4. Корни n-ой степени из комплексного числа. Корни из единицы. Группа корней n-ой степени из 1. Первообразные корни n-ой степени из 1

1) Корень n-ой степени из комплексного числа.

Пусть $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Предположим, что из α можно выделить корень n-ой степени и он будет равен $\rho(\cos\Theta + i\sin\Theta)$

тогда $\rho^n = r$ и $\rho = \sqrt[n]{r}$ по формуле Муавра.

$(\rho(\cos\Theta + i\sin\Theta))^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, аргумент левой части равен $n\Theta$; $n\Theta = \varphi + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ т.к. Θ может отличаться от φ на слагаемое кратное 2π, откуда $\Theta = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, k\in\mathbb{Z}$

Подставляем полученное в формулу и получаем, что корень n-ой степени из α комплексного числа:

: $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right), k\in\mathbb{Z}$

при $k = 0,1,\ldots,n-1$ получим n различных значений

Пусть теперь k - произвольное, если:

: $k = n\cdot q + r$, $0\le r\le n-1$, то

$$\frac{\varphi+2\pi k}{n} = \frac{\varphi + 2\pi(n q + r)}{n} = \frac{\varphi + 2\pi r}{n} + 2\pi q$$

значение аргумента при $k = n\cdot q + r$ отличается от значений аргумента при $k = r$ на число кратное 2π отсюда получаем, что это значение такое же, как и при $k = r$

Итак, извлечение корня n-ой степени из комплексного числа дает n различных значений, комплексного числа дает n различных значений, расположенных на окружности радиуса $\sqrt[n]{|a|}$ с центром в точке O и делит окружность на n различных частей.

2) Группа корней n-ой степени из 1.

$$1 = \cos 0 + i\sin 0$$

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},\quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\omega_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + \sin\frac{2\pi k}{n},$$

Корни расположены на окружности единичного радиуса

Корни имеют действительные значения при: $\begin{cases} k=0,\ k=\frac{\pi}{2},\ n\text{ - четное} \\ k=0,\ n\text{ - нечетное} \end{cases}$

Все значения корня n-ой степени из комплексного числа, можно получить путем домножения одного из них на все корни n-ой степени из 1

Пусть β — один из корней n-ой степени из комплексного числа α, $\beta^n = \alpha$ пусть ε — произвольное значение корня из 1, $\varepsilon^n = 1$ $\therefore$ $(\beta\cdot\varepsilon)^n = \beta^n\cdot\varepsilon^n = \beta^n\cdot 1 = \alpha$, $\beta\varepsilon$ — одно из значений корня n-ой степени из α, тогда домножая β на каждый корень n-ой степени из 1, мы получим n различных значений значений $\sqrt[n]{\alpha}$, а следовательно все значения корня n-ой степени из α ▨

Произведение двух корней n-ой степени из 1, есть корень n-ой степени из 1

$\varepsilon^n = 1$, $\eta^n = 1$, то $(\varepsilon\cdot\eta)^n = \varepsilon^n\cdot\eta^n = 1\cdot 1 = 1$ ▨

Также отсюда следует, что для этой группы определена операция умножения.

3) Первообразные корни n-ой степени из 1.

ε — первообразный корень n-ой степени из 1, если он не является корнем n-ой степени из 1, в меньшей степени.

$\varepsilon^n = 1$, $\varepsilon^m \neq 1$ $0 < m < n$

$\varepsilon^3 = 1$; $\varepsilon^6 = (\varepsilon^3)^2 = 1^2 = 1$

Утверждение: $\mathcal{R}$ — первообразный корень $\mathcal{R} \in \sqrt[n]{1}$, тогда $\sqrt[n]{1} = \{1, \mathcal{R}, \dots, \mathcal{R}^{n-1}\}$

Покажем, что все числа из пос-ти $\{1, \mathcal{R}, \dots, \mathcal{R}^{n-1}\}$ различны, отсюда следует равенство $\mathcal{R}^s = \mathcal{R}^t$ $t \neq s$ $0 \leq t, s \leq n-1$

Док-во: От противного пусть $t > s$

$\mathcal{R}^{t-s} = 1$, $0 \leq t - s \leq n-1$

Получилось, что $\mathcal{R}$ — корень n-ой степени из 1, при $0 < t-s < n-1$, но это противоречит условию, что $\mathcal{R}$ — первообразный корень n-ой степени из 1. Таким образом $\{1, \mathcal{R}, \dots, \mathcal{R}^{n-1}\}$ — различные.

Если $\mathcal{R}$ — корень n-ой степени из 1, $\mathcal{R} \in \sqrt[n]{1}$, $\sqrt[n]{1} = \{1, \mathcal{R}, \dots, \mathcal{R}^{n-1}\}$ — различны, то всё множество состоит из первообразных корней n-ой степени из 1.

Док-во: $\mathcal{R}^n = 1$ для некоторого n последовательности > 1, единица встречается больше 1 раза, и $\Rightarrow$ в последовательности корней меньше, чем n, что противоречит предположению ∎

Теорема. Пусть ε - пос-ть n-степени корней из 1, ε^k, $0 < k < n-1$, является первообразным корнем n-ой степени из тогда и только тогда, когда НОД$(k,n)=1$ и k и n взаимно-простые.

$\varphi(n)$ - количество натуральных чисел взаимно-простых с n и меньших n.

Док-во: Пусть ε - первообразный n-ой степени из 1. Если $\varepsilon^m = 1 \Rightarrow m = n \cdot q$. Разделим $\frac{m}{n}$ с остатком $m = n \cdot q + r$, $0 < r < n$

$\varepsilon^m = \varepsilon^{n \cdot q + r} = (\varepsilon^n)^q \cdot \varepsilon^r = \varepsilon^r \Rightarrow \varepsilon^r = 1$, $\varepsilon^r = 1$, $0 \leq r < 1$

Если $r \neq 0$ то ε - корень r-ой степени из единицы и $r < n$, противоречит $r = 0$ из $\boxed{m = n \cdot q}$

Пусть k взаимно просто с n

$(\varepsilon^k)^t = 1$ $0 < t < n$ мы предполагаем, что НОД$(k,n)=1$

$\varepsilon^{kt} = 1 \Rightarrow n$ делит $k \cdot t$, т.к k и n взаимнопростые, то n делит t, но $0 < t < n$ и n делит $t \Rightarrow$ противоречие

$(\varepsilon^k)^t = 1$ для $0 < t < n$ следующее предположение, ε^t - первообразный

Допустим: $(k,n) = d > 1$ $k = d \cdot k_1$, $n = d \cdot n_1$ $\mid d > 1$, $n_1 < n$

$(\varepsilon^k)^{n_1} = \varepsilon^{k \cdot n_1} = \varepsilon^{d \cdot k_1 \cdot n_1} = \varepsilon^{n k_1} = (\varepsilon^n)^{k_1} = 1^{k_1} = 1$

$\Rightarrow \varepsilon^k$ - не первообразный ■