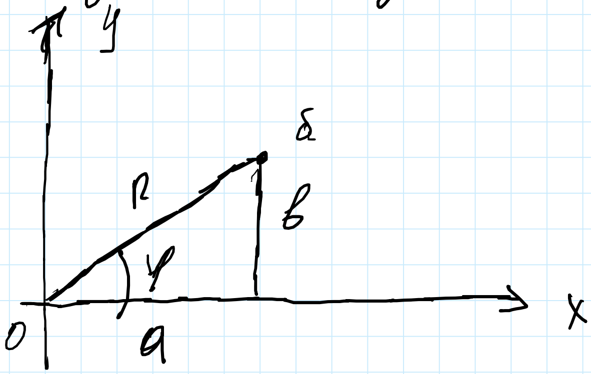
3. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.

1) Модуль и аргумент комплексного числа.

$z = a + ib$ — комплексное число

Возьмем точку z в полярных координатах



Тогда r — расстояние от точки z до O.

r — модуль комплексного числа

Угол φ — угол между OX и r. называется аргументом комплексного числа.

Возьмём связь полярных координат и декартовых:

$a = r\cos\varphi \quad b = r\sin\varphi$

тогда $\boxed{r = \sqrt{a^2+b^2}}$ / $\arg(z) = \varphi$

2) Тригонометрическая запись комплексного числа:

$z = a + ib$

$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ — тригонометрической формула комплексного числа.

3) Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \beta = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$

$z \cdot \beta = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')) =$

$= r \cdot r'(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i(\cos\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi' i\sin\varphi)$

$$= r\cdot r'(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i\cos\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi' i\sin\varphi)$$
$$= r\cdot r'(\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi'))$$
$$\boxed{\alpha\cdot\beta = r\cdot r'(\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi'))}$$

$$|\alpha\cdot\beta| = |\alpha||\beta| = r\cdot r'$$
$$\arg(\alpha\cdot\beta) = \varphi + \varphi'$$

4) Деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \beta = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' - i\sin\varphi')}{r'(\cos^2\varphi' + i\sin^2\varphi')} =$$
$$= \frac{r}{r'}(\cos\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi' i\sin\varphi - \cos\varphi\, i\sin\varphi' +$$
$$+ \sin\varphi\sin\varphi') = \frac{r}{r'}(\cos(\varphi-\varphi') + i\sin(\varphi-\varphi'))$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r}{r'}(\cos(\varphi-\varphi') + i\sin(\varphi-\varphi')) \qquad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{r}{r'} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$
$$\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \arg(\alpha) - \arg(\beta) = \varphi - \varphi'$$

5) Формула Муавра

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$\alpha^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$
$$\boxed{\alpha^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$ – формула Муавра.