# Признак Абеля – Дирихле

1) $f$ — допустима на $[a, b)$ $\quad F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx \quad A \in [a,b)$

Пусть $F$ - ограничена $\exists C_1 : \forall A \in [a,b) \exists C_1 > 0 \; |F(A)| \le C_1$

$g \in C^1[a,b]$ ; $g(x) \xrightarrow[x \to b-0]{} 0$ ; $g(x)$ - монотонна

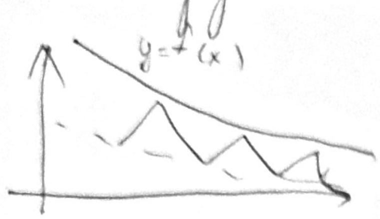
$\Rightarrow \int\limits_a^{\to b} fg$ — сходится $\qquad$ (Дирихле)

2) $f$ — допустима $[a,b)$ $\quad \int\limits_a^{\to b} f$ - сх

$g \in C^1[a,b]$ ; $g(x)$ - монотонна ; $g(x)$ - ограничена $\quad (\exists C_2 > 0 : \forall x \in (a,b] \; |g(x)| < C_2)$

$\int^{\to b} fg$ — сходится $\qquad$ (Абель)

Очень грустная картинка ☹




$\to 0$, но не монотонна

Док-во:

1) $$\int_a^B f(x)\,g(x)\,dx \overset{\text{по частям}}{=} \begin{bmatrix} u'=f & u=F=f' \\ v=g & v'=g' \end{bmatrix} = \underbrace{F(x)\,g(x)\Big|_a^B}_{\to 0} - \int_a^B F(x)\,g'(x)\,dx$$

$F(x)$ — ограничена, $g(x) \to 0$ при $B \to b-0$

$\to F(B)\,g(B) - F(a)\,g(a)$

огр. б.м. $\to 0$

$\to \int_a^B F(x)\,g'(x)\,dx$ — сх $\Leftarrow\Rightarrow$ $\exists \lim$ при $B \to b-0$

Почему? Потому что, (абс.)

$$\int_a^B |F(x)\,g'(x)|\,dx \le C_1 \int_a^b |g'(x)|\,dx = \pm C_1 \int_a^b g'(x)\,dx = \pm C_1\, g(x)\Big|_a^B$$ — конечный,

т.к. $g(x) \underset{x\to b-0}{\longrightarrow} 0$

Конечно $\Rightarrow$ сходится

2) $\exists \lim\limits_{x\to b-0} g(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ (т.к. монотонна и огр., привет 1 сем.)

$\triangle$ $$\int_a^b fg = \underbrace{\int_a^b f(g-\alpha)}_{\text{сходится по Дирихле}} + \underbrace{\int_a^b f\cdot\alpha}_{\text{сх., кон.}}$$

$\to$ f — огр. по теореме Вейерштрасса (на ср-анном компакте $[a, +\infty]$ ???)

$(g-\alpha)$ — всё хорошо ч.т.д.