Martingalas: el teorema de parada de martingalas, la desigualdad de Wald y la desigualdad de Azuma-Hoeffding*'**

Morante Moran David Williians[1], Valdivia Fuentes Juan Daniel[2], Geronimo Aparicio Mirian Andrea[3]
Universidad Nacional de Ingeniería - Facultad de Ciencias - Escuela profesional de Matemática

***Resumen*—Se hablará de los procesos estocásticos, que sirven para usar magnitudes aleatorias que varían con el tiempo o para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo. Tambien estudiamos los teoremas y desigualdades en la cual intervienen las martingalas, una vez entendido eso trataremos problemas y aplicaciones interesantes que se presentan con mayor frecuencia en la vida cotidiana, dándoles una solución y integrandole a ello el uso del lenguaje R.**

INTRODUCCIÓN

Dando un preámbulo a lo que será una definición formal, las martingalas son procesos estocásticos que modelan juegos justos; en promedio no se pierde ni se gana en la siguiente observación del proceso.

Existen muchos problemas interesantes a tratar relacionados a este proceso estocástico, en este artículo abordaremos en particular el problema conocido como "La ruina del jugador", en el cual se utilizará el teorema de parada para martingalas acotadas y las martingalas.

El objetivo de este estudio es explicar y enfatizar más la teoría de probabilidades y desarrollar algun algoritmo y códigos en R que faciliten la comprensión teórica desde el punto de vista de la ciencia computacional.

Para ello en la sección II partiremos definiendo los conceptos de *Filtración* y *Esperanza condiocional* para asi definir en la sección III lo que es una *Martingala* junto con sus teoremas y propiedades elementales. Luego de tener una vision amplia se abordará en la sección VI los *Tiempos de paradas* para luego enunciar el *Teorema de paradas para martingalas acotadas*, dando como ejemplo lo que es un camino aleatorio simple. Conceptos que son necesarios para abordar los dos teoremas y el problema aplicativo sobre el que versará el trabajo. En el Desarrollo del experimento mostraremos las técnicas, y las propiedades que utilizamos para obtener asi la demostracion de los teoremas, finalizando con la implementación del código R y la reproducción de resultados reportados en dos artículo científico relacionados con Cadenas de Markov y la estrategia de la Martingala.

*Procesos Estocásticos
*Trabajo colaborativo disponible en Github
[1]Morante Moran David - 20170333E - Escuela profesional de Matemática
[2]Valdivia Fuentes Juan Daniel -20162677K - Escuela profesional de Matemática
[3]Geronimo Aparicio Mirian - 20172192J - Escuela profesional de Matemática

DEFINICIONES

I. Filtración

Una filtración $\mathbb{F}$ es un conjunto indexado $\mathscr{F}_i$ de subestructuras de una estructura algebraica $\mathscr{F}$, recorriendo el subíndice i cierto conjunto I conjunto totalmente ordenado cumpliendo la condición:

$$\forall i, j \in I : i \leq j \Rightarrow \mathscr{F}_i \subseteq \mathscr{F}_j$$

si el indice i es el parámetro tiempo de un proceso estocástico entonces la filtración puede interpretarse como una representación de todo el histórico de información hasta el instante dado.

II. Esperanza condicional

Sea (Ω,$\mathscr{F}$,$\mathbb{P}$) un espacio de probabilidad, con una variable aleatoria X:$\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y un sub-σ-algebra
A continuación, una esperanza condicional de X dado por $\mathscr{H}$ (denotado como $\mathbb{E}$ [X|$\mathscr{F}$]) es cualquier $\mathscr{H}$- función medible ($\Omega \rightarrow$R^n) que satisface :

$$\int_H \mathbb{E}[X|\mathscr{F}]d\mathbb{P}(\omega) = \int_H X(\omega)d\mathbb{P}(\omega)$$

para cada H $\in \mathscr{H}$.
Tenga en cuenta que $\mathbb{E}$ [X|$\mathscr{H}$] es simplemente el nombre de la función esperanza condicional.

III. Martingala

Una definición básica de una martingala de tiempo discreto es un proceso estocástico de tiempo discreto (es decir, una secuencia de variables aleatorias)X_1, X_2, X_3, ... que satisface para cualquier momento n:

- $\mathbb{E}(|X_n|)<\infty$
- $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_1,\ldots,X_n)=X_n$

Es decir, el valor esperado condicional de la siguiente observación, dadas todas las observaciones anteriores, es igual a la observación más reciente.

IV. Martingala con respecto a otra secuencia

De manera más general, se dice que una secuenciaY_1, Y_2, Y_3... es una martingala con respecto a otra secuencia X_1, X_2, X_3, ... si para todo n.

- $\mathbb{E}(|X_n|) <\infty$
- $\mathbb{E}(Y_{n+1}|X_1,\ldots,X_n)=Y_n$

Del mismo modo, una martingala de tiempo continuo con respecto al proceso estocástico X(t) es un proceso estocástico Y(t) tal que para todo t

- $\mathbb{E}(|Y_n|) <\infty$
- $\mathbb{E}(Y_t|X_\tau, \tau \leq s)$=$Y_s$, $\forall s \leq t$.

Esto expresa la propiedad de que la expectativa condicional de una observación en el tiempo t, dadas todas las observaciones hasta el tiempo s, es igual a la observación en el tiempo s (por supuesto, siempre que $s \leq t$). Ademas Y_n es medible con respecto a $X_1,...,X_n$.

V. Definición general

Sea un espacio de probabilidad (Ω,$\mathscr{F}$,$\mathbb{P}$). Sea $\mathbb{F}$ una filtración de σ-algebras: $\mathscr{F}_1 \subset ... \subset \mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$

Sea $X(t) = X_1, X_2, ..., X_n$ una sucesion de variables aleatorias que forman un proceso estocástico.
Entonces el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ adaptado a la filtración $\mathbb{F}$ recibe el nombre de martingala si :

$$\mathbb{E}[X(t)|\mathscr{F}_s] = X(s)$$

Esto es, un proceso estocástico es una martingala cuando su esperanza en tiempo futuro es precisamente el valor que la variable tiene en tiempo presente. Esto significa que el proceso no tiene deriva estadística.

VI. Tiempos de paradas

Sea Y_n una supermartingala con respecto a X_n, y sea H_n una función de $(X_0, X_1, ..., X_n)$ que cumple $0 \leq H_n \leq c_n$.Entonces:

$$W_n = W_0 + \sum_{m=1}^{n} H_m(Y_m - Y_{m-1})$$

, es una supermartingala. La interpretación de esto es que si un juego es desfavorable seguirá siendolo independientemente de cómo apostemos en cada momento. Decimos que **T** es un **tiempo de parada** respecto a X_n cuando la ourrencia o no del suceso "paramos en el instante n"**(T=n)** se puede determinar apartir de los valores $X_0, X_1, ..., X_n$.

VI-1. Propiedades: Tiempos de paradas

Denotemos $T \wedge n$ el mınimo de T y n. Si Y_n es una martingala con respecto a X_n y **T** es un tiempo de parada con respecto a X_n , entonces el proceso (truncado) $Y_{T\wedge n}$ es una martingala con respecto a X_n

VII. Teorema de paradas para martingalas acotadas

Sea M_n una martingala con respecto a X_n , y sea **T** un tiempo de parada con respecto a X_n, con $\mathbb{P}$(**T** <∞) = 1. Si existe una constante k de manera que $|M_{T\wedge n}| \leq k$, $\forall$ s,entonces:

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$$

La idea bajo la condición $|M_{T\wedge n}| \leq k$ para algún k es que la cantidad de dinero disponible es limitada. En caso contrario, podrían darse situaciones en las que aplicando un criterio de parada tengamos siempre una ganancia.

PROBLEMAS GENERALES

I. Desigualdad de Azuma-Hoeffding

Supongamos que $X_n, n \geq 1$ es una martingala tal que $X_0 = 0$ y $|X_i - X_{i-1}| \leq d_i, 1 \leq i \leq n$ para algunas constantes $d_i, 1 \leq i \leq n$. Luego para todo $t > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > t) \leq 2exp\left(\frac{-t^2}{2\sum_{i=1}^{n} d_i{}^2}\right)$$

Tenga en cuenta que en el caso especial cuando $d_i = d$, podemos tomar $t = xn$ y obtener p un límite superior $2exp(\frac{-x^{2n}}{2d^2})$ - que tiene la forma prometida anteriormente. Tenga en cuenta que esto es coherente con el Chernoff vinculado para el caso especial X_n es la suma de i.i.d. términos de media cero, aunque es aplicable solo en el caso especial de incrementos acotados.

II. Lema de Wald

Una variabale aleatoria N que toma valores en los enteros no negativos es un "tiempo de paro çon respecto a X_n si la ocurrencia (o no ocurrencia) del evento $[N = n]$ puede determinarse observando las variables $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$. Por ejemeplo suponga X_n son v.a aleatorias independientes tales que

$$P = [X_n = 0] = P[X_n = 1] = \frac{1}{2}, n = 1, 2, 3, ..., n$$

Entonces, la variable

$$N = min\{n : X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n = 10\}$$

es un tiempo de paro con respecto X_n
(Lema de wald). Si $X_1, X_2, X_3...$ son variables independientes e identicamente distribuidas con esperanza finita y N es un tiempo de paro con respecto a esta sucesion de variables tal que $EN < \infty$, entonces

$$E\sum_{t}^{N} X_i = EN.EX$$

III. "La ruina del jugador"

Dicho problema consiste en calcular la probabilidad de que un jugador arruine al contrario en un juego a un número indeterminado de partidas, cuando los dos jugadores inician el juego con un cierto número de monedas cada uno.

Sea $S_n = S_0 + \xi_1 + ... + \xi_n$, donde ξ_i son i.i.d con $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p$ y $\mathbb{P}(\xi_i = -1) = q := 1 - p$. Ya hemos visto que g($S_n$)$_n$ es una martingala para g(x)=$(\frac{q}{p})^x$.
Sea T= min$\{n : S_n \notin (a, b)\}$

- T es un tiempo de parada
- $\mathbb{P}(T < \infty)$=1.
- Si $S_0 = x$, se cumple $(q/p)^x = (q/p)^a + [(q/p)^b - (q/p)^a]\mathbb{P}(S_T = b)$

Si definimos $V_y = \min\{n \leq 0 : S_n = y\}$.

$$\mathbb{P}_x(V_b < V_a) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^a}{(q/p)^b - (q/p)^a}$$

ESTADO DEL ARTE

Algunos artículos que hablan sobre el problema de la ruina del jugador, la ruleta y el estudio de las martingalas y la utilización de sus propiedades.

- Cadenas de Markov: Estudio sobre el problema de la ruina del jugador, Autor: Marc Martínez, Universitat autònoma de Barcelona, Encontró mediante diferentes maneras de plantear la estrategia de la Martingala, el juego que mejor se adapte a las necesidades del jugador, en este caso dos opciones o bien ampliar la duración del juego o aumentar la probabilidad de ganancia. Mediante cálculo de probabilidades y los procesos de simulación con código R,sirvieron para encontrar la situación más favorable en el problema.
- PORTILLA, LILIANA MARGARITA; ARIAS MONTOYA, LEONEL; FERNÁNDEZ HENAO, SERGIO AUGUSTO ,MARTINGALAS Y EL JUEGO DE LA RULETA, Scientia Et Technica, vol. XV, núm. 43, diciembre, 2009, pp. 124-129 ,Universidad Tecnológica de Pereira,En este trabajo se habló sobre el juego de la ruleta bajo el concepto de los procesos estocásticos, más específicamente sobre la martingala, ya que va muy relacionada con esta temática estocástica. Seguidamente se muestra un ejemplo de apuestas donde un jugador intenta ganarle a otro que nunca se rinde, lanzando una moneda al aire y apostando por la cara, de está manera mediante una simulación se observa el comportamiento de este tipo de apuestas, bajo el concepto de las martingalas, también se analiza los efectos presentados al cambiar los montos iniciales de apuesta y el trabajar con una moneda balanceada y otra desbalanceada. Este ejemplo es simulado con un código creado en el software R, el cual muestra el comportamiento de la apuesta y se puede observar como varía la posibilidad de ganar o perder, que en este caso tiene un tiempo t para cuando el jugador gana 10 pesos o se queda sin dinero para apostar. Pereira, Colombia

DISEÑO DEL EXPERIMENTO

- Para demostrar la desigualdad de Azuma se utilizará la convexidad de la función exponencial ,y su representación como serie infinita de potencias asi como tambien se utilizará algunas estimaciones de la funcion factorial y la función exponencial.
- Una de las propiedades de la esperanza condicional que se utiliza para la demostración de la desigualdad de Azuma :
  Si X es una v.a integrable con $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ entonces
  $$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathscr{G})] = \mathbb{E}(X)$$
- Teorema de la convergencia monotona
- teorema de parada de martingalas en la demostracion del lema de Wald

EXPERIMENTO Y RESULTADO

I. PRUEBA(DESIGUALDA DE AZUMA-HOEFFDING)

$f(x) = exp(\lambda x)$ es una función convexa en x para cualquier$\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces tenemos $f(-d_i) = exp(-\lambda d_i)$ y $f(-d_i) = exp(\lambda d_i)$. Usando convexidad tenemos que cuando $|x/d_i| \leq 1$

$$exp(\lambda x) = f(x) = f\left(\frac{1}{2}(\frac{x}{d_i}+1)(d_i) + \frac{1}{2}(1-\frac{x}{d_i})(-d_i)\right)$$

utilizando una propiedad de convexidad de la función exponencial tenemos luego que :

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{d_i}+1\right)f(d_i) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{d_i}\right)f(-d_i) \\ &= \frac{f(d_i)+f(-d_i)}{2} + \frac{f(d_i)-f(-d_i)}{2}x \end{aligned} \tag{1}$$

Además, para cada a

$$\begin{aligned} \frac{exp(a)+exp(-a)}{2} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}}{(2k)!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}}{2^k k!} \text{ (porque } 2^k k! \leq (2k)!) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{a^2}{2})^k}{k!} = exp(\frac{a^2}{2}). \end{aligned} \tag{2}$$

Concluimos que por cada x tal que $|x/d_i| \leq 1$

$$exp(\lambda x) \leq exp(\frac{d_i^2}{2}) + \frac{exp(\lambda d_i) - exp(-\lambda d_i)}{2} \tag{3}$$

Ahora pasamos a nuestra secuencia de martingala X_n.Para cada $t > 0$ y cada $\lambda > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n) &= \mathbb{P}(exp(\lambda X_n) \geq exp(\lambda t)) \\ &\leq exp(-\lambda t)\mathbb{E}[exp(\lambda X_n)] \\ &= exp(-\lambda t)\mathbb{E}[exp(\lambda \sum_{1\leq i\leq n}(X_i - X_{i-1}))] \end{aligned}$$

donde se utilizó X_0 en la última igualdad. Aplicando la propiedad de la torre de la esperanza condicional tenemos:

$$\mathbb{E}\left[exp(\lambda \sum_{1\leq i\leq n}(X_i - X_{i-1}))\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[exp(\lambda(X_n - X_{n-1}))exp(\lambda \sum_{1\leq i\leq n-1}(X_i - X_{i-1}))|\mathscr{F}_{n-1}\right]\right]$$

Ahora, como X_i, $i \leq n-1$ son medibles con respecto a $\mathscr{F}_{n-1}$, entonces

$$\mathbb{E}\left[exp(\lambda(X_n - X_{n-1}))exp(\lambda \sum_{1\leq i\leq n-1}(X_i - X_{i-1}))|\mathscr{F}_{n-1}\right]$$

$$= exp(\lambda \sum_{1\leq i\leq n-1}(X_i - X_{i-1}))\mathbb{E}[exp(\lambda(X_n - X_{n-1}))|\mathscr{F}_{n-1}]$$

$$\leq exp(\lambda \sum_{1\leq i\leq n-1}(X_i - X_{i-1}))\times$$

$$\times \left(exp\left(\frac{\lambda^2 d_n^2}{2}\right) + \frac{exp(d_i) - exp(-\lambda d_i)}{2}\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}F_{n-1}]\right)$$

donde (3) se utilizó en la última desigualdad. La propieda de la Martingala implica $\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}\mathscr{F}_{n-1}] = 0$, obteniendo un limite superior

$$M = \mathbb{E}\left[exp(\lambda \sum_{1\leq i\leq n}(X_i - X_{i-1}))\right]$$

$$M \leq \mathbb{E}\left[exp(\lambda \sum_{1\leq i\leq n-1}(X_i - X_{i-1}))\right] exp\left(\frac{\lambda^2 d_n^2}{2}\right)$$

Iterando más obtenemos el siguiente límite superior en $\mathbb{P}(X_n \geq t)$:

$$exp(-\lambda t)exp\left(\frac{\sum_{1\leq i\leq n}\lambda^2 d_i^2}{2}\right)$$

Al optimizar la elección de , vemos que el límite más cercano se obtiene al establecer $\lambda = \frac{t}{\sum_i d_i^2} > 0$ o que lleva a un límite superior

$$\mathbb{P}(X_n \geq t) \leq exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_i d_i^2}\right)$$

Un enfoque similar utilizando $\lambda < 0$ da para cada t>0

$$\mathbb{P}(X_n \leq -t) \leq exp\left(-\frac{t^2}{2\sum_i d_i^2}\right)$$

Combinando, obtenemos el resultado requerido.

II.PRUEBA(Lema de Wald)

Para simplificar la demostracion supondremos que las variables $X_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, son no negativos. Ahora definamos

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } N \geq n \\ 0 & \text{si } N < n \end{cases}$$

Y observe que

$$\sum_1^N X_n = \sum_1^\infty X_n Y_n$$

Del terorema de convergencia monotona se deduce que

$$E\sum_1^N X_n = E\sum_1^\infty X_n Y_n = \sum_1^\infty E(X_n Y_n)$$

Por otra parte, tenemos que Y,, está completamente determinada por el evento $\{N < n-1\}$, lo cual implica que sólo depende de las variables $X_l, X_2, X_3, ...X_{n-1}$ y no de las variables $X_n, X_{n+1}, ...$. En consecuencia, Y_n, es independiente de X_n, lo cual implica que

$$E\sum_1^N X_n = \sum_1^\infty E(X_n Y_n) = \sum_1^\infty EX_n EY_n$$

$$= EX\sum_1^\infty EY_n = EX\sum_1^\infty P[N \geq n]$$

$$= EX.EN$$

III.Desarrollo de la ruina del jugador

En este caso que trataremos de la ruina del jugador trata el problema de una persona con un capital "X"pero siempre finito, que se enfrenta a un contrincante con capital infinito como en el caso de un casino.

Elegimos juego de la ruleta francesa,que tiene que 37 casillas numeradas, con tan solo una casilla de valor 0, quedando 18 casillas negras y 18 casillas rojas de manera que la probabilidad de ganar es $p = \frac{18}{37} = 0{,}486$.

Apostamos n veces, empezando por S/.1 y aplicando la estrategia de martingala,la cual consiste en ir doblando la apuesta cuando perdamos hasta que ganemos.

Se procede de la siguiente manera:

- Apostamos S/. 1 a negro . En caso de ganar, repetimos el mismo paso, si se pierde , iremos al siguiente paso
- Apostamos S/. 2 a negro, doblando la apuesta anterior, si ganamos, volvemos al paso 1, y si perdemos seguimos
- Apostamos S/. 4 a negro, doblando la cantidad de dinero, si ganamos , volvemos al paso 1 , si perdemos seguiremos doblando la apuesta

Vayamos ahora con un ejemplo simple de la estrategia martingala aplicada en la ruleta de un casino, apostando a rojo-negro, presentamos las condiciones iniciales del ejemplo a continuación:

- Las probabilidades de ganar en este juego es p = 0.4864
- La probabilidad de perder en este juego es q = 0,5135.
- El capital inicial del jugador será de S/.100 y nuestro dinero objetivo será de S/.110 .

Se pueden dar dos situaciones, que logremos el objetivo o que nuestro capital se reduzca a 0, situación de ruina del jugador. Mediante la fórmula comentada con anterioridad y teniendo en cuenta que $q \neq p$, obtenemos el siguiente resultado: Supongamos que entramos en el casino con una cantidad de S/.100, y con un objetivo marcado de conseguir S/.110 Se pueden dar dos situaciones, que logremos el objetivo o que nuestro capital se reduzca a 0, situación de ruina del jugador.

$$q_{100} = \frac{(\frac{q}{p})^{100} - (\frac{q}{p})^{110}}{1 - (\frac{q}{p})^{110}} \tag{4}$$

Con una probabilidad $p = 0{,}486$ y $q = 0{,}513$, obtenemos una probabilidad de ruina del 41, 87%.
El tiempo de parada para este juego sería cuando el jugador alcance el dinero objetivo o se quede en bancarrota.
El resultado que se tomó como referencia del articulo base [5] que sigue la estrategia de la martingala apostando S/.1

```r
#R version 3.3.2
N<-1000 #simulaciones
xt<- 110 # Dinero Objetivo
simulacion <- data.frame(partidas=
  integer(0), resultado= integer(0),
  ganadas=integer(0),
  perdidas=integer(0))
for (i in 1:N){
x0<-100 #dinero inicial
apu<-1 # dinero que apostamos por
  partida
g<-1
p<-1
j<-1
while(x0>0 & x0<xt){ # & apu<=x0
resultado<-runif(1,0,1)
if(x0<apu){apu = x0}
if(resultado>=(18/37)){
x0<-x0+apu
g<-g+1
apu <- 1
}else{
x0<-x0-apu
apu<-apu*2
p<-p+1
}
j<-j+1
}
simulacion[i,1]<-j
simulacion[i,2]<-x0
simulacion[i,3]<-g
simulacion[i,4]<-p
}
simulacion
head(simulacion)
mean(simulacion$partidas)
max(simulacion$partidas)
summary(simulacion)
hist(simulacion$partidas,
  labels=TRUE,ylab="Frencuencia",
  ylim=c(0,1050), nclass=3,col="red",
  main="Simulacion_ruleta")
```

Nuestro objetivo fijado era obtener S/. 10 partiendo de un capital inicial de S/.100 , observamos que el promedio de partidas por cada jugada es de aproximadamente 22.631 partidas. Si miramos el histograma vemos como de las 1000 simulaciones o partidas, un 94,3 % se encuentran por debajo de las 50 partidas. Si calculamos el número de partidas en las que logramos el objetivo mediante las simulaciones del método de la Martingala, obtenemos un 87.69 % .

```
  partidas resultado ganadas perdidas
1       19       110      11        9
2       21       110      11       11
3       20       110      11       10
4       20       110      11       10
5       15       110      11        5
6       14       110      11        4
[1] 22.631
[1] 182
    partidas        resultado        ganadas         perdidas
 Min.   :  8.00   Min.   :  0.0   Min.   : 1.00   Min.   : 1.0
 1st Qu.: 17.00   1st Qu.:110.0   1st Qu.:11.00   1st Qu.: 8.0
 Median : 19.00   Median :110.0   Median :11.00   Median :10.0
 Mean   : 22.63   Mean   :100.9   Mean   :12.13   Mean   :11.5
 3rd Qu.: 22.00   3rd Qu.:110.0   3rd Qu.:11.00   3rd Qu.:13.0
 Max.   :182.00   Max.   :110.0   Max.   :89.00   Max.   :95.0
```

Figura 1. Tabla de valores de la muestra experimental

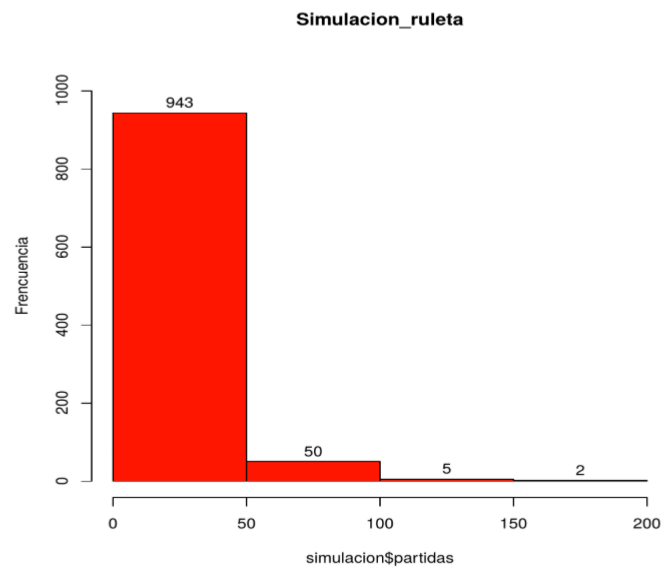

Figura 2. Histrograma que muestra la frecuencia con la cual se llega al tiempo de parada en cierta candtidad de partidas

Compararemos el resultado anterior con el nuestro que en vez de apostar S/.1 se apuesta una cantidad de S/.17 .Es evidente que no lograremos la cantidad deseada pues no llegará a 110 soles a los mas llegará a S/.134 El código R que se implementa para simular 1000 juegos en los cuales el resultado es alcanzar los 110 soles o perder hasta quedar en 0 soles es

```
#R version 3.3.2
N<-1000 #simulaciones
xt<- 110 # Dinero Objetivo
simulacion <- data.frame(partidas=
  ↪ integer(0), resultado= integer(0),
  ↪ ganadas=integer(0),
  ↪ perdidas=integer(0))
for (i in 1:N){
x0<-100 #dinero inicial
apu<-17 # dinero que apostamos por
  ↪ partida
g<-1
p<-1
j<-1
while(x0>0 & x0<xt){ # & apu<=x0
resultado<-runif(1,0,1)
if(x0<apu){apu = x0}
if(resultado>=(18/37)){
x0<-x0+apu
g<-g+1
apu <- 1
}else{
x0<-x0-apu
apu<-apu*2
p<-p+1
}
j<-j+1
}
simulacion[i,1]<-j
simulacion[i,2]<-x0
simulacion[i,3]<-g
simulacion[i,4]<-p
}
simulacion
head(simulacion)
mean(simulacion$partidas)
max(simulacion$partidas)
summary(simulacion)
hist(simulacion$partidas,
  ↪ labels=TRUE,ylab="Frencuencia",
  ↪ ylim=c(0,1050), nclass=3,col="red",
  ↪ main="Simulacion_ruleta")
```

En los resultados podemos ver como la probabilidad de ruina con estas condiciones es de 0,0654, inferior a la probabilidad teórica, aunque cada vez mas parecidas entre ellas. En los juegos de azar regulados por salas de apuestas o casinos, hay circunstancias que son totalmente ajenas al jugador, este es el caso de las probabilidades de acierto o fallo, el juego es el que es, y estas probabilidades no varian. En cambio el jugador puede decidir aunque con limitaciones sobre las cantidades que apuesta y tiene poder de decisión sobre el dinero que quiere jugar en total.

```
  partidas resultado ganadas perdidas
1        3       117       2        2
2        2       117       2        1
3        2       117       2        1
4        3       117       2        2
5        3       117       2        2
6        3       117       2        2
[1] 6.038
[1] 82
    partidas       resultado       ganadas          perdidas
 Min.   : 2.000   Min.   :  0   Min.   : 1.000   Min.   : 1.000
 1st Qu.: 2.000   1st Qu.:117   1st Qu.: 2.000   1st Qu.: 1.000
 Median : 2.000   Median :117   Median : 2.000   Median : 1.000
 Mean   : 6.038   Mean   :102   Mean   : 3.665   Mean   : 3.373
 3rd Qu.: 3.000   3rd Qu.:117   3rd Qu.: 2.000   3rd Qu.: 2.000
 Max.   :82.000   Max.   :117   Max.   :42.000   Max.   :42.000
```

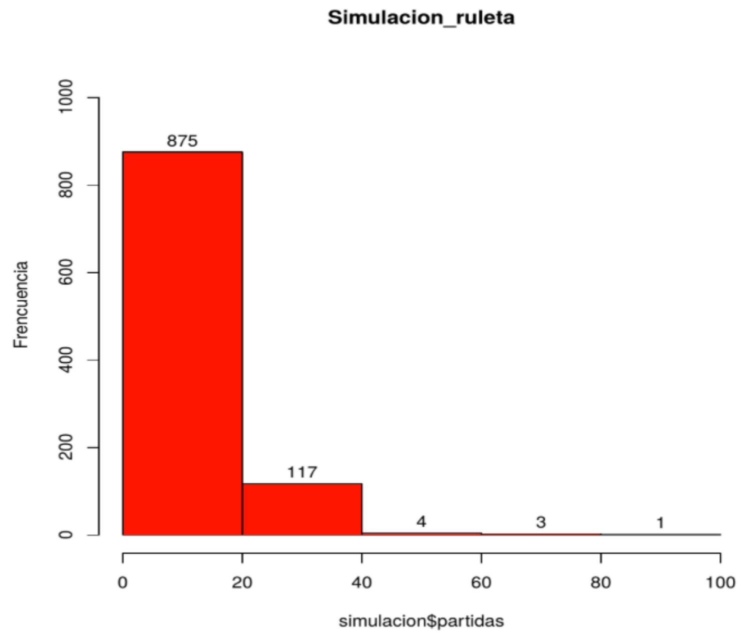

Figura 3. Histograma de frecuencias cuando se comienza a apostar con S./17 siguiendo la estrategia de la martingala

```
ruina_jugador=function(u,N,p){
k=u;j=0; C=u
while(k>0&&k<N){
r=rbinom(1,1,p)
e=2*r-1; y=k+e; k=y; j=j+1
C=c(C,k)}
plot(0:j,C,type="o",ylim=c(0,N))
abline(h=c(0,N),v=c(0,j))
a=j/2; b=.8*N
text(a,b,labels=paste('Num. Apuestas
  ↪ =',j),pos=3,cex=2,col="blue")
j}
##EJEMPLO
ruina_jugador(2,100,.486)
[1] 172
```

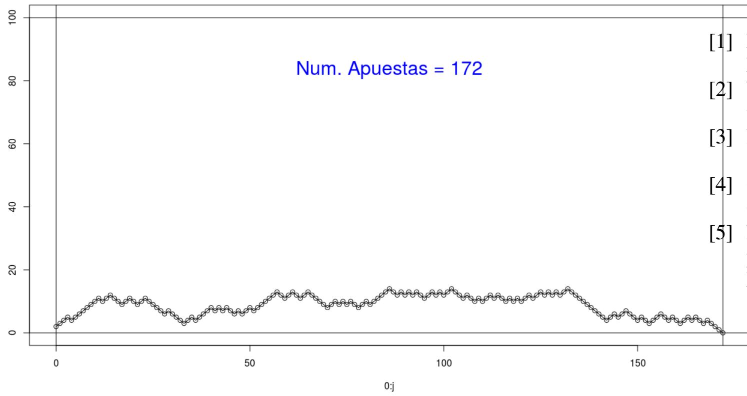

Figura 4. Polígono de frecuencias para 172 apuestas

Discusiones y Conclusiones

Las simulaciones arrojan dos resultados importantes

- Siguiendo el método de martingalas la probabilidad de ganar el juego en menos jugar crece. Esto es bueno por qué nos permite acercarnos a algo óptimo que sería siempre ganar. Todo por el contrario, si seguimos el método usual (aleatorio de apuestas) las partidas se podían hacer infinitas y en esos casos o bien nos quedaríamos sin dinero o bien tendríamos que tener dinero infinito. En ambos casos algo irreal .
- El método de martingalas se puede emplear en cualquier tipo de apuesta uno contra uno principalmente por qué en esos casos las probabilidades de perder y ganar son más fáciles de calcular y predecir. Por ejemplo siguiendo este método podríamos usarlo para jugar poker sin embargo los resultados no serían tan certeros por que intervienen más jugadores. Y una discusión más podría ser que al comparar la gráfica del paper con la nuestra la tendencia se mantiene es decir si hacemos menos simulaciones no variaría la probabilidad de ruina.
- Modificar la probabilidad del juego no es una opción, por eso, ante un juego desfavorable la mejor opción siempre es apostar lo máximo y en el menor número de apuestas posibles, es decir jugar ofensivamente. Siempre teniendo presente que la esperanza de ganar será negativa o 0, ya que las probabilidades de ganar son iguales o inferiores a las de perder, nunca superiores(Dadas por el casino).
- En un juego en el que el jugador tiene más probabilidad de perder (desfavorable) es muy difícil no caer en ruina, al menos que apostemos la cantidad máxima permitida por el casino. Sim embargo, el método Martingala nos da una probabilidad de ruina mucho más baja haciendo que este método convierta al juego en “justo” para los jugadores.

Referencias

[1] M. Loeve, Probability theory II (Book graduate texts in Mathematics), Ed. Iberica: Springer-Verlag © 1978
[2] Williams, David (1991). Probability with Martingales. Cambridge University Press. ISBN 0-521-40605-6.
[3] H. Poor, An Introduction to Signal Detection and Estimation. New York: Springer-Verlag, 1985, ch. 4. Chicago, IL.
[4] Giraldo. G. Norman. Procesos Estocásticos.Universidad Nacional de Colombia. Medellín. 2006.
[5] Marc Martínez, Xavier Bardina. Cadenas de Markov: Estudio sobre el problema de la ruina del jugador. Universidad autónoma de Barcelona. España. 2017.