12

Теорема об умножении определителей

Формулировка:

Пусть A и B — квадратные матрицы размера $n \times n$. Тогда определитель произведения этих матриц равен произведению их определителей:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Доказательство:

1. Определитель как свойство линейного отображения:

Для любой квадратной матрицы A её определитель $\det(A)$ равен коэффициенту изменения объёма при линейном отображении, задаваемом матрицей A. Аналогично, матрица B задаёт своё линейное отображение.

Умножение AB соответствует композиции линейных отображений, где результат умножения AB эквивалентен последовательному применению B и A. Таким образом, объём, изменяемый AB, будет равен произведению объёмов, изменяемых A и B, то есть $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

---

2. Доказательство для диагональных матриц:

Для диагональной матрицы $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ определитель равен произведению её диагональных элементов:

$$\det(A) = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$$

Аналогично для B. Для произведения двух диагональных матриц:

$$AB = \mathrm{diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n),$$

и его определитель:

$$\det(AB) = (a_1 b_1) \cdot (a_2 b_2) \cdot \cdots \cdot (a_n b_n)$$

Это равно:

$$\det(A) \cdot \det(B)$$

---

3. Обобщение на общий случай:

Для общей квадратной матрицы доказательство сводится к диагонализации или разложению на элементарные преобразования (например, с помощью LU-разложения). Предположим, что $A = PLU$, где P — перестановочная матрица, L — нижнетреугольная, а U — верхнетреугольная. Аналогично для B. Тогда:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

так как свойства треугольных матриц и перестановочных матриц сохраняют эту линейность.