad (\pi) \\
 & \sum_{p=1}^{\mathcal{L}} \lambda_p = 1 \quad (\mu) \\
 & \lambda_p \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Donde π y μ son las variables duales correspondientes. Supongamos que conocemos un vértice inicial $\lambda = (\lambda_I, \lambda_J)$, entonces para verificar la columna entrante a la base necesitamos calcular el mínimo costo reducido, es decir, resolver el siguiente subproblema

$$\bar{c}_{\min} = \min_e \{z(e) + \pi e - \mu\} \tag{4.9}$$

Sustituyendo $z(e)$ en (4.5) se obtiene :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^{\mathcal{R}} p_k \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j \left(\sum_{i=1}^N c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} \right) + \pi e - \mu \\
 s.a \quad & \sum_{i=1}^N g_{i,j,k} + h_{j,k} + \delta_{j,k} = d_j, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq g_{i,j,k} \leq \bar{g}_{i,k} \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq h_{j,k} \leq \bar{h} \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & \sum_{k=1}^{\mathcal{R}} p_k \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j h_{j,k} = e
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Sustituyendo el valor de e en la función objetivo por la igualdad de la última restricción entonces

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_{\min} = \min \quad & \sum_{k=1}^{\mathcal{R}} p_k \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j \left(\sum_{i=1}^N c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} + \pi h_{j,k} \right) - \mu \\
 s.a \quad & \sum_{i=1}^N g_{i,j,k} + h_{j,k} + \delta_{j,k} = d_j, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq g_{i,j,k} \leq \bar{g}_{i,k} \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq h_{j,k} \leq \bar{h} \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

El cual viene a ser un problema de despacho probabilístico donde la planta hidroeléctrica tiene un costo operativo π . Este subproblema puede ser resuelto mediante el método de Baleriaux considerando a la hidroeléctrica como una térmica.

4.2.2.1 Criterio de parada

Si en la iteración k se tiene que $c_{\min} \geq 0$ entonces la solución óptima fue encontrada, caso contrario ingresa una nueva columna $\begin{bmatrix} z(e_k) \\ e_k \end{bmatrix}$ al problema maestro de Dantzig-Wolfe donde $z(e_k)$ representa el costo operativo medio por generar e_k de energía hidroeléctrica. En resumen, el algoritmo de Dantzig-Wolfe aplicado al despacho hidrotérmico es el siguiente :

Algoritmo 4.1

1. Inicializar $p = 1$, como necesitamos un punto inicial, resolvemos el problema (4.11) con la hidroeléctrica en la primera posición en la orden de carga, este pues no producirá $\begin{bmatrix} z(e_1) \\ e_1 \end{bmatrix}$.

2. Resolver el problema maestro de Dantzig-Wolfe

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^p \lambda_k z(e_k) + \gamma \sigma \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k - \sigma \leq E \quad (\pi) \\
 & \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \quad (\mu) \\
 & \lambda_k, \sigma \geq 0, \quad k = 1, \dots, p
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

3. Sea π el valor optimo de la variable dual despues de resolver el problema maestro, se atribuye este valor al costo operativo de la hidroeléctrica. Se obtiene una orden de carga como una térmica y se resuelve el subproblema (4.11) mediante la técnica de Baleriaux.

Sea la columna generada $\begin{bmatrix} z(e_p) \\ e_p \end{bmatrix}$. Calcular $\bar{c}_{\min} = z(e_p) + \pi e_p - \mu$.

4. Si $\bar{c}_{\min} > 0$, **PARAR** : se encontró solución óptima. Caso contrario, hacer $p = p + 1$ e ingresar la columna $\begin{bmatrix} z(e_p) \\ e_p \end{bmatrix}$ al problema maestro y regresar al paso 2.

4.3 Ejemplo

4.3.1 Solución por algoritmo tradicional

Consideremos los datos del ejemplo (3.4) en adición con la hidroeléctrica H cuya capacidad de generación es 300 MW, con un límite de energía de 200 MWh.

Iteración 1. Resolver el DP suponiendo que H no es cargada

Generador	$\mathbb{E}[\text{generación}]$	$\mathbb{E}[\text{costo operativo}]$
T_1	360	1800
T_2	72	720
Déficit	68	6800
H	0	0
Total	500	9320

Tabla 4.1. Solución del problema del despacho probabilístico - Iteración 1

Iteración 2. Resolver el DP considerando H en la primera posición

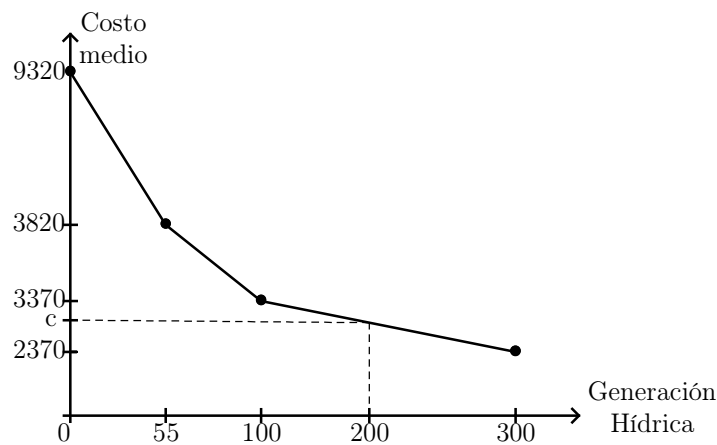
Generador	$\mathbb{E}[\text{generación}]$	$\mathbb{E}[\text{costo operativo}]$
H	300	0
T_1	160	800
T_2	27	270
Déficit	13	1300
Total	500	2370

Tabla 4.2. Solución del problema del despacho probabilístico - Iteración 2

Generador	$\mathbb{E}[\text{generación}]$	$\mathbb{E}[\text{costo operativo}]$	Origen
T_1	360	1800	Iteración 1
T_2	72	720	Iteración 1
H	55	0	Por diferencia
Déficit	13	1300	Iteración 2
Total	500	3370	

Tabla 4.3. Solución del problema del despacho probabilístico - Iteración 4

La figura siguiente muestra la curva del costo operativo medio en función de la generación hidroeléctrica media

**Figura 4.1.** Curva de costo operativo

El costo asociado al límite hidroeléctrico (200MWh) es obtenido por interpolación lineal y es igual a $c = 2870$. Lo que quiere decir que para atender un límite energético de 200MWh el sistema opera 50% del tiempo generando 100 MW y 50% del tiempo generando 300 MW.

4.3.2 Solución por el algoritmo de Dantzig-Wolfe

Inicializar. Resolvemos el DP con la hidroeléctrica en la primera posición, esto nos da una solución óptima cuyo costo operativo medio es \$2370 y 300 MWh de energía hídrica media.

Punto generado: $e_1 = 300, z(e_1) = 2370$

Iteración 1. Resolvemos el problema maestro siguiente

$$\begin{array}{ll} \min & 2370\lambda_1 + \gamma\sigma \\ \text{s.a} & 300\lambda_1 - \sigma \leq 200 \\ & \lambda_1 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Variables duales} \\ \pi \\ \mu \end{array}$$

Cuya solución óptima es $\lambda_1 = 1, \pi = 3000$ y $\mu = 902370$

Iteración 2.

- i. Resolvemos el subproblema : Como $\pi = 3000$ es el costo implícito de la hidroeléctrica, el cual es mucho mayor que el costo por penalidad, entonces no se carga la hidroeléctrica, es decir, solo las plantas térmicas. Esto nos da una solución óptima cuyo costo operativo medio es \$9320 y 0 MWh de energía hídrica media

Punto generado: $e_2 = 0, z(e_2) = 9320$

- ii. Verificamos la optimalidad :

$$\bar{c}_{\min} = z(e_2) + \pi e_2 - \mu = -893050 < 0$$

por lo tanto, el proceso continua.

- iii. Resolvemos el problema maestro siguiente

$$\begin{array}{ll} \min & 2370\lambda_1 + 9320\lambda_2 + \gamma\sigma \\ \text{s.a} & 300\lambda_1 + 0\lambda_2 - \sigma \leq 200 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Variables duales} \\ \pi \\ \mu \end{array}$$

Cuya solución óptima es $\lambda_1 = 0.666, \lambda_2 = 0.333, \pi = 23.17$ y $\mu = 9320$

Iteración 3.

- i. Resolvemos el subproblema : Como $\pi = 23.17$ es el costo implícito de la hidroeléctrica y es mayor que el costo unitario de todas las plantas térmicas entonces se carga en la última posición. Esto nos da una solución óptima cuyo costo operativo medio es \$3820 y 55 MWh de energía hídrica media

Punto generado: $e_3 = 55, z(e_3) = 3820$

- ii. Verificamos la optimalidad :

$$\bar{c}_{\min} = z(e_3) + \pi e_3 - \mu = -4225.65 < 0$$

por lo tanto, el proceso continua.

iii. Resolvemos el problema maestro siguiente

$$\begin{array}{ll} \min & 2370\lambda_1 + 9320\lambda_2 + 3820\lambda_3 + \gamma\sigma \\ \text{s.a} & 300\lambda_1 + 0\lambda_2 + 55\lambda_3 - \sigma \leq 200 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Variables duales} \\ \pi \\ \mu \end{array}$$

Cuya solución óptima es $\lambda_1 = 0.59, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0.41, \pi = 5.92$ y $\mu = 4145.51$

Iteración 4.

- i. Resolvemos el subproblema : Como el costo implícito de la hidroeléctrica es $\pi = 5.92$, entonces se carga en la segunda posición entre las térmicas T_1 y T_2 . Esto nos da una solución óptima cuyo costo operativo medio es \$3370 y 100 MWh de energía hídrica media

$$\text{Punto generado: } e_4 = 100, z(e_4) = 3370$$

- ii. Verificamos la optimalidad :

$$\bar{c}_{\min} = z(e_4) + \pi e_4 - \mu = -183.51 < 0$$

por lo tanto, el proceso continua.

iii. Resolvemos el problema maestro siguiente

$$\begin{array}{ll} \min & 2370\lambda_1 + 9320\lambda_2 + 3820\lambda_3 + 3370\lambda_4 + \gamma\sigma \\ \text{s.a} & 300\lambda_1 + 0\lambda_2 + 55\lambda_3 + 100\lambda_4 - \sigma \leq 200 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Variables duales} \\ \pi \\ \mu \end{array}$$

Cuya solución óptima es $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0.5, \lambda_4 = 0.5, \pi = 5$ y $\mu = 3870$

Iteración 5.

- i. Resolvemos el subproblema : Como el costo implícito de la hidroeléctrica es $\pi = 5$ entonces H es colocada en la segunda posición de carga, es decir, repetimos el orden de la iteración anterior y por lo tanto

$$\text{Punto generado: } e_5 = 100, z(e_5) = 3370$$

- ii. Verificamos la optimalidad :

$$\bar{c}_{\min} = z(e_4) + \pi e_4 - \mu = 0$$

Lo cual nos indica que el proceso a terminado y estamos en presencia de la solución óptima.

Resumen

La siguiente tabla muestra los resultados del proceso iterativo

Iteración p	Problema m.					DP		
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	π	e_p	$z(e_p)$	
1	-	-	-	-	-	300	2370	
2	1	-	-	-	3000	0	9320	
3	0.66	0.33	-	-	23.17	55	3820	
4	0.59	0.00	0.41	-	5.92	100	3370	
5	0.50	0.00	0.00	0.50	5.00	100	3370	

Tabla 4.4. Resumen del proceso iterativo

La columna π es el costo implícito de la hidroeléctrica, que sirve para determinar el orden de cargamiento en el despacho probabilístico. La siguiente tabla muestra este proceso:

Iteración	Orden de carga	H	$\mathbb{E}[\text{costo op.}]$
1	$HT_1 T_2$	300	2370
2	$T_1 T_2$	0	9320
3	$T_1 T_2 H$	55	3820
4	$T_1 HT_2$	100	3370
5	$T_1 HT_2$	100	3370

Tabla 4.5. Orden de carga de la hidroeléctrica

La curva de costo operativo medio versus energía hidroeléctrica media generada en este proceso es mostrado en la siguiente figura

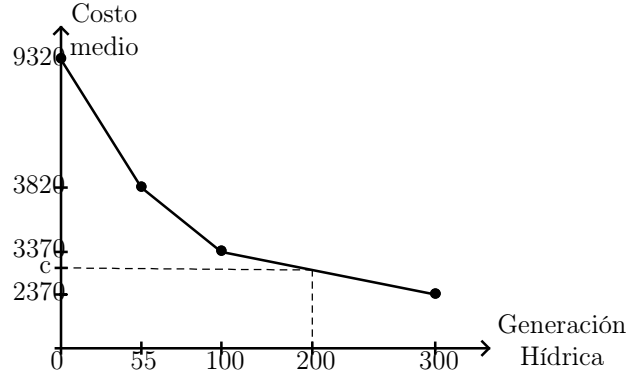


Figura 4.2. Curva de costo operativo

El valor esperado de la generación hidroeléctrica esta dado por

$$\mathbb{E}[H] = \sum_{i=1}^4 \lambda_i e_i = 0.50 \times 300 + 0.50 \times 100 = 200 \text{ MWh}$$

y por lo tanto el valor esperado del costo operativo para esta generación es

$$\mathbb{E}[\text{costo op.}] = \sum_{i=1}^4 \lambda_i z(e_i) = 0.50 \times 2370 + 0.50 \times 3370 = \$2870$$

Observe que la curva generada es idéntica a la curva de la figura 4.1 obtenida por la aplicación del método tradicional. Esto significa que en este caso fueron generados todos los puntos de quiebre de la función de costo, y por tanto no hubo una ventaja computacional en la aplicación de la metodología propuesta. Sin embargo, cuando tenemos más de un generador hidroeléctrico, los puntos de quiebre de la función de costo operativo será mucho mayor y es donde la metodología propuesta muestra la ventaja computacional.

4.4 Formulación del problema para la implementación de múltiples hidroeléctricas

Consideremos un sistema compuesto por N generadores térmicos y M hidroeléctricas, entonces el problema de despacho resulta en

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^{\mathcal{R}} p_k \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j \left(\sum_{i=1}^N c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} \right) \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^N g_{i,j,k} + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} h_{l,j,k} + \delta_{j,k} = d_j, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq g_{i,j,k} \leq \bar{g}_{i,k} \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq h_{l,j,k} \leq \bar{h}_l \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R}, 1 \leq l \leq \mathcal{L} \\
 & \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j h_{l,j,k} \leq E_l \quad 1 \leq k \leq \mathcal{R}, 1 \leq l \leq \mathcal{L}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

De manera análoga al problema con una sola hidroeléctrica, (4.13) es escrito como

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z(e_1, \dots, e_l) \\
 \text{s.a} \quad & e_l \leq E_l \quad 1 \leq l \leq \mathcal{L}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Donde e_l es la generación hidroeléctrica media de la hidroeléctrica l y E_l es el límite energético de la hidroeléctrica l . Expresando la función z como convinación convexa de sus puntos de quiebre, obtenemos nuestro problema maestro de Dantzig-Wolfe

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^p \lambda_i z(x_i) + \gamma \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sigma_l \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^p \lambda_i z(e_{l,i}) - \sigma_l \leq E_l, \quad 1 \leq l \leq \mathcal{L} \quad (\pi_l) \\
 & \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \quad (\mu) \\
 & \lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0
 \end{aligned}$$

donde $x_i = (e_{1,i}, e_{2,i}, \dots, e_{l,i})$ y $(x_i, z(x_i))$ son los puntos de quiebre de la función de costo z . El subproblema de Dantzig-Wolfe por lo tanto es

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^{\mathcal{R}} p_k \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j \left(\sum_{i=1}^N c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \pi_l h_{l,j,k} \right) - \mu \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^N g_{i,j,k} + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} h_{l,j,k} + \delta_{j,k} = d_j, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq g_{i,j,k} \leq \bar{g}_{i,k} \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq h_{l,j,k} \leq \bar{h}_l \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

4.4.1 Caso de estudio

Aplicaremos la técnica a un sistema compuesto por 5 hidroeléctricas y 8 plantas térmicas. Los límites energéticos para cada hidroeléctrica y sus capacidades máximas se muestran en la siguiente tabla :

$H(i)$	$E_i(\text{MWh})$	$\bar{h}(\text{MW})$
1	292.00	450
2	142.00	195
3	38.00	150
4	19.00	25
5	26.00	44

Tabla 4.6. Datos de las hidroeléctricas

Las plantas térmicas tienen una distribución de Bernoulli con parámetro igual a la tasa de falla. Las características de las plantas térmicas son representadas a continuación :

$T(i)$	Capacidad(MW)	Taza de éxito(%)	Costo
1	28.40	57	10.10
2	62	94	12.92
3	68.80	87	16.71
4	13.40	83	18.68
5	12.80	86	18.68
6	9.10	66	23.69
7	9.40	75	23.69
8	65.40	25	25.89

Tabla 4.7. Datos de las plantas térmicas

La curva de duración de demanda considerada en este estudio tiene tres escalones de demanda, como se muestra en la siguiente tabla

Escalón	Demanda(MW)	Duración(%)
1	739	3
2	629	39
3	555	31

Tabla 4.8. Duraciones de los escalones de demanda

Consideramos que el costo por el no atendimento a la demanda es de 307 \$/MWh. La penalidad por el no atendimento a las restricciones de meta energética es de 3000 \$/MWh.

Solución del problema

El sistema está compuesto por 8 térmicas y 5 hidroeléctricas, entonces el número máximo de puntos de quiebra de la curva multidimensional de costo operativo medio vs generación hidroeléctrica es dado por $(8+2)^5$, lo cual obviamente impide la resolución de este problema por medio del método tradicional. Aplicando el algoritmo propuesto la solución es obtenida después de 24 iteraciones, esto quiere decir que solamente fueron generados 24 puntos de quiebre de la función de costo con respecto a la generación hídrica. La siguiente tabla muestra el proceso de convergencia a través de los costos reducidos en cada iteración, donde el criterio de parada es cuando el costo reducido mínimo es nonegativo.

it	\bar{c}_{\min}	it	\bar{c}_{\min}
1	-1757617.9286	13	-41.06804038012524
2	-463815.00000000006	14	-166.1910395323339
3	-470388.6772155809	15	-21.284906355589555
4	-51190.272499021274	16	-2.161170262881569
5	-38749.622848682324	17	-0.05908241566976358
6	-3798.460231924636	18	-3.637978807091713e-11
7	-11136.998390967492	19	-6.002665031701326e-11
8	-1240.2965671660377	20	-2.9103830456733704e-11
9	-619.2673476264472	21	-3.2741809263825417e-11
10	-479.92874196767843	22	-1.0186340659856796e-10
11	-361.56244893617986	23	-1.8189894035458565e-12
12	-312.9043344123438	24	0.0

Tabla 4.9. Costos reducidos por iteración

La siguiente tabla muestra los valores de evolución del costo operativo medio

it	$z(e)$	it	$z(e)$
1	74962.07139999997	13	1916.5900999999303
2	61147.071399999964	14	1937.3249
3	6851.051399999975	15	916.4965999999652
4	2927.9191999999653	16	1916.5901000000001
5	3071.881399999957	17	1916.5901000000001
6	1565.6244	18	1916.5901000000003
7	3062.6714	19	1916.5900999999653
8	926.2869000000001	20	1916.5901000000001
9	916.4965999999652	21	1916.5900999999653
10	1917.1504999999652	22	916.4965999999652
11	2329.9785	23	1916.5901000000003
12	1916.5901000000001	24	1916.5901000000003

Tabla 4.10. Variación de los costos operativos a lo largo del proceso

Se observa que al principio de las iteraciones se presenta un costo operativo extremadamente alto y es debido a que la solución está violando las restricciones del límite energético, tal como se mencionó anteriormente, es más realista que esto suceda pues las hidroeléctricas actúan generando más energía sobrepasando su límite por un breve instante, y esto se compensa en escenarios donde no hay tanta falla de los equipamientos térmicos. El tiempo de ejecución del algoritmo fue 26.8 segundos.

Capítulo 5

Costos marginales de demanda

En este capítulo se presenta el concepto de *costo marginal de demanda*. Veremos como es obtenido del despacho probabilístico, tanto en la metodología tradicional de Balériaux como el esquema propuesto para representación de hidroeléctricas con límite de generación.

El costo marginal de la demanda, según la sección 2.2.3, mide la variación del costo operativo con relación a incrementos en la demanda. Ahora veremos cómo calcularla introduciendo los siguientes conceptos :

1. Probabilidad de pérdida de carga (LOLP) : Se define como la probabilidad de no satisfacer toda la potencia demandada de electricidad con la generación disponible. Si la variable aleatoria X representa la potencia disponible total y d representa la demanda, entonces

$$\text{LOLP}(d) = P[X < d] = \int_0^d f(x) dx$$

2. Energía media no suministrada (EENS) : Se define como la energía que se espera no suministrar por la indisponibilidad de la generación o por la falta de energía primaria. Si X es la variable aleatoria representando la generación total suministrada entonces

$$\text{EENS}(d) = \mathbb{E}[\max\{0, d - X\}] = \int_0^d (d - x) f(x) dx$$

5.1 Cálculo de los costos marginales en el método de Balériaux

En el capítulo 3 fue visto que al aplicar el método tradicional de Balériaux en el problema de despacho probabilístico puramente térmico, el valor esperado del costo operativo es obtenido como

$$\mathbb{E}[z] = \sum_{i=1}^N (\mathbb{E}[w_{i-1}] - \mathbb{E}[w_i]) + c_\delta \mathbb{E}[w_{N+1}] \quad (5.1)$$

donde $\mathbb{E}[w_i]$ es el valor esperado de la energía no suplida después de adicionar el i -ésimo generador. Nos interesa obtener la derivada de este valor con respecto a la demanda, es decir, nos interesa saber la tasa de variación del costo si se produce una pequeña perturbación en la demanda. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{E}[z]}{\partial d} &= \frac{\partial}{\partial d} \left(\sum_{i=1}^N \mathbb{E}[w_{i-1}] - \mathbb{E}[w_i] \right) + c_\delta \frac{\partial \mathbb{E}[w_{N+1}]}{\partial d} \\ &= \sum_{i=1}^N c_i \left(\frac{\partial \mathbb{E}[w_{i-1}]}{\partial d} - \frac{\partial \mathbb{E}[w_i]}{\partial d} \right) + c_\delta \frac{\partial \mathbb{E}[w_{N+1}]}{\partial d} \end{aligned}$$

Vemos que es necesario entonces determinar la derivada del valor esperado de la energía no suplida despues de adicionar el i -ésimo generador con respecto a la demanda. Utilizando los conceptos de energía no suministrada y probabilidad de pérdida de carga tenemos

$$\frac{\partial \mathbb{E}[z]}{\partial d} = \sum_{i=1}^N c_i(\text{LOLP}(w_{i-1}) - \text{LOLP}(w_i)) + \text{LOLP}(w_{N+1})$$

5.2 Cálculo de los costos marginales en la descomposición de Dantzig-Wolfe

Consideremos el siguiente problema de programación lineal

$$z(d) = \min [\langle c(d), x \rangle : A(d)x = b, x \geq 0] \quad (5.2)$$

donde $c(d)$ es una función que depende linealmente del parámetro d , $A(d)$ una matriz cuyos coeficientes dependen del parámetro d . Formulemos el dual de (5.2)

$$\max [\langle \pi(d), b \rangle : A^t(d)\pi(d) + s(d) = c(d), s(d) \geq 0]$$

Debido a la elección del parámetro d , la solución x de (5.2) también dependerá de d , entonces derivando la función objetivo $z(d)$ con respecto a d obtenemos

$$\frac{\partial z(d)}{\partial d} = \frac{\partial c(d)x(d)}{\partial d} = \frac{\partial c(d)}{\partial d}x(d) + c(d)\frac{\partial x(d)}{\partial d}$$

como $c(d) = A^t(d)\pi(d) + s(d)$ entonces

$$\frac{\partial z(d)}{\partial d} = \frac{\partial c(d)}{\partial d}x(d) + (A^t(d)\pi(d) + s(d))\frac{\partial x(d)}{\partial d}$$

por otro lado, derivando las restricciones del problema primal tenemos

$$\frac{\partial A(d)}{\partial d}x(d) + A(d)\frac{\partial x(d)}{\partial d} = 0$$

sustituyendo el valor de $A(d)\frac{\partial x(d)}{\partial d}$ en $\frac{\partial z(d)}{\partial d}$ tenemos

$$\frac{\partial z(d)}{\partial d} = \frac{\partial c(d)}{\partial d}x(d) - \pi^t(d)\frac{\partial A(d)}{\partial d}x(d) + s(d)\frac{\partial x(d)}{\partial d}$$

Luego, reemplazando los valores de cada función del problema (4.8) obtenemos

$$\frac{\partial z(d)}{\partial d} = \sum_{p=1}^{\mathcal{L}} \lambda_p \frac{\partial z(e_p)}{\partial d} - \pi \sum_{p=1}^{\mathcal{L}} \lambda_p \frac{-\partial(e_p)}{\partial d} \quad (5.3)$$

5.2.1 Cálculo de $\frac{\partial z(e_p)}{\partial d}$

Sabemos que la función de costo está dada por

$$z(e_p) = \sum_{i=1}^N c_i(\mathbb{E}[w_{i-1}^p] - \mathbb{E}[w_i^p]) + c_\delta \mathbb{E}[w_{N+1}^p]$$

donde c_i es el costo operativo de la i -ésima planta cargada y c_δ es el costo de penalidad por energía no suplida. Derivando con respecto a d obtenemos

$$\frac{\partial z(e_p)}{\partial d} = \sum_{i=1}^N c_i \left(\frac{\partial \mathbb{E}[w_{i-1}^p]}{\partial d} - \frac{\partial \mathbb{E}[w_i^p]}{\partial d} \right) + c_\delta \frac{\partial \mathbb{E}[w_{N+1}^p]}{\partial d}$$

como $\text{LOLP}(x) = \frac{\partial \text{EENS}(x)}{\partial x}$ entonces

$$\frac{\partial z(e_p)}{\partial d} = \sum_{i=1}^N c_i (\text{LOLP}_{i-1}^p - \text{LOLP}_i^p) + c_\delta \text{LOLP}_{N+1}^p$$

donde LOLP_i^p es la probabilidad de pérdida de carga despues de adicionar la i -ésima planta en la iteración p del algoritmo.

5.2.2 Cálculo de $\frac{\partial e_p}{\partial d}$

En cada subproblema, la hidroeléctrica actuaba como una térmica con cierto costo implícito dado por el problema maestro. Dicho subproblema se resolvía mediante el método de Baleriaux, así :

$$e_p = \mathbb{E}[w_{i-1}^p] - \mathbb{E}[w_i^p]$$

donde i es el orden de adición de la hidroeléctrica en la iteración p . $\mathbb{E}[w_i^p]$ es el valor esperado de la energía no suplida despues de cargar la i -ésima planta en la iteración p . Luego

$$\frac{\partial e_p}{\partial d} = \text{LOLP}_{i-1}^p - \text{LOLP}_i^p$$

Por lo tanto el costo marginal de demanda es

$$\frac{\partial z}{\partial d} = \sum_{p=1}^{\mathcal{L}} \lambda_p \left[\sum_{i=1}^N c_i (\text{LOLP}_{i-1}^p - \text{LOLP}_i^p) + c_\delta \text{LOLP}_{N+1}^p + \pi (\text{LOLP}_{i-1}^p - \text{LOLP}_i^p) \right]$$

Capítulo 6

Despacho hidrotérmico multietapa

6.1 Función de costo inmediato y función de costo futuro

Como se vió en el capítulo 4, la función de costo z era una función lineal por partes con respecto a la generación hídrica media e . De ahora en adelante, la llamaremos **función de costo inmediato**, pues representa el costo por haber producido e de energía para la etapa actual, es decir, la función de costo inmediato para un sistema de N térmicas y \mathcal{L} hidroeléctricas es

$$\begin{aligned}
 z(e) = \min & \sum_{k=1}^{\mathcal{R}} p_k \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j \left(\sum_{i=1}^N c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} \right) \\
 \text{s.a} & \sum_{i=1}^N g_{i,j,k} + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} h_{l,j,k} + \delta_{j,k} = d_j, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq g_{i,j,k} \leq \bar{g}_{i,k} \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq h_{l,j,k} \leq \bar{h}_l \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R}, 1 \leq l \leq \mathcal{L} \\
 & \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j h_{l,j,k} = e_l \quad 1 \leq k \leq \mathcal{R}, 1 \leq l \leq \mathcal{L}
 \end{aligned}$$

Hasta ahora hemos supuesto que el costo de generación hídrica es cero, es decir, que podemos generar energía eléctrica utilizando lo máximo que se pueda del recurso hídrico hasta el valor límite. En la realidad, existe un costo indirecto asociado a la generación de energía hidroeléctrica en la etapa actual, representado a través de una **función de costo futuro**, la cual se define como el valor esperado del costo operativo del final de la etapa actual hasta el final del horizonte de estudio.

En esta sección será analizado el efecto del costo futuro en el problema del despacho hidrotérmico. Primero supongamos que la función de costo futuro es lineal con respecto a la energía hídrica generada. En la sección siguiente se demostrará que en presencia de restricciones en el volumen de un reservorio que la función de costo futuro es lineal por partes con respecto al volumen final.

6.1.1 Formulación del problema

Vamos a considerar un sistema compuesto de N plantas hidroeléctricas, cuyos límites energéticos son E_i para $i = 1, \dots, \mathcal{L}$. Cada planta hidroeléctrica tiene un costo futuro unitario β_i \$/MWh, correspondiendo por lo tanto a la función lineal mostrada en la siguiente figura :

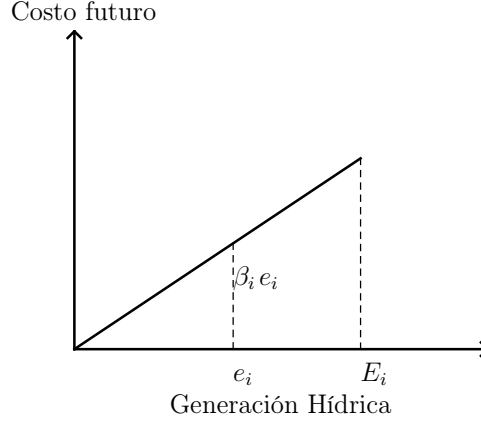


Figura 6.1. Función de costo futuro con respecto a la generación hídrica de la l -ésima hidroeléctrica

Nuestro objetivo es minimizar la suma del costo operativo inmediato y futuro sujeto a las limitaciones energéticas de cada planta hidroeléctrica, por lo tanto el problema es formulado como

$$\begin{aligned} \min \quad & z(e) + \sum_{i=1}^{\mathcal{L}} \beta_i e_i \\ \text{s.a} \quad & e_i \leq E_i, \quad i = 1, \dots, \mathcal{L} \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde

- E_i : límite energético de la hidroeléctrica i
- $e = (e_1, \dots, e_{\mathcal{L}})$: energía generada por cada planta hidroeléctrica
- $z(e)$: costo inmediato por haber generado e MWh de energía.

6.1.1.1 Reformulación del problema

Como se vió en el capítulo 4, el valor esperado del costo operativo es una función lineal por partes con respecto a la generación hídrica, por lo tanto escribimos

$$(e, z(e)) = \sum_{j=1}^p \lambda_j (e^j, z(e^j)), \quad \sum_{j=1}^p \lambda_j = 1 \quad (6.2)$$

donde $(e^j, z(e^j))$ son los puntos de quiebre de la gráfica de la función z , con $j = 1, \dots, p$, y $e^j = (e_1^j, \dots, e_{\mathcal{L}}^j)$ con $j = 1, \dots, p$.

Se debe tener en cuenta nuevamente que cuando se usa la representación (6.2) no se toma en cuenta el límite energético de las plantas hidroeléctricas por lo que puede ocurrir un desbordamiento. Es por eso que se implementa una variable σ_i a cada restricción del problema (6.1) acompañado de una penalidad en el costo, representada por γ la cual es siempre mayor a los costos de cada planta en el sistema.

Por lo tanto, la reformulación del problema 6.1 es

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{j=1}^p \lambda_j z(e^j) + \gamma \sum_{i=1}^{\mathcal{L}} \sigma_i + \sum_{i=1}^{\mathcal{L}} \beta_i e_i \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^p \lambda_j e_i^j - \sigma_i - e_i = 0, & (w_i), \quad i = 1, \dots, \mathcal{L} \\
 & e_i \leq E_i, & (\pi_i), \quad i = 1, \dots, \mathcal{L} \\
 & \sum_{j=1}^p \lambda_j = 1, & (\alpha) \\
 & \lambda_j \geq 0. & j = 1, \dots, p
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

donde w_r, π_r, α son las variables duales correspondientes a cada restricción. Este problema puede ser resuelto aplicandose la descomposición de Dantzig-Wolfe explicada con detalle en el capítulo 4.

6.2 Restricciones en las hidroeléctricas

En esta sección se presenta una relación entre la generación hídrica y el volumen de agua turbinado para poder generarla. La introducción de este concepto, nos lleva a también analizar la dependencia entre las decisiones tomadas en una etapa actual y las consecuencias futuras. Este carácter dinámico del problema junto con la incertidumbre de las afluencias hace que la resolución del problema de despacho multietapa por métodos tradicionales de programación lineal sea improductivo. Por ello, se desarrollan nuevas técnicas que implementan enfoques de descomposición, los cuales se trataron en el capítulo 2.

La energía generada por una hidroeléctrica, que se denota por e , se calcula como el producto entre el coeficiente de producción de la hidroeléctrica ρ y el volumen de agua turbinado denotado por u , es decir

$$e = \rho u$$

En este trabajo, se tomará como hipótesis que el coeficiente de producción es constante y no depende del volumen inicial del reservorio. Como ya se mencionó, es necesario establecer una dependencia entre las decisiones entre etapas, esta dependencia está dada por la ecuación de balance hídrico :

(Ecuación de balance hídrico) Dada una planta hidroeléctrica j con reservorio. Se define la variación de almacenamiento en una etapa t como la suma de volúmenes entrantes menos la suma de volúmenes salientes, esto es

$$v_{f,j} - v_{t,j} = a_{t,j} + \sum_{m \in M_j} (u_{t,m} + s_{t,m}) - (u_{t,j} + s_{t,j}) \tag{6.4}$$

donde $v_{f,j}$ es el volumen al final de la etapa, $v_{t,j}$ es el volumen al inicio de la etapa, $u_{t,j}$ es el volumen turbinado, $s_{t,j}$ es el volumen vertido y M_j es el conjunto de plantas hidroeléctricas agua arriba cuyos volúmenes salientes desembocan en el reservorio.

6.2.1 Formulación del problema

Sabiendo que $e = \rho u$, de ahora en adelante se tomará la función de costo inmediato en función

del volumen turbinado, es decir :

$$\begin{aligned}
 z(u) = \min & \sum_{k=1}^{\mathcal{R}} p_k \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j \left(\sum_{i=1}^N c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} \right) \\
 \text{s.a} & \sum_{i=1}^N g_{i,j,k} + \sum_{l=1}^M h_{l,j,k} + \delta_{j,k} = d_j, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq g_{i,j,k} \leq \bar{g}_{i,k} \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq h_{l,j,k} \leq \bar{h}_l \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R}, 1 \leq l \leq M \\
 & \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j h_{l,j,k} = \rho_l u_l \quad 1 \leq k \leq \mathcal{R}, 1 \leq l \leq M
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

donde $u = (u_1, \dots, u_M)$. Así, dado un sistema hidrotérmico con N plantas térmicas y M hidroeléctricas, nuestro objetivo es minimizar el costo inmediato en cada etapa sujeto a las ecuaciones del balance hídrico y los límites de los volúmenes de turbinamiento y reservorio. Luego, la formulación del problema es la siguiente

$$\begin{aligned}
 \min & z_1(u_1) + z_2(u_2) + \dots + z_T(u_T) \\
 \text{s.a} & v_{t+1,j} - v_{t,j} = a_{t,j} + \sum_{m \in M_j} (u_{t,m} + s_{t,m}) - (u_{t,j} + s_{t,j}) \quad t = 1, \dots, T, j = 1, \dots, M \\
 & 0 \leq v_{t+1,j} \leq \bar{v}_j, 0 \leq u_{t,j} \leq \bar{u}_j \quad t = 1, \dots, T, j = 1, \dots, M
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

donde \bar{v}_j es la capacidad de almacenamiento máximo y \bar{u}_j es la capacidad de turbinamiento máximo.

6.2.1.1 Ecuación de recursión

Supongamos que hemos tomado la decisión de turbinar un volumen de u_1 en la primera etapa, formemos el problema

$$\begin{aligned}
 \theta(u_1) = \min & [z_2(u_2) + \dots + z_T(u_T)] \\
 \text{s.a} & v_{t+1,j} - v_{t,j} = a_{t,j} + \sum_{m \in M_j} (u_{t,m} + s_{t,m}) - (u_{t,j} + s_{t,j}) \quad t = 2, \dots, T, j = 2, \dots, M \\
 & 0 \leq v_{t+1,j} \leq \bar{v}_j, 0 \leq u_{t,j} \leq \bar{u}_j \quad t = 2, \dots, T, j = 2, \dots, M
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

En seguida, escogemos la segunda decisión u_2 , y dado que primero se escogió u_1 entonces formamos el problema

$$\begin{aligned}
 \theta(u_2|u_1) = \min & [z_3(u_3) + \dots + z_T(u_T)] \\
 \text{s.a} & v_{t+1,j} - v_{t,j} = a_{t,j} + \sum_{m \in M_j} (u_{t,m} + s_{t,m}) - (u_{t,j} + s_{t,j}) \quad t = 3, \dots, T, j = 3, \dots, M \\
 & 0 \leq v_{t+1,j} \leq \bar{v}_j, 0 \leq u_{t,j} \leq \bar{u}_j \quad t = 3, \dots, T, j = 3, \dots, M
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Puede observarse que

$$\begin{aligned}
 \theta(u_1) = \min & [z_2(u_2) + \theta(u_2|u_1)] \\
 \text{s.a} & v_{3,j} - v_{2,j} = a_{2,j} + \sum_{m \in M_j} (u_{2,m} + s_{2,m}) - (u_{2,j} + s_{2,j}) \\
 & 0 \leq v_{3,j} \leq \bar{v}_j, 0 \leq u_{2,j} \leq \bar{u}_j
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Y en general, para cada etapa $t = 1, \dots, T$ se forma una ecuación recursiva

$$\begin{aligned} \theta(u_{k-1}|u_1, \dots, u_{k-2}) &= \min [z_k(u_k) + \theta(u_k|u_1, \dots, u_{k-1})] \\ \text{s.a. } v_{k+1,j} - v_{k,j} &= a_{k,j} + \sum_{m \in M_j} (u_{k,m} + s_{k,m}) - (u_{k,j} + s_{k,j}) \quad j = 1, \dots, M \\ 0 \leq v_{k+1,j} &\leq \bar{v}_j, 0 \leq u_{k,j} \leq \bar{u}_j \quad j = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (6.10)$$

con $k = 2, \dots, T$. Ahora definiremos formalmente la función de costo en presencia de restricciones de las hidroeléctricas.

(FUNCIÓN DE COSTO FUTURO) En un sistema hidrotérmico compuesto de N plantas térmicas y M hidroeléctricas, dada una etapa t , se define la función de costo futuro como el costo de generación térmica desde el inicio de la etapa $t + 1$ hasta el final de la etapa T , esto es

$$\theta(u_t|u_1, \dots, u_{t-1}) \quad (6.11)$$

Observación 6.1. La función de costo futuro para la última etapa es cero.

De la ecuación (6.5) vemos que el costo por generar energía hidroeléctrica es cero sin embargo, de la ecuación de balance hídrico se deduce que turbinar todo el agua hasta alcanzar el límite energético implica que en un futuro haya escasez.

Proposición 6.2. *La función de costo futuro es lineal por partes con respecto al almacenamiento final*

Demostración. Supongamos que para la última etapa T se conoce el volumen inicial, el cual es v_T entonces definamos $\alpha_T: [0, \bar{v}] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} \alpha_T(v_T) &= \min z_T(u_T) \\ \text{s.a. } v_{T+1} + u_T &= a_T - s_T + v_T \\ 0 \leq u_T &\leq \bar{u} \\ 0 \leq v_{T+1} &\leq \bar{v} \end{aligned} \quad (6.12)$$

entonces existen \hat{u}_T y \hat{v}_{T+1} tal que

$$\alpha_T(v_T) = z_T(\hat{u}_T) = z(a_T - s_T + v_T - \hat{v}_{T+1}) \quad (6.13)$$

de esto concluimos que la función $\alpha_T(v_T)$ es lineal por partes con respecto al almacenamiento v_T .

Ahora definamos $\alpha_{T-1}(v_{T-1}): [0, \bar{v}] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} \alpha_{T-1}(v_{T-1}) &= \min z_{T-1}(u_{T-1}) + \alpha_T(v_T) \\ \text{s.a. } v_T + u_{T-1} &= a_{T-1} - s_{T-1} + v_{T-1} \\ 0 \leq u_{T-1} &\leq \bar{u} \\ 0 \leq v_T &\leq \bar{v} \end{aligned} \quad (6.14)$$

también existen \hat{u}_{T-1} y \hat{v}_T tal que $\alpha_{T-1}(v_{T-1}) = z_{T-1}(\hat{u}_{T-1}) + \alpha_T(\hat{v}_T)$, y de (6.13) entonces

$$\alpha_{T-1}(v_{T-1}) = z_{T-1}(a_{T-1} - s_{T-1} + v_{T-1} - \hat{v}_T) + \alpha_T(\hat{v}_T)$$

el cual es lineal por partes con respecto a v_{T-1} ya que es la suma de una función lineal por partes y una constante $\alpha_T(\hat{v}_T)$. Así, para cada $t = T, T - 1, \dots, 1$ se definen las funciones

$$\alpha_t: [0, \bar{v}] \rightarrow \mathbb{R}$$

como

$$\begin{aligned} \alpha_t(v_t) = \min \quad & z_t(u_t) + \alpha_{t+1}(v_{t+1}) \\ \text{s.a.} \quad & v_{t+1} + u_t = a_t - s_t + v_t \\ & 0 \leq u_t \leq \bar{u} \\ & 0 \leq v_{t+1} \leq \bar{v} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Finalmente, de la definición de $\alpha_T(v_T)$ notamos que $\alpha_T(v_T) = \theta(u_{T-1}|1, \dots, u_{T-2})$ la cual era la función de costo futuro para la etapa $T - 1$, y de (6.14) se concluye entonces que $\alpha_t(v_t)$ es la función de costo futuro para la etapa $t - 1$. \square

Segun esto, la función de costo futuro para un sistema con una sola hidroeléctrica tiene el siguiente comportamiento :

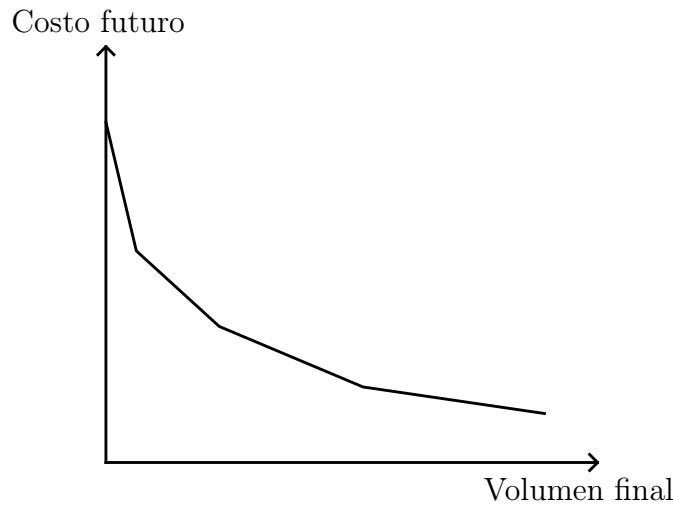


Figura 6.2. Función de costo futuro vs volumen final

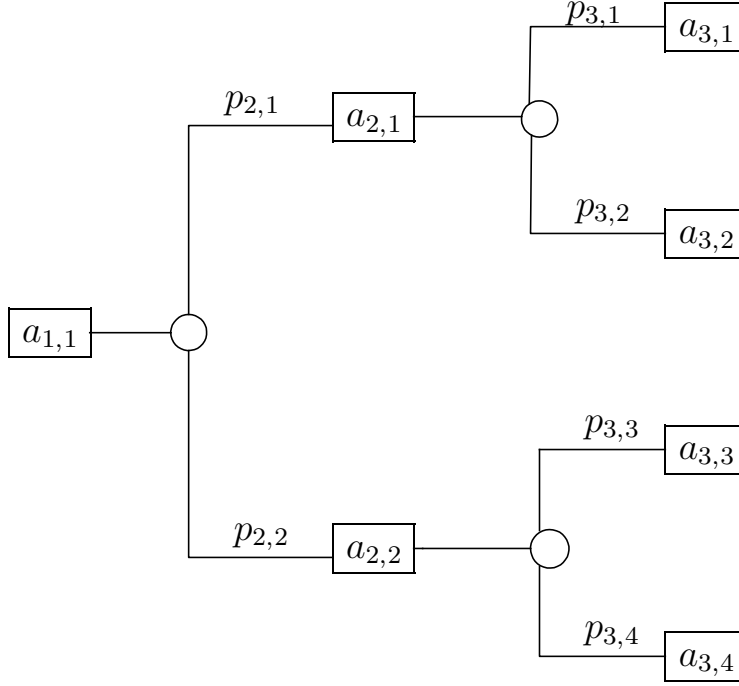
(PROBLEMA DE DESPACHO DE UNA ETAPA) Se define el problema del despacho hidrotérmico en una etapa t como

$$\begin{aligned} \alpha_t(v_t) = \min \quad & z_t(u_t) + \alpha_{t+1}(v_{t+1}) \\ \text{s.a.} \quad & v_{t+1,j} - v_{t,j} = a_{t,j} + \sum_{m \in M_j} (u_{t,m} + s_{t,m}) - (u_{t,j} + s_{t,j}) \\ & 0 \leq v_{t+1,j} \leq \bar{v}_j, 0 \leq u_{t,j} \leq \bar{u}_j \end{aligned} \quad (6.16)$$

Este planteamiento está bien justificado ya que es simplemente la reformulación de la ecuación 6.10. En la siguiente sección se verá cómo obtener la solución a este problema aplicando el algoritmo de Dantzig-Wolfe.

6.3 Escenarios de afluencia

La complejidad del problema (6.6) aumenta si se consideran los volúmenes afluentes como variables no determinísticas. Esto hace que se cree un árbol de escenarios de caudales por lo que el problema tenga que ser evaluado probabilísticamente. La figura siguiente muestra un árbol de escenarios, para el caso de una hidroeléctrica con tres etapas y dos escenarios de caudal.

**Figura 6.3.** Árbol de escenarios de caudales

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z_1(u_{1,1}) + p_{2,1}[z_2(u_{2,1}) + p_{3,1}z_3(u_{3,1}) + p_{3,2}z_3(u_{3,2})] + \\
 & p_{2,2}[z_2(u_{2,2}) + p_{3,3}z_3(u_{3,3}) + p_{3,4}z_3(u_{3,4})] \\
 \text{s.a} \quad & v_{2,1} = v_{1,1} + a_{1,1} - u_{1,1} - s_{1,1} \\
 & v_{3,1} = v_{2,1} + a_{2,1} - u_{2,1} - s_{2,1} \\
 & v_{3,2} = v_{2,1} + a_{2,2} - u_{2,2} - s_{2,2} \\
 & v_{4,1} = v_{3,1} + a_{3,1} - u_{3,1} - s_{3,1} \\
 & v_{4,2} = v_{3,1} + a_{3,2} - u_{3,2} - s_{3,2} \\
 & v_{4,3} = v_{3,2} + a_{3,3} - u_{3,3} - s_{3,3} \\
 & v_{4,4} = v_{3,2} + a_{3,4} - u_{3,4} - s_{3,4} \\
 & 0 \leq v_{t+1,k} \leq \bar{v}, 0 \leq u_{t,k} \leq \bar{u}
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

En este sistema de decisiones, podemos calcular el costo operativo para cada rama del árbol, con sus respectivas probabilidades para así obtener el valor esperado del costo operativo, sin embargo, en la vida real el árbol de decisiones es demasiado grande. En algunos países, por ejemplo, hay 30 escenarios de caudales por mes, lo que significa que en un horizonte de planeamiento de 60 meses con etapas mensuales existen $30^{59} \approx 10^{86}$ ramas, más que el número de partículas observables en el universo. Es por eso que se busca una solución que sea económica.

6.4 Solución

El problema de despacho hidrotérmico en una etapa t exige que sea conocido el volumen inicial de dicha etapa, es decir v_t . Pero para calcular su solución óptima \hat{v}_{t+1} y \hat{u}_t , se debe conocer también la función de costo futuro $\alpha_{t+1}(v_{t+1})$, el cual es otro problema de despacho hidrotérmico (de la etapa $t+1$) con el inconveniente de que no conocemos su volumen inicial, es decir v_{t+1} . Un primer enfoque es simular $\alpha_{t+1}(v_{t+1})$ para distintos valores de v_{t+1} , y así sucesivamente

para todas las etapas, a este proceso se le denomina *enumeración de estados futuros*. Sin embargo, este proceso tiene muchas desventajas computacionales. Es por eso que se plantearon los siguientes métodos.

6.4.1 Recursión SDP

Como hipótesis se tomará que el volumen inicial de la primera etapa v_1 es conocido. Ahora, debido a que en la última etapa (etapa T) la función de costo futura es conocida

$$\alpha_{T+1}(v_{T+1}) = 0$$

entonces, para conocer $\alpha_T(v_T)$ basta entonces probar para un conjunto de valores v_T . Es así que es mucho más sencillo comenzar simulando valores de almacenamiento inicial para la última etapa, ya que esto desencadena que se conozcan las funciones de costo futuro. A este enfoque se le denomina recursión SDP. Ilustraremos el proceso a seguir considerando un sistema de una sola hidroeléctrica.

Se comienza desde la última función de costo futuro para cierto escenario de caudal $a_{T,k}$

$$\begin{aligned} \alpha_{T,k}(v_T) = \min \quad & z_T(u_T) \\ \text{s.a.} \quad & v_{T+1} + u_T = a_{T,k} - s_T + v_T \\ & 0 \leq u_T \leq \bar{u} \\ & 0 \leq v_{T+1} \leq \bar{v} \end{aligned}$$

Debido a que los volúmenes de afluencia son datos, basta conocer entonces el valor v_T que representa el volumen inicial en la etapa T para poder determinar la solución óptima y por lo tanto el valor óptimo $\alpha_{T,k}(v_T)$. Es así que se prueba un conjunto de valores v_T que pueden ser desde 0 hasta \bar{v} , un ejemplo, $\{0, 15\%\bar{v}, 25\%\bar{v}, \dots, 100\%\bar{v}\}$. Luego, para cada valor v_T de este conjunto se calcula $\alpha_{T,k}(v_T)$ para cada escenario de afluencia k , obteniendo así

$$\alpha_T(v_T) = \sum_{k=1}^S P(a_{T,k}) \alpha_{T,k}(v_T)$$

donde S es la cantidad de escenarios de caudal y $P(a_{T,k})$ es la probabilidad de que suceda ese escenario. Formandose así la función de costo futuro para etapa $T - 1$. En seguida se resuelve el problema del despacho hidrotérmico para la etapa $T - 1$

$$\begin{aligned} \alpha_{T-1,k}(v_{T-1}) = \min \quad & z_{T-1}(u_{T-1}) + \alpha_T(v_T) \\ \text{s.a.} \quad & v_T + u_{T-1} = a_{T-1,k} - s_{T-1} + v_{T-1} \\ & 0 \leq u_{T-1} \leq \bar{u} \\ & 0 \leq v_T \leq \bar{v} \end{aligned}$$

Donde la función $\alpha_T(v_T)$ que se encuentra en la función objetivo acaba de ser determinada. Nuevamente se prueba para un conjunto de valores v_{T-1} y se calcula el valor $\alpha_{T-1,k}(v_{T-1})$ que será reemplazado en el problema de despacho para la etapa $T - 2$. Así hasta llegar al problema de despacho hidrotérmico de la primera etapa ($t = 1$)

$$\begin{aligned} \alpha_{1,k}(v_1) = \min \quad & z_1(u_1) + \alpha_2(v_2) \\ \text{s.a.} \quad & v_2 + u_1 = a_{1,k} - s_1 + v_1 \\ & 0 \leq u_1 \leq \bar{u} \\ & 0 \leq v_2 \leq \bar{v} \end{aligned}$$

Por hipótesis, el valor del volumen inicial para esta etapa v_1 se conoce. Finalmente se determina

$$\alpha(v_1) = \sum_{k=1}^S P(a_{1,k}) \alpha_{1,k}(v_1)$$

Esquemáticamente :

1. Para cada etapa t , se define un conjunto de estados indexados por $l = 1, \dots, L$, estos estados representan un porcentaje del almacenamiento del reservorio, por ejemplo: 100%, 75%, 50%, 25%, 0%.

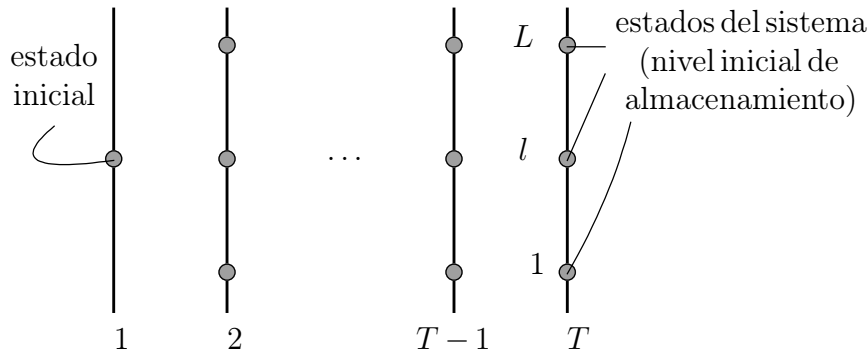


Figura 6.4. Definición de los estados del sistema

2. Empezando de la última etapa T , se resuelve el problema de despacho de una etapa suponiendo que el almacenamiento inicial es el primer valor del conjunto definido en el paso 1, por ejemplo, 100%. Dado que se está en la última etapa, la función de costo futuro es igual a cero. Implementamos la incertidumbre hidrológica resolviendo el problema para todos los escenarios de caudales en esa etapa.

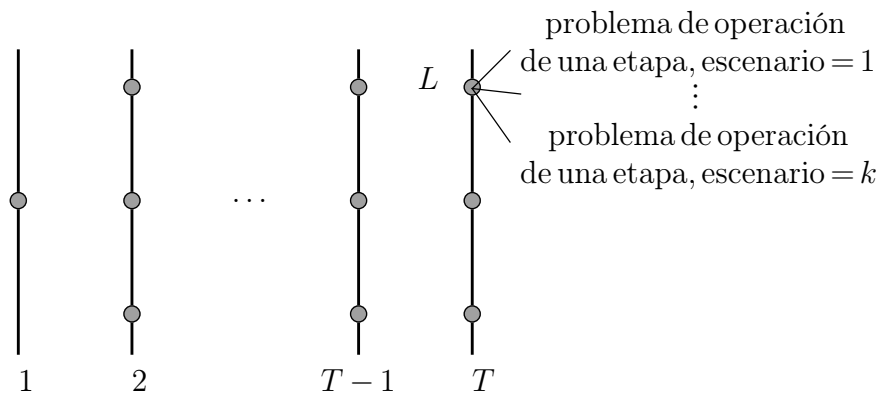


Figura 6.5. Cálculo del costo operativo asociado al primer estado de la última etapa

3. Calcule el valor esperado del costo operativo asociado al nivel de almacenamiento 100%. Con esto se obtiene el primer punto de la función de costo futuro para la etapa $T - 1$, es decir $\alpha_T(v_T)$. Repita el proceso del cálculo del valor esperado del costo operativo para cada uno de los estados de almacenamiento inicial en la etapa T . Interpole los costos entre los estados calculados y produzca la función de costo futuro $\alpha_T(v_T)$ para la etapa $T - 1$.

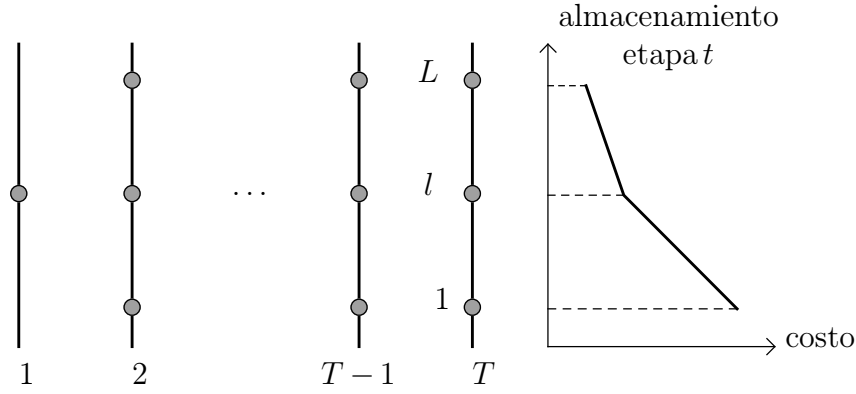


Figura 6.6. Cálculo de la función de costo futuro para la etapa $T - 1$

4. Repita el procedimiento para cada uno de los estados seleccionados de la etapa $T - 1$. Observe que ahora el objetivo es minimizar la suma del costo operativo inmediato de la etapa $T - 1$ mas el valor esperado del costo futuro, dado por el paso anterior.

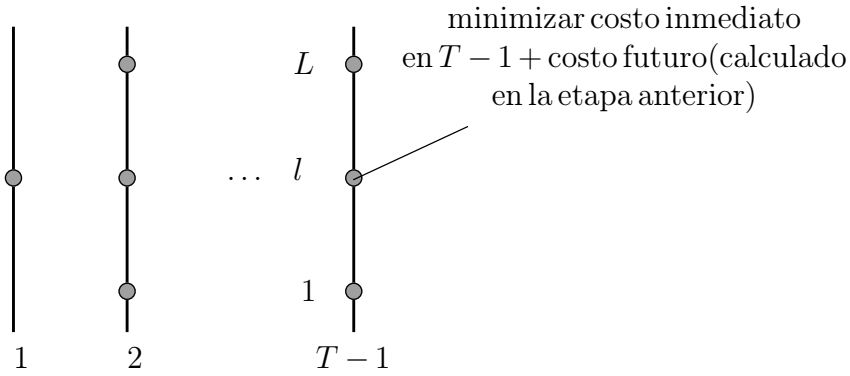


Figura 6.7. Cálculo de los costos instantaneos para la etapa $T - 1$ sumado con la función de costo futuro calculada en la etapa T .

5. Repetir el procedimiento del paso anterior para las demás etapas $T - 2, T - 3$, etc, hasta la primera etapa.

La formulación general para N térmicas y M hidroeléctricas es la siguiente :

Algoritmo 6.1

1. Inicializar la función de costo futuro en la última etapa $\alpha_{T+1}(v_{T+1})=0$, $t = T$
2. Para cada valor de almacenamiento $v_{t,l}$ con $l = 1, \dots, L$ resolver para cada valor de caudal $a_{t,k}$ con $k = 1, \dots, S$, el siguiente problema

$$\begin{aligned}
 \alpha_{t,k}(v_{t,l}) = \min \quad & z_t(u_t) + \alpha_{t+1}(v_{t+1}) \\
 \text{s.a} \quad & v_{t+1,j} - v_{t,l,j} = a_{t,k,j} + \sum_{m \in M_j} (u_{t,m} + s_{t,m}) - (u_{t,j} + s_{t,j}) \quad \forall j \\
 & 0 \leq v_{t+1,j} \leq \bar{v}_j \quad \forall j \\
 & 0 \leq u_{t,j} \leq \bar{u}_j \quad \forall j
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

y luego calcular el costo operativo asociado al valor $v_{t,l}$ considerando las probabilidades de cada escenario de caudal

$$\alpha_t(v_{t,l}) = \sum_{k=1}^S P(a_t = a_{t,k}) \alpha_{t,k}(v_{t,l})$$

3. Crear una función de costo futuro $\alpha_t(v_t)$ para la etapa anterior, interpolando los valores discretos $\{\alpha_t(v_{t,l}), l = 1, \dots, L\}$.
4. Hacer $t = t - 1$ y volver al paso 2. Parar cuando $t = 1$.

6.4.1.1 Solución del despacho hidrotérmico en una etapa

Presindiremos de los índices t que indican las etapas. Debido a que la función de costo futuro es una función lineal por partes con respecto al almacenamiento final, podemos expresarlo de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \alpha(v) = \min \quad & \alpha \\ \text{s.a} \quad & \alpha \geq \phi_i v + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, Q \\ & \alpha \geq 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

donde α es una variable escalar, ϕ_i es el coeficiente del i -ésimo término de la función de costo futuro, ε_i es el término independiente del i -ésimo segmento de la función de costo futuro y Q el número de segmentos de la función de costo futuro.

Sustituyendo (6.19) en

$$\begin{aligned} \min \quad & z(u) + \alpha(v) \\ \text{s.a} \quad & v = v_0 + a - u - s \\ & 0 \leq v \leq \bar{v}, 0 \leq u \leq \bar{u} \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \min \quad & z(u) + \alpha \\ \text{s.a} \quad & v = v_0 + a - u - s \\ & \alpha \geq \phi_i v + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, Q \\ & 0 \leq v \leq \bar{v}, \\ & \alpha \geq 0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Podemos observar que la ecuación de balance hídrico y función de costo futuro solamente implican las nuevas restricciones lineales, y expresando la función de costo inmediato como combinación convexa de sus puntos de quiebre obtenemos nuestro siguiente *problema maestro*

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^p z(u^j) + \gamma\sigma + \alpha \\ \text{s.a} \quad & v = v_0 + a - u - s \\ & \alpha \geq \phi_i v + \varepsilon_i \quad (\pi_i) \quad i = 1, \dots, Q \\ & 0 \leq v \leq \bar{v}, \quad (\zeta) \\ & \sum_{j=1}^p \lambda_j u^j - u - \sigma = 0, \quad (w) \\ & \sum_{j=1}^p \lambda_j = 1, \quad (\mu) \\ & \alpha \geq 0, \lambda_j \geq 0, \end{aligned} \quad (6.21)$$

done $\pi_i, \zeta, \omega, \mu$ son las variables duales asociadas al problema. El subproblema de Dantzig-Wolfe que determina el menor costo reducido es

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^{\mathcal{R}} p_k \sum_{j=1}^{\mathcal{Q}} q_j \left(\sum_{i=1}^N c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} + w h_{j,k} \right) - \mu \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^N g_{i,j,k} + h_{j,k} + \delta_{j,k} = d_j, \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq g_{i,j,k} \leq \bar{g}_{i,k} \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R} \\
 & 0 \leq h_{j,k} \leq \bar{h} \quad 1 \leq j \leq \mathcal{Q}, 1 \leq k \leq \mathcal{R}
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

que corresponde a un problema de despacho probabilístico donde la planta hidroeléctrica es un generador con costo implícito w y que puede ser resuelto mediante el método de Balériaux.

6.4.2 Recursión SDDP

Una desventaja de la recursión SDP es que para construir la aproximación de la función de costo futuro como mínimo debemos considerar los puntos extremos, que corresponden a los volúmenes 0% y 100% \bar{v} . Pues bien, cuando se trata de una hidroeléctrica esto no es un inconveniente, sin embargo cuando el sistema posee una gran cantidad de hidroeléctricas, digamos M , necesitamos como mínimo 2^M combinaciones de los estados lleno y vacío para cada hidroeléctrica.

Se comienza desde la ultima función de costo futuro para cierto escenario de caudal $a_{T,k}$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{T,k}(v_T) = \min \quad & z_T(u_T) \\
 \text{s.a.} \quad & v_{T+1} + u_T = a_{T,k} - s_T + v_T \quad (\pi_{h,T,k}) \\
 & 0 \leq u_T \leq \bar{u} \quad (\pi_{v,T,k}) \\
 & 0 \leq v_{T+1} \leq \bar{v} \quad (\pi_{u,T,k})
 \end{aligned}$$

donde $\pi_{h,T,k}$, $\pi_{v,T,k}$, $\pi_{u,T,k}$ son las variables duales asociadas a las ecuaciones de balance hídrico y restricciones de capacidad. Según la interpretación dual, una perturbación en el almacenamiento v_T genera un cambio en el valor objetivo, proporcional al valor de la variable dual $\pi_{h,T}$, es decir

$$\pi_{h,T,k} = \frac{\partial \alpha_{T,k}(v_T)}{\partial v_T} \tag{6.23}$$

Por lo tanto dado un estado inicial $v_{T,m}$, para cada escenario de afluencia se calcula el costo operativo esperado según el paso 2 de la recursión SDP. Según la ecuación (6.23), el hiperplano de soporte que pasa por $(v_{T,m}, \alpha_T(v_{T,m}))$ tiene como pendiente a

$$\Phi_{t,m} = \sum_{k=1}^S P(a_T = a_{T,k}) \pi_{h,T,k}$$

y la traslación $\varepsilon_{T,m}$ es calculado como sigue

$$\alpha_T(v_{T,m}) - \Phi_{T,m} v_{T,m} = \varepsilon_{T,m}$$

Esto se realiza para un pequeño conjunto de valores de volumen inicial $v_{T,m}$ con $m = 1, \dots, \mathcal{L}$. Y con esto, se construye una aproximación de la función $\alpha_T(v_T)$. La función de costo futuro para la etapa anterior, osea $T - 1$, para un escenario de caudal k es

$$\begin{aligned} \alpha_{T-1,k}(v_{T-1}) = \min \quad & z_{T-1}(u_{T-1}) + \alpha_T(v_T) \\ \text{s.a} \quad & v_T + u_{T-1} = a_{T-1,k} - s_{T-1} + v_{T-1} \\ & 0 \leq u_{T-1} \leq \bar{u} \\ & 0 \leq v_T \leq \bar{v} \end{aligned} \quad (6.24)$$

reemplazando $\alpha_T(v_T)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_{T-1,k}(v_{T-1}) = \min \quad & z_{T-1}(u_{T-1}) + \alpha_T \\ \text{s.a} \quad & v_T + u_{T-1} = a_{T-1,k} - s_{T-1} + v_{T-1} \quad (\pi_{h,T-1,k}) \\ & 0 \leq u_{T-1} \leq \bar{u} \\ & 0 \leq v_T \leq \bar{v} \\ & \alpha_T \geq \Phi_{T,m} v_T + \varepsilon_{T,m} \\ & \alpha_T \geq 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ m = 1, \dots, \mathcal{L} \end{matrix} \quad (6.25)$$

Se resuelve (6.25) nuevamente para un conjunto pequeño de valores $v_{T-1,m}$ con $m = 1, \dots, \mathcal{L}$ y se forma la función aproximada de costo futuro para la etapa $T - 1$, esta se reemplaza en la función de costo futuro $\alpha_{T-2}(v_{T-2})$ y se procede análogamente hasta la etapa $t = 1$. Se consigue así un valor aproximado de $\alpha_1(v_1)$, denotado por \tilde{z} .

Debido a que en cada etapa de la recursión se genera un subconjunto de los hiperplanos de soporte, entonces la función de costo aproximada es menor que la función de costo futura real, por lo tanto \tilde{z} es una cota inferior para el valor óptimo real z^* .

En resumen, el algoritmo de recursión SDDP es el siguiente

Algoritmo 6.2

1. Inicializar número de hiperplanos $Q = \mathcal{L}$. Inicializar la función de costo futuro para la última etapa ($t = T$)

$$\Phi_{T+1,q} = \varepsilon_{T+1,q} = 0, \quad \text{para } q = 1, \dots, Q$$

2. Para cada nivel de almacenamiento $v_{t,m}$ con $m = 1, \dots, \mathcal{L}$ resolver el siguiente problema para cada escenario de caudal $a_{t,k}$, es decir

$$\begin{aligned} \alpha_{t,k}(v_{t,m}) = \min \quad & z_t(u_t) + \alpha_{t+1} \\ \text{s.a} \quad & v_{t+1} = v_{t,m} - u_t - s_t + a_{t,k} \quad (\pi_{h,t,k}) \\ & 0 \leq v_{t+1} \leq \bar{v} \\ & 0 \leq u_t \leq \bar{u} \\ & \alpha_{t+1} \geq \Phi_{t+1,q} v_{t+1} + \varepsilon_{t+1,q}, \quad q = 1, \dots, Q \\ & \alpha_{t+1} \geq 0 \end{aligned}$$

3. Calcular los coeficientes del hiperplano de soporte correspondientes a $v_{t,m}$

$$\begin{aligned} \Phi_{t,m} &= \sum_{k=1}^S P(a_t = a_{t,k}) \pi_{h,t,k} \\ \varepsilon_{t,m} &= \alpha_t(v_{t,m}) - \Phi_{t,m} v_{t,m} \end{aligned}$$

4. Hacer $t = t - 1$ y volver al paso 2. Parar cuando hemos llegado a $t = 1$.

6.4.2.1 Cálculo de una cota superior

El cálculo de una cota superior se basa en el hecho de que el costo esperado resultante de la simulación operativa del sistema para cualquier función de costo futuro no puede ser inferior al valor óptimo. La simulación procede de la siguiente manera :

Se define un conjunto de escenario de caudales $a_t = \{a_t^1, \dots, a_t^{\mathcal{L}}\}$ para cada etapa $t = 1, \dots, T$. Se simula para cada escenario $a_t = a_t^1, \dots, a_t^{\mathcal{L}}$.

Inicializar el almacenamiento de la primera etapa por v_1 para todo m .

Para cada $t = 1, \dots, T$, se resuelva el problema de despacho para el almacenamiento inicial v_t^m y caudal a_t^m

$$\begin{aligned} w_t^m = \min \quad & z_t(u_t) + \alpha_{t+1} \\ \text{s.a} \quad & v_{t+1}^m = v_t^m - s_t^m - u_t^m + a_t^m \\ & v_{t+1}^m \leq \bar{v} \\ & u_t^m \leq \bar{u} \\ & \alpha_{t+1} \geq \Phi_{t+1,q} v_{t+1}^m + \varepsilon_{t+1,q} \quad q = 1, \dots, Q \end{aligned}$$

Calcular el costo operativo total z^m para el escenario m como la suma de todos los costos inmediatos a lo largo del periodo de estudio

$$z^m = \sum_{t=1}^T z_t(u_t)$$

La media de estos escenarios es entonces

$$\hat{z} = \frac{1}{\mathcal{L}} \sum_{m=1}^{\mathcal{L}} z^m$$

y la desviación estandard se calcula como

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^{\mathcal{L}} (z^m - \hat{z})^2}$$

Luego se define el intervalo de confianza al 95%

$$[\hat{z} - 1.96\sigma, \hat{z} + 1.96\sigma]$$

6.4.2.2 Criterio de parada

Si el límite inferior está en el intervalo de confianza, entonces PARAR, sino proceder con una nueva iteración de la recursión SDDP para buscar una mejor aproximación.

6.4.2.3 Nueva iteración

Si el límite inferior está fuera del intervalo de confianza, la recursión SDDP se ejecuta de nuevo, a partir de un conjunto adicional de valores de almacenamiento. Estos valores adicionales son los volúmenes $\{v_t^m\}$ producidos por la simulación.

Capítulo 7

Conclusiones

1. El problema de despacho de energía puede ser caracterizado como un problema de optimización a gran escala debido al carácter estocástico de la demanda, falla en los equipamientos e incertidumbre en las afluencias.
2. La solución del problema del despacho hidrotérmico mediante el esquema de Balériaux presenta una ventaja computacional sobre el algoritmo de enumeración de escenarios. Sin embargo, este esquema puede ser mejorado si los problema de confiabilidad pueden ser resueltos de manera más eficiente. Esto es logrado utilizando técnicas novedosas para calcular la distribución de la resta de dos variables aleatorias.
3. La solución del problema de despacho hidrotérmico mediante el algoritmo de Dantzig-Wolfe implementando el algoritmo de Baleriaux en el subproblema nos permite ver que la hidroeléctrica es utilizada tanto en eventos de demanda alta como en eventos donde sustancialmente hay más falla de los equipamientos térmicos.
4. Metodologías de descomposición que aprovechan la estructura de restricciones del problema tienen una gran ventaja computacional con respecto a los algoritmos tradicionales. En el caso del problema de despacho hidrotérmico de una etapa, dicha descomposición se logró gracias a que la función de costo inmediato es lineal por partes con respecto a la generación hídrica, mientras que en el problema de despacho hidrotérmico multietapa, la función de costo futuro es lineal por partes con respecto al volumen final.

Referencias

- [1] M.V.F. Pereira, L.M.V.G. Pinto, *Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning*.
- [2] J.P. Stremel, *A historical perspective on production costing models*, EPRI Monographs on Simulation of Electrical Power Production, 1991.
- [3] H. Baleriaux, E. Jamouille, F. Guertechim, *Simulation de l'exploitation d'un parc de machines thermiques de production d'électricité couplé à des stations de pompage*, Revue E, Vol. 5, No 7
- [4] P. Nordlun, D. Sjelvgren, M.V.F. Pereira, J. Bubenko, *Generation expansion in system with a high share of hydropower*, IEEE Power Engineering Society, Winter Meeting, 1984.
- [5] N.M. Campodonico, *Representación analítica de fallas de los equipamientos y variación de la demanda en el despacho hidrotérmico multietapa*.
- [6] PSR, *SDDP Manual de Metodología Versión 15.0*, Marzo 2018.
- [7] C.N. Metello, *Analytical representation of immediate cost functions in SDDP*, Rio de Janeiro, 2016.
- [8] M. Bazaraa, *Linear Programming and Network Flows*, Fourth Edition, Wiley.
- [9] J.P. Crouzeix, A. Keraghel, W. Sosa, *Programación matemática diferenciable*, Universidad Nacional de Ingeniería, 2011.
- [10] D. Bertsimas, J.N. Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization*.
- [11] G. Sierksma, *Linear and integer optimization*, Third Edition, CRC Press.
- [12] M.V.F. Pereira, P. Leontina, *Stochastic optimization of a multireservoir hydroelectric system : A decomposition approach*, CEPEL, 1985.

Implementación de Algoritmos

Librerías a utilizar

```
[120]: import numpy as np
from scipy.optimize import linprog
from itertools import product
from time import time
import matplotlib.pyplot as plt
import random
import collections
%matplotlib inline
```

Datos del problema

```
[105]: # Datos de las plantas térmicas : capacida/prob. éxito/costo
G=[[28.40,62,68.80,13.40,12.80,9.10,9.40,65.40],
   [0.57,0.94,0.87,0.83,0.86,0.66,0.75,0.25],
   [10.10,12.92,16.71,18.68,18.68,23.69,23.69,25.89]]

#Datos de la demanda : escalon /duracion
D=[[739,629,555],
   [0.3,0.39,0.31]]

#Datos de las hidroeléctricas
H=[[450,195,150,25,44],
   [ 1,  1,  1,  1,  1],
   [ 0,  0,  0,  0,  0]]

#costo de penalidad por no suplir la demanda
c_d=307

#limites energéticos
l_energetico=[292,142,38,19,26]

#costos futuros
c_f=[10,10,10,10,10]
```

Algoritmo de Enumeración de Escenarios

```

[106]: def lista(M):
        return list(product([0,1], repeat=len(M[0])))

def prod_vec(a,b):
    return [a[i]*b[i] for i in range(len(b))]

def esc(M,j):
    return [(0,prod_vec(M[0],lista(M)[j])[i]) for i in range(len(M[0]))]

def prob_esc(M,j):
    p=prod_vec(M[1],lista(M)[j])
    for item in range(len(p)):
        if p[item]==0:
            p[item]=1-M[1][item]
    return np.prod(p)

def Enum_escenarios(M):
    costo=0
    for j in range(0,2**len(M[0])):
        for k in range(len(D[0])):
            opt=linprog(c=[(M[2][i]-c_d)*D[1][k] for i in
↪range(len(M[0]))],A_ub=[np.
↪ones(len(M[0]))],b_ub=D[0][k],bounds=esc(M,j),method="revised simplex")
            costo=costo+prob_esc(M,j)*(D[1][k]*D[0][k]*c_d+opt.fun)
    return costo

```

Algoritmo de Baleriaux

```

[107]: def conv_max(M,v,k):
        conv=np.array([v[i]-M[0][k],0][j] for i in range(len(v)) for j in (0,1)])
        conv[conv<=0]=0
        return conv

def prob_conv(M,v,k):
        prob=np.array([v[i]*M[1][k],1-M[1][k]][j] for i in range(len(v)) for j in
↪(0,1)])
        return prob

def Baleriaux(M):
    Ew=[np.dot(D[0],D[1])] # vector de energías no suplidas luego de adicionar
↪la térmica i
    Eg=[] # vector de energía producida por la térmica i
    v1=D[0]
    v2=D[1]
    for i in range(len(M[0])):
        Ew.append(round(np.dot(conv_max(M,v1,i),prob_conv(M,v2,i)), 2))
        v1=conv_max(M,v1,i)

```

```

v2=prob_conv(M,v2,i)
Eg.append(round((Ew[i]-Ew[i+1]),2))

ENS=Ew[0]-sum(Eg)          # Energía no suplida
return (np.dot(M[2],Eg)+ENS*c_d,Eg)

```

Algoritmo de Dantzig-Wolfe para múltiples hidroeléctricas

```

[108]: #Penalidad para los problemas maestros
gam=[3000 for i in range(len(H[0]))]

I=np.multiply(np.identity(len(H[0])), -1)

#datos completos del problema
GH=np.concatenate((H,G),axis=1)
convex=[(0,None) for i in range(len(H[0]))]
GHcopy=np.concatenate((H,G),axis=1)
beq=[1]
def primal(v1,v2,v4):
    res=linprog(v1,v2,l_energetico,v4,beq,bounds=[(0,None) for i in
    range(len(v1))],method="revised simplex")
    return res.x[0:(len(v4)-len(H[0])-1)]

def dual(v1,v2,v4):
    dual=linprog(np.concatenate((l_energetico,[-1])),axis=0),np.
    concatenate((np.transpose(np.negative(v2)),np.transpose(v4)),axis=1), np.
    transpose(v1), bounds=convex.append((-float("inf"),float("inf"))),
    method="revised simplex")
    return dual.x

def borrar(Matrix):
    aux=[]
    for j in range(len(Matrix[2])):
        if Matrix[2][j]<c_d:
            aux.append(np.transpose(Matrix)[j])
    return np.transpose(aux)

def cost(x):
    return np.concatenate((x,gam),axis=0)
def Acost(Arr):
    return np.concatenate((Arr,I),axis=1)
def Aeqcost(Arr):
    return np.concatenate((Arr,[np.zeros(len(H[0]))]),axis=1)

vgap=[]
vit=[]
vzeta=[]

```



```

ve=[]

def DantzigWolfe(Ma):
    orden=[i for i in range(len(H[0]))]
    menos=[-1 for i in range(len(G[0]))]
    auxi=np.concatenate((orden,menos),axis=0)
    c=[Baleriaux(GH)[0]]
    A=[[Baleriaux(GH)[1][i]] for i in range(len(H[0]))]
    Aeq=[[1]]
    beq=[1]
    z=-1
    mu=1
    e=np.zeros(len(H[0]))
    y=[]
    gap=-1
    it=0
    while gap<0 :
        lam=primal(cost(c),Acost(A),Aeqcost(Aeq))
        mu=dual(cost(c),Acost(A),Aeqcost(Aeq))[len(H[0])]
        y=dual(cost(c),Acost(A),Aeqcost(Aeq))[0:len(H[0])]

        for j in range(len(H[0])):
            GH[2][j]=dual(cost(c),Acost(A),Aeqcost(Aeq))[j]
        M_sub=GH.T[GH.T[:, 2].argsort()].T
        Aux=borrar(M_sub)
        GHaux=np.concatenate((GH,[auxi]),axis=0)
        M_subaux=GHaux.T[GHaux.T[:,2].argsort()].T

        for i in range(len(H[0])):
            if i in borrar(M_subaux)[3] :
                e[i]=Baleriaux(borrar(M_sub))[1][(borrar(M_subaux)[3].tolist())
→index(i)]
            vector=[[e[i]] for i in range(len(e))]
            ve.append(e)
            for i in borrar(M_subaux)[3]:
                if i in range(len(H[0])):
                    Aux[2][(borrar(M_subaux)[3].tolist()).index(i)]=0

            z=Baleriaux(Aux)[0]
            vzeta.append(z)
            gap=z-mu+np.dot(y,e)
            vgap.append(gap)
            c.append(z)
            A=np.concatenate((A,vector),axis=1)
            Aeq[0].append(1)
            it=it+1

#         print("iteracion",it)

```

```

#         print("menor costo reducido", gap)
#         print("energía de las hidroeléctricas",e)
#         print("costo medio",z)
#         print("coeficientes",lam)
#         print("-----")
        e=np.zeros(len(H[0]))
        return z
tin=time()
DantzigWolfe(GH)
tf=time()
print("Tiempo de ejecución",tf-tin)

```

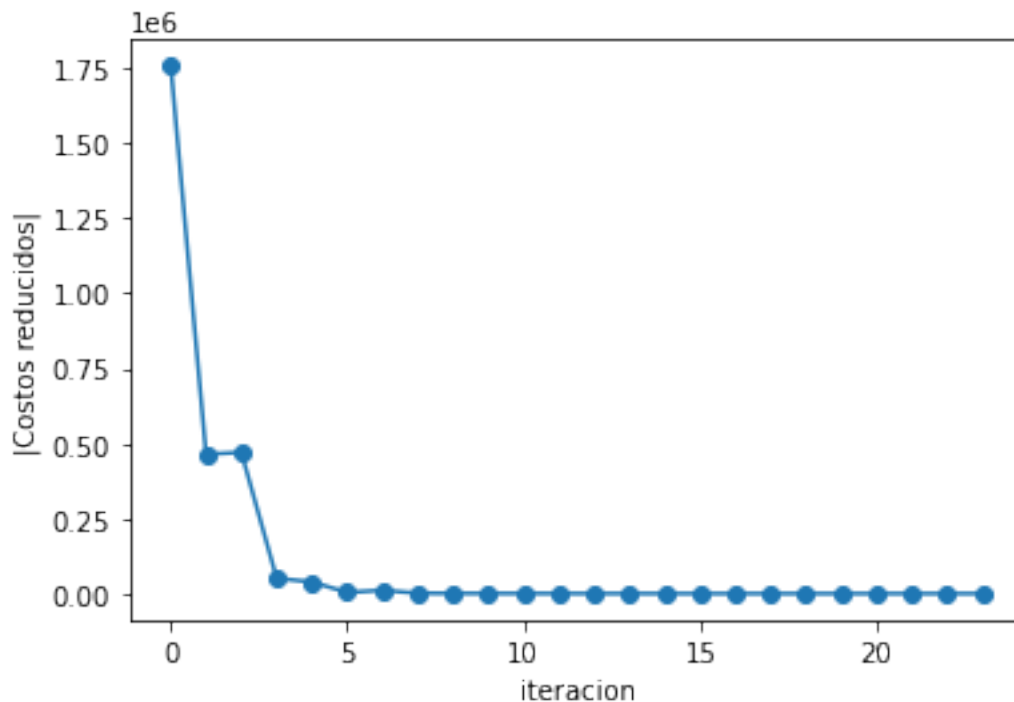
Tiempo de ejecución 27.954019784927368

Gráfica de costos reducidos por iteración

```

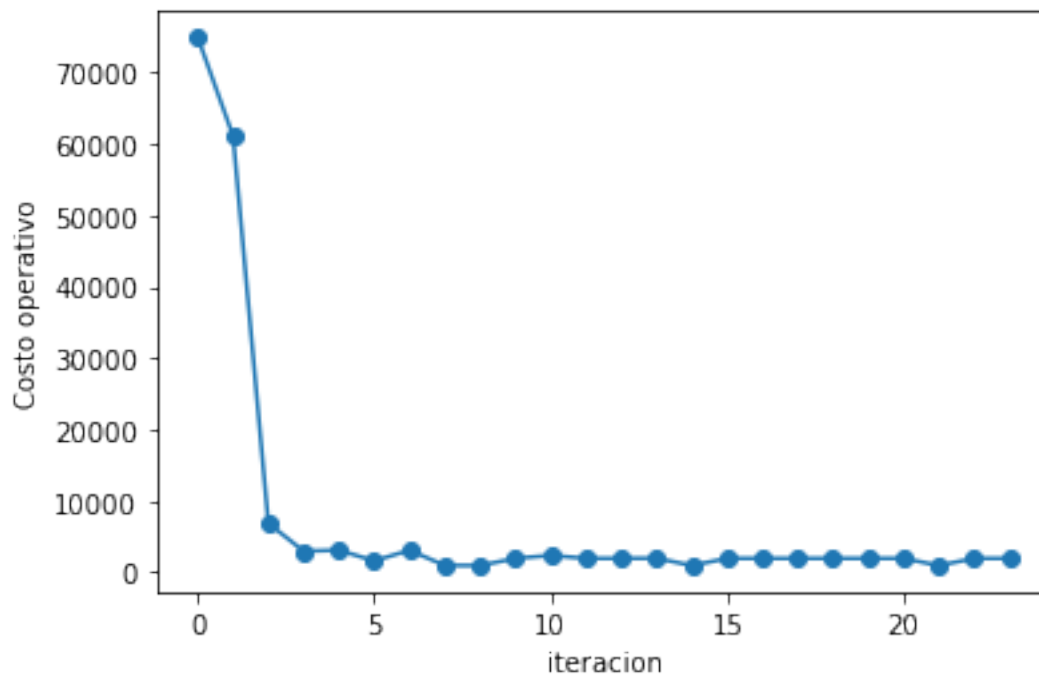
[109]: iteracion=[i for i in range(len(vgap))]
plt.scatter(iteracion,np.multiply(vgap,-1))
plt.plot(iteracion,np.multiply(vgap,-1))
plt.xlabel("iteracion")
plt.ylabel("|Costos reducidos|")
plt.show()

```



Gráfica de costo operativo por iteración

```
[110]: iteracion=[i for i in range(len(vzeta))]
plt.scatter(iteracion,vzeta)
plt.plot(iteracion,vzeta)
plt.xlabel("iteracion")
plt.ylabel("Costo operativo")
plt.show()
```



Algoritmo tradicional-1 hidroeléctrica

```
[118]: G=[[500,200],
          [0.8,0.9],
          [ 5, 10]]
H=[[300],
   [ 1],
   [ 0]]
D=[[600,400],
   [0.5,0.5]]
GH=np.concatenate((H,G),axis=1)
#hidroeléctrica en la primera posición
x=[Baleriaux(GH)[1][0]]
y=[Baleriaux(GH)[0]]

def A_Tradicional(z):
    #Baleriaux con hidroeléctrica en distintas posiciones
    for i in range(len(GH[0])-1):
```

```

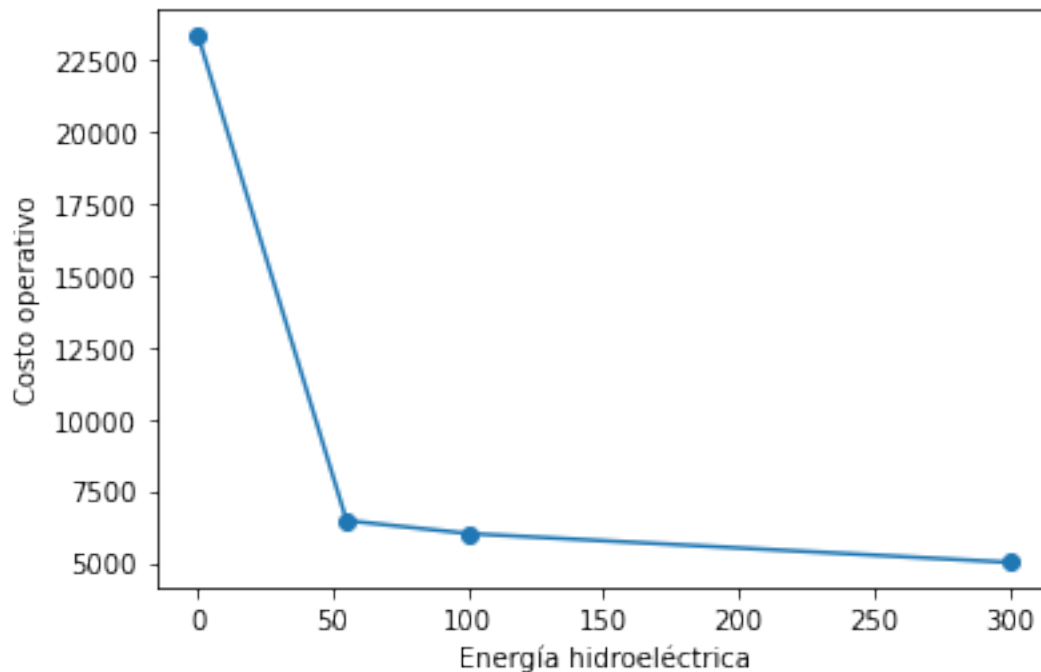
        GH[:,[i,i+1]]=GH[:,[i+1,i]]
        y.append(Balerialaux(GH)[0])
        x.append(Balerialaux(GH)[1][i+1])

        #Cuando la hidroeléctrica no actua
        y.append(Balerialaux(G)[0])
        x.append(0)

        for i in range(len(x)):      #Cálculo de la energía media segun el embalse z
            if x[i+1]<z and z<x[i]:
                return (y[i]-y[i+1])/(x[i]-x[i+1])*(z-x[i])+y[i]

A_Tradicional(200)
plt.scatter(x,y)
plt.plot(x,y)
plt.xlabel("Energía hidroeléctrica")
plt.ylabel("Costo operativo")
plt.show()

```



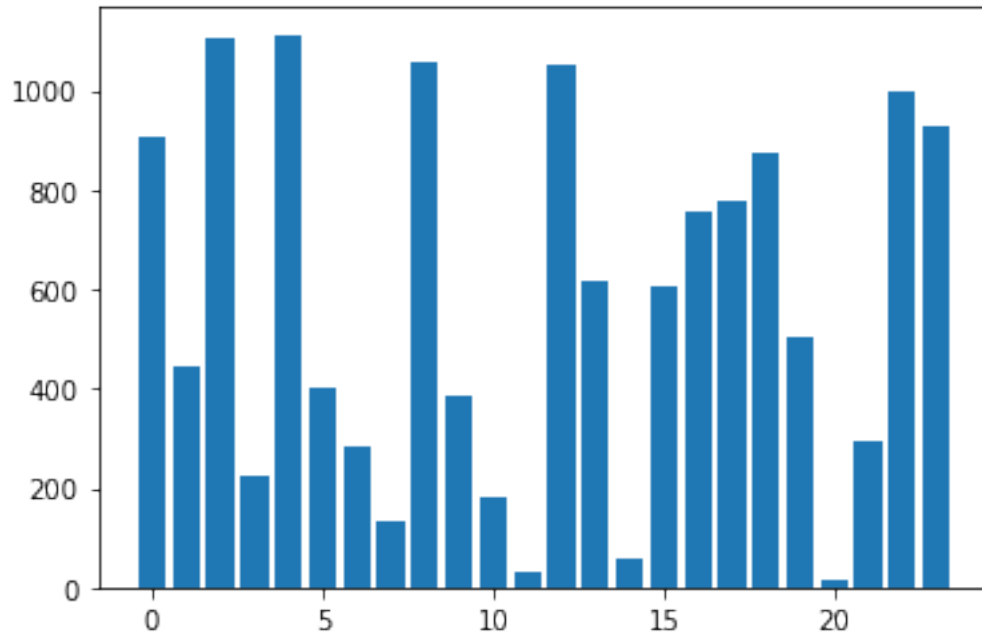
Demanda cronológica y como conseguir su distribución

```

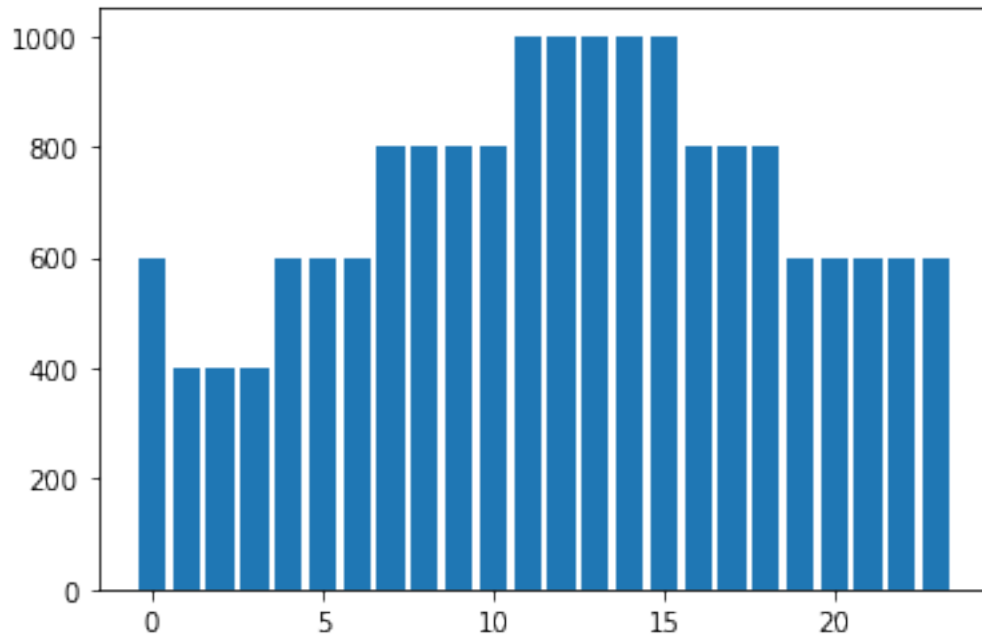
[122]: from matplotlib import pyplot
        demanda=list(range(0,24))
        horas=list(range(0,24))

```

```
#llenando la lista de demandas con valores aleatorios entre 0 y 1200
for i in range(0,24):
    demanda[i]=random.randrange(1,1200,1)
#gráfico de barras de la demanda por orden cronológico
pyplot.bar(horas,height=demanda,width=0.8)
pyplot.show()
```



```
[123]: #creando lista para las horas y valores de la demanda
horas=list(range(0,24))
demanda=[600,400,400,400,600,600,600,800,800,800,800,1000,1000,1000,1000,1000,800,800,800,800,800,800,800,800]
#gráfico de barras de la demanda por orden cronológico
pyplot.bar(horas,height=demanda,width=0.8)
pyplot.show()
```



```
[124]: #formando la curva de duración de demanda, orden descendente
cdemanda=np.sort(demanda[::-1])
print(cdemanda)
#gráfica de la curva de demanda
pyplot.bar(horas,height=cdemanda,width=0.8)
pyplot.show()

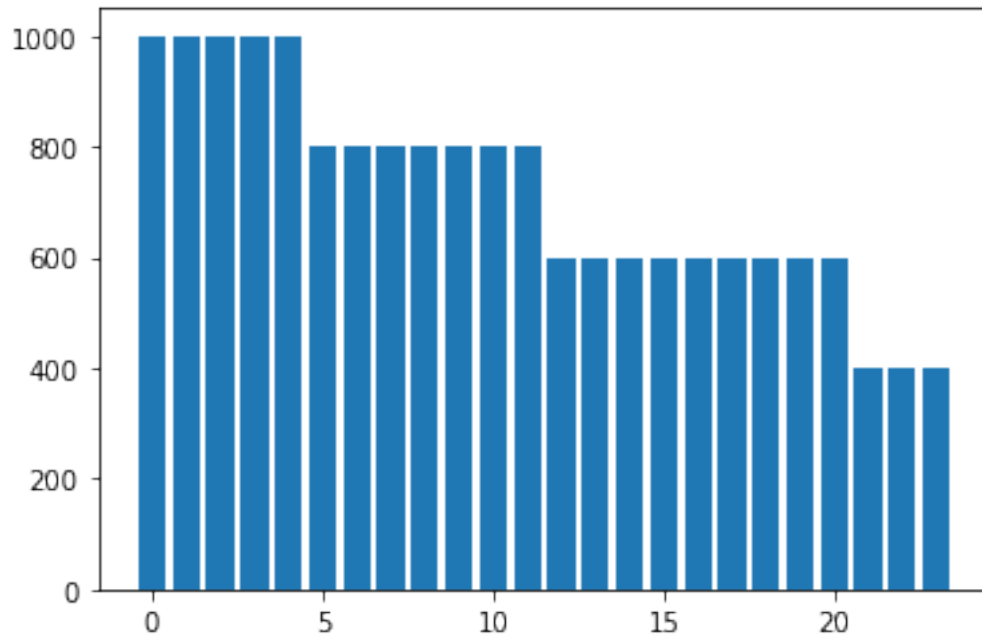
#Eliminar valores repetidos de cdemanda y ordena los valores en forma ascendente
result=[]
for item in cdemanda:
    if item not in result:
        result.append(item)
patamar=np.sort(result)

J=len(patamar)
#creando una lista con la duración porcentual de cada patamar
dporcentual=[]
for item in patamar:
    dporcentual.append(np.count_nonzero(cdemanda==item)/24)
print(dporcentual)

#gráfica de la distribución para cada patamar
pyplot.bar(patamar,height=dporcentual,width=20)
pyplot.show()
```

```
#creando una lista con las frecuencias absolutas de las demandas
fabs=np.cumsum(dporcentual)
pyplot.bar(patamar,height=fabs,width=80)
pyplot.show()
```

```
[1000 1000 1000 1000 1000 800 800 800 800 800 800 800 600 600
 600 600 600 600 400 400 400]
```



```
[0.125, 0.375, 0.2916666666666667, 0.20833333333333334]
```

