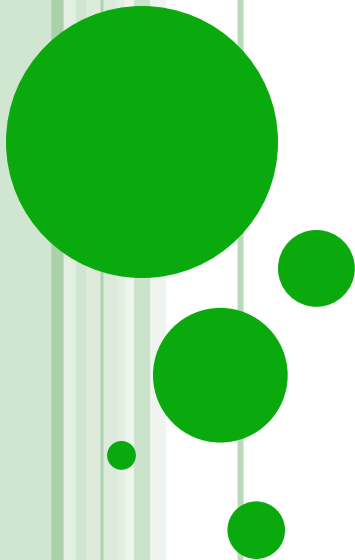


Structuri discrete

L. POPOV, dr., lect. univ.

V. ȚÎCĂU, lect. univ.



ELEMENTE DE COMBINATORICĂ



Plan

1. Combinatorica
2. Probleme de combinatorică
 - 2.1. Elemente de combinatorică
 - 2.1.1. Permutări;
 - 2.1.2. Combinări;
 - 2.1.3. Aranjamente.
3. Rezolvări de probleme
4. Concluzii



Finalități de învățare

La finele studierii temei respective, studentul va fi capabil:

- să definească noțiunea de combinatorică;
- să definească noțiunea de permutare;
- să definească noțiunea de combinați
- să definească noțiunea de aranjamente;
- să identifice elementele de combinatorică;
- să aplice în practică elementele studiate etc.



Combinatorica

Combinatorica este ramura matematicii care se ocupă în principal cu numărarea modurilor în care pot fi alese anumite obiecte, respectând anumite condiții.

În continuare vom prezenta cele *trei elemente de bază ale combinatoricii*, precum și câteva aplicații ale acestora.

Pentru simplitate, ne vom referi doar la mulțimi finite de forma $A = \{1, 2, \dots, n\}$, cu $n \in \mathbb{N}$. Mai întâi să amintim cele *două reguli* fundamentale folosite în problemele de numărare:

(1) Regula sumei; (1) Regula produsului.



Regula sumei

Dacă avem două mulțimi disjuncte (*mulțimi care nu au elemente comune*) **A** și **B**, cu **m** și respectiv **n** elemente, numărul de moduri de a alege un element din mulțimea **A** sau din mulțimea **B** este **m+n**.

Altfel spus, *reuniunea mulțimilor* **A** și **B** are **m+n** elemente.



Regula produsului

Dacă avem două mulțimi **A** și **B**, cu **m** și respectiv **n** elemente, numărul de moduri de a alege un element din mulțimea **A** și, respectiv, unul din mulțimea **B** este **m·n**.

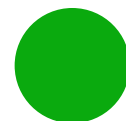
Cu alte cuvinte, *produsul cartezian al mulțimilor A și B* are **m·n** elemente.



Probleme de combinatorică

Deseori apar următoarele probleme: de a alege dintr-o mulțime oarecare de obiecte, numite *elementele mulțimii*, submulțimi de elemente care posedă anumite proprietăți; de a aranja elementele uneia sau a mai multe mulțimi într-o anumită ordine; de a determina numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi, constituite după anumite reguli.

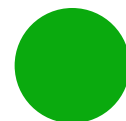
Deoarece în astfel de probleme este vorba de anumite combinații de obiecte, ele se numesc *probleme de combinatorică*. Domeniul matematicii care studiază așa probleme se numește *combinatorică*.



Probleme de combinatorică

Combinatorica este un compartiment al teoriei mulțimilor. Orice problemă de combinatorică poate fi redusă la o problemă despre mulțimi finite.

Combinatorica are o importanță considerabilă pentru teoria probabilităților, cibernetică, logica matematică, teoria numerelor, precum și pentru alte ramuri ale științei și tehnicii.



Elementele de combinatorică

```
graph TD; A[Elementele de combinatorică] --> B[Permutări]; A --> C[Combinări]; A --> D[Aranjamente];
```

Permutări

Combinări

Aranjamente



Permutări

Fie A o mulțime finită cu n elemente, care poate fi ordonată în mai multe moduri. Se obțin, astfel, mulțimi ordonate diferite, care se deosebesc numai prin ordinea elementelor. Fiecare din mulțimile ordonate care se formează cu cele n elemente ale mulțimii A se numește *permutare* a elementelor acelei mulțimi.

Permutarea ca o ordonare se definește indicând care element este primul, care e al doilea etc.

Cu alte cuvinte, permutarea mulțimii $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ poate fi definită ca o aplicație (funcție) biunivocă (bijectivă) a mulțimii $B_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ în mulțimea A . În acest context permutarea se mai numește *substituție*.

Numărul permutărilor de n elemente se notează P_n și se citește „permutări de n ”.

Numărul permutărilor cu n elemente este: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$



Permutări

În cazul în care avem:

- ✓ o mulțime cu un singur element care poate fi ordonată într-un singur mod, atunci $P_1 = 1$
- ✓ o mulțime cu două elemente $A = \{a, b\}$ care poate fi ordonată în două moduri, obținându-se două permutări: $\{a, b\}$ și $\{b, a\}$, atunci $P_2 = 2 = 1 \cdot 2 = 2!$
- ✓ o mulțime cu trei elemente $A = \{a, b, c\}$ care poate fi ordonată în 6 moduri, obținându-se șase permutări: $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$ și $\{c, b, a\}$, atunci $P_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$

Menționăm că produsul primelor n numere naturale nenule s-a notat prin $n!$ și se citește „**n factorial**”, adică

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n!$$



Permutări

Din punct de vedere combinatorial, o *permutare* a unei mulțimi reprezintă o *modalitate de a aranja secvențial elementele acesteia*.

Exemplu 1: Fie dată $A_1=\{1\}$. Care este numărul de ordonări pe care le putem face? $(1) \Rightarrow P_1=1$

Exemplu 2: Fie dată $A_2=\{1, 2\}$. Care este numărul de submulțimi formate din aceste elemente? Care ar fi numărul de ordonări sau care sunt variantele în care poziția contează foarte mult? $(1, 2)$ și $(2, 1) \Rightarrow P_2 = 2 = 1 \cdot 2 = 2!$

Exemplu 3: Fie dată mulțimea $A_3=\{1, 2, 3\}$. Care ar fi numărul de ordonări?

(1, 2, 3)

(1, 3, 2)

(2, 1, 3)

(2, 3, 1)

(3, 1, 2)

(3, 2, 1) $\Rightarrow P_3=6=1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$

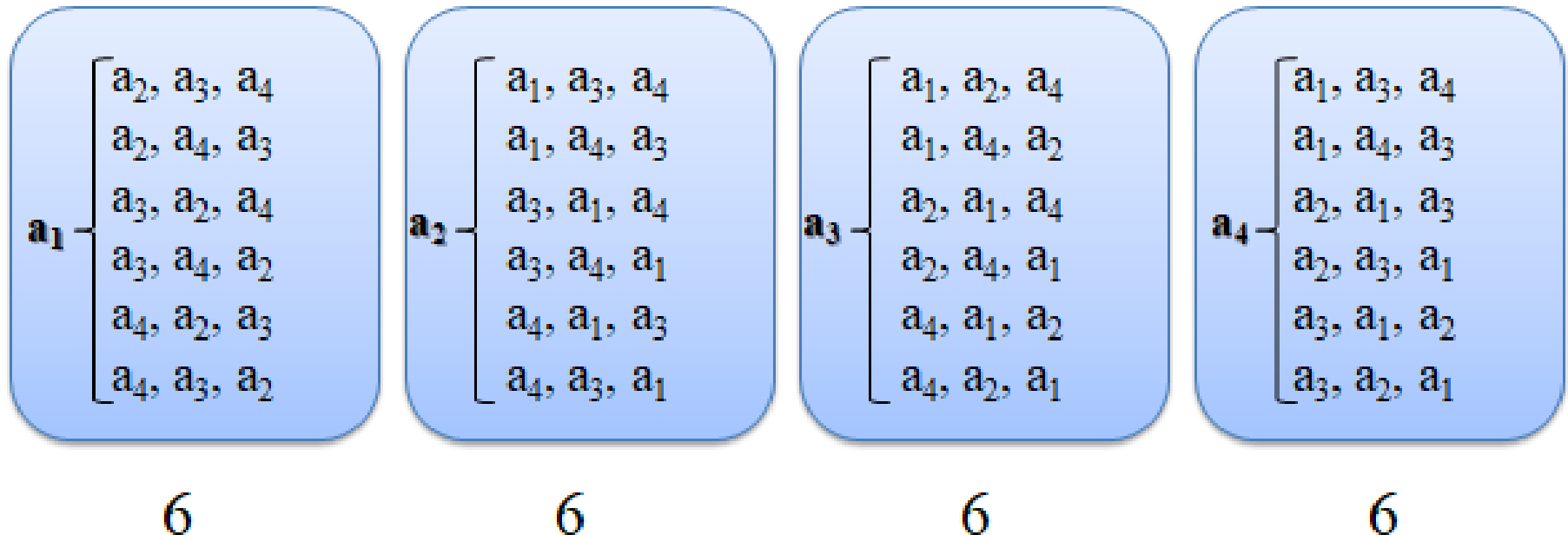
Nr total de ordonări sau schimbări ale unei mulțimi cu 3 elemente este 6. Mulțimea dată are același nr de elemente, numai că ordinea este alta și le numim *permutări*, adică le-am schimbat pozițiile.

Cât va fi P_4 ?

Fie dată mulțimea $A_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Câte permutări putem face cu elementele acestei mulțimi?

Să vedem logica de ce anume 24: dăm fiecare element al mulțimii pe prima poziție și obținem următoarele:



$$P_4 = 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$$

$$P_5 = 5 \cdot 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! \dots$$

Exprimarea factorialului mai mare cu ajutorul celui mai mic

$$0!=1$$

$$P_n=n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n - \text{formula principală}$$

$$n!=(n-3)(n-2)(n-1)n=(n-1!)n$$

Ce înseamnă PERMUTARE?

Numărul de schimbări care se pot face între elementele unei mulțimi!



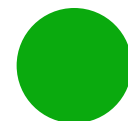
Probleme: Permutări

• În câte moduri 7 bile numerotate pot fi repartizate în 7 urne astfel încât toate urnele să fie ocupate?

R: $P_7 = 5040$

Se formează un tren alcătuit din 10 vagoane diferite. Să se determine în câte feluri pot fi așezate cele 10 vagoane pentru alcătuirea trenului?

R: $P_{10} = 3628800$



Combinări

Combinări C_n^k înseamnă numărul de submulțimi *neordonate* a unei mulțimi cu n elemente, în fiecare din aceste submulțimi aflându-se câte k elemente.

Fie $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, ne interesează numărul de submulțimi pe care le pot forma cu elementele acestei mulțimi luând mai întâi câte un singur element.

$$C_3^1 = \mathbf{3}; \quad \Rightarrow \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}$$

$$C_3^2 = \mathbf{3} \quad \Rightarrow \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}$$

$$C_3^3 = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$C_3^0 = \mathbf{1} \quad \Rightarrow 0! = 1$$



Combinări

Fie $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, să vedem numărul submulțimilor pe care le pot forma cu elementele acestei mulțimi, procedând la fel:

$$C_4^0 = 1 \Rightarrow \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}$$

$$C_4^1 = 4 \Rightarrow \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}$$

$$C_4^2 = 6 \Rightarrow \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3, a_4\}$$

$$C_4^3 = 4 \Rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_4\}$$

$$C_4^4 = 1 \Rightarrow \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

noteaza:

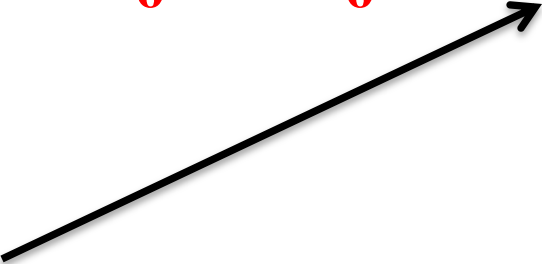
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Această formulă permite să găsim cu exactitate numărul de submulțimi *neordonate*.

Formula combinărilor complementare

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \text{ pentru } k > n/2;$$

$$\text{Exemplu: } C_6^5 = C_6^{6-5} = C_6^1 = 6$$

$$C_n^1 = n$$




Probleme: Combinări

1. În câte moduri din 30 de elevi poate fi ales un comitet format din 3 elevi?

R: $C_{30}^3 = 4060$

2. În câte moduri se pot forma echipe de câte 4 elevi și un profesor, dacă sunt 20 de elevi și 3 profesori?

R: $C_{20}^4 \cdot C_3^1 = 14535$

3. În câte moduri din 20 de judecători pot fi aleși 3 pentru participarea la un proces de judecată?

R: $C_{20}^3 = 1140$

4. Din 10 trandafiri și 8 garoafe trebuie format un buchet ce conține 7 trandafiri și 2 garoafe. Câte buchete diferite pot fi formate?

R: $C_{10}^7 \cdot C_8^2 = 3360$



Aranjamente

Fie o mulțime **A** cu **n** elemente. Submulțimile ordonate ale lui **A** având fiecare câte **k** elemente, **k=0, n**, se numește *aranjamente* de **n** câte **k** elemente. Numărul aranjamentelor de **n** luate câte **k** se notează:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$$

$A_n = P_k \cdot C_n$ - aceasta este legătura între *aranjamente*, *permutări* și *combinări*.

Numărul aranjamentelor este cu mult mai mare de **k!** ori mai mare decât numărul combinațiilor.



Aranjamente

Fie o mulțime **A** cu **n** elemente. Pentru $k \leq n$, din cele **n** elemente ale mulțimii **A** se pot forma diferite mulțimi *ordonate*, fiecare cu câte **k** elemente.

De exemplu, din elementele mulțimii {a, b, c, d} pot fi formate **12 mulțimi ordonate**, având fiecare câte două elemente: {a, b}, {b, a}, {a, c}, {c, a}, {a, d}, {d, a}, {c, b}, {b, c}, {b, d}, {d, b}, {c, d}, {d, c}.

Mulțimile ordonate care se formează din elementele unei submulțimi oarecare a unei mulțimi finite **A** se numesc *submulțimi ordonate* ale lui **A**, sau *aranjamente*.

Aranjamente de **n** luate câte **k** (**n** și **k** numere naturale și $k \leq n$) sunt submulțimile ordonate care conțin **k** elemente diferite din mulțimea dată cu **n** elemente.

Două aranjamente diferite din **n** elemente luate câte **k** diferă ori prin elementele înseși, ori prin ordinea lor. Numărul aranjamentelor din **n** elemente luate câte **k** se notează A_n^k și se citește „*aranjamente de n luate câte k*”.

A_n^k este numărul aplicațiilor injective ale unei mulțimi cu **k** elemente într-o mulțime cu **n** elemente.

Aranjamente

Un aranjament de n elemente luate câte k , al mulțimii A de cardinal n , reprezintă o submulțime ordonată a lui A de k elemente.

De exemplu, aranjamentele de 3 luate câte 2 ale mulțimii $A=\{1, 2, 3\}$ sunt:

(1,2)

(1,3)

(2,1)

(2,3)

(3,1)

(3,2)

Similar permutărilor, aranjamentele pot fi considerate funcții injective definite pe mulțimea $\{1, 2, \dots, k\}$ cu valori în $\{1, 2, \dots, n\}$. Semnificația expresiei $f(x)=y$ este că elementul de pe poziția x din aranjament este egal cu y . Este clar că permutările sunt un caz particular de aranjamente: Permutările de ordin n sunt aranjamente de n luate câte n .

Numărul aranjamentelor de n luate câte k se notează cu A_n^k , și este egal cu $\frac{n!}{(n-k)!}$. Din nou, putem demonstra această relație în două moduri:



Aranjamente

Metoda 1

Atunci când construim un aranjament de n elemente luate câte k , pe prima poziție putem pune orice valoare, deci avem n variante. Pe a doua poziție putem pune orice valoare, mai puțin cea pe care deja am folosit-o, deci am rămas cu $n - 1$ variante. Generalizând, obținem:

$$A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$



Aranjamente

Metoda 2

Putem construi aranjamentele de n elemente luate câte k pornind de la permutările de ordin n . Pentru asta, este de ajuns să ștergem ultimele $n - k$ elemente din fiecare permutare, însă nu vom rămâne cu aranjamente distincte. De exemplu, dacă $n = 5$ și $k = 2$, permutările care se transformă în aranjamentul $(3, 1)$ sunt:

$(\mathbf{3}, 1, 2, 4, 5)$

$(\mathbf{3}, 1, 2, 5, 4)$

$(\mathbf{3}, 1, 4, 2, 5)$

$(\mathbf{3}, 1, 4, 5, 2)$

$(\mathbf{3}, 1, 5, 2, 4)$

$(\mathbf{3}, 1, 5, 4, 2)$

Se observă ușor că numărul de permutări care generează un anumit aranjament este P_{n-k} , pentru că ultimele $n - k$ elemente ale lor pot fi aranjate în P_{n-k} moduri. Așadar, $A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.



Probleme: **Aranjamente**

În câte moduri este posibil să facem un steag tricolor dacă avem la dispoziție pânză de steag de cinci culori diferite ?

R: $A_5^3 = 60$

În câte moduri poate fi alcătuit un număr de telefon din 7 cifre dacă toate cifrele sânt diferite?

R: $A_{10}^7 = 604800$

De câte dicționare este nevoie pentru a traduce direct din limba română, rusă, engleză, franceză, italiană în oricare din ele?

R: $A_5^2 = 20$



Reguli fundamentale ale combinatoricii

Deseori reușim să divizăm combinările studiate în câteva clase, astfel încât fiecare combinație se include în una și numai în una din clase. În acest caz, numărul total de combinații este egal cu suma numărului de combinații din fiecare clasă.

Această afirmație se numește *regula de adunare a combinatoricii*. Ea poate fi formulată și altfel: dacă obiectul arbitrar **A** poate fi ales în **m** moduri, iar alt obiect **B** poate fi ales în **n** moduri, atunci alegerea „sau **A**, sau **B**” poate fi efectuată în **m+n** moduri.

La aplicarea regulii de adunare se va ține cont de faptul că nici unul din modurile de alegere a obiectului **A** nu trebuie să coincidă cu un careva mod de alegere a obiectului **B** (altfel, nici una din combinații să nu fie inclusă concomitent în două clase). Dacă însă astfel de coincidențe sunt, atunci regula de adunare nu este valabilă, obținându-se numai **(m+n-k)** moduri de alegere, unde **k** este numărul de coincidențe.



Reguli fundamentale ale combinatoricii

La formarea combinărilor din două elemente se știe în câte moduri poate fi ales primul element și în câte moduri elementul al doilea, astfel încât numărul modurilor de alegere a elementului al doilea nu depinde de faptul cum a fost ales primul element.

Fie că primul element poate fi ales în m moduri, iar al doilea în n moduri. Atunci aceste două elemente pot fi alese în mn moduri.

*Dacă obiectul A poate fi ales în m moduri și dacă după fiecare din aceste moduri obiectul B poate fi ales în n moduri, atunci alegerea perechii (A, B), în ordinea indicată, poate fi realizată în mn moduri. Această afirmație se numește **regula de înmulțire a combinatoricii**.*

Într-adevăr, fiecare din m moduri de alegere a obiectului **A** poate fi combinat cu n moduri de alegere a obiectului **B**. Prin urmare, sunt mn moduri de alegere a perechii **B**).



Reguli fundamentale ale combinatoricii

Notând cu A_1, \dots, A_m cele m moduri de alegere a obiectului A , iar cu B_{i1}, \dots, B_{in} – n moduri de alegere a obiectului B , dacă obiectul A este ales prin modul i , regula de înmulțire poate fi ilustrată astfel:

$(A_1, B_{11}), \dots, (A_1, B_{1n}),$

$(A_2, B_{21}), \dots, (A_2, B_{2n}),$

...

$(A_i, B_{i1}), \dots, (A_i, B_{in}),$

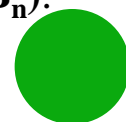
...

$(A_m, B_{m1}), \dots, (A_m, B_{mn}).$

Este evident că acest tabel conține toate modurile de alegere a perechii (A, B) și constă din mn elemente.

Dacă modurile de alegere a obiectului B nu depind de faptul cum este ales obiectul A , atunci obținem următoarea ilustrare a regulii de înmulțire:

$(A_1, B_1), (A_1, B_2), \dots, (A_1, B_n), (A_2, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_2, B_n), \dots, (A_m, B_1), (A_m, B_2), \dots, (A_m, B_n).$



Regulile fundamentale ale combinatoricii

Uneori apare necesitatea de a compune (alcătui) nu perechi, dar combinații dintr-un număr mai mare de elemente, ceea ce conduce la următoarea problemă: câte k – repartizări pot fi alcătuite, dacă primul element poate fi unul de n_1 tipuri diferite, al doilea – de n_2 tipuri diferite, ..., elementul k – de n_k tipuri diferite? Astfel, două repartizări se consideră distincte, dacă cel puțin pe un loc sunt situate diferite elemente.

Această problemă poate fi rezolvată astfel:

Elementul mai întâi poate fi ales în n_1 moduri. Fiecare din elementele alese poate fi asociat cu oricare din n_2 tipuri ale elementului al doilea, obținându-se $n_1 n_2$ perechi. Fiecare pereche poate fi asociată cu oricare din n_3 tipuri ale elementului al treilea, obținându-se $n_1 n_2 n_3$ triplete. Continuând, vom obține în final $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ repartizări de tipul cerut.



Regulile fundamentale ale combinatoricii

Exemplu: Din 3 ingineri și 9 economiști trebuie să se formeze o comisie din 7 persoane. În câte moduri poate fi formată comisia, astfel încât în componența ei să fie cel puțin un inginer?

Rezolvare. În comisie pot fi: 1 inginer și 6 economiști; 2 ingineri și 5 economiști; 3 ingineri și 4 economiști.

Alegerea unui inginer din 3 este posibilă în $C_3^1 = 3$ moduri, iar a 6 economiști din 9 – în C_9^6 , moduri. În conformitate cu regula de înmulțire, comisia din un inginer și 6 economiști poate fi aleasă în $C_3^1 \cdot C_9^6$ moduri.

Alegerea a 2 ingineri din trei este posibilă în C_3^2 moduri, iar a 5 economiști din 9 – în C_9^5 moduri. În baza regulii de înmulțire, comisia din 2 ingineri și 5 economiști poate fi aleasă în $C_3^2 \cdot C_9^5$ moduri.

Alegerea a 3 ingineri din 3 este posibilă în C_3^3 moduri, iar a 4 economiști din 9 – în C_9^4 moduri. Conform regulii de înmulțire, comisia din 3 ingineri și 4 economiști poate fi aleasă în $C_3^3 \cdot C_9^4$ moduri.

Astfel, numărul total de moduri în care poate fi formată comisia în a cărei componență să fie cel puțin un inginer, în conformitate cu regula de adunare a combinatoricii, este: $C_3^1 \cdot C_9^6 + C_3^2 \cdot C_9^5 + C_3^3 \cdot C_9^4 = 756$.

Răspuns: 756 de moduri



Formula de includere și eliminare

Fie N obiecte, dintre care unele posedă proprietățile a_1, a_2, \dots, a_n . Astfel, fiecare obiect poate să nu posedă nici una din aceste proprietăți sau poate să posedă una ori câteva proprietăți.

Notăm prin $N(a_1, a_2, \dots, a_n)$ numărul de obiecte care posedă proprietățile a_1, a_2, \dots, a_n (este posibil să posedă și alte proprietăți).

Pentru a considera obiectele care nu posedă unele proprietăți, atunci această proprietate o notăm cu simbolul „[•]”.

De exemplu, prin $N(a_1, a_2, a_4^{'})$ notăm numărul de obiecte care posedă proprietățile a_1 și a_2 , însă nu posedă proprietatea a_4 (fără a face referință la celelalte proprietăți).

Notăm cu $N(a_1^{'}, a_2^{'}, \dots, a_n^{'})$ numărul de obiecte care nu posedă nici una din proprietățile indicate.



Formula de includere și eliminare

Astfel,

$$\begin{aligned} N(a_1', a_2', \dots, a_n') &= N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_n) + \\ &+ N(a_1, a_2) + N(a_1, a_3) + \dots + N(a_1, a_n) + \dots + N(a_{n-1}, a_n) - \\ &- N(a_1, a_2) + N(a_1, a_3) + \dots + N(a_1, a_n) + \dots + N(a_{n-1}, a_n) - \\ &- N(a_1, a_2, a_3) - \dots - N(a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) + \dots + (-1)^n N(a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Suma algebrică se extinde asupra tuturor combinațiilor proprietăților $\mathbf{a_1, a_2, \dots, a_n}$. Se scrie semnul +, dacă numărul considerat de proprietăți este par, și semnul – dacă acest număr este impar. De exemplu, $N(\mathbf{a_3, a_5})$ se conține cu semnul +, iar $N(\mathbf{a_2, a_3, a_4})$ se conține cu semnul „–”.

Formula de includere și eliminare: inițial se elimină toate obiectele care posedă una din proprietățile $\mathbf{a_1, a_2, \dots, a_n}$, apoi sunt incluse obiectele care posedă cel puțin două din aceste proprietăți, se elimină obiectele care posedă cel puțin trei proprietăți etc.



Formula de includere și eliminare

Exemplu. Într-un colectiv de cercetare activează câteva persoane, fiecare posedând cel puțin o limbă străină. Șase persoane cunosc limba engleză, șase – limba germană, șapte – limba franceză. Patru cunosc engleza și germana, trei – germana și franceza, doi – franceza și engleza. O persoană cunoaște toate cele trei limbi.

Câte persoane activează în acest colectiv?

Câte dintre acestea cunosc numai limba engleză?

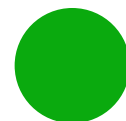
Câte dintre acestea cunosc numai limba franceză?

Rezolvare. În conformitate cu formula de includere și eliminare, numărul de angajați este $6+6+7-4-3-2+1=11$ (pers). Numai limba engleză o cunosc $6-4-2+1=1$ (pers), numai franceza cunosc $7-3-2+1=3$ (pers).

Răspuns: 11 persoane activează în acest colectiv;

1 persoană cunoaște limba engleză;

3 persoane cunosc limba franceză.



Rezolvarea problemelor

Să se calculeze: $C_3^2 + 3!$

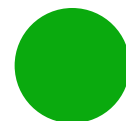
Metoda 1:

Readucem aminte formula: de la indicele de jos (3) se înmulțesc descrescător în număr de factor cât este indicele de sus (2) și se împarte la atâți factori cât este indicele de sus.

$$C_3^2 + 3! = ((3 \cdot 2)/(1 \cdot 2)) + 3! = 6/2 + 3! = 3 + 3! = 9$$

Metoda 2: Aplicând *formula combinărilor complementare* care ne spune că: $C_n^k = C_n^{n-k}$, pentru $k > n/2$; $C_n^1 = n$

$$C_3^2 + 3! = C_3^{3-2} + 3! = C_3^1 + 3! = 3 + 3! = 9$$



Rezolvarea problemelor


Să se calculeze $C_8^3 - C_8^5$.

Aplicând formula combinărilor complementare care ne spune
că: $C_n^k = C_n^{n-k}$, pentru $k > n/2$

Rezolvare: **Metoda 1:**

$$C_8^3 - C_8^5 = C_8^3 - C_8^{8-5} = C_8^3 - C_8^3 = 0$$

Metoda 2:


$$C_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 / 1 \cdot 2 \cdot 3 = 56$$

$$C_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot \del{6 \cdot 5 \cdot 4} / \del{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56$$

$$C_8^3 - C_8^5 = 56 - 56 = 0$$



Rezolvarea problemelor

Să se calculeze $C_7^5 - C_6^5 - C_6^4$.

$$\begin{aligned} C_7^5 - C_6^5 - C_6^4 &= C_7^{7-5} - C_6^{6-5} - C_6^{6-4} = C_7^2 - C_6^1 - C_6^2 = \\ &= 7 \cdot 6 / 1 \cdot 2 - 6 - 6 \cdot 5 / 1 \cdot 2 = 21 - 6 - 15 = 0 \end{aligned}$$

Să se calculeze $A_4^4 + C_4^4$.

$$A_4^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$C_4^4 = A_4^4 / P_4 = 24 / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 / 24 = 1$$

$$C_4^4 = C_4^{4-4} = C_4^0 = 1$$

$$A_4^4 + C_4^4 = 24 + 1 = 25$$



Rezolvarea problemelor

Să se compare numerele $a = C_4^1 + C_4^3$ și $b = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$.

$$a = C_4^1 + C_4^3 = C_4^1 + C_4^{4-3} = C_4^1 + C_4^1 = 4 + 4 = 8$$

$$b = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = C_3^0 + C_3^1 + C_3^{3-2} + C_3^{3-3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

S-a demonstrat că: **a=b**

Să se determine numărul tuturor submulțimilor de 2 elemente care se pot forma cu elemente din mulțimea {1, 2, 3, 4, 5}.

Având o mulțime cu **n** elemente, numărul tuturor submulțimilor cu **k** elemente din mulțimea dată este prin definiție C_n^k , în cazul nostru $\text{Card } \{1, 2, 3, 4, 5\} = 5$. Vom calcula **$C_5^2 = ?$**

Răspuns:

$$C_5^2 = 5 \cdot 4 / 1 \cdot 2 = 20 / 2 = 10$$



Rezolvarea problemelor

Să se calculeze $C_{2009}^2 - C_{2009}^{2007}$.

Să se verifice că $C_5^1 + C_5^3 + C_5^5 = 2^4$

Să se calculeze $C_{1000}^2 - C_{1000}^{998}$.

Să se calculeze $C_6^2 - C_6^4$

Să se calculeze $0! + 1! + 2! + 3!$

Să se calculeze $C_8^5 - C_8^3$

Să se calculeze $3! - C_4^2$.

Să se calculeze $C_{10}^9 - C_9^8$



Mulumim pentru atenție!

