
СВЯТОЙ КПК

#BlessRNG

ИЛИ КАК НЕ СДОХНУТЬ НА 4 СЕМЕ ИЗ-ЗА МАТАНА

РАЗРАБОТАЛ

НИКИТА БАРЛАМОВ @SNITRON

ПОЧЁТНЫЙ АВТОР

ТИМОФЕЙ БЕЛОУСОВ @IMODRE

v0.0

ФЕВРАЛЬ-??? 2023

Вы в любой момент можете добавить любую недостающую теорему, затехав её и отправив код (фотографии письменного текста запрещены) в телегу любому из указанных авторов, или создав Pull Request в Git-репозиторий конспекта ([click](#)). Ваше авторство также будет указано, с вашего разрешения.

Ah shit
Here we go again!
And again...
Oh, fuck.

Содержание

1	Период Палеозойский	3
1.1	Важные определения	3
1.2	Определения	4
1.2.1	Произведение мер	4
1.2.2	Сечения множества	4
1.2.3	Полная мера, сигма-конечная мера	4
1.2.4	Образ меры при отображении	4
1.2.5	Взвешенный образ меры	5
1.3	Важные теоремы	6
1.3.1	Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде	6
1.3.2	Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере	6
1.3.3	Принцип Кавальери	7
1.3.4	Теорема Фубини	7
1.4	Теоремы	8
1.4.1	Теорема об интегрировании положительных рядов	8
1.4.2	Абсолютная непрерывность интеграла	10
1.4.3	Теорема о произведении мер	11
1.4.4	Теорема Тонелли	11
1.4.5	Формула для бета-функции	11
1.4.6	Объем шара в \mathbb{R}^m	12
1.4.7	Теорема Фату. Следствия	12

1 Период Палеозойский

1.1 Важные определения

1.2 Определения

1.2.1 Произведение мер

$(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой.

Лемма: \mathcal{A}, \mathcal{B} — полукольца. Тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ — полукольцо.

Также, множества из $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ являются измеримыми прямоугольниками.

μ, ν — σ -конечные меры. Тогда стандартное продолжение m_0 (в смысле теоремы о продолжении меры (?)) с полукольца $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, определённой на некоторой σ -алгебре $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, и являющееся σ -конечной полной мерой — обозначается просто m .

И тогда m — и есть произведение мер μ и ν ($\mu \times \nu$).

Замечание:

$$(\mu \times \nu) \times \rho = \mu \times (\nu \times \rho)$$

1.2.2 Сечения множества

X, Y — множества. $C \subset X \times Y$

Тогда:

$$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$$

$$C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$$

— сечения множества C (1 и 2 рода)

Замечания:

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha \right)_x = \bigcup_{\alpha \in A} (C_\alpha)_x$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \right)_x = \bigcap_{\alpha \in A} (C_\alpha)_x$$

$$(C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

1.2.3 Полная мера, сигма-конечная мера

См. [конспект прошлого семестра](#)

1.2.4 Образ меры при отображении

Пусть у нас есть $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой, $\Phi : X \rightarrow Y$.

1. $\forall \Phi \quad \Phi^{-1}(\mathfrak{B})$ — σ -алгебра (это предлагается доказать как упражнение)
2. Пусть Φ — “измеримо” ($\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$)

Для $E \in \mathfrak{B}$ зададим $\nu E := \mu(\Phi^{-1}(E)) = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$

ν — образ меры μ при отображении Φ

НВ: ДОПИСАТЬ НА СЕССИИ, ТУТ ЕЩЁ ЕСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, ЧТО ЭТО МЕРА

1.2.5 Взвешенный образ меры

$\omega : X \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$, измерима на X

$B \in \mathfrak{B}$, $\tilde{\nu}(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$ — тоже мера, это и есть взвешенный образ меры μ при отображении Φ

1.3 Важные теоремы

1.3.1 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде

Формулировка:

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримые
- $f_n \rightarrow f$ почти всюду
- $\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая, и $\forall n$ и при почти всех x $|f_n(x)| \leq g(x)$

Тогда:

$$\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

И, как очевидное (“уж тем более”):

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu$$

Доказательство:

1.3.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере

Формулировка (то же самое, что и выше, только сходится по мере теперь):

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримые
- $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$
- $\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая, и $\forall n$ и при почти всех x $|f_n(x)| \leq g(x)$

Тогда:

$$\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Доказательство:

1.3.3 Принцип Кавальери

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ -конечные меры
- $m = \mu \times \nu, \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. при почти всех x $C_x \in \mathfrak{B}$
2. $x \mapsto \nu C_x$ — измеримо на C_x
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогично для сечений C^y

Доказательство:

1.3.4 Теорема Фубини

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ -конечные меры
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, суммируема на $X \times Y$ по мере m

Тогда:

1. при почти всех x функция f_x суммируема на Y
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu$ — это суммируемая функция на X
- 3.

$$\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi(x) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

1.4 Теоремы

1.4.1 Теорема об интегрировании положительных рядов

Формулировка:

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $u_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, u_n \geq 0$ (при почти всех x ?)
- u_n — измеримы на $E \in \mathfrak{A}$

Тогда:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E u_n(x) d\mu(x) \right)$$

Доказательство:

Подгоним под теорему Леви 3 (3 семестр). Пусть $S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x)$ — последовательность частичных сумм. Очевидно, что эта последовательность — монотонно неубывающая (так как функции у нас неотрицательные):

$$0 \leq S_N \leq S_{N+1} \leq S_{N+2} \leq \dots$$

Тогда, делаем предельный переход (вот тут есть вопрос, почему должен существовать предел, но если подумать: если его не существует, вообще вся эта теорема не имеет смысла (ну бесконечности, чел, смысл их интегрировать)). А так же, измеримость сохраняется, так как у нас исходные функции все были измеримы (ну и по теореме о пределе измеримых функций):

$$S_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} S(x)$$

Ну и всё, значи, по теореме Леви можем перейти к предельному преходу интегралов:

$$\int_E S_N(x) d\mu(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_E S(x) d\mu(x)$$

Левую часть можно расписать по линейности интеграла (там у нас конечное число членов):

$$\int_E S_N(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^N \int_E u_n(x) d\mu(x)$$

Ну, а раз интеграл суммы стремится к интегралу предельной функции, то и сумма интегралов обязана туда стремиться.

$$\sum_{n=1}^N \int_E u_n(x) d\mu(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x) d\mu(x)$$

ч. т. д.

Следствие:

- $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, измеримы на $E \in \mathfrak{A}$
- $\sum \int_E |u_n(x)| d\mu < +\infty$ (конечна)

Тогда $\sum u_n(x)$ — абсолютно сходящийся при почти всех x

Доказательство:

Пусть:

$$S(x) = \int_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$

Тогда, по предыдущей теореме:

$$\int_E S(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E |u_n(x)| d\mu \right) < +\infty$$

Раз интеграл конечен, значит $S(x)$ — суммируема, а это значит, что $S(x)$ — почти везде конечна. Ну значит и сходится.

ч. т. д.

Пример:

- (x_n) — вещественная последовательность
- $\sum a_n$ — абсолютно сходящийся числовой ряд

Тогда функциональный ряд $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x-x_n|}}$ — абсолютно сходится при почти всех x (в \mathbb{R} по мере Лебега)

Доказательство:

Во-первых, можно доказать, что если для $\forall A$ на $[-A, A]$ абсолютно сходится почти везде, то и везде (на \mathbb{R}) почти везде сходится (лол). Счётное количество п. в. \Rightarrow п. в. (чтобы количество отрезков было счётным, надо чтобы A были хотя бы рациональными. Кажется, что это не сильная проблема, так как отрезки включают в себя и все вещественные числа на отрезке тоже).

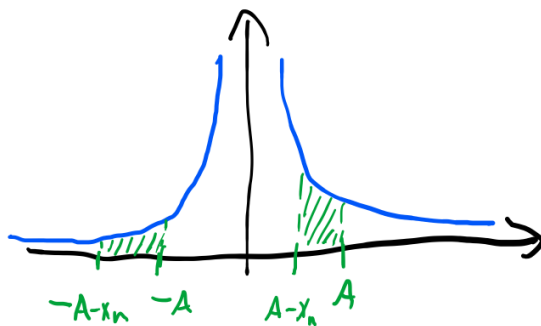
Попробуем подогнать под предыдущую теорему:

$$\int_{[-A, A]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} d\lambda = |a_n| \int_{-A}^A \frac{dx}{\sqrt{|x-x_n|}} \leq$$

Так, стоп. А как мы перешли к определённому интегралу? Оказывается, что так можно делать, на доказано это будет позже (в курсе).

$$\leq_{x:=x-x_n} |a_n| \int_{-A-x_n}^{A-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq |a_n| \int_{-A}^A \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq$$

Почему верен последний переход? Посмотрим на картинке:



Ну, по ней очевидно, что мы откусили кусочек поменьше, а добавили побольше. Тогда оценим модуль:

$$\leq 2 \cdot |a_n| \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4 \cdot \sqrt{A} \cdot |a_n|$$

Всё, абсолютный интеграл ограничен, значит сходится (при почти всех x).

ч. т. д.

1.4.2 Абсолютная непрерывность интеграла

Формулировка:

- (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \quad \forall E \text{ — измеримое } \mu E < \delta \quad \left| \int_E f d\mu \right| < \varepsilon$$

Доказательство:

Следствие:

- $(e_n) \in \mathfrak{A}$ — последовательность (?) множеств
- $\mu e_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- f — суммируемая на X

Тогда:

$$\int_{e_n} f d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Доказательство:

1.4.3 Теорема о произведении мер

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- Зададим $m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$

Тогда:

1. m_0 — мера на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$
2. μ, ν — σ -конечные меры $\implies m_0$ — σ -конечная

Доказательство:

1.4.4 Теорема Тонелли

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ -конечные меры
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, измерима относительно $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. при почти всех x функция f_x измерима на Y
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu$ — это измеримая функция на X
- 3.

$$\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi(x) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

Доказательство:

1.4.5 Формула для бета-функции

Формулировка: Бета-функция задаётся следующим образом:

$$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx, \quad s, t > 0$$

Тогда:

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

Доказательство:

1.4.6 Объем шара в \mathbb{R}^m

Формулировка:

- $B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \leq R^2\}$
- $\alpha_m \lambda_m(B(0, 1))$

Тогда:

$$\mu(B(0, R)) = \alpha_m R^m$$

Доказательство:

1.4.7 Теорема Фату. Следствия

Формулировка:

-

Доказательство: