Вопросы к экзамену по курсу «Дискретная математика» (1 семестр, 3824Б1МА1, 2024-2025)

Алгебра множеств. Бинарные отношения. Отображения

1. Понятие множества, основные способы задания множеств. Понятие принадлежности элемента множеству. Подмножества. Понятие включения. Свойства отношения включения. Равенство множеств. Теоретико-множественные операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.

2. Основные тождества алгебры множеств и их доказательства. Способы доказательства тождеств (по определению равенства множеств и с помощью основных тождеств). Обобщённые законы де Моргана, ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности.

3. Множество всех подмножеств множества (булеан). Теорема о числе подмножеств конечного множества.

4. Декартово (прямое) произведение множеств. Теорема о мощности декартова произведения. Декартова степень множества. Характеристический вектор подмножества.

5. Уравнения и системы уравнений в алгебре множеств. Алгоритм нахождения решений. Необходимые и достаточные условия существования решения. Число решений.

6. Отношения между множествами. Бинарные отношения. Способы задания бинарных отношений. Примеры. Операции над отношениями. Обратное отношение.

7. Важнейшие свойства бинарных отношений: рефлексивные, симметричные, антисимметричные, транзитивные отношения. Примеры.

8. Отношение эквивалентности. Примеры. Разбиение множества. Показать, что любое разбиение множества задает на нем отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Свойства классов эквивалентности (каждый класс однозначно определяется любым своим элементом; два любых класса либо совпадают, либо не пересекаются). Теорема о факторизации. Фактор-множество A/R.

9. Отношение порядка. Упорядоченное множество. Частичный и линейный порядки. Примеры. Лексикографический и покомпонентный порядки на множестве A^n, где A — линейно упорядоченное множество. Отношение непосредственного предшествования R^* для порядка R. Диаграмма Хассе. Теорема о конечных упорядоченных множествах. Следствие о том, что по отношению R^* однозначно восстанавливается порядок R на конечном множестве. Наибольший, наименьший, максимальный, минимальный элементы. Утверждение о том, что любой наибольший/наименьший элемент является максимальным/минимальным. Утверждение о единственности наибольшего и наименьшего элементов. Существование максимального и минимального элементов на конечном множестве. Примеры.

10. Функциональные отношения (отображения, функции). Символика. Образ и прообраз элемента. Образ и прообраз подмножества. Равенство отображений. Преобразование множества. Бинарная алгебраическая операция на множестве. Инъективные, сюръективные, биективные отображения. Правило равенства. Пример его использования. Тождественное отображение. Композиция отображений. Ассоциативность композиции. Обратное отображение. Композиция взаимно обратных отображений. Композиция биекций — биекция.

11. Сравнение мощностей множеств, равномощные множества: $|A| = |B|$, $|A| \le |B|$, $|A| < |B|$. Свойства равномощности (рефлексивность, симметричность, транзитивность). Равномощность интервалов, полуинтервалов и отрезков в $\mathbb{R}$. Счётные множества. Несчётные множества. Свойства счётных множеств. Примеры. Несчётность множества $\mathbb{R}$. Мощность континуума. Теорема Кантора ($|A| < |2^A|$ для любого множества A). Следствие: несчётность множества $2^{\mathbb{N}}$. Равномощность $2^{\mathbb{N}}$ и множества $\{0,1\}^\infty$ бесконечных последовательностей из 0 и 1.

Комбинаторика

12. Принцип Дирихле. Альтернативная формулировка на языке отображений. Обобщенный принцип Дирихле. Примеры.

13. Основные правила комбинаторики: правило суммы, правило произведения, правило равенства. Теорема о последовательном выборе.

14. Размещения с повторениями, размещения без повторений, перестановки. Сочетания без повторений. Их число.

15. Бином Ньютона и его комбинаторное доказательство. Следствия. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

16. Сочетания с повторениями. Их число. Распределение одинаковых предметов по различным ящикам.

17. Упорядоченные и неупорядоченные разбиения конечного множества (распределения различных предметов по различимым и неразличимым ящикам). Число упорядоченных разбиений конечного множества на k частей (среди которых могут быть пустые). Число упорядоченных разбиений конечного множества на k подмножеств заданных мощностей. Задача о количестве слов с заданным составом букв.

18. Полиномиальная теорема и её комбинаторное доказательство. Следствие: малая теорема Ферма.

19. Формула включений и исключений. Альтернативная формулировка на языке объектов и их свойств. Задача о беспорядках.

20. Неупорядоченные разбиения множества на k непустых частей. Числа Стирлинга второго рода. Явная формула и рекуррентное соотношение для них. Неупорядоченные разбиения множества на произвольное число непустых частей. Числа Белла. Связь с отношениями эквивалентности.

21. Упорядоченные разбиения натуральных чисел на заданное количество слагаемых и на произвольное количество слагаемых.

22. Неупорядоченные разбиения натуральных чисел на заданное количество слагаемых и на произвольное количество слагаемых. Диаграмма Юнга. Рекуррентное соотношение для $p_k(n)$. Теорема о связи $p_k(n)$ и $p(n)$ с количеством решений в целых числах некоторой системы уравнений. Утверждение: количество всех неупорядоченных разбиений числа n на не более k слагаемых равно количеству неупорядоченных разбиений числа $n+k$ ровно на k слагаемых. Утверждение: количество всех неупорядоченных разбиений числа n на не более k слагаемых равно количеству неупорядоченных разбиений числа $n+k(k+1)/2$ ровно на k различных слагаемых.

23. Однородные и неоднородные линейные рекуррентные соотношения порядка k. Равенство последовательностей, удовлетворяющих л.о.р.с., при совпадении начальных условий. Связь решений л.н.р.с. и л.о.р.с. Подпространство последовательностей L_k. Его размерность и базис. Характеристический многочлен $P(\lambda)$ л.о.р.с. Экспоненциальная последовательность, порождённая корнем α характеристического многочлена $P(\lambda)$, как частное решение л.о.р.с. Теорема об общем решении л.о.р.с., у которого все корни $P(\lambda)$ кратности 1. Теорема об общем решении л.о.р.с. для корней произвольной кратности (без док-ва). Вид частного решения л.н.р.с. с правой частью $f(n) = Q(n)\beta^n$, где $\beta \in \mathbb{C}$, а $Q(n)$ — полином от n. Теоремы об общем решении л.н.р.с. 1-го и л.о.р.с. 2-го порядков (различные корни, кратный корень). Примеры (арифметическая и геометрическая прогрессии). Ханойские башни. Числа Фибоначчи.

24. Формальные степенные ряды. Производящие функции. Операции над формальными степенными рядами. Критерий обратимости ряда. Примеры. Решение линейных рекуррентных соотношений с помощью степенных рядов. Теорема Эйлера о производящей функции для $p(n)$. Производящие функции для числа разбиений $p_{odd}(n)$, $p_{dist}(n)$ на нечётные слагаемые и различные слагаемые. Доказательство равенства $p_{odd}(n) = p_{dist}(n)$. Пентагональная теорема Эйлера (без док-ва). Рекуррентная формула для $p(n)$.