Исследование сходимости интеграла $\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$

Рассмотрим возможные значения α:

$\alpha > 1$

Пусть $\alpha = 1+2a$, $a \in (0, +\infty)$. Тогда: $\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+2a} \cdot (\ln x)^{\beta}} =$

$$= \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+a}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^{a} \cdot (\ln x)^{\beta}}}_{\to 0 \text{ при } x \to +\infty}$$

Почему? $\beta \geq 0$ – тривиально,

т.к. $a>0$, $\beta \geq 0$

$$\frac{1}{\underset{\downarrow}{\text{пол.}} \cdot (\underset{\downarrow}{1 \text{ или пол}})}, \quad \infty, \ \infty$$

$\beta < 0$

Хитрое применение правила Лопиталя: $\frac{1}{x^{a} \cdot (\ln x)^{-\beta}} = \frac{(\ln x)^{\beta} \to \infty}{x^{a} \to \infty}$ ← тут $\beta > 0$

Лопиталим: $\frac{\beta (\ln x)^{\beta-1} \cdot \frac{1}{x}}{a x^{a-1}} = \frac{\beta \cdot (\ln x)^{\beta-1}}{a \ x^{a}}$ ← видим что тупо уменьшается степень $\ln x$ ⇒ пролопиталив β раз получим что-то вроде $\frac{\beta!}{a^{\beta} \ x^{a}} \longrightarrow 0$ (важно, что вроде, т.к. степени могут быть нецелыми)

⇒ от β нихера не зависит при $\alpha > 1$!

$$\Rightarrow \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^{a} \cdot (\ln x)^{\beta}} \underset{\substack{\text{начиная} \\ \text{с некоторого } x_0}}{\leq} \frac{1}{x^{1+a}} \text{ — сходится.}$$

$\alpha < 1$ $\quad \alpha = 1-2b \quad (b \in (0, +\infty))$

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-b}} \cdot \frac{1}{x^{-b} \cdot (\ln x)^{\beta}} = \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-b}} \cdot \underbrace{\frac{x^{b}}{(\ln x)^{\beta}}}_{+\infty \text{ так же по Лопиталю}} \geq \frac{1}{x^{1-b}}$$

$\exists x_1 : x > x_1$

— расходится

$\underline{\alpha = 1}$ $\displaystyle\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^{\beta}} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{Замена}} \\ y = \ln x \\ x = e^{y} \\ dx = y' \cdot e^{y} \cdot dy \end{array} \right\} = \int_{???}^{+\infty} \frac{dy \cdot e^{y}}{e^{y} \cdot y^{\beta}} =$ (поидее, $\ln 10$)

$= \displaystyle\int_{???}^{+\infty} \frac{dy}{y^{\beta}}$ — Опачка, а он у нас уже был!

При $\beta \leq 1$ расходится

$\beta > 1$ — сходится

Итого: $\alpha > 1$, $\forall \beta$ — сходится

$\alpha < 1$, $\forall \beta$ — расходится

$\alpha = 1$

$\beta \leq 1$ — расходится

$\beta > 1$ — сходится