Список экзаменационных вопросов по дисциплине

1. Технология и основные этапы процесса разработки и принятия решений (ПР).
Процесс разработки управленческих решений с технологической точки зрения можно представить в виде этапов жизненного цикла решения: **Этап 1. Выявление и описание проблемной ситуации.** Формулировки проблем является сложной задачей, причины этого заключаются в объективной сложности, многомерности и многосвязности проблем, неструктуризованном характере многих из них, трудностях измерения многих переменных, отсутствии априорных сведений о существенных связях между ними. **Этап 2. Выработка (генерация) решений.** На данном этапе вырабатываются альтернативные варианты решений, осуществляется поиск различных путей, способов достижения поставленных целей. **Этап 3. Формирование критериев выбора решений.** Сравнение и выбор альтернативных решений возможен, если ввести критерий достижения намеченной цели. Содержанием данного этапа является построение системы критериев, однозначно характеризующих соответствующие цели субъекта управления. Сформированные критерии в дальнейшем должны в некотором смысле заменить цели, стать моделью целей. Критерием ценности альтернативы может служить любой ее признак, измеренный на качественном либо количественном уровне. **Этап 4. Оценка возможных решений.** ЛПР и эксперты, описывая проблемную ситуацию, цели, ограничения, варианты решений, критерии, обязаны производить измерение параметров процесса принятия решений и делать оценку последствий с целью выбора наилучшей. **Этап 5. Согласование и принятие решения.** На данном этапе необходимо осуществить выбор решения по определенной схеме или алгоритму, наилучшему с точки зрения некоторого критерия, некоторого принципа оптимальности. **Этап 6. Формирование плана, реализация и оценка решения.** План реализации выбранного решения должен дать ответы на вопросы — кто и что должен делать, какими средствами и в какие сроки. Конкретизация решения по исполнителям может производиться путем решения задачи о назначениях исполнителей на выполнение комплекса работ, по срокам и объектам работ — методами сетевого планирования и управления (СПУ). Конкретизация ресурсного обеспечения может быть осуществлена путем решения задачи распределения ресурсов методами математического программирования. Оценка эффективности решения складывается из оценки качества самого решения и оценки качества исполнения.

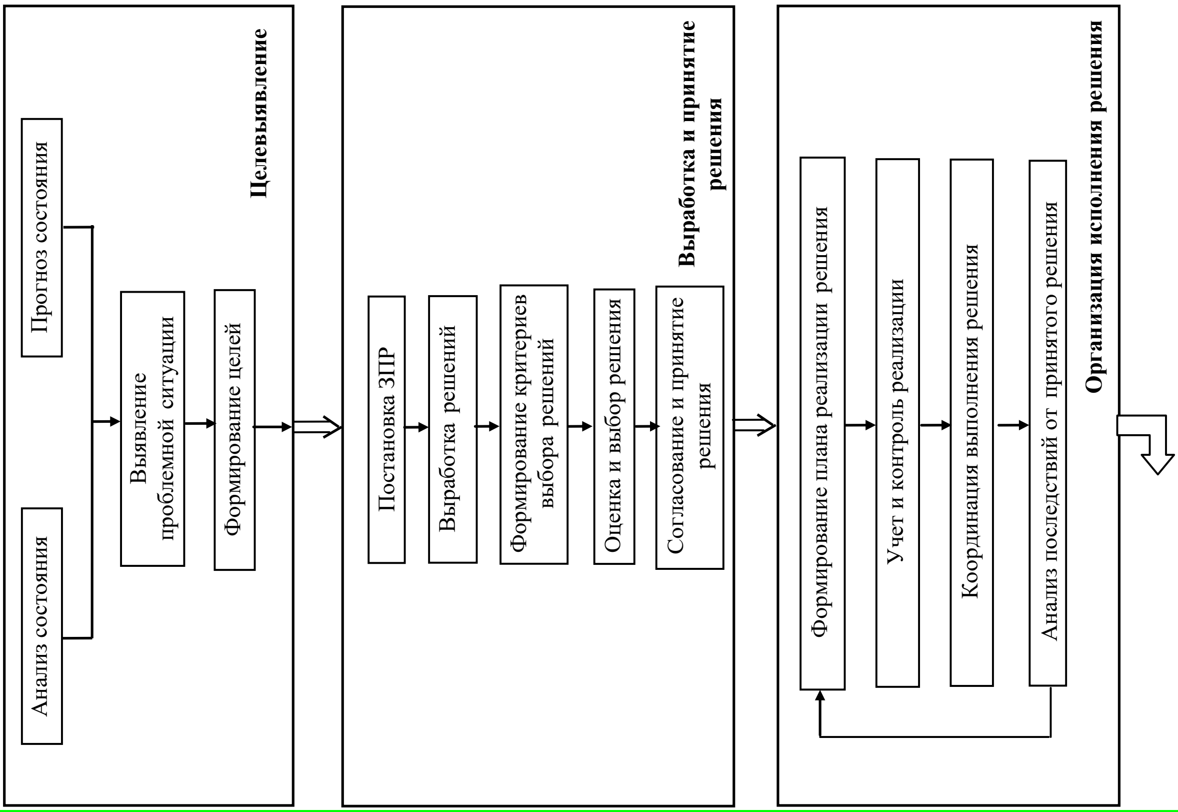


Рис. 1.2 — Схема технологии разработки и организации выполнения управленческих решений

2. Классификация ЗПР. ЗПР в условиях определенности, риска, неопределенности. Языки описания выбора.
По существу, любой элемент ЗПР может служить признаком классификации задач ПР.
1. Тип проблемной ситуации. С учетом стереотипности проблемной ситуации и соответственно используемых методов выделяются программируемые и непрограммируемые ЗПР.
С точки зрения структуризации и формализации проблемы множество ЗПР разбивается на хорошо структуризованные задачи, слабоструктуризованные и неструктуризованные.
2. Вид определенности информации. В зависимости от информированности ЛПР, степени определенности информации, ее полноты и достоверности выделяют ЗПР в условиях **определенности, в условиях риска, в условиях неопределенности**. **В условиях определенности** каждое решение приводит к вполне определенному, единственному исходу, т.е. существует однозначное отображение множества альтернатив во множестве критериальных оценок их исходов. ЗПР называется тривиальной, если она

решается в условиях определенности с одним критерием выбора. Таким образом, нетривиальная ЗПР имеет место, если существует ситуация выбора (более одной альтернативы), она является многокритериальной (более одного критерия) или (и) выбор предстоит сделать в условиях риска или неопределенности.

3. Мощность множества критериев К. В зависимости от количества элементов критериального множества К задачи ПР подразделяются на ЗПР со скалярным критерием (однокритериальные) и ЗПР с векторным критерием (многокритериальные).

4. *Тип системы*. В зависимости от выражения предпочтений ЛПР в выборе решений одним лицом или коллективом ЗПР делятся на задачи *индивидуального* или *группового выбора*. Последний делится на *коалиционный*, *кооперативный*, *конфликтный*.

5. ***Язык описания***. В зависимости от языка описания системы предпочтений S в выборе решений ЗПР делятся на *критериальные задачи выбора, задачи выбора на языке бинарных отношений, задачи ПР на языке функций выбора*. Наиболее развитыми языками выбора являются первые два.

3. Классификация и сущность методов математического программирования.

В зависимости от вида функций задачи МП делятся **на несколько классов:**

1) задачи линейного программирования, если Z(X) и g(X) линейны относительно переменных X;
2) задачи нелинейного программирования, если хотя бы одна из этих функций нелинейна относительно X;
3) задачи дискретного (целочисленного) программирования, если хотя бы одна из управляемых переменных, входящих в вектор X, должна принимать дискретные значения (например, целые);
4) задачи динамического программирования, если решение исходной задачи можно разложить на ряд более простых задач, для каждой из которых определены рекуррентные вычисления соответствующей управляемой переменной, входящей в вектор X.

Необходимо найти вектор управления (план) , который максимизирует (минимизирует) целевую функцию и удовлетворяет системе ограничений . На неизвестные величины могут быть наложены условия не отрицательности. Объединение всех ограничений, накладываемых на неизвестные величины, называют областью допустимых решений и обозначают буквой, т.е. Таким образом, общая детерминированная модель математического программирования примет вид.

4. Задача использования ресурсов как задача линейного программирования (ЛП). Общая постановка задачи, ее структура и геометрическая интерпретация

См. со стр. 38

5. Графическое решение задачи ЛП, идея симплекс-метода

Графический метод решения см. стр. 49. Идея Симплекс Метода: к точке оптимума можно подобраться последовательно, переходя от одной угловой точки к соседней, например каждый раз от исходной (опорной) точки последовательно к той соседней, которая ближе и быстрее приближает к X opt.

6. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования. Прямой, двойственный, двухэтапный симплекс-алгоритмы.

Построение начального опорного шага

1. Добавив к левым частям дополнительные переменные получим каноническую (расширенную) задачу. При добавлении дополнительных переменных (они же становятся базисными переменными) в систему ограничений эти же переменные вводятся в целевую функцию с коэффициентами, равными нулю.

При выборе алгоритма решения задачи ЛП исходят из следующих данных:1) находится минимум целевой функции; 2) сделана постановка ЗЛП в канонической форме; 3) определен начальный план задачи. Тогда выбор алгоритма решения ЗЛП можно произвести согласно таблице 2.2. Таблица 2.2 — **Выбор алгоритма решения задачи**

Условия	Алгоритмы		
	Прямой симплекс-метод	Двойственный симплекс-метод	Двухэтапный симплекс-метод
На оптимальность решения $(c_j \geq 0)$	Не выполняются (есть $c_j < 0$)	Выполняются	Не выполняются
На допустимость решения $(x_j \geq 0)$	Выполняются	Не выполняются (есть $x_j < 0$)	Не выполняются

Прямой симплекс-метод

1. Составляем начальную симплекс таблицу.
2. Включаем в базис переменную при которой коэффициент С отрицательный и меньше всех.
3. Какую исключать см стр.59 и далее действия

Двойственный симплекс-метод

1. Составить начальную симплекс таблицу
2. Исключаем из базиса переменную с наименьшим отрицательным значением. Если все переменные, расположенные в базисе, будут положительными, то вычисления заканчиваются, так как решение будет и оптимальным, и допустимым.

3. Включаем в базис переменную x_s для которой отношение $C_s/|a_{rs}|$ будет минимальным

Двухэтапный симплекс-метод подробнее см стр 65

1. этап

1. Вводим дополнительно по одной переменной, делая их базисными, в те уравнения, в которых не выполнялись условия допустимости, прежде изменив знаки на противоположные. **2.** Вводим новую (фиктивную) целевую функцию W как сумму вновь вводимых дополнительных переменных, выраженную через небазисные переменные. Вносим дополнительно строку в табл с фиктивной целевой функцией.

3. Применяем прямой симплекс-метод для минимизации фиктивной целевой W с пересчетом всех коэффициентов. Первый этап заканчивается, если фиктивная целевая функция W обратится в нуль, а, следовательно, и дополнительные переменные тоже будут с нулевыми значениями. Далее строка с фиктивной целевой функцией и столбцы с дополнительными переменными не рассматриваются. Если в результате минимизации целевой W получим оптимальное значение W, отличное от нуля то это будет означать, что исходная ЗЛП не имеет допустимых решений.

2. этап

1. Применяем прямой симплекс-метод для оптимизации основной целевой функции Z.

7. Двойственность в линейном программировании. Теоремы двойственности и их экономическое содержание

Прямая ЗЛП	Двойственная ЗЛП
1. Целевая $Z(X) \to \max(\min)$	1. Целевая $f(y) \to \min(\max)$
2. Ограничение $\le b_i (\ge b_i)$, $i = 1,\dots,m_1$	2. Переменная $y_i \ge 0, i = 1,\dots,m$
3. Ограничение $= b_i$, $i = m_1 + 1,\dots,m$	3. Переменная y_i — любого знака, $i = m_1 + 1,\dots,m$
4. Переменная $x_j \ge 0$, $j = 1,\dots,n_1$	4. Ограничение $\ge c_j (\le c_j)$, $j = 1,\dots,n_1$
5. Переменная x_j — любого знака $j = n_1 + 1,\dots,n$	5. Ограничение $= c_j$, $j = n_1 + 1,\dots,n$

Очевидно, задача, двойственная двойственной, совпадает с исходной. Поэтому нет разницы, какую принять в качестве прямой, а какую — двойственной.

1) **Малая теорема**. Чтобы прямая задача и двойственная задача имели оптимальные решения и необходимо и достаточно, чтобы существовали допустимые решения для каждой из них.

2) **Первая основная теорема:**

•если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая его имеет. Причем экстремальные значения их целевых функций равны $Z(X^*) = f(Y^*)$, в других случаях $Z(X) \le f(Y)$;

•если целевая функция одной из задач не ограничена, то система условий другой противоречива

Экономический смысл C_j — оценка (цена) реализации единицы выпускаемой продукции *j*; x_j — объем выпускаемой продукции *j*; b_i — объем имеющихся ресурсов *i*; y_i — оценка (цена) ресурса *i*, то допустимый план производства X^* и вектор оценок ресурсов Y^* оказываются оптимальными тогда, когда доход от реализации всех видов продукции будет равен затратам на все виды ресурсов, используемых в производстве $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j{}^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i{}^*$.

3) **Вторая теорема двойственности:**

Чтобы допустимые решения X^* и Y^* пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнить условия: $x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0, \quad j = 1, \dots, n;$ $y_j^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$

экономический смысл: Из первого условия: если $x_j^* \ne 0$, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$ — плата за ресурсы, предназначенные для изготовления продукции *j*, в оптимальном плане равна цене этой продукции. Иначе, если плата за ресурсы, идущие на единицу продукции, выше цены этой продукции $\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j\right) > 0$, то в оптимальном плане объем *j*-й продукции должен быть равен нулю — $x_j^* = 0$. Из второго условия: если $y_i^* \ne 0$, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$ — ресурс *i*-го вида в производстве используется полностью, его остатка нет, он дефицитен. Оценка y_i характеризует степень дефицитности ресурса. Иначе, если *i*-й ресурс недефицитен, остается от производства продуктов $\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) > 0,$ то оценка дефицитности i-го ресурса $y_i^* = 0.$ Между переменными прямой и двойственной задач можно установить взаимно однозначное соответствие. Если решением прямой задачи будет вектор $X = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}),$ то переменные $x_1, \ldots, x_n$ характеризуют объемы производства соответствующей продукции, а переменные $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \to x_{n+i},$ $i = \overline{1,m}$ — остатки ресурсов i-го вида. Решением двойственной задачи является вектор $Y = (y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots, y_{m+n}).$ Переменные $y_1, \ldots, y_m$ характеризуют степень дефицитности соответствующих ресурсов в объеме b_i единиц, а переменные $y_{m+1}, \ldots, y_{m+n} \to y_{m+j},$ $j = \overline{1,n}$ — штраф за выпуск продукции j-го вида.

Для оптимальных решений пары двойственных задач условия второй теоремы (2.43)—(2.44) можно записать в виде

$$x_j^* \cdot y_{m+j} = 0,\ j = 1, \ldots, n; \quad y_i^* \cdot x_{n+i} = 0,\ i = 1, \ldots, m, \quad \text{где} \quad y_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j,\ j = \overline{1,n}, \quad x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i,\ i = \overline{1,m}.$$

8. Анализ двойственных оценок, анализ коэффициентов целевой функции и технологической матрицы.

Анализ двойственных оценок см. стр 72. **Анализ коэффициентов целевой функции:** а) при базисных переменных: В целевой функции задачи дадим коэффициенту $C_1 = 3$ приращение $\Delta C_1.$ Тогда целевая функция примет вид: $Z = (3 + \Delta C_1)x_1 + 2x_2.$ Проделав симплексные преобразования с целевой функцией, придем к последней симплексной таблице в которой отличие в строке Z наблюдается в коэффициентах при небазисных переменных на слагаемую величину, составленную из произведения соответствующих коэффициентов строки базисной переменной x_1 и приращения $\Delta C_1.$

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
x_1, x_2, x_5, x_6	0	0	$1/3 - 1/3 \cdot \Delta C_1$	$4/3 + 2/3 \cdot \Delta C_1$	0	0	$12\,2/3 + 10/3 \cdot \Delta C_1$

Оптимальные значения переменных будут оставаться переменными при значениях $\Delta C_1,$ удовлетворяющих условию не отрицательности всех коэффициентов при небазисных переменных в Z-уравнении. Таким образом, должны выполняться следующие неравенства: $1/3 - 1/3\,\Delta C_1 \geq 0;$ $4/3 + 2/3\,\Delta C_1 \geq 0.$ Отсюда $-2 \leq \Delta C_1 \leq 1.$ Итак, при изменении C_1 в пределах [1; 4] сохраняется структура и числовые значения оптимального плана. Однако изменяется значение целевой функции и двойственных оценок. б) при небазисных: например $C_3,$ в целевой функции $z = 3x_1 + 2x_2 + (0 + \Delta C_3)x_3 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6$ приводит лишь к тому, что в значительной симплекс-таблице изменяется только этот коэффициент в строке, которая примет вид:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
Z x_1, x_2, x_5, x_6	0	0	$1/3 - \Delta C_3$	$4/3$	0	0	$12\,2/3$

Видно, что единственное отличие от Z-уравнения до введения ΔC_3 состоит в том, что коэффициент при x_3 уменьшился на $\Delta C_3.$ Тогда для сохранения структуры плана должно выполняться условие

$y_1 - \Delta C_3 = 1/3 - \Delta C_3 \geq 0.$ Отсюда $-\infty < \Delta C_3 \leq \frac{1}{3}.$ А так как $C_3 \geq 0,$ то все характеристики оптимального плана (кроме y_1) будут неизменными в пределах $0 \leq C_3 \leq 1/3.$

9. Задачи дробно-линейного программирования. Алгоритм решения.
10. Постановка транспортной задачи, ее структура. Способы построения начального опорного плана.
11. Метод потенциалов решения транспортной задачи
12. Задача о назначениях, поиск решения
13. Транспортные сети. Примеры сетевых транспортных задач. Задача минимизации сети.
14. Задача о максимальном потоке. Задача о кратчайшем пути.
15. Задача о коммивояжере. Алгоритмы ближайшего соседа и Литтла.
16. Классические задачи целочисленной оптимизации. Методы решения.
17. Задача распределения ресурсов. Решение задачи методом динамического программирования. Функциональные уравнения Беллмана
18. Сетевое планирование и управление. Расчет параметров сетевого графика графическим способом

Расчет параметров сетевого графика

Графический способ

В каждом сетевом графике имеется несколько полных путей (последовательностей работ) от исходного события до конечного, продолжительность каждого из них определяется суммой продолжительностей составляющих их работ. Среди полных путей сетевого графика особое значение имеет наиболее продолжительный из них — ***критический путь***. Работы, находящиеся на критическом пути, называют критическими. Критический путь лимитирует выполнение задачи в целом, поэтому любая задержка на критических работах увеличивает время всего процесса. Работы (как и события), не лежащие на критическом пути, имеют резервы времени их выполнения. Поэтому выделяют следующие основные параметры сетевого графика (табл. 7.2).

Таблица 7.2 — **Параметры сетевого графика**

<table>
<tr><th>Событи е i</th><th colspan="2">Раннее время $t_{\text{р}}(i)$</th><th colspan="2">Поднее время $t_{\text{п}}(i)$</th><th>Резерв $R(i)$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Работа (i,j)</td><td>Раннее</td><td>Поздне е</td><td>Раннее</td><td>Позднее</td><td rowspan="3">Резерв $R(ij)$</td></tr>
<tr><td>$t_{\text{рн}}(ij)$</td><td>$t_{\text{пн}}(ij)$</td><td>$t_{\text{ро}}(ij)$</td><td>$t_{\text{по}}(ij)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Начало</td><td colspan="2">Окончание</td></tr>
</table>

$t_{\text{ð}}(i)$ — раннее время свершения события i;

$t_{\text{ï}}(i)$ — позднее время сверешения события i;

$R(i)$ — резерв времени события i;

$t_{\text{ðí}}(ij)$ — раннее время начала работы (i,j);

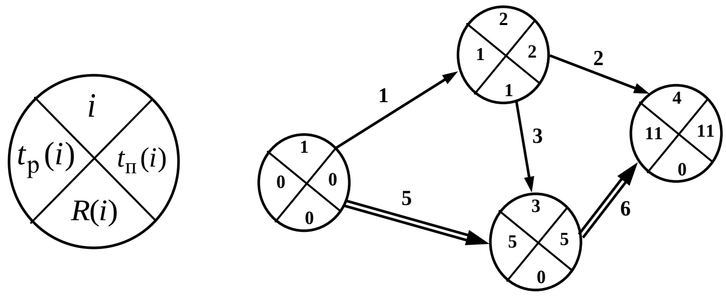
$t_{\text{ïí}}(ij)$ — позднее время начала работы (i,j);

$t_{\text{ðî}}(ij)$ — раннее время окончания работы (i,j);

$t_{\text{ïî}}(ij)$ — позднее время окончания работы (i,j);

$R(ij)$ — резерв времени работы (i,j).

Определим параметры для событий и критический путь на графике. На практике получил широкое распространение четырехсекторный способ расчета ранних и поздних сроков свершения событий. При этом способе кружок сетевого графика, обозначающий событие, делится на четыре сектора (рис. 7.4, *а*). В верхнем ставится номер события i, в левом — наиболее раннее из возможных время свершения события $t_{\text{ð}}(i)$, в правом — наиболее позднее из допустимых время свершения события $t_{\text{ï}}(i)$, в нижнем — резерв времени данного события $R(i)$.



а *б*

Рис. 7.4 — Графический способ расчета параметров:
а — обозначения в вершине графика;
б — сетевой график

Раннее время свершения события $t_{\text{ð}}(i)$ определяется продолжительностью максимального пути $\max t$ до (i), предшествующего событию i: $t_{\text{ð}}(i) = \max t$ до (i).

Послойно, переходя от исходного события до конечного, определим $t_{\text{ð}}(i)$. Всегда для начального события $t_{\text{ð}}(1) = 0$.

Для события 3 (рис. 7.4, *б*)— $t_{\text{ð}}(3) = \max\{(1+3),(0+5)\} = 5$;

для события 4 — $t_{\text{ð}}(4) = \max\{(1+2),(5+6)\} = 11$.

Длина критического пути $L_{\text{êð}} = 11$. Послойно, переходя от конечного события до начального, определим $t_{\text{ï}}(i)$. Всегда для конечного события $t_{\text{ï}}(4) = t(L_{\text{êð}}) = 11$. Позднее время свершения события $t_{\text{ï}}(i)$ определяется временем, достаточным для выполнения работ, следующих за этим событием, т.е., зная продолжительность максимального из последующих за событием i путей $\max t$ после (i) и продолжительность критического пути $t(L_{\hat{e}\eth})$, можно найти $t_{\text{ï}}(i) = t(L_{\hat{e}\eth}) - \max t$ после (i).

Для события 2 — $t_{\text{ï}}(3) = 11 - \max\{(3+6), 2\} = 2$.

Для критического пути время раннего свершения события $t_{\eth}(i)$ равно времени позднего свершения этого события $t_{\text{ï}}(i)$, т.е. $t_{\eth}(i)$ = $t_{\text{ï}}(i)$. Зная ранние и поздние сроки свершения событий сетевого графика, легко выявить резерв времени каждого из них $R(i) = t_{\text{ï}}(i) - t_{\eth}(i)$.

Резерв времени события показывает максимально допустимое время, на которое можно отодвинуть момент его свершения, не вызывая увеличения критического пути. События критического пути резерва времени не имеют.

Связь параметров сетевого графика для событий и работ показана в таблице 7.3.

Таблица 7.3 — **Расчет параметров работ**

Время	**Начало i** $\xrightarrow{t_{ij}}$ **j Окончание**	
Раннее	$t_{\text{рн}}(i,j) = t_{\text{р}}(i)$	$t_{\text{ро}}(i,j) = t_{\text{р}}(i) + t_{ij}$
Позднее	$t_{\text{пн}}(ij) = t_{\text{п}}(j) - t_{ij}$	$t_{\text{по}}(ij) = t_{\text{п}}(j)$

Резерв времени для работы $R(ij)$ определяется по формуле

$$R(i,j) = t_{\text{по}}(ij) - t_{\text{ро}}(ij) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}\ .$$

Таблица 7.4 — **Исходные данные**

i \ j	1	2	3	4
1		1	5	–
2	1		3	2
3	5	3		6
4	–	2	6	

19. Расчет параметров сетевого графика табличным способом

При данном способе расчета параметров упорядочение и нумерация вершин графика производятся обязательно послойно с выполнением правила: любая последующая вершина имеет больший номер, чем предшествующая, т.е. для любой дуги (i, j) должно выполняться условие $i < j$. Расчеты производятся в таблице $n \times n$, где n — число вершин. Строки и столбцы таблицы соответствуют событиям графика. Клетки главной диагонали таблицы (i,i) назовем главными, а остальные побочными. Для клеток, находящихся выше главной диагонали $(i < j)$, номер строки i соответствует номеру начального события, а номер столбца j — номеру конечного. Наоборот, для клеток, расположенных ниже главной диагонали $(i > j)$, начальному событию работы соответствует номер столбца j, а конечному — номер строки i.

Расчеты параметров сетевого графика проведем на вышерассмотренном примере (рис. 7.3). Перенесем исходные данные графика в таблицу 7.4.

Цифры в таблице 7.4 над главной диагональю характеризуют продолжительность выполнения работы (i, j), под главной диагональю — продолжительность выполнения работы (j,i), где i — номер строки, j — номер столбца.

Дальнейшее определение параметров в таблице сетевого графика производится в два этапа. На первом этапе (прямое движение к конечному событию) определяются параметры $t_{\eth\hat{\text{i}}}(i, j)$ и $t_{\text{р}}(j)$.

Для конечного события n — $t_{\text{р}}(n) = t_{\text{ï}}(n)$. На втором этапе (обратное движение к начальному событию) определяются параметры $t_{\text{ïí}}(i, j)$ и $t_{\text{ï}}(j)$. Эти параметры будут проставляться (см. табл. 7.5) соответственно выше главной диагонали для $t_{\eth\hat{\text{i}}}(i, j)$, ниже главной диагонали — $t_{\text{ïí}}(i, j)$ и по главной диагонали — $t_{\text{р}}(i)$, $t_{\text{ï}}(i)$, $t_{\text{р}}(j)$, $t_{\text{ï}}(j)$.

Таблица 7.5 — **Табличный способ расчета**

Обратный ход	Вершины	i	j	Прямой ход
$t_{\text{п}}(1) = t_{\text{р}}(1) = 0$ $t_{\text{п}}(i) = \min\limits_{j}\{t_{\text{пн}}(i,j)\}$	i	$t_{\text{р}}(i) / t_{\text{п}}(i)$	$t_{ij} / t_{\text{ро}}(i,j)$	$t_{\text{ро}}(i,j) = t_{\text{р}}(i) + t_{ij}$

$t_{пн}(i, j) = t_п(i) - t_{ij}$	j	$t_{ij} / t_{пн}(i, j)$	$t_р(j) / t_п(j)$	$t_р(j) = \max\limits_i \{t_{ро}(i, j)\}$ $t_р(n) = t_п(n)$

Расчеты параметров сетевого графика представлены в таблицах 7.6—7.7.

Таблица 7.6 — **Прямой ход расчета параметров**

i \ j	1	2	3	4
1	0 /	1 / 1	5 / 5	–
2	1 /	1 /	3 / 4	2 / 3
3	5 /	3 /	5 /	6 / 11
4	–	2 /	6 /	11 / 11

Таблица 7.7 — **Обратный ход расчета параметров**

i \ j	1	2	3	4
1	0 / 0	1 / 1	5 / 5	–
2	1 / 1	1 / 2	3 / 4	2 / 3
3	5 / 0	3 / 2	5 / 5	6 / 11
4	–	2 / 9	6 / 5	11 / 11

В таблице 7.8 приведены параметры сетевого графика для работ (V_{ij} — интенсивность потребления ресурсов).

Таблица 7.8 — **Значения параметров работ**

Работы	t_{ij}	V_{ij}	$t_{рн}$	$t_{ро}$	$t_{пн}$	$t_{по}$	R
1–2	1	5	0	1	1	2	1
1–3	5	10	0	5	0	5	0
2–3	3	5	1	4	2	5	1
2–4	2	8	1	3	9	11	8
3–4	6	10	5	11	5	11	0

20. Измерения предпочтений решений. Шкалы измерений.
21. Постановка задач векторной оптимизации. Измерение альтернатив. Нормализация критериев.
22. Основные схемы поиска компромиссных решений в задачах векторной оптимизации: равенство, уступки, выделение главного критерия, аддитивности
23. Задачи принятия решений на языке бинарных отношений. Способы задания бинарных отношений. Свойства отношений. Отношения: Парето, мажоритарное, лексикографическое, Подиновского

Существует четыре способа задания отношений: 1) непосредственное перечисление пар, 2) матричный, 3) графовый, 4) сечением.

Рассмотрим пример отношений в студенческой группе, состоящей из трех человек. На множестве $X = (x_1, x_2, x_3)$ студентов зададим отношение R — «учится лучше». Пусть первым способом задано отношение R следующим образом: $x_1 R x_2$; $x_1 R x_3$.

Тогда можно составить матрицу A отношений R, состоящую из нулей и единиц, в которой

$$a_{ij}(R) = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i R x_j \\ 0, \text{ в противном случае } (x_i \overline{R} x_j). \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3
x_1	0	1	1
x_2	0	0	0
x_3	0	0	0

Граф отношений, в котором стрелки направлены в сторону менее предпочтительного студента, показан на рис. 2.5.

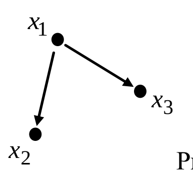


Рис. 2.5 — Графовый способ задания отношений

Сечения задаются по каждому элементу множества X. Различают верхнее сечение $R^{+}(x)$ - для x называется множество элементов из X, предпочтительных относительно рассматриваемого x. Нижнее — $R^{-}(x)$. - для x называется множество элементов из X менее предпочтительных x.

$R^{+}(x_1) = \{\varnothing$ — пустое множество$\}$; $R^{+}(x_2) = \{x_1\}$; $R^{+}(x_3) = \{x_1\}$;

$R^{-}(x_1) = \{x_2, x_3\}$, $R^{-}(x_2) = \{\varnothing\}$; $R^{-}(x_3) = \{\varnothing\}$.

В приведенном примере отношения R заданы не на всем множестве X. Если не все элементы сравнимы по отношению R, то оно называется неполным (несовершенным, нелинейным, частичным). На всем множестве объектов X могут быть установлены ***отношения эквивалентности, строгого порядка и нестрогого порядка***. Отношение эквивалентности порождает разбиение множества объектов на классы, объединяющие неразличимые объекты по одному либо группе критериев. В приведенном примере x_2 и x_3 находятся в отношении эквивалентности $x_2 \sim x_3$. Отношение строгого порядка может интерпретироваться как предпочтительность одного объекта по сравнению с другим, например, «лучше», «важнее», «старше» и т.д. В приведенном примере x_1 учится лучше x_2 и x_3, $x_1 \succ x_2$ и $x_1 \succ x_3$. Отношение строгого порядка порождает строгое упорядочение по предпочтительности.

Отношение нестрогого порядка есть объединение отношений строгого порядка и эквивалентности, оно интерпретируется как предпочтительность либо эквивалентность $x_i \geq x_j$ объектов (x_i не хуже x_j). Отношение полного нестрогого порядка порождает строгое упорядочение классов эквивалентности объектов. Если добавим отношения $x_2 \geq x_3$ и $x_3 \geq x_2$, получим порядок $x_1 \succ (x_2 \sim x_3)$.

Альтернатива в ЗПР может быть представлена описанием в критериальном пространстве. Через критериальное пространство на множестве альтернатив можно установить бинарные отношения.

Обозначим:

$x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ — вектор оценок альтернативы x;

$y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ — вектор оценок альтернативы y.

Введем на альтернативах x и y отношения строгого предпочтения (отношение Парето), равноценности и несравнимости для равнозначных критериев.

Отношение Парето Р

Объекты x и y находятся в отношении Парето P (строгого предпочтения), если для всех критериев оценки $x_i \geq y_i$, $i = \overline{1,m}$ и хотя бы по одному критерию j оценка $x_j > y_j$, $j = \overline{1,m}$.

$$x\mathrm{P}y \Rightarrow \left\{ (x_i \geq y_i,\ i = \overline{1,m}) \wedge (\exists j\ ,\ x_j > y_j\ ,\ j = \overline{1,m}) \right\}.$$

Пример

Установить отношения Парето для x, y, z, если $x = (5,5,5,5)$; $y = (5,4,5,5)$; $z = (5,5,5,4)$. Сравнивая попарно критерии для всех альтернатив, получим $x\mathrm{P}y$; $x\mathrm{P}z$; $y\overline{\mathrm{P}}z$; $z\overline{\mathrm{P}}y$.

Отношение равноценности *I* Объекты x и y находятся в отношении равноценности I, если для всех критериев оценки $x_i = y_i$, $i = \overline{1,m}$. $x\ \mathrm{I}\ y \Rightarrow \{x_i = y_i,\ i = \overline{1,m}\}$.

Отношение несравнимости N Объекты x и y находятся в отношении несравнимости N, если хотя бы по одному критерию i оценка $x_i > y_i$ и найдется другой критерий j, для которого оценка $x_j < y_j$.

$$x\mathrm{N}y \Rightarrow \left\{ (\exists i,\ x_i > y_i,\ i = \overline{1,m}) \wedge (\exists j\ ,\ x_j < y_j\ ,\ j = \overline{1,m}) \right\}.$$

Отношение Парето на всем множестве альтернатив позволяет установить множество предпочтительных (недоминируемых) альтернатив, верхнее сечение которых пусто. Данное множество называют ***множеством Парето***, внутри него выполняются отношения несравнимости. При необходимости же выбора из множества Парето более предпочтительных следует привлекать дополнительные соображения: вводить новые отношения (например, мажоритарное, лексиграфическое), новые критерии и ограничения, привлекать экспертов либо бросать жребий.

Выбор альтернатив в целом целесообразно производить в два этапа: определение множества Парето, затем определение подмножества более предпочтительных альтернатив из множества Парето.

Ниже рассмотрим некоторые из отношений, которые позволяют «сузить» множество Парето.

Мажоритарное отношение $P^{ì}$ Идейная основа мажоритарного отношения — это принцип выбора лучшего решения на основе голосования. Предполагается, что критерии равнозначны и утверждение «x предпочтительней y» выполняется тогда и только тогда, когда x превосходит y по большему числу оценок, чем y превосходит x. Формально $P^{ì}$ определяется: $xP^{ì}_{y} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^{xy} > 0$, **где** $\sigma_i^{xy} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i - y_i > 0; \\ 0, \text{ если } x_i - y_i = 0; \\ -1, \text{ если } x_i - y_i < 0. \end{cases}$

Пример. Пусть $x=(5,\,8,\,6,\,5,\,3,\,3,\,3)$; $y=(3,\,3,\,3,\,4,\,9,\,9,\,9)$. Очевидно, что имеет место $\sum_{i=1}^{7}\sigma_i^{xy}=1>0\Rightarrow x\ \ P^{\text{ì}}\ \ y.$

Отношение лексикографии P^L

Предполагается, что критерии упорядочены по важности значимости. Пусть критерий первый важнее второго, второй — третьего и т.д. Отношение лексикографии определяется:

$$x\ \ P^{\text{ì}}\ \ y\Rightarrow[x_1>y_1]\vee[x_1=y_1\wedge x_2>y_2]\vee\ldots$$
$$\ldots\vee[x_1=y_1\wedge x_2=y_2\wedge\ldots\wedge x_m>y_m]\ .$$

Отношения Подиновского $P^{\text{ï}}$, $I^{\text{ï}}$:

а) для равноважных критериев имеет место отношения предпочтения P и эквивалентности I по Подиновскому:

$$x\,P^{\text{ï}}\ \ y\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}x_i>\sum_{i=1}^{m}y_i,$$
$$x\,I^{\text{ï}}\ \ y\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}x_i=\sum_{i=1}^{m}y_i;$$

б) для разноважных критериев (пусть упорядочены по убыванию важности) имеет место отношения:

$$x\,P^{\text{ï}}\ \ y\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\ge\sum_{i=1}^{n}y_i,\ n=\overline{1,m}\right)\wedge\left(\exists\,K,\ \ \sum_{i=1}^{K}x_i>\sum_{i=1}^{K}y_i\right),$$
$$x\,I^{\text{ï}}\ \ y\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i,\ n=\overline{1,m}.$$

Пример

Пусть $x=(4,\,5,\,3,\,2)$; $y=(4,\ 3,\ 5,\ 5)$ а) для равноважных — $x\ \overline{P}^{\text{ï}}\ \ y$; $y\ \overline{P}^{\text{ï}}\ \ x$; б) для разноважных — $x\ \overline{P}^{\text{ï}}\ \ y$; $y\ \overline{P}^{\text{ï}}\ \ x$.

24. Метод порогов несравнимости «ЭЛЕКТРА»

В методе «ЭЛЕКТРА» разработана процедура многокритериального выбора наиболее предпочтительных объектов, включающая следующие этапы.

1. Для каждого из критериев вводится дискретная шкала возможных значений этого критерия, весовые коэффициенты критериев.
2. Для каждого из критериев строится граф, вершинами которого являются отдельные объекты множества, а дуги указывают на отношение доминирования между объектами в соответствии с данным критерием.
3. С учетом важности критериев и предпочтительности объектов вычисляются матрицы значений специальных коэффициентов, называемых индексами согласия и несогласия.
4. Для каждой пары объектов считается установленным отношение превосходства, скажем, x над y, если значение соответствующего индекса согласия больше некоторого порогового значения, а индекс несогласия — меньше соответствующего порогового значения.
5. Строится обобщенный граф превосходства, структура которого зависит от выбранных пороговых значений.

Пример:

Абитуриенты	Дисциплина		
	Математика	Физика	Литература
x	5	3	4
y	5	4	3
z	4	5	3

Обозначим: $x,y,z\in X$ — множество оцениваемых объектов; x_i — оценка объекта x по критерию i, $i=\overline{1,3}$; c_i — весовой коэффициент критерия i, $i=\overline{1,3}$; $0<c_i<1(10,100,\ \ldots)$. Пусть $c_1=5,\ c_2=3,\ c_3=2$. **2.** Для каждого критерия i строим граф $G_i=(X,V_i)$, где V_i — множество дуг графа G_i (рис. 5.1). Дуга в графе G_i из вершины x в вершину y существует, если $x_i\ge y_i$. Равенство оценок $x_i=y_i$ в графе влечет наличие двух дуг из x в y и из y в x.

$(x,y)\in V_i\Leftrightarrow x_i\ge y_i,\ \ i=\overline{1,3}.$

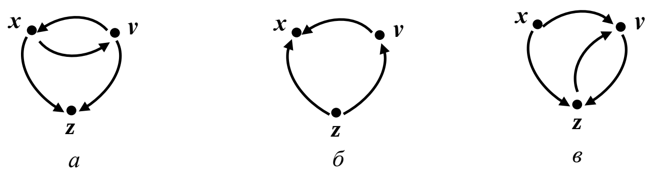


Рис. 5.1 — Графы отношений по математике (*а*),

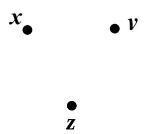


Рис. 5.2 — Объединенный граф

физике (*б*) и литературе (*в*)

Построим объединенный граф $G_0 = (X, V_0)$, где $V_0 = \bigcap_{i=3}^{3} V_i$ есть пересечение трех графов с дугами V_i (рис. 5.2). В нашем примере $V_0 = \{\varnothing\}$, т.к. в трех графах нет дуг, одновременно совпадающих по направлению. Объединенный граф характеризует полное согласие превосходства одних объектов над другими. **3.** Строим матрицу индексов согласия превосходства объектов и матрицу индексов несогласия с этим превосходством. Рассмотрим пару объектов $(x, y) \in X$. Применительно к ней множество всех критериев может быть разбито на два «противоположных» класса. К первому классу $C(x, y)$ отнесем все критерии k_i, для которых $x_i \geq y_i$, $i = \overline{1,3}$, т.е. критерии, согласно которым в графах G_i имеет место дуга $(x,\ y)$: $C(x,y) = \left\{ k_i \middle| (x,y) \in V_i,\ i = \overline{1,3} \right\}$. В примере $C(x,y) = \{k_1, k_3\}$; $C(x,z) = \{k_1,\ k_3\}$; $C(y,x) = \{k_1,\ k_2\}$; $C(y,z) = \{k_1,\ k_3\}$; $C(z,x) = \{k_2\}$; $C(z,y) = \{k_2,\ k_3\}$, где k_1 — математика, k_2 — физика, k_3 — литература. Ко второму классу $D(x,y)$ пары объектов (x,y) отнесем критерии k_i, для которых отсутствуют в графах G_i дуги (x,y): $D(x,y) = \left\{ k_i \middle| (x,y) \notin V_i,\ i = \overline{1,3} \right\}$. В примерах $D(x,y) = \{k_2\}$; $D(x,z) = \{k_2\}$; $D(x,y) = \{k_3\}$; $D(y,z) = \{k_2\}$; $D(z,x) = \{k_1, k_3\}$; $D(z,y) = \{k_1\}$. Рассчитываем матрицу для индексов согласия по формуле $c(x,y) = \frac{1}{c} \sum_{k_i \in C(x,y)} c_i$, где c_i — весовой коэффициент критерия k_i; $c = \sum_{i=1}^{3} c_i$. Матрица индексов согласия будет иметь вид $\begin{array}{c|ccc|} & x & y & z \\ x & - & 0{,}7 & 0{,}7 \\ y & 0{,}8 & - & 0{,}7 \\ z & 0{,}3 & 0{,}5 & - \end{array}$. Индексы согласия в матрице $c(x,y)$ могут изменяться от 0 до 1 и выражают степень согласия о предпочтении *x* над *y*. Рассчитываем матрицу для индексов несогласия по формуле

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ если } D(x,y) = \varnothing; \\ \frac{1}{d} \max\limits_{k_i \in D(x,y)} |y_i - x_i|, \text{ если } D(x,y) \neq \varnothing, \end{cases}$$

где d — нормирующий коэффициент, равный максимальному разбросу оценок на всем множестве критериев. Матрица индексов несогласия будет иметь вид $\begin{array}{c|ccc|} & x & y & z \\ x & - & 0{,}5 & 1 \\ y & 0{,}5 & - & 0{,}5 \\ z & 0{,}5 & 0{,}5 & - \end{array}$. Индексы несогласия $d(x,y)$ в матрице могут изменяться от 0 до 1 и выражают степень несогласия, недоверия к превосходству *x* над *y*. Абсолютная уверенность в превосходстве *x* над *y* будет при $c(x,y) = 1$ и $d(x,y) = 0$. В объединенном графе G_0 в этом случае будет дуга $(x,\ y)$. **4.** Вводится отношение превосходства на объектах через пороговые значения *p* и *q*. Значение порога *p* вводится для индексов согласия и должно быть ближе к единице, значение порога *q* вводится для индексов несогласия и должно быть ближе к нулю. Говорят, что объект *x* превосходит объект *y*, если $c(x,y) \geq p$ è $d(x,y) \leq q$, т.е. выполняются следующие условия:

- совокупность критериев (с учетом их относительной важности), по которым $x \succ y$ достаточна представительна (порог *p*);
- оценки по остальным критериям не дают достаточных оснований (порог *q*) для отказа о превосходстве $x \succ y$, степень недоверия к этому предположению не выходит за допустимый предел q_i.

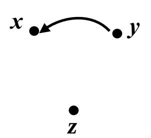


Рис. 5.3 — Обобщенный граф $G(0{,}8;0{,}5)$

5. Обобщенный граф превосходства $G_0(1;0)$ при $p = 1$ è $q = 0$ представлен на рис. 5.2. В графе $G(p,q)$ появится дополнительная дуга (рис. 5.3), например, если верхний порог $p = 0{,}8$, а нижний порог $q = 0{,}5$. Всегда $G_0(1;\ 0)$ является частичным графом $G(p', q')$, если $p' < 1$, à $q' > 0$.

25. Основные критерии выбора решений в условиях риска. Критерии Байеса, минимальной дисперсии, максимальной уверенности в получении заданного результата, модальный.

Рассмотрим индивидуальный (одним ЛПР) выбор решения на матрице исходов $Y = \|y_{ij}\|$ альтернатив $x_i \in X$ в ситуациях $e_j \in E$. Оценка y_{ij} исходов альтернатив x_i в конкретной ситуации e_j может быть проведена по одному и совокупности критериев достижения целей, способы ее получения рассмотрены ранее. Пусть $P = |p_{ij}|$ — матрица значений вероятностей наступления исхода y_{ij}, либо $P = |p_j|$ — вектор-строка распределения вероятностей появления каждого из состояний среды, если $p_{ij} = p_j(e_j)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Распределение вероятностей *P* определяется на основе статистических оценок либо аналитическими методами, основанными на формулировке гипотез о поведении среды с использованием аксиом, теорем и методов теории вероятности. Полученное таким образом распределение P называют *объективным распределением вероятности*. Если множество E образует полную группу событий, то $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,m}$.

Критерий Байеса. Обозначим $B_i(p, x_i) = \sum_j p_{ij}\, y_{ij}$ — математическое ожидание значений оценочного функционала при выборе стратегии x_i. В соответствии с критерием Байеса стратегия x_k^* считается оптимальной, если $B_k(p, x_k^*) = \max_i B_i(p, x_i)$, т.е. $x_k^* = \arg\ \max_i B_i(p, x_i)$. Этот критерий обеспечивает максимальную *среднюю* «полезность» (например, доход). Естественно, при однократной реализации решения, доход ЛПР может существенно отличаться от математического ожидания. **Пример:**

Стратегии	Погодные условия			
	e_1	e_2	e_3	e_4
x_1	100	25	80	64
x_2	70	80	20	120
x_3	60	90	50	30
Вероятности	0,4	0,3	0,1	0,2

Найти оптимальную стратегию, обеспечивающую максимальный средний доход. Воспользуемся критерием Байеса:

$$B(p, x_1) = 100 \cdot 0,4 + 25 \cdot 0,3 + 80 \cdot 0,1 + 64 \cdot 0,2 = 68,3;$$
$$B(p, x_2) = 78;$$
$$B(p, x_3) = 62.$$

Лучший результат дает альтернатива x_2.

Критерий минимума дисперсии. Пусть $\delta_i^2(p, x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}[y_{ij} - B_i(p, x_i)]^2$. Оптимальная стратегия x_k^* выбирается исходя из условия $x_k^* = \arg\ \min_i \delta_i^2(p, x_i)$. Решение характеризуется минимальным разбросом «полезности» относительно ее математического ожидания. **Пример** Исходные данные приведены выше в табл. 3.1.

$$\delta_i^2(p, x_1) = 0,4(100 - 68,3)^2 + 0,3(25 - 68,3)^2 + 0,1(80 - 68,3)^2 + $$
$$+0,2(64 - 68,3)^2 = 981,81;$$

$$\delta_i^2(p, x_2) = 714; \qquad \delta_i^2(p, x_3) = 456.$$

Лучший результат дает альтернатива x_3. Данный критерий используется дополнительно при одинаковых средних доходах, найденных по критерию Байеса. Если решение реализуется однократно, то понятие среднего дохода теряет смысл. В этом случае для ЛПР более привлекательной может оказаться альтернатива, обеспечивающая *максимальную вероятность того,* что *доход* будет *не менее некоторого допустимого минимума*.

Критерий максимума уверенности в получении заданного дохода. Зафиксируем величину α, удовлетворяющую неравенствам $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, где $\alpha_1 = \min_i\ \min_j y_{ij}$; $\alpha_2 = \max_i\ \max_j y_{ij}$. Будем рассматривать α как некоторый порог, ниже которого уменьшать полезность нецелесообразно. Обозначим $E_{\alpha,i}$ — множество состояний внешней среды, при которых обеспечивается выполнение неравенства $y_{ij} \ge \alpha$. $E_{\alpha,i} = \bigcup_j e_j(y_{ij} \ge \alpha | x_i)$. Вероятность выполнения этого неравенства при условии использования стратегии x_i: $P_{\alpha,i} = P(y_{ij} \ge \alpha | x_i) = P(e_j \in E_{\alpha,i}) = \sum_{e_j \in E_{\alpha,i}} p_j$, где p_j — вероятность наступления события e_j. Оптимальная стратегия определяется условием $x_k^* = \arg\ \max_i P(y_{ij} \ge \alpha\ | x_i)$.

Пример. Исходные данные приведены в табл. 3.1. Оценим влияние величины порога на оптимальность стратегии. Возьмем порог $\alpha > 80$. Вероятность выполнения этого неравенства:

а) для стратегии $x_1 \to P_{\alpha,1}(y_{ij} > 80 | x_1) = p_1 = 0,4$; б) для стратегии $x_2 \to P_{\alpha,2} = p_4 = 0,2$;

в) для стратегии $x_3 \to P_{\alpha,3} = p_2 = 0,3$. Оптимальной стратегией для $\alpha > 80$ будет x_1.

Пусть $\alpha > 30$, тогда

$$x_1 \to p_{\alpha,1} = P(y_{ij} > 30 | x_1) = p_1 + p_3 + p_4 = 0,7;$$
$$x_2 \to P_{\alpha,2} = P(y_{ij} > 30 | x_1) = p_1 + p_2 + p_4 = 0,9;$$
$$x_3 \to P_{\alpha,3} = P(y_{ij} > 30 | x_1) = p_1 + p_2 + p_3 = 0,8.$$

Оптимальной будет x_2 и так далее. Если исследовать диапазоны порогов, то получим оптимальные стратегии со следующими диапазонами:

$$x_1^* \quad \text{при } 80 < \alpha \le 100 \quad (P_{\alpha,1} = 0,4;\ P_{\alpha,2} = 0,2;\ P_{\alpha,3} = 0,3 \text{ èëè } 0);$$

$$x_2^* \text{ при } \begin{cases} 30 < \alpha \le 70 \ (P_{\alpha,2} = 0,9;\ P_{\alpha,1} = 0,7;\ P_{\alpha,3} = 0,8), \\ 100 < \alpha \le 120 \ (P_{\alpha,2} = 0,2;\ P_{\alpha,1} = P_{\alpha,3} = 0); \end{cases}$$

$$x_3^* \text{ ïðè } \alpha \le 30 \ \ P_{\alpha,3} = 1.$$

Модальный критерий выбора альтернатив. Сущность модального критерия выбора альтернатив состоит в том, что ЛПР при выборе альтернативы ориентируется на наиболее вероятное состояние среды. Пусть максимум распределения вероятности приходится на состояние среды e_l, т.е. $p_l = \max_j p_j$. Тогда оптимальное решение x_k^* находится из условия $F(x_k^*, e_l) = \max_i y_{il}$. Если имеется несколько состояний среды, которым соответствуют одинаковые максимальные вероятности $\{ l_{j1}, l_{j2}, ..., l_{jr} \}$, то альтернатива выбирается таким образом, чтобы обеспечить максимум среднего значения оценочного функционала по всему множеству наиболее вероятных состояний: $\frac{1}{r}\sum_{l=1}^{r} F(x_k^*, e_{jl}) = \max_i \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{r} y_{ijl}$.

Достоинство модального критерия состоит в значительном сокращении объема расчетов.

26. ЗПР в условиях неопределенности. Принятие решений в условиях линейного порядка предпочтения наступления состояний внешней среды, на основе байесового множества вероятностей предпочтительности альтернатив

Принятие решений при линейной упорядоченности состояний внешней среды. На *шаге 1* ЛПР устанавливает отношение порядка на множестве *E*. Простейший способ упорядочения — введение на множестве *E* отношения предпочтения следующим образом: $e_j \succ e_k \Leftrightarrow p_j \ge p_k;\ e_j, e_k \in E;\ p_j,$ где $p_k \in \overline{p}$ — вектор распределения вероятностей внешней среды; p_j — вероятность появления состояния e_j. Если такое упорядочение выполнено для всех пар (e_j, e_k), то получаем линейное отношение частичного порядка и будем считать, что состояния внешней среды перенумерованы таким образом, что $p_1 \ge p_2 \ge ... \ge p_n$.

Шаг 2. Вычисление точечных оценок распределений вероятностей, удовлетворяющих введенным отношениям порядка, может быть выполнено различными способами. Один из них предложен П. Фишберном. Оценки Фишберна p_j образуют убывающую арифметическую прогрессию вида $p_j = \frac{2(n-j+1)}{n(n+1)},\ j = \overline{1,n}.$

Шаг 3. Находим оптимальную альтернативу, например по критерию Байеса: $\max_i B(p, x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j\, y_{ij}$. Пусть это критерий $x^* = x_k$ при альтернативе *k*. $B(p, x_k) = \max_i \sum_{j=1}^{n} p_j\, y_{ij}$.

Шаг 4. Необходимо проверить, будет ли x_k оптимальным решением не только для найденного распределения p_j, но и для любого другого распределения, удовлетворяющего введенному на шаге 1 отношению порядка E^1.

При использовании критерия Байеса $x_k \succ x_i,\ \forall i$ можно гарантировать тогда и только тогда, когда $(B(p, x_k) - B(p, x_i) \ge 0$ или $\sum_{j=1}^{n} p_j (y_{kj} - y_{ij}) \ge 0$ для всех *i*, $p \in P$, (3.1) где *P* — множество распределений, удовлетворяющих заданному отношению порядка E^1. Очевидно, что для выполнения (3.1) необходимо и достаточно, чтобы $\min_{p \in P} \sum_{j=1}^{n} p_j (y_{kj} - y_{ij}) \ge 0,\ \ i = \overline{1,m}.$ (3.2)

Поскольку выражение $p \in P$ представляет собой в рассматриваемом случае не что иное, как систему линейных ограничений, накладываемых на компоненты вектора *P*, то выражение (3.2) определяет множество задач, состоящее из $(m-1)$ задач линейного программирования (при $i = k$ условие 3.2 выполняется).

Шаг 5. Этот шаг и последующие удобнее рассмотреть на примере.

Пример

Пусть таблица значений оценочного функционала задана (табл. 3.2). Предположим, что на первом шаге алгоритма на множестве состояний среды $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ введено отношение частичного порядка с помощью неравенств

$$p_1 \ge p_2 \ge p_3, \qquad p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Таблица 3.2 — **Исходные данные**

Стратегии	Состояния среды		
	e_1	e_2	e_3
x_1	8	2	4
x_2	6	7	4
x_3	4	7	5
x_4	3	4	6

Вычислим по формуле Фишберна точечные оценки: $p_1 = \frac{1}{2}$; $p_2 = \frac{1}{3}$; $p_3 = \frac{1}{6}$.

Для выбора оптимальной стратегии воспользуемся критерием Байеса. Математическое ожидание полезностей

$$B(p, x_1) = 8 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} = 5\frac{1}{3};$$

$$B(p, x_2) = 6;\ \ B(p, x_3) = 5\frac{1}{6};$$ Наилучшей стратегией по Байесу является стратегия x_2.

$$B(p, x_4) = 3\frac{5}{4}.$$

Проверим, для любого ли распределения вероятностей, удовлетворяющего заданному отношению порядка, эта стратегия оптимальна. $x_2 \succ x_i$ для всех альтернатив i, кроме второй, на любых допустимых распределениях вероятностей, если

$$L_i = \min[p_1(y_{21} - y_{i1}) + p_2(y_{22} - y_{i2}) + \\ +(y_{23} - y_{i3})] \geq 0,\ i \in \{1,3,4\}; \qquad (3.3) \qquad p_1 \geq p_2 \geq p_3; \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Таким образом, мы имеем 3 задачи линейного программирования (табл. 3.3).

Таблица 3.3 — **Задачи линейного программирования**

Условие задачи	Решение
$L_1 = -2p_1 + 5p_2 + 0 \cdot p_3 \to \min$ $p_1 - p_2 \geq 0$ $p_2 - p_3 \geq 0$ $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ $p_1, p_2, p_3 \geq 0$	$L_{1\min} = -2$ $p_1 = 1$ $p_2 = p_3 = 0$
$L_3 = 2p_1 - p_3 \to \min$ ограничения те же	$L_{3\min} = \frac{1}{3}$ $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$
$L_4 = 3p_1 + 3p_2 - 2p_3 \to \min$ ограничения те же	$L_{4\min} = \frac{4}{3}$ $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$

Как видно из табл. 3.3, условие 3.3 $L_i \geq 0$ выполняется только для стратегий x_3 и x_4, но не для x_1. Следовательно, решение x_2, полученное на основе точечных оценок Фишберна, лучше, чем x_3 и x_4 $(x_2 \succ x_3,\ x_2 \succ x_4$ ï ðè $p \in \mathrm{P})$, но $x_2 \succ x_1$, åñëè $-2p_1 + 5p_2 \geq 0$ — это дополнительное ограничение. Оно не противоречит ранее введенной системе ограничений (есть общая область допустимых решений и при этом условии). Если ЛПР считает, что последнее ограничение выполняется (а это так), то x_2 оптимальна для любого распределения вероятностей, которое может иметь место. Если бы ограничение не выполнялось (т.е. не было общей области допустимых решений), то в рассмотрение вводится дополнительное отношение — $5p_2 \leq 2p_1$ (но не $5p_2 \geq 2p_1$, a), и переходим на шаг 2.

Принятие решений при отсутствии информации о состоянии внешней среды - используется понятие Байесова множества. ЛПР не располагает никакой информацией о вероятно-стях появления различных состояний внешней среды , в том числе и об их соотношении. Рассмотрим множество всевозможных распределений вероятностей состояний внешней среды. Так как $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, то в каждом распределении достаточно задать лишь $(n-1)$ вероятность, например $p_1, ..., p_{n-1}$. Обозначим $p = (p_1, ..., p_{n-1})$. Очевидно, что каждому конкретному распределению вероятностей соответствует ***точка*** $(n-1)$-мерного пространства с координатами $p_1, ..., p_{n-1}$, лежащая в замкнутой области, определяемой соотношениями: $p_j \geq 0,\ j = 1, \overline{n\text{-}1}$, $\sum_{j=1}^{n-1} p_j \leq 1$.

Область, определяемая таким образом, называется $(n-1)$-мерным симплексом $\overline{p}_{n-1}$. Если n = 2, то одномерный симплекс $\overline{p}_1$ — это отрезок [0,1], если m = 3, то двумерный симплекс $\overline{p}_2$ — треугольник.

Если в распоряжении ЛПР имеется m альтернатив, то этот симплекс можно разбить на m непересекающихся подмножеств, таких, что в любой точке этого подмножества оптимальной по критерию Байеса является одна и та же альтернатива. Такое подмножество (из $\overline{p}$), соответствующее стратегии x_i, называется байесовым множеством этой стратегии. Будем обозначать его $p(x_i)$ или p_i.

Понятию байесова множества можно дать простую геометрическую интерпретацию. Если среда может находиться всего в двух состояниях: n = 2 с вероятностями p_1 и $p_2 = 1 - p_1$, то симплекс $\overline{p}_1$ $(p_1 \geq 0,\ \ p_1 \leq 1)$ — есть отрезок.

Математическое ожидание полезности при использовании альтернативы x_i
$B(p, x_i) = p_1 \cdot y_{i1} + (1 - p_1) y_{i2} = p_1(y_{i1} - y_{i2}) + y_{i2}$. Таким образом, каждой альтернативе x_i соответствует прямая на

плоскости с системой координат (p, B). Приведем пример построения байесовых множеств $p(x_i)$ в одномерном симплексе при наличии трех альтернатив (рис. 3.2). Множеству $p(x_i)$ соответствует отрезок симплекса, на котором альтернатива x_i обеспечивает максимум математического ожидания полезности.

Можно доказать, что каждое байесово множество образует в $(n-1)$ -мерном пространстве замкнутый выпуклый многогранник (в нашем случае при n = 2 — отрезок, а при n = 3 — многогранник).

Объем этого многогранника будем рассматривать как меру байесова множества $p(x_i)$ и обозначим ее $\mu(p_i)$. Назовем интегральным потенциалом альтернативы x_i величину

$$\pi(x_i) = \frac{\int\limits_{p_i} B(p, x_i)dp}{1 - \mu(p_i)/\mu(\overline{p}_{m-1})},$$

где числитель характеризует интегральное (средневзвешенное по всем априорным распределениям) байесово значение оценочного функционала;

$\mu(\overline{p}_{m-1})$ — мера (объем) симплекса, и, следовательно, знаменатель определяет геометрическую вероятность непопадания вектора p в байесово множество альтернативы x_i.

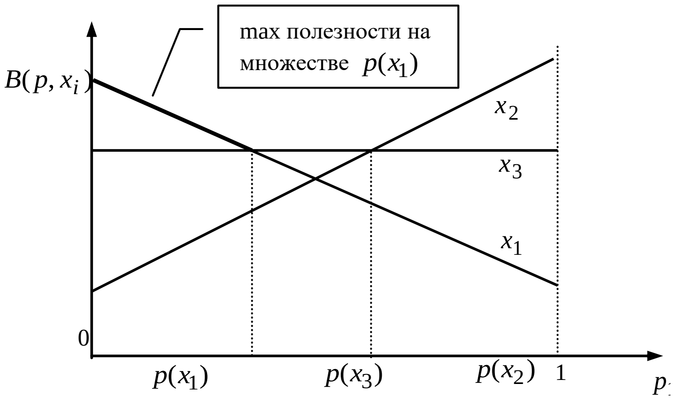


Рис. 3.2 — Пример построения байесовых множеств $p(x_i)$ в одномерном симплексе при наличии трех альтернатив

Естественно предположить, что ЛПР стремится к увеличению числителя при возможно меньшем знаменателе. Отсюда получаем критерий наибольшего интегрального потенциала: $\pi(x^*) = \max\limits_i \pi(x_i)$.

Пример: Задана матрица значений оценочного функционала (табл. 3.4). Найдем зависимость $B(p_1, x_i)$ математического ожидания полезности от вероятности появления состояния e_1 и изобразим ее на рис. 3.3.

Таблица 3.4 — **Исходные данные**

Стратегия	E	
	e_1	e_2
x_1	2	11
x_2	6	7
x_3	11	3

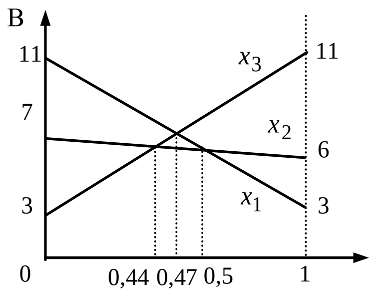


Рис. 3.3 — Иллюстрация оценки альтернатив

$B(p_1, x_1) = 2p_1 + 11(1 - p_1) = 11 - 9p_1$;

$B(p_1, x_2) = 7 - p_1$; $B(p_1, x_3) = 3 + 8p_1$.

$p(x_1) = [0; 0,47]$; $p(x_2) = 0$;
$p(x_3) = [0,47; 1]$.

Длины соответствующих отрезков:

$$\mu(p_1) = 0,47; \ \mu(p_2) = 0;$$
$$\mu(p_3) = 1 - 0,47 = 0,53$$

Мера симплекса: $\overline{p}_1 : \mu(\overline{p}_1) = 1$. Вычислим значения интегрального потенциала для всех стратегий:

$$\pi(x_1) = \frac{\int\limits_{p_1} B(p, x_1)dp_1}{1 - \mu(p_1)/\mu(\overline{p}_1)} = \frac{\int\limits_0^{47} (11 - 9p_1)dp_1}{1 - \mu(p_1)} = 8;$$

$$\pi(x_2)=0. \quad \pi(x_3)=\frac{\int_{0,47}^{1}(3+8p_1)dp_1}{1-\mu(p_3)}=7.$$ Оптимальной альтернативой следует считать x_1.

27. Принятие решений в условиях активного противодействия внешней среды. Критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

Таблица 3.5 — **Данные доходов**

	e_1	e_2	e_3
x_1	8	2	4
x_2	6	7	4
x_3	4	7	5
x_4	3	4	6

Принятие решений в условиях противодействия. Имеется активная внешняя среда, которая стремится принять такие состояния, сводящие к минимуму эффективность процесса управления. Основными критериями ПР в этой ситуации являются:

1) максиминный критерий ***Вальда***, в соответствии с которым ЛПР выбирает такую стратегию, что при любом состоянии внешней среды обеспечивается доход не меньше некоторой гарантированной величины (принцип наибольшего гарантированного результата):

$W(x^*)=\max\limits_i \min\limits_j y_{ij}$;

2) критерий минимаксный ***Сэвиджа***, при использовании которого минимизируются максимальные значения риска r_{ij} или сожаления c_{ij}: $S(x^*)=\min\limits_i \max\limits_j r_{ij}$, $C(x^*)=\min\limits_i \max\limits_j c_{ij}$.

Таблица 3.6 — **Данные потерь**

	e_1	e_2	e_3
x_1	0	5	2
x_2	2	0	2
x_3	4	0	1
x_4	5	3	0

Пример: Дана матрица доходов y_{ij} (табл. 3.5). Найдем в каждом столбце матрицы максимальный элемент: $\beta_j=\max\limits_i y_{ij}$, где β_j — доход, получаемый ЛПР, при условии, что оно знает состояние внешней среды e_j.

Разность (β_j-y_{ij}) между максимально возможным и реальным доходами, соответствующими выбранной стратегии x_i и состоянию внешней среды e_j, называется ***риском*** r_{ij} (табл. 3.6): $r_{ij}=\beta_j-y_{ij}$. Риск характеризует потери, которые несет ЛПР при выборе альтернативы, отличной от оптимальной. В некоторых ЗПР оценка исходов производится не по доходу, а по потерям U_{ij}, которые несет ЛПР при альтернативе x_i и состоянии среды e_j. Найдем минимальный элемент в каждом столбце $m_j=\min\limits_i U_{ij}$, где m_j — минимальные потери ЛПР, при условии, что оно знает состояние e_j. Сожаление — это разность: $C_{ij}=U_{ij}-m_j$. Оно определяет дополнительные (относительно m_j) потери ЛПР в случае неудачного для данного состояния e_j выбора альтернативы x_i.

$$w_1=\min_j y_{ij}=2$$
$$w_2=4$$
$$w_3=4$$
$$w_4=3$$

Альтернативы x_2 и x_3 дают наибольший гарантированный выигрыш. Перейдем к матрице риска r_{ij}.

$$s_1=\max_j r_{ij}=5$$
$$s_2=2$$
$$s_3=4$$
$$s_4=5$$

Альтернатива x_2 дает минимум потерь. Эти потери дают абсолютно надежную оценку ПР в условиях физической неопределенности. **Принятие решений при наличии неопределенной информации о состоянии внешней среды.** ЛПР может установить некоторый уровень пессимизма-оптимизма в отношениях наихудшего и наилучшего для него состояний среды. **Критерий *Гурвица.*** $\varphi(x_i,\lambda)=\lambda\min\limits_j y_{ij}+(1-\lambda)\max\limits_j y_{ij}$, где λ — показатель Гурвица.

$\max\limits_i \varphi(x_i,\lambda)=\varphi(x^*,\lambda)$.

Таблица 3.7 — **Исходные данные**

Стратегии	Внешняя среда		
	e_1	e_2	e_3
x_1	2	10	7
x_2	6	7	7
x_3	11	8	3

Пример. Дана матрица реализаций (табл. 3.7). При каких значениях λ альтернативы будут наилучшими?

$$\varphi(x_1,\lambda)=\lambda\cdot 2+(1-\lambda)10=-8\lambda+10$$
$$\varphi(x_2,\lambda)=\lambda\cdot 6+(1-\lambda)7=-\lambda+7$$
$$\varphi(x_3,\lambda)=\lambda\cdot 3+(1-\lambda)11=-8\lambda+11$$

$x_3 \succ x_1$ при всех λ.

$x_2 \succ x_3$, если $-\lambda+7>-8\lambda+11$ или $\lambda \geq 4/7$ (рис. 3.4).

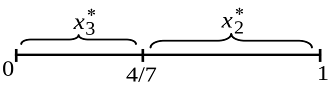


Рис. 3.4 — Иллюстрация влияния показателя Гурвица

28. Принятие решений при расплывчатой (нечеткой) неопределенности состояний внешней среды. Задачи принятия решений на основе нечеткого отношения предпочтений. Примеры задач.

Принятие решений при нечетком описании множества состояний внешней среды. ЛПР знает полный перечень состояний внешней среды $E=(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, множество альтернатив $X=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, матрицу исходов $\|y_{ij}\|$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$. Но имеющаяся информация не позволяет четко определить состояние среды. Принятие решения в таком случае осуществляется с использованием теории нечетких множеств. Пусть $E=(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ порождает нечеткое множество $A=\{ \langle \mu_1(e_1)/e_1 \rangle, \langle \mu_2(e_2)/e_2 \rangle, \ldots, \langle \mu_n(e_n)/e_n \rangle \}$, где $e_j \in E$, $j=\overline{1,n}$ — состояние среды, носитель нечеткого множества A; $\mu_j(e_j)$, $j=\overline{1,n}$ — функция принадлежности состояния e_j нечеткому множеству A, $\mu_j(e_j) \in [0,1]$. Полагаем, что функция принадлежности $\mu_j(e_j)$, $j=\overline{1,n}$ известна и множество ее значений для $e_j \in E$ представлено вектором $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Для оценки альтернатив могут быть использованы критерии принятия решений в условиях вероятностной неопределенности, если вместо вероятности p_j использовать взвешенную оценку, равную $\mu_j / \sum_{k=1}^{n} \mu_k$. Например, при использовании критерия Байеса оценка альтернативы x_i будет иметь вид $B_i(\mu, x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\mu_j \Big/ \sum_{k=1}^{n} \mu_k$.

Принятие решений на основе нечеткого отношения предпочтений. Рассмотрим следующую задачу. Пусть задано множество альтернатив X, каждая из которых характеризуется несколькими признаками (критериями) с номерами $j=\overline{1,m}$. Информация о парном сравнении альтернатив по каждому из признаков j представлена в форме отношения предпочтения R_j на множестве X. Задана относительная важность критериев α_j.

Задача заключается в том, чтобы по данной информации сделать рациональный выбор альтернатив из множества $(X, R_1, \ldots, R_m)$.

Пример

В процессе разработки проекта возникла необходимость привлечь дополнительных сотрудников для скорейшего выполнения одного из этапов. У руководителя есть три возможности преодолеть трудность:

1) обучить своего сотрудника;
2) найти и принять на работу сотрудника, умеющего выполнять требуемые функции;
3) заключить договор с другой организацией о выполнении этих работ.

Руководитель принимает решение, учитывая следующие критерии:

1) быстроту выполнения работы;
2) материальные затраты на ее выполнение;
3) качество выполнения.

Будем считать, что все критерии одинаковы по важности. Каждый критерий порождает отношения предпочтения на множестве альтернатив (возможностей) X.

Пусть отношения предпочтения альтернатив по каждому критерию будут представлены графами (рис. 3.5).

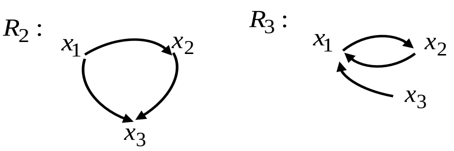


Рис. 3.5 — Графы отношений

Отношения предпочтения альтернатив по трем критериям будут заданы в виде следующих матриц:

R_1	x_1	x_2	x_3
x_1	1	1	0
x_2	1	1	0
x_3	0	1	1

R_1	x_1	x_2	x_3
x_1	1	1	1
x_2	0	1	1
x_3	0	0	1

R_1	x_1	x_2	x_3
x_1	1	1	0
x_2	1	1	0
x_3	1	0	1

Подход нахождения нечетного множества номинируемых альтернатив. Суть его заключается в том, что вначале строятся нечеткие отношения предпочтения Q_1 и Q_2 на множестве исходных альтернатив X, такие, что функция μ_{Q_1} принадлежности нечеткого отношения Q_1 определяется через пересечение исходных отношений R_j , $j=\overline{1,m}$, а функция μ_{Q_2} принадлежности нечеткого отношения Q_2 определяется через аддитивную свертку этих отношений. Затем через пересечение нечетких множеств μ_{Q_1} и μ_{Q_2} определяется множество предпочтительных альтернатив с максимальной степенью недоминируемости.

Определение

Пусть X — множество альтернатив, μ_Q — заданное на нем нечеткое отношение предпочтения. Нечеткое подмножество недоминируемых альтернатив множества (X, μ_Q) описывается функцией принадлежности $\mu_Q^{í.ä.}(x) = 1 - \underset{y \in X}{SUP}\left[\mu_R(y,x) - \mu_R(x,y)\right]$, $x \in X$.

Алгоритм решения задачи состоит из следующих шагов.

1. Строим нечеткое отношение Q_1 (пересечение исходных отношений). В качестве функции принадлежности R_j по критерию j между x и y возьмем $\mu_j\ (x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ï ðè}\ (x,y) \in R_j\ ; \\ 0, & \text{ï ðè}\ (x,y) \notin R_j\ . \end{cases}$

Тогда пересечению этих множеств соответствует функция принадлежности $\mu_{Q_1}(x,y) = \min\{\mu_1(x,y),\ ...,\ \mu_m(x,y)\}$.

Определяем нечеткое подмножество недоминируемых альтернатив в множестве (X, μ_{Q_1}) $\mu_{Q_1}^{í.ä.}(x) = 1 - \underset{y \in X}{SUP}\left[\mu_{Q_1}(y,x) - \mu_{Q_1}(x,y)\right]$.

2. Строим нечеткое отношение Q_2 (свертка отношений) $\mu_{Q_2}(x,y) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\ \mu_j\ (x,y)$

и определяем нечеткое подмножество недоминируемых альтернатив в множестве (X, μ_{Q_2}) $\mu_{Q_2}^{í.ä.}(x) = 1 - \underset{y \in X}{SUP}\left[\mu_{Q_2}(y,x) - \mu_{Q_2}(x,y)\right]$.

3. Находим пересечение множеств $\mu_{Q_1}^{í.ä.}$ и $\mu_{Q_2}^{í.ä.}$ $\mu^{í.ä.}(x) = \min\left\{\mu_{Q_1}^{í.ä.}(x),\ \mu_{Q_1}^{í.ä.}(x)\right\}$.

4. Рациональным считаем набор альтернатив из множества $X^{í.ä.} = \left\{x / x \in X,\ \mu^{í.ä.}(x) = \underset{x' \in X}{SUP}\, \mu^{í.ä.}(x')\right\}$.

Наиболее рациональным следует считать выбор альтернативы из множества $X^{í.ä.}$, имеющий максимальную степень недоминируемости. Последнее отношение упорядочивает альтернативы по степени недоминируемости.

Решение примера

1. Строим нечеткое отношение Q_1 $\quad Q_1 = R_1 \cap R_2 \cap R_3$,

$$\mu_{Q_1}(x_i,x_j) = \min\left\{\ \mu_1(x_i,x_j),\ \mu_2(x_i,x_j),\ \mu_3(x_i,x_j)\right\}\ ,\quad \mu_{Q_1}(x_i,x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим подмножество недоминируемых альтернатив в множестве (X, μ_{Q_1})

$$\mu_{Q_1}^{í.ä.}(x_i) = 1 - \underset{x_j \in X}{SUP}\left(\ \mu_{Q_1}(x_j\ , x_i) - \mu_{Q_1}(x_i,x_j)\right)\ ,\ \ \forall_{i,j}\ ,\quad i \neq j\ \ ;$$

$$\mu_{Q_1}^{í.ä.}(x_1) = 1 - SUP\left[\mu_{Q_1}(x_2,x_1) - \mu_{Q_1}(x_1,x_2),\ \mu_{Q_1}(x_3,x_1) - \mu_{Q_1}(x_1,x_3)\right] =$$

$$= 1 - SUP[0-1,\ \ 0-0] = 1;$$

$$\mu_{Q_1}^{í.ä.}(x_2) = 1 - SUP\left[\mu_{Q_1}(x_1,x_2) - \mu_{Q_1}(x_2,x_1),\ \mu_{Q_1}(x_3,x_2) - \mu_{Q_1}(x_2,x_3)\right] =$$

$$= 1 - SUP[1-0,\ \ 0-0] = 0;$$

$$\mu_{Q_1}^{í.ä.}(x_3) = 1 - SUP\left[\mu_{Q_1}(x_1,x_3) - \mu_{Q_1}(x_3,x_1), \mu_{Q_1}(x_2,x_3) - \mu_{Q_1}(x_3,x_2)\right] =$$

$$= 1 - SUP[0-0,\ \ 0-0] = 1;$$

Тогда $\mu_{Q_1}^{í.ä.}(x) = \dfrac{x_1\ \ x_2\ \ x_3}{1\ \ \ 0\ \ \ 1}$.

2. Строим отношение $Q_2 : \mu_{Q_2}(x_i,x_j) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\ \mu_j\ (x_i,x_j) = \dfrac{1}{3}\left(\mu_1(x_i,x_j) + \mu_2(x_i,x_j) + \mu_3(x_i,x_j)\right)$; $\mu_{Q_2}(x_i,x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/3 \\ 2/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$.

Находим подмножество недоминируемых альтернатив в множестве (X, μ_{Q_2})

$$\mu_{Q_2}^{\text{í.ä.}} = 1 - SUP\left(\mu_{Q_2}(x_j\ , x_i) - \mu_{Q_2}(x_i, x_j)\right)\ \forall_{i,j}\ ,\quad i \neq j\ \ ;$$

$$\mu_{Q_2}^{\text{í.ä.}}(x_1) = 1 - SUP\left[\mu_{Q_2}(x_2, x_1) - \mu_{Q_2}(x_1, x_2),\ \mu_{Q_2}(x_3, x_1) - \mu_{Q_2}(x_1, x_3)\right] =$$
$$= 1 - SUP[2/3 - 1,\ \ 1/3 - 1/3] = 1;$$

$$\mu_{Q_2}^{\text{í.ä.}}(x_2) = 1 - SUP\left[\mu_{Q_2}(x_1, x_2) - \mu_{Q_2}(x_2, x_1), \mu_{Q_2}(x_3, x_2) - \mu_{Q_2}(x_2, x_3)\right] =$$
$$= 1 - SUP[1 - 2/3,\ \ 1/3 - 1/3] = 2/3;$$

$$\mu_{Q_2}^{\text{í.ä.}}(x_3) = 1 - SUP\left[\mu_{Q_2}(x_1, x_3) - \mu_{Q_2}(x_3, x_1), \mu_{Q_2}(x_2, x_3) - \mu_{Q_2}(x_3, x_2)\right] =$$
$$= 1 - SUP[1/3 - 1/3,\ \ 1/3 - 1/3] = 1;$$

$$\mu_{Q_2}^{\text{í.ä.}}(x) = \frac{x_1\ \ x_2\ \ x_3}{1\ \ 2/3\ \ 1}.$$

3. Результирующее множество недоминируемых альтернатив есть пересечение множеств $\mu_{Q_1}^{\text{í.ä.}}$ и $\mu_{Q_2}^{\text{í.ä.}}$.

$$\mu_{Q_2}^{\text{í.ä.}}(x) = \frac{x_1\ \ x_2\ \ x_3}{1\ \ \ 0\ \ \ 1}.$$

Отсюда заключаем, что в данном примере рациональным следует считать выбор альтернатив x_1 (обучить своего сотрудника) либо x_3 (заключить договор с другой организацией, имеющей максимальную степень недоминируемости).

29. Многокритериальная задача о назначениях

Пусть $C_i (i = \overline{1,n})$ и $O_\nu (\nu = \overline{1,n})$ — множество субъектов и объектов. $C = \left(\overline{c_1}, \overline{c_2}, ..., \overline{c_i}, ..., \overline{c_n}\right)$ — множество оценок возможностей субъектов $i,\ i = \overline{1,n}$, где $\overline{c_i} = \left(c_i^1, c_i^2, ..., c_i^j, ..., c_i^m\right)$ — вектор оценок субъекта i по критериям $j,\ j = \overline{1,m}$, c_i^j — оценка i-го субъекта по критерию j. $O = \left(\overline{o_1}, \overline{o_2}, ..., \overline{o_\nu}, ..., \overline{o_n}\right)$ — множество оценок потребностей (требований) объектов $\nu,\ \nu = \overline{1,n}$, где $\overline{o_\nu} = \left(o_\nu^1, o_\nu^2, ..., o_\nu^j, ..., o_\nu^m\right)$ — вектор оценок объекта ν по критериям $j,\ j = \overline{1,m}$, o_ν^j — оценка ν-го субъекта по критерию j. **Рассмотри работу алгоритм на примере:**

Субъект	Критерии				Объект	Критерии			
	1	2	3	4		1	2	3	4
c_1	4	3	5	1	o_1	3	2	5	2
c_2	4	3	4	3	o_2	4	3	5	2
c_3	3	1	4	1	o_3	4	3	4	3

На первый объект может быть распределен один из трех курсантов, при этом приоритет распределения у курсантов будет зависеть от степени соответствия их оценок оценкам первого объекта. Аналогично для второго и третьего объектов. Можно получить информацию T_ν относительно каждого объекта ν $(\nu = \overline{1,3})$ о распределении курсантов i $(i = \overline{1,3})$ через индексы несоответствия возможностей курсантов потребностям воинских подразделений в виде матрицы индексов несоответствия $\left\| \overline{c_{i\nu}} \right\|$

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
 & o_1 & o_2 & o_3 \\ \hline
c_1 & \overline{c_{11}} & \overline{c_{12}} & \overline{c_{13}} \\ \hline
c_2 & \overline{c_{21}} & \overline{c_{22}} & \overline{c_{23}} \\ \hline
c_3 & \overline{c_{31}} & \overline{c_{32}} & \overline{c_{33}} \\ \hline
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} \\
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{T_1} & \multicolumn{1}{c}{T_2} & \multicolumn{1}{c}{T_3}
\end{array}$$

$\overline{c_{i\nu}} = \left(c_{i\nu}^1, ..., c_{i\nu}^j, ..., c_{i\nu}^m\right)$ — вектор несоответствия возможностей субъекта i требованиям объекта ν, где $c_{i\nu}^j$ — индекс несоответствия пары $(i\nu)$ по критерию j.

$$c_{i\nu}^j = \begin{cases} 0, \text{ если } c_i^j - o_\nu^j \geq 0 & \text{(возможность выше потребности);} \\ o_\nu^j - c_i^j, \text{ иначе} & \text{(возможность ниже потребности).} \end{cases}$$

Тогда на основании информации $T_\nu : \overline{c_{1\nu}}, \overline{c_{2\nu}}, \overline{c_{3\nu}}$ можно установить бинарные отношения между субъектами c_1, c_2, c_3 в предположении, что они будут распределяться на объект o_ν:

- отношение строгого предпочтения (Парето)

$$P — \overline{c_{i\nu}}\, P\, \overline{c_{p\nu}} \Leftrightarrow \left\{ \left(c_{i\nu}^j \leq c_{p\nu}^j,\ j = \overline{1,n}\right) \wedge \left(\exists\, k \neq j,\ c_{i\nu}^k < c_{p\nu}^k\right)\ \right\};$$

- отношение эквивалентности

$$I — \overline{c_{i\nu}}\, I\, \overline{c_{p\nu}} \Leftrightarrow \left\{\ c_{i\nu}^j = c_{p\nu}^j,\ j = \overline{1,n}\ \ \right\};$$

- отношение несравнимости

$$N — \overline{c_{i\nu}}\, N\, \overline{c_{p\nu}} \Leftrightarrow \left\{ \left(\exists\, j = \overline{1,n},\ c_{i\nu}^j < c_{p\nu,}^j\right) \wedge \left(\exists\, k \neq j,\ c_{i\nu}^k > c_{p\nu}^k\right)\ \right\}.$$

Определим векторы $\overline{c_{i\nu}}$ и покажем отношения между субъектами по каждому объекту графически (рис. 5.4).

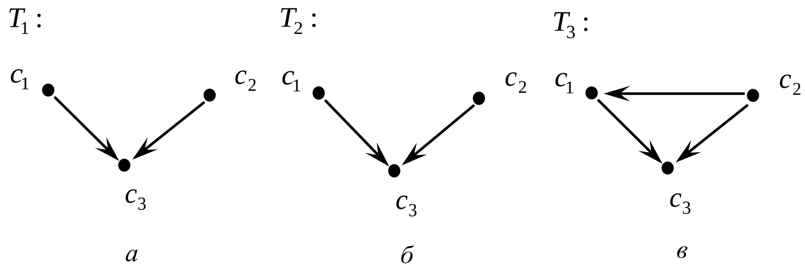


Рис. 5.4 — Графы отношений T_1, T_2, T_3 между субъектами относительно объектов o_1 (*а*), o_2 (*б*) и o_3 (*в*)

$\overline{c_{11}} = (0;\, 0;\, 0;\, 1)$	$\overline{c_{12}} = (0;\, 0;\, 0;\, 1)$	$\overline{c_{13}} = (0;\, 0;\, 0;\, 2)$
$\overline{c_{21}} = (0;\, 0;\, 1;\, 0)$	$\overline{c_{22}} = (0;\, 0;\, 1;\, 0)$	$\overline{c_{23}} = (0;\, 0;\, 0;\, 0)$
$\overline{c_{31}} = (0;\, 1;\, 1;\, 1)$	$\overline{c_{32}} = (1;\, 2;\, 1;\, 1)$	$\overline{c_{33}} = (1;\, 2;\, 0;\, 2)$

Рассмотрим распределение курсантов с другой позиции. Определенный курсант может быть распределен на один из трех объектов, при этом предпочтение будет отдаваться тому объекту, у которого степень соответствия требований возможностям курсанта будет выше относительно других объектов.

Информацию S_i относительно каждого курсанта $i\,(i=\overline{1,3})$ о приоритетном предоставлении мест практики можно получить через матрицу индексов соответствия требований воинских подразделений возможностям курсанта $\left\| \overline{o_{i\nu}} \right\|$

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
 & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline
o_1 & \overline{o_{11}} & \overline{o_{12}} & \overline{o_{13}} \\ \hline
o_2 & \overline{o_{21}} & \overline{o_{22}} & \overline{o_{23}} \\ \hline
o_3 & \overline{o_{31}} & \overline{o_{32}} & \overline{o_{33}} \\ \hline
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & S_1 & S_2 & S_3
\end{array}$$

$\overline{o_{\nu i}} = \left(o_{\nu i}^{1}, ..., o_{\nu i}^{j}, ..., o_{\nu i}^{m}\right)$ — вектор соответствия требований ν-го объекта возможностям i-го субъекта, где $o_{\nu i}^{j}$ — индекс соответствия пары (νi) по критерию j. Определим $o_{\nu i}^{j} = -c_{i\nu}^{j}$ как j-ю компоненту вектора $\overline{o_{\nu i}}$, характеризующего соответствие между характеристиками ν-го объекта и i-го субъекта. На основании информации $S_i : \overline{o_{1i}}, \overline{o_{2i}}, \overline{o_{3i}}$ можно установить бинарные отношения между объектами o_1, o_2, o_3 относительно субъекта c_i в предположении, что они наиболее полно позволят реализовать на практике его возможности:

- отношение строгого предпочтения

$$P — \overline{o_{\nu i}}\, P\, \overline{o_{ti}} \Leftrightarrow \left\{ \left(o_{\nu i}^{j} \ge o_{ti}^{j},\ j=\overline{1,n}\right) \wedge \left(\exists\, k \ne j,\, o_{\nu i}^{k} > o_{ti}^{k}\right) \right\};$$

- отношение эквивалентности

$$I — \overline{o_{\nu i}}\, I\, \overline{o_{ti}} \Leftrightarrow \left\{ o_{\nu i}^{j} = o_{ti}^{j},\ j=\overline{1,n} \right\};$$

- отношение несравнимости

$$N — \overline{o_{\nu i}}\, N\, \overline{o_{ti}} \Leftrightarrow \left\{ \left(\exists\, j=\overline{1,n},\, o_{\nu i}^{j} > o_{ti}^{j},\right) \wedge \left(\exists\, k \ne j,\, o_{\nu i}^{k} < o_{ti}^{k} \right\}\right).$$

Определим векторы $\overline{o_{\nu i}}$ для нашего примера и покажем отношения между объектами по каждому субъекту графически (рис. 5.5).

$\overline{o_{11}} = (0;\, 0;\, 0;\, -1)$	$\overline{o_{12}} = (0;\, 0;\, -1;\, 0)$	$\overline{o_{13}} = (0;\, -1;\, -1;\, -1)$
$\overline{o_{21}} = (0;\, 0;\, 0;\, -1)$	$\overline{o_{22}} = (0;\, 0;\, -1;\, 0)$	$\overline{o_{23}} = (-1;\, -2;\, -1;\, -1)$
$\overline{o_{31}} = (0;\, 0;\, 0;\, -2)$	$\overline{o_{32}} = (0;\, 0;\, 0;\, 0)$	$\overline{o_{33}} = (-1;\, -2;\, 0;\, -2)$

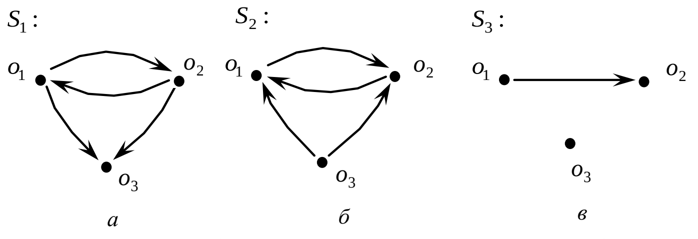


Рис. 5.5 — Графы отношений S_1, S_2, S_3 между объектами относительно субъектов c_1 (*а*), c_2 (*б*) и c_3 (*в*)

Для определения пар «объект-субъект» проанализируем графы отношений субъектов T_ν и объектов S_i. В графах будем послойно выделять вершины, над которыми нет доминирующих вершин (в эти вершины не входят однонаправленные дуги). В каждый слой будут входить вершины с отношениями либо эквивалентности, либо несравнимости. Вершины первого слоя будут доминировать над вершинами второго слоя, второго — над вершинами третьего и т.д. Несравнимым вершинам первого слоя присваивают индекс N_1, эквивалентности — I_1, для второго слоя соответственно присваивают индексы N_2, I_2 и т.д.

Всю информацию, полученную при послойном выделении вершин, занесем в таблицу сходства (рис. 5.6). Строкам матрицы сходства соответствуют субъекты, столбцам — объекты. В каждой клетке матрицы сходства проставляются индексы в

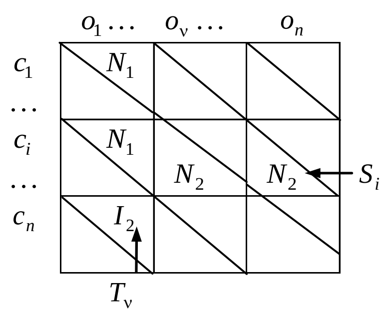


Рис. 5.6 — Матрица сходства

верхней ее части — из графа несоответствия T_v, в нижней ее части — из графа соответствия S_i.
Очевидному индексу соответствует клетка матрицы сходства с индексами $I_1 \backslash I_1$. В случае если имеются такие клетки, делается идеальное назначение и понижается размерность задачи. После понижения размерности задачи необходимо вернуться к графам T_v и S_i и опять составить матрицу сходства. Если в матрице сходства нет клеток « $I_1 \backslash I_1$ », то для назначения необходимо обратиться к ЛПР за дополнительной информацией. Для наших графов отношений матрица сходства будет иметь вид

	o_1	o_2	o_3
c_1	N_1 / I_1	N_1 / I_1	I_2 / I_2
c_2	N_1 / I_2	N_1 / I_2	I_1 / I_1
c_3	I_2 / N_1	I_2 / I_2	I_3 / N_1

Идеальное назначение « $c_2 - o_3$ », понижаем размерность задачи (не учитываем далее субъект второй и объект третий) и обращаемся к графам отношений, не учитывая в них c_2 и o_3. Получим новые графы отношений (рис. 5.7).

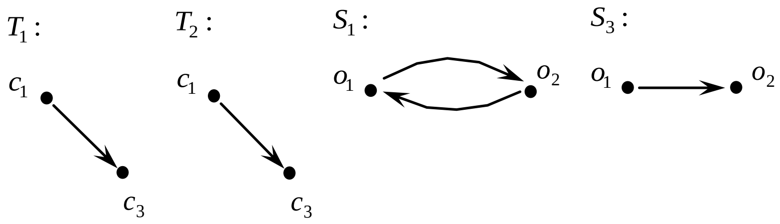


Рис. 5.7 — Графы отношений между субъектами и объектами

Строим матрицу сходства:

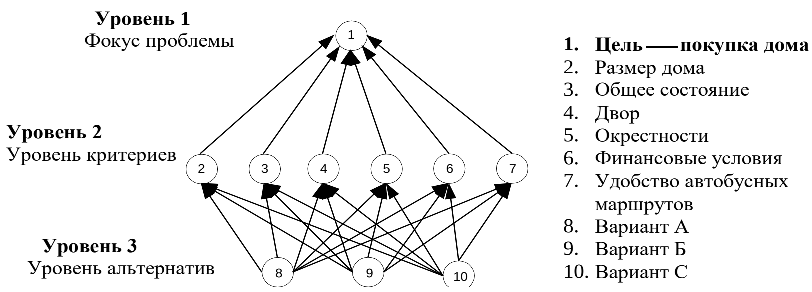
	o_1	o_2
c_1	I_1 / I_1	I_1 / I_1
c_3	I_2 / I_1	I_2 / I_2

Идеальное назначение либо « $c_1 - o_1$ », а далее назначение « $c_3 - o_2$ », либо назначения « $c_1 - o_2$ » и « $c_3 - o_1$ ».
Таким образом, возможны варианты решения задачи:
1) « $c_2 - o_3$ », « $c_1 - o_1$ », « $c_3 - o_2$ »;
2) « $c_2 - o_3$ », « $c_1 - o_2$ », « $c_3 - o_1$ ».

30. Аналитическая иерархическая процедура Саати (метод анализа иерархий)

Метод анализа иерархий включает два этапа:
- декомпозицию проблемы на составляющие части;
- определение относительной значимость исследуемых альтернатив для всех критериев, находящихся в иерархии.

Построение иерархической структуры начинается с очерчивания проблемы исследования. Далее строится собственно иерархия, включающая цель, расположенную в ее вершине, промежуточные уровни (например, критерии) и альтернативы, формирующие самый нижний иерархический уровень.



На втором этапе устанавливается относительная важность элементов иерархии. Используя суждения ЛПР (эксперта) и определенные алгоритмы их обработки, устанавливаются веса дуг и веса объектов первого уровня. Если на первом уровне один объект, то вес его принимается за 1.

Таблица 5.5 — **Шкала отношений по Саати**

Степень значимости	Определения	Объяснения
1	Одинаковая значимость	Два действия вносят одинаковый вклад в достижение цели
3	Некоторое преобладание значимости одного действия над другим (слабая значимость)	Существуют соображения в пользу предпочтения одного из действий, однако эти соображения недостаточно убедительны
5	Существенная или сильная значимость	Имеются надежные данные или логические суждения для того, чтобы показать предпочтительность одного из действий
7	Очевидная или очень сильная значимость	Убедительное свидетельство в пользу одного действия перед другим
9	Абсолютная значимость	Свидетельства в пользу предпочтения одного действия другому в высшей степени убедительны
2, 4, 6, 8	Промежуточные значения между двумя соседними суждениями	Ситуация, когда необходимо компромиссное решение

Степень значимости	Определения	Объяснения
Обратные величины приведенных выше ненулевых величин	Если действию **i** при сравнении с действием **j** приписывается одно из определенных выше ненулевых чисел, то действию **j** при сравнении с действием **i** приписывается обратное значение	Если согласованность была постулирована при получение **N** числовых значений для образования матрицы

При использовании указанной шкалы ЛПР, сравнивая два объекта в смысле достижения цели, расположенной на вышележащем уровне иерархии, должен поставить в соответствие этому сравнению число в интервале от 1 до 9 или обратное значение чисел. В тех случаях, когда трудно различить столько промежуточных градаций от абсолютного до слабого предпочтения или если этого не требуется в конкретной задаче, может использоваться шкала с меньшим числом градаций. В пределе шкала имеет две оценки: 1 — объекты равнозначны; 2 — предпочтение одного объекта над другим.

Пример во второй части учебник см стр 159