Structuri discrete

L. POPOV, dr., lect. univ.
Vitalie ȚÎCĂU, lect. univ.

Scopul cursului

Cursul universitar ***Structuri discrete*** este o disciplină fundamentală pentru specialitatea „Informatica (ştiinţe exacte)”. Scopul cursului dat este de a prezenta rezultatele de bază din matematica discretă și logica matematică.

De asemenea, studenții fac cunoștință cu elemente din combinatorică și algoritmica grafurilor. Studierea cursului universitar ***Structuri discrete*** se sprijină pe cunoştinţele, capacităţile şi competenţele dezvoltate în gimnazii și licee la orele de matematică și deprinderile de calcul şi operare cu noţiuni din analiza matematică, combinatorică şi logica matematică.

Scopul cursului

Prin conţinutul său şi activităţile de învăţare a studenţilor, cursul universitar ***Structuri discrete*** contribuie la dezvoltarea a mai multor competenţe generice, necesare în domeniul profesional:

- ✓ capacitatea de analiză şi sinteză;
- ✓ deprinderi de comunicare în limba maternă;
- ✓ capacitatea de a lucra în echipă;
- ✓ capacitatea de a aplica cunoştinţele în practică;
- ✓ capacitatea de a genera idei noi;
- ✓ capacitatea de a lucra independent etc.

Funcții

Plan

1. Funcţiile și interpretarea lor
2. Reprezentarea funcției prin diferite moduri
3. Corespondenţe sau legi de corespondenţă
4. Imagine și preimagine
5. Proprietăți ale funcțiilor
6. Funcţii injective, surjective şi bijective
7. Recunoașterea funcțiilor injective, surjective
8. Operaţii cu funcții: operații algebrice, inversa unei funcții
9. Numărarea cu ajutorul funcțiilor (cardinal)
10. Funcții de echivalențe. Principiul lui Dirichlet
11. Concluzii

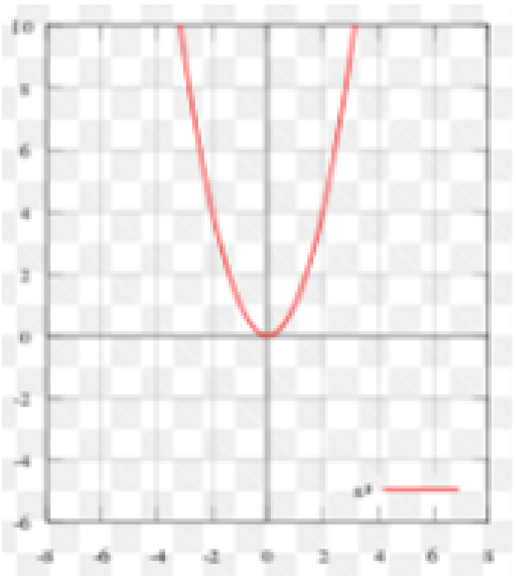
Finalităţi de învăţare

La finalizarea studierii temei respective şi realizarea sarcinilor de învăţare, studentul va fi capabil:

- să definească noţiunea de funcţie;
- să reprezinte funcţia prin diferite moduri;
- să definească noţiunea de imagine şi preimagine;
- să definească funcţie inversă;
- să cunoască proprietăţile funcţiilor;
- să identifice funcţii injective, surjective şi bijective;
- să poată opera cu funcţiile etc.

Funcții

În matematică, o ***funcție*** este o relație care asociază fiecărui element dintr-o mulțime (domeniul) un singur element dintr-o altă mulțime (codomeniul). Noțiunea de ***funcție*** este fundamentală în toate ramurile matematicii și în toate științele exacte.



Funcţii

Funcțiile se notează cu litere mici: f, g, h sau f_1, f_2, f_3, …, f_n.

O funcție este o legătură, o relație care face corespondența între două mulțimi **f:A→B (**se citește **f** definit pe mulțimea elementelor din **A** cu valori în mulțimea de elemente **B**).

A se numește ***domeniul funcției***, iar **B** se numește ***codomeniul funcției***.

Ce face mai exact această funcție?

Transformă un element al mulțimii **A** într-un element al mulțimii **B**.

Dacă $\mathbf{x \in A} \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{y \in B}$ și de obicei spunem că **y=f(x)**.

Funcția, ca să fie numită funcție trebuie neapărat, ca orice element din mulțimea **A** să aibă un corespondent în mulțimea **B**, nu și invers!

Cum poate fi prezentată o funcție?

O funcție poate fi prezentată în mai multe moduri:

1. Printr-un tabel, în cazul în care valoarea lui **x** prin funcție se transformă în valoarea lui **y**.

x				
y				

Domeniu $\subseteq$ A

Im f $\subseteq$B
Codomeniu

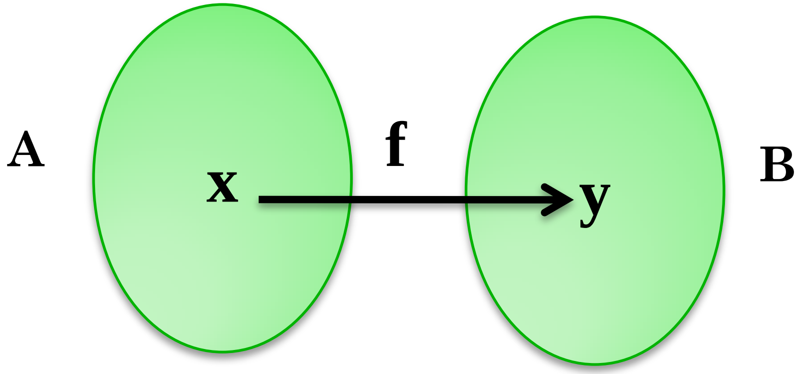
Imaginea funcției (Im f):

<u>În ce se transformă **x** când trece prin funcție</u>? Se transformă în **y**!

Im f={y=f(x) | y ∈B}

Imaginea funcției poate să coincidă cu **Codomeniu** sau poate fi mai mică, adică pot avea mai puține imagini **x** decât avem în **Codomeniu.**

2. **Prin lege de corespondență** f:A→B; f(x)=ax+b ; pentru a=2 și b=1.
3. **Prin Diagrama Venn-Euler** (unde prin funcția **f**, **x** se transformă în **y**)



Toate aceste noțiuni sunt mult mai simple, dacă le transformăm în diverse **exemple**: dacă avem o funcție **f** definită pe mulțimea formată din elementele -1, 0, 1 cu valori în 2, 3, 4. Se scrie **f: {-1, 0, 1}** → **{2, 3, 4}** și le dăm printr-o lege de corespondență **f(x)=x+3**. Să aranjăm această funcție printr-un tabel:

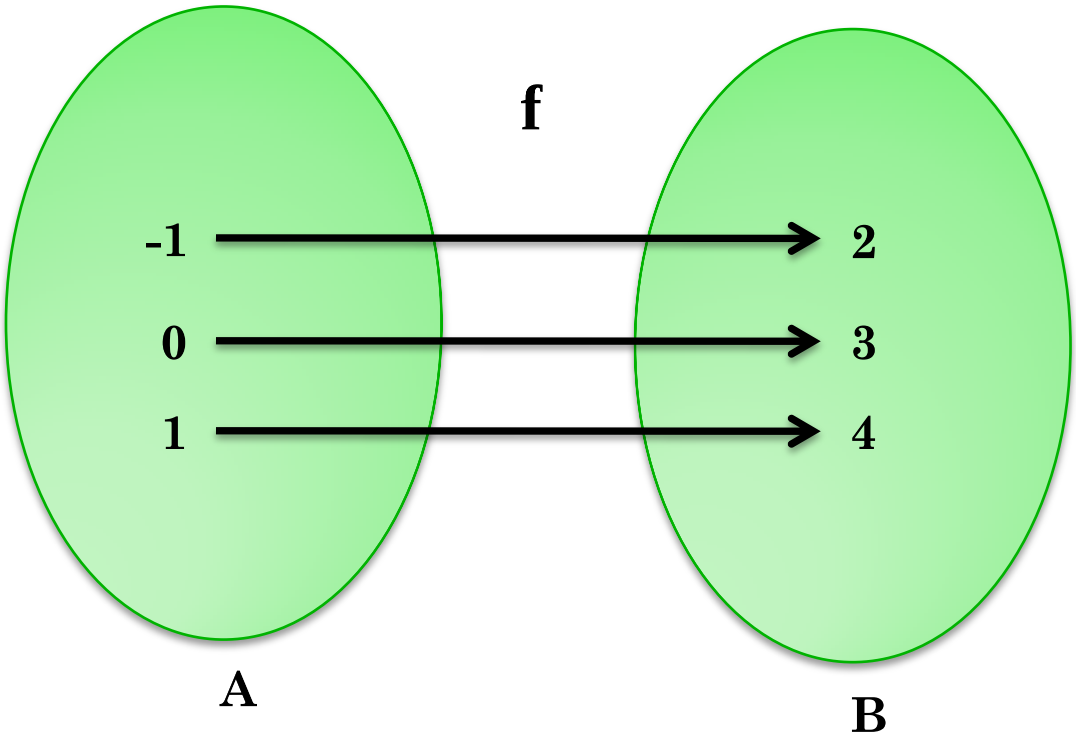
x	**-1**	**0**	**1**
f(x) = y	2	3	4

Domeniu

Codomeniu

În continuare trebuie să calculăm **y**, având valorile date **{2, 3, 4}** nu putem să spunem exact ce valoare îi corespunde fiecărui **x** în parte, să demonstrăm legea de corespondență care ne arată cum anume face legătura **f** între prima mulțime și cea de-a doua mulțime. Operăm cu valorile lui **x: f(-1)=2**; **f(0)=3**; **f(1)=4**. Am demonstrat că valorile date s-au adeverit!

În continuare, ca să vedem și mai bine această legătură/corespondență între două mulțimi, vom crea și diagrama acestor două funcții:



Am aflat valorile, am verificat dacă sunt sau nu **Codomeniu**, am creat tabelul și diagrama.

Tot ceea ce trebuie să știm referitor la **funcție** este faptul că transformă elementele domeniului în elemente din codomeniu. În cazul nostru **Codomeniu B** este imaginea funcției (Im f) și se scrie **B=Im f**, pentru că toate elementele din **Codomeniu** sunt imagini ale lui **x** prin **f**.

Exemplu: Fie **f: {0, 1, 2}** → **{0, 2, 4, 6}** și **f(x)=2x+2**

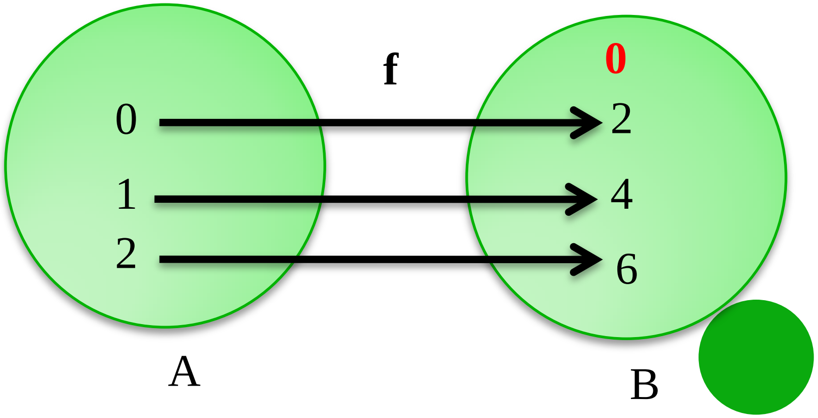
Creați tabelul și diagrama:

x	0	1	2
f(x)=y	2	4	6

Observăm că imaginea funcției este mulțimea elementelor formată din 2, 4 și 6:

Im f = {0, 2, 4, 6} este inclusă în **Codomeniu** și nu mai este egală cu aceasta, este inclusă, pe zero nu-l regăsim, dar aceasta nu ne deranjează! Ideea este ca definim o funcție în cazul în care de la orice **x** pornește doar o singură săgeată către **y**.

Fie că avem cele **două mulțimi**:



Im f este inclusă în **Codomeniu**, dar nu este egală cu aceasta.

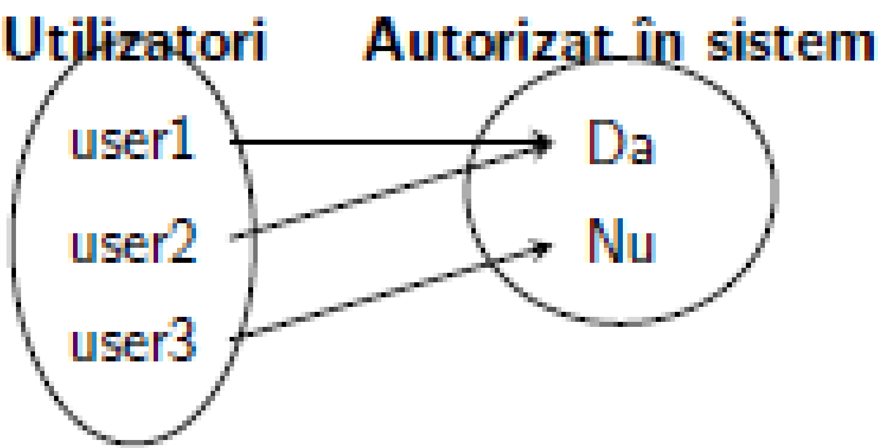
Corespondenţă (Lege de corespondenţă)

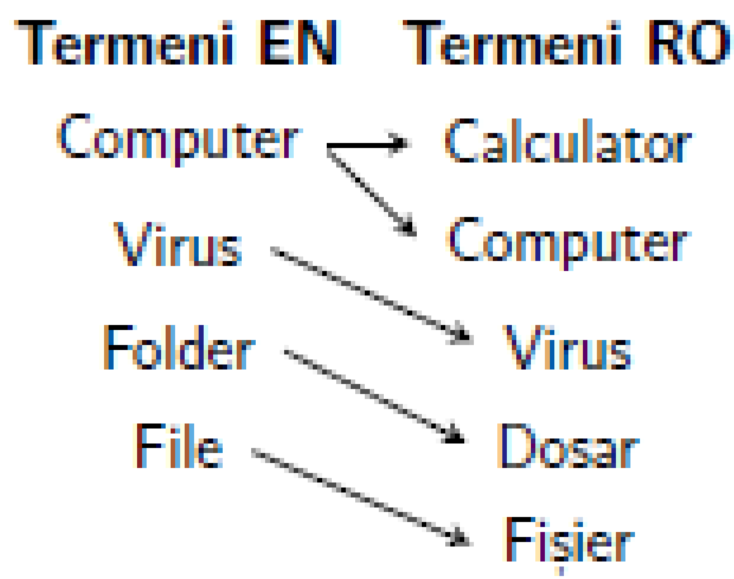
Utilizatori **Conturi în sistem de e-mail**

(”nume utilizator” 1 şi parolă 1) → user1@example.com

(”nume utilizator” 2 şi parolă 2) → user2@example.com

(”nume utilizator” 3 şi parolă 3) → $\emptyset$





Corespondenţă
(Lege de corespondenţă sau Regulă de corespondență)

Ce este o funcție? Ce nu este o funcție? Ce înțelegem prin corespondență? Ce înțelegem prin legi de corespondență?

O funcție exprimă sau realizează o corespondență între două variabile sau putem spune că o funcție realizează o corespondență între elementele a două mulțimi.

Corespondenţă (Lege de corespondenţă)

În cazul în care spunem că funcția realizează o corespondență între 2 variabile, ne referim la faptul că dacă ni se dă, de exemplu, o variabilă, să o notăm cu **x**, atunci printr-o anumită lege de corespondență sau regulă se obține o altă variabilă, să o notăm **y**. E clar că această variabilă **y** depinde de variabila **x**, pentru că acest **x** trecând printr-o lege de transformare sau printr-o anumită regulă de calcul, se obține variabila **y**, totul depinde de variabila care a intrat, adică depinde de **x**.

Ca să arătăm că **y** depinde de **x**, putem să trecem în paranteze **y(x)**. În loc de **x** și de **y** putem folosi orice litere, atât că în general, în loc de **y(x)**, corect se scrie **f(x)**, adică valoarea care se obține se notează prin **f(x)**.

Corespondenţă (Lege de corespondenţă)

Avem o corespondență între două variabile.

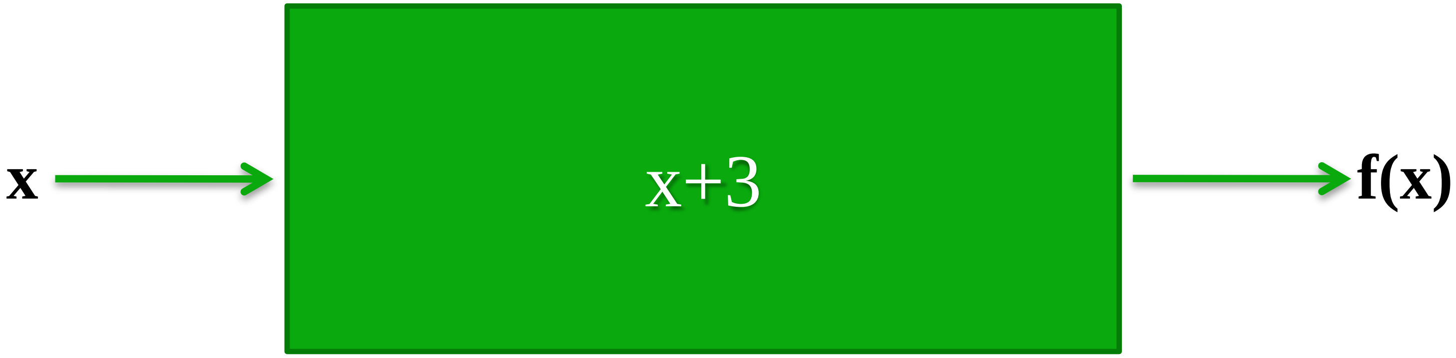
Corespondenţă (Lege de corespondenţă)

Exemplu de funcție:

$f(x)=\underbrace{x+3}$

Variabilă

Lege sau regulă



Corespondenţă (Lege de corespondenţă)

Lege sau regulă

Să efectuăm câteva calcule:

Fie că x=2; x=4; x=5

$2 \longrightarrow \boxed{2+3} \longrightarrow 5$

f(2)=2+3=5

$4 \longrightarrow \boxed{4+3} \longrightarrow 7$

f(4)=4+3=7

$5 \longrightarrow \boxed{5+3} \longrightarrow 8$

f(5)=5+3=8

Corespondenţă (Lege de corespondenţă)

Să stabilim și mulțimea în care variabila **x** ia valorile 2, 4, 5.

Să considerăm această mulțime: f:{2, 4, 5} ➔ {5, 6, 7, 8} – această mulțime nu trebuie să fie neapărat mulțime returnată de funcție sau formată doar din aceste numere 5, 7, 8, această mulțime trebuie doar să conțină valorile pe care funcția le returnează.

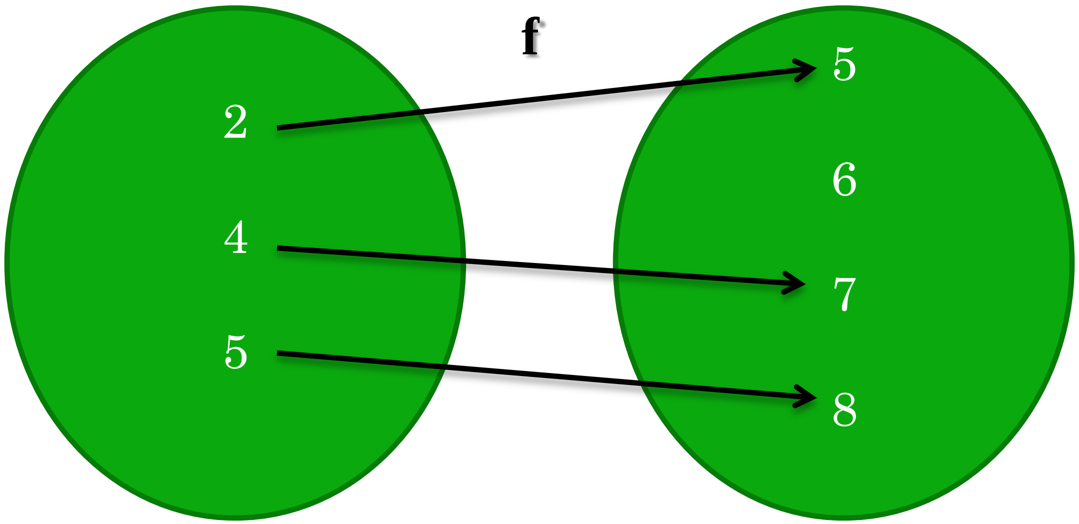
Mulțimea în care variabila ia valori se numește **Domeniu** sau **Domeniu de definiție**, iar cea de-a doua mulțime obținută, se numește **Codomeniu**, adică mulțimea în care funcția ia valori, iar legea sau regula de calcul care este prezentă în imagine se numește lege de corespondență.

În cazul prezentat am descris funcția printr-o formulă: f(x)=x+3

Corespondenţă (Lege de corespondenţă)

O funcție poate fi descrisă și printr-o imagine, în cazul nostru putem să folosim o asemenea imagine:

Ce corespondențe realizează funcția f? Ce observăm din această imagine?



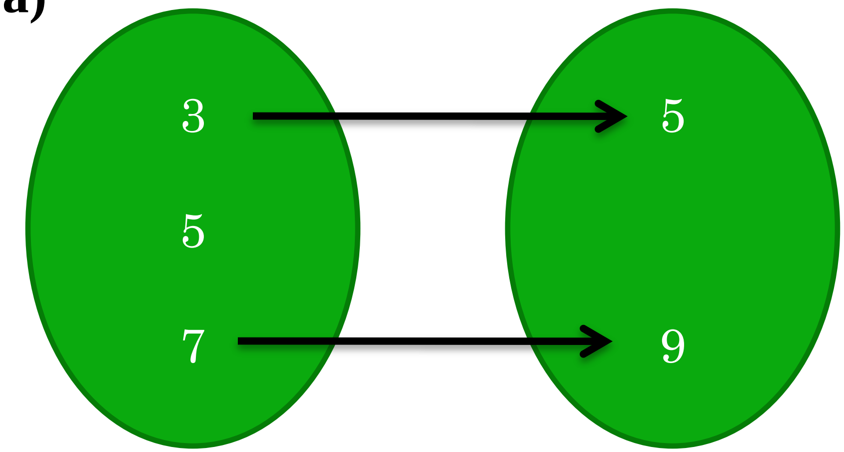
Domeniul funcției, în care **x** ia valori

Codomeniul, mulțimea în care funcția ia valori

O funcție realizează o corespondență între elementele a două mulțimi. **Nu orice corespondență este o funcție!** Ca să avem într-adevăr ***o funcție*** corespondența trebuie făcută, astfel încât fiecărui element din prima mulțime (Domeniu) să-i corespundă **un singur element** din a doua mulțime (Codomeniu) și acest corespondent să fie unic.

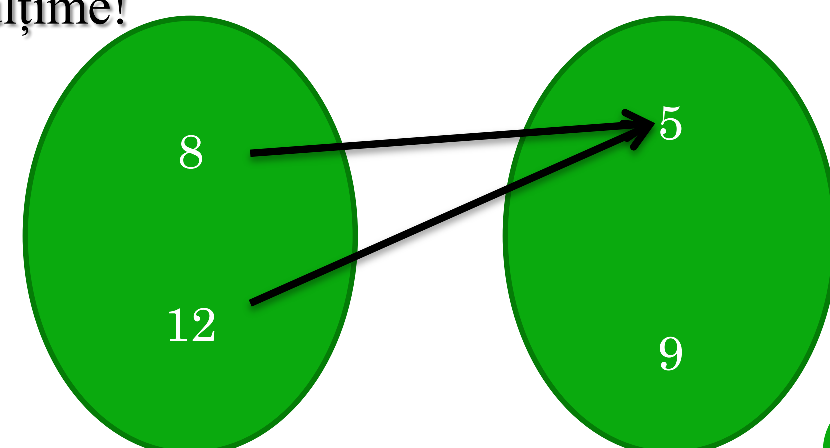
Care dintre aceste exemple sunt funcții?

a)



NU! Deoarece elementul 5 nu are un corespondent în cea de-a doua mulțime!

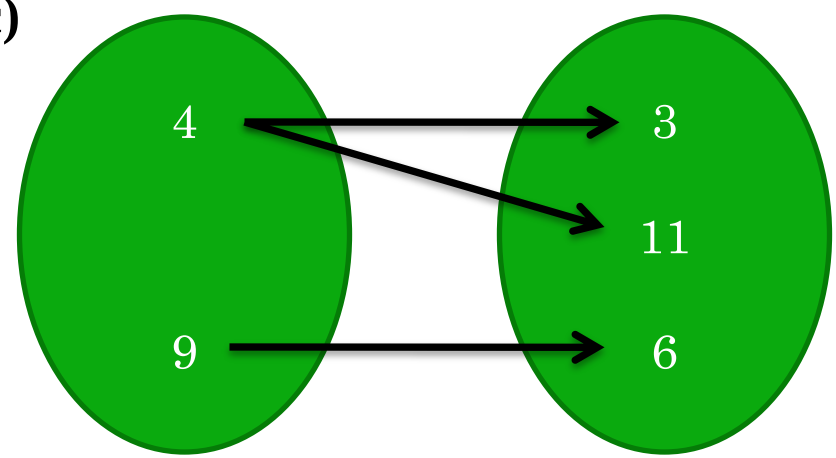
b)



DA! Deoarece fiecărui element îi corespunde un element din cea de-a doua mulțime!

Care dintre aceste exemple sunt funcții?

c)



NU! Deoarece 4 are doi corespondenți!

d)
f: {Ana, Ion, Maria, Lina} → A (funcția **f** definită pe mulțimea ... cu valori în **A**)
A= {ian, feb, mar, apr, mai, iun, iul, aug, sept, oct, noi dec}
f(x) = luna de naștere a lui **x**

Lege

f(Ana) = luna de naștere a lui Ana

DA! Deoarece fiecare om se naște într-o anumită lună!

Definiţia generală

O funcţie este determinată de trei elemente **X** , **Y** şi **f**, având următoarele semnificaţii: **X** și **Y** sunt mulțimi, iar **f** este o lege de corespondență de la **X** la **Y** care face ca fiecărui element $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ să-i corespundă un element și numai unul $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

$$\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{y} \in \mathbf{Y}, \text{ unic} \qquad (2.1)$$

Astfel o funcţie este un triplet (**X, Y, f**), acest triplet se notează în mod frecvent prin $\mathbf{f}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ (f definit prin X cu valori în Y).

Elementele constitutive ale funcţiei se numesc:

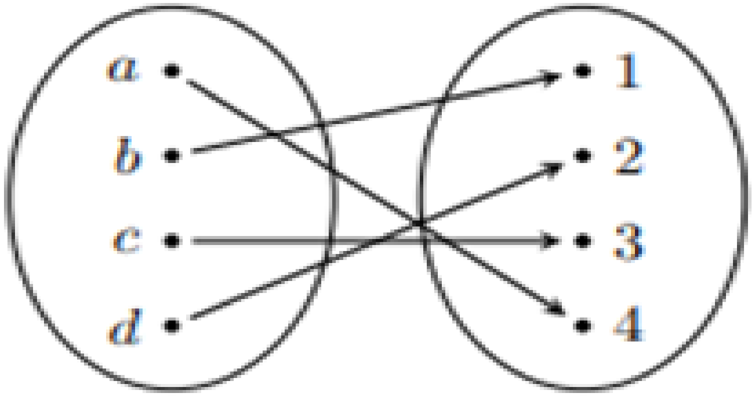
X – **Domeniu** (sau **domeniu de definiție**);

Y – **Codomeniu** (sau **domeniu de valori**);

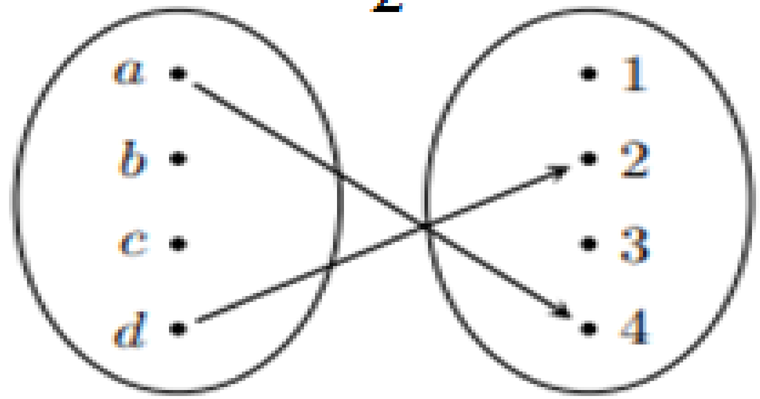
f – **Lege de corespondenţă**.

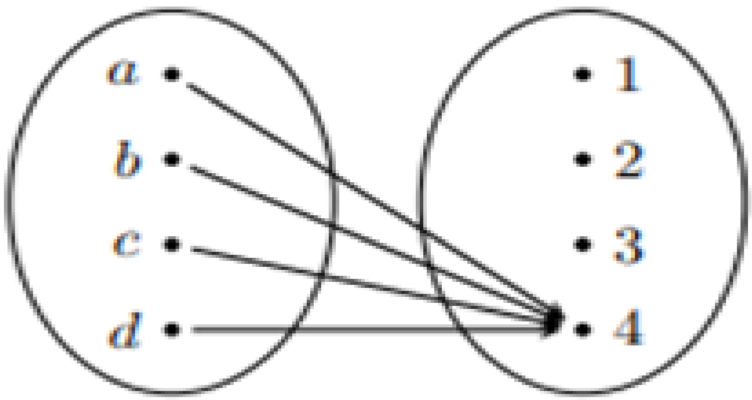
Corespondențe sau legi de corespondență

1

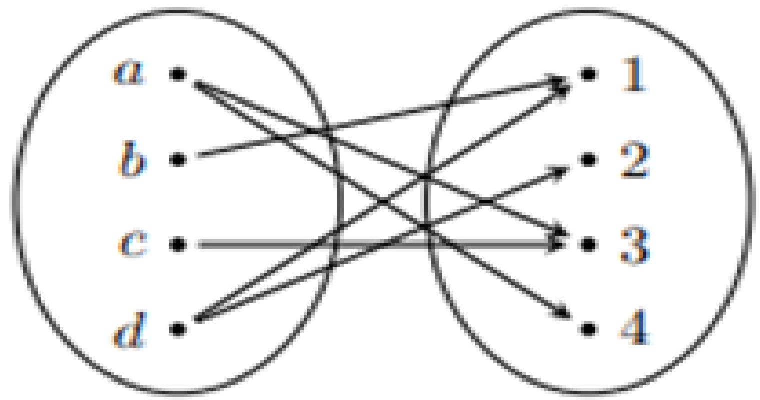


2





3

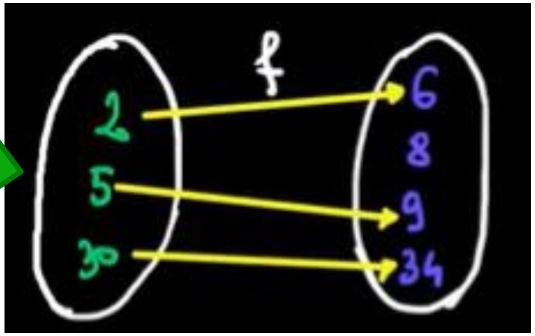


4

Care dintre corespondențele respective sunt funcții?
Argumentați răspunsul!

Rezumat

1. O funcție poate fi descrisă printr-o imagine spre marea atenție, ca legea de corespondență să fie corectă ca să avem într-adevăr o funcție;
2. O funcție poate fi descrisă printr-o formulă;
3. O funcție poate fi descrisă printr-un tabel.



$$f:\{2,5,30\}\to\{6,8,9,34\}$$

$$f(x)=x+4$$

x	2	5	30
$f(x)$	6	9	34

Imagine și preimagine

Fie **f: X → Y** și **f(x) = y ∈ Y** unde **x ∈ X**, atunci:

- ✓ **y** se numește **imaginea** lui **x** prin **f**;
- ✓ **x** se numește **preimaginea** (sau **imaginea inversă**) lui **y** prin **f**.

Este posibilă notarea **$f^{-1}(y) = x$ (funcție inversă)**

Fie dată corespondența:

Șiruri: „q”, „qw”, „qwerty”, „qwertz”

Lungimea: 1, 2, 6.

Dacă notăm funcția prin **L** atunci:

$L^{-1}(1) = \{q\}$; $L^{-1}(6) = \{qwerty, qwertz\}$; $L^{-1}(2) = \{qw\}$

Imagine și preimagine

Mulțimea tuturor valorilor unei funcții se numește imaginea funcției și se notează **Imf**.

f: A →B   Imf = {f(x) | X ∈ A }

Exemplu: Fie f:{-2, -1, 0, 1} → B;   f(x) = -4x+6

Determinați imagine funcției f (**Imf**).

Avem formula f(x)=-4x+6, calculăm mulțimea valorilor funcției folosind această formulă.

f(-2)=14

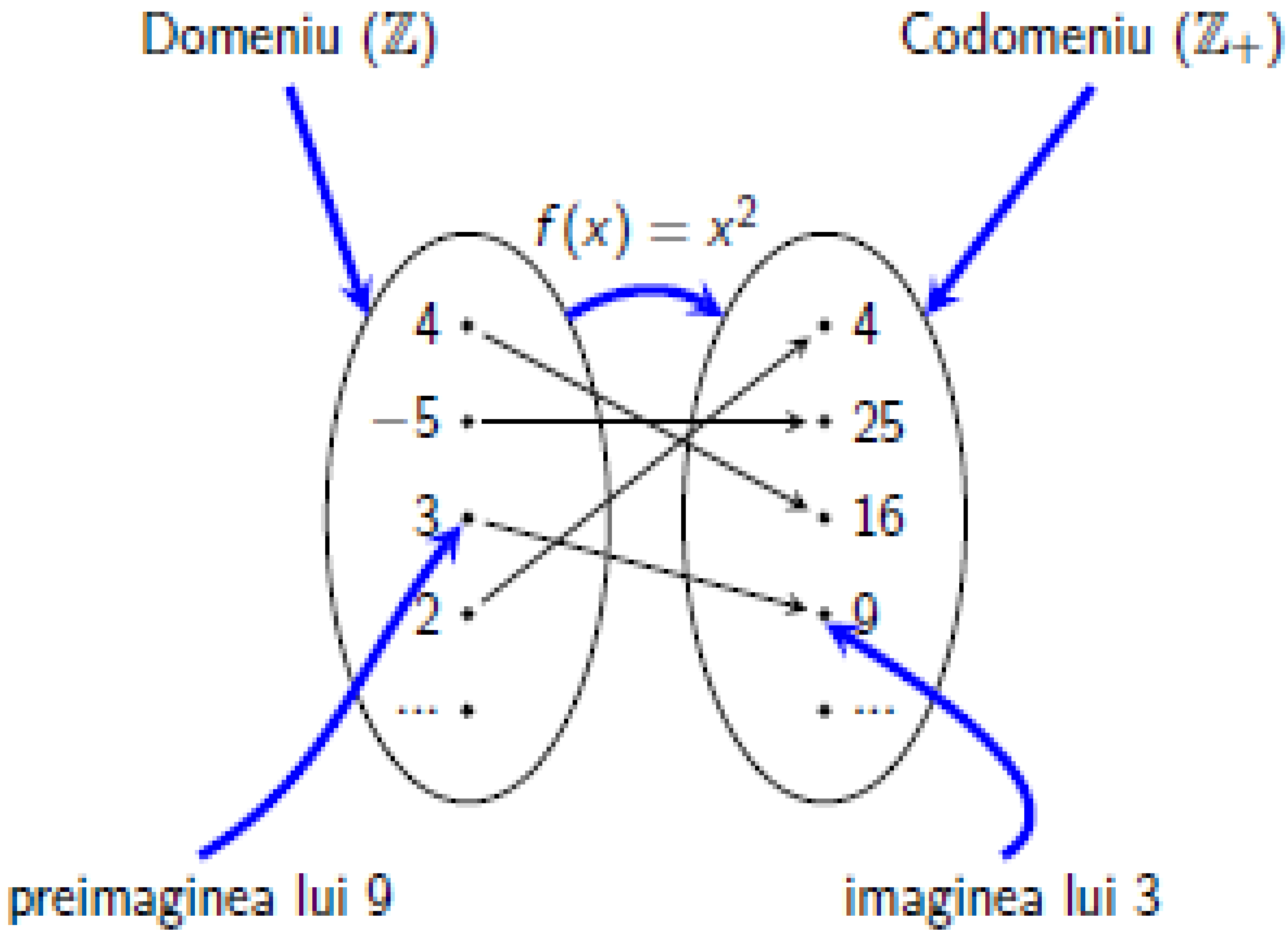
f(-1)=10

f(0)=6

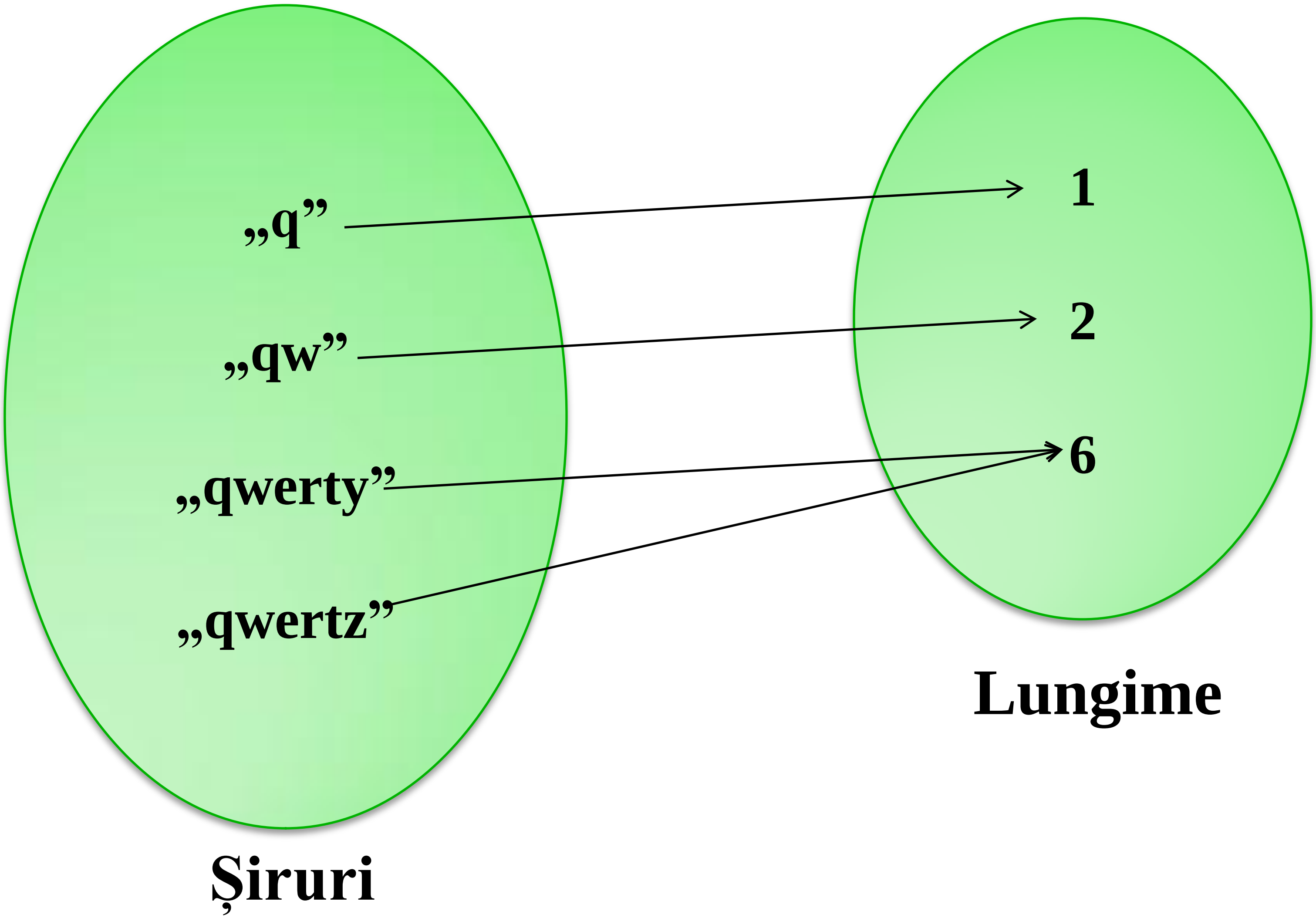
f(1)=2

Am obținut valorile 14, 10, 6 și 2.

Imf = {2, 6, 10, 14}, mulțimea valorilor funcției folosind formula dată.


Domeniu ($\mathbb{Z}$)
Codomeniu ($\mathbb{Z}_+$)
$f(x) = x^2$
4
-5
3
2
...
4
25
16
9
...
preimaginea lui 9
imaginea lui 3

Imagine și preimagine



Exerciții

Fie dată corespondența:

Șiruri: „Elena”, „Ion”, „Ionela”, „Chiril”, „Olga”, „Marinela”.

Lungimea: 5, 3, 7, 6, 4, 8.

Calculați lungimea elementelor din șirul dat **L**:

$\mathbf{L^{-1}(5) = ?}$

$\mathbf{L^{-1}(3) = ?}$

$\mathbf{L^{-1}(6) = ?}$

$\mathbf{L^{-1}(4) = ?}$

$\mathbf{L^{-1}(8) = ?}$

Exerciții

Fie dată corespondența:

Șiruri: „Elena”, „Ion”, „Ionela”, „Chiril”, „Olga”, „Marinela”.

Lungimea: 5, 3, 7, 6, 4, 8.

Calculați lungimea elementelor din șirul dat **L**:

$\mathbf{L^{-1}(5)} = \{\text{Elena}\}$

$\mathbf{L^{-1}(3)} = \{\text{Ion}\}$

$\mathbf{L^{-1}(6)} = \{\text{Ionela, Chiril}\}$

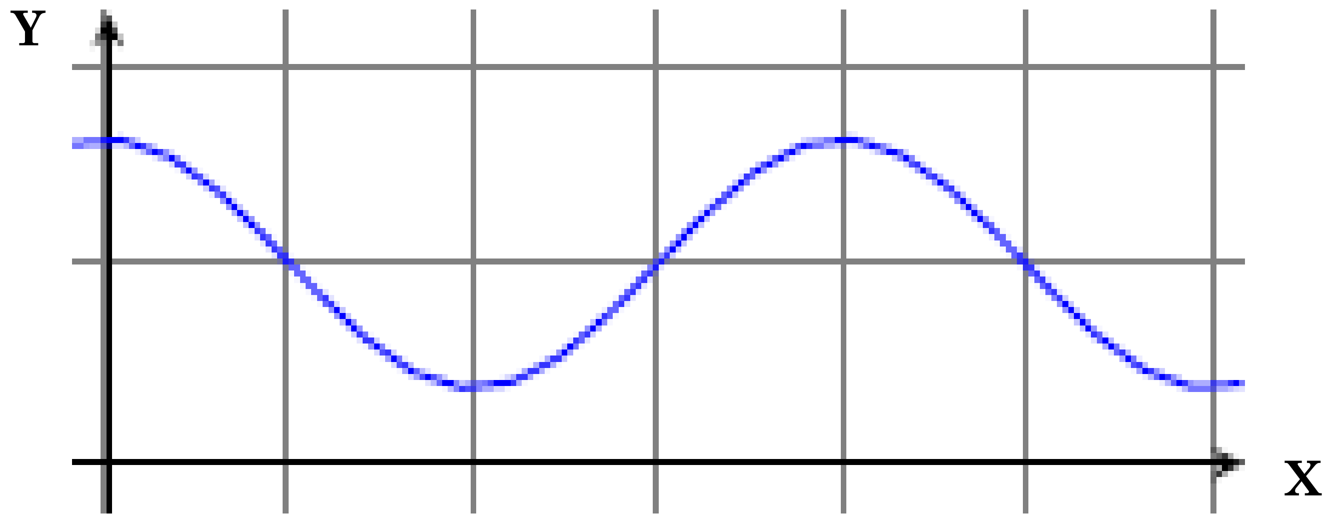
$\mathbf{L^{-1}(4)} = \{\text{Olga}\}$

$\mathbf{L^{-1}(8)} = \{\text{Marinela}\}$

Graficul funcţiei

Graficul funcţiei **f: X → Y** este o mulțime de puncte:

Gr(f) = {(x , f(x)): x ∈ X}.

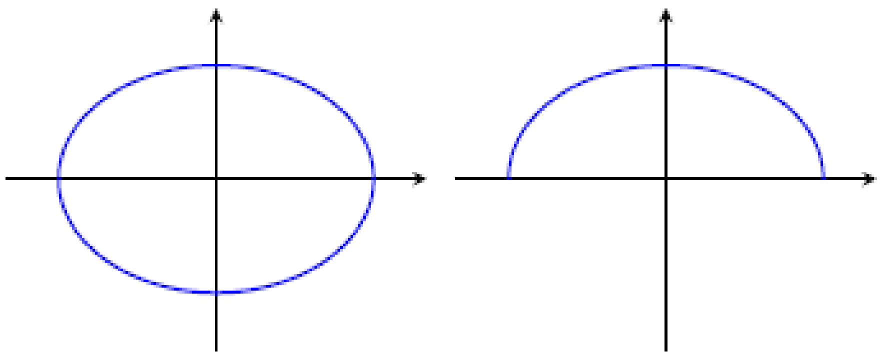


Cum se trasează graficul funcției?

∀ **x** obținem o valoare a lui **y** …

Graficul funcţiei

Nu orice grafic este grafic de funcţie.



Condiţia (2.1) $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, unic este formată din două subcondiții și anume:

- fiecărui element **x** din **Domeniu** îi corespunde un element în **Codomeniu**, adică

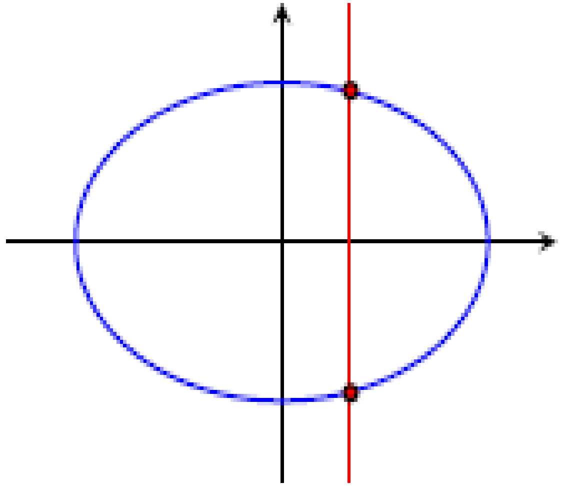
  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\exists \mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ încît $\mathbf{y} = \mathbf{f(x)}$. (2.2)

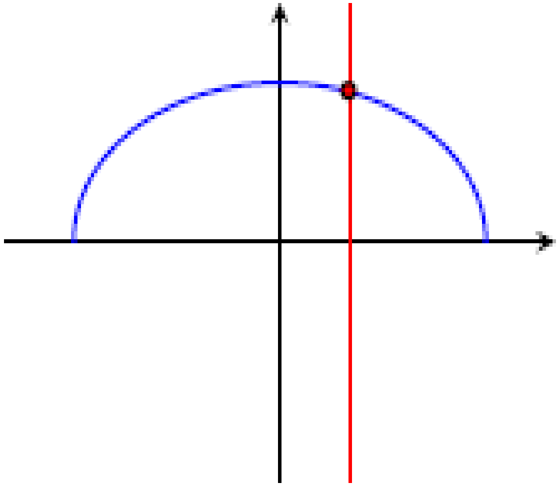
- elementul din **Codomeniu** ce corespunde unui **x** este unic, adică $\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x_1} = \mathbf{x_2} \Rightarrow \mathbf{f(x_1)} = \mathbf{f(x_2)}$. (2.3)

Graficul funcţiei

Cu ajutorul paralelelor la axele de coordonate recunoaştem îndeplinirea condițiilor (2.2) și (2.3) astfel:

- un grafic satisface condiţia (2.2) în cazul în care orice paralelă la axa ordonatelor dusă prin punctele domeniului întâlnește graficul **în cel puțin** un punct;
- un grafic satisface condiţia (2.3) în cazul în care orice paralelă la axa ordonatelor dusă prin punctele domeniului întâlnește graficul **în cel mult** un punct.





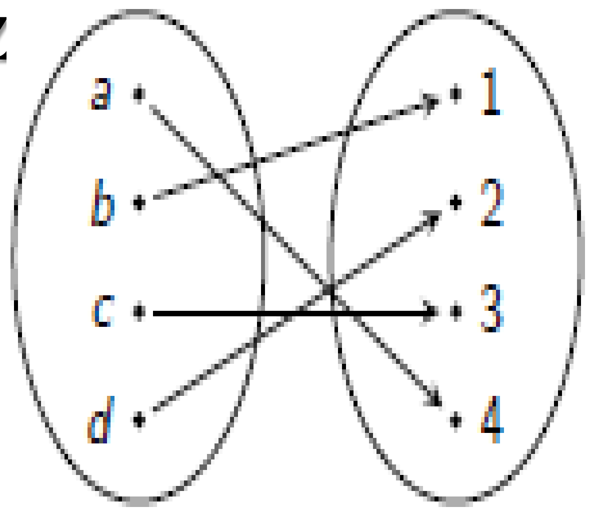
Proprietăți ale funcțiilor

- Periodice;
  - ✓ funcţiile trigonometrice;
- Pare (**f(-x)=f(x)**)/impare (**f(-x)=-f(x)**);
- Monotone
  - ✓ crescătoare;
  - ✓ descrescătoare;
  - ✓ necrescătoare;
  - ✓ nedescrescătoare.
- Injective;
- Surjective;
- Bijective.

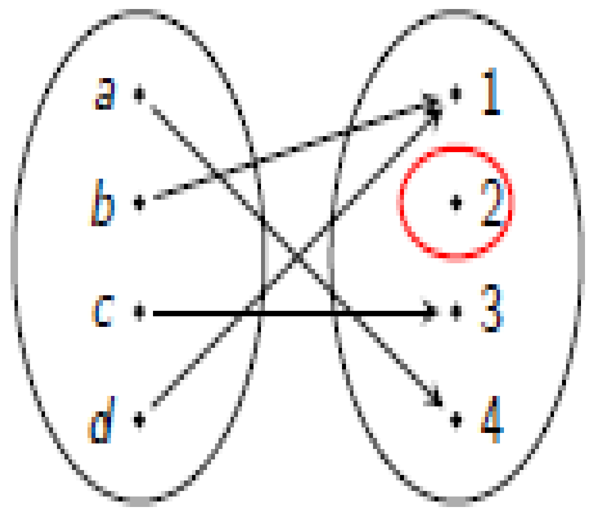
Funcții surjective

O **funcţie** este **surjectivă** dacă orice element din **Codomeniu** are **preimagine** nevidă. <u>Altfel spus, dacă în orice element se duce **cel puțin** o săgeată, atunci funcția este ***surjectivă***</u>!

- **f: Z → Z, f(x) = x²** nu este surjectivă.
- **f: Z**



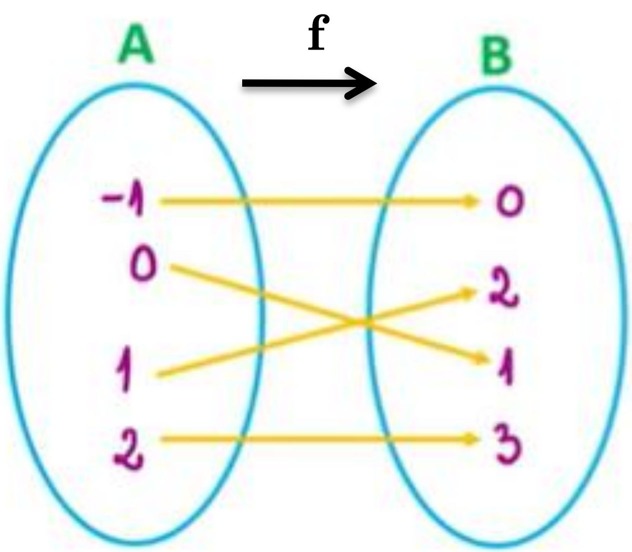
O funcție surjectivă

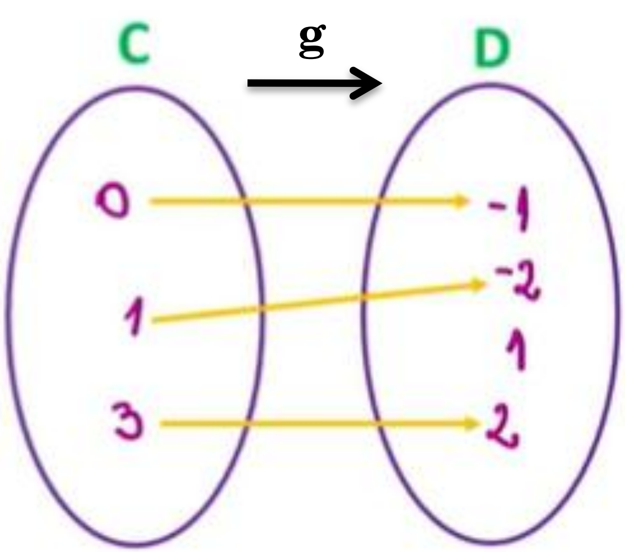


O funcție care nu este surjectivă

Definiție: O funcție $f: A \to B$ se numește funcție surjectivă dacă pentru oricare element $y \in B$ există un element $x \in A$ cu proprietatea că $f(x) = y$.

ex: Fie funcțiile f și g date cu ajutorul diagramelor:





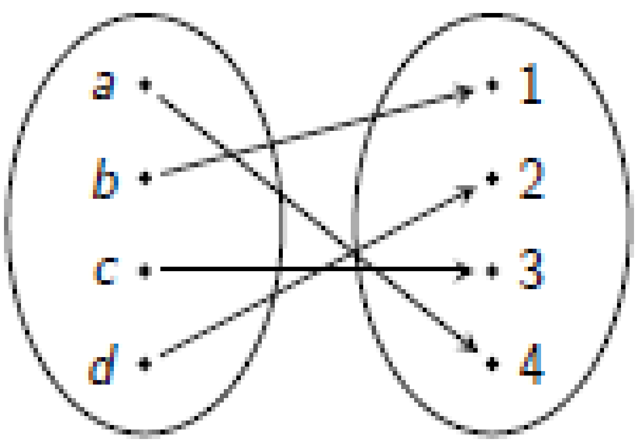
Surjectivă

Nu este surjectivă

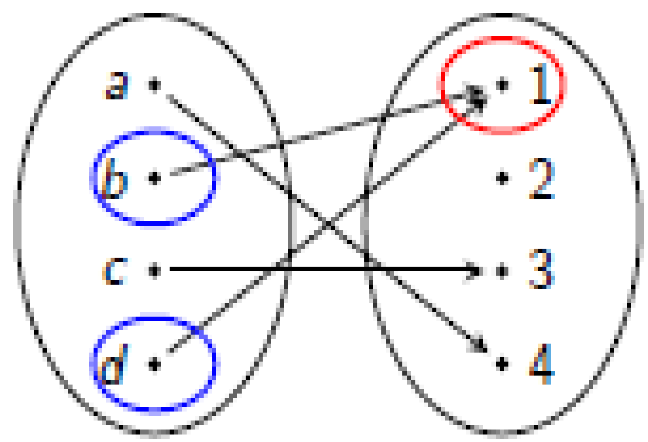
Funcții injective

O **funcţie** este **injectivă** dacă orice element din **Codomeniu** are **preimagine** unică. Nu există două elemente din **Domeniu** care să aibă aceeași imagine. Altfel spus, dacă în orice element se duce **cel mult** o săgeată, atunci funcția este ***injectivă***!

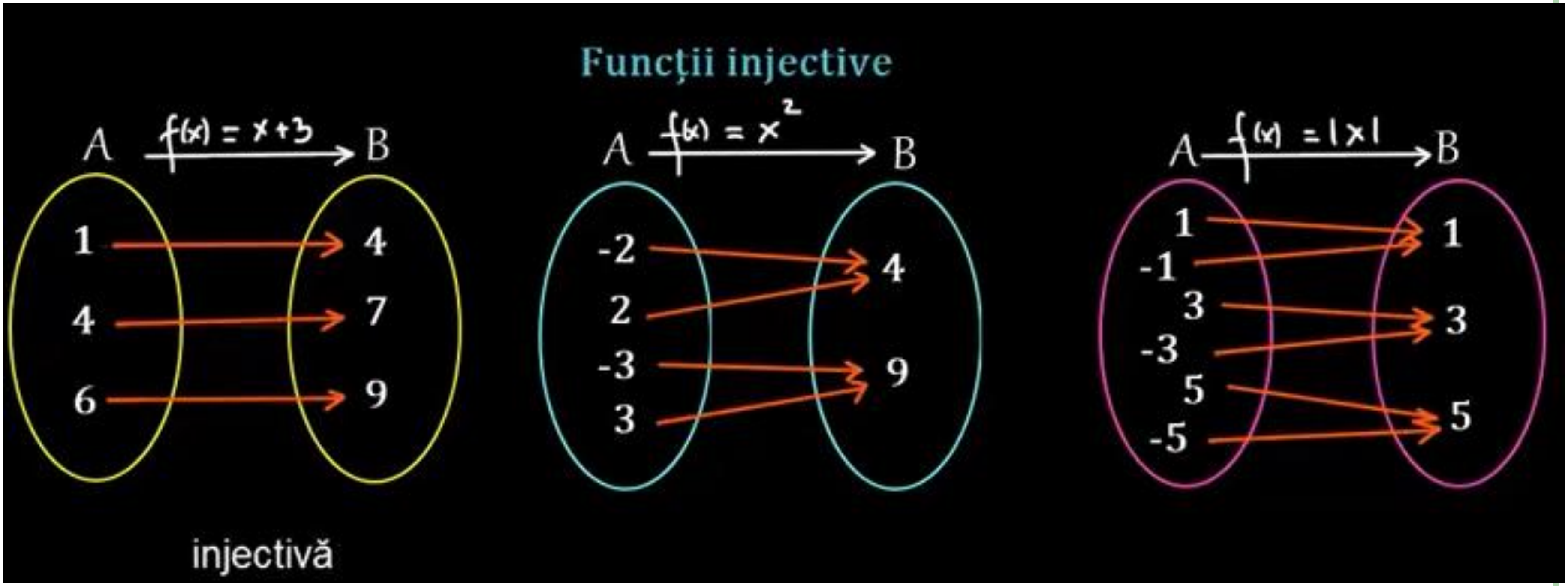
- **f: Z → Z, f(x) = x^2** nu este injectivă.
- **f: Z+ → Z, f (x) = x^2** este injectivă.



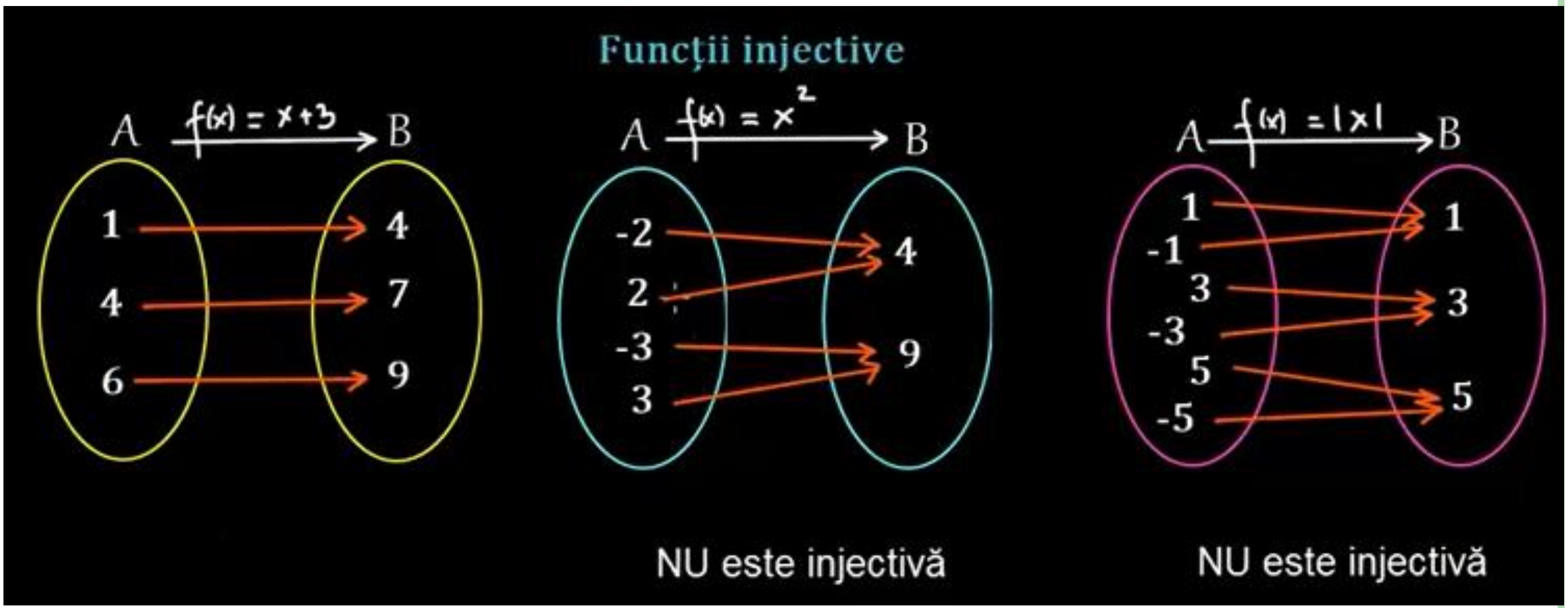
O funcție injectivă

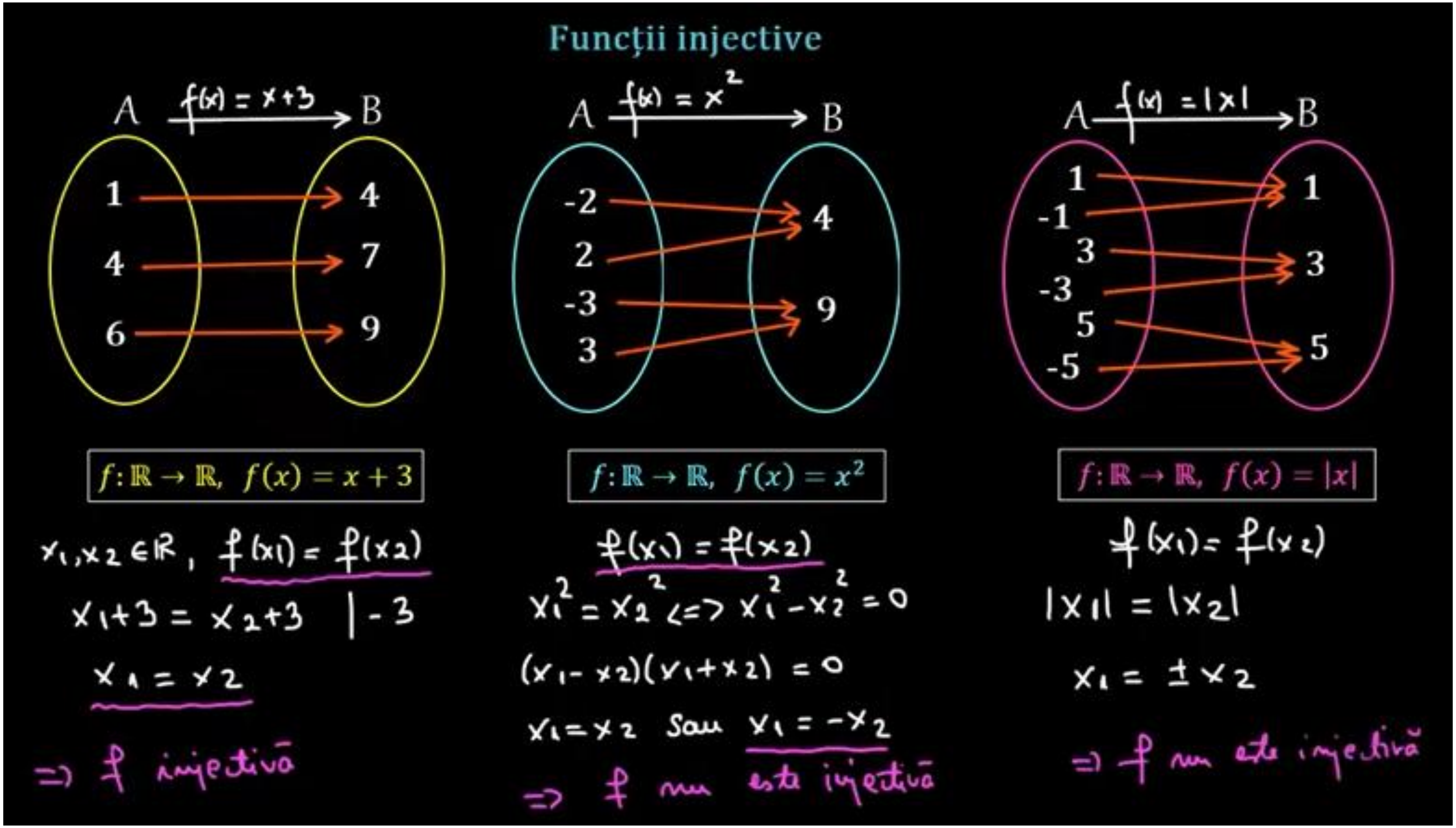


O funcție care nu este injectivă



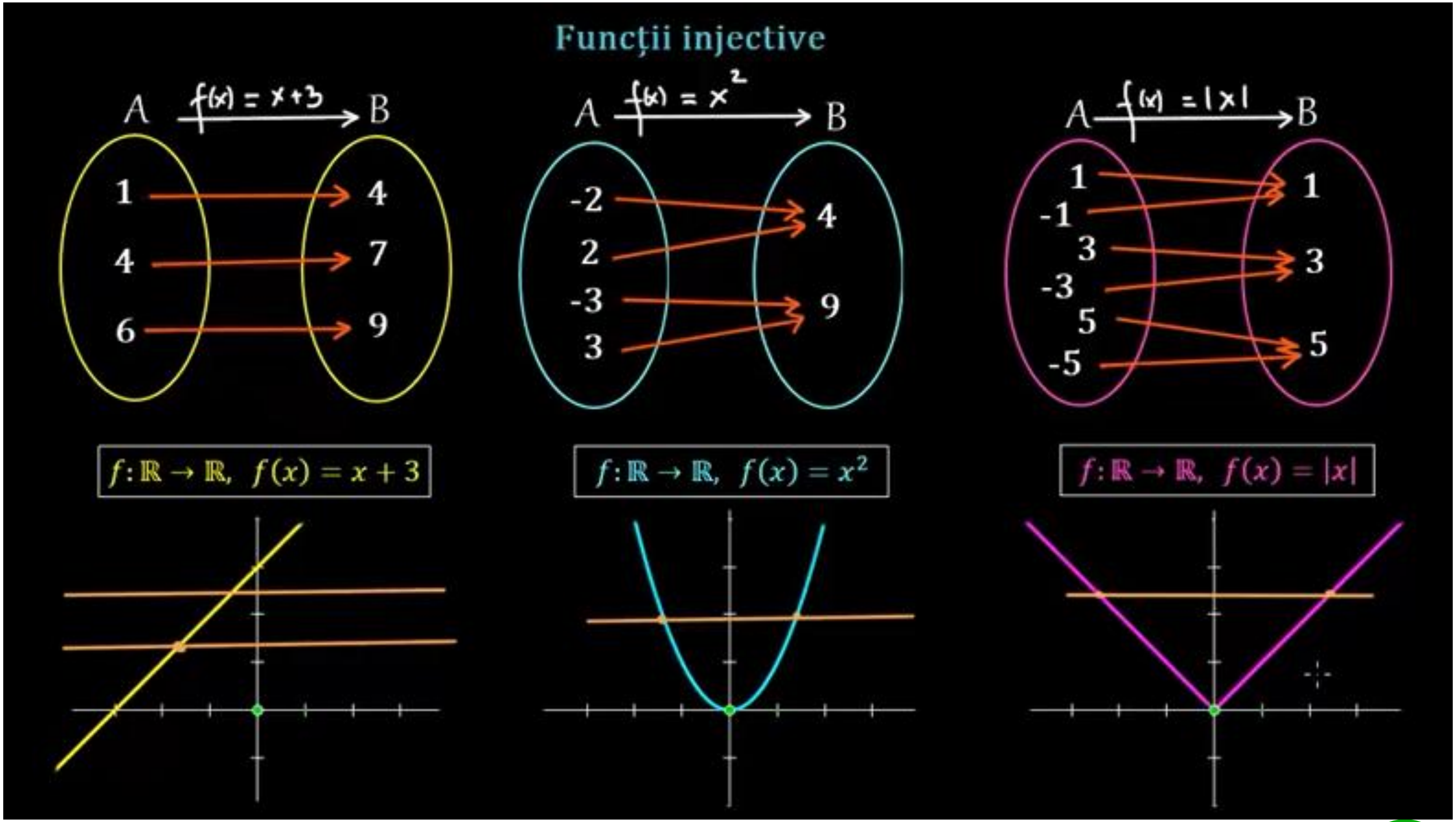
Funcții injective
A f(x) = x+3 B
1 4 6
4 7 9
A f(x) = x² B
-2 2 -3 3
4 9
A f(x) = |x| B
1 -1 3 -3 5 -5
1 3 5
injectivă


Funcţii injective
A f(x) = x+3 B
1 4
4 7
6 9
A f(x) = x^2 B
-2 4
2
-3 9
3
A f(x) = |x| B
1 1
-1
3 3
-3
5 5
-5
NU este injectivă
NU este injectivă



Funcții injective
A f(x) = x+3 B
1 4 6
4 7 9
f: ℝ → ℝ, f(x) = x + 3
x1, x2 ∈ ℝ, f(x1) = f(x2)
x1+3 = x2+3 | -3
x1 = x2
=> f injectivă
A f(x) = x^2 B
-2 2 -3 3
4 9
f: ℝ → ℝ, f(x) = x^2
f(x1) = f(x2)
x1^2 = x2^2 <=> x1^2 - x2^2 = 0
(x1 - x2)(x1 + x2) = 0
x1 = x2 sau x1 = -x2
=> f nu este injectivă
A f(x) = |x| B
1 -1 3 -3 5 -5
1 3 5
f: ℝ → ℝ, f(x) = |x|
f(x1) = f(x2)
|x1| = |x2|
x1 = ± x2
=> f nu este injectivă

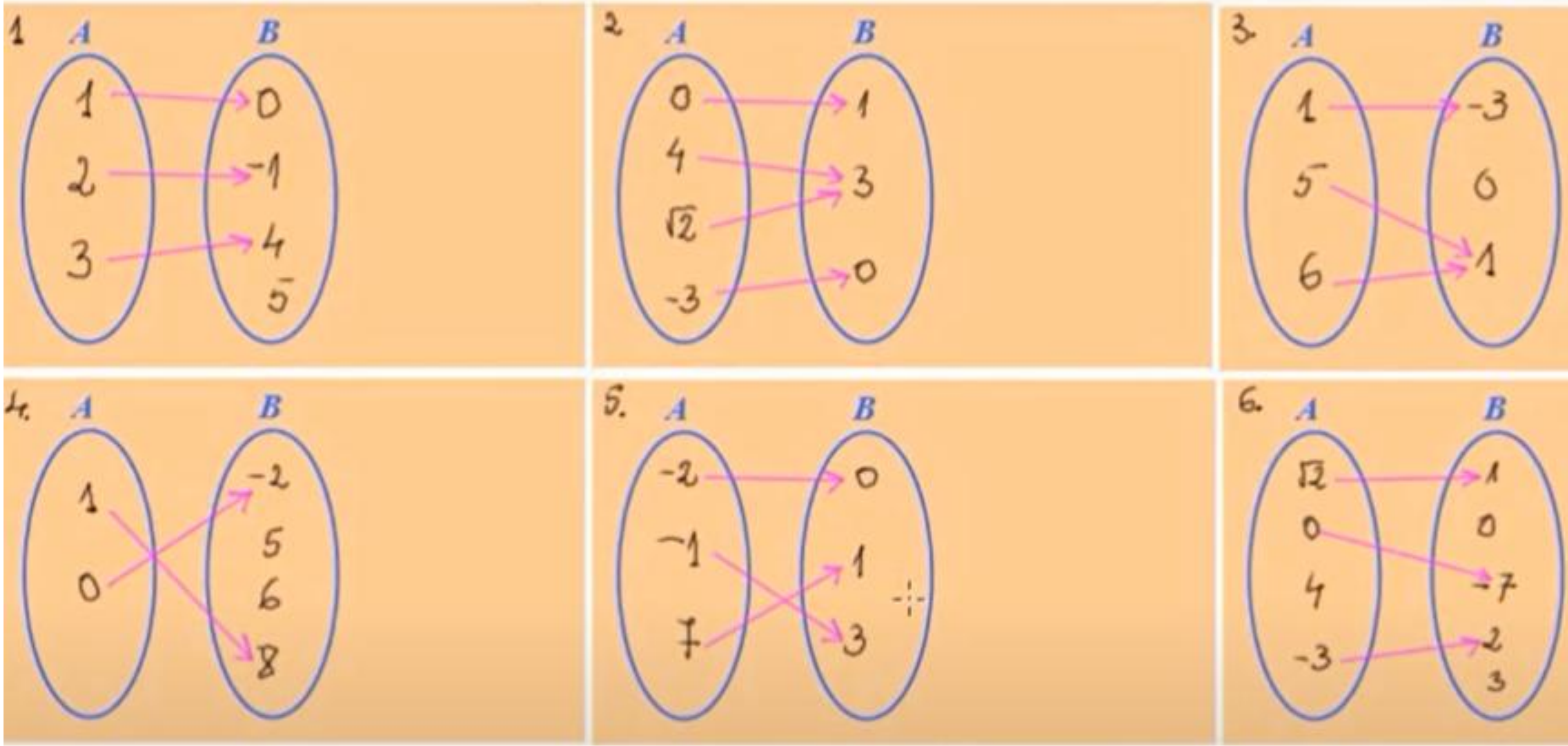
Cum arată graficele acestor trei funcții?

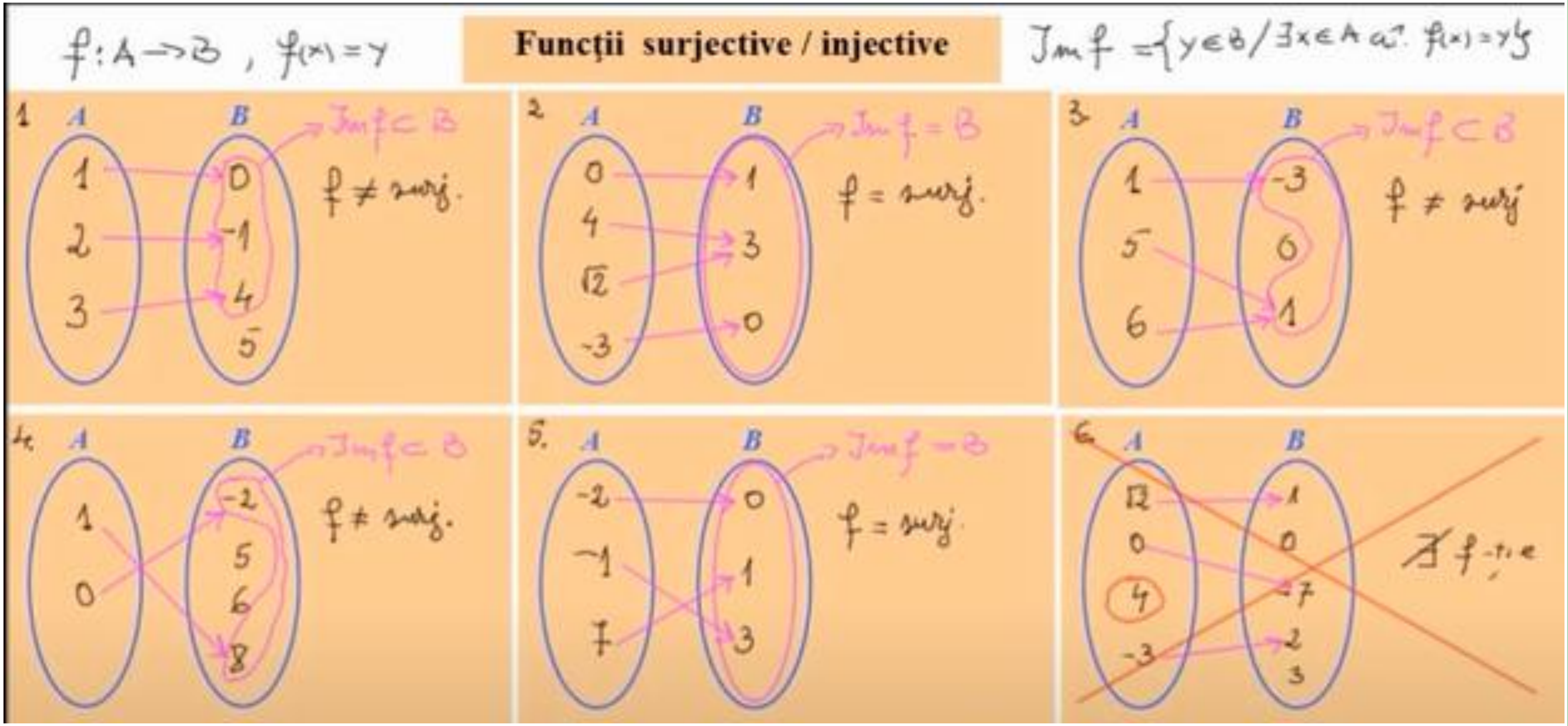


Ducem paralele la axa OX, observăm că taie graficul în cel mult un punct – f. injectivă, în caz contrar, nu este injectivă!

$f: A \to B$, $f(x) = y$

Funcţii surjective / injective



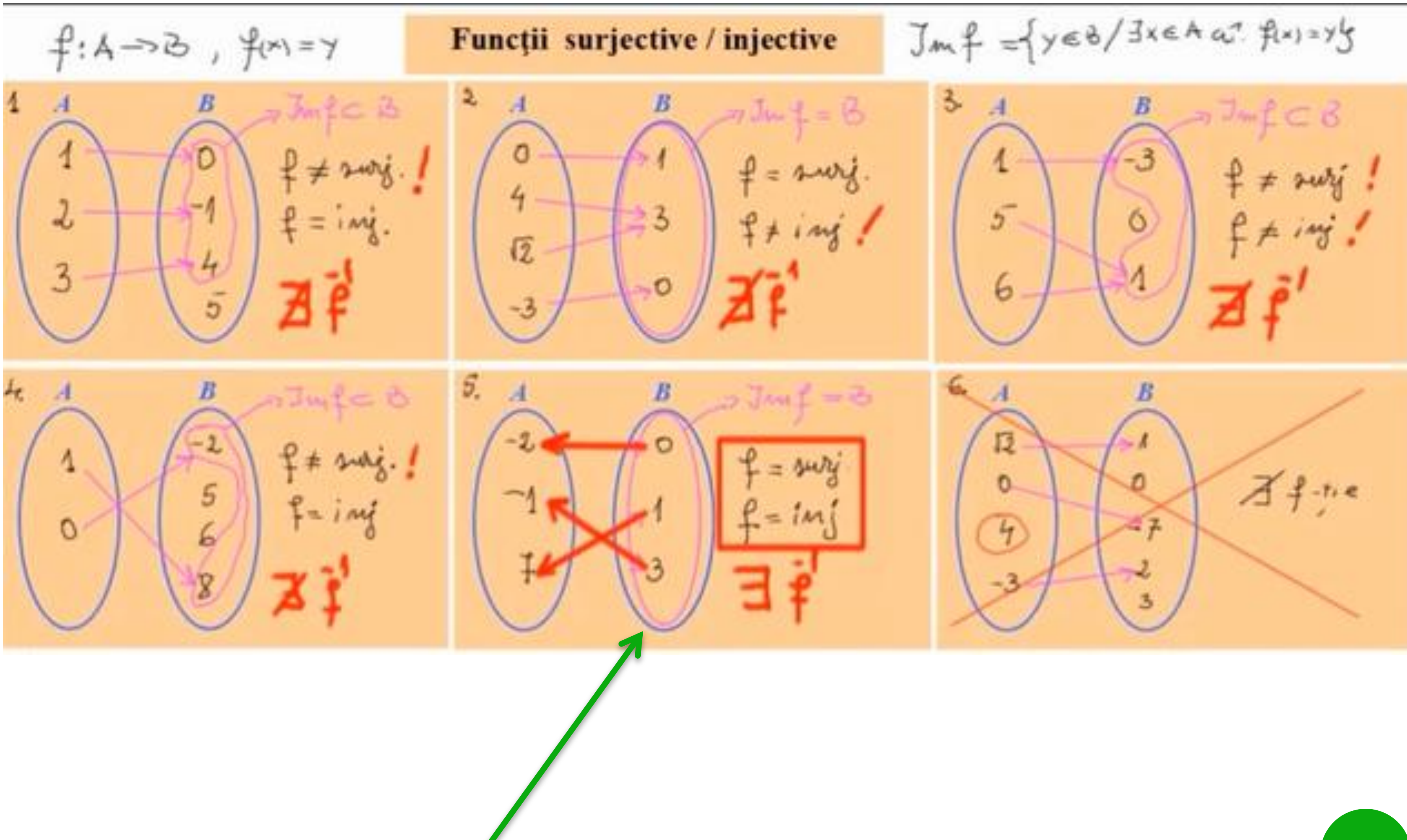


O funcție f este **surjectivă**:

1. Dacă ∀ **y ∈ B, ∃x ∈ A**, astfel încât **f(x)=y**
2. Dacă **Imf=B**

O funcție f este **injectivă**:

1. Dacă ∀ $\mathbf{x_1,x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\ \exists x \in A}$, astfel încât **f(x)=Y**
2. Dacă ∀ $\mathbf{x_1,x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$


Funcţii surjective / injective
f : A → B , f(x) = y
Im f = {y ∈ B / ∃ x ∈ A a.î. f(x) = y}
f ≠ surj. !
f = inj.
∄ f⁻¹
f = surj.
f ≠ inj !
f ≠ surj !
f ≠ inj !
f = surj
f = inj
∃ f⁻¹

Bijectivă

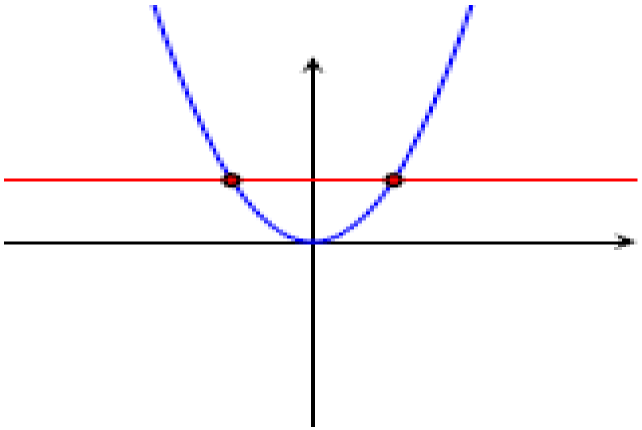
Funcții bijective

O funcţie **bijectivă** = injectivă și surjectivă.

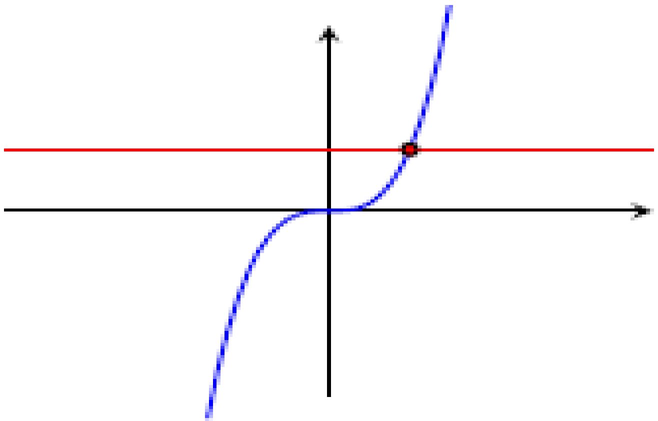
Recunoașterea funcțiilor injective, surjective

Cu ajutorul paralelelor la axele de coordonate recunoaștem dacă un grafic este graficul unei funcții ***injective*** sau ***surjective***, astfel:

- un grafic este graficul unei funcţii ***injective*** doar în cazul în care orice paralelă la axa absciselor dusă prin punctele **Codomeniului** întâlnește graficul în **cel mult** un punct;
- un grafic este graficul unei funcţii ***surjective*** doar în cazul în care orice paralelă la axa absciselor dusă prin punctele **Codomeniului** întâlnește graficul în **cel puțin** un punct.

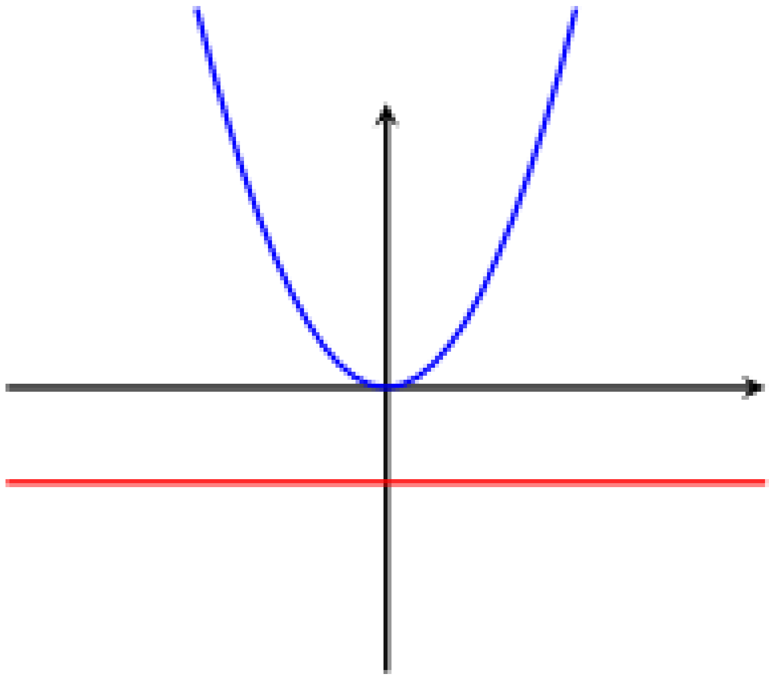


O funcție care nu este injectivă

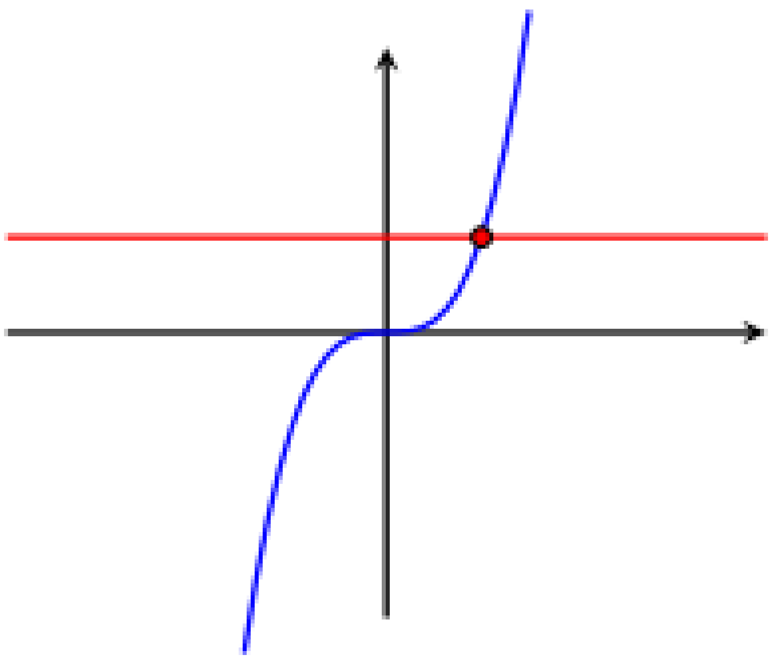


O funcție care este injectivă

Recunoașterea funcțiilor surjective



O funcție care nu este surjectivă



O funcție care este surjectivă

Operaţii cu funcții: compunerea funcțiilor

Funcția compusă $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Operaţia se numește: ($\circ$) **compunerea funcțiilor** (operații în lanț).

Fie $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ și $g(x) = 3x + 1$ atunci $f \circ g = f(g(x)) = 2(3x + 1)^2 - 3(3x + 1) + 1$.

Operaţii cu funcții: operații algebrice, inversa unei funcții

Fie **f: X → Y**, **g: X → Y**.

Adunarea f + g = f(x) + g(x);

Înmulțirea f · g = f(x) · g(x).

Inversând legea de corespondență (inversând sensul săgeților) pentru o funcție oarecare **f: X → Y** nu se obține întotdeauna o funcție. Pentru ca inversând legea de corespondență să fie satisfăcută condiția (2.3) este necesar și suficient ca prin funcția directă punctele diferite să aiba imagini diferite, adică:

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Pentru ca inversând legea de corespondență să fie satisfăcută condiția (2.2) este necesar și suficient ca prin funcția directă să se consume toate punctele din codomeniu, adică:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X: f(x) = y$$

Numărarea cu ajutorul funcțiilor (cardinal)

Un actuar[1] și un agricultor călătoresc cu trenul. Când au trecut pe lângă o pajiște pe care se afla o turmă de oi, actuarul a spus, „**Nu există 1248 de oi acolo**”. Agricultorul a răspuns, „**Extraordinar. Din întâmplare, eu îl cunosc pe proprietarul oilor, iar cifra este absolut corectă. Cum de le-ai numărat atât de repede?**”. Actuarul a răspuns, „**Foarte simplu, am numărat doar numărul de picioare și am împărțit la patru**”.

Ce e mai ușor de numărat capurile sau picioarele?

Cu ajutorul funcţiilor bijective putem număra elementele unei mulţimi numărând altă mulțime.

Dacă **f: X → Y** este o bijecție atunci numărând elementele mulţimii **X**, de fapt, numărăm și elementele mulțimii **Y**;

La fel şi invers: **f: Y → X**

[1] Specialist în calcule statistice privitoare la asigurări.

Funcții de echivalențe. Principiul lui Dirichlet

Două mulțimi se numesc **echivalente** dacă putem găsi o funcție bijectivă definită pe una din mulțimi și cu valori în cealaltă mulțime.

Principiul cutiilor lui Dirichlet:

O funcție **f: X → Y** unde **X** și **Y** sunt mulțimi finite cu **|X|> |Y|** nu poate fi ***injectivă***; trebuie să existe cel puțin două elemente din **X** care să aibă aceeași imagine în **Y**. De exemplu:

1. Dacă într-un auditoriu sunt **367** de studenți atunci, cel puțin doi din ei s-au născut în aceeași zi (pentru că avem mai mulți studenți decât zile în an).

2. Într-o pădure de conifere creșteau **800 000** de brazi, astfel încât nici unul din ei nu avea mai mult de **500 000** de ace; să se demonstreze că cel puțin doi brazi posedă același număr de ace.

Concluzii

Putem afirma următoarele concluzii la tema predată:

- ✓ am cunoscut noțiunea de funcţie și interpretarea lor;
- ✓ am reprezentat funcțiile prin diferite moduri;
- ✓ am identificat diverse corespondenţe;
- ✓ am cunoscut noțiunea de imagine și preimagine;
- ✓ am făcut cunoștință cu proprietățile funcțiilor;
- ✓ am identificat funcţiile injective, surjective şi bijective
- ✓ am recunoscut funcțiile injective, surjective;
- ✓ am operat cu funcții: operații algebrice, inversa unei funcții
- ✓ am numărat cu ajutorul funcțiilor (cardinal);
- ✓ am identificat funcțiile de echivalențe:
- ✓ am cunoscut principiul lui Dirichlet etc.

Mulțumim pentru atenție!