1. Основные алгебраические структуры: группы, кольца, поля (определение). Композиция отображений, ассоциативность композиции. Инъективные и сюръективные отображения. Биективные отображения. Обратное отображение.

1) Группы. Пусть мн-во G непустое и каждой паре элементов $x \in G$ и $y \in G$ сопоставим $z \in G$: $x \circ y = z$. И будем говорить, что на мн-ве G определена бинарная операция. Тогда мн-во G называется группой, если эта операция обладает следующими св-ми:

1) Ассоциативность: $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z \ \forall x, y, z \in G$

2) $\exists$ нейтральный элемент $1 \in G$ такой, что $x \circ 1 = 1 \circ x = x \ \forall x, 1 \in G$

3) $\exists$ обратный элемент x^{-1} такой, что: $x \circ x^{-1} = 1 \ \forall x, 1 \in G$

Кроме того, если выполняется $x \circ y = y \circ x$, то группа называется абелевой. Пример: $\mathbb{Z}$ с операцией „+"

2) Поля. – K - непустое множество, на котором определены операции сложение и произведение: сопоставляющие любым двум элементам ($\forall a, b \in K$) элементы называемые сех суммой или произведением: $a + b$ / $a \cdot b$.

Эти операции должны облат свойствами:

-1) Ассоциативность: $a + (b + c) = (a + b) + c \ \forall a, b, c \in K$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) c$

-2) Коммутативность: $a + b = b + a \ \forall a, b \in K$

$a \cdot b = b \cdot a$

-3) $\exists$ нейтральные элементы:

- для сложения / $a + 0 = a \ \forall a \in K$

3) $\exists$ нейтральные элементы:

0 - для сложения $\Rightarrow$ $a+0=a$ $\forall a, e \in K$

1 - для умножения $\Rightarrow$ $a \cdot 1 = a$

- 4) $\exists$ обратные элементы:

$-a$ - для сложения $\Rightarrow$ $a+(-a)=0$ $\forall a \in K$

a^{-1} - для произведения $\Rightarrow$ $a \cdot a^{-1} = 1$

- 5) Дистрибутивность: $a(b+c) = ab + ac$, $\forall a,b,c \in K$.

Пример: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

3) Кольцо - A - непустое мн-во на котором определены операции сложения и произведения сопоставляющие для $\forall$ двух элементов $a,b \in A$ элементы называемые их суммой / произведением: $a+b$ / $a \cdot b$. Эти операции должны обладать свойствами

- 1) Ассоциативность: $a+(b+c)=(a+b)+c$ $\forall a,b,c \in A$

$a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

- 2) Коммутативность: $a+b = b+a$ $\forall a,b \in A$

$a \cdot b = b \cdot a$

- 3) $\exists$ нейтральных элементов:

0 - для сложения $a+0=a$ $\forall a \in A$

- 4) $\exists$ обратный элемент

$-a$ - для сложения: $a+(-a)=0$ $\forall a \in A$

Пример: Все поля являются кольцами.

4) Отображения

M и N - мн-ва

4) Отображения

1) Отображение называется инъективным M и N - мн-ва
$f: M \to N$, если для $a \in M$ и $b \in N$: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

2) Отображение называется сюръективным M и N - мн-ва
$f: M \to N$, если для $\forall c \in N$ $\exists a \in M$ такой что: $f(a) = c$

3) Отображение называется биективным M и N - мн-ва: , если отображение $f: M \to N$ является и инъективным и сюръективным.

5) Композиция отображений

Опр.: Композицией или произведением отображений называется отображение h являющееся результатом последовательного выполнения сначала отображений f и g: Обозначается как $h = g \circ f$

Пусть A, B, C, D множества f, g, h отображения, такие что

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, тогда

$A \to C : g \circ f$

$B \to D : h \circ g$

$A \to D$: $h \circ (g \circ f)$ или в силу ассоциативности $(h \circ g) \circ f$

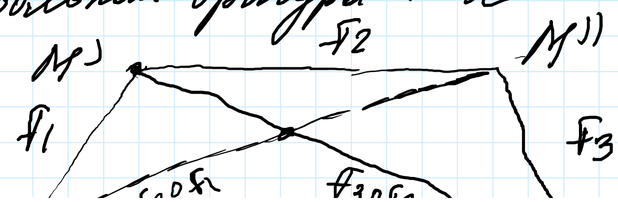
6) Ассоциативность композиции отображений

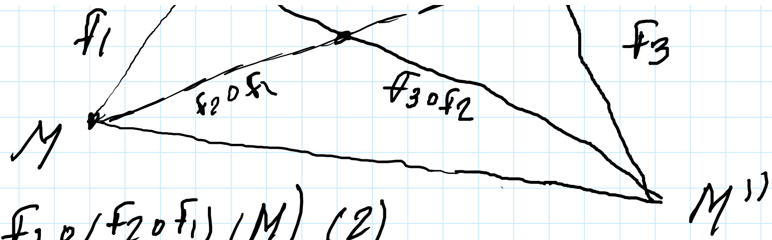
Пусть $\exists$ f_1, f_2, f_3 - отображения, тогда для них справедливо равенство $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$

Док-во. Пусть M произвольная фигура F и

$M \xrightarrow{f_1} M'$

$M' \xrightarrow{f_2} M''$ $M'' \xrightarrow{f_3} M'''$





$M' \xrightarrow{f_2} M''$, $M'' \xrightarrow{f_3} M'''$

$M'' = f_2 \circ f_1 (M)$
$M''' = f_3 (M'')$ $\Rightarrow M''' = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)(M)$ (2)

$M' = f_1(M)$, $M''' = (f_3 \circ f_2)(M') \Rightarrow M''' = (f_3 \circ f_2) \circ f_1 (M)$ (3)

Тогда имеем $M \xrightarrow{f_2 \circ f_1} M''$, M'', M''', то есть с одной стороны $M \xrightarrow{f_3 \circ (f_2 \circ f_1)} M'''$, с другой стороны M M'; $M' \xrightarrow{f_3 \circ f_2} M'''$, то есть $M \xrightarrow{(f_3 \circ f_2) \circ f_1} M'''$ из этого следует равенство $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$ ■

4) Обратное отображение

Пусть $f: A \to M$ – биекция, тогда $\exists f^{-1}: M \to A$ $((x) \in A, y \in M)$: $f: A \to M \Rightarrow f(x) = y$, тогда и f^{-1} тоже является биекцией $f^{-1}(y) = x$.