Программа экзамена по МА, 1 семестр 2024-25 учебного года, группы математиков и ФММ

Часть 1. Начальная терминология, теория пределов, непрерывность

1. Аксиома полноты действительных чисел.
2. Доказать, что $\sqrt{2}$ - иррациональное число.
3. Окрестность точки на прямой. Открытое множество. Замкнутое множество. Граница множества. Предельная точка (точка сгущения). Граничная точка. Изолированная точка. Все определения сопроводить геометрическими интерпретациями.
4. Верхняя грань множества на прямой. Точная верхняя грань – супремум множества на прямой. Максимум. Минимум. Определения и геометрические интерпретации.
5. Числовая последовательность. Предел последовательности (конечный), определение через окрестности и неравенства и геометрическая интерпретация. Единственность предела последовательности (доказать). Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Примеры.
6. Предельные точки последовательности. Подпоследовательности. Предельные точки последовательности, частичные пределы последовательности, верхний и нижний пределы.
7. Теоремы о пределах последовательности, связанных с равенствами. Доказать для суммы и произведения.
8. Теоремы о пределах последовательности, связанных с неравенствами.
9. Монотонная последовательность. Последовательность, ограниченная сверху, снизу. Ограниченная последовательность. Ограниченность сходящейся последовательности (доказать). Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности (доказать).
10. Последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Доказать монотонность и ограниченность. Определение числа e.
11. Сформулировать теорему Штольца. Использовать ее для поиска предела последовательности $\left\{\frac{\log_a n}{n}\right\}$.
12. Последовательность вложенных отрезков. Лемма (принцип) Кантора о вложенных отрезков. Доказать.
13. Теорема Больцано-Вейерштрасса об ограниченной последовательности. Доказать. Сформулировать аналогичную теорему для произвольной последовательности.
14. Критерий Коши существования предела последовательности. Формулировка, геометрическая интерпретация, доказательство.
15. Покрытия. Лемма Гейне-Бореля. Доказать. Компакт.
16. Объект $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ определить по Коши. Написать отрицание. То же по Гейне. Всё с геометрическими интерпретациями. Доказать теорему об эквивалентности определений пределов.
17. Доказать единственность предела функции.
18. Теоремы о пределах функции, связанных с равенствами. Доказать на основании определения предела по Гейне.
19. Доказать, что $\nexists \lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.
20. Теоремы о пределах функции, связанных с неравенствами. Геометрические интерпретации.
21. Предел композиции (сложной функции). Доказать.

22. Сформулировать определения по Коши и по Гейне и дать геометрические интерпретации следующих объектов: односторонние пределы, бесконечные пределы, предел при $x \to \infty,\ x \to +\infty,\ x \to -\infty$.
23. Первый замечательный предел и все следствия из него. Доказать.
24. Второй замечательный предел. Доказать. Следствия из него – сформулировать, одно из них доказать.
25. Критерий Коши существования предела функции. Доказать.
26. Бесконечно малая функция. Операции над бесконечно малыми функциями. Доказать.
27. Сравнение бесконечно малых. Символика Э. Ландау.
28. Эквивалентные бесконечно малые. Использование эквивалентных б.м. при раскрытии неопределенностей типа $\frac{0}{0}$, соответствующую теорему доказать. Сравнение б.м. в окрестности точки $x = 0$ с функцией $y = ax^n$, $n \in N$ - шкала бесконечно малых. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to 0}\left(x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.
29. Определение непрерывности функции в точке. Записать через символику Коши и Гейне. Теоремы о непрерывных функциях. Доказать.
30. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций. Всё с доказательствами.
31. Полунепрерывность (односторонняя непрерывность) в точке.
32. Точки разрыва и их классификация. Определения, примеры.
33. Глобальная непрерывность на отрезке. Две теоремы Вейерштрасса и две теоремы Больцано-Коши – доказать.
34. Монотонные функции и их свойства. Всё с доказательствами.
35. Равномерная непрерывность функции на множестве. Теорема Кантора о равномерной непрерывности на отрезке. Доказать.

Часть 2. Дифференцируемость функции одного переменного.

36. Определение производной. Обозначения. Геометрический смысл. Кинематический смысл.
37. Производная обратной функции - вывести.
38. Производные всех элементарных функций – вывести.
39. Производная сложной функции – вывести.
40. Правила дифференцирования – доказать.
41. Гиперболические функции и производные от них. Вывести.
42. Непрерывность дифференцируемой функции. Доказать.
43. Логарифмическое дифференцирование. Производная степенно-показательного выражения.
44. Производная от функции, заданной неявно. Уметь вычислять для конкретных примеров.
45. Функция, заданная параметрически. Производная функции, заданной параметрически.
46. Дифференциал функции. Определение, геометрический смысл. Инвариантность формы первого дифференциала.
47. Производные высших порядков от явно заданной функции; от функции, заданной параметрически. Производная n-ого порядка от показательной функции, логарифмической функции, sinx, cosx. Формула Лейбница производной n-ого порядка от произведения функции. Вторая производная от функции, заданной параметрически.

48. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность формы дифференциала второго и более высоких порядков.
49. Возрастание, убывание функции в точке. Точки локального максимума, минимума. Теорема Ферма – необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Доказать.
50. Найти производную функции $y=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$
51. Теорема Дарбу о том, что производная достигает своих значений. Какие точки разрыва могут быть у производной непрерывной функции?
52. Теорема Ролля. Доказать.
53. Теорема Лагранжа. Доказать.
54. Следствия из теоремы Лагранжа – формула конечных приращений и т.п. Вывести.
55. Теорема Коши. Доказать.
56. Правила Лопиталя. Доказать любые два.
57. Порядок касания (степень близости) функций. Многочлен Тейлора. Формула Тейлора. Формула Маклорена.
58. Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано. Вывести.
59. Остаточный член формулы Тейлора в формах Шлёмильха-Роша, Лагранжа, Коши. Вывести.
60. Приближенные вычисления с помощью формулы Тейлора. Оценка остаточного члена. Примеры.
61. Поиск эквивалентных бесконечно малых с помощью формулы Тейлора. Раскрытие непоределенностей.
62. Три достаточных условия экстремума. Геометрическое пояснение.
63. Функция, выпуклая вниз(вверх) на отрезке. Определение, доказательство взаимного расположения графика и хорды.
64. Функция, выпуклая вниз(вверх) на отрезке. Доказать, что функция выпукла вниз(вверх) тогда и только тогда, когда первая производная не убывает (не возрастает). Правильно ли сформулирован этот вопрос?
65. Точки перегиба. Необходимое условие точки перегиба (обосновать). Достаточное условие точки перегиба (обосновать).
66. Асимптоты.
67. Построение графика функции с полным исследованием.
68. Задача о поиске наибольшего и наименьшего значения функции на замкнутом промежутке.
69. Дифференциал дуги. Длина дуги как параметр.
70. Дифференциал дуги. Доказать эквивалентность длины дуги, длины хорды и дифференциала дуги при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Направляющие косинусы касательной и векторная функция, задающая кривую с помощью параметрических уравнений относительно длины дуги.
71. Угол смежности дуги. Средняя кривизна кривой. Кривизна кривой в точке, определение, геометрический смысл. Радиус кривизны. Вычисление кривизны. Геометрический смысл второй производной. Центр и круг кривизны. Эволюта и эвольвента.
72. Векторная функция скалярного аргумента. Годограф. Векторная функция с постоянным модулем. Векторная функция с постоянным направлением. Предел векторной функции. Векторная функция, непрерывная в точке. Производная векторной функции. Производная векторной функции с постоянным модулем. Модуль производной векторной функции. Показать, что $\left|\vec{a}'(t)\right|\neq\left|\vec{a}(t)\right|'$. Правила дифференцирования, производные высших порядков.

73. Скорость и ускорение криволинейного движения. Нормальная плоскость, главная нормаль. Какие еще нормали к годографу могут быть?
74. Тангенциальное и нормальное ускорения. Ускорение прямолинейного движения. Ускорение равномерного движения.
75. Приложение. Полярные координаты. Формулы перехода от декартовых координат к полярным в случае согласования декартовой и полярной систем координат. Построение простейших графиков в полярных координатах (по таблице значений).

Уметь решать примеры на все темы.