Интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Рассмотрим сумму: $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$

Давайте домножим её $2\sin\frac{x}{2}$!

$$2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\cancel{\cos}\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \dots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx$$

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)} \Rightarrow 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\frac{x}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{x}{2}+x\right)\right)$$

$$+\,2\cdot\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{x}{2}+2x\right)+\sin\left(\frac{x}{2}+2x\right)\right)+\dots+2\cdot\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{x}{2}-xn\right)+\sin\left(\frac{x}{2}+xn\right)\right) =$$

$$= -\sin\left(+\frac{x}{2}\right)+\cancel{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}-\cancel{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}+\cancel{\sin\left(\frac{5}{2}x\right)}+\dots+\sin\frac{(2n+1)x}{2}$$

(телескопическая сумма)

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \quad \text{(поделим на } 2\sin\tfrac{x}{2}\text{)}$$

Интегрируем $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{2}$

~~от~~ от 0 до π:

$$0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx - \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\,dx \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Также если

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dt = \left\{\begin{array}{l}\text{Замена:}\\ x = At\\ t = \frac{x}{A}\\ dx = \frac{dt}{A}\end{array}\right\} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin At}{\frac{x}{\cancel{A}}}\frac{dt}{\cancel{A}} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin At}{t}$$

ЗАЧЕМ???

продолжение →

Нам очень хочется верить что

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\cdot\frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

Почему? т.к.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\cdot\frac{x}{2}} = \left\{\begin{matrix}\text{замена}\\ y=(n+\frac{1}{2})x\end{matrix}\right\} = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y}\,dx$$

Потом мы тупо устремим $n \to +\infty$.

Докажем же (1). Сначала проведём эксперимент:

$$\int_0^{\pi} \sin Nx \cdot f(x) \overset{\text{по частям}}{=\!=} \begin{bmatrix} u = f(x) & u' = f'(x) \\ v' = \sin Nx \Rightarrow v = -\frac{\cos Nx}{N} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-\cos Nx}{N}\cdot f(x)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{N}\int_0^{\pi} \cos Nx \cdot f'(x)\,dx \quad \sim O\left(\frac{1}{N}\right)$$

При $N \to \infty$ оба слагаемых $\to 0$

при условии хорошей $f(x)$: $f(x) \in C^1[0,\pi]$

Супер-наблюдение.

Тогда, проверим (1).

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2}; \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\cdot\frac{x}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\int_0^{\pi} \underbrace{\sin(n+\tfrac{1}{2})x}_{\sin Nx} \underbrace{\left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2\frac{x}{2}}\right)}_{f(x)} \xrightarrow{\text{по наблюдению}} 0$$

Проверим, что $f(x)$ – хорошая

1) Непрерывность (?)

$$\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2\frac{x}{2}} = \frac{\cancel{2}\cdot\frac{x}{2} - \cancel{2}\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{x}{2}} = -\frac{\sin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}} \overset{\text{эквив}}{=} +\frac{(\frac{x}{2})^3 + \cancel{\frac{x}{2}} - \cancel{\frac{x}{2}}}{2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}} = O(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

2) Дифференцируемость: ищем пр + пр непр, следствие теор Лагранжа

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin^2\frac{x}{2} - x^2\cos\frac{x}{2}}{x^2\sin^2\frac{x}{2}} \overset{\text{ф. Тейлора}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4\cdot\frac{x^2}{4} - x^2\cdot\frac{x^2}{4}\cdot C}{x^2\left(\frac{x^2}{4}\right)} \sim$$

$$\sim \lim_{x\to 0} \frac{cx^4}{cx^4} = c$$ (нам пофигу, какая именно константа, главное — что она есть!)

Тогда $f(x)$ — хорошая, наблюдение работает, всё сошлось!

ч.т.д.