Теорема о сумме трапеций:

$f \in C^2[a,b]$; Выбрано дробление $a < x_0 < x_1 \dots < x_n = b$

$\delta = \max x_{k-1}x_k$

$\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ $\quad k \in [0,n]$

Тогда: $$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\cdot(x_k - x_{k-1})\right| \le \frac{\delta^2}{8}\int |f''(x)|dx$$

Док-во:

рассмотрим интеграл на одном отрезке дробления:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,d(x-\xi_k) = \quad u=f(x) \Rightarrow u'=f'(x); \quad v'=1 \Rightarrow v = x-\xi_k$$

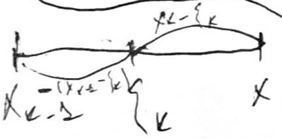
интегрируем по частям

мы могли выбрать любую константу, но выбрали эту!

$$= f(x)(x-\xi_k)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\cdot(x-\xi_k)\cdot dx$$

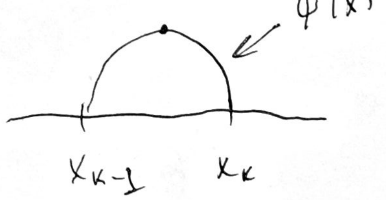
$\hookrightarrow (\cancel{f(x_k) - f(x_{k-1})})(x-\xi_k)$

$$f(x_k)(x_k-\xi_k) - f(x_{k-1})(x_{k-1}-\xi_k) = f(x_k)x_k - f(x_k)\xi_k + f(x_{k-1})x_{k-1} -$$
$$- f(x_{k-1})\xi_k = \dots$$



$$\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\cdot(x_k - x_{k-1}) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\cdot(x-\xi_k)\,dx \quad (1)$$

Введём $\psi(X) = \cancel{(x-x_k)}$ $(x_k - x)(x - x_{k-1})$, $x \in [x_{k-1}, x_k]$,



$$\psi'(x) = (x_k\cdot x - x_k x_{k-1} - x^2 + x\,x_{k-1})' =$$
$$= -2x + x_k + x_{k-1} \Rightarrow -\frac{1}{2}\psi(x) = x - \xi_k$$

Воу, мы где-то это уже видели!

$$(1)\quad \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\,\psi'(x)\,dx = \text{опять по частям;}\quad u = f'(x) \Rightarrow u' = f''(x); \quad v' = \psi'(x) \Rightarrow v = \psi(x)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underset{0}{\underset{\parallel}{f'(x)\cdot\psi(x)}}\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)\cdot\psi(x)\,dx\right).$$

(если подставить в $\psi(x)$)

Итого: $$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} - \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)\psi(x)\,dx$$

Теперь поработаем сначала:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\cdot(x_k - x_{k-1}) \right| = \left| \cancel{\int_a^b f(x)\,dx} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \right.$$

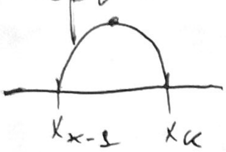
$$\left. - \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) \right| = \left| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k)+f(x_{k-1})\big)\cdot(x_k - x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)\,\psi(x)\,dx - \right.$$

$$\left. - \cancel{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}}(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \left| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)\,\psi(x)\,dx \right| \Rightarrow$$

$$= \left| \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)\,\psi(x)\,dx \right|$$

причём мы определили её и для всего $[a,b]$

Теперь опять поподробнее взглянем на $\psi(x)$: $\psi(x) = (x_k - x)(x - x_{k-1})$



$\leftarrow$ максимум в серединке (ξ_k) $\Rightarrow \psi(\xi_k) = (x_k - \xi_k)(\xi_k - x_{k-1}) =$

$$= \left(x_k - \frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2} - x_{k-1}\right) =$$

$$= \left(\cancel{\frac{x_k + x_{k-1}}{2}}\right)\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right)\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right) = \frac{1}{4}(x_k - x_{k-1})^2$$

$= \psi(x) \leq \frac{1}{4}\sigma^2$, т.к. σ – макс. отр.

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{8} \int_a^b f''(x)\,dx \right| = \frac{1}{8} \int_a^b |f''(x)|\,dx$$

ч.т.д.

Формула Эйлера–Маклорена (простейший случай)

$m, n \in \mathbb{Z}$ $\quad f \in C^2[m,n]$

Тогда: $$\int_m^n f(x)\,dx = \sum_{\substack{k=m \\ \text{трап}}}^{n}{}'' f(k) - \frac{1}{2} \int_m^n f''(x) \overbrace{\{x\}(1-\{x\})}^{(X)}\,dx$$

$\rightarrow$ крайние слагаемые с $\frac{1}{2}$

ФЛЭШБЕК:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\cdot(x_k - x_{k-1}) - \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)\,\psi(x)\,dx$$

(X) – просто хитрая запись $\psi(x)$

$\leftrightarrow$ всё вылезает из суммы трапеций, т.к. внутри слагаемые уничтожаются