СВЯТОЙ КПК
#BlessRNG

Или как не сдохнуть на 4 семе из-за матана

Разработал

Никита Варламов @snitron

Почётный автор

Тимофей Белоусов @imodre

v0.0

Февраль-??? 2023

Вы в любой момент можете добавить любую недостающую теорему, затехав её и отправив код (фотографии письменного текста запрещены) в телегу любому из указанных авторов, или создав Pull Request в Git-репозиторий конспекта (click). Ваше авторство также будет указано, с вашего разрешения.

Ah shit
Here we go again!
And again...
Oh, fuck.

Содержание

1 Период Палеозойский

1.1 Важные определения

1.1.1 Пространство $L^p(E, \mu)$

$1 \le p < +\infty$, $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $E \in \mathfrak{A}$

Тогда $\mathfrak{L}_p(E, \mu) = \{f :$ почти всех $E \to \mathbb{R}(\mathbb{C}), f$ — измерима. $\int_E |f|^p < +\infty\}$

1. $\mathfrak{L}_p(E, \mu)$ — линейное пространство
2. $f \equiv g$, если $f = g$ почти всюду

$L_p := \mathfrak{L}_p/_{\equiv}$ — точки этого пространства

$[f] = \{g : f \equiv g\}$ $[f_1] + [f_2] = [f_1 + f_2]$

И введём норму $||[f]|| = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

1.1.2 Пространство $L^\infty(E, \mu)$

$\mathfrak{L}^\infty(E, \mu) = \{f :$ почти всех $E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, измерима, $\operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty\}$

$||f||_\infty = \operatorname{ess\,sup} f$

Дописать всё

1.1.3 Существенный супремум

$\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{a : f \le a$ почти всюду $\}$

a — существенная верхняя граница функции f, если при почти всех x $f(x) \le a$

Свойства:

1. $\operatorname{ess\,sup} f(x) \le \sup f(x)$
2. при почти всех $x : f(x) \le \operatorname{ess\,sup} f(x)$
3. f — суммируемая, g — измерима: $\operatorname{ess\,sup} |g| < +\infty$

$$\left|\int_E fg\right| \le \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot \int_E |f|$$

1.1.4 Гильбертово пространство

$\mathfrak{H}$ — линейное пространство, в котором задано скалярное произведение и соответствующая норма. Если $\mathfrak{H}$ — полное, то оно называется гильбертовым.

1.1.5 Ортонормированная система, примеры

e_k — О. С. , тогда $\frac{e_k}{||e_k||}$ — ортонормированная система.

Примеры:

1. $l^2 \quad e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$
2. $L^2[0, 2\pi] \quad \{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cos 3t, \sin 3t, ldots\}$
3. $\left(\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}\right)_{k \in \mathbb{Z}}$

1.2 Определения

1.2.1 Произведение мер

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой.

Лемма: $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — полукольца. Тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ — полукольцо.

Также, множества из $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ являются измеримыми прямоугольниками.

μ, ν — σ-конечные меры. Тогда стандартное продолжение m_0 (в смысле теоремы о продолжении меры (?)) с полукольца $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, определённой на некоторой σ-алгебре $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, и являющееся σ-конечной полной мерой — обзначается просто m.

И тогда m — и есть произведение мер μ и ν ($\mu \times \nu$).

Замечание:

$$(\mu \times \nu) \times \rho = \mu \times (\nu \times \rho)$$

1.2.2 Сечения множества

X, Y — множества. $C \subset X \times Y$

Тогда:

$$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$$

$$C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$$

— сечения множества C (1 и 2 рода)

Замечания:

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha \right)_x = \bigcup_{\alpha \in A} (C_\alpha)_x$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \right)_x = \bigcap_{\alpha \in A} (C_\alpha)_x$$

$$(C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

1.2.3 Полная мера, сигма-конечная мера

См. конспект прошлого семестра

1.2.4 Образ меры при отображении

Пусть у нас есть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \_)$ — пространства с мерой, $\Phi : X \to Y$.

1. $\forall \Phi \quad \Phi^{-1}(\mathfrak{B})$ — σ-алгебра (это предлагается доказать как уражнение)

2. Пусть Φ — "измеримо" $\left(\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}\right)$

Для $E \in \mathfrak{B}$ зададим $\nu R := \mu\left(\Phi^{-1}(E)\right) = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$

ν — образ меры μ при отображении Φ

NB: ДОПИСАТЬ НА СЕССИИ, ТУТ ЕЩЁ ЕСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, ЧТО ЭТО МЕРА

1.2.5 Взвешенный образ меры

$\omega : X \to \mathbb{R} \geq 0$, измерима на X

$B \in \mathfrak{B}, \tilde{\nu}(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$ — тоже мера, это и есть взвешенный образ меры μ при отображении Φ

1.2.6 Плотность одной меры по отношению к другой

$X = Y, \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \Phi = \mathrm{id}$

$\nu b = \int_B \omega d\mu$ — ещё одна мера в X

Здесь ω называется плотностью меры ν относительно меры μ. И в этом случае:

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \int f(x) \cdot \omega(x) d\mu(x)$$

1.2.7 Условие L_{loc}

$f : X \times \tilde{Y} \to \overline{\mathbb{R}}, Y \subset \tilde{Y}, a$ — предельная точка Y в $\tilde{Y}$.

f удовлетворяет условию $L_{loc}(a) : \exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая, $\exists U(a) : \forall$ почти всех $x \forall y \in U(a)$:

$$|f(x,y)| \leq g(x)$$

1.2.8 Интеграл комплекснозначной функции

База базовая: $(X, \mathfrak{A}, \mu), f : X \to \mathbb{C}$

$$\int_E f(z) d\mu = \int_E \mathrm{Re}(f(z)) d\mu + i \int_E \mathrm{Im}(f(z)) d\mu$$

Также измеримость и суммируемость следует из сотответствующих свойств реальной и мнимой частей функций.

1.2.9 Фундаментальная последовательность, полное пространство

$A \subset X$ — нормированное пространство

A — (всюду) плотное в X

$$\forall x \in X \ \exists \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A \text{— непусто}$$

1.2.10 Мера Лебега-Стилтьеса, мера Бореля-Стилтьеса

1. $\mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, возрастает, непрерывно

$$\mu_g[a, b) := g(b) - g(a)$$

— счётно аддитивная мера

2. g — возрастает, не обязательно непрпрывно

$$\mu_g[a, b) = g(b - 0) - g(a - 0)$$

— мера

Запускаем теорему о продолжении, тогда

$\exists \mathfrak{A} \supset \mathcal{P}^1 \exists$ продолжение $\mu_g \subset \mathcal{P}$ на $\mathfrak{A}$

μ_g — полная мера на $\mathfrak{A}$ — мера Лебега-Стильтьеса

Если нассмотреть μ_g на борелевском $\mathfrak{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера Бореля

1.2.11 Функция распределения

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, измерима, вочти всюду конечна

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mu X(h < t) < +\infty$

Пусть $H(t) = \mu X(h < t)$ — возрастающая

$H(t)$ — называется функцией распределеиния по мере μ

1.2.12 Ортогональный ряд

Ряд $\sum a_k$ — ортогональный, если $\forall k, l a_k \perp a_l$

1.2.13 Сходящийся ряд в гильбертовом пространстве

$\sum a_n, a_n \in \mathfrak{H}$

$S_N := \sum_{1 \le n \le N} a_n$, если $\exists S \in \mathfrak{H} : S_N \xrightarrow[\mathfrak{H}]{} S$

Такой ряд называется сходящимся.

1.2.14 Ортогональная система (семейство) векторов

$e_k \subset \mathcal{H}$ — ортогональная система, если:

1. $k \neq j$ $e_k \perp e_j$
2. $\forall k$ $e_k \neq 0$

1.2.15 Коэффициенты Фурье

$$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$$

— коэффициент Фурье вектора x по О. С. e_k

1.2.16 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$$c_k \cdot e_k$$

— ряд Фурье ветора x по О. С. e_k

1.3 Важные теоремы

1.3.1 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримые
- $f_n \to f$ почти всюду
- $\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая, и $\forall n$ и при почти всех x $|f_n(x)| \le g(x)$

Тогда:

$$\int_X |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

И, как очевидное ("уж тем более"):

$$\int_X f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f d\mu$$

Дисклеймер:

Развеем все сомнения насчёт корректности условия (вдруг они у вас были):

$$\left| \int f_n - \int f \right| = \left| \int f_n - f \right| \le \int |f_n - f| \text{ (уж тем более)}$$

А также, наши функции из условия на самом деле даже суммируемые, не просто измеримые. Давайте для каждого n соберём точки, на который f_n не сходится к f, сложим (это всё будет множемтво меры 0) и вычтем, а на остатке сделаем предельный переход:

$$|f_n(x)| \le g(x)$$
$$|f(x)| \le g(x) < +\infty$$

Доказательство:

Заведём последовательность $h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, |f_{n+2} - f|, \ldots)$. Она убывает, так как по условию у нас есть сходимость почти везде. Также, можно ограничить её: $0 \ge h_n \ge 2g$ (модули больше нуля и по условию все $|f_n| \ge g$). А ещё это просто определение последовательности из верхнего предела:

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n - f| = 0 \text{ (почти везде)}$$

Теперь берём положительную возвращающую последовательность $2g - h_n$ и запускаем теорему Леви (см. 3 семестр, там как раз нужна возрастающая последовательность):

$$\int_X (2g - h_n)d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X 2gd\mu$$

Откуда по линейности первого интеграла следует, что $\int_X h_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ну и добиваем:

$$0 \underset{n\to\infty}{\longleftarrow} \int_X h_n \geq \int_X |f_n - f|d\mu$$

ч. т. д.

1.3.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере

Формулировка (то же самое, что и выше, только сходится по мере теперь):

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримые
- $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$
- $\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая, и $\forall n$ и при почти всех x $|f_n(x)| \leq g(x)$

Тогда:

$$\int_X |f_n - f|d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство:

Рассмотрим 2 случая.

1. $\mu X < +\infty$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и сооружаем множества $X_n = X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$. Сделовательно, $\mu X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т.к. есть сходимость по мере. Расписываем:

$$\int_X |f_n - f|d\mu = \int_{X_n} |f_n - f|d\mu + \int_{X_n^c} |f_n - f|d\mu \leq \underbrace{\int_{X_n} 2gd\mu}_{(1)} + \underbrace{\int_{X_n^c} \varepsilon d\mu}_{(2)}$$

(1) — оценка разности по условию, и ещё при больших n меньше эпсилона по абсолютной непрерывности интеграла. (2) — из условия о сходимости по мере выше оцениваем эпсилоном.

$$\leq \varepsilon + \varepsilon \cdot \mu X_n^c \leq \varepsilon \cdot (1 + \mu X)$$

(оцениваем меру дополнения просто всем пространством)

2. $\mu X = \infty$

Сначала докажем небольшое свойство интеграла по мере:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists A \subset X \text{ измеримое } \mu A < +\infty \quad \int_{X\setminus A} g < \varepsilon$$

Если по-русски, то существует некоторое множество в исходном, на котором в основном концентрируется интеграл, следовательно, на остальном кусочке интеграл крайне мал. И мы можем предъявить такое для сколь угодно малого ε.

Рассмотрим интеграл как супремум ступенчатых функций:

$$\int_X g = \sup_{0\geq g_n \geq |g|} \int_X g_n d\mu$$

Этот супремум значит, что существует какая-то g_{n_0}, хорошо (ε) оценивающая нашу функцию:

$$\exists g_{n_0} : \int_X g - g_{n_0} < \varepsilon$$

Давайте возьмём за A носитель функции g_{n_0}:

$$A := \operatorname{supp} g_{n_0} = \{x : g_{n_0}(x) \neq 0\}$$

Так как ступенчатая функция есть сумма константы на характеристическую функцию, её интеграл конечен (?). Ну, а на "хвостиках" где она равна нулю нам не особо интересно. Таким образом, $\mu A < +\infty$:

$$\int_{X\setminus A} g d\mu = \int_{X\setminus A} g \underbrace{-g_{n_0}}_{\text{так как вне } A\ g_{n_0}=0} \leq \int_X g - g_{n_0} < \varepsilon$$

Ну и всё, раз доказали, давайте разобъём на два интеграла:

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \underbrace{\int_A |f_n - f| d\mu}_{<\varepsilon \text{ по пункту 1}} - \underbrace{\int_{X\setminus A} |f_n - f| d\mu}_{<2\varepsilon \text{ по доказанному выше}} \leq 3\varepsilon$$

ч. т. д.

1.3.3 Принцип Кавальери

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные, полные меры
- $C \in \mathfrak{C}$
- $m = \mu \times \nu, \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. при почти всех $x \quad C_x \in \mathfrak{B}$
2. $x \mapsto \nu C_X$ — измеримо на X (сама функция задана почти везде)
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогично для сечений C^y

Замечания:

1. C — измеримо $\not\Rightarrow \forall x C_x$ — измеримое
2. $\forall x \forall y : C_x, C^y$ — измеримы $\not\Rightarrow C$ — измеримо

Доказательство:

Введём D — это множество тех множеств, которые удовлетворяют принципу Кавальери :) . Давайте докажем, что разные типы множеств содержатся в D. А потом (внезапно) окажется, что это все множества.

1. $G = A \times B$ **(измеримые прямоугольники)**

Проверяем здесь и далее попунктно:

1. Так как это прямоугольники, $C_x = \begin{cases} B, & x \in A \\ \varnothing, & x \notin A \end{cases}$ (очев). Ну, значит, при всех $x : \; C_x \in \mathfrak{B}$
2. Берём в качестве такой функции $\nu(B) \cdot \chi_A(x)$. Она измерима на X.
3. Ну давайте поинтегрируем) $\int_X \nu(C_x) d\mu = \int_X \nu(B) \cdot \chi_A(x) d\mu = \nu(B) \cdot \mu(A) = m(A \times B)$

2. $E_i \in D, E_i$ **дизъюнктны,** $E = \bigsqcup_{\textbf{НБЧС}} E_i$**. Тогда** $E \in D$

1. $E_x = \bigsqcup (E_i)_x$. Обратите внимание, что все множества справа уже лежат в D, поэтому они "измеримы" (лежат в $\mathfrak{B}$) при почти всех x. Ну, значит и объединение их тоже.
2. Если вы ещё не поняли, мы в этом пункте фактически хотим предоставить функцию вычисления меры сечения по заданному x. $\nu E_x = \sum \nu E_{i_x}$. Это сумма измеримых неотрицательных функций, определённых на почти всех x (потому что кусочки уже лежат в D).
3. $\int_X \nu(C_x) d\mu = \int_X \sum \nu E_{i_x} d\mu$. Тут напрашивается переставить местами сумму и интегрирование, и это можно сделать по теореме об интегрировании положительных рядов!. $\sum \int_X \nu E_{i_x} d\mu = \sum m E_i = (*)$ (кусочки уже в D, и по счётной аддитивности) $(*) = mE$

3. $E_i \in D, \; E_i \supset E_{i+1} \supset \dots, \; \bigcap E_i = E, \; mE_1 < +\infty$**. Тогда** $E \in D$

1. $E_x = \bigcap (E_i)_x$. Аналогично предыдущему.
2. По теореме о непрерывности меры сверху (условия подходят): $\lim \nu E_{i_x} = \nu E_x$. Ну и тогда, добавляя оговорку о том, что всё это работает на тех x, на которых определены функции для кусочков, то и наша функция сопоставления измерима.
3. $\int_X \nu(C_x) d\mu = \int_X \lim_{i \to \infty} \nu E_{i_x} d\mu =$. Замечаем, что все наши функции в пределе положительны (меры) и суммируемы (т. к. $0 \le \nu E_{i_x} \le \nu E_1 < +\infty$ по условию, значит суммируемы). Тогда запускаем теорему Лебега о мажорированной сходимости для случая почти везде (в обратку) и выигрываем! $= \lim_{i \to \infty} \int_X \nu E_{i_x} d\mu = \lim_{i \to \infty} m E_i = mE$ (последнее тоже по непрерывности меры сверху).

Сделаем небольшое лирическое отступление в прошлое. Как мы помним, у нас есть теорема о продолжении меры, по которой, в частности, строилась и мера Лебега. По одному из её пунктов, меру предлагалось высчитывать, выбирая всё лучше оценивающее покрытие ячейками, и беря по всем таким покрытиям инфимум: $(\mathcal{P}(\text{п-к.}),\ \mu_0) \to (\mathfrak{A}(\sigma-\text{алг.}), \mu); \quad \mu A = \inf\{\sum \mu P_k,\ A \subset \bigcup P_k\}$. Также, если мы рассмотрим конкретно меру Лебега, то измеримое про ней множество можно представить (по теореме о регуляризации?) в виде $A \in \mathfrak{A},\ A = B \setminus C$, где B — "борелевское", а C — "меры 0" (кавычки тут не просто так, ведь мы не задавали никаких топологий и прочего, чтобы их снять. Тут это для общего понимания происходящего). Ну и получается, что если берём за основу "измеримости" вот это определение с инфимумом, то B представляется в виде $\bigcap_i \bigcup_j P_{ij}$ (типа взяли всевозможные покрытия и пересекли, получив тем самым наилучшее, чтоли). И некоторый остаток меры 0. Однако, не стоит его недооценивать, у нас мера по условию принципа — полная, а это значит, что "иерархия" на этих множествах должна соблюдаться (см. определение полной меры из 3 сем.). Рассматриваем всё это далее!

4. $mE = 0$**. Тогда** $E \in D$

То же самое: $mD = 0,\ H = \bigcap_i \bigcup_j P_{ij},\ P_{ij} \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B},\ E \subset H$. Заметим, что $H \in D$ по пункту 3.

1. $0 = mH = \int_X \nu(H_x) d\mu$. Если так случилось, то логично, что $\nu(H_x) = 0$ п. в. x. Ну тогда $\nu(E_x) = 0$ при этих x, так как $E_x \subset H_x$ по полноте меры.
2. Доказано предыдущим пунктом, всё 0.
3. Как следствие, $\int_X \nu(E_x) = 0 = mE$

5. $A \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, mA < +\infty$**. Тогда** $A \in D$

Пользуясь лирическим отступлением (и "обобщённой регулярностью"): $A = B \backslash C,\ B = \bigcap_i \bigcup_j P_{ij} \in D,\ mC = 0 \Rightarrow C \in D$

1. $mA = mB - mC = mB$, сечения: $A_x = B_x \setminus C_x$ (измеримы при п. в. x, т. к. составляющие уже в D)
2. Из общих соображений, $\nu B_x - \nu C_x \geq \nu A_x$. С другой стороны, по монотонности ($A \subset B$): $\nu A_x \leq \nu B_x$. А т. к. $\nu C_x = 0$ при п. в. x, то при тех же $x : \nu A_x = \nu B_x$.
3. $\int_X \nu A_x d\mu = \int_X \nu B_x d\mu =$ (оно уже в D) $= mB = mA$ (из начала).

Ну и всё, осталось обощить всё вышеперечисленное и показать, что всё-таки любое множество лежит в нашем классе D (фактически, остались только множества бесконечной меры).

6. $A \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ **— любое** $\in D$

$\mu A = +\infty$. Запускаем $\sigma-$конечность: $X = \bigsqcup X_k, Y = \bigsqcup Y_i$. С другой стороны, $X \times Y = \bigsqcup X_k \times Y_i$. Тогда $A \cap (X_k \times Y_i) \in D$ по пункту 5 (конечная мера), а их дизъюнктное объединение $\bigsqcup A \cap (X_k \times Y_i) \in D$ по пункту 2.

ч. т. д.

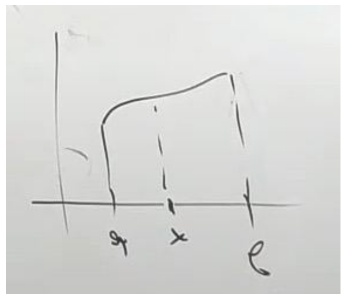
Следствия:

1. $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B},\ P_1(C) = \{x \in X : C_x \neq 0\}$ (проекция на X) и она измерима на нём, то меру можно считать по ней $mC = \int_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$. Это очевидно (ну просто проекция удаляет те точки, где сечение и так было равно нулю).

2. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда $\int_a^b f(x) = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$

   Доказательство:

   Достаточно рассмотреть неотрицательную функцию, т. к. оба интеграла аддитивны и можно просто разбить. Тогда, $\Pi\Gamma(f, [a, b]) = C$ — измеримое множество (очев). А $C_x = [0, f(x)]$ (см. картинку). Причём, если вспомнить 2й сем, то окажется, что той загадочной площадью σ, которую мы использовали в рассуждениях, может быть и λ! Давайте посмотрим поближе: $\lambda(C_x) = \lambda([0, f(x)]) = f(x)$.



   $\int_a^b f(x)dx = \lambda_2(\Pi\Gamma(f, [a, b])) =$ (по следствию 1 можем считать просто на проекции) $= \int_{[a,b]} \lambda(C_x) d\lambda_1 = \int_{[a,b]} f(x) d\lambda_1$

1.3.4 Теорема Фубини

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные меры
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, суммируема на $X \times Y$ по мере m

Тогда:

1. при почти всех x функция f_x суммируема на Y
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu$ — это суммируемая функция на X
3. $$\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi(x) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

1.3.5 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме

Формулировка:

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, диффеоморфизм

Тогда $\forall A \in \mathbb{M}^m, A \subset O$

$$\lambda\Phi(a) = \int_A |\det \Phi'(x)| dx$$

Доказательство:

1.3.6 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

Формулировка:

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, диффеоморфизм
- $\Phi(O) = O'$
- $f : O' \to \mathbb{R} \geq 0$ — измерима

Тогда:

$$\int_{O'} f dx = \int_O f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x) d\lambda(x)|$$

Доказательство:

1.3.7 Теорема о непрерывности сдвига

Формулировка:

- $f : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$
- $h \in \mathbb{R}^m$
- $f_h(x) := f(x+h)$

1. f — равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^m$
   Тогда $||f_h - f||_\infty \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$
2. $1 \leq p < +\infty,\ f \in L^p(\mathbb{R}^m)$
   Тогда $||f_h - f||_p \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$
3. $f \in \tilde{C}[0, \tau]$
   Тогда $||f_h - f||_\infty \longrightarrow 0$
4. $1 \leq p < +\infty,\ f \in L^p[0, \tau]$
   Тогда $||f_h - f||_p \longrightarrow 0$

Доказательство:

1.4 Теоремы

1.4.1 Теорема об интегрировании положительных рядов

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, u_n \geq 0$ (при почти всех x ?)
- u_n — измеримы на $E \in \mathfrak{A}$

Тогда:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E u_n(x) d\mu(x)\right)$$

Доказательство:

Подгоним под теорему Леви 3 (3 семестр). Пусть $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$ — последовательность частичных сумм. Очевидно, что эта последовательность — монотонно неубывающая (так как функции у нас неотрицательные):

$$0 \leq S_N \leq S_{N+1} \leq S_{N+2} \leq \dots$$

Тогда, делаем предельный переход (вот тут есть вопрос, почему должен существовать предел, но если подумать: если его не существует, вообще вся эта теорема не имеет смысла (ну бесконечности, чел, смысл их интегрировать)). А так же, измеримость сохраняется, так как у нас исходные функции все были измеримы (ну и по теореме о пределе измеирмых функций):

$$S_N(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} S(x)$$

Ну и всё, значи, по теореме Леви можем перейти к предельному переходу интегралов:

$$\int_E S_N(x) d\mu(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \int_E S(x) d\mu(x)$$

Левую часть можно расписать по линейности интеграла (там у нас конечное число членов):

$$\int_E S_N(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{N} \int_E u_n(x) d\mu(x)$$

Ну, а раз интграл суммы стремится к интегралу предельной функции, то и сумма интегралов обязана туда стремиться.

$$\sum_{n=1}^{N} \int_E u_n(x) d\mu(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x) d\mu(x)$$

ч. т. д.

Следствие:

- $u_n : X \to \mathbb{R}$, измеримы на $E \in \mathfrak{A}$
- $\sum \int_E |u_n(x)| d\mu < +\infty$ (конечна)

Тогда $\sum u_n(x)$ — абсолютно сходящийся при почти всех x

Доказательство:

Пусть:

$$S(x) = \int_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$

Тогда, по предыдущей теореме:

$$\int_E S(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E |u_n(x)| d\mu \right) < +\infty$$

Раз интеграл конечен, значит $S(x)$ — суммируема, а это значит, что $S(x)$ — почти везде конечна. Ну значит и сходится.

ч. т. д.

Пример:

- (x_n) — вещественная последовательность
- $\sum a_n$ — абсолютно сходящийся числовой ряд

Тогда функциональный ряд $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x-x_n|}}$ — абсолютно сходится при почти всех x (в $\mathbb{R}$ по мере Лебега)

Доказательство:

Во-первых, можно доказать, что если для $\forall A$ на $[-A, A]$ абсолютно сходится почти везде, то и везде (на $\mathbb{R}$) почти везде сходится (лол). Счётное количество п. в. $\Rightarrow$ п. в. (чтобы количество отрезков было счётным, надо чтобы A были хотя бы рациональными. Кажется, что это не сильная проблема, так как отрезки включают в себя и все вещественные числа на отрезке тоже).

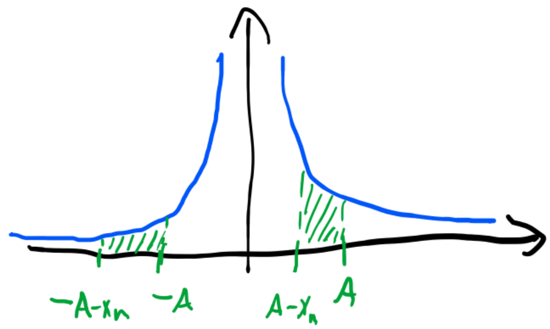
Попробуем подогнать под предыдущую теорему:

$$\int_{[-A,A]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} d\lambda = |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x-x_n|}} \leq$$

Так, стоп. А как мы перешли к определённому интегралу? Оказывается, что так можно делать, на доказано это будет позже (в курсе).

$$\underset{x:=x-x_n}{\leq} |a_n| \int_{-A-x_n}^{A-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq$$

Почему верен последний переход? Посмотрим на картинке:



Ну, по ней очевидно, что мы откусили кусочек поменьше, а добавили побольше. Тогда оценим модуль:

$$\leq 2 \cdot |a_n| \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4 \cdot \sqrt{A} \cdot |a_n|$$

Всё, абсолютный интеграл ограничен, значит сходится (при почти всех x).

ч. т. д.

1.4.2 Абсолютная непрерывность интеграла

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \quad \forall E \text{— измеримое } \mu E < \delta \qquad \left| \int_E f d\mu \right| < \varepsilon$$

Доказательство:

Для доказательства сего факта нам бы хотелось поисследовать, как на таких множествах ведёт себя функция в зависимости он величиные её значений на соответствующих множествах. Давайте заведём множества X_n:

$$X_n = X(|f| \geq n)$$

Заметим, что $\ldots \supset X_n \supset X_{n+1} \supset \ldots$. Причём:

$$\bigcap X_n = X_\infty = X(|f| = \infty)$$

А также, ведь по условию наша функция f суммируема, значит она почти везде конечна (а там, где не конечна — множество меры 0):

$$\mu\left(\bigcap X_n\right) = 0$$

Теперь заведём вспомогательную меру:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

И внезапно заметим, что для неё выполняется теорема об непрерывности меры сверху! ($X_0 = X$, так как там у нас условие модуль больший нуля, и интеграл по нему конечен, так как функция суммируема):

$$\nu(X_0) = \int_{X_0 = X} |f|\mu < +\infty$$

Ну а в пересечении, как мы уже выяснили, у нас множество меры ноль (а на нём интеграл тоже нулевой):

$$\nu\left(\bigcap X_n\right) = 0$$

Таким образом, $\nu(X_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. И это даёт нам право с полной уверенностью сказать, что:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \quad \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

Все приготовления сделаны, давайте оценивать:

$$\forall \varepsilon > 0\ \delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}\ \mu E < \delta \qquad \left|\int_{X_{n_\varepsilon}} f d\mu\right| \le \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| d\mu = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| d\mu + \int_{E \cap X^c_{n_\varepsilon}} |f| d\mu$$

Первое слагаемое оценим X_{n_ε}, для которого у нас уже есть готовое утввверждение выше. А второе оценим мерой, умноженной на n_ε. Так можно сделать, ведь дополнение X_{n_ε} есть множество точек, на котором функция $< n_\varepsilon$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + n_\varepsilon \cdot \overbrace{\underbrace{\mu\left(E \cap X^c_{n_\varepsilon}\right) \le \mu\left(E\right) < \delta}} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ч. т. д.

Следствие:

- $(e_n) \in \mathfrak{A}$ — последовательность (?) множеств
- $\mu e_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- f — суммируемая на X

Тогда:

$$\int_{e_n} f d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство:

Очевидно следует из теоремы, ну камон)

1.4.3 Теорема о произведении мер

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой (полукольца (?))
- Зададим $m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$

Тогда:

1. m_0 — мера на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$
2. μ, ν — σ-конечные меры $\Longrightarrow m_0$ — σ-конечная

Доказательство:

1.

Давайте рассмотрим какой-то $P = \bigsqcup P_k$ — измеримые прямоугольники. Чтобы доказать, что это действительно мера на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, необходимо доказать счётную аддитивность: $m_0(P) \underset{?}{=} \sum m_0(P_k)$

Верно, что $P = A \times B, P_k = A_k \times B_k$ (наше множество есть результат перемножение множеств из каждого пространства). Также из этого следует, что:

$$\chi_P = \sum \chi_{P_k}$$

$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y)$$

Поинтегрируем это по Y!

$$\chi_A(x)\nu(B) = \sum \chi_{A_k}(x)\nu(B_k)$$

А теперь по X!

$$\mu(A)\nu(B) = \sum \mu(A_k)\nu(B_k)$$

Всё проверили, это действительно мера.

2.

По сигма-конечности исходных мер, мы можем расбить исходные простанства на счётное объединение множеств, имеющих конечную меру.

$$X = \bigcup X_k,\ \mu X_k < +\infty$$

$$Y = \bigcup Y_k,\ \nu Y_n < +\infty$$

Ну и тогда мера перемножения двух этих множеств будет просто результатом перемножения нескольких конечных чисел и их сумма, что, очевидно, конечно:

$$X \times Y = \bigcup_{(i,j)} X_i \times Y_j$$
$$m_0(X \times Y) = \sum_{(i,j)} \mu(X_i) \cdot \nu(Y_j)$$

ч. т. д.

1.4.4 Теорема Тонелли

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные меры
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, измерима относительно $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. при почти всех x функцияf_x измерима на Y
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu$ — это измеримая функция на X
3. $$\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi(x) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

Доказательство:

1.4.5 Формула для бета-функции

Формулировка: Бета-функция задаётся следующим образом:

$$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx, \quad s, t > 0$$

Тогда:

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

Доказательство:

Рассмотрим:

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx \cdot \int_0^\infty y^{t-1}e^{-y}dy =$$

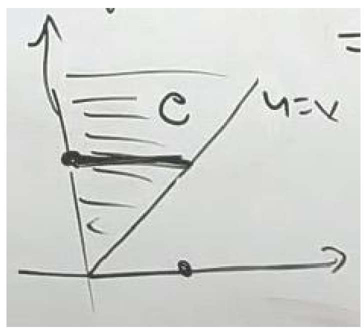
Заметим, что второй интеграл есть ничто иное, как константа! Внесём его внутрь:

$$= \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\left(\int_0^\infty y^{t-1}e^{-y}dy\right)dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x^{s-1}y^{t-1}e^{-(x+y)}dy\right)dx =$$

Заменим $y = u - x$:

$$= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}du\right)dx =$$

А теперь финт ушами! По теореме Тонелли, этот повторный интеграл является двойным интегралом по некоторой области C:



Так давайте просто поменяем пределы интегрирования:

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^u x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}dx\right)du =$$

И ещё раз заменим: $x = uv$, $dx = udv$ (u типа как константа, пределы интегрирования тоже поменялись!)

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^1 (uv)^{s-1}(u-uv)^{t-1}e^{-u}dv\right)udu = \int_0^\infty \left(\int_0^1 u^{s-1}v^{s-1}u^{t-1}(1-v)^{t-1}e^{-u}dv\right)udu =$$

$$\int_0^\infty u^{s+t-1}e^{-u}du \cdot \int_0^1 v^{s-1}(1-v)^{t-1}dv = \Gamma(s+t)B(s,t)$$

ч. т. д.

1.4.6 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

Формулировка:

- $B(0,R) = \{x \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \le R^2\}$

- α_m $\lambda_m(B(0,1))$

Тогда:

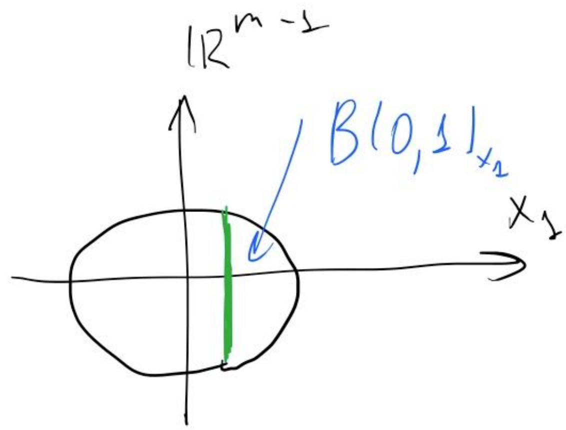
$$\mu\left(B(0,R)\right)=\alpha_m R^m$$

Доказательство:

Почему вылез радиус в степени m — это при линейном растяжении шарика $B(0,1)$ просто вылез множитель (по прошлому сему (?)). Поэтому достаточно рассмотреть только этот базированный шар единичного радиуса. Будем же наконец искать его объём, интегрируя!

$$\alpha_m=\int_{-1}^{1}\lambda_{m-1}\left(B(0,1)_{x_1}\right)dx_1=$$

А почему так? Да очень просто. Дело в том, что сечение шара размерности m есть подпространство размерности $m-1$, а именно — шар радиуса $\sqrt{1-x_1^2}$.



$$=\int_{-1}^{1}\alpha_{m-1}(1-x_1^2)^{\frac{m-1}{2}}dx_1=$$

Делаем замену $x_1^2=x,\ dx_1=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$:

$$=\frac{\alpha_{m-1}}{2}\int_{-1}^{1}x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{m-1}{2}}dx=\alpha_{m-1}\cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{m+1}{2}\right)=\alpha_{m-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

Двойка из знаменателя пропала из-за того, что бета-функция чётна, значит, изначальный интеграл можно разбить на два на промежутках $(-1,0)$ и $(0,1)$ и они будут равны, и равны бета-функции. Ну и всё, двоймка сократилась. Гораздо интереснее, что же там будет, если мы будем раскрывать "альфы" до талого. Сразу заметим, что $\alpha_1=2$ (ну просто длина промежутка $(-1,1)$). Посмотрим (пары, эквивалентные "подчёркнутым" сократятся, и так далее со сдвигом на один через один, лол):

$$\alpha_m = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\underset{\sim\sim\sim}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\underset{\sim\sim\sim}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}+1\right)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}+1\right)} \cdot \ldots \cdot 2 =$$

Вспоминаем “факториальность” гамма-функции $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ и формулу из темы про бесконечные произведения $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$:

$$= 2\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = 2\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{m}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \frac{\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

(можно прогнать ещё для первых размерностей 2, 3)

ч. т. д.

1.4.7 Теорема Фату. Следствия

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n \geq 0$ — измерима
- $f_n \to f$ почти везде
- Если $\exists C > 0 \;\; \forall n \int_X f_n d\mu \leq C$

Тогда:

$$\int_X f d\mu \leq C$$

Доказательство:

Следствие:

То же самое, только меняем сходимость почти везде на:

- $f_n, f \geq 0$, измеримы, почти везде конечны
- $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$

Следствие:

- $f_n \geq 0$, измеримы

Тогда:

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

1.4.8 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \_)$ — пространства с мерой
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ — измеримо
- $\Phi : X \to Y$ — "измеримое"
- ν — взвешенный образ μ (с весом ω)

Тогда для $\forall f : Y \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ — измеримых:

1. $f \circ \Phi$ — измеримо (относительно $\mathfrak{A}$)
2. $\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) d\mu(x)$

Доказательство:

1.4.9 Критерий плотности

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- ν — ещё одна мера на $\mathfrak{A}$
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, измеримо

Тогда эквивалентно:

1. ω — плотность μ отностительно μ
2. $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \inf_A \omega \cdot \mu A \leq \nu A \leq \sup_A \omega \cdot \mu A$

Доказательство:

1.4.10 Лемма о единственности плотности

Формулировка:

- f, g — суммируемы на X
- $\forall A$ — измеримое, $\int_A f = \int_A g$

Тогда $f = g$ почти везде

Доказательство:

Следствие:

Плотность меры определяется однозначно с точностью до изменения на множестве меры 0.

1.4.11 Лемма об оценке мер образов малых кубов

Формулировка:

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^1$
- $a \in O$
- Пусть $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда $\exists \delta > 0\ \forall$ Куб $Q \subset B(a, \delta)$

$$\lambda \cdot \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$$

Доказательство:

1.4.12 Предельный переход по параметру в несобственном интеграле

Формулировка:

- $f : \langle a, b\rangle \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$
- $Y \subset \tilde{Y}$ — метризуемое
- $y_0 \in \tilde{Y}$ — предельная точка Y

1. при почти всех $x \exists f_0(x) = \lim_{y\to y_0} f(x, y)$
2. $\forall t \in (a, b)\ \forall f(x, y_0), f(x, y)$ — суммируемые по x на (a, t) и $\int_a^t f(x, y)dx \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} \int_a^t f_0(x)dx$
3. $J(y) = \int_a^{\to b} f(x, y)$ — равномерно сходящаяся при $y \in Y$

Тогда $\int_a^{\to b} f_0(x)dx$ — существует (как несобственный)

Доказательство:

1.4.13 Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости или L_{loc}

Формулировка:

- $f : X \times \tilde{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$
- X — пространство с мерой, $\mu X < +\overline{\mathbb{R}}$
- $\tilde{Y}$ — метрезуемое топологическое пространство
- $Y \subset \tilde{Y}$
- $a \in \tilde{Y}$ — предельная точка Y

- $\forall y \in Y \quad x \mapsto f(x,y)$ — суммируема на X
- Пусть $f(x,y) \underset{y \to a}{\rightrightarrows} \varphi(x)$

Тогда φ — суммируема на X и

$$\lim_{y \to a} \int_X f(x,y) d\mu(x) = \int_X \varphi(x) d\mu(x)$$

Доказательство:

1.4.14 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

Формулировка:

- Y — промежуток $\subset \mathbb{R}$
- $f : X \times Y \to \mathbb{R}$
- $\forall \quad f(x,y)$ — суммируемая функция от x
- При почти всех x $\forall y \exists f'_y(x,y)$
- f'_y — удовлетворяет условию $L_{loc}(y_0)$

Тогда:

- $J(y) = \int_X f(x,y) d\mu(x)$ — дифференцируема в y_0
- $J'(y_0) = \int_X f'_y(x,y) d\mu(x)$

Доказательство:

1.4.15 Теорема о вложении пространств L^p

Формулировка:

- $\mu E < +\infty, 1 \leq s < r \leq +\infty$

Тогда:

1. $L_r(E,\mu) \subset L_s(E,\mu)$
2. $||f||_s \leq (\mu E)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot ||f||_r$

fix

Доказательство:

1.4.16 Теорема о сходимости в L^p и по мере

Формулировка:

$1 \le p < +\infty \quad f_n \in L_p(E, \mu)$:

1. $f \in L_p \quad f_n \xrightarrow[L_p]{} f$, тогда $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$
2. $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$ [либо $f_n \to f$ почти всюду], $|f_n| \le g$ почти всюду, при всех n, где $g \in L^p$. Тогда $f_n \xrightarrow[L_p]{} f$

Доказательство:

1.4.17 Полнота L^p

Формулировка:

$L^p(E, \mu)$ —- полное $(1 \le p < +\infty)$

Доказательство:

1.4.18 Плотность в L^p множества ступенчатых функций

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), 1 \le p \le +\infty$

Тогда множество ступенчатых функций плотно в $L_p(X, \mu)$

Доказательство:

1.4.19 Лемма Урысона

Формулировка:

- X — нормированное топологическое пространство (например, $\mathbb{R}^m$)
- $F_0, F_1 \subset X$ — замкнутое
- $F_0 \cap F_1 = \varnothing$

Тогда: $f : X \to \mathbb{R}, \quad 0 \le f \le 1$ — непрерывное

$f|_{F_0} \equiv 0$, $f|_{F_1} \equiv 1$

Доказательство:

1.4.20 Плотность в L^p непрерывных финитных функций

Формулировка:

- $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}^m, \lambda_m)$

Тогда $C_0(\mathbb{R}^m)$ плотно в $L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

Доказательство:

1.4.21 Интегрирование по мере Бореля–Стильтьеса, порожденной функцией распределения (с леммой)

Формулировка:

- $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, измерима по Борелю
- $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, измерима, почти везде конечна
- H — функция распепределения
- μ_H — мера Бореля-Стильетса

Тогда:

$$\int_X f\left(h(x)\right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_H(t)$$

Доказательство:

1.4.22 Теорема об интегрировании по частям

Формулировка:

- $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, возрастающая
- f — абсолютно непрерывная функция (C^1) на $[a, b]$
- μ_H — мера Бореля(Лебега ?)-Стильетса

Тогда:

$$\int_{[a,b)} f(x) dg(x) = fg|_a^b - \int_{[a,c]} f'(x) g(x) dx$$

Доказательство:

1.4.23 Лемма о "почти признаке Дирихле"

Формулировка:

- $-\inf < a < b \le +\inf$
- f — "доп." на $[a,b)$ ($\forall A \in (a,b) f$ — суммируема на (a,A))
- $g(x)$ — монотонно стремится к 0 при $x \to b-0$
- Пусть функция $F(t) = \int_a^t f dx$ — ограничена

Тогда:

$$\int_a^{\to b} fgdx$$

— сходится

$$\left|\int_a^{\to b} fgdx\right| \le |g(a)| \cdot \sup_{t\in(a,b)} \left|\int_t^{\to b} fdx\right|$$

Доказательство:

1.4.24 Следствие о "почти признаке Абеля"

Формулировка:

- $\int_a^{\to b} fdx$ — сходится, g — монотонна и ограничена на $[a,b)$

Тогда: $\int_a^{\to b} fdx$ — сходится, и к тому же:

$$\left|\int_a^{\to b} fg\right| \le 5(???) \cdot \sup_{(a,b)} |g(t)| \cdot \sup_{(a,b)} \left|\int_t^{\to b} f(x)dx\right|$$

Доказательство:

1.4.25 Признак Абеля равномерной сходимости интеграла

Формулировка:

- $f, g : [a,b) \times Y \to \mathbb{R}$
- $\int_a^{\to b} f(x,y)dx$ — равномерно сходящийся на Y
- $g(x,y)$ — ограничена на $[a,b) \times Y$

Тогда:

$$\int_a^{\to b} f(x,y)g(x,y)dx$$

— равномерно сходящийся на Y.

Доказательство:

2 Период Мезозойский

2.1 Важные определения

2.2 Определения

2.2.1 Кусочно-гладкий путь

γ — кусочно-гладкий, V — непрерывно, $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)$

$$I(V, \gamma) = \int_a^b \langle V\left(\gamma(t)\right), \gamma'(t)\rangle dt =$$

$$\int_a^b V_1\left(\gamma(t)\right)\gamma_1'(t) + V_2\left(\gamma(t)\right)\gamma_2'(t) + \ldots + V_m\left(\gamma(t)\right)\gamma_m'(t)dt =$$

Делаем замену: $x = \gamma(t)$; $x_1 = \gamma_1(t), x_2 = \gamma_2(t)$; $dx_m = \gamma_m'(t)dt$

$$\int_\gamma V_1 dx_1 + V_2 dx_2 + \ldots + D_m dm$$

2.3 Важные теоремы

2.4 Теоремы

2.4.1 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

Формулировка:

- $x_n \to x_0, y_n \to y_0 \quad \langle x_n, y_n \rangle \to \langle x_0, y_0 \rangle$
- $\sum_n x_n$ — сходится
  Тогда $\forall y \in \mathcal{H} \quad \langle \sum x_n, y \rangle = \sum \langle x_n, y \rangle$
- $\sum x_n$ — ортогональный ряд
  Тогда $\sum x_n$ — сходится $\Leftrightarrow \sum ||x_n||^2$ — сходится

Доказательство:

2.4.2 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

Формулировка:

- e_k — ортогональная система в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $x = \sum_{x=1}^{\infty} c_k e_k$

Тогда:

1. e_k — ЛНЗ
2. $c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$
3. $c_k e_k$ — это проекция на прямую $l_k = te_k, t \in \mathbb{R}, x = c_k e_k + z$, где $z \perp l_k$

Доказательство:

2.4.3 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

Формулировка:

-

Доказательство: