5. Перестановки. Число перестановок n элементов. Инверсия. Четность. Транспозиция и четность. Список перестановок, в котором каждая последующая получается одной транспозицией предыдущей.

1) Перестановки – запись n символов в строку

Число перестановок.

$P_n = n!$

$P_1 = 1$ – база индукции

Пусть $P_n = n!$ – шаг индукции, тогда $\Rightarrow$

$P_{n+1} =$

записываем все перестановки, где в начале 1 их $n!$

записываем все перестановки, где в начале 2 их тоже $n!$

и так далее ...!

$\left.\begin{matrix} n+1 \\ \vdots \\ n+1 \end{matrix}\right\} n+1!$

$n!(n+1) = (n+1)!$ всего перестановок с $n+1$ элементами, согласно принципу математической индукции утверждение верно $\forall n \in N$

2) Инверсия

$i_1, \ldots, i_s, \underset{s+1}{k}, \ldots, t, \ldots, i_n$

$t < k \ (t, k)$

Символы t и k образуют инверсию, если $t < k$, но k встречается раньше чем t.

Пример инверсии $(3,1,2)$: $(1,3)$ $(2,3)$ – инверсии

3) Четность.

Перестановка называется четной, если имеет четное количество инверсий, аналогично.

Перестановка называется четной, если имеет четное количество инверсий, аналогично, если число инверсий нечетное, то перестановка нечетная.

Пример: $(3,1,2) \to (1,3)(2,)$ – четное кол-во $\Rightarrow$ перестановка четная.

4) Транспозиция и четность.

Транспозиция – когда два символа перестановки меняются местами.

Утверждение/ Если в перестановке поменять местами два символа, то четность перестановки изменится на противоположную.

1 случай/ I гр ... i, j ... II гр

I гр ... j, i ... II гр

I гр и II гр сохраняются

$\forall (i,j)$ при перестановке i и j либо появляется инверсия, либо инверсия исчезает $\Rightarrow$ меняется и четность перестановки

2 случай/ I гр, ..., i, ..., $l_1, \dots, l_k$, ... j, ... II гр

Выполняем $k + k+1 = 2k+1$; так как выполним $2k+1$ перестановок соседних символов, то 2^{k+1} раз поменялась четность.

I гр, ..., j, ... $l_1, \dots, l_k$, ... i, ... II гр

Т.к. $2k+1$ менялась четность, то есть нечетное количество раз, то четность всей перестановки поменяется на противоположную.

противоположную.

5) Список перестановок.

Утверждение | Все перестановки n-ой степени можно записать в виде списка в котором, каждая последующая перестановка получается из предыдущей транспозицией.

Док-во: Докажем по индукции.

$n = 2$ $\begin{matrix}(1,2)\\(2,1)\end{matrix}$ – весь список

допустим утверждение верно для перестановок $(n-1)$ степени.

Докажем, для перестановок n-ой степени:

$i_1, i_2, \ldots, i_n$

$i_1, i_2', \ldots, i_n'$

$\ldots$

$i_1, i_2^{(k)}, \ldots, i_n^{(k)}$ все перестановки начинаются с i_1

Транспозиция: $i_2, i_2^{(k)}, \ldots, i_n^{(k)}$

$i_2, j_2, \ldots, j_1, \ldots, j_{n-1}$

Все перестановки начинаются с i_2, в этом списке.

Согласно предположению математической индукции утверждение верно для $\forall n \in N$. ■