11

Алгебра матриц

Алгебра матриц включает операции сложения, умножения матриц, а также умножение матриц на скаляр.

Операция сложения матриц

Определение:

Пусть даны две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ размера $m \times n$. Суммой матриц A и B называется матрица $C = (c_{ij})$, где:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Свойства сложения матриц:

1. **Коммутативность сложения**:

   $A + B = B + A$
   Доказательство: По определению сложения:

   $$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad d_{ij} = b_{ij} + a_{ij}.$$

   Так как сложение чисел коммутативно, то $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$. Значит, $A + B = B + A$.
2. **Ассоциативность сложения**:

   $(A + B) + C = A + (B + C)$
   Доказательство: Рассмотрим $(A + B) + C$:

   $$((A + B) + C)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$$

   По ассоциативности сложения чисел:

$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$. Значит, $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3. **Нулевой элемент (нулевая матрица)**: Существует нулевая матрица O, такая что:

   $A + O = A$.
   Доказательство: Пусть $O = (0)_{m \times n}$, где все элементы равны нулю. Тогда:

   $$(A + O)_{ij} = a_{ij} + 0 = a_{ij}$$

4. **Противоположная матрица**: Для любой матрицы A существует противоположная матрица $(-A)$ такая, что:

   $A + (-A) = O$.
   Доказательство: Пусть $(-A) = (-a_{ij})$. Тогда:

   $$(A + (-A))_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$$

Операция умножения матриц

Определение:

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$, а $B = (b_{jk})$ — матрица размера $n \times p$. Произведением матриц A и B называется матрица $C = (c_{ik})$ размера $m \times p$, где:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Свойства умножения матриц:

1. **Ассоциативность умножения**:

   $(AB)C = A(BC)$
   Доказательство:

1. Пусть:
   - A — матрица размера $m \times n$,
   - B — матрица размера $n \times p$,
   - C — матрица размера $p \times q$.
2. Рассмотрим элемент (i, j) произведения $A(BC)$:

   $$(BC)_{k,j} = \sum_{r=1}^{p} B_{k,r} C_{r,j}$$

   Тогда элемент (i, j) матрицы $A(BC)$ равен:

   $$(A(BC))_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} (BC)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \left(\sum_{r=1}^{p} B_{k,r} C_{r,j} \right)$$

   Переставляя суммы (по правилу свёртки сумм), получаем:

   $$(A(BC))_{i,j} = \sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,r} \right) C_{r,j}$$

3. Теперь рассмотрим элемент (i, j) произведения $(AB)C$:

   $$(AB)_{i,r} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,r}$$

   Тогда элемент (i, j) матрицы $(AB)C$ равен:

   $$((AB)C)_{i,j} = \sum_{r=1}^{p} (AB)_{i,r} C_{r,j} = \sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,r} \right) C_{r,j}$$

4. Заметим, что выражения для $(A(BC))_{i,j}$ и $((AB)C)_{i,j}$ совпадают:

   $$(A(BC))_{i,j} = \sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,r} \right) C_{r,j} = ((AB)C)_{i,j}$$

2. **Дистрибутивность умножения относительно сложения**:

$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC$

Доказательство: Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{jk})$.

Рассмотрим левую часть:

$$A(B+C) = A \cdot D, \quad \text{где } D = (b_{jk} + c_{jk})$$

Тогда:

$$(A(B+C))_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})$$

Используя дистрибутивность сложения чисел:

$$(A(B+C))_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}$$

То есть: $A(B+C) = AB + AC$

Аналогично доказывается $(A+B)C = AC + BC$.

3. **Умножение на единичную матрицу**: Пусть E — единичная матрица размера $n \times n$. Тогда для любой матрицы A:

   $AE = EA = A$

   Доказательство: Элементы единичной матрицы:

   $$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

   Рассмотрим $(AE)_{ik}$:

   $$(AE)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_{jk}$$

   Так как $e_{jk} = 0$ при $j \neq k$, то сумма сводится к одному слагаемому a_{ik}. Значит, $AE = A$. Аналогично доказывается $EA = A$.

4. **Нулевая матрица**: Если хотя бы одна из матриц A или B является нулевой, то:

   $AB = O$

   Доказательство: Все элементы произведения:

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Если A или B — нулевая матрица, то все $a_{ij} = 0$ или $b_{jk} = 0$. Значит, $AB = O$.

Операция умножения матриц на число

Если умножаем на число $C_{ij} = \alpha \cdot A_{ij}$, то: $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

Свойства:

$$\begin{aligned}
&1. \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha(\beta A) \\
&2. \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \\
&3. \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \\
&4. \quad 1 \cdot A = A
\end{aligned}$$