question (6)

Группа подстановок n-й степени. Четность подстановки. Транспозиции. Разложение подстановки в произведение транспозиций и четность перестановки.

Группа подстановок n-й степени

Группа подстановок S_n (или группа перестановок) — это множество всех возможных перестановок n-элементного множества $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, наделённое операцией композиции подстановок.

1. Элементы группы S_n — это биекции $\sigma : X \to X$, то есть перестановки множества X.
2. Композиция подстановок σ и τ ($\sigma \circ \tau$) определяется как последовательное применение: $(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x))$.
3. Нейтральным элементом в S_n является тождественная подстановка $e(x) = x$ для всех $x \in X$.
4. Для каждой подстановки σ существует обратная подстановка σ^{-1}, такая, что $\sigma \circ \sigma^{-1} = e$.

Число элементов группы S_n равно $n!$.

Пример: Для $n = 3$, множество $\{1, 2, 3\}$ имеет $3! = 6$ перестановок:

$$S_3 = \{\text{id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

Чётность подстановки

Чётность подстановки определяется через количество **инверсий**. Подстановка σ является:

- **Чётной**, если число инверсий в ней чётно.
- **Нечётной**, если число инверсий нечётно.

Инверсии

Инверсия — это пара (i, j), где $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Пример: Для подстановки $\sigma = [3, 1, 2]$,

- Инверсии: $(3 > 1), (3 > 2)$,
- Число инверсий $I(\sigma) = 2$, значит, подстановка чётная.

Связь с разложением в транспозиции
Чётность подстановки также определяется количеством транспозиций в её разложении:

- Если подстановка разложена в чётное число транспозиций, то она чётная.
- Если в нечётное число транспозиций — нечётная.

Транспозиции

Транспозиция — это подстановка, меняющая местами два элемента, оставляя остальные элементы на своих местах. Обозначается $(i\ j)$, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Пример: Транспозиция $(1\ 3)$ при применении к $X = [1, 2, 3]$ даст $X' = [3, 2, 1]$.

Свойства транспозиций

1. Каждая транспозиция является **нечётной** подстановкой (одно инвертирование увеличивает число инверсий на 1).
2. Любая перестановка может быть разложена в произведение транспозиций.

Разложение подстановки в произведение транспозиций и чётность подстановки

Теорема. Любая подстановка $\sigma \in S_n$ может быть представлена в виде произведения транспозиций:

$$\sigma = (i_1\ j_1)(i_2\ j_2)\ldots(i_k\ j_k).$$

Свойства

1. Чётность числа транспозиций в разложении определяет чётность подстановки:
   - Если k — чётное, то подстановка чётная.
   - Если k — нечётное, то подстановка нечётная.
2. Разложение в транспозиции **не уникально**, но чётность количества транспозиций всегда остаётся неизменной.

Пусть дана подстановка $\sigma = (1\ 3\ 2)$ для множества $\{1, 2, 3\}$ (циклическая перестановка). Разложим её в транспозиции:

$$\sigma = (1\ 2)(1\ 3).$$

Здесь 2 транспозиции (чётное число), значит, подстановка σ чётная.

Группа чётных подстановок (A_n)

Множество всех чётных подстановок из S_n образует подгруппу, называемую **группой чётных подстановок** A_n (или **альтернирующей группой**). Число элементов в A_n равно $\frac{n!}{2}$.