СВЯТОЙ КПК
#BlessRNG

Или как не сдохнуть на 1 семе из-за матана

Разработали

Тимофей Белоусов @imodre
Никита Варламов @snitron
Тимофей Цорин @thefattestowl

v1.3
Март 2022-2023

Заметки авторов
В данном конспекте названия всех задач имеют ссылку на своего автора в виде верхнего индекса:

1. @imodre
2. @snitron
3. @thefattestowl

По любым вопросам и предложениям/улучшениям обращаться в телеграмм к соответвующему автору, или создать Pull Request в Git-репозиторий конспекта (click).

Эх
Дубинушка
Ухнем!

Содержание

1 Период 1 (Палеозойский)

1.1 Важные определения

1.1.1 Предел последовательности ($\varepsilon - \delta$ определение)[1]

$\exists a$ — предел последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$

Обозначается $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ ($n \to \infty$ можно опустить, т.к. а куда ещё ему стремиться в натуральных числах?)

1.1.2 Метрика, метрическое пространство, подпространство[1]

Метрика — некоторая функция ($\rho : X \times X \to \mathbb{R}$), определяющая расстояние между элементами в метрическом пространстве.

Существуют некоторые аксиомы, которым подчиняется метрика:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Метрическое пространство — пространство, в котором определена метрика (между любыми двумя элементами можно определить расстояние). Обозначается как пара (X, ρ)

Подпространство метрического пространства — метрическое пространство, в котором множество является подмножеством множества исходного пространства, а метрика - сужение исходной метрики на новое множество:

$$(Y, \rho|_{Y \times Y}), \text{ где } (X, \rho) \text{ - исходное пространство, а } Y \subset X$$

1.1.3 Шар, замкнутый шар, окрестность точки в метрическом пространстве[1]

Открытый шар - набор всех точек x в метрическом пространстве (X, ρ), для которых верно $\rho(x, x_0) < r$, где r - радиус шара, x_0 - центр шара (Обозн. $B(x_0, r)$).

Замкнутый шар - то же самое, но вместо $<$ стоит $\le$

1.1.4 Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность[2]

(X, ρ) — *метрическое пространство,* $D \subset X$, $a \in X$

Если $\exists \, V_a \subset D \Rightarrow a$ — *внутренняя точка* множества D
Если $\forall \, a \in D$ a — внутренняя, $\Rightarrow D$ — *открытое* множество (в X)
Внутренностью множества называется $\text{Int } D = \{x \mid x \in D \ \& \ x \text{ — внутренняя}\}$
Другими словами, *внутренностью* D является:

1. объединение всех открытых подмножеств D,

2. максимальное по включению открытое подмножество D.

Примечания:

1. Int$D$ - открытое множество
2. Если D открытое $\Leftrightarrow D = \text{Int } D$

1.1.5 Предельная точка множества[2]

Если $\forall\ r\ \dot{V}_a(r) \cap D \neq \varnothing$, то точка a называется *предельной точной множества*

1.1.6 Замкнутое множество, замыкание, граница[2]

Если D содержит все свои *предельные* точки, то такое множество называется замкнутым. (Примеры: $X, \varnothing$)

Замыкание D есть:

1. пересечение всех замкнутых множеств, содержащих D
2. минимальное по включению замкнутое множество, содержащее D

Граница D - множество граничных точек D

1.1.7 Изолированная точка, граничная точка[2]

Если $\exists\ r \in \mathbb{R}\ :\ a \in D\ \dot{V_a}(r) \cap D = \varnothing$, то такая точка a называется *изолированной*

Если $\forall\ r \in \mathbb{R}\ :\ a \in D\ \dot{V_a}(r)$ сожержит точки как из D, так и не из D, то такая точка называется *граничной*

1.1.8 Верхняя, нижняя границы; супремум, инфимум[2]

$X \subset \mathbb{R}$

Тогда $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X\ x \leq M$. M — *верхняя граница.*

$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X\ x \geq m$. m — *нижняя граница.*

1.1.9 Последовательность, стремящаяся к бесконечности[1]

Называется бесконечно большой.

$$\forall \varepsilon > (<) 0\, \exists N\ :\ \forall n > N \quad x_n > (<) \varepsilon \Leftrightarrow x_n \to +\infty(-\infty)$$

Аналогично, если стремится по модулю, то к беззнаковой бесконечности.

1.2 Определения

1.2.1 Упорядоченная пара[1]

Семейство, в котором есть 2 элемента (с учётом порядка)

1.2.2 Декартово произведение[1]

Множество упорядоченных пар. Например $X \times Y$ - все упорядоченные пары, где первый элемент $\in X$, а второй $\in Y$

1.2.3 Окрестность точки, проколотая окрестность[1]

Множество элементов, находящихся на "расстоянии"$< \varepsilon$. Проколотая окрестность **не** включает сам элемент. В контексте числовой прямой мы можем говорить, что $\{x : |x - x_0| < \varepsilon|\}$ — проколотая окрестность.

Окрестности обозначаются $V_{x_0}(\varepsilon)$

1.2.4 Предел последовательности(на языке окрестностей)[1]

$\exists a$— предел последовательности
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad x_n \in V_a(\varepsilon)$

1.2.5 Последовательность[1]

Это отображение $D \to Y$, где $D \in \mathbb{N}$

1.2.6 Образ и прообраз множества при отображении[2]

Отображение - тройка (X, Y, f), где X, Y - множества, а f - некое правило, по которому можно $x \in X$ сопоставить $y \in Y$. Записывается как $f : X \to Y$

Тогда *образом* множества $A \subset X$ при отображении является множество, такое что:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \tag{1}$$

А *прообразом* при $B \subset Y$:

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B \mid x \in X\} \tag{2}$$

1.2.7 Инъекция, сюръекция, биекция[2]

Если $x_1, x_2 \in X$; $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, то такое отображение называется *инъективным (инъекция)*. Другими словами, $f(x) = y$ имеет не более одного решения в X

Если $f(X) = Y$, то такое отображение называют *сюръективным (сюръекция)*. Другими словами, $\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$

Если у нас выполняется *инъекция + сюръекция*, то такое отображение называют *биективным (биекция)*. Другими словами, для $\forall y \in Y$ найдётся $x \in X$, причём этот x — единственный.

1.2.8 Векторнозначная функция, её координатные функции[1]

"У векторнозначной функции векторные значения"
— Капитан Очевидность

$f : X \to \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$

Также, можно f записать как $(f_1, f_2, \dots, f_m)$. f_i и есть координатная функция

1.2.9 График отображения[2]

Пусть дано отображение (X, Y, f). Тогда *графиком* Γ_f будет называться множество упорядоченных пар в декартовой системе координат, таких что:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\}$$

1.2.10 Композиция отображений[2]

Пусть дано $f : X \to Y, g : Y \to Z$. Тогда *композицией* отображений $g \circ f$ будет называться такое отображение $h : X \to Z$, что:

$$\forall x \in X : h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

1.2.11 Сужение и продолжение отображений[2]

Пусть задано отображение $f : X \to Y$. Тогда *сужением* его на $A \subset X$ будет называться отображение $g = f|_A$, такое что:

$$g : A \to Y, \forall a \in A : g(x) = f(x)$$

Однако, теперь f для g будет являться *продолжением* (g определена на подмножестве X)

1.2.12 Описание внутренности множества[2]

Достаточно подробно определено в
Внутренняя точка множества, открытое множество, внутренность[2]

1.2.13 Описание замыкания множества в терминах пересечений[1]

$\exists G$ — произвольное множество.

$$\overline{G} = \bigcap_{F \supset G, F \text{замк.}} F$$

Эквивалент определения "замыкание - пересечение всех замкнутых надмножеств"

1.2.14 Аксиомы вещественных чисел[1]

В $\mathbb{R}$ есть 2 операции:

1. Сложение: $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
2. Умножение: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1.2.14.1 Аксиомы поля

Аксиомы сложения

1. Ассоциативность: $(a + b + c = a + (b + c)$
2. Коммутативность: $a + b = b + a$
3. Нейтральный элемент: $a + 0 = a$
4. "Обратный элемент": $\exists a' : a + a' = 0$

Аксиомы умножения

1. Ассоциативность $a(bc) = (ab)c$
2. Коммутативность $ab = ba$
3. Нейтральный элемент: $1 \cdot a = a$
4. Обратный элемент: $\forall a \neq 0 \exists a' : a \cdot a' = 1$

Ещё их объединяет дистрибутивность: $a(b + c) = ab + ac$

1.2.14.2 Аксиомы порядка
Когда говорим про порядок, имеем в виду операцию сравнения

Аксиомы

1. Рефлексивность $a \leq a$
2. Транзитивность $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$
3. Антисимметричность $a \neq b \Rightarrow (a \leq b) \neq (b \leq a)$
4. Связь сложения и порядка $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
5. Связь умножения и порядка $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$

1.2.15 Аксиома Кантора, аксиома Архимеда[1]

1.2.15.1 Аксиома Кантора

$$\exists [a_i, b_i]; [a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [a_i, b_i]$$
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \varnothing$$

1.2.15.2 Аксиома Архимеда

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \exists n \in \mathbb{N} : a \cdot n > b$$

1.2.16 Пополненное множество вещественных чисел, операции и порядок в нем[2]

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Казалось бы, а что ещё? Ну, немного есть.

$+$	$x \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$y \in \mathbb{R}$	$x + y$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	☹
$-\infty$	$-\infty$	☹	$-\infty$

$\cdot$	$x > 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$y < 0$	xy	0	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	☺	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	☺	$-\infty$	$+\infty$

— операция не определена.

— операция не определена, но в некоторых случаях нам на это пофиг (типа, площадь прямоугольника со сторонами ∞ и 0 равна 0)

Неопределённости: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0, 0 * \infty$

Причём: $-\infty < \infty$ (и ещё можно перечислить операции из таблички)

1.2.17 Техническое описание супремума[1]

$$b = \sup X = \begin{cases} \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : M - \varepsilon < x \end{cases}$$

$$a = \inf X = \begin{cases} \exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : m - \varepsilon > x \end{cases}$$

1.2.18 Линейное пространство[1]

Также его называют *векторным пространством*. Это пространство, в котором определено множество векторов X и поле K.

В этом пространстве определены 2 операции (умножение вектора на число (элемент поля) и сложение векторов):

1. $X \times K \to X$

2. $X \times X \to X$

и 7 аксиом:

$\exists x, y, z \in X, \lambda, \gamma \in K$

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. $x + y = y + x$
3. $0 \cdot x = \theta$
4. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
5. $(\lambda + \gamma) \cdot x = \lambda \cdot x + \gamma \cdot x$
6. $\lambda \cdot (\gamma \cdot x) = (\lambda \cdot x) \cdot \gamma$
7. $1 \cdot x = x$

1.2.19 Норма, нормированное пространство[1]

Норма - функция, получающая по вектору его "длину". $p : X \to \mathbb{R}_+$, где X - линейное пространство. Часто обозначают как $||x||$ Имеет 3 свойства:

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
2. $||\lambda x|| = \lambda ||x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Есть ещё полунормы (они не подчиняются 1 свойству). У них есть ещё 4 свойства:

1. $p(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot p(x_i)$
2. $p(\theta) = 0$ (в обратную сторону не работает в отличие от нормы)
3. $p(-x) = p(x)$
4. $p(x - y) \geq |p(x) - p(y)|$

Нормированное пространство обозначается парой (X, p)

1.2.20 Ограниченное множество в метрическом пространстве[1]

Ограниченное множество X в метрическом пространстве — множество, где $\exists x_0 \exists R \quad X \subset B(x_0, R)$

1.2.21 Скалярное произведение[1]

Это отображение $X \times X \to \mathbb{R}$, где X — линейное пространство. Обозначается (x, y). $x, y \in X$
Существует 3 свойства, определяющие скалярное произведение:

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(\lambda \cdot x + \gamma \cdot y, z) = \lambda \cdot (x, z) + \gamma \cdot (y, z)$
3. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$, иначе > 0

Свойства скалярного произведения:

1. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$
2. $(\lambda \cdot x, y) = \lambda \cdot (x, y)$
3. $(\theta, y) = (x, \theta) = 0$
4. $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$ (Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве, норма, порождённая скалярным произведением[1])
5. $\sqrt{(x, x)}$ - норма, порождённая скалярным произведением.

1.3 Важные теоремы

1.3.1 Теорема о двух городовых[1]

Формулировка:

$x_n \to a, z_n \to c, y_n \to b, x_n \leq y_n \leq z_n, a = c \Rightarrow b = a$

Доказательство:

По теореме о предельном переходе в неравенствах для последовательностей, $a \leq b \leq c$.

Допустим $b \neq a$. Тогда $\exists N : \forall n > N \quad |x_n - a| \leq \frac{|a-b|}{2}$ & $|y_n - b| \leq \frac{|a-b|}{2}$ & $|z_n - a| \leq \frac{|a-b|}{2} \Rightarrow z_n$ и y_n не пересекаются. Но поскольку $z_n \geq y_n$, а $a < b$, у нас противоречие.

1.3.2 Теорема Кантора о стягивающихся отрезках[2]

Формулировка

Пусть дана система вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$

И при этом $(b_n - a_n) \to_{n\to\infty} 0$

Тогда $\exists! c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ и при этом $a_n \to c$ и $b_n \to c$

Доказательство

$\triangleright$ Для $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq c \leq b_n$. Вычтем из обоих сторон $a_n : 0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n$. Слева 0, справа б.м. последовательность, следовательно $c - a_n \to_{n\to\infty} \Rightarrow a_n \to c$. Для b_n аналогично.

Единственность c можно доказать:

1. по теореме о единственности предела
2. Пусть $c, d \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c \leq b_n$ и $a_n \leq d \leq b_n$. Вычтем их друг из друга, получим $a_n - b_n \leq c - d \leq b_n - a_n$. Предельно переходим и получаем $0 \leq c - d \leq 0 \Rightarrow c = d$

$\triangleleft$

1.3.3 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности в нормированном пространстве и в $\mathbb{R}^1$

Формулировка:

(X, p) - нормированное пространство
$\exists x_n \to x_0, y_n \to y_0.\ x, y, x_0, y_0 \in X$
$\{\lambda \in \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}, \lambda_n \to \lambda_0$

1. $x_n + y_n \to x_0 + y_0$
2. $x_n - y_n \to x_0 - y_0$
3. $\lambda_n \cdot x_n \to \lambda_0 \cdot x_0$
4. $||x_n|| \to ||x_0||$
5. Для $\mathbb{R}$: $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x_0}{y_0}$

Доказательство:

1.
$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \quad ||x_n - x_0|| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \quad ||y_n - y_0|| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$N := \max(N_1, N_2)$$
$$||x_n + y_n - (x_0 + y_0)|| =$$
$$= ||(x_n - x_0) + (y_n - y_0)|| \underset{\text{н-во треугольника}}{\leq} ||(x_n - x_0)|| + ||(y_n - y_0)|| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. Банально, сведём к первому+третьему $||x_n - y_n|| = ||x_m + (-1)y_n|| \to x_0 + (-1)y_n = x_0 - y_n$

3. $||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| = ||\lambda_n x_n + \lambda_n x_0 - \lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0|| = ||\underset{\text{огр.}}{\lambda_n}\underset{\text{б.м.}}{(x_n - x_0)} + \underset{\text{огр.}}{x_0}\underset{\text{б.м.}}{(\lambda_n - \lambda_0)}|| \to 0$

4. $|||x_n|| - ||x_0||| \underset{\text{Треугольник для полунорм}}{\leq} ||\underset{\text{б.м.}}{x_n - x_0}|| \to 0$

5.
$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n} \to x_0 \frac{1}{y_0} = \frac{x_0}{y_0}$$
Но это не работает, т.к. мы не знаем куда стремится $\frac{1}{y_n}$

y_n огр., т.к. $y_0 \neq 0$, а y_n сходящаяся (по т. об ограниченности сх. посл.)
$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}\right| = \left|\frac{y_0 - y_n}{y_n y_0}\right| = \left|\underset{\text{огр.}}{\frac{1}{y_n}}\underset{\text{огр.}}{\frac{1}{y_0}}\frac{y_0 - y_n}{\underset{\text{б.м.}}{1}}\right| \to 0$$

1.3.4 Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$). Неопределённости[1]

Теорема об арифметических свойствах предела последовательности (в $\overline{\mathbb{R}}$)

Формулировка

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}, x_n \to a, y_n \to b$

1. $x_n \pm y_n \to a \pm b$
2. $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$
3. $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$ (Разумеется, $y_n, b \neq 0$)

Это работает только когда пределы не создают неопределённости. Они как раз представлены дальше

Доказательство $\triangleright$ Положим $x_n \to +\infty, y_n \to b$

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad x_n > \varepsilon - b \Rightarrow x_n + y_n > \varepsilon$ (работает т.к. y_n огр. снизу)
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad x_n > \frac{\varepsilon}{b} \Rightarrow x_n \cdot y_n > \varepsilon$ (работает т.к. $b \neq 0$)

3. $\forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad x_n > \varepsilon \cdot b \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} > \varepsilon$

$\triangleleft$

Неопределённости

Я не понимаю, что тут это делает. Вроде как определение, без доказательств, но записано как теорема...

1. $\infty + -\infty$
2. $\pm\infty \cdot 0$
3. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
4. $\frac{0}{0}$

1.4 Теоремы

1.4.1 Законы де Моргана[2]

Напоминалка

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \exists \alpha \in A \; x \in X_a\} \tag{3}$$

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \forall \alpha \in A \; x \in X_a\} \tag{4}$$

Формулировка:

$\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *- семейство множеств,* Y *- множество. Тогда:*

$$Y \setminus \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \tag{5}$$

$$Y \setminus \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \tag{6}$$

$$Y \cap \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha) \tag{7}$$

$$Y \cup \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha) \tag{8}$$

Доказательство:

1. $\triangleright$ Рассмотрим закон (1). Обозначим левую часть за $\mathbb{L}$, а правую за $\mathbb{R}$. Тогда $x \in \mathbb{L}$ означает, что $x \in Y$ и $x \notin \cup_{\alpha \in A} X_\alpha$. По определению **объединения**, это значит, что $x \in Y$ и $x \notin X_\alpha$ для $\forall \alpha \in A$. Вуаля, по определению **пересечения** получается, что $x \in \mathbb{R}$. $\triangleleft$
   (2) доказывается аналогично.
2. $\triangleright$ Рассмотрим закон (3). Обозначим левую часть за $\mathbb{L}$, а правую за $\mathbb{R}$. Тогда $x \in \mathbb{L}$ означает, что $x \in Y$ и $\exists \alpha_0 \in A \; : \; x \in X_{\alpha_0}$. Иными словами: $\exists \alpha_0 \in A \; : \; x \in Y \cap X_{\alpha_0}$. Воу, получилось определение **объединения** для $\mathbb{R}$. $\triangleleft$
   (4) доказывается аналогично.

1.4.2 Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности[1]

1.4.2.1 Единственность предела:

Формулировка:
$\exists a$ и b — пределы последовательности $x_n \Rightarrow a = b$

Доказательство:

Положим, $a \neq b$

$\varepsilon := |a-b|/2$
$\exists N_1 : \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon$
$\exists N_2 : \forall n > N_2 \quad |x_n - b| < \varepsilon$
$N := \max(N_1, N_2) + 1$
$|x_N - a| < \varepsilon \ \& \ |x_N - b| < \varepsilon$, что невозможно, т.к. $V_a(\varepsilon)$ и $V_b(\varepsilon)$ не пересекаются.

1.4.2.2 Ограниченность сходящейся последовательности

Формулировка:
Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство:
Тривиально. Возьмём предел (a) последовательности. Возьмём любой ε. Для него мы можем узнать N, для которого все элементы находятся ближе данного ε. Далее возьмём $\max\limits_{i=1}^{N} |x_i - a|$. Это и будет радиусом шара, в котором находятся все элементы последовательности

1.4.3 Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей и для функций[1]

Формулировка:

$x_n < y_n,\, x_n \to a, y_n \to b \Rightarrow a \leq b$

Доказательство:

$\varepsilon := |a-b|/2$
$\exists N_1 : \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon$
$\exists N_2 : \forall n > N_2 \quad |y_n - b| < \varepsilon$
$N := \max(N_1, N_2)$
$\forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon \ \& \ |y_n - b| < \varepsilon$, а поскольку эти 2 окрестности не пересекаются и
$x_n < y_n$, то $a < b$

Для функций аналогично

1.4.4 Бесконечно малая последовательность[1]

Формулировка:

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную равно бесконечно малой последовательности.

Доказательство:

$\exists x_n \to 0, \sup |y_n| = K$

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n| < \dfrac{\varepsilon}{\max(K, 1)} \Rightarrow |x_n \cdot y_n| < \varepsilon$

1.4.5 Открытость открытого шара[2]

Формулировка:

Открытый шар — открыт.

Доказательство:

$B(a,r) = \{x \in X : \rho(a,x) < r\}$ BASED.

$\triangleright$

Пусть $b \in B(a,r)$. Тогда $B(b, r - \rho(a,b)) \subset B(a,r)$ (это надо доказать).

Докажем! Пусть $x \in B(b, r - \rho(a,b))$. Тогда (по определению открытого шара) $\rho(x,b) < r - \rho(a,b)$

$\rho(x,a) \leq \rho(x,b) + \rho(b,a) < r$ *ВЖУХ, и неравенство треугольника!*

Следовательно, $\rho(x,a) < r \Rightarrow x \in B(a,r) \Rightarrow B(b, r - \rho(a,b)) \subset B(a,r)$

Следовательно, для любой (произвольной) точки b существует такая окрестность (шар), что $B(b, r - \rho(a,b)) \subset B(a,r) \Rightarrow b$ — внутренняя. Тогда все точки внутри открытого шара — внутренние, и, следовательно, по определению он — открытое множество. $\triangleleft$

1.4.6 Теорема о свойствах открытых множеств[2]

Формулировка

$$\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha - \textit{открытое множество} \tag{9}$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} G_k - \textit{открытое множество} \tag{10}$$

Доказательство

(9) $\triangleright$ Возьмём $\alpha \in A$; $x \in G_\alpha$. Так как G_α — открытое, следовательно, $\exists B(x,r) \subset G_\alpha$. А раз он содержится в одном множестве, логично, что он уже тем более содержится в их объединении. $\triangleleft$

(10) $\triangleright$ Возьмём $x \in \bigcap_{k=1}^{n} G_k$. Так как этот x содержится в каждом из множеств G_k, существует n шаров $B(x, r_k)$, причём каждый шар является подмножеством G_k. Давайте введём $r = \min_{k=1}^{n} r_k$. Тогда шар $B(x,r)$ точно содержится в каждом G_k, а, следовательно, и в их пересечении. $\triangleleft$

Примечание:

Пересечение бесконечного количества открытых множеств не обязательно открыто! Пример:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

1.4.7 Теорема о связи открытых и замкнутых множеств Свойства замкнутых множеств[2]

1.4.7.1 Теорема о связи открытых и замкнутых множеств

Формулировка

G — открыто $\Leftrightarrow G^c$ — замкнуто

Доказательство

Всё это верно в силу случайности выбираемых точек!

$\boxed{[}$ $\Leftarrow]\triangleright$ Возьмём $x \in G$. Т.к. G^c — замкнуто, а $x \notin G^c$, следовательно, x не является предельной точкой для G^c (значит, что $\exists r \in \mathbb{R} : \dot{V_x}(r) \cap G = \varnothing$). Причём окрестность можно взять и не выколотую, т.к. $x \notin G^c$. Тогда, $V_x \cap G^c = \varnothing$. Но по определению дополнения это значит, что $V_x \subset G$! Следовательно, x — внутренняя точка для $G \Rightarrow$ оно открытое. $\triangleleft$

$\boxed{[}$ $\Rightarrow]\triangleright$ Возьмём x — предельную точку для G^c. То есть, любая $\dot{V_x} \cap G^c \neq \varnothing$. Следовательно, x не является внутренней для G (потому что внутренняя точка входит в множество с какой-то окрестностью полностью, а таких окрестностей нету). Следовательно, $x \notin G$, т.к. оно открыто и содержит только внутренние точки. А раз точка не принадлежит множеству, то точно принадлежит его дополнению. $\triangleleft$

1.4.7.2 Свойства замкнутых множеств

Формулировка

G_a — замкнутые

$$\bigcap_{\alpha \in A} G_a - \textit{замкнуто} \tag{11}$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} G_a - \textit{замкнуто} \tag{12}$$

Доказательство

Вуаля, применяем законы де Моргана и предыдущую теорему:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha^c = \bigcap_{\alpha \in A} X \setminus G_\alpha^c = \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_{k=1}^{n} G_\alpha^c = \bigcup_{k=1}^{n} X \setminus G_\alpha^c = \bigcup_{k=1}^{n} G_\alpha$$

Примечание:

Объединение бесконечного числа замкнутых множеств не обязательно замкнуто! Пример:

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} = \mathbb{Q} \text{ не замкнуто в } \mathbb{R}$$

1.4.8 Аксиома Архимеда. Плотность множества рациональных чисел в $\mathbb{R}^2$

1.4.8.1 Свойства замкнутых множеств

Формулировка

$$\forall x > 0, y > 0 \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$$

(следовательно, существуют сколь угодно большие натуральные числа)

Доказательство (аксиомы, лол) ПОКА НЕ ЗНАЮ, КАК-ТО ЧЕРЕЗ СУПРЕМУМ

1.4.8.2 Плотность множества рациональных чисел в $\mathbb{R}$

Формулировка

Множество $A \subset X$ всюду плотно в X, если $\forall x, y, x < y (x, y) \cap A \neq \varnothing$

$\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$

Доказательство

$\triangleright$ Пусть $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Тогда $\frac{1}{y-x} > 0$ и (по аксиоме Архимеда) $\exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{y-x} \Rightarrow \frac{1}{n} < y - x$. Пусть $c = \frac{[nx]+1}{n}$ ($c \in \mathbb{Q}$)

$$c \leq \frac{nx+1}{n} = x + \frac{1}{n} < x + y - x < y$$
$$c > \frac{nx+1-1}{n} = x$$

Следовательно $c \in (x, y)$ $\triangleleft$

1.4.9 Неравенство Бернулли[2]

Формулировка

$\forall x \in \mathbb{R} > -1$ $n \in \mathbb{N}$ $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Доказательство

$\triangleright$ По индукции!

База (BASED):

$n = 1 \Rightarrow 1 + x \geq 1 + x$

Предположение: $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Переход:

$(1+x)^{(n+1)} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$

$\triangleleft$

1.4.10 Теорема о существовании супремума[2]

Формулировка

Примечание: тут докажем про ограниченное сверху (супремум) множество, для инфимума аналогично

Всякое непустое ограниченное сверху подмножество $X \subset \mathbb{R}$ имеет верхнюю грань.

Доказательство

$\triangleright$ Так как множество ограничено сверху, то $\exists M \in \mathbb{R} : x \in X$ $x \leq M$. Супер. Возьмём $x_0 \in X$ и создадим отрезок $[x_0, M] = [a_1, b_1]$ ($x_0 \leq M$ по определению верхней грани). Заметим, что этот отрезок удовлетворяет двум свойствам:

$$1)\ [a_1, b_1] \cap X \neq \varnothing \quad \text{и} \quad 2)\ (b_1, +\infty) \cap X = \varnothing$$

Шикарно. Теперь выберем точку $d_i = \frac{a_{i-1}+b_{i-1}}{2}$. Если справа нету элементов множества X, то смещаем b_i в d_i. Если справа элементы есть, то смещаем a_i в d_i. Таким образом, мы бинпоиском подбираемся всё ближе и ближе к супремуму (двигаем отрезочек вправа). Причём все наши отрезки — вложенные! И свойства 1) и 2) так же выполняются.

ACHTUNG! Наши отрезки ещё и стягиваются! И действительно, ведь $\frac{b_i - a_i}{2^{n-1}}$ стремится к 0. Следовательно, по теореме Кантора о стягивающихся отрезках, существует всего одна точка c, к которой стремятся a_n и b_n.

Проверим, что c – $\sup X$. По построению $\forall x \in X : x \leq b_n \underset{\text{по теореме о предельном переходе в неравенствах}}{\Rightarrow} x \leq c$. Значит, c – верхняя граница.

Теперь докажем, что для $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X : c - \varepsilon < x$. Так как $a_n \to c$, то $c - a_n < \varepsilon \Rightarrow c - \varepsilon < a_n$. То есть, с некоторого натурального n все члены последовательности будут больше $c - \varepsilon$ при заданном ε. А так как выполнялось свойство 1), то найдётся $x \in [a_n, b_n] \subset X$. $\triangleleft$

1.4.11 Лемма(ы) о свойствах супремума[2]

Формулировка

$$D \subset E \subset X \Rightarrow \sup D \leq \sup E \tag{13}$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} > 0 : \sup \lambda D = \lambda \sup D \tag{14}$$
$$\sup -D = -\inf D \tag{15}$$

Доказательство

(13) $\triangleright$ Заметим, что $\sup E$ является верхней гранью для D (т.к. $D \supset E$). Следовательно, $\sup D \leq \sup E$ $\triangleleft$

(14) $\triangleright$ Для всякого $x \in D$ верно, что $x \leq \sup D$. Домножим на $\lambda \Rightarrow \lambda x \leq \sup \lambda D \Rightarrow \sup \lambda D = \lambda \sup D$ $\triangleleft$

(15) $\triangleright \sup -D : \forall x \in -D\ x \leq \sup -D$. Домножим на $(-1) \Rightarrow -x \geq -\sup -D$. Тогда $-\sup -D$ является нижней границей для $D \Rightarrow -\sup -D = \inf D \Rightarrow \sup -D = -\inf D$ $\triangleleft$

1.4.12 Теорема о пределе монотонной последовательности (Вейерштрасс in da house)[2]

Формулировка

Если последовательность x_n монотонна и ограничена сверху (снизу — аналогично), то она имеет конечный предел

Доказательство $\triangleright$ Поскольку x_n ограничена, то $\exists M = \sup E$, причём $\forall \varepsilon > 0 \exists x_n : M - \varepsilon < x_n$.

Так как она ещё и монотонна, что $\forall n \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} : x_N \geq x_n$. Mix it!

$$\forall \varepsilon > 0 : M - \varepsilon < x_n \leq x_N \leq M < M + \varepsilon$$

Получается, что в ε-окрестности точки M лежит бесконечно большое количество элементов $\{x_n\} \Rightarrow M$ — предел последовательности. $\triangleleft$

1.4.13 Определение числа e, соответствующий замечательный предел[2]

Формулировка

$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится

Доказательство

Заведём $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)}$. Очевидно, что эта последовательность ограничена снизу единичкой.

Но это ещё не всё! Она ещё и убывающая. Докажем!

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n}$$

$$\geq_{\text{по неравенству Бернулли}} \left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right)\frac{n-1}{n} = 1$$

Ура, монотонна + ограничена $\Rightarrow$ имеет предел. А по теореме об арифметических свойствах предела $x_n = \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}}$ и x_n имеет предел.

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

1.4.14 Неравенство Коши-Буняковского в линейном пространстве, норма, порождённая скалярным произведением[1]

1.4.14.1 Неравенство Коши-Буняковского

Формулировка:

$|(a,b)|^2 \leq (a,a)\cdot(b,b). a,b \in X$ (линейное пространство).

Доказательство:

$(a+\lambda b, a+\lambda b) = \lambda(a,b) + (a,a) + \lambda(b,a) + \lambda^2(b,b) = (a,a) + 2\lambda(a,b) + \lambda^2(b,b)$

$\exists \lambda = -\dfrac{(a,b)}{(b,b)}$

$(a,a) - \dfrac{2(a,b)^2}{(b,b)} + \dfrac{(a,b)^2}{(b,b)} = (a,a) - \dfrac{(a,b)^2}{(b,b)} = \dfrac{(a,a)(b,b)-(a,b)^2}{(b,b)}$

Т.к. $(a+\lambda b, a+\lambda b) \geq 0$ и знаменатель $(b,b) \geq 0$, то и числитель $((a,a)(b,b) - (a,b)^2 \geq 0) \Rightarrow (a,a)(b,b) \geq (a,b)^2$

1.4.14.2 Норма, порождённая скалярным произведением

Формулировка:

$p(a) = \sqrt{(a,a)}$ — норма.

Доказательство:

1. $||a|| = 0 \Leftrightarrow a = \theta$. Очевидно из свойств скалярного произведения.
2. $||\lambda a|| = |\lambda| ||a||$. Так же очевидно.
3. $||a+b|| \leq ||a|| + ||b||$. $||a+b|| = \sqrt{(a+b,a+b)}$.$||a+b||^2 = (a+b,a+b) = (a,a)+(a,b)+(b,a)+(b,b) \leq (a,a)+\sqrt{(a,a)}\sqrt{(b,b)}+\sqrt{(a,a)}\sqrt{(b,b)}+(b,b) = (a,a)+2\sqrt{(a,a)}\sqrt{(b,b)}+(b,b)$. $(||a||+||b||)^2 = (a,a)+2\sqrt{(a,a)}\sqrt{(b,b)}+(b,b)$

1.4.15 Леммы о непрерывности скалярного произведения и покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$[1]

1.4.15.1 Непрерывность скалярного произведения

Формулировка:

X - линейное пространство со скалярным произведением. $\exists$ норма, порождённая скалярным произведением.

$x_n \to x_0$

$y_n \to y_0$

$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$

Доказательство:

$|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)| = |(x_n,y_n)-(x_0,y_n)+(x_0,y_n)-(x_0,y_0)| \leq$

$\leq |(x_n,y_n)-(x_0,y_n)|+|(x_0,y_n)-(x_0,y_0)| = |(x_n-x_0,y_n)|+|(x_0,y_n-y_0)| \underset{\text{КБШ}}{\leq}$

$\leq ||\underset{\text{б.м.}}{x_n - x_0}|| \cdot ||\underset{\text{огр.}}{y_n}|| + ||\underset{\text{огр.}}{x_0}|| \cdot ||\underset{\text{б.м.}}{y_n - y_0}|| \to 0$

1.4.15.2 Покоординатная сходимость в $\mathbb{R}^n$

Формулировка:

$x_k^{(n)}$, где (n) - индекс последовательности, $k \in \{1,2,\ldots,m\}$ - номер координаты в $\mathbb{R}^m$. Метрика Евклидова.

$x^{(n)} \to a \Leftrightarrow \forall k \quad x_k^{(n)} \to a_k$

Доказательство:

Common:

$$\forall k |x_k - a_k| \underset{\text{1 слагаемое}}{\leq} \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k-a_k)^2} \leq \sqrt{m}\max_{k=1}^{m}(x_k - a_k)$$

$\Rightarrow$

$$\forall k |x_k - a_k| \underset{\text{1 слагаемое}}{\leq} \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k-a_k)^2} \underset{\text{метрика}}{\to} 0 \Rightarrow \forall k x_k \to a_k$$

$\Leftarrow$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k - a_k)^2} \leq \sqrt{m}\max_{k=1}^{m}|x_k - a_k| \underset{\text{все слагаемые}\to 0}{\longrightarrow} 0$$

2 Период 2 (Мезозойский)

2.1 Важные определения

2.1.1 Определения предела отображения (3 шт)[2]

1. По Коши на $\varepsilon - \delta$ языке:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{a\} : \rho_X(a, x) < \delta : \rho_Y(f(a), A) < \varepsilon$$
2. По Коши на языке окрестностей:
$$\forall V_A \exists \dot{V}_a : F(V_a \cap D) \subset V_A$$
3. По Гейне на языке последовательностей:
$$\forall \{x_n\}, x_n \in D \setminus \{a\}, x_n \to a : f(\{x_n\}) \to A$$

TL;DR отсюда следует и определение предела *функции*: Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ — предельная точка D, $A \in \mathbb{R}$.

Тогда A — предел функции f в точке a.

2.1.2 Компактное множество[2]

Если множество $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, то семейство множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется *покрытием* множества K. Если при этом все множества G_α ещё и открытые, то такое покрытие называют открытым.

Подмножество K метрического пространства X называется *компактным*, если из любого открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.

$$\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A} : K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha \text{ — открытые в } X, \quad \exists \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k}$$

2.1.3 Непрерывное отображение (4 определения)[1]

$f : D \subset X \to Y$

1. Дешёвое: существует конечный предел в точке x_0 и равен образу в этой точке (работает только для предельных точек)
2. $\varepsilon - \delta$: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{x_0\} : \rho_X(x, x_0) < \delta \quad \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. Окрестности: $\forall V_{f(x_0)} \exists \dot{V}_{x_0} : \forall x \in \dot{V}_{x_0} \quad f(x) \subset V_{f(x_0)}$
4. Последовательности: $\forall \{x_n \in D \setminus \{x_0\}\} \to x_0 \quad f(x_n) \to f(x_0)$

2.1.4 о маленькое[2]

Пусть X — метрическое пространство, $f : D \subset X \to \mathbb{R}(\mathbb{C}).a$ — предельная точка D, и тогда если $\exists \ \varphi : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) : f(x) = \varphi(x) g(x)$, причём $\exists V_a$ такая что $\varphi(V_a \cap D)$ — бесконечно малая при всех допустимых x, то тогда говорят что $f(x)$ бесконечно малая по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$.

2.1.5 Эквивалентные функции, таблица эквивалентных[2]

Пусть X — метрическое пространство, $f : D \subset X \to \mathbb{R}(\mathbb{C}).a$ — предельная точка D, и тогда если $\exists\ \varphi : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C}), : f(x) = \varphi(x)g(x),$ — при всех $x \in V_a \cap D$, то тогда говорят что $f(x)$ эквивалентна по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$. $(\varphi(x) \to 1)$

$$\sin x \approx \arcsin x \approx \tan x \approx \arctan x \approx e^x - 1 \approx x$$

при $\varphi \to 1$.

2.1.6 Функция, дифференцируемая в точке[1]

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b\rangle$

Есть 2 определения:

1. Если $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = k \in \mathbb{R}$, то f дифференцируема в x_0, а k — производная в точке x_0

2. Если $\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$, то f дифференцируема в x_0, а A — производная в точке x_0. $o(x - x_0)$ означает, что при приближении x к x_0 погрешность формулы $\to 0$

2.1.7 Производная[1]

Имхо, всё уже определено в Функция, дифференцируемая в точке[1]

2.2 Определения

2.2.1 Топологическое пространство, топология[2]

X — множество, тогда *топологическим пространством* называется пара множество — система его подмножеств (X, W), если выполнены следующий условия ($W \subset 2^X$):

1. $$\varnothing, X \in W$$

2. $$\forall \{G_k\}_{k=1}^n \bigcap_{k=1}^n G_k \in W$$

3. $$\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in W$$

Тогда видно, что элементы W — **открытые множества**.

Примеры:

$W = \{\varnothing, X\}$ — антидискретная топология

$W = 2^X$ — дискретная топология

Задать топологию в $X \Leftrightarrow$ задать систему подмножеств W, удовлетворяющую вышеприведённым свойствам.

Окрестностью точки в топологическом пространстве называют открытое множество, содержащее эту точку.

2.2.2 Топологическое определение предела последовательности[2]

Казалось бы, у нас тут определение, но как бы не так! ☺

X, Y — топологические пространства. $f : X \to Y, \lim_{x \to a} f(x) = L$

Тогда $\forall U_L^* \; V_a^* : \forall x \in V_a^* : f(x) \in U_L^*$

У вас может сложиться ощущение, чем же это отличается от обычного предела отображения по Коши в терминах окрестностей? А вот чем! Тут вместо обычных окрестностей использованы топологические окрестности (открытые множества вокруг точки)!

Но это был бы не матан, если бы мы что-то не доказали. Поэтому докажем эквивалентности этого определения и обычного определения в терминах окрестностей:

$\forall U_L \; V_a : \forall x \in V_a : f(x) \in U_L$

$\triangleright$

$\Rightarrow$

Так как наши окрестности в топологическом определении — просто какие-то открытые множества, мы можем всегда применять логическую подмену: будем считать, что обычные окрестности — просто открытые шарики. Тогда из любого открытого шарика с центром в точке a (внутренней) можно выдрать открытый шарик (т.к. по определению он входит туда с какой-то окрестностью).

Тогда валидно взять $U_L^* = U_L$ и $\forall V_a^* \; \exists V_a \subset V_a^*$ и тогда наше определение сведётся к обычному по Коши.

$\Leftarrow$

То же самое: нам даны теперь не открытые множества, а открытые шарики (окрестности). Так давайте возьмём любое открытое множество вокруг нашей окрестности и всё сойдётся.

$\lhd$

2.2.3 Метризуемое топологическое пространство[2]

Метризуемое топологическое пространство — такое пространство, когда можно задать метрику на X и при этом все условия существования топологического пространства останутся валидными (все открытые множества останутся открытыми в смысле этой метрики). (топология которого порождена этой метрикой)

2.2.4 Секвенциальная компактность[2]

Пространство называется *секвенциально компактным*, если из любой его последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

K — секвенциально компактно $\Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset K \; \exists k_1, k_2, \ldots (k_i \in \mathbb{N}$ и возрастает$) : x_{k_i} \to_{i \to \infty} x_0 \in K$

2.2.5 Предел по множеству[2]

$f : D \subset X \to Y, D_1 \subset D, a$ — предельная точка D_1

Тогда предел по множеству D_1 в точке $a : \lim_{x \to a} f|_{D_1}(x)$

2.2.6 Односторонние пределы[1]

Это предел при $x \to x_0$ слева (то есть предел на $D \cap (\infty, x_0)$ (note: без самой x_0). Обозначают $\lim\limits_{x \to x_0 - 0}$

Справа аналогично

2.2.7 Непрерывность слева[1]

Это непрерывность, в которой забили на предел справа. То есть отображение непрерывно на $D \cap (-\infty, x_0]$. Сама x_0 тут включена, т.к. всё-таки предел должен быть ей равен для обеспечения непрерывности.

2.2.8 Разрыв, разрывы первого и второго рода[1]

Разрыв — нарушение условия непрерывности. Есть разные:

1. Устранимые разрывы (1 рода, где просто какая-то точка тупо выколота, а дальше всё непрерывно, без скачков), пределы слева и справа равны, но не равны $f(x_0)$
2. Скачки (1 рода, односторонние пределы конечны, но не равны)

3. *Атомный пиздец* (2 рода, как минимум 1 односторонний предел не существует/бесконечен)

2.2.9 О большое[2]

Пусть X — метрическое пространство, $f : D \subset X \to \mathbb{R}(\mathbb{C}).a$ — предельная точка D, и тогда если $\exists\ \varphi : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C}) : f(x) = \varphi(x)g(x)$, причём $\exists V_a$ такая что $\varphi(V_a \cap D)$ — ограничена при всех допустимых x, то тогда говорят что $f(x)$ ограниченна по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$.

2.2.10 Асимптотически равные (сравнимые) функции[2]

Пусть X — метрическое пространство, $f : D \subset X \to \mathbb{R}(\mathbb{C}).x \in D$ или $x \to x_0$

Тогда если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$, то тогда такие функции называют *сравнимыми* $(f \asymp g)$

2.2.11 Асимптотическое разложение[2]

Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X, x_0$ — предельная точка $D, f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и на ней задана конечная или счётная система функций, каждая из которых бесконечно мала по сравнению с предыдущей.

$$k \in [1, 2, \dots, n] \text{ или } k \in \mathbb{Z}_+ \qquad g_k = o(g_{k-1}), x \to x_0$$

$$f(x) = \sum_{k}^{n} c_i g_i(x) + o(g_n(x))$$

Причём, чем больше n, тем точнее разложение.

2.2.12 Наклонная асимптота графика[1]

Асимптоты бывают вертикальными (когда есть бесконечный предел в конечной точке), горизонтальными (когда есть конечный предел в бесконечности) и наклонными.

Всё определение в том, что наклонные асимптоты можно задать классической функцией вида $y = kx + b$.

Для общего развития: это можно даже посчитать:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} f(x) - kx$$

2.2.13 Касательная прямая к графику функции[1]

Это банально уравнение прямой в точке, где угловой коэффициент — это производная:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2.2.14 Замечательные пределы[3]

2.2.14.1 Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 0$$

Доказательство. см. 2.4.25.3 □

2.2.14.2 Следствия

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

2.2.14.3 Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство. Вспоминаем, что число e определялось как предел последовательности:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Теперь возьмем $\{x_n\} : x_n \to \infty$ и докажем, что

$$f(x_n) \to e. \tag{16}$$

1. Пусть $\forall n \; x_n \in \mathbb{N}$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и по определению e найдем K такое, что $\forall k > K |f(k) - e| < \varepsilon$, но, начиная с некоторого номера, $x_n > K$, тогда $|f(x_n) - e| < \varepsilon$ означает выполнение (16).

2. Пусть $x_n \to +\infty$, тогда, начиная с некоторого номера $x_n \geq 1$, т.е. не умалая общности можно считать, что все $x_n \geq 1$. Уменьшая или увеличивая основание и показатель степени, получим неравенства

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \leq \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1},$$

которые перепишем в виде

$$\frac{f([x_n])+1}{1+\frac{1}{[x_n]+1}} \leq f(x_n) \leq \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right) f([x_n])$$

Так как $\{[x_n]\}$ и $\{[x_n]+1\}$ - последовательные натуральные числа, стремящиеся к $+\infty$, то по пункту 1 $f([x_n]) \to e$ и $f([x_n]) + 1 \to e$. Следовательно, крайние части в неравенстве выше стремятся к e, значит и $f(x_n) \to e$

3. Пусть $x_n \to -\infty$, тогда $y_n = -x_n \to +\infty$ и $y_n - 1 \to +\infty$. Теперь пользуемся предыдущими пунктами

$$f(x_n) = \left(1 + \frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n - 1}\right)^{y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right) f(y_n - 1) \to e$$

4. Пусть $x_n \notin [-1, 0], x_n \to \infty$, а в остальном последовательность произвольна. Если число отрицательных (положительных) членов последовательности конечно, то $x_n \to +\infty(-\infty)$, то уже доказано, что $f(x_n) \to e$. Теперь, если в последовательности бесконечно много и положительных и отрицательных членов, то разобьем натуральный ряд на две подпоследовательности $\{n_k\}$ и $\{m_l\} : x_{n_k} > 0, x_{m_l} < -1$. По доказанному $f(x_{n_k}) \to e, f(x_{m_l}) \to e$. Следовательно, $f(x_n) \to e$. $\square$

2.2.14.4 Третий замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln x}, \qquad a > 1, a \neq 0$$

В частности,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Доказательство. Т.к. $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}$, достаточно доказать равенство только для натурального логарифма.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1$$

$\square$

2.2.14.5 Четвертый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$\alpha = 0$ — тривиально.

$\alpha \neq 0$. Возьмем последовательность $\{x_n\} : x_n \to 0, x_n \neq 0$. НУО $|x_n| < 1$. В силу непрерывности и строгой монотонности степенной функции $y_n = (1+x_n)^\alpha - 1 \to 0, y_n \neq 0$. При этом

$$\alpha \ln(1 + x_n) = \ln(1 + y_n)$$

Теперь используем доказанный замечательный предел

$$\frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1+y_n)} \alpha \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} \to \alpha.$$

$\square$

2.2.14.6 Пятый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} \ln a \qquad a > 0$$

В частности,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Доказательство.

$a = 0$ — тривиально.

$a \neq 0$. Возьмем последовательность $\{x_n\} : x_n \to 0, x_n \neq 0$. НУО $|x_n| < 1$. В силу непрерывности и строгой монотонности степенной функции $y_n = a^{x_n} - 1 \to 0, y_n \neq 0$. При этом

$$x_n \ln a = \ln(1 + y_n)$$

Снова врубаем замечательные пределы выше

$$\frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1 + y_n)} \ln a \to \ln a.$$

$\square$

2.3 Важные теоремы

2.3.1 Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$[1]

Формулировка
Эти определения эквивалентны:

1. K ограничено и замкнуто
2. K компактно
3. Из любой последовательности в K можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой $\in K$

Доказательство
$1 \Rightarrow 2$ $\triangleright$ Если K ограничено, то существует замкнутый параллелепипед, в который можно его засунуть. По простейшим свойствам компактов, замкнутое подмножество компакта компактно, а сам параллелепипед компактен по лемме. $\triangleleft$

$2 \Rightarrow 3$ $\triangleright$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in K$ - какая-то последовательность.Рассмотрим область значений этой последовательности D. Если она конечна, то мы можем выбрать стационарную подпоследовательность (когда-то же значения начнут повторяться).

Если она бесконечна, то рассмотрим предельные точки K. Если они есть, то они в ней содержатся (remember, K компактно $\Rightarrow$ замкнуто). Пойдём от противного: если их нет (а D бесконечна), то мы имеем дело с бесконечным числом изолированных точек, что уже звучит жестоко.

А теперь главный мув: мы сможем найти такое открытое покрытие множества, что каждая такая изолированная точка будет покрыта своим персональным множеством (оно будет открыто, т.к. окрестность этой точки нам включать можно, но в нём будет только сама эта точка). Поскольку у нас их бесконечное число, то конечного подпокрытия не существует 0_0. Противоречие!

Так, а что если предельные точки есть? Ну так всё просто - уменьшаем ε и в новой уменьшенной окрестности добавляем точку последовательности. Получается, она как раз к этой точке и стремится $\triangleleft$

$3 \Rightarrow 1$ $\triangleright$ Докажем от противного:

Пусть K неограниченно. Тогда $\exists \{x_n\} \to \infty$. Мы знаем, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности стремится туда же. $\infty \notin x_n$. Противоречие!

Пусть K незамкнуто. Тогда $\exists a$ — предельная точка, $\notin K$. Тогда $\exists \{x_n\}$, стремящаяся к этой предельной точке. Такая же проблема. $\triangleleft$

2.3.2 Теорема о пределе монотонной функции[1]

Формулировка
$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Рассмотрим предельную точку $x_0 \in (-\infty, +\infty]$. Левая не включена, а правая включена, т.к. мы хотим рассмотреть левый предел на $\mathbb{R}$ без черты. (Для правого всё аналогично).

1. Если f возрастающая и ограничена сверху на $(-\infty, x_0) \cap D$, то существует конечный предел $\lim_{x \to x_0 - 0}$.

2. Если f убывающая и ограничена снизу на $(-\infty, x_0) \cap D$, то существует конечный предел $\lim_{x \to x_0 - 0}$.

Доказательство

$\triangleright$

$D_1 := (-\infty, x_0) \cap D$

На самом деле, то, что мы отрезали всё, что справа от x_0 (левый предел) — это нам сильно поможет, т.к. мы теперь можем тупо взять sup и доказать, что он и является нашим пределом.

$$\exists k := \sup_{x \in D_1} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists a \in D_1 : f(a) \in (k - \varepsilon, k)$$

Ну а поскольку f монотонно возрастает, $\forall x \in (a, x_0) \quad f(x) \in (k - \varepsilon, k)$

Следим за руками: мы только что для какого-то ε предъявили дельту ($|a - x_0|$), внутри которой выполняется условие предела. Поздравляю всех, мы нашли предел!

$\triangleleft$

2.3.3 Теорема о замене на эквивалентную при вычислении пределов. Таблица эквивалентных[2]

Формулировка

X — метрическое пространство, $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \subset X \to \mathbb{R}(\mathbb{C}), x_0$ — предельная точка D.

$$f(x)\ \tilde{f}(x), \quad g(x)\ \tilde{g}(x) \qquad x \to x_0$$

Тогда справедливо следующее:

1. $$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

2. Если x_0 — предельная точка области определения $\frac{f}{g}$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

Доказательство

$\triangleright$

По определению эквивалентности, $f = \varphi\tilde{f}$ и $g = \psi\tilde{g}$, где на неких V_{x_0} и U_{x_0} : φ и ψ стремятся к 1. Тогда на $W_{x_0} = V_{x_0} \cap U_{x_0}$ φ и ψ стремятся к 1. Значит, на $W_{x_0} \cap D$ выполняется $fg = (\varphi\psi)\tilde{f}\tilde{g}$. Тогда по теореме об арифметических свойствах предела, предел $\lim_{x \to x_0} fg = A$ (если существует). Аналогично, $\lim_{x \to x_0} \tilde{f}\tilde{g} = A$ (если существует, однако верно и если и там и там не существует). Для частного — то же самое, только $W_0 \cap D$ надо ещё сузить, чтобы $\varphi\psi$ не обращалось в 0.

$\triangleleft$

2.3.4 Теорема о топологическом определении непрерывности[2]

Формулировка

X, Y — топологические пространства, $f : X \to Y$.

Отображение непрерывно $\Leftrightarrow$ прообраз любого открытого множества открыт. $\forall G \in Y : f^{-1}(G)$ — открытое множество в X.

Доказательство

$\triangleright$

$\Leftarrow$

Если прообраз пуст, то всё ништяк, т.к. открытое множество — открытое. Если же не пустое, то $f(x) = y$, если $y \in G$, то $x \in f^{-1}(x)$. Значит, по определению непрерывности отображения в точке x в терминах окрестностей $\forall V_y\ \exists \dot{V}_x : f(\dot{V}_x \cap D) \subset V_y)$. Тогда по нашим условиям, $V_y \subset G$, т.к. y — внутренняя, то есть входит с окрестностью. Тогда, $\dot{V}_x \subset f^{-1}(V_y) \subset f^{-1}(G) \Rightarrow f^{-1}(G)$ — открытое.

$\Rightarrow$

Пусть $f(x_0) = y$, тогда $\forall V_y$ — открытое, тогда $f^{-1}(V_y)$ — тоже открытое и содержит x_0 (только что доказали). Значит, $\forall V_y\ \exists \dot{V}_{x_0} : f(\dot{V}_{x_0} \cap D) \subset V_y$. Тогда по определению, f — непрерывно.

$\triangleleft$

2.3.5 Теорема Вейерштрасса о непрерывном образе компакта. Следствия[2]

Формулировка

X, Y — метрические пространства. $f : X \to Y, f$ — непрерывно на X. Тогда, если X — компактен, то и $f(X)$ — компакт.

Доказательство

$\triangleright$

Пусть $f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, где G_α — открыты в Y. По теореме о топологическом определении непрерывности, $f^{-1}(G_\alpha)$ — открытое. Так как X — компактен, то среди прообразов множеств этого открытого покрытия $f^{-1}(G_\alpha)$ мы сможем выбрать конечное подпокрытие X. А раз сможем выбрать конечное подпокрытие, состоящее из прообразов, то и конечное покрытие из образов тоже сможем. Значит, из первоначального открытого покрытия образа $f(X)$ возможно выбрать конечное подпокрытие. А значит, что $f(X)$ — компактен.

$\triangleleft$

Следствия

1. Непрерывный образ замкнут и ограничен (а вот и Джонни!) по характеристикам компактов (наверное)
2. **(1 теорема Вейерштрасса):** Функция, непрерывная на отрезке — ограничена.
3. X — компактно. $f : X \to \mathbb{R}, f$ — непрерывно на X. Тогда $\exists \min_{x \in X} f(x), \max_{x \in X} f(x)$

   Доказательство

   Ну, во первых, $f(X)$ — компактно, а, следовательно, замкнуто и ограничено. Логично, что $\exists \sup f(X) = b$. Осталось проверить, что $\max = b$. $b \in f(X)$ т.к. оно замкнуто. Теперь докажем, что супремум равен максимуму. По техническому определению супремума, $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n : b - \frac{1}{n} < x_n \le b$. (тут мы взяли вместо $\varepsilon : \frac{1}{n}$, видимо, просто для удобства. Раз для этой херни всё сломается — то для произвольного ε уж и подавно). Ну и вот, по построению и по теореме о двух городовых, x_n стремится к b. Получается, что в замкнутом множестве действительно максимум есть и он равен супремуму. Для минимума аналогично.

4. **(2 теорема Вейерштрасса):** $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f$— непрерывное на X, $\exists \min\limits_{x \in X} f(x), \max\limits_{x \in X} f(x)$

2.3.6 Теорема Больцано–Коши о промежуточном значении[1]

Формулировка
$f \in C(\mathbb{R} \to \mathbb{R}), f(a) = A, f(b) = B, A < B$

$$\forall C \in (A, B) \exists c \in (a, b) : f(c) = C$$

Доказательство
Бинпоиск)

Возьмём $c := \frac{b-a}{2}$. Рассмотрим $[a, c]$ и $[c, b]$. Если $f(c) = C$, то мы выиграли .

Иначе, если $f(c) > C$, возьмём $c' := \frac{c-a}{2}$, рассмотрим $[a, c']$

Иначе, если $f(c) < C$, возьмём $c' := \frac{b-c}{2}$, рассмотрим $[c', b]$

Продолжим этот процесс рекурсивно. Если мы искомой точки не найдём никогда, мы получим последовательность стягивающихся отрезков $\{[a_n, b_n]\}$. Для каждого из них верно то, что $a_n < c < b_n$ По теореме Кантора, у их пересечения есть единственная общая точка. Следовательно, эта точка и есть искомая $c : f(c) = C$

2.3.7 Теорема о непрерывности монотонной функции. Следствие о множестве точек разрыва[1]

Формулировка
$f : \langle a, b \rangle \to R$ монотонна

1. f не может иметь разрывов второго рода
2. $f(\langle a, b \rangle)$ промежуток $\Leftrightarrow f$ непрерывна

Доказательство

1. $\triangleright$ Итак, не умаляя общности положим, что f возрастает, и (также не умаляя общности) докажем существование левого предела в точке $x_0 \in (a, b)$

   Возьмём точку $x_1 \in (a, x_0)$. Зачем? Чтобы потом оценить снизу конечным числом, без бесконечностей. +понадобится во 2 пункте.

   По теореме о пределе монотонной функции (она у нас ограничена сверху на (a, x_0)), $\exists$ конечный левый предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0-)$

   Получается, $f(x_1) \le f(x_0-) \le f(x_0)$ (сделали предельный переход). Вообще эта строчка вроде не особо нужна, т.к. мы уже как бы доказали, что есть конечный односторонний предел.

Аналогично доказывается правый предел. $\Rightarrow$ правого разрыва не существует. $\triangleleft$

2. $\triangleright$ $\Leftarrow$ Уже доказано в Теорема о сохранении промежутка[1]

   $\Rightarrow$

   Ну, положим она таки не непрерывна. Тогда $\exists x_0 : \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq f(x_0)$ (опять не умаляя общности положим, что проблема именно с левым пределом. Для правого всё аналогично.

   По монотонности мы знаем, что $\forall x < x_0 \quad f(x) \leq f(x_0)$. Ну а т.к. множество значений — промежуток, то $\forall y \in (f(a), f(x_0)) \exists x \in (a, x_0) : f(x) = y$.

   То, что левый предел конечен мы уже знаем. По монотонности, если он не равен $f(x_0)$, то он $< f(x_0)$

   Отлично, теперь у нас $f(x_1) < f(x_0-) < f(x_0)$. Возьмём какой-нибудь $y \in (f(x_0-), f(x_0))$ (он существует по аксиоме Архимеда). И теперь давайте проверим, в какой части нашего интервала области значений он лежит:

   Попробуем $\langle a, x_0)$. Получим промежуток $\langle f(a), f(x_0-)]$. **ОЙ!** Но ведь y строго $> f(x_0-)$

   Так, у нас осталось попробовать промежуток $[x_0, b\rangle$. Получим $[f(x_0), f(b)\rangle$. **ОЙ!** y снова потерялся, т.к. он $< f(x_0)$

   Делаем вывод: мы покрыли всю область определения и значений в виде интервала, но наш y туда не вошёл ☹☹☹

   Получили противоречие, следовательно $f(x_0-) = f(x_0)$. Для правого всё то же самое. $\triangleleft$

2.3.8 Теоремы Лагранжа и Коши. Следствия об оценке приращения и о пределе производной[2]

Формулировка

Лагранж:

$f :< a, b >\to \mathbb{R}$, непрерывна и дифференцируема на (a, b). Тогда $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Коши:

$f, g :< a, b >\to \mathbb{R}$, непрерывны и дифференцируемы на $(a, b), g' \neq 0$ на (a, b). Тогда $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство

$\triangleright$

$F(x) = f(x) - kg(x)$. Подберём k, чтобы $F(a) = F(b)$.

$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \Rightarrow k = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$, причём $g(a) - g(b)$ не равно нулю по условию и по теореме Ролля (иначе производная обращалась бы в ноль). Тогда по теореме Ролля для $F \exists c \in (a, b) : F'(x) = 0 \Rightarrow F'(c) = f'(x) - kg'(x) = 0 \Rightarrow k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

$\triangleleft$

Следствия

Условия все те же

1. Если $|f'(x)| \leq M$, то $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$

   Доказательство: врубаем Лагранжа: $\frac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|} = |f'(c)| \Rightarrow |f(b) - f(a)| = |f'(c)| * |b - a| \leq M * |b - a|$

2. Если $f : [x_0, x_0 + h]$, дифференцируема и непрерывна на $[x_0, x_0 + h\rangle$, $\exists \lim_{x \to x_0 + 0} f'(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда $\exists f'_+(x_0) = A$

   Доказательство: $\Delta > 0 : f'_+(x_0) = \lim_{\Delta \to +0} \frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} f'(c_\Delta) = A$, где $x_0 < c_\Delta < x_0 + \Delta$

2.4 Теоремы

2.4.1 Теорема об открытых и замкнутых множествах в пространстве и в подпространстве[2]

Формулировка

X, Y - ПРОСТРАНСТВА!!!!!

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. $D \subset Y \subset X$.

1. D открыто в $Y \Leftrightarrow \exists G$ — открытое в $X : D = G \cap Y$
2. D замкнуто в $Y \Leftrightarrow \exists F$ — замкнутое в $X : F = G \cap Y$

Доказательство

$\triangleright$

1) $\Leftarrow$

Пусть дано G — открытое в $X : D = G \cap Y$. Возьмём $a \in D$. Так как G открыто в X, получается, что $\exists V_a^X$. Тогда $V_a^Y = V_a^X \cap Y$ — окрестность a в Y. Получается, a — внутренняя в D. А так как мы выбрали точку a случайно, то D — открытое в Y.

$\Rightarrow$

$a \in D, D$ — открыто в Y, следовательно, существует $V_a^Y = B_a^Y \subset D \subset Y$. Тогда давайте обозначим $G = \bigcup_{a \in D} B_a^X$ (пока непонятно зачем, но скоро станет). Заметим, что G — открытое в X, так как объединяются открытые шары, которые, как известно, открыты. Тогда проверим:

$$G \cap Y = \left(\bigcup_{a \in D} B_a^X \right) \cap Y \underset{\text{законы де Моргана}}{=} \bigcup_{a \in D} B_a^X \cap Y = \bigcup_{a \in D} B_a^Y = D$$

Ура, получилось, всё канает!

2) По доказанному ранее и по связи замкнутых и открытых множеств, замкнутость D в Y равносильна открытости $Y \setminus D$ в Y.

Тогда по доказанному ранее $\exists F$ — замкнутое в $X : F = G \cap Y \Leftrightarrow \exists G$ — открытое в $X : Y \setminus D = G \cap Y$. Заметим, что $Y \setminus D = G \cap Y \Leftrightarrow D = F \cap Y (G = F^c)$ $\triangleleft$

2.4.2 Теорема о компактности в пространстве и в подпространстве[2]

Формулировка

Пусть (X, ϱ) — метрическое пространство. $K \subset Y \subset X$, причём K компактно в Y. Тогда компактность K в Y равносильна компактности в X.

Доказательство

$\Leftarrow \triangleright$ Пусть K компактно в X. Тогда возьмём покрытие множествами V_α такими, что они открыты в Y. Тогда для каждого такого множества будет верно (по предыдущей теореме) $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$, где G_α открыто в X. Тогда:

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Тогда извлечём из G_α конечное подпокрытие : $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_\alpha$ Но, тогда по приведённому выше и т.к. $K \subset Y$:

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} (G_\alpha \cap Y) = \bigcup_{k=1}^{n} V_\alpha$$

Значит, существует конечное открытое подпокрытие K в Y. $\lhd$

$\Rightarrow$ $\rhd$ Возьмём покрытие K в Y : G_α, причём G_α — открытые в X. По предыдущей теореме $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$, причём V_α открыты в Y. Тогда выберем конечное подпокрытие $Y_{k}{}_{k=1}^{n}$ (в силу компактности K в Y). А так как $V_k \subset G_k$, то существует открытое конечное подпокрытие в X, следовательно, K компактно в X. $\lhd$

2.4.3 Простейшие свойства компактных множеств[2]

Формулировка

(X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$

1) Если K — компактно, то оно замкнуто и ограничено.

2) Если X — компактно, а K — замкнуто, K — компактно.

Доказательство

1) $\rhd$ Докажем, что K^c — открыто, тогда будет логично, что K — замкнуто. $a \in K^c$, докажем, что a — внутренняя. Для $\forall q \in K$ положим $r = \frac{\rho(a,q)}{2}$ и введём $V_a = B(a, r)$ и $W_q = B(q, r)$. $V_a \cap W_q = \varnothing$. Тогда $\{W_q\}_{q \in K}$ — открытое покрытие компакта K. Извлекаем конечное подпокрытие $\{W_k\}_{k=1}^{n}, K \subset \bigcup_{k=1}^{n} = W$, причём $\bigcap_{k=1}^{n} V_a = V$ — окрестность точки А. Но, $V \cap W = \varnothing$, а уж тем более, $V \cap K = \varnothing$. Значит, a — внутренняя точка K^c.

Теперь докажем, что K — ограничено. Возьмём $a \in X$ и рассмотрим покрытие K открытыми шарами $\{B(a, r_i)\}_{i=1}^{\infty}$. Извлечём из него конечное подпокрытие $\{B(a, r_i)\}_{i=1}^{n}$. Тогда логично, что K содержится в шаре $B(a, \max_{i=1}^{n} r_i)$, а, следовательно, ограничено.

$\lhd$

2) $\rhd$ Возьмём открытое покрытие множества K : $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Логично, что $G_\alpha \cup K^c$ образуют открытое покрытие X (т. к. K^c — открыто, в силу замкнутости K). Извлечём из него конечное подпокрытие $\{G_k \cup K^c\}_{k=1}$. Но, оно же и будет конечным открытым покрытием для K! Значит, оно — компактно $\lhd$

2.4.4 Лемма о вложенных параллелепипедах[1]

Формулировка $a, b \in R^m$, $\{[a^{(i)}, b^{(i)}]\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность вложенных m-мерных параллелепипедов

$$\forall k \in [1, m] \, \forall i \quad a_k^{(i)} \le a_k^{(i+1)} \le \ldots \le b_k^{(i+1)} \le b_k^{(i)}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [a^{(i)}, b^{(i)}] \neq \varnothing$$

Доказательство

$\triangleright$ Тривиально. По аксиоме Кантора, пересечение каждого отрезка (мы рассматриваем покоординатно параллелепипеды как набор вложенных отрезков) непусто. Следовательно, пересечение многомерного случая непусто. $\triangleleft$

2.4.5 Компактность замкнутого параллелепипеда в $\mathbb{R}^m$[1]

Формулировка
Замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^m$ компактен.

Доказательство
Summary: Хотим свести к задаче на вложенные параллелепипеды от противного.

$\triangleright$Положим, он не компактен. Тогда разобъём его покоординатно на пополам (каждое ребро посередине). Получим 2^m параллелепипедов. Верхняя оценка его размеров (диагональ) λ уменьшится в 2 раза.

Поскольку, он некомпактен, существует какая-то из этих частей, не являющаяся компактной. Тогда повторим описанную процедуру с ней рекурсивно и получим бесконечную последовательность вложенных некомпактных параллелепипедов.

Вуаля, предыдущая лемма только что нам говорила, что пересечение этого семейства непусто, а т.к. покрытие его открыто, то любая точка входит вместе с какой-то окрестностью.

А поскольку $\lambda \to 0$, мы можем подобрать такое N, что $\forall n > N$ вложенный параллелепипед будет полностью покрыт одной этой окрестностью. $\triangleleft$

2.4.6 Эквивалентность определений Гейне и Коши[2]

Формулировка

Определения по Коши и Гейне — эквивалентны. (swag)

Доказательство

1) Пусть A — предел f в точке a по Коши. Тогда докажем, что A — также и предел по Гейне. Вспомним определение Коши: $\forall \varepsilon > \ \exists \delta > 0 : \rho_X(x, a) < \delta : \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$. Тогда давайте подгоним определение по Гейне под условие для δ и тогда по Коши всё будет работать! Таким образом, $\forall \{x_n\}, x_n \in D \setminus \{a\}, x_n \to a$. По определению предела **последовательности** (опять по Коши, bruh), $\forall \varepsilon = \delta > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, a) < \delta$. Ура, всё работает! Значит и условие $\rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$ тоже работает, и всё шикарно!

2) У нас есть предел по Гейне. Докажем, что он же и по Коши! Докажем это от противного: пусть это не так. Отрицнём определение по Коши, тогда утверждается, что если предела не существует, то $\rho(f(x), A) \geq \varepsilon^*$. Тогда, пусть $\delta = \frac{1}{n}$ для каждого $n \in \mathbb{N} : x_n \in D \setminus \{a\}, \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n} : \rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon^*$ (так как мы отрицнули, это обязано так работать, то есть для каждого нашего δ обязательно найдётся такое n). Давайте теперь рассмотрим, собственно говоря, саму $\{x_n\}$. По теореме о 2 городовых $0 < \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n}$ при : $x_n \to_{n\to\infty} a$. Тогда по Гейне, $f(x_n) \to A$. Но тогда по определению предела последовательности $\{f(x_n)\}$ по Коши, для ε^* существует такой $n \in \mathbb{N}$, что $\rho(f(x_n), A) < \varepsilon^*$. Опачки, а мы строили диаметрально противоположно Значит, это туфта, и A таки предел и по Коши!

2.4.7 Единственность предела, локальная ограниченность отображения, имеющего предел, теорема о стабилизации знака[2]

BASED: X, Y — метрические пространства, $f : D \subset X \to Y$

2.4.7.1 Единственность предела

Формулировка

a — предельная точка D. $A, B \in Y, f(x) \to_{x \to a} A$ и $f(x) \to_{x \to a} B \Rightarrow A = B$.

Доказательство

$\triangleright$

По Гейне. $\forall \{x_n\} \subset D \backslash \{a\}, x_n \to a, f(x_n) \to A$. По теореме о единственном пределе для последовательностей $f(x_n) \to A = B$

$\triangleleft$

2.4.7.2 Локальная ограниченность отображения, имеющего предел

Формулировка

Существует такая окрестность точки a V_a, что $f(V_a \cap D) \subset B^Y$

Доказательство

$\triangleright$

Давайте возьмём $B(A, 1) \subset Y$ и рассмотрим 2 случая. Пусть $a \notin D$, тогда по определению на языке окрестностей найдётся такая $\dot{V}_a$, что $f(\dot{V}_a \cap D = V_a \cap D) \subset B(a, 1)$. Если же $a \in D$, тогда просто увеличим радиус до $R = 1 + \rho(f(a), A)$ и тогда точно $f(V_a \cap D) \subset B(A, R)$

$\triangleleft$

2.4.7.3 Теорема о стабилизации знака

Формулировка

$\exists B \neq A \in Y : \forall x \in \dot{V}_a \cap D : f(x) \neq B$

Доказательство

$\triangleright$

Ох, хорошо жилось без него, но всё же вспомним старину Коши! $\forall \varepsilon > 0 : \rho(f(x), A) < \varepsilon$. Так возьмём же такой $\varepsilon < \rho(f(x), B)$ и увидим, что всё шикарно работает!

$\triangleleft$

Следствие для $\mathbb{R}$

$f(x) > 0$ при $A > 0$ (и наоборот для отрицания!)

2.4.8 Арифметические свойства пределов отображений. Формулировка для R с чертой[2]

BASED: X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство, a — предельная точка D, $f, g : D \subset X \to Y;\ A, B \in Y\ f(x) \to A, g(x) \to B$

Формулировка

Все эти пределы существуют при $x \to a$:

1. $f(x) + g(x) \to A + B$
2. $f(x)g(x) \to AB$
3. $f(x) - g(x) \to A - B$
4. $\lambda(x)f(x) \to \lambda A$
5. $||f(x)|| \to ||A||$
6. *для* $\mathbb{R}$ $|f(x)| \to |A|$
7. *для* $\mathbb{R}$ *и* $B \neq 0$ $\frac{f(x)}{g(x)} \frac{A}{B}$

Доказательство

😊😊😊😊

По Гейне!!!! (и доказанным для последовательностей свойствам).

Например, для 1: $\forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\}, x_n \to a$. Тогда $f(x_n) \to A, g(x_n) \to B \Rightarrow f(x_n) + g(x_n) \to A + B$

Остальное аналогично.

(Единственное, нужно отметить, что для (7) важно, что функция определена как минимум на $\dot{V}_a \cap D$)

Формулировка для $\overline{\mathbb{R}}$

1, 2, 3, 6, 7 — верны также и в $\overline{\mathbb{R}}$, если это имеет смысл (не возникают неопределённости)

2.4.9 Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса[1]

Формулировка

В R^m из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство

$\triangleright$ Поскольку последовательность ограничена, то $\exists$ замкнутый параллелепипед I, в который мы можем её запихать $\Rightarrow$ это параллелепипед компактен (см. Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^{m}$[1]) $\Rightarrow \forall \{x_n\} \exists \{n_\alpha\} : x_{n_\alpha} \to a \in I \triangleleft$

2.4.10 Сходимость в себе и её свойства[1]

Формулировка

Последовательность сходится в себе, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, : \forall n, l > N \quad \rho(x_n, x_l) < \varepsilon$$

Синонимы: последовательность Коши, фундаментальная последовательность

Свойства:

1. В любом метрическом пространстве сходящаяся последовательность сходится в себе
2. Но наоборот это работает только в $\mathbb{R}^m$ (сходящаяся в себе сходится)

Доказательство

$\triangleright$

1. $$x_n \to a$$
   $$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\ :\ \forall n, \underset{\text{допишем}}{l} > N \quad \rho(x_n, a), \rho(x_l, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$
   $$\rho(x_n, x_l) \le \rho(x_n, a) + \rho(a, x_l) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. *Summary:* Доказать ограниченность, по Больцано-Вейерштрасса найти сходящуюся подпоследовательность, доказать, что исходная тоже сходится по 2 определениям

   $$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\ :\ \forall n, l > N \quad |x_n - x_l| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{17}$$
   $$\varepsilon := 1,\ \text{тогда}\, B(x_{N+1}, \max(1, x_1, x_2, \dots, x_N)) \supset \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow x_n\ \text{огр.} \underset{\text{ПВБВ}}{\Rightarrow} \exists n_k\ :\ x_{n_k} \to a$$
   $$\forall \varepsilon > 0\, \exists K\ :\ \forall k > K \quad |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{18}$$
   $$M := \max(N+1, K+1)$$

   Вот здесь важно. Мы выбрали M как индекс ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, для которого верно всё-всё-всё

   Т.к. n_k возрастает, первые N элементов как минимум покрывают первые N элементов исходной последовательности.

   $n_M \ge n_{N+1} \ge N + 1 \Rightarrow$ (16) выполняется и для x_{n_M}. Подытожим:
   $$|x_n - a| \underset{\text{треугольник}}{\le} |x_{n_M} - x_n| + |x_{n_M} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   P.S. ПВБВ — Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса[1]

$\triangleleft$

2.4.11 Критерий Коши для последовательностей и отображений[1]

Формулировка

Те же свойства сходимости в себе, но уже про отображения.

$\exists X, Y$ — метрическое пространство. Y полное (reminder: это значит, что в нём сходимость последовательности в себе равносильна сходимости к конечному пределу (в обе стороны)).

Критерий Коши утверждает, что отображение $f : D \subset X \to Y$ сходится в себе $\Leftrightarrow$ сходится к конечному пределу A. Разумеется, в предельной точке a

Доказательство

$\Rightarrow$

$\triangleright$

Задача перейти к последовательностям любой ценой. Если бы у нас уже был конечный предел, то сработало бы "по Гейне". Сейчас всё сложнее. Запишем определение "сходимости в себе":

$$\forall \varepsilon > 0 \exists V_a \subset D : \forall x, x' \in V_a \quad \rho(x, x') < \varepsilon$$

Теперь надо как-то получить из этого последовательность прообразов, стремящуюся к a

$$\{x_n\} \to a$$

Для этой последовательности мы можем найти такое N, что все точки будут лежать в любой окрестности V_a, а значит, расстояние между образами любых 2 элементов этой последовательности будет $< \varepsilon$. Другими словами, последовательность образов $f(x_n)$ и будет сходиться в себе, а там уже всё доказано в Сходимость в себе и её свойства[1]

$$\exists N : \forall n > N \quad x_n, x_l \in V_a \Rightarrow \rho(f(x_n), f(x_l)) < \varepsilon \Rightarrow \{f(x_n)\} \text{ сходится в себе}$$

$\triangleleft$

$\Leftarrow \triangleright$

Вообще по идее можно проще (в 2 слова): по Гейне :)

$$\forall V_A \subset Y\, \exists V_a \subset D : \forall x_n, x_l \in V_a \quad f(x_n), f(x_l) \in \dot{V}_A$$
$$\rho(f(x_n), f(x_l)) \leq \rho(f(x_n), A) + \rho(f(x_l), A) = \varepsilon$$

$\triangleleft$

2.4.12 Свойства непрерывных отображений: арифметические, стабилизация знака, композиция[1]

2.4.12.1 Арифметические

Формулировка

X — метрическое, Y — нормированное, $\lambda \in \mathbb{R}$

$f, g : D \subset X \to Y$

$f + g, f - g, \lambda \cdot f, ||f||$ непрерывны.

Доказательство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Теперь арифметические свойства отображений:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0)$$

А это в точности определение непрерывности. Если x_0 предельная — то это всё работает без изменений. А если изолированная, то там вообще можно смотреть тупо на саму точку, т.к. в окрестности всё-равно ничего не определено. Остальная арифметичка аналогично.

2.4.12.2 Стабилизация знака

Формулировка
$f : D \to \mathbb{R}, \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\forall x_0 \in D \setminus \{0\} \exists V_{x_0} : \forall x \in V_{x_0} \quad \operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x_0)$$

Доказательство
По Гейне $x_n \to x_0 \quad f(x_n) \to f(x_0)$

Далее вставляем определение на окрестностях для сходящейся последовательности. Говорим, что $\varepsilon := f(x_0)/2$ И получаем такую окрестность, что все элементы лежат по одну сторону от нуля в этой окрестности.

ИМХО у Виныча сложнее

2.4.12.3 Композиция

Формулировка
X, Y, Z — метрические пространства. $D \subset X, E \subset Y$

$f : D \to Y, f(D) \subset E, g : E \to Z, f(x)$ непрерывно в $x_0, g(x)$ непрерывно в точке $f(x_0)$. Тогда $g(f(x))$ Непрерывно в x_0

Доказательство
$\triangleright$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow x_n \to x_0, \quad f(x_n) \to f(x_0)$$

$$\lim_{x\to f(x_0)} g(x) = g(f(x_0)) \Rightarrow y_n \to f(x_0) \quad g(y_n) \to g(f(x_0))$$

Заметим, что $f(x_n)$ как раз стремится к $f(x_0)$. Тогда мы можем в качестве y_n взять $f(x_n)$ и всё выполнится: $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$. Это как раз определение по Гейне для того, что мы хотим получить. $\triangleleft$

2.4.13 Непрерывность композиции и соответствующая теорема для пределов[1]

2.4.13.1 Непрерывность композиции
см. Композиция

2.4.13.2 Предел композиции

Формулировка
$f : D \subset X \to Y, g : E \subset Y \to Z$

$f(D) \subset E$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

$$\lim_{x\to A} g(x) = B$$

$$\exists U_{x_0} : \forall x \in U_{x_0} \quad f(x) \neq A \,\text{(а вдруг g(A) не определено?)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B$$

Доказательство
По Гейне)

$\triangleright$

$x_n \to x_0 \quad f(x_n) \to A$
$y_n \to A \quad g(y_n) \to B$
Действительно, в качестве y_n прекрасно подходит $f(x_n)$, т.к. он $\to A$
$f(x_n) \to A \quad g(f(x_n)) \to B$

$\triangleleft$

2.4.14 Теорема единственности асимптотического разложения[2]

Формулировка

Пусть X — метрическое пространство, $f : D \subset X \to \mathbb{R}(\mathbb{C}), x_0 \in D$ — предельная точка. $n \in \mathbb{Z}_+, k \in [0 : n], g :\to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Задана такая система функций $\{g_k\}$ и $\forall V_{x_0}\ \exists t \in \dot{V}_{x_0} \cap D\ : g_n(t) \neq$. Тогда если существует асимптотическое разложение по системе функций $\{g_k\}$, то оно единственно. Иными словами, в разложениях

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x) + o(g_n(x)) \tag{19}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k g_k(x) + o(g_n(x)) \tag{20}$$

Тогда $c_k = d_k$.

Доказательство

$\triangleright$

Вот тут мы доказываем странную вещь, я её сам до конца ещё не осознал

Во-первых, $\forall l < r : g_r = o(g_l)$ (по индукции). Во-вторых, обозначим за $E_k = \{x \in D, g_k(x) \neq 0\}$. И тогда если бы $g_k(x)$ обращалось бы в тождественный 0, то и её φ тоже бы обращалось в 0 (из определения о-малого) на $\dot{V}_a \cap D$. И раз оно не обращается (противоречит условию), то для всех kx_0 — предельная точка для E_k.

А тут норм доказательство

Пойдём от противного. А пусть это не так. Тогда возьмём самый маленький $k : c_k \neq d_k$ и вычтем соответствующие уравнения (18) и (19).

$$0 = (c_k - d_k) g_k(x) + o(g_k(x))$$

поделим на $g_k(x)$

$$d_k - c_k = \frac{o(g_k(x))}{g_k} = o(1)$$

Следовательно, $c_k = g_k$ (не существует такого индекса).

$\triangleleft$

2.4.15 Теорема о вписанном n-угольнике максимальной площади[2]

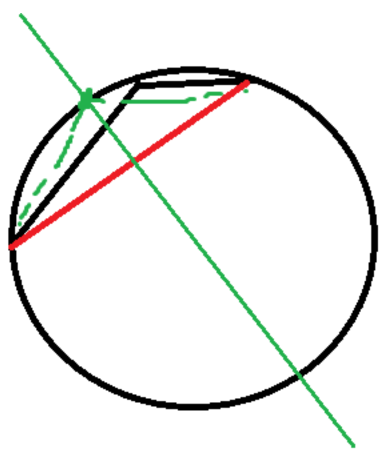
Формулировка

Пусть дана окружность радиуса R. Тогда набольшее по площади, что мы туда из фигур с n сможем запихнуть, будет правильный n-многоугольник.

Доказательство

$\triangleright$

Вот возьмём произвольный вписанный многоугольник. Если его стороны не равны, то проведём хорду через вершины точек и выберем точку, максимально удалённую от форды и лежащую на окружности. По сути, заменим на равные стороны.



Короче, на данном моменте мы убедились, что максмальная площадь вписанного n-угольника достигается при его ♂правильности♂. Теперь осталось убедиться, что этот максимум вообще достигается.

Заведём функцию для площади многоугольника через центральные углы:

$$S(x) = S(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} R \sin \alpha_i$$

Тогда, заметим, что $0 \le \alpha_i \le \pi$, а так же функцию мы сотворили путём проведения преобразований над элементарными функциями (непрерывными) $\sin \alpha \to R \sin \alpha \to \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} R \sin \alpha_i$ то и наша функция является непрерывной (по арифм. свойствам). Заметим также, что множество наших векторов аргументов ограничено. Так же оно замкнуто (у нас все ограничения нестрогие). Поэтому множество аргументов — компакт. А значит, его образ — тоже и достигает максимума.

◁

2.4.16 Лемма о связности отрезка[2]

Формулировка

$\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ — отрезок. Тогда неверно, что $\exists V, U \subset R$ — открытые множества, такие что:

1. $U \cap V = \varnothing, U \neq \varnothing, V \neq \varnothing$
2. $\langle a, b\rangle \subset U \cup V$
3. $\langle a, b\rangle \cap U \neq \varnothing$ и $\langle a, b\rangle \cap V \neq \varnothing$

Доказательство

▷

От противного. Пусть $\langle a, b\rangle \subset U \cup V, \alpha \in \langle a, b\rangle \cap U, \beta \in \langle a, b\rangle \cap V$. Тогда пусть $\alpha < \beta$ (♂не умоляя общности♂).Теперь положим $t = \sup y : [\alpha, y) \subset U$. Заметим, что множество, из которого мы берём экстремум непустое ($U \neq \varnothing, U$ — открытое $\rightarrow \exists [\alpha, y) \subset B_\alpha \subset U$) и ограниченное ($U \cap V = \varnothing, y \in U \Rightarrow y < \beta$). Причём, раз $t \in [\alpha, \beta) \Rightarrow \langle a, b\rangle$. Если $t \in U \Rightarrow \exists V_t \subset U$, а мы строили множество границ так, что не существует такой окрестности. Если $t \in V$, то $\exists V_t \subset V$. Но тогда не весь промежуток $[\alpha, \beta)$ входит внутрь U, т.к. мешает как раз вот эта V_t. Следовательно, существуют точки, которые не накрываются ни одним отрезком.

◁

2.4.17 Теорема о бутерброде[2]

Формулировка

Кусок колбасы и хлеба (фигуры $A, B \subset \mathbb{R}^2$) можно разрезать ножом (прямой) на части равной площади.

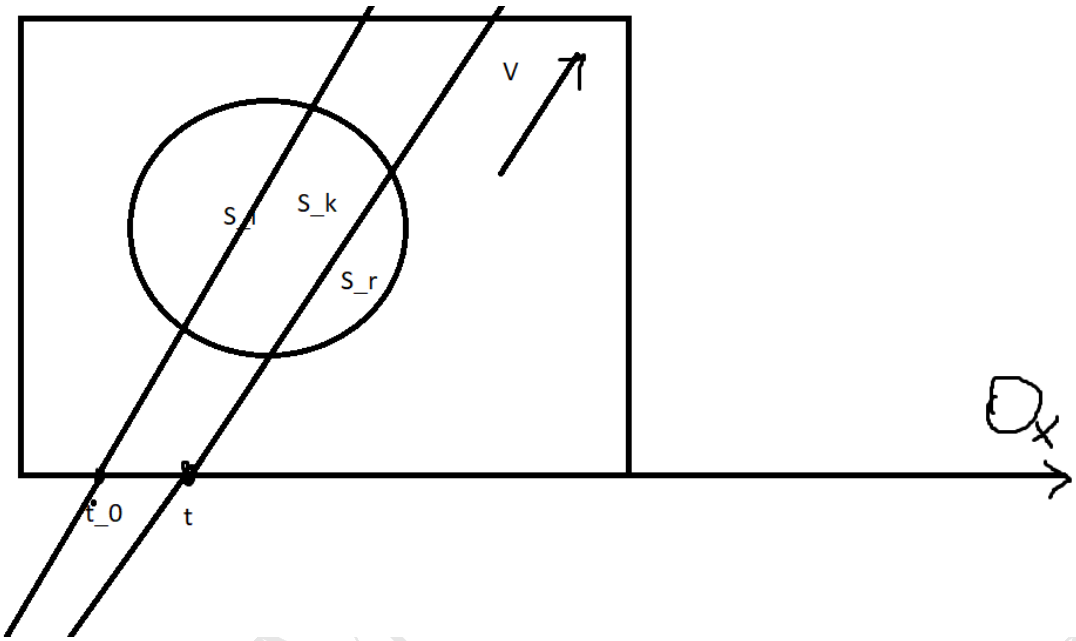
Доказательство

Сформулируем и докажем сначала лемму:

$A \subset \mathbb{R}^2, \vec{V}$ — произвольный вектор. Тогда существует прямая с направлением вектора V, которая делит прямую на 2 равновеликих фигуры.

▷

Давайте заведём числовую ось, причём эта ось пусть будет непараллельна V. Тогда $\forall t \in Ox$: $S(x) = S_l - S_r$. Будем через каждую точку числовой прямой t будем проводить прямую, параллельную вектору V, и тогда для каждой такой точки будет определена функция как разность площадей левой и правой части фигуры.



Заметим, что $|S(t_0) - S(t)| = |2S_k| \leq (t - t0)h_{\text{доски}} \Rightarrow S(t)$ — непрерывна, следовательно, между $-S$ и S обязательно найдётся точка, в которой $S(t) = 0$ (по теореме о промежуточном значении).

$\lhd$

Теперь введём функцию $g(\varphi) = S_l^B(\varphi) - S_r^B(\varphi)$, это такая функция, которая определена на $\varphi \in [0, 2 * \pi]$ и проводит линию под углом φ к оси координат, причём эта линия делит фигуру A на равновеликие части.

Тогда, заметим что

1. $g(\varphi + \pi) = -g(\varphi)$ (направление меняется, соответственно, меняется понятие лева и права)
2. $g(\varphi_1) - g(\varphi_2) \leq 4 * \frac{1}{2} * d^2 * |\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2|$ (по сути, тоже площадь кусочка) $\Rightarrow g$ — непрерывна.

Тогда по теореме Больцпно-Коши о промежуточном значении всё получается!

2.4.18 Теорема о сохранении промежутка[1]

2.4.18.1 Лемма

Формулировка
E выпукло $\Leftrightarrow E$ промежуток

Доказательство
$\Leftarrow$ очевидно

$\Rightarrow$

$\exists M = \sup E, m = \inf E$

По определению sup, в любой окрестности будут элементы множества. Таким образом, $(m, M) \subset E$. Также, поскольку m и M ограничивают выпуклое множество, $E \subset [m, M]$. Таким образом, E - промежуток.

Формулировка
Непрерывный образ промежутка — промежуток.

Доказательство
$f : C(\langle a, b\rangle \to \mathbb{R})$

$D := \langle a, b\rangle, f(D) = E$. E выпукло по теореме о промежуточном значении (для любого отрезка на промежутке $\langle a, b\rangle$ теорема работает).

Тогда, очевидно, E — промежуток. (по лемме чуть выше)

2.4.19 Теорема Больцано–Коши о сохранении линейной связности[1]

Линейная связность
Множество в метрическом пространстве называется линейно связным, когда межу любыми 2 точками существует путь.

Формулировка
Непрерывный образ линейно-связного множества линейно-связен

Доказательство
$f : C(X \to Y)$, X, Y – метрические пространства.

$f(D) = E$. D линейно-связно. $\Rightarrow \forall a, b \exists$ путь $g : C([0, 1] \to D)$, при этом $g(0) = a, g(1) = b$.

Поскольку образ $g \subset D$, то $\forall x \in [0, 1] \exists f(g(x)) \in E$. При этом $f(g(0)) = f(a), f(g(1)) = f(b)$, то есть это работает для всех точек в D

2.4.20 Описание линейно связных множеств в $\mathbf{R}^2$

Определения

$\gamma : [a, b] \to Y$ — метрическое пространство. Тогда γ — путь в м.п. Y.

$E \subset Y$ — метрическое пространство, тогда E называется *линейно связным*, если $\forall A, B \in E\ \exists \gamma : [a, b] \to E$ непрерывный, $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$

Формулировка

В $\mathbb{R}E$ — линейно связно $\Leftrightarrow E$ — промежуток.

Доказательство

$\triangleright$

$\Leftarrow$

Очевидно.

Что, не очевидно? А вот так? $t \in [0, 1], t(B - A) \subset [A, B] \subset \langle a, b\rangle$

$\Rightarrow$

E — не пустое (пустое — тривиальный случай). Пусть $m = \inf E, M = \sup E$. Проверим, что $(m, M) \subset E$. $t \in (m, M), t \notin E$. Если возьмём $A, B \in E$ такие, что $m \leq< A < t < B \leq M$. Но в таком случае, E не будет линейно связанным, т.к. $\exists c : \gamma : (a, b) \to E, \gamma(c) = t$. Тогда $(m, M) \subset E$.

$\lhd$

2.4.21 Теорема о существовании и непрерывности обратной функции[1]

Формулировка
$f : C(\langle a, b\rangle \to \mathbb{R})$

f строго монотонна (положим, возрастает)

Тогда $\exists f^{-1}$ и она строго возрастает и непрерывна

Доказательство
$\rhd$

1. По определению обратной функции, f обратима, когда является инъекцией. Поскольку $f(\langle a, b\rangle) = \langle m, M\rangle$, где $m = \inf$, $M = \sup$. Ну по Теорема о сохранении промежутка[1].

   Поскольку f строго возрастает, каждое значение на $\langle m, M\rangle$ принимает ровно 1 раз. Тогда это инъекция $\Rightarrow f$ обратима.

2. Строгая монотонность обратной функции крайне очевидна:

   $$\forall x_1 > x_0 \quad f(x_1) > f(x_0) \Rightarrow \forall y_1 > y_0 \exists x_1 = f^{-1}(y_1), x_0 = f^{-1}(y_0)$$

   Т.к. f^{-1} — биекция, пара x_1 и y_1 однозначно определена и, следовательно, сохраняется неравенство $x_1 > x_0$

3. По определению обратной функции, она является биекцией $\langle m, M\rangle$ в $\langle a, b\rangle$. Так как она монотонна, а её множество определения и значений — промежутки, то она непрерывна (по Теорема о непрерывности монотонной функции. Следствие о множестве точек разрыва[1], п.2)

$\lhd$

2.4.22 Равносильность двух определений производной. Правила дифференцирования.[3]

2.4.22.1 Равносильность определений дифференцируемости

Формулировка:

Определения дифференцируемости (внезапно) равносильны

Доказательство.

$2 \Rightarrow 1$ т.е. $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$, где $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ Теперь все это разносим в разные стороны, делим на $x - x_0$ и получаем

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A$$

Что равносильно определению 1.

$1 \Rightarrow 2$ Обратно, обозначим

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A$$

Тогда $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ и выполнено определение 2. $\square$

2.4.22.2 Производная сумммы и разности

Формулировка:

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

Доказательство.

$$(f \pm g)' = \frac{(f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x - g(x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f' \pm g'$$

$\square$

2.4.22.3 Производная сумммы и разности

Формулировка:

$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Доказательство.

$$\frac{(fg)(x+\Delta x) - (fg)(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) +$$
$$+ f(x)\frac{g+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \xrightarrow[h \to 0]{f}{}' (x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$\square$

2.4.22.4 Производная частного

Формулировка:

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Доказательство.

$$\frac{\frac{f}{g}(x+\Delta x) - \frac{f}{g}(x)}{\Delta x} = \frac{1}{g(x+\Delta x)(g(x)}\Big(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - f(x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\Big) \xrightarrow[h \to 0]{}$$
$$\xrightarrow[h \to 0]{} \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$\square$

2.4.22.5 Производная композиции

Формулировка:

$(f \circ g)'(x) = g'(f(x)) * f'(x)$

Доказательство. Из определения 2 можно записать

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$
$$g(y + \Delta y) = g(y) + g'(y)\Delta y + \beta(\Delta y)\Delta y$$

где α и β в нуле непрерывны и равны нулю. Во второе уравнение подставим $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = \tau(\Delta x)$

$$\begin{aligned} g(f(x + \Delta x)) &= g(f(x)) + g'(f(x))\big(f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x\big) + \beta(\tau(\Delta x))\tau(\Delta x) = \\ &= g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)\Delta x + \gamma(\Delta x)\Delta x \end{aligned}$$

где

$$\gamma(\Delta x) = g'(y)\alpha(\Delta x) + \beta(\tau(\Delta x))\big(f'(x) + \alpha(\Delta x)\big)$$

Ясно, что $\gamma(0) = 0, \gamma$ непрерывна в нуле, следовательно, $f \circ g$ дифференцируема в 0 и выполняется требуемое в условии. □

2.4.22.6 Производная обратной функции

Формулировка: $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

Доказательство. Вот здесь начинается веселье. Из предыдущих теорем курса мы знаем, что f^{-1} существует, определена на P, строго монотонна и непрерывна. Пусть $y = f(x)$, возьмем $\Delta y \neq 0 :$ $y + \Delta y \in P$, положим $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) = \tau(\Delta y)$. Тогда $\Delta x \neq 0, x = f^{-1}(y), x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y)$ и $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$. Составим разностное отношение

$$\frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = \frac{\tau(\Delta y)}{f(x + \tau(\Delta y)) - f(x)}$$

и найдем его предел при $\Delta y \to 0$. По условию (f - дифференцируема)

$$\frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{f'(x)}$$

Но $\tau(k) \xrightarrow[k \to 0]{} 0$ по непрерывности f^{-1} в точке y . Следовательно, по теореме о пределе композиции

$$\frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} \xrightarrow[k \to 0]{} \frac{1}{f'(x)}$$

□

2.4.23 Теорема Ферма (с леммой)[2]

Формулировка (Лемма)

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируема и возрастает в т. $x_0 \in (a, b)$. Тогда $f'(x_0) > 0, \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)\ f(x) < f(x_0)$ и $(x_0, x_0 + \varepsilon)\ f(x) > f(x_0)$ (строго возрастает).

Доказательство (Лемма)

Во-первых, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) > 0$

Тогда, по теореме о стабилизации знака:

$x \to x_0 + 0$ (справа), тогда $f(x) - f(x_0) > 0$

$x \to x_0 + 0$ (слева), тогда $f(x) - f(x_0) < 0$

Сошлось (вблизи x_0).

Формулировка (Теорема)

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируема в т. $x_0 \in (a, b), c = \max_{x\in(a,b)} f(x)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство (Теорема)

$\triangleright$

$f(x) - f(c) \le 0$

$f'(x) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Заметим, что $x = c + \Delta x$. Тогда $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(c+\Delta x)}{\Delta x} = f'(c)$

$\lim_{x\to c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0 \Rightarrow f' \ge 0$

$\lim_{x\to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0 \Rightarrow f'(c) \le 0$

(Всё дело в знаменателе!!!!)

Тогда $0 \le f'(x) \le 0 \Rightarrow f'(c) = 0$

$\triangleleft$

2.4.24 Теорема Ролля. Вещественность корней многочлена Лежандра[2]

2.4.24.1 Теорема Ролля

Формулировка

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, дифференцируема на (a, b) и непрерывна на $[a, b], f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c : f'(x) = 0$

Доказательство

$\triangleright$

По теореме Вейерштрасса, $\exists x_0 = \min_{x\in[a,b]} f(x), x_1 = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда, по теореме Ферма, если x_0 или x_1 лежит в (a, b), то нам подходит $c = x_0$ или $c = x_1$. Иначе, если $x_0 = x_1 \Rightarrow$ const. Если не лежит в $(a, b) \Rightarrow x_0 = a, x_1 = b \Rightarrow$ const, тривиально.

$\triangleleft$

Следствие

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непрерывна на $[a, b], f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b)$

2.4.24.2 Вещественность корней многочлена Лежандра

Формулировка

$L_n(x) = \left((x^2 - 1)^n\right)^{(n)}$ — многочлен Лежандра.

Утверждается, что он имеет n вещественных корней на $(-1, 1)$.

Доказательство

$\triangleright$

Корень a называется корнем кратности k исходной функции $f(x)$, если $f_1(x) = (x-a)^k f_1(x)$ и $f_1(a) \neq 0$. Заметим, что если a корень кратности k для $f(x)$, то для $f'(x)$ это корень кратности $k-1$ (доказывается дифференцированием $(x-a)^k f_1(x)$).

Тогда поехали. Для самого многочлена Лежандра существует 2 корня кратности $n : 1, -1$. Если взять производную, то по теореме Ролля $\exists c \in (a, b)$, следовательно, существует ещё один корень. Наши же первоначальные корни остаются корнями уравнения, но их кратность стала по $n-1$. Тогда всего в сумме у нас получается $2n-2+?$ корней, где $? = 1$, т.к. вообще корней у многочлена первой производной существует не более $2n-1$. Так продолжаем и дальше, в итоге получаем, что у k-й производной есть k корней. Тогда для производной степени n у многочлена Лежандра n вещественных корней.

$\triangleleft$

2.4.25 Непрерывность синуса и арксинуса, замечательный предел, производная синуса.[3]

2.4.25.1 Лемма

Формулировка:

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$|\sin x| \leq |x|$$

2.4.25.2 Непрерывность синуса

Формулировка:

Синус непрерывен на $\mathbb{R}$

Доказательство. $\forall x + 0 \in \mathbb{R}$

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leq 2 * \frac{|x - x_0|}{2} * 1 = |x - x_0| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

$\square$

$\arcsin : [-1, 1] \xrightarrow{\text{на}} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ непрерывна по теореме о непрерывности обратной функции

2.4.25.3 Первый замечательный предел

Формулировка:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. При $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Делим это все на $\sin x$ и берем обратные, из-за чего неравенство переворачивается, и получаем

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

т.к. все части этого неравенства — четные функции, то такой переход легитимен. А т.к. $\cos x$ стремится к 1 при $x \to 0$, то по теореме о зажатой функции — победа. □

2.4.25.4 Производная синуса

Формулировка:

$(\sin x)' = \cos x$

Доказательство. Пользуемся замечательным пределом выше и непрерывностью косинуса

$$\frac{\sin x + \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \cos x$$

□

3 Период 3 (Кайнозойский)

3.1 Важные определения

3.1.1 Множество мощности континуума[1]

Множество мощности континуума равномощно $[0,1] \subset \mathbb{R}$

3.1.2 Разложения Тейлора основных элементарных функций[1]

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$

3.1.3 Выпуклая функция и касательная[1 3]

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ - выпуклая $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall \alpha \in (0,1) \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Вообще это утверждение эквивалентно неравенству Йенсена. Смысл в том, что мы можем зафиксировать любые 2 точки x и y на указанном отрезке, при чём будет верно то, что если мы соединим их прямой (ну то есть получим хорду из $(x, f(x)$ в $y, f(y))$, то эта хорда будет выше, либо равна нашей функции (ну то есть функция как-то идёт сначала вниз, а потом начинает расти и пересекает хорду только в точке y.

Аналогично, есть "вогнутая"функция ($\Leftrightarrow$ "выпуклой сверху").

Также, можем ввести "строго выпуклую функцию". Определение такое же, но хорда должна быть строго выше.

3.1.4 Теорема Дарбу. Следствия[3]

3.1.4.1 Теорема Дарбу

Формулировка: f - дифференцируема на $[a,b] \Rightarrow \forall C \in (f'(a), f'(b)) \exists c \in (a,b) : f'(c) = C$

Доказательство.

1. $f'(a)$ и $f'(b)$ разных знаков, $C = 0$.
НУО $f'(a) < 0 < f'(b)$. Т.к. f непрерывна на $[a, b]$ то по Вейерштрассу $\exists c \in [a, b] : f(c) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$. Если $c \in (a, b)$, то из Ферма $f'(c) = 0$ — победа. Проверим, что $c \neq b$ и $c \neq a$. Если $c = a$, то $\forall x \in (a, b] \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0 \Rightarrow f'(a) \geq 0$. Противоречие с условием. Аналогично, $c \neq b$

2. Общий случай
НУО $f'(a) < C < f'(b)$. $\varphi(x) = f(x) - Cx$. Тогда

$$\varphi'(a) = f'(a) - C < 0 < f'(b) - C = \varphi'(b)$$

Из 1. $\Rightarrow \exists c \in (a, b) : \varphi'(c) = 0$, т.е. $f'(c) = C$ □

3.1.4.2 Лемма о характеристике промежутков

Формулировка:

$E \subset \mathbb{R}$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. E — промежуток
2. $\forall x, y \in E, [x, y] \subset E$

Доказательство.

1. $\Rightarrow$ 2. Очевидно

2. $\Rightarrow$ 1. Пусть $E \neq \emptyset$. Обозначим $m = \inf E$, $M = \sup E$. Очевидно, $E \subset [m, M]$. Покажем, что $(m, M) \subset E$. Пусть $m < z < M$. Тогда из определения граней $\Rightarrow \exists x, y \in E : x < z < y$ По условию $z \in E$ □

3.1.4.3 Следствие 1

Формулировка:

f — дифференцируема на $\langle a, b\rangle \Rightarrow f'(\langle a, b\rangle)$ — промежуток.

Доказательство. Следует из леммы о характеристике промежутков □

3.1.4.4 Следствие 2

Формулировка: Производная дифференцируемой на промежутке функции не может иметь на нем разрывов второго рода

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы о непрерывности монотонной функции □

3.2 Определения

3.2.1 Классы функций $C^n([a,b])$[1]

f называется n-гладкой, если имеет n непрерывных производных (формально, $\forall i = 1 \dots n\ \exists\ i$-ая непрерывная производная)

Класс функций $C^n([a,b])$ - это множество n-гладких функций на $[a,b]$

3.2.2 Производная n-го порядка[1]

Пусть есть натуральное n. $f : X \to Y$ (где X и Y - м.п.) - дифференцируема в интервале (a,b). Тогда мы можем взять производную $f'(x)$ в этом интервале. Далее индуктивно мы можем рассуждать о полученной производной как о функции.

Такими темпами мы дойдём до $f^{(}n)$, что и называют "производной n-го порядка"

3.2.3 Многочлен Тейлора n-го порядка[1]

$T_n(f,a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

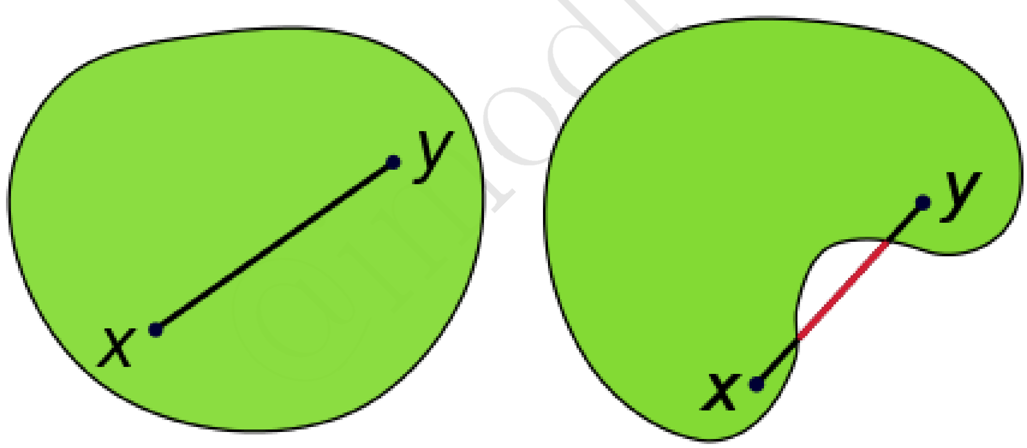
3.2.4 Счётное множество[1]

Множество счётно $\Leftrightarrow$ множество равномощно $\mathbb{N}$. То есть можно установить биекцию между $\mathbb{N}$ и множеством

3.2.5 Выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$[1]

$A \subset \mathbb{R}^m$ - выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$, если

$$\forall x, y \in A, \alpha \in [0,1] \quad \alpha x + (1-\alpha)y \in A$$



3.2.6 Надграфик[1]

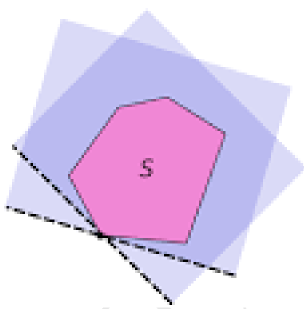
Надграфик функции $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ это множество $\{(x, y)|x \in \langle a, b\rangle, y \geq f(x)\}$

3.2.7 Опорная прямая[1]

$A \subset \mathbb{R}^2$ - выпуклое $l \subset \mathbb{R}^2$ - прямая

l - опорная прямя для A, когда выполняется:

1. A содержится в одной полуплоскости относительно l (лежит полностью по одну сторону от прямой)
2. Пересечение прямой и множества непусто ($l \cap A \neq \varnothing$)



3.2.8 Равномерная непрерывность[1]

Равномерность непрерывности говорит то, что мы можем для ε найти конкретный δ, который не зависит от аргументов (работает на всей области определения), при котором разность значения функции меньше ε

Формально,

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Аналогично, это работает для метрических пространств:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : \rho(x_1 - x_2) < \delta \quad \rho(f(x_1) - f(x_2)) < \varepsilon$$

3.2.9 Локальный экстремум[3]

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ x_0 \in D$

1. x_0- точка локального максимума, если $\exists U(x_0)\forall x \in U(x_0) \cap D \quad f(x) \leq f(x_0)$
2. x_0- точка строгого локального максимума, если $\exists U(x_0)\forall x \in \dot{U}(x_0) \cap D \quad f(x) < f(x_0)$
3. Локальный минимум определяется аналогично
4. Локальный экстремум = локальный максимум или локальный минимум

3.3 Важные теоремы

3.3.1 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано[2]

Формулировка

Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 n$ раз, у неё есть многочлен Тейлора $P_n(x)$), тогда $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0))^n$ при $x \to x_0$.

Доказательство

$\triangleright$

У нас есть некое *основное свойство многочлена Тейлора*, которое утверждает, что функция и её многочлен Тейлора n степени, а также их производные до n порядка включительно имеют равное значение в точке x_0. Запомним. Тогда определим остаток $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Перефразируя условие, $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \ldots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$. Из непрерывности в точке x_0 также следует, что пределы функции $R_n(x)$ и её производных до n при $x \to x_0$ порядка равны 0. Супер. Тогда нам по сути нужно доказать, что $R_n(x) = o(x-x_0)^n$ при $x \to x_0 \Leftarrow \lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$. По-Лопиталим всё это дело $n-1$ раз, и получим $\frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(x_0)(=0)}{(x-x_0)^n}$ — а это определение производной $R_n^{(n)}(x) = 0$

$\triangleleft$

3.3.2 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа[1]

Определение:

$f \in C^n\langle a, b\rangle, (n+1)$ раз дифференцируема на (a, b)

$x, x_0 \in \langle a, b\rangle$. Тогда $\exists c$ между x и x_0

$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Доказательство:

$$\phi(t) = f(x) - T_n(f, t)(x) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)$$

$$\phi(x) = 0$$

$$\phi'(t) = -\left(f'(t) + \left(-\frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right) + \left(-\frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right) + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$\psi(t) := (x-t)^{n+1}$. По Т. Коши $\exists c$ между x и x_0 :

$$\frac{-R_n(f, x_0)(x)}{-(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\phi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n}$$

Тогда $R_n(f, x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0) + \theta(x-x_0)}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$ - ост. в форме Коши

3.4 Теоремы

3.4.1 Следствие об оценке сходимости многочленов Тейлора к функции. Примеры[3]

3.4.1.1 Лемма

Формулировка:

Пусть выполнены условия для существования формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа, $M > 0, \forall t \in \langle x, x_0 \rangle |f^{(n+1)}(t)| \leq M$. Тогда

$$|R_{n,x_0} f(x)| \leq \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{21}$$

Доказательство. Прямо следует из формы Лагранжа остаточного члена. □

3.4.1.2 Следствие

Формулировка:

Пусть $f \in C^{(\infty)}\langle a, b \rangle$, и существует $M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ и $t \in \langle a, b \rangle$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(t)| \leq M$. Тогда $\forall x, x_0 \in \langle a, b \rangle$

$$T_{n,x_0} f(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x) \tag{22}$$

Доказательство. Т.к. $\forall K \in \mathbb{R}\ \frac{K^n}{n!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ и (27) выполняется для всех n одновременно, получаем $R_{n,x_0} f(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Leftrightarrow (22)$ □

3.4.1.3 Пример 1

Формулировка:

Остаток для e^x

Доказательство. Так как $(e^x)^{(k)} = e^x; (e^x)^{(k)}|_{x=0} = 1$, верны равенства

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1)$$

В частности при $x = 1$

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \quad \theta \in (0, 1)$$

Отсюда получаем оценки

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{max\{e^x, 1\}}{(n+1)!} |x|^{n+1},$$

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Следовательно, $\forall x \in \mathbb{R}$
$$e^x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$
и, в частности,
$$e = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

□

3.4.1.4 Пример 2

Формулировка:

Остаток для $\sin x$

Доказательство. Из формулы
$$(\sin x)^{(m)} = \sin\left(x + \frac{m\pi}{2}\right)$$
при $k \in \mathbb{Z}_+$
$$(\sin x)^{(2k)}|_{x=0} = 0 \qquad (\sin x)^{(2k+1)}|_{x=0} = (-1)^k$$
Поэтому
$$\sin x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}),$$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \frac{\sin\alpha}{(2n+3)!}x^{2n+3}$$
где $\alpha = \theta x + \frac{(2n+3)\pi}{2}, \theta \in (0,1)$. Отсюда получаем оценку остатка
$$|R_{2n+2,0}(sin, x)| \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3!)}$$
Поэтому $\forall x \in \mathbb{R}$
$$\sin x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

□

3.4.1.5 Пример 3

Формулировка:

Остаток для $\cos x$

Доказательство.
$$(\cos x)^{(m)} = \cos\left(x + \frac{m\pi}{2}\right)$$
$$(\cos x^{(2k)}|_{x=0} = (-1)^k, \qquad (\cos x)^{(2k+1)}|_{x=0} = 0$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\cos \beta}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

где $\beta = \theta x + \frac{(2n+2)\pi}{2}, theta \in (0,1)$. Отсюда

$$|R_{2n+1,0}(cos, x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Поэтому, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

□

3.4.1.6 Пример 4

Формулировка: Остаток для $\ln(1+x)$

Доказательство. Т.к. $\forall k \in \mathbb{N}$

$$(\ln(1+x))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \qquad (\ln(1+x))^{(k)}|_{x=0} = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

а $\ln 1 = 0$, получаем

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$$

□

3.4.2 Несчетность отрезка[3]

Формулировка: Отрезок несчетен: $\nexists \varphi : \mathbb{N} \to [0,1]$

Доказательство. От противного. Пусть мы занумеровали все точки отрезка:$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$. Построим последовательность отрезков. $\Delta_0 = [0,1]$. Делим Δ_0 на три отрезка, пусть Δ_1 — та треть Δ_0, что не содержит x_1. Продолжаем делить и брать трети:Δ_n — треть Δ_{n-1}, не содержащая x_n.

Очевидно, что $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots$. Но по теореме о стягивающихся отрезках $\cap \Delta_i = \{a\}$, но a не совпадает ни с одним из x_i. Абсурд. □

3.4.3 Континуальность множества бинарных последовательностей[3]

Формулировка:

Bin — множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1. Тогда $\exists \varphi : [0,1] \to Bin$ — биекция.

Доказательство. $x \in [0,1]$ $x = 0.1011000010\ldots$. При отбрасывании целой части получаем бинарную последовательность. Однако существуют x, задающиеся двумя бинарными последовательностями: Те, у которых, начиная с k-й позиции идут только единицы и те, у которых в $(k-1)$-й позиции 1, а начиная с k-й только нули. Но таких последовательностей, очевидно, счетное число. Понятно, что объединение континуального и счетного множества континуально. □

3.4.4 Теорема о свойствах показательной функции[1]

Напоминалка

Показательная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — по определению: непрерывна, не тождественный 0, не тождественная 1, и $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

Формулировка:

1. $\forall x f(x) > 0; f(0) = 1$
2. $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(rx) = (f(x))^r$
3. Пусть $a := f(1)$, тогда
   $a = 1 \implies f - const$, $a > 1 \implies f$- возр., $a < 1 \implies f$- убыв.
4. Множество значений $f \to (0, +\infty)$
5. $\tilde{f}(1) = f(1)$, тогда $f = \tilde{f}$

Доказательство:

1. $\exists x_0 \quad f(x_0) \neq 0$
   $f(x_0 + 0) = f(x_0)f(0) \implies f(0) = 1$
   Если $\exists x_1 : f(x_1) = 0$ $\forall x \quad f(x) = f(x - x_1)f(x_1) = 0$, т.е. $f \equiv 0$
   Тогда $\forall x \quad f(x) = f(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2}) > 0, f(x) \neq 0$
2. (a) $r = 1$ Тривиально
   (b) $r \in \mathbb{N}$
   $$f(2x) = f(x+x) = f(x)f(x) = f(x^2) \tag{23}$$
   $$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx)f(x) = (f(x))^n f(x) = (f(x))^{n+1} \tag{24}$$
   (c) $r \in -\mathbb{N}$ $\quad 1 = f(0) = f(nx + (-n)x) = f(nx)f(-nx) = (f(x))^n f(-nx)$
   (d) $r = 0$ $\quad f(rx) = f(0) = 1 = (f(x))^0$
   (e) $r = \frac{1}{n}$
   $$f(x) = f(n\frac{x}{n}) = (f(\frac{x}{n}))^n \tag{25}$$
   $$f(\frac{1}{n}x) = (f(x))^{\frac{1}{n}} \tag{26}$$
   (f) $r = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ $\quad f(rx) = f(x\frac{m}{n}) = (f(\frac{x}{n}))^m = ((f(x))^{\frac{1}{n}})^m$
3. $a = 1 \quad f(1) = 1 \quad \forall r \in \mathbb{Q}\; f(r) = 1^r = 1$
   f - непр. и $f(x) = 1$ при $x \in \mathbb{Q} \implies f \equiv 1$
   $a > 1$. Тогда $\forall x > 0 \quad f(x) > 1$

$r \in \mathbb{Q}, r > 0 \quad f(r) = r(r * 1) = (f(1))^r = a^r > 1$
Значит $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ берем $r_k \to x (r_k \in \mathbb{Q})$
$f(r_k) \to f(x)$, значит $f(x) \geq 1$
$f(x) = f((x - r) + r) = f(x - r) * f(r) > 1$
$\exists r \in \mathbb{Q} : 0 < r < x$
Возр. $x \in \mathbb{R}, h > 0$
$f(x + h) = f(x)f(h)$
$f(h) > 1 \implies f(x + h) > f(x)$
$a < 1$ аналогично.

4. $f(\mathbb{R}) = (\inf f, \sup f)$
   $\inf f = 0 \quad \sup f = +\infty$
   $f(1) = a > 1$
   $a^n, n \in \mathbb{Z}$

5. $\tilde{f}(1) = f(1) \implies \forall r \quad \tilde{f}(r) = f(r)$
   $\forall x \quad r_k \to x$
   $\tilde{f}(r_k) = f(r_k)$
   $\tilde{f}(r_k) \to \tilde{f}(x); f(r_k) \to f(x) \implies f(x) = \tilde{f}(x)$

3.4.5 Выражение произвольной показательной функции через экспоненту. Два следствия[3]

3.4.5.1 Теорема о показательной функции

Формулировка:

$\exists f_0$ — показательная функция, которая удовлетворяет $\frac{f_0(x)-1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

Доказательство. КПК сказал, что будет где-то в третьем семестре просто предъявлена. □

3.4.5.2 Выражение произвольной показательной функции через экспоненту.

Формулировка:

f — показательная функция, f_0 — функция из прошлой теоремы. Тогда $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x f(x) = f_0(\alpha x)$

Доказательство. $f(1) = a > 0, a \neq 1$ $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 : a = f_0(\alpha)$

Осталось проверить, что $g(x) = f(\alpha x)$ — показательная функция, что вполне очевидно: $g \neq const$,

$$g(x + y) = f(\alpha(x + y)) = f(\alpha x) \cdot f(\alpha y) = g(x) \cdot g(y)$$

□

3.4.5.3 Следствие 1

Формулировка:

f_0 — единственна

Доказательство. От противного. Пусть f_1 тоже удовлетворяет теореме о показательной функции. Тогда $\exists \alpha : f_1(x) = f_0(\alpha x)$

$$1 = \lim_{x \to 0} \frac{f_1(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f_0(\alpha x) - 1}{\alpha x} \cdot \alpha = \alpha$$

Абсурд. □

3.4.5.4 Следствие 2

Обозначим $f_0(x) = exp(x)$ и назовем экспонентой.

Формулировка:

$\forall a > 0, a \neq 1 \exists!$ показательная фукнция $f : f(1) = a$

Доказательство. Для данного a $\exists \alpha : exp(\alpha) = a \qquad (\alpha \neq 1)$.

Достаточно взять $f(x) := exp(\alpha x)$ □

3.4.6 Показательная функция от произведения[3]

Формулировка:

$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall a > 0, a \neq 1$: $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$

Доказательство.

$x = 0$.

Тривиально

$x \neq 0, y \in \mathbb{Q}$

$a^x = b \quad b \neq 1$. Из пункта 2 теоремы о свойствах показательной функции:

$$(a^{xy}) = (a^x)^y = b^y$$

$x \neq 0, y \in \mathbb{R}$

Для этого сделаем предельный переход для предыдущего пункта. $y_k \in \mathbb{Q} : y_k \to y$

$$a^{x^{y_k}} = b^{y_k}$$

Но $a^{x^{y_k}} \to a^{xy}$, а $b^{y_k} \to (a^x)^y \Rightarrow$

$$a^{xy} = (a^x)^y$$

Второе равенство доказывается аналогично. □

3.4.7 Теорема о свойствах логарифма[3]

Формулировка:

$a, b, c > 0$; $a, c \neq 1$

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a(b^x) = x \log_a(b)$
3. $\log_a(x) = \log_a(c) \cdot \log_c(x)$

Доказательство. $n = v \Leftrightarrow a^n = a^v$ Таким образом,

1. $\Leftrightarrow$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy = a^{\log_a (xy)}$$

2. $\Leftrightarrow$

$$b = a^{\log_a b} \qquad b^x = \left(a^{\log_a b}\right)^x = a^{x \log_a b}$$

3. $\Leftrightarrow$

$$x = c^{\log_c x} \qquad \log_a x = \log_a\left(c^{\log_c x}\right) = \log_c x \cdot \log_a c$$

$\square$

3.4.8 Критерий монотонности функции. Следствия[3]

Формулировка:

Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и дифференцируема на (a, b). Тогда f возастает на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0$

Доказательство.

$\Rightarrow$ Пусть f возрастает, $x \in (a, b)$, тогда $\forall y \in (x, b\rangle f(y) \geq f(x)$, тогда

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{y \to x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

$\Leftarrow$ Пусть $\forall x \in \langle a, b\rangle f'(x) \geq 0$. Возьмем $x_1, x_2 \in x \in \langle a, b\rangle$. Покажем, что $f(x_1) \leq f(x_2)$. Из Лагранжа $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$$

Для убывающей функции все точно также, только вместо f возьмем $(-f)$ $\square$

Формулировка (следствие 1, Критерий постоянства функции):

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, тогда f постоянна на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow f \in C\langle a, b\rangle$ и $\forall x \in (a, b) f'(x) = 0$

Доказательство.

$\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Из теоремы следует, что f одновременно и возрастает и убывает $\Rightarrow f$ постоянна. $\square$

Формулировка (следствие 2, Критерий постоянства функции): Пусть функция f непрерывна на$\langle a, b\rangle$ и дифференцируема на (a, b). Тогда f строго возрастает на $\langle a, b\rangle \Leftrightarrow$:

1. $\forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0$
2. $f'(x)$ не тождественный 0 на любом промежутке

Доказательство.

$\Leftarrow$ Из следствия 1 условие 2) означает, что f не постоянна ни на каком интервале $\Rightarrow$ из строго возрастания следует 2), из теоремы следует 1)

$\Rightarrow \forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0 \Rightarrow f-$ возрастает. Если возрастание нестрогое, то $\exists x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : x_1 < x_2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f$ постоянна на $[x_1, x_2]$. Противоречие с 2). $\square$

3.4.9 Теорема о необходимом и достаточном условиях экстремума[3]

Формулировка:

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in (a, b), f$ — дифференцируема на (a, b). Тогда:

1. x_0 — точка экстремума $\Rightarrow f'(x_0) = 0$
2. $f - n$ раз дифференцируема в x_0

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)} \neq 0$$

$$\text{Если } f^{(n)} > 0, \text{ то} \begin{cases} n - \text{четное} & x_0 - \text{точка локального минимума} \\ n - \text{нечетное} & x_0 - \text{не точка экстремума} \end{cases}$$

$$\text{Если } f^{(n)} < 0, \text{ то} \begin{cases} n - \text{четное} & x_0 - \text{точка локального максимума} \\ n - \text{нечетное} & x_0 - \text{не точка экстремума} \end{cases}$$

Доказательство.

1. Literally теорема Ферма.
2. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Обзовем последний член многочлена α. Тогда существует такая окрестность точки x_0, что $\left|\frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}\right| < \frac{\alpha}{2}$. Заметим, что при n — четном нам не важно какой стороны мы подходим к x_0, этот множитель остается положительным, т.е. эта точка является локальным экстремумом в соответсвии с определением. Если же n — нечетно, то при переходе через x_0 будет меняться знак, следовательно, у функции не будет экстремума в x_0

□

3.4.10 Описание выпуклости с помощью касательных[3]

Формулировка:

Пусть f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$. Тогда f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда график f лежит не ниже любой своей касательной, то есть $\forall x, x_0 \in \langle a, b\rangle$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{27}$$

Доказательство.

$\Rightarrow$ Пусть f выпукла вниз, $x_0, x \in \langle a, b\rangle$. Если $x > x_0$, то по лемме о трех хордах $\forall \eta \in (x_0, x)$

$$\frac{f(\eta) - f(x_0)}{\eta - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Устремим η к x_0 справа, получаем неравенство

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

что равносильно (27). Если $x < x_0$, то по лемме о трех хордах $\forall \xi \in (x, x_0)$

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Устремляя ξ к x_0 слева, получаем неравенство

$$f'(x_0) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

равносильное (27)

$\Leftarrow$ Пусть $\forall x, x_0 \in \langle a, b \rangle$ верно неравенство (27). Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : x_1 < x_2$, и $x \in (x_1, x_2)$. Применяя (27) сначала к точкам x_1 и x, а затем — к x_2 и x, получаем

$$f(x_1) \geq f(x) + f'(x)(x_1 - x), \qquad f(x_2) \geq f(x) + f'(x)(x_2 - x)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq f'(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x_1}$$

Крайние части равносильны (27) $\square$

3.4.11 Дифференциальные критерии выпуклости[3]

Формулировка:

1. Пусть f непрерывна на $\langle a, b \rangle$ и дифференцируема на (a, b). f выпукла вниз на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f'$ строго возрастает на (a, b).

2. Пусть f непрерывна на $\langle a, b \rangle$ и дважды дифференцируема на (a, b). f выпукла вниз на $\langle a, b \rangle \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$

Доказательство.

1. $\Rightarrow$ Возьмем $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$. По теореме о выпуклости и касательных

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

что и означает возрастание f'

$\Leftarrow$ Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : x_1 < x_2$, и $x \in (x_1, x_2)$. По теореме Лагранжа $\exists c_1 \in (x_1, x)$ и $c_2 \in (x, x_2)$ такие что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1) \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2)$$

Тогда $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$, а f' по условию возрастает, поэтому $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, то есть

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

что равносильно определению выпуклости.

2. Выпуклость $f \Leftrightarrow f'$ – возрастает $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ $\square$

3.4.12 Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции[3]

Формулировка:

Пусть f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$. Тогда $\forall x \in (a,b) \exists$ конечные $f'_-(x), f'_+(x)$, причем $f'_-(x) \le f'_+(x)$

Доказательство. Пусть $x \in (a,b)$. Положим

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \xi \in \langle a, b\rangle \setminus \{x\}$$

По лемме о трех хордах g возрастает на $\langle a, b\rangle \setminus \{x\} \Rightarrow$, если $a < \xi < x < \eta < b$, то $g(\xi) \le g(\eta)$, то есть

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \le \frac{f(\eta) - f(x)}{\eta - x}$$

Что в итоге? g ограничена на $\langle a, x)$ сверху и на $(x, b\rangle$ —снизу, По теореме о пределе монотонной функции $\exists g(x-), g(x+)$ — конечные, которые по определению еще до кучи являются односторонними производными $f'_-(x), f'_+(x)$ соовентственно. Устремляем ξ к x слева, а η — справа, получаем, что $f'_-(x) \le f'_+(x)$ — победа $\square$

3.4.13 Лемма о трех хордах[3]

Формулировка:

Пусть f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle, x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b\rangle, x_1 < x_2 < x_3$. Тогда

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \tag{28}$$

Доказательство. По определению выпуклости

$$f(x_2) \le t f(x_1) + (1-t) f(x_3)$$

где $t = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$, $1 - t = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$. Теперь следим за руками

$$f(x_2) \le f(x_1) + (1-t)\left(f(x_3) - f(x_1)\right) = f(x_1) + (x_2 - x_1)\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

это равносильно левому неравенству в (28). Теперь

$$f(x_2) \le f(x_3) - t\left(f(x_3) - f(x_1)\right) = f(x_3) - (x_3 - x_2)\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

а вот это равносильно правому неравенству в (28). $\square$

3.4.14 Теорема Кантора о равномерной непрерывности[3]

Формулировка:

Непрерывное на компакте отображение равномерно непрерывно

Доказательство. От противного. Пусть отображение f непрерывно на компакте X, но не является равномерно непрерывным, тогда должно выполняться отрицание определения равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta \exists x, \bar{x} : \rho(x, \bar{x}) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(\bar{x})) \ge \varepsilon \tag{29}$$

Зафиксируем это ε и возьмем для него $\delta = \frac{1}{n}$ По теореме о характеристике компактов в метрических пространствах X — секвенциально компактно (можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел в X $\exists\{x_{n_k}\} \to c \in X$)

$$0 \le \rho(\bar{x}_{n_k}, c) \le \rho(\bar{x}_{n_k}, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, c) < \frac{1}{n_k} + \rho(x_{n_k}, c) \to 0.$$

Т.к. f непрерывна в c, то

$$f(x_{n_k}) \to f(c), f(\bar{x}_{n_k}) \to f(c)$$

Следовательно, $\rho(f(x_{n_k}), f(\bar{x}_{n_k})) \to 0$, что будет противоречить (29) □

3.4.15 Теорема о разложении рациональной функции на простейшие дроби[3]

P, Q — многочлены. $Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_m)^{k_m}, \qquad a_i \neq a_j, a_i \in \mathbb{R}$

$degQ(x) = k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n; \qquad degP < n$

Тогда существуют вещественные числа $A_1, \ldots, A_{k_1}, B_1, \ldots, B_{k_2}, \ldots$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} \frac{B_1}{x-a_2} + \cdots + \frac{B_{k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} + \ldots$$

Доказательство. Найдем $A_1, \ldots, A_{k_1}$:

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{(x-a_1)^{k_1}} F_1$$

$$F_1 = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(F_1)^{(i)}(a_1)}{i!}(x-a_i)^i + o((x-a)^{k-1}) = O((x-a)^k)$$

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{(F_1)^{(i)}(a_1)}{i!} \frac{1}{(x-a)^{k_1-i}} + \frac{o((x-a)^{k_1-1})}{(x-a_1)^{k_1}} + O(1)$$

Итого полагаем $A_j := \frac{F_1^{(a-j)}(a)}{(k-j)!}$

Аналогично определяем $B_1, \ldots B_{k_2}$ и остальные коэффициенты. □

Теперь докажем, что эти коэффициенты правильные

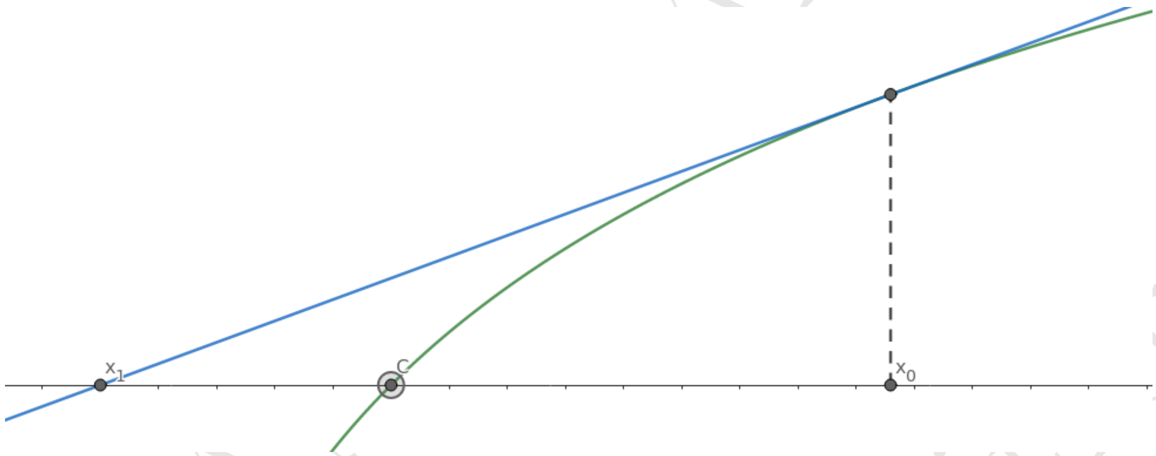
Доказательство. Расмотрим разницу $\frac{P}{Q} - \left(\frac{A_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_{k_1})^{k_1}}\right) =$ рациональная дробь, ограниченная в $V(a_1)$. Т.е. $(x-a_1)^{k_1}$ полностью сократится. Вычтем теперь все $(x-a_i)$

$$\frac{P}{Q} - \left(\frac{A_1}{(x-a_1)} + \ldots\right) - \left(\frac{B_1}{(x-a_2)} + \ldots\right) - \ldots$$

При раскрытии скобок получится правильная рациональная дробь, у которой сократится весь знаменатель, (т.к. разность стремится к $O(1)$) т.е. будет правильная дробь, являющаяся числом, т.е. останется 0. □

3.4.16 Метод Ньютона[3]

Этот метод используется для нахождения решений нелинейных уравнений. Суть метода в том, что берется какая-то функция $f(x)$ и точка x_0 достаточно близкая к решению. В точке x_0 строится касательная, она пересекает ось Ox в точке x_1. Мы строим касательную в точке x_1 и повторяем процесс рекурсивно. Получаем некую последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ и метод Ньютона говорит, что $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \to 0$



Но самое главное здесь - это оценка.

Доказательство. Уравнение касательной имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Теперь надо узнать, при каком x_1 $y = 0$:

$$(x_1 - x_0) = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Теперь запускаем этот процесс рекурсивно:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Посмотрим, насколько быстро мы приближаемся к корню:

$$C - x_{n+1} = C - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f(x_n) + f'(x_n)(C - x_n)}{f'(x_n)}$$

Формула Тейлора в x_n

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(t_n)}{2!}(x - x^n)^2$$

При $x := C$ $f(x) = 0$, первые два слагаемых равны числителю предыдущей формулы. Значит, мы можем ее продолжить:

$$\frac{f(x_n) + f'(x_n)(C - x_n)}{f'(x_n)} = \frac{-\frac{1}{2}f''(t_n)(C - x_n)^2}{f'(x_n)}$$

Возьмем $M := max|f''|; m := min|f'| > 0$. Тогда

$$|C - x_{n+1}| \le \frac{1}{2}\frac{|f''(t_n)||C - x_n|^2}{f'(x_n)} \le \frac{M}{2m}|C - x_n|^2$$

$$|C - x_{n+1}| \le \frac{M}{2m}|C - x_n|^2 \le \frac{M}{2m}\left|\frac{M}{2m}|C - x_{n-1}|^2\right|^2 =$$

$$= \left(\frac{M}{2m}\right)^{1+2}|C - x_{n-1}|^4 \le \ldots \le \left(\frac{M}{2m}\right)^{1+2+\ldots+2^n}|C - x_1|^{2^n} = \frac{2m}{M}\left(\left(\frac{M}{2m}\right)^2|C - x_1|\right)^{2^n}$$

Потребуем выбрать начальное приближение так, чтобы скобка была < 1. Тогда разница будет убывать ОЧЕНЬ быстро. $\square$

3.4.17 Иррациональность числа e^2 [3]

Формулировка: e^2 — иррационально.

Доказательство. От противного. Пусть $e^2 = \frac{2k}{n} \Leftrightarrow ne = 2k \cdot e^{-1}$. Домножим все на $(2k-1)!$:

$$n(2k-1)!e = (2k)! \cdot e^{-1}$$

Докажем, что левая часть чуть больше некоторого целого числа, а правая часть чуть меньше некоторого целого числа.

Вспомним формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \frac{e^c}{(m+1)!}x^{m+1} \qquad c \in (0, x)$$

Теперь будем подставлять в эту формулу $x = 1$ и $x = -1$:

$$n(2k-1)!e = n(2k-1)!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)!}\right) + n(2k-1)!\frac{e^c}{(2k)!} \qquad c \in (0,1)$$

Заметим, что левое слагаемое — целое число. Оценим остаток:

$$n(2k-1)!\frac{e^c}{(2k)!} = \frac{n}{2k}e^c = e^{c-2} < e^{-1} < \frac{1}{2}$$

$$(2k)! \cdot e^{-1} = (2k)!\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(2k)!}\right) - \frac{e^c}{(2k+1)!} \qquad c \in (-1, 0)$$

Левое слагаемое, кстати, тоже целое число. $e^2 = \frac{2k}{n}$, тогда, очевидно, $k > 1$. Оцениваем остаток:

$$\frac{e^c}{(2k+1)!} < \frac{1}{2k+1} < \frac{1}{3}$$

Итого, есть целое число, от которого мы смещаемся вправо меньше, чем на $\frac{1}{2}$ и целое число, от которого мы смещаемся влево меньше, чем на $\frac{1}{3}$ и приходим в одно и то же число. Абсурд. $\square$

3.4.18 Теорема Брауэра[3]

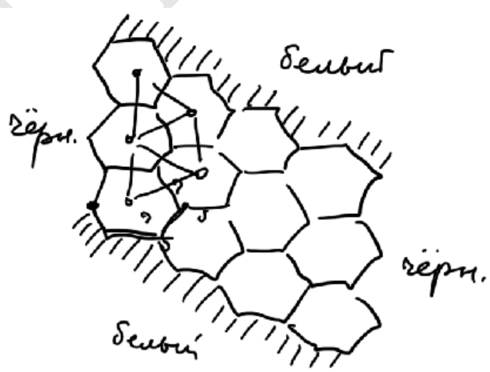
Формулировка:

1. $F : B(0,1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0,1) \subset \mathbb{R}^m$ непрерывно, тогда $\exists x \in B(0,1) : F(x) = x$
2. $F : [0,1]^m \to [0,1]^m -$ непрерывно, тогда $\exists x \in [0,1]^m F(x) = x$

Более подробно про теорему Брауэра и игру Гекс можно посмотреть тут тык

3.4.18.1 Игра Гекс

Поле для игры состоит из "прямоугольника составленного из правильных шестиугольников (см. рисунок). Две противоположные стороны назовем черными, две другиие — белыми. Игроки ходят по очереди, крася один из шестиугольников в черный или белый цвет, их цель — проложить дорожку либо от черной стороны к черной, либо от белой к белой. Проложивший дорожку, выигрывает.



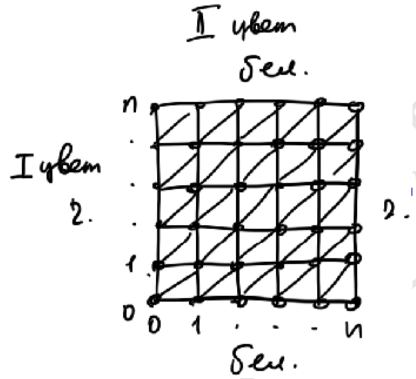
Лемма.

Формулировка:

Любая раскраска для игры Гекс будет выигрышна для одной из сторон

Доказательство. Накидаем случайную раскраску шестигранников в черный и белый цвета. Рассмотрим точку на "левом нижнем"шестиграннике, которая будет одновременно и на белой и на черной стороне (на рисунке выше — толстая черная точка). Начнем обходить шестиграннике по следующему правилу: черные шестигранники оставляем по левой руке, белые — по правой. Теперь думаем, к чему это нас может привести: мы не можем зайти в цикл, не касающийся сторон из-за выбранного правила обхода. Тогда, т.к. всего конечное число гексов, мы рано или поздно выйдем на границу. Но начинали мы с точки, которая принадлежит и белой, и черной стороне. Значит, мы победили. □

Теперь вместо Гексов будем рассматривать граф, вершинами которого являются гексы, а ребрами — наличие соприкосновения между ними. Пусть он имеет размер $n \times n$. Каждому узлу (k, l) будем сопоставлять точку $\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right)$. По только что доказанной лемме существует ломаная из одной стороны в противоположную по узлам одного цвета.



3.4.18.2 Доказательство теоремы Брауэра

Доказательство. $F : [0,1]^2 \to [0,1]^2$, $x = (x_1, x_2)$, $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$ Введем необходимые обозначения: $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\|x, y\|$ - расстояние, $\rho(x, y) = max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непрерывна в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ Функция $x \in [0,1]^2 \to \rho(x, F(x))$ — непрерывна на $[0,1]^2$

Вот только теперь начинается доказательство. Доказывать будем от противного: пусть $\forall x$: $F(x) \neq x$. По теореме Вейерштрасса:

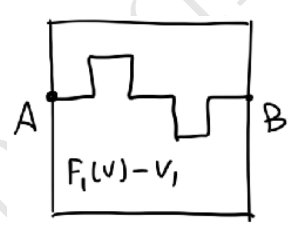
$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in [0,1]^2 \rho(x, F(x)) \geq \varepsilon \tag{30}$$

По теореме Кантора (для F, и $x = [0,1]^2$) F — равномерно непрерывна на $[0,1]^2$, т.е. для этого $\varepsilon \exists \delta > 0$ (НУО $\delta \leq \varepsilon$) $\forall x, \bar{x} \|x - \bar{x}\| < \delta \|F(x) - F(\bar{x})\| < \varepsilon$.

Возьмем $\frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$, построим доску $HEX(n,n)$ и начнем ее красить. Но красить будем не от балды. $v = (v_1, v_2), v_1, v_2 \in \mathbb{Z}_+$ — узел доски $HEX(n,n)$.

$$color(V) = min\left\{ i \in \{1,2\} : \left| f_i\left(\frac{v}{n}\right) - \frac{v_i}{n} \right| \geq \varepsilon \right\}$$

это определение корректно в силу (30). По лемме об игре в Гекс существет ломаная I цвета от одной вертикальной стороны квадрата к другой, либо ломаная II цвета от одной горизонтальной стороны квадрата к другой.



$f_i - i$-тая координата F.

В т.A: $f_i(A) \geq 0, A_1 = 0 \Rightarrow f_1(A) - A_1 \geq \varepsilon$

В т.B: $f_i(B) \leq 1, B_1 = 1 \Rightarrow f_1(B) - B \leq -\varepsilon$

То есть, в какой-то момент, мы совершили скачок на $\geq 2\varepsilon$, но при переходе от одного узла к другому каждая координата меняется на $\frac{1}{n} < \delta \leq \varepsilon$, т.е. сумма меняется $< 2\varepsilon$. В случае, когда мы двигаемся по диагонали, мы рассматриваем то же δ, и проводим аналогичные рассуждения.

Противоречие.

□