Лемма о дифференцировании сдвига.

$f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad f \in C^{k}(E)$ E - открыто?

$a \in E,\ h \in \mathbb{R}^m \quad a+th \in E$, при $t \in [-1, 1]$

Пусть $\varphi(t) = f(a+th)$

Тогда $\varphi^{(k)}(t) = \sum\limits_{j:|j|=k} \frac{k!}{j!} \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a+th)$

Доказательство:

$\varphi(t)'_t = f(a+th)'_t = \frac{\partial}{\partial t} f(a_1+th_1, a_2+th_2, \dots, a_m+th_m) =$

$= \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th) \cdot h_i$

$\varphi''(t)'_t = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th) h_i\right)'_t = \sum\limits_{i_1=1}^{m} \sum\limits_{i_2=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(a+th) \cdot h_{i_1} h_{i_2}$

Заметим закономерность...

$\varphi^{(k)}(t)_t = \sum\limits_{i_1=1}^{m} \sum\limits_{i_2=1}^{m} \dots \sum\limits_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdot \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}(a+ht)\, h_{i_1} \cdot h_{i_2} \dots h_{i_k} =$

$=$ т.к. нам пофиг, в каком порядке дифференцировать, по полиномиальной формуле $= \sum\limits_{j:|j|=k} \frac{k!}{j^k} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j} \cdot (a+ht)$

ч.т.д.