Неравенство Гёльдера суммы:

$p > 1 \quad q: \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}$

$a_1 \dots a_n, \ b_1 \dots b_n : > 0$

Тогда $\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum b_i\right)^{\frac{1}{p}}$

(при $p = q = 2$ — КБШ)

Док-во:

Возьмём x^p, она строго выпуклая $(p > 1) \Rightarrow$ по н-ву Йенсена

$$\left(\sum \alpha_i x_i\right)^p \leq \sum \alpha_i x_i^p$$

Давайте выберем:

$$\alpha_i := \frac{b_i^q}{\sum\limits_j b_j^q}$$

$$x_i = \cancel{a}\, a_i \, b_i^{-\frac{1}{p-1}} \sum_j b_j^q$$

$$\sum \alpha_i x_i = \sum \frac{b_i^q}{\cancel{\sum b_j^q}} \cdot a_i \cdot b^{-\frac{1}{p-1}} \cdot \cancel{\sum b_j^q} = \sum a_i \cdot b^{\frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1}} =$$

$$= \sum a_i b_i$$

$$\sum \alpha_i \cdot x_i^p = \sum \frac{b_i^q}{\cancel{\sum b_j^q}} \cdot a_i^p \cdot b_i^{-\frac{p}{p-1}} \cdot \left(\sum b_j^q\right)^{p-1} =$$

$$= \sum a_i^p b_i^0 \cdot \left(\sum b_j^q\right)^{p-1} = \left(\sum b_j^q\right)^{p-1} \sum a_i^p$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\sum a_i b_i\right)^p = \left(\sum b_j^q\right)^{p-1} \sum a_i^p \quad \Big|^{\frac{1}{p}}$$

$$\sum a_i b_i = \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

ч.т.д.