

# Признакиравнения сходимости несобственного интеграла

$f, g$  - функции на  $(a, b)$ ,  $f, g \geq 0$

$$1) f \leq g$$

$$\begin{cases} g - \text{сходится} \Rightarrow f - \text{сходится} \\ f - \text{расходится} \Rightarrow g - \text{расходится} \end{cases}$$

$$2) \exists \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R}$$

причем, если

$$k = 0$$

~~$f$  - сходится  $\Rightarrow f$  - сходится~~

$$k = +\infty$$

~~$f$  - расходится  $\Rightarrow f$  - расходится~~

~~$f$  - сходится  $\Rightarrow g$  - сходится~~

$k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$   $g$  и  $f$  ~~сходится/расходится~~   
 ~~одинаково.~~

Док-во:

Лемма:

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x) dx, \quad A \in [a, b)$$

$$\int_a^b f(x) dx - \text{сходится} \Leftrightarrow \Phi(A) - \text{ограничен}$$

Док-во леммы:

$$\int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow \exists \lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A)$$

Т.к.  $\Phi(A) \uparrow$  монотонно

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x) dx; \quad \Psi(A) = \int_a^A g(x) dx$$

$$\int_a^b g(x) dx - \text{сходится} \Leftrightarrow \Psi(A) - \text{ограничен} \Rightarrow \Psi(A) \geq \Phi(A) \Rightarrow$$

$$\Phi(A) - \text{ограничен} \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx - \text{сходится}$$

другой случай аналогично.

2) Скалярная расколотая  $L \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

Пусть мы выбрали точку  $c \in (a, b)$ , при  $x \in [c, b]$

$$\frac{1}{2}L < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}L$$

Откуда это можно взять?

Идея в том: просто, какая-то

с некоторых  $x \in [c, b]$   $\frac{f(x)}{g(x)}$  лежит в окрестности

предела  $L$ ! И вот мы теперь возьмем окрестность  $\frac{1}{2}$ .

$$\text{Тогда: } \frac{1}{2}L \cdot g(x) < f(x) < \frac{3}{2}L \cdot g(x)$$

по пункту 1. этой теоремы  $g$  и  $f$  с х. / расх. одинаково.

$$\frac{1}{2022}L < \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{т.е. } \exists c \in (a, b), \text{ что } \forall x \in [c, b])$$

эта ~~инера~~ выполняется!

$$\Rightarrow \frac{1}{2022}L \cdot g(x) < f(x) \Rightarrow g(x) \text{ расх. } \Rightarrow f(x) \text{ расх.}$$

Для  $L=0$  аналогично

ч.т.д.