

6. Группа подстановок n -й степени. Четность подстановки. Транспозиции. Разложение подстановки в произведение транспозиций и четность перестановки.

1) Подстановки

Подстановкой n -ой степени называют взаимное отображение множества на само себя.

S_n - множество всех подстановок n -ой степени.

$M = 1, 2, \dots, n$ - множество

$f: M \rightarrow M$ подстановка - биекция

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Композиция отображений - пропускание отображений

Пусть $f, g \in S_n$: $f \circ (g(i)) = f(g(i))$

$f \circ g = f \circ g$ - композиция

Свойства операции умножения на мн-ве S_n :

1) Ассоциативности

$$(f \circ g) \circ h = (f \circ (g \circ h)) \quad \forall f, g, h \in S_n$$

2) $\forall f \in S_n \exists$ единичный элемент

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$f \circ E = E \circ f = f$$

3) $\forall f \in S_n \exists$ обратный элемент $g \in S_n$ такой, что

$$g \circ f = f \circ g = E$$

$f^{-1} = g$ - обратное отображение

$f^{-1} = g$ - обратное отображение
 Из этих свойств следует, что S_n группа
 относительно операции умножения

2) Транспозиция

$$(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix} \text{ все элементы на месте кроме } (i, j)$$

- такая перестановка называется транспозицией

3) Четность и представление перестановки в виде произведения транспозиций.

Всякая перестановка n -ой степени, является произведением транспозиций, четность перестановки совпадает с четностью числа сомножителей в таком разложении. Также четность перестановки совпадает с четностью перестановки, стоящей в нижней строке, если при этом верхняя строка записана в естественном порядке.

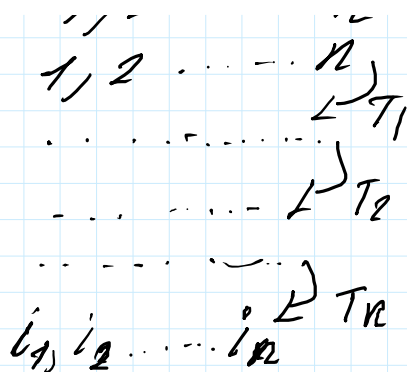
Док-во :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

(1) i_1, \dots, i_n - перестановка

составим список перестановок начиная с

$$1, 2, \dots, n : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}_1$$



T_1, T_2, \dots, T_k - транспозиции

Каждая новая перестановка получена путем
одной транспозиции предыдущей на единичную перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} T_1 T_2 \dots T_k$$

Произведение k транспозиций - перестановка
четности которой совпадает с четностью k

$k=1$ верно и меняет четность на противоположную
Пусть верно для k и $k-1$ множителей, k и $k-1$
имеют разные четности, и умножение перестановки
на транспозицию равносильно выполнению этой
транспозиции в нижней строке перестановки, то
есть четность меняется