Неравенство Коши для сумм

$a_i > 0$; $\frac{1}{n}\sum a_i \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$

Доказательство:

$f(x)$ — вогнутая, $\alpha_i = \frac{1}{n}$

По неравенству Йенсена

$$f\left(\frac{1}{n}\cdot a_1 + \dots + \frac{1}{n}a_n\right) \geq \cancel{\frac{1}{n}a_1 + \frac{1}{n}a_2}$$

$$\frac{1}{n}f(a_1) + \frac{1}{n}f(a_2) + \dots + \frac{1}{n}f(a_n)$$

Берём $f(x) = \ln x$

$$\ln\left(\frac{1}{n}\cdot a_1 + \dots + \frac{1}{n}a_n\right) \geq \frac{1}{n}\ln a_1 + \frac{1}{n}\ln a_2 + \dots + \frac{1}{n}\ln a_n$$

$$\ln\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\ln(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)$$

$$\ln\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \geq \ln(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

Во экспоненцируем:

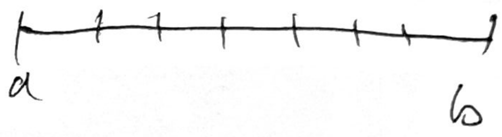
$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

ч.т.д.

Неравенство Коши (~~[illegible]~~ интегралы)

Каноникалка

$$I_g = \frac{1}{b-a}\int_a^b f \quad \text{— ср. арифм.}$$



$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f\right) \quad \text{— ср. геометрическое}$$

$$= \exp\left(\frac{\sum \ln(f(x_k))}{n}\right) = \sqrt[n]{f(x_1)\cdot\ldots\cdot f(x_n)}$$

n равных частей

$$x_k = \xi_k = a + \frac{b-a}{n}k$$

$$\Rightarrow \sum \frac{f(x_k)}{n}$$

$f \in C[a,b]$, $f > 0$

Тогда

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Доказательство (пол)

ср. геом. $\le$ ср. арифм.

ср. арифм.

~~[illegible]~~ значения

сл. стр.

Делим на n равных частей

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}\cdot k$$

$$\xi_k = x_k$$

$\Rightarrow$ ~~в точке~~: на отрезке $f(x_k) = f(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1})$

$$= f(\xi_k)\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{f(\xi_k)\cdot(b-a)}{n}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{f(\xi_k)\,(b-a)}{n} = \int_a^b f(x) \quad \text{при } n\to+\infty$$

$$\Rightarrow I_g = \frac{1}{\cancel{(b-a)}}\cdot\sum\frac{f(\xi_k)\cdot\cancel{(b-a)}}{n} =$$

$$= \sum\frac{f(\xi_k)}{n}$$

ср. геом.:

по выведенному ранее

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f\right) = \exp\left(\frac{1}{\cancel{b-a}}\cdot\sum\frac{\ln(f(\xi_k))\cdot\cancel{(b-a)}}{n}\right) = \exp\left(\sum\frac{\ln(f(\xi_k))}{n}\right) =$$

$$= e^{\frac{\sum\ln(f(\xi_k))}{n}} = \sqrt[n]{f(\xi_1)f(\xi_2)\cdots f(\xi_n)}$$

$\Rightarrow$ ср. геом. $\le$ ср. арифм.

$$\sqrt[n]{f(\xi_1)\cdots f(\xi_n)} \le \sum\frac{f(\xi_k)}{n}$$

совершаем предельный переход, $n\to\infty$

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f\right) \le I_g = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f$$

ч.т.д.