

22 вопрос

Def: Взаимно простые многочлены

Многочлены f и g являются взаимно простыми, если их НОД равен ненулевой константе.

Th 1: Для того, что многочлен f и g из $F[x]$ были взаимно простыми необходимо и достаточно, чтобы в $F[x]$ существовали такие $v(x)$ и $u(x)$, что $v(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot g(x) = 1$

Док-во:

1. **Необходимость:** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - взаимно простые многочлены в кольце $F[x] \Rightarrow \exists v(x), u(x) \in F[x] : v(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot g(x) = d(x)$, где $d(x) = \text{НОД}(f, g)$, а т.к. $\text{НОД}(f, g) = 1 \Rightarrow v(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot g(x) = 1$ чтд
2. **Достаточность:** Пусть $d(x) = \text{НОД}(f, g)$. f, g - многочлены из $F[x]$. Значит каждое слагаемое из левой части $v(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot g(x) = 1$ делится на $d(x) \Rightarrow 1$ делится на $d(x) \Rightarrow d(x) \neq 0$ чтд.

Свойства

1 Если многочлен f взаимно прост с каждым из многочленов g и h , то он взаимно прост и с их произведением $g \cdot h$

Док-во: т.к. f прост с каждым из многочленов g и h , то $\Rightarrow \exists v(x), u(x), v_1(x), u_1(x) :$

$$v(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot g(x) = 1;$$

$$v_1(x) \cdot f(x) + u_1(x) \cdot h(x) = 1$$

Складывая эти равенства, получим:

$$v_1(x) + f(x) \cdot v(x) + u_1(x) \cdot h(x) + v_1(x) \cdot g(x) \cdot u(x) \cdot f(x) + (u(x) \cdot u_1(x))(g(x) \cdot h(x)) = 1$$

Применяя Th 1 (Которая выше) \Rightarrow что многочлены f и gh взаимно просты. ЧТД

2 Если fg делится на h причем многочлены f и h взаимно просты, то g делится на h

Док-во: тк f и h взаимно просты, то по Th 1 \Rightarrow

$$\exists v(x), u(x) : v(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot g(x) = 1$$

$$v(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot g(x) = 1 \mid \cdot g(x) \Rightarrow g(x) \cdot v(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = g(x)$$

Получаем, что первое и второе слагаемое в левой части делятся на h по условию $\Rightarrow g$ делится на h .

3 Если f делится на g и на h , причем $\text{НОД}(g, h) = 1 \Rightarrow f$ делится на gh

Док-во: тк f делится на g , то $\exists q: f = q \cdot g$, но f делится на h , т.к.

$\text{НОД}(g, h) = 1$ то по свойству 2 g делится на $h \Rightarrow f$ делится на $g \cdot h$.

ЧТД