Теорема Независимость частных производных от порядка дифференцирования.

$f: E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (рассмотрим на $n = 2$, остальные сводятся к этому случаю по правилу раскрытия дифференциала)

$a \in Int(a)$

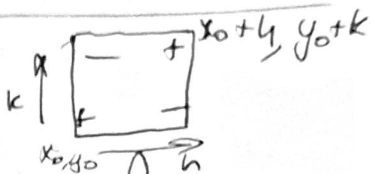
$\exists f''_{xy}, f''_{yx}$ в окр. т. a ($(x_0, y_0) \in E$; $\exists r > 0$ $B(a, r) \subset E$)

и они непрерывны.

$\Rightarrow f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Док-во:

Рассмотрим суперфункцию ~~$\Delta^2 f(h) = f(x_0$~~ $\Delta^2 f \subset E$



$\Delta^2 f(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)$

$\alpha(h) = \Delta^2 f(h, k')$, где k' — фиксированное k

$\alpha(0) = 0$ какая-то средняя точка

$\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) \overset{\text{по Лагранжу}}{=} \alpha'(\bar h) \cdot h = (f'_x(x_0+\bar h, y_0+k) - f'_x(x_0+\bar h, y_0))h =$

опять по Лагранжу $= f''_{xy}(x_0+\bar h, y_0+\bar k) \cdot h \cdot k$

для y_0+k и y_0 (дифф по y_a)

Аналогично вводим $\beta(k)$ с фиксированным h.

Получаем: $\beta(k) = \ldots = f''_{yx}(x_0+\tilde h, y_0+\tilde k) \cdot h \cdot k$

При фикс. $h, k \neq 0$ $\alpha(k) = \beta(k)$

$\cancel{h \cdot k} \cdot f''_{xy}(x_0+\bar h, y_0+\bar k) = f''_{yx}(x_0+\tilde h, y_0+\tilde k) \cdot \cancel{h \cdot k} \quad | \div hk$

$\bar h, \bar k, \tilde h, \tilde k$ — какие-то средние значения между $[0, h]$ и $[0, k]$

$f''_{xy}(x_0+\bar h, y_0+\bar k) = f''_{yx}(x_0+\tilde h, y_0+\tilde k)$

$\downarrow \bar h, \bar k, \tilde h, \tilde k \to 0$

$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ ч.т.д.