Неустойчивость Рэлея-Тейлора

Братчиков Д.С., Дмитрачков Д.Д.

1 Математическая постановка задачи

Рассмотрим ограниченную связную область Ω содержащую две несмешивающиеся, несжимаемые, ньютоновские жидкости, разделенные свободной поверхностью $\Gamma(t)$, непрерывной по Липшицу (рис.1.1). Тогда каждая жидкость находится в ограниченной связной области $\Omega_i(t)$, $i = 1, 2$:

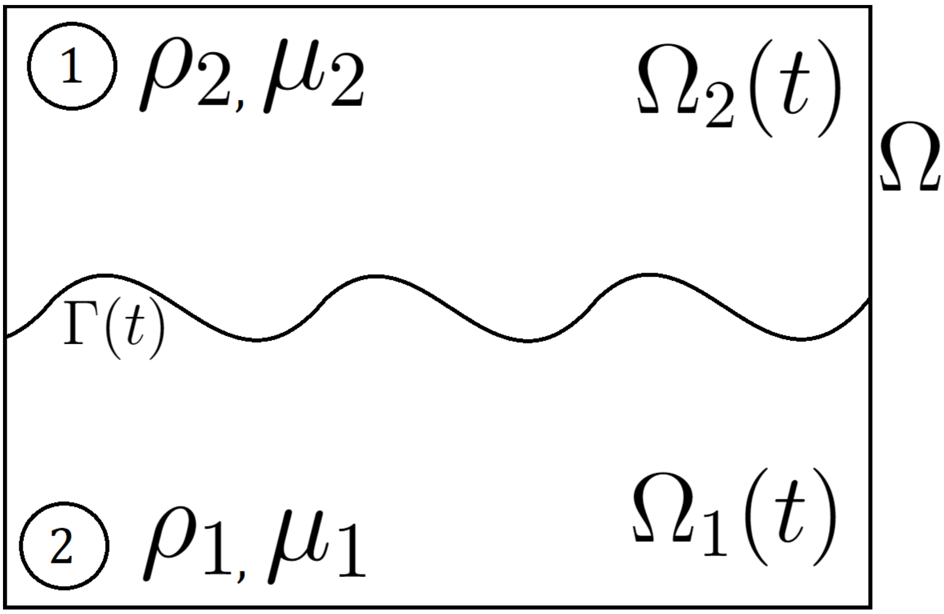

Рис. 1.1: Пример области

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1(t) \cup \overline{\Omega}_2(t), \quad \Omega_1(t) \cap \Omega_2(t) = \varnothing, \quad \Gamma(t) = \partial\Omega_1(t) \cap \partial\Omega_2(t). \qquad (1.1)$$

Мы предполагаем, что обе жидкости однородны, поэтому их физические свойства постоянны в каждом $\Omega_i(t)$ с границей $\partial\Omega_i(t)$, непрерывной по Липшицу.

Пусть первая жидкость имеет плотность и вязкость $\rho_1,\ \mu_1$ соответственно, а вторая – $\rho_2,\ \mu_2$ (при этом $\rho_2 > \rho_1$). Введём для регуляризации гладкую функцию Хевисайда для достаточно малого ε:

$$H_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} 0, & \varphi < -\varepsilon, \\ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varphi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi\varphi}{\varepsilon}\right)\right), & -\varepsilon \le \varphi \le \varepsilon, \\ 1, & \varepsilon < \varphi. \end{cases} \tag{1.2}$$

Зададим поверхность раздела $\Gamma(t)$ методом уровня множества (level set function):

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}:\ \varphi(\mathbf{x}, t) = 0\} \tag{1.3}$$

Тогда гладкие плотность и вязкость можно задать следующими соотношениями в Ω:

$$\begin{aligned} \rho(\varphi) &= \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)H_\varepsilon(\varphi), \\ \mu(\varphi) &= \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)H_\varepsilon(\varphi). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Движение границы раздела $\Gamma(t)$ описывается уравнением переноса:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi = 0. \tag{1.5}$$

Чтобы задать начальный профиль границы раздела двух жидкостей, нужно поставить начальное условие на функцию φ:

$$\varphi_{|t=0} = \varphi_0(\mathbf{x}). \tag{1.6}$$

Также нужно ставить краевое условие на φ на той части границы, где жидкости втекает в область, то есть на $\Gamma_{in} = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega|\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\cdot\mathbf{n} < 0\}$. Это следует из уравнения переноса. Однако, если на границе ставится однородное условие Дирихле для скорости $\mathbf{u}$, то краевого условия $\varphi_{|\Gamma_{in}} = \varphi_{in}$ не требуется.

Движение двух несжимаемых жидкостей подчиняется уравнению Навье-

Стокса, дополненному уравнением неразрывности:

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) - \nabla\cdot(\mu\nabla\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f}, & (\mathbf{x},\, t) \in \Omega\times[0,\, T], \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, & (\mathbf{x},\, t) \in \Omega\times[0,\, T]. \end{cases} \tag{1.7}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор скорости, p – давление, $\mathbf{f}$ – векторное поле массовых сил. В нашем случае $\mathbf{f} = -\rho\mathbf{g}$ - сила тяжести. Для замыкания системы введём краевые и начальные условия. От функции $\mathbf{u}$ потребуем выполнения начального и краевого условий:

$$\mathbf{u}_{|\partial\Omega} = \mathbf{u}_D, \quad \mathbf{u}_{|t=0} = \mathbf{u}_0. \tag{1.8}$$

Также должны быть выполнены условия согласования, чтобы получить гладкое решение:

$$\nabla\cdot\mathbf{u}_0 = 0,\ \mathbf{x}\in\Omega; \quad (\mathbf{u}_D\cdot\mathbf{n})_{|t=0} = \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n},\ \mathbf{x}\in\partial\Omega \tag{1.9}$$

Потребуем также непрерывность скорости при переходе через границу раздела жидкостей $\Gamma(t)$:

$$\mathbf{u}_{1\,|\Gamma(t)} = \mathbf{u}_{2\,|\Gamma(t)}, \tag{1.10}$$

где $\mathbf{u}_i$ – скорость жидкости в области Ω_i.

На границе раздела жидкостей $\Gamma(t)$ из-за поверхностного натяжения также нужно поставить граничное условие. Его можно получить из соображений баланса сил:

$$(\mu_1\nabla\mathbf{u}_1 - p_1 I)\cdot\mathbf{n} + (\mu_2\nabla\mathbf{u}_2 - p_2 I)\cdot\mathbf{n}_{|\Gamma(t)} = \sigma\kappa\mathbf{n}_{|\Gamma(t)}, \quad \mathbf{x}\in\Gamma(t), \tag{1.11}$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к границе $\Gamma(t)$, σ – коэффициент поверхностного натяжения, $\kappa = \nabla\cdot\mathbf{n}$ – кривизна границы $\Gamma(t)$. Условие с кривизной часто записывают в виде объёмной силы:

$$\mathbf{f}_\sigma = \sigma\kappa\mathbf{n}\delta_\sigma, \tag{1.12}$$

где δ_σ – дельта-функция Дирака, указывающая на то, что представленная сила действует на границе. Силу $\mathbf{f}_\sigma$ можно записать в правой части уравнения Навье-Стокса, прибавляя её к силе $\mathbf{f}$, предварительно выразив $\mathbf{f}_\sigma$ с помощью тензора:

$$\mathbf{f}_\sigma = -\nabla \cdot T, \quad T = \sigma \left(I - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\right) \delta_\sigma. \tag{1.13}$$

Мы можем переписать этот тензор с помощью функции φ:

$$T(\varphi) = \sigma \frac{dH_\varepsilon(\varphi)}{d\varphi} \left(I - \nabla\varphi \otimes \nabla\varphi\right), \tag{1.14}$$

где $\nabla\varphi\otimes\nabla\varphi = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_{i,\,j=1}^{d}$, $d = 2,\, 3$. Теперь мы можем вывести слабую постановку, чтобы затем перейти к численным экспериментам.

2 Вывод слабой постановки

Итак, в области $(\mathbf{x},\, t) \in \Omega \times [0,\, T]$ мы имеем систему уравнений, состоящую из уравнения Навье-Стокса, уравнения неразрывности и уравнения переноса:

$$\begin{cases} \rho(\varphi)\left(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) - \nabla\cdot(\mu(\varphi)\nabla\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} - \nabla\cdot T(\varphi), \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

При этом должны выполняться начально-краевые условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{|\partial\Omega} = \mathbf{u}_D, \quad \mathbf{u}_{|t=0} = \mathbf{u}_0, \\ \varphi_{|t=0} = \varphi_0, \quad \varphi_{|\Gamma_{in}} = \varphi_{in}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Выведем слабую постановку. Первое уравнение умножим на тестовую функцию $\mathbf{v}$ и проинтегрируем по всей области. Пользуясь формулой интегрирования по частям и Гаусса-Остроградского, распишем каждое слагаемое с учётом того, что на границе области задано условие Дирихле на $\mathbf{u}$, поэтому

$\mathbf{v} = 0$ на границе $\partial\Omega$:

$$\int\limits_{\Omega} \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}\, d\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}\, d\omega - \int\limits_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}\, d\Omega = \overset{\mathbf{v}|_{\partial\Omega}=0}{=} - \int\limits_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}\, d\Omega, \tag{2.3}$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \nabla \cdot (pI) \cdot \mathbf{v}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \nabla \cdot (p\mathbf{v})\; d\Omega - \int\limits_{\Omega} pI : \nabla \mathbf{v}\, d\Omega = \\ = \int\limits_{\partial\Omega} p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\omega - \int\limits_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v}\, d\Omega \overset{\mathbf{v}|_{\partial\Omega}=0}{=} - \int\limits_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v}\, d\Omega, \tag{2.4}$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla \cdot T \cdot \mathbf{v}\, d\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} T\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}\, d\omega - \int\limits_{\Omega} T : \nabla \mathbf{v}\, d\Omega \overset{\mathbf{v}|_{\partial\Omega}=0}{=} - \int\limits_{\Omega} T : \nabla \mathbf{v}\, d\Omega. \tag{2.5}$$

Второе уравнение в системе (2.1) умножим на тестовую функцию q и проинтегрируем, добавляя регуляризующее слагаемое, в котором α имеет смысл слабой сжимаемости:

$$\int\limits_{\Omega} \alpha p q\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u}\, d\Omega = 0. \tag{2.6}$$

Итого, получаем слабую постановку задачи:

$$\int\limits_{\Omega} \rho(\varphi) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v}\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} \mu(\varphi) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}\, d\Omega - \int\limits_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v}\, d\Omega = \\ = \int\limits_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} T(\varphi) : \nabla \mathbf{v}\, d\Omega, \tag{2.7}$$

$$\int\limits_{\Omega} \alpha p q\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u}\, d\Omega = 0.$$

Также должны быть выполнены начально-краевые условия (2.2).

3 Дискретизация задачи по времени

Уравнение переноса будем решать методом характеристик с помощью функции convect:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{x}, t^n) = \tilde{\varphi}(X(t^{n-1}), t^{n-1}), \\ \dfrac{dX}{dt} = \mathbf{u}(t^{n-1}) \circ X, \\ X(t^n) = x. \end{cases} \tag{3.1}$$

Аналогично с помощью метода характеристик вычисляем полную производную скорости по времени под интегралом в слабой постановке 2.7. Таким образом получаем:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} \rho(\varphi^n) \frac{\mathbf{u}^n - \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}}{dt} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int\limits_{\Omega} \mu(\varphi^n) \nabla \mathbf{u}^n : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} p^n \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \\ = \int\limits_{\Omega} \mathbf{f}(\varphi^n) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int\limits_{\Omega} T(\varphi^n) : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega, \\ \int\limits_{\Omega} \alpha p^n q \, d\Omega + \int\limits_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u}^n \, d\Omega = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

4 Результаты расчётов в 2D

Рассматривается область $x \in [0,\, L],\ y \in [0,\, H],\ L = 1,\ H = 3$. Начальные и краевые условия зададим с помощью функций

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_x = 0, \mathbf{u}_y = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{top} \cup \Gamma_{bottom}; \quad \mathbf{u}_x = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{left} \cup \Gamma_{right} \\ &\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = 0, \\ &\varphi_0(\mathbf{x}) = y - \left(1.5 + 0.1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi x\right)\right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Краевое условие $\varphi_{|\Gamma_{in}} = \varphi_{in}$ в этом случае не ставится.