



Отчёт о выполнении лабораторной работы № 1.1.1
(Определение систематических и случайных
погрешностей при измерении удельного
сопротивления нихромомвой проволоки)

Дмитренко Александр Михайлович (Б02-111)

7-21 сентября 2021 г.

Цель работы: измерить удельное сопротивление проволоки и вычислить систематические и случайные погрешности при использовании таких измерительных приборов, как линейка, штангенциркуль, микрометр, амперметр, вольтметр и мост постоянного тока.

В работе используются: линейка, штангенциркуль, микрометр, отрезок проволоки из нихрома, амперметр, вольтметр, источник ЭДС, мост постоянного тока, реостат, ключ.

1 Теоретические сведения

Удельное сопротивление изготовленной из однородного материала проволоки одинакового по всей длине кругового сечения можно определить по формуле

$$\rho = R \frac{\pi d^2}{4l} \quad (1)$$

где R – сопротивление измеряемого отрезка проволоки, l – его длина, d – диаметр проволоки.

При этом стоит учесть, что проволока может иметь неодинаковый диаметр сечения на разных участках, поэтому в качестве d в формуле (1) нужно взять усреднённое значение диаметра и учесть погрешности измерений.

Согласно закону Ома напряжение и ток в образце связаны соотношением

$$I = \frac{U}{R}$$

Для измерения были предложены 2 схемы:



Рис. 1: Предложенные схемы.

Так как приборы неидеальны, то нужно учитывать поправку на их внутреннее сопротивление.

Рассмотрим схему а). Пусть сопротивление участка с параллельно соединёнными проволокой и вольтметром – R_1 , проволоки – R , вольтметра – R_V . Тогда так как соединение параллельное, то

$$R_1 = \frac{V_a}{I_a} = \frac{RR_V}{R + R_V}$$

Получается

$$R = \frac{R_1 R_V}{R_V - R_1} \approx R_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_V}\right)$$

Рассмотрим схему б). Пусть сопротивление участка с последовательно соединёнными проволокой и амперметром – R_2 , проволоки – R , амперметра – R_A . Тогда так как соединение последовательное, то

$$R_2 = \frac{V_6}{I_6} = R + R_A$$

Получается

$$R = R_2 \left(1 - \frac{R_A}{R_2} \right)$$

Зная, что $R \approx 5 \text{ Ом}$, $R_v = 10^7 \text{ Ом}$, $R_A = 0,4 \text{ Ом}$, оценим величину поправок при измерении R .

для схемы на рис 1.а): $\frac{R}{R_v} = \frac{5}{10^7} = 5 \cdot 10^{-7}, (5 \cdot 10^{-5}\%)$

для схемы на рис 1.б): $\frac{R_A}{R} = \frac{0,4}{5} = 0,08, (8\%)$

Получается, меньшую поправку имеет схема 1 а), поэтому собираем именно её.

График зависимости $U_V(I_A)$ должен представлять прямую с угловым коэффициентом, равным R_1 . Тогда по формуле 1 можно найти удельное сопротивление проволоки ρ .

2 Ход работы

2.1 Измерение диаметра проволоки

Измеряем диаметр проволоки на 10 различных участках, результаты записываем в таблицу. Вычисляем среднее значение диаметра в обоих случаях.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d1, \text{ мм}$	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
$d2, \text{ мм}$	0,36	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,36	0,37	0,37	0,37
$\overline{d1}, \text{ мм}$	0,4									
$\overline{d2}, \text{ мм}$	0,368									

Таблица 1: Результаты измерения диаметра проволоки

Определим погрешность измерений. При измерении диаметра штангенциркулем случайной погрешности нет, поэтому точность определяется только приборной (систематической) погрешностью.

$$\sigma_{\text{сл1}} = 0 \text{ мм}$$

$$\sigma_{\text{сист1}} = 0,1 \text{ мм}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_{\text{сл1}}^2 + \sigma_{\text{сист1}}^2} = \sqrt{0^2 + 0,1^2} = 0,1 \text{ мм}$$

Получается, что диаметр, измеренный штангенциркулем, равен

$$d1 = (0,4 \pm 0,1) \text{ мм}$$

При измерении диаметра микрометром есть и случайная, и систематическая погрешности.

$$\sigma_{\text{сл2}} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^n (d - \bar{d})^2} = \frac{1}{10} \sqrt{2,9 \cdot 10^{-4}} = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$$

$$\sigma_{\text{сист2}} = 0,01 \text{ мм}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\sigma_{\text{сл2}}^2 + \sigma_{\text{сист2}}^2} = \sqrt{(1,7 \cdot 10^{-3})^2 + 0,01^2} \approx 0,01 \text{ мм}$$

Так как $\sigma_{\text{сл2}}^2 \ll \sigma_{\text{сист2}}^2$, то будем считать проволоку однородной в диаметре, а погрешность микрометра $\sigma_{\text{сист2}}$ примем погрешностью измерений σ_2 . Тогда:

$$d2 = \overline{d2} \pm \sigma_2 = (0,368 \pm 0,010) \text{ мм} = (0,37 \pm 0,01) \text{ мм}, (\varepsilon_2 = 2,7\%)$$

Определим площадь поперечного сечения проволоки по формуле, используя результаты измерений с помощью микрометра, так как их погрешность меньше, чем погрешность измерений, проведённый с помощью штангенциркуля ($\sigma_2 < \sigma_1$):

$$S = \frac{\pi(d_2)^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (0,37)^2}{4} = 0,107 \text{ мм}^2$$

Погрешность вычисления определяется формулой:

$$\sigma_S = 2S \frac{\sigma_2}{d_2} = 2 \cdot 0,1 \cdot \frac{0,01}{0,37} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^2$$

. Таким образом, $S = 0,107 \pm 0,005 \text{ мм}^2 = (10,7 \pm 0,5) \cdot 10^{-4} \text{ см}^2, (\varepsilon_S = 4,7\%)$

2.2 Описание приборов

Составим таблицу основных характеристик приборов

	Амперметр	Вольтметр
Система	Цифровой	Магнитоэлектрический
Класс точности		0,5
Предел измерений	2 А	0,75 В
Число делений шкалы		150
Цена делений		5 мВ/дел
Чувствительность		0,2 дел/мВ
Абсолютная погрешность	0.5 мА (макс)	3,75 мВ
Внутреннее сопротивление	1.4 Ом	5000 Ом

Таблица 2: Характеристики приборов

Погрешность амперметра в режиме измерения постоянного тока до 500 мА определяется по формуле:

$$\Delta_A = 0.002 * X + 2 * k$$

где X-измеренная величина; k- значение единицы младшего разряда на данном пределе измерения. В нашем случае

$$k = 0.01 \text{ мА}$$

2.3 Измерение напряжения и силы тока на схеме

Измеряем напряжение и силу тока для трёх длин проволоки, заносим данные в таблицу.

По приведённым в таблице 3 данным измерений построим графики, пользуясь методом наименьших квадратов для аппроксимации прямых вида $U = \overline{R}I$. Найдём угловые коэффициенты этих прямых по формуле $\overline{R} = \frac{\langle UI \rangle}{\langle I^2 \rangle}$ (приближение прямой пропорциональности), так как мы знаем, что график прямой зависимости $U(I)$ проходит через начало координат.

$l = 50,0 \pm 0,1 \text{ см}$										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U, \text{ мВ}$	400	425	475	500	530	575	375	350	325	300
$I, \text{ мА}$	80	86	95	103	106	115	75	71	67	62
$l = 30,0 \pm 0,1 \text{ см}$										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U, \text{ мВ}$	275	360	375	425	475	370	400	250	225	215
$I, \text{ мА}$	123	132	78	75	70	90	119	124	137	157
$l = 20,0 \pm 0,1 \text{ см}$										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U, \text{ мВ}$	335	300	250	225	200	335	360	395	425	450
$I, \text{ мА}$	168	179	195	209	230	139	150	125	110	99

Таблица 3: Результаты измерения напряжения и силы тока

Случайная погрешность при приближении прямой пропорциональности определяется так:

$$\sigma_{\text{слRпр}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\frac{\langle U \rangle^2}{\langle I \rangle^2} - \overline{R^2} \right)}$$

Систематическая погрешность в предположении, что при всех измерениях относительная погрешность приборов одинакова, оценивается при максимальных U и I так:

$$\sigma_{\text{систR}} \sim R \sqrt{\left(\frac{\sigma_U}{U_{\max}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I_{\max}} \right)^2}$$

где $\sigma_U = \frac{\Delta_U}{2} = \frac{3.75}{2} \approx 1.9 \text{ мВ}$; $\sigma_I = \frac{\Delta_A}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25 \text{ мА}$

Получается,

$$\sigma_{\text{полнR}} \leq \sqrt{\sigma_{\text{слR}}^2 + \sigma_{\text{систR}}^2}$$

Длина	Случ. погр., Ом	Сист. погр., Ом	Полн. погр, Ом
50 см	0,02	0,016	0,026
30 см	0,014	0,013	0,019
20 см	0,009	0,009	0,012

Таблица 4: Размеры погрешностей при приближении прямой пропорциональности

Измеряем сопротивления с помощью моста Уинстона (P4833) и записываем данные в таблицу, сравниваем их с рассчитанными ранее результатами для сопротивления проволоки.

Длина	P4833, Ом	Сопр.(прям.), Ом
50 см	5,223	$4,95 \pm 0,026$
30 см	3,196	$3,04 \pm 0,019$
20 см	2,146	$2,01 \pm 0,012$

Таблица 5: Результаты измерения сопротивления на мосте P4833 и расчёта коэффициента наклона прямых зависимости напряжения от тока

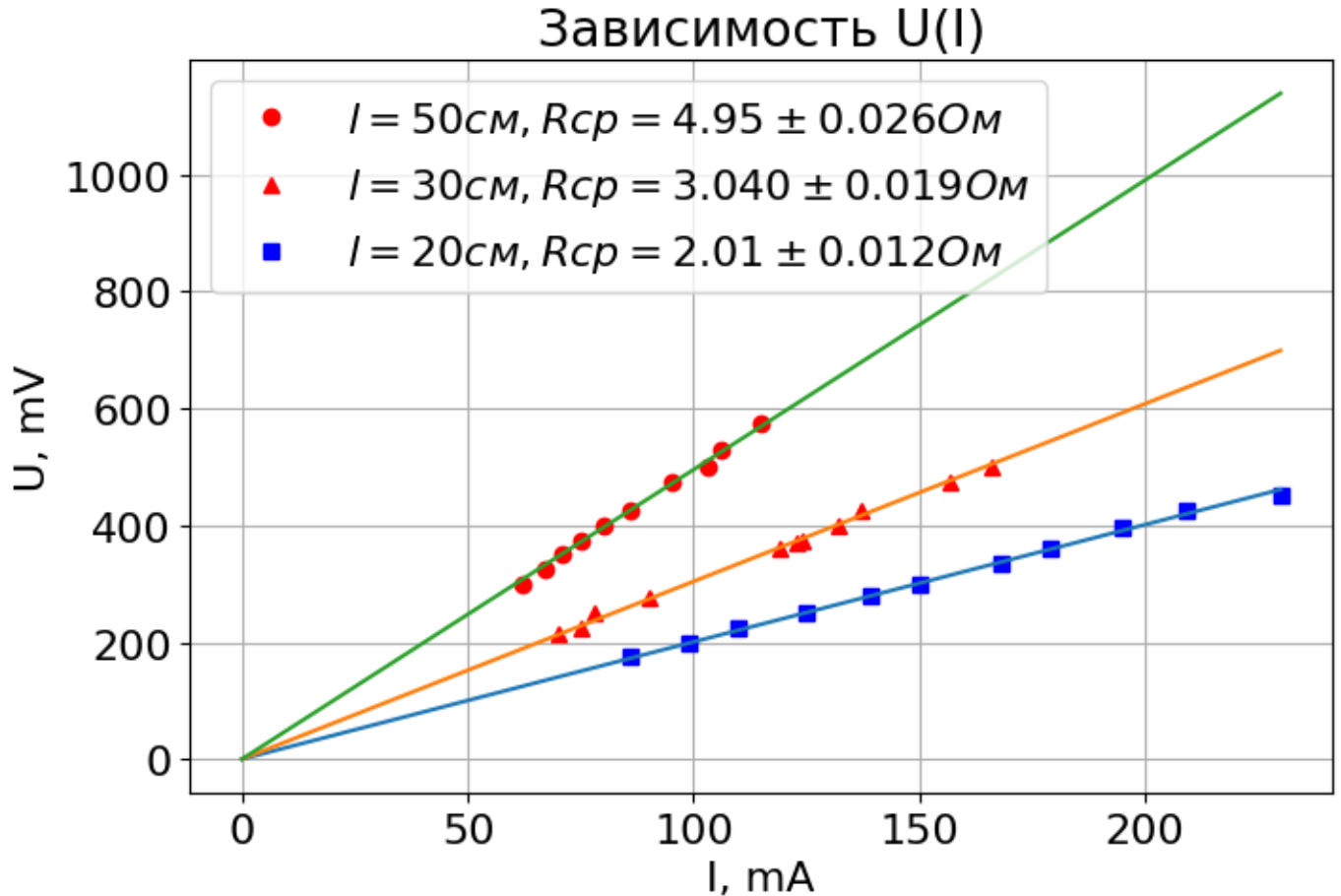


Рис. 2: Аппроксимация прямой пропорциональности вида $y = kx$ для графиков результатов измерений напряжения U и силы тока I для проволок разной длины. По вертикальной оси отмечена инструментальная погрешность вольтметра ($\Delta_V = 3,75 \text{ мВ}$), по горизонтальной оси инструментальная погрешность амперметра не отмечена, так как она меньше цены деления по оси I ($\Delta_A < (0.5 \text{ мА}) \ll \text{цена деления}(50 \text{ мА})$). Коэффициенты наклона прямых указаны в легенде.

Так как было проведено одно измерение для каждой длины, то случайную погрешность оценить невозможно. Систематическая погрешность определяется приборной погрешностью установки Р4833.

$$\sigma_{\text{мост}} = 10^{-4} \text{ Ом}$$

Проанализируем полученные результаты. Контрольные измерения с помощью моста Р4833 дают результаты с отклонением близким к пределу удвоенной полной погрешности ($2\sigma_{\text{полн}}$) для приближения прямой пропорциональности. Такая неточность результатов может следовать из небольшого числа измерений (точек на графике) и не совсем верно подобранного приближения. Продолжим расчёт не только для более правдоподобного приближения прямой пропорциональности, однако к данным полученным далее будет относиться с осторожностью.

2.4 Вычисление удельного сопротивления

Подставляем найденные значения R в формулу 1.

Длина	Уд. сопр. (прям.), 10^{-6} Ом · м
50 см	$1,06 \pm 0,05$
30 см	$1,08 \pm 0,05$
20 см	$1,08 \pm 0,06$

Таблица 6: Результаты расчёта удельного сопротивления проволоки

Считаем относительную погрешность $\rho_{\text{пр}}$:

$$\varepsilon_{\rho_{\text{пр}}}^2 = \varepsilon_S^2 + \varepsilon_R^2$$

Усреднённые результаты для приближения прямой пропорциональности:

$$\rho_{\text{пр}} = 1,07 \pm 0,05 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м} (\varepsilon_{\rho_{\text{пр}}} = 5\%)$$

3 Вывод

В работе измерен диаметр нихромовой проволоки с помощью штангенциркуля и микрометра, определено, что наиболее точные измерения были проведены с использованием микрометра $d_2 = (0,37 \pm 0,01)$ мм, $(\varepsilon_2 = 2,7\%)$. С помощью полученного экспериментально значения диаметра найдена площадь поперечного сечения проволоки $S = (10,7 \pm 0,5) \cdot 10^{-2}$ см², $(\varepsilon_S = 4,7\%)$. С учётом наименьшей поправки на внутреннее сопротивление измерительных приборов собрана электрическая схема для снятия зависимости напряжения от тока. Проведены измерения зависимости $U(I)$, построена аппроксимирующая прямая пропорциональная зависимость с помощью МНК. По графику определены коэффициенты наклона, которые численно равны искомому сопротивлению проволоки. Найденное в ходе измерений сопротивление в приближении прямой пропорциональности соотносится в пределах погрешности с контрольными измерениями на мосте Р4833. Возникшие неточности могут быть связаны

- с малым количеством проведённых измерений (точек на графике) (с увеличением количества измерений в разумных пределах уменьшается случайная погрешность),
- с достаточно близким расположением точек на графике (близкое расположение показывает не общую зависимость, а лишь некоторый небольшой участок этой зависимости),
- с возникающими при снятии результатов скачками указательной стрелки вольтметра.

Итоговые расчёты показали, что полученные данные дают небольшой разброс полученных результатов для разных длин проволоки, в среднем они дают схожее с реальным удельное сопротивление $\rho = 1,07 \pm 0,06 \cdot 10^{-6}$ Ом · м ($\varepsilon_\rho = 5\%$). Табличные значения для нихрома лежат в диапазоне от 0,97 до 1,14 10^{-6} Ом · м в зависимости от состава. Измеренные значения попадают в этот диапазон в пределах погрешности.