question (4)

Корни n-ой степени из комплексного числа. Корни из единицы. Группа корней n-ой степени из 1. Первообразные корни n-ой степени из 1.

Корни n-ой степени из комплексного числа

Корни n-ой степени из числа $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ это решение уравнения $w^n = z$. Каждое такое решение w_k записывается в виде:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

Корни из единицы

$$w^n = 1$$
$$1 = \cos(0) + i\sin(0)$$
$$w_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,\ 1,\ 2\ldots,\ n-1$$

Группа корней n-ой степени из 1

$$W = \{w_0,\ w_1,\ w_2,\ \ldots\ ,\ w_{n-1}\},$$

где $w_k = \cos\left(\dfrac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi k}{n}\right)$ образует группу относительно умножения.
Свойства: замкнутость, ассоциативность, существует нейтральный элемент, обратимость (для w_k это w_{n-k}).

Первообразные корни n-ой степени из 1

Первообразный корень n-ой степени из 1 - это такой корень $\zeta = w_k$, для которого его степени $\zeta^1,\ \zeta^2,\ \ldots,\ \zeta^n$ дают все n различных корней n-ой степени из 1.
Этот корень является первообразным тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель k и n равен 1.
Формально: $\zeta^k \neq 1$ для $1 \leq k < n$, но $\zeta^n = 1$.