СВЯТОЙ КПК
#BlessRNG

Или как не сдохнуть на 3 семе из-за матана

Разработал

Никита Варламов @snitron

Почётный автор

Тимофей Белоусов @imodre

v0.0 alpha
Октябрь-Undefined 2022-2023

Заметки авторов
В данном конспекте названия всех задач имеют ссылку на своего автора в виде верхнего индекса:

1. @imodre
2. @snitron

По любым вопросам и предложениям/улучшениям обращаться в телеграмм к соответвующему автору.
Known Issues
Вы в любой момент можете добавить любую недостающую теорему, затехав её и отправив код (фотографии письменного текста запрещены) в телегу любому из указанных авторов. Ваше авторство также будет указано, с вашего разрешения.

Ah shit
Here we go again!
And again...

Содержание

1 Период Палеозойский

1.1 Важные определения

1.1.1 Норма линейного оператора

Пусть X, Y — нормированные линейные пространства, $A \in \mathbb{L}(X, Y)$ (это множество линейных отображений над $X \to Y$). Тогда нормой линейного оператора называется $||A||_{X,Y} = \sup_{x \in X_{|x|=1}} |Ax|_Y$

Замечания (для $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$):

1. По лемме об ограниченности нормы линейного оператора ($L = (l_{i,j}), |Lx| \leq C_L|x| = C_L \cdot 1 = \sqrt{\sum l_{i,j}^2}$) — всегда ограничена!
2. $x \to |Lx|$ — непрерывная функция, заданная на компакте ($|x| = 1 \Leftrightarrow x \in S(0,1)$ — сфера), причём по Вейерштрассу, максимум достигается. (напоминаю, мы в $\mathbb{R}^m$!)
3. Верно неравенство $\forall x \in \mathbb{R}^m : |Lx| \leq ||L|| \cdot |x|$ (тут у нас важно различать евклидову и неевклидову норму). КПК считает, что это очевидно:
   (a) $x = 0$ — равенство
   (b) $x \neq 0$ — делим на норму $x : |L\frac{x}{|x|}| \leq ||L||$, это очевидно, т.к. наша новая норма задаётся как супремум значений $|x| = 1$, ну и мы вот сравниваем супремум с меньшими значениями.
4. $\forall x \in \mathbb{R}^m$, если нашлось $C > 0 : |Lx| \leq C \cdot |x| \Rightarrow ||L|| \leq C$ — тупо по пункту 3, очевидно.

1.1.2 Простое k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

Обобщение вот всей этой темы с диффеоморфизмами в одно толковое определение

$M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$, если:

- $\exists O \subset \mathbb{R}^k$ — открытое (область?)
- $\exists \Phi : O \to \mathbb{R}^m, \Phi(O) = M$ — гомеоморфизм (непрерывная биекция)
- $\Phi \in C^r(O)$
- $\forall x \in O : \operatorname{rank} \Phi'(x) = k$

Φ — гладкая параметризация.

1.1.3 Формулировка достаточного условия относительного экстремума

- $f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}, \Phi : E \to \mathbb{R}^n, \quad f, \Phi \in C^1$
- $M_\Phi \subset E : \{x \mid \Phi(x) = 0\}$
- $a \in E$ — точка относительного локального экстремума ($\forall x \in U(a) \cap M_\Phi, f(x_0) \leq f(x)$ — это нестрогий максимум, остальное аналогично)
- $\Phi(a) = 0$ — уравнение связи

- $\operatorname{rank} \Phi'(a) = n$

это условия из необходимого условия

- $G(x) = f(x) - \lambda_1 \Phi_1(x) - \lambda_2 \Phi_2'(x) \dots \lambda_n \Phi_n(x) = f - \langle \lambda, \Phi \rangle$
- λ из необходимого условия
- $h \in \mathbb{R}^{m+n}, h = (h_x, h_y)$
- $\Phi'(a) \cdot h \neq 0 \Rightarrow$ можно выразить $h_y = \Psi(h_x)$
- $Q(h_x) = d^2 G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$ — это квадратичная форма

Тогда:

1. $Q(h_x)$ — положительно-определённая, тогда a — точка относительного локального минимума
2. $Q(h_x)$ — отрицательно-определённая, тогда a — точка относительного локального максимума
3. $Q(h_x)$ — незнако-определённая, тогда a — не точка относительного локального экстремума
4. $Q(h_x)$ — полу-определённая, тогда информации недостаточно (может быть и так, и так)

1.2 Определения

1.2.1 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

Квадратичная форма: $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$Q(h) = \sum_{1 \le i,j \le m} a_{ij} h_i h_j$$

- Положительно-: $\forall h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) > 0$
- Отрицательно-: $\forall h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) < 0$
- Незнако-: $\exists h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) < 0, \exists \widetilde{h} \neq 0 : Q(\widetilde{h}) > 0$
- Полуопределённая (положительно определённая вырожденая): $Q(h) \ge 0, \exists h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) = 0$

1.2.2 Локальный максимум, минимум, экстремум

Рассмотрим только максимум, остальное аналогично (+ строгий)

$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in D$

Если $\exists U(a) : \forall x \in U(a) \quad f(x) \le f(a)$, то a — точка локального максимума.

1.2.3 Диффеоморфизм

$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, O$ — открыто и связно (область)

- F — обратимо
- F — дифференцируемо
- F^{-1} — дифференцируемо

Тогда F — диффеоморфизм

1.2.4 Теорема о локальной обратимости

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $F \in C^1(O)$
- $x_0 \in O : \det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists U(x_0) : F|_{U(x_0)}$ — диффеоморфизм

1.2.5 Формулировка теоремы о гладкости обратного отображения в терминах систем уравнений

- $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$
- $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = y_m \end{cases}$
- $(x_0, y_0) : F(x_0) = y_0, \det \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$
- $\exists U(x_0), W(y_0) : \exists F : U \to W$ — диффеоморфизм : $\exists$ гладкое решение $\begin{cases} x_1(y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ x_2(y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ x_m(y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{cases}$

1.2.6 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

- $F = (x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$
- $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \end{cases}$
- $(x^0, y^0) : F(x^0, y^0) = 0, \det \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \neq 0$
- $\exists U(x^0) \in \mathbb{R}^m,\ \varphi(x) : F(x, \varphi(x)) = 0, x \in U(x_0)$ — гладкие решения

1.2.7 Касательное пространство к k-мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$

- $M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$
- $p \in M$
- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — параметризация $M \cap U(p)$
- $t^0 \in O : \Phi(t^0) = p$
- $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор

Тогда образ $\Phi'(t^0)$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$, не зависящее от Φ. Ну вот оно и называется *касательным пространством* (T_pM).

Причём важно, что это пространство не обязано проходить через точку p. Это просто пространство касательных векторов, откладываемых от начала координат (???).

1.3 Важные теоремы

1.3.1 Достаточное условие экстремума

Формулировка:

- $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $a \in Int(D)$
- $\nabla f(a) = 0$
- $f \in C^2(D)$
- $Q(h) := d^2 f(a, h)$

Тогда:

1. $Q(h)$ — положительно-определённая, тогда a — точка локального минимума
2. $Q(h)$ — отрицательно-определённая, тогда a — точка локального максимума
3. $Q(h)$ — незнако-определённая, тогда a — не точка локального экстремума
4. $Q(h)$ — полу-определённая, тогда информации недостаточно (может быть и так, и так)

Доказательство:

(1)

Давайте поближе присмотримся к $\forall h \in \mathbb{R}^m\ \forall t \in [0, 1] : \quad f(a+h) = f(a)+df(a,h)+\frac{1}{2!}d^2 f(a+th,h)$ — это типа формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

Теперь рассмотрим разность $f(a + h) - f(a)$, и заметим, что $df(a, h) = 0$ по условию.

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + \frac{1}{2!}(f''_{x_1,x_1}(a+th)h_1^2 + f''_{x_1,x_2}(a+th)h_1h_2 + \ldots) \\
&= f(a) + \frac{1}{2!}d^2 f(a+th,h) \\
&= f(a) + \frac{1}{2!}Q(h) + \frac{1}{2!}(d^2 f(a+th,h) - Q(h)) \\
&= f(a) + \frac{1}{2!}Q(h) + \frac{1}{2!}(d^2 f(a+th,h) - d^2 f(a,h)) \\
&= f(a) + \frac{1}{2!}Q(h) + \frac{1}{2!}(f''_{x_1,x_1}(a+th)h_1^2 - f''_{x_1,x_1}(a)h_1^2 + f''_{x_1,x_2}(a+th)h_1h_2 - \ldots)
\end{aligned}$$

Теперь заметим, что если повыносить коэффициенты при двойных производных, получится что-то в стиле $(f''_1 - f''_2)(\sum_{i,j} h_i h_j)$, где левая скобка — б.м. при $h \to 0$, а правая оценивается $|h|^2$. Таким образом, все эти штуки есть ничто иное, как $\alpha(h)|h|^2$, где $\alpha(h)$ — б.м. при $h \to 0$.

В итоге получаем:

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2}Q(h) + \alpha(h)|h|^2 \underset{\text{по лемме об оценке кв. формы}}{\geq} \frac{\gamma_Q}{2}|h|^2 + \alpha(h)|h|^2$$

$$\underset{\text{при } h\to 0}{\geq} \frac{\gamma_Q}{4}|h|^2 \underset{h\neq 0}{>} 0$$

Получается, что в окрестности нашей точки a все значения больше, чем в ней самой. Получается, это по определению это точка локального минимимума.

(2)

Всё то же самое, только пусть мы рассматриваем функцию $g := -f$. С учётом отрицательно определённой квадратичной формы всё получится, и тут у нас точка локального максимума.

(3)

Шизофазия начинается тут. Т.к. у нас незнакоопределённая форма, значит $\exists h > 0 : Q(h) > 0, \quad \exists \widetilde{h} > 0 : Q(\widetilde{h}) < 0$

Раньше мы с вами считали, что h может быть любым. Теперь же давайте рассмотрим относительно вот этих существующих $h, \widetilde{h}$. Но чтобы устремлять всё это дело к 0, нам необходим некоторый параметр. Пусть он будет s. Тогда рассматриваем по тому же принципу: $f(a+sh)-f(a)$, рассуждения такие же, только там везде дополнительно вылезает s^2, и, таким образом, функции станут зависеть от него:

$$f(a+sh)-f(a) \geq \frac{1}{2}Q(sh) - |\alpha(s)|s^2 = \frac{s^2}{2}Q(h) - |\alpha(s)|s^2 \geq \frac{1}{4}Q(h)s^2$$

Вот, тут у нас получилось, что это минимум. А если отработаем с $\widetilde{h}$, то получится наоборот.

(4)

Ну а тут, слава Богу, достаточно привести пример.

Пусть $f(x) := x_1^2 - x_2^4, \quad a = (0,0)$

$df(a,h) = 0, \quad d^2f(a,h) = 2h_1^2$

Видно, что в этом случае мы можем бегать и по x_1, и по x_2, и в итоге получим разные значения, потому что форма вообще зависит только от одной компоненты.

А для почти идентичной $g(x) := x_1^2 + x_2^4$ уже всё наоборот, и существует строгий локальный минимум.

ч. т. д.

1.3.2 Теорема о неявном отображении

Формулировка:

- $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$
- $(a,b) \in O, \quad a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$
- $F(a,b) = 0 \in \mathbb{R}^{m+n}$
- $F \in C^r, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- $\det F'_y(a,b) \neq 0$

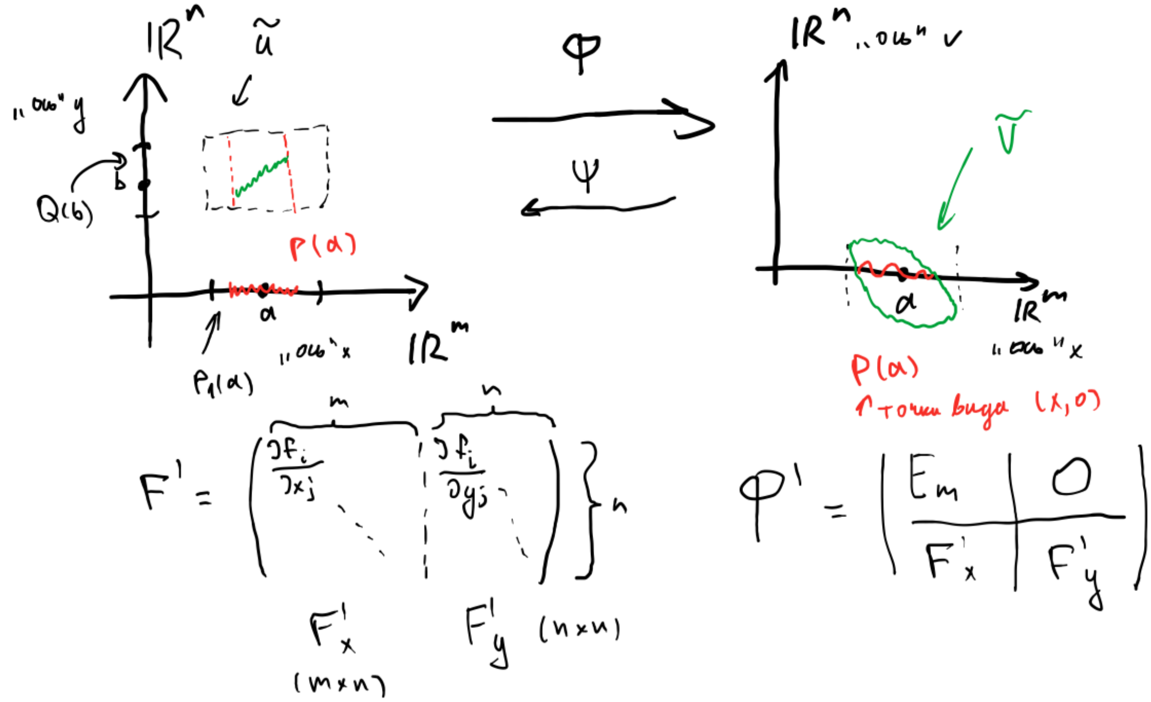
Тогда $\exists P(a) \subset \mathbb{R}^m, Q(b) \subset \mathbb{R}^n$ — окрестности, и $\exists! \varphi : P \to Q \in C^r$ гладкое:

$$\forall x \in P : F(x, \varphi(x)) = 0$$

Бонус:

$\varphi'(x) = -(F'_y(x, \varphi(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, \varphi(x)) \Leftrightarrow F'_x(x, \varphi(x)) + F'_y \cdot \varphi'(x) = 0$ (продифференцировали условие)

Доказательство:



Нет, это не шутка. Всё доказательство строится вокруг одной картинки и яростного махания руками со знанием дела.

Заведём $\Phi(x, y) : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}, \quad \Phi(x, y) = (x, F(x, y))$. Логично, что по условию $\Phi(a, b) = (a, 0)$. Если посмотреть на производный оператор (а она дифференцируема, так как F — дифференцируема (?)), то прекрасно видно, что матрица квадратная, да ещё и блочная $\Rightarrow \det \Phi'(a, b) = \det E_m \cdot \det F'_y(a, b)$. По условию ничего из этого не 0, следовательно определитель невырожден. А поэтому, по теореме о локальной обратимости: Φ — локальный диффеоморфизм класса C^r.

Заведём окрестность (как декартово произведение, почему бы и нет) $\widetilde{U} = P_1 \times Q$. P_1 немного большевата для P, поэтому потом мы её немного подрежем. $\widetilde{V} = \Phi(\widetilde{U})$. Заметим, что все эти окрестности открыты по предыдущим теоремам.

Т.к. у нас $\Phi|_{\widetilde{U}}$ — диффеоморфизм, на прообразе и образе имеет место быть обратное отображение $\Psi : \widetilde{V} \to \widetilde{U} = \Phi^{-1}$.

Заметим, что отображение Φ не меняет "x"-овые координаты (по построению функции ,см. рисунок), "y"-овые же как-то колбасит, как показано зелёной областью. Значит и Ψ их тоже не меняет, т.к. диффеоморфизм. Именно поэтому справа у нас координаты (x, v). Можно представить $\Psi(x, v) = (x, H(x, v)), \quad H : \widetilde{V} \to \mathbb{R}^n \in C^r$. Поэтому давайте выберем окрестность

$P \subset \mathbb{R}^m := \widetilde{V} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Она открыта по теореме (1 сем) о свойствах открытых множеств (конечное пересечение открытых открыто). $U = P \times Q$

Вооот. А теперь давайте предложим в качестве $\varphi(x) : P \to Q := H(x, 0)$. Она принадлежит классу C^r, т.к. все функции до этого в нём лежали. А почему выполняется условие $F(x, \varphi(x)) = 0, x \in P$? Ну давайте проследим путь. Что такое вообще $H(x, 0)$ — мы берём все точки вида $(x, 0)$ (см. картинку), и взаимно-однозначно отправляем их обратно в левую часть, тем самым вычисляя им значение $b_0 \in Q(b)$ (этим и занимается $H(x, v)$ по своей сути). Ну вот. А потом мы отправляем точку (x, b_0) в правую часть, и куда же она должна приехать, если уезжала из 0? Правильно, в 0. Ура, условие выполняется.

Осталось доказать едиственность, опять давайте помашем руками:

$$x \in P, y \in Q : F(x, y) = 0, \quad \Phi(x, y) = (x, 0)$$

$$(x, y) = \Psi\Phi(x, y) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \varphi(x))$$

ч. т. д.

1.3.3 Необходимое условие относительного локального экстремума

Формулировка:

- $f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}, \Phi : E \to \mathbb{R}^n, \quad f, \Phi \in C^1$
- $M_\Phi \subset E : \{x \mid \Phi(x) = 0\}$
- $a \in E$ — точка относительного локального экстремума ($\forall x \in U(a) \cap M_\Phi, f(x_0) \leq f(x)$ — это нестрогий максимум, остальное аналогично)
- $\Phi(a) = 0$ — уравнение связи
- $\operatorname{rank} \Phi'(a) = n$

Тогда $\lambda \in \mathbb{R}^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) : \begin{cases} f'(a) + \lambda\Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$

Второе условие бесплатное, оно из условия.

Доказательство:

Так как у нас ранг n на матрице производного оператора Φ', давайте считать, что он достигается на $m + 1 \dots m + n$ (n штук) столбцах матрицы (это матрица n строк $\times$ $(m + n)$ столбцов). Тогда в стиле всех предыдущих теорем а-ля "неявное отображение" разделим переменные: $(x_1, x_2, \dots, x_m), (x_{m+1}, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \mapsto (x, y)$. Точку a тоже: (a_x, a_y).

Запускаем теорему о неявном отображении: $\Phi(a) = 0, \frac{\partial\Phi}{\partial y}$ — невырожденный оператор. Тогда существует $!\varphi : U(a_x) \to P(a_y), \Phi(x, \varphi(x)) = 0$. Замечаем, что $x \mapsto (x, \varphi(x))$ — параметризация простого гладкого m-мерного многобразия в $M_\Phi \cap \{U(a_x) \times P(a_y)\}$.

Тогда для $g(x) = f(x, \varphi(x))$ точка a_x — просто точка локального экстремума. Почему? Управляя теперь точкой x, мы с помощью g попадаем в M_Φ, внутри которого $\Phi(x) = 0$ всегда! Поэтому внутри хорошего (в рамках этой задачи) множества мы и ищем экстремум. Это можно легко понять, если представить поиск экстремума на какой-то области графика (ради этого всё и делается же).

Хорошо, давайте его искать. По необходимому условию экстремума, ЧП g должны быть равны нулю (φ' бывает только по x):

$$f'_x(a) + f'_y(a) \cdot \varphi'(a_x) = 0 \qquad (\in \mathbb{R}^m)$$

Начииная с этого места опускаем подстановку точек, но они там есть! Вспоминаем, что у нас есть $\Phi(x, \varphi(x)) = 0$. Также дифференцируем:

$$\Phi'_x + \Phi'_y \varphi' = 0 \qquad (\in Mat(n, m))$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^m : \qquad \lambda \Phi'_x + \lambda \Phi'_y \varphi' = 0 \qquad (\in \mathbb{R}^m)$$

Тогда можно вычесть из уравнения с f уравнение с Φ — размерности сошлись:

$$f'_x - \lambda \Phi'_x + (f'_y - \lambda \Phi'_y)\varphi' = 0$$

Пусть $f'_y - \lambda \Phi'_y = 0$. Тогда:

$$\lambda = f'_y \cdot \left(\Phi'_y\right)^{-1}$$

Если мы берём это λ (а нас и просят её предъявить), то наше предположение верно. Раз разность 0, то и иксовая разность равна нулю:

$$\begin{cases} f'_y - \lambda \Phi'_y = 0 \\ f'_x - \lambda \Phi'_x = 0 \end{cases}$$

Это векторная запись точек, которые мы когда-то разъединили. Давайте соединим обратно:

$$f' - \lambda \Phi' = 0 \qquad \lambda = f'_y \cdot \left(\Phi'_y\right)^{-1}$$

ч. т. д.

1.4 Теоремы

1.4.1 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

Формулировка:

Пусть X, Y — нормированные линейные пространства, $A \in \mathbb{L}(X, Y)$.

Тогда следующие утверждения эквиваленты:

1. A — ограниченный оператор, в том смысле, что $||A||$ — конечно
2. A — непрерывно в нуле
3. A — непрерывно на всём X
4. A — равномерно непрерывно

Доказательство: Для $||A|| \equiv 0$ — тривиально (супремум $= 0$, следовательно 0), поэтому далее считаем норму оператора ненулевой. Ну, во-первых, $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ — очевидно, просто одно следует из другого.

Во-вторых, $2 \Rightarrow 1$:

По определению непрерывности в нуле: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \forall x \in B(0, \delta) : |Ax| < \varepsilon$ (это нам дано, значит можем пользоваться, как хотим)

Давайте рассмотрим $\varepsilon = 1 : |Ax| < 1$, потом делим на δ:

$$|A\frac{x}{\delta}| < \frac{1}{\delta}$$

Переназначим x и заметим, что $x \in \overline{B(0,1)} : |Ax| \leq \frac{1}{\delta}$ (обратите внимание, мы взяли замыкание шара и получили нестрогое неравенство)

Тогда для $x \in S(0,1) : |Ax| \leq \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} \cdot |x|$ — по замечанию 4 из определения, $||L|| \leq \frac{1}{\delta}$.

В-третих, $1 \Rightarrow 4$:

Давайте опять запишем определение равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Назначим $\delta := \frac{\varepsilon}{||A||}$

$$|Ax_1 - Ax_2| < \varepsilon$$

По линейности:

$$|A(x_1 - x_2) < ||A|| \cdot |x_1 - x_2| = ||A||\delta = ||A||\frac{\varepsilon}{||A||} = \varepsilon$$

ч.т.д.

1.4.2 Теорема Лагранжа для отображений

Формулировка: $F : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, D$ — открытое

F — дифференцируемо на D, $[a,b] \subset D$

Тогда $\exists c \in [a,b] : |F(a) - F(b)| \leq ||F'(c)|| \cdot |b-a|$ *Доказательство:* Заведём функцию $f(t) = F(a + t(b-a)), t \in [0,1] \subset \mathbb{R}$. То есть как-бы двигаем точку по $[a,b]$.

$$f'(t) = F'(a + t(b-a))(b-a)$$

Заметим, что это оператор $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$, т.к. $F'(a + t(b-a))$ — l, а $b-a$ — m (???)

Вспомним также теорему Лагранжа для векторнозначных функций:

$F : [a,b] \to \mathbb{R}^n, F$ — дифференцируема на $[a,b], \exists c \in [a,b]$

$$|F(a) - F(b)| = |F'(c)| \cdot |b-a|$$

Рассмотрим нашу функцию $f(t)$ по этой теореме в точках 0 и 1:

$$|f(1) - f(0)| = |f'(c)| \cdot |1-0|$$

Подставим:

$$|F(b) - F(a)| = |F'(a + c(b-a)) \cdot (b-a)| \underset{\text{по замечанию 3}}{\leq} ||F'(a + c(b-a))|| \cdot |b-a|$$

Ну а дальше, пусть $c := a + c(b-a)$ и всё супер.

ч.т.д.

1.4.3 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

Формулировка (безымянная лемма):

Возможно, она нахер не нужна, но пусть всё же будет

Пусть $B \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

Если $c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m : |Bx| \geq c|x|$, тогда $B \in \Omega_m$ и $||B^{-1}|| \leq \frac{1}{c}$

Доказательство:

B — очевидно инъективен, т.к. любой ненулевой вектор у нас отправляется в разные точки $\Rightarrow$ биекция $\Rightarrow$ обратимый $\Rightarrow \exists B^{-1}$

Теперь пусть $y = B^{-1}x \Rightarrow |Bx| = |y| \geq c|x| = c|B^{-1}y| \Rightarrow |B^{-1}y| \leq \frac{1}{c} \cdot |y| \underset{\text{по замечанию 3}}{\Rightarrow} ||B^{-1}|| \leq \frac{1}{c}$

ч.т.д.

Замечание:

Если $A \in \Omega_m$, то можно провенуть такую штуку: $|x| = |A^{-1}Ax| \leq ||A^{-1}|| \cdot |Ax|$ (по 3 замечанию). Тогда:

$$|Ax| \geq \frac{1}{||A^{-1}||}|x|$$

Формулировка:

Пусть $L \in \Omega_m$ — обратимый оператор, $M \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $||L - M|| < \frac{1}{||L^{-1}||}$

Тогда:

1. $M \in \Omega_m$ — обратимый
2. $||M^{-1}|| \leq \frac{1}{\frac{1}{|L^{-1}|} - ||L-M||}$
3. $||L^{-1} - M^{-1}|| \leq \frac{||L^{-1}||}{\frac{1}{|L^{-1}|} - ||L-M||} \cdot ||L - M||$

Доказательство:

(1) и (2)

Рассмотрим $|Mx|$ с рандомным возможным x. По неравенству треугольника (это всё же норма) и оценкам по замечаниям сверху:

$$|Mx| \geq |Lx| - |(M-L)x| \geq \frac{1}{||L^{-1}||}|x| - ||M - L|| \cdot |x| = \left(\frac{1}{||L^{-1}||} - ||M - L||\right)|x|$$

По безымянной лемме всё доказано (заметим, что выражение в скобочках — положительная константа).

(3)

Неповторимый оригинал:

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{m} = \frac{m - l}{ml}$$

Жалкая копия (доказывается тривиально, раскрытием скобок):

$$L^{-1} - M^{-1} = M^{-1}(M - L)L^{-1}$$

Отнормируем:

$$||L^{-1} - M^{-1}|| \leq ||M^{-1}|| \cdot ||L - M|| \cdot ||L^{-1}||$$

Ну и просто подставим (2).

ч.т.д.

Следствие:

Отображение $\Omega_m \to \Omega_m : L \to L^{-1}$ непрерывно.

Доказательство:

Давайте по Гейне: если $B_k \to L$, то сходится ли $B_k^{-1} \to L^{-1}$????

Во-первых, начиная с некоторого места:

$$|B_k - L| \leq \frac{1}{||L^{-1}||}$$

$$|B_k^{-1} - L^{-1}| \leq \frac{||L^{-1}||}{\underbrace{\frac{1}{|L^{-1}|} - \underbrace{||L - B_k||}_{\to 0}}_{\text{огр.}}} \cdot ||L - B_k|| \to 0$$

ч.т.д.

1.4.4 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

Формулировка: $F : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, F$ дифференцируема на $D, F' : D \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $F \in C^1(D) \Leftrightarrow \forall i, j : \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ — непрерывны
2. F' — непрерывно на $D : \forall x : \mathbb{R}^m \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall \widetilde{x} \ |x - \widetilde{x}| < \delta \ ||F'(x) - F'(\widetilde{x})|| < \varepsilon$

Доказательство:

(1) ⇒ (2)

Давайте зафиксируем какие-то i, j и относительно них рассмотрим наше условие непрерывности частных производных по отдельности. Также, применим китайскую грамоту и возьмём немного другой эпсилон:

$$\forall x : \mathbb{R}^m \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall \widetilde{x} \ |x - \widetilde{x}| < \delta \ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\widetilde{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$$

Тогда, так как нам это уже известно, проверим условие (2):

$$||F'(x) - F'(\widetilde{x})|| \underset{\text{по лемме об ограниченности нормы}}{\leq} \sqrt{\sum_{i,j} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\widetilde{x}) \right)^2}$$

Ну а теперь просто оцениваем всё это дело эпсилоном!

$$\leq \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \sqrt{ml \cdot \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

(2) ⇒ (1)

Ну а вот тут душный пиздец. Идея в том, что мы хотим проверить для каждой частной производной с индексами (v, u) наше предположение.

Давайте выберем $h \in \mathbb{R}^m = (0, 0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{u\text{-ое число}}, 0, \ldots, 0, 0)^T$. Теперь нам известно, что:

$$|(F'(x) - F'(\widetilde{x}))h| \leq ||F'(x) - F'(\widetilde{x})|| \cdot |h| \underset{|h|=1}{\leq} \varepsilon$$

Ну а с другой стороны, $(F'(x) - F'(\widetilde{x}))h$ есть ничто иное, как вектор $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_u}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_u}(\widetilde{x}) \right)_{i=1 \ldots l}$. Поэтому давайте рассмотрим его норму по вышеиспользованной лемме:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_u}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_u}(\widetilde{x}) \right)^2} \leq \varepsilon$$

Ну, раз уж у нас корень суммы квадратов меньше, то и каждое слагаемое по отдельности тоже меньше. Давайте зафиксируем $i = v$ и получим долгожданное:

$$\left|\frac{\partial f_v}{\partial x_u}(x) - \frac{\partial f_v}{\partial x_u}(\widetilde{x})\right| \leq \varepsilon$$

Так как данные эпсилон-дельта преамбуды везде были одинаковыми, то и тут всё супер. Доказано, не умаляя общности!!!!

ч. т. д.

1.4.5 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

Формулировка (Ферма):

$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in Int(D), f$ — дифференцируема в точке a (точка локального экстремума)

Тогда $\forall l \in \mathbb{R}^m : |l| = 1$ (направление) $\frac{\partial f}{\partial l}(a) = 0$

Доказательство:

Тривиалити, для $f|_{\text{прямая через } a \text{ по направлению } l} a$ — тоже точка локального экстремума, поэтому по одномерной теореме Ферма всё работает!

ч. т. д.

Следствие (Необходимое условие экстремума)

a — точка локального экстремума $\Rightarrow \forall k \in [1, m] : \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$

Следствие (Ролль)

- $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $K \subset D$ — компакт
- f — дифференцируема в $Int(K)$, непрерывна на K
- $f|_{\text{граница } K} = \text{const}$

Тогда $\exists a \in Int(K) : \nabla f \equiv 0$

Доказательство

По теореме Вейерштрасса (привет, 1 сем), на компакте функция достигает своего минимимума и максимума. Тогда либо у нас на $K f \equiv const$, тогда такая точка — любая, либо же по теореме Ферма она существует где-то внутри компакта.

ч. т. д.

1.4.6 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

Формулировка (Лемма об оценке квадратичной формы): Q — положительно определённая квадратичная форма.

Тогда $\exists \gamma_Q : \forall h \quad Q(h) \geq \gamma_Q \cdot |h|^2$

Доказательство:

А давайте так:
$$\gamma_Q := \min_{|x|=1} Q(x)$$
. Он достигается, так как мы гоняем по компакту (сфере), следовательно по Вейерштрассу всё хорошо.

Для $x = 0$ всё тривиально, поэтому при $x \neq 0 : Q(x) = |x|^2 Q(\frac{x}{|x|}) \underset{\frac{x}{|x|} \text{ от 0 до 1!}}{\geq} \gamma_Q |x|^2$

Формулировка (Лемма об эквивалентных нормах):

$p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — норма

Тогда $\exists\ C_1, C_2 > 0 : \forall x \quad C_1|x| \leq p(x) \leq C_2|x|$

Доказательство:

То же самое:
$$C_1 := \min_{|x|=1} p(x), \quad C_2 := \max_{|x|=1} p(x)$$

Для минимума: $\forall x : p(x) = |x| \cdot p(\frac{x}{|x|}) \geq C_1|x|$, для максимума аналогично.

ч. т. д.

1.4.7 Лемма о “почти локальной инъективности”

Формулировка:

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $x_0 \in O$
- F — дифференцируема в x_0
- $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists C > 0, \delta > 0 \quad \forall h \in B(0, \delta)\ |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$

Доказательство:

1. Если F — линейное отображение, то рассмотрим: $|h| = |F^{-1}Fh| \leq ||F^{-1}|| \cdot |Fh|$. По линейности:
$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |Fh| \geq \underbrace{\frac{1}{||F^{-1}||}}_{C} |h| \quad \forall\delta$$

2. В противном случае, запишем определение дифферецируемости: $|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |\underbrace{F'(x_0)h}_{>0} + |h| \cdot \underbrace{\alpha(h)}_{\text{б. м.}}| \underset{\text{нер-во треугольника}}{\geq} \underbrace{C}_{\text{из пункта 1}} |h| + \alpha(h) \cdot |h|$. Давайте выберем δ так, чтобы $\alpha(h) < \frac{C}{2}$
$$\ldots \geq \frac{C}{2}|h|$$

ч.т.д.

Замечание

При $\forall x\ \det F'(x) \neq 0$ не следует инъективность!

1.4.8 Теорема о сохранении области

Формулировка:

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, O$ — открытое
- F — дифференцируемо
- $\forall x \in O : \ \det F'(x) \neq 0$

Тогда $F(O)$ — открытое множество.

Замечания

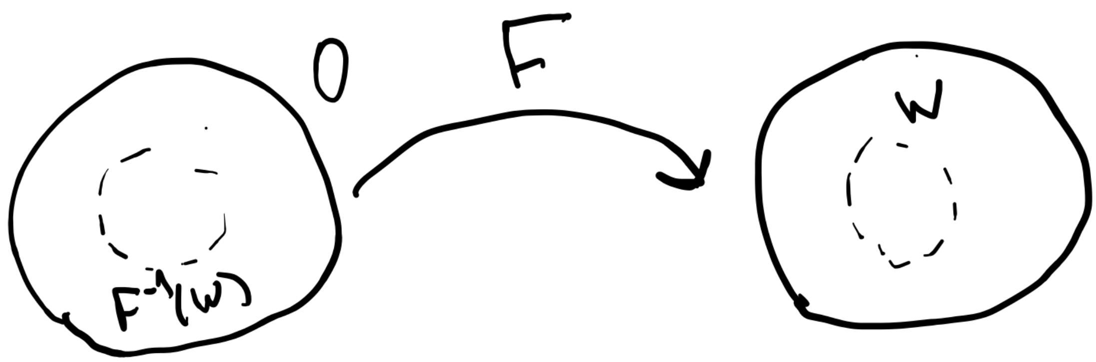
1. Если O — связное и F — непрерывное, то $F(O)$ — связное

   Доказательство:

   Ну, типа очев. Если у нас есть $W_1, W_2 \subset F(O)$, причём они не связны, то логично что получиться они могли только вследствие $F^{-1}(W_1) \cap F^{-1}(W_2) = \emptyset$

2. F — непрерывное $\Leftrightarrow \forall W \subset F(O)$ — открытого, $F^{-1}(W)$ — открыто *Доказательство:*

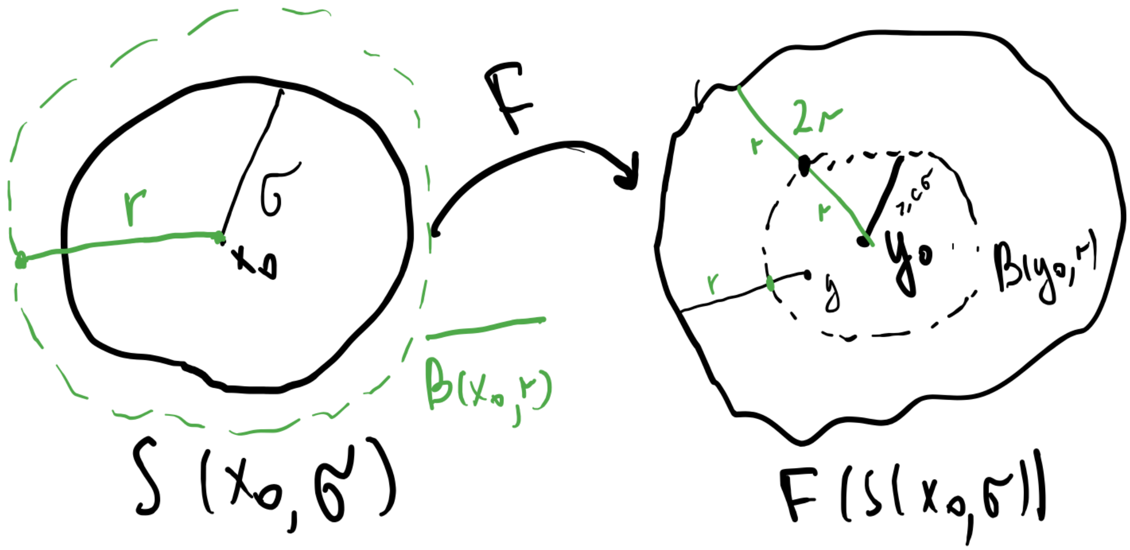
   По топологическому определению непрерывности (привет, 1 сем!).



Доказательство:

В общем, основная идея доказательства состоит в том, чтобы доказать, что любая точка из образа является внутренней, тогда по определению открытого множества мы докажем и вывод. $\forall x_0 \in O : \ y_0 = F(x_0)$.

По лемме выше, $\exists C > 0, \exists \delta > 0 : \forall h \in \overline{B(0, \delta)} : |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$. Не стоит смущаться при виде замкнутого шара, это мы просто провели двойную бухгалтерию. Причём, как видно на картинке, граница нашей области отображается куда-то далеко (аж на константу) больше, чем просто на δ.



Заведём расстояние $dist(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$ между точкой и множеством. Пусть $r = \frac{1}{2} \cdot dist(y_0, \underbrace{F(\underbrace{S(x_0, \delta)}_{\text{компакт}})}_{\text{непр. } \Rightarrow \text{ компакт}})$.

Так как у нас там всё компакты то минимум достигается, и, что важнее всего, всё это больше нуля.

Теперь самое интересное: докажем, что $B(y_0, r) \subset F(O) : \forall y \in B(y_0, r)\ \exists x \in B(x_0, \delta) : F(x) = y$. Это докажет нам всё остальное.

$\forall y \in B(y_0, r) : \rho(y, F(S(x, \delta))) > r$. Это очевидно, на рисунке всё видно. Рассмотрим $g(x) := |F(x) - y|^2, x \in B(x_0, \delta)$. Как было сказано выше, мы доказываем, что у нас $\exists x \Leftrightarrow g(x) = 0$ возможно. Ну, очевидно, что, видимо, в если там и есть ноль, то это экстремум функции (модуль же, лол).

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 \underset{\text{очевидно по рисунку}}{\leq} r^2$$

Также, по рисунку очевидно, что для всех x с границы, наша функция отправляет их сильно дальше.

$$\forall x \in S(x, \delta) \quad g(x) \geq r^2$$

Получается, наш минимум лежит где-то внутри сферы. Поищем его. По определению евклидовой нормы:

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + (F_2(x) - y_2)^2 + \ldots + (F_m(x) - y_m)^2$$

По необходимому условию экстремума, $\nabla F(x) = 0 \Rightarrow \forall i \in [1, m] : \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$

$$g'(x) = 2(F_1(x) - y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + 2(F_2(x) - y_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + 2(F_m(x) - y_m)\frac{\partial f}{\partial x_m} = 0$$

Или в векторной форме:

$$2 \cdot (F(x) - y) \cdot F'(x) = 0$$

Однако, по условию у нас производный оператор невырожденный! Следовательно, остаётся только $F(x) = y$. А это то, что мы и искали!!!!

ч. т. д.

1.4.9 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

Формулировка:

- $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
- O — открыто
- $l < m$
- $F \in C^1(O)$
- $\forall x \in O : \mathrm{rank}(F') = l$

Тогда $F(O)$ — открыто

Доказательство:

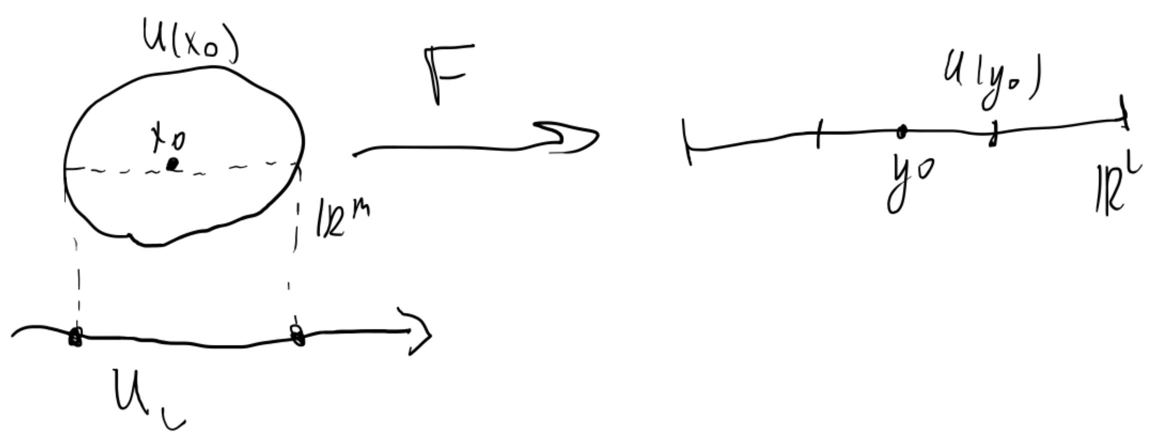
Зафиксируем $x_0 \in O$. Так как у нас матрица производного оператора теперь имеет вид не квадратный, а прямоугольный ($l \times m$), просто так применить предыдущую теорему не получится. Поэтому, не умаляя общности, давайте считать, что вот этот ЛНЗ набор векторов в матрице реализуется на позициях $1 \dots l$. Тогда мы можем посчитать определитель этой матрицы:

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \le i,j \le l} (x_0) \neq 0$$

При этом, так как мы потребовали непрерывность, немножко пошевелив x_0 всё также будет работать:

$$\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \quad \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \le i,j \le l} (x) \neq 0$$

Мы уже доказали, что $F(x_0)$ — внутренняя в $F(U(x_0))$ (по предыдущей теореме). Осталось немного пошаманить, чтобы доказать, что действительно из пространства большей в меньшую всё корректно отобразится.



Давайте заведём такую окрестность $U_l = (t_1, t_2, \dots, t_l) : (t_1, t_2, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m)$. Как видно на рисунке, это такая проекция в пространстве большей размерности на пространство меньшей. Теперь заведём $\widetilde{F} : U_l \to \mathbb{R}^l$ и посмотрим на её матрицу производных:

$$\frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial t_j} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t_1, t_2, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m) \right)$$

И вот теперь, по непрерывности $\widetilde{F}$ и прошлой теореме, всё по идее работает.

ч. т. д.

1.4.10 Теорема о гладкости обратного отображения

Формулировка:

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- F — обратимо
- $F \in C^r(O), r \in 1, 2, \dots$
- $\forall x \in C : \det F'(x) \neq 0$

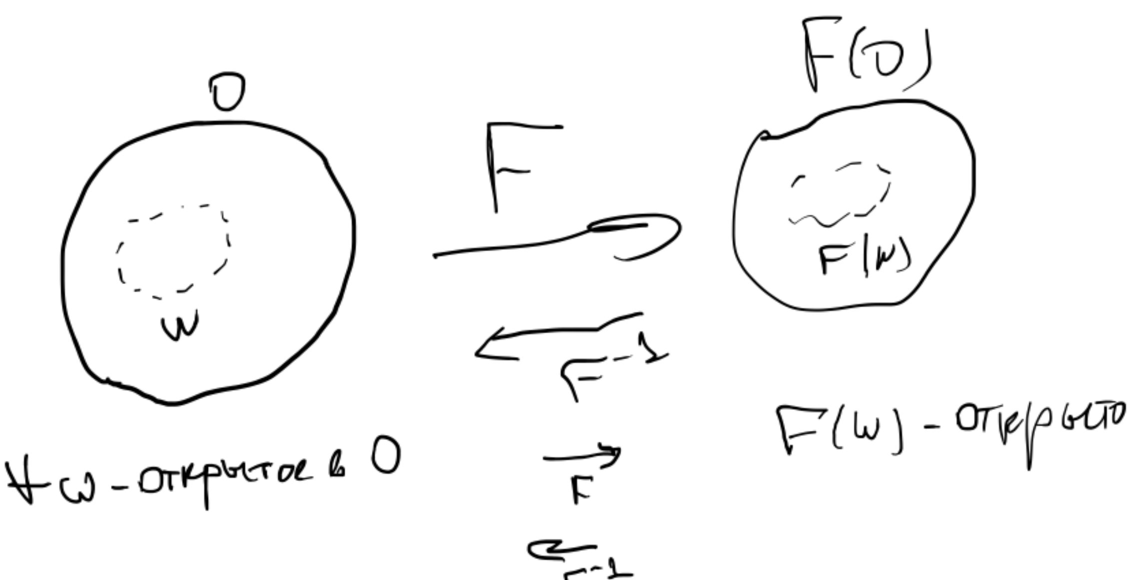
Тогда $F^{-1} \in C^r, \quad ((F^{-1}(y))' = (F'(x))^{-1})$ при $F(x) = y$

Доказательство:

Докажем по индукции по r. Замое запарное — база.

База:

Пусть $x_0 \in O, \quad F(x_0) = y_0$. $S := F^{-1}$. Заметим, что S — непрерывно по теореме о сохранении области и теореме о топологическом определении непрерывности (типа для любого открытого из прообраза образ тоже открыт)



По лемме о “почти” локальной инъективности:

$$\exists C, \delta > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta) \quad |F(x) - F(x_0)| \geq C|x - x_0| \Rightarrow |x - x_0| \leq \frac{1}{C}|F(x) - F(x_0)|$$

Запишем определение дифференцируемости для F и сразу распишем всё в терминах y:

$$A = F'(x_0), \quad \underbrace{F(x) - F(x_0)}_{y - y_0} = A(\underbrace{x - x_0}_{S(y)-S(y_0)}) + \alpha(\underbrace{x}_{S(y)})|x - x_0|$$

Выражаем $(S(y) - S(y_0)))$:

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)|}_{\beta(y) \underset{???}{=} o(|y - y_0|)}$$

Получилось вполне себе нормальное определение для дифференцируемости S. Надо лишь доказать “о”-шку при $y \to y_0$. Оценим её с помощью вывода из леммы выше и стандартной оценки операторной нормы (не забываем, что мы как-бы управляем y ???):

$$\begin{aligned} |x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta \underset{\text{при } y \text{ близких к } y_0}{\Rightarrow} |\beta(y)| &= |A^{-1}\alpha(S(y))| \cdot |S(y) - S(y_0)| \\ &\leq \underbrace{\frac{||A^{-1}||}{C}}_{\text{const}} \cdot \underbrace{|y - y_0|}_{|F(x) - F(x_0)|} \cdot |\alpha(S(y))| \\ &= o(|y - y_0|) \end{aligned}$$

Фактически “о”-шка доказана по определению. Тем самым доказана дифференцируемость. А что с непрерывностью производной то? Этого мы ещё не доказывали. Построим цепочку непрерывных отображений:

$$y \mapsto S(y) = x \mapsto A(x) \mapsto A^{-1}(x) = S'(y)$$

Непрерывность дифференцирования обратного производного оператора доказывается маханием руками на тему отдельнызх производных в матрице. Тем самым база доказана.

Переход

Достаточно тривиальный. Посмотрим при $m = 1 : (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f(x(y))}$. То есть, пусть $f \in C^{r+1}$, тогда надо доказать, что $f' \in C^r$. Ну там вот это и написано, обратная функция вообще $C^\infty, f'(x) \in C^r$ — очев. Для многомерного случая всё тоже самое, только формула выглядит пафоснее $\ldots = (F'(x(y)))^{-1}$

ч. т. д.

1.4.11 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

Формулировка:

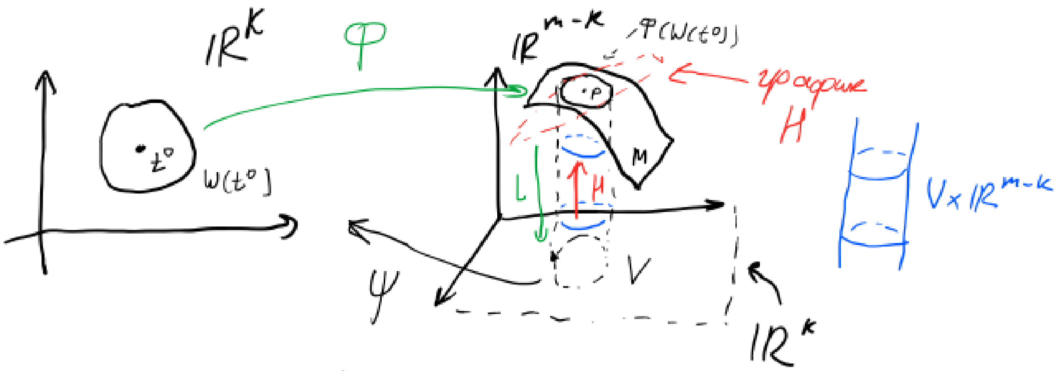
$M \subset \mathbb{R}^m, 1 \leq k \leq m, 1 \leq r \leq \infty$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\exists U(p) \in \mathbb{R}^m : M \cap U(p)$ — гладкое k-мерное C^r-гладкое многообразие
2. $\exists \widetilde{U}(p) \in \mathbb{R}^m : \exists (F_1, F_2, \ldots, F_{m-k}) : \widetilde{U} \to \mathbb{R}, F_i \in C^r$
   (a) $\forall x \in \widetilde{U} \cap M \Leftrightarrow F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_{m-k} = 0$
   (b) $\nabla F_1, \nabla F_2, \ldots, \nabla F_{m-k}$ — ЛНЗ

Доказательство (оставь надежду всяк сюда идущий):

(1) ⇒ (2)



$$\begin{pmatrix} \operatorname{grad} F_1 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} F_{m-k} \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial x_k} & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} k$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{k} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{m-k}$$

Нам дано многобразие. А что это значит? $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \in C^r$ — гомеоморфизм. Давайте посмотрим на неё в смысле координатных функций: $\exists \Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l), p = \Phi(t^0), \operatorname{rank} \Phi'(t^0) = k$. Всё по определнию.

У нас тут ЛНЗ набор (ранг k), поэтому давайте опять считать, что он реализуется на первых k векторов, поэтому:

$$\left(\det \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}\right)_{i=1\ldots k} = 0$$

Теперь давайте, во-первых, примем за $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^k$ (на рисунке справа, всё логично). И заведём $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — просто проекция первых k координат. Тогда заметим, что $(L \circ \Phi)'(t^0)$ — невырожденный оператор: всё просто, он мапит первые k координат, а оператор по ним невырожден по определению многообразия, вон, наверху написано. Значит, это локальный диффеоморфизм (по соответствующей теореме). А если $W(t^0)$ — окрестность, то $L \circ \Phi : W \to V \subset \mathbb{R}^k \in C^r$ — диффеорморфизм (класс гладкости сохраняется).

Тогда давайте введём ещё парочку отображений: $\Psi : V \to W := (L \circ \Phi)$ — обратное отображение, также диффеоморфизм, т. к. оно там всё диффеоморфизм, следовательно биекция сохраняется. Также, получается, раз у нас биекция, над V множество в R^{m-k} это график какого-то отображения. Оно точно существует, ведь L — биективно. Назовём его $H : V \to \mathbb{R}^{m-k}$

При $x' \in V : (\underbrace{x'}_{1\dots k}, \underbrace{H(x')}_{k+1\dots m-k}) = \Phi\Psi(x')$ — это правда, просто проехались по путям и вернулись. В L у нас только первые k координат, а H нам дорисовывает остальные $m-k$ штук. Ну и вот, в правой стороне равенства у нас диффеоморфизмы, слева проекция (там вообще всё гуд) и $H \Rightarrow$ это тоже диффеоморфизм класса C^r.

Почти всё. Осталось чётко определить, на какой окрестности будут определены наши функции. Смотрите, вообще наш график H может в принципе быть и шире, чем $W(t^0)$, и тогда L(*график* H) может быть больше, чем V, и мы не хотим со всем этим разбираться — зачем? Поэтому давайте аккуратненько всё подрежем. $V \times \mathbb{R}^{m-k}$ — открытое, такой типа цилиндр вверх. Φ — гомеоморфизм, поэтому $\Phi(W)$ — открытое. Но в M — это важно! Оно может и не быть открыто во всём $\mathbb{R}^m$, а конкретно на M с индуцированной метрикой точно открыто. Тогда вспоминаем теорему из 1-го семестра об открытом множестве в пространстве и подпространстве: $M \subset \mathbb{R}^m, \Phi(W) \subset M$ — открытое, тогда $\exists G \subset \mathbb{R}^m : G \cap M = \Phi(W), G$ — открытое. И тогда пусть область определения $\widetilde{U}(p) = G \cap \{V \times \mathbb{R}^{m-k}\}$ — открытое в $\mathbb{R}^m$, отрезали всё лишнее.

Ну всё, совсем немного осталось. Надо задать такие функции, что они будут нулевыми при $x \in \widetilde{U} \cap M$. Пусть $F_j(x) = H_j(L(x)) - x_{j+k}$. Что тут написано: мы берём x, отпрявляем его в L, оставляя только первые k координат. Потом H отправляем его обратно наверх, причём конкретно H_j вернёт нам x_{k+j}-ю координату, ведь, как мы писали выше, точки из графика H выглядят как $(\underbrace{x'}_{1\dots k}, \underbrace{H(x')}_{k+1\dots m-k})$. Ну всё, (а) выполнено автоматически. А что там с градиентами? Давайте просто их построим и увидим, что в конце будет просто $-E$, что и даст нам $m-k$ независимых векторов (ну, ранг такой).

(2) $\Rightarrow$ (1)

Тут нам сильно помогут наработки предков. Давайте подгоним наше условие под условие теоремы о неявном отображении (в смысле системы уравнений). У нас там была система из уравнений $F(x, y) = 0$, где x — “переменные”, а y — “функции” и решение (x^0, y^0), такое что при $\forall x \in P(x^0), y \in Q(y^0) : F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \exists \varphi : P \to Q : \phi(x) = y$. Давайте назначим первые k координат переменными, а следующие $m-k$ — функциями. Опять же, у нас ЛНЗ лабор этих градиентов этих функций, а именно:

$$\left(\det \frac{\partial F_i}{\partial x_{j+k}}\right)_{1 \le i,k \le m-k} (x^0, y^0) \neq 0$$

Значит, условие теоремы выполнено, и параметризация есть ничто иное, как $\Phi : U(p_1, p_2, \dots, p_k) \to \mathbb{R}^m \quad x' \mapsto (x', \varphi(x'))$ на $x \in M \cap \widetilde{U} \cap \{P \times Q\}$ (по сути график φ). В том числе это и гомеоморфизм, так как в одну сторону всё непрерывно, так как функции непрервыны $(x', \varphi(x'))$, а обратно — это по сути проекция, так что всё тоже непрерывно. Классы гладкости тоже переезжают из прошлой теоремы.

ч. т. д.

1.4.12 Следствие о двух параметризациях

Формулировка:

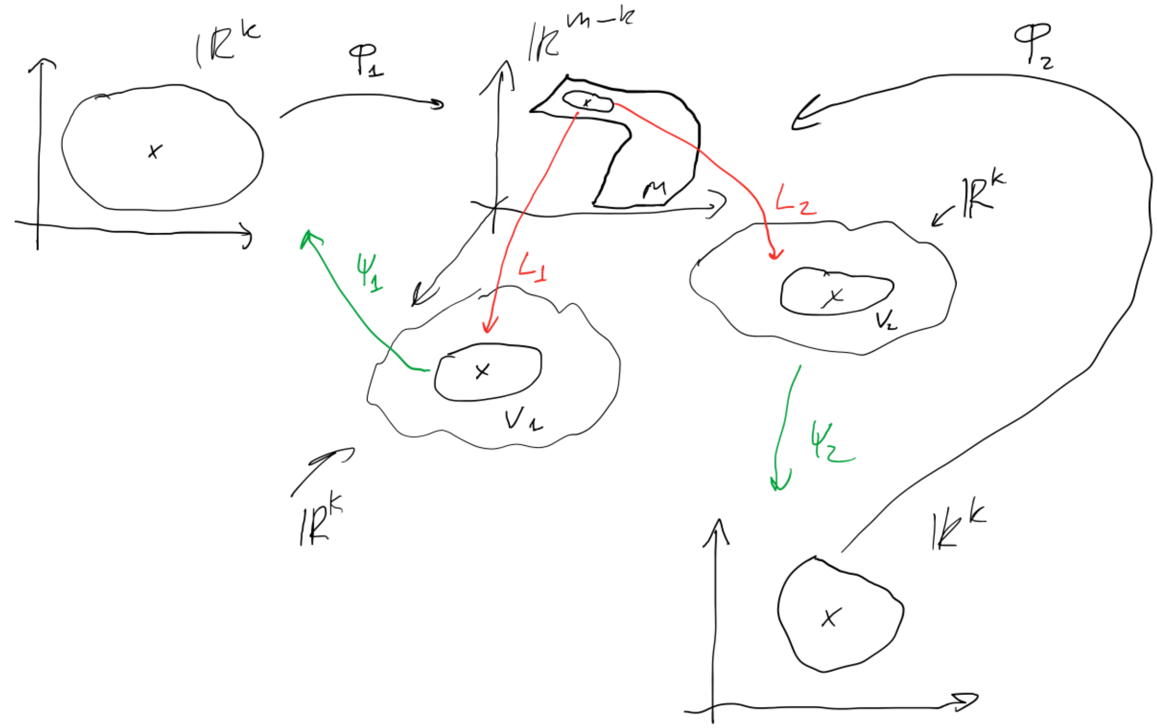
$M \subset \mathbb{R}^m$ — k-мерное C^r-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

1. $\exists \Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
2. $\exists \Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$

— гладкие параметризации.

Тогда $\exists \Theta : O_1 \to O_2 : \Phi_1 = \Phi_2 \circ \Theta$ — диффеоморфизм класса C^r

Доказательство:



Продолжаем повествование из прошлой теоремы. Гомеоморфизм $O_1 \to O_2$, вообще говоря, существует тривиально: $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$. Однако, так говорить не совсем правильно, потому что для корректного взятия обратной функции, необходимо сузить образ Φ_2 на его реальную область значений. Поэтому давайте поступим умнее: нарисуем возможные пути точки (крестика) на рисунке (кстати, важно заметить, что разные параметризации могут отправлять точки в разные пространства $\mathbb{R}^k$, ведь ранг может реализовываться на произвольных строчках матрицы производного опреатора; поэтому у нас народилось 2 пространства и соответствующие отображения между ними (см. картинку)).

$$\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Psi_2 \circ L_2 \circ \Phi_1) = \Psi_2 \circ \Theta$$

Супер, гомеоморфизм есть. А обратим ли он? Да пожалуйста:

$$\Theta^{-1} = \Psi_1 \circ L_1 \circ \Psi_2$$

А всякие гладкости и классы приходят просто из предыдущих отображений, всё там супер.

ч. т. д.

1.4.13 Лемма о корректности определения касательного пространства

Формулировка:

- $M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$
- $p \in M$
- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — параметризация $M \cap U(p)$
- $t^0 \in O : \Phi(t^0) = p$
- $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор

Тогда образ $\Phi'(t^0)$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$, не зависящее от Φ.

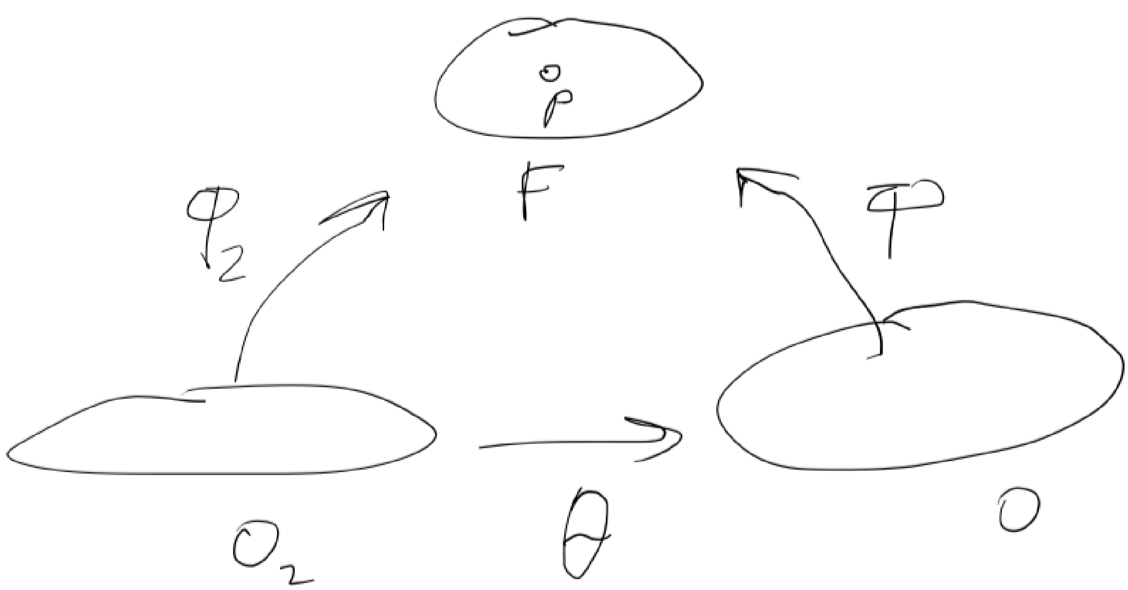
Доказательство:

Так как Φ — параметризация, $\operatorname{rank} \Phi = k$. Ну и тогда всё очевидно по знаниям из линейной алгебры, размерность пространства определяется количеством ЛНЗ столбцов.

По поводу независимости, по следствию о двух параметризациях:

$$\Phi_2 = \Phi \circ \Theta \Rightarrow \Phi_2' = \Phi' \Theta'$$

Θ — диффеоморфизм, следовательно $\Theta'(t^0)$ — невырожденный. Поэтому образ $\Phi_2' = \Phi'$ (см. картинку)



ч. т. д.

1.4.14 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

Формулировка (Лемма):

$v \in T_pM$

Тогда $\exists$ гладкий $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M : \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$

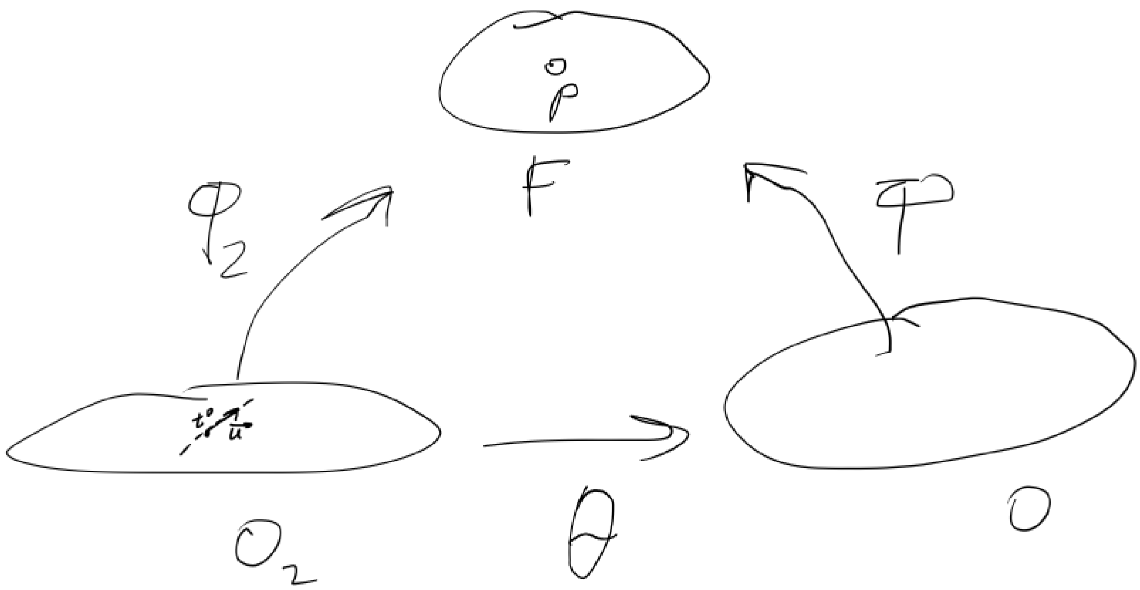
Доказательство:

Раз у нас есть v в образе, значит оно откуда-то пришло. Давайте найдём: $u = (\Phi'(t_0))^{-1}v$.

Тогда предъявим путь в $O : \widetilde{\gamma}(s) = t^0 + su, s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Типа мы выбрали направление, и гоняем по нему в O.

А настоящий путь будет таким: $\gamma(s) = \Phi \circ \widetilde{\gamma}(s)$. Тогда $\gamma'(s) = \Phi' \circ \widetilde{\gamma}(s)$.

Проверим: $\gamma(0) = \Phi(t^0 + 0) = p, \quad \gamma'(0) = \Phi' u = v$



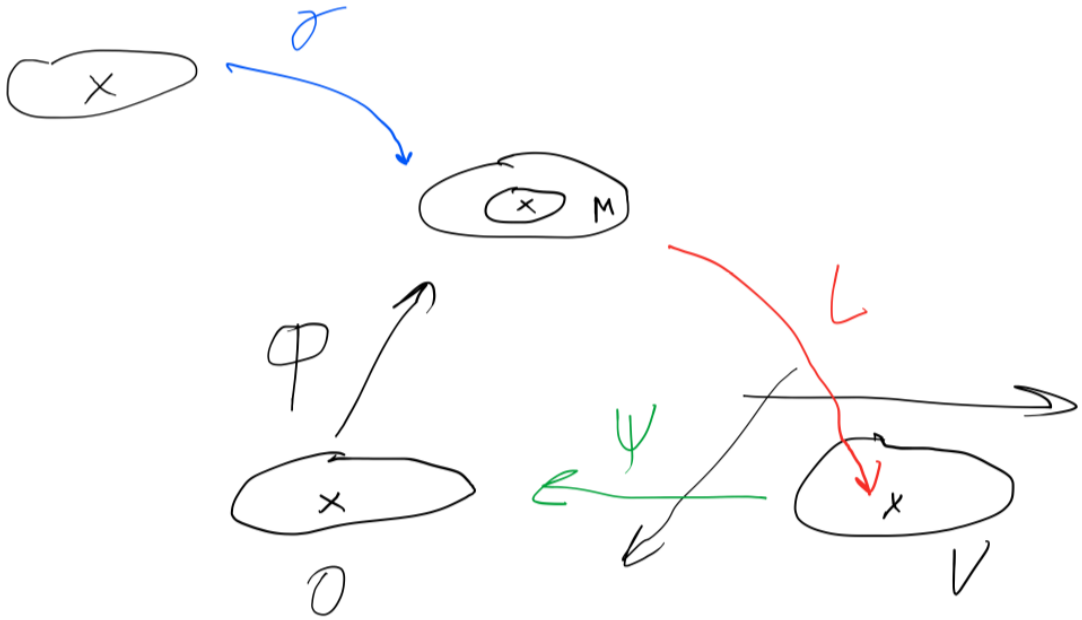
ч. т. д.

Формулировка:

$\exists$ гладкий путь $\gamma : [-1, 1] \to M, \gamma(0) = p$

Тогда $\gamma'(0) \in T_pM$

Доказательство:



Давайте опять прогуляемся по картинке из теоремы о задачи параметризации:

$$\gamma(s) = \Phi \circ \Psi \circ L \circ \gamma(s)$$

Это очевидно, просто прошли по кругу.

$$\gamma'(0) = \Phi'(t^0)\Psi' L' \gamma'$$

Всё лежит в образе $\Phi'(t^0)$, так что по определению касательного пространства всё супер.

ч. т. д.

1.4.15 Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня

Формулировка (к графику функции):

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $f \in C^1$
- $y = f(x)$ — задаёт простое гладкое n-мерное многообразие в $\mathbb{R}^{n+1}$ (???)
- есть точка $f(x^0) = y^0$

Тогда $y - y^0 = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x^0)(x_i - x_i^0)$ задаёт аффинное касательное пространство

Доказательство:

Пусть $\Phi : x \mapsto (x, f(x))$. Посмотрим на производный оператор этого отображения:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & f'_{x_3} & \dots & f'_{x_n} \end{pmatrix}$$

Заметим, что в нашей формуле неизвестные — y и x_i. Давайте рассмотрим вектор, образующийся перед x_i:

$$\begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \\ f'_{x_3} \\ \vdots \\ f'_{x_n} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что этот вектор ортогонален матрице производного оператора (при перемножении даёт нуль-вектор, следовательно косинус 0, по скалярному произведению). Ну это то, что нам нужно. Вектор (фактически нормаль) к касательному пространству. Ещё и через точку начальную проходит (x^0, y^0).

ч. т. д.

Формулировка (к уровню):

- $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — гладкая
- $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ — функция
- x^0 — точка, в которой ищем касательное пространство

Тогда касательное пространство задаётся уравнением $f'_{x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + \ldots + f'_{x_m}(x_m - x_m^0)) = 0$

Доказательство:

Во-первых, давайте опять прогоним трюк с теоремой о неявном отображении: будем считать первые $m-1$ координату “неизвестными”, а x_m — “функцией”.

Тогда пусть $f'_{x_m}(x^0) \neq 0$. Значит, существует $x_m = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$. Ещё один трюк: $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}))$ — параметризация многообразия $f(x) = 0$ в окрестности точки x^0.

Тогда по предыдущему, что мы доказали, касательная плоскость задаётся $\sum_{i=1}^{m-1} \varphi'_i(x^0)(x_i - x_i^0) = x_m - x_m^0$, или:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \varphi'_{x_i}(x^0)(x_i - x_i^0) - (x_m - x_m^0) = 0$$

Это всё замечательно, но условие требует вывод в терминах f. А как они связаны? По условию:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})) = 0$$

Давайте вычислим рецепт замены φ_{x_i}:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: \quad f'_{x_i} + f'_{x_m} \cdot \varphi'_{x_i} = 0 \Rightarrow \varphi_{x_i} = -\frac{f'_{x_i}}{f'_{x_m}} \qquad \big(f'_{x_m}(x^0) \neq 0 \text{ по усл.}\big)$$

Итого:

$$-\sum_{i=1}^{m-1} \frac{f'_{x_i}}{f'_{x_m}}(x^0)(x_i - x_i^0) - (x_m - x_m^0) = 0 \qquad | \cdot -f'_{x_m}$$

ч. т. д.

1.4.16 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

Формулировка:

$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Тогда $||A|| = \max \sqrt{\lambda}, \lambda \in \sigma(A^T A)$ — множество собственных чисел.

Доказательство:

Рассмотрим $x \in S^{m-1} : \{y \in \mathbb{R}^m : |y| = 1\}$.

$$||A||^2 = \sup_{x \in S^{m-1}} |Ax|^2 = \sup_{x \in S^{m-1}} \langle Ax, Ax \rangle = \sup_{x \in S^{m-1}} \langle \underbrace{A^T A}_{\text{симметричная}} x, x \rangle = \sup_{x \in S^{m-1}, \lambda \in \sigma(A^T A)} \lambda |x|^2 = \max_{\lambda \in \sigma(A^T A)} \lambda$$

Немного контекста: собственное число, это такое число, что A отображает x в λx. Матрица $A^T A$ — симметричная $(m \times n) \times (n \times m) = m \times m$. Так как у нас эта матрица вещественная, то и собственные числа у неё вещественные. Ну и значит, что максимальный вектор, который может получится, это вектор, домноженный на максимальное собственное число.

ч. т. д

1.4.17 Теорема о функциональной зависимости

Формулировка:

- $f_1, f_2, \ldots, f_n : O\mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \in C^1$
- $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : O \to \mathbb{R}^n$
- $\forall x \in O : \operatorname{rank} F'(x) \leq k$
- $x^0 \in O : \operatorname{rank} F'(x^0) = k$
- $y^0 = F(x^0)$

Тогда: $\exists U(x^0), \exists g_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_n : V(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_k^0) \subset \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$

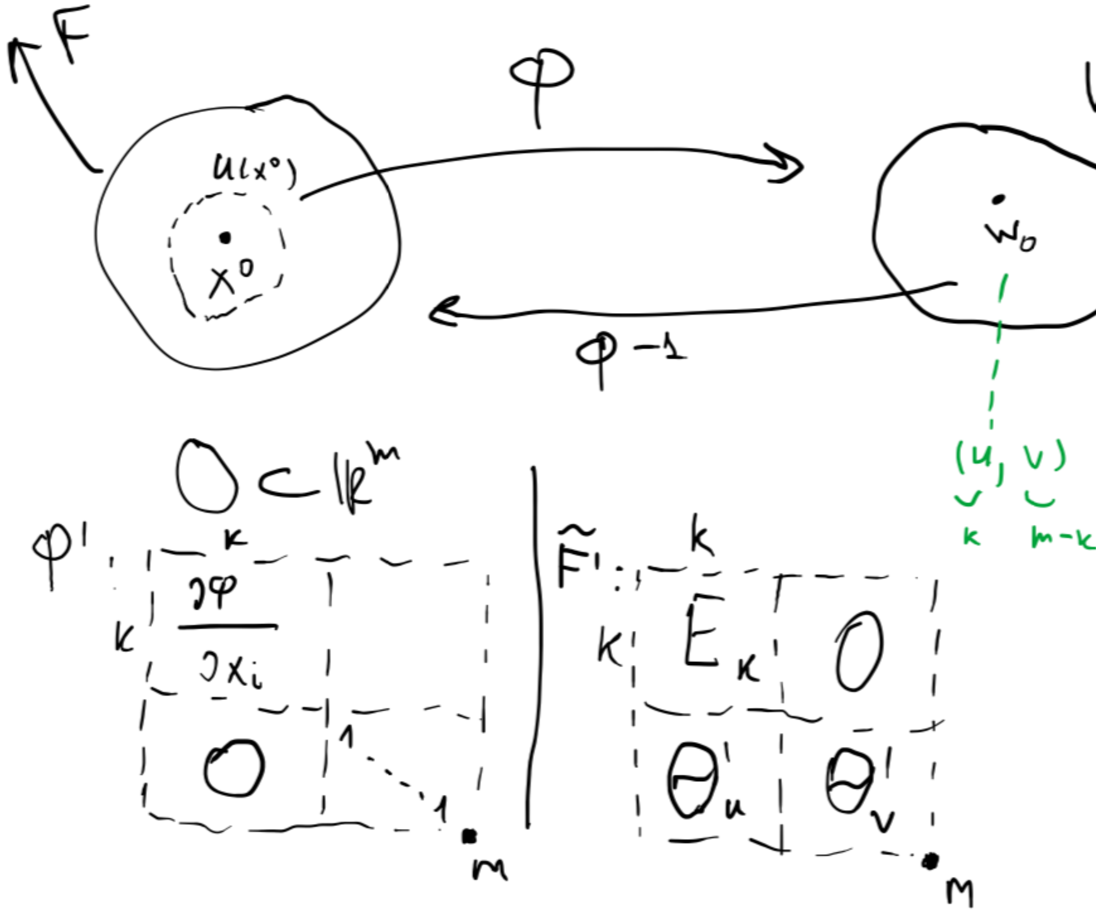
Что: $f_i = g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)), i = k+1 \ldots n, x \in U(x^0)$

Доказательство:

Пусть в точке x^0 ранг реализуется на первом k-миноре (строчки $1 \ldots k$, столбцы $1 \ldots k$).

Введём дополнительную функцию $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \Phi(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), x_{k+1}, x_{k+1}, \ldots, x_k)$.

Тогда, если посмотреть на матрицу производного оператора $\Phi'(x^0)$ (см. рисунок), то окажется, что она невырождена: $\det \Phi'(x^0) \neq 0$. Поэтому Φ действует как локальный диффеоморфизм класса C^1 (по определению там внутри функции минимум C^1). Опять начинаем рисовать:



$\Phi(U(x^0)) = W, \Phi(x^0) = w_0$. Рассмотрим функцию $\widetilde{F} : W \to \mathbb{R}^n : F \circ \Phi^{-1}$. Посмотрим поподробнее на точку $w_0 = (u, v)$. Координата u вычислялась как $f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_k(x_0)$, теперь мы снова отправляем её обратно, получая $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0$, и шлём в F, снова применяя к точке функции f_i. Получается, что координата u отображается в саму себя. v же под действием какого-то отображения отображается во что-то другое: $\widetilde{F}(u, v) = (u, \Theta(u, v))$.

Рассмотрим производный оператор $\widetilde{F}' = F' \underbrace{(\Phi^{-1})'}_{\text{невырожден}}$. Невырожденный оператор (кстати, не только в точке w, но и во всей окрестности, на которой работает локальный диффеоморфизм (W)) не меняет ранг матрицы, поэтому $\operatorname{rank} \widetilde{F} = k$. С другой стороны, если посмотреть на матрицу производного опреатора (см. рисунок), Θ'_v обязана быть тождественно равна 0, в противном случае мы могли бы сочинить минор большего ранга, чем k. Таким образом, $\Theta'_v = 0 \Rightarrow \Theta = \Theta(u)$ (зависит только от u).

Тогда давайте перенесём (домножим на обратную), выразим F и аккуратно распишем:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \widetilde{F} \circ \Phi(x) \\
&= \widetilde{F}(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_m) \\
&= (f_1(x), \ldots, f_k(x), \Theta\left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\right)_{k+1}, \ldots, \Theta\left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\right)_n)
\end{aligned}
$$

ч. т. д.

2 Период Мезозойский

2.1 Важные определения

2.1.1 Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

- $(f_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{F}$
- $f_n : E \subset \underbrace{X}_{\text{мн-во}} \to \mathbb{R}$

Если $\exists f(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall\ n > N \ \forall x \in E \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

— тогда f_n равномерно сходится к f на E ($f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$).

Это же условие равносильно $M_n := \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

2.1.2 Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара

$$a, z, z_0 \in \mathbb{C} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Вот такой ряд в шаре $B(z_0, R)$ называется *степенным рядом.*

Примечания:

Мы не особо раньше дружили с комплексными числами, но бояться их не нужно, потому что это числа вида $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$. А $|z|$ — и вовсе вещественное число, поэтому можно оценивать всё по модулю и работать как бы с вещественными числами.

Давайте попробуем абсолютно оценить сходимость такого ряда (по признаку Коши):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z - z_0|^n} = |z - z_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow \begin{cases} |z - z_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ — абсолютно сходится} \\ |z - z_0| > \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ — расходится} \end{cases}$$

Проблема лишь в том, что предел иногда может и не существовать, поэтому возьмём верхний предел, и всё получится. Эта формула (радиуса сходимости) называется *формулой Коши-Адамара*:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

2.2 Определения

2.2.1 Поточечная сходимость последовательности функций на множестве

- $(f_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{F}$
- $f_n : E \subset \underbrace{X}_{\text{мн-во}} \to \mathbb{R}$

Если $\exists f(x) : \forall x \in E$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall\ n > N \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

— тогда f_n поточечно сходится к f на E.

2.2.2 Формулировка критерия Больцано–Коши для равномерной сходимости

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \ \forall p \ \forall x \in X \ \ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

2.2.3 Равномерная сходимость функционального ряда

$f_n : E \subset X \to \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ — функциональный ряд

$S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} f_k(x)$ — частичная сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \underset{E}{\rightrightarrows} S(x) \Leftrightarrow S_N(x) \underset{E}{\rightrightarrows} S(x)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall x \in X \ \ |S_N(x) - S(x)| < \varepsilon$$

Замечания:

1. равномерная сходимость $\Rightarrow$ поточечная
2. $R_N(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(x)$ — остаток ряда. $S_N(x) + R_N(x) = S(x)$. $\Rightarrow \sum f_n \underset{E}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow R_N(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0$
3. $\sum f_n \underset{E}{\rightrightarrows} \Rightarrow f_n \underset{E}{\rightrightarrows}, f_n = R_N - R_{N-1}$

2.2.4 Формулировка критерия Больцано–Коши для равномерной сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \underset{E}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \ \forall p \ \forall x \in E \ \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

2.2.5 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

- $a_n, b_n : X \to \mathbb{R}$
- $\sum a_n(x)$ — равномерно ограничена ($\exists C_a > 0\ \forall x \in X\ \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n(x)| \le C_a$) и монотонна по n при любом x
- $\sum b_n \underset{X}{\rightrightarrows}$

Тогда $\sum a_n(x) b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$

2.3 Важные теоремы

2.3.1 Теорема Стокса–Зайдля о непрерывности предельной функций. Следствие для рядов

Формулировка (последовательности):

- $f_n, f : \underbrace{X}_{\text{метрическое пространство}} \to \mathbb{R}$
- $c \in X : f_n$ — непрерывно в c
- $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$

Тогда: f — непрерывно в c

Следствие:

$f_n \in C(X), f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \in C(X)$ — доказательства не требует, просто по всем точкам пробегаемся

Доказательство:

Зафиксируем ε из определения равномерной сходимости и распишем гига-неравенство треугольника:

$$|f(x) - f(c)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(1)} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(c)|}_{(2)} + \underbrace{|f_n(c) - f(c)|}_{(3)}$$

Оно верно при всех n. Но нам дали равномерную сходимость, из чего мы достаём $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Это обстоятельство с ходу говорит нам, что существует большое n, при котором (1) и (3) (то, что они $< \varepsilon$). С другой стороны, раз так, мы можем считать, что в (2) стоит вполне конкретная функция, непрерывная в $c \Leftrightarrow \forall x \in U(c) : (2) < \varepsilon$. Ну и всё, получается, что наше неравенство целиком меньше 3ε:

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)| < 3\varepsilon$$

Ну и вот, по китайской методике в определении непрерывности всё работает.

ч. т. д.

Бонус:

☺

Доказательство работает и в топологических пространствах без единой правки, потому что мы разговариваем на языке окрестностей и метрику не трогаем!

Формулировка (ряды):

- $u_n : \underbrace{X}_{\text{метрическое пространство}} \to \underbrace{Y}_{\text{нормированное пространство}}$
- $c \in X : u_n$ — непрерывно в c
- $S_n(x) := \sum^n u_n(x)$

- $S(x) := \sum u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$

Тогда $S(x)$ — непрерывно в c

Доказательство:

По предыдущей теореме $S_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x), S_n(c)$ — непрерывно в $c \Rightarrow S(x)$ — непрерывно в c

ч. т. д.

2.3.2 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

Формулировка:

- $\sum u_n(x)$ — функциональный ряд
- $u_n : \underbrace{X}_{\text{мн-во}} \to \mathbb{R}$
- $\exists (c_n)$ — вещественная последовательность, причём $\sum c_n$ — сходится
- $\forall n \in \mathbb{N}\ x \in X : |u_n(x)| \le c_n$

Тогда $\sum u_n \underset{X}{\rightrightarrows}$

Доказательство:

Доказательство более-менее тривиально. Распишем определение равномерной сходимости:

$$n \to \infty : \quad \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x) \right| \le \sup_{x \in X} \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} c_n \longrightarrow 0$$

ч. т. д.

2.3.3 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

Формулировка:

- $\sum a_n(x) b_n(x), \quad a_n, b_n : X \to \mathbb{R}$
- $\sum a_n$ — равномерно ограничена ($\exists C_a\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ \ |\sum_{k=1}^{n}(x)| \le C_a$)
- $\sum b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$
- b_n — монотонны по n $\forall x \in X$

Тогда $\sum a_n(x) b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$

Доказательство:

Пусть $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Рассмотрим такую сумму (опустим (x), но они там есть):

$$\sum_{N \le K \le M} a_K b_K = A_M b_M - A_{N-1} b_{N-1} + \sum_{N \le K \le M-1} (b_K - b_{K-1}) A_K$$

Если взять всё под модуль и применить неравенство треугольника, то получится выдержка из критерия Коши:

$$\left| \sum_{N \le K \le M} a_K b_K \right| \le |A_M b_M| - |A_{N-1} b_{N-1}| + \sum_{N \le K \le M-1} |b_K - b_{K-1}| \cdot |A_K| \qquad (*)$$

Вспоминаем, что b_n монотонна, поэтому можно раскрыть модуль внутри суммы и домножить всю сумму на “знак монотонности” (1, если возрастающая и -1, если убывающая). И потом просто оценить эту сумму сверху наибольшим членом и взять его с плюсом (оцениваем жеж). Ну и ещё оценим все A_i-шки константой из условия (у нас есть равномерная ограниченность):

$$(*) \le C_a \left(|b_M| + |b_{N-1}| + |b_K| + |b_{K-1}| \right) \qquad (**)$$

И ещё вспоминаем, что у нас ряд из b_n равномерно сходится, что значит (с небольшой китайской бухгалтерией):

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k \; \forall n > k \; \sup_{x \in X} |b_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot C_a}$$

Тогда при достаточно больших N, M:

$$(**) \; C_a \cdot \left(\frac{\varepsilon}{4 \cdot C_a} + \frac{\varepsilon}{4 \cdot C_a} + \frac{\varepsilon}{4 \cdot C_a} + \frac{\varepsilon}{4 \cdot C_a} \right) < \varepsilon$$

Критерий выполнен, всё хорошо.

ч. т. д.

2.4 Теоремы

2.4.1 Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота

Формулировка:

- $\rho(f, g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ — метрика (это доказывалось на лекции, хз, надо ли тут, но там вроде всё тривиально: аксиомы тождества, симметрии и правило треугольника)
- X — компактное метрическое пространство

Тогда $(C(X), \rho)$ — полное метрическое пространство

Доказательство:

Полное метрическое пространство — это такое, в котором у любой фундаментальной последовательности есть предел:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N\ \rho(f_n, f_m) = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Давайте возьмём какой-нибудь $x_0 \in X$ и заметим, что $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$ (очев, раз супремум меньше, то и отдельный x_0 меньше). Значит $n \mapsto f_n(x_0)$ — фундаментальная **вещественная** последовательность (просто подставить в определение выше)! Ну а $\mathbb{R}$ — полное, поэтому у такой последовательности сущесвтует предел: $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ (к какой-то f). Получается, что пототочечно всё норм сходится. Но нам то надо равномерную (в силу того, какую метрику мы выбрали). Давайте немного перепишем определение фундаментальной последовательности:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N\ \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Сделаем предельный переход по $m \to \infty$ и подставим найдённую предельную функцию:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

А это — определение $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$. Ну всё, супер, значит фундаментальная последовательность сходится.

А непрерывность приходит из теоремы Стокса-Зайдля. Значит наша фундаментальная последовательность имеет предел, и этот предел лежит в $C(X)$.

ч. т. д.

2.4.2 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов

Формулировка (последовательности):

- $f_n \in C[a, b]$
- $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$

Тогда:

$$\int_a^b f_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство:

Тривиалити (скажем, что их разность стремится к 0, т. к. есть равномерная сходимость):

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b f_n(x) - f(x)dx\right| \\ &\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)dx| \\ &\underset{\text{по метрике}}{\le} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|(b-a) \to 0\end{aligned}$$

ч. т. д.

Формулировка (ряды):

- $u_n : C[a,b] \to \mathbb{R}$
- $\sum u_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$

Тогда $\int_a^b S(x)dx = \sum \int_a^b u_n(x)dx$, причём интегрировать можно, т. к. $S(x)$ — непрерывна по Стоксу-Зайдлю

Доказательство:

По теореме для последовательностей:

$$\int_a^b S_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b S(x)dx$$

С другой стороны:

$$\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=1}^n u_n(x)dx \underset{\text{линейность интеграла}}{=} \sum_{i=1}^n \int_a^b u_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} = \sum_{i=1}^\infty \int_a^b u_n(x)dx$$

Ну и вот, у нас интеграл частичных сумм в пределе стремится одновременно к интергалу предельной суммы и ряду интегралов. Всё хорошо.

2.4.3 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

Формулировка:

- $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}, f(x,y)$
- f, f'_y — непрерывны на $[a,b] \times [c,d]$

- $\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$

Тогда $\Phi(y)$ — дифференцируема и $\Phi(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$

Доказательство:

Ну, давайте попробуем подифференцировать. Возьмём какую-то $t_n \to 0$ и напишем а-ля определение дифференцируемости и применим теорему Лагранжа (привет, НТР!):

$$\frac{\Phi(y+t_n)-\Phi(y)}{t_n} = \Phi'(y+\Theta_x t_n) = \int_a^b f'_y(x, y+\Theta_x t_n)dx \underset{?}{\longrightarrow} \int_a^b f'_y(x,y)dx$$

Ну и вот, мы теперь хотим понять, а действительно ли оно стремится? Применим "тяжёлую артиллерию": теорема Кантора о равномерной непрерывности:

$$f \text{ — непр. } \in C(K) \text{ (компакт)} \Rightarrow f \text{ — равномерно непрерывна}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \rho(x_1, x_2) < \delta\ |f(x_1) - f(x_1)| < \varepsilon$$

У нас непрерывная функция на компакте, поэтому давайте подгоним под Кантора наше условие:

$$\exists N\ \forall n > N\ |t_n| < \delta,\ \rho((x, y+\Theta_x t_n), (x,y)) < \delta,\ \left|f'_y(x, y+\Theta_x t_n) - f'_y(x,y)\right| < \varepsilon$$

Тогда:

$$\left|\int_a^b f'_y(x, y+\Theta_x t_n)dx - \int_a^b f'_y(x,y)dx\right| \le \varepsilon(b-a)$$

Следовательно, разность между ними меньше ε, тогда всё действительно стремится.

ч. т. д.

2.4.4 Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда

Формулировка (последовательности):

- $f_n \in C^1\langle a,b\rangle$
- $f_n \to f_0$ — поточечно
- $f'_n \underset{\langle a,b\rangle}{\rightrightarrows} \varphi$

Тогда $f_0 \in C^1\langle a,b\rangle$ и $f'_0 = \varphi$ на $\langle a,b\rangle$

Доказательство:

Давайте (не умаляя общности) возьмём какой-то подотрезок $[x_0, x_1] \subset \langle a,b\rangle$. Тогда по предыдущей теореме (у нас непрерыно равномерно сходится по условию):

$$\int_{x_0}^{x_1} f_n' \longrightarrow \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Интегрируем:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_n' = f_n(x_1) - f_n(x_0) \underset{n\to\infty}{=} f_0(x_1) - f_0(x_0) \underset{n\to\infty}{=} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Получается, что f_0 — первообразная φ. Причём, по Стоксу-Зайдлю, φ — непрерывна, значит и её первообразная тоже непрерывна ($f_0' = \varphi$).

ч. т. д.

Формулировка (ряды):

- $u_n \in C^1\langle a, b\rangle$
- $\sum u_n(x) = S(x)$ — поточечно
- $\sum u_n'(x) \underset{\langle a,b\rangle}{\rightrightarrows} = \varphi(x)$

Тогда $S(x) \in C^1\langle a, b\rangle$ и $S'(x) = \varphi(x)$ на $\langle a, b\rangle$. То есть $(\sum u_n(x))' = \sum u_n'(x)$

Доказательство:

Запускаем теорему для последовательностей с вводными: $f_n = S_n, f_0 = S, f_n' = \sum_{k=1}^n u_k'$

ч. т. д.

2.4.5 Теорема о предельном переходе в суммах.

Формулировка:

- $u_n : E \subset \underbrace{X}_{\text{метрическое пространство}} \to \mathbb{R}$
- $x_0 \in X$ — предельная точка E
- $\forall n\ \exists$ конечный $\lim_{x\to x_0} u_n(x) = a_n$
- $\sum u_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows}$

Тогда:

1. $\sum a_n$ — сходится
2. $\sum a_n = \lim_{x\to x_0} \left(\sum_{n=1}^\infty u_n(x)\right)$

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^\infty u_n(x) = \sum_{n=1}^\infty \lim_{x\to x_0} u_n(x)$$

Доказательство:

Нам, честно говоря, не за что зацепиться, поэтому давайте попробуем проверить, что a_n — фундаментальная последовательность, тогда у неё точно будет предел.

Пусть $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_n(x), S_n^a = \sum_{k=1}^n a_n$

Опять распишем гига-неравенство треугольника:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq \underbrace{|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)|}_{(1)} + \underbrace{|S_{n+p}(x) - S_n(x)|}_{(2)} + \underbrace{|S_n(x) - S_n^a|}_{(3)}$$

По критерию Больцано-Коши равномерной сходимости ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall p : \sup_{x \in E} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Сейчас мы получили, что при достаточно большом n (2) $< \frac{\varepsilon}{3}$ при любых $x \in E$. Теперь заметим, что мы доказываем фундаментальность числовой последовательности, следовательно никаких ограничений на x изначально не наложено. (???) Поэтому давайте возьмём такой x, близкий к x_0, чтобы (1) и (3) были $\frac{\varepsilon}{3}$. Итого:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Мы взяли частичные суммы a_n, и проверили, что разности рядом лежащих сумм сколь угодно малы.

Ура, у a_n есть предел! А чему же он равен? Давайте заведём дополнительную функцию:

$$\widetilde{u}_n(x) := \begin{cases} u_n(x), x \neq x_0 \\ a_n, x = x_0 \end{cases}$$

Такая сложность необходима для обеспечения непрерывности в x_0 (если x_0 лежит в E, то мы просто подменили значение, а если не лежала, то дополнили). Теперь эта функция непрерывна на x_0, ряд $\sum \widetilde{u}_n \underset{E \cup \{x_0\}}{\rightrightarrows}$ (*) $\Rightarrow$ по Стоксу-Зайдлю $S_{\widetilde{u}_n}(x)$ непрерывна в x_0. А поэтому:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{u}_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{u}_n(x) = \sum a_n$$

А равномерная сходимость ряда $\sum \widetilde{u}_n$ доказывается так:

$$(*) : \sup_{x \in E \cup \{x\}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{u}_k \right| = \max\{ \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{u}_k \right|, \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n \} \leq \underbrace{\sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{u}_k \right|}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

ч. т. д.

2.4.6 Теорема о перестановке двух предельных переходов

Формулировка:

- $f_n : E \subset X \to \mathbb{R}$
- $x_0 \in X$ — предельная точка E
- $\forall n \in \mathbb{N} : \exists$ конечный $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = A_n$
- $f_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} S(x)$ при $n \to \infty$

Тогда:

1. $\exists \lim_{n \to \infty} A_n \in \mathbb{R}$
2. $S(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\lim_{n \to \infty} f_n(x)}_{\text{равномерный, } S(x)} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\lim_{x \to x_0} f_n(x)}_{A_n}$$

Доказательство:

Это такая попытка сделать двойной предел и для функций. Подгоняем под предыдущую теорему: $u_1 = f_1, u_n = f_n - f_{n-1}, \quad a_1 = A_1, a_n = A_n - A_{n-1}$. $\sum_{k=1}^{n} u_k = f_n \underset{E}{\rightrightarrows} S(x)$, то есть $\sum u_n \underset{E}{\rightrightarrows}$. Супер, предыдущая теорема запущена. Пожинаем плоды ($\sum a_n$ сходится):

$$\sum_{k=1}^{n} A_n \text{ — имеет конечный предел}$$

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \lim_{x \to x_0} S(x) = A$$

ч. т. д.

2.4.7 Теорема о круге сходимости степенного ряда

Формулировка:

$\sum a_n (z - z_0)^n$ — степенной ряд

Тогда верно одно из этого:

1. ряд сходится при всех $z \in \mathbb{C}$
2. ряд сходится только при $z = z_0$
3. $\exists R \in (0, \infty)$:
   (a) $|x - x_0| < R$ — ряд абсолютно сходится
   (b) $|x - x_0| > R$ — ряд расходится

Доказательство:

Вспомним преамбулу из определения формулы Коши-Адамара. Ну и всё, вот берём признак Коши, и если предел равен нулю, то (a) работает. Если бесконечности, то (b) работает. А иначе, просто берём за радиус формклу Коши-Адамара.

ч. т. д.

2.4.8 Теорема о непрерывности степенного ряда

Формулировка:

- $\sum a_n(z - z_0)^n$ — степенной ряд
- $0 < R \leq \infty$ — радиус сходимости

Тогда:

1. $\forall r : 0 < r < R$ ряд равномерно сходится в $\overline{B(z_0, r)}$
2. $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ — непрерывно на $B(z_0, R)$

Доказательство:

(1)

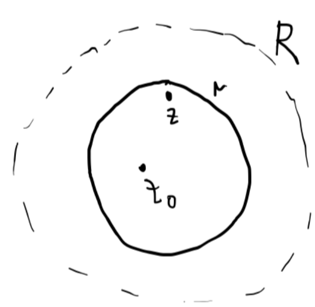
Давайте докажем по признаку Вейерштрасса, оценим каждый член по модулю:

$$|a_n \cdot (z - z_0)^n| \leq |a_n| \cdot r^n = c_n$$

А почему же $\sum c_n$ сходится? Да всё очень просто. $\sum a_n(z - z_0)^n|_{z=z_0+r} = \sum a_n r^n$ — сходится абсолютно на $r \Rightarrow$ сходится и всё работает.

(2)

Вспоминаем нашу любимую теорему Стокса-Зайдля, и там у нас доказательство строилось на гига-неравенстве треугольника (всё по модулю). Поэтому наш переход к комплексным числам вообще не мещает, оцениваем то мы уже вещественные. Поэтому давайте для каждого z возьмём r чуть больший, чем $|z - z_0|$, но в пределе круга сходимости: $|z - z_0| < r < R$:



А на нём по **(1)** у нас есть равномерная сходимость, поэтому по Стоксу-Зайдлю $f(z)$ — непрерывна.

ч. т. д.

2.4.9 Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. Пример.

Предисловие о комплексном дифференцировании:

Чтобы определить комплексное дифференцирование, необходимо ввести какое-то определение а-ля дифференцируемости:

$$f'(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

Но здесь A — комплексный производный оператор. Можно рассмотреть комплексное число $z = u + iv$ как вектор в $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow f(u, v)$. Тогда производный оператор будет матрицей 2×2, подчиняющейся условию Коши-Римана:

$$A = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} u'_x = v'_y \\ v'_x = -u'_y \end{cases}$$

(его выводили на лекции, не уверен, что тут это нужно. Будет время, допишу)

Вместе с этим, можем доказать неравенство(оно же — дифференцируемость $f(z) = z^n$ по "школьному" определению):

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + z^{n-3}z_0^2 + \ldots + z_0^{n-1})}{z - z_0} = nz^{n-1}$$

Типа у нас там в скобочке n слагаемых, и они все стремятся к z^{n-1}. И ещё мини-лемма:

Формулировка (лемма):

$w, w_0 \in \mathbb{C}, |w| \leq r, |w_0| \leq r$

Тогда: $|w^n - w_0^n| \leq nr^{n-1}|w - w_0|$

Доказательство:

По тому же принципу, что и выше:

$$|w^n - w_0^n| = |w - w_0| \cdot |w^{n-1} + w^{n-2}w_0 + \ldots + w_0^{n-1}| \leq nr^{n-1}|w - w_0|$$

ч. т. д.

Формулировка:

1. $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n = f(z)$ — степенной ряд с радиусом сходимости $0 < R \leq \infty$, равномерно сходится на нём
2. $\sum_{k=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$

Тогда:

1. (2) имеет такой же радиус сходимости, что и (1)
2. $\forall z \in B(z_0, R): \ f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$

Доказательство:

(1)

По формуле Коши-Адамара (для ряда $(z-z_0)\cdot(1) = \sum na_n(z-z_0)^n$, просто домножили на скобку, по идее нам ничего это не ломает, т. к. мы можем рассмотреть предел частичных сумм и там всё будет хорошо):

$$R_{(1)} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} \underset{\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1}{=} R$$

(2)

Найдём производную в произвольной точке $a \in B(z_0, r), 0 < r < R$:

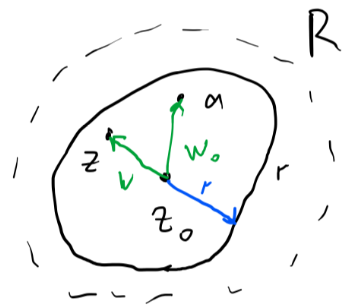
$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Заведём $w = z - z_0, w_0 = a - z_0$ и заменим в пределе функции на суммы:

$$\lim_{w\to w_0} \sum a_n \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{w - w_0} = \lim_{w\to w_0} \sum a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0}$$

Мы хотим перейти к сумме пределов, но для этого, по теореме, которую мы доказывали ранее, нам надо, чтобы под переделом была равномерная сходимость. Давайте оценим по модулю по лемме:

$$|a_n| \frac{|w^n - w_0^n|}{|w - w_0|} \le |a_n| n r^{n-1}$$



Возьмём r из определения шара выше (w, w_0 по модулю меньше r, см. картинку) и заметим, что ряд $(1)|_{z=z_0+r}$ сходится. К чему бы всё это? Да к тому, что вся сумма под пределом сходится равномерно по Вейерштрассу (мажорирующая веществененая последовательность сходится)! Значит можем поменять местами предел и сумму, и по дифференцируемости z^n:

$$\sum a_n \lim_{w\to w_0} \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} = \sum n a_n w^{n-1} = \sum n a_n (z - z_0)^{n-1} = (1)$$

Ну и всё, раз мы произвольно выбирали r, то для любых z из круга сходимости всё сошлось.

ч. т. д.

Следствия:

- $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n, R > 0 \Rightarrow f(z) \in C^\infty(B(z_0, R))$ (просто дифференцируем бесконечное число раз)
- Рассмотрим вещественный ряд $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$. Тогда $F = C + \sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ — первообразная $f(x)$, и у него такой же радиус сходимости, как и у $f(x)$.

  Замечание:

  Если считать интеграл по какому-то промежутку, то константа сократится и $\int_{x_0}^x f(x)dx = \sum \int_{x_0}^x a_n(x-x_0)^n dx$

Пример:

Рассмотрим $f(x) = \arctan(x)$. Хотим разложить в ряд. Сложновато. А в производной что? $f'(x) = -\frac{1}{a+x^2} = -1 + x^2 - x^4 + \ldots$ при $x \in (-1, 1)$ — степенной ряд. Супер, давайте поинтегрируем:

$$\arctan(x) = C - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \ldots$$

Надо найти константу. КПК way: подствим $x = 0 : \arctan(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \ldots$$

ч. т. д.

2.4.10 Свойства экспоненты

Формулировка:

$$z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}} = \infty$$

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp'(z) = \exp(z)$
3. $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$, где $\overline{z}$ — сопряжённое к z
4. $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

Доказательство:

(1)

$$\exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{0^0}{0!} = 1$$

(2)

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

(3)

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \exp(\overline{z})$$

(4)

Вспоминаем правило прямого перемножения рядов:

$$c_n = \left(\sum_{m=1}^{n} a_m\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = (a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_n b_n)$$

Ну и по нему:

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \frac{w^0}{0!} + \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} \frac{w^1}{1!} + \ldots + \frac{z^0}{0!} \frac{w^m}{m!}\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{m} \frac{z^{m-k} \cdot w^k \cdot m!}{(m-k)! \cdot k!}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(z+w)^m}{m!} = \exp(z+w)$$

ч. т. д.

P. S.

Там КПК рассказывал ещё весёлые выоды тригонометрических формул через экспоненту, но, КМК, оно тут не нужно

2.4.11 Метод Абеля суммирования рядов. Следствие

Формулировка:

- $\sum c_n$ — сходящийся вещественный ряд
- Пусть $f(x) = \sum c_n x^n$ при $x \in (-1, 1)$

Тогда: $\lim_{x \to 1-0} f(x) = \sum c_n$

Доказательство:

По признаку Абеля $f(x)$ сходится равномерно на $E = [0, 1]$ (x^n равномерно ограничено 1, а c_n — сходится $\Rightarrow$ равномерно сходится). Всё это вместе даёт нам непрерывность в 1 (на интервале нам её даёт теорема Стокса-Зайдля, но тут нам надо именно в 1, поэтому приходится использовать тяжёлую артиллерию).

ч. т. д.

Следствие:

- $\sum a_n = A, \sum b_n = B$
- $c_n = (\sum_{m=1}^{n} a_m) \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_k) = (a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_n b_n)$

- $\sum c_n = C$

Тогда: $\sum c_n = A \cdot B$

Доказательство:

Пусть $f(x) = \sum a_n x^n, \quad g(x) = \sum b_n x^n$ и $h(x) = \sum c_n x^n$ при $x \in [0, 1]$. Тогда при $x < 1 : h(x) = f(x)g(x)$ (очевидно, просто перемножить по условию ивсё будет норм). При $x = 1$ это неочевидно, но мы применяем теорему, демаем предельный переход при $x \to 1 - 0 : C = A \cdot B$.

ч. т. д.