24 вопрос

Th: "Основная теорема алгебры"
Любой многочлен $f \in C[x]$ степени не меньше 1 имеет по крайней мере один комплексный корень.

Интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$f = \sum_{j=0}^{b} y_j \cdot \frac{(x - x_1)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n)}{(x_j - x_1)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n)}$$

Многочлен Лагранжа используются для интерполяции, а также для численного интегрирования.

Разложение многочлена на линейные множители:

Th: Всякий многочлен n-ой степени разлагается на n-линейных множителей вида $(x - a)$ и множитель равный коэффициенту при x^n.
Док-во:
Пусть $f(x)$ - многочлен n-ой степени: $f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$. Данный многочлен в силу "Основной теоремы алгебры" имеет по крайней мере один корень, обозначим черех a_1, тогда по Th Безу $\Rightarrow$ $f(x) = (x - a_1) \cdot f_1(x)$. $f_1(x)$ - многочлен степени $(n - 1)$, многочлен $f_1(x)$ также имеет по крайне мере один корень, обозначим его a_2. Получим, что $f_1(x) = (x - a_2) \cdot f_2(x)$. $f_2(x)$ - многочлен степени $(n - 2)$. Он также имеет корень, обозначим черех a_3 $\Rightarrow$ $f_2(x) = (x - a_3) \cdot f_3(x)$. Продолжая просцеес выделения множителей дойдем до соотношения $f_{n-1}(x) = (x - a_n) \cdot f_n(x)$. $f_n(x)$ - многочлен 0 степени, т.е. константа и $f_n(x) = A_0$. Получим $f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ - корни многочлена $f(x)$, т.к. при $x = a_1$, $x = a_2$ и т.д. правая часть обращается в нуль.

Формулы Виета

$\triangleleft f(x)$ - унитарный многочлен n-ой степени.

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = (x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n)$$

Раскрывая скобки в правой части м собирая коэффициенты при каждой стпени получаем

$$a_1 = -(c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n)$$

$$a_2 = (c_1c_2 + c_1c_3 + \dots c_{n-1}c_n)$$

$$a_3 = (c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \dots c_{n-2}c_{n-1}c_n)$$

$$a_j = (-1)^j \cdot \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_n \le n} c_{i_1}c_{i_2}c_{i_3}\dots c_{i_j}$$

$$a_n = (-1)^n c_1c_2c_3\dots c_n$$

Данные формулы называются формулами Виета

Если бы многочлен $f(x)$ не был унитарным, т.е. имел старгий коэффициент $a_0 \ne_1$,

то формулы аналогичные давали бы выражения для отношения $\dfrac{a_j}{a_0}$