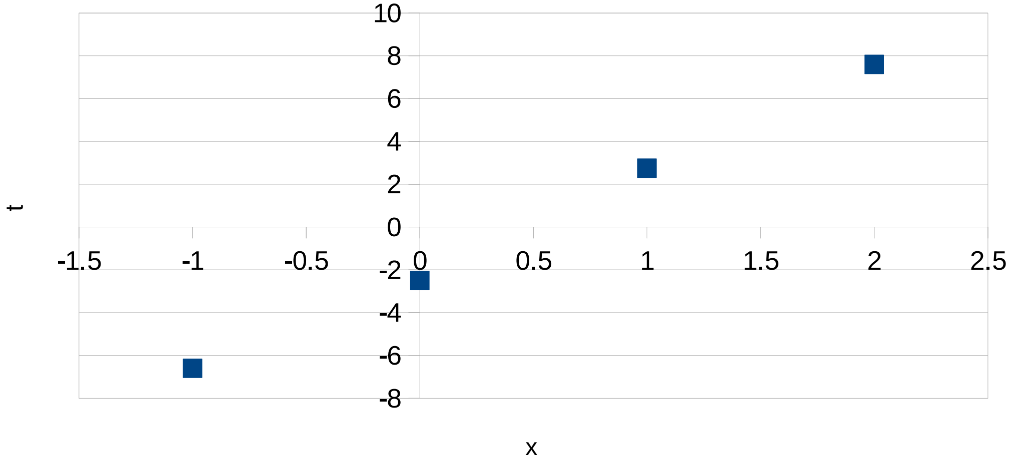
Aproximación con mínimos cuadrados

Ejemplo de aproximación polinomial

Problema

- Se desea aproximar los datos de la tabla por medio de una función de la forma $y=w_0+w_1x$
- Los datos se generaron con $t=-2+5x+\text{Ruido}$
- El ruido es Gausiano con un media de 0 y desviación estándar de 0.5

x	t
-1	-6.6
0	-2.5
1	2.75
2	7.6



Función de error

$$J(w_0, w_1) = \sum_{i=1}^{4} \left(y(x_i, w_0, w_1) - t_i \right)^2$$

$$\begin{aligned} J(w_0, w_1) = &\left(w_0 + w_1(-1) - (-6.6) \right)^2 + \ldots \\ &\left(w_0 + w_1(0) - (-2.5) \right)^2 + \ldots \\ &\left(w_0 + w_1(1) - (2.75) \right)^2 + \ldots \\ &\left(w_0 + w_1(2) - (7.6) \right)^2 \end{aligned}$$

Notación matricial

$$\boldsymbol{w}=[w_0, w_1]^T$$
$$\boldsymbol{t}=[-6.6, -2.5, 2.75, 7.6]^T$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J(\boldsymbol{w})=(A\boldsymbol{w}-\boldsymbol{t})^T(A\boldsymbol{w}-\boldsymbol{t})$$

Calculo del gradiente de la función de costo

$$\nabla J = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial w_0} \\ \frac{\partial J}{\partial w_1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial J}{\partial w_0} = 2\left(w_0 + w_1(-1) - (-6.6)\right) + \ldots$$

$$2\left(w_0 + w_1(0) - (-2.5)\right) + \ldots$$

$$2\left(w_0 + w_1(1) - (2.75)\right) + \ldots$$

$$2\left(w_0 + w_1(2) - (7.6)\right) = 8w_0 + 4w_1 - 2.5$$

Calculo del gradiente de la función de costo (2)

$$\frac{\partial J}{\partial w_1} = 2\left(w_0 + w_1(-1) - (-6.6)\right)(-1) + \ldots$$

$$2\left(w_0 + w_1(0) - (-2.5)\right)(0) + \ldots$$

$$2\left(w_0 + w_1(1) - (2.75)\right)(1) + \ldots$$

$$2\left(w_0 + w_1(2) - (7.6)\right)(2) = 4\,w_0 + 12\,w_1 - 49.1$$

Minimización de la función de costo

$$\nabla J = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial J}{\partial w_0} \\ \dfrac{\partial J}{\partial w_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$8 w_0 + 4 w_1 - 2.5 = 0$$

$$4 w_0 + 12 w_1 - 49.1 = 0$$

$$w0 = -2.08$$

$$w1 = 4.78$$