

---

---

# СВЯТОЙ КПК

## #BlessRNG

---

---

ИЛИ КАК НЕ СДОХНУТЬ НА 3 СЕМЕ ИЗ-ЗА МАТАНА

РАЗРАБОТАЛ

НИКИТА ВАРЛАМОВ @SNITRON

ПОЧЁТНЫЙ АВТОР

ТИМОФЕЙ БЕЛОУСОВ @IMODRE

V0.0 ALPHA

ОКТАБРЬ-UNDEFINED 2022-2023

### **Заметки авторов**

В данном конспекте названия всех задач имеют ссылку на своего автора в виде верхнего индекса:

1. @imodre
2. @snitron

По любым вопросам и предложениям/улучшениям обращаться в телеграмм к соответствующему автору.

### **Known Issues**

Вы в любой момент можете добавить любую недостающую теорему, затехав её и отправив код (фотографии письменного текста запрещены) в телегу любому из указанных авторов. Ваше авторство также будет указано, с вашего разрешения.

Ah shit  
Here we go again!  
And again...

## Содержание

<b>1</b>	<b>Период Палеозойский</b>	<b>3</b>
1.1	Важные определения . . . . .	3
1.1.1	Норма линейного оператора . . . . .	3
1.1.2	Простое $k$ -мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$ . . . . .	3
1.1.3	Формулировка достаточного условия относительного экстремума . . . . .	3
1.2	Определения . . . . .	5
1.2.1	Положительно-, отрицательно-, знако- определенная квадратичная форма	5
1.2.2	Локальный максимум, минимум, экстремум . . . . .	5
1.2.3	Диффеоморфизм . . . . .	5
1.2.4	Теорема о локальной обратимости . . . . .	5
1.2.5	Формулировка теоремы о гладкости обратного отображения в терминах систем уравнений . . . . .	6
1.2.6	Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений	6
1.2.7	Касательное пространство к $k$ -мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$ . . . . .	6
1.3	Важные теоремы . . . . .	7
1.3.1	Достаточное условие экстремума . . . . .	7
1.3.2	Теорема о неявном отображении . . . . .	8
1.3.3	Необходимое условие относительного локального экстремума . . . . .	10
1.4	Теоремы . . . . .	12
1.4.1	Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора . .	12
1.4.2	Теорема Лагранжа для отображений . . . . .	13
1.4.3	Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому . .	13
1.4.4	Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях . . . . .	15
1.4.5	Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля . . . . .	16
1.4.6	Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах . . . . .	16
1.4.7	Лемма о “почти локальной инъективности” . . . . .	17
1.4.8	Теорема о сохранении области . . . . .	18
1.4.9	Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности . . . . .	20
1.4.10	Теорема о гладкости обратного отображения . . . . .	21
1.4.11	Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений . . . . .	22
1.4.12	Следствие о двух параметризациях . . . . .	24
1.4.13	Лемма о корректности определения касательного пространства . . . . .	26
1.4.14	Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей . . .	26
1.4.15	Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня . . .	28
1.4.16	Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел . . .	30
1.4.17	Теорема о функциональной зависимости . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Период Мезозойский</b>	<b>33</b>
2.1	Важные определения . . . . .	33
2.2	Определения . . . . .	34
2.3	Важные теоремы . . . . .	35
2.4	Теоремы . . . . .	36

# 1 Период Палеозойский

## 1.1 Важные определения

### 1.1.1 Норма линейного оператора

Пусть  $X, Y$  — нормированные линейные пространства,  $A \in \mathbb{L}(X, Y)$  (это множество линейных отображений над  $X \rightarrow Y$ ). Тогда нормой линейного оператора называется  $\|A\|_{X, Y} = \sup_{x \in X_{|x|=1}} |Ax|_Y$

Замечания (для  $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$ ):

1. По лемме об ограниченности нормы линейного оператора ( $L = (l_{i,j}), |Lx| \leq C_L |x| = C_L \cdot 1 = \sqrt{\sum l_{i,j}^2}$ ) — всегда ограничена!
2.  $x \rightarrow |Lx|$  — непрерывная функция, заданная на компакте ( $|x| = 1 \Leftrightarrow x \in S(0, 1)$  — сфера), причём по Вейерштрассу, максимум достигается. (напоминаю, мы в  $\mathbb{R}^m$ !)
3. Верно неравенство  $\forall x \in \mathbb{R}^m : |Lx| \leq \|L\| \cdot |x|$  (тут у нас важно различать евклидову и неевклидову норму). КПК считает, что это очевидно:
  - (a)  $x = 0$  — равенство
  - (b)  $x \neq 0$  — делим на норму  $x : |L \frac{x}{|x|}| \leq \|L\|$ , это очевидно, т.к. наша новая норма задаётся как супремум значений  $|x| = 1$ , ну и мы вот сравниваем супремум с меньшими значениями.
4.  $\forall x \in \mathbb{R}^m$ , если нашлось  $C > 0 : |Lx| \leq C \cdot |x| \Rightarrow \|L\| \leq C$  — тупо по пункту 3, очевидно.

### 1.1.2 Простое k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

Обобщение вот всей этой темы с диффеоморфизмами в одно толковое определение

$M \subset \mathbb{R}^m$  — простое k-мерное  $C^r$ -гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^m$ , если:

- $\exists O \subset \mathbb{R}^k$  — открытое (область?)
- $\exists \Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^m, \Phi(O) = M$  — гомеоморфизм (непрерывная биекция)
- $\Phi \in C^r(O)$
- $\forall x \in O : \text{rank } \Phi'(x) = k$

$\Phi$  — гладкая параметризация.

### 1.1.3 Формулировка достаточного условия относительного экстремума

- $f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}, \Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n, f, \Phi \in C^1$
- $M_\Phi \subset E : \{x \mid \Phi(x) = 0\}$
- $a \in E$  — точка относительного локального экстремума ( $\forall x \in U(a) \cap M_\Phi, f(x_0) \leq f(x)$  — это нестрогий максимум, остальное аналогично)
- $\Phi(a) = 0$  — уравнение связи

- $\text{rank } \Phi'(a) = n$

*это условия из необходимого условия*

- $G(x) = f(x) - \lambda_1 \Phi_1(x) - \lambda_2 \Phi_2'(x) \dots \lambda_n \Phi_n(x) = f - \langle \lambda, \Phi \rangle$
- $\lambda$  из необходимого условия
- $h \in \mathbb{R}^{m+n}, h = (h_x, h_y)$
- $\Phi'(a) \cdot h \neq 0 \Rightarrow$  можно выразить  $h_y = \Psi(h_x)$
- $Q(h_x) = d^2 G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$  — это квадратичная форма

Тогда:

1.  $Q(h_x)$  — положительно-определённая, тогда  $a$  — точка относительного локального минимума
2.  $Q(h_x)$  — отрицательно-определённая, тогда  $a$  — точка относительного локального максимума
3.  $Q(h_x)$  — не знако-определённая, тогда  $a$  — не точка относительного локального экстремума
4.  $Q(h_x)$  — полу-определённая, тогда информации недостаточно (может быть и так, и так)

## 1.2 Определения

### 1.2.1 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

Квадратичная форма:  $Q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q(h) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij} h_i h_j$$

- Положительно-:  $\forall h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) > 0$
- Отрицательно-:  $\forall h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) < 0$
- Незнако-:  $\exists h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) < 0, \exists \tilde{h} \neq 0 : Q(\tilde{h}) > 0$
- Полуопределённая (положительно определённая вырожденная):  $Q(h) \geq 0, \exists h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) = 0$

### 1.2.2 Локальный максимум, минимум, экстремум

Рассмотрим только максимум, остальное аналогично (+ строгий)

$$f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$$

Если  $\exists U(a) : \forall x \in U(a) \quad f(x) \leq f(a)$ , то  $a$  — точка локального максимума.

### 1.2.3 Диффеоморфизм

$F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, O$  — открыто и связно (область)

- $F$  — обратимо
- $F$  — дифференцируемо
- $F^{-1}$  — дифференцируемо

Тогда  $F$  — диффеоморфизм

### 1.2.4 Теорема о локальной обратимости

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $F \in C^1(O)$
- $x_0 \in O : \det F'(x_0) \neq 0$

Тогда  $\exists U(x_0) : F|_{U(x_0)}$  — диффеоморфизм

### 1.2.5 Формулировка теоремы о гладкости обратного отображения в терминах систем уравнений

- $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$
- $$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_m \end{cases}$$
- $(x_0, y_0) : F(x_0) = y_0, \det \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$
- $\exists U(x_0), W(y_0) : \exists F : U \rightarrow W$  — диффеоморфизм :  $\exists$  гладкое решение 
$$\begin{cases} x_1(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ x_2(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \vdots \\ x_m(y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$$

### 1.2.6 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

- $F = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$
- $$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$
- $(x^0, y^0) : F(x^0, y^0) = 0, \det \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \neq 0$
- $\exists U(x^0) \in \mathbb{R}^m, \varphi(x) : F(x, \varphi(x)) = 0, x \in U(x_0)$  — гладкие решения

### 1.2.7 Касательное пространство к $k$ -мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$

- $M \subset \mathbb{R}^m$  — простое  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^m$
- $p \in M$
- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  — параметризация  $M \cap U(p)$
- $t^0 \in O : \Phi(t^0) = p$
- $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейный оператор

Тогда образ  $\Phi'(t^0)$  — линейное подпространство в  $\mathbb{R}^m$ , не зависящее от  $\Phi$ . Ну вот оно и называется *касательным пространством* ( $T_p M$ ).

Причём важно, что это пространство не обязано проходить через точку  $p$ . Это просто пространство касательных векторов, откладываемых от начала координат (???).

## 1.3 Важные теоремы

### 1.3.1 Достаточное условие экстремума

*Формулировка:*

- $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $a \in \text{Int}(D)$
- $\nabla f(a) = 0$
- $f \in C^2(D)$
- $Q(h) := d^2 f(a, h)$

Тогда:

1.  $Q(h)$  — положительно-определённая, тогда  $a$  — точка локального минимума
2.  $Q(h)$  — отрицательно-определённая, тогда  $a$  — точка локального максимума
3.  $Q(h)$  — знакоопределённая, тогда  $a$  — не точка локального экстремума
4.  $Q(h)$  — полуопределённая, тогда информации недостаточно (может быть и так, и так)

*Доказательство:*

(1)

Давайте поближе присмотримся к  $\forall h \in \mathbb{R}^m \forall t \in [0, 1] : f(a+h) = f(a) + df(a, h) + \frac{1}{2!} d^2 f(a+th, h)$  — это типа формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

Теперь рассмотрим разность  $f(a+h) - f(a)$ , и заметим, что  $df(a, h) = 0$  по условию.

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{1}{2!} (f''_{x_1, x_1}(a+th)h_1^2 + f''_{x_1, x_2}(a+th)h_1h_2 + \dots) \\ &= f(a) + \frac{1}{2!} d^2 f(a+th, h) \\ &= f(a) + \frac{1}{2!} Q(h) + \frac{1}{2!} (d^2 f(a+th, h) - Q(h)) \\ &= f(a) + \frac{1}{2!} Q(h) + \frac{1}{2!} (d^2 f(a+th, h) - d^2 f(a, h)) \\ &= f(a) + \frac{1}{2!} Q(h) + \frac{1}{2!} (f''_{x_1, x_1}(a+th)h_1^2 - f''_{x_1, x_1}(a)h_1^2 + f''_{x_1, x_2}(a+th)h_1h_2 - \dots) \end{aligned}$$

Теперь заметим, что если повыносить коэффициенты при двойных производных, получится что-то в стиле  $(f''_1 - f''_2)(\sum_{i,j} h_i h_j)$ , где левая скобка — б.м. при  $h \rightarrow 0$ , а правая оценивается  $|h|^2$ . Таким образом, все эти штуки есть ничто иное, как  $\alpha(h)|h|^2$ , где  $\alpha(h)$  — б.м. при  $h \rightarrow 0$ .

В итоге получаем:

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} Q(h) + \alpha(h)|h|^2 \underset{\text{по лемме об оценке кв. формы}}{\geq} \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2 + \alpha(h)|h|^2$$



$$\underset{\text{при } h \rightarrow 0}{\geq} \frac{\gamma_Q}{4} |h|^2 \underset{h \neq 0}{>} 0$$

Получается, что в окрестности нашей точки  $a$  все значения больше, чем в ней самой. Получается, это по определению это точка локального минимума.

(2)

Всё то же самое, только пусть мы рассматриваем функцию  $g := -f$ . С учётом отрицательно определённой квадратичной формы всё получится, и тут у нас точка локального максимума.

(3)

Шизофазия начинается тут. Т.к. у нас не знакоопределённая форма, значит  $\exists h > 0 : Q(h) > 0$ ,  $\exists \tilde{h} > 0 : Q(\tilde{h}) < 0$

Раньше мы с вами считали, что  $h$  может быть любым. Теперь же давайте рассмотрим относительно вот этих существующих  $h, \tilde{h}$ . Но чтобы устремлять всё это дело к 0, нам необходим некоторый параметр. Пусть он будет  $s$ . Тогда рассматриваем по тому же принципу:  $f(a + sh) - f(a)$ , рассуждения такие же, только там везде дополнительно вылезает  $s^2$ , и, таким образом, функции станут зависеть от него:

$$f(a + sh) - f(a) \geq \frac{1}{2}Q(sh) - |\alpha(s)|s^2 = \frac{s^2}{2}Q(h) - |\alpha(s)|s^2 \geq \frac{1}{4}Q(h)s^2$$

Вот, тут у нас получилось, что это минимум. А если отработаем с  $\tilde{h}$ , то получится наоборот.

(4)

Ну а тут, слава Богу, достаточно привести пример.

Пусть  $f(x) := x_1^2 - x_2^4$ ,  $a = (0, 0)$

$$df(a, h) = 0, \quad d^2f(a, h) = 2h_1^2$$

Видно, что в этом случае мы можем бегать и по  $x_1$ , и по  $x_2$ , и в итоге получим разные значения, потому что форма вообще зависит только от одной компоненты.

А для почти идентичной  $g(x) := x_1^2 + x_2^4$  уже всё наоборот, и существует строгий локальный минимум.

ч. т. д.

### 1.3.2 Теорема о неявном отображении

*Формулировка:*

- $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $(a, b) \in O, \quad a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$
- $F(a, b) = 0 \in \mathbb{R}^{m+n}$
- $F \in C^r, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- $\det F'_y(a, b) \neq 0$

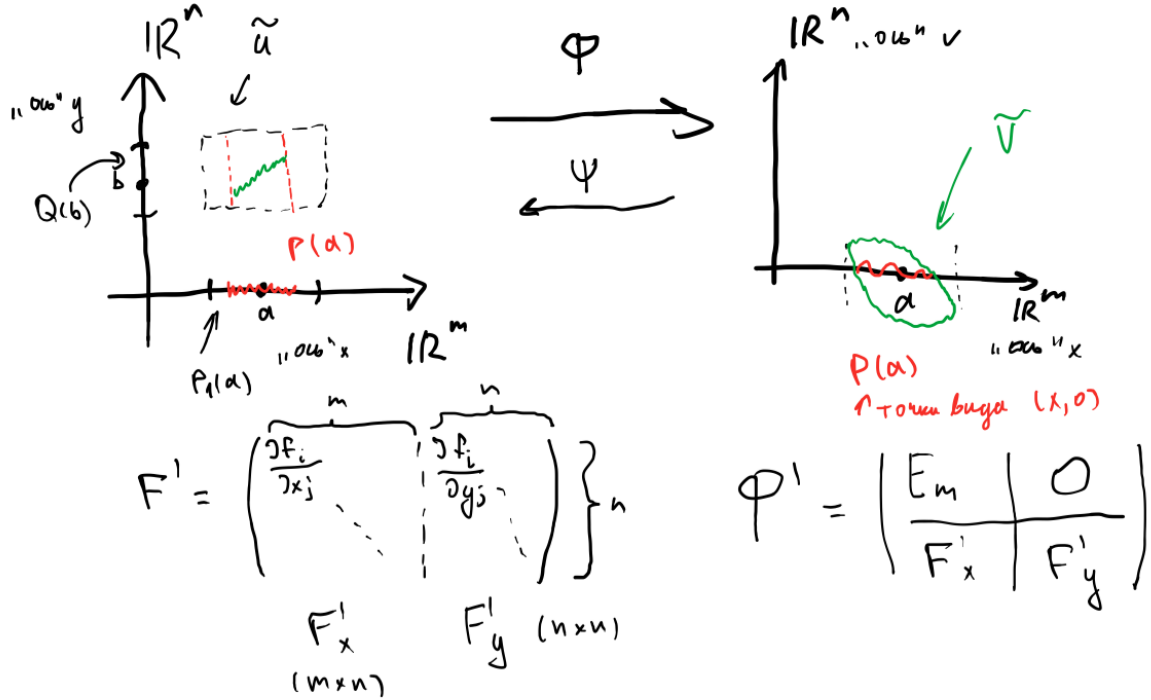
Тогда  $\exists P(a) \subset \mathbb{R}^m, Q(b) \subset \mathbb{R}^n$  — окрестности, и  $\exists! \varphi : P \rightarrow Q \in C^r$  гладкое:

$$\forall x \in P : F(x, \varphi(x)) = 0$$

Бонус:

$$\varphi'(x) = -(F'_y(x, \varphi(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, \varphi(x)) \Leftrightarrow F'_x(x, \varphi(x)) + F'_y \cdot \varphi'(x) = 0 \text{ (продифференцировали условие)}$$

Доказательство:



Нет, это не шутка. Всё доказательство строится вокруг одной картинки и яростного махания руками со знанием дела.

Заведём  $\Phi(x, y) : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ ,  $\Phi(x, y) = (x, F(x, y))$ . Логично, что по условию  $\Phi(a, b) = (a, 0)$ . Если посмотреть на производный оператор (а она дифференцируема, так как  $F$  — дифференцируема (?)), то прекрасно видно, что матрица квадратная, да ещё и блочная  $\Rightarrow \det \Phi'(a, b) = \det E_m \cdot \det F'_y(a, b)$ . По условию ничего из этого не 0, следовательно определитель невырожден. А поэтому, по теореме о локальной обратимости:  $\Phi$  — локальный диффеоморфизм класса  $C^r$ .

Заведём окрестность (как декартово произведение, почему бы и нет)  $\tilde{U} = P_1 \times Q$ .  $P_1$  немного большевата для  $P$ , поэтому потом мы её немного подрежем.  $\tilde{V} = \Phi(\tilde{U})$ . Заметим, что все эти окрестности открыты по предыдущим теоремам.

Т.к. у нас  $\Phi|_{\tilde{U}}$  — диффеоморфизм, на прообразе и образе имеет место быть обратное отображение  $\Psi : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U} = \Phi^{-1}$ .

Заметим, что отображение  $\Phi$  не меняет “ $x$ ”-овые координаты (по построению функции, см. рисунок), “ $y$ ”-овые же как-то колбасит, как показано зелёной областью. Значит и  $\Psi$  их тоже не меняет, т.к. диффеоморфизм. Именно поэтому справа у нас координаты  $(x, v)$ . Можно представить  $\Psi(x, v) = (x, H(x, v))$ ,  $H : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^r$ . Поэтому давайте выберем окрестность

$P \subset \mathbb{R}^m := \tilde{V} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ . Она открыта по теореме (1 сем) о свойствах открытых множеств (конечное пересечение открытых открыто).  $U = P \times Q$

Вооот. А теперь давайте предположим в качестве  $\varphi(x) : P \rightarrow Q := H(x, 0)$ . Она принадлежит классу  $C^r$ , т.к. все функции до этого в нём лежали. А почему выполняется условие  $F(x, \varphi(x)) = 0, x \in P$ ? Ну давайте проследим путь. Что такое вообще  $H(x, 0)$  — мы берём все точки вида  $(x, 0)$  (см. картинку), и взаимно-однозначно отправляем их обратно в левую часть, тем самым вычисляя им значение  $b_0 \in Q(b)$  (этим и занимается  $H(x, v)$  по своей сути). Ну вот. А потом мы отправляем точку  $(x, b_0)$  в правую часть, и куда же она должна приехать, если уезжала из 0? Правильно, в 0. Ура, условие выполняется.

Осталось доказать единственность, опять давайте помашем руками:

$$x \in P, y \in Q : F(x, y) = 0, \quad \Phi(x, y) = (x, 0)$$

$$(x, y) = \Psi\Phi(x, y) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \varphi(x))$$

ч. т. д.

### 1.3.3 Необходимое условие относительного локального экстремума

*Формулировка:*

- $f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}, \Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f, \Phi \in C^1$
- $M_\Phi \subset E : \{x \mid \Phi(x) = 0\}$
- $a \in E$  — точка относительного локального экстремума ( $\forall x \in U(a) \cap M_\Phi, f(x_0) \leq f(x)$  — это нестрогий максимум, остальное аналогично)
- $\Phi(a) = 0$  — уравнение связи
- $\text{rank } \Phi'(a) = n$

$$\text{Тогда } \lambda \in \mathbb{R}^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) : \begin{cases} f'(a) + \lambda\Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$$

Второе условие бесплатное, оно из условия.

*Доказательство:*

Так как у нас ранг  $n$  на матрице производного оператора  $\Phi'$ , давайте считать, что он достигается на  $m+1 \dots m+n$  ( $n$  штук) столбцах матрицы (это матрица  $n$  строк  $\times$   $(m+n)$  столбцов). Тогда в стиле всех предыдущих теорем а-ля “неявное отображение” разделим переменные:  $(x_1, x_2, \dots, x_m), (x_{m+1}, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \mapsto (x, y)$ . Точку  $a$  тоже:  $(a_x, a_y)$ .

Запускаем теорему о неявном отображении:  $\Phi(a) = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  — невырожденный оператор. Тогда существует  $! \varphi : U(a_x) \rightarrow P(a_y), \Phi(x, \varphi(x)) = 0$ . Замечаем, что  $x \mapsto (x, \varphi(x))$  — параметризация простого гладкого  $m$ -мерного многообразия в  $M_\Phi \cap \{U(a_x) \times P(a_y)\}$ .

Тогда для  $g(x) = f(x, \varphi(x))$  точка  $a_x$  — просто точка локального экстремума. Почему? Управляя теперь точкой  $x$ , мы с помощью  $g$  попадаем в  $M_\Phi$ , внутри которого  $\Phi(x) = 0$  всегда! Поэтому

внутри хорошего (в рамках этой задачи) множества мы и ищем экстремум. Это можно легко понять, если представить поиск экстремума на какой-то области графика (ради этого всё и делается же).

Хорошо, давайте его искать. По необходимому условию экстремума, ЧП  $g$  должны быть равны нулю ( $\varphi'$  бывает только по  $x$ ):

$$f'_x(a) + f'_y(a) \cdot \varphi'(a_x) = 0 \quad (\in \mathbb{R}^m)$$

Начиная с этого места опускаем подстановку точек, но они там есть! Вспоминаем, что у нас есть  $\Phi(x, \varphi(x)) = 0$ . Также дифференцируем:

$$\Phi'_x + \Phi'_y \varphi' = 0 \quad (\in Mat(n, m))$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^m : \quad \lambda \Phi'_x + \lambda \Phi'_y \varphi' = 0 \quad (\in \mathbb{R}^m)$$

Тогда можно вычесть из уравнения с  $f$  уравнение с  $\Phi$  — размерности сошлись:

$$f'_x - \lambda \Phi'_x + (f'_y - \lambda \Phi'_y) \varphi' = 0$$

Пусть  $f'_y - \lambda \Phi'_y = 0$ . Тогда:

$$\lambda = f'_y \cdot (\Phi'_y)^{-1}$$

Если мы берём это  $\lambda$  (а нас и просят её предъявить), то наше предположение верно. Раз разность 0, то и иксвая разность равна нулю:

$$\begin{cases} f'_y - \lambda \Phi'_y = 0 \\ f'_x - \lambda \Phi'_x = 0 \end{cases}$$

Это векторная запись точек, которые мы когда-то разъединили. Давайте соединим обратно:

$$f' - \lambda \Phi' = 0 \quad \lambda = f'_y \cdot (\Phi'_y)^{-1}$$

ч. т. д.

## 1.4 Теоремы

### 1.4.1 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

*Формулировка:*

Пусть  $X, Y$  — нормированные линейные пространства,  $A \in \mathbb{L}(X, Y)$ .

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1.  $A$  — ограниченный оператор, в том смысле, что  $\|A\|$  — конечно
2.  $A$  — непрерывно в нуле
3.  $A$  — непрерывно на всём  $X$
4.  $A$  — равномерно непрерывно

*Доказательство:* Для  $\|A\| \equiv 0$  — тривиально (супремум = 0, следовательно 0), поэтому далее считаем норму оператора ненулевой. Ну, во-первых,  $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$  — очевидно, просто одно следует из другого.

Во-вторых,  $2 \Rightarrow 1$ :

По определению непрерывности в нуле:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \forall x \in B(0, \delta) : |Ax| < \varepsilon$  (это нам дано, значит можем пользоваться, как хотим)

Давайте рассмотрим  $\varepsilon = 1 : |Ax| < 1$ , потом делим на  $\delta$ :

$$|A \frac{x}{\delta}| < \frac{1}{\delta}$$

Переназначим  $x$  и заметим, что  $x \in \overline{B(0, 1)} : |Ax| \leq \frac{1}{\delta}$  (обратите внимание, мы взяли замыкание шара и получили нестрогое неравенство)

Тогда для  $x \in S(0, 1) : |Ax| \leq \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} \cdot |x|$  — по замечанию 4 из определения,  $\|L\| \leq \frac{1}{\delta}$ .

В-третьих,  $1 \Rightarrow 4$ :

Давайте опять запишем определение равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Назначим  $\delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|}$

$$|Ax_1 - Ax_2| < \varepsilon$$

По линейности:

$$|A(x_1 - x_2)| < \|A\| \cdot |x_1 - x_2| = \|A\| \delta = \|A\| \frac{\varepsilon}{\|A\|} = \varepsilon$$

ч.т.д.

### 1.4.2 Теорема Лагранжа для отображений

*Формулировка:*  $F : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l, D$  — открытое

$F$  — дифференцируемо на  $D, [a, b] \subset D$

Тогда  $\exists c \in [a, b] : |F(a) - F(b)| \leq \|F'(c)\| \cdot |b - a|$  *Доказательство:* Заведём функцию  $f(t) = F(a + t(b - a)), t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . То есть как-бы двигаем точку по  $[a, b]$ .

$$f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$$

Заметим, что это оператор  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^l$ , т.к.  $F'(a + t(b - a)) - l$ , а  $b - a - m$  (???)

Вспомним также теорему Лагранжа для векторнозначных функций:

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, F$  — дифференцируема на  $[a, b], \exists c \in [a, b]$

$$|F(a) - F(b)| = |F'(c)| \cdot |b - a|$$

Рассмотрим нашу функцию  $f(t)$  по этой теореме в точках 0 и 1:

$$|f(1) - f(0)| = |f'(c)| \cdot |1 - 0|$$

Подставим:

$$|F(b) - F(a)| = |F'(a + c(b - a)) \cdot (b - a)| \underset{\text{по замечанию 3}}{\leq} \|F'(a + c(b - a))\| \cdot |b - a|$$

Ну а дальше, пусть  $c := a + c(b - a)$  и всё супер.

ч.т.д.

### 1.4.3 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

*Формулировка (безымянная лемма):*

*Возможно, она нахер не нужна, но пусть всё же будет*

Пусть  $B \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ .

Если  $c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m : |Bx| \geq c|x|$ , тогда  $B \in \Omega_m$  и  $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

*Доказательство:*

$B$  — очевидно инъективен, т.к. любой ненулевой вектор  $y$  нас отправляется в разные точки  $\Rightarrow$  биекция  $\Rightarrow$  обратимый  $\Rightarrow \exists B^{-1}$

Теперь пусть  $y = B^{-1}x \Rightarrow |Bx| = |y| \geq c|x| = c|B^{-1}y| \Rightarrow |B^{-1}y| \leq \frac{1}{c} \cdot |y| \underset{\text{по замечанию 3}}{\Rightarrow} \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

ч.т.д.

*Замечание:*

Если  $A \in \Omega_m$ , то можно провенуть такую штуку:  $|x| = |A^{-1}Ax| \leq \|A^{-1}\| \cdot |Ax|$  (по 3 замечанию). Тогда:

$$|Ax| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} |x|$$

*Формулировка:*

Пусть  $L \in \Omega_m$  — обратимый оператор,  $M \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ ,  $\|L - M\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$

Тогда:

1.  $M \in \Omega_m$  — обратимый
2.  $\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{\|L^{-1}\|} - \|L - M\|}$
3.  $\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\frac{1}{\|L^{-1}\|} - \|L - M\|} \cdot \|L - M\|$

*Доказательство:*

**(1) и (2)**

Рассмотрим  $|Mx|$  с рандомным возможным  $x$ . По неравенству треугольника (это всё же норма) и оценкам по замечаниям сверху:

$$|Mx| \geq |Lx| - |(M - L)x| \geq \frac{1}{\|L^{-1}\|} |x| - \|M - L\| \cdot |x| = \left( \frac{1}{\|L^{-1}\|} - \|M - L\| \right) |x|$$

По безымянной лемме всё доказано (заметим, что выражение в скобочках — положительная константа).

**(3)**

Неповторимый оригинал:

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{m} = \frac{m - l}{ml}$$

Жалкая копия (доказывается тривиально, раскрытием скобок):

$$L^{-1} - M^{-1} = M^{-1}(M - L)L^{-1}$$

Отнормируем:

$$\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \|M^{-1}\| \cdot \|L - M\| \cdot \|L^{-1}\|$$

Ну и просто подставим (2).

ч.т.д.

*Следствие:*

Отображение  $\Omega_m \rightarrow \Omega_m : L \rightarrow L^{-1}$  непрерывно.

*Доказательство:*

Давайте по Гейне: если  $B_k \rightarrow L$ , то сходится ли  $B_k^{-1} \rightarrow L^{-1}$ ???

Во-первых, начиная с некоторого места:

$$|B_k - L| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|}$$

$$|B_k^{-1} - L^{-1}| \leq \underbrace{\frac{\|L^{-1}\|}{\frac{1}{\|L^{-1}\|} - \|L - B_k^{-1}\|}}_{\text{огр.}} \cdot \|L - B_k^{-1}\| \rightarrow 0$$

ч.т.д.

#### 1.4.4 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

*Формулировка:*  $F : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $F$  дифференцируема на  $D$ ,  $F' : D \rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1.  $F \in C^1(D) \Leftrightarrow \forall i, j : \frac{\partial f_i}{\partial x_j} — непрерывны$
2.  $F' — непрерывно на D : \forall x : \mathbb{R}^m \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{x} |x - \tilde{x}| < \delta \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| < \varepsilon$

*Доказательство:*

(1)  $\Rightarrow$  (2)

Давайте зафиксируем какие-то  $i, j$  и относительно них рассмотрим наше условие непрерывности частных производных по отдельности. Также, применим китайскую грамоту и возьмём немного другой эпсилон:

$$\forall x : \mathbb{R}^m \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{x} |x - \tilde{x}| < \delta \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$$

Тогда, так как нам это уже известно, проверим условие (2):

$$\|F'(x) - F'(\tilde{x})\| \underset{\text{по лемме об ограниченности нормы}}{\leq} \sqrt{\sum_{i,j} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) \right)^2}$$

Ну а теперь просто оцениваем всё это дело эпсилоном!

$$\leq \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \sqrt{ml \cdot \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

(2)  $\Rightarrow$  (1)

Ну а вот тут душный пиздец. Идея в том, что мы хотим проверить для каждой частной производной с индексами  $(v, u)$  наше предположение.

Давайте выберем  $h \in \mathbb{R}^m = (0, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{u\text{-ое число}}, 0, \dots, 0, 0)^T$ . Теперь нам известно, что:

$$|(F'(x) - F'(\tilde{x}))h| \leq \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| \cdot |h| \underset{|h|=1}{\leq} \varepsilon$$

Ну а с другой стороны,  $(F'(x) - F'(\tilde{x}))h$  есть ничто иное, как вектор  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_u}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_u}(\tilde{x}) \right)_{i=1 \dots l}$ . Поэтому давайте рассмотрим его норму по вышеиспользованной лемме:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_u}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_u}(\tilde{x}) \right)^2} \leq \varepsilon$$



Ну, раз уж у нас корень суммы квадратов меньше, то и каждое слагаемое по отдельности тоже меньше. Давайте зафиксируем  $i = v$  и получим долгожданное:

$$\left| \frac{\partial f_v}{\partial x_u}(x) - \frac{\partial f_v}{\partial x_u}(\tilde{x}) \right| \leq \varepsilon$$

Так как данные эпсилон-дельта преамбулы везде были одинаковыми, то и тут всё супер. Доказано, не умаляя общности!!!!

ч. т. д.

#### 1.4.5 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

*Формулировка (Ферма):*

$f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Int}(D), f$  — дифференцируема в точке  $a$  (точка локального экстремума)

Тогда  $\forall l \in \mathbb{R}^m : |l| = 1$  (направление)  $\frac{\partial f}{\partial l}(a) = 0$

*Доказательство:*

Тривиалити, для  $f|_{\text{прямая через } a \text{ по направлению } la}$  — тоже точка локального экстремума, поэтому по одномерной теореме Ферма всё работает!

ч. т. д.

*Следствие (Необходимое условие экстремума)*

$a$  — точка локального экстремума  $\Rightarrow \forall k \in [1, m] : \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$

*Следствие (Ролль)*

- $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $K \subset D$  — компакт
- $f$  — дифференцируема в  $\text{Int}(K)$ , непрерывна на  $K$
- $f|_{\text{граница } K} = \text{const}$

Тогда  $\exists a \in \text{Int}(K) : \nabla f \equiv 0$

*Доказательство*

По теореме Вейерштрасса (привет, 1 сем), на компакте функция достигает своего минимума и максимума. Тогда либо у нас на  $K f \equiv \text{const}$ , тогда такая точка — любая, либо же по теореме Ферма она существует где-то внутри компакта.

ч. т. д.

#### 1.4.6 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

*Формулировка (Лемма об оценке квадратичной формы):*  $Q$  — положительно определённая квадратичная форма.

Тогда  $\exists \gamma_Q : \forall h \quad Q(h) \geq \gamma_Q \cdot |h|^2$

*Доказательство:*

А давайте так:

$$\gamma_Q := \min_{|x|=1} Q(x)$$

. Он достигается, так как мы гоняем по компакту (сфере), следовательно по Вейерштрассу всё хорошо.

Для  $x = 0$  всё тривиально, поэтому при  $x \neq 0$ :  $Q(x) = |x|^2 Q(\frac{x}{|x|}) \underset{\frac{x}{|x|} \text{ от } 0 \text{ до } 1!}{\geq} \gamma_Q |x|^2$

*Формулировка (Лемма об эквивалентных нормах):*

$p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — норма

Тогда  $\exists C_1, C_2 > 0 : \forall x \quad C_1|x| \leq p(x) \leq C_2|x|$

*Доказательство:*

То же самое:

$$C_1 := \min_{|x|=1} p(x), \quad C_2 := \max_{|x|=1} p(x)$$

Для минимума:  $\forall x : p(x) = |x| \cdot p(\frac{x}{|x|}) \geq C_1|x|$ , для максимума аналогично.

ч. т. д.

#### 1.4.7 Лемма о “почти локальной инъективности”

*Формулировка:*

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $x_0 \in O$
- $F$  — дифференцируема в  $x_0$
- $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда  $\exists C > 0, \delta > 0 \quad \forall h \in B(0, \delta) \quad |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$

*Доказательство:*

1. Если  $F$  — линейное отображение, то рассмотрим:  $|h| = |F^{-1}Fh| \leq \|F^{-1}\| \cdot |Fh|$ . По линейности:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |Fh| \geq \underbrace{\frac{1}{\|F^{-1}\|}}_C |h| \quad \forall \delta$$

2. В противном случае, запишем определение дифференцируемости:  $|F(x_0 + h) - F(x_0)| = \underbrace{|F'(x_0)h|}_{>0} + \underbrace{|h| \cdot \alpha(h)}_{\text{б. м.}} \underset{\text{нер-во треугольника}}{\geq} \underbrace{C}_{\text{из пункта 1}} |h| + \alpha(h) \cdot |h|$ . Давайте выберем  $\delta$  так, чтобы  $\alpha(h) < \frac{C}{2}$

$$\dots \geq \frac{C}{2}|h|$$

ч.т.д.

*Замечание*

При  $\forall x \quad \det F'(x) \neq 0$  не следует инъективность!

### 1.4.8 Теорема о сохранении области

*Формулировка:*

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, O$  — открытое
- $F$  — дифференцируемо
- $\forall x \in O : \det F'(x) \neq 0$

Тогда  $F(O)$  — открытое множество.

*Замечания*

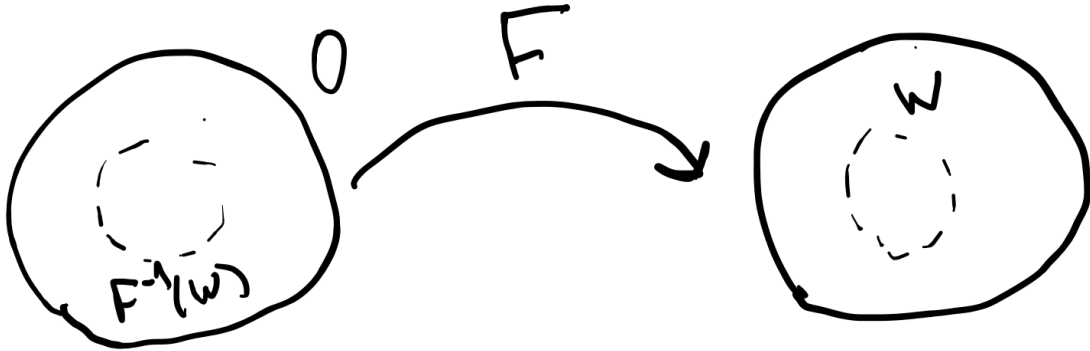
1. Если  $O$  — связное и  $F$  — непрерывное, то  $F(O)$  — связное

*Доказательство:*

Ну, типа очев. Если у нас есть  $W_1, W_2 \subset F(O)$ , причём они не связны, то логично что получиться они могли только вследствие  $F^{-1}(W_1) \cap F^{-1}(W_2) = \emptyset$

2.  $F$  — непрерывное  $\Leftrightarrow \forall W \subset F(O)$  — открытого,  $F^{-1}(W)$  — открыто *Доказательство:*

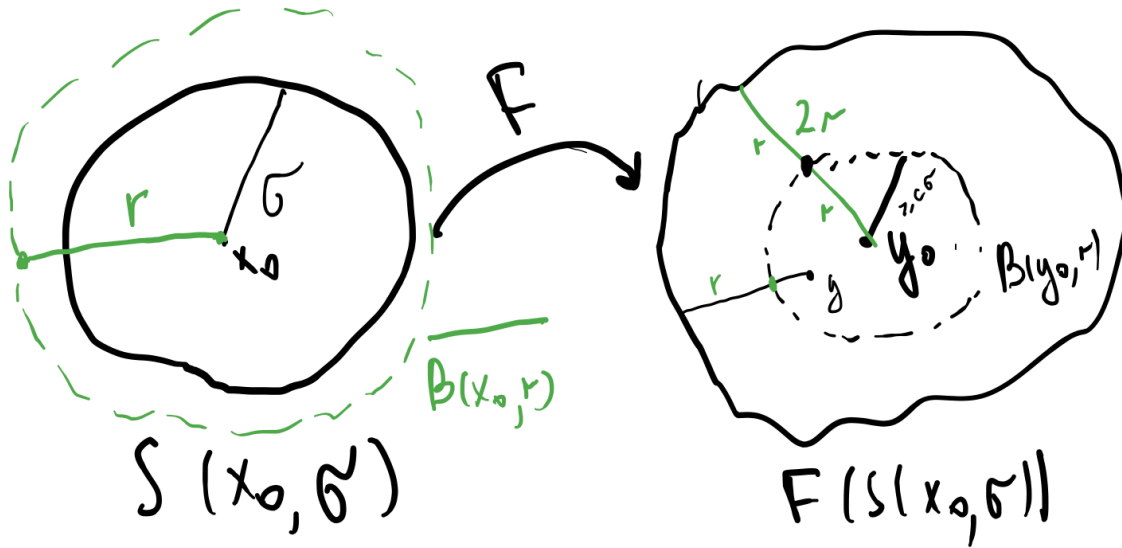
По топологическому определению непрерывности (привет, 1 сем!).



*Доказательство:*

В общем, основная идея доказательства состоит в том, чтобы доказать, что любая точка из образа является внутренней, тогда по определению открытого множества мы докажем и вывод.  $\forall x_0 \in O : y_0 = F(x_0)$ .

По лемме выше,  $\exists C > 0, \exists \delta > 0 : \forall h \in \overline{B(0, \delta)} : |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$ . Не стоит смущаться при виде замкнутого шара, это мы просто провели двойную бухгалтерию. Причём, как видно на картинке, граница нашей области отображается куда-то далеко (аж на константу) больше, чем просто на  $\delta$ .



Заведём расстояние  $dist(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$  между точкой и множеством. Пусть  $r = \frac{1}{2} \cdot dist(y_0, \underbrace{F(S(x_0, \delta))}_{\text{компакт}})$ .  
непр.  $\Rightarrow$  компакт

Так как у нас там всё компакты то минимум достигается, и, что важнее всего, всё это больше нуля.

Теперь самое интересное: докажем, что  $B(y_0, r) \subset F(O) : \forall y \in B(y_0, r) \exists x \in B(x_0, \delta) : F(x) = y$ . Это докажет нам всё остальное.

$\forall y \in B(y_0, r) : \rho(y, F(S(x_0, \delta))) > r$ . Это очевидно, на рисунке всё видно. Рассмотрим  $g(x) := |F(x) - y|^2, x \in B(x_0, \delta)$ . Как было сказано выше, мы доказываем, что у нас  $\exists x \Leftrightarrow g(x) = 0$  возможно. Ну, очевидно, что, видимо, в если там и есть ноль, то это экстремум функции (модуль же, лол).

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 \underset{\text{очевидно по рисунку}}{\leq} r^2$$

Также, по рисунку очевидно, что для всех  $x$  с границы, наша функция отправляет их сильно дальше.

$$\forall x \in S(x, \delta) \quad g(x) \geq r^2$$

Получается, наш минимум лежит где-то внутри сферы. Поищем его. По определению евклидовой нормы:

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + (F_2(x) - y_2)^2 + \dots + (F_m(x) - y_m)^2$$

По необходимому условию экстремума,  $\nabla F(x) = 0 \Rightarrow \forall i \in [1, m] : \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$

$$g'(x) = 2(F_1(x) - y_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + 2(F_2(x) - y_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + 2(F_m(x) - y_m) \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0$$

Или в векторной форме:

$$2 \cdot (F(x) - y) \cdot F'(x) = 0$$

Однако, по условию у нас производный оператор невырожденный! Следовательно, остаётся только  $F(x) = y$ . А это то, что мы и искали!!!!

ч. т. д.

#### 1.4.9 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

*Формулировка:*

- $f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- $O$  — открыто
- $l < m$
- $F \in C^1(O)$
- $\forall x \in O : \text{rank}(F') = l$

Тогда  $F(O)$  — открыто

*Доказательство:*

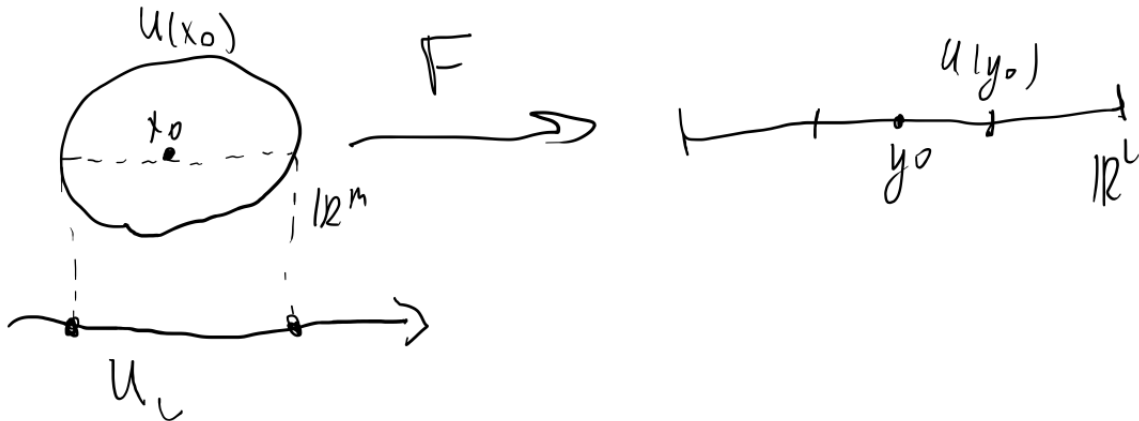
Зафиксируем  $x_0 \in O$ . Так как у нас матрица производного оператора теперь имеет вид не квадратный, а прямоугольный  $(l \times m)$ , просто так применить предыдущую теорему не получится. Поэтому, не умаляя общности, давайте считать, что вот этот ЛНЗ набор векторов в матрице реализуется на позициях  $1 \dots l$ . Тогда мы можем посчитать определитель этой матрицы:

$$\det \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq l} (x_0) \neq 0$$

При этом, так как мы потребовали непрерывность, немножко пошевелив  $x_0$  всё также будет работать:

$$\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \quad \det \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq l} (x) \neq 0$$

Мы уже доказали, что  $F(x_0)$  — внутренняя в  $F(U(x_0))$  (по предыдущей теореме). Осталось немного пошаманить, чтобы доказать, что действительно из пространства большей в меньшую всё корректно отобразится.



Давайте заведём такую окрестность  $U_l = (t_1, t_2, \dots, t_l) : (t_1, t_2, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m)$ . Как видно на рисунке, это такая проекция в пространстве большей размерности на пространство меньшей. Теперь заведём  $\tilde{F} : U_l \rightarrow \mathbb{R}^l$  и посмотрим на её матрицу производных:

$$\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial t_j} = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t_1, t_2, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m) \right)$$

И вот теперь, по непрерывности  $\tilde{F}$  и прошлой теореме, всё по идее работает.

ч. т. д.

#### 1.4.10 Теорема о гладкости обратного отображения

*Формулировка:*

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $F$  — обратимо
- $F \in C^r(O), r \in 1, 2, \dots$
- $\forall x \in O : \det F'(x) \neq 0$

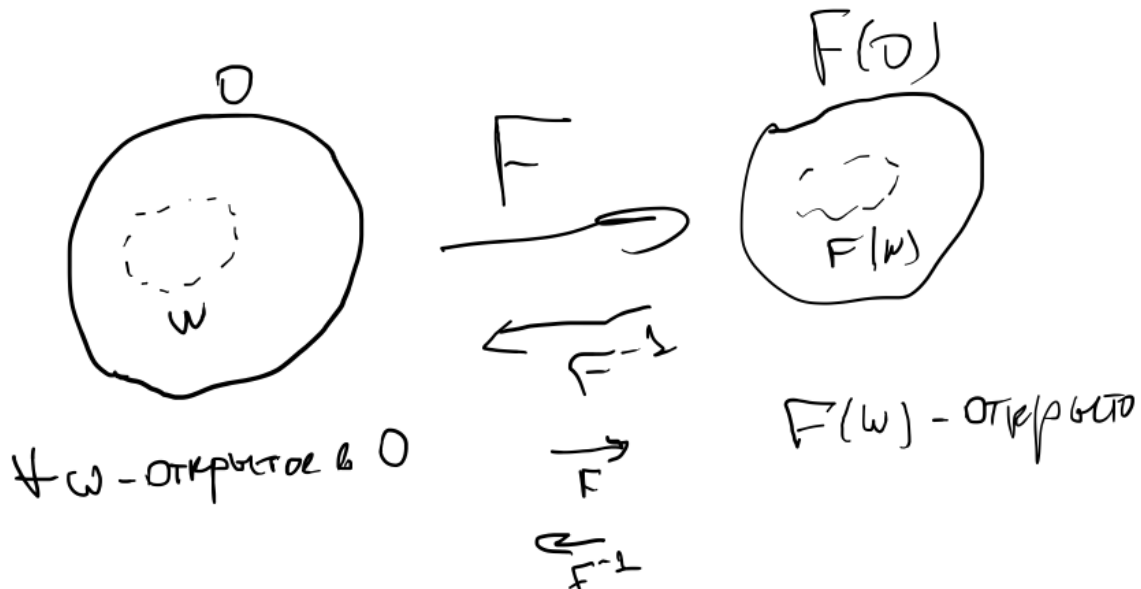
Тогда  $F^{-1} \in C^r$ ,  $((F^{-1}(y))' = (F'(x))^{-1})$  при  $F(x) = y$

*Доказательство:*

Докажем по индукции по  $r$ . Замое запарное — база.

**База:**

Пусть  $x_0 \in O$ ,  $F(x_0) = y_0$ .  $S := F^{-1}$ . Заметим, что  $S$  — непрерывно по теореме о сохранении области и теореме о топологическом определении непрерывности (типа для любого открытого из прообраза образ тоже открыт)



По лемме о “почти” локальной инъективности:

$$\exists C, \delta > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta) \quad |F(x) - F(x_0)| \geq C|x - x_0| \Rightarrow |x - x_0| \leq \frac{1}{C}|F(x) - F(x_0)|$$

Запишем определение дифференцируемости для  $F$  и сразу распишем всё в терминах  $y$ :

$$A = F'(x_0), \quad \underbrace{F(x) - F(x_0)}_{y - y_0} = A(\underbrace{x - x_0}_{S(y) - S(y_0)}) + \underbrace{\alpha(x)}_{S(y)}|x - x_0|$$

Выражаем  $(S(y) - S(y_0))$ :

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)|}_{\beta(y) \stackrel{???}{=} o(|y - y_0|)}$$

Получилось вполне себе нормальное определение для дифференцируемости  $S$ . Надо лишь доказать “о”-шку при  $y \rightarrow y_0$ . Оценим её с помощью вывода из леммы выше и стандартной оценки операторной нормы (не забываем, что мы как-бы управляем  $y$  ???):

$$\begin{aligned} |x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta &\stackrel{\text{при } y \text{ близких к } y_0}{\Rightarrow} |\beta(y)| = |A^{-1}\alpha(S(y))| \cdot |S(y) - S(y_0)| \\ &\leq \underbrace{\frac{\|A^{-1}\|}{C}}_{\text{const}} \cdot \underbrace{|y - y_0|}_{|F(x) - F(x_0)|} \cdot |\alpha(S(y))| \\ &= o(|y - y_0|) \end{aligned}$$

Фактически “о”-шка доказана по определению. Тем самым доказана дифференцируемость. А что с непрерывностью производной то? Этого мы ещё не доказывали. Построим цепочку непрерывных отображений:

$$y \mapsto S(y) = x \mapsto A(x) \mapsto A^{-1}(x) = S'(y)$$

Непрерывность дифференцирования обратного производного оператора доказывается маханием руками на тему отдельных производных в матрице. Тем самым база доказана.

### Переход

Достаточно тривиальный. Посмотрим при  $m = 1$  :  $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x(y))}$ . То есть, пусть  $f \in C^{r+1}$ , тогда надо доказать, что  $f' \in C^r$ . Ну там вот это и написано, обратная функция вообще  $C^\infty$ ,  $f'(x) \in C^r$  — очев. Для многомерного случая всё тоже самое, только формула выглядит пафоснее  $\dots = (F'(x(y)))^{-1}$

ч. т. д.

### 1.4.11 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

*Формулировка:*

$$M \subset \mathbb{R}^m, 1 \leq k \leq m, 1 \leq r \leq \infty$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1.  $\exists U(p) \in \mathbb{R}^m : M \cap U(p)$  — гладкое  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие

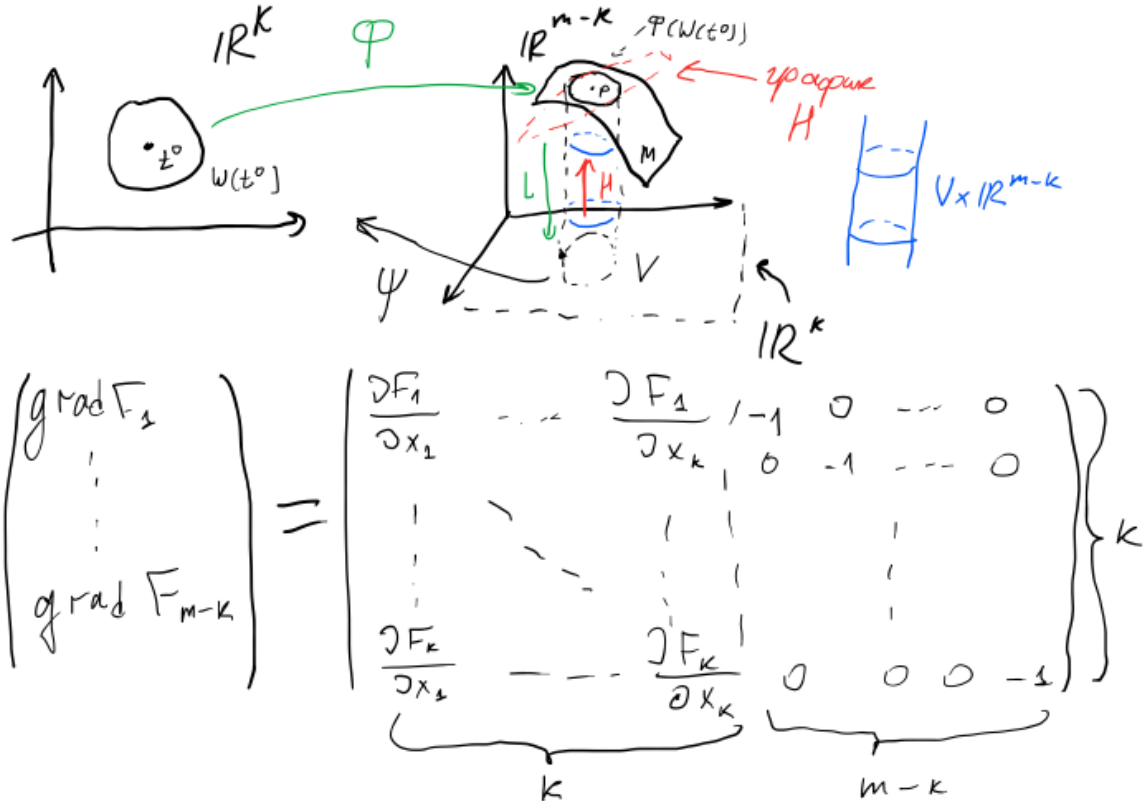
2.  $\exists \tilde{U}(p) \in \mathbb{R}^m : \exists (F_1, F_2, \dots, F_{m-k}) : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}, F_i \in C^r$

(a)  $\forall x \in \tilde{U} \cap M \Leftrightarrow F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_{m-k}(x) = 0$

(b)  $\nabla F_1, \nabla F_2, \dots, \nabla F_{m-k}$  — ЛНЗ

Доказательство (оставь надежду всяк сюда идущий):

(1)  $\Rightarrow$  (2)



Нам дано многообразие. А что это значит?  $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^r$  — гомеоморфизм. Давайте посмотрим на неё в смысле координатных функций:  $\exists \Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l), p = \Phi(t^0), \text{rank } \Phi'(t^0) = k$ . Всё по определению.

У нас тут ЛНЗ набор (ранг  $k$ ), поэтому давайте опять считать, что он реализуется на первых  $k$  векторов, поэтому:

$$\left( \det \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j} \right)_{i=1 \dots k} = 0$$

Теперь давайте, во-первых, примем за  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^k$  (на рисунке справа, всё логично). И заведём  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k : (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_k)$  — просто проекция первых  $k$  координат. Тогда заметим, что  $(L \circ \Phi)'(t^0)$  — невырожденный оператор: всё просто, он мапит первые  $k$  координат, а оператор по ним невырожден по определению многообразия, вон, наверху написано. Значит, это локальный диффеоморфизм (по соответствующей теореме). А если  $W(t^0)$  — окрестность, то  $L \circ \Phi : W \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k \in C^r$  — диффеоморфизм (класс гладкости сохраняется).



Тогда давайте введём ещё парочку отображений:  $\Psi : V \rightarrow W := (L \circ \Phi)$  — обратное отображение, также диффеоморфизм, т. к. оно там всё диффеоморфизм, следовательно биекция сохраняется. Также, получается, раз у нас биекция, над  $V$  множество в  $\mathbb{R}^{m-k}$  это график какого-то отображения. Оно точно существует, ведь  $L$  — биективно. Назовём его  $H : V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$

При  $x' \in V : (\underbrace{x'}_{1\dots k}, \underbrace{H(x')}_{k+1\dots m-k}) = \Phi\Psi(x')$  — это правда, просто проехали по путям и вернулись. В

$L$  у нас только первые  $k$  координат, а  $H$  нам дорисовывает остальные  $m - k$  штук. Ну и вот, в правой стороне равенства у нас диффеоморфизмы, слева проекция (там вообще всё гуд) и  $H \Rightarrow$  это тоже диффеоморфизм класса  $C^r$ .

Почти всё. Осталось чётко определить, на какой окрестности будут определены наши функции. Смотрите, вообще наш график  $H$  может в принципе быть и шире, чем  $W(t^0)$ , и тогда  $L(\text{график } H)$  может быть больше, чем  $V$ , и мы не хотим со всем этим разбираться — зачем? Поэтому давайте аккуратненько всё подрежем.  $V \times \mathbb{R}^{m-k}$  — открытое, такой типа цилиндр вверх.  $\Phi$  — гомеоморфизм, поэтому  $\Phi(W)$  — открытое. Но в  $M$  — это важно! Оно может и не быть открыто во всём  $\mathbb{R}^m$ , а конкретно на  $M$  с индуцированной метрикой точно открыто. Тогда вспоминаем теорему из 1-го семестра об открытом множестве в пространстве и подпространстве:  $M \subset \mathbb{R}^m, \Phi(W) \subset M$  — открытое, тогда  $\exists G \subset \mathbb{R}^m : G \cap M = \Phi(W), G$  — открытое. И тогда пусть область определения  $\tilde{U}(p) = G \cap \{V \times \mathbb{R}^{m-k}\}$  — открытое в  $\mathbb{R}^m$ , отрезали всё лишнее.

Ну всё, совсем немного осталось. Надо задать такие функции, что они будут нулевыми при  $x \in \tilde{U} \cap M$ . Пусть  $F_j(x) = H_j(L(x)) - x_{j+k}$ . Что тут написано: мы берём  $x$ , отправляем его в  $L$ , оставляя только первые  $k$  координат. Потом  $H$  отправляем его обратно наверх, причём конкретно  $H_j$  вернёт нам  $x_{k+j}$ -ю координату, ведь, как мы писали выше, точки из графика  $H$  выглядят как  $(\underbrace{x'}_{1\dots k}, \underbrace{H(x')}_{k+1\dots m-k})$ . Ну всё, (А) выполнено автоматически. А что там с градиентами? Давайте просто их построим и увидим, что в конце будет просто  $-E$ , что и даст нам  $m - k$  независимых векторов (ну, ранг такой).

(2)  $\Rightarrow$  (1)

Тут нам сильно помогут наработки предков. Давайте подгоним наше условие под условие теоремы о неявном отображении (в смысле системы уравнений). У нас там была система из уравнений  $F(x, y) = 0$ , где  $x$  — “переменные”, а  $y$  — “функции” и решение  $(x^0, y^0)$ , такое что при  $\forall x \in P(x^0), y \in Q(y^0) : F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \exists \varphi : P \rightarrow Q : \phi(x) = y$ . Давайте назначим первые  $k$  координат переменными, а следующие  $m - k$  — функциями. Опять же, у нас ЛНЗ лабор этих градиентов этих функций, а именно:

$$\left( \det \frac{\partial F_i}{\partial x_{j+k}} \right)_{1 \leq i, k \leq m-k} (x^0, y^0) \neq 0$$

Значит, условие теоремы выполнено, и параметризация есть ничто иное, как  $\Phi : U(p_1, p_2, \dots, p_k) \rightarrow \mathbb{R}^m$   $x' \mapsto (x', \varphi(x'))$  на  $x \in M \cap \tilde{U} \cap \{P \times Q\}$  (по сути график  $\varphi$ ). В том числе это и гомеоморфизм, так как в одну сторону всё непрерывно, так как функции непрерывны  $(x', \varphi(x'))$ , а обратно — это по сути проекция, так что всё тоже непрерывно. Классы гладкости тоже переезжают из прошлой теоремы.

ч. т. д.

#### 1.4.12 Следствие о двух параметризациях

*Формулировка:*

$M \subset \mathbb{R}^m$  —  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^m$

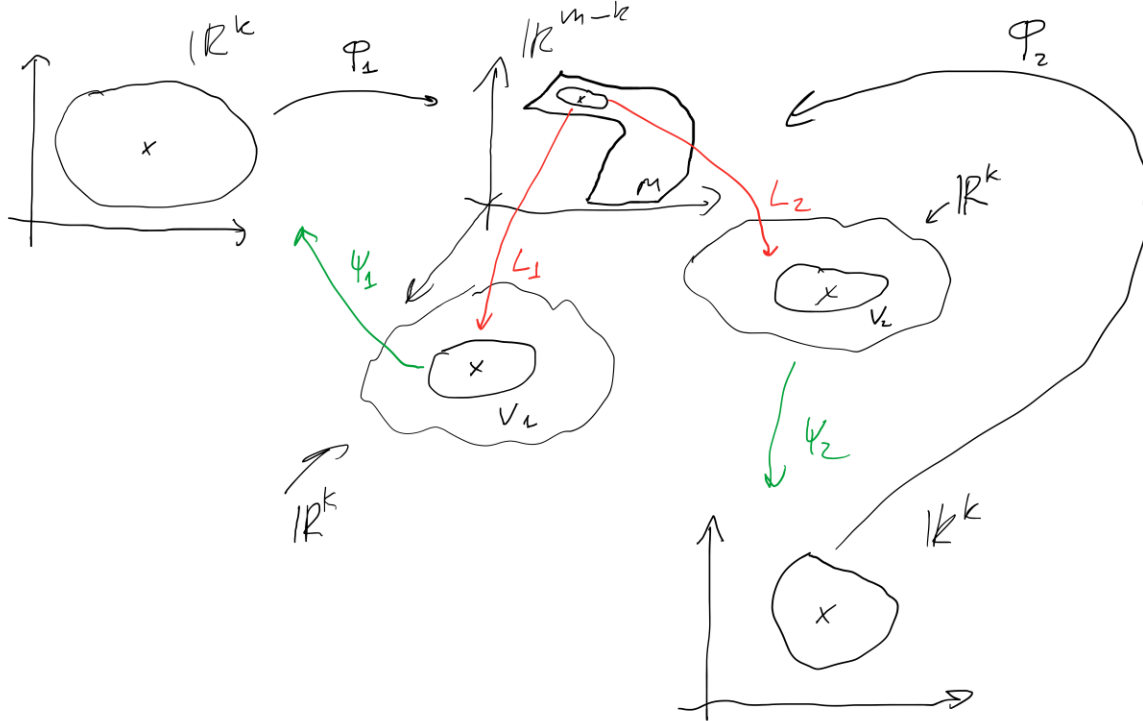
1.  $\exists \Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$

2.  $\exists \Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$

— гладкие параметризации.

Тогда  $\exists \Theta : O_1 \rightarrow O_2 : \Phi_1 = \Phi_2 \circ \Theta$  — диффеоморфизм класса  $C^r$

Доказательство:



Продолжаем повествование из прошлой теоремы. Гомеоморфизм  $O_1 \rightarrow O_2$ , вообще говоря, существует тривиально:  $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ . Однако, так говорить не совсем правильно, потому что для корректного взятия обратной функции, необходимо сузить образ  $\Phi_2$  на его реальную область значений. Поэтому давайте поступим умнее: нарисует возможные пути точки (крестика) на рисунке (кстати, важно заметить, что разные параметризации могут отправлять точки в разные пространства  $\mathbb{R}^k$ , ведь ранг может реализовываться на произвольных строчках матрицы производного оператора; поэтому у нас появилось 2 пространства и соответствующие отображения между ними (см. картинку)).

$$\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Psi_2 \circ L_2 \circ \Phi_1) = \Psi_2 \circ \Theta$$

Супер, гомеоморфизм есть. А обратим ли он? Да пожалуйста:

$$\Theta^{-1} = \Psi_1 \circ L_1 \circ \Psi_2$$

А всякие гладкости и классы приходят просто из предыдущих отображений, всё там супер.

ч. т. д.

#### 1.4.13 Лемма о корректности определения касательного пространства

Формулировка:

- $M \subset \mathbb{R}^m$  — простое  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^m$
- $p \in M$
- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  — параметризация  $M \cap U(p)$
- $t^0 \in O : \Phi(t^0) = p$
- $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейный оператор

Тогда образ  $\Phi'(t^0)$  — линейное подпространство в  $\mathbb{R}^m$ , не зависящее от  $\Phi$ .

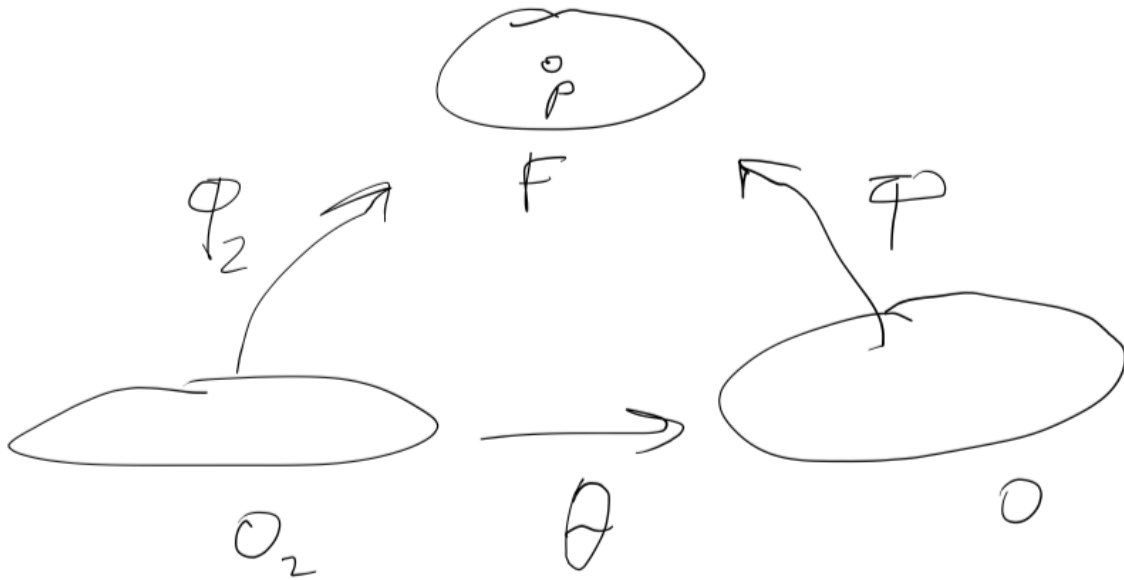
Доказательство:

Так как  $\Phi$  — параметризация,  $\text{rank } \Phi = k$ . Ну и тогда всё очевидно по знаниям из линейной алгебры, размерность пространства определяется количеством ЛНЗ столбцов.

По поводу независимости, по следствию о двух параметризациях:

$$\Phi_2 = \Phi \circ \Theta \Rightarrow \Phi'_2 = \Phi' \Theta'$$

$\Theta$  — диффеоморфизм, следовательно  $\Theta'(t^0)$  — невырожденный. Поэтому образ  $\Phi'_2 = \Phi'$  (см. картинку)



ч. т. д.

#### 1.4.14 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

Формулировка (Лемма):

$$v \in T_p M$$

Тогда  $\exists$  гладкий  $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M : \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$

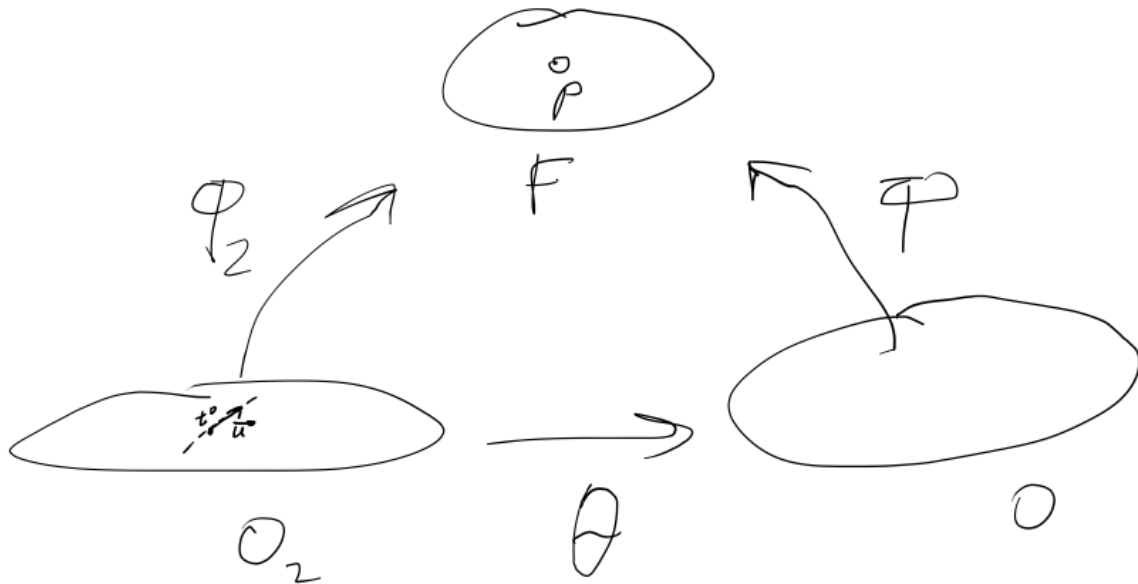
*Доказательство:*

Раз у нас есть  $v$  в образе, значит оно откуда-то пришло. Давайте найдём:  $u = (\Phi'(t_0))^{-1}v$ .

Тогда предъявим путь в  $O : \tilde{\gamma}(s) = t^0 + su, s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ . Типа мы выбрали направление, и гоняем по нему в  $O$ .

А настоящий путь будет таким:  $\gamma(s) = \Phi \circ \tilde{\gamma}(s)$ . Тогда  $\gamma'(s) = \Phi' \circ \tilde{\gamma}(s)$ .

Проверим:  $\gamma(0) = \Phi(t^0 + 0) = p, \quad \gamma'(0) = \Phi' u = v$



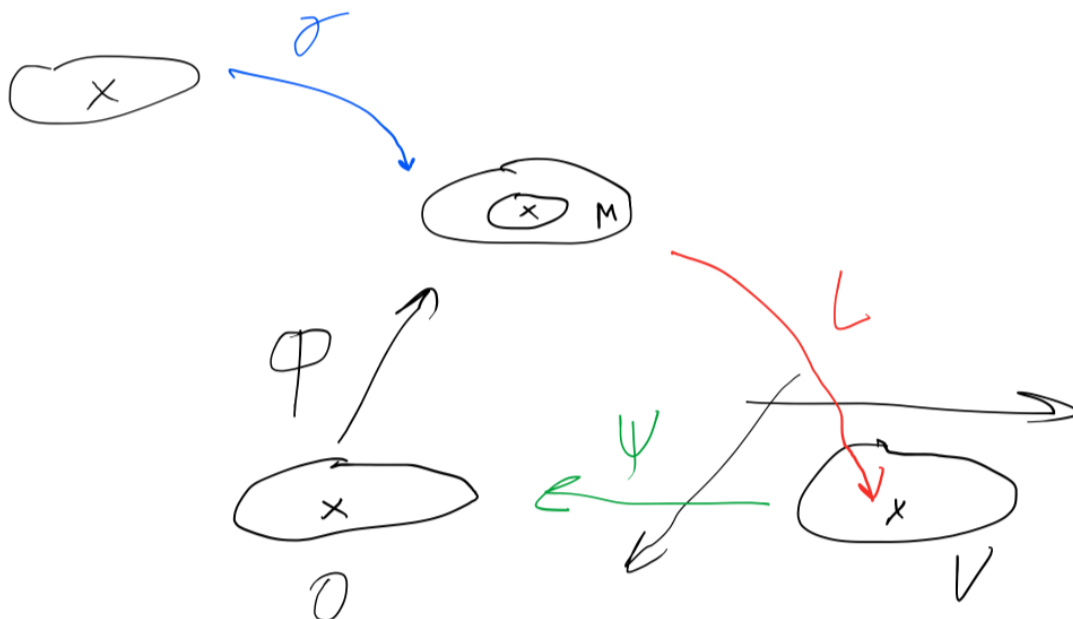
ч. т. д.

*Формулировка:*

$\exists$  гладкий путь  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = p$

Тогда  $\gamma'(0) \in T_p M$

*Доказательство:*



Давайте опять прогуляемся по картинке из теоремы о задаче параметризации:

$$\gamma(s) = \Phi \circ \Psi \circ L \circ \gamma(s)$$

Это очевидно, просто прошли по кругу.

$$\gamma'(0) = \Phi'(t^0) \Psi' L' \gamma'$$

Всё лежит в образе  $\Phi'(t^0)$ , так что по определению касательного пространства всё супер.

ч. т. д.

#### 1.4.15 Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня

*Формулировка (к графику функции):*

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \in C^1$
- $y = f(x)$  — задаёт простое гладкое  $n$ -мерное многообразие в  $\mathbb{R}^{n+1}$  (???)
- есть точка  $f(x^0) = y^0$

Тогда  $y - y^0 = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x^0)(x_i - x_i^0)$  задаёт аффинное касательное пространство

*Доказательство:*

Пусть  $\Phi : x \mapsto (x, f(x))$ . Посмотрим на производный оператор этого отображения:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & f'_{x_3} & \dots & f'_{x_n} \end{pmatrix}$$

Заметим, что в нашей формуле неизвестные —  $y$  и  $x_i$ . Давайте рассмотрим вектор, образующийся перед  $x_i$ :

$$\begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \\ f'_{x_3} \\ \vdots \\ f'_{x_n} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что этот вектор ортогонален матрице производного оператора (при перемножении даёт нуль-вектор, следовательно косинус 0, по скалярному произведению). Ну это то, что нам нужно. Вектор (фактически нормаль) к касательному пространству. Ещё и через точку начальную проходит  $(x^0, y^0)$ .

ч. т. д.

*Формулировка (к уровню):*

- $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая
- $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$  — функция
- $x^0$  — точка, в которой ищем касательное пространство

Тогда касательное пространство задаётся уравнением  $f'_{x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + f'_{x_m}(x_m - x_m^0) = 0$

*Доказательство:*

Во-первых, давайте опять прогоним трюк с теоремой о неявном отображении: будем считать первые  $m - 1$  координату “неизвестными”, а  $x_m$  — “функцией”.

Тогда пусть  $f'_{x_m}(x^0) \neq 0$ . Значит, существует  $x_m = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ . Ещё один трюк:  $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}))$  — параметризация многообразия  $f(x) = 0$  в окрестности точки  $x^0$ .

Тогда по предыдущему, что мы доказали, касательная плоскость задаётся  $\sum_{i=1}^{m-1} \varphi'_i(x^0)(x_i - x_i^0) = x_m - x_m^0$ , или:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \varphi'_i(x^0)(x_i - x_i^0) - (x_m - x_m^0) = 0$$

Это всё замечательно, но условие требует вывод в терминах  $f$ . А как они связаны? По условию:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})) = 0$$

Давайте вычислим рецепт замены  $\varphi_{x_i}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : f'_{x_i} + f'_{x_m} \cdot \varphi'_{x_i} = 0 \Rightarrow \varphi_{x_i} = -\frac{f'_{x_i}}{f'_{x_m}} \quad (f'_{x_m}(x^0) \neq 0 \text{ по усл.})$$

Итого:

$$-\sum_{i=1}^{m-1} \frac{f'_{x_i}}{f'_{x_m}}(x^0)(x_i - x_i^0) - (x_m - x_m^0) = 0 \quad | \cdot - f'_{x_m}$$

ч. т. д.

#### 1.4.16 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

*Формулировка:*

$$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Тогда  $\|A\| = \max \sqrt{\lambda}, \lambda \in \sigma(A^T A)$  — множество собственных чисел.

*Доказательство:*

Рассмотрим  $x \in S^{m-1} : \{y \in \mathbb{R}^m : |y| = 1\}$ .

$$\|A\|^2 = \sup_{x \in S^{m-1}} |Ax|^2 = \sup_{x \in S^{m-1}} \langle Ax, Ax \rangle = \sup_{x \in S^{m-1}} \langle \underbrace{A^T A}_{\text{симметричная}} x, x \rangle = \sup_{x \in S^{m-1}, \lambda \in \sigma(A^T A)} \lambda |x|^2 = \max_{\lambda \in \sigma(A^T A)} \lambda$$

Немного контекста: собственное число, это такое число, что  $A$  отображает  $x$  в  $\lambda x$ . Матрица  $A^T A$  — симметричная  $(m \times n) \times (n \times m) = m \times m$ . Так как у нас эта матрица вещественная, то и собственные числа у неё вещественные. Ну и значит, что максимальный вектор, который может получиться, это вектор, домноженный на максимальное собственное число.

ч. т. д

#### 1.4.17 Теорема о функциональной зависимости

*Формулировка:*

- $f_1, f_2, \dots, f_n : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$
- $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : O \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $\forall x \in O : \text{rank } F'(x) \leq k$
- $x^0 \in O : \text{rank } F'(x^0) = k$
- $y^0 = F(x^0)$

Тогда:  $\exists U(x^0), \exists g_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_n : V(y_1^0, y_2^0, \dots, y_k^0) \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$

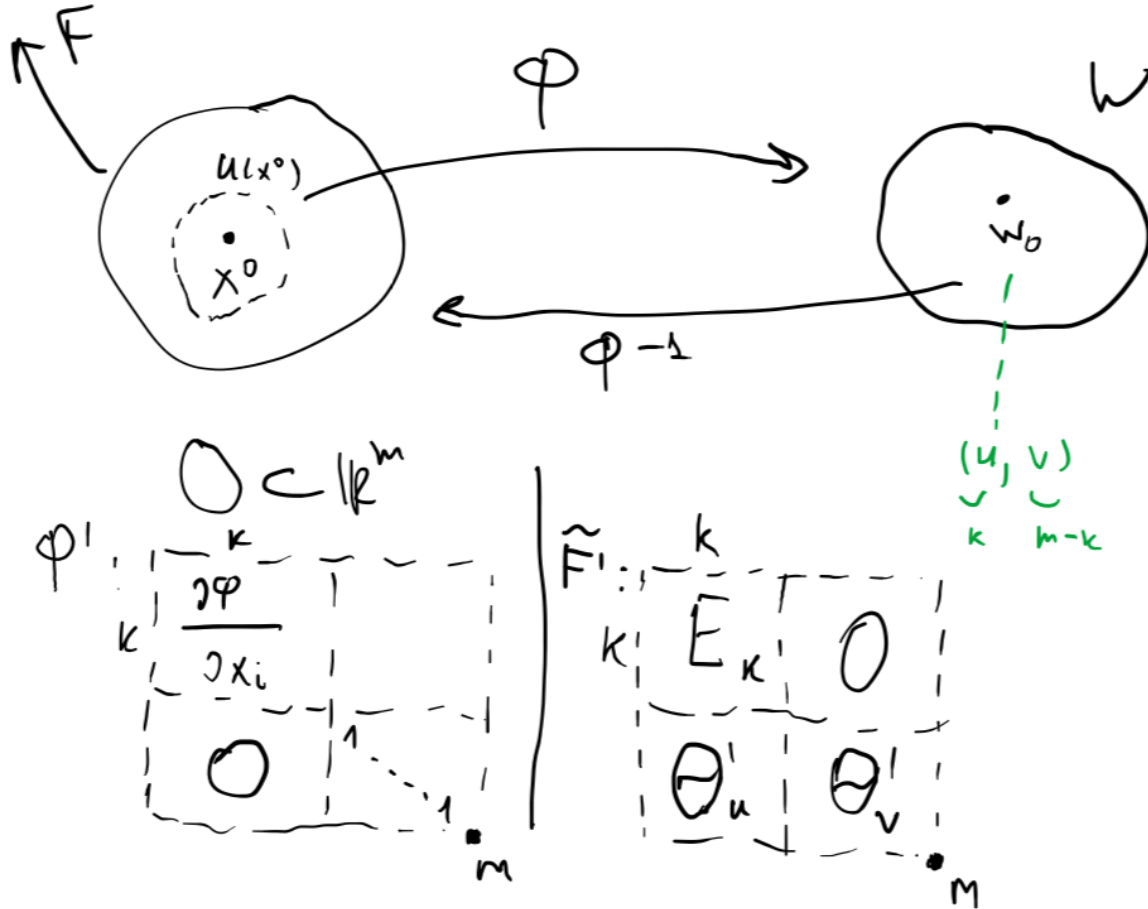
Что:  $f_i = g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)), i = k+1 \dots n, x \in U(x^0)$

*Доказательство:*

Пусть в точке  $x^0$  ранг реализуется на первом  $k$ -миноре (строчки  $1 \dots k$ , столбцы  $1 \dots k$ ).

Введём дополнительную функцию  $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \Phi(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, x_{k+1}, \dots, x_k)$ .

Тогда, если посмотреть на матрицу производного оператора  $\Phi'(x^0)$  (см. рисунок), то окажется, что она невырождена:  $\det \Phi'(x^0) \neq 0$ . Поэтому  $\Phi$  действует как локальный диффеоморфизм класса  $C^1$  (по определению там внутри функции минимум  $C^1$ ). Опять начинаем рисовать:



$\Phi(U(x^0)) = W$ ,  $\Phi(x^0) = w_0$ . Рассмотрим функцию  $\tilde{F} : W \rightarrow \mathbb{R}^n : F \circ \Phi^{-1}$ . Посмотрим подробнее на точку  $w_0 = (u, v)$ . Координата  $u$  вычислялась как  $f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_k(x_0)$ , теперь мы снова отправляем её обратно, получая  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0$ , и плём в  $F$ , снова применяя к точке функции  $f_i$ . Получается, что координата  $u$  отображается в саму себя.  $v$  же под действием какого-то отображения отображается во что-то другое:  $\tilde{F}(u, v) = (u, \Theta(u, v))$ .

Рассмотрим производный оператор  $\tilde{F}' = F' \cdot \underbrace{(\Phi^{-1})'}_{\text{невырожден}}$ . Невырожденный оператор (кстати, не

только в точке  $w$ , но и во всей окрестности, на которой работает локальный диффеоморфизм) не меняет ранг матрицы, поэтому  $\text{rank } \tilde{F} = k$ . С другой стороны, если посмотреть на матрицу производного оператора (см. рисунок),  $\Theta'_v$  обязана быть тождественно равна 0, в противном случае мы могли бы сочинить минор большего ранга, чем  $k$ . Таким образом,  $\Theta'_v = 0 \Rightarrow \Theta = \Theta(u)$  (зависит только от  $u$ ).

Тогда давайте перенесём (домножим на обратную), выразим  $F$  и аккуратно распишем:



$$\begin{aligned}
F(x) &= \tilde{F} \circ \Phi(x) \\
&= \tilde{F}(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m) \\
&= (f_1(x), \dots, f_k(x), \Theta(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))_{k+1}, \dots, \Theta(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))_n)
\end{aligned}$$

Ч. Т. Д.

## **2 Период Мезозойский**

### **2.1 Важные определения**

## 2.2 Определения

## 2.3 Важные теоремы

## 2.4 Теоремы