Martingalas: el teorema de parada de martingalas, la desigualdad de Wald y la desigualdad de Azuma-Hoeffding*'**

Morante Moran David Willians[1], Valdivia Fuentes Juan Daniel[2], Geronimo Aparicio Mirian Andrea[3]
Universidad Nacional de Ingeniería - Facultad de Ciencias - Escuela profesional de Matemática

***Resumen*—Se hablará de los procesos estocásticos, que sirven para usar magnitudes aleatorias que varían con el tiempo o para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo. Tambien estudiamos los teoremas y desigualdades en la cual intervienen las martingalas, una vez entendido eso trataremos problemas y aplicaciones interesantes que se presentan con mayor frecuencia en la vida cotidiana, dándoles una solución y integrandole a ello el uso del lenguaje R.**

I. INTRODUCCIÓN

Dando un preámbulo a lo que será una definición formal, las martingalas son procesos estocásticos que modelan juegos justos; en promedio no se pierde ni se gana en la siguiente observación del proceso.

Existen muchos problemas interesantes a tratar relacionados a este proceso estocástico, sin embargo, en este artículo abordaremos en particular el problema conocido como "La ruina del jugador", en el cual se utilizará el teorema de parada para martingalas acotadas.

El objetivo de este estudio es explicar y enfatizar más la teoría de probabilidades y desarrollar algun algoritmos y códigos en R que faciliten la comprensión teórica desde el punto de vista de la ciencia computacional.

Para ello en la sección II-B partiremos definiendo los conceptos de *Filtración* y *Esperanza condicional* para asi definir en la sección II-C lo que es una *Martingala* junto con sus teoremas y propiedades elementales. Luego de tener una visión amplia se abordará en la sección II-D los *Tiempos de paradas* para luego enunciar el *Teorema de paradas para martingalas acotadas*, dando como ejemplo lo que es un camino aleatorio simple. Conceptos que son necesarios para abordar en la sección III el problema sobre el que versará el trabajo. Finalizando en la sección III-A con la *Ecuación de Wald* y la *desigualdad de Azuma-Hoeffding.*

*Procesos Estocásticos

*Trabajo colaborativo disponible en Github

[1]Morante Moran David - 20170333E - Escuela profesional de Matemática

[2]Valdivia Fuentes Juan Daniel -20162677K - Escuela profesional de Matemática

[3]Geronimo Aparicio Mirian - 20172192J - Escuela profesional de Matemática

II. DEFINICIONES

II-A. Filtración

Una filtración $\mathbb{F}$ es un conjunto indexado $\mathscr{F}_i$ de subestructuras de una estructura algebraica $\mathscr{F}$, recorriendo el subíndice i cierto conjunto I conjunto totalmente ordenado cumpliendo la condición:

$$\forall i, j \in I : i \leq j \Rightarrow \mathscr{F}_i \subseteq \mathscr{F}_j$$

si el indice i es el parámetro tiempo de un proceso estocástico entonces la filtración puede interpretarse como una representación de todo el histórico de información hasta el instante dado.

II-B. Esperanza condicional

Sea $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, con una variable aleatoria $X:\Omega \to \mathbb{R}^n$ y un sub-σ-algebra
A continuación, una esperanza condicional de X dado por $\mathscr{H}$ (denotado como $\mathbb{E}$ [X|$\mathscr{F}$]) es cualquier $\mathscr{H}$- función medible ($\Omega \to \mathrm{R}^n$) que satisface :

$$\int_H \mathbb{E}[X|\mathscr{F}]d\mathbb{P}(\omega) = \int_H X(\omega)d\mathbb{P}(\omega)$$

para cada H $\in \mathscr{H}$.
Tenga en cuenta que $\mathbb{E}$ [X|$\mathscr{H}$] es simplemente el nombre de la función esperanza condicional.

II-C. Martingala

Una definición básica de una martingala de tiempo discreto es un proceso estocástico de tiempo discreto (es decir, una secuencia de variables aleatorias)X_1, X_2, X_3, ... que satisface para cualquier momento n:

- $\mathbb{E}(|X_n|)<\infty$
- $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_1,\ldots,X_n)=X_n$

Es decir, el valor esperado condicional de la siguiente observación, dadas todas las observaciones anteriores, es igual a la observación más reciente.

II-C1. Martingala con respecto a otra secuencia: De manera más general, se dice que una secuenciaY_1, Y_2, Y_3... es una martingala con respecto a otra secuencia X_1, X_2, X_3, ... si para todo n.

- $\mathbb{E}(|X_n|) <\infty$
- $\mathbb{E}(Y_{n+1}|X_1,\ldots,X_n)=Y_n$

Del mismo modo, una martingala de tiempo continuo con respecto al proceso estocástico X(t) es un proceso estocástico Y(t) tal que para todo t

- $\mathbb{E}(|Y_n|) < \infty$
- $\mathbb{E}(Y_t|X_\tau, \tau \leq s)$=$Y_s$, $\forall s \leq t$.

Esto expresa la propiedad de que la expectativa condicional de una observación en el tiempo t, dadas todas las observaciones hasta el tiempo s, es igual a la observación en el tiempo s (por supuesto, siempre que $s \leq t$). Ademas Y_n es medible con respecto a $X_1, ..., X_n$.

II-C2. Definición general: Sea un espacio de probabilidad (Ω,$\mathscr{F}$,$\mathbb{P}$). Sea $\mathbb{F}$ una filtración de σ-algebras: $\mathscr{F}_1 \subset ... \subset \mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$

Sea $X(t) = X_1, X_2, ..., X_n$ una sucesion de variables aleatorias que forman un proceso estocástico.
Entonces el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ adaptado a la filtración $\mathbb{F}$ recibe el nombre de martingala si :

$$\mathbb{E}[X(t)|\mathscr{F}_s] = X(s)$$

Esto es, un proceso estocástico es una martingala cuando su esperanza en tiempo futuro es precisamente el valor que la variable tiene en tiempo presente. Esto significa que el proceso no tiene deriva estadística.

II-D. Tiempos de paradas

Sea Y_n una supermartingala con respecto a X_n, y sea H_n una función de $(X_0, X_1, ..., X_n)$ que cumple $0 \leq H_n \leq c_n$.Entonces:

$$W_n = W_0 + \sum_{m=1}^{n} H_m(Y_m - Y_{m-1})$$

, es una supermartingala. La interpretación de esto es que si un juego es desfavorable seguirá siendolo independientemente de cómo apostemos en cada momento. Decimos que **T** es un **tiempo de parada** respecto a X_n cuando la ourrencia o no del suceso "paramos en el instante n"**(T=n)** se puede determinar apartir de los valores $X_0, X_1, ..., X_n$.

II-D1. Propiedades: Tiempos de paradas
Denotemos $T \wedge n$ el mınimo de T y n. Si Y_n es una martingala con respecto a X_n y **T** es un tiempo de parada con respecto a X_n , entonces el proceso (truncado) $Y_{T\wedge n}$ es una martingala con respecto a X_n

II-E. Teorema de paradas para martingalas acotadas

Sea M_n una martingala con respecto a X_n , y sea **T** un tiempo de parada con respecto a X_n, con $\mathbb{P}$(**T** <∞) = 1. Si existe una constante k de manera que $|M_{T\wedge n}| \leq k$, $\forall$ s,entonces:

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$$

La idea bajo la condición $|M_{T\wedge n}| \leq k$ para algún k es que la cantidad de dinero disponible es limitada. En caso contrario, podrían darse situaciones en las que aplicando un criterio de parada tengamos siempre una ganancia.

III. "La ruina del jugador"

Dicho problema consiste en calcular la probabilidad de que un jugador arruine al contrario en un juego a un número indeterminado de partidas, cuando los dos jugadores inician el juego con un cierto número de monedas cada uno.
Sea $S_n = S_0 + \xi_1 + ... + \xi_n$, donde ξ_i son i.i.d con $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p$ y $\mathbb{P}(\xi_i = -1) = q := 1 - p$. Ya hemos visto que g(S$_n$)$_n$ es una martingala para g(x)=$(\frac{q}{p})^x$.
Sea T= $\min\{n : S_n \notin (a,b)\}$

- T es un tiempo de parada
- $\mathbb{P}(T < \infty)$=1.
- Si $S_0 = x$, se cumple $(q/p)^x = (q/p)^a + [(q/p)^b - (q/p)^a]\mathbb{P}(S_T = b)$

Si definimos V_y = $\min\{n \leq 0 : S_n = y\}$.

$$\mathbb{P}_x(V_b < V_a) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^a}{(q/p)^b - (q/p)^a}$$

III-A. Ecuación de Wald

Consideremos ahora un camino aleatorio $S_n = S_0 + \xi_1 + ... + \xi_n$, donde $\{\xi_n\}_n$ son variables i.i.d. Supongamos que $\mu = E(\xi_i) < \infty$. Entonces $M_n = S_n - n\mu$ es una martingala respecto a S_n .

- Si T es un tiempo de parada con $E(T) < \infty$, entonces $E(S_T - L_0) = \mu E(T)$.

Teniendo esto en cuenta, si consideramos un juego con ganacia 1 con probabilidad p y $y-1$ con probabilidad $1 - p > p$, y comenzamos con x euros, el tiempo medio en perderlo todo $(E_x V_0)$ seria $\frac{x}{1-p}$.

III-B. Algunos artículos científicos relacionados.

- Cadenas de Markov: Estudio sobre el problema de la ruina del jugador, Autor: Marc Martínez, Universitat autònoma de Barcelona, Encontró mediante diferentes maneras de plantear la estrategia de la Martingala, el juego que mejor se adapte a las necesidades del jugador, en este caso dos opciones o bien ampliar la duración del juego o aumentar la probabilidad de ganancia. Mediante cálculo de probabilidades y los procesos de simulación con código R,sirvieron para encontrar la situación más favorable en el problema.
- PORTILLA, LILIANA MARGARITA; ARIAS MONTOYA, LEONEL; FERNÁNDEZ HENAO, SERGIO AUGUSTO ,MARTINGALAS Y EL JUEGO DE LA RULETA, Scientia Et Technica, vol. XV, núm. 43, diciembre, 2009, pp. 124-129 ,Universidad Tecnológica de Pereira,En este trabajo se habló sobre el juego de la ruleta bajo el concepto de los procesos estocásticos, más específicamente sobre la martingala, ya que va muy relacionada con esta temática estocástica. Seguidamente se muestra un ejemplo de apuestas donde un jugador intenta ganarle a otro que nunca se rinde, lanzando una moneda al aire y apostando por la cara, de está manera mediante una simulación se observa el comportamiento de este tipo de apuestas, bajo el concepto de las martingalas,

también se analiza los efectos presentados al cambiar los montos iniciales de apuesta y el trabajar con una moneda balanceada y otra desbalanceada. Este ejemplo es simulado con un código creado en el software R, el cual muestra el comportamiento de la apuesta y se puede observar como varía la posibilidad de ganar o perder, que en este caso tiene un tiempo t para cuando el jugador gana 10 pesos o se queda sin dinero para apostar. Pereira, Colombia

III-C. Desigualdad de Azuma-Hoeffding

Supongamos que $X_n, n \geq 1$ es una martingala tal que $X_0 = 0$ y $|X_i - X_{i-1}| \leq d_i, 1 \leq i \leq n$ para algunas constantes $d_i, 1 \leq i \leq n$. Luego para todo $t > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > t) \leq 2exp(\frac{-t^2}{2\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2})$$

Tenga en cuenta que en el caso especial cuando $d_i = d$, podemos tomar $t = xn$ y obtener p un límite superior $2exp(\frac{-x^{2n}}{2d^2})$ - que tiene la forma prometida anteriormente. Tenga en cuenta que esto es coherente con el Chernoff vinculado para el caso especial X_n es la suma de i.i.d. términos de media cero, aunque es aplicable solo en el caso especial de incrementos acotados.

IV. DISEÑO DEL EXPERIMENTO

En el presente artículo se utilizarán algunas técnicas básicas en el lenguaje R tales como :

- Funciones básicas como if, while para poder hacer replicas de un posible juego y poder encontrar soluciones y/o valores que reafirmen nuestras predicciones.
- Paquete de distribuciones, como por ejemplo rbinom(), esto nos servirá para posibles gráficas que muestren el comportamiento de nuestros experimentos.

REFERENCIAS

[1] M. Loeve, Probability theory II (Book graduate texts in Mathematics), Ed. Iberica: Springer-Verlag © 1978

[2] Williams, David (1991). Probability with Martingales. Cambridge University Press. ISBN 0-521-40605-6.

[3] H. Poor, An Introduction to Signal Detection and Estimation. New York: Springer-Verlag, 1985, ch. 4. Chicago, IL.

[4] Giraldo. G. Norman. Procesos Estocásticos.Universidad Nacional de Colombia. Medellín. 2006.