# question (1)

**Основные алгебраические структуры: группы, кольца, поля (определение). Композиция отображений, ассоциативность композиции. Инъективные и сюръективные отображения. Биективные отображения. Обратное отображение.**

---

## Группа

Группа $(G,\ \cdot)$ - это множество $G$ с бинарной операцией $\cdot$, которая удовлетворяет:

1. Ассоциативность: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a,\ b,\ c \in G$
2. Существование нейтрального элемента: $\exists e \in G : e \cdot a = a \cdot e = a, \quad \forall a \in G$
   Называется единицей группы $G$ и обозначается 1
3. Существование обратного элемента: $\forall a \in G\ \exists b \in G : a \cdot b = b \cdot a = e$
   Если операция $\cdot$ коммутативна ($a \cdot b = b \cdot a$), то группа называется коммутативной или абелевой группой.
   Если группа $G$ состоит из конечного числа элементов, то она называется конечной группой, а число элементов в ней - порядком группы.

## Кольцо

Кольцо $(R,\ +,\ \cdot)$ - это множество $R$ с двумя бинарными операциями $+$ (сложение), $\cdot$ (умножение), которые удовлетворяют:

1. $(R,\ +)$ - абелева группа (аддитивная группа кольца), то есть сложение ассоциативно, существует нейтральный элемент 0 (нулевой элемент), и каждый элемент $a \in R$ имеет обратный элемент $-a$.
2. Умножение ассоциативно: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a,\ b,\ c \in R$
3. Дистрибутивность умножения относительно сложения: $(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$ и $((a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c) \quad \forall a,\ b,\ c \in R$
   Если умножение коммутативно, то кольцо называется коммутативным. Если в $R$ существует нейтральный элемент 1 относительно умножения, то кольцо называется кольцом с единицей.

## Поле

Поле $(F,\ +,\ \cdot)$ - это коммутативное кольцо с единицей, где каждый ненулевой элемент обратим относительно умножения:

1. $(F,\ +)$ - абелева группа.
2. $(F \setminus \{0\},\ \cdot)$ - абелева группа. Эта группа называется мультипликативной группой поля.
3. Дистрибутивность умножения относительно сложения выполняется.

## Композиция отображений, ассоциативность композиции

Пусть $f: A \to B,\ g: B \to C$ - два отображения. Тогда композиция $g \circ f: A \to C$ определяется как:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A$$

Ассоциативность композиции:

$$h: U \to V, \quad g: V \to W, \quad f: W \to T$$
$$f(gh) = (fg)h$$

Доказательство: в соответствии с формальным определением равенства отображений нужно просто сравнить значения отображений $f(gh): U \to T$ и $(fg)h: U \to T$ в произвольном элементе $u \in U$:

$$(f(gh))(u) = f((ghu)) = f(g(hu)) = (fg)(hu) = ((fg)h)u$$

# Инъективное отображение

$$\forall x, y \in A \hookrightarrow (x \neq y \implies f(x) \neq f(y))$$

# Сюръективное отображение

$$\forall y \in B\ \exists x \in A, f(x) = y$$

# Биективное отображение

$f$ – биективное отображение (взаимно однозначное), если $f$ – инъекция и сюръекция.

# Обратное отображение

Если $f: A \to B$ - биекция, то существует $f^{-1}: B \to A$ называемое обратным, такое что:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$$
$$f^{-1}(f(y)) = y \quad \forall y \in B$$

Обратное отображение существует только для биекций.