UNIDAD I

Transformada Z

RELACIÓN CON LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

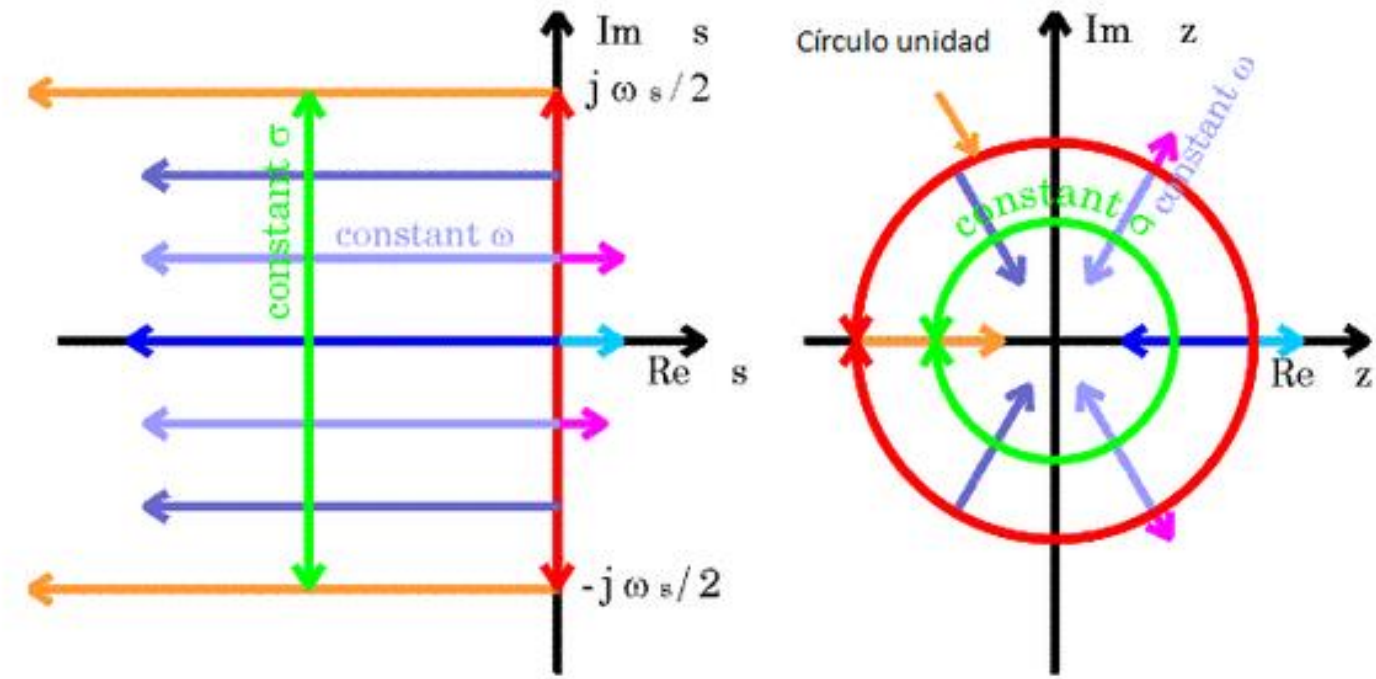
$$s = d + j\omega$$

$$z = e^{(d+j\omega)T} = e^{dT}e^{j\omega T}$$

$$|z| = e^{dT}$$

$$\angle z = \omega T = \frac{2\pi f}{F_s} = \frac{2\pi\omega}{\omega_s}$$

MAPEO – PLANO S AL PLANO Z



Los polos y los ceros cuyas frecuencias difieren 2 π/T son mapeados en las mismas posiciones en z, es decir, la correspondencia z $\rightarrow S$ no es única.

Figura wikispaces

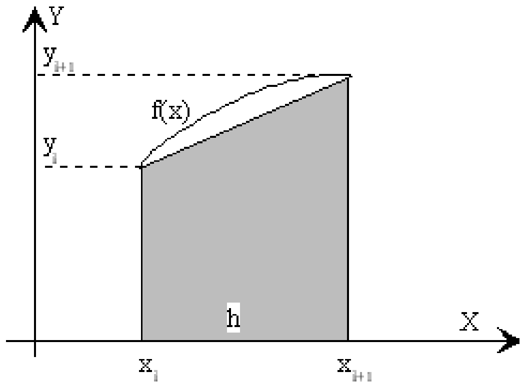
RELACIÓN CON LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

$\dfrac{Plano\ s}{\omega\left(\frac{rad}{s}\right)}$	$\dfrac{Plano\ z}{\omega T(rad)}$
0	0
$\dfrac{\omega_s}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{\omega_s}{2}$	π
$\dfrac{3\omega_s}{4}$	$\dfrac{3\pi}{2}$
ω_s	2π

$\dfrac{Plano\ s}{\omega\left(\frac{rad}{s}\right)}$	$\dfrac{Plano\ z}{\omega T(rad)}$
$\dfrac{5\omega_s}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{3\omega_s}{2}$	π
$\dfrac{7\omega_s}{4}$	$\dfrac{3\pi}{2}$
$2\omega_s$	2π

MAPEO ENTRE PLANOS ALGORITMOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Regla	Algoritmo numérico	Proyección para s
Rectangular	$y[n] = y[n-1] + tsx[n]$	$s = \frac{1}{t_s}\left(\frac{z-1}{z}\right)$
Trapezoidal	$y[n] = y[n-1] + \frac{2}{t_s}(x[n] + x[n-1])$	$s = \frac{2}{t_s}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$



TRANSFORMADA Z

- Representa señales discretas en tiempo en su equivalente en frecuencia compleja (Plano Z)

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\,[n]z^{-n}$$

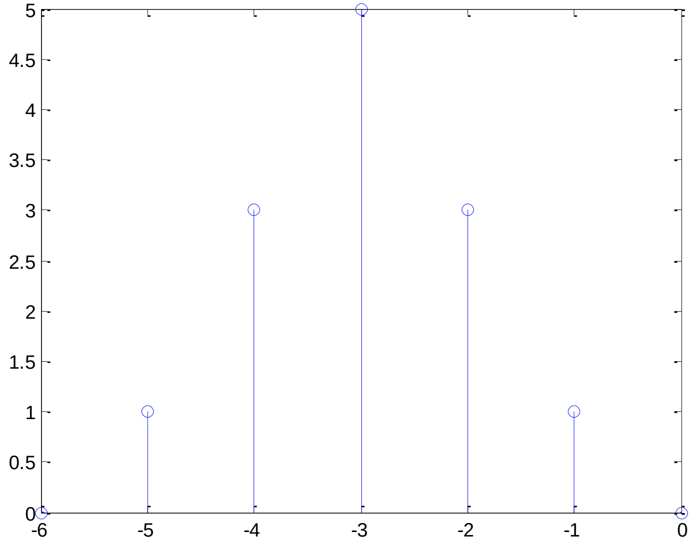
- **Unilateral**
    - Sistemas causales

$$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x\,[n]z^{-n}$$

REGIÓN DE CONVERGENCIA

- Región donde la transformada z converge.

- Ejemplo:



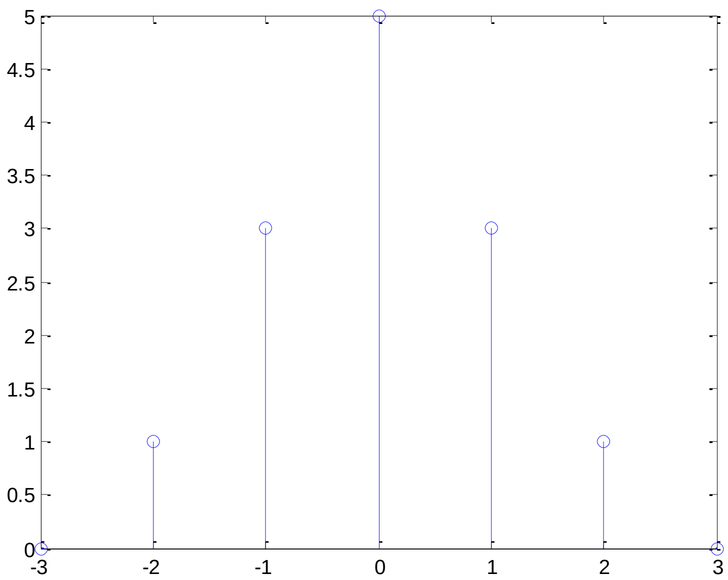
$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & 3 & 1 & \overset{\Downarrow}{0} \end{bmatrix}$$

$$X_1[z] = z^5 + 3z^4 + 5z^3 + 3z^2 + z$$

$$z = \infty \quad \Rightarrow \quad X_1[z] = \infty$$

REGIÓN DE CONVERGENCIA

- Ejemplo:



$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & \overset{\Downarrow}{5} & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

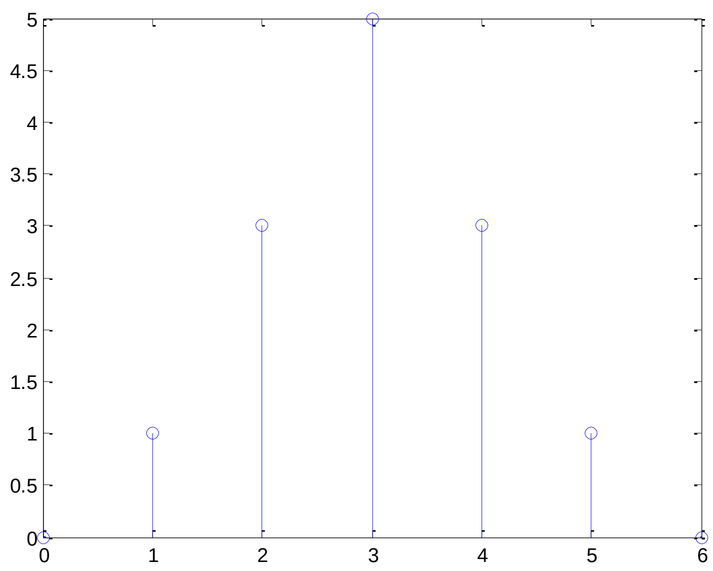
$$X_1[z] = z^2 + 3z^1 + 5z^0 + 3z^{-1} + z^{-2}$$

$$\left.\begin{matrix} z = 0 \\ z = \infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad X_1[z] = \infty$$

REGIÓN DE CONVERGENCIA

- Ejemplo:

$$x = \begin{bmatrix} \overset{\Downarrow}{0} & 1 & 3 & 5 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



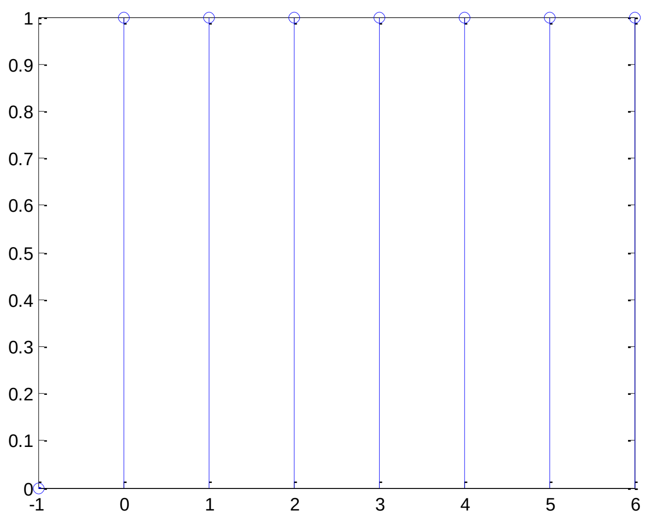
$$X_1[z] = z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3} + 3z^{-4} + z^{-5}$$

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1[z] = \infty$$

REGIÓN DE CONVERGENCIA

- Ejemplo:

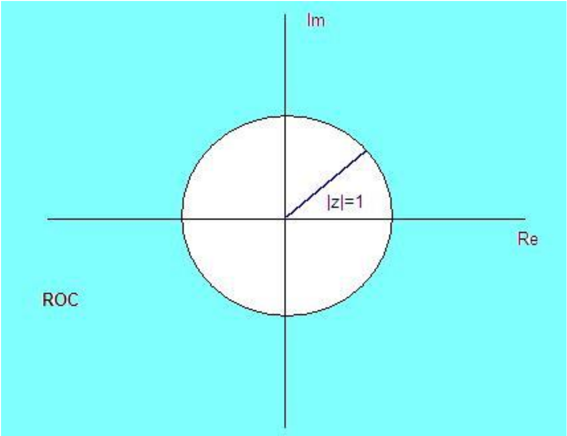
$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le \infty \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



$$X_1[z] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

$$X_1[z] = \frac{1}{(1 - z^{-1})} = \frac{z}{(z - 1)}$$

$$|z| > 1 \quad ROC$$



TRANSFORMADA Z

- Secuencias finitas:

	Señal, $x(n)$	Transformada Z, $X(z)$	ROC
1	$\delta(n)$	1	todo z
2	$u(n)-u(-n-N)$	$\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$z \neq 0$

TRANSFORMADA Z

- Señales causales:

	Señal, $x(n)$	Transformada Z, $X(z)$	ROC
3	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
4	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
5	$(-a)^n u(n)$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6	$n\,u(n)$	$\frac{1}{(1-z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > 1$

TRANSFORMADA Z

7	$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
8	$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
9	$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
10	$a^n \cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
11	$a^n \sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$

TRANSFORMADA Z

- Señales anticausales:

	Señal, $x(n)$	Transformada Z, $X(z)$	ROC
12	$-u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
13	$-nu(-n-1)$	$\dfrac{1}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\| < 1$
14	$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
15	$-na^n u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$

TRANSFORMADA Z INVERSA

$$x[n] = Z^{-1}\big[X[z]\big]$$

$$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$X[z] = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3} + \cdots$$

$$X[z] = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_N z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_M z^{-M}}$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

- Linealidad

$$ax_1[n] + bx_2[n] \to aX_1[z] + bX_2[z]$$

- Desplazamientos

$$x[n] \to X[z]$$
$$x[n-m] \to z^{-m}X[z]$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

- Convolución

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

$$Y[z] = H[z]X[z]$$

- Diferenciación

$$x[n] \to X[z]$$

$$nx[n] \to -z\frac{dX[z]}{dz}$$

TRANSFORMADA Z INVERSA

- **Se obtiene mediante**:
  - Método de expansión series de potencias.
  - Método de expansión de fracciones parciales.
  - Método de residuo.

EXPANSIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

- **Ecuaciones**

$$x[0] = {}^{b_o}/_{a_0}$$

$$x[1] = {}^{(b_1 - x[0]a_1)}/_{a_0}$$

$$x[2] = {}^{(b_2 - x[1]a_1 - x[0]a_2)}/_{a_0}$$

...

$$x[n] = {}^{(b_n - \sum x[n-i]a_i)}/_{a_0}$$

EXPANSIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

$$X[z] = \frac{1}{(z - 0.25)(z - 0.5)}$$