10

Правило Крамера

Формулировка:

Правило Крамера — это метод решения системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, где матрица коэффициентов системы является невырожденной (т.е. её определитель $\det A \neq 0$).

Формулировка

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

или в матричной форме:

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

где:

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — матрица коэффициентов;
- $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)$ — вектор неизвестных;
- $\mathbf{b} = (b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)$ — вектор свободных членов.

Если $\det A \neq 0$, то система имеет единственное решение, и компоненты вектора $\mathbf{x}$ выражаются по формуле:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

где:

- A_i — матрица, полученная из A заменой i-го столбца на вектор $\mathbf{b}$.

Лемма

Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю при $i \neq j$ и равна определителю при $i = j$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0, \quad (i \neq j)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \Delta, \quad (i = j).$$

Доказательство

Пусть $(x_1^o, \ldots, x_n^o)$ решения системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1^o + a_{12}x_2^o + \cdots + a_{1n}x_n^o = b_1 \\ a_{21}x_1^o + a_{22}x_2^o + \cdots + a_{2n}x_n^o = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1^o + a_{n2}x_2^o + \cdots + a_{nn}x_n^o = b_n \end{cases}$$

Умножим первую строку на A_{11}, вторую на A_{21} и так далее (A - алгебр дополнение). Если мы сложим все строки, то получим:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1^o + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{n2}A_{n1})x_2^o + \cdots$$
$$= (b_1 b_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1})x_1^o$$

Первая скобка равна определителю, остальные нулю (по Лемме). Правая часть равенства имеет вид:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1 \implies \Delta x_1^0 = \Delta_1 \implies x_1^o = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

Пример

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x + 4y = 6. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Вычислим $\det A$:

$$\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

2. Вычислим A_1 и $\det A_1$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det A_1 = 5 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 20 - 12 = 8$$

3. Вычислим A_2 и $\det A_2$:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \det A_2 = 1 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = 6 - 15 = -9$$

4. Решение:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{8}{-2} = -4, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$$

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$