Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по лабораторной работе №8
по дисциплине
«Математическая статистика»

Выполнил студент:

Кондратьев Д. А.
группа: 3630102/70301

Проверил:

к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2020 г.

Содержание

1. Постановка задачи **2**

2. Теория **2**

2.1. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения 2

2.2. Доверительные интервалы для математического ожидания m и среднего квадратического отклонения σ произвольного распределения при большом объёме выборки. Асимптотический подход 3

3. Реализация **3**

4. Результаты **4**

4.1. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения 4

4.2. Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения. Асимптотический подход 4

5. Обсуждение **4**

6. Литература **5**

7. Приложение **5**

Список таблиц

1 Доверительные интервалы для параметров нормального распределения 4

2 Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения. Асимптотический подход 4

1. Постановка задачи

Для двух выборок размерами 20 и 100 элементов, сгенерированных согласно нормальному закону $N(x, 0, 1)$, для параметров положения и масштаба построить асимптотически нормальные интервальные оценки на основе точечных оценок метода максимального правдоподобия и классические интервальные оценки на основе статистик χ^2 и Стьюдента. В качестве параметра надёжности взять $\gamma = 0.95$.

2. Теория

2.1. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Оценкой максимального правдоподобия для математического ожидания является среднее арифметическое: $\mu = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Оценка максимального правдоподобия для дисперсии вычисляется по формуле: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

Доверительным интервалом или интервальной оценкой числовой характеристики или параметра распределения θ с доверительной вероятностью γ называется интервал со случайными границами (θ_1, θ_2), содержащий параметр θ с вероятностью γ.

Функция распределения Стьюдента:

$$T = \sqrt{n-1}\frac{\overline{x} - \mu}{\delta} \tag{1}$$

Функция плотности распределения χ^2:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Интервальная оценка математического ожидания:

$$P = \left(\overline{x} - \frac{\sigma t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < \mu < \overline{x} + \frac{\sigma t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma, \tag{3}$$

где $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантиль распределения Стьюдента порядка $1 - \frac{\alpha}{2}$.

Интервальная оценка дисперсии:

$$P = \left(\frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}} < \sigma < \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}} \right) = \gamma, \quad (4)$$

где $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ — квантили распределения Стьюдента порядков $1-\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\alpha}{2}$ соответственно.

2.2. Доверительные интервалы для математического ожидания m и среднего квадратического отклонения σ произвольного распределения при большом объёме выборки. Асимптотический подход

Асимптотическая интервальная оценка математического ожидания:

$$P = \left(\overline{x} - \frac{\sigma u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < m < \overline{x} + \frac{\sigma u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right) = \gamma, \quad (5)$$

где $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ – квантиль нормального распределения $N(x,0,1)$ порядка $1-\frac{\alpha}{2}$.

$$\sigma(1 - 0.5u_{1-\alpha/2}\sqrt{e+2}/\sqrt{n}) < \sigma < \sigma(1 + 0.5u_{1-\alpha/2}\sqrt{e+2}/\sqrt{n}) \quad (6)$$

3. Реализация

Лабораторная работа выполнена на программном языке *Python 3.8* в среде разработки *Jupyter Notebook 6.0.3*. В работе использовались следующие пакеты языка *Python*:

- *numpy* — для генерации выборки и работы с массивами;
- *scipy.stats* — содержит все необходимые распределения.

Ссылка на исходный код лабораторной работы приведена в приложении.

4. Результаты

4.1. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

n	m	σ
20	$(-0.62; 0.28)$	$(0.73; 1.40)$
100	$(-0.24; 0.12)$	$(0.81; 1.07)$

Таблица 1. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

4.2. Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения. Асимптотический подход

n	m	σ
20	$(-0.58; 0.24)$	$(0.83; 1.09)$
100	$(-0.24; 0.12)$	$(0.86; 1.01)$

Таблица 2. Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения. Асимптотический подход

5. Обсуждение

Исходя из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

- Генеральные характеристики ($m = 0$ и $\sigma = 1$) накрываются построенными доверительными интервалами.
- Лучший результат достигается на выборках большого объема, так как получаемые интервалы получаются меньшей длины.
- Доверительные интервалы для параметров нормального распределения более надёжны, так как основаны на точном, а не асимптотическом распределении.

6. Литература

1) **Вероятностные разделы математики.** Учебник для бакалавров технических направлений.//Под ред. Максимова Ю.Д. — Спб.: «Иван Федоров», 2001. — 592 с., илл.

2) Confidence interval. URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Confidence_interval`

7. Приложение

1) Код лабораторной. URL: `https://github.com/DmitriiKondratev/MatStat/blob/master/Lab_8/Lab_8.ipynb`

2) Код отчёта. URL: `https://github.com/DmitriiKondratev/MatStat/blob/master/Lab_8/Lab_report_8.tex`