
СВЯТОЙ КПК

#BlessRNG

ИЛИ КАК НЕ СДОХНУТЬ НА 1 СЕМЕ ИЗ-ЗА МАТАНА

РАЗРАБОТАЛИ

ТИМОФЕЙ БЕЛОУСОВ @IMODRE

НИКИТА ВАРЛАМОВ @SNITRON

ТИМОФЕЙ ЦОРИН @THEFATTESTOWL

v1.3

ЯНВАРЬ 2022-2023

Заметки авторов

В данном конспекте названия всех задач имеют ссылку на своего автора в виде верхнего индекса:

1. @imodre
2. @snitron
3. @thefattestowl

По любым вопросам и предложениям/улучшениям обращаться в телеграмм к соответствующему автору, или создать Pull Request в Git-репозиторий конспекта (click).

Known Issues

В данном конспекте отсутствуют следующие теоремы:

1. Выражение произвольной показательной функции через экспоненту. Два следствия
2. Показательная функция от произведения
3. Теорема о свойствах логарифма
4. Замечательные пределы
5. Несчетность отрезка.
6. Континуальность множества бинарных последовательностей
7. Метод Ньютона
8. Теорема о разложении рациональной функции на простейшие дроби
9. Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума
10. Иррациональность числа e^2

Вы в любой момент можете добавить любую недостающую теорему, затехав её и отправив код (фотографии письменного текста запрещены) в телегу любому из указанных авторов, или создав Pull Request в Git-репозиторий конспекта (click). Ваше авторство также будет указано, с вашего разрешения.

Содержание

1	Период 1 (Палеозойский)	7
1.1	Важные определения	7
1.1.1	Предел последовательности ($\varepsilon - \delta$ определение) ¹	7
1.1.2	Метрика, метрическое пространство, подпространство ¹	7
1.1.3	Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве ¹	7
1.1.4	Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность ²	7
1.1.5	Предельная точка множества ²	8
1.1.6	Замкнутое множество, замыкание, граница ²	8
1.1.7	Изолированная точка, граничная точка ²	8
1.1.8	Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум ²	8
1.1.9	Последовательность, стремящаяся к бесконечности ¹	8
1.2	Определения	9
1.2.1	Упорядоченная пара ¹	9
1.2.2	Декартово произведение ¹	9
1.2.3	Окрестность точки, проколота окрестность ¹	9
1.2.4	Предел последовательности (на языке окрестностей) ¹	9
1.2.5	Последовательность ¹	9
1.2.6	Образ и прообраз множества при отображении ²	9
1.2.7	Инъекция, сюръекция, биекция ²	9
1.2.8	Векторнозначная функция, её координатные функции ¹	10
1.2.9	График отображения ²	10
1.2.10	Композиция отображений ²	10
1.2.11	Сужение и продолжение отображений ²	10
1.2.12	Описание внутренности множества ²	10
1.2.13	Описание замыкания множества в терминах пересечений ¹	10
1.2.14	Аксиомы вещественных чисел ¹	11
	1.2.14.1 Аксиомы поля	11
	1.2.14.2 Аксиомы порядка	11
1.2.15	Аксиома Кантора, аксиома Архимеда ¹	12
	1.2.15.1 Аксиома Кантора	12
	1.2.15.2 Аксиома Архимеда	12
1.2.16	Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем ²	12
1.2.17	Техническое описание супремума ¹	12
1.2.18	Линейное пространство ¹	12
1.2.19	Норма, нормированное пространство ¹	13
1.2.20	Ограниченное множество в метрическом пространстве ¹	13
1.2.21	Скалярное произведение ¹	14
1.3	Важные теоремы	15
1.3.1	Теорема о двух городских ¹	15
1.3.2	Теорема Кантора о стягивающихся отрезках ²	15
1.3.3	Теорема об арифметических свойствах предела последовательности в нормированном пространстве и в \mathbb{R}^1	15
1.3.4	Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$). Неопределённости ¹	16
1.4	Теоремы	18

1.4.1	Законы де Моргана ²	18
1.4.2	Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности ¹	18
1.4.2.1	Единственность предела:	18
1.4.2.2	Ограниченность сходящейся последовательности	19
1.4.3	Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и для функций ¹	19
1.4.4	Бесконечно малая последовательность ¹	19
1.4.5	Открытость открытого шара ²	20
1.4.6	Теорема о свойствах открытых множеств ²	20
1.4.7	Теорема о связи открытых и замкнутых множеств Свойства замкнутых множеств ²	20
1.4.7.1	Теорема о связи открытых и замкнутых множеств	20
1.4.7.2	Свойства замкнутых множеств	21
1.4.8	Аксиома Архимеда. Плотность множества рациональных чисел в \mathbb{R}^2	21
1.4.8.1	Свойства замкнутых множеств	21
1.4.8.2	Плотность множества рациональных чисел в \mathbb{R}	22
1.4.9	Неравенство Бернулли ²	22
1.4.10	Теорема о существовании супремума ²	22
1.4.11	Лемма(ы) о свойствах супремума ²	23
1.4.12	Теорема о пределе монотонной последовательности (Вейерштрасс in da house) ²	23
1.4.13	Определение числа e , соответствующий замечательный предел ²	24
1.4.14	Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве, норма, порождённая скалярным произведением ¹	24
1.4.14.1	Неравенство Коши-Буняковского	24
1.4.14.2	Норма, порождённая скалярным произведением	24
1.4.15	Леммы о непрерывности скалярного произведения и покомпонентной сходимости в \mathbb{R}^n	25
1.4.15.1	Непрерывность скалярного произведения	25
1.4.15.2	Покомпонентная сходимость в \mathbb{R}^n	25
2	Период 2 (Мезозойский)	27
2.1	Важные определения	27
2.1.1	Определения предела отображения (3 шт) ²	27
2.1.2	Компактное множество ²	27
2.1.3	Непрерывное отображение (4 определения) ¹	27
2.1.4	о маленькое ²	27
2.1.5	Эквивалентные функции, таблица эквивалентных ²	28
2.1.6	Функция, дифференцируемая в точке ¹	28
2.1.7	Производная ¹	28
2.2	Определения	29
2.2.1	Топологическое пространство, топология ²	29
2.2.2	Топологическое определение предела последовательности ²	29
2.2.3	Метризуемое топологическое пространство ²	30
2.2.4	Секвенциальная компактность ²	30
2.2.5	Предел по множеству ²	30
2.2.6	Односторонние пределы ¹	30
2.2.7	Непрерывность слева ¹	30
2.2.8	Разрыв, разрывы первого и второго рода ¹	30
2.2.9	О большое ²	31
2.2.10	Асимптотически равные (сравнимые) функции ²	31
2.2.11	Асимптотическое разложение ²	31

2.2.12	Наклонная асимптота графика ¹	31
2.2.13	Касательная прямая к графику функции ¹	31
2.3	Важные теоремы	32
2.3.1	Теорема о характеристике компактов в \mathbb{R}^{m_1}	32
2.3.2	Теорема о пределе монотонной функции ¹	32
2.3.3	Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов. Таблица эквивалентных ²	33
2.3.4	Теорема о топологическом определении непрерывности ²	34
2.3.5	Теорема Вейерштрасса о непрерывном образе компакта. Следствия ²	34
2.3.6	Теорема Больцано–Коши о промежуточном значении ¹	35
2.3.7	Теорема о непрерывности монотонной функции. Следствие о множестве точек разрыва ¹	35
2.3.8	Теоремы Лагранжа и Коши. Следствия об оценке приращения и о пределе производной ²	36
2.4	Теоремы	38
2.4.1	Теорема об открытых и замкнутых множествах в пространстве и в подпространстве ²	38
2.4.2	Теорема о компактности в пространстве и в подпространстве ²	38
2.4.3	Простейшие свойства компактных множеств ²	39
2.4.4	Лемма о вложенных параллелепипедах ¹	39
2.4.5	Компактность замкнутого параллелепипеда в \mathbb{R}^{m_1}	40
2.4.6	Эквивалентность определений Гейне и Коши ²	40
2.4.7	Единственность предела, локальная ограниченность отображения, имеющего предел, теорема о стабилизации знака ²	41
	2.4.7.1 Единственность предела	41
	2.4.7.2 Локальная ограниченность отображения, имеющего предел	41
	2.4.7.3 Теорема о стабилизации знака	41
2.4.8	Арифметические свойства пределов отображений. Формулировка для \mathbb{R} с чертой ²	41
2.4.9	Принцип выбора Больцано–Вейерштрасса ¹	42
2.4.10	Сходимость в себе и её свойства ¹	42
2.4.11	Критерий Коши для последовательностей и отображений ¹	43
2.4.12	Свойства непрерывных отображений: арифметические, стабилизация знака, композиция ¹	44
	2.4.12.1 Арифметические	44
	2.4.12.2 Стабилизация знака	44
	2.4.12.3 Композиция	45
2.4.13	Непрерывность композиции и соответствующая теорема для пределов ¹	45
	2.4.13.1 Непрерывность композиции	45
	2.4.13.2 Предел композиции	45
2.4.14	Теорема единственности асимптотического разложения ²	46
2.4.15	Теорема о вписанном n -угольнике максимальной площади ²	47
2.4.16	Лемма о связности отрезка ²	48
2.4.17	Теорема о бутерброде ²	48
2.4.18	Теорема о сохранении промежутка ¹	49
	2.4.18.1 Лемма	49
2.4.19	Теорема Больцано–Коши о сохранении линейной связности ¹	50
2.4.20	Описание линейно связных множеств в \mathbb{R}^2	50
2.4.21	Теорема о существовании и непрерывности обратной функции ¹	51
2.4.22	Равносильность двух определений производной. Правила дифференцирования. ³	51
	2.4.22.1 Равносильность определений дифференцируемости	51
	2.4.22.2 Производная суммы и разности	52

2.4.22.3	Производная суммы и разности	52
2.4.22.4	Производная частного	52
2.4.22.5	Производная композиции	53
2.4.22.6	Производная обратной функции	53
2.4.23	Теорема Ферма (с леммой) ²	53
2.4.24	Теорема Ролля. Вещественность корней многочлена Лежандра ²	54
2.4.24.1	Теорема Ролля	54
2.4.24.2	Вещественность корней многочлена Лежандра	54
2.4.25	Непрерывность синуса и арксинуса, замечательный предел, производная синуса. ³ 55	
2.4.25.1	Лемма	55
2.4.25.2	Непрерывность синуса	55
2.4.25.3	Первый замечательный предел	55
2.4.25.4	Производная синуса	56
3	Период 3 (Кайнозойский)	57
3.1	Важные определения	57
3.1.1	Множество мощности континуума ¹	57
3.1.2	Разложения Тейлора основных элементарных функций ¹	57
3.1.3	Выпуклая функция и касательная ^{1 3}	57
3.1.4	Теорема Дарбу. Следствия ³	57
3.1.4.1	Теорема Дарбу	57
3.1.4.2	Лемма о характеристике промежутков	58
3.1.4.3	Следствие 1	58
3.1.4.4	Следствие 2	58
3.2	Определения	59
3.2.1	Классы функций $C^n([a, b])$ ¹	59
3.2.2	Производная n -го порядка ¹	59
3.2.3	Многочлен Тейлора n -го порядка ¹	59
3.2.4	Счётное множество ¹	59
3.2.5	Выпуклое множество в \mathbb{R}^m ¹	59
3.2.6	Надграфик ¹	60
3.2.7	Опорная прямая ¹	60
3.2.8	Равномерная непрерывность ¹	60
3.3	Важные теоремы	61
3.3.1	Формула Тейлора с остатком в форме Пеано ²	61
3.3.2	Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа ¹	61
3.4	Теоремы	62
3.4.1	Следствие об оценке сходимости многочленов Тейлора к функции. Примеры ³ 62	
3.4.1.1	Лемма	62
3.4.1.2	Следствие	62
3.4.1.3	Пример 1	62
3.4.1.4	Пример 2	63
3.4.1.5	Пример 3	63
3.4.1.6	Пример 4	64
3.4.2	Теорема о свойствах показательной функции ¹	64
3.4.3	Критерий монотонности функции. Следствия ³	65
3.4.4	Описание выпуклости с помощью касательных ³	66
3.4.5	Дифференциальные критерии выпуклости ³	67
3.4.6	Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции ³	68
3.4.7	Лемма о трех хордах ³	68
3.4.8	Теорема Кантора о равномерной непрерывности ³	68
3.4.9	Теорема Брауэра ³	69

3.4.9.1	Игра Гекс	69
3.4.9.2	Доказательство теоремы Брауэра	70

1 Период 1 (Палеозойский)

1.1 Важные определения

1.1.1 Предел последовательности ($\varepsilon - \delta$ определение)¹

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ — предел последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначается $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ($n \rightarrow \infty$ можно опустить, т.к. а куда ещё ему стремиться в натуральных числах?)

1.1.2 Метрика, метрическое пространство, подпространство¹

Метрика — некоторая функция ($\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$), определяющая расстояние между элементами в метрическом пространстве.

Существуют некоторые аксиомы, которым подчиняется метрика:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Метрическое пространство — пространство, в котором определена метрика (между любыми двумя элементами можно определить расстояние). Обозначается как пара (X, ρ)

Подпространство метрического пространства — метрическое пространство, в котором множество является подмножеством множества исходного пространства, а метрика — сужение исходной метрики на новое множество:

$$(Y, \rho|_{Y \times Y}), \text{ где } (X, \rho) - \text{исходное пространство, а } Y \subset X$$

1.1.3 Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве¹

Открытый шар — набор всех точек x в метрическом пространстве (X, ρ) , для которых верно $\rho(x, x_0) < r$, где r — радиус шара, x_0 — центр шара (Обозн. $B(x_0, r)$).

Замкнутый шар — то же самое, но вместо $<$ стоит \leq

1.1.4 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность²

(X, ρ) — метрическое пространство, $D \subset X$, $a \in X$

Если $\exists V_a \subset D \Rightarrow a$ — внутренняя точка множества D

Если $\forall a \in D$ a — внутренняя, $\Rightarrow D$ — открытое множество (в X)

Внутренностью множества называется $\text{Int } D = \{x \mid x \in D \ \& \ x \text{ — внутренняя}\}$

Другими словами, внутренностью D является:

1. объединение всех открытых подмножеств D ,

2. максимальное по включению открытое подмножество D .

Примечания:

1. $\text{Int} D$ - открытое множество
2. Если D открытое $\Leftrightarrow D = \text{Int } D$

1.1.5 Предельная точка множества²

Если $\forall r \dot{V}_a(r) \cap D \neq \emptyset$, то точка a называется *предельной точкой множества*

1.1.6 Замкнутое множество, замыкание, граница²

Если D содержит все свои *предельные* точки, то такое множество называется замкнутым. (Примеры: X, \emptyset)

Замыкание D есть:

1. пересечение всех замкнутых множеств, содержащих D
2. минимальное по включению замкнутое множество, содержащее D

Граница D - множество граничных точек D

1.1.7 Изолированная точка, граничная точка²

Если $\exists r \in \mathbb{R} : a \in D \dot{V}_a(r) \cap D = \emptyset$, то такая точка a называется *изолированной*

Если $\forall r \in \mathbb{R} : a \in D \dot{V}_a(r)$ содержит точки как из D , так и не из D , то такая точка называется *граничной*

1.1.8 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум²

$X \subset \mathbb{R}$

Тогда $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ x \leq M$. M — *верхняя граница*.

$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ x \geq m$. m — *нижняя граница*.

1.1.9 Последовательность, стремящаяся к бесконечности¹

Называется бесконечно большой.

$$\forall \varepsilon > (<)0 \exists N : \forall n > N \quad x_n > (<)\varepsilon \Leftrightarrow x_n \rightarrow +\infty(-\infty)$$

Аналогично, если стремится по модулю, то к беззнаковой бесконечности.

1.2 Определения

1.2.1 Упорядоченная пара¹

Семейство, в котором есть 2 элемента (с учётом порядка)

1.2.2 Декартово произведение¹

Множество упорядоченных пар. Например $X \times Y$ - все упорядоченные пары, где первый элемент $\in X$, а второй $\in Y$

1.2.3 Окрестность точки, проколота окрестность¹

Множество элементов, находящихся на "расстоянии" $< \varepsilon$. Проколота окрестность **не** включает сам элемент. В контексте числовой прямой мы можем говорить, что $\{x : |x - x_0| < \varepsilon\}$ — проколота окрестность.

Окрестности обозначаются $V_{x_0}(\varepsilon)$

1.2.4 Предел последовательности(на языке окрестностей)¹

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ — предел последовательности

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad x_n \in V_a(\varepsilon)$

1.2.5 Последовательность¹

Это отображение $D \rightarrow Y$, где $D \in \mathbb{N}$

1.2.6 Образ и прообраз множества при отображении²

Отображение - тройка (X, Y, f) , где X, Y - множества, а f - некое правило, по которому можно $x \in X$ сопоставить $y \in Y$. Записывается как $f : X \rightarrow Y$

Тогда *образом* множества $A \subset X$ при отображении является множество, такое что:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \quad (1)$$

A *прообразом* при $B \subset Y$:

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B \mid x \in X\} \quad (2)$$

1.2.7 Инъекция, сюръекция, биекция²

Если $x_1, x_2 \in X$; $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, то такое отображение называется *инъективным* (*инъекция*). Другими словами, $f(x) = y$ имеет не более одного решения в X

Если $f(X) = Y$, то такое отображение называют *сюръективным* (*сюръекция*). Другими словами, $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$

Если у нас выполняется *инъекция* + *сюръекция*, то такое отображение называют *биективным* (*биекция*). Другими словами, для $\forall y \in Y$ найдётся $x \in X$, причём этот x — единственный.

1.2.8 Векторнозначная функция, её координатные функции¹

"У векторнозначной функции векторные значения"

— Капитан Очевидность

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$$

Также, можно f записать как (f_1, f_2, \dots, f_m) . f_i и есть координатная функция

1.2.9 График отображения²

Пусть дано отображение (X, Y, f) . Тогда *графиком* Γ_f будет называться множество упорядоченных пар в декартовой системе координат, таких что:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\}$$

1.2.10 Композиция отображений²

Пусть дано $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$. Тогда *композицией* отображений $g \circ f$ будет называться такое отображение $h : X \rightarrow Z$, что:

$$\forall x \in X : h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

1.2.11 Сужение и продолжение отображений²

Пусть задано отображение $f : X \rightarrow Y$. Тогда *сужением* его на $A \subset X$ будет называться отображение $g = f|_A$, такое что:

$$g : A \rightarrow Y, \forall a \in A : g(a) = f(a)$$

Однако, теперь f для g будет являться *продолжением* (g определена на подмножестве X)

1.2.12 Описание внутренности множества²

Достаточно подробно определено в
Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность²

1.2.13 Описание замыкания множества в терминах пересечений¹

$\supset G$ — произвольное множество.

$$\overline{G} = \bigcap_{F \supset G, F \text{ замк.}} F$$

Эквивалент определения "замыкание - пересечение всех замкнутых надмножеств"

1.2.14 Аксиомы вещественных чисел¹

В \mathbb{R} есть 2 операции:

1. Сложение: $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
2. Умножение: $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1.2.14.1 Аксиомы поля

Аксиомы сложения

1. Ассоциативность: $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. Коммутативность: $a + b = b + a$
3. Нейтральный элемент: $a + 0 = a$
4. "Обратный элемент": $\exists a' : a + a' = 0$

Аксиомы умножения

1. Ассоциативность $a(bc) = (ab)c$
2. Коммутативность $ab = ba$
3. Нейтральный элемент: $1 \cdot a = a$
4. Обратный элемент: $\forall a \neq 0 \exists a' : a \cdot a' = 1$

Ещё их объединяет дистрибутивность: $a(b + c) = ab + ac$

1.2.14.2 Аксиомы порядка

Когда говорим про порядок, имеем в виду операцию сравнения

Аксиомы

1. Рефлексивность $a \leq a$
2. Транзитивность $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$
3. Антисимметричность $a \neq b \Rightarrow (a \leq b) \neq (b \leq a)$
4. Связь сложения и порядка $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
5. Связь умножения и порядка $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$

1.2.15 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда¹

1.2.15.1 Аксиома Кантора

$$\exists [a_i, b_i]; [a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [a_i, b_i]$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

1.2.15.2 Аксиома Архимеда

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \exists n \in \mathbb{N} : a \cdot n > b$$

1.2.16 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем²

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Казалось бы, а что ещё? Ну, немного есть.

+	$x \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$y \in \mathbb{R}$	$x + y$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	☹
$-\infty$	$-\infty$	☹	$-\infty$

·	$x > 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$y < 0$	xy	0	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	☺	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	☺	$-\infty$	$+\infty$

— операция не определена.

— операция не определена, но в некоторых случаях нам на это пофиг (типа, площадь прямоугольника со сторонами ∞ и 0 равна 0)

Неопределённости: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty, 0^0, \infty^0, 0 * \infty$

Причём: $-\infty < \infty$ (и ещё можно перечислить операции из таблички)

1.2.17 Техническое описание супремума¹

$$b = \sup X = \begin{cases} \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : M - \varepsilon < x \end{cases}$$

$$a = \inf X = \begin{cases} \exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : m - \varepsilon > x \end{cases}$$

1.2.18 Линейное пространство¹

Также его называют *векторным пространством*. Это пространство, в котором определено множество векторов X и поле K .

В этом пространстве определены 2 операции (умножение вектора на число (элемент поля) и сложение векторов):

$$1. \ X \times K \rightarrow X$$

$$2. X \times X \rightarrow X$$

и 7 аксиом:

$$\exists x, y, z \in X, \lambda, \gamma \in K$$

$$1. (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$2. x + y = y + x$$

$$3. 0 \cdot x = \theta$$

$$4. \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

$$5. (\lambda + \gamma) \cdot x = \lambda \cdot x + \gamma \cdot x$$

$$6. \lambda \cdot (\gamma \cdot x) = (\lambda \cdot \gamma) \cdot x$$

$$7. 1 \cdot x = x$$

1.2.19 Норма, нормированное пространство¹

Норма - функция, получающая по вектору его "длину". $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$, где X - линейное пространство. Часто обозначают как $\|x\|$ Имеет 3 свойства:

$$1. \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$2. \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Есть ещё полунормы (они не подчиняются 1 свойству). У них есть ещё 4 свойства:

$$1. p\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \cdot p(x_i)$$

$$2. p(\theta) = 0 \text{ (в обратную сторону не работает в отличие от нормы)}$$

$$3. p(-x) = p(x)$$

$$4. p(x - y) \geq |p(x) - p(y)|$$

Нормированное пространство обозначается парой (X, p)

1.2.20 Ограниченное множество в метрическом пространстве¹

Ограниченное множество X в метрическом пространстве — множество, где $\exists x_0 \exists R \quad X \subset B(x_0, R)$

1.2.21 Скалярное произведение¹

Это отображение $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, где X — линейное пространство. Обозначается (x, y) , $x, y \in X$. Существует 3 свойства, определяющие скалярное произведение:

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(\lambda \cdot x + \gamma \cdot y, z) = \lambda \cdot (x, z) + \gamma \cdot (y, z)$
3. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$, иначе > 0

Свойства скалярного произведения:

1. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$
2. $(\lambda \cdot x, y) = \lambda \cdot (x, y)$
3. $(\theta, y) = (x, \theta) = 0$
4. $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$ (Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве, норма, порождённая скалярным произведением¹)
5. $\sqrt{(x, x)}$ - норма, порождённая скалярным произведением.

1.3 Важные теоремы

1.3.1 Теорема о двух городских¹

Формулировка:

$$x_n \rightarrow a, z_n \rightarrow c, y_n \rightarrow b, x_n \leq y_n \leq z_n, a = c \Rightarrow b = a$$

Доказательство:

По теореме о предельном переходе в неравенствах для последовательностей, $a \leq b \leq c$.

Допустим $b \neq a$. Тогда $\exists N : \forall n > N \quad |x_n - a| \leq \frac{|a-b|}{2} \quad \& \quad |y_n - b| \leq \frac{|a-b|}{2} \quad \& \quad |z_n - a| \leq \frac{|a-b|}{2} \Rightarrow z_n$ и y_n не пересекаются. Но поскольку $z_n \geq y_n$, а $a < b$, у нас противоречие.

1.3.2 Теорема Кантора о стягивающихся отрезках²

Формулировка

Пусть дана система вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$

И при этом $(b_n - a_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$

Тогда $\exists! c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ и при этом $a_n \rightarrow c$ и $b_n \rightarrow c$

Доказательство

▷ Для $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq c \leq b_n$. Вычтем из обеих сторон $a_n : 0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n$. Слева 0, справа б.м. последовательность, следовательно $c - a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow a_n \rightarrow c$. Для b_n аналогично.

Единственность c можно доказать:

1. по теореме о единственности предела
2. Пусть $c, d \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c \leq b_n$ и $a_n \leq d \leq b_n$. Вычтем их друг из друга, получим $a_n - b_n \leq c - d \leq b_n - a_n$. Предельно переходим и получаем $0 \leq c - d \leq 0 \Rightarrow c = d$

◁

1.3.3 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности в нормированном пространстве и в \mathbb{R}^1

Формулировка:

(X, p) - нормированное пространство

$\sqsupset x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0, x, y, x_0, y_0 \in X$

$\{\lambda \in \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}, \lambda_n \rightarrow \lambda_0$

1. $x_n + y_n \rightarrow x_0 + y_0$
2. $x_n - y_n \rightarrow x_0 - y_0$
3. $\lambda_n \cdot x_n \rightarrow \lambda_0 \cdot x_0$
4. $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$
5. Для $\mathbb{R} : \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x_0}{y_0}$

Доказательство:

1.

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \quad \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \quad \|y_n - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$N := \max(N_1, N_2)$$

$$\|x_n + y_n - (x_0 + y_0)\| =$$

$$= \|(x_n - x_0) + (y_n - y_0)\| \underset{\text{н-во треугольника}}{\leq} \|(x_n - x_0)\| + \|(y_n - y_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. Банально, сведём к первому+третьему $\|x_n - y_n\| = \|x_n + (-1)y_n\| \rightarrow x_0 + (-1)y_0 = x_0 - y_0$

$$3. \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_n x_n + \lambda_n x_0 - \lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_n(x_n - x_0) + x_0(\lambda_n - \lambda_0)\| \underset{\text{огр. б.м.}}{\rightarrow} 0$$

$$4. \|\|x_n\| - \|x_0\|\| \underset{\text{Треугольник для полунорм}}{\leq} \|x_n - x_0\| \underset{\text{б.м.}}{\rightarrow} 0$$

5.

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n} \rightarrow x_0 \frac{1}{y_0} = \frac{x_0}{y_0}$$

Но это не работает, т.к. мы не знаем куда стремится $\frac{1}{y_n}$

y_n огр., т.к. $y_0 \neq 0$, а y_n сходящаяся (по т. об ограниченности сх. посл.)

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| = \left| \frac{y_0 - y_n}{y_n y_0} \right| = \left| \frac{1}{y_n} \frac{1}{y_0} \frac{y_0 - y_n}{1} \right| \underset{\text{огр.огр. б.м.}}{\rightarrow} 0$$

1.3.4 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$). Неопределённости¹

Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$)

Формулировка

$$a, b \in \overline{\mathbb{R}}, x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b$$

$$1. x_n \pm y_n \rightarrow a \pm b$$

$$2. x_n \cdot y_n \rightarrow a \cdot b$$

$$3. \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b} \text{ (Разумеется, } y_n, b \neq 0 \text{)}$$

Это работает только когда пределы не создают неопределённости. Они как раз представлены дальше

Доказательство \triangleright Положим $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow b$

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad x_n > \varepsilon - b \Rightarrow x_n + y_n > \varepsilon \text{ (работает т.к. } y_n \text{ огр. снизу)}$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad x_n > \frac{\varepsilon}{b} \Rightarrow x_n \cdot y_n > \varepsilon \text{ (работает т.к. } b \neq 0 \text{)}$$

$$3. \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad x_n > \varepsilon \cdot b \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} > \varepsilon$$

◁

Неопределённости

Я не понимаю, что тут это делает. Вроде как определение, без доказательств, но записано как теорема...

$$1. \infty + -\infty$$

$$2. \pm\infty \cdot 0$$

$$3. \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$4. \frac{0}{0}$$

1.4 Теоремы

1.4.1 Законы де Моргана²

Напоминалка

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \exists \alpha \in A \ x \in X_\alpha\} \quad (3)$$

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \forall \alpha \in A \ x \in X_\alpha\} \quad (4)$$

Формулировка:

$\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - семейство множеств, Y - множество. Тогда:

$$Y \setminus \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \quad (5)$$

$$Y \setminus \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \quad (6)$$

$$Y \cap \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha) \quad (7)$$

$$Y \cup \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha) \quad (8)$$

Доказательство:

1. \triangleright Рассмотрим закон (1). Обозначим левую часть за \mathbb{L} , а правую за \mathbb{R} . Тогда $x \in \mathbb{L}$ означает, что $x \in Y$ и $x \notin \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. По определению **объединения**, это значит, что $x \in Y$ и $x \notin X_\alpha$ для $\forall \alpha \in A$. Вуаля, по определению **пересечения** получается, что $x \in \mathbb{R}$. \triangleleft
(2) доказывается аналогично.
2. \triangleright Рассмотрим закон (3). Обозначим левую часть за \mathbb{L} , а правую за \mathbb{R} . Тогда $x \in \mathbb{L}$ означает, что $x \in Y$ и $\exists \alpha_0 \in A : x \in X_{\alpha_0}$. Иными словами: $\exists \alpha_0 \in A : x \in Y \cap X_{\alpha_0}$. Воу, получилось определение **объединения** для \mathbb{R} . \triangleleft
(4) доказывается аналогично.

1.4.2 Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности¹

1.4.2.1 Единственность предела:

Формулировка:

a и b — пределы последовательности $x_n \Rightarrow a = b$

Доказательство:

Положим, $a \neq b$

$$\varepsilon := |a - b|/2$$

$$\exists N_1 : \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\exists N_2 : \forall n > N_2 \quad |x_n - b| < \varepsilon$$

$$N := \max(N_1, N_2) + 1$$

$|x_N - a| < \varepsilon$ & $|x_N - b| < \varepsilon$, что невозможно, т.к. $V_a(\varepsilon)$ и $V_b(\varepsilon)$ не пересекаются.

1.4.2.2 Ограниченность сходящейся последовательности

Формулировка:

Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство:

Тривиально. Возьмём предел (a) последовательности. Возьмём любой ε . Для него мы можем узнать N , для которого все элементы находятся ближе данного ε . Далее возьмём $\max_{i=1}^N |x_i - a|$. Это и будет радиусом шара, в котором находятся все элементы последовательности

1.4.3 Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и для функций¹

Формулировка:

$$x_n < y_n, x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b \Rightarrow a \leq b$$

Доказательство:

$$\varepsilon := |a - b|/2$$

$$\exists N_1 : \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\exists N_2 : \forall n > N_2 \quad |y_n - b| < \varepsilon$$

$$N := \max(N_1, N_2)$$

$\forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$ & $|y_n - b| < \varepsilon$, а поскольку эти 2 окрестности не пересекаются и $x_n < y_n$, то $a < b$

Для функций аналогично

1.4.4 Бесконечно малая последовательность¹

Формулировка:

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную равно бесконечно малой последовательности.

Доказательство:

$$\exists x_n \rightarrow 0, \sup |y_n| = K$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{\max(K, 1)} \Rightarrow |x_n \cdot y_n| < \varepsilon$$

1.4.5 Открытость открытого шара²

Формулировка:

Открытый шар — открыт.

Доказательство:

$$B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\} \text{ BASED.}$$

▷

Пусть $b \in B(a, r)$. Тогда $B(b, r - \rho(a, b)) \subset B(a, r)$ (это надо доказать).

Докажем! Пусть $x \in B(b, r - \rho(a, b))$. Тогда (по определению открытого шара) $\rho(x, b) < r - \rho(a, b)$

$\rho(x, a) \leq \rho(x, b) + \rho(b, a) < r$ ВЖУХ, и неравенство треугольника!

Следовательно, $\rho(x, a) < r \Rightarrow x \in B(a, r) \Rightarrow B(b, r - \rho(a, b)) \subset B(a, r)$

Следовательно, для любой (произвольной) точки b существует такая окрестность (шар), что $B(b, r - \rho(a, b)) \subset B(a, r) \Rightarrow b$ — внутренняя. Тогда все точки внутри открытого шара — внутренние, и, следовательно, по определению он — открытое множество. ◁

1.4.6 Теорема о свойствах открытых множеств²

Формулировка

$$\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \text{ — открытое множество} \quad (9)$$

$$\bigcap_{k=1}^n G_k \text{ — открытое множество} \quad (10)$$

Доказательство

(9) ▷ Возьмём $\alpha \in A$; $x \in G_\alpha$. Так как G_α — открытое, следовательно, $\exists B(x, r) \subset G_\alpha$. А раз он содержится в одном множестве, логично, что он уже тем более содержится в их объединении. ◁

(10) ▷ Возьмём $x \in \bigcap_{k=1}^n G_k$. Так как этот x содержится в каждом из множеств G_k , существует n шаров $B(x, r_k)$, причём каждый шар является подмножеством G_k . Давайте введём $r = \min_{k=1}^n r_k$. Тогда шар $B(x, r)$ точно содержится в каждом G_k , а, следовательно, и в их пересечении. ◁

Примечание:

Пересечение бесконечного количества открытых множеств не обязательно открыто! Пример:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

1.4.7 Теорема о связи открытых и замкнутых множеств Свойства замкнутых множеств²

1.4.7.1 Теорема о связи открытых и замкнутых множеств

Формулировка

G — открыто $\Leftrightarrow G^c$ — замкнуто

Доказательство

Всё это верно в силу случайности выбираемых точек!

[\Leftarrow] \triangleright Возьмём $x \in G$. Т.к. G^c — замкнуто, а $x \notin G^c$, следовательно, x не является предельной точкой для G^c (значит, что $\exists r \in \mathbb{R} : V_x(r) \cap G = \emptyset$). Причём окрестность можно взять и не выколотую, т.к. $x \notin G^c$. Тогда, $V_x \cap G^c = \emptyset$. Но по определению дополнения это значит, что $V_x \subset G$! Следовательно, x — внутренняя точка для $G \Rightarrow$ оно открытое. \triangleleft

[\Rightarrow] \triangleright Возьмём x — предельную точку для G^c . То есть, любая $\dot{V}_x \cap G^c \neq \emptyset$. Следовательно, x не является внутренней для G (потому что внутренняя точка входит в множество с какой-то окрестностью полностью, а таких окрестностей нету). Следовательно, $x \notin G$, т.к. оно открыто и содержит только внутренние точки. А раз точка не принадлежит множеству, то точно принадлежит его дополнению. \triangleleft

1.4.7.2 Свойства замкнутых множеств

Формулировка

G_α — замкнутые

$$\bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha \text{ — замкнуто} \quad (11)$$

$$\bigcup_{k=1}^n G_\alpha \text{ — замкнуто} \quad (12)$$

Доказательство

Вуаля, применяем законы де Моргана и предыдущую теорему:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha^c = \bigcap_{\alpha \in A} X \setminus G_\alpha^c = \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_{k=1}^n G_\alpha^c = \bigcup_{k=1}^n X \setminus G_\alpha^c = \bigcup_{k=1}^n G_\alpha$$

Примечание:

Объединение бесконечного числа замкнутых множеств не обязательно замкнуто! Пример:

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} = \mathbb{Q} \text{ не замкнуто в } \mathbb{R}$$

1.4.8 Аксиома Архимеда. Плотность множества рациональных чисел в \mathbb{R}^2

1.4.8.1 Свойства замкнутых множеств

Формулировка

$$\forall x > 0, y > 0 \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

(следовательно, существуют сколь угодно большие натуральные числа)

Доказательство (аксиомы, лол) ПОКА НЕ ЗНАЮ, КАК-ТО ЧЕРЕЗ СУПРЕМУМ

1.4.8.2 Плотность множества рациональных чисел в \mathbb{R}

Формулировка

Множество $A \subset X$ всюду плотно в X , если $\forall x, y, x < y, (x, y) \cap A \neq \emptyset$

\mathbb{Q} всюду плотно в \mathbb{R}

Доказательство

▷ Пусть $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Тогда $\frac{1}{y-x} > 0$ и (по аксиоме Архимеда) $\exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{y-x} \Rightarrow \frac{1}{n} < y - x$.

Пусть $c = \frac{[nx]+1}{n}$ ($c \in \mathbb{Q}$)

$$c \leq \frac{nx+1}{n} = x + \frac{1}{n} < x + y - x < y$$
$$c > \frac{nx+1-1}{n} = x$$

Следовательно $c \in (x, y)$ ◁

1.4.9 Неравенство Бернулли²

Формулировка

$\forall x \in \mathbb{R} > -1 \quad n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1+nx$

Доказательство

▷ По индукции!

База (BASED):

$$n=1 \Rightarrow 1+x \geq 1+x$$

Предположение: $(1+x)^n \geq 1+nx$

Переход:

$$(1+x)^{(n+1)} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

◁

1.4.10 Теорема о существовании супремума²

Формулировка

Примечание: тут докажем про ограниченное сверху (супремум) множество, для инфимума аналогично

Всякое непустое ограниченное сверху подмножество $X \subset \mathbb{R}$ имеет верхнюю грань.

Доказательство

▷ Так как множество ограничено сверху, то $\exists M \in \mathbb{R} : x \in X \Rightarrow x \leq M$. Супер. Возьмём $x_0 \in X$ и создадим отрезок $[x_0, M] = [a_1, b_1]$ ($x_0 \leq M$ по определению верхней грани). Заметим, что этот отрезок удовлетворяет двум свойствам:

$$1) [a_1, b_1] \cap X \neq \emptyset \quad \text{и} \quad 2) (b_1, +\infty) \cap X = \emptyset$$

Шикарно. Теперь выберем точку $d_i = \frac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2}$. Если справа нету элементов множества X , то смещаем b_i в d_i . Если справа элементы есть, то смещаем a_i в d_i . Таким образом, мы бинарным способом подбираемся всё ближе и ближе к супремуму (двигаем отрезочек вправо). Причём все наши отрезки — вложенные! И свойства 1) и 2) так же выполняются.

АСХТУНГ! Наши отрезки ещё и стягиваются! И действительно, ведь $\frac{b_i - a_i}{2^{n-1}}$ стремится к 0. Следовательно, по теореме Кантора о стягивающихся отрезках, существует всего одна точка c , к которой стремятся a_n и b_n .

Проверим, что $c = \sup X$. По построению $\forall x \in X : x \leq b_n \xRightarrow{\text{по теореме о предельном переходе в неравенствах}} x \leq c$. Значит, c — верхняя граница.

Теперь докажем, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : c - \varepsilon < x$. Так как $a_n \rightarrow c$, то $c - a_n < \varepsilon \Rightarrow c - \varepsilon < a_n$. То есть, с некоторого натурального n все члены последовательности будут больше $c - \varepsilon$ при заданном ε . А так как выполнялось свойство 1), то найдётся $x \in [a_n, b_n] \subset X$. \triangleleft

1.4.11 Лемма(ы) о свойствах супремума²

Формулировка

$$D \subset E \subset X \Rightarrow \sup D \leq \sup E \quad (13)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} > 0 : \sup \lambda D = \lambda \sup D \quad (14)$$

$$\sup -D = -\inf D \quad (15)$$

Доказательство

(13) \triangleright Заметим, что $\sup E$ является верхней гранью для D (т.к. $D \subset E$). Следовательно, $\sup D \leq \sup E$ \triangleleft

(14) \triangleright Для всякого $x \in D$ верно, что $x \leq \sup D$. Домножим на $\lambda \Rightarrow \lambda x \leq \lambda \sup D \Rightarrow \sup \lambda D = \lambda \sup D$ \triangleleft

(15) $\triangleright \sup -D : \forall x \in -D \ x \leq \sup -D$. Домножим на $(-1) \Rightarrow -x \geq -\sup -D$. Тогда $-\sup -D$ является нижней границей для $D \Rightarrow -\sup -D = \inf D \Rightarrow \sup -D = -\inf D$ \triangleleft

1.4.12 Теорема о пределе монотонной последовательности (Вейерштрасс in da house)²

Формулировка

Если последовательность x_n монотонна и ограничена сверху (снизу — аналогично), то она имеет конечный предел

Доказательство \triangleright Поскольку x_n ограничена, то $\exists M = \sup E$, причём $\forall \varepsilon > 0 \exists x_n : M - \varepsilon < x_n$.

Так как она ещё и монотонна, что $\forall n \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} : x_N \geq x_n$. Mix it!

$$\forall \varepsilon > 0 : M - \varepsilon < x_n \leq x_N \leq M < M + \varepsilon$$

Получается, что в ε -окрестности точки M лежит бесконечно большое количество элементов $\{x_n\} \Rightarrow M$ — предел последовательности. \triangleleft

1.4.13 Определение числа e , соответствующий замечательный предел²

Формулировка

$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится

Доказательство

Заведём $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(n+1)}$. Очевидно, что эта последовательность ограничена снизу единичкой.

Но это ещё не всё! Она ещё и убывающая. Докажем!

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1} \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} \\ &\geq_{\text{по неравенству Бернулли}} \left(1 + \frac{n+1}{n^2-1}\right) \frac{n-1}{n} = 1 \end{aligned}$$

Ура, монотонна + ограничена \Rightarrow имеет предел. А по теореме об арифметических свойствах предела $x_n = \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}}$ и x_n имеет предел.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

1.4.14 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве, норма, порождённая скалярным произведением¹

1.4.14.1 Неравенство Коши-Буняковского

Формулировка:

$|(a, b)|^2 \leq (a, a) \cdot (b, b), a, b \in X$ (линейное пространство).

Доказательство:

$$(a + \lambda b, a + \lambda b) = \lambda(a, b) + (a, a) + \lambda(b, a) + \lambda^2(b, b) = (a, a) + 2\lambda(a, b) + \lambda^2(b, b)$$

$$\square \lambda = -\frac{(a, b)}{(b, b)}$$

$$(a, a) - \frac{2(a, b)^2}{(b, b)} + \frac{(a, b)^2}{(b, b)} = (a, a) - \frac{(a, b)^2}{(b, b)} = \frac{(a, a)(b, b) - (a, b)^2}{(b, b)}$$

Т.к. $(a + \lambda b, a + \lambda b) \geq 0$ и знаменатель $(b, b) \geq 0$, то и числитель $((a, a)(b, b) - (a, b)^2 \geq 0) \Rightarrow (a, a)(b, b) \geq (a, b)^2$

1.4.14.2 Норма, порождённая скалярным произведением

Формулировка:

$p(a) = \sqrt{(a, a)}$ — норма.

Доказательство:

1. $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = \theta$. Очевидно из свойств скалярного произведения.
2. $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$. Так же очевидно.
3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$. $\|a + b\| = \sqrt{(a + b, a + b)} \cdot \|a + b\|^2 = (a + b, a + b) = (a, a) + (a, b) + (b, a) + (b, b) \leq (a, a) + \sqrt{(a, a)}\sqrt{(b, b)} + \sqrt{(a, a)}\sqrt{(b, b)} + (b, b) = (a, a) + 2\sqrt{(a, a)}\sqrt{(b, b)} + (b, b)$.
 $(\|a\| + \|b\|)^2 = (a, a) + 2\sqrt{(a, a)}\sqrt{(b, b)} + (b, b)$

1.4.15 Леммы о непрерывности скалярного произведения и покоординатной сходимости в \mathbb{R}^n

1.4.15.1 Непрерывность скалярного произведения

Формулировка:

X — линейное пространство со скалярным произведением. \exists норма, порождённая скалярным произведением.

$$x_n \rightarrow x_0$$

$$y_n \rightarrow y_0$$

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x_0, y_0)| &= |(x_n, y_n) - (x_0, y_n) + (x_0, y_n) - (x_0, y_0)| \leq \\ &\leq |(x_n, y_n) - (x_0, y_n)| + |(x_0, y_n) - (x_0, y_0)| = |(x_n - x_0, y_n)| + |(x_0, y_n - y_0)| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \\ &\leq \underbrace{\|x_n - x_0\|}_{\text{б.м.}} \cdot \underbrace{\|y_n\|}_{\text{огр.}} + \underbrace{\|x_0\|}_{\text{огр.}} \cdot \underbrace{\|y_n - y_0\|}_{\text{б.м.}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

1.4.15.2 Покоординатная сходимость в \mathbb{R}^n

Формулировка:

$x_k^{(n)}$, где (n) — индекс последовательности, $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ — номер координаты в \mathbb{R}^m . Метрика Евклидова.

$$x^{(n)} \rightarrow a \Leftrightarrow \forall k \quad x_k^{(n)} \rightarrow a_k$$

Доказательство:

Common:

$$\forall k |x_k - a_k| \stackrel{1 \text{ слагаемое}}{\leq} \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - a_k)^2} \leq \sqrt{m} \max_{k=1}^m (x_k - a_k)$$

\Rightarrow

$$\forall k |x_k - a_k| \stackrel{1 \text{ слагаемое}}{\leq} \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - a_k)^2} \xrightarrow{\text{метрика}} 0 \Rightarrow \forall k x_k \rightarrow a_k$$

←

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - a_k)^2} \leq \sqrt{m} \max_{k=1}^m |x_k - a_k| \xrightarrow{\text{все слагаемые} \rightarrow 0} 0$$

2 Период 2 (Мезозойский)

2.1 Важные определения

2.1.1 Определения предела отображения (3 шт)²

1. По Коши на $\varepsilon - \delta$ языке:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{a\} : \rho_X(a, x) < \delta : \rho_Y(f(a), A) < \varepsilon$$

2. По Коши на языке окрестностей:

$$\forall V_A \exists \dot{V}_a : F(V_a \cap D) \subset V_A$$

3. По Гейне на языке последовательностей:

$$\forall \{x_n\}, x_n \in D \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a : f(\{x_n\}) \rightarrow A$$

TL;DR отсюда следует и определение предела *функции*: Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ — предельная точка $D, A \in \mathbb{R}$.

Тогда A — предел функции f в точке a .

2.1.2 Компактное множество²

Если множество $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, то семейство множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется *покрытием* множества K . Если при этом все множества G_α ещё и открытые, то такое покрытие называют открытым.

Подмножество K метрического пространства X называется *компактным*, если из любого открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.

$$\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A} : K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha \text{ — открытые в } X, \exists \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k}$$

2.1.3 Непрерывное отображение (4 определения)¹

$$f : D \subset X \rightarrow Y$$

1. Дешёвое: существует конечный предел в точке x_0 и равен образу в этой точке (работает только для предельных точек)
2. $\varepsilon - \delta$: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{x_0\} : \rho_X(x, x_0) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. Окрестности: $\forall V_{f(x_0)} \exists \dot{V}_{x_0} : \forall x \in \dot{V}_{x_0} \implies f(x) \in V_{f(x_0)}$
4. Последовательности: $\forall \{x_n \in D \setminus \{x_0\}\} \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

2.1.4 о маленькое²

Пусть X — метрическое пространство, $f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}), a$ — предельная точка D , и тогда если $\exists \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) : f(x) = \varphi(x)g(x)$, причём $\exists V_a$ такая что $\varphi(V_a \cap D)$ — бесконечно малая при всех допустимых x , то тогда говорят что $f(x)$ бесконечно малая по сравнению с $g(x)$ при $x \rightarrow a$.

2.1.5 Эквивалентные функции, таблица эквивалентных²

Пусть X — метрическое пространство, $f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, a — предельная точка D , и тогда если $\exists \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}), : f(x) = \varphi(x)g(x)$, — при всех $x \in V_a \cap D$, то тогда говорят что $f(x)$ эквивалентна по сравнению с $g(x)$ при $x \rightarrow a$. ($\varphi(x) \rightarrow 1$)

$$\sin x \approx \arcsin x \approx \tan x \approx \arctan x \approx e^x - 1 \approx x$$

при $\varphi \rightarrow 1$.

2.1.6 Функция, дифференцируемая в точке¹

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$

Есть 2 определения:

1. Если $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = k \in \mathbb{R}$, то f дифференцируема в x_0 , а k — производная в точке x_0
2. Если $\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$, то f дифференцируема в x_0 , а A — производная в точке x_0 . $o(x - x_0)$ означает, что при приближении x к x_0 погрешность формулы $\rightarrow 0$

2.1.7 Производная¹

Имхо, всё уже определено в Функция, дифференцируемая в точке¹

2.2 Определения

2.2.1 Топологическое пространство, топология²

X — множество, тогда *топологическим пространством* называется пара множество — система его подмножеств (X, W) , если выполнены следующие условия ($W \subset 2^X$):

1.

$$\emptyset, X \in W$$

2.

$$\forall \{G_k\}_{k=1}^n \bigcap_{k=1}^n G_k \in W$$

3.

$$\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in W$$

Тогда видно, что элементы W — **открытые множества**.

Примеры:

$W = \{\emptyset, X\}$ — антидискретная топология

$W = 2^X$ — дискретная топология

Задать топологию в $X \Leftrightarrow$ задать систему подмножеств W , удовлетворяющую вышеприведённым свойствам.

Окрестностью точки в топологическом пространстве называют открытое множество, содержащее эту точку.

2.2.2 Топологическое определение предела последовательности²

Казалось бы, у нас тут определение, но как бы не так! ☺

X, Y — топологические пространства. $f : X \rightarrow Y, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Тогда $\forall U_L^* \exists V_a^* : \forall x \in V_a^* : f(x) \in U_L^*$

У вас может сложиться ощущение, чем же это отличается от обычного предела отображения по Коши в терминах окрестностей? А вот чем! Тут вместо обычных окрестностей использованы топологические окрестности (открытые множества вокруг точки)!

Но это был бы не матан, если бы мы что-то не доказали. Поэтому докажем эквивалентности этого определения и обычного определения в терминах окрестностей:

$\forall U_L \exists V_a : \forall x \in V_a : f(x) \in U_L$

▷

⇒

Так как наши окрестности в топологическом определении — просто какие-то открытые множества, мы можем всегда применять логическую подмену: будем считать, что обычные окрестности — просто открытые шары. Тогда из любого открытого шарика с центром в точке a (внутренней) можно выдрать открытый шарик (т.к. по определению он входит туда с какой-то окрестностью).

Тогда валидно взять $U_L^* = U_L$ и $\forall V_a^* \exists V_a \subset V_a^*$ и тогда наше определение сведётся к обычному по Коши.

←

То же самое: нам даны теперь не открытые множества, а открытые шары (окрестности). Так давайте возьмём любое открытое множество вокруг нашей окрестности и всё сойдётся.

◁

2.2.3 Метризуемое топологическое пространство²

Метризуемое топологическое пространство — такое пространство, когда можно задать метрику на X и при этом все условия существования топологического пространства останутся валидными (все открытые множества останутся открытыми в смысле этой метрики). (топология которого порождена этой метрикой)

2.2.4 Секвенциальная компактность²

Пространство называется *секвенциально компактным*, если из любой его последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

K — секвенциально компактно $\Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset K \exists k_1, k_2, \dots (k_i \in \mathbb{N} \text{ и возрастает}) : x_{k_i} \rightarrow_{i \rightarrow \infty} x_0 \in K$

2.2.5 Предел по множеству²

$f : D \subset X \rightarrow Y, D_1 \subset D, a$ — предельная точка D_1

Тогда предел по множеству D_1 в точке $a : \lim_{x \rightarrow a} f|_{D_1}(x)$

2.2.6 Односторонние пределы¹

Это предел при $x \rightarrow x_0$ слева (то есть предел на $D \cap (\infty, x_0)$ (note: без самой x_0). Обозначают $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0}$

Справа аналогично

2.2.7 Непрерывность слева¹

Это непрерывность, в которой забыли на предел справа. То есть отображение непрерывно на $D \cap (-\infty, x_0]$. Сама x_0 тут включена, т.к. всё-таки предел должен быть ей равен для обеспечения непрерывности.

2.2.8 Разрыв, разрывы первого и второго рода¹

Разрыв — нарушение условия непрерывности. Есть разные:

1. Устранимые разрывы (1 рода, где просто какая-то точка тупо выколота, а дальше всё непрерывно, без скачков), пределы слева и справа равны, но не равны $f(x_0)$
2. Скачки (1 рода, односторонние пределы конечны, но не равны)

3. *Атомный пиздец* (2 рода, как минимум 1 односторонний предел не существует/бесконечен)

2.2.9 О большое²

Пусть X — метрическое пространство, $f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, a — предельная точка D , и тогда если $\exists \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) : f(x) = \varphi(x)g(x)$, причём $\exists V_a$ такая что $\varphi(V_a \cap D)$ — ограничена при всех допустимых x , то тогда говорят что $f(x)$ ограничена по сравнению с $g(x)$ при $x \rightarrow a$.

2.2.10 Асимптотически равные (сравнимые) функции²

Пусть X — метрическое пространство, $f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x \in D$ или $x \rightarrow x_0$

Тогда если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$, то тогда такие функции называют *сравнимыми* ($f \asymp g$)

2.2.11 Асимптотическое разложение²

Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, x_0 — предельная точка D , $f : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и на ней задана конечная или счётная система функций, каждая из которых бесконечно мала по сравнению с предыдущей.

$$k \in [1, 2, \dots, n] \text{ или } k \in \mathbb{Z}_+ \quad g_k = o(g_{k-1}), x \rightarrow x_0$$

$$f(x) = \sum_k^n c_k g_k(x) + o(g_n(x))$$

Причём, чем больше n , тем точнее разложение.

2.2.12 Наклонная асимптота графика¹

Асимптоты бывают вертикальными (когда есть бесконечный предел в конечной точке), горизонтальными (когда есть конечный предел в бесконечности) и наклонными.

Всё определение в том, что наклонные асимптоты можно задать классической функцией вида $y = kx + b$.

Для общего развития: это можно даже посчитать:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx$$

2.2.13 Касательная прямая к графику функции¹

Это банально уравнение прямой в точке, где угловой коэффициент — это производная:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2.3 Важные теоремы

2.3.1 Теорема о характеристике компактов в \mathbb{R}^{m1}

Формулировка

Эти определения эквивалентны:

1. K ограничено и замкнуто
2. K компактно
3. Из любой последовательности в K можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой $\in K$

Доказательство

$1 \Rightarrow 2 \triangleright$ Если K ограничено, то существует замкнутый параллелепипед, в который можно его засунуть. По простейшим свойствам компактов, замкнутое подмножество компакта компактно, а сам параллелепипед компактен по лемме. \triangleleft

$2 \Rightarrow 3 \triangleright \{x_n\}_{n=1}^\infty \in K$ - какая-то последовательность. Рассмотрим область значений этой последовательности D . Если она конечна, то мы можем выбрать стационарную подпоследовательность (когда-то же значения начнут повторяться).

Если она бесконечна, то рассмотрим предельные точки K . Если они есть, то они в ней содержатся (remember, K компактно \Rightarrow замкнуто). Пойдём от противного: если их нет (а D бесконечна), то мы имеем дело с бесконечным числом изолированных точек, что уже звучит жестоко.

А теперь главный мув: мы сможем найти такое открытое покрытие множества, что каждая такая изолированная точка будет покрыта своим персональным множеством (оно будет открыто, т.к. окрестность этой точки нам включать можно, но в нём будет только сама эта точка). Поскольку у нас их бесконечное число, то конечного подпокрытия не существует 0_0 . Противоречие!

Так, а что если предельные точки есть? Ну так всё просто - уменьшаем ϵ и в новой уменьшенной окрестности добавляем точку последовательности. Получается, она как раз к этой точке и стремится \triangleleft

$3 \Rightarrow 1 \triangleright$ Докажем от противного:

Пусть K неограниченно. Тогда $\exists \{x_n\} \rightarrow \infty$. Мы знаем, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности стремится туда же. $\infty \notin x_n$. Противоречие!

Пусть K незамкнуто. Тогда $\exists a$ — предельная точка, $\notin K$. Тогда $\exists \{x_n\}$, стремящаяся к этой предельной точке. Такая же проблема. \triangleleft

2.3.2 Теорема о пределе монотонной функции¹

Формулировка

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Рассмотрим предельную точку $x_0 \in (-\infty, +\infty]$. Левая не включена, а правая включена, т.к. мы хотим рассмотреть левый предел на \mathbb{R} без черты. (Для правого всё аналогично).

1. Если f возрастающая и ограничена сверху на $(-\infty, x_0) \cap D$, то существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0-0}$.

2. Если f убывающая и ограничена снизу на $(-\infty, x_0) \cap D$, то существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0}$.

Доказательство

▷

$$D_1 := (-\infty, x_0) \cap D$$

На самом деле, то, что мы отрезали всё, что справа от x_0 (левый предел) — это нам сильно поможет, т.к. мы теперь можем тупо взять \sup и доказать, что он и является нашим пределом.

$$\exists k := \sup_{x \in D_1} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists a \in D_1 : f(a) \in (k - \varepsilon, k)$$

Ну а поскольку f монотонно возрастает, $\forall x \in (a, x_0) \quad f(x) \in (k - \varepsilon, k)$

Следим за руками: мы только что для какого-то ε предъявили дельту ($|a - x_0|$), внутри которой выполняется условие предела. Поздравляю всех, мы нашли предел!

◁

2.3.3 Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов. Таблица эквивалентных²

Формулировка

X — метрическое пространство, $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, x_0 — предельная точка D .

$$f(x) \sim \tilde{f}(x), \quad g(x) \sim \tilde{g}(x) \quad x \rightarrow x_0$$

Тогда справедливо следующее:

1.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

2. Если x_0 — предельная точка области определения $\frac{f}{g}$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

Доказательство

▷

По определению эквивалентности, $f = \varphi \tilde{f}$ и $g = \psi \tilde{g}$, где на неких V_{x_0} и U_{x_0} : φ и ψ стремятся к 1. Тогда на $W_{x_0} = V_{x_0} \cap U_{x_0}$ φ и ψ стремятся к 1. Значит, на $W_{x_0} \cap D$ выполняется $fg = (\varphi\psi)\tilde{f}\tilde{g}$. Тогда по теореме об арифметических свойствах предела, предел $\lim_{x \rightarrow x_0} fg = A$ (если существует). Аналогично, $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}\tilde{g} = A$ (если существует, однако верно и если и там и там не существует). Для частного — то же самое, только $W_0 \cap D$ надо ещё сузить, чтобы $\varphi\psi$ не обращалось в 0.

◁

2.3.4 Теорема о топологическом определении непрерывности²

Формулировка

X, Y — топологические пространства, $f : X \rightarrow Y$.

Отображение непрерывно \Leftrightarrow прообраз любого открытого множества открыт. $\forall G \in Y : f^{-1}(G)$ — открытое множество в X .

Доказательство

▷

⇐

Если прообраз пуст, то всё ништяк, т.к. открытое множество — открытое. Если же не пустое, то $f(x) = y$, если $y \in G$, то $x \in f^{-1}(G)$. Значит, по определению непрерывности отображения в точке x в терминах окрестностей $\forall V_y \exists \dot{V}_x : f(\dot{V}_x \cap D) \subset V_y$. Тогда по нашим условиям, $V_y \subset G$, т.к. y — внутренняя, то есть входит с окрестностью. Тогда, $\dot{V}_x \subset f^{-1}(V_y) \subset f^{-1}(G) \Rightarrow f^{-1}(G)$ — открытое.

⇒

Пусть $f(x_0) = y$, тогда $\forall V_y$ — открытое, тогда $f^{-1}(V_y)$ — тоже открытое и содержит x_0 (только что доказали). Значит, $\forall V_y \exists \dot{V}_{x_0} : f(\dot{V}_{x_0} \cap D) \subset V_y$. Тогда по определению, f — непрерывно.

◁

2.3.5 Теорема Вейерштрасса о непрерывном образе компакта. Следствия²

Формулировка

X, Y — метрические пространства. $f : X \rightarrow Y$, f — непрерывно на X . Тогда, если X — компактен, то и $f(X)$ — компакт.

Доказательство

▷

Пусть $f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, где G_α — открыты в Y . По теореме о топологическом определении непрерывности, $f^{-1}(G_\alpha)$ — открытое. Так как X — компактен, то среди прообразов множеств этого открытого покрытия $f^{-1}(G_\alpha)$ мы сможем выбрать конечное подпокрытие X . А раз сможем выбрать конечное подпокрытие, состоящее из прообразов, то и конечное покрытие из образов тоже сможем. Значит, из первоначального открытого покрытия образа $f(X)$ возможно выбрать конечное подпокрытие. А значит, что $f(X)$ — компактен.

◁

Следствия

1. Непрерывный образ замкнут и ограничен (а вот и Джонни!) по характеристикам компактов (наверное)
2. **(1 теорема Вейерштрасса):** Функция, непрерывная на отрезке — ограничена.
3. X — компактно. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, f — непрерывно на X . Тогда $\exists \min_{x \in X} f(x), \max_{x \in X} f(x)$

Доказательство

Ну, во первых, $f(X)$ — компактно, а, следовательно, замкнуто и ограничено. Логично, что $\exists \sup f(X) = b$. Осталось проверить, что $\max = b$. $b \in f(X)$ т.к. оно замкнуто. Теперь

докажем, что супремум равен максимуму. По техническому определению супремума, $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n : b - \frac{1}{n} < x_n \leq b$. (тут мы взяли вместо $\varepsilon : \frac{1}{n}$, видимо, просто для удобства. Раз для этой херни всё сломается — то для произвольного ε уж и подавно). Ну и вот, по построению и по теореме о двух городских, x_n стремится к b . Получается, что в замкнутом множестве действительно максимум есть и он равен супремуму. Для минимума аналогично.

4. **(2 теорема Вейерштрасса):** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f — непрерывное на X , $\exists \min_{x \in X} f(x), \max_{x \in X} f(x)$

2.3.6 Теорема Больцано–Коши о промежуточном значении¹

Формулировка

$f \in C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$

$$\forall C \in (A, B) \exists c \in (a, b) : f(c) = C$$

Доказательство

Бинпоиск)

Возьмём $c := \frac{b+a}{2}$. Рассмотрим $[a, c]$ и $[c, b]$. Если $f(c) = C$, то мы выиграли.

Иначе, если $f(c) > C$, возьмём $c' := \frac{c-a}{2}$, рассмотрим $[a, c']$

Иначе, если $f(c) < C$, возьмём $c' := \frac{b-c}{2}$, рассмотрим $[c', b]$

Продолжим этот процесс рекурсивно. Если мы искомой точки не найдём никогда, мы получим последовательность стягивающихся отрезков $\{[a_n, b_n]\}$. Для каждого из них верно то, что $a_n < c < b_n$. По теореме Кантора, у их пересечения есть единственная общая точка. Следовательно, эта точка и есть искомая $c : f(c) = C$

2.3.7 Теорема о непрерывности монотонной функции. Следствие о множестве точек разрыва¹

Формулировка

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна

1. f не может иметь разрывов второго рода
2. $f(\langle a, b \rangle)$ промежуток $\Leftrightarrow f$ непрерывна

Доказательство

1. \triangleright Итак, не умаляя общности положим, что f возрастает, и (также не умаляя общности) докажем существование левого предела в точке $x_0 \in (a, b)$

Возьмём точку $x_1 \in (a, x_0)$. Зачем? Чтобы потом оценить снизу конечным числом, без бесконечностей. + понадобится во 2 пункте.

По теореме о пределе монотонной функции (она у нас ограничена сверху на (a, x_0)), \exists конечный левый предел $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-)$

Получается, $f(x_1) \leq f(x_0-) \leq f(x_0)$ (сделали предельный переход). Вообще эта строчка вроде не особо нужна, т.к. мы уже как бы доказали, что есть конечный односторонний предел.

Аналогично доказывается правый предел. \Rightarrow правого разрыва не существует. \triangleleft

2. $\triangleright \Leftarrow$ Уже доказано в Теореме о сохранении промежутка¹

\Rightarrow

Ну, положим она таки не непрерывна. Тогда $\exists x_0 : \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$ (опять не умаляя общности положим, что проблема именно с левым пределом. Для правого всё аналогично.

По монотонности мы знаем, что $\forall x < x_0 \quad f(x) \leq f(x_0)$. Ну а т.к. множество значений — промежуток, то $\forall y \in (f(a), f(x_0)) \exists x \in (a, x_0) : f(x) = y$.

То, что левый предел конечен мы уже знаем. По монотонности, если он не равен $f(x_0)$, то он $< f(x_0)$

Отлично, теперь у нас $f(x_1) < f(x_0-) < f(x_0)$. Возьмём какой-нибудь $y \in (f(x_0-), f(x_0))$ (он существует по аксиоме Архимеда). И теперь давайте проверим, в какой части нашего интервала области значений он лежит:

Попробуем $\langle a, x_0 \rangle$. Получим промежуток $\langle f(a), f(x_0-) \rangle$. **ОЙ!** Но ведь y строго $> f(x_0-)$

Так, у нас осталось попробовать промежуток $[x_0, b]$. Получим $[f(x_0), f(b)]$. **ОЙ!** y снова потерялся, т.к. он $< f(x_0)$

Делаем вывод: мы покрыли всю область определения и значений в виде интервала, но наш y туда не вошёл ☹☹☹

Получили противоречие, следовательно $f(x_0-) = f(x_0)$. Для правого всё то же самое. \triangleleft

2.3.8 Теоремы Лагранжа и Коши. Следствия об оценке приращения и о пределе производной²

Формулировка

Лагранж:

$f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, непрерывна и дифференцируема на (a, b) . Тогда $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Коши:

$f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, непрерывны и дифференцируемы на (a, b) , $g' \neq 0$ на (a, b) . Тогда $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство

\triangleright

$F(x) = f(x) - kg(x)$. Подберём k , чтобы $F(a) = F(b)$.

$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \Rightarrow k = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$, причём $g(a) - g(b)$ не равно нулю по условию и по теореме Ролля (иначе производная обращалась бы в ноль). Тогда по теореме Ролля для $F \exists c \in (a, b) : F'(c) = 0 \Rightarrow F'(c) = f'(c) - kg'(c) = 0 \Rightarrow k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

\triangleleft

Следствия

Условия все те же

1. Если $|f'(x)| \leq M$, то $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$

Доказательство: врубам Лагранжа: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Rightarrow |f(b) - f(a)| = |f'(c)| * |b - a| \leq M * |b - a|$

2. Если $f : [x_0, x_0 + h]$, дифференцируема и непрерывна на $[x_0, x_0 + h]$, $\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = A \in \mathbb{R}$, тогда $\exists f'_+(x_0) = A$

Доказательство: $\Delta > 0 : f'_+(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} f'(c_\Delta) = A$, где $x_0 < c_\Delta < x_0 + \Delta$

2.4 Теоремы

2.4.1 Теорема об открытых и замкнутых множествах в пространстве и в подпространстве²

Формулировка

X, Y - ПРОСТРАНСТВА!!!!

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. $D \subset Y \subset X$.

1. D открыто в $Y \Leftrightarrow \exists G$ — открытое в $X : D = G \cap Y$
2. D замкнуто в $Y \Leftrightarrow \exists F$ — замкнутое в $X : F = G \cap Y$

Доказательство

▷

1) \Leftarrow

Пусть дано G — открытое в $X : D = G \cap Y$. Возьмём $a \in D$. Так как G открыто в X , получается, что $\exists V_a^X$. Тогда $V_a^Y = V_a^X \cap Y$ — окрестность a в Y . Получается, a — внутренняя в D . А так как мы выбрали точку a случайно, то D — открытое в Y .

\Rightarrow

$a \in D$, D — открыто в Y , следовательно, существует $V_a^Y = B_a^Y \subset D \subset Y$. Тогда давайте обозначим $G = \bigcup_{a \in D} B_a^X$ (пока непонятно зачем, но скоро станет). Заметим, что G — открытое в X , так как объединяются открытые шары, которые, как известно, открыты. Тогда проверим:

$$G \cap Y = \left(\bigcup_{a \in D} B_a^X \right) \cap Y \underset{\text{законы де Моргана}}{=} \bigcup_{a \in D} B_a^X \cap Y = \bigcup_{a \in D} B_a^Y = D$$

Ура, получилось, всё канает!

2) По доказанному ранее и по связи замкнутых и открытых множеств, замкнутость D в Y равносильна открытости $Y \setminus D$ в Y .

Тогда по доказанному ранее $\exists F$ — замкнутое в $X : F = G \cap Y \Leftrightarrow \exists G$ — открытое в $X : Y \setminus D = G \cap Y$. Заметим, что $Y \setminus D = G \cap Y \Leftrightarrow D = F \cap Y (G = F^c) \triangleleft$

2.4.2 Теорема о компактности в пространстве и в подпространстве²

Формулировка

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. $K \subset Y \subset X$, причём K компактно в Y . Тогда компактность K в Y равносильна компактности в X .

Доказательство

$\Leftarrow \triangleright$ Пусть K компактно в X . Тогда возьмём покрытие множествами V_α такими, что они открыты в Y . Тогда для каждого такого множества будет верно (по предыдущей теореме) $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$, где G_α открыто в X . Тогда:

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Тогда извлечём из G_α конечное подпокрытие : $K \subset \bigcup_{k=1}^n G_\alpha$ Но, тогда по приведённому выше и т.к. $K \subset Y$:

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n (G_\alpha \cap Y) = \bigcup_{k=1}^n V_\alpha$$

Значит, существует конечное открытое подпокрытие K в Y . \triangleleft

$\Rightarrow \triangleright$ Возьмём покрытие K в Y : G_α , причём G_α — открытые в X . По предыдущей теореме $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$, причём V_α открыты в Y . Тогда выберем конечное подпокрытие $Y_{k=1}^n$ (в силу компактности K в Y). А так как $V_k \subset G_k$, то существует открытое конечное подпокрытие в X , следовательно, K компактно в X . \triangleleft

2.4.3 Простейшие свойства компактных множеств²

Формулировка

(X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$

- 1) Если K — компактно, то оно замкнуто и ограничено.
- 2) Если X — компактно, а K — замкнуто, K — компактно.

Доказательство

1) \triangleright Докажем, что K^c — открыто, тогда будет логично, что K — замкнуто. $a \in K^c$, докажем, что a — внутренняя. Для $\forall q \in K$ положим $r = \frac{\rho(a, q)}{2}$ и введём $V_a = B(a, r)$ и $W_q = B(q, r)$. $V_a \cap W_q = \emptyset$. Тогда $\{W_q\}_{q \in K}$ — открытое покрытие компакта K . Извлекаем конечное подпокрытие $\{W_k\}_{k=1}^n$, $K \subset \bigcup_{k=1}^n W_k = W$, причём $\bigcap_{k=1}^n V_k = V$ — окрестность точки A . Но, $V \cap W = \emptyset$, а уж тем более, $V \cap K = \emptyset$. Значит, a — внутренняя точка K^c .

Теперь докажем, что K — ограничено. Возьмём $a \in X$ и рассмотрим покрытие K открытыми шарами $\{B(a, r_i)\}_{i=1}^\infty$. Извлечём из него конечное подпокрытие $\{B(a, r_i)\}_{i=1}^n$. Тогда логично, что K содержится в шаре $B(a, \max_{i=1}^n r_i)$, а, следовательно, ограничено.

\triangleleft

2) \triangleright Возьмём открытое покрытие множества K : $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Логично, что $G_\alpha \cup K^c$ образуют открытое покрытие X (т. к. K^c — открыто, в силу замкнутости K). Извлечём из него конечное подпокрытие $\{G_k \cup K^c\}_{k=1}^n$. Но, оно же и будет конечным открытым покрытием для K ! Значит, оно — компактно \triangleleft

2.4.4 Лемма о вложенных параллелепипедах¹

Формулировка $a, b \in R^m$, $\{[a^{(i)}, b^{(i)}]\}_{i=1}^\infty$ — последовательность вложенных m -мерных параллелепипедов

$$\forall k \in [1, m] \forall i \quad a_k^{(i)} \leq a_k^{(i+1)} \leq \dots \leq b_k^{(i+1)} \leq b_k^{(i)}$$

$$\bigcap_{i=1}^\infty [a^{(i)}, b^{(i)}] \neq \emptyset$$

Доказательство

▷ Тривиально. По аксиоме Кантора, пересечение каждого отрезка (мы рассматриваем по координатно параллелепипеды как набор вложенных отрезков) непусто. Следовательно, пересечение многомерного случая непусто. ◁

2.4.5 Компактность замкнутого параллелепипеда в \mathbb{R}^m

Формулировка

Замкнутый параллелепипед в \mathbb{R}^m компактен.

Доказательство

Sit tunc: Хотим свести к задаче на вложенные параллелепипеды от противного.

▷ Положим, он не компактен. Тогда разобьём его по координатно на пополам (каждое ребро посередине). Получим 2^m параллелепипедов. Верхняя оценка его размеров (диагональ) λ уменьшится в 2 раза.

Поскольку, он некомпактен, существует какая-то из этих частей, не являющаяся компактной. Тогда повторим описанную процедуру с ней рекурсивно и получим бесконечную последовательность вложенных некомпактных параллелепипедов.

Вуаля, предыдущая лемма только что нам говорила, что пересечение этого семейства непусто, а т.к. покрытие его открыто, то любая точка входит вместе с какой-то окрестностью.

А поскольку $\lambda \rightarrow 0$, мы можем подобрать такое N , что $\forall n > N$ вложенный параллелепипед будет полностью покрыт одной этой окрестностью. ◁

2.4.6 Эквивалентность определений Гейне и Коши²

Формулировка

Определения по Коши и Гейне — эквивалентны. (swag)

Доказательство

1) Пусть A — предел f в точке a по Коши. Тогда докажем, что A — также и предел по Гейне. Вспомним определение Коши: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \rho_X(x, a) < \delta : \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$. Тогда давайте подгоним определение по Гейне под условие для δ и тогда по Коши всё будет работать! Таким образом, $\forall \{x_n\}, x_n \in D \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a$. По определению предела **последовательности** (опять по Коши, bruh), $\forall \varepsilon = \delta > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, a) < \delta$. Ура, всё работает! Значит и условие $\rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$ тоже работает, и всё шикарно!

2) У нас есть предел по Гейне. Докажем, что он же и по Коши! Докажем это от противного: пусть это не так. Отрицём определение по Коши, тогда утверждается, что если предела не существует, то $\rho(f(x), A) \geq \varepsilon^*$. Тогда, пусть $\delta = \frac{1}{n}$ для каждого $n \in \mathbb{N} : x_n \in D \setminus \{a\}, \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n} : \rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon^*$ (так как мы отрицнули, это обязано так работать, то есть для каждого нашего δ обязательно найдётся такое n). Давайте теперь рассмотрим, собственно говоря, саму $\{x_n\}$. По теореме о 2 городских $0 < \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n}$ при $x_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} a$. Тогда по Гейне, $f(x_n) \rightarrow A$. Но тогда по определению предела последовательности $\{f(x_n)\}$ по Коши, для ε^* существует такой $n \in \mathbb{N}$, что $\rho(f(x_n), A) < \varepsilon^*$. Опачки, а мы строили диаметрально противоположно. Значит, это туфта, и A таки предел и по Коши!

2.4.7 Единственность предела, локальная ограниченность отображения, имеющего предел, теорема о стабилизации знака²

BASED: X, Y — метрические пространства, $f : D \subset X \rightarrow Y$

2.4.7.1 Единственность предела Формулировка

a — предельная точка D . $A, B \in Y, f(x) \rightarrow_{x \rightarrow a} A$ и $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow a} B \Rightarrow A = B$.

Доказательство

▷

По Гейне. $\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a, f(x_n) \rightarrow A$. По теореме о единственном пределе для последовательностей $f(x_n) \rightarrow A = B$

◁

2.4.7.2 Локальная ограниченность отображения, имеющего предел Формулировка

Существует такая окрестность точки $a \in V_a$, что $f(V_a \cap D) \subset B^Y$

Доказательство

▷

Давайте возьмём $B(A, 1) \subset Y$ и рассмотрим 2 случая. Пусть $a \notin D$, тогда по определению на языке окрестностей найдётся такая \dot{V}_a , что $f(\dot{V}_a \cap D = V_a \cap D) \subset B(a, 1)$. Если же $a \in D$, тогда просто увеличим радиус до $R = 1 + \rho(f(a), A)$ и тогда точно $f(V_a \cap D) \subset B(A, R)$

◁

2.4.7.3 Теорема о стабилизации знака Формулировка

$\exists B \neq A \in Y : \forall x \in \dot{V}_a \cap D : f(x) \neq B$

Доказательство

▷

Ох, хорошо жилось без него, но всё же вспомним старину Коши! $\forall \varepsilon > 0 : \rho(f(x), A) < \varepsilon$. Так возьмём же такой $\varepsilon < \rho(f(x), B)$ и увидим, что всё шикарно работает!

◁

Следствие для \mathbb{R}

$f(x) > 0$ при $A > 0$ (и наоборот для отрицания!)

2.4.8 Арифметические свойства пределов отображений. Формулировка для \mathbb{R} с чертой²

BASED: X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство, a — предельная точка D , $f, g : D \subset X \rightarrow Y$; $A, B \in Y$ $f(x) \rightarrow A, g(x) \rightarrow B$

Формулировка

Все эти пределы существуют при $x \rightarrow a$:

1. $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$
2. $f(x)g(x) \rightarrow AB$
3. $f(x) - g(x) \rightarrow A - B$
4. $\lambda(x)f(x) \rightarrow \lambda A$
5. $||f(x)|| \rightarrow ||A||$
6. для \mathbb{R} $|f(x)| \rightarrow |A|$
7. для \mathbb{R} и $B \neq 0$ $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$

Доказательство

☺☺☺☺

По Гейне!!!! (и доказанным для последовательностей свойствам).

Например, для 1: $\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a$. Тогда $f(x_n) \rightarrow A, g(x_n) \rightarrow B \Rightarrow f(x_n) + g(x_n) \rightarrow A + B$

Остальное аналогично.

(Единственное, нужно отметить, что для (7) важно, что функция определена как минимум на $V_a \cap D$)

Формулировка для $\overline{\mathbb{R}}$

1, 2, 3, 6, 7 — верны также и в $\overline{\mathbb{R}}$, если это имеет смысл (не возникают неопределённости)

2.4.9 Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса¹

Формулировка

В \mathbb{R}^m из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство

▷ Поскольку последовательность ограничена, то \exists замкнутый параллелепипед I , в который мы можем её записать \Rightarrow это параллелепипед компактен (см. Теорема о характеристике компактов в \mathbb{R}^{m1}) $\Rightarrow \forall \{x_n\} \exists \{n_\alpha\} : x_{n_\alpha} \rightarrow a \in I$ ◁

2.4.10 Сходимость в себе и её свойства¹

Формулировка

Последовательность сходится в себе, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, l > N \quad \rho(x_n, x_l) < \varepsilon$$

Синонимы: последовательность Коши, фундаментальная последовательность

Свойства:

1. В любом метрическом пространстве сходящаяся последовательность сходится в себе
2. Но наоборот это работает только в \mathbb{R}^m (сходящаяся в себе сходится)

Доказательство

▷

1.

$$x_n \rightarrow a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, \underset{\text{допишем}}{l} > N \quad \rho(x_n, a), \rho(x_l, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\rho(x_n, x_l) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, x_l) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. *Summary*: Доказать ограниченность, по Больцано-Вейерштрасса найти сходящуюся подпоследовательность, доказать, что исходная тоже сходится по 2 определениям

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, l > N \quad |x_n - x_l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (16)$$

$$\varepsilon := 1, \text{ тогда } B(x_{N+1}, \max(1, x_1, x_2, \dots, x_N)) \supset \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow x_n \text{ огр.} \xRightarrow{\text{ПВБВ}} \exists n_k : x_{n_k} \rightarrow a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K : \forall k > K \quad |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (17)$$

$$M := \max(N + 1, K + 1)$$

Вот здесь важно. Мы выбрали M как индекс ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, для которого верно всё-всё-всё

Т.к. n_k возрастает, первые N элементов как минимум покрывают первые N элементов исходной последовательности.

$n_M \geq n_{N+1} \geq N + 1 \Rightarrow (16)$ выполняется и для x_{n_M} . Подытожим:

$$|x_n - a| \underset{\text{треугольник}}{\leq} |x_{n_M} - x_n| + |x_{n_M} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

P.S. ПВБВ — Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса¹

◁

2.4.11 Критерий Коши для последовательностей и отображений¹

Формулировка

Те же свойства сходимости в себе, но уже про отображения.

$\square X, Y$ — метрическое пространство. Y полное (reminder: это значит, что в нём сходимость последовательности в себе равносильна сходимости к конечному пределу (в обе стороны)).

Критерий Коши утверждает, что отображение $f : D \subset X \rightarrow Y$ сходится в себе \Leftrightarrow сходится к конечному пределу A . Разумеется, в предельной точке a

Доказательство

\Rightarrow

▷

Задача перейти к последовательностям любой ценой. Если бы у нас уже был конечный предел, то сработало бы "по Гейне". Сейчас всё сложнее. Запишем определение "сходимости в себе":

$$\forall \varepsilon > 0 \exists V_a \subset D : \forall x, x' \in V_a \quad \rho(x, x') < \varepsilon$$

Теперь надо как-то получить из этого последовательность прообразов, стремящуюся к a

$$\{x_n\} \rightarrow a$$

Для этой последовательности мы можем найти такое N , что все точки будут лежать в любой окрестности V_a , а значит, расстояние между образами любых 2 элементов этой последовательности будет $< \varepsilon$. Другими словами, последовательность образов $f(x_n)$ и будет сходиться в себе, а там уже всё доказано в Сходимость в себе и её свойства¹

$$\exists N : \forall n > N \quad x_n, x_l \in V_a \Rightarrow \rho(f(x_n), f(x_l)) < \varepsilon \Rightarrow \{f(x_n)\} \text{ сходится в себе}$$

◁

⇐ ▷

Вообще по идее можно проще (в 2 слова): по Гейне :)

$$\forall V_A \subset Y \exists V_a \subset D : \forall x_n, x_l \in V_a \quad f(x_n), f(x_l) \in V_A \\ \rho(f(x_n), f(x_l)) \leq \rho(f(x_n), A) + \rho(f(x_l), A) = \varepsilon$$

◁

2.4.12 Свойства непрерывных отображений: арифметические, стабилизация знака, композиция¹

2.4.12.1 Арифметические

Формулировка

X — метрическое, Y — нормированное, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f, g : D \subset X \rightarrow Y$$

$f + g, f - g, \lambda \cdot f, \|f\|$ непрерывны.

Доказательство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

Теперь арифметические свойства отображений:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0)$$

А это в точности определение непрерывности. Если x_0 предельная — то это всё работает без изменений. А если изолированная, то там вообще можно смотреть тупо на саму точку, т.к. в окрестности всё-равно ничего не определено. Остальная арифметичка аналогично.

2.4.12.2 Стабилизация знака

Формулировка

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\forall x_0 \in D \setminus \{0\} \exists V_{x_0} : \forall x \in V_{x_0} \quad \text{sign } f(x) = \text{sign } f(x_0)$$

Доказательство

По Гейне $x_n \rightarrow x_0 \quad f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Далее вставляем определение на окрестностях для сходящейся последовательности. Говорим, что $\varepsilon := f(x_0)/2$ И получаем такую окрестность, что все элементы лежат по одну сторону от нуля в этой окрестности.

ИМХО у Виныча сложнее

2.4.12.3 Композиция**Формулировка**

X, Y, Z — метрические пространства. $D \subset X, E \subset Y$

$f : D \rightarrow Y, f(D) \subset E, g : E \rightarrow Z, f(x)$ непрерывно в $x_0, g(x)$ непрерывно в точке $f(x_0)$. Тогда $g(f(x))$ Непрерывно в x_0

Доказательство

▷

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow x_n \rightarrow x_0, \quad f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow f(x_0)} g(x) = g(f(x_0)) \Rightarrow y_n \rightarrow f(x_0) \quad g(y_n) \rightarrow g(f(x_0))$$

Заметим, что $f(x_n)$ как раз стремится к $f(x_0)$. Тогда мы можем в качестве y_n взять $f(x_n)$ и всё выполнится: $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$. Это как раз определение по Гейне для того, что мы хотим получить. ◁

2.4.13 Непрерывность композиции и соответствующая теорема для пределов¹**2.4.13.1 Непрерывность композиции**

см. Композиция

2.4.13.2 Предел композиции**Формулировка**

$$f : D \subset X \rightarrow Y, g : E \subset Y \rightarrow Z$$

$$f(D) \subset E$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$$

$\exists U_{x_0} : \forall x \in U_{x_0} \quad f(x) \neq A$ (а вдруг $g(A)$ не определено?)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = B$$

Доказательство

По Гейне)

▷

$$x_n \rightarrow x_0 \quad f(x_n) \rightarrow A$$

$$y_n \rightarrow A \quad g(y_n) \rightarrow B$$

Действительно, в качестве y_n прекрасно подходит $f(x_n)$, т.к. он $\rightarrow A$

$$f(x_n) \rightarrow A \quad g(f(x_n)) \rightarrow B$$

◁

2.4.14 Теорема единственности асимптотического разложения²

Формулировка

Пусть X — метрическое пространство, $f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x_0 \in D$ — предельная точка. $n \in \mathbb{Z}_+$, $k \in [0 : n]$, $g : \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Задана такая система функций $\{g_k\}$ и $\forall V_{x_0} \exists t \in \dot{V}_{x_0} \cap D : g_n(t) \neq$. Тогда если существует асимптотическое разложение по системе функций $\{g_k\}$, то оно единственно. Иными словами, в разложениях

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k g_k(x) + o(g_n(x)) \quad (18)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n d_k g_k(x) + o(g_n(x)) \quad (19)$$

Тогда $c_k = d_k$.

Доказательство

▷

Вот тут мы доказываем странную вещь, я её сам до конца ещё не осознал

Во-первых, $\forall l < r : g_r = o(g_l)$ (по индукции). Во-вторых, обозначим за $E_k = \{x \in D, g_k(x) \neq 0\}$. И тогда если бы $g_k(x)$ обращалось бы в тождественный 0, то и её φ тоже бы обращалось в 0 (из определения о-малого) на $\dot{V}_a \cap D$. И раз оно не обращается (противоречит условию), то для всех kx_0 — предельная точка для E_k .

А тут норм доказательство

Пойдём от противного. А пусть это не так. Тогда возьмём самый маленький $k : c_k \neq d_k$ и вычтем соответствующие уравнения (18) и (19).

$$0 = (c_k - d_k)g_k(x) + o(g_k(x))$$

поделим на $g_k(x)$

$$d_k - c_k = \frac{o(g_k(x))}{g_k} = o(1)$$

Следовательно, $c_k = g_k$ (не существует такого индекса).

◁

2.4.15 Теорема о вписанном n -угольнике максимальной площади²

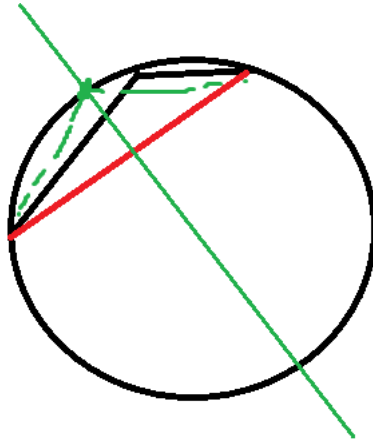
Формулировка

Пусть дана окружность радиуса R . Тогда наибольшее по площади, что мы туда из фигур с n сможем записать, будет правильный n -многоугольник.

Доказательство

▷

Вот возьмём произвольный вписанный многоугольник. Если его стороны не равны, то проведём хорду через вершины точек и выберем точку, максимально удалённую от хорды и лежащую на окружности. По сути, заменим на равные стороны.



Короче, на данном моменте мы убедились, что максимальная площадь вписанного n -угольника достигается при его σ правильности σ . Теперь осталось убедиться, что этот максимум вообще достигается.

Заведём функцию для площади многоугольника через центральные углы:

$$S(x) = S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} R \sin \alpha_i$$

Тогда, заметим, что $0 \leq \alpha_i \leq \pi$, а так же функцию мы сотворили путём проведения преобразований над элементарными функциями (непрерывными) $\sin \alpha \rightarrow R \sin \alpha \rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} R \sin \alpha_i$ то и наша функция является непрерывной (по арифм. свойствам). Заметим также, что множество наших

векторов аргументов ограничено. Так же оно замкнуто (у нас все ограничения нестрогие). Поэтому множество аргументов — компакт. А значит, его образ — тоже и достигает максимума.

◁

2.4.16 Лемма о связности отрезка²

Формулировка

$\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ — отрезок. Тогда неверно, что $\exists V, U \subset \mathbb{R}$ — открытые множества, такие что:

1. $U \cap V = \emptyset, U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$
2. $\langle a, b \rangle \subset U \cup V$
3. $\langle a, b \rangle \cap U \neq \emptyset$ и $\langle a, b \rangle \cap V \neq \emptyset$

Доказательство

▷

От противного. Пусть $\langle a, b \rangle \subset U \cup V, \alpha \in \langle a, b \rangle \cap U, \beta \in \langle a, b \rangle \cap V$. Тогда пусть $\alpha < \beta$ (σ не умоляя общности σ). Теперь положим $t = \sup y : [\alpha, y) \subset U$. Заметим, что множество, из которого мы берём экстремум непустое ($U \neq \emptyset, U$ — открытое $\rightarrow \exists [\alpha, y) \subset B_\alpha \subset U$) и ограниченное ($U \cap V = \emptyset, y \in U \Rightarrow y < \beta$). Причём, раз $t \in [\alpha, \beta) \Rightarrow \langle a, b \rangle$. Если $t \in U \Rightarrow \exists V_t \subset U$, а мы строили множество границ так, что не существует такой окрестности. Если $t \in V$, то $\exists V_t \subset V$. Но тогда не весь промежуток $[\alpha, \beta)$ входит внутрь U , т.к. мешает как раз вот эта V_t . Следовательно, существуют точки, которые не накрываются ни одним отрезком.

◁

2.4.17 Теорема о бутерброде²

Формулировка

Кусок колбасы и хлеба (фигуры $A, B \subset \mathbb{R}^2$) можно разрезать ножом (прямой) на части равной площади.

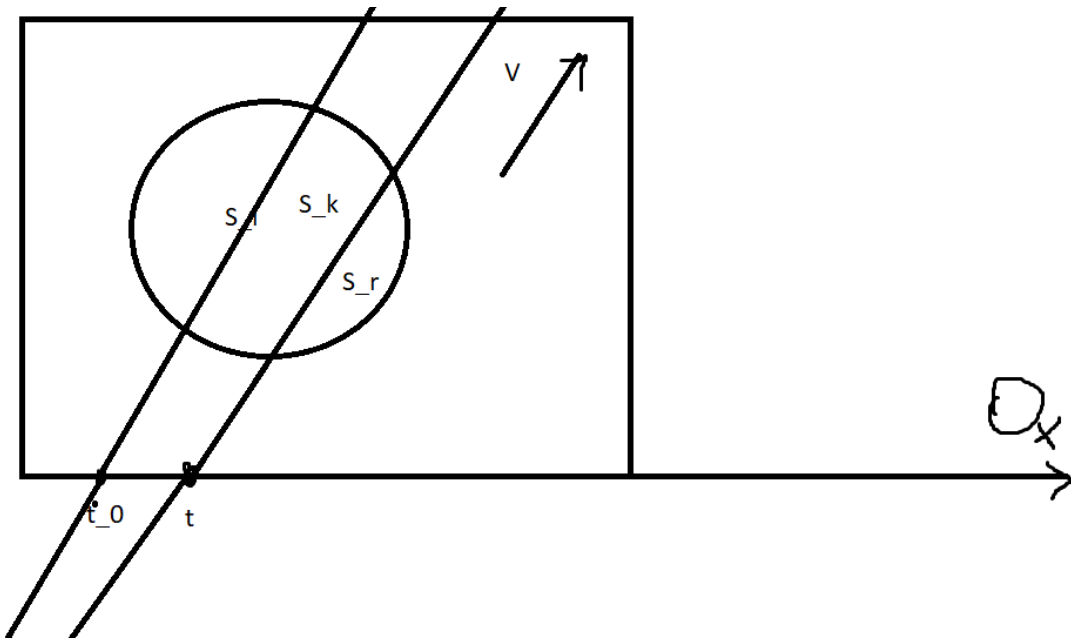
Доказательство

Сформулируем и докажем сначала лемму:

$A \subset \mathbb{R}^2, \vec{V}$ — произвольный вектор. Тогда существует прямая с направлением вектора V , которая делит прямую на 2 равновеликих фигуры.

▷

Давайте заведём числовую ось, причём эта ось пусть будет непараллельна V . Тогда $\forall t \in Ox : S(x) = S_l - S_r$. Будем через каждую точку числовой прямой t будем проводить прямую, параллельную вектору V , и тогда для каждой такой точки будет определена функция как разность площадей левой и правой части фигуры.



Заметим, что $|S(t_0) - S(t)| = |2S_k| \leq (t - t_0)h_{\text{доски}} \Rightarrow S(t)$ — непрерывна, следовательно, между $-S$ и S обязательно найдётся точка, в которой $S(t) = 0$ (по теореме о промежуточном значении).

◁

Теперь введём функцию $g(\varphi) = S_l^B(\varphi) - S_r^B(\varphi)$, это такая функция, которая определена на $\varphi \in [0, 2 * \pi]$ и проводит линию под углом φ к оси координат, причём эта линия делит фигуру A на равновеликие части.

Тогда, заметим что

1. $g(\varphi + \pi) = -g(\varphi)$ (направление меняется, соответственно, меняется понятие лева и права)
2. $g(\varphi_1) - g(\varphi_2) \leq 4 * \frac{1}{2} * d^2 * |\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2|$ (по сути, тоже площадь кусочка) $\Rightarrow g$ — непрерывна.

Тогда по теореме Больццо-Коши о промежуточном значении всё получается!

2.4.18 Теорема о сохранении промежутка¹

2.4.18.1 Лемма

Формулировка

E выпукло $\Leftrightarrow E$ промежуток

Доказательство

\Leftarrow очевидно

\Rightarrow

$$\sup M = \sup E, m = \inf E$$

По определению \sup , в любой окрестности будут элементы множества. Таким образом, $(m, M) \subset E$. Также, поскольку m и M ограничивают выпуклое множество, $E \subset [m, M]$. Таким образом, E — промежуток.

Формулировка

Непрерывный образ промежутка — промежуток.

Доказательство

$f : C(\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R})$

$D := \langle a, b \rangle$, $f(D) = E$. E выпукло по теореме о промежуточном значении (для любого отрезка на промежутке $\langle a, b \rangle$ теорема работает).

Тогда, очевидно, E — промежуток. (по лемме чуть выше)

2.4.19 Теорема Больцано–Коши о сохранении линейной связности¹

Линейная связность

Множество в метрическом пространстве называется линейно связным, когда между любыми 2 точками существует путь.

Формулировка

Непрерывный образ линейно-связного множества линейно-связен

Доказательство

$f : C(X \rightarrow Y)$, X, Y — метрические пространства.

$f(D) = E$. D линейно-связно. $\Rightarrow \forall a, b \exists$ путь $g : C([0, 1] \rightarrow D)$, при этом $g(0) = a, g(1) = b$.

Поскольку образ $g \subset D$, то $\forall x \in [0, 1] \exists f(g(x)) \in E$. При этом $f(g(0)) = f(a), f(g(1)) = f(b)$, то есть это работает для всех точек в D

2.4.20 Описание линейно связных множеств в \mathbb{R}^2

Определения

$\gamma : [a, b] \rightarrow Y$ — метрическое пространство. Тогда γ — путь в м.п. Y .

$E \subset Y$ — метрическое пространство, тогда E называется *линейно связным*, если $\forall A, B \in E \exists \gamma : [a, b] \rightarrow E$ непрерывный, $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$

Формулировка

В \mathbb{R}^2 — линейно связно $\Leftrightarrow E$ — промежуток.

Доказательство

\triangleright

\Leftarrow

Очевидно.

Что, не очевидно? А вот так? $t \in [0, 1], t(B - A) \subset [A, B] \subset \langle a, b \rangle$

\Rightarrow

E — не пустое (пустое — тривиальный случай). Пусть $m = \inf E, M = \sup E$. Проверим, что $(m, M) \subset E$. $t \in (m, M), t \notin E$. Если возьмём $A, B \in E$ такие, что $m \leq A < t < B \leq M$. Но в таком случае, E не будет линейно связанным, т.к. $\exists c : \gamma : (a, b) \rightarrow E, \gamma(c) = t$. Тогда $(m, M) \subset E$.

\triangleleft

2.4.21 Теорема о существовании и непрерывности обратной функции¹

Формулировка

$f : C(\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R})$

f строго монотонна (положим, возрастает)

Тогда $\exists f^{-1}$ и она строго возрастает и непрерывна

Доказательство

\triangleright

1. По определению обратной функции, f обратима, когда является инъекцией. Поскольку $f(\langle a, b \rangle) = \langle m, M \rangle$, где $m = \inf, M = \sup$. Ну по Теорема о сохранении промежутка¹.

Поскольку f строго возрастает, каждое значение на $\langle m, M \rangle$ принимает ровно 1 раз. Тогда это инъекция $\Rightarrow f$ обратима.

2. Строгая монотонность обратной функции крайне очевидна:

$$\forall x_1 > x_0 \quad f(x_1) > f(x_0) \Rightarrow \forall y_1 > y_0 \exists x_1 = f^{-1}(y_1), x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Т.к. f^{-1} — биекция, пара x_1 и y_1 однозначно определена и, следовательно, сохраняется неравенство $x_1 > x_0$

3. По определению обратной функции, она является биекцией $\langle m, M \rangle$ в $\langle a, b \rangle$. Так как она монотонна, а её множество определения и значений — промежутки, то она непрерывна (по Теорема о непрерывности монотонной функции. Следствие о множестве точек разрыва¹, п.2)

\triangleleft

2.4.22 Равносильность двух определений производной. Правила дифференцирования.³

2.4.22.1 Равносильность определений дифференцируемости

Формулировка:

Определения дифференцируемости (внезапно) равносильны

Доказательство.

$2 \Rightarrow 1$ т.е. $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$, где $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ Теперь все это разносим в разные стороны, делим на $x - x_0$ и получаем

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$$

Что равносильно определению 1.

1 \Rightarrow 2 Обратно, обозначим

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A$$

Тогда $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ и выполнено определение 2. \square

2.4.22.2 Производная суммы и разности

Формулировка:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

Доказательство.

$$(f \pm g)' = \frac{(f + g)(x + \Delta x) - (f + g)(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f' \pm g'$$

\square

2.4.22.3 Производная суммы и разности

Формулировка:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x + \Delta x) - (fg)(x)}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x + \Delta x) + \\ &+ f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{f'} (x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

\square

2.4.22.4 Производная частного

Формулировка:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f}{g}(x + \Delta x) - \frac{f}{g}(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{g(x + \Delta x)g(x)} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \\ &\xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

\square

2.4.22.5 Производная композиции

Формулировка:

$$(f \circ g)'(x) = g'(f(x)) * f'(x)$$

Доказательство. Из определения 2 можно записать

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \\ g(y + \Delta y) &= g(y) + g'(y)\Delta y + \beta(\Delta y)\Delta y \end{aligned}$$

где α и β в нуле непрерывны и равны нулю. Во второе уравнение подставим $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = \tau(\Delta x)$

$$\begin{aligned} g(f(x + \Delta x)) &= g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) + \beta(\tau(\Delta x))\tau(\Delta x) = \\ &= g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)\Delta x + \gamma(\Delta x)\Delta x \end{aligned}$$

где

$$\gamma(\Delta x) = g'(y)\alpha(\Delta x) + \beta(\tau(\Delta x))(f'(x) + \alpha(\Delta x))$$

Ясно, что $\gamma(0) = 0$, γ непрерывна в нуле, следовательно, $f \circ g$ дифференцируема в 0 и выполняется требуемое в условии. \square

2.4.22.6 Производная обратной функции

Формулировка: $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

Доказательство. Вот здесь начинается веселье. Из предыдущих теорем курса мы знаем, что f^{-1} существует, определена на P , строго монотонна и непрерывна. Пусть $y = f(x)$, возьмем $\Delta y \neq 0$: $y + \Delta y \in P$, положим $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) = \tau(\Delta y)$. Тогда $\Delta x \neq 0$, $x = f^{-1}(y)$, $x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y)$ и $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$. Составим разностное отношение

$$\frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = \frac{\tau(\Delta y)}{f(x + \tau(\Delta y)) - f(x)}$$

и найдем его предел при $\Delta y \rightarrow 0$. По условию (f - дифференцируема)

$$\frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{f'(x)}$$

Но $\tau(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$ по непрерывности f^{-1} в точке y . Следовательно, по теореме о пределе композиции

$$\frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{1}{f'(x)}$$

\square

2.4.23 Теорема Ферма (с леммой)²

Формулировка (Лемма)

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, дифференцируема и возрастает в т. $x_0 \in (a, b)$. Тогда $f'(x_0) > 0, \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) f(x) < f(x_0)$ и $(x_0, x_0 + \varepsilon) f(x) > f(x_0)$ (строго возрастает).

Доказательство (Лемма)

Во-первых, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0$

Тогда, по теореме о стабилизации знака:

$x \rightarrow x_0 + 0$ (справа), тогда $f(x) - f(x_0) > 0$

$x \rightarrow x_0 + 0$ (слева), тогда $f(x) - f(x_0) < 0$

Сошлось (вблизи x_0).

Формулировка (Теорема)

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, дифференцируема в т. $x_0 \in (a, b), c = \max_{x \in (a, b)} f(x)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство (Теорема)

▷

$$f(x) - f(c) \leq 0$$

$f'(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Заметим, что $x = c + \Delta x$. Тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$

$$\lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f' \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f'(c) \leq 0$$

(Всё дело в знаменателе!!!!)

$$\text{Тогда } 0 \leq f'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(c) = 0$$

◁

2.4.24 Теорема Ролля. Вещественность корней многочлена Лежандра²

2.4.24.1 Теорема Ролля

Формулировка

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, дифференцируема на (a, b) и непрерывна на $[a, b], f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c : f'(c) = 0$

Доказательство

▷

По теореме Вейерштрасса, $\exists x_0 = \min_{x \in [a, b]} f(x), x_1 = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Тогда, по теореме Ферма, если x_0 или x_1 лежит в (a, b) , то нам подходит $c = x_0$ или $c = x_1$. Иначе, если $x_0 = x_1 \Rightarrow \text{const}$. Если не лежит в $(a, b) \Rightarrow x_0 = a, x_1 = b \Rightarrow \text{const}$, тривиально.

◁

Следствие

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывна на $[a, b], f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b)$

2.4.24.2 Вещественность корней многочлена Лежандра

Формулировка

$L_n(x) = ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$ — многочлен Лежандра.

Утверждается, что он имеет n вещественных корней на $(-1, 1)$.

Доказательство

▷

Корень a называется корнем кратности k исходной функции $f(x)$, если $f_1(x) = (x - a)^k f_1(x)$ и $f_1(a) \neq 0$. Заметим, что если a корень кратности k для $f(x)$, то для $f'(x)$ это корень кратности $k - 1$ (доказывается дифференцированием $(x - a)^k f_1(x)$).

Тогда поехали. Для самого многочлена Лежандра существует 2 корня кратности $n : 1, -1$. Если взять производную, то по теореме Ролля $\exists c \in (a, b)$, следовательно, существует ещё один корень. Наши же первоначальные корни остаются корнями уравнения, но их кратность стала по $n - 1$. Тогда всего в сумме у нас получается $2n - 2 + ?$ корней, где $? = 1$, т.к. вообще корней у многочлена первой производной существует не более $2n - 1$. Так продолжаем и дальше, в итоге получаем, что у k -й производной есть k корней. Тогда для производной степени n у многочлена Лежандра n вещественных корней.

◁

2.4.25 Непрерывность синуса и арксинуса, замечательный предел, производная синуса.³

2.4.25.1 Лемма

Формулировка:

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$|\sin x| \leq |x|$$

2.4.25.2 Непрерывность синуса

Формулировка:

Синус непрерывен на \mathbb{R}

Доказательство. $\forall x + 0 \in \mathbb{R}$

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 * \frac{|x - x_0|}{2} * 1 = |x - x_0| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

□

$\arcsin : [-1, 1] \xrightarrow{\text{на}} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ непрерывна по теореме о непрерывности обратной функции

2.4.25.3 Первый замечательный предел

Формулировка:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. При $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Делим это все на $\sin x$ и берем обратные, из-за чего неравенство переворачивается, и получаем

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

т.к. все части этого неравенства — четные функции, то такой переход легитимен. А т.к. $\cos x$ стремится к 1 при $x \rightarrow 0$, то по теореме о зажатой функции — победа. \square

2.4.25.4 Производная синуса

Формулировка:

$$(\sin x)' = \cos x$$

Доказательство. Пользуемся замечательным пределом выше и непрерывностью косинуса

$$\frac{\sin x + \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos (x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \cos x$$

\square

3 Период 3 (Кайнозойский)

3.1 Важные определения

3.1.1 Множество мощности континуума¹

Множество мощности континуума равномощно $[0, 1] \subset \mathbb{R}$

3.1.2 Разложения Тейлора основных элементарных функций¹

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

3.1.3 Выпуклая функция и касательная^{1 3}

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ - выпуклая \Leftrightarrow

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

Вообще это утверждение эквивалентно неравенству Йенсена. Смысл в том, что мы можем зафиксировать любые 2 точки x и y на указанном отрезке, при чём будет верно то, что если мы соединим их прямой (ну то есть получим хорду из $(x, f(x))$ в $(y, f(y))$), то эта хорда будет выше, либо равна нашей функции (ну то есть функция как-то идёт сначала вниз, а потом начинает расти и пересекает хорду только в точке y).

Аналогично, есть "вогнутая" функция (\Leftrightarrow "выпуклой сверху").

Также, можем ввести "строго выпуклую функцию". Определение такое же, но хорда должна быть строго выше.

3.1.4 Теорема Дарбу. Следствия³

3.1.4.1 Теорема Дарбу

Формулировка: f - дифференцируема на $[a, b] \Rightarrow \forall C \in (f'(a), f'(b)) \exists c \in (a, b) : f'(c) = C$

Доказательство.

1. $f'(a)$ и $f'(b)$ разных знаков, $C = 0$.

НУО $f'(a) < 0 < f'(b)$. Т.к. f непрерывна на $[a, b]$ то по Вейерштрассу $\exists c \in [a, b] : f(c) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$. Если $c \in (a, b)$, то из Ферма $f'(c) = 0$ — победа. Проверим, что $c \neq b$ и $c \neq a$. Если $c = a$, то $\forall x \in (a, b] \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \Rightarrow f'(a) \geq 0$. Противоречие с условием. Аналогично, $c \neq b$

2. Общий случай

НУО $f'(a) < C < f'(b)$. $\varphi(x) = f(x) - Cx$. Тогда

$$\varphi'(a) = f'(a) - C < 0 < f'(b) - C = \varphi'(b)$$

Из 1. $\Rightarrow \exists c \in (a, b) : \varphi'(c) = 0$, т.е. $f'(c) = C$

□

3.1.4.2 Лемма о характеристике промежутков

Формулировка:

$E \subset \mathbb{R}$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. E — промежуток
2. $\forall x, y \in E, [x, y] \subset E$

Доказательство.

1. \Rightarrow 2. Очевидно

2. \Rightarrow 1. Пусть $E \neq \emptyset$. Обозначим $m = \inf E$, $M = \sup E$. Очевидно, $E \subset [m, M]$. Покажем, что $(m, M) \subset E$. Пусть $m < z < M$. Тогда из определения граней $\Rightarrow \exists x, y \in E : x < z < y$. По условию $z \in E$

□

3.1.4.3 Следствие 1

Формулировка:

f — дифференцируема на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f'(\langle a, b \rangle)$ — промежуток.

Доказательство. Следует из леммы о характеристике промежутков

□

3.1.4.4 Следствие 2

Формулировка: Производная дифференцируемой на промежутке функции не может иметь на нем разрывов второго рода

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы о непрерывности монотонной функции

□

3.2 Определения

3.2.1 Классы функций $C^n([a, b])^1$

f называется n -гладкой, если имеет n непрерывных производных (формально, $\forall i = 1 \dots n \exists i$ -ая непрерывная производная)

Класс функций $C^n([a, b])$ - это множество n -гладких функций на $[a, b]$

3.2.2 Производная n -го порядка¹

Пусть есть натуральное n . $f : X \rightarrow Y$ (где X и Y - м.п.) - дифференцируема в интервале (a, b) . Тогда мы можем взять производную $f'(x)$ в этом интервале. Далее индуктивно мы можем рассуждать о полученной производной как о функции.

Такими темпами мы дойдём до $f^{(n)}$, что и называют "производной n -го порядка"

3.2.3 Многочлен Тейлора n -го порядка¹

$$T_n(f, a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

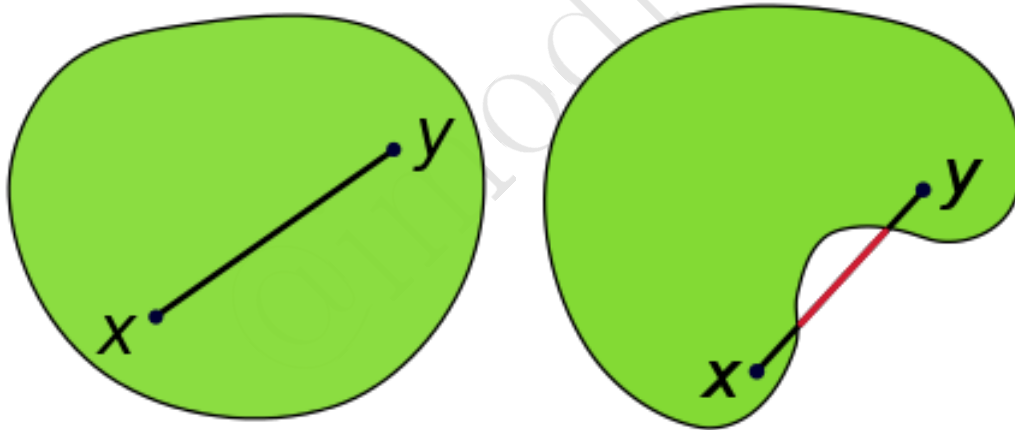
3.2.4 Счётное множество¹

Множество счётно \Leftrightarrow множество равномощно \mathbb{N} . То есть можно установить биекцию между \mathbb{N} и множеством

3.2.5 Выпуклое множество в \mathbb{R}^m ¹

$A \subset \mathbb{R}^m$ - выпуклое множество в \mathbb{R}^m , если

$$\forall x, y \in A, \alpha \in [0, 1] \quad \alpha x + (1 - \alpha)y \in A$$



3.2.6 Надграфик¹

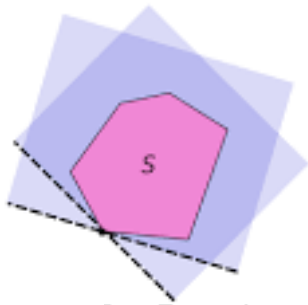
Надграфик функции $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ это множество $\{(x, y) | x \in \langle a, b \rangle, y \geq f(x)\}$

3.2.7 Опорная прямая¹

$A \subset \mathbb{R}^2$ - выпуклое $l \subset \mathbb{R}^2$ - прямая

l - опорная прямая для A , когда выполняется:

1. A содержится в одной полуплоскости относительно l (лежит полностью по одну сторону от прямой)
2. Пересечение прямой и множества непусто ($l \cap A \neq \emptyset$)



3.2.8 Равномерная непрерывность¹

Равномерность непрерывности говорит то, что мы можем для ε найти конкретный δ , который не зависит от аргументов (работает на всей области определения), при котором разность значения функции меньше ε

Формально,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Аналогично, это работает для метрических пространств:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : \rho(x_1 - x_2) < \delta \implies \rho(f(x_1) - f(x_2)) < \varepsilon$$

3.3 Важные теоремы

3.3.1 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано²

Формулировка

Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 n раз, у неё есть многочлен Тейлора $P_n(x)$, тогда $f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство

▷

У нас есть некое *основное свойство многочлена Тейлора*, которое утверждает, что функция и её многочлен Тейлора n степени, а также их производные до n порядка включительно имеют равное значение в точке x_0 . Запомним. Тогда определим остаток $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Перефразируя условие, $R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$. Из непрерывности в точке x_0 также следует, что пределы функции $R_n(x)$ и её производных до n при $x \rightarrow x_0$ порядка равны 0. Супер. Тогда нам по сути нужно доказать, что $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$. По-Лопиталю всё это дело $n - 1$ раз, и получим $\frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(x_0) (=0)}{(x - x_0)^n}$ — а это определение производной $R_n^{(n)}(x) = 0$

◁

3.3.2 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа¹

Определение:

$f \in C^n(a, b)$, $(n + 1)$ раз дифференцируема на (a, b)

$x, x_0 \in (a, b)$. Тогда $\exists c$ между x и x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= f(x) - T_n(f, t)(x) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n \right) \\ \phi(x) &= 0 \\ \phi'(t) &= - \left(f'(t) + \left(-\frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x - t) \right) + \left(-\frac{f''(t)}{1!}(x - t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 \right) + \dots \right) = \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \end{aligned}$$

$\psi(t) := (x - t)^{n+1}$. По Т. Коши $\exists c$ между x и x_0 :

$$\frac{-R_n(f, x_0)(x)}{-(x - x_0)^{n+1}} = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\phi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n}{-(n + 1)(x - c)^n}$$

Тогда $R_n(f, x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0) + \theta(x - x_0)}{n!} (1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}$ - ост. в форме Коши

3.4 Теоремы

3.4.1 Следствие об оценке сходимости многочленов Тейлора к функции. Примеры³

3.4.1.1 Лемма

Формулировка:

Пусть выполнены условия для существования формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа, $M > 0, \forall t \in \langle x, x_0 \rangle |f^{(n+1)}(t)| \leq M$. Тогда

$$|R_{n,x_0}f(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (20)$$

Доказательство. Прямо следует из формы Лагранжа остаточного члена. \square

3.4.1.2 Следствие

Формулировка:

Пусть $f \in C^{(\infty)}\langle a, b \rangle$, и существует $M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ и $t \in \langle a, b \rangle$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(t)| \leq M$. Тогда $\forall x, x_0 \in \langle a, b \rangle$

$$T_{n,x_0}f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad (21)$$

Доказательство. Т.к. $\forall K \in \mathbb{R} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ и (26) выполняется для всех n одновременно, получаем $R_{n,x_0}f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow (21)$ \square

3.4.1.3 Пример 1

Формулировка:

Остаток для e^x

Доказательство. Так как $(e^x)^{(k)} = e^x; (e^x)^{(k)}|_{x=0} = 1$, верны равенства

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1)$$

В частности при $x = 1$

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \quad \theta \in (0, 1)$$

Отсюда получаем оценки

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{\max\{e^x, 1\}}{(n+1)!} |x|^{n+1},$$
$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Следовательно, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

и, в частности,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

□

3.4.1.4 Пример 2

Формулировка:

Остаток для $\sin x$

Доказательство. Из формулы

$$(\sin x)^{(m)} = \sin \left(x + \frac{m\pi}{2} \right)$$

при $k \in \mathbb{Z}_+$

$$(\sin x)^{(2k)}|_{x=0} = 0 \quad (\sin x)^{(2k+1)}|_{x=0} = (-1)^k$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}), \\ \sin x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{\sin \alpha}{(2n+3)!} x^{2n+3} \end{aligned}$$

где $\alpha = \theta x + \frac{(2n+3)\pi}{2}$, $\theta \in (0, 1)$. Отсюда получаем оценку остатка

$$|R_{2n+2,0}(\sin, x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

Поэтому $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

□

3.4.1.5 Пример 3

Формулировка:

Остаток для $\cos x$

Доказательство.

$$(\cos x)^{(m)} = \cos \left(x + \frac{m\pi}{2} \right)$$

$$(\cos x)^{(2k)}|_{x=0} = (-1)^k, \quad (\cos x)^{(2k+1)}|_{x=0} = 0$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\cos \beta}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

где $\beta = \theta x + \frac{(2n+2)\pi}{2}$, $\theta \in (0, 1)$. Отсюда

$$|R_{2n+1,0}(\cos, x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Поэтому, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

□

3.4.1.6 Пример 4

Формулировка: Остаток для $\ln(1+x)$

Доказательство. Т.к. $\forall k \in \mathbb{N}$

$$(\ln(1+x))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad (\ln(1+x))^{(k)}|_{x=0} = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

а $\ln 1 = 0$, получаем

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$$

□

3.4.2 Теорема о свойствах показательной функции¹

Формулировка:

1. $\forall x f(x) > 0; f(0) = 1$
2. $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(rx) = (f(x))^r$
3. Пусть $a := f(1)$, тогда
 $a = 1 \implies f - \text{const}, a > 1 \implies f - \text{возр.}, a < 1 \implies f - \text{убыв.}$
4. Множество значений $f \rightarrow (0, +\infty)$
5. $\tilde{f}(1) = f(1)$, тогда $f = \tilde{f}$

Доказательство:

1. $\exists x_0 \quad f(x_0) \neq 0$
 $f(x_0 + 0) = f(x_0)f(0) \implies f(0) = 1$
 Если $\exists x_1 : f(x_1) = 0 \quad \forall x \quad f(x) = f(x - x_1)f(x_1) = 0$, т.е. $f \equiv 0$
 Тогда $\forall x \quad f(x) = f(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2}) > 0, f(x) \neq 0$

2. (a) $r = 1$

Тривиально

(b) $r \in \mathbb{N}$

$$f(2x) = f(x+x) = f(x)f(x) = f(x^2) \quad (22)$$

$$f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx)f(x) = (f(x))^n f(x) = (f(x))^{n+1} \quad (23)$$

(c) $r \in -\mathbb{N}$

$$1 = f(0) = f(nx + (-n)x) = f(nx)f(-nx) = (f(x))^n f(-nx)$$

(d) $r = 0$

$$f(rx) = f(0) = 1 = (f(x))^0$$

(e) $r = \frac{1}{n}$

$$f(x) = f\left(n \frac{x}{n}\right) = \left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \quad (24)$$

$$f\left(\frac{1}{n}x\right) = (f(x))^{\frac{1}{n}} \quad (25)$$

(f) $r = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$$f(rx) = f\left(x \frac{m}{n}\right) = \left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^m = \left((f(x))^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

3. $a = 1 \quad f(1) = 1 \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = 1^r = 1$

f - непр. и $f(x) = 1$ при $x \in \mathbb{Q} \implies f \equiv 1$

$a > 1$. Тогда $\forall x > 0 \quad f(x) > 1$

$r \in \mathbb{Q}, r > 0 \quad f(r) = r(r * 1) = (f(1))^r = a^r > 1$

Значит $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ берем $r_k \rightarrow x (r_k \in \mathbb{Q})$

$f(r_k) \rightarrow f(x)$, значит $f(x) \geq 1$

$f(x) = f((x-r) + r) = f(x-r) * f(r) > 1$

$\exists r \in \mathbb{Q} : 0 < r < x$

Возр. $x \in \mathbb{R}, h > 0$

$f(x+h) = f(x)f(h)$

$f(h) > 1 \implies f(x+h) > f(x)$

$a < 1$ аналогично.

4. $f(\mathbb{R}) = (\inf f, \sup f)$

$\inf f = 0 \quad \sup f = +\infty$

$f(1) = a > 1$

$a^n, n \in \mathbb{Z}$

5. $\tilde{f}(1) = f(1) \implies \forall r \quad \tilde{f}(r) = f(r)$

$\forall x \quad r_k \rightarrow x$

$\tilde{f}(r_k) = f(r_k)$

$\tilde{f}(r_k) \rightarrow \tilde{f}(x); f(r_k) \rightarrow f(x) \implies f(x) = \tilde{f}(x)$

3.4.3 Критерий монотонности функции. Следствия³

Формулировка:

Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b \rangle$ и дифференцируема на (a, b) . Тогда f возрастает на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0$

Доказательство.

\Rightarrow Пусть f возрастает, $x \in (a, b)$, тогда $\forall y \in (x, b) f(y) \geq f(x)$, тогда

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{y \rightarrow x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

\Leftarrow Пусть $\forall x \in \langle a, b \rangle f'(x) \geq 0$. Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$. Покажем, что $f(x_1) \leq f(x_2)$. Из Лагранжа $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$$

Для убывающей функции все точно также, только вместо f возьмем $(-f)$ \square

Формулировка (следствие 1, Критерий постоянства функции):

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, тогда f постоянна на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f \in C\langle a, b \rangle$ и $\forall x \in (a, b) f'(x) = 0$

Доказательство.

\Rightarrow Очевидно.

\Leftarrow Из теоремы следует, что f одновременно и возрастает и убывает $\Rightarrow f$ постоянна. \square

Формулировка (следствие 2, Критерий постоянства функции): Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b \rangle$ и дифференцируема на (a, b) . Тогда f строго возрастает на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow$:

1. $\forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0$
2. $f'(x)$ не тождественный 0 на любом промежутке

Доказательство.

\Leftarrow Из следствия 1 условие 2) означает, что f не постоянна ни на каком интервале \Rightarrow из строго возрастания следует 2), из теоремы следует 1)

$\Rightarrow \forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ — возрастает. Если возрастание нестрогое, то $\exists x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : x_1 < x_2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f$ постоянна на $[x_1, x_2]$. Противоречие с 2). \square

3.4.4 Описание выпуклости с помощью касательных³

Формулировка:

Пусть f дифференцируема на $\langle a, b \rangle$. Тогда f выпукла вниз на $\langle a, b \rangle$ в том и только том случае, когда график f лежит не ниже любой своей касательной, то есть $\forall x, x_0 \in \langle a, b \rangle$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (26)$$

Доказательство.

\Rightarrow Пусть f выпукла вниз, $x_0, x \in \langle a, b \rangle$. Если $x > x_0$, то по лемме о трех хордах $\forall \eta \in (x_0, x)$

$$\frac{f(\eta) - f(x_0)}{\eta - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Устремим η к x_0 справа, получаем неравенство

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

что равносильно (26). Если $x < x_0$, то по лемме о трех хордах $\forall \xi \in (x, x_0)$

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Устремляя ξ к x_0 слева, получаем неравенство

$$f'(x_0) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

равносильное (26)

\Leftarrow Пусть $\forall x, x_0 \in \langle a, b \rangle$ верно неравенство (26). Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : x_1 < x_2$, и $x \in (x_1, x_2)$. Применяя (26) сначала к точкам x_1 и x , а затем — к x_2 и x , получаем

$$f(x_1) \geq f(x) + f'(x)(x_1 - x), \quad f(x_2) \geq f(x) + f'(x)(x_2 - x)$$

\Leftrightarrow

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq f'(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x_1}$$

Крайние части равносильны (26) □

3.4.5 Дифференциальные критерии выпуклости³

Формулировка:

1. Пусть f непрерывна на $\langle a, b \rangle$ и дифференцируема на (a, b) . f выпукла вниз на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f'$ строго возрастает на (a, b) .
2. Пусть f непрерывна на $\langle a, b \rangle$ и дважды дифференцируема на (a, b) . f выпукла вниз на $\langle a, b \rangle \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$

Доказательство.

1. \Rightarrow Возьмем $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$. По теореме о выпуклости и касательных

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

что и означает возрастание f'

\Leftarrow Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : x_1 < x_2$, и $x \in (x_1, x_2)$. По теореме Лагранжа $\exists c_1 \in (x_1, x)$ и $c_2 \in (x, x_2)$ такие что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1) \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2)$$

Тогда $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$, а f' по условию возрастает, поэтому $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, то есть

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

что равносильно определению выпуклости.

2. Выпуклость $f \Leftrightarrow f' - \text{возрастает} \Leftrightarrow f'' \geq 0$ □

3.4.6 Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции³

Формулировка:

Пусть f выпукла вниз на $\langle a, b \rangle$. Тогда $\forall x \in (a, b) \exists$ конечные $f'_-(x), f'_+(x)$, причем $f'_-(x) \leq f'_+(x)$

Доказательство. Пусть $x \in (a, b)$. Положим

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \xi \in \langle a, b \rangle \setminus \{x\}$$

По лемме о трех хордах g возрастает на $\langle a, b \rangle \setminus \{x\} \Rightarrow$, если $a < \xi < x < \eta < b$, то $g(\xi) \leq g(\eta)$, то есть

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \leq \frac{f(\eta) - f(x)}{\eta - x}$$

Что в итоге? g ограничена на $\langle a, x \rangle$ сверху и на (x, b) — снизу. По теореме о пределе монотонной функции $\exists g(x-), g(x+)$ — конечные, которые по определению еще до кучи являются односторонними производными $f'_-(x), f'_+(x)$ соответственно. Устремляем ξ к x слева, а η — справа, получаем, что $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ — победа \square

3.4.7 Лемма о трех хордах³

Формулировка:

Пусть f выпукла вниз на $\langle a, b \rangle$, $x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b \rangle$, $x_1 < x_2 < x_3$. Тогда

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (27)$$

Доказательство. По определению выпуклости

$$f(x_2) \leq t f(x_1) + (1 - t) f(x_3)$$

где $t = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$, $1 - t = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$. Теперь следим за руками

$$f(x_2) \leq f(x_1) + (1 - t)(f(x_3) - f(x_1)) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

это равносильно левому неравенству в (27). Теперь

$$f(x_2) \leq f(x_3) - t(f(x_3) - f(x_1)) = f(x_3) - (x_3 - x_2) \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

а вот это равносильно правому неравенству в (27). \square

3.4.8 Теорема Кантора о равномерной непрерывности³

Формулировка:

Непрерывное на компакте отображение равномерно непрерывно

Доказательство. От противного. Пусть отображение f непрерывно на компакте X , но не является равномерно непрерывным, тогда должно выполняться отрицание определения равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta \exists x, \bar{x} : \rho(x, \bar{x}) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(\bar{x})) \geq \varepsilon \quad (28)$$

Зафиксируем это ε и возьмем для него $\delta = \frac{1}{n}$. По теореме о характеристике компактов в метрических пространствах X — секвенциально компактно (можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел в X $\exists \{x_{n_k}\} \rightarrow c \in X$)

$$0 \leq \rho(\bar{x}_{n_k}, c) \leq \rho(\bar{x}_{n_k}, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, c) < \frac{1}{n_k} + \rho(x_{n_k}, c) \rightarrow 0.$$

Т.к. f непрерывна в c , то

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(c), f(\bar{x}_{n_k}) \rightarrow f(c)$$

Следовательно, $\rho(f(x_{n_k}), f(\bar{x}_{n_k})) \rightarrow 0$, что будет противоречить (28) □

3.4.9 Теорема Брауэра³

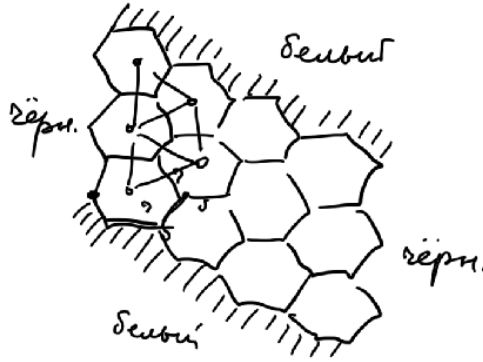
Формулировка:

1. $F : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$ непрерывно, тогда $\exists x \in B(0, 1) : F(x) = x$
2. $F : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^m$ — непрерывно, тогда $\exists x \in [0, 1]^m F(x) = x$

Более подробно про теорему Брауэра и игру Гекс можно посмотреть тут [тык](#)

3.4.9.1 Игра Гекс

Поле для игры состоит из "прямоугольника составленного из правильных шестиугольников (см. рисунок). Две противоположные стороны назовем черными, две другие — белыми. Игроки ходят по очереди, крася один из шестиугольников в черный или белый цвет, их цель — проложить дорожку либо от черной стороны к черной, либо от белой к белой. Проложивший дорожку, выигрывает.



Лемма.

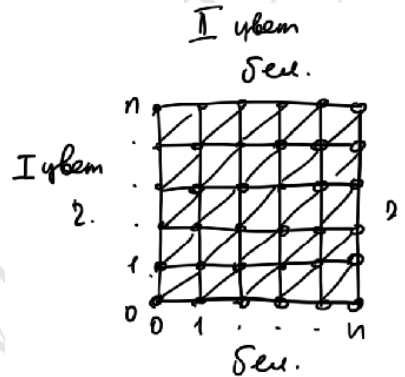
Формулировка:

Любая раскраска для игры Гекс будет выигрышна для одной из сторон

Доказательство. Накидаем случайную раскраску шестигранников в черный и белый цвета. Рассмотрим точку на "левом нижнем" шестиграннике, которая будет одновременно и на белой и на черной стороне (на рисунке выше — толстая черная точка). Начнем обходить шестигранники по следующему правилу: черные шестигранники оставляем по левой руке, белые — по правой.

Теперь думаем, к чему это нас может привести: мы не можем зайти в цикл, не касающийся сторон из-за выбранного правила обхода. Тогда, т.к. всего конечное число гексов, мы рано или поздно выйдем на границу. Но начинали мы с точки, которая принадлежит и белой, и черной стороне. Значит, мы победили. \square

Теперь вместо Гексов будем рассматривать граф, вершинами которого являются гексы, а ребрами — наличие соприкосновения между ними. Пусть он имеет размер $n \times n$. Каждому узлу (k, l) будем сопоставлять точку $(\frac{k}{n}, \frac{l}{n})$. По только что доказанной лемме существует ломаная из одной стороны в противоположную по узлам одного цвета.



3.4.9.2 Доказательство теоремы Брауэра

Доказательство. $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$, $x = (x_1, x_2)$, $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$ Введем необходимые обозначения: $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\|x, y\|$ - расстояние, $\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непрерывна в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ Функция $x \in [0, 1]^2 \rightarrow \rho(x, F(x))$ — непрерывна на $[0, 1]^2$

Вот только теперь начинается доказательство. Доказывать будем от противного: пусть $\forall x : F(x) \neq x$. По теореме Вейерштрасса:

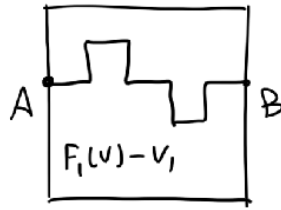
$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in [0, 1]^2 \rho(x, F(x)) \geq \varepsilon \quad (29)$$

По теореме Кантора (для F , и $x \in [0, 1]^2$) F — равномерно непрерывна на $[0, 1]^2$, т.е. для этого $\varepsilon \exists \delta > 0$ (НУО $\delta \leq \varepsilon$) $\forall x, \bar{x} \|x - \bar{x}\| < \delta \|F(x) - F(\bar{x})\| < \varepsilon$.

Возьмем $\frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$, построим доску $HEX(n, n)$ и начнем ее красить. Но красить будем не от балды. $v = (v_1, v_2)$, $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}_+$ — узел доски $HEX(n, n)$.

$$color(V) = \min \left\{ i \in \{1, 2\} : \left| f_i \left(\frac{v}{n} \right) - \frac{v_i}{n} \right| \geq \varepsilon \right\}$$

это определение корректно в силу (29). По лемме об игре в Гекс существует ломаная I цвета от одной вертикальной стороны квадрата к другой, либо ломаная II цвета от одной горизонтальной стороны квадрата к другой.



f_i — i -тая координата F .

В т.А: $f_i(A) \geq 0, A_1 = 0 \Rightarrow f_1(A) - A_1 \geq \varepsilon$

В т.В: $f_i(B) \leq 1, B_1 = 1 \Rightarrow f_1(B) - B \leq -\varepsilon$

То есть, в какой-то момент, мы совершили скачок на $\geq 2\varepsilon$, но при переходе от одного узла к другому каждая координата меняется на $\frac{1}{n} < \delta \leq \varepsilon$, т.е. сумма меняется $< 2\varepsilon$. В случае, когда мы двигаемся по диагонали, мы рассматриваем то же δ , и проводим аналогичные рассуждения.

Противоречие.

□