Домашнее задание №1

Макаров Дмитрий

Задача №1. Построить матрицу поворота на угол φ вокруг точки A(a,b).

Решение:

Поворот относительно точки *A* — композиция параллельного переноса исходной системы координат в точку *A* и поворота в новой системе координат. Итоговую матрицу поворота *R* в исходной системе координат можно записать как:

$$R=T^{-1}\cdot R'\cdot T$$

где *T* – матрица трансляции, *R'* — матрица поворота в новой системе координат

$$R'=\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a & b & 1\end{pmatrix}, T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -a & -b & 1\end{pmatrix}$$

Задача №3. Построить матрицу поворота на угол φ вокруг прямой *L* в 3D-пространстве, проходящей через точку *A(a,b,c)* и имеющей направляющий вектор *(l,m,n)* с единичным модулем.

Решение:

Согласно теореме Эйлера, две системы координат с общим началом можно совместить двумя вращениями вокруг координатных осей. Сначала сделаем параллельный перенос в точку *A*, затем двумя поворотами совместим прямую *L* с осью *z* исходной системы координат. Совершим требуемый поворот в новой системе координат. Итоговая матрица поворота *R* будет иметь вид:

$$R=Q^{-1}\cdot R'_{z'}(\varphi)\cdot Q$$

где $R'_{z'}(\varphi)$ — матрица поворота в новой системе координат, *Q* – матрица перехода от исходной к новой системе координат.

$$Q=R_y(\theta)\cdot R_x(-\psi)\cdot T(a,b,c)$$

T – матрица переноса в точку *A*, $R_x(-\psi)$ — поворот на угол ψ по часовой стрелке, $R_y(\theta)$ – поворот на угол *θ* против часовой стрелки.

Пусть

$$d=(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}$$

Тогда

$$\sin(\psi)=m/d, \cos(\psi)=n/d, \sin(\theta)=l, \cos(\theta)=d$$

Откуда получаем

$$R_y(\theta)=\begin{pmatrix}d & 0 & -l & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ l & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, R_x(-\psi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & n/d & -m/d & 0\\ 0 & m/d & n/d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$R'_{z'}(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 & 0\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, T(a,b,c)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ a & b & c & 1\end{pmatrix}$$

Учитывая, что

$$R^{-1}(\phi)=R(\phi), T^{-1}(a,b,c)=T(-a,-b,-c)$$

в итоге получаем:

$$R=T(-a,-b,-c)\cdot R_x(\psi)\cdot R_y(-\theta)\cdot R'_{z'}(\varphi)\cdot R_y(\theta)\cdot R_x(-\psi)\cdot T(a,b,c)$$

Задача №8. Пусть первый поворот совершается вокруг оси *x* на угол *π/2*, а второй — вокруг оси *y* на тот же угол. Найдите результирующий поворот.
Решение:
Повороты можно записать с помощью кватернионов следующим образом:
$$q_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$q_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
где q_1 – поворот вокруг оси x, q_2 — поворот вокруг оси y.
Результирующий поворот:
$$q_2 \circ q_1 = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - k \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$q_2 \circ q_1 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2} + j \cdot \frac{1}{2} - k \cdot \frac{1}{2}$$
$$q_2 \circ q_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - k \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
То есть это поворот на угол ***2π/3*** вокруг оси с направляющим вектором ***(1, 1, -1)***