# Structuri discrete

L. Popov, dr., lect. univ.
V. Țîcău, lect. univ.

# RELAȚII. PROPRIETĂȚI. OPERAȚII.
# RELAȚII REMARCABILE

# Plan

1. Produs cartezian.
2. Reprezentarea produsului cartezian pe un sistem de axe ortogonale
3. Submulțimi ale produsului cartezian
4. Relații binare, ternare și n-are omogenă
5. Relații universale, vidă și egale. Operații cu relații n-are
6. Proprietățile relațiilor binare. Imagine directă și inversă
7. Relații surjective, totală, injective, binare omogene
8. Reprezentarea relațiilor binare omogene. Matrice binară. Graf orientat
9. Reflexivitate și Antireflexivitate. Simetrie, asimetrie și antisimetrie
10. Tranzitivitate, reuniunea, intersecția și compunerea
11. Inversarea relației. Închiderea reflexivă, simetrică și tranzitivă
12. Ordinea parțială. Succesor, predecesor
13. Maxim/minim. Comparabilitate. Ordine lexicografică
14. Relații de echivalență, clase de echivalență

# Finalități de învățare

**La finele studierii temei respective, studentul va fi capabil:**

- să definească noțiunea de produs cartezian;
- să reprezinte produs cartezian pe un sistem de axe ortogonale;
- să definească noțiunea de relații binare, ternare, n-are omogene;
- să definească relațiile universale, vidă și egale;
- să opereze cu relații n-are;
- să enumere proprietățile relațiilor binare; de imagine directă și inversă;
- să definească relațiile surjective, totală, injective, binare omogene;
- să reprezinte relațiile binare omogene printr-o matrice binară și graf orientat;
- să definească noțiunea de Reflexivitate și Antireflexivitate, de simetrie, asimetrie și antisimetrie; de tranzitivitate, de reuniune, de intersecție și de compunere;
- să definească noțiunea de inversare a relației; închidere reflexivă, simetrică și tranzitivă; de ordinea parțială, succesor, predecesor;
- să definească noțiunea de comparabilitate, ordine lexicografică; de relații de echivalență, clase de echivalență etc.

# Produsul cartezian

Fie date două mulțimi **A** și **B**. Mulțimea ale cărei elemente sunt toate perechile ordonate (a, b), în care **a∈A** și **b∈B** se numește ***produs cartezian*** al mulțimilor **A** și **B** (doar în această ordine) și se notează prin **A x B**.

**Produsul cartezian:**

**A x B =**{(a; b) | a ∈**A; b**∈**B**}

# Produsul cartezian

O mulțime formată din perechi ordonate în care primul element este din prima mulțime, al doilea element este din a doua mulțime obligatoriu, se numește ***produs cartezian***.

**Să analizăm printr-un exemplu cum se procedează:**

Fie mulțimile **A={1,2,3}** și **B={4,5,6}**.

Calculăm produsul cartezian: a) **A x B**; b) **B x A; c**) **A x A**

**A x B =** {1,2,3}x{4,5,6}={(1,4); (1,5); (1,6); (2,4); (2,5); (2,6); (3,4); (3,5); (3,6)}

**B x A =** {4,5,6}x{1,2,3} ={(4,1); (4,2); (4,3); (5,1); (5,2); (5,3); (6,1); (6,2); (6,3)} $\Rightarrow$ **A x B ≠ B x A**

**A x A =** {1,2,3}x{1,2,3} ={(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (2,3); (3,1); (3,2); (3,3)}

**Card A x B=9   Card B x A=9   Card A x A=9**

# Produsul cartezian

**Să analizăm produsul cartezian prin alte două exemple:**

**1.** Fie mulțimile **A={0,1,3}** și **B={2}**.

Calculăm produsul cartezian: a) **A x B**;

**A x B =** {0,1,3} x {2} = {(0, 2); (1, 2); (3, 2)}

**2.** Fie mulțimile **A={7}** și **B={0,2,5}**.

Calculăm produsul cartezian: a) **A x B**;

**A x B =** {7} x {0,2,5} = {(7, 0); (7, 2); (7, 5)}

# Observații

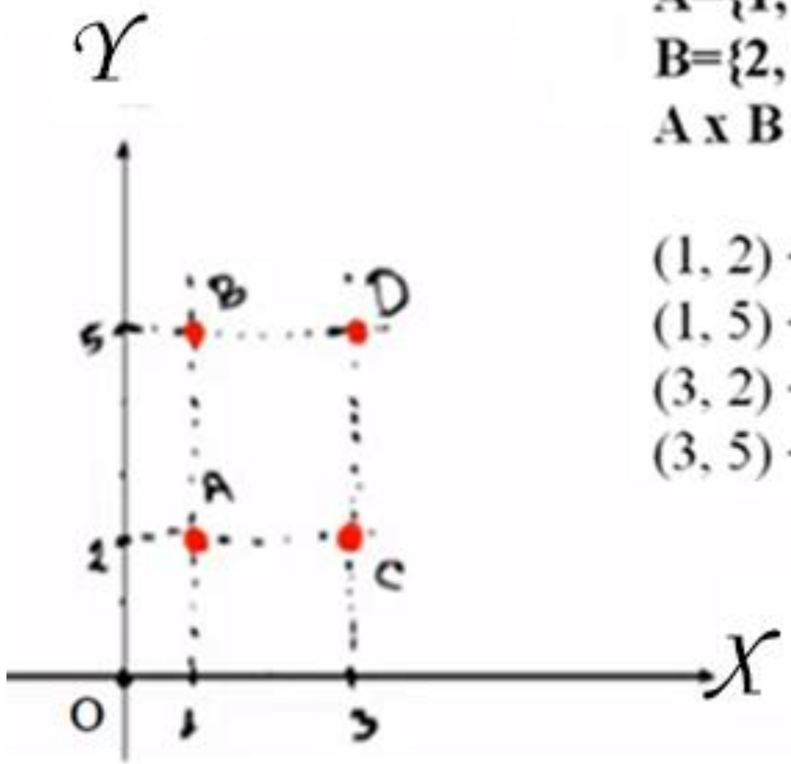
1. În exercițiile unde avem de determinat produsul cartezian a două mulțimi este bine de reținut faptul că mulțimea **A** este o mulțime finită cu **m elemente**, iar **B** este o mulțime finită cu **n elemente**. Prin urmare produsul cartezian **A x B** are **m·n** elemente, într-adevăr, cu fiecare element **a∈A** putem construi **n perechi ordonate** de forma **(a,y)**, cu condiția ca **y∈B**. Într –un final, mulțimea **A** are **m elemente** și mulțimea **B** are **n elemente**, numărul total de perechi ordonate este **m·n**.

2. Fie **A** și **B** submulțimi ale mulțimii numerelor reale **R**.

Mulțimea produsului cartezian **A x B** se poate reprezenta grafic printr-o mulțime de puncte din plan, în care s-a fixat un sistem de axe ortogonale în reperul cartezian **xOy**, asociind fiecărui element **(x,y)** ∈ **A x B**, punctul **P(x,y)**, adică **P** de coordonatele **x** și **y**.

# Reprezentarea produsului cartezian pe un sistem de axe ortogonale

**Un sistem de axe ortogonale** (axe perpendiculare) în plan prezintă un sistem format dintr-o axă orizontală (OX) și una verticală (OY) având aceeași origine și aceeași unitate de măsură. Pe una din axe vom reprezenta elementele uneia din mulțimi, pe cealaltă elementele celeilalte mulțimi. În acest plan se găsesc o mulțime de puncte fiecare având câte 2 coordonate.




A={1, 3}

B={2, 5}

A x B ⇒ {(1, 2); (1, 5); (3, 2); (3, 5)}

(1, 2) → A(1, 2)

(1, 5) → B(1, 5)

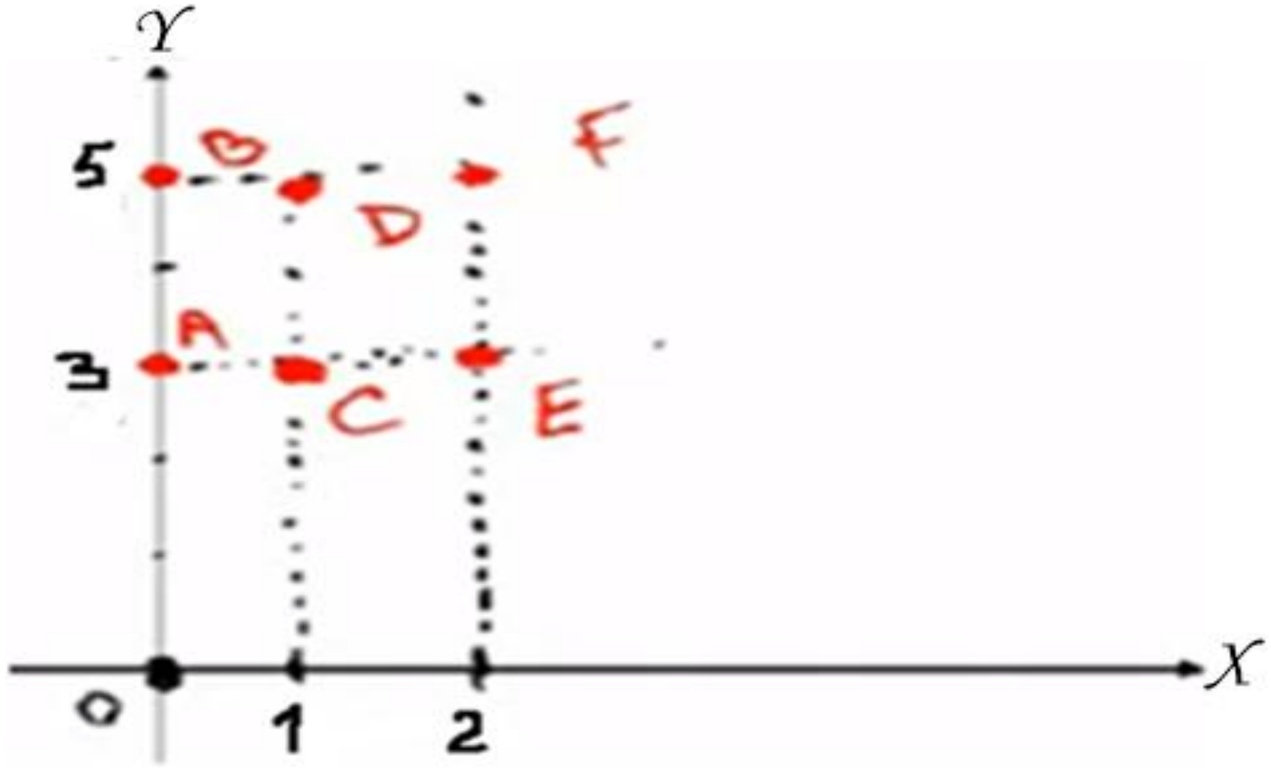
(3, 2) → C(3,2)

(3, 5) → D(3, 5)

# Reprezentarea produsului cartezian pe un sistem de axe ortogonale

**Exemplu**:
**M={0, 1, 2}** și **N={3, 5}**

**M x N =** {(0, 3); (0, 5); (1, 3); (1, 5); (2, 3); (2, 5)}
(0, 3) → A(0, 3)
(0, 5) → B(0, 5)
(1, 3) → C(1, 3)
(1, 5) → D(1, 5)
(2, 3) → E(2, 3)
(2, 5) → F(2, 5)



# Produs cartezian

Produsul cartezian a două mulțimi poate fi extins pentru trei mulțimi și chiar pentru mai multe.

Fiind dată o a treia mulțime **C**, putem construi următoarele produse carteziene:

$$(A \times B) \times C = \{((a, b), c): a \in A, b \in B, c \in C\}$$

$$A \times (B \times C) = \{(a, (b, c)): a \in A, b \in B, c \in C\}$$

$$A \times B \times C = \{(a, b, c): a \in A, b \in B, c \in C\}$$

$$\text{Card}(A \times B \times C) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) \times \text{Card}(C)$$

# Produsul cartezian a mai multor mulțimi

Elementele produsului cartezian de forma $\mathbf{A_1 \times A_2 \times ... \times A_n}$ se numesc ***n*-upluri** ordonate.

Mulțimile $\mathbf{A_1, A_2, ..., A_n}$ se numesc **factorii produsului cartezian**, iar elementele $\mathbf{a_1, a_2,...,a_n}$ se numesc **coordonatele** (sau **proiecțiile**) elementului $\mathbf{(a_1, a_2, ..., a_n)}$.

În cazul în care:

$\mathbf{A_1 = A_2 = ... = A_n = A}$ putem nota $\mathbf{A_1 \times A_2 \times ... \times A_n}$ cu $\mathbf{A^n}$

Adică:

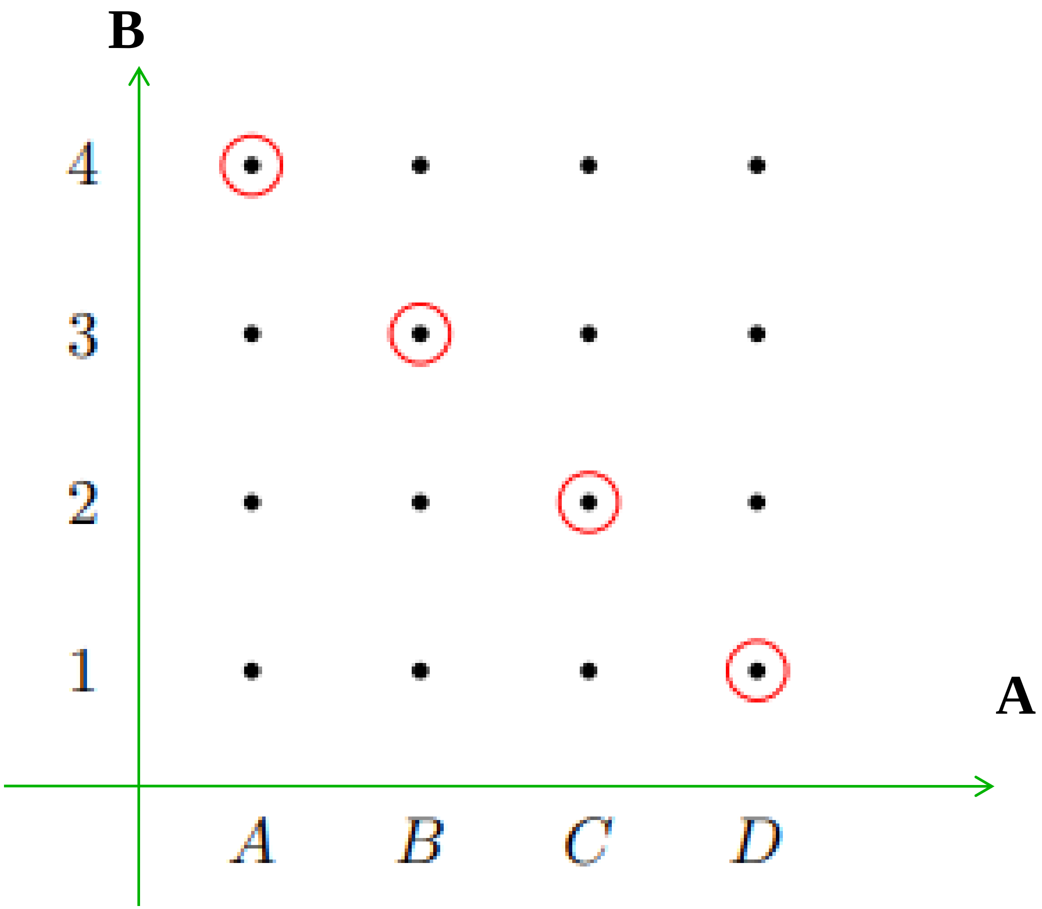
$$\mathbf{A^2 = A \times A}$$

$$\mathbf{A^3 = A \times A \times A}$$

$$\mathbf{A^n = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n}}$$

# Produs cartezian. Submulțimi. Exemple

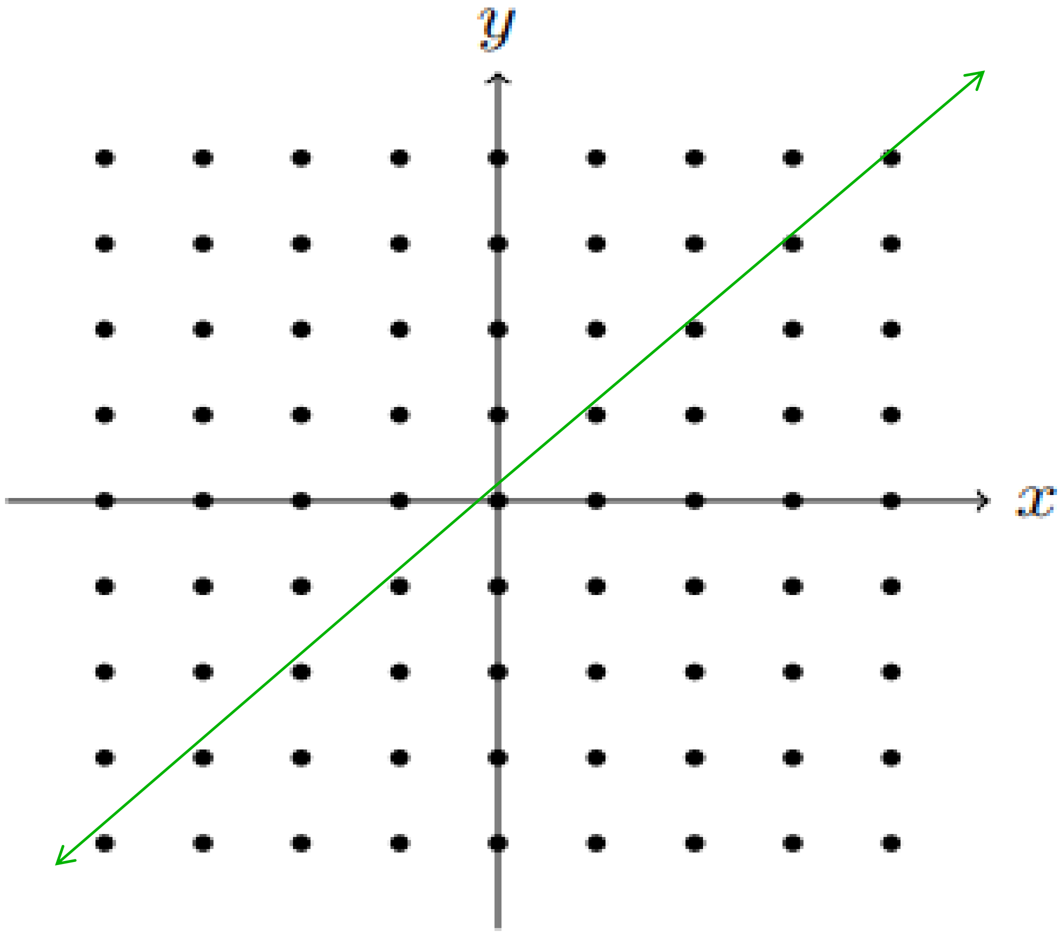
Fie **A = {A, B, C, D}** și **B = {1, 2, 3, 4}**




Fie dat de ex: **C = {(A, 4); (B, 3); (C, 2); (D, 1)}** $\subseteq$ **A × B**

**C** este submulțime a produsului cartezian **A × B**

# Produs cartezian. Submulțimi. Exemple




$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sau $\mathbb{Z}^2$

# Relații binare

Studiul unor noţiuni fundamentale ale matematicii care are aplicaţii directe în informatica teoretică şi aplicaţiile informaticii, se realizează cu ajutorul unor elemente de logică matematică şi de teoria mulţimilor care au rolul de a pune în evidenţă structuri fundamentale pe mulţimile de lucru. Noţiunea de relaţie are rolul de unificator al structurilor abstracte pe diverse mulţimi de obiecte şi conduce la aplicaţii imediate, în modelarea matematică a unor fenomene din alte ştiinţe şi din realitatea fizică. **Relația binara** este o parte dintr-un produs cartezian.

# Relații binare, ternare

O **relație binară** este o submulțime a unui produs cartezian de forma **A** × **B**. Din acest motiv mai spunem că avem o **relație binară** de la **A** la **B.**

O **relație ternară** între mulțimile **A**, **B** și **C** este o submulțime a produsului cartezian **A** × **B** × **C**.

**De exemplu:**

$R=\{(0, 1), (1, 0)\} \subseteq Z^2$;

$R=\{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\} \subseteq Z^3$

# Relații n-are

O relație n-ară între mulțimile $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_n$ este o structură ordonată de forma $\rho = (A_1, A_2, A_3, ..., A_n, R)$ unde

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... A_n$.

Mulțimea **R** se numește **graficul relației ρ**.

În particular, dacă mulțimile unei relații sunt identice $\mathbf{A_1=A_2=A_3=...=A_n}=A$ spunem că avem o r**elație n-ară omogenă** pe A.

**De exemplu**: Relația student, student.

# Relație binară, ternară, n-ară omogenă

**Observații:**

1. Dacă, $n = 2$, relația $(A_1, A_2; R)$ se numește **relație binară**.

Dacă $n = 3$, relația $(A_1, A_2, A_3; R)$ se numește **relație ternară**.

Se vor nota aceste relații prin: $\rho = (A_1, A_2; R)$; $\rho = (A_1, A_2, A_3; R)$.

2. Dacă $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$ relația $\rho = (A_1, ..., A_n; R)$ se numește **relație n-ară omogenă pe A.**

3. Mulțimile $A_1, ..., A_n$ se numesc mulțimi de bază ale relației $\rho = (A_1, ..., A_n; R)$. Notația $(x_1, ..., x_n) \in R$ este înlocuită prin $R(x_1, ..., x_n)$ și pentru $n = 2$ în loc de $(x_1, x_2) \in R$ se va nota $x_1 \rho x_2$ pentru $\rho = (A_1, A_2; R)$.

4. Graficele relațiilor $n$ - are sunt mulțimi și din acest motiv unele rezultate din teoria mulțimilor se vor transpune în teoria relațiilor.

5. **Exemplu:** $A_1 = A_2 = \mathbf{Z}$ mulțimea numerelor întregi și atunci relația de divizibilitate în $\mathbf{Z}$ are graficul dat prin:

$\mathbf{R} = \{(x,y) \in \mathbf{Z} | \ \exists\ m \in \mathbf{Z}$ a. î. $y = mx\}$.

# Relații universale, vidă și egale

**Definiție:** 1]Relația n-ară între elementele mulțimilor $A_1, ..., A_n$ al cărei grafic este $R = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ se numeşte **relație universală.**

2] Relația n –ară $(A_1, ..., A_n; R)$ cu graficul $R = \varnothing$ se numeşte **relație vidă.**

3] **Relațiile** n –are $(A_1, ..., A_n; R)$ şi $(B_1, ..., B_m; S)$ **sunt egale**, notat $(A_1, ..., A_n; R) = (B_1, ..., B_m; S)$, dacă şi numai dacă, avem: $n = m$; $A_1 = B_1, ..., A_n = B_m$ şi $R = S$.

4] Relația n – ară $(A_1, ..., A_n; R_1)$ **este inclusă în relația** $(A_1, A_2, ..., A_n; R_2)$ dacă $R_1 \subset R_2$ şi se va nota prin $(A_1, ...,A_n;R_1) \subset (A_1,...,A_n; R_2)$ sau simplu $R_1 \subset R_2$.

# Operații cu relații n-are

Fie date **relaţiile n-are ($A_1$, ..., $A_n$; $R_1$)** şi **($A_1$, ..., $A_n$; $R_2$)**.

1] **Intersecția relațiilor n-are** este relația n-ară ($A_1$, ..., $A_n$;$R_1 \cap R_2$) unde $R_1 \cap R_2$ este intersecția graficelor celor două relații.

2] **Reuniunea relațiilor n-are** date este relația n-ară: ($A_1$, ..., $A_n$; $R_1 \cup R_2$) unde $R_1 \cup R_2$ este reuniunea graficelor celor două relații.

3] **Complementara relației n-are** ($A_1$, ..., $A_n$; R) este relația n-ară ($A_1$, ..., $A_n$; cR) unde cR este complementara graficului R dată prin:

$$cR = \{(a_1, a_2 ..., a_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \mid (a_1, a_2 ..., a_n) \notin R\}$$

# Relații binare

Fie $\rho = (A, B;R)$ o relație binară și vom nota $(a, b) \in R$ prin $a\rho b$, citit "$a$ în relația $\rho$ cu $b$" și avem:

$$a\rho b \Leftrightarrow (a, b) \in R \text{ pentru } \rho = (A, B;R).$$

Pentru relația binară $\rho = (A, B;R)$ se asociază mulțimile:

$$\begin{cases} \text{dom } \rho = \{a \in A \mid \exists b \in B;\ b \in B \wedge (a\ \rho\ b)\} \\ \text{codom } \rho = \{b \in B \mid \exists a \in A;\ a \in A \wedge (a\ \rho\ b)\} \end{cases}$$

numite **domeniul** și respectiv **codomeniul** relației $\rho$.

**Exemplu:**

Fie **A = {0, 1, 2}** atunci construim relația **omogenă** cu condiția „x**<y**" care este $\rho$ = **(A, A; {(0, 1), (0, 2), (1,2)})**.

O **relație n-ară** între mulțimile $\mathbf{A_1, A_2, ..., A_n}$ este o structură ordonată de forma $\boldsymbol{\rho = (A_1, A_2, ...,A_n, R)}$ unde $\mathbf{R \subseteq A_1 \times A_2 \times ...A_n}$.

Amintim, că mulțimea **R** se numește **graficul relației $\rho$**.

# Proprietățile relațiilor binare

Fie $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{(A, B; R_1)}$ şi $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{(B, C; R_2)}$ relaţii binare.

1) **Produsul** sau **compunerea relațiilor ρ și σ** este o relație binară notată $\sigma \circ \rho = (A, C; R)$ unde:

$$R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists\, b \in B, (a\, \rho\, b) \wedge (b\, \sigma\, c)\}$$

2) **Inversa relației binare** $\rho = (A, B; R_1)$ este o relație binară notată: $\rho^{-1} = (A, B; R_1^{-1})$ unde:

$$R_1^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R_1\}.$$

# Imaginea directă și inversă a mulțimii

**Domeniul relației**

$$\text{dom}(\rho) = \{a \in A : \exists\, b \in B \text{ încât } (a, b) \in R\}$$

**Codomeniul relației**

$$\text{codom}(\rho) = \{b \in B : \exists\, a \in A \text{ încât } (a, b) \in R\}$$

**Imaginea directă** a mulțimii $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}$ prin relația $\boldsymbol{\rho}$ este

$$\rho(X) = \{b \in B : \exists\, a \in X,\ a\rho b\}$$

**Imaginea inversă** a mulțimii $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{B}$ prin relația $\boldsymbol{\rho}$ este

$$\rho^{-1}(Y) = \{a \in A : \exists\, b \in Y,\ a\rho b\}.$$

# Imaginea directă și inversă a mulțimii. Exemple

Fie $A = \{a, b, c, d\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Fie $R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 4)\}$ și $\rho = (A, B; R)$.

Atunci imaginea $\rho(\{a\}) = \{1,2\}$;

$\rho(\{a, b\}) = \{1, 2, 4\}$;

$\rho(\{c, d\}) = \varnothing$; $\rho(\{c\})=?$; $\rho(\{d\})=?$; $\rho(\{b\})=?$

---

$\rho^{-1}(\{1\}) = \{a\}$;

$\rho^{-1}(\{1, 4\}) = \{a, b\}$;

$\rho^{-1}(\{3\}) = \varnothing$; $\rho^{-1}(\{2\})=?$; $\rho^{-1}(\{4\})=?$; $\rho^{-1}(\{1, 2\})=?$

# Imaginea directă și inversă a mulțimii. Exemple

Fie $A = \{Student1, Student2, Student3, Student4\}$ și

$B = \{Curs1, Curs2, ..., Curs_\infty\}$.

Fie $R = \{(Student1, Curs2), (Student2, Curs2), (Student2, Curs4), (Student3, Curs1)\}$ și $\rho = (A, B, R)$.

Atunci:

$\rho(\{Student1, Student2\}) = \{Curs2, Curs4\}$;

$\rho(\{Student4\}) = \varnothing$; $\rho(\{Student2, Student3\})=?$

---

$\rho^{-1}(\{Curs1, Curs2, Curs4\}) = \{Student1, Student2, Student3\}$;

$\rho^{-1}(\{Curs3\}) = \varnothing$; $\rho^{-1}(\{Curs1, Curs2\}) = ?$

# Relații surjective, totală, injective, binare omogene

**Relația** $\rho$ este **surjectivă** dacă $\rho$ (A) = B.

**Relația** $\rho$ este **totală** dacă $\rho^{-1}(B) = A$.

**Relația** este **injectivă** dacă pentru orice $a \in A$ este cel mult un element $b \in B$ încât $(a, b) \in R$.

Fie o **relație binară omogenă** $\rho = (A, A; R)$;

În acest caz putem folosi expresiile:

„**ρ** relație binară pe mulțimea **A**”

„**A** este înzestrată cu o relație binară”

# Reprezentarea relațiilor binare omogene. Matrice binare

Relația poate fi definită prin mai multe moduri.

Fie $R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(c,b)\}$ definită pe $A = \{a,b,c\}$;

Matricea binară (imaginar pe rînduri și pe coloane scrieți elementele mulțimii A)

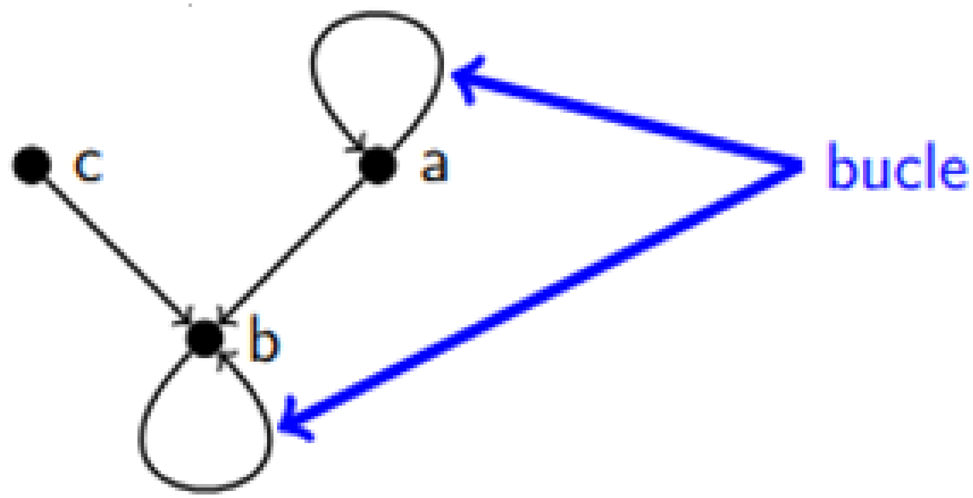
$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dacă **R** ar fi relație **totală**, atunci în **R** se adaugă elementele (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, c) și matricea va fi completată cu unități (**1**). În cazul în care **R** e mulțimea **vidă**, atunci matricea e completată toată cu zerouri (**0**).

# Reprezentarea relațiilor binare omogene printr-un graf orientat

Fie $R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(c,b)\}$ definită pe $A = \{a,b,c\}$;

Graful orientat



# Proprietăți: Reflexivitate

Relația $\rho$ **= (A, A; R)** se numește **reflexivă** dacă pentru orice $a \in A$ avem **(***a***,** *a***)** $\in$ **R** (sau $a\rho a$).

**Reflexivitate – pe diagonală să fie 1 și pentru orice vârf să fie prezentă bucla.**

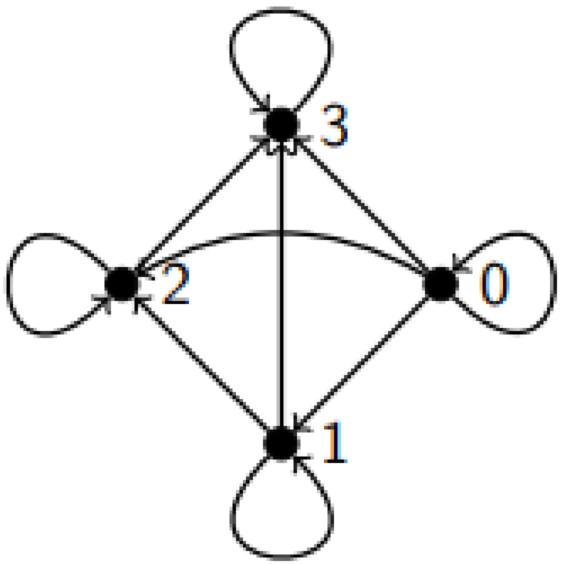
**Reflexivitate** - proprietate a unei relații logice, matematice de a avea loc întotdeauna între un element și el însuși.

# Reflexivitate

Fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $\rho = "\leq"$.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Diagonala principală este 1.




Toate vîrfurile au bucle.

# Proprietăți: Antireflexivitate

Relația **$\rho$ = (A, A; R)** se numește **antireflexivă** dacă pentru orice $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}$ avem **($a$, $a$)** $\notin$ **R**.

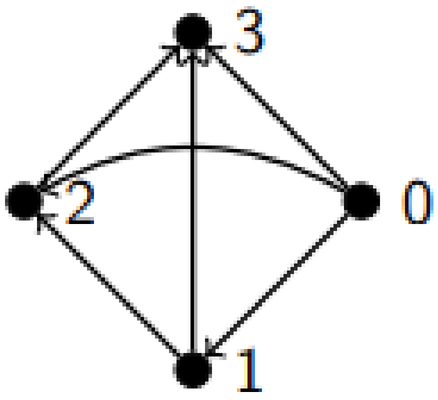
**Antireflexivitate - pe diagonală să fie 0 și pentru orice vârf să nu fie prezentă bucla.**

# Antireflexivitate

Fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $\rho = "<"$.

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Diagonala principală este 0




Nu sînt bucle

# Proprietăți: Simetrie

**Relația omogenă** $\rho$ = (A, A; R) se numește **simetrică** dacă pentru orice (a, b) $\in$ R avem (b, a) $\in$ R.

**De exemplu:**

Fie **A = {0, 1, 2, 3} și R = {(3, 2), (1, 1), (2, 3), (0, 2), (2, 0)}**.

**Exercițiu:**

- ✓ Construiți matricea acestei relații.
- ✓ Construiți matricea transpusă (liniile devin coloane).
- ✓ Matricea relației este simetrică.
- ✓ Construiți graful orientat.

# Matricea unei relații

**A = {0, 1, 2, 3} și R = {(3, 2), (1, 1), (2, 3), (0, 2), (2, 0)}.**

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |

# Proprietăți: Asimetrie

**Relația** $\rho = (A, A; R)$ se numește **asimetrică** dacă pentru orice $(a, b) \in R$ avem $(b, a) \notin R$.

**De exemplu:**

$A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $R = \{(3, 2), (2, 3), (0, 2)\}$.

**Asimetrie -** proprietate a relațiilor între două elemente, care nu este valabilă și în sens reciproc.

# Proprietăți: Antisimetrie

**Relația** $\rho = (A, A; R)$ se numește **antisimetrică** dacă pentru orice $(a, b) \in R$ avem $(b, a) \notin R$ cu excepția cazurilor când $a = b$.

**Relația antisimetrică** este o relație asimetrică cu cel puțin o pereche de formatul (***a, a***).

**De exemplu:**

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \text{ și } R = \{(3, 2), (1, 1), (0, 2)\}.$$

# Proprietăți: Tranzitivitate

**Relația** $\rho = (A, A, R)$ se numește **tranzitivă** dacă pentru orice $(a, b), (b, c) \in R$ avem $(a, c) \in R$.

**De exemplu:**

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \text{ și } R = \{(2, 1), (3, 2), (3, 1)\}.$$

**Tranzitivitate** - proprietate a unor relații logice sau matematice de a se transmite ca atare, prin termenii intermediari, între primul și ultimul termen al șirului de termeni ordonați pe baza acestei relații.

# Operații: Reuniunea

Fie relațiile $\rho_1=(A, A; R_1)$ și $\rho_2=(A, A; R_2)$, atunci

**reuniunea**: $\rho_1 \cup \rho_2 = \{(a, b) \in A^2 : (a, b) \in R_1 \text{ sau } (a, b) \in R_2\}$.

# Operații: Intersecția

Fie relațiile $\rho_1$=(A, A; $R_1$) și $\rho_2$ = (A, A; $R_2$), atunci

**intersecția**:

$\rho_1 \cap \rho_2 = \{(a, b) \in A^2 : (a, b) \in R_1 \text{ și } (a, b) \in R_2\}.$

# Operații: Compunerea

Fie relațiile $\rho_1 = (A, A, R)$ și $\rho_2 = (A, A, R_2)$ atunci

$$\rho_1 \circ \rho_2 = \{(a, b) \in A^2 : (a, c) \in R_1 \text{ și } (c, b) \in R_2\}.$$

# Operații: Inversarea relației

Fie relația $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{(A, A; R)}$, atunci

**inversarea**: $\rho^{-1} = \{(a, b) \in A^2 : (b, a) \in R\}$

# Închiderea reflexivă

Fie relația **ρ = (A, A; R)**, dacă *ρ* nu este reflexivă atunci ea poate fi transformată într-o relație reflexivă adăugând perechi de forma **(*a*, *a*)** unde ***a*** ∈ **A**.

Relația finală se numește **închiderea reflexivă** a relației **ρ**.

**Închiderea reflexivă** este cea mai mică relație reflexivă care conține **ρ**.

„Cea mai mică” în raport cu relația ⊆.

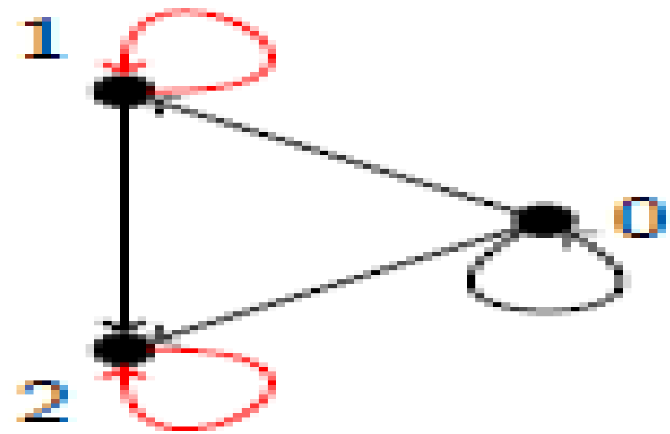
**Exemplu de închidere reflexivă**:

Fie **A = {0, 1, 2}** și **R = {(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2)}**.

Relația **ρ = (A, A; R)** nu este reflexivă.

Închiderea reflexivă a relației **ρ** este Graful de mai joc împreună cu cele roșii. Închiderea reflexivă a relației „<” este „≤.”

Închiderea reflexivă a relației ≠ este relația universală.



# Închiderea simetrică

Cea mai mică relație simetrică care conține relația $\rho$ **= (A, A; R)** se numește **închiderea simetrică** a lui $\rho$.

**Închiderea simetrică** se obține dacă pentru fiecare pereche **(*a*, *b*)** din **R** adăugăm perechea (***b*, *a***).

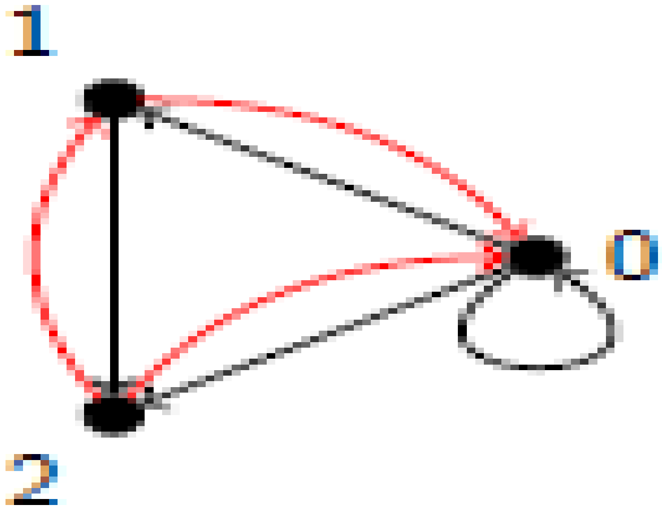
**Închiderea simetrică** a relației $\rho$ este $\rho \cup \rho^{-1}$

Fie **A = {0, 1, 2}** și **R = {(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2)}**

Relația ρ **= (A, A; R)** nu este simetrică.

**Închiderea simetrică** a relației $\rho$ este prezentată în figura respectivă.

Fie relația ρ **= (A, A; R)**, dacă $\rho$ nu este tranzitivă atunci $\rho$ poate fi transformată într-o relație tranzitivă în felul următor: adăugăm perechea **(a, c)** dacă $\rho$ conține **(a, b)** și **(b, c)**.



# Închiderea tranzitivă

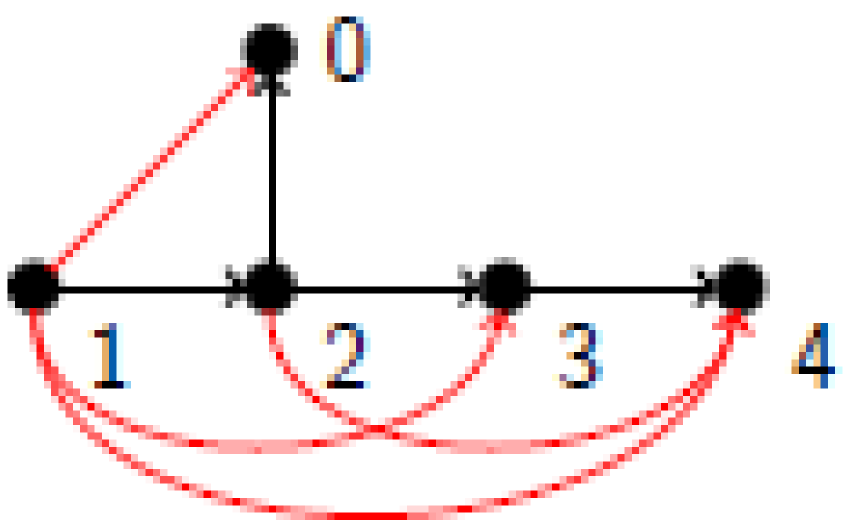
Relația finală se numește **închiderea tranzitivă** a relației $\rho$.

**Exemplu de închidere tranzitivă:**

Fie **A = {0, 1, 2, 3, 4}** și **R = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 0)}**.

Relația **ρ = (A, A; R)** nu este tranzitivă.

**Închiderea tranzitivă** a relației ρ este prezentată în figura de mai jos. În graful orientat dacă de la un vârf la altul există un drum, atunci aceste vîrfuri trebuie unite printr-un arc în închiderea tranzitivă.



# Ordine parțială

O relație binară omogenă se numește **relație de ordine parțială,** dacă este **reflexivă**, **antisimetrică** și **tranzitivă**.

**Exemple:**

Relația $\leq$ pe Z;

Relația $\subseteq$ pe P(Z);

Relația „a divide b” pe N.

Pentru relațiile de ordine parțială se folosesc următoarele simboluri: $\leq$ sau $<$ .

O mulțime pe care este definită o relație de ordine parțială se numește **mulțime parțial ordonată**.

# Succesor. Predecesor

Fie (A,≤) o mulțime parțial ordonată. Fie a, b $\in$ A; dacă a $\leq$ b atunci fie a=b fie a $\neq$ b.

Dacă a $\leq$ b și a $\neq$ b, atunci notăm a< b și spunem că a este **predecesorul** lui b;

sau b este **succesorul** lui a.

Dacă a < b și nu există c încât a < c < b spunem că a este **predecesorul imediat** (**nemijlocit**) al lui b.

**Exemplu**. Fie A = {0, 1, 2}. Scrieți predecesorii lui 2? 0,1

Care dintre aceștia sunt predecesori imediați? 1

# Maxim/minim. Comparabilitate

Fie **(A, ≤ )** o mulțime parțial ordonată. Dacă există ***a*** ∈ **A** cu proprietatea că pentru orice ***b*** ∈ **A** avem ***a*<*b***, atunci ***a*** se numește **cel mai mic element**.

Dacă cel mai mic element există atunci el este **unic**.

Un element ***a*** este minimal dacă nu există ***b*** cu ***b*** ≤ ***a***.

Într-o mulțime parțial ordonată **(A**, **≤)** două elemente ***a*** și ***b*** se numesc **comparabile** dacă ***a*** **≤** ***b*** sau ***b*** **≤** ***a***.

O relație de ordine parțială în care orice două elemente sînt comparabile se numește **relație de ordine totală**.

# Ordine lexicografică

Ordine lexicografică înseamnă ordinea lor numerică/ alfabetică. De exemplu A, B, C, D sunt aranjate în ordine lexicografică, iar C, D, A, B nu sunt aranjate în ordinea respectivă, deoarece nu sunt ordonate alfabetic.

La numere e la fel, numerele trebuie sa fie mai mare ca celălalt, de exemplu $x \leq y$ și $y \leq z$ sunt în ordine lexicografică.

Fie date numerele (0,1,2), de aranjat aceste 3 numere în ordine lexicografică: (0,0); (0,1); (0,2); (1,0); (1,1); (1,2); (2,0); (2,1); (2,2).

Această ordine se numește **ordine lexicografică**.

# Relații de echivalență, clase de echivalență

O relație binară omogenă este **relație de echivalență** dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

**Relații de echivalență**: „=”.

Relații care nu sînt de echivalența: „<”, „≠”, „ ≤”

Într-o relație de echivalență $\rho$ **= (A, A, R)** pentru fiecare element $a \in$ **A** considerăm: $[a]_\rho = \{b \in A: a\rho b\}$

Aceste mulțimi nu sînt **vide**. Aceste mulțimi sînt **disjuncte**.

Mulțimea de forma $[a]_\rho$ se numește **clasă de echivalență** a elementului $a$ în raport cu relația $\rho$.

# Concluzii

**Putem afirma următoarele concluzii la tema predată**:

- am definit noțiunea de produs cartezian;
- am reprezentat produsul cartezian pe un sistem de axe ortogonale;
- am definit noțiunea de relații binare, ternare, n-are omogene;
- am definit relațiile universale, vidă și egale;
- am operat cu relații n-are;
- am enumerat proprietățile relațiilor binare;
- am definit noțiunea de imagine directă și inversă;
- am definit relațiile surjective, totală, injective, binare omogene;
- am reprezentat relațiile binare omogene printr-o matrice binară și graf orientat;
- am definit noțiunea de reflexivitate și antireflexivitate; de simetrie, asimetrie și antisimetrie; de tranzitivitate, reuniune, intersecție și compunere; de inversare a relației; de închidere reflexivă, simetrică și tranzitivă; de ordinea parțială, succesor, predecesor; am definit noțiunea de comparabilitate, ordine lexicografică; de relații de echivalență, clase de echivalență etc.

# Mulțumim pentru atenție!