Общий вид метода RKDG

Постановка задачи

Постановка задачи (уравнение):

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \\ u(0, x) = \mu_0(x) \\ + \text{ГУ (если есть)} \end{cases}} \quad (1.1)$$

$u = u(x, t)$ – искомая функция
$x \in [0, L]$
$t \in [0, T]$

Обозначения:

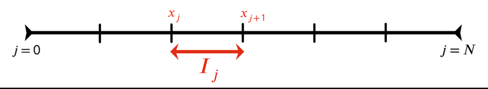
$I_j \overset{def}{=} [x_j; x_{j+1}]$ – интервал ячейки
$h_j \overset{def}{=} |I_j| = x_{j+1} - x_j$ – размер ячейки

Сетка по времени:

Равномерная. Индексируется "k".
Шагов по времени : $timeSteps$

Сетка по пространству:

Произвольная. Индексируется "j".
$\Omega_h \overset{def}{=} \{x_j\}_{j=0}^{N}$ $\quad x_0 \le \dots \le x_N$



Целых узлов сетки : $N + 1$
Ячеек I_j : N (где $j \in \{0 \dots N - 1\}$)

Разложение по базису

Разложение по базисным функциям:

Обозначим функциональный базис в пространстве $L_2[-1; 1]$: $\Phi = \{\phi_m\}_{m=0}^{\infty}$

Обозначим конечный набор базисных функций : $\Phi_M = \{\phi_m\}_{m=0}^{M}$

Приближенное решение будем искать в виде разложения по системе Φ_M на каждом отрезке I_j :

$$\boxed{\underset{\text{на отрезке } x \in I_j}{u(x,t)} \approx \underset{\text{на отрезке } \xi \in [-1;1]}{u_j(\xi,t)} = \sum_{m=0}^{M} \alpha_{jm}(t)\phi_m(\xi)} \quad (2.1)$$

Разложение функции f(u) является довольно ключевым моментом.

В диссертации Токаревой С., например, данное разложение не вводится, в результате чего в итоговой системе остается интеграл по ячейке явно включающий функцию f(u).

Также при сохранении f(u) острее встает проблема разрывности "u_h" в точках "x_e", для того, чтобы задать значения f(u) на разрывах, приходится вводить нетривиальную функцию "численного потока", заменяющую f(u).

В препринте ИПМ эти проблемы избегаются за счет введения разложения f(u), это удваивает число переменных т.к. добавляются "β(t)", но сразу снимает целый ряд вопросов реализации. Проблема разрывности f(u) решается использованием полусуммы f(u), вычисленных по локальным разложениям в прилежащих к разрыву ячейках.

Аналогично разложим и функцию $f(u)$:

$$\boxed{\underset{\text{на отрезке } x \in I_j}{f(u(x,t))} \approx \underset{\text{на отрезке } \xi \in [-1;1]}{f_j(\xi,t)} = \sum_{m=0}^{M} \beta_{jm}(t)\phi_m(\xi)} \quad (2.2)$$

Локальные координаты отрезка:

Для удобства операций в формулах (2.1), (2.2) введены локальные координаты ξ.
Отрезку $x \in I_j$ сопоставляется диапазон $\xi \in [-1;1]$.

Итого, формулы для отрезка I_j :

Прямая замена : $\boxed{\xi = \dfrac{2(x - x_j)}{h_j} - 1}$ (2.3)

Обратная замена : $\boxed{x = \dfrac{h_j}{2}(\xi + 1) + x_j}$ (2.4)

Восстановление $u(x, t)$ по $u_j(\xi, t)$:

$$\boxed{u(x,t) = \begin{cases} u_1\left(\dfrac{2(x - x_1)}{h_1} - 1, t\right), & \text{при } x \in I_1 \\ \dots \\ u_N\left(\dfrac{2(x - x_N)}{h_N} - 1, t\right), & \text{при } x \in I_N \end{cases}} \quad (2.5)$$

Полиномы Лежандра

Обозначения:

Обозначим коэффициенты : $D_{nm} = (\phi_n, \phi_m) = \int_{-1}^{1} \phi_n(\xi)\phi_m(\xi)\,d\xi$

Данные коэффициенты удобны при записи выражений. Глубинного смысла в них не заложено.

$$R_{nm} = (\phi_n, \phi'_m) = \int_{-1}^{1} \phi_n(\xi)\phi'_m(\xi)\,d\xi$$

Использование полиномов Лежандра как базисных функций:

В дальнейшем в качестве базисных функций будут использоваться полиномы лежандра.

$\phi_m(\xi) = P_m(\xi)$

Смысл взятия полиномов Лежандра заключается в их ортогональности.

Ортогональность базисной системы является необходимым условием для получения явного метода в дальнейшем.

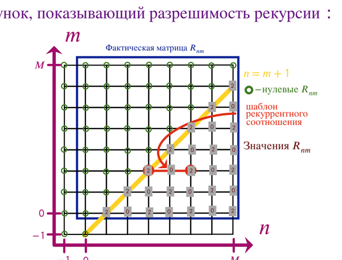
В их случае коэффициенты D_{ij} вычисляются по формуле :

$\boxed{D_{nm} = \dfrac{2}{2i + 1}\delta_{nm}}$ (3.1) $\quad \delta_{ij}$ – символ Кронекера

А коэффициенты R_{ij} по рекуррентному соотношению :

$$\boxed{\begin{cases} R_{-1,m} = 0 & \text{(формально)} \\ R_{0,m} = 0 & \\ R_{n,m} = 0 & \text{при } n < m + 1 \\ R_{n,m} = 2\delta_{n-1,m} + R_{n-2,m} & \text{при } n \ge m + 1 \end{cases}} \quad (3.2)$$

Рисунок, показывающий разрешимость рекурсии :



Данное рекуррентное соотношение получено в препринте ИПМ на стр. 7. Оно выводится из рекуррентного соотношения на полиномы Лежандра при домножении на еще один полином и интегрировании по отрезку [-1; 1]

Также имеют место следующие свойства :

$$\boxed{\begin{matrix} P_m(1) = 1 \\ P_m(-1) = (-1)^m \end{matrix}} \quad (3.3)$$

Примечания про полиномы Лежандра:

Рекуррентная формула полиномов Лежандра :

$$\boxed{\begin{cases} P_0(\xi) = 1 \\ P_1(\xi) = 1 \\ P_m(\xi) = \dfrac{2m+1}{m+1}\xi \cdot P_{m-1}(\xi) - \dfrac{m}{m+1}P_{m-2}(\xi) & \text{при } m \ge 2 \end{cases}}$$

Интегрирование ур-я

Интегрирование уравнения:

Зафиксируем ячейку I_j на которой будем рассматривать уравнение.

Исходное уравнение (1.1) имеет вид : $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$

Перейдем к локальным координатам заменой (2.3) : $\dfrac{\partial u_j}{\partial t} + \dfrac{2}{h_j}\dfrac{\partial f_j(u_j(\xi,t))}{\partial \xi} = 0$

Константа возникает в силу замены координат.

Наличие индексов при "u" и "f" является напоминанием того, что мы рассматриваем не глобальные функции, а их "локальные фрагменты" определенные в новых координатах

Проинтегрируем уравнение по $\xi \in [-1; 1]$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial u_j(\xi,t)}{\partial t}d\xi + \frac{2}{h_j}\int_{-1}^{1} \frac{\partial f_j(u_j(\xi,t))}{\partial \xi}d\xi = 0$$

Домножим уравнение на $\phi_m(\xi)$:

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{\partial u_j(\xi,t)}{\partial t}\phi_m(\xi)\,d\xi}_{\text{Обозначим } S_1} + \frac{2}{h_j}\underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{\partial f_j(u_j(\xi,t))}{\partial \xi}\phi_m(\xi)\,d\xi}_{\text{Обозначим } S_2} = 0$$

Слагаемое S_1 :

$\int_{-1}^{1} \dfrac{\partial u_j(\xi,t)}{\partial t}\phi_m(\xi)\,d\xi$ $\Rightarrow$ подставим разложение по базису для $u_j(\xi, t)$ $\Rightarrow$

$\int_{-1}^{1} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=0}^{M} \alpha_{jn}(t)\phi_n(\xi)\right)\phi_m(\xi)\,d\xi$ $\Rightarrow$ вынесем сумму и функции от времени $\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{M} \alpha'_{jn}(t)\left(\int_{-1}^{1} \phi_n(\xi)\phi_m(\xi)\,d\xi\right)$ $\Rightarrow$ заметим, что интеграл является коэффициентом D_{nm} $\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{M} \alpha'_{jn}(t) D_{nm}$ $\Rightarrow$ воспользуемся формулой D_{nm} полиномов Лежандра $\Rightarrow$

До данного перехода конкретный вид базиса роли не играл.

$\sum_{n=0}^{M} \alpha'_{jn}(t)\dfrac{2}{2n+1}\delta_{nm}$ $\Rightarrow$ все члены суммы кроме 1 – го обнуляются $\Rightarrow$

$\boxed{\alpha'_{jm}(t)\dfrac{2}{2m+1}}$ (4.1)

Слагаемое S_2 :

$\int_{-1}^{1} \dfrac{\partial f_j(u_j(\xi,t))}{\partial \xi}\phi_m(\xi)\,d\xi$ $\Rightarrow$ проинтегрируем по частям $\Rightarrow$

$\left(f_j(u_j(\xi,t))\phi_m(\xi)\right)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f_j(u_j(\xi,t))\phi'_m(\xi)\,d\xi$ $\Rightarrow$ подставим разложение по базису для $f_j(u_j(\xi,t))$ $\Rightarrow$

Приближенная функция f(u) разрывна в узлах сетки.
Это обуславливает появление f+ и f-, имеющих смысл некоторого "фиктивного значения", которые мы будем брать на разрывах. Формулы их вычисления приведены позже.

$f_j^+\phi_m(1) - f_j^-\phi_m(-1) - \int_{-1}^{1}\left(\sum_{n=0}^{M} \beta_{jn}(t)\phi_n(\xi)\phi'_m(\xi)\right)d\xi$ $\Rightarrow$ вынесем сумму и функции от времени $\Rightarrow$

$f_j^+\phi_m(1) - f_j^-\phi_m(-1) - \sum_{n=0}^{M} \beta_{jn}(t)\left(\int_{-1}^{1} \phi_n(\xi)\phi'_m(\xi)\,d\xi\right)$ $\Rightarrow$ заметим, что интеграл является коэффициентом R_{nm} $\Rightarrow$

$f_j^+\phi_m(1) - f_j^-\phi_m(-1) - \sum_{n=0}^{M} \beta_{jn}(t) R_{nm}$ $\Rightarrow$ воспользуемся свойством (3.3) полиномов Лежандра $\Rightarrow$

$\boxed{f_j^+ - f_j^-(-1)^m - \sum_{n=0}^{M} \beta_{jn}(t) R_{nm}}$ (4.2)

Итоговое уравнение для $\alpha_{jm}(t)$:

$\dfrac{2}{2m+1}\alpha'_{jm}(t) + \dfrac{2}{h_k}\left(f_j^+ - f_j^-(-1)^m - \sum_{n=0}^{M} \beta_{jn}(t) R_{nm}\right) = 0$ $\Rightarrow$ сокращаем на константу $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{h_k}{2m+1}\alpha'_{jm}(t) + f_j^+ - f_j^-(-1)^m - \sum_{n=0}^{M} \beta_{jn}(t) R_{nm} = 0} \quad (4.3)$$

Уравнение имеет место для
$\forall j \in \{0 \dots N-1\}$ (т.е. для всех отрезков I_j)
$\forall m \in \{0 \dots M\}$ (т.е. для всех ϕ_m на которые можно домножить)
$\Rightarrow$ имеем $N(M+1)$ дифференциальных уравнений

(4.3) имеет полное соответсвие формуле (2.20) из препринта ИПМ. Отличаются только обозначения.

Получение внутренних значений f_j^- и f_j^+ :

Формулы для f_j^- и f_j^+ (на внутренних ячейках) :

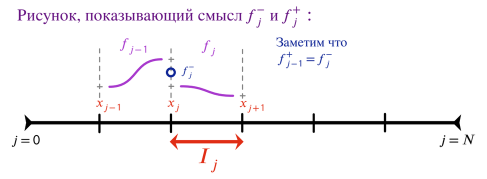
$$\boxed{f_j^- = \frac{f_{j-1}(x_j) + f_j(x_j)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{M} \beta_{jn}(t) \cdot (-1)^n + \sum_{n=0}^{M} \beta_{j-1,n}(t)\right)} \quad (4.4)$$

$\boxed{f_j^+ = f_{j+1}^-}$

В силу нашего приближения функция f(u) разрывна.

В препринте ИПМ в качестве способа получения значений на разрыве предложена полусумма значений на левом и правом пределе.

Рисунок, показывающий смысл f_j^- и f_j^+ :



Получение уравнений для $\beta_{jn}(t)$:

Для получения уравнений на $\beta_{jn}(t)$ необходимо воспользоваться видом $f(u)$ для конкретной задачи.
Алгоритм получения уравнений заключается в проведении аналогичных выкладок для выражения $f = \{rhs\}$.

Полученные при этом уравнения НЕ являются дифференцильными т.е. по сути в систему не входят, а являются промежуточными переменными при пересчете правой части системы ОДУ, порождаемой уравнениями (4.3).

Дальше будут расмотренны формулы пересчета $\beta_{jn}(t)$ для конкретных задач.

Скорее всего пересчет β тоже можно обобщить, но я пока не придумал как.
Возможно можно просто использовать формулы коэф-ов Фурье.

Частный вид метода RKDG

Получение коэф-ов β: ур. конвеции-диффузии

Уравнение конвекции-диффузии:

$\boxed{f(u) = cu - a\dfrac{\partial u}{\partial x}}$ (5.1) $\Rightarrow$ Уравнение конвекции – диффузии : $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$ (5.2)

Интегрирование аналогично основному уравнению :

Зафиксируем ячейку I_j на которой будем рассматривать уравнение.

Исходное уравнение (5.1) имеет вид : $f(u(x,t)) = cu(x,t) - a\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$

Перейдем к локальным координатам заменой (2.3) : $f_j(u_j(\xi,t)) = cu_j(\xi,t) - a\dfrac{2}{h_j}\dfrac{\partial u_j(\xi,t)}{\partial \xi}$

Константа возникает в силу замены координат при члене с дифференцированием.

Проинтегрируем уравнение по $\xi \in [-1; 1]$:

$$\int_{-1}^{1} f_j\,d\xi = c\int_{-1}^{1} u_j(\xi,t)\,d\xi - a\frac{2}{h_j}\int_{-1}^{1} \frac{\partial u_j(\xi,t)}{\partial \xi}d\xi$$

Домножим уравнение на $\phi_m(\xi)$:

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} f_j\phi_m(\xi)\,d\xi}_{\text{Обозначим } S_3} = c\underbrace{\int_{-1}^{1} u_j(\xi,t)\phi_m(\xi)\,d\xi}_{\text{Обозначим } S_4} - a\frac{2}{h_j}\underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{\partial u_j(\xi,t)}{\partial \xi}\phi_m(\xi)\,d\xi}_{\text{Обозначим } S_5}$$

Слагаемое S_3 :

Для левой части выкладки не зависят от вида f(u).
В других уравнениях ответ аналогичный.

$\int_{-1}^{1} f_j\phi_m(\xi)\,d\xi$ $\Rightarrow$ подставим разложение по базису для $f_j(\xi, t)$ $\Rightarrow$

$\int_{-1}^{1}\left(\sum_{n=0}^{M} \beta_{jn}(t)\phi_n(\xi)\right)\phi_m(\xi)\,d\xi$ $\Rightarrow$ вынесем сумму и функции от времени $\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{M} \beta_{jn}(t)\left(\int_{-1}^{1} \phi_n(\xi)\phi_m(\xi)\,d\xi\right)$ $\Rightarrow$ заметим, интеграл является коэффициентом D_{nm} $\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{M} \beta_{jn}(t) D_{nm}$ $\Rightarrow$ воспользуемся формулой D_{nm} полиномов Лежандра $\Rightarrow$

До данного перехода конкретный вид базиса роли не играл.

$\sum_{n=0}^{M} \beta_{jn}(t)\dfrac{2}{2n+1}\delta_{nm}$ $\Rightarrow$ все члены суммы кроме 1 – го обнуляются $\Rightarrow$

$\boxed{\beta_{jm}(t)\dfrac{2}{2m+1}}$ (5.3)

Слагаемое S_4 :

Выкладки ИДЕНТИЧНЫ тем, которые были при получении (6.3), с той разницей что:
- вместо функции "f" стоит функция "u"
- вместо коэф-ов "α" стоят коэф-ы "β"

$\int_{-1}^{1} u_j(\xi,t)\phi_m(\xi)\,d\xi$
$\Rightarrow$ подставим разложение по базису для $u_j(\xi, t)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ вынесем сумму и функции от времени $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ заметим, что интеграл является коэффициентом D_{nm} $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ воспользуемся формулой D_{nm} полиномов Лежандра $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ все члены суммы кроме 1 – го обнуляются $\Rightarrow$

$\boxed{\alpha_{jm}(t)\dfrac{2}{2m+1}}$ (5.4)

Слагаемое S_5 :

Выкладки ИДЕНТИЧНЫ тем, которые были при получении (6.3), с той разницей что:
- вместо функции "f" стоит функция "u"
- вместо коэф-ов "α" стоят коэф-ы "β"

$\int_{-1}^{1} \dfrac{\partial u_j(\xi,t)}{\partial \xi}\phi_m(\xi)\,d\xi$
$\Rightarrow$ проинтегрируем по частям $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ подставим разложение по базису для $f_j(u_j(\xi,t))$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ вынесем сумму и функции от времени $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ заметим, что интеграл является коэффициентом R_{nm} $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ воспользуемся свойством (3.3) полиномов Лежандра $\Rightarrow$

$\boxed{u_j^+ - u_j^-(-1)^m - \sum_{n=0}^{M} \alpha_{jn}(t) R_{nm}}$ (5.5)

Итоговое уравнение для $\beta_{jm}(t)$:

$\beta_{jm}(t)\dfrac{2}{2m+1} = c\,\alpha_{jm}(t)\dfrac{2}{2m+1} - a\dfrac{2}{h_j}\left(u_j^+ - u_j^-(-1)^m - \sum_{n=0}^{M} \alpha_{jn}(t) R_{nm}\right)$ $\Rightarrow$ сокращаем на константу $\Rightarrow$

$$\boxed{\beta_{jm}(t) = c\,\alpha_{jm}(t) - a\frac{2m+1}{h_j}\left(u_j^+ - u_j^-(-1)^m - \sum_{n=0}^{M} \alpha_{jn}(t) R_{nm}\right)} \quad (5.6)$$

(6.6) имеет полное соответсвие формуле (2.21) из препринта ИПМ. Отличаются только обозначения.

Уравнение имеет место для
$\forall j \in \{0 \dots N-1\}$ (т.е. для всех отрезков I_j)
$\forall m \in \{0 \dots M\}$ (т.е. для всех ϕ_m на которые можно домножить)
$\Rightarrow$ имеем $N(M+1)$ уравнений, позволяющих по $\alpha_{jm}(t)$ получить $\beta_{jm}(t)$

Получение внутренних значений u_j^- и u_j^+ :

Формулы для u_j^- и u_j^+ (на внутренних ячейках) : Все аналогично тому как делали с f_j^- и f_j^+

$$\boxed{u_j^- = \frac{u_{j-1}(x_j) + u_j(x_j)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{M} \alpha_{jn}(t) \cdot (-1)^n + \sum_{n=0}^{M} \alpha_{j-1,n}(t)\right)} \quad (5.7)$$

$\boxed{u_j^+ = u_{j+1}^-}$

Учет НУ и ГУ в ур. конвекции-диффузии

Аналитическая задача (общий вид):

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & x \in [x_L, x_R],\ t \in [0, T] \\ u(x, 0) = \mu_0(x) & \text{– НУ} \\ u(x_L, t) = \nu_L(t) & \text{– левое ГУ} \\ u(x_R, t) = \nu_R(t) & \text{– правое ГУ} \end{cases}} \quad (6.1)$$

Где происходит учет НУ:

НУ используется для определения первого временного слоя.

Проинтегрировав НУ аналогично уравнению получим :

$\dfrac{2}{2m+1}\alpha_{jm}(0) = \int_{-1}^{1} \mu_0\left(x_j + \dfrac{h_j}{2}(\xi + 1)\right)\phi_m(\xi)\,d\xi$ $\Rightarrow$ сокращаем на константу $\Rightarrow$

$$\boxed{\alpha_{jm}(0) = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} \mu_0\left(x_j + \frac{h_j}{2}(\xi + 1)\right)\phi_m(\xi)\,d\xi \quad \text{для} \quad \begin{matrix} j = \overline{0, N-1} \\ m = \overline{0, M} \end{matrix}} \quad (6.2)$$

Тут происходит учет НУ $\mu_0(x)$

Где происходит учет ГУ:

В формулах для расчета $u_j^-, u_j^+, f_j^-, f_j^+$.

На внешних ячейках вместо (5.7) и (4.4) используются формулы :

$f_0^- = \sum_{n=0}^{M} \beta_{0n}(t) \cdot (-1)^n$	$f_+^{N-1} = \sum_{n=0}^{M} \beta_{N-1,n}(t)$	(6.3)
$u_0^- = \nu_L(t)$	$u_+^{N-1} = \nu_R(t)$	(6.4)

Тут происходит учет ГУ $\nu_L(t)$, $\nu_R(t)$

Алгоритм подсчета ур. конвеции-диффузии

Аналитическая задача (общий вид):

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & x \in [x_L, x_R],\ t \in [0, T] \\ u(x, 0) = \mu_0(x) & \text{– НУ} \\ u(x_L, t) = \nu_L(t) & \text{– левое ГУ} \\ u(x_R, t) = \nu_R(t) & \text{– правое ГУ} \end{cases}} \quad (7.1)$$

Аналитическая задача (тест с непрерывным НУ):

Область : $x \in [0, 2\pi]$, $t \in [0, T]$
НУ : $\mu_0(x) = \sin(x)$
ГУ : $\nu_L(t) = \nu_R(t) = -e^{-at}\sin(ct)$
$\Rightarrow$ Аналитическое решение $u(x,t) = -e^{-at}\sin(x - ct)$ (7.2)

Полная система уравнений:

$$\boxed{\begin{cases} \text{(4.3)} \Rightarrow & \alpha'_{jm}(t) = -\dfrac{2m+1}{h_k}\left(f_j^+ - f_j^-(-1)^m - \sum_{n=0}^{M} \beta_{jn}(t) R_{nm}\right) & \text{для } j = \overline{0, N-1},\ m = \overline{0, M} \\ \text{(5.6)} \Rightarrow & \beta_{jm}(t) = c\,\alpha_{jm}(t) - a\dfrac{2m+1}{h_j}\left(u_j^+ - u_j^-(-1)^m - \sum_{n=0}^{M} \alpha_{jn}(t) R_{nm}\right) & \text{для } j = \overline{0, N-1},\ m = \overline{0, M} \end{cases}} \quad (7.3)$$

Переменных : $N(M+1)$ штук $\alpha_{jm}(t)$
$N(M+1)$ штук $\beta_{jm}(t)$

Уравнений : $2 \cdot N(M+1)$ штук
Первая половина – дифференциальные ур. на $\alpha_{jm}(t)$
Вторая половина – явные ур. на $\beta_{jm}(t)$

Таким образом системы (7.3) достаточно для получения следующиего временного слоя из предыдущего.

Где происходит учет НУ :

НУ используется для определения первого временного слоя.

Где происходит учет ГУ :

В формулах для расчета $u_j^-, u_j^+, f_j^-, f_j^+$.

Подход к решению :

Задачу рассматриваем как систему ОДУ размера $N(M+1)$:

$$\begin{cases} \dot{y} = F(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad y_k \text{ – вектор значений } \alpha_{jm}(t_k)$$

В препринте ИПМ итерация RK2 расписывается вручную, а система интерпретируется как "гибридная", пересчитываемая по очереди - то для "α" то для "β".

Подход с правой частью более общий т.к. не привязвает к интегратору RK2. Как по мне и более логичный.

Тогда переменные $\beta_{jm}(t)$ "живут" исключительно в рамках вычисления правой части $F(t, y)$.
Решать можно любым из привычных методов интегрирования ОДУ, например, $RK2$.

Таким образом, вычисление правой части $F(t, y)$ является основной нетривиальной операцией алгоритма.

Алгоритм вычисления $F(t, y)$:

На входе функции имеем вектор $y = \{\alpha_{jm}(t)\}$

1) По значениям $\alpha_{jm}(t)$ вычисляем u_j^- и u_j^+.
На внутренних точках используются формула (5.7) : $u_j^- = \dfrac{u_{j-1}(x_j) + u_j(x_j)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{M} \alpha_{jn}(t) \cdot (-1)^n + \sum_{n=0}^{M} \alpha_{j-1,n}(t)\right)$, $u_j^+ = u_{j+1}^-$
На граничных точках используются формула (6.4) : $u_0^- = \nu_L(t)$, $u_+^{N-1} = \nu_R(t)$

2) Зная u_j^- и u_j^+, можем вычислить $\beta_{jm}(t)$
По формуле (5.6) : $\beta_{jm}(t) = c\,\alpha_{jm}(t) - a\dfrac{2m+1}{h_j}\left(u_j^+ - u_j^-(-1)^m - \sum_{n=0}^{M} \alpha_{jn}(t) R_{nm}\right)$

3) По значениям $\beta_{jm}(t)$ вычисляем f_j^- и f_j^+.
На внутренних точках используются формула (4.4) : $f_j^- = \dfrac{f_{j-1}(x_j) + f_j(x_j)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{M} \beta_{jn}(t) \cdot (-1)^n + \sum_{n=0}^{M} \beta_{j-1,n}(t)\right)$, $f_j^+ = f_{j+1}^-$
На граничных точках используются формула (6.3) : $f_0^- = \sum_{n=0}^{M} \beta_{0n}(t) \cdot (-1)^n$, $f_+^{N-1} = \sum_{n=0}^{M} \beta_{N-1,n}(t)$

4) Зная f_j^- и f_j^+, можем вычислить $F(t, y)$.
По формуле (4.3) : $\alpha'_{jm}(t) = F_{jm}(t, y) = -\dfrac{2m+1}{h_j}\left(f_j^+ - f_j^-(-1)^m - \sum_{n=0}^{M} \beta_{jn}(t) R_{nm}\right)$

Что потребуется с точки зрения реализации :

Функция конвертирующая $2D$ индексы в $1D$ индексы и обратно : $y_{j,m} \sim y_{idx}$

Альтернативно, можно хранить $y_{j,m}$ непосредственно как матрицу , которую просто реинтерпретировать в вектор.
Это удобно и какие – либо вопросы неправильной конвертации индексов отпадают, но можно напороться на особенности хранения матрицы если элементы лежат не в стандартном порядке ($Eigen$ хранит по столбцам)

Получение коэф-ов β: квазилинейное ур. переноса

Квазилинейное уравнение переноса:

$\boxed{f(u) = \dfrac{u^2}{2}}$ (X.1) $\Rightarrow$ Квазилинейное ур. переноса $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0}$ (X.2)

Интегрирование аналогично основному уравнению :

Зафиксируем ячейку I_j на которой будем рассматривать уравнение.

Исходное уравнение (5.1) имеет вид : $f(u(x,t)) = \dfrac{u(x,t)^2}{2}$

Перейдем к локальным координатам заменой (2.3) : $f_j(u_j(\xi,t)) = \dfrac{u_j(\xi,t)^2}{2}$

Константы не возникает так как нет дифференцирования.

Проинтегрируем уравнение по $\xi \in [-1; 1]$:

$$\int_{-1}^{1} f_j\,d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{u_j^2}{2}d\xi$$

Домножим уравнение на $\phi_m(\xi)$:

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} f_j\phi_m(\xi)\,d\xi}_{\text{Обозначим } S_3} = \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{u_j^2}{2}\phi_m(\xi)\,d\xi}_{\text{Обозначим } S_4}$$

Слагаемое S_3 :

Из пункта (5.3) (одинаковый для все уравнений) имеем :

$\boxed{\beta_{jm}(t)\dfrac{2}{2n+1}}$ (X.3)

Слагаемое S_4 :

Выкладки зависят от вида f(u).
Нужно проделывать вручную для каждого уравнения.

$\int_{-1}^{1} \dfrac{u_j^2}{2}\phi_m(\xi)\,d\xi$ $\Rightarrow$ подставим разложение по базису для $u_j(\xi, t)$ $\Rightarrow$

$\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{M} \alpha_{jn}(t)\phi_n(\xi)\right)^2 \phi_m(\xi)\,d\xi$

И как с этим жить если сумму вынести не получается?

Мы хотим внести интеграл под сумму и получить из интеграла по базисным функцям какой-нибудь коэффициент, который можно вычислять по формуле.

В диссертации Токаревой С. данная задача решается как простейшая тестовая, однако детали решения не указаны.