23 вопрос

Def: **Корень многочлена**
Элемент $c \in K$ **называется корнем многочлена** $f \in A[x]$**, если** $f(c) = 0$**.**
Говорят также, что c **- корень ур-я** $f(x) = 0$

Th: **Безу**
Элемент $c \in A$ **является корнем многочлена** $f \in A[x]$ $\iff$ $(x - c)$ **делит** f **кольцо** $A[x]$
Док-во:
При делении f **на** $(x - c)$ **в частном получим многочлен** q**, а в остатке -** $r - const$**:** $f = q(x - c) + r$
Полагая в левой и правой части $(x - c)$**, получим** $f(c) = q(c - c) + r = r$**.**

Def: **Кратный корень**
Элемент $c \in A$ **называется** k **- кратным корнем многочлена** $f \in A[x]$**, если** f **делится на** $(x - c)^k$**, но не делится на** $(x - c)^{k+1}$**.**

$c \in A$ - корень кратности $k <=> f(x) = (x - c)^k g(x)$**, где НОД(**$x - c$**,** $g(x)$**) = 1.**

Th: **Корень кратности k⩾2 многочлена** f **является корнем кратности** $k - 1$ **многочлена** f'**. Простой корень многочлена** f **не является корнем многочлена** f'
Док-во:
Пусть c **- корень кратности** k **многочлена** f**:** $f = q(x - c)^k$**,**
q делится на $(x - c)$**. Тогда**
$f' = q'(x - c)^k + qk(x - c)^{k-1} = (q'(x - c) + qk)(x - c)^{k-1}$ **т.к.**
$q'(x - c)$ делится на $(x - c), qk$ не делится на $(x - c)$**, то**
$(q'(x - c) + qk)$ делится на $(x - c)$ **чтд.**

Th: **Пусть кольцо К не содержит делителей нуля. Тогда любой многочлен** $f \in K[x]$ **степени** $n > 0$ **имеет в кольце К не более** n **корней с учетом их кратностей**
Док-во:
Пусть $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_s)g = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_t)h$**, где** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ **- элементы кольца К.** $\alpha_i \neq \beta_j$ при $i \neq j$**, а многочлены** g **и** h **корней в К не имеют. Вычисляя значения многочлена** f **в точке** α_i **получим прдеставление о в виде произведения ненуливых элементов колца К, что противоречит тому, что в К нет делителя нуля. чтд.**