Неустойчивость Рэлея-Тейлора

Братчиков Д.С., Дмитрачков Д.Д

1 Математическая постановка задачи

Рассмотрим ограниченную связную область Ω содержащую две несмешиваемые, несжимаемые, ньютоновские жидкости, разделенные свободной поверхностью $\Gamma(t)$ непрерывной по Липшицу (рис.1.1). Тогда каждая каждая жидкость находится в ограниченной связной области $\Omega_i(t)$ $(i = 1, 2)$:

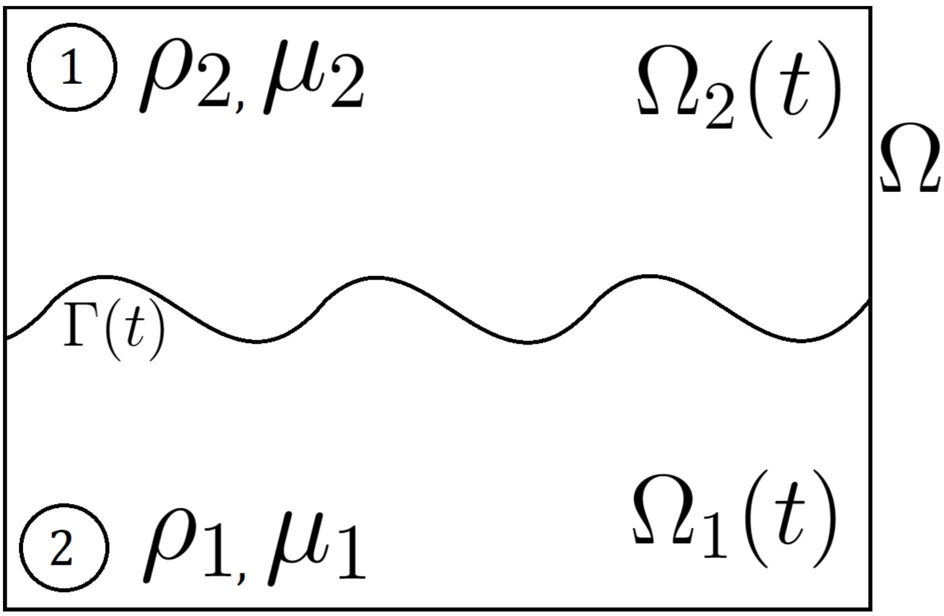

Рис. 1.1: Пример области

$$\begin{gathered}\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1(t) \cup \overline{\Omega}_2(t), \quad \Omega_1(t) \cap \Omega_2(t) = \emptyset, \\ \Gamma(t) = \partial\Omega_1(t) \cap \partial\Omega_2(t).\end{gathered} \tag{1.1}$$

Мы предполагаем, что обе жидкости однородны, поэтому их физические свойства постоянны в каждом $\Omega_i(t)$ с границей $\partial\Omega_i(t)$ непрерывной по Липшицу.

Пусть первая жидкость имеет плотность и вязкость ρ_1, μ_1 соответственно, а вторая ρ_2, μ_2 (при этом $\rho_2 > \rho_1$). Введём для регуляризации гладкую функцию Хевисайда для достаточно малого ε:

$$H_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} 0, & \varphi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varphi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi\varphi}{\varepsilon}\right)\right), & -\varepsilon \leq \varphi \leq \varepsilon \\ 1, & \varphi > \varepsilon \end{cases} \tag{1.2}$$

Зададим поверхность раздела $\Gamma(t)$ методом уровня множества (level set function):

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{x} \in \overline{\Omega} : \ \varphi(\mathbf{x}, t) = 0\} \tag{1.3}$$

Тогда гладкие плотность и вязкость можно задать следующими соотношениями в Ω:

$$\begin{gathered} \rho(\varphi) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)H_\varepsilon(\varphi), \\ \mu(\varphi) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)H_\varepsilon(\varphi). \end{gathered} \tag{1.4}$$

Движение границы раздела $\Gamma(t)$ описывается уравнением переноса:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi = 0. \tag{1.5}$$

Движение двух несжимаемых жидкостей может быть описано уравнением Навье-Стокса:

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\right) - \nabla \cdot (\mu\nabla\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} + \mathbf{f}_\sigma, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad \text{в} \quad \Omega \times [0, T] \tag{1.6}$$

где вектор скорости $\mathbf{u}$ и давление p – искомые величины, $\mathbf{f}$ – векторное поле массовых сил (в нашем случае $\mathbf{f} = (0, \rho g)^T$, $\mathbf{f}_\sigma$ – векторное поле поверхностных сил, возникающее из-за поверхностного натяжения $\Gamma(t)$.

Для замыкания системы введём краевые и начальные условия. Для скорости используем нулевое условие Дирихле:

$$\mathbf{u}_{|\partial\Omega} = 0 \tag{1.7}$$

Необходима непрерывность скорости при переходе через границу раздела $\Gamma(t)$:

$$\mathbf{u_1}_{|\Gamma(t)} = \mathbf{u_2}_{|\Gamma(t)}. \tag{1.8}$$

Эффекты поверхностного натяжения учитываются за счёт баланса сил на $\Gamma(t)$:

$$(\mu_1 \nabla \boldsymbol{u}_1 - p_1 I) \cdot \mathbf{n} + (\mu_2 \nabla \boldsymbol{u}_2 - p_2 I) \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma(t)} = \sigma\kappa\mathbf{n}_{|\Gamma(t)}, \tag{1.9}$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль поверхности $\Gamma(t)$ направленная в Ω_2, σ – коэффициент поверхностного натяжения, $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$ – кривизна поверхности $\Gamma(t)$.

Начальные условия:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) \tag{1.10}$$