

Неустойчивость Рэля-Тейлора

Братчиков Д.С., Дмитрачков Д.Д.

1 Математическая постановка задачи

Рассмотрим ограниченную связную область Ω содержащую две несмешивающиеся, несжимаемые, ньютоновские жидкости, разделенные свободной поверхностью $\Gamma(t)$, непрерывной по Липшицу (рис.1.1). Тогда каждая жидкость находится в ограниченной связной области $\Omega_i(t)$, $i = 1, 2$:

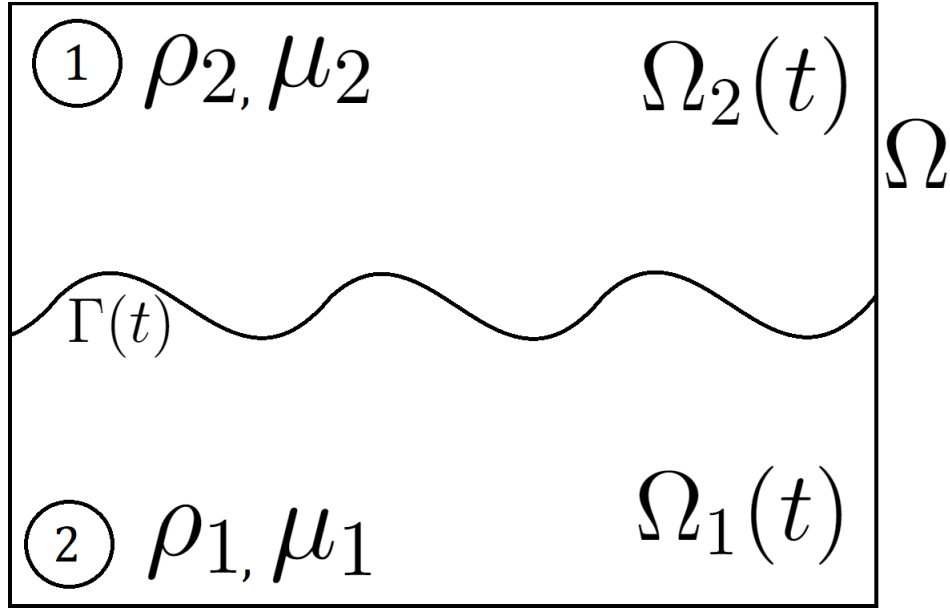


Рис. 1.1: Пример области

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1(t) \cup \bar{\Omega}_2(t), \quad \Omega_1(t) \cap \Omega_2(t) = \emptyset, \quad \Gamma(t) = \partial\Omega_1(t) \cap \partial\Omega_2(t). \quad (1.1)$$

Мы предполагаем, что обе жидкости однородны, поэтому их физические свойства постоянны в каждом $\Omega_i(t)$ с границей $\partial\Omega_i(t)$, непрерывной по Липшицу.

Пусть первая жидкость имеет плотность и вязкость ρ_1, μ_1 соответственно, а вторая – ρ_2, μ_2 (при этом $\rho_2 > \rho_1$). Введём для регуляризации гладкую функцию Хевисайда для достаточно малого ε :

$$H_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi < -\varepsilon, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\phi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin \left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon} \right) \right), & -\varepsilon \leq \phi \leq \varepsilon, \\ 1, & \varepsilon < \phi. \end{cases} \quad (1.2)$$

Зададим поверхность раздела $\Gamma(t)$ методом уровня множества (level set function):

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{x} \in \bar{\Omega} : \varphi(\mathbf{x}, t) = 0\} \quad (1.3)$$

Тогда гладкие плотность и вязкость можно задать следующими соотношениями в Ω :

$$\begin{aligned} \rho(\varphi) &= \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)H_\varepsilon(\varphi), \\ \mu(\varphi) &= \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)H_\varepsilon(\varphi). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Движение границы раздела $\Gamma(t)$ описывается уравнением переноса:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = 0. \quad (1.5)$$

Чтобы задать начальный профиль границы раздела двух жидкостей, нужно поставить начальное условие на функцию φ :

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(\mathbf{x}). \quad (1.6)$$

Также нужно ставить краевое условие на φ на той части границы, где жидкости втекает в область, то есть на границе $\Gamma_{in} = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} < 0\}$. Это следует из уравнения переноса. Однако, если на границе ставится однородное условие Дирихле для скорости \mathbf{u} , то краевого условия $\varphi|_{\Gamma_{in}} = \varphi_{in}$ не требуется.

Движение двух несжимаемых жидкостей подчиняется уравнению Навье-

Стокса, дополненному уравнением неразрывности:

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f}, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T]. \end{cases} \quad (1.7)$$

Здесь \mathbf{u} – вектор скорости, p – давление, \mathbf{f} – векторное поле массовых сил. В нашем случае $\mathbf{f} = -\rho \mathbf{g}$ – сила тяжести. Для замыкания системы введём краевые и начальные условия. От функции \mathbf{u} потребуем выполнения начального и краевого условий:

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_D, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0. \quad (1.8)$$

Также должны быть выполнены условия согласования, чтобы получить гладкое решение:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad (\mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n})|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (1.9)$$

Потребуем также непрерывность скорости при переходе через границу раздела жидкостей $\Gamma(t)$:

$$\mathbf{u}_1|_{\Gamma(t)} = \mathbf{u}_2|_{\Gamma(t)}, \quad (1.10)$$

где \mathbf{u}_i – скорость жидкости в области Ω_i .

На границе раздела жидкостей $\Gamma(t)$ из-за поверхностного натяжения также нужно поставить граничное условие. Его можно получить из соображений баланса сил:

$$(\mu_1 \nabla \mathbf{u}_1 - p_1 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} + (\mu_2 \nabla \mathbf{u}_2 - p_2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma(t)} = \sigma \kappa \mathbf{n}|_{\Gamma(t)}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \quad (1.11)$$

где \mathbf{n} – нормаль к границе $\Gamma(t)$, σ – коэффициент поверхностного натяжения, $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$ – кривизна границы $\Gamma(t)$. Условие с кривизной часто записывают в виде объёмной силы:

$$\mathbf{f}_\sigma = \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\sigma, \quad (1.12)$$

где δ_σ – дельта-функция Дирака, указывающая на то, что представленная

сила действует на границе. Силу \mathbf{f}_σ можно записать в правой части уравнения Навье-Стокса, прибавляя её к силе \mathbf{f} , предварительно выразив \mathbf{f}_σ с помощью тензора:

$$\mathbf{f}_\sigma = -\nabla \cdot T, \quad T = \sigma (I - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \delta_\sigma. \quad (1.13)$$

Мы можем переписать этот тензор с помощью функции φ :

$$T(\varphi) = \sigma \frac{dH_\varepsilon(\varphi)}{d\varphi} (I - \nabla \varphi \otimes \nabla \varphi), \quad (1.14)$$

где $\nabla \varphi \otimes \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^d$, $d = 2, 3$. Теперь мы можем вывести слабую постановку, чтобы затем перейти к численным экспериментам.

2 Вывод слабой постановки

Итак, в области $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T]$ мы имеем систему уравнений, состоящую из уравнения Навье-Стокса, уравнения неразрывности и уравнения переноса:

$$\begin{cases} \rho(\varphi) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot (\mu(\varphi) \nabla \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} - \nabla \cdot T(\varphi), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

При этом должны выполняться начально-краевые условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}|_{\partial\Omega} &= \mathbf{u}_D, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \\ \varphi|_{t=0} &= \varphi_0, \quad \varphi|_{\Gamma_{in}} = \varphi_{in}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Выведем слабую постановку. Первое уравнение умножим на тестовую функцию \mathbf{v} и проинтегрируем по всей области. Пользуясь формулой интегрирования по частям и Гаусса-Остроградского, распишем каждое слагаемое с учётом того, что на границе области задано условие Дирихле на \mathbf{u} , поэтому

$\mathbf{v} = 0$ на границе $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} d\omega - \int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\Omega = \\ &\stackrel{\mathbf{v}|_{\partial\Omega}=0}{=} - \int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\Omega, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (pI) \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (p\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} pI : \nabla \mathbf{v} d\Omega = \\ &= \int_{\partial\Omega} p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega \stackrel{\mathbf{v}|_{\partial\Omega}=0}{=} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot T \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\partial\Omega} T\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\omega - \int_{\Omega} T : \nabla \mathbf{v} d\Omega \stackrel{\mathbf{v}|_{\partial\Omega}=0}{=} - \int_{\Omega} T : \nabla \mathbf{v} d\Omega. \quad (2.5)$$

Второе уравнение в системе (2.1) умножим на тестовую функцию q и проинтегрируем, добавляя регуляризующее слагаемое, в котором α имеет смысл слабой сжимаемости:

$$\int_{\Omega} \alpha p q d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0. \quad (2.6)$$

Итого, получаем слабую постановку задачи:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(\varphi) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} d\Omega &+ \int_{\Omega} \mu(\varphi) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} T(\varphi) : \nabla \mathbf{v} d\Omega, \\ \int_{\Omega} \alpha p q d\Omega &+ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Также должны быть выполнены начально-краевые условия (2.2).

3 Дискретизация задачи по времени

Уравнение переноса будем решать методом характеристик с помощью функции `convect`:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{x}, t^n) = \tilde{\varphi}(X(t^{n-1}), t^{n-1}), \\ \frac{dX}{dt} = \mathbf{u}(t^{n-1}) \circ X, \\ X(t^n) = x. \end{cases} \quad (3.1)$$

Аналогично с помощью метода характеристик вычисляем полную производную скорости по времени под интегралом в слабой постановке 2.7. Таким образом получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(\varphi^n) \frac{\mathbf{u}^n - \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}}{dt} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \mu(\varphi^n) \nabla \mathbf{u}^n : \nabla \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} p^n \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\varphi^n) \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} T(\varphi^n) : \nabla \mathbf{v} d\Omega, \\ \int_{\Omega} \alpha p^n q d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u}^n d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

4 Результаты расчётов в 2D

Рассматривается область $x \in [0, L]$, $y \in [0, H]$, $L = 1$, $H = 3$. Начальные и краевые условия зададим с помощью функций

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x = 0, \mathbf{u}_y = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{top} \cup \Gamma_{bottom}; \quad \mathbf{u}_x = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{left} \cup \Gamma_{right} \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = 0, \\ \varphi_0(\mathbf{x}) = y - \left(1.5 + 0.1 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \pi x \right) \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Краевое условие $\varphi|_{\Gamma_{in}} = \varphi_{in}$ в этом случае не ставится.