7

Циклы

Определение цикла

Подстановка σ называется **циклом**, если она действует ненулевым образом только на конечном подмножестве $S \subseteq 1, 2, \ldots, n$ и при этом существует такая последовательность элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k \in S$, что:

$\sigma(a_i) = a_{i+1}$ для $i = 1, 2, \ldots, k-1, \quad \sigma(a_k) = a_1, \quad \sigma(a) = a$ для всех $a \notin S$.

Запись цикла представляется как:

$$\sigma = (a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_k),$$

где k называется длиной цикла.

Два цикла называются независимыми, если они не имеют общих перемещаемых символов, тогда:

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma_2 \cdot \sigma_1$$

Четность цикла

Теорема

Цикл длины k можно разложить в произведение $k-1$ транспозиций:

$$(a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_k) = (a_1 \ a_2)(a_1 \ a_3) \ldots (a_1 \ a_k)$$

Доказательство

1. Рассмотрим действие цикла $(a_1; a_2; \ldots; a_k)$:
   - $a_1 \mapsto a_2$, $a_2 \mapsto a_3$, …, $a_k \mapsto a_1$.

2. Сначала применяем транспозицию $(a_1; a_2)$: $a_1 \mapsto a_2$, $a_2 \mapsto a_1$.
3. Затем применяем $(a_1; a_3)$: $a_1 \mapsto a_3$, $a_3 \mapsto a_1$.
4. Повторяя это для всех элементов $a_4, \ldots, a_k$, мы получаем исходный цикл.

Таким образом, цикл разлагается на $k - 1$ транспозиций. Следовательно:

- Если k чётно, цикл нечётный.
- Если k нечётно, цикл чётный.

Разложение подстановки в произведение независимых циклов

Определение

Подстановка σ может быть представлена в виде произведения независимых циклов, то есть циклов, действующих на непересекающихся подмножествах множества $1, 2, \ldots, n$.

Пример

Пусть $\sigma = (1; 3; 5)(2; 4)$. Это произведение двух независимых циклов:

- $(1; 3; 5)$ действует на $1, 3, 5$.
- $(2; 4)$ действует на $2, 4$.

Декремент подстановки и четность

Определение декремента

Декремент $\operatorname{dec}(\sigma)$ подстановки σ определяется как:

$$\mathrm{dec}(\sigma) = \text{Количество инверсий в } \sigma$$

Или

$$\mathrm{dec}(\sigma) = \text{число всех перемещаемых символов минус кол-во циклов}$$

Или

$$\mathrm{dec}(\sigma) = \text{Сумма длины всех циклов минус количество циклов}$$

Инверсией называется пара (i, j), где $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Связь с четностью

Подстановка σ чётна, если $\mathrm{dec}(\sigma)$ чётно, и нечётна, если $\mathrm{dec}(\sigma)$ нечётно.

Пример

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1,4,2)(3,5) = (1,4)(1,2)(3,5)$

Кол-во перемещаемых символов: 5
Количество циклов: 2
Количество инверсий: 3

$5 - 2 = 3 \implies$ подстановка не четная (об четности см ниже)

Связь между циклическим разложением и четностью

Теорема

Четность подстановки σ определяется чётностью суммы длины всех циклов минус их количество:

$$\text{Четность}(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} (\ell_i - 1)$$

где ℓ_i — длина i-го цикла.

Доказательство

Разложим σ в k циклов длины $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$. Каждый цикл ℓ_i разлагается в $\ell_i - 1$ транспозиций. Тогда общее число транспозиций:

$$T = \sum_{i=1}^{k} (\ell_i - 1)$$

Если T чётно, σ чётна; если нечётно, σ нечётна.

Пример

Разложим подстановку $\sigma = (1;4;3)(2;5)$:

1. Циклы: $(1;4;3)$ и $(2;5)$.
2. Длины циклов: $\ell_1 = 3$, $\ell_2 = 2$.
3. Сумма длины минус количество циклов: $(3-1)+(2-1) = 2+1 = 3$ (нечётно).

Следовательно, подстановка σ нечётна.