MARTINGALAS Y UNA APLICACIÓN : LA RUINA DEL JUGADOR

Juan V. Fuentes, Mirian G. Aparicio, David M. Morán

FERIA DE EXPERIMENTOS Y CONCURSO DE PROYECTOS 2018 - 2

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

`jvaldiviaf, dmorantem, mgeronimoa,(@uni.pe)`

Resumen

En teoría de probabilidades, los procesos estocásticos sirven para usar magnitudes aleatorias que varían con el tiempo o para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo. Tambien estudiamos los teoremas y desigualdades en la cual intervienen las martingalas, una vez entendido eso trataremos problemas y aplicaciones interesantes que se presentan con mayor frecuencia en la vida cotidiana, dándoles una solución y integrandole a ello el uso del lenguaje R.

1. Introducción

Martingalas

Una definición básica de una martingala de tiempo discreto es un proceso estocástico de tiempo discreto (es decir, una secuencia de variables aleatorias)X_1, X_2, X_3, ... que satisface para cualquier momento n:

- $\mathbb{E}\left(|X_n|\right) < \infty$
- $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_1,\ldots,X_n)=X_n$

Es decir, el valor esperado condicional de la siguiente observación, dadas todas las observaciones anteriores, es igual a la observación más reciente.

La ruina del jugador

Dicho problema consiste en calcular la probabilidad de que un jugador arruine al contrario en un juego a un número indeterminado de partidas, cuando los dos jugadores inician el juego con un cierto número de monedas cada uno.

2. Objetivos

Mediante diferentes maneras de plantear la estrategia de la Martingala,buscar, el juego que mejor se adapte a las necesidades del jugador, en este caso tenemos dos opciones o bien ampliar la duración del juego o aumentar la probabilidad de ganancia.

3. Metodologia

Comenzaremos planteandonos lo siguiente :
Una persona con un capital "X"pero siempre finito, que se enfrenta a un contrincante con capital infinito como en el caso de un casino.

Elegimos juego de la ruleta francesa,que tiene que 37 casillas numeradas, con tan solo una casilla de valor 0, quedando 18 casillas negras y 18 casillas rojas de manera que la probabilidad de ganar es $p = \frac{18}{37} = 0{,}486$.

Apostamos n veces, empezando por S/.1 y aplicando la estrategia de martingala,la cual consiste en ir doblando la apuesta cuando perdamos hasta que ganemos.

Se procede de la siguiente manera:

- Apostamos S/.1 a negro . En caso de ganar, repetimos el mismo paso, si se pierde , iremos al siguiente paso
- Apostamos S/.2 a negro, doblando la apuesta anterior, si ganamos, volvemos al paso 1, y si perdemos seguimos
- Apostamos S/.4 a negro, doblando la cantidad de dinero, si ganamos , volvemos al paso 1 , si perdemos seguiremos doblando la apuesta

Vayamos ahora con un ejemplo simple de la estrategia martingala aplicada en la ruleta de un casino, apostando a rojo-negro, presentamos las condiciones iniciales del ejemplo a continuación:

- Las probabilidades de ganar en este juego es p = 0.4864
- La probabilidad de perder en este juego es q = 0,5135.
- El capital inicial del jugador será de S/.100 y nuestro dinero objetivo será de S/.110 .

Se pueden dar dos situaciones, que logremos el objetivo o que nuestro capital se reduzca a 0, situación de ruina del jugador. Mediante la fórmula comentada con anterioridad y teniendo en cuenta que $q \neq p$, obtenemos el siguiente resultado: Supongamos que entramos en el casino con una cantidad de S/.100, y con un objetivo marcado de conseguir S/.110 Se pueden dar dos situaciones, que logremos el objetivo o que nuestro capital se reduzca a 0, situación de ruina del jugador.

$$q_{100} = \frac{(\frac{q}{p})^{100} - (\frac{q}{p})^{110}}{1 - (\frac{q}{p})^{110}} \tag{1}$$

Con una probabilidad $p = 0{,}486$ y $q = 0{,}513$, obtenemos una probabilidad de ruina del 41, 87%.
El tiempo de parada para este juego sería cuando el jugador alcance el dinero objetivo o se quede en bancarrota.
El resultado que se tomó como referencia del articulo base [5] que sigue la estrategia de la martingala apostando S/.1 .
Un codigo en R nos ayudaraa simular una partida, lo cual nos servirá para encontrar la situación más favorable en el problema.

Desarrollo y Resultado de la Ruina del jugador

```
  partidas resultado ganadas perdidas
1       19       110      11        9
2       21       110      11       11
3       20       110      11       10
4       20       110      11       10
5       15       110      11        5
6       14       110      11        4
[1] 22.631
[1] 182
    partidas        resultado        ganadas         perdidas
 Min.   :  8.00   Min.   :  0.0   Min.   : 1.00   Min.   : 1.0
 1st Qu.: 17.00   1st Qu.:110.0   1st Qu.:11.00   1st Qu.: 8.0
 Median : 19.00   Median :110.0   Median :11.00   Median :10.0
 Mean   : 22.63   Mean   :100.9   Mean   :12.13   Mean   :11.5
 3rd Qu.: 22.00   3rd Qu.:110.0   3rd Qu.:11.00   3rd Qu.:13.0
 Max.   :182.00   Max.   :110.0   Max.   :89.00   Max.   :95.0
```

Figura 1: *Tabla de valores de la muestra experimental*

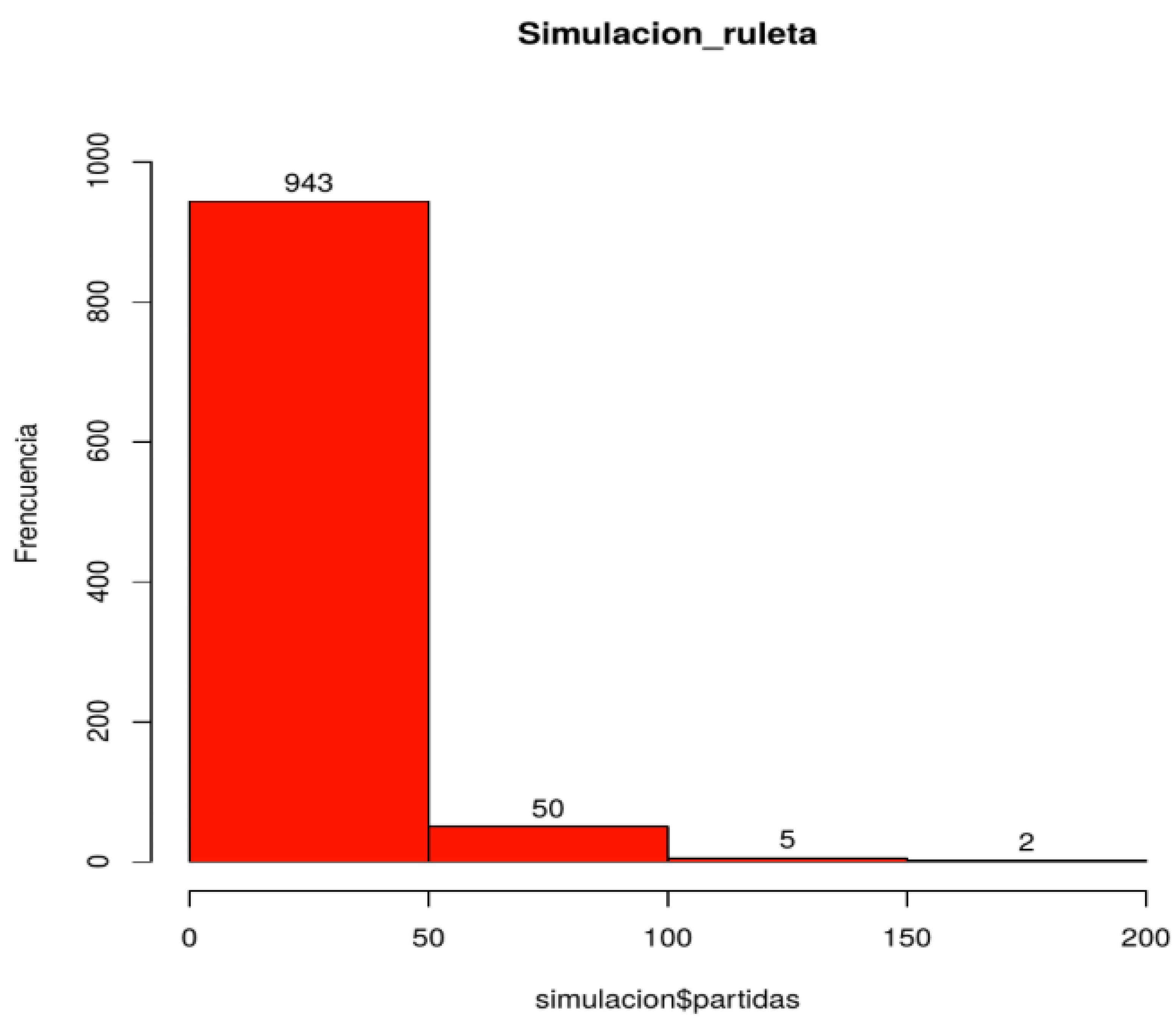

Figura 2: *Histograma que muestra la frecuencia con la cual se llega al tiempo de parada en cierta candtidad de partidas*

4. Conclusiones

- Modificar la probabilidad del juego no es una opción, por eso, ante un juego desfavorable la mejor opción siempre es apostar lo máximo y en el menor número de apuestas posibles, es decir jugar ofensivamente. Siempre teniendo presente que la esperanza de ganar será negativa o 0, ya que las probabilidades de ganar son iguales o inferiores a las de perder, nunca superiores(Dadas por el casino).
- En un juego en el que el jugador tiene más probabilidad de perder (desfavorable) es muy difícil no caer en ruina, al menos que apostemos la cantidad máxima permitida por el casino. Sim embargo, el método Martingala nos da una probabilidad de ruina mucho más baja haciendo que este método convierta al juego en "justo" para los jugadores.

Referencias

[1] M. Loeve, Probability theory II (Book graduate texts in Mathematics), Ed. Iberica: Springer-Verlag © 1978

[2] Williams, David (1991). Probability with Martingales. Cambridge University Press. ISBN 0-521-40605-6.

[3] H. Poor, An Introduction to Signal Detection and Estimation. New York: Springer-Verlag, 1985, ch. 4. Chicago, IL.

[4] Giraldo. G. Norman. Procesos Estocásticos.Universidad Nacional de Colombia. Medellín. 2006.

[5] Marc Martínez, Xavier Bardina. Cadenas de Markov: Estudio sobre el problema de la ruina del jugador. Universidad autónoma de Barcelona. España. 2017.