6. Группа подстановок n-й степени. Четность подстановки. Транспозиции. Разложение подстановки в произведение транспозиций и четность перестановки.

1) Подстановки

Подстановкой n-ой степени называют взаимное отображение множества на само себя.

S_n — множество всех подстановок n-ой степени.

$M = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество

$f: M \to M$ подстановка — биекция

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Композиция отображений — произведение отображений

Пусть $f, g \in S_n$: $\circ(g(i)) = f(g(i))$

$f \cdot g = f \circ g$ — композиция

Свойства операции умножения на мн-ве S_n:

1) Ассоциативность

$((fg)h) = (f(gh)) \quad \forall f, g, h \in S_n$

2) $\forall f \in S_n$ $\exists$ единичный элемент

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$f \cdot E = E \cdot f = f$

3) $\forall f \in S_n$ $\exists$ обратный элемент $g \in S_n$ такой, что

$g \cdot f = f \cdot g = E$

$f^{-1} = g$ — обратное отображение

$f^{-1} = g$ - обратное отображение
Из этих свойств следует, что S_n группа относительно операции умножения

2) Транспозиция

$(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$ все элементы на месте кроме (i,j)

- такая подстановка называется транспозицией

3) Четность и представление подстановки в виде произведения транспозиций.

Всякая подстановка n-ой степени, является произведением транспозиций, четность подстановки совпадает с четностью числа сомножителей в таком разложении. Также четность подстановки совпадает с четностью перестановки, стоящей в нижней строке, если при этом верхняя строка записана в естественном порядке.

Док-во:

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$

(1) $i_1 \dots i_n$ - перестановка

составим список перестановок начиная с $1, 2, \dots, n$: $1, 2 \dots n$

$1, 2 \dots n$

$$
\begin{array}{l}
1, 2 \ldots n \\
\quad \downarrow T_1 \\
\ldots \\
\quad \downarrow T_2 \\
\ldots \\
\quad \downarrow T_k \\
i_1, i_2 \ldots i_n
\end{array}
$$

$T_1, T_2, \ldots, T_k$ - транспозиции

Каждая новая перестановка получена путем домножения предыдущей на единичную подстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} T_1 \cdot T_2 \ldots T_k$$

Произведение k транспозиций — подстановка четность которой совпадает с четностью k

$k = 1$ верно и меняет четность на противоположную

Пусть верно для k и $k-1$ множителей, k и $k-1$ имеют разные четности, и умножение подстановки на транспозиции равносильно выполнению этой транспозиции в нижней строке подстановки, то есть четность меняется