

*Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования*

**«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**Лабораторная работа №1.2.3**

по курсу общей физики на тему: *«Определение момента инерции  
твёрдых тел с помощью трифилярного подвеса»*

*Работу выполнил:  
Никифоров Дмитрий  
(группа Б02-205)*

Долгопрудный  
31 октября 2022 г.

# 1 Аннотация

**Цели работы:** измерение момента инерции тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

**Оборудование:** трифилярный подвес, весы, линейка, штангенциркуль, лазерный дальномер, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (стержень, полый цилиндр (с толстыми стенками), полуцилиндры и диск).

## 2 Экспериментальная установка

Для наших целей удобно использовать устройство, показанное на Рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы  $P$  и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ , вращающейся платформы  $P'$ .

Чтобы не вызывать дополнительных раскачиваний, лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси. После поворота верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа  $P'$  оказывается повернутой на угол  $\varphi$  относительно верхней платформы  $P$ , возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. В результате платформа совершает крутильные колебания.

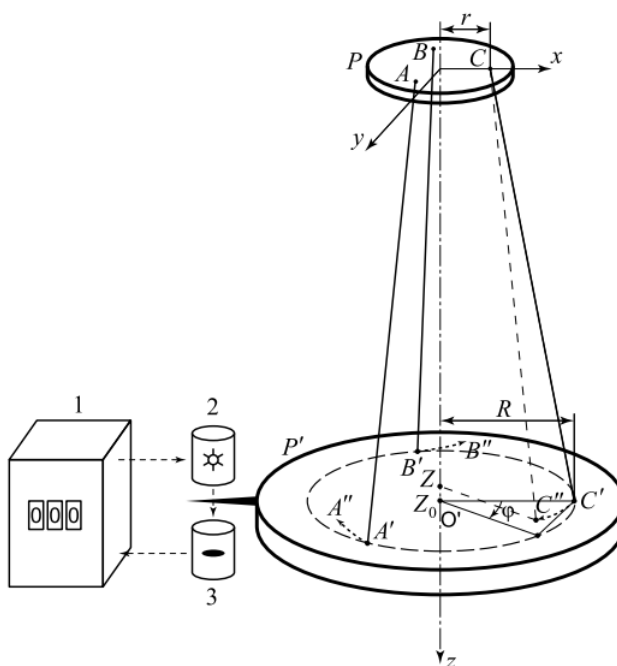


Рис. 1: Трифилярный подвес<sup>1</sup>

## 3 Теоретические сведения

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле:

<sup>1</sup>рисунок взят из учебного пособия "Лабораторный практикум по общей физике. Том 1. Механика."

$$I = \int r^2 dm$$

Здесь  $r$  – расстояние элемента массы тела  $dm$  от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела  $m$ .

Если пренебречь потерями энергии на трение о воздух и крепление нитей, то уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E \quad (1)$$

Здесь  $I$  – момент инерции платформы вместе с исследуемым телом,  $m$  – масса платформы с телом,  $\varphi$  – угол поворота платформы от положения равновесия системы,  $z_0$  – координата по вертикали центра нижней платформы  $O'$  при равновесии ( $\varphi = 0$ ),  $z$  – координата той же точки при некотором угле поворота  $\varphi$ . Первый член в левой части уравнения – кинетическая энергия вращения, второй член – потенциальная энергия в поле тяжести,  $E$  – полная энергия системы (платформы с телом).

Воспользуемся системой координат  $x, y, z$ , связанной с верхней платформой, как показано на Рис. ???. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки  $C$  в этой системе –  $(r, 0, 0)$ . Нижний конец данной нити  $C'$ , находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты  $(R, 0, z_0)$ , а при повороте платформы на угол  $\varphi$  эта точка переходит в  $C''$  с координатами  $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$ . расстояние между точками  $C$  и  $C''$  равно длине нити, поэтому, после некоторых преобразований, получаем:

$$\begin{aligned} (R\cos\phi - r)^2 + R^2\sin^2\phi + z^2 &= L^2 \\ z^2 &= L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\phi \approx z_0^2 - 2Rr(1 - \cos\phi) \approx z_0^2 - Rr\phi^2 \\ z &= \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0} \end{aligned}$$

Подставляя  $z$  в уравнение (1), получаем:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E$$

Дифференцируя по времени и сокращая на  $\dot{\varphi}$ , находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = 0$$

Производная по времени от  $E$  равна нулю, так как потерями на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем. Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left( \sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}} t + \theta \right)$$

Здесь амплитуда  $\varphi_0$  и фаза  $\theta$  колебаний определяются начальными условиями. Период криволинейных колебаний нашей системы равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I z_0}{mgRr}}$$

Из формулы для периода получаем:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} = kmT^2 \quad (2)$$

где  $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$  – величина, постоянная для данной установки.

## 4 Задание

### 4.1 Проверка установки

При выводе формул мы предполагали, что потери энергии, связанные с трением, малы, то есть мало затухание колебаний. Это значит, что теоретические вычисления будут верны, если выполняется условие:

$$\tau \gg T$$

Проверим данное условие. При отклонении на угол  $\alpha \approx 30^\circ$  время, за которое амплитуда уменьшится в 2 раза,  $\tau \approx 240$  с, а  $T \approx 3$  с. Соотношение выполняется – установка пригодна для проведения эксперимента.

### 4.2 Параметры установки и коэффициент $k$

Работа выполнялась на установке №7, ее параметры указаны в Таблице (1)

$Z_0$ , см	$\sigma_{Z_0}$ , см	R, мм	$\sigma_R$ , мм	r, мм	$\sigma_r$ , мм	m, г	$\sigma_m$ , г
206	1	115,4	0,5	30,5	0,3	993,5	0,5

Таблица 1: Параметры установки

где  $\sigma_m$ ,  $\sigma_R$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_L$ ,  $\sigma_{z_0}$  – погрешности соответствующих величин.

По полученным данным вычислим постоянную для конструкции №3:

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \approx 4,24395 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

Погрешность же  $k$  будет равна:

$$\sigma_k = k \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z_0}}{z_0}\right)^2} \approx 0,05 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

### 4.3 Момент инерции платформы

Определить момент инерции платформы можно по формуле (2). Для этого нам необходимо определить период колебаний ненагруженной платформы. Измеряем период, получаем:

T, с	N	T <sub>ср</sub> , с	A <sub>0</sub>	A <sub>k</sub>
134,452	30	4,482	35	25

Тогда, средний период колебания платформы будет:  $T_{\text{ср}} \approx 4,482$ , с  
Давайте здесь же и определим погрешность времени:

$$\sigma_T^{\text{сист}} = 0,001, \text{ с} \quad \sigma_N = 0,5$$

$$\sigma_{T_{\text{ср}}} = T_{\text{ср}} \sqrt{\varepsilon_T^2 + \varepsilon_N^2} \approx 0,075, \text{ с}$$

Значит  $T_{\text{ср}} = (4,482 \pm 0,075)$  с. Теперь мы можем определить момент инерции платформы:

$$I_{\text{пл}} = k m T^2 \approx 8,469, \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$$

Найдем погрешность найденного нами момента инерции платформы:

$$\varepsilon_I = \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_T}{T}\right)^2} \approx 0,035$$

$$\sigma_{I_{\text{пл}}} = \varepsilon_I \cdot I_{\text{пл}} \approx 0,295, \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$$

Получаем, что с помощью данной конструкции мы можем определять момент инерции тела с погрешностью 3,5%, и  $I_{\text{пл}} = (8,5 \pm 0,3), \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$

### 4.4 Определение моментов инерции различных тел. Аддитивность моментов инерции

Измерим периоды колебаний платформы с различными телами таким же образом, как и для ненагруженной платформы. Данные полученные в результате измерений представлены в таблице ниже:

Для подтверждения аддитивности необходимо показать, что выполняются условия:

$$I_{\text{пл}+\text{д}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{д}} \quad (3)$$

$$I_{\text{пл}+\text{пол.ц.}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{пол.ц.}} \quad (4)$$

$$I_{\text{пл}+\text{д}+\text{пол.ц.}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{д}} + I_{\text{пол.ц.}}$$

$$(3) + (4) + (5) \Rightarrow I_{\text{пл}+\text{д}+\text{пол.ц.}} = I_{\text{д}+\text{пл}} + I_{\text{пол.ц.}+\text{пл}} - I_{\text{пл}}$$

Подставим в правую часть последней формулы данные из таблицы (2) и сравним с экспериментально полученной левой частью:

1	стержень	m, г	$\sigma_m$ , г	T, с	N	Tcp, с	$A_0$	$A_k$
$I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0,01115	1039,40	0,05	115,030	32	3,595	25	20
2	полуцилиндры	m, г	$\sigma_m$ , г	T, с	N	Tcp, с	$A_0$	$A_k$
$I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0,01003	1442,20	0,05	93,448	30	3,115	25	20
3	полый цилиндр	m, г	$\sigma_m$ , г	T, с	N	Tcp, с	$A_0$	$A_k$
$I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0,01348	777,20	0,05	127,043	30	4,235	30	25
4	диск	m, г	$\sigma_m$ , г	T, с	N	Tcp, с	$A_0$	$A_k$
$I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0,01068	584,40	0,05	119,797	30	3,993	35	30

Таблица 2: Моменты инерции платформы с различными телами

$I_{\text{д} + \text{пл}} + I_{\text{пол.ц.} + \text{пл}} - I_{\text{пл}}$	$I_{\text{пл}+\text{д}+\text{пол.ц.}}$	m, г	dm, г	T, с	N	Tcp, с	A0	Ak
0,01569	0,01573	1361,60	0,05	158,793	40	3,969825	30	25

Из таблицы видно, что  $I_{\text{д} + \text{пл}} + I_{\text{пол.ц.} + \text{пл}} - I_{\text{пл}}$  и  $I_{\text{пл}+\text{д}+\text{пол.ц.}}$  хорошо сходятся, то есть условие аддитивности выполняется.

Из Таблицы (2) и формул (3), (4) мы можем найти момент инерции полого цилиндра, диска, стержня и полуцилиндров:

$$I_{\text{пол.ц.}} = I_{\text{пл}+\text{пол.ц.}} - I_{\text{пл}} = (5,0 \pm 0,8), \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_{I_{\text{пол.ц.}}} = 16\%$$

$$I_{\text{д}} = I_{\text{пл}+\text{д}} - I_{\text{пл}} = (2,2 \pm 0,7), \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_{I_{\text{д}}} = 32\%$$

$$I_{\text{ст}} = I_{\text{пл}+\text{ст}} - I_{\text{пл}} = (2,7 \pm 0,7), \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_{I_{\text{ст}}} = 26\%$$

$$I_{\text{полуц}} = I_{\text{пл}+\text{полуц}} - I_{\text{пл}} = (1,6 \pm 0,7), \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_{I_{\text{полуц}}} = 44\%.$$

Теперь сравним полученные нами моменты инерции для тел, и их теоретические значения. Для цилиндра (двух полуцилиндров) момент инерции вычисляется так же как и для диска:  $I_{\text{полуц}} = \frac{m_{\text{ц}} R_{\text{ц}}^2}{2} = I_{\text{д}}$ . Для стержня:  $I_{\text{ст}} = \frac{ml^2}{12}$ .

Для полого цилиндра же:  $I_{\text{пол.ц.}} = \frac{m_{\text{пол.ц.}} (R_{\text{внеш}}^2 + R_{\text{внутр}}^2)}{2}$ .

В следующей таблице представленный геометрические характеристики всех тел и их моменты инерций рассчитанные по формулам сверху:

1	стержень	l, см	$\sigma_l$ , см	a, см	$\sigma_a$ , см		
$I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0,00250	17,0	0,1	2,710	0,005		
2	полуцилиндры	R, см	$\sigma_R$ , см	a, см	$\sigma_a$ , см		
$I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0,00147	5	0,005	2,7	0,005		
3	полый цилиндр	D, см	$\sigma_D$ , см	a, см	$\sigma_d$ , см	H, см	$\sigma_H$ , см
$I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0,00478	15,9	0,01	0,435	0,005	5,650	0,005
4	диск	D, см	$\sigma_D$ , см	a, см	$\sigma_a$ , см	h, см	$\sigma_h$
$I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0,00212	17,03	0,01	0,350	0,005	2,6	0,005

## 4.5 Зависимость момента инерции системы тел от их расположения. График зависимости $I(h^2)$

Определим зависимость момента инерции системы двух тел от их взаимного расположения. Для этого располагая грузы, как показано на рис.2, получим зависимость от расстояния. Затем Используя формулу 2, определим зависимость  $I(h^2)$ .

Полученные результаты измерений занесем в таблицу снизу соответственно. Основываясь на результатах таблицы (3), построим график зависимости  $I(h^2)$  (Рис. 2).

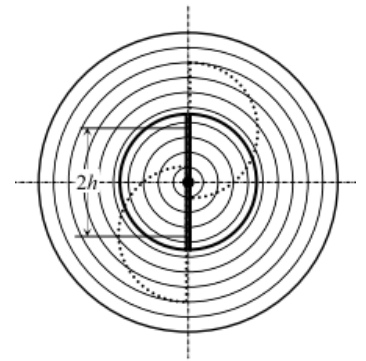


Рис. 2. Расположение тел на платформе

парал	сдвиг	T, с	N	Tср, с	h, см	dh, см	$h^2$ , м <sup>2</sup>	I, кг*м <sup>2</sup>
1	2h = 4 деления	95,043	30	3,168	2	0,008	0,0004	0,01038
2	2h = 8 делений	112,405	35	3,212	4	0,016	0,0016	0,01066
3	2h = 12 делений	99,983	30	3,333	6	0,024	0,0036	0,01148
4	2h = 16 делений	123,285	35	3,522	8	0,032	0,0064	0,01283
5	2h = 20 делений	111,021	30	3,701	10	0,04	0,01	0,01416
6	2h = 24 деления	140,084	36	3,891	12	0,048	0,0144	0,01565
7	2h = 28 делений	123,652	30	4,122	14	0,056	0,0196	0,01756
перп	0 делений	93,448	30	3,115	0	0	9,703	0,01003
1	2h = 4 деления	97,379	30	3,246	2	0,008	0,0004	0,01089
2	2h = 8 делений	101,884	30	3,396	4	0,016	0,0016	0,01192
3	2h = 12 делений	107,324	30	3,577	6	0,024	0,0036	0,01323
4	2h = 16 делений	112,717	30	3,757	8	0,032	0,0064	0,01459
5	2h = 20 делений	121,002	30	4,033	10	0,04	0,01	0,01682
6	2h = 24 деления	112,58	26	4,330	12	0,048	0,0144	0,01938

Таблица 3: Зависимость момента инерции системы от расстояния

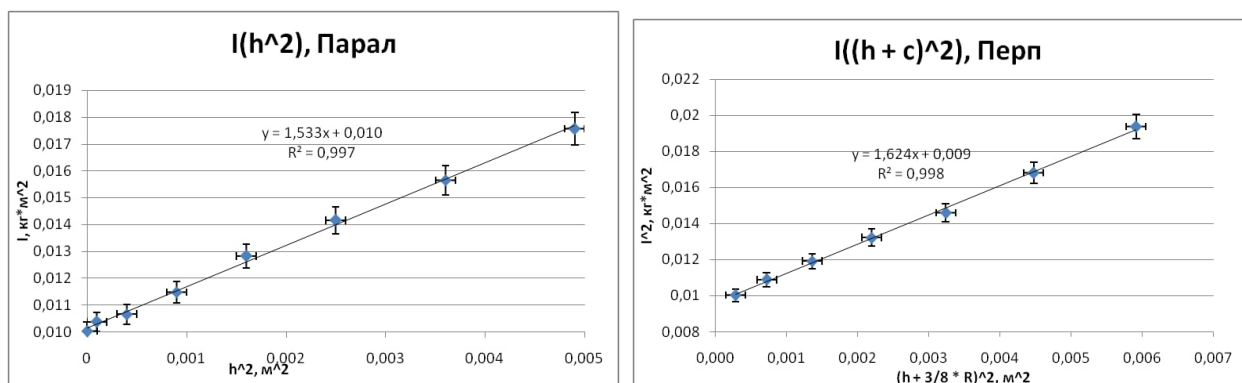


Рис. 2: Графики зависимости  $I(h^2)$

По левому графику понятно, что  $I = kh^2 + b$ . Тогда  $b$  – момент инерции платформы + полуцилиндров ( $I_{\text{пл}} + I_{\text{цил}}$ ), т.е.  $b = I_{\text{пл}} + \frac{m_{\text{цил}} R^2}{2}$ .

По теореме Гюйгенса-Штейнера должно выполняться:

$$(I - I_{\text{пл}})I'_{\text{цил}} = m_{\text{цил}}h^2 + I_{\text{цил}} \Leftrightarrow I = m_{\text{цил}}h^2 + I_{\text{цил}} + I_{\text{пл}}$$

,т.е. для подтверждения формулы Гюйгенса-Штейнера необходимо показать, что:

$$k = m_{\text{цил}} \text{ и } b = I_{\text{цил}} + I_{\text{пл}}$$

Для вычисления коэффициентов  $k$  и  $b$  (левого графика) воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 1,534, \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2},$$

$$b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle \approx 0,01016, \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

где  $x = h^2$ ,  $y = I$ .

Случайные погрешности вычисления  $k$  и  $b$  можно найти по следующим формулам:

$$\sigma_k^{\text{случ}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} \approx 0,026, \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2},$$

$$\sigma_b^{\text{случ}} = \sigma_k^{\text{случ}} \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,00004, \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Систематическая погрешность вычисления коэффициентов определяется следующим соотношением:

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b \sqrt{(\varepsilon_I)^2 + (\varepsilon_{h^2})^2} \approx b \cdot \varepsilon_I \approx 0,00036, \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Тогда полную погрешность вычисления коэффициентов подсчитываем по следующей формуле:

$$\sigma_b = \sqrt{(\sigma_b^{\text{случ}})^2 + (\sigma_b^{\text{сист}})^2} \approx 0,00036, \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Таким образом  $k = (1,534 \pm 0,026)\text{кг}$  неплохо ( $3,5\sigma_k$ ) совпадает с  $m_{\text{цил}} = 1442 \text{ г}$  и  $b = (10,16 \pm 0,36) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  хорошо ( $\sigma_b$ ) совпадает с  $I_{\text{пл}} + I_{\text{цил}} = 10,03 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Значит теорема Гюйгенса-Штейнера выполняется.

## 5 Вывод

С помощью трифилярного подвеса можно определять момент инерции тел, момент инерции которых больше момента инерции самой платформы, с достаточно большой точностью. В проведенном эксперименте моменты инерции тел были определены с  $\varepsilon_I$  от 15% до 40%. Такая погрешность обусловлена несовершенством датчика фиксирующего колебания и человеческим фактором.



Мы экспериментально доказали аддитивность моментов инерции с помощью различных тел.

Полученная зависимость  $I(h^2)$  аппроксимируется линейной зависимостью, что подтверждает формулу Гюйгенса-Штейнера ( $I = I_c + Mh^2$ , где  $I$  – момент инерции тела,  $I_c$  – момент инерции тела относительно центра,  $M$  – масса тела, а  $h$  – расстояние между двумя осями, в нашем случае – между осью вращения и половинками диска).