СВЯТОЙ КПК
#BlessRNG

Или как не сдохнуть на 4 семе из-за матана

Разработал

Никита Варламов @snitron

Почётный автор

Тимофей Белоусов @imodre

v0.0

Февраль-??? 2023

Вы в любой момент можете добавить любую недостающую теорему, затехав её и отправив код (фотографии письменного текста запрещены) в телегу любому из указанных авторов, или создав Pull Request в Git-репозиторий конспекта (click). Ваше авторство также будет указано, с вашего разрешения.

Ah shit
Here we go again!
And again...
Oh, fuck.

Содержание

1 Период Палеозойский

1.1 Важные определения

1.1.1 Пространство $L^p(E, \mu)$

$1 \leq p < +\infty$, $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $E \in \mathfrak{A}$

Тогда $\mathfrak{L}_p(E, \mu) = \{f :$ почти всех $E \to \mathbb{R}(\mathbb{C}), f$ — измерима. $\int_E |f|^p < +\infty\}$

1. $\mathfrak{L}_p(E, \mu)$ — линейное пространство
2. $f \approx g$, если $f = g$ почти всюду

$L_p := \mathfrak{L}_p/_\approx$ — точки этого пространства. Важно, что эти точки — классы эквивалентности, как бы не просто функции. Однако, в большинстве случаев удобнее всего работать с каким-то одним представителем класса, ведь, если что, они отличаются только на множестве меры 0.

$[f] = \{g : f \equiv g\}$ $[f_1] + [f_2] = [f_1 + f_2]$

И введём норму $||[f]|| = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

1.1.2 Пространство $L^\infty(E, \mu)$

$\mathfrak{L}^\infty(E, \mu) = \{f :$ почти всех $E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, измерима, $\operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty\}$

$||f||_\infty = \operatorname{ess\,sup} f$

$\mathfrak{L}^\infty/_\approx = L^\infty(E, \mu)$

1.1.3 Существенный супремум

$\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{a \in \overline{\mathbb{R}} : f \leq a$ почти всюду $\}$

a — существенная верхняя граница функции f, если при почти всех $x :\ f(x) \leq a$

Свойства:

1. $\operatorname{ess\,sup} f(x) \leq \sup f(x)$
2. при почти всех $x : f(x) \leq \operatorname{ess\,sup} f(x)$
3. f — суммируемая, g — измерима: $\operatorname{ess\,sup} |g| < +\infty$

$$\left|\int_E fg\right| \leq \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot \int_E |f|$$

Доказательство:

$$\left|\int_E fg\right| \leq \int_E |fg| \leq \int_E |f| \cdot \operatorname{ess\,sup} |g| = \operatorname{ess\,sup} |g| \int_E |f|$$

1.2 Определения

1.2.1 Произведение мер

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой.

Лемма: $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — полукольца. Тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ — полукольцо.

Также, множества из $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ являются измеримыми прямоугольниками.

μ, ν — σ-конечные меры. Тогда стандартное продолжение m_0 (в смысле теоремы о продолжении меры (?)) с полукольца $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, определённой на некоторой σ-алгебре $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, и являющееся σ-конечной полной мерой — обзначается просто m.

И тогда m — и есть произведение мер μ и ν ($\mu \times \nu$).

Замечание:

$$(\mu \times \nu) \times \rho = \mu \times (\nu \times \rho)$$

1.2.2 Сечения множества

X, Y — множества. $C \subset X \times Y$

Тогда:

$$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$$

$$C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$$

— сечения множества C (1 и 2 рода)

Замечания:

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha\right)_x = \bigcup_{\alpha \in A} (C_\alpha)_x$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha\right)_x = \bigcap_{\alpha \in A} (C_\alpha)_x$$

$$(C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

1.2.3 Полная мера, сигма-конечная мера

См. конспект прошлого семестра

1.2.4 Образ меры при отображении

Пусть у нас есть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \_)$ — пространства с мерой, $\Phi : X \to Y$.

1. $\forall \Phi \quad \Phi^{-1}(\mathfrak{B})$ — σ-алгебра (это предлагается доказать как уражнение)
2. Пусть Φ — "измеримо" $\left(\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}\right)$

Для $E \in \mathfrak{B}$ зададим $\nu R := \mu\left(\Phi^{-1}(E)\right) = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$

ν — образ меры μ при отображении Φ

NB: ДОПИСАТЬ НА СЕССИИ, ТУТ ЕЩЁ ЕСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, ЧТО ЭТО МЕРА (я на сессии: да вроде оно +− очевидное)

1.2.5 Взвешенный образ меры

$\omega : X \to \mathbb{R} \geq 0$, измерима на X

$B \in \mathfrak{B}, \tilde{\nu}(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$ — тоже мера, это и есть взвешенный образ меры μ при отображении Φ

1.2.6 Плотность одной меры по отношению к другой

$X = Y, \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \Phi = \mathrm{id}$

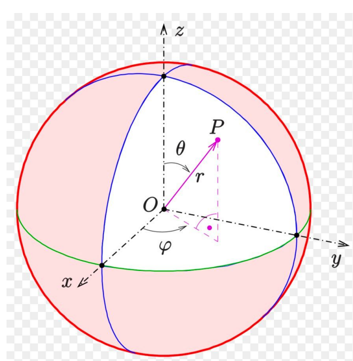
$\nu b = \int_B \omega d\mu$ — ещё одна мера в X

Здесь ω называется плотностью меры ν относительно меры μ. И в этом случае:

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \int f(x) \cdot \omega(x) d\mu(x)$$

1.2.7 Сферические координаты в $\mathbb{R}^3$

На основе земных координат, $\varphi \in (0, 2\pi),\ \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$x = \rho \cos\varphi \cos\theta$$
$$y = \rho \cos\varphi \sin\theta$$
$$z = \rho \sin\varphi$$
$$J_\Phi = \rho^2 \cos\varphi$$

1.2.8 Сферические координаты в $\mathbb{R}^m$

1.2.9 Условие L_{loc}

Короче, всё что идёт с "L", это так или иначе про суммируемость функции

$f : X \times \tilde{Y} \to \overline{\mathbb{R}}, Y \subset \tilde{Y}, a$ — предельная точка Y в $\tilde{Y}$.

f удовлетворяет условию $L_{loc}(a) : \exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая, $\exists U(a) : \forall$ почти всех $x \forall y \in U(a)$:

$$|f(x,y)| \leq g(x)$$

1.2.10 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

Это просто переиначенные неравенства из 2го семестра на интегралы Лебега, приводятся без доказательств.

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, f, g : п. в. $E \subset X \to \mathbb{R}$

Неравенство Гельдера

$p, q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\left(\int_E |fg| d\mu\right) \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Неравенство Минковского

$1 \leq p < +\infty$

$$\left(\int_E |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

1.2.11 Интеграл комплекснозначной функции

База базовая: $(X, \mathfrak{A}, \mu), f : X \to \mathbb{C}$

$$\int_E f(z) d\mu = \int_E \mathrm{Re}(f(z)) d\mu + i \int_E \mathrm{Im}(f(z)) d\mu$$

Также измеримость и суммируемость следует из соответствующих свойств реальной и мнимой частей функций.

1.2.12 Фундаментальная последовательность, полное пространство

Фундаментальная последовательность в L^p:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N : ||f_n - f_m||_p < \varepsilon$$

Любая сходящаяся последовательность является фундаментальной. А если в простарастве выполняется и обратное (т. е. любая фундаментальная последовательность сходится), то оно называется **полным**.

1.2.13 Плотное множество

$A \subset X$ — нормированное пространство

A — (всюду) плотное в X

$$\forall x \in X \ \exists \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A\text{— непусто}$$

1.2.14 Нормальное топологическое пространство

Нормальное топологическое пространство X — такое топологическое пространство X, в котором выполяются аксиомы:

1. $F_0, F_1 \in X$ — замкнутые, $F_0 \cap F_0 = \varnothing$
   Тогда $\exists U(F_0), U(F_1)$ — открытые. $F_0 \subset U(F_0),\ F_1 \subset U(F_1),\ U(F_0) \cap U(F_1) = \varnothing$
2. $\forall x \in X : \{x\}$ — замкнутое

Например, $\mathbb{R}^m$ является нормальным.

1.2.15 Непрерывные финитные функции в $\mathbb{R}^m$

Финитная функция — функция, равная 0 вне некоторого шара

$C_0(\mathbb{R}^m)$ — множество непрерывных финитных функций в $\mathbb{R}^m$

1.2.16 Мера Лебега-Стилтьеса, мера Бореля-Стилтьеса

1. $\mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, возрастает, непрерывно
   $$\mu_g[a, b) := g(b) - g(a)$$
   — счётно аддитивная мера
2. g — возрастает, не обязательно непрерывно
   $$\mu_g[a, b) = g(b - 0) - g(a - 0)$$
   — мера

Запускаем теорему о продолжении, тогда

$\exists \mathfrak{A} \supset \mathcal{P}^1 \exists$ продолжение $\mu_g \subset \mathcal{P}$ на $\mathfrak{A}$

μ_g — полная мера на $\mathfrak{A}$ — мера Лебега-Стильтьеса

Если рассмотреть μ_g на борелевском $\mathfrak{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера Бореля. (тут надо заметить, что если мы запустим на борелевском множестве, мера не обязательно будет полной (?)).

1.2.17 Функция распределения

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, измерима, почти всюду конечна

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mu X(h < t) < +\infty$

Пусть $H(t) = \mu X(h < t)$ — возрастающая

$H(t)$ — называется функцией распределеиния по мере μ

1.2.18 Остатки определений про L^p

$L^p[0, \tau]$ — множество τ-периодичных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$||f|| = \int_0^\tau |f|^p d\lambda_1 < +\infty$$

$$\forall a : \int_0^\tau |f|^p d\lambda_1 = \int_a^{\tau+a} |f|^p d\lambda_1$$

$\tilde{C}[0, \tau]$ — множество непрерывных τ-периодичных функций

$$f(0) = f(\tau)$$

$$||f|| = \max |f|$$

(максимум тут достигается, потому что периодичная функция как-бы строит компакт, так как концы равны (?)). А ещё $\tilde{C}[0, \tau]$ плотно в $L^p[0, \tau]$.

1.3 Важные теоремы

1.3.1 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримые
- $f_n \to f$ почти всюду
- $\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая, и $\forall n$ и при почти всех x $|f_n(x)| \leq g(x)$

Тогда:

$$\int_X |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

И, как очевидное ("уж тем более"):

$$\int_X f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f d\mu$$

Дисклеймер:

Развеем все сомнения насчёт корректности условия (вдруг они у вас были):

$$\left| \int f_n - \int f \right| = \left| \int f_n - f \right| \leq \int |f_n - f| \text{ (уж тем более)}$$

А также, наши функции из условия на самом деле даже суммируемые, не просто измеримые. Давайте для каждого n соберём точки, на который f_n не сходится к f, сложим (это всё будет множество меры 0) и вычтем, а на остатке сделаем предельный переход:

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$
$$|f(x)| \leq g(x) < +\infty$$

Доказательство:

Заведём последовательность $h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, |f_{n+2} - f|, \ldots)$. Она убывает, так как по условию у нас есть сходимость почти везде. Также, можно ограничить её: $0 \geq h_n \geq 2g$ (модули больше нуля и по условию все $|f_n| \geq g$). А ещё это просто определение последовательности из верхнего предела:

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n - f| = 0 \text{ (почти везде)}$$

Теперь берём положительную возрастающую последовательность $2g - h_n$ и запускаем теорему Леви (см. 3 семестр, там как раз нужна возрастающая последовательность):

$$\int_X (2g - h_n)d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X 2gd\mu$$

Откуда по линейности первого интеграла следует, что $\int_X h_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ну и добиваем:

$$0 \underset{n\to\infty}{\longleftarrow} \int_X h_n \geq \int_X |f_n - f|d\mu$$

ч. т. д.

1.3.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере

Формулировка (то же самое, что и выше, только сходится по мере теперь):

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримые
- $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$
- $\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая, и $\forall n$ и при почти всех x $|f_n(x)| \leq g(x)$

Тогда:

$$\int_X |f_n - f|d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство:

Рассмотрим 2 случая.

1. $\mu X < +\infty$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и сооружаем множества $X_n = X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$. Сделовательно, $\mu X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т.к. есть сходимость по мере. Расписываем:

$$\int_X |f_n - f|d\mu = \int_{X_n} |f_n - f|d\mu + \int_{X_n^c} |f_n - f|d\mu \leq \underbrace{\int_{X_n} 2gd\mu}_{(1)} + \underbrace{\int_{X_n^c} \varepsilon d\mu}_{(2)}$$

(1) — оценка разности по условию, и ещё при больших n меньше эпсилона по абсолютной непрерывности интеграла. (2) — из условия о сходимости по мере выше оцениваем эпсилоном.

$$\leq \varepsilon + \varepsilon \cdot \mu X_n^c \leq \varepsilon \cdot (1 + \mu X)$$

(оцениваем меру дополнения просто всем пространством)

2. $\mu X = \infty$

Сначала докажем небольшое свойство интеграла по мере:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A \subset X \text{ измеримое } \mu A < +\infty \quad \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$$

Если по-русски, то существует некоторое множество в исходном, на котором в основном концентрируется интеграл, следовательно, на остальном кусочке интеграл крайне мал. И мы можем предъявить такое для сколь угодно малого ε.

Рассмотрим интеграл как супремум ступенчатых функций:

$$\int_X g = \sup_{0 \geq g_n \geq |g|} \int_X g_n d\mu$$

Этот супремум значит, что существует какая-то g_{n_0}, хорошо (ε) оценивающая нашу функцию:

$$\exists g_{n_0} : \int_X g - g_{n_0} < \varepsilon$$

Давайте возьмём за A носитель функции g_{n_0}:

$$A := \operatorname{supp} g_{n_0} = \{x : g_{n_0}(x) \neq 0\}$$

Так как ступенчатая функция есть сумма константы на характеристическую функцию, её интеграл конечен (?). Ну, а на "хвостиках" где она равна нулю нам не особо интересно. Таким образом, $\mu A < +\infty$:

$$\int_{X \setminus A} g d\mu = \int_{X \setminus A} g \underbrace{-g_{n_0}}_{\text{так как вне } A\ g_{n_0} = 0} \leq \int_X g - g_{n_0} < \varepsilon$$

Ну и всё, раз доказали, давайте разобъём на два интеграла:

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \underbrace{\int_A |f_n - f| d\mu}_{< \varepsilon \text{ по пункту } 1} - \underbrace{\int_{X \setminus A} |f_n - f| d\mu}_{< 2\varepsilon \text{ по доказанному выше}} \leq 3\varepsilon$$

ч. т. д.

1.3.3 Принцип Кавальери

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные, полные меры
- $C \in \mathfrak{C}$
- $m = \mu \times \nu, \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. при почти всех $x \quad C_x \in \mathfrak{B}$
2. $x \mapsto \nu C_X$ — измеримо на X (сама функция задана почти везде)
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогично для сечений C^y

Замечания:

1. C — измеримо $\not\Rightarrow \forall x C_x$ — измеримое
2. $\forall x \forall y : C_x, C^y$ — измеримы $\not\Rightarrow C$ — измеримо

Доказательство:

Введём D — это множество тех множеств, которые удовлетворяют принципу Кавальери :) . Давайте докажем, что разные типы множеств содержатся в D. А потом (внезапно) окажется, что это все множества.

1. $G = A \times B$ **(измеримые прямоугольники)**

Проверяем здесь и далее попунктно:

1. Так как это прямоугольники, $C_x = \begin{cases} B, & x \in A \\ \varnothing, & x \notin A \end{cases}$ (очев). Ну, значит, при всех $x: \ C_x \in \mathfrak{B}$
2. Берём в качестве такой функции $\nu(B) \cdot \chi_A(x)$. Она измерима на X.
3. Ну давайте поинтегрируем) $\int_X \nu(C_x) d\mu = \int_X \nu(B) \cdot \chi_A(x) d\mu = \nu(B) \cdot \mu(A) = m(A \times B)$

2. $E_i \in D, E_i$ **дизъюнктны,** $E = \bigsqcup_{\text{НБЧС}} E_i$**. Тогда** $E \in D$

1. $E_x = \bigsqcup (E_i)_x$. Обратите внимание, что все множества справа уже лежат в D, поэтому они "измеримы" (лежат в $\mathfrak{B}$) при почти всех x. Ну, значит и объединение их тоже.
2. Если вы ещё не поняли, мы в этом пункте фактически хотим предоставить функцию вычисления меры сечения по заданному x. $\nu E_x = \sum \nu E_{i_x}$. Это сумма измеримых неотрицательных функций, определённых на почти всех x (потому что кусочки уже лежат в D).
3. $\int_X \nu(C_x) d\mu = \int_X \sum \nu E_{i_x} d\mu$. Тут напрашивается переставить местами сумму и интегрирование, и это можно сделать по теореме об интегрировании положительных рядов!. $\sum \int_X \nu E_{i_x} d\mu = \sum mE_i = (*)$ (кусочки уже в D, и по счётной аддитивности) $(*) = mE$

3. $E_i \in D, \ E_i \supset E_{i+1} \supset \ldots, \ \bigcap E_i = E, \ mE_1 < +\infty$**. Тогда** $E \in D$

1. $E_x = \bigcap (E_i)_x$. Аналогично предыдущему.
2. По теореме о непрерывности меры сверху (условия подходят): $\lim \nu E_{i_x} = \nu E_x$. Ну и тогда, добавляя оговорку о том, что всё это работает на тех x, на которых определены функции для кусочков, то и наша функция сопоставления измерима.
3. $\int_X \nu(C_x) d\mu = \int_X \lim_{i \to \infty} \nu E_{i_x} d\mu =$. Замечаем, что все наши функции в пределе положительны (меры) и суммируемы (т. к. $0 \le \nu E_{i_x} \le \nu E_1 < +\infty$ по условию, значит суммируемы). Тогда запускаем теорему Лебега о мажорированной сходимости для случая почти везде (в обратку) и выигрываем! $= \lim_{i \to \infty} \int_X \nu E_{i_x} d\mu = \lim_{i \to \infty} mE_i = mE$ (последнее тоже по непрерывности меры сверху).

Сделаем небольшое лирическое отступление в прошлое. Как мы помним, у нас есть теорема о продолжении меры, по которой, в частности, строилась и мера Лебега. По одному из её пунктов, меру предлагалось высчитывать, выбирая всё лучше оценивающее покрытие ячейками, и беря по всем таким покрытиям инфимум: $(\mathcal{P}(\text{п-к.}),\ \mu_0) \to (\mathfrak{A}(\sigma-\text{алг.}), \mu)$; $\quad \mu A = \inf\{\sum \mu P_k,\ A \subset \bigcup P_k\}$. Также, если мы рассмотрим конкретно меру Лебега, то измеримое про ней множество можно представить (по теореме о регуляризации?) в виде $A \in \mathfrak{A},\ A = B \setminus C$, где B — "борелевское", а C — "меры 0" (кавычки тут не просто так, ведь мы не задавали никаких топологий и прочего, чтобы их снять. Тут это для общего понимания происходящего). Ну и получается, что если берём за основу "измеримости" вот это определение с инфимумом, то B представляется в виде $\bigcap_i \bigcup_j P_{ij}$ (типа взяли всевозможные покрытия и пересекли, получив тем самым наилучшее, чтоли). И некоторый остаток меры 0. Однако, не стоит его недооценивать, у нас мера по условию принципа — полная, а это значит, что "иерархия" на этих множествах должна соблюдаться (см. определение полной меры из 3 сем.). Рассматриваем всё это далее!

4. $mE = 0$**. Тогда** $E \in D$

То же самое: $mD = 0,\ H = \bigcap_i \bigcup_j P_{ij},\ P_{ij} \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B},\ E \subset H$. Заметим, что $H \in D$ по пункту 3.

1. $0 = mH = \int_X \nu(H_x) d\mu$. Если так случилось, то логично, что $\nu(H_x) = 0$ п. в. x. Ну тогда $\nu(E_x) = 0$ при этих x, так как $E_x \subset H_x$ по полноте меры.
2. Доказано предыдущим пунктом, всё 0.
3. Как следствие, $\int_X \nu(E_x) = 0 = mE$

5. $A \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, mA < +\infty$**. Тогда** $A \in D$

Пользуясь лирическим отступлением (и "обобщённой регулярностью"): $A = B \backslash C,\ B = \bigcap_i \bigcup_j P_{ij} \in D,\ mC = 0 \Rightarrow C \in D$

1. $mA = mB - mC = mB$, сечения: $A_x = B_x \setminus C_x$ (измеримы при п. в. x, т. к. составляющие уже в D)
2. Из общих соображений, $\nu B_x - \nu C_x \geq \nu A_x$. С другой стороны, по монотонности ($A \subset B$): $\nu A_x \leq \nu B_x$. А т. к. $\nu C_x = 0$ при п. в. x, то при тех же $x : \nu A_x = \nu B_x$.
3. $\int_X \nu A_x d\mu = \int_X \nu B_x d\mu =$ (оно уже в D) $= mB = mA$ (из начала).

Ну и всё, осталось обощить всё вышеперечисленное и показать, что всё-таки любое множество лежит в нашем классе D (фактически, остались только множества бесконечной меры).

6. $A \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ **— любое** $\in D$

$\mu A = +\infty$. Запускаем $\sigma-$конечность: $X = \bigsqcup X_k, Y = \bigsqcup Y_i$. С другой стороны, $X \times Y = \bigsqcup X_k \times Y_i$. Тогда $A \cap (X_k \times Y_i) \in D$ по пункту 5 (конечная мера), а их дизъюнктное объединение $\bigsqcup A \cap (X_k \times Y_i) \in D$ по пункту 2.

ч. т. д.

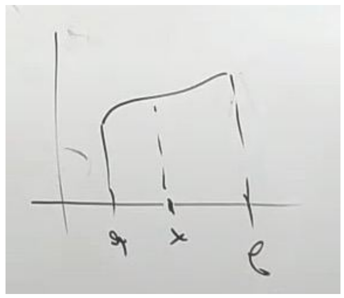
Следствия:

1. $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B},\ P_1(C) = \{x \in X : C_x \neq 0\}$ (проекция на X) и она измерима на нём, то меру можно считать по ней $mC = \int_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$. Это очевидно (ну просто проекция удаляет те точки, где сечение и так было равно нулю).

2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $\int_a^b f(x) = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$

   Доказательство:

   Достаточно рассмотреть неотрицательную функцию, т. к. оба интеграла аддитивны и можно просто разбить. Тогда, $\Pi\Gamma(f, [a,b]) = C$ — измеримое множество (очев). А $C_x = [0, f(x)]$ (см. картинку). Причём, если вспомнить 2й сем, то окажется, что той загадочной площадью σ, которую мы использовали в рассуждениях, может быть и λ! Давайте посмотрим поближе: $\lambda(C_x) = \lambda([0, f(x)]) = f(x)$.



   $\int_a^b f(x)dx = \lambda_2(\Pi\Gamma(f, [a,b])) =$ (по следствию 1 можем считать просто на проекции) $= \int_{[a,b]} \lambda(C_x) d\lambda_1 = \int_{[a,b]} f(x) d\lambda_1$

1.3.4 Теорема Фубини

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные меры
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, суммируема на $X \times Y$ по мере m

Тогда:

1. при почти всех x функция f_x суммируема на Y
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu$ — это суммируемая функция на X
3. $$\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi(x) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

Доказательство:

Теорема-клон Тонелли, и выводится ровно из неё.

Подготовка

$0 \le f_-, f_+ \le |f|$ — по определению суммируемых функций. Также сразу заметим, что:

$$\underbrace{\int_{X\times Y} f_{-,+}dm}_{(1)} = \underbrace{\int_X \left(\int_Y f_{-,+}d\nu\right) d\mu}_{(2)} < +\infty$$

(это всё потому что они измеримы, поэтому применяем Тонелли. Ну и интегралы конечны почти везде в силу суммируемости самой f).

$(f_-)_x, (f_+)_x$ — измеримы по Тонелли. Можно также рассмотреть и 2й пункт:

$$\varphi_- = \int_Y (f_-)_x d\nu, \quad \varphi_+ = \int_Y (f_+)_x d\nu$$

Эти функции точно так же измеримы по Тонелли *(note для душнил: да, измеримо*, на области определения и почти везде, но кажется, что это уже и так все поняли).*

По гига-неравенству с интегралами сразу делаем вывод, что f_-, f_+ — суммируемы (интеграл (1) конечен). Но также и φ_-, φ_+ — суммируемы по интегралу (2).

Содержательная часть

1. $f_x = (f_+)_x - (f_-)_x$ — суммируемая как сумма суммируемых.
2. $\varphi = \varphi_+ - \varphi_+$ — аналогично.
3. $\int_{X\times Y} f dm = \int_{X\times Y} f_+ dm - \int_{X\times Y} f_- dm$ (по определению). Ну и дальше можно расписать $\int_X \int Y \ldots$, погруппировав, но всем уже и так всё понятно.

ч. т. д.

Следствие (аналогичное принципу Кавальери) [валидно также и для Тонелли]:

$C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, f$ — суммируемая [измеримая, ≥ 0]. Если $P_1(C)$ — измеримо на X, тогда:

$$\int_C f dm = \int_{P_1(C)} \int_{C_x} f d\nu d\mu$$

Доказательство:

Полагаем, что f вне проекции равно 0 и не вносит ничего в результат.

1.3.5 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме

Формулировка:

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, диффеоморфизм

Тогда $\forall A \in \mathbb{M}^m, A \subset O$

$$\lambda \Phi(a) = \int_A |\det \Phi'(x)| dx$$

Доказательство:

Введём обозначения: $J_\Phi = \det \Phi'(x), \nu A = \lambda \Phi(A)$. Тогда необходимо проверить, что J_Φ является плотностью ν относительно λ:

$$\lambda A \inf_A |J_\Phi| \leq \nu A \leq \lambda A \sup_A |J_\Phi|$$

Сразу скажем, что нам достаточно доказать лишь правую часть. У нас отображение — диффеоморфизм, поэтому супремум и инфимум как бы "обратны друг другу" (в смысле обратности функций):

$$\inf_A |\det \Phi'(x)| \leq \nu A \mid pow\,(-1)$$

$$\nu A \leq \frac{1}{\inf_A |\det \Phi'(x)|}$$

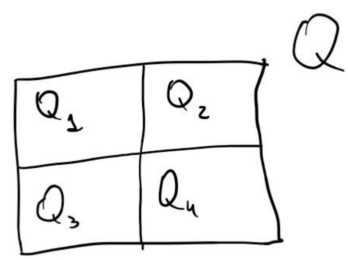
Но, тк у нас диффеоморфизм, мы можем рассмотреть также $|\det \Phi'^{-1}(x)| = \frac{1}{|\det \Phi'(x)|}$. И логично, что в точке инфимума будет достигаться супремум обратного оператора.

$$\nu A \leq \sup_A |\det \Phi'(x)|$$

1. $A \subset \overline{A} \subset Q$ **— кубическая ячейка**

Доказываем от противного. Пусть предпосылка не выполняется:

$$\nu Q > \lambda Q \sup_Q |J_\Phi|$$



Давайте выберем такое c, чтобы $\nu Q > c\lambda Q > \lambda Q \sup_Q |J_\Phi|$. Запускаем половинное деление на кубе (покоординатное, 2^m частей). Утверждается, что найдётся хоть один кусочек куба, на котором это неравенство выполняется (а если не найдётся, то мы можем посуммировать неравенства, и предпосылка перестанет выполняться). Выбираем этот кусочек, и запускаем деление на нём и так далее до посинения. По теореме Кантора в пересечении их замыканий будет точка $a : \bigcap \overline{Q_i} = a$. И вдруг оказывается, что тогда не выполняется лемма об оценке малых кубов в точке a! ($c > \sup_Q |J_\Phi| = \sup_{\overline{Q}} |J_\Phi| > |J_\Phi| = |\det \Phi'(a)|$)А вообще-то она должна выполняться. Таким образом — противоречие, значит неравенство выполняется.

2. A **— открытое**

Опять вспоминаем 3й сем. Любое открытое множество можно разбить на дизъюнктное объединение кубических ячеек. $A = \bigsqcup Q_i$. Оценим каждую:

$$\nu Q_i < \lambda Q_i \sup_{Q_i} |J_\Phi| \leq \lambda Q_i \sup_A |J_\Phi|$$

Оценили супремумом по всему множеству. Ну и теперь суммируем всё по i:

$$\nu A \leq \lambda A \sup_A |J_\Phi|$$

3. A **— измеримое**

Возьмём открытое G, такое что $A \subset G$ и запустим по предыдущему пункту:

$$\nu G \leq \lambda G \sup_G |J_\Phi|$$

Берём инифмум по обоим частям, левая остигается по регулярности меры Лебега, а правая — по Лемме 2 (из леммы об оценке малых кубов).

$$\nu A \leq \lambda A \sup_A |J_\Phi|$$

ч. т. д.

1.3.6 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

Формулировка:

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, диффеоморфизм
- $\Phi(O) = O'$
- $f : O' \to \mathbb{R} \geq 0$ — измерима

Тогда:

$$\int_{O'} f dx = \int_O f\left(\Phi(x)\right) \cdot |\det \Phi'(x) d\lambda(x)|$$

Доказательство:

Запустим теорему о вычислении интеграла по взвешенному образу меры ($\omega(x) = |\det \Phi'(x)|, \nu(A) = \lambda\Phi(A)$). Тогда искомое — результат её работы.

ч. т. д.

Следствие:

Если $A' \subset O', \Phi(A) = A'$, то:

$$\int_{A'} f = \int_A f \circ \Phi |J_\Phi| dx$$

1.3.7 Теорема о непрерывности сдвига

Формулировка:

- $f : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$
- $h \in \mathbb{R}^m$
- $f_h(x) := f(x+h)$

1. f — равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^m$
   Тогда $||f_h - f||_\infty \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$
2. $1 \le p < +\infty,\ f \in L^p(\mathbb{R}^m)$
   Тогда $||f_h - f||_p \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$
3. $f \in \tilde{C}[0,\tau]$
   Тогда $||f_h - f||_\infty \longrightarrow 0$
4. $1 \le p < +\infty,\ f \in L^p[0,\tau]$
   Тогда $||f_h - f||_p \longrightarrow 0$

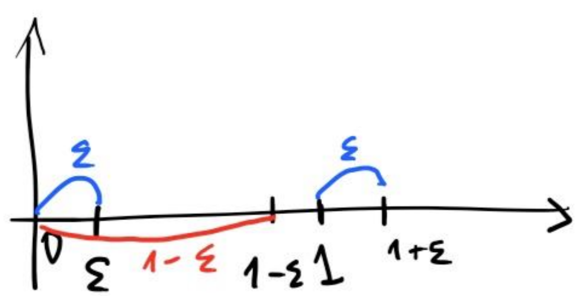
Доказательство:

1. + 3.

По определению равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y\ |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Заметим, как удачно тут стоит неравенство $|x-y|$, ведь для случая 1 это норма, а для 3 — модуль. И всё работает! А ещё все эти модули-нормы не совсем обычные. Дело в том, что мы работаем с периодическими функциями, поэтому там близость понимается в смысле: отрезок $[0,1]$, период 1, точки $1-\varepsilon$ и $1+\varepsilon$ лежат на расстоянии $1-\varepsilon$. А точки ε и $1+\varepsilon$ фактически равны друг другу (по периодичности)



Проверим это: $f \in \tilde{C}[0,\tau] \Rightarrow f$ — равномерно непрерывна. Вроде бы очевидно (запускаем теорему Кантора на $[0,\tau]$ и мапим точки в этот отрезок по периодичности). Ну всё, раз у нас для функции заказана равномерная непрерывность, можем проверять объект исследования (специально сделали возможность быть равным эпсилону, это не так важно):

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall|h| < \delta : \sup|f(x+h) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Ну и всё, просто подставляем из определения равномерной непрерывности неравенство и всё получается (для этого равенство и оставили).

2. и 4.

Закажем g из множества финитных (2) и непрерывных периодических (4) функций. Они оба плотны в соответствующих пространствах, а значит мы можем заказать их с хотелкой:

$$\forall\varepsilon > 0\ ||f - g||_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

Оценим искомое по неравенству треугольника:

$$||f_h - f||_h \leq \underbrace{||f_h - g_h||_p}_{(1)} + \underbrace{||g_h - g||_p}_{(2)} + \underbrace{||f - g||_p}_{(3)} \leq (**)$$

(3) меньше по заказанному. (1):

$$||f_h - g_h||_p = \left(\int_{(*)} (f(x+h) - g(x+h))^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(*) — если это (4.), то там сдвиг ничего не меняет, по определению. Если (2.) — то $\mathbb{R}^m$, то там тоже бесплатный (почему??? ~~может быть, по равномерной непрерывности $x \mapsto f(x) - g(x)$, но откуда она тогда берётся~~? да нет, всё просто! $t = x + h$, сделали замену, дифференциал не поменялся, на границы просто пофигу видимо, всё равно по всему $\mathbb{R}^m$ интегрируется)

Осталось доказать лишь (2), отдельно для каждого случая.

4.

g — непрервыная периодическая функция. Оценим:

$$||g_h - g||_p^p = \int_{[0,\tau]} (g(x+h) - g(x))^p \leq \lambda[0,\tau] \cdot \left(\sup_{x\in[0,\tau]} g(x+h) - g(x)\right)^p$$

Супремум точно меньше всего, что мы закажем, так как мы в самом начале доказали, что $g \in \tilde{C}[0,\tau]$ — равномерно непрерывна.

$$||g_h - g||_p \leq \tau^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\sup_{x\in[0,\tau]} g(x+h) - g(x)}_{\leq \frac{\varepsilon}{3\tau^{\frac{1}{p}}}} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

При $|h| < \delta\left(\frac{\varepsilon}{3\tau^{\frac{1}{p}}}\right)$

2.

g — непрерывная финитная функция. Пусть $|h| < 1$, оно всё равно стремится к 0. Раз она финитная, её носитель (множество иксов, на которых она не ноль), помещается в шарик, пусть $B(0,R)$.

Заметим, что теперь нам достаточно рассматривать норму на пространстве $L^p(B(0, R+1), \lambda_m)$ (немножко раздули, чтобы сдвиги поместились), в остальных местах там всё выполнено, константный 0. А ещё заметим, что на $\overline{B(0, R+1)}$ функция равномерно непрерывна по теореме Кантора (компакт, ёлки-палки!)

$$||g_h - h||_p \leq (\lambda_m B(0, R+1))^{\frac{1}{p}} \cdot \sup_{x \in \overline{B(0,R+1)}} |g(x+h) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Итого:

$$(**) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ч. т. д.

1.4 Теоремы

1.4.1 Теорема об интегрировании положительных рядов

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, u_n \geq 0$ (при почти всех x ?)
- u_n — измеримы на $E \in \mathfrak{A}$

Тогда:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E u_n(x) d\mu(x)\right)$$

Доказательство:

Подгоним под теорему Леви 3 (3 семестр). Пусть $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$ — последовательность частичных сумм. Очевидно, что эта последовательность — монотонно неубывающая (так как функции у нас неотрицательные):

$$0 \leq S_N \leq S_{N+1} \leq S_{N+2} \leq \dots$$

Тогда, делаем предельный переход (вот тут есть вопрос, почему должен существовать предел, но если подумать: если его не существует, вообще вся эта теорема не имеет смысла (ну бесконечности, чел, смысл их интегрировать)). А так же, измеримость сохраняется, так как у нас исходные функции все были измеримы (ну и по теореме о пределе измеирмых функций):

$$S_N(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} S(x)$$

Ну и всё, значи, по теореме Леви можем перейти к предельному переходу интегралов:

$$\int_E S_N(x) d\mu(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \int_E S(x) d\mu(x)$$

Левую часть можно расписать по линейности интеграла (там у нас конечное число членов):

$$\int_E S_N(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{N} \int_E u_n(x) d\mu(x)$$

Ну, а раз интграл суммы стремится к интегралу предельной функции, то и сумма интегралов обязана туда стремиться.

$$\sum_{n=1}^{N} \int_E u_n(x) d\mu(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x) d\mu(x)$$

ч. т. д.

Следствие:

- $u_n : X \to \mathbb{R}$, измеримы на $E \in \mathfrak{A}$
- $\sum \int_E |u_n(x)| d\mu < +\infty$ (конечна)

Тогда $\sum u_n(x)$ — абсолютно сходящийся при почти всех x

Доказательство:

Пусть:

$$S(x) = \int_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$

Тогда, по предыдущей теореме:

$$\int_E S(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E |u_n(x)| d\mu \right) < +\infty$$

Раз интеграл конечен, значит $S(x)$ — суммируема, а это значит, что $S(x)$ — почти везде конечна. Ну значит и сходится.

ч. т. д.

Пример:

- (x_n) — вещественная последовательность
- $\sum a_n$ — абсолютно сходящийся числовой ряд

Тогда функциональный ряд $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x-x_n|}}$ — абсолютно сходится при почти всех x (в $\mathbb{R}$ по мере Лебега)

Доказательство:

Во-первых, можно доказать, что если для $\forall A$ на $[-A, A]$ абсолютно сходится почти везде, то и везде (на $\mathbb{R}$) почти везде сходится (лол). Счётное количество п. в. $\Rightarrow$ п. в. (чтобы количество отрезков было счётным, надо чтобы A были хотя бы рациональными. Кажется, что это не сильная проблема, так как отрезки включают в себя и все вещественные числа на отрезке тоже).

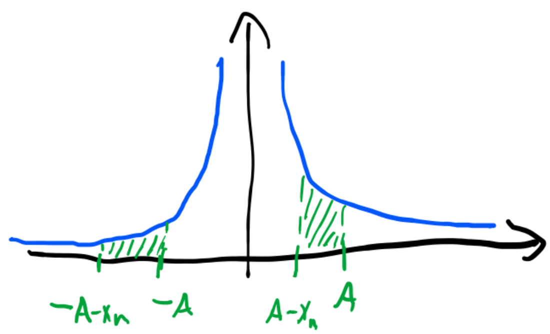
Попробуем подогнать под предыдущую теорему:

$$\int_{[-A,A]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} d\lambda = |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x-x_n|}} \leq$$

Так, стоп. А как мы перешли к определённому интегралу? Оказывается, что так можно делать, на доказано это будет позже (в курсе).

$$\underset{x:=x-x_n}{\leq} |a_n| \int_{-A-x_n}^{A-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq$$

Почему верен последний переход? Посмотрим на картинке:



Ну, по ней очевидно, что мы откусили кусочек поменьше, а добавили побольше. Тогда оценим модуль:

$$\leq 2 \cdot |a_n| \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4 \cdot \sqrt{A} \cdot |a_n|$$

Всё, абсолютный интеграл ограничен, значит сходится (при почти всех x).

ч. т. д.

1.4.2 Абсолютная непрерывность интеграла

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \quad \forall E \text{— измеримое } \mu E < \delta \qquad \left| \int_E f d\mu \right| < \varepsilon$$

Доказательство:

Для доказательства сего факта нам бы хотелось поисследовать, как на таких множествах ведёт себя функция в зависимости он величиные её значений на соответствующих множествах. Давайте заведём множества X_n:

$$X_n = X(|f| \geq n)$$

Заметим, что $\ldots \supset X_n \supset X_{n+1} \supset \ldots$. Причём:

$$\bigcap X_n = X_\infty = X(|f| = \infty)$$

А также, ведь по условию наша функция f суммируема, значит она почти везде конечна (а там, где не конечна — множество меры 0):

$$\mu\left(\bigcap X_n\right) = 0$$

Теперь заведём вспомогательную меру:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

И внезапно заметим, что для неё выполняется теорема об непрерывности меры сверху! ($X_0 = X$, так как там у нас условие модуль больший нуля, и интеграл по нему конечен, так как функция суммируема):

$$\nu(X_0) = \int_{X_0 = X} |f|\mu < +\infty$$

Ну а в пересечении, как мы уже выяснили, у нас множество меры ноль (а на нём интеграл тоже нулевой):

$$\nu\left(\bigcap X_n\right) = 0$$

Таким образом, $\nu(X_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. И это даёт нам право с полной уверенностью сказать, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \quad \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

Все приготовления сделаны, давайте оценивать:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} \ \mu E < \delta \qquad \left| \int_{X_{n_\varepsilon}} f d\mu \right| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| d\mu = \int_{E\cap X_{n_\varepsilon}} |f| d\mu + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} |f| d\mu$$

Первое слагаемое оценим X_{n_ε}, для которого у нас уже есть готовое утвверждение выше. А второе оценим мерой, умноженной на n_ε. Так можно сделать, ведь дополнение X_{n_ε} есть множество точек, на котором функция $< n_\varepsilon$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + n_\varepsilon \cdot \underbrace{\overbrace{\mu\left(E \cap X_{n_\varepsilon}^c\right) \leq \mu\left(E\right) < \delta}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ч. т. д.

Следствие:

- $(e_n) \in \mathfrak{A}$ — последовательность (?) множеств
- $\mu e_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- f — суммируемая на X

Тогда:

$$\int_{e_n} f d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство:

Очевидно следует из теоремы, ну камон)

1.4.3 Теорема о произведении мер

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой (полукольца (?))
- Зададим $m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$

Тогда:

1. m_0 — мера на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$
2. μ, ν — σ-конечные меры $\Longrightarrow m_0$ — σ-конечная

Доказательство:

1.

Давайте рассмотрим какой-то $P = \bigsqcup P_k$ — измеримые прямоугольники. Чтобы доказать, что это действительно мера на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, необходимо доказать счётную аддитивность: $m_0(P) \underset{?}{=} \sum m_0(P_k)$

Верно, что $P = A \times B, P_k = A_k \times B_k$ (наше множество есть результат перемножение множеств из каждого пространства). Также из этого следует, что:

$$\chi_P = \sum \chi_{P_k}$$

$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y)$$

Поинтегрируем это по Y!

$$\chi_A(x)\nu(B) = \sum \chi_{A_k}(x)\nu(B_k)$$

А теперь по X!

$$\mu(A)\nu(B) = \sum \mu(A_k)\nu(B_k)$$

Всё проверили, это действительно мера.

2.

По сигма-конечности исходных мер, мы можем расбить исходные простанства на счётное объединение множеств, имеющих конечную меру.

$$X = \bigcup X_k,\ \mu X_k < +\infty$$

$$Y = \bigcup Y_k,\ \nu Y_n < +\infty$$

Ну и тогда мера перемножения двух этих множеств будет просто результатом перемножения нескольких конечных чисел и их сумма, что, очевидно, конечно:

$$X \times Y = \bigcup_{(i,j)} X_i \times Y_j$$

$$m_0(X \times Y) = \sum_{(i,j)} \mu(X_i) \cdot \nu(Y_j)$$

ч. т. д.

1.4.4 Теорема Тонелли

Формулировка:

$f_x(y) = f^y(x) = f(x, y)$ — новая нотация для функций с фиксированным аргументом.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные меры
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, измерима относительно $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. при почти всех x функцияf_x измерима на Y
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu$ — это измеримая функция на X
3. $$\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi(x) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

Всё то же самое валидно и для y.

Доказательство:

будет принципом “конструктора”. Соберём измеримую функцию из кусочков.

1. $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, f = \chi_C$

То есть, сначала рассмотрим функцию-“ступеньку”.

1. $f_x = \chi_{C_x}$ — она измерима тогда, когда измеримо C_x. А оно измеримо по принципу Кавальери!
2. $\int_Y f_x d\nu = \int_Y \chi_{C_x} d\nu = \nu(C_x)$ — измеримо по принципу Кавальери!
3. $\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu(C_x) d\mu = mC$ (по принципу Кавальери). Тогда в обратную сторону $= \int_{X \times Y} \chi_C dm = \int_{X \times Y} f dm$

2. $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_i \geq 0$ — **ступенчатая**

1. $f_x = \sum c_i(\chi_{C_I})_x$ — аналогично предыдущему пункту, сумма измеримых почти везде.

2. $\int_Y f_x d\nu = \int_Y \sum c_i(\chi_{C_i})_x d\nu = \sum c_i \int_Y (\chi_{C_i})_x d\nu$. Ну и собственно говоря, у нас конечная сумма почти везде измеримых функций. Всё хорошо.

3. $\int_{X\times Y} f dm = \sum c_i \int_{X\times Y} \chi_{C_i} dm =$ вот тут просто раскрываем по пункту для "ступеньки" и заносим сумму внутрь $= \sum c_i \int_X \left(\int_Y \chi_{C_i} d\nu\right) d\mu = \int_X \sum c_i \left(\int_Y \chi_{C_i} d\nu\right) d\mu = \int_X \int_Y \left(\sum c_i \chi_{C_i}\right) d\nu d\mu$

3. $f \geq 0$ — ступенчатая

Идея: аппроксимация + теорема Леви $\times 2$. *(в этом разделе постоянно используется такой приём — прим. авт.)*

Запускаем теорему о характеризации измеримых функций ступенчатыми (?), $f = \lim_{n\to\infty} g_n, g_n$ — ступенчатые, возрастающие.

1. $f_x = \lim_{n\to\infty}(g_n)_x$ — измерима как предел измеримых функций (3 сем).

2. $\int_Y f_x d\nu \underset{\infty\leftarrow n}{\longleftarrow} \int_Y (g_n)_x d\nu$ (по теореме Леви). Предел измеримых.

3. Обозначим интеграл каждой ступенчатой функции как $\varphi_n(x) = \int_Y g_n d\nu$. Так вот, оказывается $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_{n+2}(x)$ (так как там подынтегральные функции возрастающие, все дела), и при этом $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$ (предыдущий пункт). Тогда давайте просто $\int_X \varphi(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x) d\mu$ по теореме Леви (типа в обратную сторону). А ещё, зная что в основе φ_n лежит ступенчатая функция, мы понимаем, что для неё уже выполняется наша теорема, таким образом применив пункты 2 и 3 мы можем перейти к равенству $= \lim \int_{X\times Y} g_n dm =$ и опять по Леви $= \int_{X\times Y} f dm$

ч. т. д.

1.4.5 Формула для бета-функции

Формулировка:

Бета-функция задаётся следующим образом:

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx, \quad s,t > 0$$

Тогда:

$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

Доказательство:

Рассмотрим:

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x} dx \cdot \int_0^\infty y^{t-1}e^{-y} dy =$$

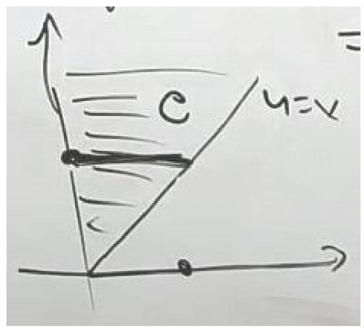
Заметим, что второй интеграл есть ничто иное, как константа! Внесём его внутрь:

$$= \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \left(\int_0^\infty y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x^{s-1} y^{t-1} e^{-(x+y)} dy \right) dx =$$

Заменим $y = u - x$:

$$= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u} du \right) dx =$$

А теперь финт ушами! По теореме Тонелли, этот повторный интеграл является двойным интегралом по некоторой области C:



Так давайте просто поменяем пределы интегрирования:

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^u x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u} dx \right) du =$$

И ещё раз заменим: $x = uv$, $dx = udv$ (u типа как константа, пределы интегрирования тоже поменялись!)

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^1 (uv)^{s-1} (u-uv)^{t-1} e^{-u} dv \right) udu = \int_0^\infty \left(\int_0^1 u^{s-1} v^{s-1} u^{t-1} (1-v)^{t-1} e^{-u} dv \right) udu =$$

$$\int_0^\infty u^{s+t-1} e^{-u} du \cdot \int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv = \Gamma(s+t) B(s,t)$$

ч. т. д.

1.4.6 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

Формулировка:

- $B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \leq R^2\}$
- α_m $\lambda_m(B(0,1))$

Тогда:

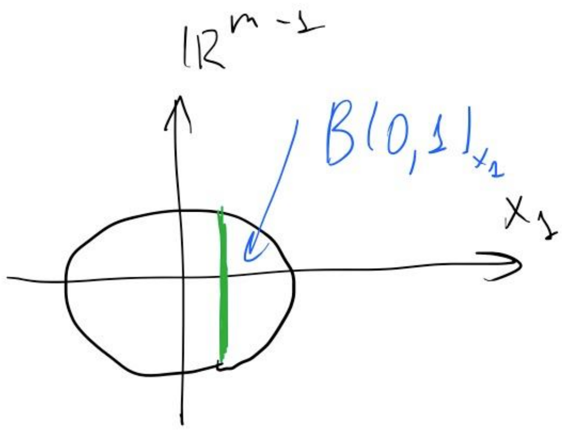
$$\mu\left(B(0,R)\right)=\alpha_m R^m$$

Доказательство:

Почему вылез радиус в степени m — это при линейном растяжении шарика $B(0,1)$ просто вылез множитель (по прошлому сему (?)). Поэтому достаточно рассмотреть только этот базированный шар единичного радиуса. Будем же наконец искать его объём, интегрируя!

$$\alpha_m=\int_{-1}^{1}\lambda_{m-1}\left(B(0,1)_{x_1}\right)dx_1=$$

А почему так? Да очень просто. Дело в том, что сечение шара размерности m есть подпространство размерности $m-1$, а именно — шар радиуса $\sqrt{1-x_1^2}$.



$$=\int_{-1}^{1}\alpha_{m-1}(1-x_1^2)^{\frac{m-1}{2}}dx_1=$$

Делаем замену $x_1^2=x,\ dx_1=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$:

$$=\frac{\alpha_{m-1}}{2}\int_{-1}^{1}x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{m-1}{2}}dx=\alpha_{m-1}\cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{m+1}{2}\right)=\alpha_{m-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

Двойка из знаменателя пропала из-за того, что подинтергальная функция чётна, значит, изначальный интеграл можно разбить на два на промежутках $(-1,0)$ и $(0,1)$ и они будут равны, и равны бета-функции. Ну и всё, двойка сократилась. Гораздо интереснее, что же там будет, если мы будем раскрывать "альфы" до талого. Сразу заметим, что $\alpha_1=2$ (ну просто длина промежутка $(-1,1)$). Посмотрим (пары, эквивалентные "подчёркнутым" сократятся, и так далее со сдвигом на один через один, лол):

$$\alpha_m=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\underline{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\underline{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}+1\right)}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}+1\right)}\cdot\ldots\cdot 2=$$

Вспоминаем “факториальность” гамма-функции $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ и формулу из темы про бесконечные произведения $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$:

$$= 2\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = 2\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{m}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \frac{\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

(можно прогнать ещё для первых размерностей 2, 3)

ч. т. д.

1.4.7 Теорема Фату. Следствия

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n \geq 0$ — измерима
- $f_n \to f$ почти везде
- Если $\exists C > 0 \ \ \forall n \int_X f_n d\mu \leq C$

Тогда:

$$\int_X f d\mu \leq C$$

(тут, вообще говоря, не предполагается, что интегрально функции сходятся)

Доказательство:

Заведём $g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots\}$ (должно уже на что-то намекать). Очевидно, что эта последовательность возрастающая, так как у нас есть сходимость почти везде изначально. Также $\forall n : 0 \leq g_n \leq f_n$

Очевидно, что $g_n \leq f_n$, интегрируем!

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C \quad (*)$$

С другой стороны, так как $\lim_{n\to\infty} g_n$ суть есть $\underline{\lim} f_n = f$ (ну раз у нас есть сходимость, то и нижний предел сходится к f). Тогда по теореме Леви:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n = \int_X f \leq C$$

ч. т. д.

Следствие:

То же самое, только меняем сходимость почти везде на:

- $f_n, f \geq 0$, измеримы, почти везде конечны

- $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$

Доказательство:

Запускаем теорему Рисса, выбираем сходящуюся подпоследовательность и доказательство сработает.

Следствие:

- $f_n \geq 0$, измеримы

Тогда:

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

Доказательство: Вспоминаем 2й сем, там было несколько теорем о частичном пределе. Одна из них говорит, что если существует нижний предел, то существует и подпоследовательность к нему ведущая. А раз он существует (почему?), то всё гуд:

$$\exists n_k : \int_X f_{n_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \underline{\lim} \int_X f_n$$

Тогда запускаем (*):

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n$$

Левый интеграл по выкладкам из основной теоремы стремится к тому, чему надо. А для правого написано выше:

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

ч. т. д.

1.4.8 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \_)$ — пространства с мерой
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ — измеримо
- $\Phi : X \to Y$ — "измеримое"
- ν — взвешенный образ μ (с весом ω)

Тогда для $\forall f : Y \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ — измеримых:

1. $f \circ \Phi$ — измеримо (относительно $\mathfrak{A}$)

2. $\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) d\mu(x)$

Доказательство:

1.

Ну тут всё достаточно просто, нам дано, что f — измерима относительно $\mathfrak{B}$. Выводим измеримость через данное:

$$X(f \circ \Phi < a) = \Phi^{-1}(Y(f < a)) \in \mathfrak{A}, \quad (Y(f < a) \in \mathfrak{B})$$

Ну типа, мы перегоняем каждую точку из пространства, в котором нам известна измеримость, в новое. Причём, важно что прообраз этих множеств точно лежит в $\mathfrak{A}$ (по "измеримости" отображения Φ)

2. "Зоологическая теорема"

Запускаем классическое "ступенчатое" доказательство.

2.1 $B \in \mathfrak{B}, f = \chi_B$ **– ступенька**

По условию: $f \circ \Phi(x) = \chi_B(\Phi(x))$. Вообразим это в голове, и поймём, что это характеристическая функция образа $B_k := \chi_{\Phi^{-1}(B)}(x)$. С другой стороны, мы можем поинтегрировать функцию по Y :

$$\int_Y f d\nu = \nu(B) =$$

ν — взвешенная мера (по определению). Распишем:

$$= \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu = \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu =$$

Мы расширили интеграл, но добавили характеристическую функцию, чтобы занулить его вне искомой области. Ну и теперь подинтегральная функция просто и есть f:

$$= \int_X f \circ \Phi(x) \omega(x) d\mu$$

2. $f = \sum \alpha_k \chi_{B_k}(x)$ **— ступенчатая**

По линейности интеграла всё работает.

$$\int_Y \sum \alpha_k \chi_{B_k} d\nu = \sum \alpha_k \int_Y \chi_{B_k} d\nu = \sum \alpha_k \nu(B_k) =$$

$$= \sum \alpha_k \int_X (f_{B_k} \circ \Phi)(x) \omega(x) d\mu = \int_X \sum \alpha_k = \dots$$

Ну короче, всё хорошо.

3. $f \geq 0$ **— измеримая**

$g_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f, g_n \geq 0$ — ступенчатые. Запускаем теорему Леви и всё получается.

ч. т. д.

Следствие:

Вместо измеримости ≥ 0 можно взять и суммируемость.

Доказательство:

$|f|$ подходит по условию теоремы.

$|f|$ — суммируема относительно $\nu \Leftrightarrow f \circ \Phi$ суммируема относительно μ (почему?). "Тогда с задачей срезок не будет никаких проблем"

1.4.9 Критерий плотности

Тут мы резко свернули с абстрактных рельс на $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \Phi = \mathrm{id}$

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- ν — ещё одна мера на $\mathfrak{A}$
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, измеримо

Тогда эквивалентно:

1. ω — плотность μ отностительно μ
2. $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \inf_A \omega \cdot \mu A \leq \nu A \leq \sup_A \omega \cdot \mu A$

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$

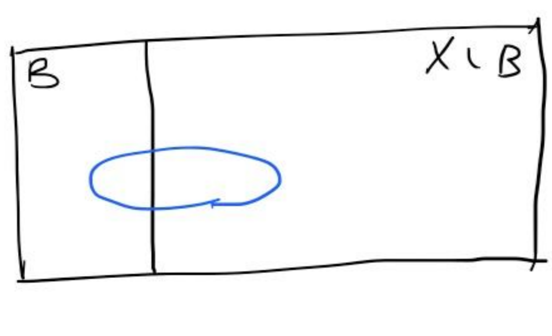
Очевидно (расписать по определению).

$2 \Rightarrow 1$

Проще рассматривать множество на ненулевых ω. Для начала, на нулевых всё выполняется: $B = X(\omega = 0)$.

$$\nu B = 0 = \int_B 0 d\mu$$

Ещё надо бы показать, что если множесто оказалось на перечении "нулевого" и "пложительного" веса, то оно не испортит нам оценку.

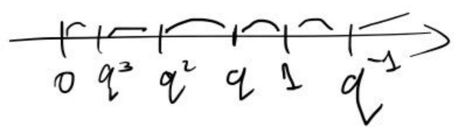


A — синее множество. Тогда $A \cap B$ — часть, где вес равен нулю, а $A \setminus B$ — где положительный. Посмотрим методом пристального взгляда на неравенства:

$$\nu A \leq \sup \omega \mu A$$
$$\nu A \setminus B + \underbrace{\nu A \cap B}_{=0} \leq \sup \omega \cdot (\mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B))$$

Как видно, мы только усилили неравенство (во втором случае мы проверяем только часть множества).

Зафиксируем $q \in (0, 1)$. Рассмотрим $A_j = A(q^j < \omega < q^{j-1})$, $j \in \mathbb{Z}$. Так как степень пробегает целые числа, то такое замощение покрывает всю положительную ось $\mathbb{R}$ ($A = \bigsqcup A_j$).



$$q^j \mu A_j \underbrace{\leq}_{1} \nu A_j \underbrace{\leq}_{2} q^{j-1} \mu A_j$$

$$q^j \mu A_j \underbrace{\leq}_{3} \int_{A_j} \omega d\mu \underbrace{\leq}_{4} q^{j-1} \mu A_j$$

Откуда взялись эти неравенства? Ну, первое просто напросто вытекает из предпосылки, и т. к. мы ограничили множество, очевидно, какие у него инфимум и супремум. А второе — просто расписали взвешенную меру. Записываем *очень* длинное оценочное неравенство:

$$q \int_A \omega d\mu = q \sum \int_{A_j} \omega d\mu \underbrace{\leq}_{4} q \sum q^{j-1} \mu A_j = \sum q^j \mu A_j \leq$$
$$\underbrace{\leq}_{1} \sum \nu A_j \underbrace{\leq}_{2} \sum q^{j-1} \mu A_j = q^{-1} \sum q^j \mu A_j \leq$$
$$\underbrace{\leq}_{3} q^{-1} \sum \int_{A_j} \omega d\mu = q^{-1} \int_A \omega d\mu$$

Таким образом, мы окольцевали:

$$q \int_A \omega d\mu \leq \sum \nu A_j = \nu A \leq q^{-1} \int_A \omega d\mu$$

Устремляем $q \to 1$ и получаем искомое.

ч. т. д.

1.4.10 Лемма о единственности плотности

Формулировка:

- f, g — суммируемы на X
- $\forall A$ — измеримое, $\int_A f = \int_A g$

Тогда $f = g$ почти везде

Доказательство:

Для удобства будем расматривать $h := f - g$. Тогда по условию теоремы $\forall A : \int_A |h| = 0$

Заведём $X_+ := X(h \geq 0), X_- := X(h < 0)$. Очевидно, что $X = X_+ \sqcup X_-$.

$\int_{X_+} |h| = \int_{X_+} h = 0$ (как и по любому измеримому множеству), $\int_{X_-} |h| = -\int_{X_-} h = 0$

Ну и значит и по всему пространству: $\int_X |h| = \int_{X_+} |h| + \int_{X_-} |h| = 0 - 0 = 0$. Получается, что $h = 0$ почти везде.

ч. т. д.

Следствие:

Плотность меры определяется однозначно с точностью до изменения на множестве меры 0.

1.4.11 Лемма об оценке мер образов малых кубов

Формулировка:

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^1$
- $a \in O$
- Пусть $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда $\exists \delta > 0$ $\forall$ Куб $Q \subset B(a, \delta)$, $a \in Q$ (кубик задевает за точку)

$$\lambda \cdot \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$$

Доказательство:

Пусть $L = \Phi'(a)$ (и оно ещё и обратимое, выводится из условия). Так как по условию $\Phi \in C^{-1}$, вблизи точки a она представляется как:

$$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a)$$

Преобразуем (там мы применили обратный оператор L^{-1} к "o"-шке, но ничего страшного, она осталась "o"-шкой):

$$\underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} = x + o(x - a)$$

$\Psi(x)$ представляет из себя сдвинутый (на a и $\Phi(a)$) Φ под действием обратного отображения L. И вот так получается, что он мапит иксы почти в себя самих. Давайте посмотрим на определение "о"-маленького (эпсилон немного отнормирован):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ шар } B_\varepsilon(a)\ \forall x \in B_\varepsilon(a) : |\Psi(x) - x| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$$

Пусть у нас есть куб Q внутри этого шара со стороной h: $Q \subset B_\varepsilon(a)$. Тогда $\forall x \in Q : |x - a| < \sqrt{m}h$. (точка a лежит внутри куба, оценили диагональю). Применяя выкладку из "о"-маленького, получаем:

$$|x - a| = \frac{\sqrt{m}}{\varepsilon}|\Psi(x) - x| < \sqrt{m}h$$

$$|\Psi(x) - x| < \varepsilon h$$

Теперь неочевидное: оценим для произвольных $x, y \in Q$ насколько близко они лежат друг к другу. Оценка на покоординатные функции по неравенству тругольника:

$$|\Psi_i(x) - \Psi_i(y)| = \underbrace{|\Psi_i(x) - x_i|}_{(1)} + \underbrace{|\Psi_i(y) - y_i|}_{(2)} + \underbrace{|x_i - y_i|}_{(3)} \leq$$

Сразу скажем, что покоординатные функции можно оценить сверху нормами на полную функцию (по последним достижениям), а две точки внутри куба уж точно лежат не более чем на h друг от друга. Таким образом:

$$\leq \varepsilon h + \varepsilon h + h = (1 + 2\varepsilon)h$$

Ну и всё, тогда $\Psi(Q)$ лежит внутри куба со стороной $(1 + 2\varepsilon)h$ (ну, мы же только что узнали, насколько сильно развозит точки при отображении). Оценим меру (мера Q тривиальна):

$$\lambda\Psi(Q) \leq (1 + 2\varepsilon)^m h^m = (1 + 2\varepsilon)^m \lambda Q$$

А как мы обсудили ранее, Ψ отличается от Φ только линейным отображением. Вспоминая прошлый сем, нам известно, что тогда мера Лебега множества после линейного отобрадения обязана домножиться на определитель оператора:

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L|\lambda\Psi(Q) \leq |\det L|(1 + 2\varepsilon)^m \lambda Q$$

Последний штрих, так как нам дали c, подберём такой ε, чтобы $|\det L|(1 + 2\varepsilon)^m < c$ (у нас есть такая возможность, так как по условию коэффициент c больше определителя). А в качестве δ выберем радиус $B_\varepsilon(a)$.

ч. т. д.

Лемма 2 (без доказательства):

Пусть $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывна, $A \subset O$ — измеримое множество. Тогда:

$$\inf_{G \subset O \text{ — открытые}, A \subset G} \left(\lambda G \cdot \sup_G f\right) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

1.4.12 Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости или L_{loc}

Формулировка:

- $f : X \times \tilde{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$
- X — пространство с мерой, $\mu X < +\overline{\mathbb{R}}$
- $\tilde{Y}$ — метризуемое топологическое пространство
- $Y \subset \tilde{Y}$
- $a \in \tilde{Y}$ — предельная точка Y
- $\forall y \in Y \quad x \mapsto f(x, y)$ — суммируема на X
- Пусть $f(x, y) \underset{y \to a}{\rightrightarrows} \varphi(x)$

Тогда φ — суммируема на X и

$$\lim_{y \to a} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X \varphi(x) d\mu(x)$$

Доказательство:

Сначала идёт часть для равномерной сходимости. Разберёмся с ней экстравагантно: запускаем $y_n \to a$ по Гейне! Далее, по условию равномерной сходимости, для (любого) $\varepsilon = 1$ (при больших n):

$$\forall x\ |f(x, y_n) - \varphi(x)| < 1$$

Ну ведь действительно, при больших n $y_n \to a$, а как раз при стремлении y к a у нас достигается равномерная сходимость. Из этого мы выводим суммируемость $\varphi(x)$ (меньше суммируемой f, неравевство треугольника (?)):

$$|\varphi(x)| < |f(x, y_n)| + 1$$

А это значит, что мы имеем право ставить φ под знак интеграла. Теперь посмотрим и оценим разность интегралов (последний переход — мы оцениваем интеграл наибольшим значением на меру всего множества X):

$$\left| \int_X f(x, y_n) - \int_X \varphi(x) \right| \le \int_X |f(x, y_n) - \varphi(x)| \le \cdot \sup_X |f(x, y_n) - \varphi(x)| \cdot \mu X \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Заметьте, что сыграла конечность меры X (супремум стремится к нулю, очевино, по равномерной сходимости).

ч. т. д.

Формулировка для L_{loc}:

f, g из определения L_{loc}, $f \in L_{loc}(a)$ с данной g. $\lim_{y \to a} f(x, y) = \varphi(x)$ при почти всех x.

Тогда φ суммируемая на X и:

$$\lim_{y\to a}\int_X f(x,y) = \int_X \varphi(x)$$

Доказательство:

Запускаем Гейне $y_n \to a$. Раз при почти всех x условие выполняется, то на этой последовательности y_n запускаем теорему Лебега о мажорированной сходимости (мажоранта — g из условия L_{loc}) и получаем искомое.

ч. т. д.

Следствие:

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $\forall y : x \mapsto f(x,y)$ — измерима на X.

$a \in Y$, при п. в $x : f(x,y)$ непрерывна в $y = a$. Пусть $f \in L_{loc}(a)$. Тогда:

$$J(y) = \int_X f(x,y)d\mu(x) \text{ — непрерывна в точке } a$$

Доказательство:

Берём $\varphi(x) = f(x,a)$ и проверяем непрерывность теоремой:

$$J(y) = \int_X f(x,y)d\mu \underset{y\to a}{\longrightarrow} \int_X f(x,a)d\mu = J(a)$$

ч. т. д.

1.4.13 Предельный переход по параметру в несобственном интеграле

Формулировка:

- $f : \langle a,b\rangle \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$
- $Y \subset \tilde{Y}$ — метризуемое
- $y_0 \in \tilde{Y}$ — предельная точка Y

1. при почти всех $x \exists f_0(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y)$
2. $\forall t \in (a,b)\ \forall f(x,y_0), f(x,y)$ — суммируемые по x на (a,t) и $\int_a^t f(x,y)dx \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} \int_a^t f_0(x)dx$
3. $J(y) = \int_a^{\to b} f(x,y)$ — равномерно сходящаяся при $y \in Y$

Тогда $\int_a^{\to b} f_0(x)dx$ — существует (как несобственный)

Доказательство:

КПК в данном месте подарил нам “ложное напоминание” (на самом деле это “Теорема о перестановке двух предельных переходов” из 3го семестра, записанная в более общем виде). Приведём её и подгоним под неё:

- $F : T \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$
- $Y \subset \tilde{Y}, T \subset \tilde{T}$ — метризуемые т. п. (ну или метрические)
- $y_0 \in \tilde{Y}, t_0 \in \tilde{T}$ — предельныя точка
- $\forall t \in T$ $\exists$ конечный $L(t) = \lim_{y \to y_0} F(t, y)$
- $\forall y \in Y$ $\exists$ конечный $J(y) = \lim_{t \to t_0} F(t, y)$
- Хотя бы один из этих пределов равномерный

Тогда $\exists$ конечный $\lim_{t \to t_0} L(t) = \lim_{y \to y_0} J(y)$

Ну и всё, теперь пишем "словарик" и запускаем воспоминание:

$T = \langle a, b \rangle,\ \tilde{T} = \overline{\mathbb{R}},\ t_0 = b,\ F(t, y) = \int_a^t f(x, y)dx,\ L(t) = \int_a^t f_0(x)dx,\ J(y)$ — равномерно сходится.

ч. т. д.

Следствие:

Добавляем условия:

- вместо условия (1): при почти всех $x : f(x, y)$ — непрерывна в y_0
- $f_0(x) := f(x, y_0)$

Тогда $J(y)$ — непрерывна в y_0 (последнее заключение теоремы будет ровно этим).

Доказательство:

Видимо, там $+-$ то же самое, что и в прошлой теореме. Приведено не было.

1.4.14 Теорема об интегрировании по параметру в несобственном интеграле

Формулировка:

- $f : (a, b) \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ — "допустима", т. е. f суммируема по мере $\lambda_1 \times \mu$ для $\forall t \in (a, b)$ на $(a, t) \times Y$
- $\mu Y < +\infty$
- $J(y) = \int_a^{\to b} f(x, y)dx$ — равномерно сходится на Y
- $I(y) := \int_Y J(y)d\mu$

Тогда:

1. $J(y)$ — суммируема на Y
2. $\int_a^{\to b} I(x)dx$ — сходится

$$\int_Y \left(\int_a^{\to b} f(x, y)dx \right) d\mu = \int_a^{\to b} \left(\int_Y f(x, y)d\mu \right) dx$$

$$\int_Y J(y)d\mu = \int_a^{\to b} I(x)dx$$

Доказательство:

1. Суммируемость $J(y)$

Введём $J_t(y) = \int_a^t f(x,y)dx$. По теореме Фубини (внезапно) (под теорему Фубини подходит, так как функция суммируема по условию ("допустимость")) эта функция суммируема по y! (первый пункт). Зашибись. Тогда вспоминаем про равномерную сходимость: $J_t \underset{t\to b}{\rightrightarrows} J$. По определению, для $\varepsilon = 1$ при любых y будет выполняться:

$$|J_t(y) - J(y)| = \left|\int_t^{\to b} f(x,y)dx\right| < 1$$

Получается, $J_t(y) - J(y)$ — суммируема по y (потому что при любых y она ограничена, а Y конечной меры по условию).

Ну а раз всё это случилось, то и $J(y)$ — суммируемая.

2. Сходимость

Заметим, что $I_t(x)$ есть результат применения теоремы Фубини к $J_t(y)$! А так как она тут прекрасно применятся, расписываем повторный интеграл:

$$\int_a^t I(x)dx = \int_Y \int_a^t f(x,y)dxd\mu = \int_Y \left(\int_a^{\to b} fdx - \int_t^{\to b} fdx\right) d\mu =$$

$$= \int_Y J(y)d\mu - \int_Y \int_t^{\to b} fdxd\mu$$

Отсюда получаем оценку:

$$\left|\int_a^t I(x)dx - \int_Y J(y)d\mu\right| \le \left|\int_Y \int_t^{\to b} fdxd\mu\right| \le \mu Y \cdot \sup_Y \left|\int_t^{\to b} fdx\right| \underset{t\to b-0}{\longrightarrow} 0$$

Y конечной меры, оцениваем как обычно, и главное понять, что супремум — ровно из определения равномерной схоимости! Супремум хвостиков несобственного интеграла стремится к нулю!

ч. т. д.

1.4.15 Правило Лейбница для несобственного интеграла

Формулировка:

- $f : [a,b) \times \langle c,d\rangle \to \mathbb{R}$ — непрерывная
- $\forall y \in \langle c,d\rangle \ \exists \ J(y) = \int_a^{\to b} f(x,y)dx$
- $\forall x \in [a,b),\ \forall y \in \langle c,d\rangle \ \exists \ f'_y(x,y)$ непрерывная на $(a,b) \times \langle c,d\rangle$
- $I(y) = \int_a^{\to b} f'_y(x,y)dx$ — равномерно сходится на Y

Тогда $J(y) \in C^1$ и $J'(y) = I(y)$, то есть:

$$\left(\int_a^{\to b} f(x,y)dx\right)'_y = \int_a^{\to b} f'_y(x,y)dx$$

Доказательство:

Ну, сразу, $I(y)$ непрерывен по следствиюи из теоремы о предельном переходе в несобственном интеграле. Рассмотрим $s_0, s_1 \in \langle c, d\rangle$ и поинтегрируем по ним:

$$\int_{s_0}^{s_1} I(y)dy = \int_{s_0}^{s_1}\int_a^{\to b} f'_y(x,y)dxdy =$$

Заметим, что это ровно предыдущая теорема! Так поменяем пределы интегрирования и посчитаем:

$$= \int_a^{\to b}\int_{s_0}^{s_1} f'_y(x,y)dydx = \int_a^{\to b} f(x,s_1) - f(x,s_0)dx = J(s_1) - J(s_0)$$

Вспоминаем теорему Барроу. Если мы фиксируем s_0, то у нас фактически получается интеграл с переменным верхним пределом, и, таким образом, $J(y)$ дифференцируема и суть есть первообразная $I(y)$ (аж формула Ньютона-Лейбница вылезла + там всё работает из-за непрерывности на аккуратно подрезанном нами прямоугольнике $[a, b) \times \langle c, d\rangle$).

ч. т. д.

1.4.16 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

Формулировка:

- Y — промежуток $\subset \mathbb{R}$
- $f : X \times Y \to \mathbb{R}$
- $\forall \quad f(x, y)$ — суммируемая функция от x
- При почти всех x $\forall y \exists f'_y(x, y)$
- f'_y — удовлетворяет условию $L_{loc}(y_0)$

Тогда:

- $J(y) = \int_X f(x, y)d\mu(x)$ — дифференцируема в y_0
- $J'(y_0) = \int_X f'_y(x, y)d\mu(x)$

Доказательство:

Заметим, что первые условия — просто “проверка на дурака”, чтобы не было желания засунуть под знак интеграла плохую функцию. Рассмотрим:

$$F(x,h) := \frac{f(x,y_0+h) - f(x,y_0)}{h} \quad (*)$$

С другой стороны:

$$\frac{J(y_0+h) - J(y_0)}{h} = \int_X F(x,h)$$

А что вообще произошло-то? Мы просто оп определению записали то, что хотим получить и доказать. Ещё раз, нам очень хочетнся, чтобы последний интеграл (который есть производная всей функции по параметру) стремился к интералу по производной:

$$\int_X F(x,h) \underset{?,h\to 0}{\longrightarrow} \int_X f'_y(x,y_0)$$

Чтобы иметь возможность сделать такой предельный переход, надо иметь какие-то на это основания. Давайте проверим, а не принадлежит ли $F \in L_{loc}(h=0)$? Для этого надо придумать оценку на неё. А (*) вам ничего не напоминает? Конечно, это же теорема Лагранжа! Тогда наша функция суть есть производная в какой-то средней точке:

$$|F(x,h)| = |f'_y(x,y_0+\theta h)| \leq g(x)$$

h стремится к нулю, а в окрестности y_0 для f'_y выполняется условие $L_{loc}(y_0)$ (по условию теоремы), вследствие чего F тоже имеет суммируемую мажоранту. Ну и теперь, раз мы доказали, значит F суммируема при $h \to 0$ (???) и предельный переход законен.

ч. т. д.

1.4.17 Теорема о вложении пространств L^p

Формулировка:

- $\mu E < +\infty, 1 \leq s < r \leq +\infty$

Тогда:

1. $L_r(E,\mu) \subset L_s(E,\mu)$
2. $||f||_s \leq (\mu E)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \cdot ||f||_r$

Доказательство:

То есть, пространства становятся всё уже по мере роста параметра p. Заметим, что 1 следует из 2го (по определению у нас пространства задаются через (так или иначе) через норму (интеграл в степени)), и тут мы показали, что если $||f||_r$ конечен, то s уж точно конечен, а наоборот может быть и неправда.

Для случая $r = \infty$ всё очевидно (оцениваем сверху интеграл мерой множества на сущ. супремум, по его свойствам всё хорошо (и, что самое главное, по здравому смыслу тоже)):

$$||f||_s = \left(\int_E |f|^s d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \leq (\mu E)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot \operatorname{ess\,sup} f \leq (\mu E)^{\frac{1}{s}} \operatorname{ess\,sup} f$$

Тогда остался случай $r < +\infty$. Распишем норму f в L_s в степени s:

$$||f||_s^s = \int_E |f|^s d\mu = \int_E |f|^s \cdot 1 d\mu$$

Приготовим $p = \frac{r}{s}$ и $q = p' = \frac{r}{r-s}$ и запустим неравенство Гёльдера!

$$\int_E |f|^s \cdot 1 d\mu \leq \left(\int_E |f|^{s \cdot \frac{r}{s}} d\mu\right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left(\int_E 1 d\mu\right)^{\frac{r-s}{r}} = \left(\int_E |f|^r d\mu\right)^{\frac{s}{r}} \cdot (\mu E)^{\frac{r-s}{r}}$$

Возведём обе части неравенства в степень $\frac{1}{s}$:

$$\left(\int_E |f|^s d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\int_E |f|^r d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \cdot (\mu E)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}}$$

Приглядимся, и увидим, что это то, что мы искали!

$$||f||_s \leq (\mu E)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot ||f||_r$$

ч. т. д.

Следствие:

Если в условиях теоремы $f_n \xrightarrow[L_r]{} f$, то и $f_n \xrightarrow[L_s]{} f$.

Доказательство:

$$||f_n - f||_s \leq (\mu E)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot ||f_n - f||_r \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

ч. т. д.

1.4.18 Теорема о сходимости в L^p и по мере

Формулировка:

$1 \leq p < +\infty \quad f_n \in L_p(E, \mu)$:

1. $f \in L_p \quad f_n \xrightarrow[L_p]{} f$, тогда $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$
2. $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$ [либо $f_n \to f$ почти всюду], $|f_n| \leq g$ почти всюду, при всех n, где $g \in L^p$. Тогда $f_n \xrightarrow[L_p]{} f$

Доказательство:

1. Сходимость по мере

Классический алгоритм: $E_n(\varepsilon) = E(|f_n - f| \geq \varepsilon)$. Понаблюдаем за мерой n-го такого множества:

$$\mu E_n(\varepsilon) = \int_{E_n} 1 d\mu \leq \int_{E_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} d\mu \leq \int_{E_n} \frac{|f_n - f|^p}{\varepsilon^p} d\mu = \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{E_n} |f_n - f|^p d\mu = \frac{||f_n - f||_p^p}{\varepsilon^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ну, собственно говоря, просто череда оценок, в конце которой делаем предельный переход и получаем, что по определению сходимость по мере есть.

2. Сходимость в L^p

Из сходимости по мере достаём сходящуюся подпоследовательность (по теореме Рисса) $f_{n_k} \to f$ (ну или если у нас именно такое условие, то просто берём сходящуюся почти везде последовательность). Отсюда получаем принадлежность $f \in L^p$: делаем предельный переход в неравенстве из условия $|f_n| \leq g$ при п. в. x, причём $g \in L^p$. Ну супер, получаем положительную (даже лучше чем суммируюмую (ведь просто суммирумость есть L^1)) мажоранту:

$$\forall n : |f_n - f| \leq 2g$$

И запускаем теорему Лебега о мажорированной сходимости:

$$||f_n - f||_p^p = \int_E |f - f_n|^p d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ч. т. д.

1.4.19 Полнота L^p

Формулировка:

$L^p(E, \mu)$ —- полное ($1 \leq p < +\infty$)

Доказательство:

Основная идея: соорудить кандидата на предел и свести фундаментальную последовательность к нему, как в доказательстве полноты непрерывных функций на компакте в прошлом семестре.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N : ||f_n - f_m||_p < \varepsilon$$

Вот у нас есть такая фундаментальная последовательность. И мы можем заказывать себе коэффициенты! Давайте попробуем:

$$\exists n_1 : \forall n_k > n_1 \ ||f_{n_1} - f_{n_k}||_p < \frac{1}{2}$$

Получилось) Продолжаем:

$$\exists n_2 : \forall n_k > n_2 \ ||f_{n_2} - f_{n_k}||_p < \frac{1}{4}$$

$$\dots$$

$$\exists n_m : \forall n_k > n_m \ ||f_{n_m} - f_{n_k}||_p < \frac{1}{2^m}$$

Соорудим функциональный ряд $S(x) := \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|, S(x) \in [0, +\infty]$ (тут уже просто модуль, не перепутайте) и посмотрим на его частичные суммы S_n. Его норма ограничена (по неравенству треугольника):

$$||S_n||_p \leq \sum_{k=1}^{n} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq 1$$

Требуется сразу несколько комментариев. Во-первых, по-хорошему мы должны были брать норму от модуля разности, но это немного бессмысленно, поэтому просто пишем норму. Ну и оценка на эти нормы у нас была заказана выше, поэтому конечных сумма обратных степеней двойки действительно меньше 1. Окей, также, очевидно, что частичные суммы сходятся к самому ряду. А ещё, если взглянуть с другой стороны:

$$||S_n||_p^p = \int_E |S_n|^p \leq 1$$

Тут посмотрели на норму в степени, чтобы избавиться от дробной. Ну а единичке без разницы, в какую степень её возводят. Так вот, теперь можно применить теорему Фату!

$$\int_E |S|^p \leq 1$$

Получается, что интеграл нашего ряда ограничен! Значит, сама функция — суммируемая, супер, а значит — она почти везде конечна. Внимание, появился кандидат на предельную функцию!

$$f(x) := f_{n_1} + S(x) = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

Посмторим на f_n:

$$f_{n_N} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{N} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_{N+1}}$$

У нас есть сходимость ряда $S(x)$ почти везде, из-за чего можно сказать, что $f_n \to f$ по сходимости изначального ряда (вроде бы очевидно). Ну вот, у нас есть тепрь обычная сходимость, а надо притянуть её за уши к сходимости в L^p. Запишем ещё раз определение фундаментальной последовательности для нашего случая:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N : ||f_n - f_m||_p < \varepsilon$$

Возьмём $m = n_k$ и возведём неравенство в степень p:

$$||f_n - f_{n_k}||_p^p = \int_E |f_n - f_{n_k}|^p < \varepsilon^p$$

Опять применяем теорему Фату и получаем искомое (т. к. у нас есть сходимость $f_{n_k} \to f$):

$$\int_E |f_n - f|^p < \varepsilon^p$$

Ура, всё сошлось и в L^p!

ч. т. д.

1.4.20 Плотность в L^p множества ступенчатых функций

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), 1 \leq p \leq +\infty$

Тогда множество ступенчатых функций плотно в $L_p(X, \mu)$

Доказательство:

1. $r = \infty$

Давайте изменим нашу функцию нулями так, чтобы $|f| \leq ||f||_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f|$ п. в. x. Заметим, что изменения эти будут на множестве меры 0! (по определению и свойствам существенного супремума). (зачем??? может быть, чтобы корректно определять ступенчатую функцию для f?)

Тогда (сдувая пыль) по теореме из 3го семестра о характеризации измеримых функций ступенчатыми, а точнее по её следствию, у нас существуют $\varphi \underset{E}{\rightrightarrows} f_-, \psi \underset{E}{\rightrightarrows} f_+$, и их разность $\psi - \varphi \underset{E}{\rightrightarrows} f$. По определению равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n > N \; \forall x \in E : \sup |f - (\psi - \varphi)| < \varepsilon$$

2. $r < +\infty$

Пусть $f \geq 0$. Тогда по той же теореме существует $g_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f, g_n$ — ступенчатые.

$$||g_n - f||_p^p = \int_E |g_n - f|^p d\mu \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости (мажорантой тут выступает $f^p : |g_n - f|^p < f^p$). Для поддержки функций разного знака надо повторить выкладки из пункта 1 и всё получится.

ч. т. д.

1.4.21 Лемма Урысона

Формулировка:

- X — нормальное топологическое пространство (например, $\mathbb{R}^m$)
- $F_0, F_1 \subset X$ — замкнутое
- $F_0 \cap F_1 = \varnothing$

Тогда: $f : X \to \mathbb{R}, \quad 0 \leq f \leq 1$ — непрерывное

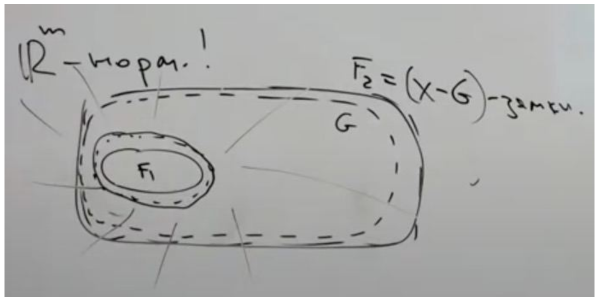
$f|_{F_0} \equiv 0$, $f|_{F_1} \equiv 1$

Доказательство:

Для начала переиначим первую аксиому нормальности:

$\forall F$ — замкнутое, $\forall G$ — открытое, $F \subset G$, $\exists U(F)$ — открытое:

$$F \subset U(F) \subset \overline{U(F)} \subset G$$



на картинке $F := F_1$

Ну, то есть, мы всегда можем поместить замкнутое множество внутрь откртой окрестности так, что даже если мы её замкнём, она всё ещё будет лежать внутри открытого множества. Ну или сузить окрестность (в случае, если это дополнение пространства).

Запустим эту тему на наших входных данных: $F := F_0, G := F_1^c =: G_1$. Тогда:

$$\exists U(F) : F \subset \underbrace{U(F)}_{G_0} \subset \underbrace{\overline{U(F)}}_{\overline{G_0}} \subset G_1$$

$$\exists U(F) : \overline{G_0} \subset \underbrace{U(\overline{G_0})}_{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{\overline{U(\overline{G_0})}}_{\overline{G_{\frac{1}{2}}}} \subset G_1$$

$$\exists U(F) : \overline{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})}_{G_{\frac{3}{4}}} \subset \underbrace{\overline{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})}}_{\overline{G_{\frac{3}{4}}}} \subset G_1$$

Ну и вот таким алгоритмом мы строим G_q для каждого двоично-рационального $q \in (0, 1)$ (далее в повестровании q, q_1 — двоично рационльные числа), причём $\forall \alpha < \beta : G_\alpha \subset \overline{G_\alpha} \subset G_\beta$ (по построению). Тогда утверждается, что:

$$f(x) := \inf\{q : x \in G_q\}$$

Ну, то что на F_0 у нас функция равна 0 вроде бы очевидно, т. к. тогда у нас x будут сожержаться в $F_0 \subset G_0$. А если $x \in F_1$, то точка не содержится вообще ни в одном G_q, то инфимум просто выдаст 1. Осталось лишь доказать непрерывность. А она доказывается по топологическому определению непрерывности:

$$f\text{— непрерывна} \Leftrightarrow \forall a, b : f^{-1}(a, b)\text{— открыто}$$

На самом деле, достаточно доказать что:

$$f^{-1}(a, b) = \underbrace{f^{-1}(-\infty, b)}_{(1)} \setminus \underbrace{f^{-1}(-\infty, a]}_{(2)}$$

1. $\forall s : f^{-1}(-\infty, s)$ — открытое

   $f^{-1}(-\infty, s) = \bigcup_{q<s} G_q$ (объединение открытых открыто)

   Доказательство:

   a. $\subset$

   $f(x) \le q < s$ (ну просто отправляем в какое-то множество до s), очев.

   b. $\supset$

   $f(x) = s_0 < s$. Давайте вобьём между ними двоично рациональное q, и у нас всё получится (т. к. множества упорядочены по включению, показывали выше) $f(x) = s_0 < q < s$.

2. $\forall s : f^{-1}(-\infty, s]$ — замкнутое

   $f^{-1}(-\infty, s) = \bigcap_{q>s} G_q = \bigcap_{q>s} \overline{G_q}$ (пересечение замкнутых замкнуто)

   Доказательство (последнего перехода):

   a. $\subset$

   Очевидно, множества лежат внутри замыканий.

   b. $\supset$

   Вот у нас есть $q > s$. Давайте возьмём r, такое что $q > r > s$. Тогда $\bigcap G_q \supset \bigcap \overline{G_r}$ (некоторых). То есть, мы помапили q в r, возможно где-то там выпал один и тот же r, и их пересечение (т. к. ещё множества стали поменьше), лежат в пересечении без замыкания. Ну а потом $\supset \overline{G_r}$ (всех, пересекли все множества r, и попасть туда стало сложнее).

ч. т. д.

1.4.22 Плотность в L^p непрерывных финитных функций

Формулировка:

- $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}^m, \lambda_m)$

Тогда $C_0(\mathbb{R}^m)$ плотно в $L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

Доказательство:

Первое, что приходит в голову, это приблизить ступенчатую функцию финитными, и тогда у нас всё получится. Однако, возникает проблема, что некоторые ступеньки в ступенчатой функции могут быть заданы на неораниченном множестве, что противоречит определению финитной функции — она должна принимать ненулевые значения только внутри некоторого, вполне конечного, шара. Поэтому с этим необходимо разобраться отдельно (придумать такую систему, в которой мы сможем приближать даже неограниченные ступеньки финитными функциями). Займёмся этим:

$$f \in L^p,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists B_1 — \text{шар}\ : ||f - f \cdot \chi_{B_1}||_p < \varepsilon$$

Почему это выполняется? Заведём меру $\mu E = \int_E |f|^p$ и применим для неё теорему о непрерывности меры снизу:

$$\mu B(0, r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \mu(\mathbb{R}^m) = \int_{\mathbb{R}^m} |f|^p = ||f||_p^p$$

Взяли систему "возрастающих" множеств, и в пределе оно дало меру объединения. А мера объединения оказалось нормой! Так, тогда давайте проверять наше неведомо условие:

$$||f - f \cdot \chi_{B_1}||_p^p = \int_{\mathbb{R}^m} |f - f \cdot \chi_{B_1}| = \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_1} |f|^p = \mu(\mathbb{R}^m) - \mu(B_1)$$

Очев, что мы можем за бесплатно сузить интеграл и расписать его в терминах нашей экспериментальной меры. А эта разница, как мы выяснили только что, стремится к нулю при больших r. Таким образом, мы умеем хорошо приближать функцию из L^p ступенчатой, ступеньки которой ограничены и лежат внутри шара (а то, что не помещается, принебрежимо мало). Тут написано ровно это. Тогда, для f существует f_1 — ступенчатая, такая что:

$$\forall \varepsilon : ||f - f_1||_p < \varepsilon$$

По плотности ступенчатых функций. Ну и тогда, по новейшим достижениям, существует и шар B:

$$||f - f_1 \cdot \chi_B||_p < \varepsilon$$

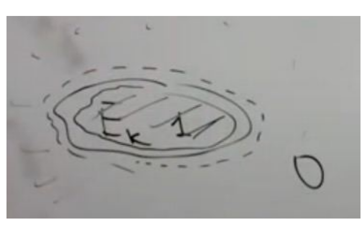
Причём:

$$f_1 \cdot \chi_B = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$$

Заметьте, что все E_k уже лежат внутри шара B, и они ограничены (ну, так получается по построению). Ура, теперь можно приходить к самой приятной части — применению тяжёлой артиллерии (в этом месте передаём привет конспекту Jovvik'а). Будем приближать финитной функцией каждую E_k. Очень хочется запустить лемму Урысона (иначе зачем она была вообще нужна?!), но для этого нам нужны два непересекающихся замкнутых множества. Вспоминаем о регулярности меры Лебега, и получаем, что существуют $F_k \subset E_k \subset G_k$, F_k — замкнутое, G_k — открытое, да ещё и с неплохими оценками:

$$\lambda(E_k \setminus F_k) < \varepsilon$$
$$\lambda(G_k \setminus E_k) < \varepsilon$$

$F_0 = G_k^c, F_1 = F_k$ — окружаем наше E_k и запускаем лемму Урысона. Получается, нам выдали f, которая на почти всём E_k даёт 1, а на всём остальном — 0. А что такое "почти"? Посмотрим поближе:



Заметим, что не умаляя общности, мы можем выбрать эти множества так, чтобы выполялось $F_k \subset E_k \subset G_k \subset B$ (ну там типа подрезать G_k немного если что, не страшно, $E_k \subset B$ изначально). Ещё, взглянув на картинку, становится видно, что почти на всём $E_k : f \equiv 1$, на дополнении 0, а вот на разности $G_k \setminus F_k$ не ноль. Оценим это дело единицей (разность двух чисел под модулем, наверное по-хорошему надо двойкой оценивать, но там дальше удобнее единицей, сильно ничего не поменяется, можно будет больше эпсилонов взять).

$$||f-\chi_{E_k}||_p^p = \int_B |f-\chi_{E_k}|^p \le \int_{G_k \setminus F_k} 1^p = \lambda G_k \setminus F_k = 2\varepsilon$$

По оценкам сверху.

ч. т. д.

1.4.23 Интегрирование по мере Бореля–Стильтьеса, порожденной функцией распределения (с леммой)

Факт (в который мы верим):

h — измерима $\Rightarrow\ \forall B \in \mathfrak{B},\ D \subset \mathbb{R},\ h^{-1}(B)$ — измеримо в X.

Формулировка (лемма):

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима, почти везде конечна
- μ_H — мера Бореля-Стилетьса
- $\nu = h(\mu)$ — образ меры μ под действием отображения h

Тогда μ_H совпадает с ν.

Доказательство (леммы):

Проверим на полукольце ячеек $\mathcal{P}^1$, а потом запустим теорему о продолжении. По определению, у нас функция $H(x)$ задана как $X(h < a)\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$. То есть, для неё выполняется теорема о непрерывности меры снизу, а значит $\forall s : H(s-0) = H(s)$. $\forall [a,b) \in \mathcal{P}^1$:

$$\mu_H[a,b) = H(b) - H(a) = \mu X(h < b) - \mu X(h < a) = \mu X(a \le h < b) =$$

Заметим, что $\nu(A) = \mu(h^{-1}(A))$ по определению, $\nu[a,b) = \mu\left(h^{-1}[a,b)\right)$. Наконец, $X(a \le h < b) = h^{-1}[a,b)$ (ну, просто мы смотрим на множество точек, при которых $a \le h < b$. Ну, это оно и есть).

$$= \mu\left(h^{-1}[a,b)\right) = \nu[a,b)$$

Таким образом, на полукольце ячеек они действительно совпадают. Теперь запускаем теорему о продолжении, на мере Бореля-Стильтьеса всё получается по определению, а вот $h(\mu)$ всё получается просто по единственности меры (?). Дело в том, что она задана на борелевской σ-алгебре (в каком-то смысле минимальной), и тогда теорема о продолжении просто вернёт саму $h(\mu)$.

ч. т. д.

Формулировка:

- $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} \ge 0$, измерима по Борелю

- $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, измерима, почти везде конечна
- H — функция распеределения
- μ_H — мера Бореля-Стильетса

Тогда:

$$\int_X f\left(h(x)\right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_H(t)$$

Доказательство:

Просто применяем теорему о вычислении интеграла по взвешенному образу меры: $Y = \mathbb{R},\ \mathfrak{B}, h(\mu)$. $\Phi = h,\ \omega = 1$.

ч. т. д.

Замечание:

Если f меняет знак, то f — μ_H-суммируемая (или $f \circ h$ μ-суммируемая), то тоже имеет место такая теорема.

1.4.24 Теорема об интегрировании по частям

Замечания (их надо доказывать?):

1. g — возврастающая, $g \in C^1$

$$\mu_g(A) = \int_A g'(t) dt$$

2. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — абсолютно-непрерывная функция, если $\exists g$ — суммируемая (может быть локально суммируемая):

$$\forall p, q \in \langle A, B\rangle : f(q) - f(p) = \int_p^q g(t) dt$$

3. В случае $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, монотонная и возрастающая:

$$d\mu_g(t) \leftrightarrow dg(t)$$

4. Если $G \geq 0$, Тогда F — непрерывная, возрастающая, и тогда при почти всех x $\exists$ $F'(x) = g(x)$

Формулировка:

- $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, возрастающая
- f — абсолютно непрерывная функция (C^1) на $[a, b]$
- μ_H — мера Лебега-Стильетса (так как для теоремы Фубини нужна полнота меры)

Тогда:

$$\int_{[a,b)} f(x)dg(x) = fg|_a^b - \int_{[a,c]} f'(x)g(x)dx$$

Доказательство:

1. $f(a) = g(b) = 0$

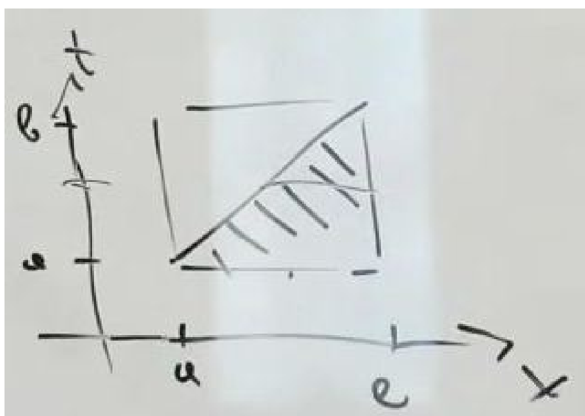
По абсолютной непрерывности f:

$$f(x) - f(a) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = f(x)$$

Запускаем теорему Фубини на $\mu_g \times \lambda$:

$$\int_{[a,b)} f(x)dg(x) = \int_{[a,b)} \left(\int_0^x f'(t)d\lambda_1(t)\right) dg(x) =$$

Глядим на график:



И меняем границы интегрирования, сохраняя единообразие интеграла:

$$= \int_a^b \left(\int_{[t,b)} f'(t)dg(x)\right) d\lambda_1(t) = \int_a^b f'(t) \left(\int_{[t,b)} dg(x)\right) d\lambda_1(t) = -\int_{[a,b]} f'(t)g(t)d\lambda_1(t)$$

Минус вылез при подстановке $[t, b) : g(b) - g(t) = 0 - g(t) = -g(t)$

2. Общий случай

Отказываемся от нулей и просто интегрируем:

$$\tilde{g}(x) = g(x) - g(b), d\tilde{g}(x) = dg(x)$$

$$\int_{[a,b)} f(x) - f(a)d\tilde{g} = (f(x) - f(a))\,(g(x) - g(b))\,|_a^b \underbrace{- \int_{[a,b]} f'(x)\,(g(x) - g(b))\,dx}_{(1)}$$

$$\int_{[a,b)} f(x)d\tilde{g}\underset{\sim\sim\sim}{-f(a)\left(g(a)-g(b)\right)} = f(x)g(x)|_a^b\underset{\sim\sim\sim}{-f(a)\left(g(a)-g(b)\right)}\underline{-f(x)g(b)|_a^b}-\int_{[a,b)} f'(x)g(x)dx\underline{+g(b)f(x)|_a^b}$$

Подчёркнутое сокращается, и всё получается.

ч. т. д.

1.4.25 Лемма о "почти признаке Дирихле"

Формулировка:

- $-\inf < a < b \le +\inf$
- f — "доп." на $[a,b)$ $(\forall A \in (a,b) f$ — суммируема на $(a,A))$
- $g(x)$ — монотонно стремится к 0 при $x \to b-0$
- Пусть функция $F(t) = \int_a^t f dx$ — ограничена

Тогда:

$$\int_a^{\to b} fgdx$$

— сходится

$$\left|\int_a^{\to b} fgdx\right| \le |g(a)| \cdot \sup_{t\in(a,b)} \left|\int_t^{\to b} fdx\right|$$

Доказательство:

По теореме Барроу (?):

$$F'(t) = f(t)$$

Зафиксируем $a < t < b$, запишем $\int F(t)g(t)$ по частям, поменяв крайние слагаемые местами:

$$\underbrace{\int_a^t g(x)f(x)dx}_{\int gdF(x)} = F(x)g(x)|_a^t - \int_a^t F(x)dg(x)$$

Заметим, что μ_g — конечна (так как g — монотонно убывает, и максимальное значение принимает в точке a), а $F(t)$ — ограничена. Получается, что $F(t)$ суммируема по мере μ_g. То же самое, только по-другому:

$$\exists \text{ конечный } \lim_{t\to b} F(t)$$

С другой стороны, опять же по ограниченности $F(t)$ и монотонному убыванию $g(t) \to 0$:

$$\lim_{t\to b} F(t)g(t) = 0$$

Делаем предельный переход в исходном равенстве (интегрировали по частям), и получаем:

$$\int_a^{\to b} f(x)g(x)dx = \int_a^{\to b} F(x)dg(x)$$

Заметим, что интеграл справа на самом деле собственный (доказали выше, из этого, кстати, следует сходимость исходного интеграла (+ из суммируемости F)). Ну и осталось соорудить оценку:

$$\left|\int_a^{\to b} f(x)g(x)dx\right| = \left|\int_a^{\to b} F(x)dg(x)\right| \leq |g(a)| \cdot \sup_{t\in(a,b)} |F(t)| = |g(a)| \cdot \sup_{t\in(a,b)} \left|\int_a^t f(x)\right| dx$$

$g(a) = \max_{[a,b)g(x)}$ — максимальное значение, ну и стандартная оценка интеграла супремумом.

ч. т. д.

1.4.26 Следствие о "почти признаке Абеля"

Формулировка:

- $\int_a^{\to b} fdx$ — сходится, g — монотонна и ограничена на $[a,b)$

Тогда: $\int_a^{\to b} fgdx$ — сходится, и к тому же:

$$\left|\int_a^{\to b} fg\right| \leq 5 \cdot \sup_{(a,b)} |g(t)| \cdot \sup_{[a,b)} \left|\int_t^{\to b} f(x)dx\right|$$

Доказательство:

Ну, тут что-то более менее классическое:

$$\lim_{x\to b} g(x) = L \text{ (монотонна ограничена же)}$$

Тогда:

$$\int_a^{\to b} fgdx = \underbrace{\int_a^{\to b} f(g-L)dx}_{(1)} + L\underbrace{\int_a^{\to b} fdx}_{(2)}$$

(1) сходится по Дирихле, (2) — по условию. Сходимость есть, осталась оценка ($III + IV$ по Дирихле опять же):

$$\left|\int_a^{\to b} fgdx\right| \leq \underbrace{|L|}_{I} \cdot \underbrace{\left|\int_a^{\to b} fdx\right|}_{II} + \underbrace{|g(a)-L|}_{III} \cdot \underbrace{\sup_{t\in[a,b)} \left|\int_a^{\to b} fdx\right|}_{IV} \leq (*)$$

Немного глина:

$$(II) = \left|\int_a^{\to b} f\right| \le \sup_{t\in[a,b)} \left|\int_t^{\to b} fdx\right|$$

Почему? Ну, типа мы взяли супремум, он выбирает наибольший (в каком-то смысле) элемент. У нас 2 варианта: либо супремум реализуется в $t = a$ (тогда это правда), либо же в другой точке (тогда это тоже правда). Подобным образом оценим IV:

$$\left|\int_a^t fdx\right| = \left|\int_a^{\to b} fdx - \int_t^{\to b} fdx\right| \le 2 \sup_{t\in[a,b)} \left|\int_t^{\to b} fdx\right|$$

Ну и остатки:

$$I = |L| \le \sup_{(a,b)} |g(x)|$$

$$III = |g(a) - L| \le 2 \sup_{(a,b)} |g(x)|$$

Складываем:

$$(*) \le \sup_{(a,b)} |g(x)| \cdot \sup_{t\in[a,b)} \left|\int_t^{\to b} fdx\right| + 2 \cdot \sup_{(a,b)} |g(x)| \cdot 2 \cdot \sup_{t\in[a,b)} \left|\int_t^{\to b} fdx\right| = 5 \cdot \sup_{(a,b)} |g(x)| \cdot \sup_{t\in[a,b)} \left|\int_t^{\to b} fdx\right|$$

ч. т. д.

1.4.27 Признак Абеля равномерной сходимости интеграла

Формулировка:

- $f, g : [a, b) \times Y \to \mathbb{R}$
- $\int_a^{\to b} f(x, y)dx$ — равномерно сходящийся на Y
- $g(x, y)$ — ограничена на $[a, b) \times Y$ и монотонна

Тогда:

$$\int_a^{\to b} f(x, y)g(x, y)dx$$

— равномерно сходящийся на Y.

Доказательство:

Удивительно, но почти всё уже доказано! В частности, поточечная сходимость просто напрямую следует из предыдущей леммы! Посмотрим на определение равномерной сходимости (по хвостикам):

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists U(b)\ \forall t \in U(b)\ \forall y \in Y : \left| \int_t^{\to b} fgdx \right| < \varepsilon$$

Ну чтож, давайте применим нашу оценку на хвостик для какого-то $t_0 \int U(b)$:

$$\left| \int_{t_0}^{\to b} fgdx \right| \leq \underbrace{5 \cdot \sup_{(a,b)} g(x)}_{\text{const}} \cdot \underbrace{\sup_{t \in [t_0, b)} \left| \int_t^{\to b} fdx \right|}_{(1)}$$

Заметьте, что у нас есть равномерная сходимость для (1)! Так давайте подберём такую окрестность $U(b)$, чтобы в ней:

$$\forall y \in Y : \sup_{t \in [t_0, b)} \left| \int_t^{\to b} fdx \right| < \frac{\varepsilon}{5 \cdot \sup_{(a,b)} |g(x)|}$$

По многолетним традициям китайского письма, всё получается!

ч. т. д.

2 Период Мезозойский

2.1 Важные определения

2.1.1 Гильбертово пространство

$\mathcal{H}$ — линейное пространство, в котором задано скалярное произведение и соответствующая норма. Если $\mathcal{H}$ — полное, то оно называется гильбертовым.

Примеры: $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m, L^2(X, \mu)$. А ещё $l^2(X, \mu)$ — пространство счётных последовательностей: $(x_1, x_2, \ldots) = x$, μ — счётная мера (на $\mathbb{N}$, рпосто считает количество элементов в множестве).

2.1.2 Ортонормированная система, примеры

e_k — О. С. , тогда $\frac{e_k}{||e_k||}$ — ортонормированная система.

Примеры:

1. $l^2 \quad e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$
2. $L^2[0, 2\pi] \quad \{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cos 3t, \sin 3t, ldots\}$
3. $\left(\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}\right)_{k \in \mathbb{Z}}$

2.1.3 Потенциал, потенциальное векторное поле

O — область (открытое + связное)

$$V, f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

$f \in C^1(O)$ является потенциалом (потенциального) векторного поля V, если:

$$\forall t \in O : \boldsymbol{\nabla} f(t) = V(t)$$

Загадка от КПК! Если f_1, f_2 — потенциалы V, то $f_1 - f_2 = \text{const}$ (ну доказательство вроде очев, типа, мы же берём градиенты от f_i, и оба этих градиента равны V. При дифференцировании константа уничтожается и всё получается)

2.2 Определения

2.2.1 Ортогональный ряд

Ряд $\sum a_k$ — ортогональный, если $\forall k, l a_k \perp a_l$

2.2.2 Сходящийся ряд в гильбертовом пространстве

$\sum a_n, a_n \in \mathfrak{H}$

$S_N := \sum_{1 \le n \le N} a_n$, если $\exists S \in \mathfrak{H} : S_N \underset{\mathfrak{H}}{\longrightarrow} S$

Такой ряд называется сходящимся.

2.2.3 Ортогональная система (семейство) векторов

$e_k \subset \mathcal{H}$ — ортогональная система, если:

1. $k \neq j$ $e_k \perp e_j$
2. $\forall k$ $e_k \neq 0$

2.2.4 Коэффициенты Фурье

$$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$$

— коэффициент Фурье вектора x по О. С. e_k

2.2.5 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) \cdot e_k$$

— ряд Фурье вектора x по О. С. $\{e_k\}$

2.2.6 Кусочно-гладкий путь

Просто путь: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$. Ну и кусочная гладкость означает, что существует конечное число точек разрыва 1го рода (те пределы односторонние существуют, но не равны) и если по ним разбить, то кусочки будут гладкими:

$$\exists \ \{t_i\}_{i=1}^n, \ t_0 = a, \ t_n = b : \gamma(x)|_{[t_i - t_{i-1}]} \text{ — гладкий}$$

2.2.7 Векторное поле

$V : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение. V — **векторное поле**.

В каждой точке E оно как бы задаёт вектор, который в этой точке находится. Широко применяется в физике, там кучу всего можно охарактеризовать векторным полем. Например, вы ложкой зачерпнули сметану, и теперь она с неё стекает. Каждой сточке сметаны можно сопоставить вектор скорости, с которой он стекает и таким образом что-то моделировать.

2.2.8 Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

γ — кусочно-гладкий, V — непрерывно, $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)$

$$I(V, \gamma) = \int_a^b \langle V\left(\gamma(t)\right), \gamma'(t) \rangle dt =$$

$$\int_a^b V_1\left(\gamma(t)\right)\gamma_1'(t) + V_2\left(\gamma(t)\right)\gamma_2'(t) + \ldots + V_m\left(\gamma(t)\right)\gamma_m'(t) dt =$$

Делаем замену: $x = \gamma(t)$; $x_1 = \gamma_1(t), x_2 = \gamma_2(t)$; $dx_m = \gamma_m'(t)dt$

$$\int_\gamma V_1 dx_1 + V_2 dx_2 + \ldots + D_m dm$$

Свойства:

1. Линейность по полю:

$$I(\alpha V + \beta W, \gamma) = \alpha I(V, \gamma) + \beta I(W, \gamma)$$

   Доказывается очевидно внутри по свойствам скалярного произведения.

2. Аддитивность по дроблению:
   $\gamma : [a, b] \to O,\ c \in (a, b),\ \gamma_1 = \gamma|_{[a,c]},\ \gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$:

$$I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2) = I(V, \gamma)$$

   Очевидно по линейности интеграла (ну там пошаманить в скалярных произведениях)

3. Замена параметра:

   - $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — гладкий
   - $\varphi : [p, q] \to [a, b]$ — гладкий
   - $\varphi(p) = a,\ \varphi(q) = b$
   - $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : [p, q] \to \mathbb{R}^m$

$$I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$$

   Доказательство (заменой просто):

$$I(V, \gamma) = \int_\gamma \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \underset{t=\varphi(s)}{=} \int_{\tilde{\gamma}} \langle V(\tilde{\gamma}(s)), \gamma'(\varphi(s)) \rangle \varphi'(s) ds =$$

$$= \int_{\tilde{\gamma}} \langle V(\tilde{\gamma}(s)), \gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)\rangle ds = \int_{\tilde{\gamma}} \langle V(\tilde{\gamma}(s)), \tilde{\gamma}'(s)\rangle ds$$

Ну и ещё надо вспомнить следствие о 2х параметризациях из прошлого семестра, которое говорит что как раз существует диффеоморфизм, перевозящий точки из $[p, q]$ в $[a, b]$ ($varphi$ — ?)

4. Объединение носителей

   $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^m, \gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^m,\ \gamma_1(b) = \gamma_2(c)$

   Тогда $\gamma = \gamma_2\gamma_1 : [a, b + (d - c)] \to \mathbb{R}^m$ (обозначение).

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t + c - b), & t \in [b + c, b + (d - c)] \end{cases}$$

$$I(V, \gamma_2\gamma_1) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2)$$

5. Противоположный путь

   $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$

   Тогда $\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{R}^m = \gamma(a + b - t)$

$$I(V, \gamma) = -I(V, \gamma^-)$$

6. Оценка интеграла по пути:

   $L = \gamma([a, b])$ — носитель, $l(\gamma)$ — длина пути γ

$$|I(V, \gamma)| \le l(\gamma) \cdot \sup_{x \in L} |V(x)|$$

   Доказательство по КБШ и теореме Вейерштрасса (вы удивитесь, 1й сем, максимум на компакте достигается):

$$|I(V, \gamma)| \le \int_{\gamma} |\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle| dt \le \int_{\gamma} ||V(\gamma(t))|| \cdot ||\gamma'(t)|| dt \le$$
$$\le \max_{t \in L} |V(t)| \cdot \int_{\gamma} ||\gamma'(t)|| dt$$

2.2.9 Криволинейный интеграл, не зависящий от пути в области O

Если $V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\forall\ \gamma_1, \gamma_2$ — кусочно-гладкие пути из A в B:

$$I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$$

— то такой интеграл не зависит от пути в области O

2.2.10 Локально потенциальное векторное поле

$V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — локально потенциальное векторное поле, если $\forall a \in O\ \exists r_a : V$ на $B(a, r_a)$ — потенциальное векторное поле.

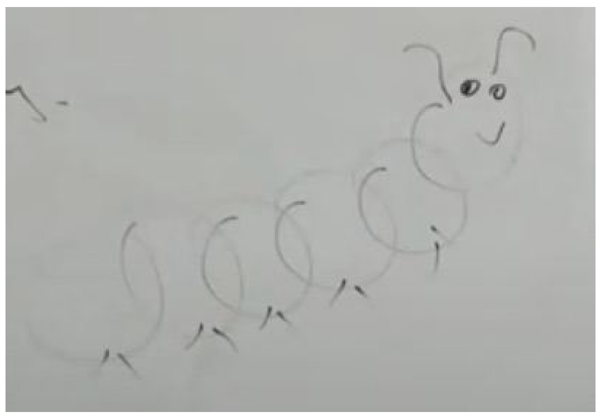
2.2.11 Лемма о гусенице

- $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — непрерывный путь

Тогда существует дробление $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < t_n = b$ такое, что для каждого k существует шар $B_k \in O, \gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$

При этом, можно требовать, что выполняется что-то из:

1. Все шары B_k имеют радиус меньше ε
2. V локально потенциально на каждом из шаров ($B(a, r_a)$ выбраны так, что помещаются внутри гусеничных шаров)



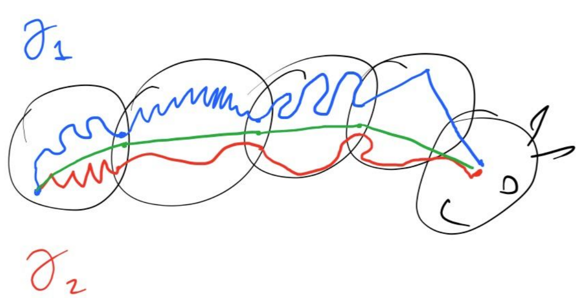
На лекции ещё был набросок доказательства, но там кмк что-то душно-сложное...

2.2.12 Похожие пути

$\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ называются похожими, если у них имеется общая гусеница.

Замечание:

Любой путь похож на ломаную (что очень удобно).



2.2.13 Интеграл локально-потенциального векторного поля V по непрерывному пути γ

Фиксируем δ из леммы о похожести путей, близких данному и строим кусочно-гладкий путь $\tilde{\gamma}$, и считаем интеграл на нём: $I(V, \tilde{\gamma})$.

2.3 Важные теоремы

2.3.1 Обобщённая формула Ньютона-Лейбница

Формулировка:

- $V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — потенциальное векторное поле
- $\gamma : [a, b] \to O$ — путь (кусочно-гладкий?)
- $\gamma(a) = A,\ \gamma(b) = B$
- f — потенциал

Тогда:

$$\int_\gamma V dx_1 + V dx_2 + \ldots + V dx_m = f(B) - f(A)$$

Доказательство:

1. γ — гладкий

Посмотрим на вектор значений векторного поля V при фиксированной точке $\forall t \in [a, b] : \gamma(t)$:

$$(V_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t)),\ \ldots, V_m(\gamma(t))) = (f'_{x_1}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t)),\ \ldots, f'_{x_m}(\gamma(t)))$$

И если раскрыть криволинейный интеграл по определению, то получится, что:

$$\int_a^b f'_{x_1}(\gamma(t))\gamma'_1(t)+\ldots+f'_{x_m}(\gamma(t))\gamma'_m(t)dt = \int_a^b (f(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t)))'_t\, dt = f(\gamma(b))-f(\gamma(a)) = f(B)-f(A)$$

Мы типа взяли производную от всей функции f, типа дифференциал, поэтому у нас получилась сумма частных производных, которые, в свою очередь, продифференцировались по правилу для композиции и у нас у каждого слагаемого вылез $\gamma'_i(t)$. Ну всё, для гладких разобрались.

2.

Проблемы могут возникать, если у нас путь составлен из нескольких путей, и тогда в точках склейки может не быть дифференцируемости (но зато будут односторонние производные, поэтому непрерывность будет). Так давайте поинтегрируем на кусочках! $\exists$ дробление:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b : \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \text{ — гладкий}$$

$$I(V, \gamma) = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma|_{t_{i-1}, t_i}} \langle V(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds = \sum_{i=1}^{k} (f(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A)$$

ч. т. д.

2.3.2 Необходимое условие потенциальности гладкого поля. Лемма Пуанкаре

Формулировка (необходимое условие потенциальности):

- $V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — гладкое потенциальное векторное поле

Тогда:

$$\forall i, j \in [1, m] : \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$$

Доказательство:

Раз поле потенциально, значит есть потенциал f. По определению для каждого k:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = V_k$$

Ну и всё, выражаем тогда:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f^2}{\partial x_j \partial x_i}$$

Ну а раз у нас всё непрерывное, то можно переставлять местами порядок дифференцирования (2 сем).

ч. т. д.

Формулировка (лемма Пуанкаре):

- $V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — гладкое потенциальное векторное полное
- O — выпуклая область
- выполняется необходимое условие потенциальности

Тогда V потенциально на O

Доказательство:

Вспоминаем доказательство “Характеризации потенциальных векторных полей в терминах интегралов”. Там мы фиксировали $A \in O$ и брали путь от каждой точки x до A. Здесь мы шагаем ещё шире: мы зададим через такой путь потенциал!

$$\forall x \in O : \gamma_x(t) = A + t(x - A), \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_x'(t) = x - A$$

Ну и тогда:

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^m \underbrace{V_k(A + t(x-A))}_{(1)} \cdot \underbrace{(x_k - A_k)}_{(2)} dt$$

Осталось лишь проверить, что это действительно потенциал (применяем правило Лейбница! Тут у нас, получается, параметром является x_i, по нему и дифференцируем. То есть, мы фактически применяем правило Лейбница из прошлого семестра!) Сразу заметим 2 вещи, вот мы сейчас будем дифференцировать по x_i, выражение (2) при $k = i$ продифференцируется и даст 1, и мы получим отдельно стоящее слагаемое (1) (дифференцирование произведения). Ну а в остальных случаях всё (в смысле сумма из (1)) будет дифференцироваться как обычно, т. к. там внутри векторного объекта везде есть i-я координата:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \int_0^1 V_i(A + t(x-A)) + \sum_{k=1}^m (V_k)'_i(A + t(x-A)) \cdot (x_k - A_k) dt =$$

Замечаем, что можем в сумме поменять индексы производной и суммирования, так как выполнено необходимое условие потенциальности:

$$= \int_0^1 V_i(A + t(x-A)) + \sum_{k=1}^m (V_i)'_k(A + t(x-A)) \cdot (x_k - A_k) dt =$$

Следующее доказывается методом пристального взгляда на предыдущее:

$$= \int_0^1 (tV_i(A + t(x-A)))'_t \, dt = tV_i(A + t(x-A))|_0^1 = V_i(x)$$

Вот и доказалось.

ч. т. д.

Замечание:

Вместо выпуклой области можно использовать “звёздную”, это такая клякса, в которой каждая точка доступна по отрезку из центра (внутри кляксы).

Следствие:

Всё то же самое, что и в самой лемме, но O — любая область, и тогда V — локально-потенциально.

Доказательство вроде очевидно, выбираем шарики и на них запускаем лемму.

2.4 Теоремы

2.4.1 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

Формулировка:

- $x_n \to x_0, y_n \to y_0 \quad \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle$
- $\sum_n x_n$ — сходится
  Тогда $\forall y \in \mathcal{H} \quad \langle \sum x_n, y\rangle = \sum \langle x_n, y\rangle$
- $\sum x_n$ — ортогональный ряд
  Тогда $\sum x_n$ — сходится $\Leftrightarrow \sum ||x_n||^2$ — сходится

Доказательство:

1.

Как в 1м семестре по неравенству треугольника:

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \le |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y_0\rangle| + |\langle x_n, y_0\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \le |\langle x_n, y_n - y_0\rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0\rangle| \le$$

КБШ:

$$\le \underbrace{||x_n||}_{\text{огр, т. к. сходится (?)}} \cdot \underbrace{||y_n - y_0||}_{\to 0} + \underbrace{||x_n - x_0||}_{\to 0} \cdot \underbrace{||y_0||}_{\text{const}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

2.

$S_n = \sum_n x_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$ (раз сходится, по условию). Посмотрим на то, что пытаемся доказать (последнее по пункту 1):

$$\sum_n \langle x_k, y\rangle = \langle \sum_n x_k, y\rangle = \langle S_n, y\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle S, y\rangle$$

3.

Посмотрим на норму частичных сумм (у нас именно частичные суммы, поэтому при перемножении никаких проблем не будет):

$$||S_n||^2 = \langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{k=1}^n x_k\rangle = \sum_{i,k=1}^n \langle x_i, x_k\rangle =$$

Потом вспоминаем, что ряд то у нас был ортоганальный, значит в сумме останутся только элементы с одинаковыми индексами:

$$= \sum_{k=1}^n ||x_k||^2 =: C_n$$

Обозначим такую сумму как C_n. Аналогично получается, что:

$$||S_n - S_m||^2 = |C_n - C_m|$$

А из этого получается, что (S_n) и (C_n) — фундаментальны одновременно. Так как мы работаем в гильбертовом пространстве, оно полное, и каждая фундаментальная последовательность должна иметь предел. Ну и в нашей ситуации, если одна из сторон равенства меньше китайского ε (может корня, суть не меняется), то и вторая автоматически тоже. И если одна сходится, то автоматически сходится и другая.

ч. т. д.

2.4.2 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

Формулировка:

- e_k — ортогональная система в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$

Тогда:

1. e_k — ЛНЗ
2. $c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$
3. $c_k e_k$ — это проекция на прямую $l_k = te_k, t \in \mathbb{R}, x = c_k e_k + z$, где $z \perp e_k$

Доказательство:

1.

Ну, а пусть он ЛЗ. Так как это всё дело в терминологии ЛинАла, следует рассматривать что-то конечное. Ну давайте, не умаляя общности, предположим, что случился ЛЗ набор среди N первых векторов: $\sum_N \alpha_k e_k = 0$. Домножим тогда разложение на какой-нибудь j-й вектор из ОС:

$$0 = \langle e_j, \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \rangle = \alpha_k ||e_k||^2$$

Ну тогда либо коэффициент был равен нулю, либо норма вектора. Оба этих случая забанены при ЛНЗ.

2.

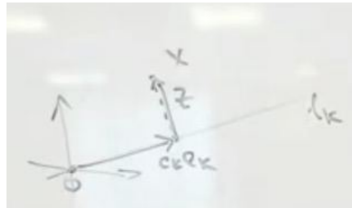
Ну просто посчитаем:

$$\langle x, e_k \rangle = \langle \sum c_k e_k, e_k \rangle = c_k ||e_k||^2$$

$$c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$$

Очев)

3.



Тут на картинке показано, что это за проекция и как оно вообще работает. А нам достаточно проверить лишь ортогональность z и l_k:

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle c_k e_k, e_k \rangle = c_k ||x_k||^2 - c_k ||x_k||^2 = 0$$

ч. т. д.

Замечание:

При перегонке ОС в ОНС (деление на норму), ряд Фурье не меняется. Так как раз поменялись вектора из ОС, то и коэффициенты Фурре поменялись (типа, базисный уменьшили в 2 раза, коэффициент увеличился в 2 раза).

2.4.3 Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов

Формулировка:

$V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — векторное полное

Тогда следующее эквивалентно:

1. V — потенциальное векторное полное
2. интеграл по V не зависит от пути (см. определение)
3. $\forall \gamma : [a, b] \to O$ — кусочно гладкий , $\gamma(a) = \gamma(b)$ (замкнутый) $\quad I(V, \gamma) = 0$

Доказательство:

1 ⇒ 2

Проверим по обобщённой формуле Ньютона-Лейбница:

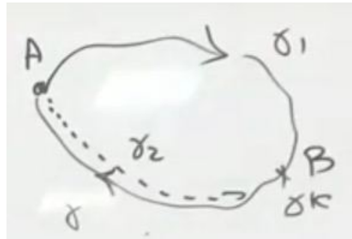
$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \text{ от } A \text{ до } B : I(V, \gamma_1) - I(V, \gamma_2) = f(B) - f(A) - (f(B) - f(A)) = 0$$

2 ⇒ 3

Сочиним 2 кусочно-гладких пути $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = A$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = B$. $I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$ по условию 2. Ну и всё, замкнём его, взяв пути γ_1 и $(\gamma_2)^-$:

$$I(V, \gamma_1) + I(V, (\gamma_2)^-) = I(V, \gamma_1) - I(V, (\gamma_2)) = 0$$

3 ⇒ 2



Почти то же самое, выбираем два пути от A до B, один прогоняем как обратный, и получаем петлю. Интеграл петли по условию ноль, ну значит интегралы двух составляющих путей (γ_1 и γ_2 на картинке (второй путь тоже от A до B, стелочка для его противоположного)) равны.

$$I(V, \gamma_1) + I(V, (\gamma_2)^-) = 0 \Leftrightarrow I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$$

2 ⇒ 1

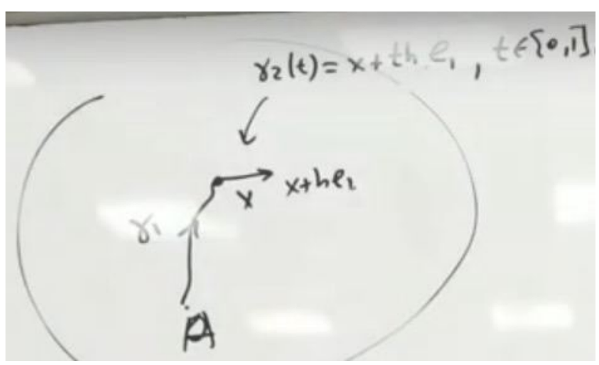
Самое неочевидное. Ищем потенциал. Фиксируем $A \in O$ и для каждого $x \in O$ выберем какой-то путь γ_x от x до A. И утверждаем, что f — потенциал:

$$f(x) = \int_{\gamma_x} V dx_1 + \ldots + V dx_m$$

Конечно, никто нам просто так на слово не поверит, поэтому давайте проверим это утверждение. Вообще, достаточно проверить для одной координаты (не умаляя общности) условие:

$$\forall x \in O : \frac{\partial f}{\partial x_1} = V_1(x)$$

Посмотрим на картинку:



Зафиксировали путь от A до x : $\gamma_x = \gamma_1$ (на картинке). Дальше нас просят производную по первой координате, значит, мы должны предложить какой-то путь, который смещает точку x вдоль 1й координаты. Да вот же он! $\gamma_2(t) = x + the_1$, где $t \in (0, 1)$. Тогда можно будет посчитать производную "школьным" способом (сначала посчитаем числитель, берём значение в двух точках, он суть есть криволинейный интеграл):

$$f(x + he_1) - f(x) = \int_{\gamma_2 \gamma_x} - \int_{\gamma_x} = \int_{\gamma_2} = (*)$$

Приглядимся, а кто вообще этот путь $\gamma_2(t)$ в векторном смысле?

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} x_1 + th \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

e_1 пропал, т. к. он там и так на вктор домножается за кадром (?)

$$(*) = \int_0^1 \underbrace{V_1(x_1 + th, x_2, \ldots, x_m) \cdot h}_{\Phi(t)} dt =$$

А вот сейчас внимательно! Существует такая теорема о среднем (мы вроде бы доказывали её во втором семестре), которая гласит о том, что определённый интеграл равен значению функции в какой-то средней точке, помноженной на длину промежутка. А ещё у нас самый обычный интеграл, зависит только от первой координаты (только там есть t)! Поэтому интегрируем, применяя теорему о среднем:

$$= V_1(x_1 + ch, x_2, \ldots, x_m) \cdot h \cdot (1 - 0), \quad c \in [0, 1]$$

Ну и всё, собираем определение производной:

$$\frac{f(x_1 + he_1) - f(x)}{h} = V_1(x_1 + ch, x_2, \ldots, x_m)$$

$h \to 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = V_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = V_1(x)$$

ч. т. д.

2.4.4 Лемма о равенстве интегралов по похожим путям

Формулировка:

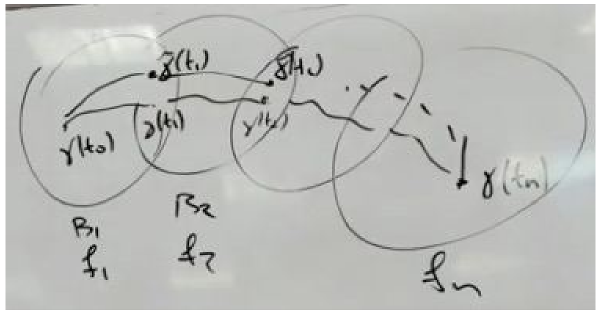
- $V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — векторное поле
- $\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \to O$ — похожие кусочно-гладкие пути, причём $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a) = A, \ \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b) = B$

Тогда:

$$I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$$

Доказательство:

Возьмём их общую гусеницу с V $(a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, на каждом шарике свой потенциал f_i. Причём, как мы знаем из загадки КПК два потенциала отличаются максимум на константу. Ну так вот, на пересечении шаров у нас как раз образуются два потенциала. И мы констанктой можем подогнать их друг к другу, чтобы $\forall i : f(\gamma(t_i)) = f_{i+1}(\gamma(t_i)))$.



Расписываем по дроблению, у нас всё кусочно-гладкое, все дела (видимо, дробление должно согласовываться ещё и с этим (?)):

$$\int_\gamma \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \sum_{k=1}^{m} f_i(\gamma(t_k)) - f_i(\gamma(t_{k-1})) =$$

По обобщённой формуле Ньютона-Лейбница. Сумма получается телескопическая, так как соседние потенциалы мы подогнали и в итоге получается :

$$= f_n(\gamma(t_n)) - f_0(\gamma(t_0)) = f_n(B) - f_0(A)$$

Для пути $\tilde\gamma$ аналогично, учитывая, что потенциалы на границах мы подогнали:

$$= f_n(\tilde\gamma(t_n)) - f_0(\tilde\gamma(t_0)) = f_n(B) - f_0(A)$$

ч. т. д.

Замечание:

Вместо нашего условия о равенстве начал и концов (c), можно было использовать $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\tilde\gamma(a) = \tilde\gamma(b)$

2.4.5 Лемма о похожести путей, близких к данному

Формулировка:

- $V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — локально-потенциальное векторное поле
- $\gamma : [a, b] \to O$ — непрерывный путь

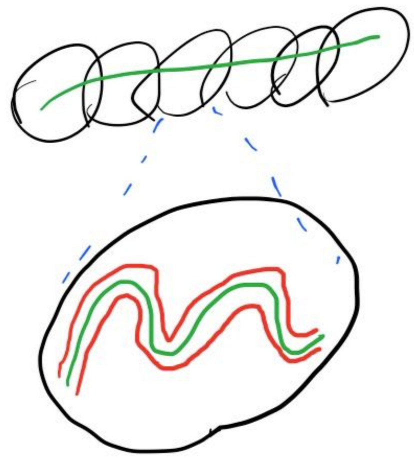
Тогда $\exists \delta > 0$: если $\tilde\gamma, \tilde{\tilde\gamma} : [a, b] \to O$ таковы, что $\forall t \in [a, b]$:

$$|\gamma(t) - \tilde\gamma(t)| < \delta$$
$$|\gamma(t) - \tilde{\tilde\gamma}(t)| < \delta$$

То пути $\gamma, \tilde\gamma, \tilde{\tilde\gamma}$ похожи в смысле поля V.

Доказательство:

Зафиксируем гусеницу для γ. Утверждается, что найдётся такое $\delta_k > 0$ для каждого шара, что весь кусок путь γ лежит в "обмотке" (δ_k-окрестности) внутри шара гусеницы. Почему такое возможно? Давайте посмотрим на картинку:



Зелёная линия — это путь γ. Далее фиксируем какой-нибудь шар k и рассматриваем поведение пути внутри него. Нам хочется, чтобы существовала δ_k-окрестность этого участка пути, она схематично показана красной "обмоткой" (как на проводе). Рассмотрим точку u на пути и найдём следующую величину (S_k — сфера (ну вроде бы да, дальше мы это расстояние мы будем использовать для шара, значит за границу B_k не вылезем)):

$$r_k = \inf_{u \in \gamma([t_{k-1}, t_k])} \rho(u, s), \quad s \in S_k$$

Фактически, это просто минимальное расстояние от пути до границы шара (оно всегда положительно, путь лежит внутри сферы по лемме о гусенице), оно бы нам как раз подошло в качестве δ_k, ведь тогда мы сможем в каждой точке соорудить шарик этого радиуса и получить заветную "обмотку". И получается так, что это расстояние достигается по теореме Вейерштрасса ($\gamma([a, b])$ — компакт (компакт под действием непрерывного отображения), S_k — компакт и γ — непрерывно)!

Ура, тогда пробегаем так по всем n шарикам и получаем δ:

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$$

Получается, что мы требуем от кандидатов на похожесть лежать в одной "обмотке" с данным путём, что гораздо более сильное условие, чем даже в одном шаре.

ч. т. д.

2.4.6 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

Формулировка:

-

Доказательство: