

---

---

# СВЯТОЙ КПК

## #BlessRNG

---

---

ИЛИ КАК НЕ СДОХНУТЬ НА 4 СЕМЕ ИЗ-ЗА МАТАНА

РАЗРАБОТАЛ

НИКИТА БАРЛАМОВ @SNITRON

ПОЧЁТНЫЙ АВТОР

ТИМОФЕЙ БЕЛОУСОВ @IMODRE

v0.0

ФЕВРАЛЬ-??? 2023

Вы в любой момент можете добавить любую недостающую теорему, затехав её и отправив код (фотографии письменного текста запрещены) в телегу любому из указанных авторов, или создав Pull Request в Git-репозиторий конспекта ([click](#)). Ваше авторство также будет указано, с вашего разрешения.

*Ah shit*  
*Here we go again!*  
*And again...*  
*Oh, fuck.*

## Содержание

<b>1</b>	<b>Период Палеозойский</b>	<b>4</b>
1.1	Важные определения . . . . .	4
1.1.1	Пространство $L^p(E, \mu)$ . . . . .	4
1.1.2	Пространство $L^\infty(E, \mu)$ . . . . .	4
1.1.3	Существенный супремум . . . . .	4
1.1.4	Гильбертово пространство . . . . .	4
1.1.5	Ортонормированная система, примеры . . . . .	5
1.2	Определения . . . . .	6
1.2.1	Произведение мер . . . . .	6
1.2.2	Сечения множества . . . . .	6
1.2.3	Полная мера, сигма-конечная мера . . . . .	6
1.2.4	Образ меры при отображении . . . . .	6
1.2.5	Взвешенный образ меры . . . . .	7
1.2.6	Плотность одной меры по отношению к другой . . . . .	7
1.2.7	Условие $L_{loc}$ . . . . .	7
1.2.8	Интеграл комплекснозначной функции . . . . .	7
1.2.9	Фундаментальная последовательность, полное пространство . . . . .	7
1.2.10	Мера Лебега-Стилтьеса, мера Бореля-Стилтьеса . . . . .	8
1.2.11	Функция распределения . . . . .	8
1.2.12	Ортогональный ряд . . . . .	8
1.2.13	Сходящийся ряд в гильбертовом пространстве . . . . .	8
1.2.14	Ортогональная система (семейство) векторов . . . . .	8
1.2.15	Коэффициенты Фурье . . . . .	9
1.2.16	Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве . . . . .	9
1.3	Важные теоремы . . . . .	10
1.3.1	Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде . . . . .	10
1.3.2	Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере	10
1.3.3	Принцип Кавальери . . . . .	11
1.3.4	Теорема Фубини . . . . .	11
1.3.5	Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме . . . . .	11
1.3.6	Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега . . . . .	12
1.3.7	Теорема о непрерывности сдвига . . . . .	12
1.4	Теоремы . . . . .	13
1.4.1	Теорема об интегрировании положительных рядов . . . . .	13
1.4.2	Абсолютная непрерывность интеграла . . . . .	15
1.4.3	Теорема о произведении мер . . . . .	16
1.4.4	Теорема Тонелли . . . . .	16
1.4.5	Формула для бета-функции . . . . .	16
1.4.6	Объем шара в $\mathbb{R}^m$ . . . . .	17
1.4.7	Теорема Фату. Следствия . . . . .	17
1.4.8	Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры . . . . .	18
1.4.9	Критерий плотности . . . . .	18
1.4.10	Лемма о единственности плотности . . . . .	18

1.4.11	Лемма об оценке мер образов малых кубов . . . . .	19
1.4.12	Предельный переход по параметру в несобственном интеграле . . . . .	19
1.4.13	Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости или $L_{loc}$ . . . . .	19
1.4.14	Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру . . . . .	20
1.4.15	Теорема о вложении пространств $L^p$ . . . . .	20
1.4.16	Теорема о сходимости в $L^p$ и по мере . . . . .	21
1.4.17	Полнота $L^p$ . . . . .	21
1.4.18	Плотность в $L^p$ множества ступенчатых функций . . . . .	21
1.4.19	Лемма Урысона . . . . .	21
1.4.20	Плотность в $L^p$ непрерывных финитных функций . . . . .	22
1.4.21	Интегрирование по мере Бореля–Стилтьеса, порожденной функцией распределения (с леммой) . . . . .	22
1.4.22	Теорема об интегрировании по частям . . . . .	22
1.4.23	Лемма о “почти признаке Дирихле” . . . . .	23
1.4.24	Следствие о “почти признаке Абеля” . . . . .	23
1.4.25	Признак Абеля равномерной сходимости интеграла . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Период Мезозойский</b>	<b>25</b>
2.1	Важные определения . . . . .	25
2.2	Определения . . . . .	26
2.2.1	Кусочно-гладкий путь . . . . .	26
2.3	Важные теоремы . . . . .	27
2.4	Теоремы . . . . .	28
2.4.1	Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве . . . . .	28
2.4.2	Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе . . . . .	28
2.4.3	Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя . . . . .	28

# 1 Период Палеозойский

## 1.1 Важные определения

### 1.1.1 Пространство $L^p(E, \mu)$

$1 \leq p < +\infty$ ,  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ,  $E \in \mathfrak{A}$

Тогда  $\mathfrak{L}_p(E, \mu) = \{f : \text{почти всех } E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}), f \text{ — измерима. } \int_E |f|^p < +\infty\}$

1.  $\mathfrak{L}_p(E, \mu)$  — линейное пространство
2.  $f \equiv g$ , если  $f = g$  почти всюду

$L_p := \mathfrak{L}_p / \equiv$  — точки этого пространства

$$[f] = \{g : f \equiv g\} \quad [f_1] + [f_2] = [f_1 + f_2]$$

И введём норму  $||[f]|| = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

### 1.1.2 Пространство $L^\infty(E, \mu)$

$\mathfrak{L}^\infty(E, \mu) = \{f : \text{почти всех } E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}), \text{ измерима, } \text{ess sup } |f| < +\infty\}$

$$||f||_\infty = \text{ess sup } f$$

**Дописать всё**

### 1.1.3 Существенный супремум

$$\text{ess sup } f = \inf\{a : f \leq a \text{ почти всюду}\}$$

$a$  — существенная верхняя граница функции  $f$ , если при почти всех  $x$   $f(x) \leq a$

*Свойства:*

1.  $\text{ess sup } f(x) \leq \sup f(x)$
2. при почти всех  $x : f(x) \leq \text{ess sup } f(x)$
3.  $f$  — суммируемая,  $g$  — измерима:  $\text{ess sup } |g| < +\infty$

$$\left| \int_E fg \right| \leq \text{ess sup } |g| \cdot \int_E |f|$$

### 1.1.4 Гильбертово пространство

$\mathfrak{H}$  — линейное пространство, в котором задано скалярное произведение и соответствующая норма. Если  $\mathfrak{H}$  — полное, то оно называется гильбертовым.

### 1.1.5 Ортонормированная система, примеры

$e_k$  — О. С. , тогда  $\frac{e_k}{\|e_k\|}$  — ортонормированная система.

Примеры:

1.  $l^2$   $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$
2.  $L^2[0, 2\pi]$   $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cos 3t, \sin 3t, \dots\}$
3.  $\left(\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}\right)_{k \in \mathbb{Z}}$

## 1.2 Определения

### 1.2.1 Произведение мер

$(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$  — пространства с мерой.

*Лемма:*  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — полукольца. Тогда  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$  — полукольцо.

Также, множества из  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  являются измеримыми прямоугольниками.

$\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные меры. Тогда стандартное продолжение  $m_0$  (в смысле теоремы о продолжении меры (?)) с полукольца  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ , определённой на некоторой  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ , и являющееся  $\sigma$ -конечной полной мерой — обозначается просто  $m$ .

И тогда  $m$  — и есть произведение мер  $\mu$  и  $\nu$  ( $\mu \times \nu$ ).

*Замечание:*

$$(\mu \times \nu) \times \rho = \mu \times (\nu \times \rho)$$

### 1.2.2 Сечения множества

$X, Y$  — множества.  $C \subset X \times Y$

Тогда:

$$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$$

$$C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$$

— сечения множества  $C$  (1 и 2 рода)

*Замечания:*

$$\left( \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha \right)_x = \bigcup_{\alpha \in A} (C_\alpha)_x$$

$$\left( \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \right)_x = \bigcap_{\alpha \in A} (C_\alpha)_x$$

$$(C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

### 1.2.3 Полная мера, сигма-конечная мера

См. [конспект прошлого семестра](#)

### 1.2.4 Образ меры при отображении

Пусть у нас есть  $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$  — пространства с мерой,  $\Phi : X \rightarrow Y$ .

1.  $\forall \Phi \quad \Phi^{-1}(\mathfrak{B})$  —  $\sigma$ -алгебра (это предлагается доказать как упражнение)
2. Пусть  $\Phi$  — “измеримо” ( $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$ )

Для  $E \in \mathfrak{B}$  зададим  $\nu E := \mu(\Phi^{-1}(E)) = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$

$\nu$  — образ меры  $\mu$  при отображении  $\Phi$

**НВ: ДОПИСАТЬ НА СЕССИИ, ТУТ ЕЩЁ ЕСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, ЧТО ЭТО МЕРА**

### 1.2.5 Взвешенный образ меры

$\omega : X \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$ , измерима на  $X$

$B \in \mathfrak{B}$ ,  $\tilde{\nu}(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$  — тоже мера, это и есть взвешенный образ меры  $\mu$  при отображении  $\Phi$

### 1.2.6 Плотность одной меры по отношению к другой

$X = Y, \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \Phi = \text{id}$

$\nu \ll \mu$  — ещё одна мера в  $X$

Здесь  $\omega$  называется плотностью меры  $\nu$  относительно меры  $\mu$ . И в этом случае:

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \int f(x) \cdot \omega(x) d\mu(x)$$

### 1.2.7 Условие $L_{loc}$

$f : X \times \tilde{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, Y \subset \tilde{Y}, a$  — предельная точка  $Y$  в  $\tilde{Y}$ .

$f$  удовлетворяет условию  $L_{loc}(a) : \exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — суммируемая,  $\exists U(a) : \forall$  почти всех  $x \forall y \in U(a) :$

$$|f(x, y)| \leq g(x)$$

### 1.2.8 Интеграл комплекснозначной функции

База базовая:  $(X, \mathfrak{A}, \mu), f : X \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_E f(z) d\mu = \int_E \text{Re}(f(z)) d\mu + i \int_E \text{Im}(f(z)) d\mu$$

Также измеримость и суммируемость следует из соответствующих свойств реальной и мнимой частей функций.

### 1.2.9 Фундаментальная последовательность, полное пространство

$A \subset X$  — нормированное пространство



$A$  — (всюду) плотное в  $X$

$$\forall x \in X \exists \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A \text{ — непусто}$$

### 1.2.10 Мера Лебега-Стилтьеса, мера Бореля-Стилтьеса

1.  $\mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , возрастает, непрерывно

$$\mu_g[a, b) := g(b) - g(a)$$

— счётно аддитивная мера

2.  $g$  — возрастает, не обязательно непрерывно

$$\mu_g[a, b) = g(b - 0) - g(a - 0)$$

— мера

Запускаем теорему о продолжении, тогда

$\exists \mathfrak{A} \supset \mathcal{P}^1 \exists$  продолжение  $\mu_g \subset \mathcal{P}$  на  $\mathfrak{A}$

$\mu_g$  — полная мера на  $\mathfrak{A}$  — мера Лебега-Стилтьеса

Если рассмотреть  $\mu_g$  на борелевском  $\mathfrak{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — мера Бореля

### 1.2.11 Функция распределения

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ,  $h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , измерима, в.ч.т. всюду конечна

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mu X(h < t) < +\infty$$

Пусть  $H(t) = \mu X(h < t)$  — возрастающая

$H(t)$  — называется функцией распределения по мере  $\mu$

### 1.2.12 Ортогональный ряд

Ряд  $\sum a_k$  — ортогональный, если  $\forall k, l \quad a_k \perp a_l$

### 1.2.13 Сходящийся ряд в гильбертовом пространстве

$$\sum a_n, a_n \in \mathfrak{H}$$

$$S_N := \sum_{1 \leq n \leq N} a_n, \text{ если } \exists S \in \mathfrak{H} : S_N \xrightarrow[\mathfrak{H}]{} S$$

Такой ряд называется сходящимся.

### 1.2.14 Ортогональная система (семейство) векторов

$e_k \subset \mathcal{H}$  — ортогональная система, если:

1.  $k \neq j \quad e_k \perp e_j$

2.  $\forall k \quad e_k \neq 0$

### 1.2.15 Коэффициенты Фурье

$$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$$

— коэффициент Фурье вектора  $x$  по О. С.  $e_k$

### 1.2.16 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$$c_k \cdot e_k$$

— ряд Фурье вектора  $x$  по О. С.  $e_k$

### 1.3 Важные теоремы

#### 1.3.1 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде

*Формулировка:*

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримые
- $f_n \rightarrow f$  почти всюду
- $\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — суммируемая, и  $\forall n$  и при почти всех  $x$   $|f_n(x)| \leq g(x)$

Тогда:

$$\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

И, как очевидное (“уж тем более”):

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu$$

*Доказательство:*

#### 1.3.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере

*Формулировка (то же самое, что и выше, только сходится по мере теперь):*

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримые
- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$
- $\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — суммируемая, и  $\forall n$  и при почти всех  $x$   $|f_n(x)| \leq g(x)$

Тогда:

$$\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Доказательство:*

### 1.3.3 Принцип Кавальери

*Формулировка:*

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$  — пространства с мерой
- $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные меры
- $m = \mu \times \nu, \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. при почти всех  $x$   $C_x \in \mathfrak{B}$
2.  $x \mapsto \nu C_x$  — измеримо на  $C_x$
3.  $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогично для сечений  $C^y$

*Доказательство:*

### 1.3.4 Теорема Фубини

*Формулировка:*

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$  — пространства с мерой
- $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные меры
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , суммируема на  $X \times Y$  по мере  $m$

Тогда:

1. при почти всех  $x$  функция  $f_x$  суммируема на  $Y$
2.  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu$  — это суммируемая функция на  $X$
- 3.

$$\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi(x) d\mu(x) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

### 1.3.5 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме

*Формулировка:*

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , диффеоморфизм

Тогда  $\forall A \in \mathbb{M}^m, A \subset O$

$$\lambda \Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| dx$$

*Доказательство:*

### 1.3.6 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

*Формулировка:*

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , диффеоморфизм
- $\Phi(O) = O'$
- $f : O' \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$  — измерима

Тогда:

$$\int_{O'} f dx = \int_O f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

*Доказательство:*

### 1.3.7 Теорема о непрерывности сдвига

*Формулировка:*

- $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $h \in \mathbb{R}^m$
- $f_h(x) := f(x + h)$

1.  $f$  — равномерно непрерывна в  $\mathbb{R}^m$

$$\text{Тогда } \|f_h - f\|_{\infty} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

2.  $1 \leq p < +\infty$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$

$$\text{Тогда } \|f_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

3.  $f \in \tilde{C}[0, \tau]$

$$\text{Тогда } \|f_h - f\|_{\infty} \longrightarrow 0$$

4.  $1 \leq p < +\infty$ ,  $f \in L^p[0, \tau]$

$$\text{Тогда } \|f_h - f\|_p \longrightarrow 0$$

*Доказательство:*

## 1.4 Теоремы

### 1.4.1 Теорема об интегрировании положительных рядов

*Формулировка:*

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $u_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, u_n \geq 0$  (при почти всех  $x$  ?)
- $u_n$  — измеримы на  $E \in \mathfrak{A}$

Тогда:

$$\int_E \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_E u_n(x) d\mu(x) \right)$$

*Доказательство:*

Подгоним под теорему Леви 3 (3 семестр). Пусть  $S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x)$  — последовательность частичных сумм. Очевидно, что эта последовательность — монотонно неубывающая (так как функции у нас неотрицательные):

$$0 \leq S_N \leq S_{N+1} \leq S_{N+2} \leq \dots$$

Тогда, делаем предельный переход (вот тут есть вопрос, почему должен существовать предел, но если подумать: если его не существует, вообще вся эта теорема не имеет смысла (ну бесконечности, чел, смысл их интегрировать)). А так же, измеримость сохраняется, так как у нас исходные функции все были измеримы (ну и по теореме о пределе измеримых функций):

$$S_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} S(x)$$

Ну и всё, значи, по теореме Леви можем перейти к предельному преходу интегралов:

$$\int_E S_N(x) d\mu(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_E S(x) d\mu(x)$$

Левую часть можно расписать по линейности интеграла (там у нас конечное число членов):

$$\int_E S_N(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^N \int_E u_n(x) d\mu(x)$$

Ну, а раз интеграл суммы стремится к интегралу предельной функции, то и сумма интегралов обязана туда стремиться.

$$\sum_{n=1}^N \int_E u_n(x) d\mu(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x) d\mu(x)$$

ч. т. д.

*Следствие:*

- $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , измеримы на  $E \in \mathfrak{A}$
- $\sum \int_E |u_n(x)| d\mu < +\infty$  (конечна)

Тогда  $\sum u_n(x)$  — абсолютно сходящийся при почти всех  $x$

*Доказательство:*

Пусть:

$$S(x) = \int_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$

Тогда, по предыдущей теореме:

$$\int_E S(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_E |u_n(x)| d\mu \right) < +\infty$$

Раз интеграл конечен, значит  $S(x)$  — суммируема, а это значит, что  $S(x)$  — почти везде конечна. Ну значит и сходится.

ч. т. д.

*Пример:*

- $(x_n)$  — вещественная последовательность
- $\sum a_n$  — абсолютно сходящийся числовой ряд

Тогда функциональный ряд  $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x-x_n|}}$  — абсолютно сходится при почти всех  $x$  (в  $\mathbb{R}$  по мере Лебега)

*Доказательство:*

Во-первых, можно доказать, что если для  $\forall A$  на  $[-A, A]$  абсолютно сходится почти везде, то и везде (на  $\mathbb{R}$ ) почти везде сходится (лол). Счётное количество п. в.  $\Rightarrow$  п. в. (чтобы количество отрезков было счётным, надо чтобы  $A$  были хотя бы рациональными. Кажется, что это не сильная проблема, так как отрезки включают в себя и все вещественные числа на отрезке тоже).

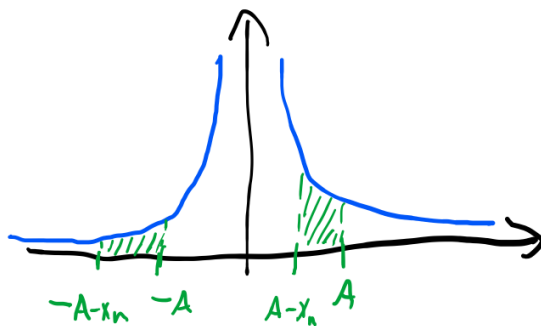
Попробуем подогнать под предыдущую теорему:

$$\int_{[-A, A]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} d\lambda = |a_n| \int_{-A}^A \frac{dx}{\sqrt{|x-x_n|}} \leq$$

Так, стоп. А как мы перешли к определённому интегралу? Оказывается, что так можно делать, на доказано это будет позже (в курсе).

$$\leq_{x:=x-x_n} |a_n| \int_{-A-x_n}^{A-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq |a_n| \int_{-A}^A \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq$$

Почему верен последний переход? Посмотрим на картинке:



Ну, по ней очевидно, что мы откусили кусочек поменьше, а добавили побольше. Тогда оценим модуль:

$$\leq 2 \cdot |a_n| \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4 \cdot \sqrt{A} \cdot |a_n|$$

Всё, абсолютный интеграл ограничен, значит сходится (при почти всех  $x$ ).

ч. т. д.

#### 1.4.2 Абсолютная непрерывность интеграла

*Формулировка:*

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — суммируемая

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \quad \forall E \text{ — измеримое } \mu E < \delta \quad \left| \int_E f d\mu \right| < \varepsilon$$

*Доказательство:*

*Следствие:*

- $(e_n) \in \mathfrak{A}$  — последовательность (?) множеств
- $\mu e_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- $f$  — суммируемая на  $X$

Тогда:

$$\int_{e_n} f d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Доказательство:*



### 1.4.3 Теорема о произведении мер

*Формулировка:*

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$  — пространства с мерой
- Зададим  $m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$

Тогда:

1.  $m_0$  — мера на  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$
2.  $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные меры  $\implies m_0$  —  $\sigma$ -конечная

*Доказательство:*

### 1.4.4 Теорема Тонелли

*Формулировка:*

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$  — пространства с мерой
- $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные меры
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ , измерима относительно  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. при почти всех  $x$  функция  $f_x$  измерима на  $Y$
2.  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu$  — это измеримая функция на  $X$
- 3.

$$\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi(x) d\mu(x) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

*Доказательство:*

### 1.4.5 Формула для бета-функции

*Формулировка:* Бета-функция задаётся следующим образом:

$$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx, \quad s, t > 0$$

Тогда:

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

*Доказательство:*

#### 1.4.6 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

*Формулировка:*

- $B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \leq R^2\}$
- $\alpha_m \lambda_m(B(0, 1))$

Тогда:

$$\mu(B(0, R)) = \alpha_m R^m$$

*Доказательство:*

#### 1.4.7 Теорема Фату. Следствия

*Формулировка:*

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $f_n \geq 0$  — измерима
- $f_n \rightarrow f$  почти везде
- Если  $\exists C > 0 \ \forall n \int_X f_n d\mu \leq C$

Тогда:

$$\int_X f d\mu \leq C$$

*Доказательство:*

*Следствие:*

То же самое, только меняем сходимость почти везде на:

- $f_n, f \geq 0$ , измеримы, почти везде конечны
- $f_n \xRightarrow[\mu]{} f$

*Следствие:*

- $f_n \geq 0$ , измеримы

Тогда:

$$\int_X \liminf f_n \leq \liminf \int_X f_n$$

#### 1.4.8 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

*Формулировка:*

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$  — пространства с мерой
- $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$  — измеримо
- $\Phi : X \rightarrow Y$  — “измеримое”
- $\nu$  — взвешенный образ  $\mu$  (с весом  $\omega$ )

Тогда для  $\forall f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$  — измеримых:

1.  $f \circ \Phi$  — измеримо (относительно  $\mathfrak{A}$ )
2.  $\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) d\mu(x)$

*Доказательство:*

#### 1.4.9 Критерий плотности

*Формулировка:*

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  — пространство с мерой
- $\nu$  — ещё одна мера на  $\mathfrak{A}$
- $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ , измеримо

Тогда эквивалентно:

1.  $\omega$  — плотность  $\mu$  относительно  $\nu$
2.  $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \inf_A \omega \cdot \mu A \leq \nu A \leq \sup_A \omega \cdot \mu A$

*Доказательство:*

#### 1.4.10 Лемма о единственности плотности

*Формулировка:*

- $f, g$  — суммируемы на  $X$
- $\forall A$  — измеримое,  $\int_A f = \int_A g$

Тогда  $f = g$  почти везде

*Доказательство:*

*Следствие:*

Плотность меры определяется однозначно с точностью до изменения на множестве меры 0.

#### 1.4.11 Лемма об оценке мер образов малых кубов

Формулировка:

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^1$
- $a \in O$
- Пусть  $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда  $\exists \delta > 0 \forall$  Куб  $Q \subset B(a, \delta)$

$$\lambda \cdot \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$$

Доказательство:

#### 1.4.12 Предельный переход по параметру в несобственном интеграле

Формулировка:

- $f : \langle a, b \rangle \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $Y \subset \tilde{Y}$  — метризуемое
- $y_0 \in \tilde{Y}$  — предельная точка  $Y$

1. при почти всех  $x \exists f_0(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$
2.  $\forall t \in (a, b) \forall f(x, y_0), f(x, y)$  — суммируемые по  $x$  на  $(a, t)$  и  $\int_a^t f(x, y) dx \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \int_a^t f_0(x) dx$
3.  $J(y) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, y)$  — равномерно сходящаяся при  $y \in Y$

Тогда  $\int_a^{\rightarrow b} f_0(x) dx$  — существует (как несобственный)

Доказательство:

#### 1.4.13 Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости или $L_{loc}$

Формулировка:

- $f : X \times \tilde{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
- $X$  — пространство с мерой,  $\mu X < +\overline{\mathbb{R}}$
- $\tilde{Y}$  — метризуемое топологическое пространство
- $Y \subset \tilde{Y}$
- $a \in \tilde{Y}$  — предельная точка  $Y$

- $\forall y \in Y \quad x \mapsto f(x, y)$  — суммируема на  $X$
- Пусть  $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow a]{} \varphi(x)$

Тогда  $\varphi$  — суммируема на  $X$  и

$$\lim_{y \rightarrow a} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X \varphi(x) d\mu(x)$$

*Доказательство:*

#### 1.4.14 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

*Формулировка:*

- $Y$  — промежуток  $\subset \mathbb{R}$
- $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$
- $\forall \quad f(x, y)$  — суммируемая функция от  $x$
- При почти всех  $x \quad \forall y \exists f'_y(x, y)$
- $f'_y$  — удовлетворяет условию  $L_{loc}(y_0)$

Тогда:

- $J(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$  — дифференцируема в  $y_0$
- $J'(y_0) = \int_X f'_y(x, y) d\mu(x)$

*Доказательство:*

#### 1.4.15 Теорема о вложении пространств $L^p$

*Формулировка:*

- $\mu E < +\infty, 1 \leq s < r \leq +\infty$

Тогда:

1.  $L_r(E, \mu) \subset L_s(E, \mu)$
2.  $\|f\|_s \leq (\mu E)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot \|f\|_r$

**fix**

*Доказательство:*

#### 1.4.16 Теорема о сходимости в $L^p$ и по мере

*Формулировка:*

$1 \leq p < +\infty$   $f_n \in L_p(E, \mu)$ :

1.  $f \in L_p$   $f_n \xrightarrow{L_p} f$ , тогда  $f_n \xrightarrow{\mu} f$
2.  $f_n \xrightarrow{\mu} f$  [либо  $f_n \rightarrow f$  почти всюду],  $|f_n| \leq g$  почти всюду, при всех  $n$ , где  $g \in L^p$ . Тогда  $f_n \xrightarrow{L_p} f$

*Доказательство:*

#### 1.4.17 Полнота $L^p$

*Формулировка:*

$L^p(E, \mu)$  — полное ( $1 \leq p < +\infty$ )

*Доказательство:*

#### 1.4.18 Плотность в $L^p$ множества ступенчатых функций

*Формулировка:*

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), 1 \leq p \leq +\infty$

Тогда множество ступенчатых функций плотно в  $L_p(X, \mu)$

*Доказательство:*

#### 1.4.19 Лемма Урысона

*Формулировка:*

- $X$  — нормированное топологическое пространство (например,  $\mathbb{R}^m$ )
- $F_0, F_1 \subset X$  — замкнутое
- $F_0 \cap F_1 = \emptyset$

Тогда:  $f : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad 0 \leq f \leq 1$  — непрерывное

$f|_{F_0} \equiv 0, f|_{F_1} \equiv 1$

*Доказательство:*

#### 1.4.20 Плотность в $L^p$ непрерывных финитных функций

Формулировка:

- $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}^m, \lambda_m)$

Тогда  $C_0(\mathbb{R}^m)$  плотно в  $L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

Доказательство:

#### 1.4.21 Интегрирование по мере Бореля–Стилтьеса, порожденной функцией распределения (с леммой)

Формулировка:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ , измерима по Борелю
- $h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , измерима, почти везде конечна
- $H$  — функция распределения
- $\mu_H$  — мера Бореля–Стилтьеса

Тогда:

$$\int_X f(h(x)) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_H(t)$$

Доказательство:

#### 1.4.22 Теорема об интегрировании по частям

Формулировка:

- $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , возрастающая
- $f$  — абсолютно непрерывная функция ( $C^1$ ) на  $[a, b]$
- $\mu_H$  — мера Бореля(Лебега ?)-Стилтьеса

Тогда:

$$\int_{[a,b)} f(x) dg(x) = fg|_a^b - \int_{[a,c]} f'(x)g(x)dx$$

Доказательство:

#### 1.4.23 Лемма о “почти признаке Дирихле”

Формулировка:

- $-\inf < a < b \leq +\inf$
- $f$  — “доп.” на  $[a, b)$  ( $\forall A \in (a, b) f$  — суммируема на  $(a, A)$ )
- $g(x)$  — монотонно стремится к 0 при  $x \rightarrow b - 0$
- Пусть функция  $F(t) = \int_a^t f dx$  — ограничена

Тогда:

$$\int_a^{\rightarrow b} f g dx$$

— сходится

$$\left| \int_a^{\rightarrow b} f g dx \right| \leq |g(a)| \cdot \sup_{t \in (a, b)} \left| \int_t^{\rightarrow b} f dx \right|$$

Доказательство:

#### 1.4.24 Следствие о “почти признаке Абеля”

Формулировка:

- $\int_a^{\rightarrow b} f dx$  — сходится,  $g$  — монотонна и ограничена на  $[a, b)$

Тогда:  $\int_a^{\rightarrow b} f g dx$  — сходится, и к тому же:

$$\left| \int_a^{\rightarrow b} f g \right| \leq 5(??) \cdot \sup_{(a, b)} |g(t)| \cdot \sup_{(a, b)} \left| \int_t^{\rightarrow b} f(x) dx \right|$$

Доказательство:

#### 1.4.25 Признак Абеля равномерной сходимости интеграла

Формулировка:

- $f, g : [a, b) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$
- $\int_a^{\rightarrow b} f(x, y) dx$  — равномерно сходящийся на  $Y$
- $g(x, y)$  — ограничена на  $[a, b) \times Y$



Тогда:

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x, y)g(x, y)dx$$

— равномерно сходящийся на  $Y$ .

*Доказательство:*

## **2 Период Мезозойский**

### **2.1 Важные определения**

## 2.2 Определения

### 2.2.1 Кусочно-гладкий путь

$\gamma$  — кусочно-гладкий,  $V$  — непрерывно,  $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)$

$$I(V, \gamma) = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt =$$

$$\int_a^b V_1(\gamma(t)) \gamma'_1(t) + V_2(\gamma(t)) \gamma'_2(t) + \dots + V_m(\gamma(t)) \gamma'_m(t) dt =$$

Делаем замену:  $x = \gamma(t)$ ;  $x_1 = \gamma_1(t)$ ,  $x_2 = \gamma_2(t)$ ;  $dx_m = \gamma'_m(t) dt$

$$\int_{\gamma} V_1 dx_1 + V_2 dx_2 + \dots + V_m dx_m$$

## 2.3 Важные теоремы

## 2.4 Теоремы

### 2.4.1 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

*Формулировка:*

- $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0 \quad \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$
- $\sum_n x_n$  — сходится  
Тогда  $\forall y \in \mathcal{H} \quad \langle \sum x_n, y \rangle = \sum \langle x_n, y \rangle$
- $\sum x_n$  — ортогональный ряд  
Тогда  $\sum x_n$  — сходится  $\Leftrightarrow \sum \|x_n\|^2$  — сходится

*Доказательство:*

### 2.4.2 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

*Формулировка:*

- $e_k$  — ортогональная система в  $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$

Тогда:

1.  $e_k$  — ЛНЗ
2.  $c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$
3.  $c_k e_k$  — это проекция на прямую  $l_k = t e_k, t \in \mathbb{R}, x = c_k e_k + z$ , где  $z \perp l_k$

*Доказательство:*

### 2.4.3 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

*Формулировка:*

- 

*Доказательство:*