Structuri discrete

Lidia POPOV, dr., lect. univ.
Vitalie ȚÎCĂU, lect. univ.

Structura cursului

Numărul total de credite – 5;
(75 de ore contact direct, 75 lucrul independent):
Prelegeri – 14 ore;
Seminare – 31 de ore;
Laborator – 30 de ore.

Evaluări curente – 3 lucrări de control la 3 unități de învățare și 3 sau 4 Lucrări de laborator.

În final se va calcula media aritmetică a notelor doar în cazul în care studentul va fi evaluat la toate lucrările de control **pozitiv**!
Tipul evaluării finale - Examen

Media aritmetică • 0,6+Nota la examen • 0,4 = Nota în matricolă

8 x 0,6 + 9 x 0,4 = 4,8 + 3,6 = 8,40

Structura cursului

Unitatea de învățare 1. Mulțimi, Funcții. Relații

Unitatea de învățare 2. Logica matematică. Metode de demonstrare

Unitatea de învățare 3. Elemente din combinatorică

Unitatea de învățare 4. Algoritmica grafurilor

MULȚIMI

Plan

1. Mulţimi
2. Operații cu mulțimi: Reuniunea, Intersecția, Diferența
3. Cardinalul mulțimii.
4. Mulțimi remarcabile.
5. Mulțimea vidă. Mulțimea putere
6. Diagramele Venn-Euler
7. Diferența simetrică a două mulțimi
8. Complementul. Produsul cartezian
9. Identități cu mulțimi
10. Metoda tabelului de apartenență
11. Metoda incluziunilor duble
12. Metoda transformărilor echivalente
13. Concluzii

Scopul cursului

Cursul universitar ***Structuri discrete*** este o disciplină fundamentală pentru specialitatea „**Informatica**” (Ştiinţe exacte). Scopul cursului dat este de a prezenta rezultatele de bază din matematica discretă și logica matematică. De asemenea, studenții fac cunoștință cu elemente din combinatorică și algoritmica grafurilor. Studierea cursului universitar ***Structuri discrete*** se sprijină pe cunoştinţele, capacităţile şi competenţele dezvoltate în gimnazii și licee la orele de matematică și deprinderile de calcul şi operare cu noţiuni din analiza matematică, combinatorică şi logica matematică.

Scopul cursului

Prin conţinutul său şi activităţile de învăţare a studenţilor, cursul respectiv contribuie la dezvoltarea mai multor competenţe generice, necesare în domeniul profesional:

- ✓ capacitatea de analiză şi sinteză;
- ✓ deprinderi de comunicare în limba maternă;
- ✓ capacitatea de a lucra în echipă;
- ✓ capacitatea de a aplica cunoştinţele în practică;
- ✓ capacitatea de a genera idei noi;
- ✓ capacitatea de a lucra independent etc.

Competenţe prealabile

1. Utilizarea eficientă a resurselor sistemelor de calcul, de operare și ale Internetului.
2. Deprinderi de calcul şi operare cu noţiuni din analiza matematică, combinatorică şi logica matematică.

Mulțimi

Importanța temei

Prin tema pe care o vom aborda astăzi, ne reamintim concepul de mulțime, operații cu mulțimi și cazuri particulare : mulțimi de numere.

Ce știm și vom folosi:

- ce este o mulțime;
- modalități de definire a unei mulțimi;
- operații cu mulțimi;
- cardinalul unei mulțimi.

MULȚIMI

Ce este o mulțime?

"colecție, ansamblu de OBIECTE"

Obiectele din mulțime se numesc **elementele mulțimii**

Mulțimea reprezintă o colecție de elemente care pot fi atât numerice, cât și alfanumerice!

Exemple de mulțimi:

mulțimea formată din elementele **alfanumerice**
Vasile, Andrei, Sergiu, Cosmin

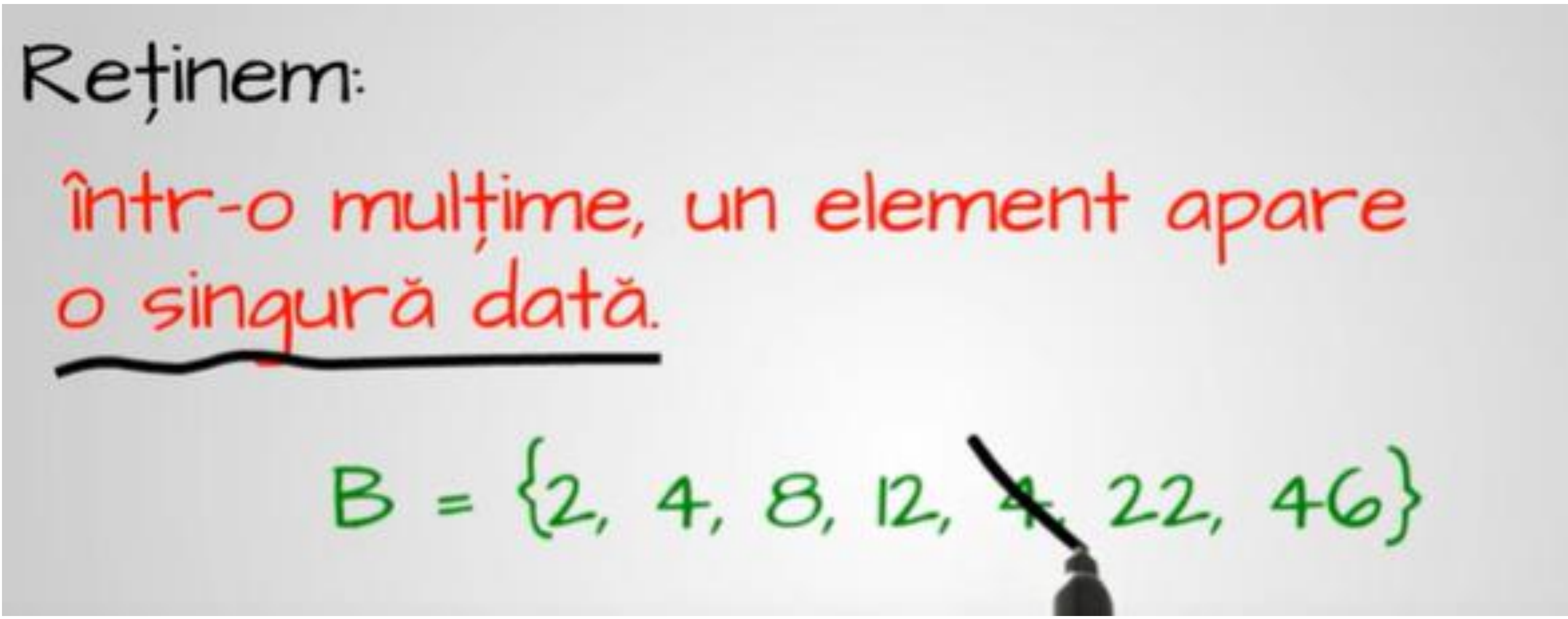
sau formată din elementele **numerice**
2, 4, 8, 12, 22, 46

de regulă, pentru a defini o mulțime listăm <u>elementele</u> sale, între <u>acolade</u>:

$A = \{Vasile, Andrei, Sergiu, Cosmin\}$

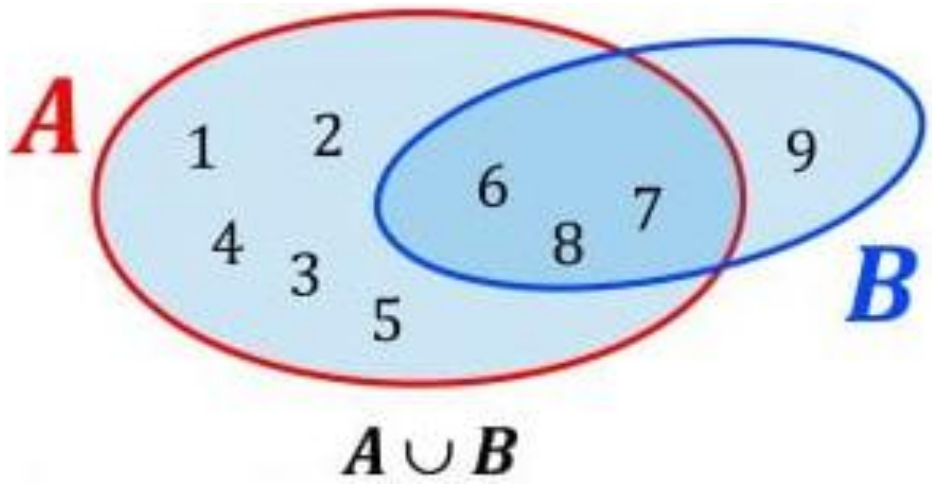
$B = \{2, 4, 8, 12, 22, 46\}$

pentru a numi mulțimile, de obicei, se utilizează literele MAJUSCULE ale alfabetului.

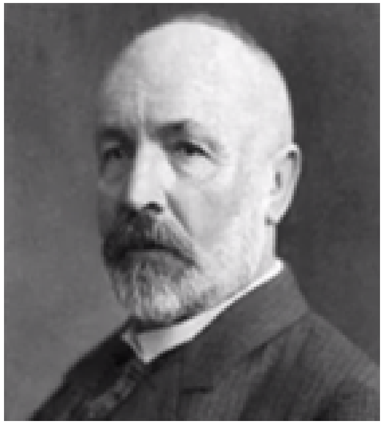

Reținem:
într-o mulțime, un element apare
o singură dată.
B = {2, 4, 8, 12, ~~4~~, 22, 46}

Mulțimi

- Descriere și notații;
- Element, relația dintre un element și o mulțime;
- Relația de apartenență etc.



Definiția mulțimii



Matematicianul german, **G. Cantor** este considerat creatorul teoriei moderne a mulțimilor: ***Mulțimea*** este „o colecție de obiecte de natură oarecare, bine determinate și distincte". Obiectele colecției se numesc ***elemente ale mulțimii***. De obicei pentru a descrie o mulțime folosim simbolurile acolade.

Exemple de mulțimi:

- **{0, 1}**
- **{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F};**
- **{a, b, {a, b}, ab}**

Mulțimile se notează cu literele mari, ale alfabetului latin (A, B, C, …), iar elementele mulțimilor, (atunci când nu ne interesează natura lor), se notează cu litere mici din alfabet, puse între acolade.

Exemplu: **A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}** sau **B = {a, b, c, d}**

Exemple de mulțimi

Există mulțimi ***numerice*** și ***nenumerice***

- Mulțimea studenților dintr-o grupă academică;
- Mulțimea păsărilor dintr-o curte;
- Mulțimea pieselor jocului de șah;
- Mulțimea corpurilor geometrice;
- Mulțimea numerelor naturale etc.

Mulțimea este unul dintre cele mai importante concepte ale matematicii moderne. Teoria mulțimilor a apărut la sfârșitul sec. al XIX-lea. ***Mulțimea*** este o noțiune primară, în sensul că nu există alte noțiuni mai simple, cu ajutorul căruia să o putem defini. În mod neriguros ***o mulțime*** este un ansamblu bine definit de obiecte, considerată ca un întreg. Sinonime pentru mulțime: grup, colecție, grămadă, echipă, familie etc.

Apartenența elementelor mulțimii

Faptul că ***un obiect este element al unei mulțimi*** se notează prin „$\in$” sau „$\ni$” (simbolul relației de apartenență).

De exemplu:

- **0 $\in$ A (vom citi: „0 este elementul mulțimii A” sau „0 aparține mulțimii A”);**
- **A $\ni$ 1 (citim: „A conține 1”);**
- **2, 3, 4, 5, 6, 7 $\in$ A (citim: „2, 3, 4, 5, 6 și 7 aparțin A”).**

Faptul că ***un obiect nu este element al unei mulțimi*** se notează prin „$\notin$”. De exemplu: $\alpha \notin$ **A**.

Faptul că ***două mulțimi au [exact] aceleași elemente*** se notează prin „=” altfel „$\neq$”. De exemplu:

- **{0, 1} = {1, 0};**
- **{0, 1} $\neq$ {0, 1, 2}.**

Cardinalul unei mulțimi

adică, numarul de elemente ale mulțimii.

Exemplu:

se dă mulțimea:

$B = \{2, 4, 8, 12, 22, 46\}$

cardinalul lui B este 6 şi se notează:

Card B = 6

Cardinalul mulțimii

Fie **M** = {2, 3, 5, 10} – o mulțime finită ce conține 4 elemente

Card (M)=4

N = {0, 1, 2, 5, 8} – o mulțime finită ce conține 5 elemente

Card (N)=5

Dacă numărul de elemente al unei mulțimi se poate exprima printr-un număr natural atunci mulțimea este finită.

Exemplu:

A = {3, 5, 7, 8, 9}

B = {10, 11, 21, 51, 81}

C = {13, 14, 15, 16, 17}

Mulțimi finite (adică nu au o infinitate de elemente)

Daca o mulțime **nu este finită**, atunci ea este **infinită** (de ex. mulțimea nr. **N**)!

Numărul natural care exprimă numărul de elemente ale unei mulțimi finite (**A**) se numește **cardinalul mulțimii** și se notează prin **Card A** sau **|*A*|**.

Exemple:

- |{0, 1}| = 2;
- |{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}| = 16;
- |{{0, 1}}| = 1.

Modalități de descriere/de definire a mulțimilor

1. Prin enumerarea elementelor mulțimii: {0, 1, 2}; {0, 1, 2, ...}; {..., −2, −1, 0, 1, 2, ...};
2. Prin specificarea unei proprietăți caracteristice doar elementelor mulțimii: {a: a div 3}; {a: a este un număr par}; $\{x: x^2 - 1 = 0\}$ etc.
3. Metoda recursivă. De exemplu, definiția recursivă a mulțimii numerelor naturale, **N**:
   - Baza: $0 \in N$;
   - Pas constructiv: Dacă $n \in N$ atunci $n+1 \in N$;
   - Nimic altceva nu mai este în N (0,5; -2; -4,5 nu aparține mulțimii numerelor **N**).

Exemple de descriere/definire a mulțimilor

Enumerați elementele mulțimilor următoare:

1. $\{x \in N : x^2 < 25\}$
2. $\{x \in N : x$ este par și $2 < x < 11\}$
3. $\{x :$ x este unul dintre primii trei cosmonauţi sovietici$\}$
4. $\{x \in R : x^2 = -1\}$ (mulțimea vidă)
5. $\{x :$ x este unul dintre centrele raionale ale RM$\}$
6. $\{x \in Z : |x| < 4\}$

Care este mulțimea numerelor?

- Naturale **N**
- Întregi **Z**
- Raționale **Q**
- Iraționale **I**
- Reale **R**
- Complexe **C**

Mulțimi remarcabile

Naturale

În matematică, **numerele naturale** sunt numerele întregi strict pozitive (1, 2, 3, …). În alte contexte, de exemplu în teoria mulțimilor sau în teoria grupurilor, 0 este primul număr natural.

Întregi

O mulțime compusă din numerele naturale {1, 2, 3, 4,...;}, împreună cu negativele acestora {−1, −2, −3, −4, ...} și cu **numărul zero**. Mulțimea se notează de obicei cu **Z** și provine de la cuvântul german ***Zahlen***, „numere”

Raționale

În matematică, un număr rațional sau în limbaj mai puțin riguros, *o fracție* este un număr real care se poate exprima drept raportul a două numere întregi, de obicei scris sub formă de fracție ordinară: a/b, unde b este nenul. Numele „rațional” nu provine de la „rațiune”=„gândire”, ci de la „rație”=„raport”

Mulțimi remarcabile

Iraționale

Un număr irațional este un număr real care **nu se poate** exprima ca raportul a două numere **Z**. Considerând corpul numerelor raționale **Q**, inclus în corpul numerelor reale **R** (Q ⊆ R), mulțimea numerelor iraționale **I** se poate defini ca diferența dintre mulțimile **R** și **Q**:

I=R\Q

I este o mulțime infinită.

Reale

Mulțimea **numerelor reale R** este alcătuită din mulțimea numerelor pozitive și negative, cu un număr infinit de zecimale. Termenul de „număr real” a fost inventat după apariția noțiunii de „număr imaginar”. Numerele **reale** pot fi raționale sau iraționale, algebrice sau transcendente, pozitive sau negative.

Complexe

Mulțimea **numerelor complexe** reprezintă mulțimea tuturor perechilor ordonate de numere reale, (a,b), înzestrate cu operațiile de adunare și înmulțire. În matematică, C au apărut ca soluții ale ecuațiilor de forma $\mathbf{x^2+p=0}$, cu **p** număr real strict pozitiv, așa cum numerele iraționale apăruseră din necesitatea de a descrie soluții ale ecuațiilor de forma $\mathbf{x^2-q=0}$, unde **q** nu este un pătrat perfect.

Exemple de mulțimi de numere remarcabile

Numere naturale($\mathbb{N}$): 0; 1; 2; 123; 48542;

Numere întregi($\mathbb{Z}$): -20; -1; 0; 1; 20;

Numere raționale($\mathbb{Q}$): $-\frac{6}{2}$; -2,5; 0; $\frac{1}{2}$; 4,2(5);

Numere reale($\mathbb{R}$): $-\sqrt{144}$; -1,(2); $\frac{4}{7}$; 20,4;

Numere iraționale($\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$): $\sqrt{7}$; π;

Numere complexe($\mathbb{C}$): $z = a+bi$

unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $i^2 = -1$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Sugestii referitor la mulțimi

- Într-o mulțime, fiecare element se scrie o singura dată;
- Ordinea în care se scriu elementele, nu contează.

Exemple:

1. D = {x: x este literă din cuvântul „matematică”}

D = {m, a, t, e, i, c, ă}

2. E = {y: y este literă din cuvântul „informatică”}

E = {f, o, r, m, a, t, c, ă, i, n}

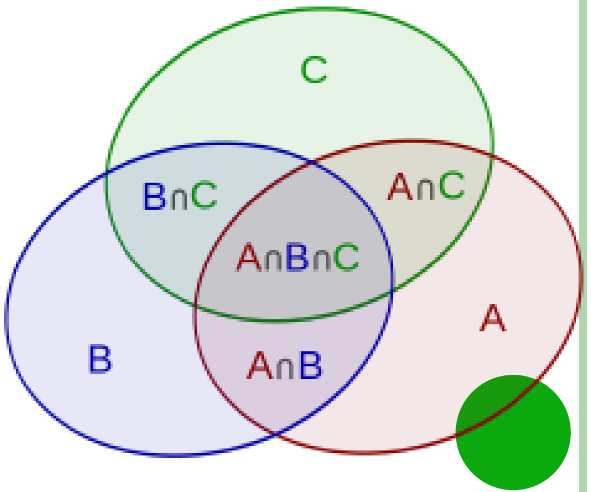
Mulțime vidă

În matematică, **o mulțime** se numește **vidă** dacă și numai dacă ea nu conține niciun element sau mai simplu: o mulțime care nu conține nici un element se numește **mulțime vidă** și se notează cu o literă din alfabetul grec „**∅**” (simbol introdus de către **Bourbaki**) și se definește astfel: $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$. **Mulțimea vidă** este unică.

De exemplu:

1. $\{x \in R: x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$;
2. $\{x \in C: x^2 + 1 = 0\} \neq \varnothing$;
3. $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

∅



Mulțimea putere

Exemplu:

Fie A= {1, 2, 3}. Câte elemente conține mulțimea A?

Card (A) = 3 sau |A|=3

Care sunt submulțimile acestei mulțimi A?

(1, 2, 3); (1, 2); (1, 3); (2, 3); (1); (2); (3); (∅)

Fie **A** o mulțime arbitrară. Familia tuturor submulțimilor din **A** se numește **mulțime putere** a lui **A** și se notează prin **P(A)** sau $\mathbf{2^A}$. Cardinalul ***mulțimii putere*** se calculează după formula $\mathbf{2^{|A|}}$. Astfel în exemplul de mai sus avem $\mathbf{2^{|A|}}$ submulțimi **($\mathbf{2^3=8}$)**

De exemplu:

- Dacă **A = {0, 1}** atunci **P(A) = {{0}, {1}, A, ∅}** (și $|2^A|=2^2=4$)
- Dacă **B** = {Ina, Ala, Ion} atunci **P(B)** = {{Ina}, {Ala}, {Ion}, {Ina, Ion}, {Ala, Ina}, {Ala, Ion}, B, ∅} (și **P(B)** = 8 = 2^3)
- Dacă A = ∅; atunci $2^A = \{\emptyset\}$ (și $|2^A| = 2^0 = 1$)

Cine poate primi la lucrarea de control 10? – mulțime putere!

Relații între mulțimi

Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și mulțimea $B = \{4, 3, 1, 2\}$

Două mulțimi sunt **egale**, dacă au aceleași elemente: $\Rightarrow A = B$

$F= \{1, 5, 8, 9\}$ și $G= \{5, 1, 9, 8\} \Rightarrow F = G$

Fie $A = \{11, 15, 81, 91\}$ și $B= \{91, 15, 81,11, 12\} \Rightarrow A \neq B$

O mulțime **B** este o submulțime a lui **A** dacă oricare element din **B** se află și în **A** și se notează: $A \subseteq \mathbf{B}$

Exemplu:

A = {11, 51, 81, 91} și **B** = {51, 11, 91, 81} – observăm că toate elementele din mulțimea **B** se află și în mulțimea **A**, dar observăm că și **A** este o submulțime a lui **B**, așa dar putem nota: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$

Exemplu: **X**= {1, 3, 5} și **Y** = {1, 5, 3} $\Rightarrow$ $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}$ **și** $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$

Dacă $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, dar $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$, adică există un element din **A** care nu se regăsește în **B**, atunci spunem că **B** este o ***submulțime proprie*** a lui **A** sau este $\Leftrightarrow \mathbf{B} \subset \mathbf{A}$.

Submulțime proprie

O mulțime **B** este o ***submulțime proprie*** a lui **A** dacă orice element al lui **B** este în **A** şi în plus există cel puțin un element din **A** care nu este în **B**.

De exemplu fie mulțimile A={2, **5**, 7, **8**, 9} și B={2, 7, 9} – observăm că toate elementele din **B** se regăsesc în **A**, dar sunt elemente în **A** care nu se regăsesc în **B** și drept urmare putem spune că **B** este o ***submulțime proprie*** a lui **A** (**B** $\subset$ **A**).

Fie avem o mulțime A={1, 3, **4**} și B={1, 3, **5**, **8**} observăm … și putem spune că **A** $\not\subset$ **B**.

Exerciții

Fie **A = {2, 5, 17, 27}**. Care din afirmaţiile următoare sunt adevărate sau false? Argumentați:

- $\mathbf{5 \in A}$
- $\mathbf{2 + 5 \in A}$
- $\mathbf{\varnothing \in A}$
- $\mathbf{A \in A}$

Fie **A = {2, {5, 17}, 27}**.

Care din afirmaţiile următoare sunt adevărate și care sunt false? Argumentați:

- $\mathbf{5 \in A}$
- $\mathbf{\{2, 27\} \subseteq A}$
- $\mathbf{\{5, 17\} \subseteq A}$

1. Descriere, notații, reprezentări ale mulțimilor.

- Mulțimea este o colecție de obiecte
- Mulțimile se notează cu litere mari: $\longrightarrow$ A, B, C
- Într-o mulțime un element apare o singură dată.

Cum reprezentăm mulțimile?

1) Prin diagrame Venn-Euler:

2) Prin enumerarea elementelor: $\underline{A} = \{\underline{1, 3, 5}\}$, $M = \{6, 8, 10, 12\}$

3) Prin precizarea unei proprietăți caracteristice elementelor mulțimii:

$A = \{x / x$ nr. nat. impar și $x \leq 5\}$

- Mulțimea care nu are niciun element se numește mulțimea vidă și se notează cu $\emptyset$
- Mulțimile în care toate elementele sunt numere se numesc mulțimi numerice

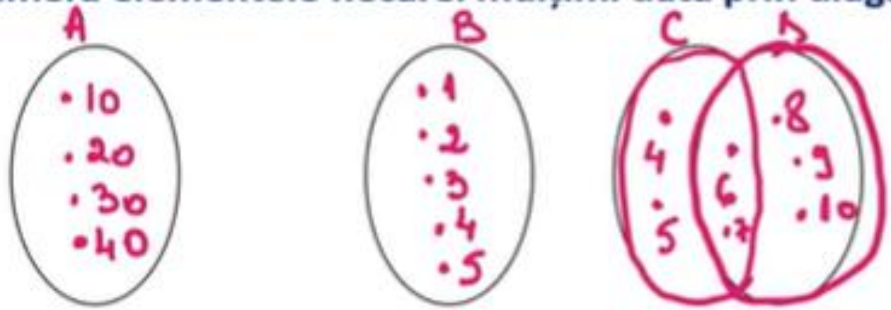
Ex.1: Scrie mulțimea literelor fiecărui cuvânt: matematică, cub, algebră.

A = {m, a, t, e, i, c, ă}, B = {c, u, b}, C = {a, l, g, e, b, r, ă}

Ex.2: Scrie mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele: 4658972, 20435, 132121.

M = {4, 6, 5, 8, 9, 7, 2}, N = {2, 0, 4, 3, 5}, P = {1, 3, 2}

Ex.3: Enumeră elementele fiecărei mulțimi dată prin diagrama Venn-Euler.



A = {10, 20, 30, 40}

B = {1, 2, 3, 4, 5}

C = {4, 5, 6, 7}

D = {6, 7, 8, 9, 10}

Ex.4: Scrie elementele fiecărei mulțimi enumerând elementele acestora.

$A = \{x | x \textit{ este numar natural si } x \leq 7\}$ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

$B = \{x | x \textit{ este numar natural si } 1 < x \leq 7\}$ = {2, 3, 4, 5, 6, 7}

2. Relația dintre un element și o mulțimi. Relații între mulțimi.

- Dacă un element x se găsește într-o mulțime A spunem că x aparține mulțimii A: $x \in A$

ex: $A = \{0, 1, \underline{2}, 3\}$ $\quad 2 \in A$, $1 \in A$, $0 \in A$, $3 \in A$

- Dacă un element x nu se găsește într-o mulțime A spunem că x nu aparține mulțimii A: $x \notin A$

ex: $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $\quad 5 \notin A$, $7 \notin A$

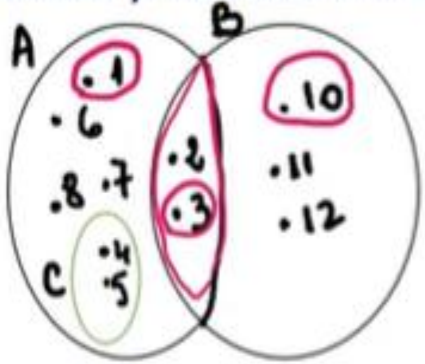
- Dacă orice element al unei mulțimi A aparține mulțimii B, spunem că mulțimea A este **inclusă** în mulțimea B: $A \subset B$

ex: $A = \{\underline{1, 2, 3, 4}\}$, $B = \{\underline{1, 2, 3, 4}, 5, 6\}$ $\quad A \subset B$

- Dacă $A \subset B$ spunem că mulțimea A este o submulțime a mulțimii B.
- Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi.
- Dacă $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci $\underline{A = B}$

Exerciții

Ex.5: Se dau mulțimile din figura de mai jos. Stabilește care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:



a) $1 \in A$ „A"	d) $4 \in A$ „A"	g) $B \subset A$ „F"
b) $2 \in C$ „F"	e) $3 \in B$ „A"	h) $A \not\subset B$ „A"
c) $10 \notin B$ „F"	f) $C \subset A$ „A"	i) $A = B$ „F"

Ex.6: Află n număr natural știind că: $\{1, 5, n, 10\} = \{1, 10, 5, 7\}$ $\Rightarrow n = 7$

3. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale.

- O mulțime căreia putem să îi enumerăm toate elementele se numește mulțime finită.

ex: mulțimea elevilor dintr-o clasă

- Numărul elementelor unei mulțimi finite A se numește cardinalul mulțimii și se notează cu card A sau |A|

ex: $A = \{0, 5, 6, 9, 10\}$ card $A = 5$

- Mulțime infinită = o mulțime care nu este finită.

ex: mulțimea numerelor naturale ⟶ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

!Numărul submulțimilor unei mulțimi finite A este egal cu $\boxed{2^{cardA}}$.

4. Operații cu mulțimi. $A = \{1, 2, \underline{4}, \underline{6}\}$, $B = \{3, \underline{4}, 5, \underline{6}, 7\}$

1) **Reuniunea:** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

2) **Intersecția:** $A \cap B = \{4, 6\}$

3) **Diferența:** $A \setminus B = \{1, 2\}$

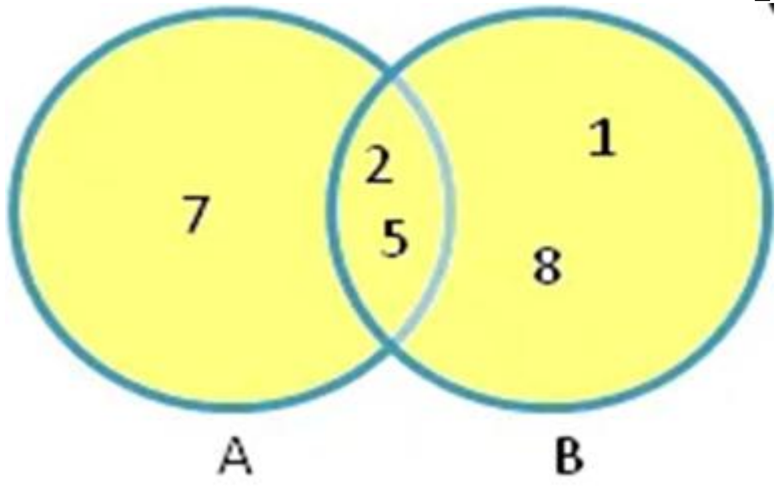
$B \setminus A = \{3, 5, 7\}$.

A-B (Care sunt în A și nu sunt în B)
B-A (Care sunt în B și nu sunt în A)

Diagramele Venn-Euler

Diagramele Venn-Euler sunt modele vizuale pentru reprezentarea relațiilor dintre mulțimi. Pentru acestea, caracteristic este că în aceeași diagramă pot fi reprezentate orice combinație posibilă de relații între mulțimi.

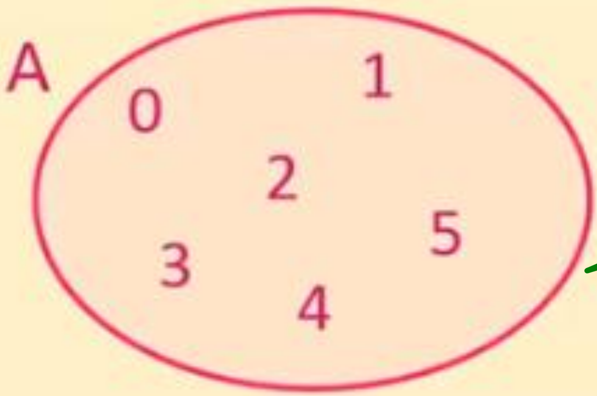
Zonele care conțin elemente se haşurează, iar zonele în care nu persistă elemente, nu se haşurează. Exemple:



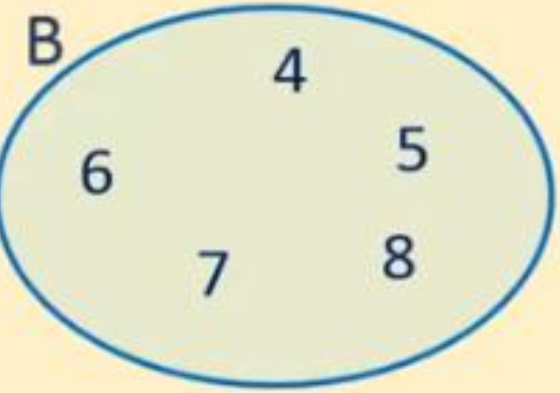
A = {2, 5, 7}, B = {1, 2, 5, 8}

Moduri de reprezentare a unei mulțimi

Avem două mulțimi **A** și **B** și le putem reprezenta în ***3 moduri*** așa cum se face în matematică să vede, care numere aparțin mulțimii A și care aparțin mulțimii B?



Prin diagramele Venn-Euler



$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Prin definire explicită

$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

$A = \{x \mid x \text{ este număr natural și } x < 6\}$

$B = \{x \mid x \text{ este număr natural și } 4 \leq x < 9\}$

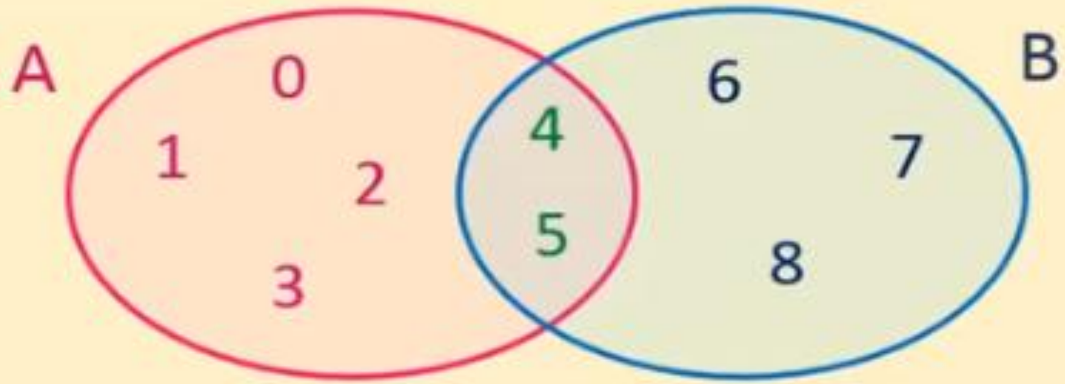
$1 \in A$
$4 \in A$
$8 \notin A$

Prin definire implicită

$4 \in B$
$6 \in B$
$11 \notin B$

Operații cu mulțimi

Să vedem în continuare câteva operații cu mulțimi, reprezentând prin diagrame cele două mulțimi **A** și **B**, în cazul în care **4** și **5** aparțin ambelor mulțimi



$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

Toate din A și B

Operații cu mulțimi:

Reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \ sau \ x \in B\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Comune

Intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \ și \ x \in B\} = \{4, 5\}$

Diferența: $A - B = \{x \mid x \in A \ și \ x \notin B\} = \{0, 1, 2, 3\}$

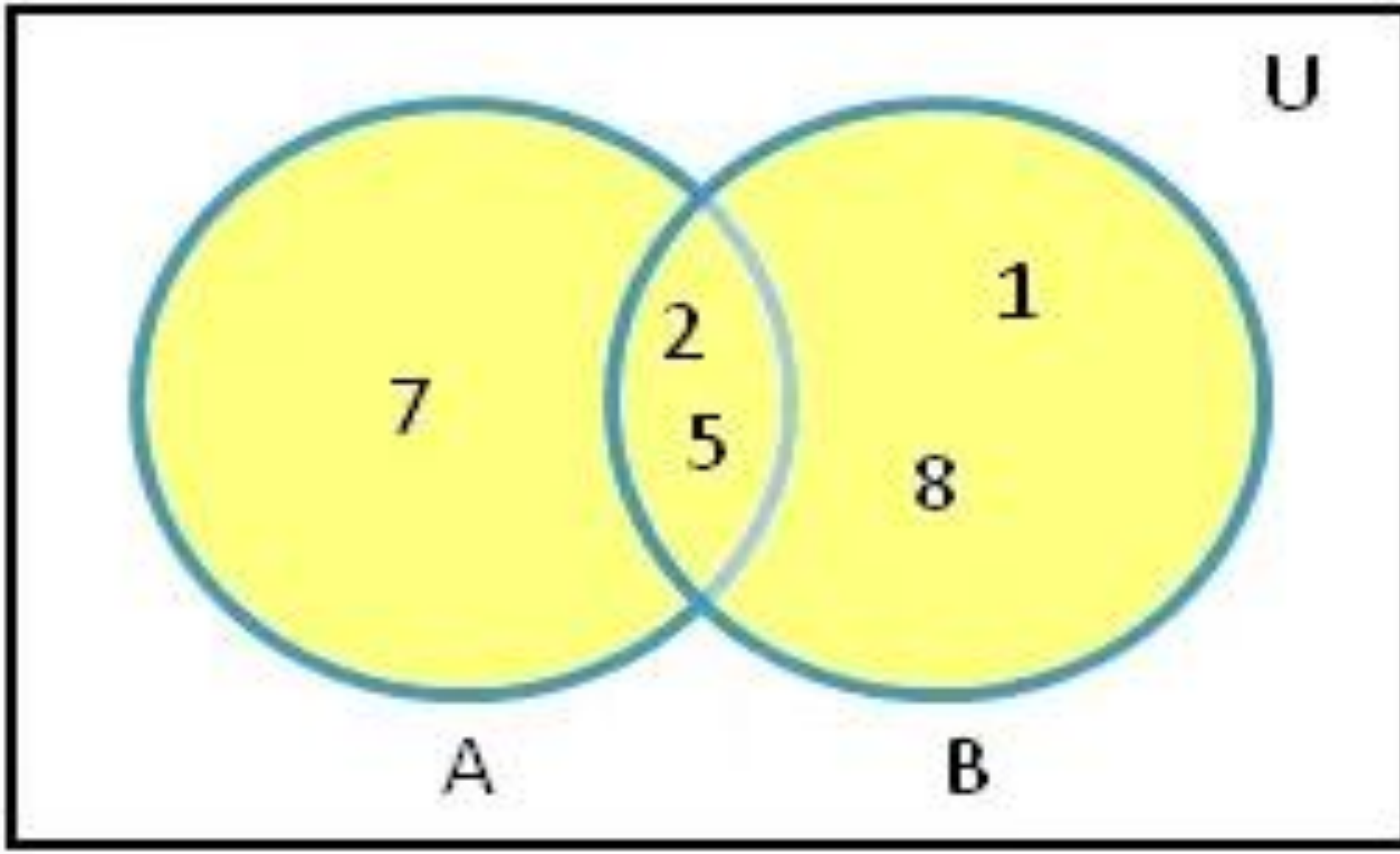
Sunt în A si nu-s in B

$B - A = \{x \mid x \in B \ și \ x \notin A\} = \{6, 7{,}8\}$

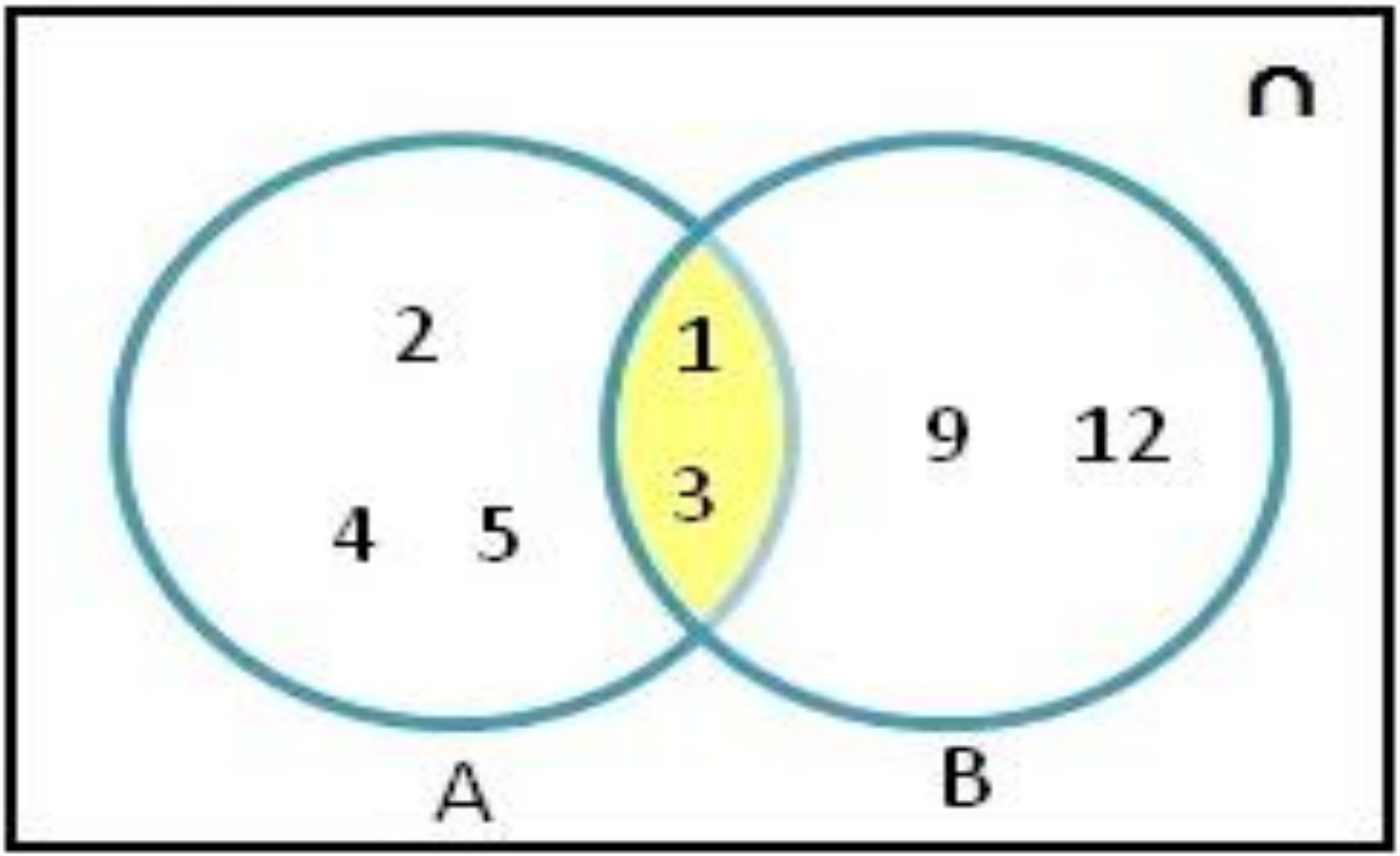
Sunt în B si nu-s in A

Definiții

- **Reuniunea** a doua mulțimi este o nouă mulțime, formată din elementele ce aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile existente.
- **Intersecția** a două mulțimi este o nouă mulțime, formată din elementele comune ale mulțimilor existente.
- **Diferența** a doua mulțimi este o nouă mulțime, formată din elementele ce aparțin primei mulțimi și nu aparțin celei dea doua mulțime.



A U B = {1, 2, 5, 7, 8}



$A \cap B = \{1, 3\}$

Însărcinare:

Se dau mulțimile:

$$A = \{a \mid a \text{ este număr natural și } a^2 + 2 < 12\}$$

$$B = \{b \mid b \text{ este număr natural și } b \text{ este divizor al lui } 8\}.$$

Scrieți elementele mulțimilor: $A \cup B, A \cap B, A - B$.

Se dau mulțimile:

$A = \{a \mid a \text{ este număr natural și } a^2 + 2 < 12\}$

$B = \{b \mid b \text{ este număr natural și } b \text{ este divizor al lui } 8\}$.

Scrieți elementele mulțimilor: $A \cup B, A \cap B, A - B$.

Rezolvare:

$a = ?$ astfel încât $a^2 + 2 < 12$

$a = 0 \Rightarrow a^2 + 2 = 0^2 + 2 = 0 + 2 = 2 < 12\ (A)$

$a = 1 \Rightarrow a^2 + 2 = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3 < 12\ (A)$

$a = 2 \Rightarrow a^2 + 2 = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6 < 12\ (A)$

$a = 3 \Rightarrow a^2 + 2 = 3^2 + 2 = 9 + 2 = 11 < 12\ (A)$

$a = 4 \Rightarrow a^2 + 2 = 4^2 + 2 = 16 + 2 = 18 < 12\ (F)$

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$b = ?$ astfel încât b este nr. natural și $b|8$

$b = 1$

$b = 2$

$b = 4$

$b = 8$

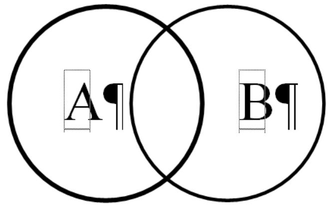
$B = \{1, 2, 4, 8\}$

Am determinat cele două mulțimi **A** și **B**!

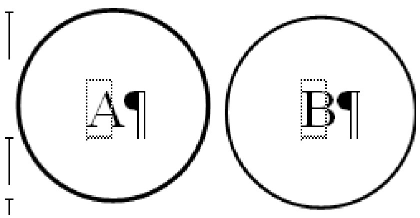
Scrieți elementele mulțimilor $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$?

Diagramele Venn-Euler

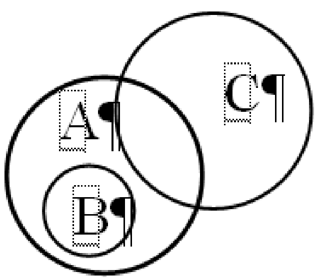
Diagramele Euler sânt modele vizuale pentru reprezentarea relațiilor dintre mulțimi. Caracteristic pentru acestea este că într-o diagramă poate reprezentată doar o combinație de relații între mulțimi.



A = {0, 1, 2, 3}, B = {3, 4, 5, 6}



A = {0, 1, 2, 3}, B = {4, 5, 6}



A = {0,1,2,3}, B = {0,1},

C = {2, 3, 4, 5, 6}

Operații cu mulțimi

O **operație** oarecare (Reuniunea sau Intersecția sau Diferența sau Suma etc. sau oarecare altă operație) este **bine definită** dacă valoarea ***a * b*** există întotdeauna şi este unică. De exemplu:

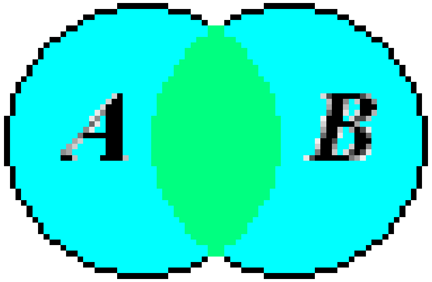
1. **a+b** pe mulțimea **N** este bine definită, deoarece suma oricăror două numere naturale este un număr natural; Dar scăderea?
2. **a-b** pe mulțimea **Z** este bine definită;
3. **a : b** pe **N** nu este bine definită, deoarece **1 : 2** $\notin$ **N**
4. **a : b** pe **R** nu este bine definită, deoarece **a : 0** nu este unică.

Pentru ca operațiile cu mulțimi să fie bine definite este nevoie de **mulțimea universală** sau **universul discursului** notată prin **U**. În cazurile când universul discursului nu este specificat toate mulțimile despre care se discută sunt considerate submulțimi ale unei mulțimi universale **U**.

Intersecția și reuniunea

Intersecția : $A \cap B = \{a : a \in A \text{ și } a \in B\}$ – elementele comune

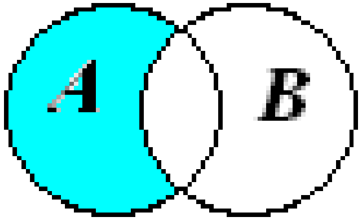
Reuniunea: $A \cup B = \{a : a \in A \text{ sau } a \in B\}$ – toate elementele



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Diferența.
Diferența simetrică a două mulțimi

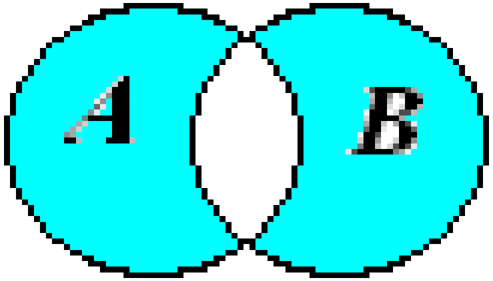
Diferența: $A - B = \{a : a \in A$ și $a \notin B\}$ – doar care aparțin mulțimii A și nu sunt în mulțimea B.



$$|A - B| = |A| - |A \cap B|$$

Diferența simetrică (Δ) a mulțimilor A și B:

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$$



$$|A \,\Delta\, B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Exemplu:

Fie mulțimile $A = \{1,2,3\}$ și $B = \{2,3,4,5\}$.
Calculați $A\Delta B$.

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$$

$A\Delta B = \{1,2,3\} \,\Delta\, \{2,3,4,5\} = (\{1,2,3\}-\{2,3,4,5\}) \cup$
$\cup (\{2,3,4,5\}-\{1,2,3\}) =$
$= \{1\} \cup \{4,5\} =$
$= \{1,4,5\}$
$A\Delta B = \{1,4,5\}$

Etapele de rezolvare:

1. Dăm la o parte din prima mulțime elementele comune cu a doua mulțime;
2. Dăm la o parte din a doua mulțime elementele comune cu prima mulțime;
3. Facem reuniunea acestor două mulțimi!

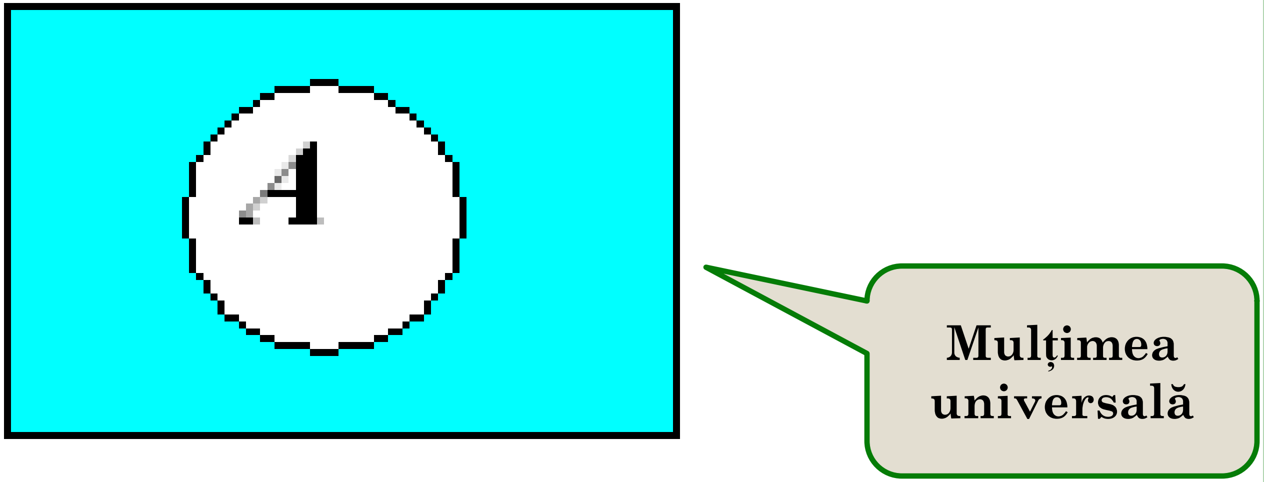
SAU

1. Fiind reuniunea mulțimilor A și B, din care vom scădea intersecția celor două mulțimi!

Astfel se calculează **Diferența simetrică** a două mulțimi!

Complementul

Complementul (A^c): $A^c = U - A$



$$|A^c| = |U| - |A|$$

De ex: Avem 24 de studenți (U), prezenți – 20 (A), lipsesc – 4 (Mulțimea studenților care lipsesc (complementul A^c))

Produsul cartezian

Definiție: O mulțime formată din perechi în care primul element este din prima mulțime, al doilea element este din a doua mulțime obligatoriu se numește ***produs cartezian***.

Exercițiu: Fie mulțimile A={0, 1, 2} și B={2, 3, 4}. Calculați produsul cartezian: AxB; AxA; BxA; BxB. Determinați numărul de elemente al acestor 4 mulțimi.

Rezolvare

a) **AxB**={0, 1, 2} x {2, 3, 4}= {(0, 2); (0, 3); (0, 4); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (2, 4)}

b) **AxA**={0, 1, 2} x {0, 1, 2}= {(0, 0); (0, 1); (0, 2); (1, 0); (1, 1); (1, 2); (2, 0); (2, 1); (2, 2)}

c) **BxA**={2, 3, 4} x {0, 1, 2}= {(2, 0); (2, 1); (2, 2); (3, 0); (3, 1); (3, 2); (4, 0); (4, 1); (4, 2)}

d) **BxB**={2, 3, 4} x {2, 3, 4}= {(2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 2); (4, 3); (4, 4)}

e) **Card (AxB)=9**

f) **Card (AxA)=9**

g) **Card (BxA)=9**

h) **Card (BxB)=9**

Exemplu de produs cartezian

Fie **A**= **{**Ion, Sandu, Nicu**}** și **B**= {Ala, Ana}

Card (A)=3

Card (B)=2

Câte perechi putem forma pentru ca copii să danseze? Determinați numărul de elemente al acestei mulțimi.

A × B= {(Ion, Ala); (Ion, Ana); (Sandu, Ala); (Sandu, Ana); (Nicu, Ala); (Nicu, Ana)}

Card(AxB)=6

Operații cu mulțimi. Exerciții

Se dă trei submulțimi ale **U = {p, q, r, s, t, u, v, w}:**

A = {p, q, r, s}, B = {r, t, v}, C = {p, s, t, u}

Determinați:

1. $B \cap C$
2. $A \cup C$
3. C^c (Ce este în U și nu este în C?)
4. $A \cap B \cap C$
5. $B - C$
6. $(A \cup B)^c$ (Ce este în U și nu este în A sau B?)

Generalizarea operațiilor cu mulțimi

Operațiile pot fi generalizate pentru mai multe mulțimi

$$\mathbf{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n =} \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$\mathbf{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n =} \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$\mathbf{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =} \prod_{i=1}^{n} A_i$$

Identități cu mulțimi

Comutativitatea	$A \cap B = B \cap A$
Asociativitatea	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributivitatea	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
De Morgan	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
Absorbția	$A \cap (A \cup B) = A$
Idempotența	$A \cap A = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$

Identități cu mulțimi

Comutativitatea	$A \cup B = B \cup A$
Asociativitatea	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivitatea	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
Absorbția	$A \cup (A \cap B) = A$
Idempotența	$A \cup A = A$; $A \cup \varnothing = A$

Distributivitatea	$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
Involuția	$A \setminus A = \varnothing$; $(A^c)^c = A$

Metode de demonstrație

În aplicații putem să întâlnim necesitatea de a demonstra unele relații între mulțimi. Se pot folosi următoarele metode:

1. Metoda tabelului de apartenență
2. Metoda grafică
3. Metoda incluziunilor duble
4. Metoda transformărilor echivalente

Metoda tabelului de apartenență

Exemplu. Demonstrați egalitatea: $A \cap (B \cup A^c) = B \cap A$

A	B	A^c	$B \cup A^c$	$A \cap (B \cup A^c)$	$B \cap A$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1

Metoda incluziunilor duble

Exemplu. Să se demonstreze următoarea identitate:

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

Suficiența:

$x \in ((A \cup B) \setminus C) \Rightarrow x \in (A \cup B)$ **şi** $x \notin C$

$\Rightarrow (x \in A$ **sau** $x \in B)$ **şi** $x \notin C$

$\Rightarrow (x \in A$ **şi** $x \notin C)$ **sau** $(x \in B$ **şi** $x \notin C)$

$\Rightarrow (x \in A \setminus C)$ **sau** $(x \in B \setminus C)$

$\Rightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Necesitatea:

$x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)x \Rightarrow (x \in A \setminus C)$ **sau** $(x \in B \setminus C)$

$\Rightarrow x \in A$ **şi** $x \notin C)$ **sau** $(x \in B$ **şi** $x \notin C)$

$\Rightarrow (x \in A$ **sau** $x \in B)$ **şi** $x \notin C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)$ **şi** $x \notin C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \setminus C$

Metoda transformărilor echivalente

Exemplu. Să se demonstreze următoarea identitate:

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

Demonstrare:

$$(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap C^c =$$

$$= (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

Concluzii

Putem afirma următoarele concluzii la tema predată:

- am identificat conceptul de mulțimi și de apartenență a elementelor mulțimii;
- am identificat conceptul de cardinal al mulțimii și totodată am clasificat modurile de reprezentare a unei mulțimii;
- am făcut cunoștință cu mulțimile remarcabile;
- am identificat conceptul de mulțime vidă, mulțime putere;
- am identificat relațiile existente între mulțimi;
- am făcut cunoștință Diagramele Venn-Euler;
- am efectuat diverse operații cu mulțimile;
- am identificat diferența simetrică a două mulțimi;
- am identificat conceptul de complement al mulțimii, de produs cartezian;
- am făcut cunoștință cu identități cu mulțimi;
- am făcut cunoștință cu metoda tabelului de apartenență;
- am făcut cunoștință cu metoda incluziunilor duble;
- am făcut cunoștință cu metoda transformărilor echivalente;
- am rezolvat câteva exemple pentru demonstrarea cunoștințelor.

Mulțumim pentru atenție!