question (2)

Комплексные числа. Сложение и умножение комплексных чисел. Алгебраическая запись комплексного числа. Поле комплексных чисел. Сопряжение комплексных чисел.

Комплексные числа

Это числа вида $z = a + bi$, где $a,\ b \in R$, а i - мнимая единица, такая, что $i^2 = -1$.

$$a - \text{ вещественная часть числа } z : \mathrm{Re}(z) = a$$
$$b - \text{ минная часть числа } z : \mathrm{Im}(z) = b$$

Сложение комплексных чисел

Для двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ сумма определяется как:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Умножение комплексных чисел

Для двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ произведение определяется как:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)i$$

Поле комплексных чисел

Множество $\mathbb{C}$ образует поле, то есть оно замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения и деления и удовлетворяет следующим свойствам:

1. Сложение:
    1. Ассоциативность: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
    2. Коммутативность: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
    3. Существование нуля: $z + 0 = z$
    4. Существование противоположного элемента: $z + (-z) = 0$
2. Умножение:
    1. Ассоциативность: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
    2. Коммутативность: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
    3. Существование единицы: $z \cdot 1 = z$
    4. Существование обратного элемента $\neq 0$: $z \cdot z^{-1} = 1$
3. Дистрибутивность:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Сопряжение комплексного числа

Сопряжение числа $z = a + bi$ обозначается как $\overline{z} = a - bi$
Свойства:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_1} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$
5. $z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$