20 вопрос

Th: Для любого многочлена $f \in F[x]$ и для любого ненуливого многочлена $g \in F[x]$ $\exists!$ многочлены g и r из $F[x]$: $f = gq + r$, где $r = 0$ или $deg(r) < deg(g)$. Многочлен q называется частным, а r - остаток f на g
Док-во:

1. Существование: Если $f = 0$ или $n < m$, где $n = deg(f), m = deg(g)$, то положим $q = 0$, $r = f$. В противном случае положим $f_1 = f - \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} g$, где a_0, b_0 - коэффициенты при старших членах многочленов f, g соответственно $f_2 = f_1 - \frac{a_{01}}{b_0} x^{n_1 - m} g, \quad n_1 = deg(f_1)$, а a_{01} - коэффициент при старшем члене многочлена f_1. $f_3 = f_2 - \frac{a_{02}}{b_0} x^{n_2 - m} g$, где $n_2 = deg(f_2)$, a_{02} - коэффициент при страшем члене многочлена f_2 и т.д. Вычисления$ будут продолжаться до тех пор, пока не будет получен многочлен $f_s = f_{s-1} - \frac{a_{0s-1}}{b_0} x^{n_{s-1} - m} g$ такой, что $f_s = 0$ или $n_s = deg(f_s) < m$ суммируя равенства получаем $f_s = f - \frac{1}{b_0}(a_0 x^{n-m} + a_{01} x^{n_1 - m} + \dots + a_{0s-1} x^{n_{s-1} - m})$. Легко видеть, что r и q удовлетворяет требуемым свойствам.
2. Единственность: Предположим, что нашлись многочлены r, r_1, q, q_1 такие, что $f = qg + r = q_1 g + r_1$ причем $deg(r_1) < deg(g_1)$, $deg(r) < deg(g)$. Докажем тогда, что $q = q_1$ и $r = r_1$. Действительно, из $f = qg + r = q_1 g + r_1$ получаем $(q - q_1)g = r_1 - r$. Если $q \neq q_1$, то $deg((q - q_1)g) \geq deg(g)$, что невозможно, т.к. $deg((r_1 - r)) < deg(g)$. Если же $q = q_1 \implies r_1 = r$ чтд.

Пусть К - произвольное кольцо. $f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_0$ - многочлен, где $a_i \in K \quad (i = 0, 1, \dots, n)$ - коэффициенты многочлена, $a_i x^{n-i}$ - член многочлена, $n - i$ степень члена многочлена. Если $a_0 \neq 0$, то n называется стпенью многочлена $a_0 x^n$ - старший член многочлена.

Стпень многочлена обозначается как $deg(f)$. Многочлен $f = 0$ называется нулевым, его степень неопределена.

Множество все многочленов с коэффициентами из кольца K обозначаются $K[x]$. Также это множество называется множеством многочленов над кольцом K.

Многочлены из $K[x]$ можно складывать и умножать При этом снова получается многочлен из $K[x]$.

Утв: Пусть многочлены f и g из $K[x]$. Тогда $f + g = 0$ либо $deg(f + g) \leq max(deg(f), deg(g))$. Если $f \neq 0, g \neq 0$, то

$deg(fg) \leq deg(f) + deg(g)$. Елсли при этом K не содержит делителей нуля, то $deg(fg) = deg(f) + deg(g)$.