# Structuri discrete

L. POPOV, dr., lect. univ.

# Elemente de combinatorică

## (partea a doua)

## Binomul lui Newton

# Plan

1. Aranjamente cu repetiţii
2. Permutări cu repetiţii
3. Combinări cu repetiţii
4. Proprietăţi ale combinărilor
5. Binomul lui Newton
6. Proprietăţi ale formulei lui Newton
7. Aplicaţii ale binomului Newton

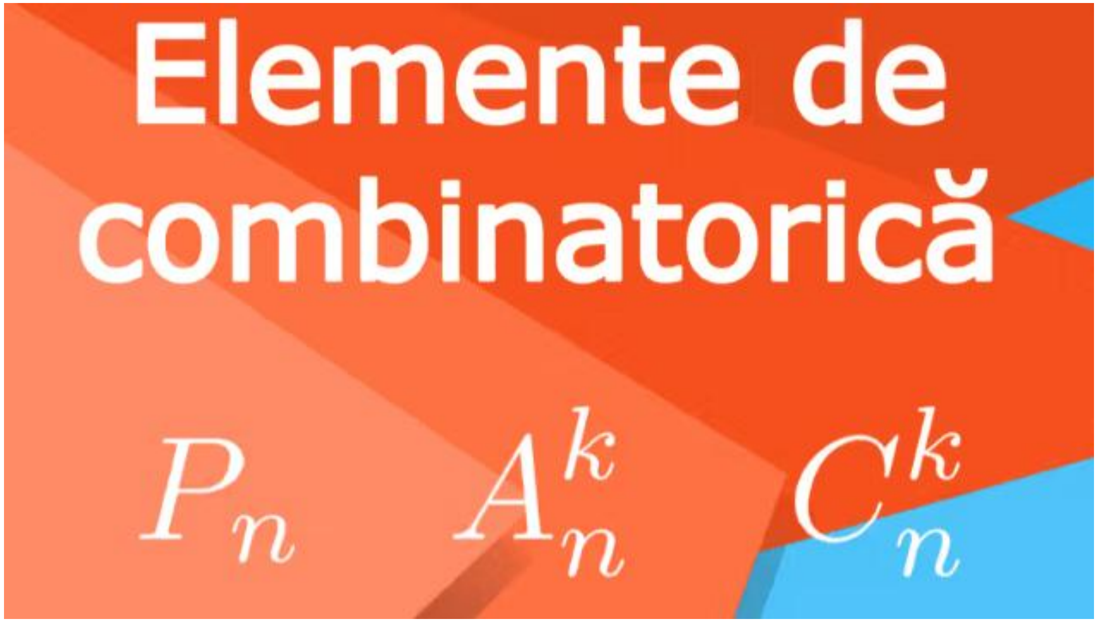
# Finalități de învățare

***La finele studierii temei respective, studentul va fi capabil:***

- să aplice în practică aranjamente cu repetiții;
- să aplice în practică permutări cu repetiții;
- să aplice în practică combinări cu repetiții;
- să identifice proprietățile combinărilor;
- să definească Binomul lui Newton;
- să identifice proprietăţi ale formulei lui Newton;
- să aplice în practică binomul lui Newton etc.

# Combinatorica

Reamintim că c***ombinatorica*** este ramura matematicii care se ocupă în principal de numărarea modurilor în care pot fi alese anumite obiecte, respectând anumite condiții, incluzând următoarele elemente de combinatorică:



# Elementele de combinatorică

***Aranjamente***

(se numește *aranjament* de **n** elemente luate câte **k**, orice mulțime ordonată alcătuită din k elemente ale mulțimii **A**. )

***Permutări***

(se numește *permutare* a mulțimii **A**, oricare mulțime ordonată care se formează cu elementele sale.)

***Combinări***

(dacă A este o mulțime cu **n** elemente, atunci submulțimile lui **A** având **k** elemente, unde **0≤k≤n**, se numesc *combinări* de n luate câte k, notate $C_n^k$ )

# Formulele principale

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^1 = n$$

$$A_n = P_k \cdot C_n$$

# Aranjament

Dacă se dă o mulțime finită **A** cu **n** elemente ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), atunci un **aranjament** de **n** elemente luate câte **k** ( $k \in \mathbb{N}^*,\ k \leq n$) reprezintă o submulţime ordonată cu **k** elemente ale mulţimii **A**. Numărul acestor aranjamente, numit şi *aranjamente de **n** luate câte **k*** şi notat $A_n^k$ se calculează conform formulei:

$$A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Acesta reprezintă numărul aplicaţiilor injective ale unei mulţimi cu **k** elemente într-o mulţime cu n elemente.

# Aranjamente cu repetiţii

***Aranjamente cu repetiţie*** de **n** luate câte **k**, notat $\bar{A}_n^k$ (unde **k**, **n** $\in \mathbb{N}^*$) este numărul aplicaţiilor unei mulţimi cu **k** elemente într-o mulţime cu **n** elemente. Se poate demonstra că:

$$\bar{A}_n^k = n^k.$$

Acesta reprezintă numărul grupelor ordonate de câte **k** elemente (distincte sau nu), ce se pot forma cu **n** elemente.

# Triunghiul aranjamentelor

$\boxed{A_n^k}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n = 0 | 1 | | | | | | |
| n = 1 | 1 | 1 | | | | | |
| n = 2 | 1 | 2 | 2 | | | | |
| n = 3 | 1 | 3 | 6 | 6 | | | |
| n = 4 | 1 | 4 | 12 | 24 | 24 | | |
| n = 5 | 1 | 5 | 20 | 60 | 120 | 120 | |
| n = 6 | 1 | 6 | 30 | 120 | 360 | 720 | 720 |

1 $\boxed{A_n^0 = 1}$

2 $\boxed{A_n^1 = n}$

3 $\boxed{A_{n+1}^{k+1} = (n+1)A_n^k}$

Construcția triunghiului se bazează pe aceste trei formule!

# Construirea triunghiului aranjamentelor

***Pentru a construi triunghiul se parcurg următorii pași***:

1. Se începe cu cei trei de 1 de la vârful triunghiului;
2. Latura stângă a triunghiului se completează cu cifra 1;
3. Pentru a obține elementele de pe linia corespunzătoare lui $n = 2$, înmulțim elementele de pe linia imediat superioară, cu 2;
4. Pentru a obține elementele de pe linia corespunzătoare lui $n = 3$, înmulțim elementele de pe linia imediat superioară, cu 3;
5. Pentru a obține elementele de pe linia corespunzătoare lui $n = 4$, înmulțim elementele de pe linia imediat superioară, cu 4;
6. Pentru a obține elementele de pe linia corespunzătoare lui $n = 5$, înmulțim elementele de pe linia imediat superioară, cu 5;
7. Pentru a obține elementele de pe linia corespunzătoare lui $n = 6$, înmulțim elementele de pe linia imediat superioară, cu 6.

Înmulțirile se fac pe diagonală paralelă cu latura din dreapta!

# Construirea triunghiului aranjamentelor

Pașii 1 și 2 au ca suport teoretic, formulele 1 și 2:

1

$$\boxed{A_n^0 = 1}$$

2

$$\boxed{A_n^1 = n}$$

Pașii 3, 4, 5 și 6 au ca suport teoretic, formula 3:

3

$$\boxed{A_{n+1}^{k+1} = (n+1)A_n^k}$$

# Construirea triunghiului aranjamentelor

De exemplu să aplicăm formula respectivă:

3

$$\boxed{A_{n+1}^{k+1} = (n+1)A_n^k}$$

$$A_5^2 = 5A_4^1 = 5.4 = 20$$

$$A_5^3 = 5A_4^2 = 5.12 = 60$$

$$A_5^4 = 5A_4^3 = 5.24 = 120$$

# Aranjamente cu repetiţii

Fie $n$ objecte diferite, din care alcătuim toate repartizările a câte $k$ obiect: $k$ - repartizări. Într-o repartizare pot fi obiecte de acelaşi tip, iar două repartizări se consideră diferite, dacă ele diferă ori prin înseşi obiectele, ori prin ordinea lor. Evident, apare problema de a afla numărul total al acestor repartizări.

Vom numi astfel de repartizări ***aranjamente cu repetiţii*** de $n$ elemente luate câte $k$. Numărul lor îl vom nota $\overline{A}_n^k$.

Pentru orice $k$, $n \in N$, $0 \leq k \leq n$, se poate demonstra că

$$\bar{A}_n^k = n^k.$$

Se demonstrează dacă aplicăm principiul inducţiei matematice după numărul $k$ de elemente în aranjament, pentru numărul $n$ fixat.

Pentru k=1 este clar că fiecare aranjament (cu repetiţii) constă numai dintr-un element, şi diverse aranjamente se obţin dacă considerăm elemente de tipuri diferite. Însă, deoarece numărul de tipuri este $n$, rezultă că şi numărul aranjamentelor este $n$. Deci, $\overline{A}_n^1 = n$.

Exemplu. Pe un perete sunt montate 6 suporturi pentru steguleţe. În fiecare suport se fixează sau un steguleţ galben, sau un steguleţ roşu. În câte moduri pot fi repartizate steguleţele?

Rezolvare: $\overline{A_2^6} = 2^6 = 64.$

# Exemple

În câte moduri putem aranja numerele formate din trei cifre 1, 2, 3 a câte 2 elemente:

a) Fără repetiții;

b) Cu repetiții.

**Rezolvare**:

***Aranjamente fără repetiții***: 12, 13, 21, 23, 31, 32 – *fiecare cifră se repetă doar o singură dată*.

Avem 6 moduri sau avem 3!

***Aranjamente cu repetiții***: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 – *fiecare cifră se repetă de două ori.*

Avem 9 moduri sau avem $3^2$ moduri.

# Exemple

În câte moduri putem forma numere din trei cifre 1, 2, 3 a câte 4 elemente ***cu repetiții***?

**Rezolvare**:

1111, 1112, 1113, ….

**Răspuns**: Avem 81 de moduri sau avem $3^4$ .

În care caz se obțin mai multe moduri din trei cifre: 1, 2, 3?

În cazul în care grupăm **3 elemente a câte 2** sau în cazul în care grupăm **2 elemente a câte 3**, cu repetiții?

***Cu repetiții***: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 – avem 9 moduri

***Cu repetiții***: 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222 – avem 8 moduri

$$3^2>2^3$$

# Permutări cu repetiţii

Aranjamentele cu repetiţii formate din $n$ elemente $a_1,a_2,\ldots,a_n$, astfel încât fiecare din aceste elemente este ataşat aranjamentului cel puţin o singură dată, se numesc *permutări cu repetiţii*. Numărul lor îl vom nota $\overline{P_n}$. Astfel, $\overline{P_n} = \overline{A_n^n} = n^n$.

Deci, permutare cu repetiţii este fiecare dintre şirurile de câte $n$ elemente ale mulţimii $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, în care orice element se poate repeta până la $n$ ori. Cu alte cuvinte, permutarea cu repetiţii este o aplicaţie oarecare a mulţimii $E_n =\{1,2,3,\ldots,n\}$ în $M$.

<u>Exemplul 1</u>. Câte numere de trei cifre pot fi formate cu cifrele 1, 2, 3?

<u>Rezolvare</u>. Numărul permutărilor cu repetiţii $\overline{P_3} = 3^3 = 27$. Aceste numere sunt: 123, 132, 213, 231, 321, 312, 111, 112, 113, 121, 131, 211, 311, 222, 221, 223, 122, 322, 212, 232, 333, 331, 332, 133, 233, 313, 323.

# Permutări cu și fără repetiţii

În câte moduri putem forma numere din trei cifre 1, 2, 3?

Fără repetiții, fiecare cifră se repetă doar o singură dată (cifre distincte (diferite într-un număr)):

123, 132, 213, 231, 312, 321

Am obținut 6 moduri!

Cu repetiții câte avem?

111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133
211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233
311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333

**Răspuns**: avem 27 de moduri sau avem $3^3$ moduri!

Permutările sunt un caz particular al aranjamentelor!

# Combinări cu repetiţii

Combinarea cu repetiţii din $n$ elemente luate câte $k$ este orice grup ce conţine $k$ elemente din $n$, în care orice element se poate repeta. Grupurile se deosebesc cel puţin printr-un element sau prin numărul de repetare a unor elemente.

Numărul tuturor combinărilor cu repetiţii din $n$ elemente luate câte $k$ se notează $\overline{C_n^k}$ şi se calculează cu formula:

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Demonstraţia acestei formule se bazează pe faptul că admiterea posibilităţii repetării elementelor este echivalentă cu mărirea cu ($k$-$1$) a numărului de elemente din care este alcătuită combinarea.

$\overline{C_n^k}$ reprezintă şi numărul de aplicaţii nedescrescătoare ale unei mulţimi total ordonate de $k$ elemente în o mulţime total ordonată de $n$ elemente.

# Combinări cu repetiţii

Exemplu 1. Să se determine numărul de triunghiuri ale căror laturi au lungimile una din valorile 4, 5, 6, 7.

Rezolvare. Avem combinări cu repetiţii din 4 elemente luate câte 3. Deci, $\overline{C_4^3} = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$.

Exemplu 2. La un oficiu poştal se vând ilustrate de 10 feluri. În câte moduri pot fi cumpărate 12 ilustrate?

Rezolvare. Ordinea în care facem cumpărătură nu contează. De aceea orice set de ilustrate cumpărate reprezintă o combinare cu repetiţii din 10 câte 12.

Astfel, există $\overline{C_{10}^{12}} = C_{21}^{12} = \frac{21!}{12!9!} = 293930$ moduri de a cumpăra 12 ilustrate.

# Exemple de combinări cu repetiţii

Avem monede de 5, 10 și 25 bani

Ce sumă putem obține combinând câte 2 monede?

5+10; 5+25; 10+25 – fără repetiții

$3=C_3^2=3!/(2! \bullet 1!)=3$

Cu repetiții în ordinea lexicografică după prima monedă:
5+5; 5+10; 5+25; 10+10; 10+25; 25+25

$6=\underline{C_3^2}=C_{3+2-1}^2=C_4^2=4!/(2! \bullet 2!)=3 \bullet 4/(1 \bullet 2)=6$

# Proprietăţi ale combinărilor

1°. Pentru orice $k, n \in N$, $0 \leq k \leq n$, este adevărată egalitatea:
$C_n^k = C_n^{n-k}$

<u>Demonstraţie</u>. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = C_n^{n-k}$.

Această formulă se numeşte *formula combinărilor complementare*. Sensul acestei afirmaţii este următorul. Fie $M$ o mulţime cu $n$ elemente. Fiecărei submulţimi $A$ cu $k$ elemente a lui $M$ îi asociem o submulţime bine determinată, cu $(n-k)$ elemente, a mulţimii $M$, şi anume $A^c$ (complementara submulţimii $A$ în raport cu mulţimea $M$). Prin această asociere, unei submulţimi cu $(n-k)$ elemente îi corespunde o singură submulţime cu $k$ elemente. Deci, numărul submulţimilor cu $k$ elemente ale lui $M$ este egal cu numărul submulţimilor sale cu $(n-k)$ elemente.

# Proprietăţi ale combinărilor

**2°.** Pentru orice $n \in N$ este adevărată egalitatea:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n.$$

***Demonstraţie***. Suma din partea stângă a egalităţii reprezintă tocmai numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu **n** elemente. Deci, vom demonstra că numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi formate din **n** elemente este egal cu $2^n$.

Vom aplica metoda inducţiei matematice.

1. Afirmaţia este adevărată pentru $n = 0$, deoarece mulţimea vidă are o submulţime unică, şi anume ea însăşi.
2. Admitem că afirmaţia este adevărată pentru $n=k$, adică mulţimea formată din $k$ elemente are $2^k$ submulţimi şi să demonstrăm că mulţimea formată din $(k+1)$ elemente are $2^{k+1}$ submulţimi.
3. Fie o mulţime $A$ formată din $(k+1)$ elemente: $A=\{a_1,a_2,...,a_k,a_{k+1}\}$ şi $B=\{a_1,a_2,...,a_k\}$ o submulţime a acesteia. Din presupunere rezultă că $B$ are $2^k$ submulţimi. Din fiecare submulţime a lui $B$ se obţine o nouă submulţime a lui $A$ prin adăugarea elementului $a_{k+1}$, deci se obţin încă $2^k$ submulţimi ale lui $A$. Prin urmare, în total sunt $2^k+2^k =2^{k+1}$ submulţimi ale mulţimii $A$. Conform principiului inducţiei matematice, proprietatea a du **(2°)** este demonstrată.

# Proprietăţi ale combinărilor

3°. Pentru orice $k,n \in N$, $0 \leq k \leq n$, este adevărată egalitatea:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

<u>Demonstraţie</u>. Aplicând formula pentru $C_n^k$, obţinem:

$$C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!};$$

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!}.$$

Astfel,

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k,$$

c.t.d.

# Proprietăţi ale combinărilor

**4°**. ***Triunghiul numeric sau triunghiul lui Pascal***.

Proprietatea **3°** permite de a calcula $C_n^k$, cunoscând că $C_{n-1}^k$ şi $C_{n-1}^{k-1}$. Cu ajutorul ei pot fi calculate succesiv numerele $C_n^k$: întâi pentru ***n=0***, apoi pentru ***n=1***, pentru ***n=2*** ş.a.m.d. Scriem valorile numerelor sub forma unui tabel triunghiular, care se numeşte ***triunghiul numeric*** sau ***triunghiul lui Pascal***.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | **1** | | | | | | | **n=0** |
| | | | | 1 | | 1 | | | | | | n=1 |
| | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | | n=2 |
| | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | | n=3 |
| | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | | n=4 |
| **1** | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | | n=5 |

# Proprietăţi ale combinărilor

**4°**. ***Triunghiul numeric sau triunghiul lui Pascal***.

În linia **(*n*+*1*)** a triunghiului sunt aşezate in ordine numerele:

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n.$$

Avem $C_n^0 = 1$, iar celelalte numere se calculează cu ajutorul formulei.

Deoarece numerele $C_{n-1}^{k-1}$ şi $C_{n-1}^{k}$ sunt dispuse în acest tabel în linia precedentă celei în care se găseşte $C_n^k$, la stânga şi la dreapta acestuia pentru a obţine $C_n^k$ adunăm numerele din linia precedentă situate la stânga şi la dreapta sa.

De exemplu, numărul **6** din linia a cincea se obţine adunând numerele **3** şi **3** din linia precedentă.

# Proprietăţi ale combinărilor

5°. Pentru orice $m,n \in R$, $0 \le m \le n$

$$C_{n-1}^{0} + C_{n}^{1} + C_{n+1}^{2} + \ldots + C_{n+m-1}^{m} = C_{n+m}^{m}.$$

<u>Demonstraţie</u>. Considerăm $m$ combinări cu repetiţii, alcătuite din $(n+1)$ elemente. Numărul acestor combinări $\overline{C}_{n+1}^{m} = C_{n+m}^{m}$. Divizăm toate aceste combinări în clase, atribuind clasei $k$ combinările în care elementul $a_1$ se conţine de $k$ ori. Restul $(m-k)$ locuri pot fi ocupate de celelalte elemente $a_2$, $a_3$, ..., $a_{n+1}$, al căror număr este egal cu $n$. De aceea, în clasa $k$ se conţin atâtea combinări câte $(m-n)$ combinări cu repetiţii pot fi alcătuite din $n$ elemente, adică $C_{n+m-k-1}^{m-k}$.

Prin urmare, numărul total de combinări este egal cu $C_{n+m-1}^{m} + C_{n+m-1}^{m-1} + C_{n}^{1} + C_{n-1}^{0}$.

Pe de altă parte, acest număr este egal cu $C_{n+m}^{m}$ c. t. d.

# Proprietăţi ale combinărilor

**6°**. Pentru orice $m, n \in N$, $m \le n$,

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \ldots + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1}.$$

***Demonstraţie***. Substituind în **5°** $n$ cu $n+1$ şi $m$ cu $m-1$, în baza proprietăţii **1°**, obţinem proprietatea **6°**.

Să examinăm câteva cazuri particulare ale proprietăţii **6°** pentru $n = 1, 2, 3$.

Pentru $n = 1$, obţinem:

$$1 + 2 + \ldots + m = m(m+1)/2. \qquad (1)$$

Pentru $n = 2$, obţinem:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + m \cdot (m+1) = m(m+1)(m+2)/3. \qquad (2)$$

Pentru $n = 3$, obţinem:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + m \cdot (m+1) \cdot (m+2) = m(m+1)(m+2)(m+3)/4. \qquad (3)$$

Cu ajutorul formulelor (2) – (3) vom deduce formule pentru calcularea în mod rațional a sumei pătratelor și a sumei cuburilor numerelor naturale de la **1** la $m$.

Scriem formula (2) sub forma:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 + 1 + 2 + \ldots + \cdot m = m(m+1)(m+2)/3.$$

Deoarece, $1 + 2 + \ldots + m = m(m+1)/2$ obţinem:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 = m(m+1)(m+2)/3 - m(m+1)/2 = m(m+1)(2m+1)6.$$

În mod analog din (3) deducem:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 = m^2(m+1)^2/4.$$

# Proprietăţi ale combinărilor

7°. Pentru $m,n \in N$:

$$C_n^1 C_{m-1}^0 + C_n^2 C_{m-1}^1 + \cdots + C_n^n C_{m-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^m.$$

8°. Pentru orice $m,n \in N$:

$$C_n^{n-1} C_{m-1}^0 + C_n^{n-2} C_{m-1}^1 + \cdots + C_n^0 C_{m-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{n-1}.$$

9°. Pentru orice $n \in N$,

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

10°. Pentru orice $m,n \in N$, $0 \le m \le n$,

$$C_n^0 C_n^m - C_n^1 C_{n-1}^{m-1} + C_n^2 C_{n-2}^{m-2} + \cdots + (-1)^n C_n^n C_{n-m}^0 = 0.$$

11°. Pentru orice $m,n \in N$, $m \ge n$,

$$C_n^0 C_{n+m-1}^m - C_n^1 C_{n+m-2}^{m-1} + C_n^2 C_{n+m-3}^{m-2} + \cdots + (-1)^n C_n^n C_{m-1}^{m-n} = 0.$$

12°. Pentru orice $m,n \in N$, $m < n$,

$$C_n^0 C_{n+m-1}^m - C_n^1 C_{n+m-2}^{m-1} + \cdots + (-1)^n C_n^m C_{n-1}^0 = 0.$$

# Binomul lui Newton

$(a+b)^1 = a+b,$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b$

$(a+b)^4 =a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$

$(a+b)^5 =a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^4+5ab^4+b^5.$

***Constatăm***: coeficienţii din partea dreaptă ai acestor formule sunt numerele din linia corespunzătoare a triunghiului lui ***Pascal***.

Observăm că coeficienții prezintă o simetrie perfectă!

# Binomul lui Newton

Pentru orice număr natural nenul ***n*** este adevărată formula:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n b^n,$$

care se numeşte ***binomul lui Newton*** sau ***formula lui Newton***.

Partea dreaptă al egalităţii se numeşte ***dezvoltarea binomului la putere***.

Se demonstrează aplicând metoda inducţiei matematice.

# Binomul lui Newton

$$P(n) = (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^m a^{n-m} b^m + \dots + C_n^n b^n,$$

1. Pentru ***n=1***, ***P(1)*** este adevărată, deoarece

   $$(a+b)^1 = a+b = C_1^0 a + C_1^1 b.$$

2. Presupunem că pentru orice număr natural ***n=k***, ***k>1***: este adevărată ***P(k)***, adică:

   $$P(k) = (a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \dots + C_k^m a^{k-m} b^m + \dots + C_k^k b^k.$$

3. Să demonstrăm că este adevărată egalitatea ***P(k+1)***.

# Binomul lui Newton

Într-adevăr,

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k \cdot (a+b) = (C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^m + \ldots + C_k^k b^k)(a+b) = (C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + \ldots + C_k^{m+1} a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + C_k^k a b^k + C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + C_k^k b^{k+1} = (C_k^0 a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) a^k b + \ldots + (C_k^m + C_k^{m+1}) a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a b^k + C_k^k b^{k+1}.$$

**Deoarece** $C_k^0 = 1 = C_{k+1}^0$, $C_k^0 + C_k^1 = C_{k+1}^1, \ldots, C_k^m + C_k^{m+1} = C_{k+1}^{m+1}, \ldots, C_k^{k-1} + C_k^k = C_{k+1}^k$, $C_k^k = 1 = C_{k+1}^{k+1}$, obţinem:

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \ldots + C_{k+1}^{m+1} a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}.$$

Prin urmare, în baza principiului inducţiei matematice, egalitatea ***P(n)*** este adevărată pentru orice număr natural $n \geq 1$.

# Binomul lui Newton

***Exemplu***. Să se calculeze $(a+b)^5$ utilizând formula lui Newton

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n b^n$$

***Rezolvare:***

$$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^2 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5.$$

Cunoscând că:

$C_5^0 = 1,\quad C_5^1 = 5,\quad C_5^2 = (5\cdot 4)/(2\cdot 1) = 10,$

$C_5^3 = C_5^2 = 10,\quad C_5^4 = C_5^1 = 5,\quad C_5^5 = 1,$

obţinem:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^2 + 5ab^4 + b^5$$

# Binomul lui Newton

Coeficienţii $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$ din formula lui Newton se numesc ***coeficienţi binomiali***, ei sunt în număr de $n+1$. Formula lui Newton poate fi scrisă astfel:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k;$$

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a b^{n-1} + (-1)^{n-1} C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k.$$

# Proprietăţi ale formulei lui Newton

**1°.** În dezvoltarea binomului la putere sunt $n+1$ termeni (numărul termenilor este egal cu numărul coeficienţilor binomiali $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$).

**2°**. În formula lui Newton, exponenţii puterilor lui *a* descresc de la **n** la **0**, iar exponenţii puterilor lui ***b*** cresc de la **0** la ***n***. Suma exponenţilor puterilor lui **a** şi **b** în orice termen al dezvoltării este **n**.

**3°**. Coeficienţii binomiali egal depărtaţi de termenii extremi ai dezvoltării sunt egali între ei, deoarece $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Într-adevăr: $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1}$, $C_n^2 = C_n^{n-2}$, etc.

**4°**. Dacă ***n*** este număr par (adică $n=2k$), atunci coeficientul binomial al termenului de mijloc al dezvoltării (adică $C_n^k$) este cel mai mare. Dacă ***n*** este impar (adică $n=2k+1$), atunci coeficienţii binomiali ai celor doi termeni de mijloc sunt egali între ei (adică $C_n^k = C_n^{k+1}$) şi sunt cei mai mari.

# Proprietăţi ale formulei lui Newton

**5°**. Termenul $C_n^k a^{n-k} b^k$, adică al **(*k+1*)**-lea termen, se numeşte ***termenul de rang k*** şi se notează cu $T_k$.

Deci, $T_k = C_n^k a^{n-k} b^k,\ k \in \{0,1,\dots,n\}$.

Termenul $T_k$ se mai numeşte ***termenul general al dezvoltării***.

Atribuind lui ***k*** valori de la **0** la ***n***, determinăm toţi termenii dezvoltării. De exemplu:

$T_1 = C_n^0 a^n b^0 = C_n^0 a^n$ este primul termen,

$T_2 = C_n^1 a^{n-1} b$ este termenul al doilea etc.

Se poate stabili şi o relaţie de recurenţă între termenii consecutivi ai dezvoltării.

Deoarece $C_n^{k+1} = (n-k)/(k+1) \cdot C_n^k$ rezultă că:

$$T_{k+1} = C_n^{k+1} a^{n-k-1} b^{k+1} = (n-k)/(k+1) \cdot C_n^k \cdot a^{n-k} b^k\ b/a = (n-k)/(k+1)\ b/a \cdot T_k$$

Am obținut următoarele: $T_{k+1} = (n-k)/(k+1)\ b/a \cdot T_k$.

# Proprietăţi ale formulei lui Newton

***Observaţie***. Să se facă distincţie între coeficientul unui termen al dezvoltării binomului la putere şi coeficientul binomial al aceluiaşi termen.

De exemplu, în dezvoltarea $(a+2)^5=a^5+10a^4+40a^3+80a^2+80a+32$ coeficientul celui de-al treilea termen al dezvoltării este 40, iar coeficientul său binomial este $C_5^2 = 10$.

**6°**. Suma coeficienţilor binomiali în dezvoltarea binomului la putere este $2^n$. Într-adevăr, punând în formula lui Newton $a=b=1$, obţinem $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n = 2^n$.

**7°.** Suma coeficienţilor binomiali ai termenilor de rang impar este egală cu suma coeficienţilor binomiali ai termenilor de rang par. Într-adevăr, înlocuind în formula lui Newton $a = 1$, $b = -1$, obţinem următoarele:

$C_n^0-C_n^1+C_n^2-...+(-1)^nC_n^n = 0$, de aici $C_n^0+ C_n^2+ C_n^4+... = C_n^1+C_n^3+C_n^5+...$

# Aplicaţii ale binomului Newton

**1.** Să se determine termenul din dezvoltarea binomului $(x+1/x^4)^{10}$ care nu îl conţine pe $x$ (adică termenul care îl conţine pe $x$ la puterea zero).

***Rezolvare***. În conformitate cu formula termenului general al dezvoltării,

$$T_k = C_{10}^k x^{10-k} \cdot (1/x^4)^k = C_{10}^k x^{10-k} \cdot x^{-4k} = C_{10}^k x^{10-5k}.$$

Conform condiţiei, $10-5k = 0$, de unde $k = 2$. Astfel, termenul cerut al dezvoltării este:

$$T_2 = C_{10}^2 x^8 : x^8 = C_{10}^2 = 45.$$

# Aplicaţii ale binomului Newton

**2.** Să se determine termenul de rangul ***7*** din dezvoltarea la putere a binomului $(y^{1/2}+x^{1/2})^n$, dacă coeficientul binomial al termenului al treilea este ***45***.

***Rezolvare***. Întâi vom calcula exponentul **n** al putem binomului. Cum $C_n^2 = 45$, obţinem:

$$n(n-1)/2 = 45 \Leftrightarrow C_n^2 = 45,\ n^2-n-90 = 0,$$

de unde $\mathbf{n_1=10}$, $\mathbf{n_2=-9}$.

Deci, exponentul puterii binomului **n=10**.

Astfel, $T_7 = C_{10}^6(y^{1/2})^4(x^{1/2})^6 = C_{10}^4y^2x^3$.

# Aplicaţii ale binomului Newton

3. Să se calculeze termenul raţional din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5$.

Rezolvare. Termenul general al dezvoltării $T_k = C_5^k(\sqrt[3]{3})^{5-k}(\sqrt{2})^k = C_5^k \cdot 3^{(5-k)/3} \cdot 2^{k/2}$.

Expresia $3^{(5-k)/2} \cdot 2^{k/2}$ va fi raţională, dacă $(5-k)/3$ și $k/2$ vor fi numere întregi.

Este evident că numărul $k$ trebuie să fie par şi mai mic decât 5.

Această restricţie o verifică numai $k = 2$.

Astfel, în dezvoltarea binomului este numai un singur termen raţional $T_2 = C_5^2 \cdot 3 \cdot 2 = 6 \cdot 5 \cdot 4/2 = 60$.

# Exemple

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n$$

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

Binomul lui Newton

Formula termenului general

1. Să se calculeze binomul:

**$(x^2+1)^{22}$**; remarcăm faptul că **$a=x^2$** și **$b=1$**, **$n=22$**

De exemplu, ne interesează, pentru acest binom, termenul al 12-lea al dezvoltării, pentru aceasta scriem următoarele:

$$T_{12} = C_{22}^{11} (x^2)^{22-11} \cdot 1^{11} = C_{22}^{11} (x^2)^{11} = C_{22}^{11} x^{22}$$

# Exemple

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n$$

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

Binomul lui Newton

Formula termenului general

2. Să se calculeze binomul:
$(2ab^2-1)^{20} = (2ab^2+(-1))^{20}$; remarcăm că $a=2ab^2$; $b=-1$; $n=20$. Calculați $T_{10}=?$

**$T_{10} = C_{20}^{9}\,(2ab^2)^{20-9} \cdot (-1)^9 = -\,C_{20}^{9}\,(2ab^2)^{11} = -\,C_{20}^{11}\,2^{11} \cdot a^{11} \cdot b^{22}$**

# Exemple

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n$$

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

Binomul lui Newton

Formula termenului general

3. Să se calculeze binomul:

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{10}$$

$T_7$=?

# MULȚUMIM PENTRU ATENȚIE!