Universitat autònoma de Barcelona

Trabajo de final de grado

Cadenas de Markov: Estudio sobre el problema de la ruina del jugador

Autor:
Marc Martínez
NIU: 1316247

Tutor:
Xavier Bardina

27 de Enero de 2017

Resumen

En este estudio se introduce la teoría de las Cadenas de Markov, aplicando como ejemplo práctico de la misma el caso particular de la ruina del jugador. Utilizando además el método de apuesta conocido como La Martingala aplicado en el juego de la ruleta francesa para estudiar como afecta y que resultado se obtiene en el problema de la ruina del jugador.

Contexto: El sector del juego crece anualmente, entender y analizar los procesos que se generan detrás de las diferentes variantes de juego o de formas de apostar es importante tanto para el sector como para los jugadores.

Objectivos: Encontrar mediante diferentes maneras de plantear la estrategia de la Martingala, el juego que mejor se adapte a las necesidades del jugador, en este caso tenemos dos opciones o bien ampliar la duración del juego o aumentar la probabilidad de ganancia.

Métodos: Mediante cálculo de probabilidades y los procesos de simulación con código R, que nos servirán para encontrar la situación más favorable en el problema.

Resultados: Es evidente que no tenemos la opción de modificar las probabilidades del juego, de manera que ante un juego desfavorable la mejor opción siempre es jugar de la manera mas ofensiva posible, es decir, siempre apuesta máxima y en el menor número de apuestas posibles. Siempre teniendo presente que la esperanza de ganar será negativa o 0, ya que las probabilidades de ganar son iguales o inferiores a las de perder, nunca superiores.

Conclusiones: Los resultados obtenidos van en concordancia con los estudios realizados hasta el momento, mediante una función implementada en el software R conseguimos simular los datos comentados durante el trabajo, y contrastar los resultados con los obtenidos en diferentes estudios anteriores.

Palabras clave: Martingala, ruina, jugador y casino.

Abstract

This study introduce the theory of Markov chains, applying as a practical example of this theory, the particular case of Gambler's ruin. Using in addition the betting method of Martingale applying in the game of european roulette to study how affects and which result we get in the problem of Gambler's ruin.

Context: The sector of game increase annually, then understand and analyze the processes that are generated behind the different variants of game or variants of betting methods in the same game, this is important for the players and for the professionals in the sector.

Objectives: Find with differen ways to introduce the martingale strategy in the games, and choose the best variant of this strategy in each moment, in this situation we have two options or ways to proceed, lengthen the game or increase the probability of win.

Methods: Through the computation of probabilities and the simulation of processes using R code, that will help us find the most favorable situation for the problem.

Results: Obviously we do not have the power of modifying the probabilities of the games, therefore when facing an unfavorable game the best choice is playing the most offensive play, thus, always playing at the highest bet and using the lowest number of rounds possible. However, we should always keep in mind that the expectation of winning is negative or equal to 0 because the probability of winning is always lower or equal to the probability of winning, never higher.

Conclusions: The obtained results are on the same lines as the research done up to the moment, through the implementation of a function ran on R we were able to simulate the data that has been analyzed throughout the paper and compare the results with the conclusion of previous hesitations.

Key words: Martingale, player, ruin, casino, gambler ruin, Markov chains

Resum

En aquest estudi s'introdueix la teoria de les Cadenes de Markov, aplicant com exemple pràctic de la mateixa el cas particular de la ruïna del jugador. Utilitzant a mes el mètode d'aposta conegut com La Martingala aplicat en el joc de la ruleta francesa per estudiar com afecta i quin resultat obtenim al problema de la ruïna del jugador.

Context: El context del sector del joc creix anualment, entendre i analitzar els processos que es generen darrera de les diferents variants del joc o de formes d'apostar és important tant per al sector com per als jugadors.

Objectius: Trobar mitjançant diferents maneres de plantejar l'estratègia de la Martingala, el joc que millor s'adapti a les necessitats del jugador, en aquest cas tenim dos opcions o bé ampliar la duració del joc o augmentar la probabilitat dels guanys.

Mètodes: Mitjançant el càlcul de probabilitats i els processos de simulació amb codi R ens serveixen per trobar la situació mes favorable al problema.

Resultats: Evidentment no tenim mai l'opció de modificar les probabilitats del joc, per tant, ens trobem davant d'un joc desfavorable on la millor opció per afrontar un joc d'aquestes característiques es sempre jugar de la forma més ofensiva posible, sempre apostant a la máxima quantitat que se'ns permeti per finalitzar amb el menor número d'apostes posibles. Hem de tindre sempre present que l'esperança de guanys serà sempre negativa o 0, ja que les probabilitats de guanyar són iguals o inferiors a les de perdre, mai superiors.

Conclusions: Els resultats obtinguts van en la mateixa línia dels estudis realitzats fins al moment, mitjançant una funció implementada al software R obtenim la simulació de les dades comentades durant el treball, i poder contrastar els resultats amb els obtinguts en diferents estudis previs.

Paraules clau:Martingala, jugador, casino, ruina, cadenes de Markov

Agradecimientos

Agradecer al tutor del trabajo Xavier Bardina por su ayuda y paciencia para poder realizar este trabajo.

Índice

1. Introducción

2. Cadenas de Markov

Andrei Markov (matemático ruso) realizó trabajos donde trató ciertos procesos donde están involucradas componentes aleatorias, los cuales derivan en lo que hoy conocemos como Cadenas de Markov.
Las cadenas de Markov se consideran una herramienta esencial en áreas como la economía, la ingeniería, la investigación perativa o muchas otras, entre ellas los juegos de apuestas, de la cual trataremos la forma de analizar el modelo de juego de apuestas contra un casino.
En este trabajo donde se habla sobre los juegos de azar, que son uno de los temas y prácticas que más interés causa hoy en día en la población, con el factor de riesgo que implica poner en juego la fortuna mediante apuestas. Algunas de las preguntas más habituales que se hacen los jugadores son:

- Cúal es la probabilidad de ruina?
- Cuanto se espera ganar o cúal es la esperanza de ganancias?
- Cuanto tiempo tendremos que esperar hasta ganar?

Todas estas preguntas estudiadas en profundidad des de la perspectiva de la probabilidad, también estan relacionadas con la teoría de las cadenas de Markov. Una cadena de Markov se encarga de modular fenómenos aleatorios, observados de forma o tiempo discretos, en instantes de tiempo t=0,1,... Una cadena de Markov es una sucesión de variables aleatorias en un espacio de probabilidad común, con la propiedad asociada de que dado el presente, los estados pasados no tienen influencia en el futuro, en nuestro caso, si modificara el valor de la apuesta en caso de derrota, doblamos la apuesta y en caso de victoria, mantenemos la misma apuesta. Una cadena de Markov se compone de estados que conviene dividir en clases de estados según se comporten estos, uniendo aquellos que tengan un comportamiento similar. Si dados dos estados i y j, podemos llegar hasta j a partir de i, lo escribiremos como:

$$i \to j$$

Dados dos estados i,j $\in E$ diremos que i y j se comunican si $i \to j$ y $j \to i$ y lo indicaremos como:

$$i \longleftrightarrow j.$$

La relación y la comunicación entre clases es una relación de equivalencia. Ciertamente, como comprobamos:

- Tiene la propiedad reflexiva porque $i \longleftrightarrow i$ para todo i $\in E$.
- Tiene la propiedad simétrica ya que dados i, $j \in E$ si $i \longleftrightarrow j$ también $j \longleftrightarrow i$.

- Tiene la propiedad transitiva ya que dados i, j, k $\in E$, si $i \longleftrightarrow j$ y $j \longleftrightarrow k$ significa que existeixen n,m ≥ 0 tales que $P_{ij}^{(n)} > 0$ y $P_{jk}^{(m)} > 0$. Entonces por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, tenemos que:
  $P_{ik}^{(n+m)} = \sum_{l \in E} P_{il}^{(n)} * P_{lk}^{(m)} \geq \mathrm{P}_{ij}^{(n)} * P_{jk}^{(m)} > 0$.
  El estudio de las cadenas de Markov se simplifica mucho a partir de los gráficos y las divisiones de los espacios de estados en clases de equivalencia en función de la relación entre los estados $\longleftrightarrow$.

  Diremos que cualquier clase C es cerrada si para todo $i \in C$, $i \to j$ implica $j \in C$, es decir, una clase es cerrada si cuando se entra en ella ya no se puede salir.

  Un estado $i \in E$ se llama absorvente si i forma una clase cerrada. Si una cadena de Markov tiene una única clase de equivalencia en su matriz de transición, recibirá el nombre de irreducible. Las clases cerradas como la definida anteriormente C, tienen una matriz de transición restringida a C que tiene la propiedad de ser estocástica.

  Una matriz $\pi = (p_{ij}; i, j \in E)$ es estocástica si todas las filas de la matriz son distribuciones, es decir si para todo $i \in E, (p_{ij}; j \in E)$ es una distribución.

  Supongamos ahora que para cada valor de $n \geq 0$ tenemos una variable aleatoria que toma valores en el espacio de estados E. Decimos entonces que $X_n; n \geq 0$ es un proceso estocástico a tiempo discreto con espacio de estados E. Dado un proceso estocástico $X_n; n \geq 0$ y dadas una distribución λ y una matriz estocástica π diremos que este triplete es una cadena de markov si cumple que para todo $n \geq 0$ y para todo $i_0, \cdots, i_{n+1} \in E$:

  - $P(X_0 = i_0) = \lambda_{i0} \ _{(i)}$
  - $P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1}, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = in+1 | X_n = i_n) = P_{i_n in+1} \ _{(ii)}$

  La condición (i) nos dice que la distribución λ es la distribución inicial del proceso, la distribución de X_0. La condición (ii), nos dice que el conocimiento X_n del presente, el conocimiento del pasado hasta X_{n-1} no importa para el futuro X_{n+1}, se tratan de procesos sin memoria, donde la trayectoria pasada no importa, lo único importante es el estado actual en el que se encuentra en cada instante. La condición (ii) nos dice además que la cadena de Markov es homogenea en el tiempo, la probabilidad de pasar del instante i al j es P_{ij}, independientemente del instante en el que nos encontramos en el estado i. En todos los procesos de Markov, la matriz asociada π se llama matriz de transición en un paso. La probabilidad condicionada de una cadena de Markov que se indica en el estado i:
  $$P_i(X_n = j) = P(X_n = j | X_0 = i)$$

  Uno de los ejemplos mas utilizados para describir el comportamiento de las cadenas de Markov es el ejemplo del clima, en una ciudad nunca hay dos días seguidos de buen tiempo. Un día amanece con buen tiempo, el día siguiente amanecera con lluvia o nieve con la misma probabilidad. En función de si el día anterior ha sido lluvia o nieve, la probabilidad no será la misma que siga lloviendo o nevando, en este caso la probabilidad de que siga lloviendo o nevando disminuye respecto que vuelva a hacer buen tiempo. En este ejemplo el espacio de estados se reduce a $E = 1, 2, 3$.

Otro de los ejemplos perfectos para la introducción a las cadenas de Markov es el Random Walk donde el espacio de estados $E = Z$. Partiendo del origen la distribución inicial será para todo $i \in Z$:

$$\lambda_i = \mathrm{P}(\mathrm{X}_0 = \mathrm{i}) = \delta_{i1} = \begin{cases} 1 & \text{si } i{=}0 \\ 0 & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

Y si suponemos que en el paseo aleatorio podemos hacer un paso hacia delante con probabilidad p y un paso atrás con probabilidad $q = 1 - p$ la matriz de transición en un paso será:

$$\pi = \begin{pmatrix} ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & 0 & q & 0 & p & ... & ... & ... \\ ... & . & 0 & q & 0 & p & 0 & ... \\ ... & ... & 0 & q & 0 & p & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

La ruina del jugador es un ejemplo que representa el capital que tiene en cada instante el jugador, suponiendo el dinero inicial que tiene el jugador y que este juega su dinero de unidad en unidad, en un juego donde la probabilidad de perder $q = 1 - p$ y p de ganar, contra un jugador que tiene un capital infinito, como por ejemplo un casino. En un ejemplo como el descrito anteriormente en el que el rival es un casino con un capital infinito, consideramos una barrera absorvente en el límite superior ya que si en cierto instante el jugador tiene un capital de 0 euros no puede apostar y el juego termina, reduciendo nuestro espacio de estados a $E = N \cup 0$.
La distribución inicial partiendo de un capital inicial de z euros, la distribución será para todo $i \in N \cup 0$.

$$\lambda_i = \mathrm{P}(\mathrm{X}_0 = \mathrm{i}) = \delta_{iz} = \begin{cases} 1 & \text{si } i{=}0 \\ 0 & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

Otro de los ejemplos basados en el problema de la ruina del jugador es el caso común donde un jugador que tiene un capital inicial de z euros se juega el dinero, de igual forma que en el caso anterior, pero ahora frente a otro jugador con un capital inicial de $a - z$ euros. La situación inicial del problema nos dice que entre ambos jugadores disponen de un capital de a euros. En este caso el capital inicial es el capital que tiene en cada instante el primer jugador, con un capital inicial de z euros. En este caso tenemos dos barreras absorventes que corresponden a que cualquiera de los jugadores pierda todo su capital, llegando a 0 euros, de manera que no puede apostar y el juego termina. Tenemos dos estados posibles, el estado 0 para el caso de la ruina del primer jugador, mientras que si es el jugador contrario el que se arruina, el proceso se encontrará en el estado a. El espacio de estados es $E = 0, 1, \cdots, a$.
Como el jugador parte de un capital inicial de z euros, la distribución inicial será para todo $i \in E$,

$$\lambda_i = \mathrm{P}(\mathrm{X}_0 = \mathrm{i}) = \delta_{iz} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=0 \\ 0 & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

Y la matriz de transición en un paso será:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & \cdots & . & . & 0 & \\ q & 0 & p & 0 & . & \cdots & . & . & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & . & . & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & . & . & . & \cdots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & . & . & . & \cdots & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una propiedad inmediata de las cadenas de Markov, es la siguiente:

- Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov (λ, π). Entonces, para todo n, $k \in N$ y para todo i_0, i_1, $\cdots$, $i_{n+k} \in E$ se cumple que
$P(X_{n+1} = i_{n+1}, \cdots, X_{n+k} = i_{n+k} | X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n)$
$= \; p_{i_n i_{n+1}} p_{i_{n+1} i_{n+2}} \cdots p_{i_{n+k-1} i_{n+k}}$

Definimos a continuación la probabilidad de transición en dos pasos del evento i al evento j como $P_{ij}^{(2)} = P(X_{n+2} = j | X_n = i)$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
P_{ij}^{(2)} &= \frac{X_{n+2}=j, X_n=i}{P(X_n=i)} \\
&= \frac{\sum_{l\in E} P(X_{n+2}=j, X_{n+1}=l, X_n=i)}{P(X_n=i)} \\
&= \frac{\sum_{l\in E} P(X_{n+2}=j|X_{n+1}=l, X_n=i)P(X_{n+1}=l|X_n=i)P(X_n=i)}{P(X_n=i)} \\
&= \sum_{l\in E} P(X_{n+2}=j|X_{n+1}=l, X_n=i)P(X_{n+1}=l|x_n=i) \\
&= \sum_{l\in E} P(X_{n+2}=j|X_{n+1}=l)P(X_{n+1}=l|X_n=i) \\
&= \sum_{l\in E} P_{il}P_{lj}.
\end{aligned}
$$

De manera que si definimos la matriz de transición en dos pasos como $\pi^{(2)} = (P_{ij}^{(2)})$ tenemos que coincide con el cuadrado de la matriz de transición en un paso, es decir, $\pi^{(2)} = \pi^2$. Por inducción obtenemos una relación fundamental de la matriz de transición de las cadenas de Markov, para todo $n \geq 1$, la matriz de transición en n pasos cumple $\pi^{(2)} = \pi^2$. Además utilizando la propiedad asociativa del producto de matrices tenemos que para todo n, $m \geq 1$, $\pi^{(n+m)} = \pi^{n+m} = \pi^n\pi^m = \pi^{(n)}\pi^{(m)}$
De la propiedad asociativa deducimos las ecuaciones conocidas como ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{l\in E} P_{il}^{(n)}P_{lj}^{(m)}$$

Que nos dicen que la probabilidad de pasar del estado i al j en $n+m$ pasos, coincide con la suma de las probabilidades para todos los estados posibles l de ir del estado i al l en n pasos y del l al j en m pasos.
Otra propiedad importante de las cadenas de Markov es la siguiente:

- Sea (X_n)n ≥ 0 una cadena de Markov (λ, π) entonces para todo $n \geq 0$ y para todo $j \in E$

$$P(X_n = j) = (\lambda\pi^n)_j$$

Observamos que si $(X_n)_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov (λ, π), entonces el proceso estocástico que empieza en un cierto $n \geq 0$, es decir, $X_n, X_{n+1}, \cdots$, también es una cadena de Markov con una distribución inicial $\lambda\pi^n$ i matriz de transición en un paso π.
En nuestro caso con lo visto hasta ahora podemos estudiar como son, en general las matrices de transición en n pasos de todas las cadenas de Markov que tienen dos posibles estados. En este caso la matriz de transición en un paso será de la forma:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Para ciertos valores $\alpha, \beta > 0$. Observamos que podemos diagonalizar la matriz y aplicando la forma de Jordan tenemos que podemos escribirla de la manera $\pi = HJH^{-1}$, donde:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \frac{-\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix} \text{ y } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\pi^{(n)} = \pi^n = (HJH^{-1})^n = HJ^nH^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \frac{-\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\alpha-\beta)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{\alpha} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Uno de los tipos de estados que componen una cadena de Markov son los estados absorventes. Estos estados incluyen unas probabilidades de absorción, que indican las probabilidades de caer en este estado en función del estado en el que estés. En el estudio de los procesos estocásticos, un tiempo de golpeo o hitting time se puede definir como la primera vez que un determinado proceso golpea un subconjunto dado del espacio de estados, por ejemplo cualquier tiempo de parada o stopping time es un "Hitting time"para el proceso elegido y el objetivo seleccionado.
Consideremos la posibilidad que partiendo de un estado i se alcance A en un tiempo finito:

$$h_i^A := P(H^A < \propto |X_0 = i)$$

Si A es un conjunto que forma una clase cerrada entonces h_i^A se llama la probabilidad de absorción.
En el caso que $P(H^A < \propto |X_0 = i) < 1$ diremos que el tiempo medio de espera para alcanzar A es infinito.
En el caso que nos ocupa en este trabajo como es la ruina del jugador, donde un jugador juega contra un adversario, si suponemos que ambos jugadores son personas, nada de casinos ni grandes sumas de dinero, entre ambos depositan 4 euros, estamos tratando siempre con el juego de la ruleta de casino, con probabilidades $P = \frac{18}{37}$ y $q = \frac{19}{37}$ de ganar y perder respectivamente para el jugador 1, y al inrevés para el jugador 2, de manera que la matriz de transición será:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19}{37} & 0 & \frac{18}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es evidente que si el jugador tiene 0 euros, tenemos que $h_0 = 0$. En el resto de casos siguiendo el gráfico anterior, vemos que:

$$h_1 = \frac{19}{37}h_0 + \frac{18}{37}h_2 = \frac{18}{37}h_2$$

$$h_2 = \frac{19}{37}h_1 + \frac{18}{37}h_3 = \frac{19}{37}h_1 + \frac{18}{37}h_3$$

$$h_2 = \frac{19}{37}(\frac{18}{37}h_2) + \frac{18}{37}h_3$$

$$h_3 = \frac{19}{37}h_2) + \frac{18}{37}$$

La solución a las ecuaciones es la siguiente:

$$h1 = (\frac{5832}{25345}) = 0{,}2301045$$

$$h2 = (\frac{324}{685}) = 0{,}4729927$$
$$h3 = (\frac{18486}{25345}) = 0{,}729374$$

3. El problema de la ruina del jugador

El problema de la ruina del jugador fue publicado por primera vez en 1657 en el tratado de Huygens, la primera solución al tratado la aporta De Moivre en 1712, habiendo soluciones posteriores y más actuales. El tratado en el que Huygens publica el problema por primera vez es "De ratiociniis in ludo Aleae". Se le atribuye la autoría del mismo debido a que redactó el enunciado por primera vez, sin embargo se trata de un problema que Pascal propuso a Fermat mediante la correspondencia que mantenían entre ambos autores creyendo que era un problema "más difícil que los demás", en el año 1654. En el mismo tratado siendo el último de los 5 problemas que Huygens dejó para resolver en su tratado y que nos aplica en este trabajo es el problema de la duración del juego, un asunto que trataremos más adelante.
El problema de la ruina del jugador, es un problema donde siempre se plantea una situación en la que encontramos dos jugadores, uno de los cuáles tiene una fortuna limitada con una cantidad n, en euros o dólares y el otro jugador es la banca del casino, que tiene una fortuna ilimitada, en cada etapa o partida la probabilidad de ganar del jugador, aquel con un capital limitado, es p y la probabilidad de perder es $q = 1 - p$. En cualquiera de los casos el ganador recibira 1 euro de la fortuna del jugador perdedor.
El caso que nos ocupa, el método de Martingala, hablamos de apuestas en la ruleta, hay dos tipos de ruleta existentes y mayormente utilizadas, la ruleta americana en la cual tiene 38 casillas, dos de las cuáles són 0, de manera que la probabilidad de ganancia es $p = 18/38$, mientras que la ruleta europea o ruleta francesa, la más frecuente y habitual en nuestros casinos y locales de apuestas, tiene 37 casillas numeradas, con tan solo una casilla de valor 0, de manera que estamos hablando de un juego más equilibrado que la ruleta americana, estamos hablando de una probabilidad de ganancia $p = 18/37$.

La finalidad del juego es siempre aumentar el capital hasta una meta fijada, un objetivo cuantitativo marcado por el propio jugador, por ejemplo 10 euros o dólares, el juego termina cuando logramos el objetivo o bien el capital del jugador llega a 0, en ambos casos no podemos seguir apostando. Si consideramos X_t el capital del jugador, la sucesión X_t es un proceso estocástico a tiempo discreto.

Para el tipo de apuesta que nos ocupa en este trabajo, nos centraremos en los colores de la ruleta, rojo y negro, una apuesta que en la ruleta obtiene un beneficio de 1 a 1, hemos de recordar que en la ruleta francesa o europea tenemos 18/37 números en color rojo y otros 18/37 en color negro, el número restante es el 0, de color verde donde siempre que este valor salga en la ruleta, ganará el casino o la banca.
Hemos de recordar que el problema de la ruina del jugador, es un paseo aleatorio, donde podemos hacer un paso hacia delante con probabilidad p y un paso atrás con probabilidad $q = 1 - p$, en ese caso la matriz de transición en un paso será:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & & & \\ q & 0 & p & 0 & ... & \\ 0 & q & 0 & p & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & & \end{pmatrix}$$

Este paseo aleatorio evoluciona entre dos barreras, una al nivel zero y otra a nivel a.
De manera que la cadena de Markov es el capital que tiene en cada instante el jugador. En el caso más simple del problema de la ruina del jugador sólo tenemos una barrera absorbente ya que si en cierto instante el jugador tiene un capital de 0 euros no puede apostar y el juego termina, en algún caso podemos tener dos barreras absorbentes estableciendo un límite de apuestas.
El caso que nos ocupa es la probabilidad de ruina de un jugador con un capital "X"pero siempre finito, que se enfrenta a un contrincante con capital infinito como en el caso de un casino, el juego que tratamos habitualmente es el caso de las apuestas a color rojo o negro en la ruleta francesa, el juego donde la probabilidad de ganar más se acerca a $p = \frac{1}{2}$ es el Blackjack únicamente si el jugador es un experto en el juego, de manera que utilizamos las apuestas de color de la ruleta francesa que tienen una probabilidad próxima a $p = \frac{1}{2}$.
Bien, el caso más realista hoy en dia es el caso $p < q$, es decir, una probabilidad de ganar menor a la de perder, pensando que estamos jugando contra un casino evidentemente todos los juegos tienen una probabilidad de ganar inferior a $\frac{1}{2}$, excepto como ya hemos comentado el caso del Blackjack cuando se es un jugador experto. En este caso estamos hablando de probabilidades de manera que obtenemos valores entre 0 y 1 para todo $i \in N$. De nuevo utilizando las ecuaciones para h_1 obtenemos que $A = 1$, de manera que sabiendo que los estados absorbentes en este caso son $A = 1$ y $B = 0$, la única solución posible para todo $i \in N \cup 0$, esto quiere decir que el jugador se arruinará con probabilidad 1, con total seguridad el jugador perdera, tanto si se trata de un juego con probabilidad de ganar inferior a $p = \frac{1}{2}$, como si se trata de un juego justo, por ejemplo el Blackjack para un jugador experto, en este caso el jugador al tener un capital limitado y jugar contra un casino con capital infinito, siempre acabará perdiendo si no establece un límite superior de beneficios o objetivo.
Sea q la probabilidad de que al final el jugador se arruine y sea p la probabilidad que gane el juego, en la terminología de las caminatas al azar, q_z y p_z son las probabilidades respectivas de una partícula que comienza en z sea absorbida en 0 y a. No es necesario considerar un juego interminable ya que $p_z + q_z = 1$.
La fortuna del jugador despues de la primera apuesta o jugada, será $z - 1$ o $z + 1$, tendremos:
q_z $=$ P(Ruina, saliendo de z) $=$ P(Ruina, saliendo de z, ganando en la primera tirada) $=$ P(Ruina, saliendo de z, perdiendo en la primera tirada) $=$ P(Ruina, saliendo de $z + 1$)

* P(Ganar la primera tirada) + P(Ruina, saliendo de $z-1$) * P(Perder la primera tirada)

Con la notación descrita anteriormente:

$$q_z = pq_{z+1} + qq_{z-1}$$

Como sabemos que $p+q=1$, teniendo en cuenta la igualdad ya descrita podemos escribir:

q$_z = (p+q)q_z = pq_z + qq_z = pq_{z+1} + qq_{z-1}$

Simplificando la ecuación anterior, tenemos: $p(q_{z+1}-q_z) = q(q_z - q_{z-1})$
Las condiciones de frontera en este caso serán $q_0 = 1$ ya que en 0 estaremos arruinados y en $q_a = 0$ ya estaremos en nuestro objetivo, no podemos jugar ni llegar a la ruina.
Una vez situadas las condiciones límite del problema, podemos decir:

$$q_2 - q_1 = \frac{q}{p}(q_1 - q_0) = \frac{q}{p}(q_1 - 1)\cdots$$
$$\cdots q_z - q_{z-1} = (\frac{q}{p})^{z-1}(q_1 - 1)$$

En el caso que p y q sean diferentes, sumando las equaciones anteriores, obtenemos:

$$q_z - q_1 = (\frac{q}{p} + (\frac{q}{p})^2 + ... + (\frac{q}{p})^{z-1})(q_1 - 1) = \frac{\frac{q}{p} - (\frac{q}{p})^z}{1-\frac{q}{p}}(q_1 - 1)$$

Estableciendo las condiciones iniciales, además de $z = a$ como sabemos que $q_a = 0$, nos deja la siguiente ecuación:

$$q_a - q_1 = -q_1 = \frac{\frac{q}{p} - (\frac{q}{p})^a}{1-\frac{q}{p}}(q_1 - 1),$$

una ecuación de la forma $-q_1 = K(q_1 - 1)$, donde $K = \frac{\frac{q}{p}-(\frac{q}{p})^a}{1-\frac{q}{p}}$
Obtenemos resolviendo la ecuación anterior: $q_1 = \frac{k}{k+1}$, por lo tanto:

$$q_1 = \frac{\frac{q}{p} - (\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^a}$$

Si sustituimos esta ecuación en a anterior, obtendremos:

$$q_i = q_1 + \frac{\frac{q}{p} - (\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^a}$$

Sustituyendo en la expresión anterior por q_1 y operando, obtenemos:

$$q_i = \frac{(\frac{q}{p})^i - (\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^a}$$

Ahora hemos obtenido con la expresión anterior la probabilidad de ruina del jugador, es decir la probabilidad de encontrarnos con una barrera absorbente inferior, antes de llegar al objetivo marcado de ganancias. En caso de querer encontrar la probabilidad de llegar a la barrera superior y por lo tanto conseguir el objetivo antes de arruinarnos, saliendo de una fortuna i, únicamente hemos de intercambiar p y q de las dos barreras de manera que:

$$p_i = \frac{(\frac{p}{q})^{a-i} - (\frac{p}{q})^a}{1 - (\frac{q}{p})^a}$$

Si $z = 1$, el primer ensayo puede conducir a la ruina, y se reemplaza por $q_1 = pq_2 + q$, de la misma manera para $z = a - 1$ el primer ensayo puede conducir a la victoria y por lo tanto $q_{a-1} = qq_{a-2}$. La probabilidad q_z de ruina, satisface $q_z = pq_{z+1} + qq_{z-1}$ en $z = 1, 2, \cdots, a-1$. Estos sistemas se conocen como ecuaciones de diferencias, y representan también las condiciones de frontera sobre q_z que son $q_0 = 1$ y q_a. En el caso que $p \neq q$, comprobamos de manera rápida que las ecuaciones de diferencias descritas anteriormente admiten las soluciones:

$$q = 1$$
$$q = (\frac{q}{p})^z$$

Para constantes arbitrarias A y B, la sucesión $q_z = A + B(\frac{q}{p})^z$. representa una solución formal de la ecuación en diferencias $q_z = pq_{z+1} + qq_{z-1}$. Las condiciones de frontera se cumplen si, y sólo si, A y B satisfacen las dos ecuaciones lineales:

$$A + B = 1$$
$$A + B(\frac{q}{p})^a = 0$$

De esta manera, siguiendo las ecuaciones anteriores, encontramos una solución formal de las ecuaciones de diferencias que cumple con las condiciones de frontera, está solución es la probabilidad de ruina:

$$q_z = \frac{(\frac{q}{p})^a - (\frac{q}{p})^z}{(\frac{q}{p})^a - 1}.$$

Una vez demostrado que la probabilidad de ruina del jugador está dada por la ecuación anterior, vamos a formular nuevamente nuestros resultados con el modelo de juego más habitual hoy en día y el más practicado cuando hablamos del juego de la ruleta, cómo es:

- Consideraremos un jugador con un capital inicial z, que juega contra adversario infinitamente rico que siempre pase lo que pase siempre está dispuesto a continuar con el juego sea cuál sea la cuantía de las pérdidas, aunque el jugador sí tiene el privilegio de retirarse conforme a su voluntad. El jugador dispone de dos opciones, jugar hasta perder su capital o incrementarlo hasta conseguir una ganancia neta de a-z.

Es evidente que el juego que planteamos y que ya hemos comentado con anterioridad, es un juego con una probabilidad desfavorable, dicha probabilidad en nuestro caso es $q = \frac{19}{37}$ frente a una probabilidad de ganancia de $p = \frac{18}{37}$, este será el caso mas cercano a una probabilidad $p = \frac{1}{2}$ o lo que es lo mismo, una probabilidad justa. Veamos un ejemplo de la situación comentada anteriormente:

- Supongamos que entramos en el casino con una cantidad de 100€, y con un objetivo marcado de conseguir 110 €. Se pueden dar dos situaciones, que logremos el objetivo o que nuestro capital se reduzca a 0, situación de ruina del jugador. Mediante la fórmula comentada con anterioridad y teniendo en cuenta que $q \neq p$, obtenemos el siguiente resultado:

$$q_{100} = \frac{(\frac{q}{p})^{100} - (\frac{q}{p})^{110}}{1 - (\frac{q}{p})^{110}}$$

Con una probabilidad $p = 0{,}486$ y $q = 0{,}513$, obtenemos una probabilidad de ruina del $41,87\,\%$.

Solo como ejemplo de que sería un juego justo, utilizamos $p = \frac{1}{2}$ y q de la misma manera, con la expresión $q_i = 1 - \frac{i}{a}$ obtenemos la probabilidad de ruina en el caso de juego justo, que es 0,0909 prácticamente nula si el juego es justo y consideramos las variables iniciales igual que en el anterior ejemplo.

Parece evidente que la situación es mucho más favorable cuando partimos en igualdad de condiciones, como esto no es posible vamos a intentar plantear diferentes situaciones para ver cuál es la mejor para el jugador si mantenemos las probabilidades de la ruleta europea, parece claro que si reducimos nuestras probabilidades de acierto la situación se torna muy desfavorable, por ejemplo si nuestro juego fuera:

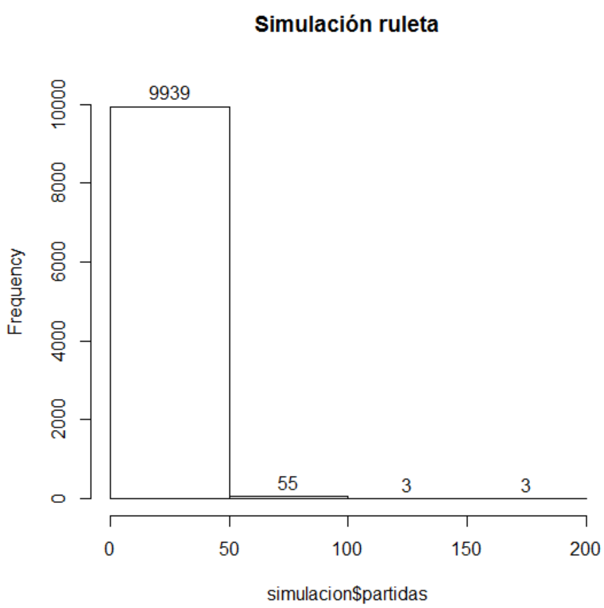
- $p = 0{,}4$ y $q = 0{,}6$
- Capital Inicial = 99€
- Objetivo = 100€

En este caso aplicando la fórmula para los casos de $p \neq q$, obtenemos:

$$q_i = \frac{(\frac{0{,}6}{0{,}4})^{99} - (\frac{0{,}6}{0{,}4})^{100}}{1 - (\frac{0{,}6}{0{,}4})^{100}} = 0{,}33333$$

Si en algun momento nuestro juego se torna en contra nuestra con una probabilidad de $q = 0{,}6$, aunque el objetivo del juego se reduzca a la ganancia de un solo euro, la probabilidad de ruina aumenta a un $33\,\%$.
Otro de los elementos diferenciales que entra en escena cuando hablamos de juego en casinos o salas es la duración del juego que explicaremos mas adelante pero introduciremos ahora para ver como interactua con las probabilidades de ganar o perder del juego. En la situación con probabilidades reales de la ruleta europea $p = 0{,}486$ y $q = 0{,}513$ que se obtienen jugando a rojo o negro o bien par o impar, con los objetivos de obtener 10 euros de ganancias, partiendo de un capital inicial de 100, obtenemos mediante simulaciones el resultado siguiente:

```
head(simulacion)
  partidas resultado ganadas perdidas
1       16       110      11        6
2       23       110      11       13
3       17       110      11        7
4       20       110      11       10
5       57       110      29       29
6       18       110      11        8
summary(simulacion$partidas)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   8.00   17.00   20.00   22.92   23.00  593.00
```



Nuestro objetivo fijado era obtener 10 €partiendo de un capital inicial de 100 €, observamos que el promedio de partidas por cada jugada es de aproximadamente 23 partidas. Si miramos

el histograma vemos como de las 10000 simulaciones o partidas, un 99,3 % se encuentran por debajo de las 50 partidas.
Si calculamos el número de partidas en las que logramos el objetivo mediante las simulaciones del método de la Martingala, obtenemos un 92.35 % de to, es decir, en 9235 partidas lograremos el objetivo, una probabilidad de ruina de 0,0765, por el contrario utilizando la fórmula teórica de la probabilidad de ruina del jugador obtenemos:

$$q_{100} = \frac{\left(\frac{0{,}513}{0{,}486}\right)^{100} - \left(\frac{0{,}513}{0{,}486}\right)^{110}}{1 - \left(\frac{0{,}513}{0{,}486}\right)^{110}} = 0{,}4187$$

Las diferencia entre utilizar el método de martingala o la fórmula teórica es considerable en favor del método.
Es evidente que delante de un juego desfavorable, no debemos dejar actuar tendencia de ruina, de manera que nuestro juego deberá ser agresivo, de aquí nos surge la pregunta de que resultados obtendriamos en caso de doblar la apuesta inicial, es decir, ahora apostaremos 2€por partida, doblando la apuesta inicial estamos diciendo que las dos situaciones que plantearemos a continuación son exactamente iguales:

- $i = 100$ y $a = 110$ apostando la cantidad de 1€
- $i = 50$ y $a = 55$ apostando la cantidad de 2€. Apostando 2€es evidente que no lograremos la cantidad de 55€, es decir como poco obtendremos 56€y lo lograremos como mínimo en 3 partidas, todas ganadas des del inicio.

Veamos ahora la simulación y el resultado de aplicar la fórmula de la probabilidad de ruina con las mismas probabilidades que venimos utilizando $q = 0{,}513$ y $p = 0{,}486$:

$$q_{50} = \frac{\left(\frac{0{,}513}{0{,}486}\right)^{50} - \left(\frac{0{,}513}{0{,}486}\right)^{55}}{1 - \left(\frac{0{,}513}{0{,}486}\right)^{55}} = 0{,}2496$$

Doblando la apuesta de 1 a 2 euros, conseguimos reducir también la probabilidad de ruina prácticamente a la mitad pasando de un 41,87 % de probabilidad de ruina a un 24,96 %.
En este caso la probabilidad de ruina es menor, debido entre otros motivos a que necesitaremos menos partidas para conseguir nuestro objetivo, veamos la simulación:

```
head(simulacion2)
  partidas resultado ganadas perdidas
1        6        56       4        3
2        7        56       4        4
3        6        56       4        3
4        7        56       4        4
5        8        56       4        5
6        5        56       4        2
summary(simulacion2$partidas)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  4.000   5.000   6.000   7.433   8.000  79.000
```

Podemos ver en esta simulación como el número de partidas por sesión se reduce a $7,3$ partidas, muy por debajo de las 23 partidas de la simulación anterior donde solo apostamos 1€ por jugada. El valor de la ruina del jugador con estas condiciones es de 0,0795 muy parecida a la anterior simulación.
Supongamos que el casino o la sala de apuestas donde nos encontramos jugando permite apuestas hasta 10€ por lo tanto vamos a ver como evolucionan las probabilidades de ruina con apuestas de 5€ y 10€.

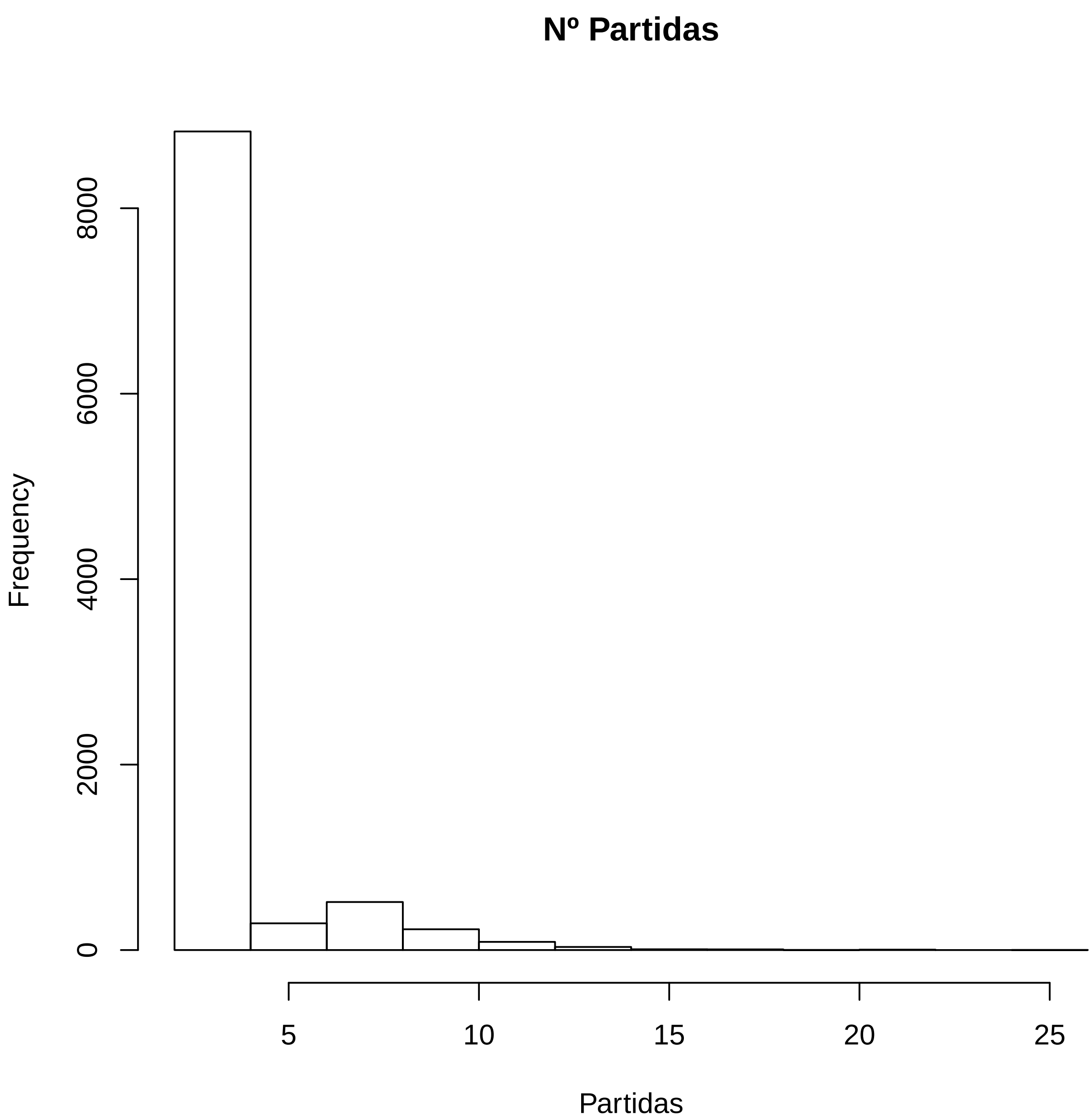
- $i = 20$ y $a = 22$ apostando la cantidad de 5€. Apostando 5€es evidente que no lograremos la cantidad de 22€, es decir como poco obtendremos 55€.

Empezamos encontrando la probabilidad de la ruina teórica con las mismas probabilidades utilizadas hasta ahora $q = 0{,}513$ y $p = 0{,}486$:

$$q_{50} = \frac{(\frac{0{,}513}{0{,}486})^{20} - (\frac{0{,}513}{0{,}486})^{22}}{1 - (\frac{0{,}513}{0{,}486})^{22}} = 0{,}14734$$

La probabilidad de ruina teórica es inferior a la calculada con las apuestas de 2€ veamos la probabilidad de ruina del método Martingala mediante simulación:

```
head(simulacion3)
  partidas resultado ganadas perdidas
1        4         0       1        4
2        8        25       5        4
3        2        25       2        1
4        3        25       2        2
5        2        25       2        1
6        2        25       2        1
summary(simulacion3$partidas)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  2.000   2.000   2.000   3.192   3.000  25.000
hist(simulacion3$partidas, main="N Partidas", xlab="Partidas", cex=0.8)
```



En los resultados podemos ver como la probabilidad de ruina con estas condiciones es de 0,0711, inferior a la probabilidad teórica, aunque cada vez mas parecidas entre ellas. El número de partidas en este caso se reduce a una media de 3.2 tiradas por partida, muy por debajo de las anteriores simulaciones. Por úlimo vamos a simular el juego de la ruleta con apuestas de 10 €:

- $i = 10$ y $a = 11$ apostando la cantidad de 10€. Apostando 10€es evidente que no lograremos la cantidad de 11€, es decir como poco obtendremos 20€.

Empezamos encontrando la probabilidad de la ruina teórica con las mismas probabilidades utilizadas hasta ahora $q = 0{,}513$ y $p = 0{,}486$:

$$q_{10} = \frac{(\frac{0{,}513}{0{,}486})^{10} - (\frac{0{,}513}{0{,}486})^{11}}{1 - (\frac{0{,}513}{0{,}486})^{11}} = 0{,}1174$$

La probabilidad es ligeramente inferior si aumentamos la apuesta de 5 a 10 €.
Comparamos ahora con el Método de Martingala con las nuevas condiciones de apuesta de 10 €:

```
head(simulacion4)
  partidas resultado ganadas perdidas
1        2         0       1        2
2        2         0       1        2
3        2         0       1        2
4        2         0       1        2
5        2        20       2        1
6        2        20       2        1
summary(simulacion4$partidas)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
      2       2       2       2       2       2
```

La probabilidad de ruina en este caso es mínima, inferior al resto de simulaciones, se situa en 0,0643, un 6.4 % aproximadamente.
En los juegos de azar regulados por salas de apuestas o casinos, hay circunstancias que son totalmente ajenas al jugador, este es el caso de las probabilidades de acierto o fallo, el juego es el que es, y estas probabilidades no varian. En cambio el jugador puede decidir aunque con limitaciones sobre las cantidades que apuesta y tiene poder de decisión sobre el dinero que quiere jugar en total. Ya hemos visto como varían nuestras probabilidades en función de la cantidad de la apuesta y ahora en la tabla resumen que mostraremos a continuación donde modificando la cantidad de dinero inicial y los objetivos adaptados a este capital inicial, podemos ver como interactúa:

p	q	i	a	qi(teórica)	qi(Martingala)
0,486	0.513	1000	1100	0.9955	0.0632
0,486	0.513	500	550	0.9330	0.0723
0,486	0.513	100	110	0.4187	0.0731
0,486	0.513	50	55	0.2496	0.0736
0,486	0.513	10	11	0.1174	0.081
0,486	0.513	1	1.1	0.093	0.065

La probabilidad de ruina teórica se reduce conforme se reducen nuestras pretensiones económicas, en cambio las probabilidades del método Martingala empiezan muy por debajo de la teórica y se mantienen estables.

4. Método Martingala

Martingala, galicismo de Martingale, es un determinado proceso estocástico. Se conoce con este nombre a un método de apuesta en juegos de azar consistente en multiplicar sucesivamente en caso de pérdida una apuesta inicial determinada, en el momento de ganar la apuesta el proceso se iniciaría de nuevo. La martingala surgió en Francia en el siglo XVIII, es una de las estrategias más famosas y se utiliza no solo en el casino, sino en apuestas y otros juegos de azar. Se utiliza en apuestas sencillas como doble o nada: rojo-negro, par-impar. Dubins y Savage propusieron una prueba no formal de estas desigualdades, pero notaron que para $p < \frac{1}{2}$, la ley de los grandes números lo simula en buena medida para apuestas grandes.
Esta estrategia parece convertir este juego desfavorable en uno de favorable. Como hemos visto que, con probabilidad 1, en una tirada o otra ganaremos, teniendo la ilusión que obtendremos un beneficio asegurado. Estudiamos la situación con más detalle. Apostamos n veces, empezando por 1€aplicando la estrategia de martingala, doblando la apuesta cuando perdamos hasta que ganemos en la enésima tirada, habremos jugado entonces:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

Como podemos ver, en la jugada n hemos apostado 2^{n-1}, si en esta jugada la suerte nos es favorable, recibiremos el doble, es decir, 2^n euros. Las ganancias netas obtenidas serán de $2^n - (2^{n-1})$, es decir, 1€.
Veamos un ejemplo:

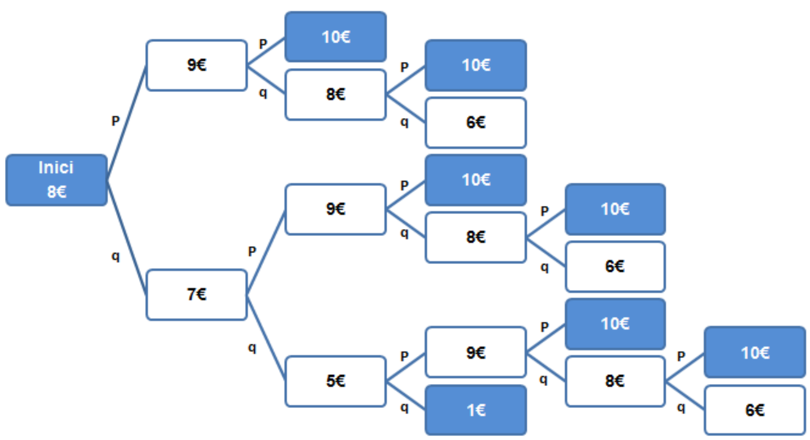
- PASO1: Apostamos 1€ a negro. En caso de ganar, repetimos el mismo paso, en caso de perder, vamos al siguiente paso.
- PASO2: Apostamos 2€ a negro, doblando la apuesta anterior, en caso de ganar, volvemos al paso 1. Si perdemos vamos al paso 3.
- PASO3: Apostamos 4€ a negro, doblando la apuesta anterior, de nuevo si ganamos, volveremos al paso 1, y si perdemos, seguimos adelante con el paso 4.
- PASO4: Apostamos 8€ a negro, repitiendo los pasos anteriores, doblando la cantidad del paso 2, si ganamos volvemos a empezar, si perdemos seguimos adelante con el paso 5.
- PASO5: Doblamos la apuesta, vamos con 16€ al negro, tanto si ganamos como si perdemos volvemos al paso 1.

En el caso que ganaramos en el paso 5, las ganancias ascenderían a 16€ y las pérdidas sumarían 15€, habremos ganado 1€, el equivalente a la apuesta inicial.
Esta ganancia de 1€ o 1 unidad, se produce para cada partida ganada, de manera que en función de las partidas jugadas tenemos una distribución de ganancias como la siguiente:

Partidas	Probabilidad	Cantidad Apostada	ganancia
1	p	1	$1 = 2 + 1$
2	p(1-p)	$1 + 2$	$1 = 4 - 3$
3	p(1-p)^2	$1 + 2 + 2^2$	$8 - (1 + 2 + 4) = 1$
4	p(1-p)^3	$1 + 2 + 2^2 + 2^3$	$16 - (1 + 2 + 4 + 8) = 1$
n	p(1-p)$^{n-1}$	$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}$	1

Vayamos ahora con un ejemplo simple de la estrategia martingala aplicada en la ruleta de un casino, apostando a rojo-negro, presentamos las condiciones iniciales del ejemplo a continuación:

- La probabilidad de ganar en este juego són $p = 0{,}4864$.
- La probabilidad de perder en este juego són $q = 0{,}5135$.
- Empezaremos con un capital inicial de 8 €, teniendo presente que luchamos contra un adversario con capital infinito, de manera que establecemos un límite superior que será nuestro objetivo de 10 €.
- La apuesta inicial tiene un valor de 1 €, y el sistema de juego es el descrito con anterioridad, en caso de pérdida doblamos la cantidad apostada en la apuesta anterior, en caso de ganar seguimos apostando la misma cantidad.



Los casinos limitan el número de veces que el usuario puede doblar la apuesta, de manera que aunque dispusieramos de una fortuna ilimitada, ya de por si poco frecuente, no podríamos doblar indefinidamente.

Esta limitación en cuanto al capital inicial y al número limitado de veces que el casino permite doblar una apuesta, implica que podremos doblar utilizando esta técnica como máximo n veces, sabiendo que contamos con un capital inicial de $2^n - 1$, de manera que nuestra esperanza de ganancias en esta situació es:
E(Ganancias) = $1 * p$(probabilidad de ganar) - $(2^n - 1)q$(probabilidad de perder)

Si substituimos las probabilidades calculadas anteriormente, obtendremos que la esperanza es:
1(p+p(1-p)+p(1-p)$^2 + p(1-p)^3 + ... + p(1-p)^{n-1}) - (2^n - 1)(1 - p(1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + ... + (1-p)^{n-1}))$
Como podemos observar la probabilidad de ganar en alguna de las n partidas en las que apostamos, es la suma de n términos de una expresión geométrica:

$$\begin{aligned} & 1(p + p(1-p) + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + ... + p(1-p)^{n-1}) \\ & -(2^n - 1)(1 - p(1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + ... + (1-p)^{n-1}) \\ = \; & p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1 - (1-p)^n)) \end{aligned}$$

De manera que la esperanza de ganancias netas es:

$$E(\text{ganancias netas}) = 1(1 - (1-p)^n) - (2^n - 1)(1 - (1 - (1-p)^n)) = 1 - (2(1-p))^n$$

En nuestro caso con el ejemplo de la ruleta de casino, con una probabilidad $p < \frac{1}{2}$, la esperanza es negativa, y ira decreciendo hacia menos infinito cuando $n \to \infty$.
Este resultado nos dice que la estrategia de Martingala no transforma un juego desfavorable en favorable.
La teoria de las Martingalas es un elemento importante en el estudio de la evolución de la incerteza con el tiempo, concretamente representan un tipo de proceso estocástico que modelan los juegos justos.

5. Duración esperada del Juego

La duración del juego tiene una esperanza finita D_z. Si el primer ensayo resulta éxito, el juego continuará como si la posición inicial hubiese sido $z+1$, la esperanza condicional de la duración y si suponemos que el primer ensayo es ganado, es $D_{z+1}+1$, la duración esperada del juego D_z satisface la ecuación:

$$D_z = p * D_{z+1} + q * D_{z-1} + 1$$

Estableciendo como frontera $D_0 = 0$ y $D_a = 0$. La ecuación es no homogénea debido al término 1. Establecemos la condición:

$$p \neq q, D_z = \frac{z}{(q-p)}$$

La diferencia $\triangle_z$, satisface las ecuaciones homogéneas $\triangle_z = p * \triangle_z + 1 + q * \triangle_z - 1$, todas las soluciones de esta ecuación són de la forma $A + B * (\frac{q}{p})^z$, cuando $p \neq q$ las soluciones són de la forma:

$$D_z = \frac{z}{q-p} + A + B * \frac{q}{p}^z$$

Estableciendo como condiciones previas:

$$A + B = 0$$

$$A + B * (\frac{q}{p})^\alpha = \frac{-\alpha}{(q-p)}$$

$$D_Z = \frac{z}{q-p} - \frac{\alpha}{(q-p)} * \frac{1-(\frac{q}{p})^z}{1-(\frac{1}{p})^\alpha}$$

El método falla si $p = q = \frac{1}{2}$, no hay problema debído a que la probabilidad de ganar en el juego que queremos evaluar es siempre diferente o en concreto inferior a la de perder, de manera que no se cumple la condición anterior de $p = q = \frac{1}{2}$, las probabilidades en la ruleta europea o francesa, apostando a la modalidad de colores rojo o negro, con probabilidades de ganar (p) $p = \frac{18}{37}$ y de perder (q) $q = \frac{19}{37}$.
Si queremos adaptar la fórmula que hemos calculado para la duración esperada del juego para un escenario donde uno de los jugadores tiene un capital infinito como el caso del casino, el casino siempre tendrá un capital muy elevado o infinito a vistas del jugador, de manera que tenemos que adaptar la fórmula sabiendo que $\alpha \rightarrow \propto$. En nuestro caso $p < q$ obtenemos que la duración esperada $z(q-p)^{-1}$, en el resto de casos tanto $p = q$ como $p > q$ el juego puede continuar indefinidamente y no tiene sentido hablar acerca de la duración esperada. Veamos algunos resultados en función del capital inicial del que dispone el jugador, sabiendo que las probabilidades de la ruleta europea son $p = \frac{18}{37} = 0{,}486$ y $q = \frac{19}{37} = 0{,}513$:

- Capital inicial 1000€:

$$D_z = \frac{1000}{(0{,}513 - 0{,}486)} = 37{,}037, 04$$

- Capital inicial 500 €:

$$D_z = \frac{500}{(0{,}513 - 0{,}486)} = 18{,}518, 52$$

- Capital inicial 100 €:

$$D_z = \frac{100}{(0{,}513 - 0{,}486)} = 3{,}703, 704$$

- Capital inicial 50 €:

$$D_z = \frac{50}{(0{,}513 - 0{,}486)} = 1{,}851, 852$$

- Capital inicial 10 €:

$$D_z = \frac{10}{(0{,}513 - 0{,}486)} = 370, 370$$

- Capital inicial 1 €:

$$D_z = \frac{10}{(0{,}513 - 0{,}486)} = 37, 037$$

Efectivamente vemos que a mayor capital mayor tiempo estaremos en la partida aunque esto no tiene porque significar beneficio alguno.

6. Conclusiones

Nuestros análisis coinciden con los estudios realizados hasta el momento en los resultados y en el método para llegar a ellos. Tal y como mostramos en el apartado correspondiente al problema de la ruina del jugador, teniendo en cuenta que las probabilidades del juego siempre serán desfavorables a nuestros intereses, la única posibilidad de modificar la probabilidad de ruina minimizando nuestras pérdidas es apostando la cantidad máxima permitida que será diferente en función de la sala o casino. El objetivo de aumentar la apuesta es para no dejar actuar a la tendencia de ir hacia la ruina o la bancarrota del jugador, de esta manera limitamos el número de partidas hasta alcanzar el objetivo. Las Martingalas, los paseos aleatorios, ... están presentes en multitud de estudios financieros y en muchos otros campos que no hemos comentado en este trabajo.
Tal y como vemos en la sección de la ruina del jugador el método Martingala muestra una probabilidad de ruina muy baja y constante para los diferentes valores del capital inicial y objetivos que calculemos, en cambio la probabilidad teórica va disminuyendo conforme reducimos el capital y las pretensiones económicas.
Mostraremos en la siguiente tabla el resultado de las simulaciones obtenidas un resumen con la cantidad inicial y la cantidad apostada para observar como se reduce el número de partidas en aquellas simulaciones con menor probabilidad de ruina. Hay que tener en cuenta que nuestras simulaciones siempre son con un límite superior fijado, parece evidente que sin un objetivo superior lo único a lo que podemos aspirar es ampliar nuestra estancia en la sala o mesa de juego, como observamos en el gráfico del anexo donde vemos el ejemplo de una sesión con un determinado número de partidas para acabar en ruina.

Capital inicial	Cantidad Apostada	Número Partidas
100 €	1 €	22.9 partidas
50 €	2 €	7.3 partidas
20 €	5 €	3.2 partidas
10 €	10 €	2 partidas

Referencias

[1] Feller; "Introducción a la teoria de probabilidades y sus aplicaciones"

[2] Xavier Bardina, Marco Ferrante; "An Excursion into Markov Chains"

[3] Josep Lluís Solé; "Incertesa i probabilitat. Un passeig per algunes paradoxes i problemes clàssics de la teoria de la probabilitat"

[4] Xavier Bardina; " Cálculo de Probabilidades"

Anexo

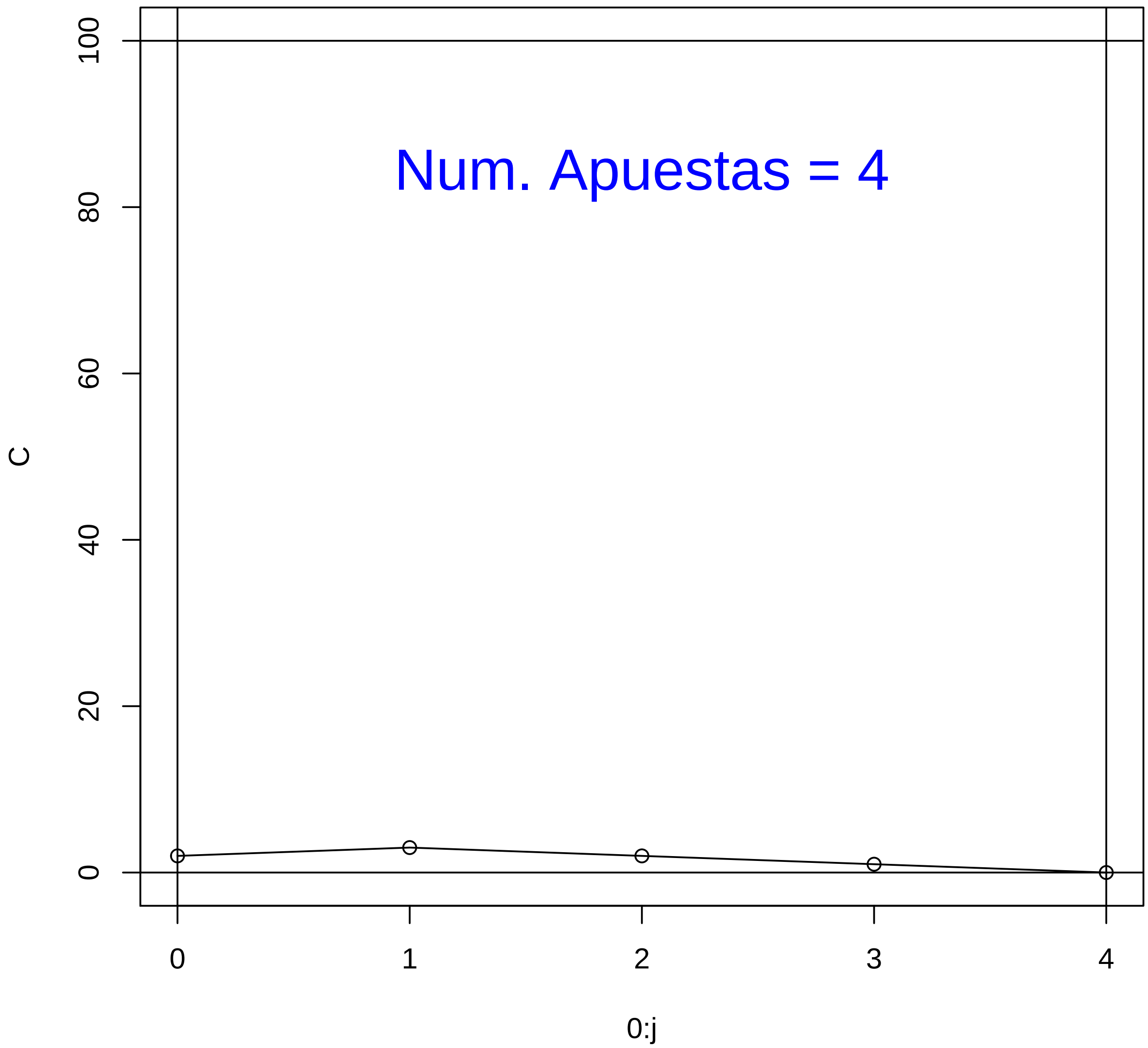
Código de R

```
N<-10000     #simulaciones
xt<- 110    # Dinero Objetivo
simulacion <- data.frame(partidas= integer(0), resultado= integer(0), ganadas=integer(0)


for (i in 1:N){
  x0<-100 #dinero inicial
  apu<-1 # dinero que apostamos por partida
  g<-1
  p<-1
  j<-1
  while(x0>0 & x0<xt){            #  & apu<=x0
    resultado<-runif(1,0,1)

    if(x0<apu){apu = x0}

    if(resultado>=(18/37)){
      x0<-x0+apu
      g<-g+1
      apu <- 1
    }else{
      x0<-x0-apu
      apu<-apu*2
      p<-p+1
    }
    j<-j+1
  }
  simulacion[i,1]<-j
  simulacion[i,2]<-x0
  simulacion[i,3]<-g
  simulacion[i,4]<-p
}

simulacion

head(simulacion)
mean(simulacion$partidas)
max(simulacion$partidas)
summary(simulacion)
```

```
hist(simulacion$partidas, labels=TRUE, ylim=c(0,10500), nclass=3, main="Simulaciuleta")
```

Código de RGráfico

```
ruina_jugador=function(u,N,p){
k=u;j=0; C=u
while(k>0&&k<N){
 r=rbinom(1,1,p)
 e=2*r-1; y=k+e; k=y; j=j+1
 C=c(C,k)}
plot(0:j,C,type="o",ylim=c(0,N))
abline(h=c(0,N),v=c(0,j))
a=j/2; b=.8*N
text(a,b,labels=paste('Num. Apuestas =',j),pos=3,cex=2,col="blue")
j}
##EJEMPLO
ruina_jugador(2,100,.486)
[1] 4
```


Num. Apuestas = 4
C
0
20
40
60
80
100
0
1
2
3
4
0:j