Полиномиальная формула

j — мультииндекс

$$(a_1+a_2+\dots+a_m)^r = \sum_{n_1=1}^{m}\sum_{n_2=1}^{m}\dots\sum_{n_r=1}^{m} a_{n_1}a_{n_2}\dots a_{n_r} = \sum_{j:|j|=r}\frac{r!}{j!}a^j$$

$\Leftrightarrow$ это — наивная реализация ( ) ( ) ( ) … ( )

Док-во: По индукции!

$$\boxed{\sum_{j:|j|=r}\frac{r!}{j!}a^j = \sum_{j:|j|=r}\frac{r!}{j^1!\,j^2!\dots j^m!}(a_1^{j^1}a_2^{j^2}\dots a_m^{j^m})}$$

$r=1$ Based

Пусть для r всё хорошо: $(a_1+a_2+\dots+a_m)^r = \sum_{j:|j|=r}\frac{r!}{j!}a^j$

Докажем для $r+1$

$$(a_1+a_2+\dots+a_m)^{r+1} = (a_1+a_2+\dots+a_m)^1(a_1+a_2+\dots+a_m)^r =$$

$$= (a_1+a_2+\dots+a_m)\cdot\sum_{j:|j|=r}\frac{r!}{j!}a^j =$$

Вот в этом месте начинаются финты ушами. Первый, „домножим" на первую скобку (на каждый элемент по отдельности), тем самым породив m сумм:

$$= \sum_{j:|j|=r}\frac{r!}{j^1!\,j^2!\dots j^m!}a_1^{j^1+1}a_2^{j^2}\dots a_m^{j^m} + \dots + \sum_{j:|j|=r}\frac{r!}{j^1!\,j^2!\dots j^m!}a_1^{j^1}a_2^{j^2}\dots a_m^{j^m+1}$$

Далее, мы хотим переписать эти суммы в более-менее удобный вид. рассмотрим на примере первой суммы:

$$\sum_{j:|j|=r}\frac{r!}{j^1!\,j^2!\dots j^m!}a_1^{j^1+1}a_2^{j^2}\dots a_m^{j^m} \longrightarrow \sum_{\substack{j:|j|=r+1\\ j^1\ge 1}}\frac{r!\,j^1}{j^1!\,j^2!\dots j^m!}a_1^{j^1}a_2^{j^2}\dots a_m^{j^m}$$

Во-первых, мы добавили 1 член, поэтому теперь бегаем по мультииндексу $|j|\le r+1$. Причём, $j^1\ge 1$, т.к. надо гарантировать это, потому что мы только что домножили на скобку.

Также, мы по пути транспортировали индексы j, поэтому $\frac{r!}{j^1! \dots\dots}$ $\to$ j^1 этот j^1 как бы (j^1+1) из прошлой суммы. Поэтому домножаем дробь на j^1, чтобы в знаменателе сократить последний член.

Итого:

$$\sum_{\substack{j:|j|=r+1 \\ j^1 \geq 1}} \frac{r!\, j^1}{j^1!\, j^2! \dots j^m!} a_1^{j^1} a_2^{j^2} \dots a_m^{j^m} + \dots + \sum_{\substack{j:|j|=r+1 \\ j^m \geq m}} \frac{r!\, j^m}{j^1!\, j^2! \dots j^m!} a_1^{j^1} a_2^{j^2} \dots a_m^{j^m}$$

Отметим, что приписка $j^i \geq 1$ — бессмысленна, т.к. если он равен нулю, то слагаемое просто занулится и всё пучком.

Выносим всё общее:

$$\sum_{j:|j|=r+1} \frac{r!\,(j^1+j^2+\dots+j^m)}{j^1!\, j^2! \dots j^m!} a_1^{j^1} a_2^{j^2} \dots a_m^{j^m}$$

. Однако, $j^1+j^2+\dots+j^m = r+1$! (по определению внизу суммы)

$$\Rightarrow \sum_{j:|j|=r+1} \frac{(r+1)!}{j!} a^{(r+1)}$$

Всё сошлось!

Ч.т.д.