6 Вопрос

Отношения между множествами. Бинарные отношения. Способы задания бинарных отношений. Примеры. Операции над отношениями. Обратное отношение.

Отношения между множествами

Определение: $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ - n-местное отношение между множествами $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
$n = 1; R \in A$ - унарное
$n = 2; R \subseteq A \times B$ - бинарное

Бинарные отношения

Определение: Бинарное отношение на множестве A - это любое подмножество $R \subseteq A \times A$
.
$R \subseteq A \times A$
Обозначение. $(x, y) \in R \iff xRy$ - x находится в отношении R с y.
Сколько всего бинарных отношений на А: |A| = n, |A×A|=|A|^2=n^2 $\implies$ всего бинарных отношений на А: 2^{n^2}

Пример: A={$1, 2, 3$} R={$(1, 2), (1, 3), (2, 3)$}
$(1, 2) \in R \iff 1R2$
$(2, 1) \in R \iff 2\not{R}1$

Пример: A - люди, B - страны
$R \subseteq A \times B$, $xRy \iff$ человек x бывал в стране y.

Пример:

1. Отношение равенства "=" на любом множестве А.
2. Отношение принадлежности $\in$ между А и 2^A (x- элемент А, y - элемент 2^A)

- $x \in y$
- $x \notin y$

3. Отношение делимости на N: $x|y \iff$ x делит y $\iff$ y:x $\iff$ y=kx, k∈N

- 1|y - для любого y∈N
- 2$\nmid$3

Способы задания бинарных отношений

A, B - конечные.

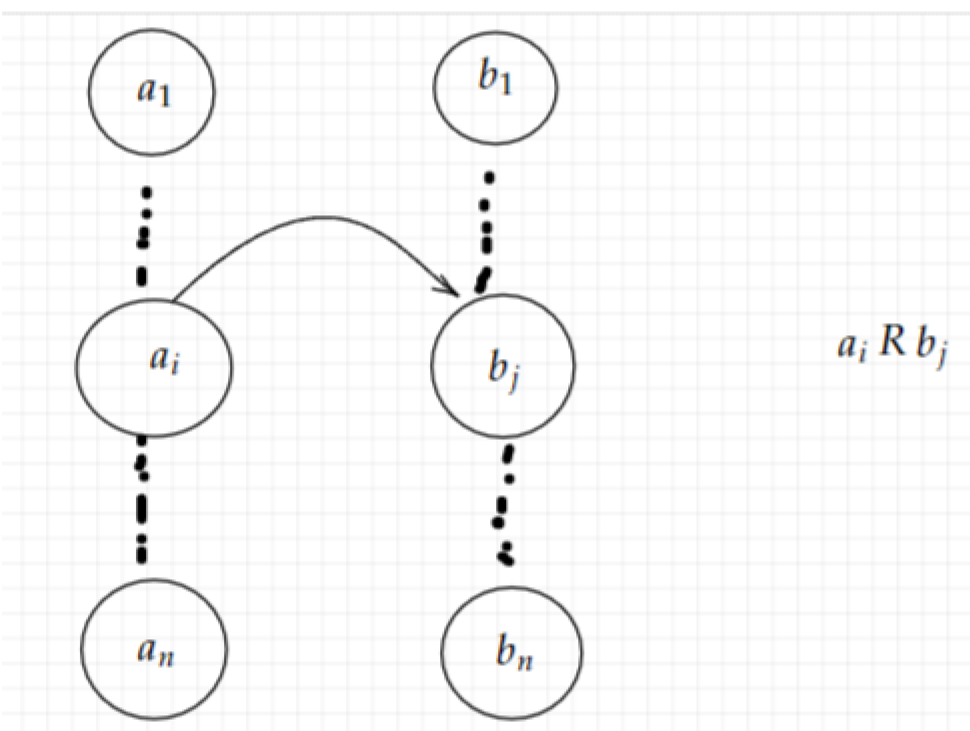
$R \subseteq A \times B$

1. **Перечисление**
   R = $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \ldots\}$
2. **Таблица или матрица**
   A=$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
   B=$\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

	b_1	$\ldots$	b_j	$\ldots$	b_n
a_1					
$\ldots$					
a_i			0 или 1		
$\ldots$					
a_n					

"1" если a_iRb_j , иначе "0".

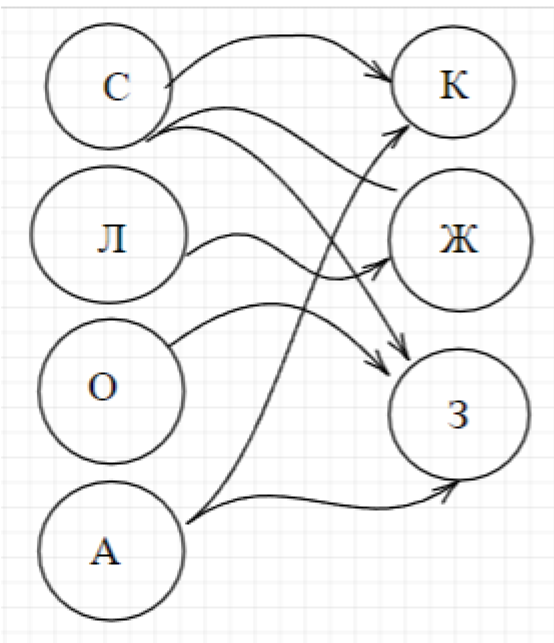
3. **Граф отношение**



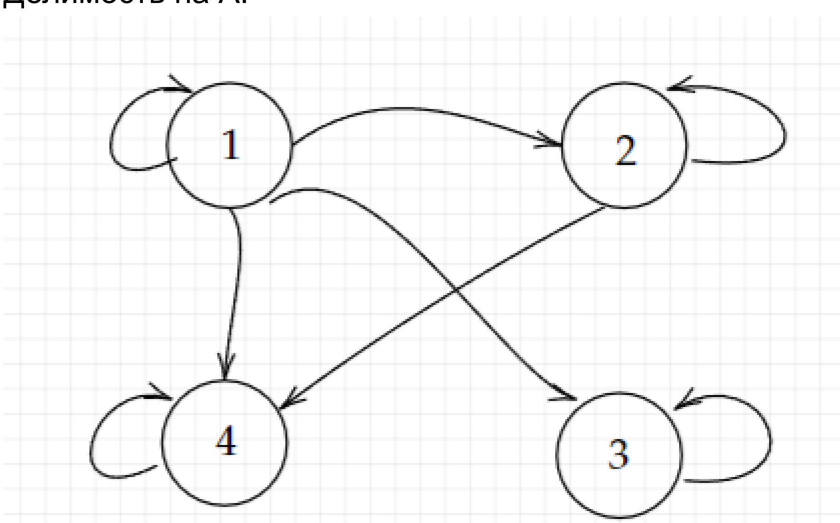
Примеры:

1. A = {светофор, лимон, огурец, арбуз}
   B = {красный, желтый, зеленый}
   xRy $\iff$ в объекте x есть объект y.

	Красный	**Желтый**	**Зеленый**
Светофор	1	1	1
Лимон	0	1	0
Огурец	0	0	1
Арбуз	1	0	1



2. A = $\{1, 2, 3, 4\}$
   Делимость на A:



Операции над отношениями

Так как отношение есть множество пар, то любые операции над множествами можно применять к отношениям

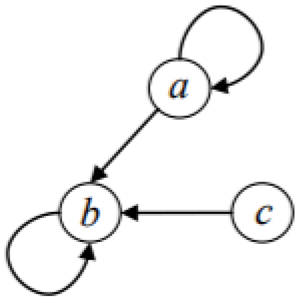
1. **Объединение**
   $R_1 \cup R_2 = \{(a,b) : (a,b) \in R_1$ или $(a,b) \in R_2\}$
2. **Пересечение**
   $R_1 \cap R_2 = \{(a,b) : (a,b) \in R_1$ и $(a,b) \in R_2\}$
3. **Разность**
   $R_1 \setminus R_2 = \{(a,b) : (a,b) \in R_1$ и $(a,b) \notin R_2\}$
4. **Дополнение**
   $\overline{R} = U \setminus R$, где U = $M_1 \times M_2$ (или $U = M^2$)
5. **Композиция отношений**
   R ⊆ A × B , S ⊆ B × C. Композицией отношений S и R называется отношение T ⊆ A × C, определяется таким образом: T = { (a,c) : существует такой элемент b из B, что (a,b)∈ R и (b,c)∈S }. Обозначается как: T = S ∘ R.

Обратное отношение

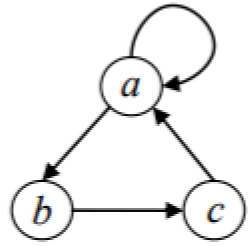
Обратное отношение R^{-1} к отношению R определяется следующим образом:

- R^{-1} = $\{(y,x) : (x,y) \in R\}$

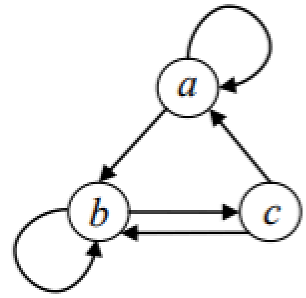
Примеры двух отношений на A={a,b,c} и операций над ними в виде графов:



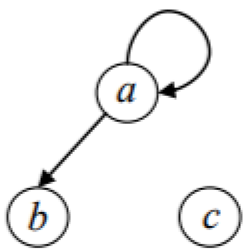
R_1



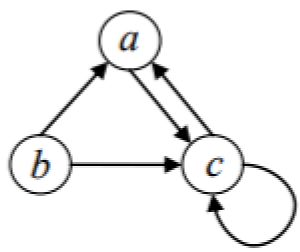
R_2



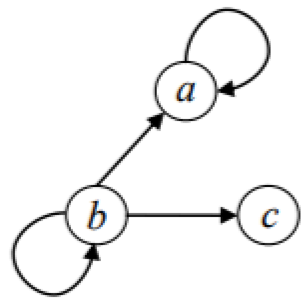
$R_1 \cup R_2$



$R_1 \cap R_2$



$\overline{R_1}$



R_1^{-1}