9

Миноры и алгебраические дополнения

Минор

Важно: Миноры можно брать у любых квадратных или прямоугольных матриц, а не только у тех, которые участвуют в вычислении определителей. Однако миноры чаще всего применяются в контексте **определителей** и их вычислений.

Минор M_j^i матрицы A — это элемент находящийся на i-й строке j-го столбца, т.е.: $M_j^i = a_{ij}$

Пример:
Рассмотрим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

Минор M_{13}^{24} это матрицы из элементов, взятых из 2 и 4 строки, 1 и 3 столбца

$$M_{13}^{24} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 13 & 15 \end{pmatrix} = 1 \cdot 8 - 7 \cdot 2 = -6$$

Дополнительный минор

Для квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n, **минором** M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель матрицы порядка $(n-1)$, полученной из A удалением i-й строки и j-го столбца:

$$M_{ij} = \det(A_{ij})$$

где A_{ij} — подматрица, полученная из A удалением i-й строки и j-го столбца.

Пример:
Рассмотрим матрицу A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Минор M_{23} элемента $a_{23} = 6$ получается из A удалением второй строки и третьего столбца:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 7 \cdot 2 = -6$$

Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется величина:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где $(-1)^{i+j}$ отвечает за чередование знаков в определителе.

Лемма: произведение минора на его алгебраическое дополнение является суммой слагаемых определителя с теми же знаками

Разложение определителя по строке (или столбцу)

Определитель матрицы A можно представить как сумму произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Формула разложения по i-й строке:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

$a_{ij}A_{ij}$ — алгебраическая сумма слагаемых определителя с теми же знаками (по Лемме)

Теорема Лапласа

Формулировка: Определитель квадратной матрицы A порядка n равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

Для i-й строки:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Теорема Лапласа также позволяет выразить определитель матрицы через определители её подматриц любого порядка.

Доказательства

Доказательство формулы разложения по строке

Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})$ порядка n и вычислим её определитель по общей формуле:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

Выберем i-ю строку и зафиксируем её элемент a_{ij}. Для каждой перестановки σ множество всех произведений $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$ можно разделить на две группы:

1. Перестановки, для которых $\sigma(i) = j$.
2. Остальные перестановки.

Если $\sigma(i) = j$, то произведение $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$ содержит a_{ij}, а оставшиеся элементы отвечают за минор M_{ij}. Знак перестановки σ при этом равен $(-1)^{i+j}\mathrm{sgn}(\tau)$, где τ — перестановка оставшихся индексов. Таким образом, сумма всех таких слагаемых даёт:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

Доказательство формулы разложения по столбцу

Аналогично для разложения по столбцу фиксируем j-й столбец и выполняем разложение по нему. Логика доказательства полностью повторяет разложение по строке, только теперь фиксируется элемент a_{ij} в столбце.

Пример разложения определителя по строке

Рассмотрим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Разложим по первой строке ($i = 1$):

1. Вычислим миноры:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 = -3, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - 6 \cdot 7 = -6, M_{1}$$

2. Найдём алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 6, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} =$$

3. Разложим определитель:

$$\det(A) = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + 3 \cdot A_{13} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) = -3 + 12$$

Определитель равен 0.