Динамическая оптимизация в экономике и финансах

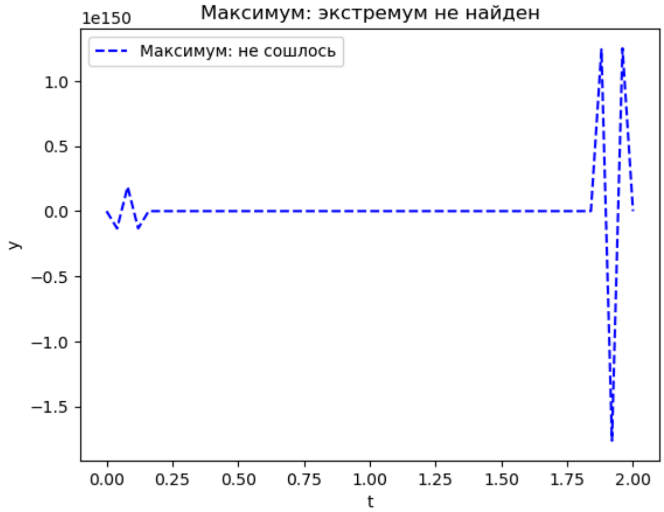
Денисенко Дмитрий Сергеевич

Задача 1

Численно найдите экстремум функционала

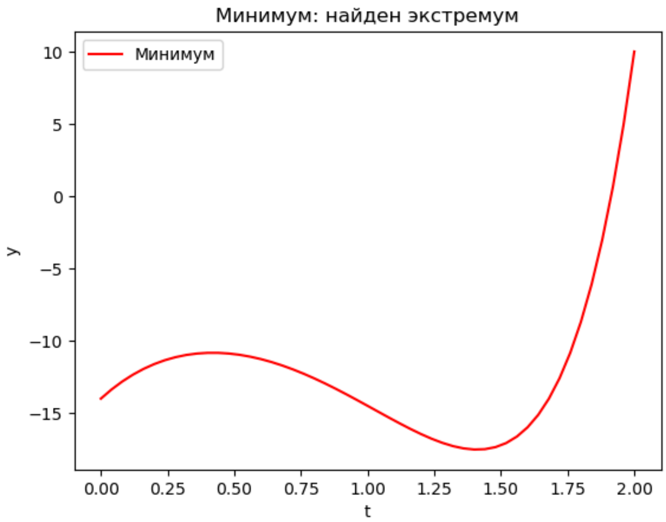
$$V[y] = \int_0^2 \left(y'^2 + a_1 y y' + b_1 y^2 + c_1 y e^{2t}\right) dt, y(0) = -b_2, y(2) = b_3$$

- **При моих значениях параметров a, b и c максимум, к сожалению, так и не был найден:**



Значение целевого функционала ***-> oo*** *(см. попытку решения в Jupiter)*

- **С минимумом ситуация обстояла уже лучше:**



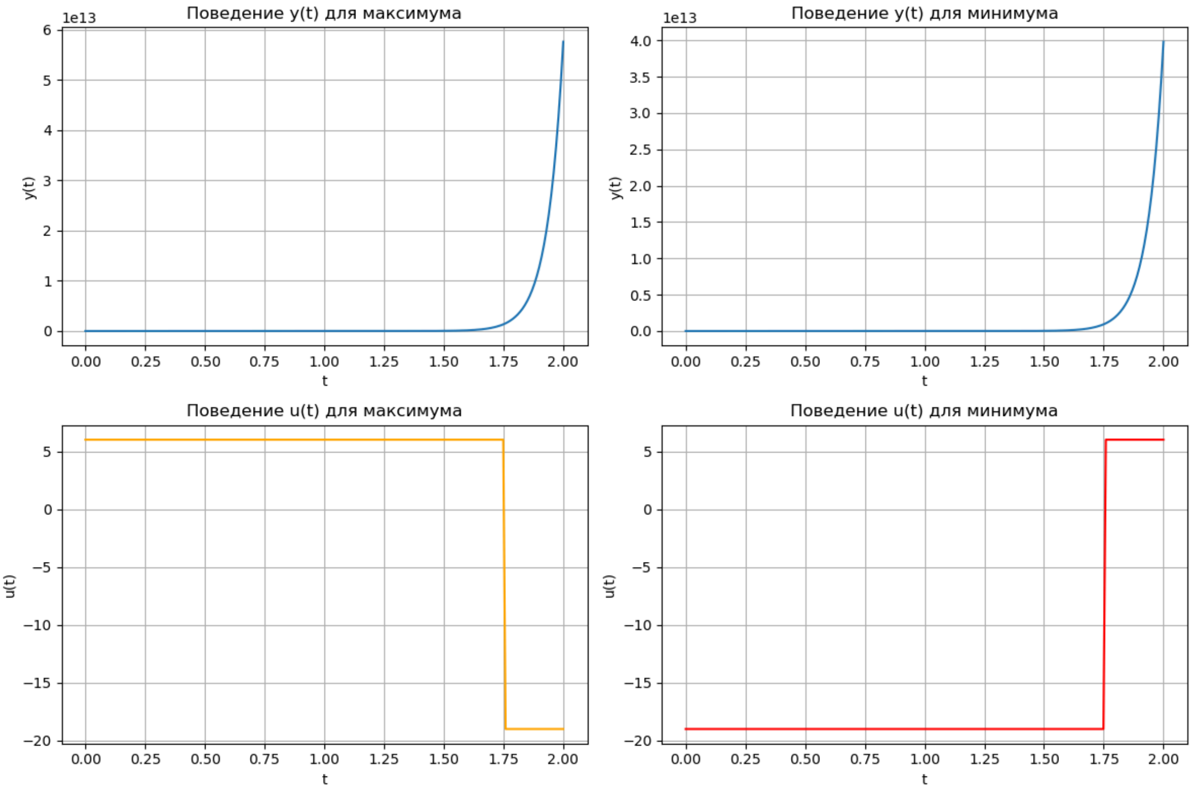
Значение целевого функционала в точке минимума составило: ***-735.559034***

Задача 2

Численно найдите экстремум функционала

$$V[y] = \int_0^2 (b_1 y - b_2 u)\, dt,$$

$$y(0) = a_1, y(2) \text{ свободно}, y' = a_3 y + u, u \in [-c_1, c_2]$$



- **Проанализируем поведение y(t) для найденного максимума -** функция y(t) растет экспоненциально к концу отрезка [0;2], такое поведение связано с положительным влиянием u на скорость роста y’.
- **Проанализируем поведение u(t) для найденного максимума -** управляющее воздействие принимает максимально допустимое значение c2 на большей части интервала и резко падает в конце. Наверное, это связано с “попыткой” максимизировать вклад b2*u в функционал.
- **Значение функционала при максимуме** составило **19228746032474.266**.

- **Проанализируем поведение y(t) для найденного минимума -** y(t) все так же экспоненциально растет, но уже с меньшей крутизной. Вероятно, это объясняется тем, что управляющие воздействие u принимает минимальное значение на всем интервале, ограничивая тем самым рост y(t).
- **Проанализируем поведение u(t) для найденного минимума -** u принимает минимально допустимое значение почти на всем интервале и скачкообразно поднимается в конце.
- **Значение функционала при минимуме** составило **13292826094555.441**.

Задача 3

3. Технологическая мощность предприятия $M(t)$ в начале планового периода (5 лет, планирование осуществляется с шагом месяц) оценивалась в $M(0) = 100a_1 + 10a_2 + a_3$ денежных единиц. В течение периода изменение мощности описывается по закону

$$\frac{d}{dt}M(t) = J(t) - \delta M(t),$$

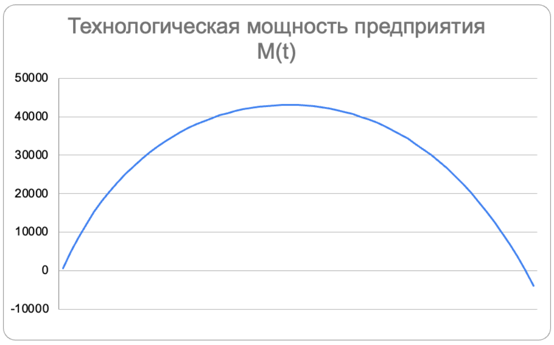
где $J(t)$ - инвестиции текущего месяца, $\delta = \frac{1}{5+c_1}$ - норма амортизации. Имеющаяся в текущем месяце мощность генерирует доход $\pi(t) = a_1 M(t)^{0.6}$, который без остатка делиться на $\pi(t) = J(t) + CF(t) + Tax(t)$, где $CF(t)$ - выводимый денежный поток (не может быть отрицательным),

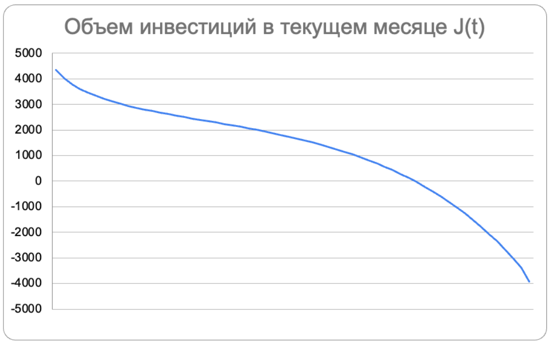
$$Tax(t) = \frac{1}{5+c_2}\pi(t)$$

- налог на доходы предприятия. Месячная безрисковая процентная ставка в течение всего период равна 0,3%. Рассчитайте оптимальную стратегию наращивания технологической мощности, инвестиций и денежных потоков, максимизирующую NPV. Как изменится стратегия, если

1. В начале 4 года безрисковая процентная ставка вырастет до 0,5%,
2. Налог на доходы снизится в 2 раза, то есть $Tax(t) = \frac{1}{2(5+c_2)}\pi(t)$,
3. Норма амортизации увеличится в 2 раза, то есть $\delta = \frac{2}{5+c_1}$.

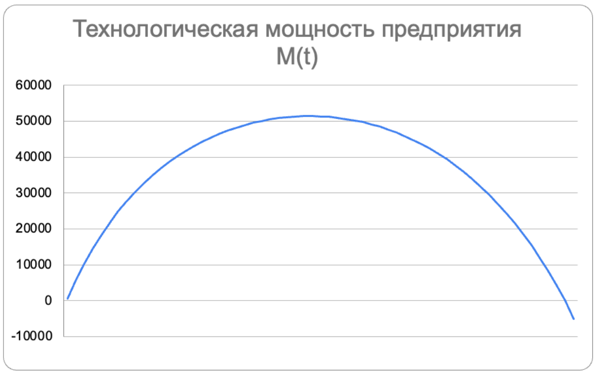
- **Прежде всего предлагаю посмотреть на оптимальную стратегию наращивания технологической мощности, инвестиций и денежных потоков в отсутствии разного рода “шоков” - NPV (целевое значение) составило примерно 47.263:**





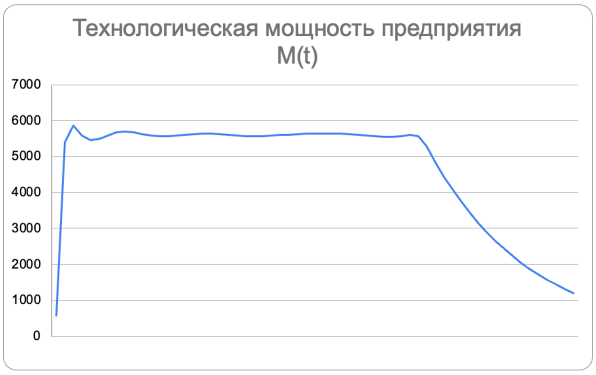
*Как мы можем заметить, **на ранних этапах инвестиции активно направляются на увеличение мощности** M(t).*
***По достижении максимума инвестиции начинают сокращаться**, а **денежные потоки - расти**.*
По идее, стратегия соответствует принципу максимума Понтрягина, где балансируются затраты на инвестиции и доходы от мощности предприятия.

- **Перейдем к рассмотрению шоков - начнем со снижения налога, NPV составило 53.549:**



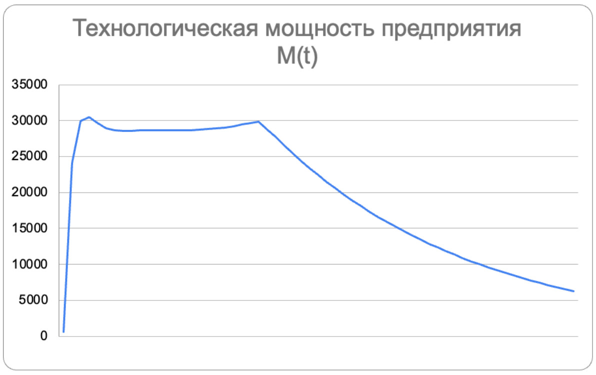
*Как мы видим, **значение мощности предприятия выросло**.*
Снижение налогов, вероятно, повысило стимул для наращивания инвестиций и производства.
***Снижение инвестиций J(t)** идет по той же траектории, но **из начинается более “высокой” стартовой точки**.*
CF “начинает” с более высоких значений.

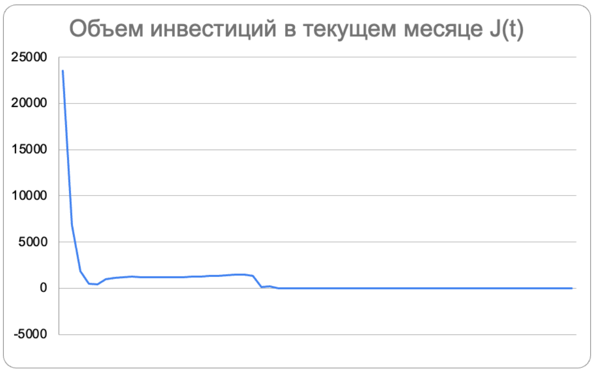
- **Рассмотрим случай с повышенной амортизацией - NPV составило 16.504:**



Мощность предприятия *достаточно быстро “выходит на “плато”, а затем* ***начинает снижаться*** *и происходит это раньше и быстрее, чем в предыдущих случаях.*
Инвестиции *также р****езко снижаются после первоначального “всплеска”*** *и остаются на достаточно низком уровне практически весь оставшийся период.*
Денежный поток *также стабилизируется* ***на*** *относительно* ***низком уровне****.*

- **И наконец рассмотрим кейс с повышенной ставкой %, целевое значение NPV получилось равным 37.683:**





Как мы можем заметить, тут все аналогично предыдущему случаю, когда мы рассматривали повышение амортизации. ***Рост ставки % делает будущие доходы менее ценными в текущих стоимостях, что приводит к сокращению инвестиций и ускоренному износу мощностей****.*

Задача 5

В течение четырехлетнего планового периода (с шагом в 1 месяц) банк управляет объемом выданных кредитов $L(t)$ и привлеченных депозитов $S(t)$. К началу планового периода банк имел задолженность в размере $S(0) = 1000 + 100b_1 + 10b_2 + b_3$ и портфель кредитов $L(0) = 1000 + 100c_1 + 10c_2 + c_3$. Процентная ставка по безрисковому инструменту составляет 1%. Изменение текущего портфеля за счет выдачи кредитов $K(t) = \frac{d}{dt}L(t)$ или привлечения депозитов $V(t) = \frac{d}{dt}S(t)$ сопровождается расходами

$$C(t) = \frac{a_1}{1000}(K(t)^2 + V(t)^2).$$

Цель политики банка – максимизация суммарного показателя прибыли, рассчитываемой по формуле $\pi(t) = r_l(t)L(t) - r_s(t)S(t) - C(t)$. Проведите тестирование возможности безубыточности деятельности банка. Для этого процентные ставки описываются как случайные величины, имеющие равномерное распределение на отрезках: по депозитам

$$\left[0{,}4 + \frac{b_1}{33} - \frac{c_2}{100}; 0{,}4 + \frac{b_1}{33} + \frac{c_2}{100}\right],$$

по кредитам

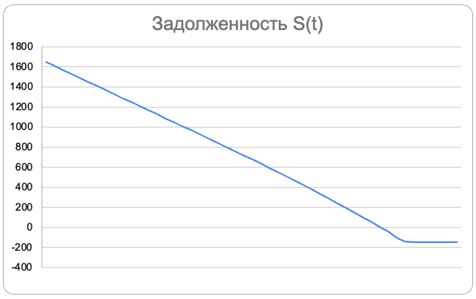
$$\left[0{,}4 + \frac{b_1}{33} + \frac{b_2}{100} - \frac{c_1}{100}; 0{,}4 + \frac{b_1}{33} + \frac{b_2}{100} + \frac{c_1}{100}\right].$$

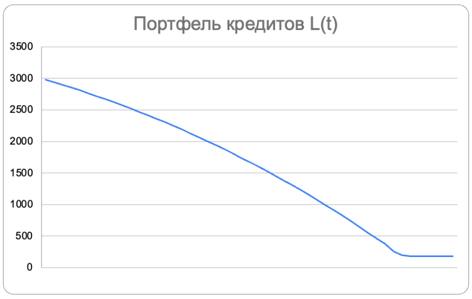
Проведите 5 симуляций.

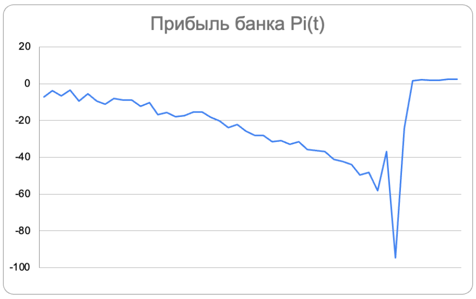
Замечание: речь идет именно о процентах. Чтобы использовать в формулах, нужно делить на 100. Все ставки уже считаются месячными!

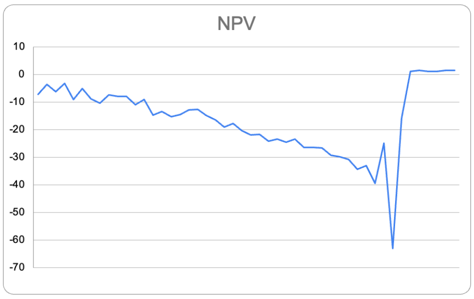
Результаты тестирования возможности безубыточности деятельности банка в 5 симуляциях вышли следующие (конкретные полученные значения S и L см. в Excel-файле):

- ***Симуляция 1:***

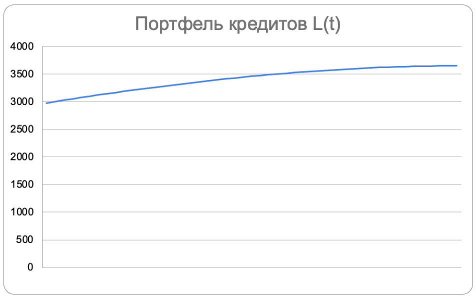


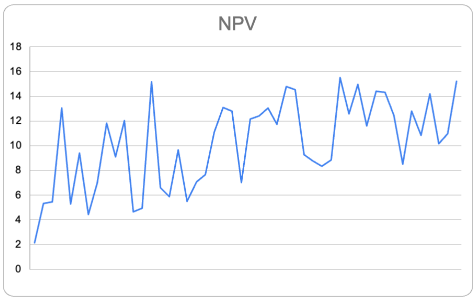




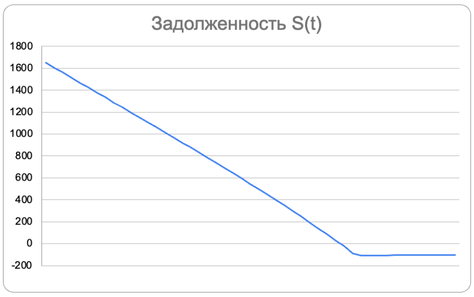


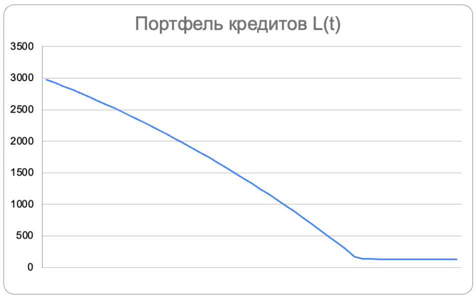
- ***Симуляция 2:***

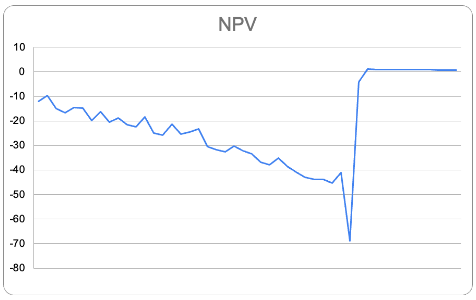




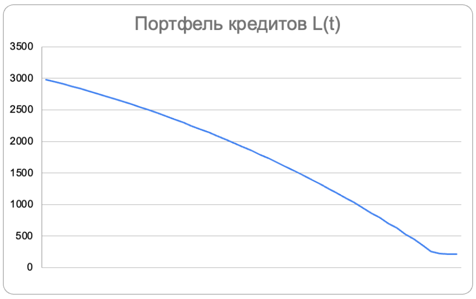
- ***Симуляция 3:***

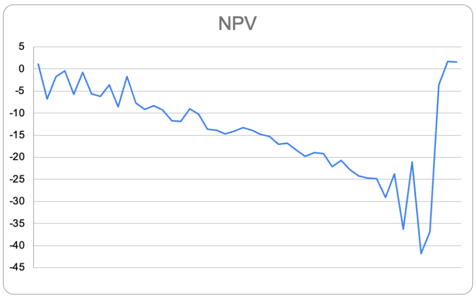




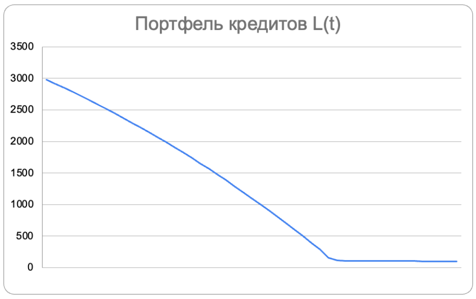


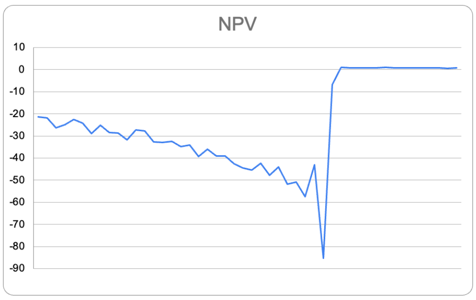
- ***Симуляция 4:***





- ***Симуляция 5:***





В качестве вывода можно отметить, что ***рост наблюдаются только во 2-ой симуляции****, где портфель кредитов* ***L(t) увеличивается****, что указывает на активное течение процесса кредитования.* ***Прибыль и NPV***

растут *на протяжении всего периода времени, демонстрируя успешное управление банком своими активами и обязательствами.*

Остальные симуляции *(1, 3, 4 и 5)* ***показывают значительные проблемы*** *-* ***портфель кредитов*** *быстро* ***сокращается****, в некоторых случаях почти до нуля, что свидетельствует о прекращении банком своей кредитной деятельности.*

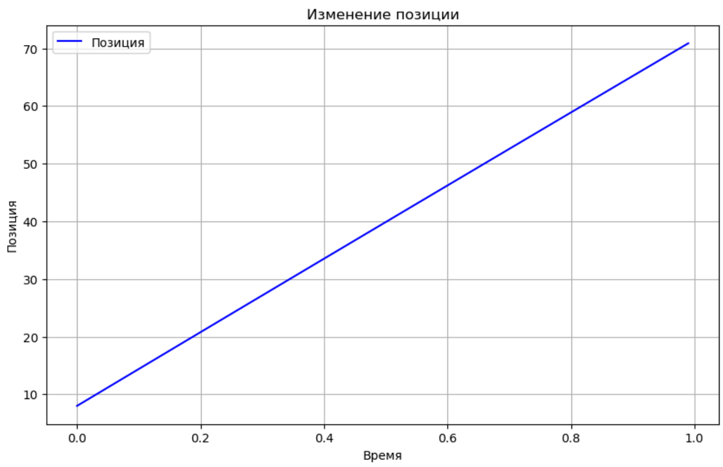
Прибыль банка и NPV в течение большей части периода уменьшаются*, нередко переходя в отрицательную зону и* ***лишь к концу периода происходит*** *резкий* ***подъем****, который, вероятно, связан с разного рода временными корректировками или каким-либо вынужденными мерами со стороны банка.*

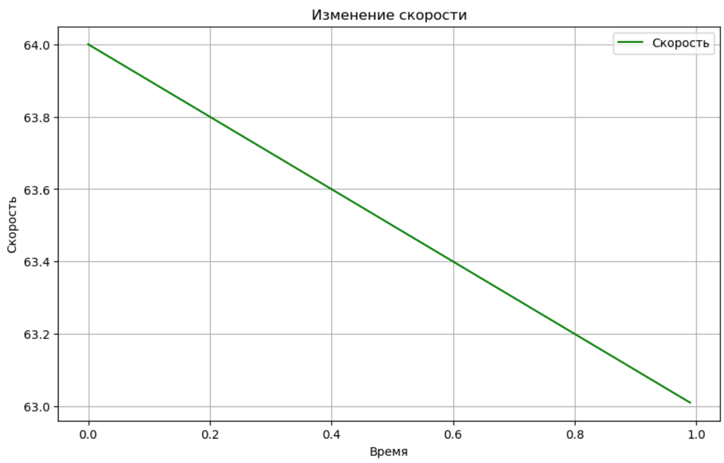
Задолженность в большинстве случаев снижается и даже уходит в отрицательную область*, что говорит о значительном росте привлеченных депозитов и потенциальных издержках на их обслуживание.*

Задача 6

Имеется динамическая система, характеризуемая координатой x и соростью v. Параметром управления u является ускорение системы, выбираемое из отрезка $[-1, 1]$. Требуется за минимальное время T перевести систему из начального состояния (x_0, v_0) в состояние $(0, 0)$. Численно решите эту задачу оптимального управления, реализовав код для произвольного вектора (x_0, v_0).

Подсказка. $x' = v$ *и* $v' = u$.



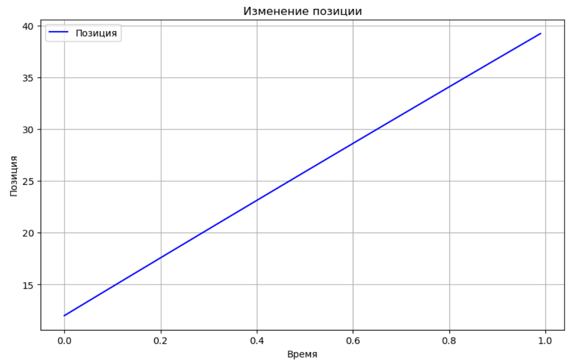


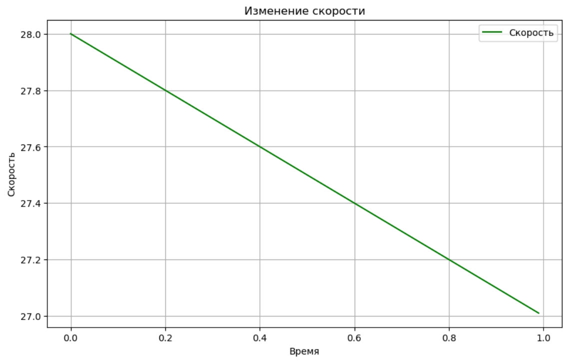
Мы видим, что для пары (8;64) **управление, равное -1**, **является наиболее оптимальным** в данном случае и обеспечивает минимальное время для достижения цели.

Позиция и скорость изменяются достаточно предсказуемо - **скорость линейно убывает из-за постоянного управления**, а **позиция изменяется** в соответствии **со значением скорости**.

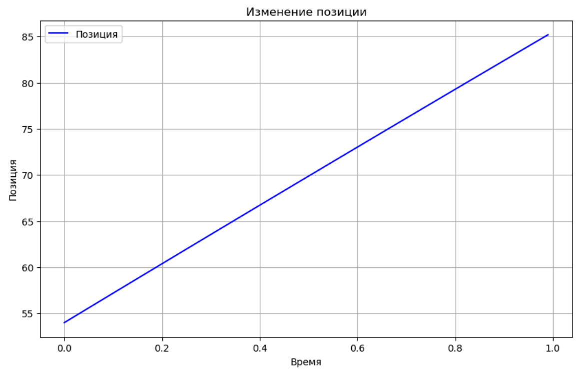
Временной интервал **T = 133.88 характеризует решение как оптимальное** при заданных условиях.

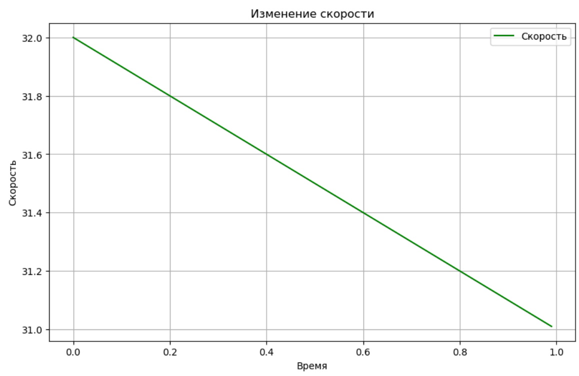
Также попробуем протестировать работу нашей программы и при других значениях - (x0; v0) = (12; 28):





И еще раз, теперь с парой (54;32):





Задача 7

Численно решите следующую задачу оптимального управления:

$$\int_0^2 \frac{u^2}{2} - ty + ydt \to \min$$

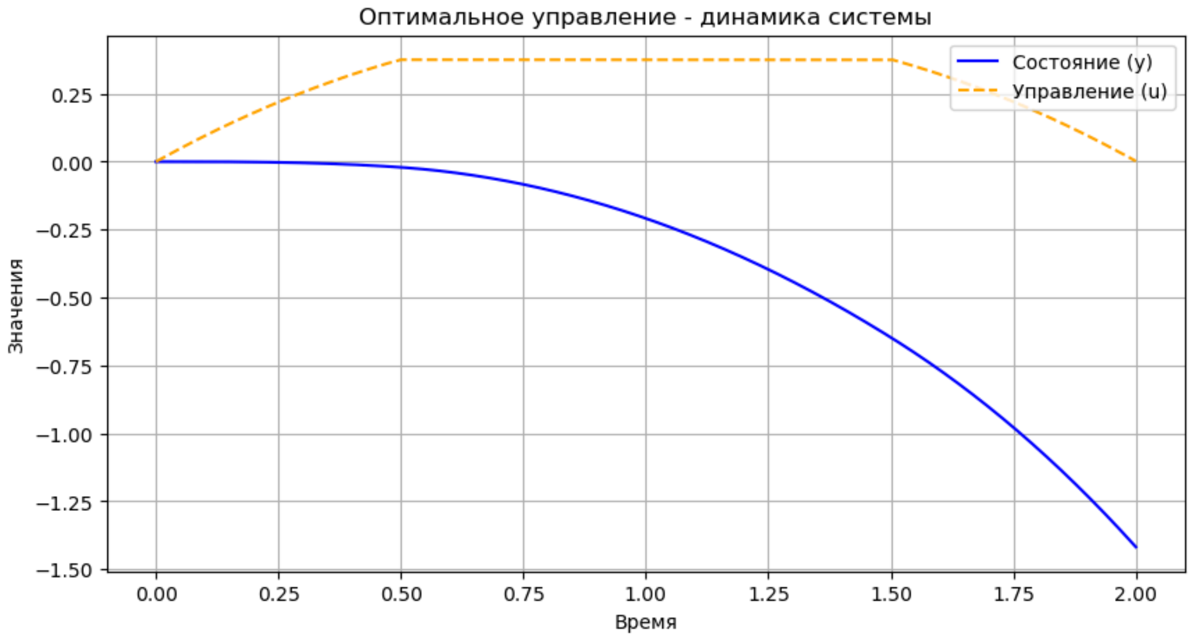
$$y(0) = 0, |u(t)| \leq \frac{3}{8}$$

при следующих уравнениях динамики y:

(a) $y'(t) = u(t) - t$

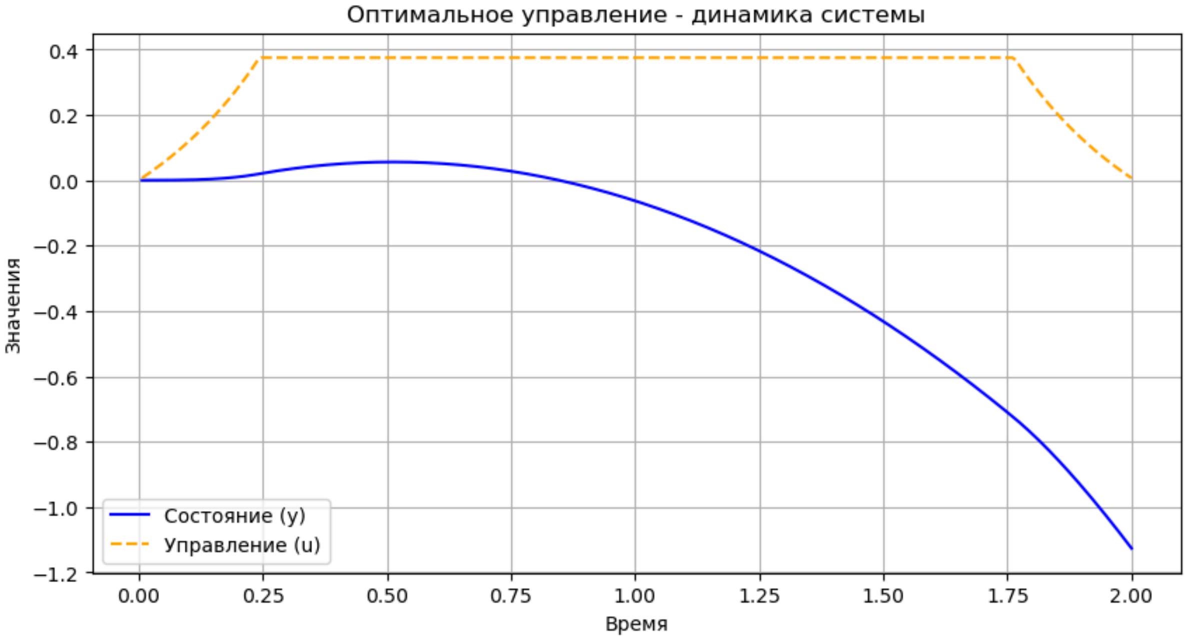
(b) $y'(t) = u(t) + u^2(t) - t$

- ***Пункт А:***



Управление U(t) *сначала* ***активно компенсирует отрицательный вклад*** *времени* ***t****, но* ***со временем ограничение на U и рост t приводят к отрицательному изменению y(t)****.*
Такой результат демонстрирует ***баланс между минимизацией функционала и соблюдением ограничений на U****.*

- ***Пункт Б:***



*Решение в данном случае демонстрирует **влияние квадратичного члена u^2(t)** на поведение системы, **что требует более агрессивного управления на начальном этапе для минимизации функционала.***

Задача 8

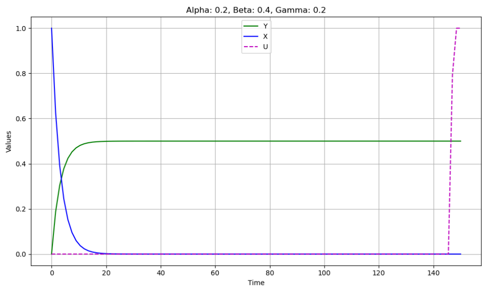
Популяция осиного улья может быть описана следующими уравнениями:

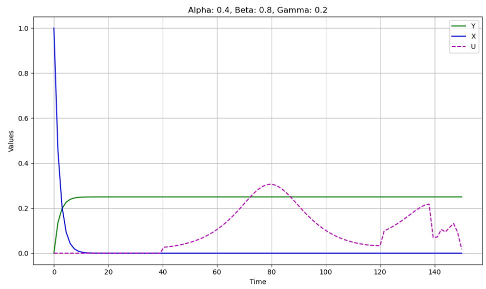
$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = (\alpha u(t) - \beta)x(t), \text{ где } x(0) = 1 \\ & \dot{y}(t) = \gamma(1 - u(t))x(t), \text{ где } y(0) = 0 \end{cases}$$

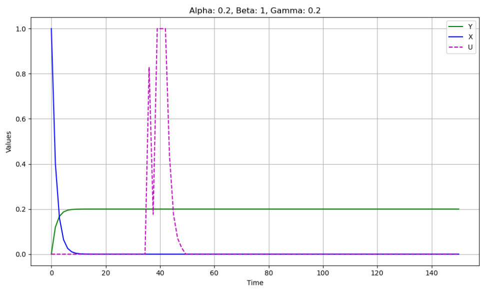
Переменной x обозначается число ос-рабочих, а y – число королев. Константы α, β, γ – положительные действительные числа. α, γ – параметры окружающей среды, β – коэффициент смертности ос-рабочих. Управление $u(t) \in [0, 1]$ – доля улья, тратящая ресурсы на увеличение числа королев.

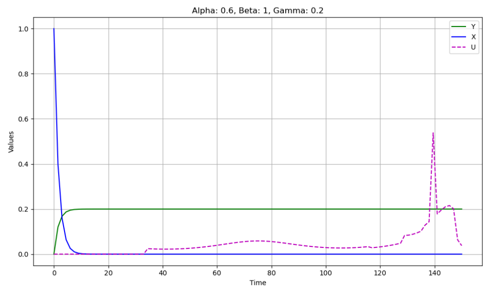
Численно исследуйте траектории управления и траектории состояния для различных параметров α, β, γ, если задача улья состоит в максимизации числа ос-королев в последний момент времени (его можно выбрать любым, достаточно большим)

Со всеми графиками можно ознакомиться в тетрадке Jupiter, вот некоторые примеры для различных комбинаций alpha, beta и gamma:









Влияние параметров будет примерно следующим (может различаться):

- **Alpha**, которая отвечает за регулирование скорости ос-королей (Y) за счет увеличения управления U, при малых значениях приводит к замедлению роста Y, а контроль U активируется в поздние моменты времени. Увеличение Alpha позволяет быстрее увеличивать Y через U, но ведет к большему расходу ресурсов.
- **Beta**, характеризующая смертность ос-рабочих, при больших значениях численность ос-рабочих (X) стремится к нулю, что

ограничивает дальнейший рост ос-королей Y - большие значения Beta уменьшают Y даже в случае, если управление активно.

- **Gamma**, которая регулирует вклад ос-рабочих в рост ос-королей при учете управления, при низких значениях ведет к замедлению роста Y (даже в случае активного U). А при больших значениях становится возможным более эффективное использование управления U для последующего роста Y.