Примечание: (следствие) $p > 1$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\left|\sum a_i b_i\right| \le \left(\sum |a_i^p|\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |b_i^q|\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum |a_i| |b_i| \le \left(\sum |a_i^p|\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |b_i^q|\right)^{\frac{1}{q}}$$ ← по доказанному ранее

$$\left|\sum a_i b_i\right| \le \sum |a_i| |b_i|$$ – ~~по нер-ву треугольника (?)~~ ?

Замечание

при $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ $\quad \frac{a_i^p}{b_i^q} = const$ $\quad (a_i)_{i=1\dots n} \uparrow\uparrow (b_i)_{i=1\dots n}$

Интегралы: $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f, g \in C[a,b]$

$$\left|\int_a^b fg\right| \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Док-во:

распишем интегральные суммы

$\xi_k = x_k := a + \frac{b-a}{n} \cdot k$, $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$

достаточно проверить при $f, g \ge 0$

Пусть $a_i = f(x_k) \cdot (\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}$, Тогда:

$b_i = g(x_k) \cdot (\Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$

$$\left|\sum f(x_k) g(x_k) \cancel{(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}\right| \le \left(\sum |f^p(x)\Delta x|\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum |g^q(x)| \Delta x\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left|\sum f(x_k) g(x)\right| \le \left(\sum |f^p(x)|\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum |g^q(x)|\right)^{\frac{1}{q}}$$

при $n \to +\infty$

↓

$$\left|\int_a^b fg\right| \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

ч.т.д.