Пр Св-ва ~~неопределённого~~ несобственного интеграла:

Главная фишка при док-ве — определение! $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сходится при $\exists \lim\limits_{A \to b-0} \int_a^A f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

1) Критерий Больцано-Коши:

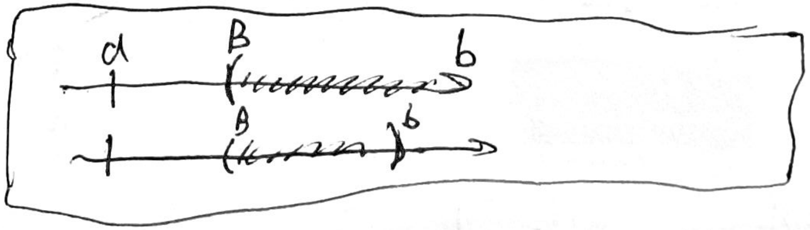
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, B \in [a, b) \ \forall A_1, A_2 \in (B, b) \ \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

причём f — допустима на $[a, b)$

Док-во: тупой вывод из BASED кр. Больцано-Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \ \begin{matrix} |x_1 - b| < \delta \\ |x_2 - b| < \delta \end{matrix} \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$



$$\exists \lim_{x \to b} f(x) \in \mathbb{R}$$

[Это просто он, для $\lim\limits_{A \to b-0} \Phi(A)$, где $\Phi(A) = \int_a^A f(x)\,dx$

2) Аддитивность f - допустима на $[a,b)$, $c \in (a,b)$

$$\int_a^{\to b} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{\to b} f(x)dx \text{, если } \int_a^{\to b} f(x) \text{ и } \int_c^{\to b} f(x)$$

сходятся одновременно

Док-во: (типовое док-во, остальные док-ся так же)

$\forall A \in [a,b)$

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx \Leftarrow \text{обычные опр. интегралы}$$

А потом предельный переход и ч.т.д

Следствие кр. Б-К:

Если $\exists$ $A_n \to b-0$, $B_n \to b-0$; $A_n < B_n$; $\int_{A_n}^{B_n} f(x)dx \not\to 0$

Тогда $\int_a^{\to b} f(x)dx$ — расходится

Док-во:

Смотрим на равенство $\underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$ [???]

---

2) Линейность f, g - допустимы на $[a,b)$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{\to b} f \pm g = \int_a^{\to b} f \pm \int_a^{\to b} g \text{ , } \lambda \int_a^{\to b} f = \int_a^{\to b} \lambda f$$

---

3) Интегрирование неравенств: f, g — допустимы на $[a,b)$

$\int_a^{\to b} f$, $\int_a^{\to b} g$ — существуют в $\overline{\mathbb{R}}$

$f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b)$

$$\Rightarrow \int_a^{\to b} f \le \int_a^{\to b} g$$

4) $f, g \in \cancel{C^1[a,b)}$ диффер-ма $[a, b)$

f', g' – допустимы на $[a, b)$

Тогда (если существует хотя бы 2 из 3 пределов)

$$\int_a^{\to b} f'g = fg\Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} fg'$$

$$\| $$

$$\lim_{B \to b-0} f(B)g(B) - f(a)g(a)$$

---

5) Замена переменных: $\forall\ \varphi : [\alpha, \beta) \to \langle A, B\rangle \quad \varphi \in C^1$

$$\int_\alpha^{\to\beta} f(\varphi(x)) \cdot \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\to\varphi(\beta)} f$$