

# Martingalas: el teorema de parada de martingalas, la desigualdad de Wald y la desigualdad de Azuma-Hoeffding\*’\*\*

Morante Moran David Willians<sup>1</sup>, Valdivia Fuentes Juan Daniel<sup>2</sup>, Geronimo Aparicio Mirian Andrea<sup>3</sup>  
Universidad Nacional de Ingeniería - Facultad de Ciencias - Escuela profesional de Matemática

**Resumen**—Se hablará de los procesos estocásticos, que sirven para usar magnitudes aleatorias que varían con el tiempo o para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo. También estudiamos los teoremas y desigualdades en la cual intervienen las martingalas, una vez entendido eso trataremos problemas y aplicaciones interesantes que se presentan con mayor frecuencia en la vida cotidiana, dándoles una solución y integrándole a ello el uso del lenguaje R.

## INTRODUCCIÓN

Dando un preámbulo a lo que será una definición formal, las martingalas son procesos estocásticos que modelan juegos justos; en promedio no se pierde ni se gana en la siguiente observación del proceso.

Existen muchos problemas interesantes a tratar relacionados a este proceso estocástico, en este artículo abordaremos en particular el problema conocido como "La ruina del jugador", en el cual se utilizará el teorema de parada para martingalas acotadas y las martingalas.

El objetivo de este estudio es explicar y enfatizar más la teoría de probabilidades y desarrollar algún algoritmo y códigos en R que faciliten la comprensión teórica desde el punto de vista de la ciencia computacional.

Para ello en la sección II partiremos definiendo los conceptos de *Filtración* y *Esperanza condicional* para así definir en la sección III lo que es una *Martingala* junto con sus teoremas y propiedades elementales. Luego de tener una visión amplia se abordará en la sección VI los *Tiempos de paradas* para luego enunciar el *Teorema de paradas para martingalas acotadas*, dando como ejemplo lo que es un camino aleatorio simple. Conceptos que son necesarios para abordar los dos teoremas y el problema aplicativo sobre el que versará el trabajo. En el Desarrollo del experimento mostraremos las técnicas, y las propiedades que utilizamos para obtener así la demostración de los teoremas, finalizando con la implementación del código R y la reproducción de resultados reportados en dos artículo científico relacionados con Cadenas de Markov y la estrategia de la Martingala.

\*Procesos Estocásticos

\*\*Trabajo colaborativo disponible en Github

<sup>1</sup>Morante Moran David - 20170333E - Escuela profesional de Matemática

<sup>2</sup>Valdivia Fuentes Juan Daniel -20162677K - Escuela profesional de Matemática

<sup>3</sup>Geronimo Aparicio Mirian - 20172192J - Escuela profesional de Matemática

## DEFINICIONES

### I. FILTRACIÓN

Una filtración  $\mathbb{F}$  es un conjunto indexado  $\mathcal{F}_i$  de subestructuras de una estructura algebraica  $\mathcal{F}$ , recorriendo el subíndice  $i$  cierto conjunto  $I$  conjunto totalmente ordenado cumpliendo la condición:

$$\forall i, j \in I : i \leq j \Rightarrow \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$$

si el índice  $i$  es el parámetro tiempo de un proceso estocástico entonces la filtración puede interpretarse como una representación de todo el histórico de información hasta el instante dado.

### II. ESPERANZA CONDICIONAL

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad, con una variable aleatoria  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  y un sub- $\sigma$ -álgebra

A continuación, una esperanza condicional de  $X$  dado por  $\mathcal{H}$  (denotado como  $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ ) es cualquier  $\mathcal{H}$ -función medible  $(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n)$  que satisface :

$$\int_H \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] d\mathbb{P}(\omega) = \int_H X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

para cada  $H \in \mathcal{H}$ .

Tenga en cuenta que  $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$  es simplemente el nombre de la función esperanza condicional.

### III. MARTINGALA

Una definición básica de una martingala de tiempo discreto es un proceso estocástico de tiempo discreto (es decir, una secuencia de variables aleatorias)  $X_1, X_2, X_3, \dots$  que satisface para cualquier momento  $n$ :

- $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$
- $\mathbb{E}(X_{n+1} | X_1, \dots, X_n) = X_n$

Es decir, el valor esperado condicional de la siguiente observación, dadas todas las observaciones anteriores, es igual a la observación más reciente.

### IV. MARTINGALA CON RESPECTO A OTRA SECUENCIA

De manera más general, se dice que una secuencia  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  es una martingala con respecto a otra secuencia  $X_1, X_2, X_3, \dots$  si para todo  $n$ .

- $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$
- $\mathbb{E}(Y_{n+1} | X_1, \dots, X_n) = Y_n$

Del mismo modo, una martingala de tiempo continuo con respecto al proceso estocástico  $X(t)$  es un proceso estocástico  $Y(t)$  tal que para todo  $t$

- $\mathbb{E}(Y_n) < \infty$
- $\mathbb{E}(Y_t | \mathcal{F}_s, \tau \leq s) = Y_s, \forall s \leq t.$

Esto expresa la propiedad de que la expectativa condicional de una observación en el tiempo  $t$ , dadas todas las observaciones hasta el tiempo  $s$ , es igual a la observación en el tiempo  $s$  (por supuesto, siempre que  $s \leq t$ ). Además  $Y_n$  es medible con respecto a  $X_1, \dots, X_n$ .

## V. DEFINICIÓN GENERAL

Sea un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Sea  $\mathbb{F}$  una filtración de  $\sigma$ -álgebras:  $\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$

Sea  $X(t) = X_1, X_2, \dots, X_n$  una sucesión de variables aleatorias que forman un proceso estocástico.

Entonces el proceso estocástico  $X(t), t \geq 0$  adaptado a la filtración  $\mathbb{F}$  recibe el nombre de martingala si :

$$\mathbb{E}[X(t) | \mathcal{F}_s] = X(s)$$

Esto es, un proceso estocástico es una martingala cuando su esperanza en tiempo futuro es precisamente el valor que la variable tiene en tiempo presente. Esto significa que el proceso no tiene deriva estadística.

## VI. TIEMPOS DE PARADAS

Sea  $Y_n$  una supermartingala con respecto a  $X_n$ , y sea  $H_n$  una función de  $(X_0, X_1, \dots, X_n)$  que cumple  $0 \leq H_n \leq c_n$ . Entonces:

$$W_n = W_0 + \sum_{m=1}^n H_m(Y_m - Y_{m-1})$$

, es una supermartingala. La interpretación de esto es que si un juego es desfavorable seguirá siendolo independientemente de cómo apostemos en cada momento. Decimos que **T** es un **tiempo de parada** respecto a  $X_n$  cuando la ocurrencia o no del suceso "paramos en el instante  $n$ " (**T=n**) se puede determinar a partir de los valores  $X_0, X_1, \dots, X_n$ .

*VI-1. Propiedades:* Tiempos de paradas

Denotemos  $T \wedge n$  el mínimo de  $T$  y  $n$ . Si  $Y_n$  es una martingala con respecto a  $X_n$  y **T** es un tiempo de parada con respecto a  $X_n$ , entonces el proceso (truncado)  $Y_{T \wedge n}$  es una martingala con respecto a  $X_n$

## VII. TEOREMA DE PARADAS PARA MARTINGALAS ACOTADAS

Sea  $M_n$  una martingala con respecto a  $X_n$ , y sea **T** un tiempo de parada con respecto a  $X_n$ , con  $\mathbb{P}(\mathbf{T} < \infty) = 1$ . Si existe una constante  $k$  de manera que  $|M_{T \wedge n}| \leq k, \forall n$ , entonces:

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$$

La idea bajo la condición  $|M_{T \wedge n}| \leq k$  para algún  $k$  es que la cantidad de dinero disponible es limitada. En caso contrario, podrían darse situaciones en las que aplicando un criterio de parada tengamos siempre una ganancia.

## PROBLEMAS GENERALES

### I. DESIGUALDAD DE AZUMA-HOEFFDING

Supongamos que  $X_n, n \geq 1$  es una martingala tal que  $X_0 = 0$  y  $|X_i - X_{i-1}| \leq d_i, 1 \leq i \leq n$  para algunas constantes  $d_i, 1 \leq i \leq n$ . Luego para todo  $t > 0$ ,

$$\mathbb{P}(|X_n| > t) \leq 2 \exp\left(\frac{-t^2}{2 \sum_{i=1}^n d_i^2}\right)$$

Tenga en cuenta que en el caso especial cuando  $d_i = d$ , podemos tomar  $t = \sqrt{2n}d$  y obtener  $p$  un límite superior  $2 \exp\left(\frac{-x^2}{2d^2}\right)$  - que tiene la forma prometida anteriormente. Tenga en cuenta que esto es coherente con el Chernoff vinculado para el caso especial  $X_n$  es la suma de i.i.d. términos de media cero, aunque es aplicable solo en el caso especial de incrementos acotados.

### II. LEMA DE WALD

Una variable aleatoria  $N$  que toma valores en los enteros no negativos es un "tiempo de paro" con respecto a  $X_n$  si la ocurrencia (o no ocurrencia) del evento  $[N = n]$  puede determinarse observando las variables  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ . Por ejemplo suponga  $X_n$  son v.a. aleatorias independientes tales que

$$P[X_n = 0] = P[X_n = 1] = \frac{1}{2}, n = 1, 2, 3, \dots, n$$

Entonces, la variable

$$N = \min\{n : X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = 10\}$$

es un tiempo de paro con respecto a  $X_n$  (Lema de Wald). Si  $X_1, X_2, X_3, \dots$  son variables independientes e idénticamente distribuidas con esperanza finita y  $N$  es un tiempo de paro con respecto a esta sucesión de variables tal que  $EN < \infty$ , entonces

$$E \sum_{i=1}^N X_i = EN \cdot EX$$

### III. "LA RUINA DEL JUGADOR"

Dicho problema consiste en calcular la probabilidad de que un jugador arruine al contrario en un juego a un número indeterminado de partidas, cuando los dos jugadores inician el juego con un cierto número de monedas cada uno.

Sea  $S_n = S_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$ , donde  $\xi_i$  son i.i.d con  $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p$  y  $\mathbb{P}(\xi_i = -1) = q := 1 - p$ . Ya hemos visto que  $g(S_n)_n$  es una martingala para  $g(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^x$ .

Sea  $T = \min\{n : S_n \notin (a, b)\}$

- $T$  es un tiempo de parada
- $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ .
- Si  $S_0 = x$ , se cumple  $(q/p)^x = (q/p)^a + [(q/p)^b - (q/p)^a] \mathbb{P}(S_T = b)$

Si definimos  $V_y = \min\{n \leq 0 : S_n = y\}$ .

$$\mathbb{P}_x(V_b < V_a) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^a}{(q/p)^b - (q/p)^a}$$

### ESTADO DEL ARTE

Algunos artículos que hablan sobre el problema de la ruina del jugador, la ruleta y el estudio de las martingalas y la utilización de sus propiedades.

- Cadenas de Markov: Estudio sobre el problema de la ruina del jugador, Autor: Marc Martínez, Universitat autònoma de Barcelona, Encontró mediante diferentes maneras de plantear la estrategia de la Martingala, el juego que mejor se adapte a las necesidades del jugador, en este caso dos opciones o bien ampliar la duración del juego o aumentar la probabilidad de ganancia. Mediante cálculo de probabilidades y los procesos de simulación con código R, sirvieron para encontrar la situación más favorable en el problema.
- PORTILLA, LILIANA MARGARITA; ARIAS MONTOYA, LEONEL; FERNÁNDEZ HENAO, SERGIO AUGUSTO, MARTINGALAS Y EL JUEGO DE LA RULETA, Scientia Et Technica, vol. XV, núm. 43, diciembre, 2009, pp. 124-129, Universidad Tecnológica de Pereira, En este trabajo se habló sobre el juego de la ruleta bajo el concepto de los procesos estocásticos, más específicamente sobre la martingala, ya que va muy relacionada con esta temática estocástica. Seguidamente se muestra un ejemplo de apuestas donde un jugador intenta ganarle a otro que nunca se rinde, lanzando una moneda al aire y apostando por la cara, de esta manera mediante una simulación se observa el comportamiento de este tipo de apuestas, bajo el concepto de las martingalas, también se analiza los efectos presentados al cambiar los montos iniciales de apuesta y el trabajar con una moneda balanceada y otra desbalanceada. Este ejemplo es simulado con un código creado en el software R, el cual muestra el comportamiento de la apuesta y se puede observar como varía la posibilidad de ganar o perder, que en este caso tiene un tiempo  $t$  para cuando el jugador gana 10 pesos o se queda sin dinero para apostar. Pereira, Colombia

### DISEÑO DEL EXPERIMENTO

- Para demostrar la desigualdad de Azuma se utilizará la convexidad de la función exponencial, y su representación como serie infinita de potencias así como también se utilizará algunas estimaciones de la función factorial y la función exponencial.
- Una de las propiedades de la esperanza condicional que se utiliza para la demostración de la desigualdad de Azuma :

Si  $X$  es una v.a integrable con  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  entonces

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] = \mathbb{E}(X)$$

- Teorema de la convergencia monotonía

- teorema de parada de martingalas en la demostración del lema de Wald

## EXPERIMENTO Y RESULTADO

### I. PRUEBA (DESIGUALDAD DE AZUMA-HOEFFDING)

$f(x) = \exp(\lambda x)$  es una función convexa en  $x$  para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces tenemos  $f(-d_i) = \exp(-\lambda d_i)$  y  $f(d_i) = \exp(\lambda d_i)$ . Usando convexidad tenemos que cuando  $|x/d_i| \leq 1$

$$\exp(\lambda x) = f(x) = f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{d_i} + 1\right)(d_i) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{d_i}\right)(-d_i)\right)$$

utilizando una propiedad de convexidad de la función exponencial tenemos luego que :

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{d_i} + 1\right)f(d_i) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{d_i}\right)f(-d_i) \\ &= \frac{f(d_i) + f(-d_i)}{2} + \frac{f(d_i) - f(-d_i)}{2}x \end{aligned} \quad (1)$$

Además, para cada  $a$

$$\begin{aligned} \frac{\exp(a) + \exp(-a)}{2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(2k)!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{2^k k!} \quad (\text{porque } 2^k k! \leq (2k)!) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a^2}{2}\right)^k}{k!} = \exp\left(\frac{a^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Concluimos que por cada  $x$  tal que  $|x/d_i| \leq 1$

$$\exp(\lambda x) \leq \exp\left(\frac{d_i^2}{2}\right) + \frac{\exp(\lambda d_i) - \exp(-\lambda d_i)}{2}x \quad (3)$$

Ahora pasamos a nuestra secuencia de martingala  $X_n$ . Para cada  $t > 0$  y cada  $\lambda > 0$  tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n) &= \mathbb{P}(\exp(\lambda X_n) \geq \exp(\lambda t)) \\ &\leq \exp(-\lambda t) \mathbb{E}[\exp(\lambda X_n)] \\ &= \exp(-\lambda t) \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \sum_{1 \leq i \leq n} (X_i - X_{i-1})\right)\right] \end{aligned}$$

donde se utilizó  $X_0$  en la última igualdad. Aplicando la propiedad de la torre de la esperanza condicional tenemos:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \sum_{1 \leq i \leq n} (X_i - X_{i-1})\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda (X_n - X_{n-1})\right) \exp\left(\lambda \sum_{1 \leq i \leq n-1} (X_i - X_{i-1})\right) \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right]\right] \end{aligned}$$

Ahora, como  $X_i, i \leq n-1$  son medibles con respecto a  $\mathcal{F}_{n-1}$ , entonces

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda (X_n - X_{n-1})\right) \exp\left(\lambda \sum_{1 \leq i \leq n-1} (X_i - X_{i-1})\right) \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= \exp\left(\lambda \sum_{1 \leq i \leq n-1} (X_i - X_{i-1})\right) \mathbb{E}[\exp(\lambda (X_n - X_{n-1})) | \mathcal{F}_{n-1}] \end{aligned}$$

$$\leq \exp(\lambda \sum_{1 \leq i \leq n-1} (X_i - X_{i-1})) \times \\ \times \left( \exp\left(\frac{\lambda^2 d_n^2}{2}\right) + \frac{\exp(d_i) - \exp(-\lambda d_i)}{2} \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} F_{n-1}] \right)$$

donde (3) se utilizó en la última desigualdad. La propiedad de la Martingala implica  $\mathbb{E}[X_n - X_{n-1} \mathcal{F}_{n-1}] = 0$ , obteniendo un limite superior

$$M = \mathbb{E} \left[ \exp(\lambda \sum_{1 \leq i \leq n} (X_i - X_{i-1})) \right] \\ M \leq \mathbb{E} \left[ \exp(\lambda \sum_{1 \leq i \leq n-1} (X_i - X_{i-1})) \right] \exp\left(\frac{\lambda^2 d_n^2}{2}\right)$$

Iterando más obtenemos el siguiente límite superior en  $\mathbb{P}(X_n \geq t)$ :

$$\exp(-\lambda t) \exp\left(\frac{\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda^2 d_i^2}{2}\right)$$

Al optimizar la elección de  $\lambda$ , vemos que el límite más cercano se obtiene al establecer  $\lambda = \frac{t}{\sum_i d_i^2} > 0$  o que lleva a un límite superior

$$\mathbb{P}(X_n \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_i d_i^2}\right)$$

Un enfoque similar utilizando  $\lambda < 0$  da para cada  $t > 0$

$$\mathbb{P}(X_n \leq -t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_i d_i^2}\right)$$

Combinando, obtenemos el resultado requerido.

## II. PRUEBA (LEMA DE WALD)

Para simplificar la demostración supondremos que las variables  $X_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , son no negativos. Ahora definamos

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } N \geq n \\ 0 & \text{si } N < n \end{cases}$$

Y observe que

$$\sum_1^N X_n = \sum_1^\infty X_n Y_n$$

Del teorema de convergencia monotona se deduce que

$$E \sum_1^N X_n = E \sum_1^\infty X_n Y_n = \sum_1^\infty E(X_n Y_n)$$

Por otra parte, tenemos que  $Y_n$  está completamente determinada por el evento  $\{N < n-1\}$ , lo cual implica que sólo depende de las variables  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n-1}$  y no de las variables  $X_n, X_{n+1}, \dots$ . En consecuencia,  $Y_n$  es independiente de  $X_n$ , lo cual implica que

$$E \sum_1^N X_n = \sum_1^\infty E(X_n Y_n) = \sum_1^\infty E X_n E Y_n \\ = E X \sum_1^\infty E Y_n = E X \sum_1^\infty P[N \geq n] \\ = E X \cdot E N$$

## III. DESARROLLO DE LA RUINA DEL JUGADOR

En este caso que trataremos de la ruina del jugador trata el problema de una persona con un capital "X" pero siempre finito, que se enfrenta a un contrincante con capital infinito como en el caso de un casino.

Elegimos juego de la ruleta francesa, que tiene 37 casillas numeradas, con tan solo una casilla de valor 0, quedando 18 casillas negras y 18 casillas rojas de manera que la probabilidad de ganar es  $p = \frac{18}{37} = 0,486$ .

Apostamos  $n$  veces, empezando por  $S/1$  y aplicando la estrategia de martingala, la cual consiste en ir doblando la apuesta cuando perdamos hasta que ganemos.

Se procede de la siguiente manera:

- Apostamos  $S/1$  a negro. En caso de ganar, repetimos el mismo paso, si se pierde, iremos al siguiente paso
- Apostamos  $S/2$  a negro, doblando la apuesta anterior, si ganamos, volvemos al paso 1, y si perdemos seguimos
- Apostamos  $S/4$  a negro, doblando la cantidad de dinero, si ganamos, volvemos al paso 1, si perdemos seguiremos doblando la apuesta

Vayamos ahora con un ejemplo simple de la estrategia martingala aplicada en la ruleta de un casino, apostando a rojo-negro, presentamos las condiciones iniciales del ejemplo a continuación:

- Las probabilidades de ganar en este juego es  $p = 0,4864$
- La probabilidad de perder en este juego es  $q = 0,5135$ .
- El capital inicial del jugador será de 100 soles y nuestro dinero objetivo será de 110 soles.

Se pueden dar dos situaciones, que logremos el objetivo o que nuestro capital se reduzca a 0, situación de ruina del jugador. Mediante la fórmula comentada con anterioridad y teniendo en cuenta que  $q \neq p$ , obtenemos el siguiente resultado: Supongamos que entramos en el casino con una cantidad de 100e, y con un objetivo marcado de conseguir 110 e. Se pueden dar dos situaciones, que logremos el objetivo o que nuestro capital se reduzca a 0, situación de ruina del jugador. Mediante la fórmula comentada con anterioridad y teniendo en cuenta que  $q \neq p$ , obtenemos el siguiente resultado:

$$q_{100} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{100} - \left(\frac{q}{p}\right)^{110}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{110}} \quad (4)$$

Con una probabilidad  $p = 0,486$  y  $q = 0,513$ , obtenemos una probabilidad de ruina del 41,87%.

El tiempo de parada para este juego sería cuando el jugador alcance el dinero objetivo o se quede en bancarrota.

El resultado que se tomó como referencia del artículo base [5] que sigue la estrategia de la martingala apostando  $S/1$

```

#R version 3.3.2
N<-1000 #simulaciones
xt<- 110 # Dinero Objetivo
simulacion <- data.frame(partidas=
  → integer(0), resultado= integer(0),
  → ganadas=integer(0),
  → perdidas=integer(0))
for (i in 1:N){
x0<-100 #dinero inicial
apu<-1 # dinero que apostamos por
  → partida
g<-1
p<-1
j<-1
while(x0>0 & x0<xt){ # & apu<=x0
resultado<-runif(1,0,1)
if(x0<apu){apu = x0}
if(resultado>=(18/37)){
x0<-x0+apu
g<-g+1
apu <- 1
}else{
x0<-x0-apu
apu<-apu*2
p<-p+1
}
j<-j+1
}
simulacion[i,1]<-j
simulacion[i,2]<-x0
simulacion[i,3]<-g
simulacion[i,4]<-p
}
simulacion
head(simulacion)
mean(simulacion$partidas)
max(simulacion$partidas)
summary(simulacion)
hist(simulacion$partidas,
  → labels=TRUE, ylab="Frecuencia",
  → ylim=c(0,1050), nclass=3,col="red",
  → main="Simulacion_ruleta")

```

Nuestro objetivo fijado era obtener S/. 10 partiendo de un capital inicial de S/.100 , observamos que el promedio de partidas por cada jugada es de aproximadamente 22.631 partidas. Si miramos el histograma vemos como de las 1000 simulaciones o partidas, un 94,3% se encuentran por debajo de las 50 partidas. Si calculamos el número de partidas en las que logramos el objetivo mediante las simulaciones del método de la Martingala, obtenemos un 87.69% .

	partidas	resultado	ganadas	perdidas
1	19	110	11	9
2	21	110	11	11
3	20	110	11	10
4	20	110	11	10
5	15	110	11	5
6	14	110	11	4
[1]	22.631			
[1]	182			
	partidas	resultado	ganadas	perdidas
Min. :	8.00	Min. : 0.0	Min. : 1.00	Min. : 1.0
1st Qu.:	17.00	1st Qu.:110.0	1st Qu.:11.00	1st Qu.: 8.0
Median :	19.00	Median :110.0	Median :11.00	Median :10.0
Mean :	22.63	Mean :100.9	Mean :12.13	Mean :11.5
3rd Qu.:	22.00	3rd Qu.:110.0	3rd Qu.:11.00	3rd Qu.:13.0
Max. :	182.00	Max. :110.0	Max. :89.00	Max. :95.0

Figura 1. Tabla de valores de la muestra experimental

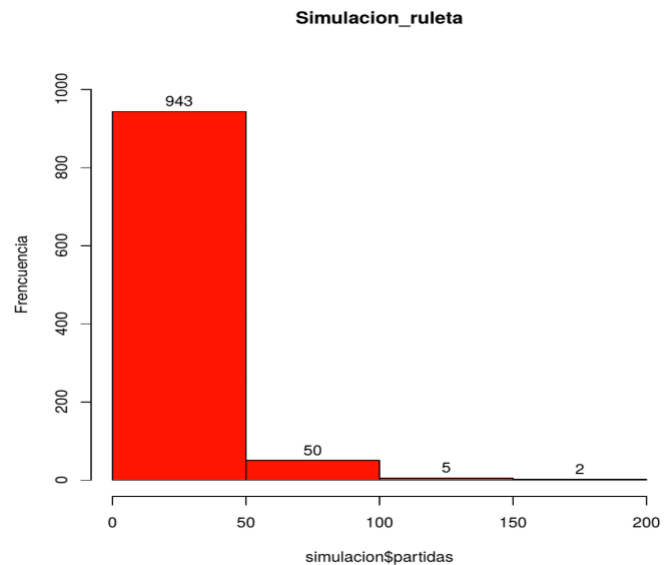


Figura 2. Histograma que muestra la frecuencia con la cual se llega al tiempo de parada en cierta cantidad de partidas

Compararemos el resultado anterior con el nuestro que en vez de apostar S/.1 se apuesta una cantidad de S/.17 .Es evidente que no lograremos la cantidad deseada pues no llegará a 110 soles a los mas llegará a S/.134 El código R que se implementa para simular 1000 juegos en los cuales el resultado es alcanzar los 110 soles o perder hasta quedar en 0 soles es

```

#R version 3.3.2
N<-1000 #simulaciones
xt<- 110 # Dinero Objetivo
simulacion <- data.frame(partidas=
  → integer(0), resultado= integer(0),
  → ganadas=integer(0),
  → perdidas=integer(0))
for (i in 1:N){
x0<-100 #dinero inicial
apu<-17 # dinero que apostamos por
  → partida
g<-1
p<-1
j<-1
while(x0>0 & x0<xt){ # & apu<=x0
resultado<-runif(1,0,1)
if(x0<apu){apu = x0}
if(resultado>=(18/37)){
x0<-x0+apu
g<-g+1
apu <- 1
}else{
x0<-x0-apu
apu<-apu*2
p<-p+1
}
j<-j+1
}
simulacion[i,1]<-j
simulacion[i,2]<-x0
simulacion[i,3]<-g
simulacion[i,4]<-p
}
simulacion
head(simulacion)
mean(simulacion$partidas)
max(simulacion$partidas)
summary(simulacion)
hist(simulacion$partidas,
  → labels=TRUE,ylab="Frecuencia",
  → ylim=c(0,1050), nclass=3,col="red",
  → main="Simulacion_ruleta")

```

En los resultados podemos ver como la probabilidad de ruina con estas condiciones es de 0,0654, inferior a la probabilidad teórica, aunque cada vez mas parecidas entre ellas. En los juegos de azar regulados por salas de apuestas o casinos, hay circunstancias que son totalmente ajenas al jugador, este es el caso de las probabilidades de acierto o fallo, el juego es el que es, y estas probabilidades no varían. En cambio el jugador puede decidir aunque con limitaciones sobre las cantidades que apuesta y tiene poder de decisión sobre el dinero que quiere jugar en total.

```

partidas resultado ganadas perdidas
1      3      117      2      2
2      2      117      2      1
3      2      117      2      1
4      3      117      2      2
5      3      117      2      2
6      3      117      2      2
[1] 6.038
[1] 82
partidas      resultado      ganadas      perdidas
Min.   : 2.000   Min.   : 0     Min.   : 1.000   Min.   : 1.000
1st Qu.: 2.000   1st Qu.:117   1st Qu.: 2.000   1st Qu.: 1.000
Median : 2.000   Median :117   Median : 2.000   Median : 1.000
Mean   : 6.038   Mean   :102   Mean   : 3.665   Mean   : 3.373
3rd Qu.: 3.000   3rd Qu.:117   3rd Qu.: 2.000   3rd Qu.: 2.000
Max.   :82.000   Max.   :117   Max.   :42.000   Max.   :42.000

```

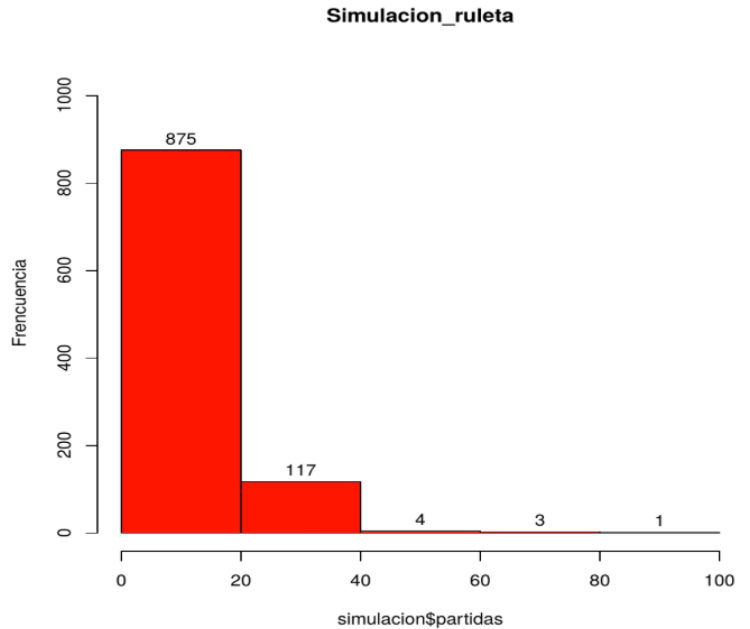


Figura 3. Histograma de frecuencias cuando se comienza a apostar con S./17 siguiendo la estrategia de la martingala

```

ruina_jugador=function(u,N,p){
k=u;j=0; C=u
while(k>0&&k<N){
r=rbinom(1,1,p)
e=2*r-1; y=k+e; k=y; j=j+1
C=c(C,k)}
plot(0:j,C,type="o",ylim=c(0,N))
abline(h=c(0,N),v=c(0,j))
a=j/2; b=.8*N
text(a,b,labels=paste('Num. Apuestas',
  → '=', j),pos=3,cex=2,col="blue")
j}
##EJEMPLO
ruina_jugador(2,100,.486)
[1] 172

```

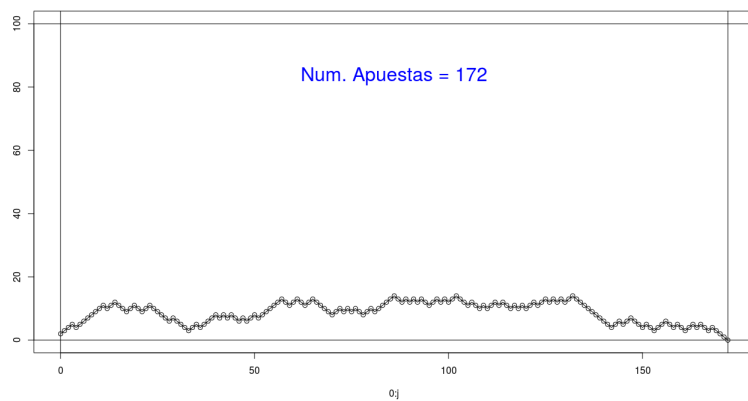


Figura 4. Polígono de frecuencias para 172 apuestas

#### REFERENCIAS

- [1] M. Loeve, Probability theory II (Book graduate texts in Mathematics), Ed. Iberica: Springer-Verlag © 1978
- [2] Williams, David (1991). Probability with Martingales. Cambridge University Press. ISBN 0-521-40605-6.
- [3] H. Poor, An Introduction to Signal Detection and Estimation. New York: Springer-Verlag, 1985, ch. 4. Chicago, IL.
- [4] Giraldo, G. Norman. Procesos Estocásticos. Universidad Nacional de Colombia. Medellín. 2006. c6 Marc Martínez, Xavier Bardina. Cadenas de Markov: Estudio sobre el problema de la ruina del jugador. Universidad autónoma de Barcelona. España. 2017.