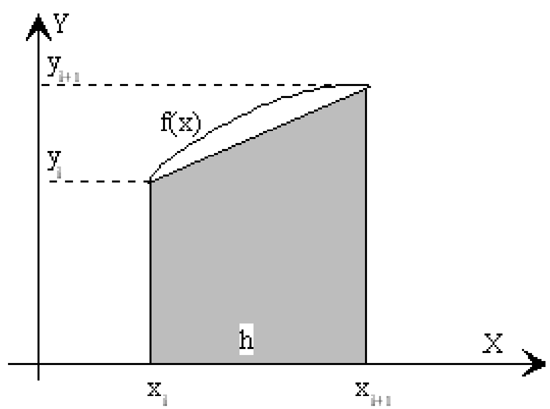
FILTROS IIR

Trasformada z bilineal

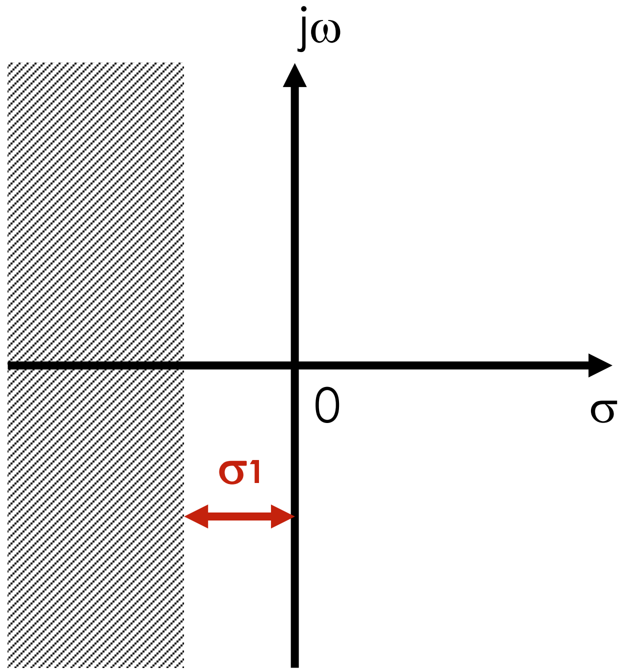
(Método de Tustin)

MAPEO ALGORITMOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

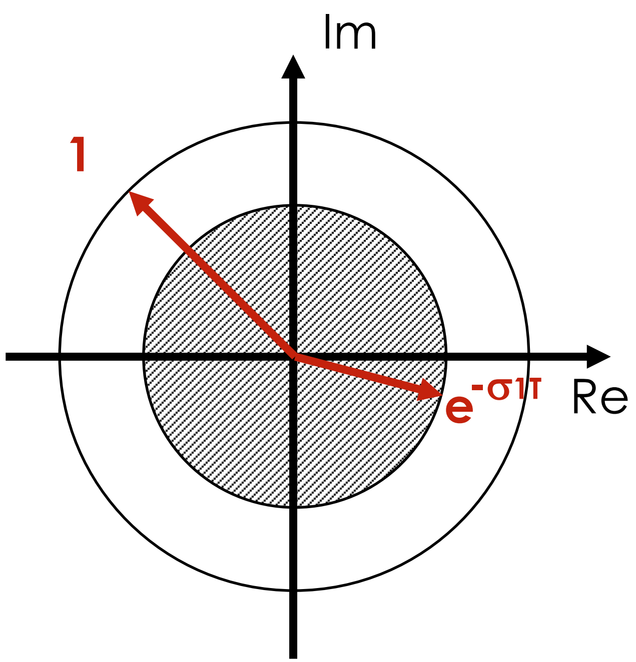
Regla	Algoritmo numérico	Proyección para s
Rectangular	$y[n] = y[n-1] + tsx[n]$	$s = \frac{1}{t_s}\left(\frac{z-1}{z}\right)$
Trapezoidal	$y[n] = y[n-1] + \frac{2}{t_s}(x[n] + x[n-1])$	$s = \frac{2}{t_s}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$



MAPEO ALGORITMOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA



Plano s

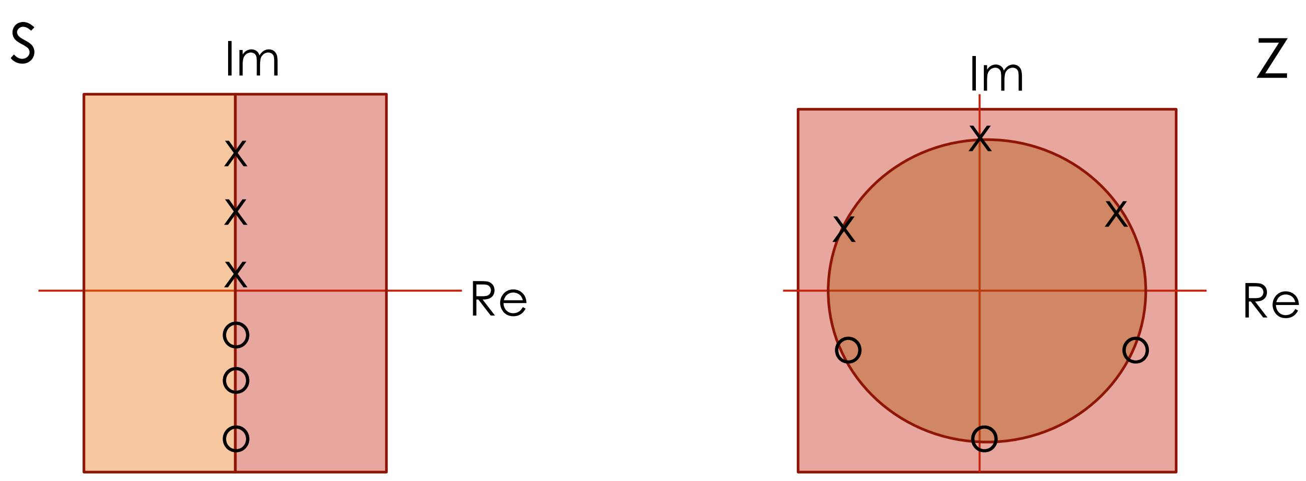


Plano z

TRANSFORMADA Z BILINEAL

- Uno de los métodos más usados.
  - Se convierte un filtro analógico *H(s)* en su equivalente remplazando s

$$s = k\frac{z-1}{z+1}, \quad k = 1 \text{ ó } \frac{2}{T}$$



TRANSFORMADA Z BILINEAL

- Remplazar directamente puede tener respuestas no deseadas

$$z = re^{j\omega T}$$
$$s = \sigma + j\Omega$$

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T}\frac{re^{j\omega}-1}{re^{j\omega}+1}$$

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\omega} + j\frac{2r\sin\omega}{1+r^2+2r\cos\omega}\right)$$

$$\sigma = \frac{2}{T}\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\omega} \qquad \Omega = \frac{2}{T}\frac{2r\sin\omega}{1+r^2+2r\cos\omega}$$

TRANSFORMADA Z BILINEAL

$$\Omega = \frac{2}{T}\frac{2r\sin\omega}{1+r^2+2r\cos\omega}$$

- Si *r=1*

$$\Omega = \frac{2}{T}\frac{2\sin\omega}{1+\cos\omega}$$

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$$

$$\omega = 2\tan^{-1}\frac{\Omega T}{2}$$

TRANSFORMADA Z BILINEAL

$$\omega' = k \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right), \quad k = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{2}{T}$$

- Prewarp (Envolver)

$$\omega'_p = k \tan\left(\frac{\omega_p T}{2}\right), \quad k = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{2}{T}$$

TRANSFORMADA Z BILINEAL

- Pasos
  - Determinar las frecuencias críticas con el prewarp.
    - Una o dos frecuencias.

- Se desnormaliza el filtro reemplazando s por

$$s = \frac{s}{\omega_p'} \quad Pasabajas - pasabajas$$

$$s = \frac{\omega_p'}{s} \quad Pasabajas - pasaaltas$$

TRANSFORMADA Z BILINEAL

$$s = \frac{s^2 + \omega_o^2}{Ws} \quad Pasabajas - pasabanda$$

$$s = \frac{Ws}{s^2 + \omega_o^2} \quad Pasabajas - rechazabanda$$

$$\omega_o^2 = \omega'_{p2}\omega'_{p1}$$

$$W = \omega'_{p2} - \omega'_{p1}$$

EJEMPLO

- Diseñe un filtro digital que se aproxime a la siguiente función normalizada de transferencia analógica:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

- Obtenga H(z),considerando
  - Frecuencia de corte: 150 Hz (3dB)
  - Frecuencia de muestreo: 1.28kHz

EJEMPLO

- Se escala la frecuencia normalizada

$$s = \frac{s}{\omega_{p}'}$$

$$\omega_p' = k\tan\left(\frac{\omega_p T}{2}\right), \quad k = 1 \quad ó \quad \frac{2}{T}$$

$$\omega_p' = tan\left(\frac{2\pi(150)}{2(1280)}\right) = 0.3857$$

$$H'(s) = \frac{0.1488}{s^2 + \sqrt{2}s(0.3857) + 0.1488}$$

EJEMPLO

- Se sustituye s

$$H'(s) = \frac{0.1488}{s^2 + \sqrt{2}s(0.3857) + 0.1488}$$

$$H'(z) = \frac{0.1488}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)(0.3857) + 0.1488}$$

$$H'(z) = \frac{0.1488(z+1)^2}{(z-1)^2 + \sqrt{2}(z-1)(z+1)(0.3857) + 0.1488(z+1)^2}$$

EJEMPLO

- Se sustituye s

$$H'(z)=\frac{0.1488(z^2+2z+1)}{(z^2-2z+1)+\sqrt{2}(0.3857)(z^2-1)+0.1488(z^2+2z+1)}$$

$$H'(z)=\frac{0.1488(z^2+2z+1)}{(z^2-2z+1)+(0.5455)(z^2-1)+0.1488(z^2+2z+1)}$$

$$H'(z)=\frac{0.1488z^2+0.2976z+0.1488}{z^2-2z+1+0.5455z^2-0.5455+0.1488z^2+0.2976z+0.1488}$$

$$H'(z)=\frac{0.1488z^2+0.2976z+0.1488}{1.6943z^2-1.7024z+0.6033}$$

EJEMPLO

- Se divide entre el máximo exponente

$$H'(z) = \frac{0.1488 + 0.2976z^{-1} + 0.1488z^{-2}}{1.6943 - 1.7024z^{-1} + 0.6033z^{-2}}$$

- Se divide entre el valor del término constante del denominador

$$H'(z) = \frac{0.0878 + 0.1756z^{-1} + 0.0878z^{-2}}{1 - 1.0048z^{-1} + 0.3561z^{-2}}$$