Structuri discrete

L. POPOV, dr., lect. univ.
V. ȚÎCĂU, lect. univ.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

Plan

1. Combinatorica
2. Probleme de combinatorică
   2.1. Elemente de combinatorică
      2.1.1. Permutări;
      2.1.2. Combinări;
      2.1.3. Aranjamente.
3. Rezolvări de probleme
4. Concluzii

Finalități de învățare

La finele studierii temei respective, studentul va fi capabil:

- să definească noțiunea de combinatorică;
- să definească noțiunea de permutare;
- să definească noțiunea de combinări
- să definească noțiunea de aranjamente;
- să identifice elementele de combinatorică;
- să aplice în practică elementele studiate etc.

Combinatorica

Combinatorica este ramura matematicii care se ocupă în principal cu numărarea modurilor în care pot fi alese anumite obiecte, respectând anumite condiții.

În continuare vom prezenta cele ***trei elemente de bază ale combinatoricii***, precum și câteva aplicații ale acestora.

Pentru simplitate, ne vom referi doar la mulțimi finite de forma **A={1, 2, …, n}**, cu **n ∈ N**. Mai întâi să amintim cele ***două reguli*** fundamentale folosite în problemele de numărare:

(1) Regula sumei; (1) Regula produsului.

Regula sumei

Dacă avem două mulțimi disjuncte (*mulțimi care nu au elemente comune*) **A** și **B**, cu **m** și respectiv **n** elemente, numărul de moduri de a alege un element din mulțimea **A** sau din mulțimea **B** este **m+n**.

Altfel spus, ***reuniunea mulțimilor*** **A** și **B** are **m+n** elemente.

Regula produsului

Dacă avem două mulțimi **A** și **B**, cu **m** și respectiv **n** elemente, numărul de moduri de a alege un element din mulțimea **A** și, respectiv, unul din mulțimea **B** este **m·n**.

Cu alte cuvinte, ***produsul cartezian al mulțimi-lor*** **A** și **B** are **m·n** elemente.

Probleme de combinatorică

Deseori apar următoarele probleme: de a alege dintr-o mulţime oarecare de obiecte, numite ***elementele mulţimii***, submulţimi de elemente care posedă anumite proprietăţi; de a aranja elementele uneia sau a mai multe mulţimi într-o anumită ordine; de a determina numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi, constituite după anumite reguli.

Deoarece în astfel de probleme este vorba de anumite combinaţii de obiecte, ele se numesc ***probleme de combinatorică***. Domeniul matematicii care studiază așa probleme se numeşte ***combinatorică***.

Probleme de combinatorică

Combinatorica este un compartiment al teoriei mulţimilor. Orice problemă de combinatorică poate fi redusă la o problemă despre mulţimi finite.

Combinatorica are o importanţă considerabilă pentru teoria probabilităţilor, cibernetică, logica matematică, teoria numerelor, precum şi pentru alte ramuri ale ştiinţei şi tehnicii.

Elementele de combinatorică

- Permutări
- Combinări
- Aranjamente

Permutări

Fie **A** o mulţime finită cu **n** elemente, care poate fi ordonată în mai multe moduri. Se obţin, astfel, mulţimi ordonate diferite, care se deosebesc numai prin ordinea elementelor. Fiecare din mulţimile ordonate care se formează cu cele **n** elemente ale mulţimii **A** se numeşte ***permutare*** a elementelor acelei mulțimi.

Permutarea ca o ordonare se defineşte indicând care element este primul, care e al doilea etc.

Cu alte cuvinte, permutarea mulţimii $\mathbf{A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}}$ poate fi definită ca o aplicaţie (funcţie) biunivocă (bijectivă) a mulţimii $\mathbf{B_n = \{1, 2, 3, ..., n\}}$ în mulţimea **A**. În acest context permutarea se mai numeşte ***substituţie***.

Numărul permutărilor de **n** elemente se notează $\mathbf{P_n}$ şi se citeşte „**permutări de n**”.

Numărul permutărilor cu **n** elemente este: $\mathbf{P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ ... \ \cdot n}$

Permutări

În cazul în care avem:

- ✓ o mulţime cu un singur element care poate fi ordonată într-un singur mod, atunci $\mathbf{P_1 = 1}$
- ✓ o mulţime cu două elemente **A = {a, b}** care poate fi ordonată în două moduri, obţinându-se două permutări:**{a, b}** şi **{b, a}**, atunci $\mathbf{P_2 = 2 = 1 \cdot 2 = 2!}$
- ✓ o mulţime cu trei elemente **A = {a, b, c}** care poate fi ordonată în 6 moduri, obţinându-se șase permutări: **{a, b, c}**, **{a, c, b}**, **{b, a, c}**, **{b, c, a}**, **{c, a, b}** și **{c, b, a}**, atunci $\mathbf{P_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!}$

Menţionăm că produsul primelor **n** numere naturale nenule s-a notat prin **n!** şi se citeşte „**n factorial**”, adică

$$\mathbf{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n!}$$

Permutări

Din punct de vedere combinatorial, o ***permutare*** a unei mulțimi reprezintă o ***modalitate de a aranja secvențial elementele acesteia***.

Exemplu 1: Fie dată $\mathbf{A_1=\{1\}}$. Care este numărul de ordonări pe care le putem face? (1) $\Rightarrow P_1=1$

Exemplu 2: Fie dată $\mathbf{A_2=\{1, 2\}}$. Care este numărul de submulțimi formate din aceste elemente? Care ar fi numărul de ordonări sau care sunt variantele în care poziția contează foarte mult? (1, 2) și (2, 1) $\Rightarrow P_2 = 2 = 1 \cdot 2 = 2!$

Exemplu 3: Fie dată mulțimea $\mathbf{A_3=\{1, 2, 3\}}$. Care ar fi numărul de ordonări?

(**1**, 2, 3)

(**1**, 3, 2)

(**2**, 1, 3)

(**2**, 3, 1)

(**3**, 1, 2)

(**3**, 2, 1) $\Rightarrow P_3=6=1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$

Nr total de ordonări sau schimbări ale unei mulțimi cu 3 elemente este 6. Mulțimea dată are același nr de elemente, numai că ordinea este alta și le numim ***permutări***, adică le-am schimbat pozițiile.

Cât va fi P_4?

Fie dată mulțimea $\mathbf{A_4=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}}$.

Câte permutări putem face cu elementele acestei mulțimi?

Să vedem logica de ce anume 24: dăm fiecare element al mulțimii pe prima poziție și obținem următoarele:

$$\mathbf{a_1} - \left[\begin{array}{l} a_2, a_3, a_4 \\ a_2, a_4, a_3 \\ a_3, a_2, a_4 \\ a_3, a_4, a_2 \\ a_4, a_2, a_3 \\ a_4, a_3, a_2 \end{array}\right. \quad \mathbf{a_2} - \left[\begin{array}{l} a_1, a_3, a_4 \\ a_1, a_4, a_3 \\ a_3, a_1, a_4 \\ a_3, a_4, a_1 \\ a_4, a_1, a_3 \\ a_4, a_3, a_1 \end{array}\right. \quad \mathbf{a_3} - \left[\begin{array}{l} a_1, a_2, a_4 \\ a_1, a_4, a_2 \\ a_2, a_1, a_4 \\ a_2, a_4, a_1 \\ a_4, a_1, a_2 \\ a_4, a_2, a_1 \end{array}\right. \quad \mathbf{a_4} - \left[\begin{array}{l} a_1, a_3, a_4 \\ a_1, a_4, a_3 \\ a_2, a_1, a_3 \\ a_2, a_3, a_1 \\ a_3, a_1, a_2 \\ a_3, a_2, a_1 \end{array}\right.$$

6 6 6 6

$\mathbf{P_4=24=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!}$

$\mathbf{P_5=5 \cdot 24=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5!} \ldots$

Exprimarea factorialului mai mare cu ajutorul celui mai mic

0!=1

P_n=n! = 1 ·2 ·3 · ... · n – formula principală

n!=(n-3)(n-2)(n-1)n=(n-1!)n

Ce înseamnă PERMUTARE?

Numărul de schimbări care se pot face între elementele unei mulțimi!

Probleme: Permutări

În câte moduri 7 bile numerotate pot fi repartizate în 7 urne astfel încât toate urnele să fie ocupate?

R: $P_7 = 5040$

Se formează un tren alcătuit din 10 vagoane diferite. Să se determine în câte feluri pot fi aşezate cele 10 vagoane pentru alcătuirea trenului?

R: $P_{10} = 3628800$

Combinări

Combinări $\mathbf{C_n^k}$ înseamnă numărul de submulțimi ***neordonate*** a unei mulțimi cu **n** elemente, în fiecare din aceste submulțimi aflându-se câte **k** elemente.

Fie $\mathbf{A=\{a_1, a_2, a_3\}}$, ne interesează numărul de submulțimi pe care le pot forma cu elementele acestei mulțimi luând mai întâi câte un singur element.

$\mathbf{C_3^1 = 3;}$ $\Rightarrow \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}$

$\mathbf{C_3^2 = 3}$ $\Rightarrow \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}$

$\mathbf{C_3^3 = 1}$ $\Rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$

$\mathbf{C_3^0 = 1}$ $\Rightarrow 0! = 1$

Combinări

Fie $\mathbf{A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}}$, să vedem numărul submulțimilor pe care le pot forma cu elementele acestei mulțimi, procedând la fel:

$$\mathbf{C_4^0 = 1 \Rightarrow \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}}$$

$$\mathbf{C_4^1 = 4 \Rightarrow \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}}$$

$$\mathbf{C_4^2 = 6 \Rightarrow \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3, a_4\}}$$

$$\mathbf{C_4^3 = 4 \Rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_4\}}$$

$$\mathbf{C_4^4 = 1 \Rightarrow \{a_1, a_2, a_3, a_4\}}$$

noteaza:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Această formulă permite să găsim cu exactitate numărul de submulțimi ***neordonate***.

Formula combinărilor complementare

$C_n^k = C_n^{n-k}$, pentru $k > n/2$;

Exemplu: $C_6^5 = C_6^{6-5} = C_6^1 = 6$

$C_n^1 = n$

Probleme: Combinări

1. În câte moduri din 30 de elevi poate fi ales un comitet format din 3 elevi?

R: $C_{30}^{3} = 4060$

2. În câte moduri se pot forma echipe de câte 4 elevi și un profesor, dacă sunt 20 de elevi și 3 profesori?

R: $C_{20}^{4} \cdot C_{3}^{1} = 14535$

3. În câte moduri din 20 de judecători pot fi aleși 3 pentru participarea la un proces de judecată?

R: $C_{20}^{3} = 1140$

4. Din 10 trandafiri și 8 garoafe trebuie format un buchet ce conține 7 trandafiri și 2 garoafe. Câte buchete diferite pot fi formate?

R: $C_{10}^{7} \cdot C_{8}^{2} = 3360$

Aranjamente

Fie o mulțime **A** cu **n** elemente. Submulțimile ordonate ale lui **A** având fiecare câte **k** elemente, **k=0, n**, se numește ***aranjamente*** de **n** câte **k** elemente. Numărul aranjamentelor de **n** luate câte **k** se notează:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$\mathbf{A_n = P_k \cdot C_n}$ - aceasta este legătura între ***aranjamente***, ***permutări*** și ***combinări***.

Numărul aranjamentelor este cu mult mai mare de **k!** ori mai mare decât numărul combinărilor.

Aranjamente

Fie o mulţime **A** cu **n** elemente. Pentru k≤n, din cele **n** elemente ale mulţimii **A** se pot forma diferite mulţimi ***ordonate***, fiecare cu câte **k** elemente.

De exemplu, din elementele mulţimii {a, b, c, d} pot fi formate **12 *mulţimi ordonate***, având fiecare câte două elemente: {a, b}, {b, a}, {a, c}, {c, a}, {a, d},{d, a}, {c, b}, {b, c}, {b, d}, {d, b}, {c, d}, {d, c}.

Mulţimile ordonate care se formează din elementele unei submulţimi oarecare a unei mulţimi finite **A** se numesc ***submulţimi ordonate*** ale lui **A**, sau ***aranjamente***.

Aranjamente de **n** luate câte **k** (**n** și **k** numere naturale și **k≤n**) sunt submulţimile ordonate care conţin **k** elemente diferite din mulţimea dată cu **n** elemente.

Două aranjamente diferite din **n** elemente luate câte **k** diferă ori prin elementele înseşi, ori prin ordinea lor. Numărul aranjamentelor din **n** elemente luate câte **k** se notează $\mathbf{A_n^k}$ şi se citeşte „***aranjamente de n luate câte k***".

$\mathbf{A_n^k}$ este numărul aplicaţiilor injective ale unei mulţimi cu **k** elemente într-o mulţime cu **n** elemente.

Aranjamente

Un aranjament de **n** elemente luate câte **k**, al mulțimii **A** de cardinal **n**, reprezintă o submulțime ordonată a lui **A** de **k** elemente.

De exemplu, aranjamentele de **3** luate câte **2** ale mulțimii **A={1, 2, 3}** sunt: (1,2)
(1,3)
(2,1)
(2,3)
(3,1)
(3,2)

Similar permutărilor, aranjamentele pot fi considerate funcții injective definite pe mulțimea **{1, 2,…, k}** cu valori în **{1, 2,…, n}**. Semnificația expresiei **f(x)=y** este că elementul de pe poziția **x** din aranjament este egal cu **y**. Este clar că permutările sunt un caz particular de aranjamente: Permutările de ordin **n** sunt aranjamente de **n** luate câte **n**.

Numărul aranjamentelor de **n** luate câte **k** se notează cu A_n^k, și este egal cu $\frac{n!}{(n-k)!}$. Din nou, putem demonstra această relație în două moduri:

Aranjamente

Metoda 1

Atunci când construim un aranjament de n elemente luate câte k, pe prima poziție putem pune orice valoare, deci avem n variante. Pe a doua poziție putem pune orice valoare, mai puțin cea pe care deja am folosit-o, deci am rămas cu $n-1$ variante. Generalizând, obținem:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Aranjamente

Metoda 2

Putem construi aranjamentele de n elemente luate câte k pornind de la permutările de ordin n. Pentru asta, este de ajuns să ștergem ultimele $n-k$ elemente din fiecare permutare, însă nu vom rămâne cu aranjamente distincte. De exemplu, dacă $n=5$ și $k=2$, permutările care se transformă în aranjamentul $(3,1)$ sunt:

$$\begin{gathered}(\mathbf{3},\mathbf{1},2,4,5)\\(\mathbf{3},\mathbf{1},2,5,4)\\(\mathbf{3},\mathbf{1},4,2,5)\\(\mathbf{3},\mathbf{1},4,5,2)\\(\mathbf{3},\mathbf{1},5,2,4)\\(\mathbf{3},\mathbf{1},5,4,2)\end{gathered}$$

Se observă ușor că numărul de permutări care generează un anumit aranjament este P_{n-k}, pentru că ultimele $n-k$ elemente ale lor pot fi aranjate în P_{n-k} moduri. Așadar, $A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Probleme: Aranjamente

În câte moduri este posibil să facem un steag tricolor dacă avem la dispoziţie pânză de steag de cinci culori diferite ?

R: $A_5^3 = 60$

În câte moduri poate fi alcătuit un număr de telefon din 7 cifre dacă toate cifrele sânt diferite?

R: $A_{10}^7 = 604800$

De câte dicţionare este nevoie pentru a traduce direct din limba română, rusă, engleză, franceză, italiană în oricare din ele?

R: $A_5^2 = 20$

Reguli fundamentale ale combinatoricii

Deseori reuşim să divizăm combinările studiate în câteva clase, astfel încât fiecare combinare se include în una şi numai în una din clase. În acest caz, numărul total de combinări este egal cu suma numărului de combinări din fiecare clasă.

Această afirmaţie se numeşte ***regula de adunare a combinatoricii***. Ea poate fi formulată şi altfel: dacă obiectul arbitrar **A** poate fi ales în **m** moduri, iar alt obiect **B** poate fi ales în **n** moduri, atunci alegerea „sau **A**, sau **B**” poate fi efectuată în **m+n** moduri.

La aplicarea regulii de adunare se va ţine cont de faptul că nici unul din modurile de alegere a obiectului **A** nu trebuie să coincidă cu un careva mod de alegere a obiectului **B** (altfel, nici una din combinări să nu fie inclusă concomitent în două clase). Dacă însă astfel de coincidenţe sunt, atunci regula de adunare nu este valabilă, obţinându-se numai (**m+n–k**) moduri de alegere, unde **k** este numărul de coincidenţe.

Reguli fundamentale ale combinatoricii

La formarea combinărilor din două elemente se ştie în câte moduri poate fi ales primul element şi în câte moduri elementul al doilea, astfel încât numărul modurilor de alegere a elementului al doilea nu depinde de faptul cum a fost ales primul element.

Fie că primul element poate fi ales în **m** moduri, iar al doilea în **n** moduri. Atunci aceste două elemente pot fi alese în **mn** moduri.

Dacă obiectul A poate fi ales în m moduri şi dacă după fiecare din aceste moduri obiectul B poate fi ales în n moduri, atunci alegerea perechii (A, B), în ordinea indicată, poate fi realizată în mn moduri. Această afirmaţie se numeşte ***regula de înmulţire a combinatoricii***.

Într-adevăr, fiecare din **m** moduri de alegere a obiectului **A** poate fi combinat cu **n** moduri de alegere a obiectului **B**. Prin urmare, sunt **mn** moduri de alegere a perechii **B**).

Reguli fundamentale ale combinatoricii

Notând cu $\mathbf{A_1,...,A_m}$ cele m moduri de alegere a obiectului **A**, iar cu $\mathbf{B_{i1},...,B_{in}}$ **– n** moduri de alegere a obiectului **B**, dacă obiectul **A** este ales prin modul **i**, regula de înmulţire poate fi ilustrată astfel:

$(A_1, B_{11}), ..., (A_1, B_{1n}),$

$(A_2, B_{21}), ..., (A_2, B_{2n}),$

...

$(A_i, B_{i1}), ..., (A_i, B_{in}),$

...

$(A_m, B_{m1}), ..., (A_m, B_{mn}).$

Este evident că acest tabel conţine toate modurile de alegere a perechii **(A, B)** şi constă din mn elemente.

Dacă modurile de alegere a obiectului B nu depind de faptul cum este ales obiectul A, atunci obţinem următoarea ilustrare a regulii de înmulţire:

$(A_1, B_1), (A_1, B_2) ,..., (A_1, B_n), (A_2, B_1), (A_2, B_2) ,..., (A_2, B_n) ,.., (A_m, B_1), (A_m, B_2) ,..., (A_m, B_n).$

Regulile fundamentale ale combinatoricii

Uneori apare necesitatea de a compune (alcătui) nu perechi, dar combinaţii dintr-un număr mai mare de elemente, ceea ce conduce la următoarea problemă: câte $\mathbf{k}$ – repartizări pot fi alcătuite, dacă primul element poate fi unul de $\mathbf{n_1}$ tipuri diferite, al doilea – de $\mathbf{n_2}$ tipuri diferite, ..., elementul $\mathbf{k}$ – de $\mathbf{n_k}$ tipuri diferite? Astfel, două repartizări se consideră distincte, dacă cel puţin pe un loc sunt situate diferite elemente.

Această problemă poate fi rezolvată astfel:

Elementul mai întâi poate fi ales în $\mathbf{n_1}$ moduri. Fiecare din elementele alese poate fi asociat cu oricare din $\mathbf{n_2}$ tipuri ale elementului al doilea, obţinându-se $\mathbf{n_1 n_2}$ perechi. Fiecare pereche poate fi asociată cu oricare din $\mathbf{n_3}$ tipuri ale elementului al treilea, obţinându-se $\mathbf{n_1 n_2 n_3}$ triplete. Continuând, vom obţine în final $\mathbf{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k}$ repartizări de tipul cerut.

Regulile fundamentale ale combinatoricii

Exemplu: Din 3 ingineri şi 9 economişti trebuie să se formeze o comisie din 7 persoane. În câte moduri poate fi formată comisia, astfel încât în componenţa ei să fie cel puţin un inginer?

Rezolvare. În comisie pot fi: 1 inginer şi 6 economişti; 2 ingineri şi 5 economişti; 3 ingineri şi 4 economişti.

Alegerea unui inginer din 3 este posibilă în $C_3^1 = 3$ moduri, iar a 6 economişti din 9 – în C_9^6, moduri. În conformitate cu regula de înmulţire, comisia din un inginer şi 6 economişti poate fi aleasă în $C_3^1 \cdot C_9^6$ moduri.

Alegerea a 2 ingineri din trei este posibilă în C_3^2 moduri, iar a 5 economişti din 9 – în C_9^5 moduri. În baza regulii de înmulţire, comisia din 2 ingineri şi 5 economişti poate fi aleasă în $C_3^2 \cdot C_9^5$ moduri.

Alegerea a 3 ingineri din 3 este posibilă în C_3^3 moduri, iar a 4 economişti din 9 – în C_9^4 moduri. Conform regulii de înmulţire, comisia din 3 ingineri şi 4 economişti poate fi aleasă în $C_3^3 \cdot C_9^4$ moduri.

Astfel, numărul total de moduri în care poate fi formată comisia în a cărei componenţă să fie cel puţin un inginer, în conformitate cu regula de adunare a combinatoricii, este: $C_3^1 \cdot C_9^6 + C_3^2 \cdot C_9^5 + C_3^3 \cdot C_9^4 = 756$.

Răspuns: 756 de moduri

Formula de includere şi eliminare

Fie **N** obiecte, dintre care unele posedă proprietăţile $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_n}$. Astfel, fiecare obiect poate să nu posede nici una din aceste proprietăţi sau poate să posede una ori câteva proprietăţi.

Notăm prin $\mathbf{N(a_1, a_2, ..., a_n)}$ numărul de obiecte care posedă proprietăţile $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_n}$ (este posibil să posede şi alte proprietăţi).

Pentru a considera obiectele care nu posedă unele proprietăţi, atunci această proprietate o notăm cu simbolul „’ ”.

De exemplu, prin $\mathbf{N(a_1, a_2, a_4')}$ notăm numărul de obiecte care posedă proprietăţile $\mathbf{a_1}$ şi $\mathbf{a_2}$, însă nu posedă proprietatea $\mathbf{a_4}$ (fără a face referinţă la celelalte proprietăţi).

Notăm cu $\mathbf{N(a_1', a_2', ..., a_n')}$ numărul de obiecte care nu posedă nici una din proprietăţile indicate.

Formula de includere şi eliminare

Astfel,

$N(a_1', a_2',...,a_n') = N – N(a_1) – N(a_2) – N(a_n) +$

$+ N(a_1,a_2) + N(a_1,a_3) + ... + N(a_1,a_n) + ... + N(a_{n-1},a_n) –$

$– N(a_1,a_2) + N(a_1,a_3) + ... + N(a_1,a_n) + ... + N(a_{n-1},a_n) –$

$– N(a_1,a_2,a_3) – ... – N(a_{n-2},a_{n-1},a_n) + ... + (–1)^n N(a_1,a_2,...a_n).$

Suma algebrică se extinde asupra tuturor combinaţiilor proprietăţilor **a_1, a_2, ..., a_n**. Se scrie semnul +, dacă numărul considerat de proprietăţi este par, şi semnul – dacă acest număr este impar. De exemplu, **$N(a_3, a_5)$** se conţine cu semnul +, iar **$N(a_2, a_3, a_4)$** se conţine cu semnul „–”.

Formula de includere şi eliminare: iniţial se elimină toate obiectele care posedă una din proprietăţile **a_1, a_2, ..., a_n**, apoi sunt incluse obiectele care posedă cel puţin două din aceste proprietăţi, se elimină obiectele care posedă cel puţin trei proprietăţi etc.

Formula de includere şi eliminare

Exemplu. Într-un colectiv de cercetare activează câteva persoane, fiecare posedând cel puţin o limbă străină. Şase persoane cunosc limba engleză, şase – limba germană, şapte – limba franceză. Patru cunosc engleza şi germana, trei – germana şi franceza, doi – franceza şi engleza. O persoană cunoaşte toate cele trei limbi.

Câte persoane activează în acest colectiv?

Câte dintre acestea cunosc numai limba engleză?

Câte dintre acestea cunosc numai limba franceză?

Rezolvare. În conformitate cu formula de includere şi eliminare, numărul de angajaţi este 6+6+7–4–3–2+1=11 (pers). Numai limba engleză o cunosc 6–4–2+1=1 (pers), numai franceza cunosc 7–3–2+1=3 (pers).

Răspuns: 11 persoane activează în acest colectiv;

1 persoană cunoaște limba engleză;

3 persoane cunosc limba franceză.

Rezolvarea problemelor

Să se calculeze: $\mathbf{C_3^2+3!}$

Metoda 1:

Readucem aminte formula: de la indicele de jos (3) se înmulțesc descrescător în număr de factor cât este indicele de sus (2) și se împarte la atâți factori cât este indicele de sus.

$$C_3^2+3! = ((3\cdot 2)/(1\cdot 2)) +3! = 6/2+3!=3+3!=9$$

Metoda 2: Aplicând ***formula combinărilor complementare*** care ne spune că: $C_n^k = C_n^{n-k}$, pentru $k > n/2$; $C_n^1 = n$

$$C_3^2+3! = C_3^{3-2}+3! = C_3^1+3!=3+3!=9$$

Rezolvarea problemelor

Să se calculeze $C_8^3 - C_8^5$.

Aplicând formula combinărilor complementare care ne spune că: $\mathbf{C_n^k = C_n^{n-k}}$, pentru $k > n/2$

Rezolvare: **Metoda 1:**

$\mathbf{C_8^3 - C_8^5 = C_8^3 - C_8^{8-5} = C_8^3 - C_8^3 = 0}$

Metoda 2:

$\mathbf{C_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 / 1 \cdot 2 \cdot 3 = 56}$

$\mathbf{C_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6 \cdot 5 \cdot 4} / \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56}$

$\mathbf{C_8^3 - C_8^5 = 56 - 56 = 0}$

Rezolvarea problemelor

Să se calculeze $C_7^5 - C_6^5 - C_6^4$.

$$C_7^5 – C_6^5 – C_6^4 = C_7^{7-5} – C_6^{6-5} – C_6^{6-4} = C_7^2 – C_6^1 – C_6^2 =$$

$$=7\cdot6/1\cdot2-6-6\cdot5/1\cdot2=21-6-15=0$$

Să se calculeze $A_4^4 + C_4^4$.

$A_4^4= 4 \cdot3 \cdot2 \cdot1=24$

$C_4^4= A_4^4 / P_4=24/1\cdot2 \cdot3 \cdot4=24/24=1$

$C_4^4= C_4^{4-4}= C_4^0=1$

$A_4^4+ C_4^4=24+1=25$

Rezolvarea problemelor

Să se compare numerele $a = C_4^1 + C_4^3$ și $b = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$.

$a= C_4^1+ C_4^3=C_4^1+ C_4^{4-3}= C_4^1+ C_4^1=4+4=8$

$b=C_4^0+ C_3^1+C_3^2+ C_3^3=C_4^0+ C_3^1+C_3^{3-2}+ C_3^{3-3}=1+3+3+1=8$

S-a demonstrat că: a=b

Să se determine numărul tuturor submulțimilor de 2 elemente care se pot forma cu elemente din mulțimea {1, 2, 3, 4, 5}.

Având o mulțime cu **n** elemente, numărul tuturor submulțimilor cu **k** elemente din mulțimea dată este prin definiție $\mathbf{C_n^k}$, în cazul nostru Card {1, 2, 3, 4, 5} =5. Vom calcula $\mathbf{C_5^2=?}$

Răspuns:

$\mathbf{C_5^2= 5 \cdot 4/1 \cdot 2=20/2=10}$

Rezolvarea problemelor

Să se calculeze $C_{2009}^{2} - C_{2009}^{2007}$.

Să se verifice că $C_5^1 + C_5^3 + C_5^5 = 2^4$

Să se calculeze $C_{1000}^{2} - C_{1000}^{998}$.

Să se calculeze $C_6^2 - C_6^4$

Să se calculeze $0! + 1! + 2! + 3!$

Să se calculeze $C_8^5 - C_8^3$

Să se calculeze $3! - C_4^2$

Să se calculeze $C_{10}^{9} - C_9^8$

Mulțumim pentru atenție!