

question (5)

Перестановки. Число перестановок n элементов. Инверсия. Четность. Транспозиция и четность. Список перестановок, в котором каждая последующая получается одной транспозицией предыдущей.

Перестановки

Перестановка множества из n элементов - это упорядочение этих элементов, полученное перестановкой этих мест. Формально, перестановка множества $S = \{1, 2, \dots, n\}$ - это биекция $\sigma : S \rightarrow S$.

Число перестановок n элементов

Общее число перестановок n -элементного множества равно $n!$.

Инверсия

Инверсия в перестановке $\sigma = [\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$ - это пара индексов, таких что $i < j, \sigma(i) > \sigma(j)$.

Пример: $\sigma = [3, 1, 2]$

Инверсии: $(3 > 1), (3 > 2), (1 \not> 2)$

Общее число $I(\sigma) = 2$

Четность перестановки

Четность перестановки определяется количеством инверсий: если $I(\sigma)$ четно, то перестановка четная, и если нет, то нечетная.

Транспозиция и четность

Транспозиция - это перестановка, которая меняет местами два элемента, оставляя остальные элементы неизменными, другими словами это цикл длины 2. Обозначается как $(i\ j)$, где i, j - индексы переставляемых элементов.

Свойства четности транспозиции:

1. Транспозиция $(i\ j)$ всегда меняет четность перестановки (если перестановка была четной, она становится нечетной и наоборот).
2. Любая перестановка может быть представлена как произведение транспозиций. Если число транспозиций нечетное, перестановка нечетная и наоборот.

Список перестановок, в котором каждая последующая получается одной транспозицией предыдущей

Такой список можно получить, используя **обход перестановок в соседях** (например, алгоритм Джонсона-Троттера). Идея в том, чтобы менять только два соседних элемента в каждой следующей перестановке.

$$[1, 2, 3] \rightarrow [2, 1, 3] \rightarrow [2, 3, 1] \rightarrow [3, 2, 1] \rightarrow [3, 1, 2] \rightarrow [1, 3, 2] \rightarrow [1, 2, 3]$$