СВЯТОЙ КПК
#BlessRNG

Или как не сдохнуть на 4 семе из-за матана

Разработал

Никита Варламов @snitron

Почётный автор

Тимофей Белоусов @imodre

v0.0
Февраль-??? 2023

Вы в любой момент можете добавить любую недостающую теорему, затехав её и отправив код (фотографии письменного текста запрещены) в телегу любому из указанных авторов, или создав Pull Request в Git-репозиторий конспекта (click). Ваше авторство также будет указано, с вашего разрешения.

Ah shit
Here we go again!
And again...
Oh, fuck.

Содержание

1 Период Палеозойский

1.1 Важные определения

1.2 Определения

1.2.1 Произведение мер

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой.

Лемма: $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — полукольца. Тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ — полукольцо.

Также, множества из $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ являются измеримыми прямоугольниками.

μ, ν — σ-конечные меры. Тогда стандартное продолжение m_0 (в смысле теоремы о продолжении меры (?)) с полукольца $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, определённой на некоторой σ-алгебре $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, и являющееся σ-конечной полной мерой — обзначается просто m.

И тогда m — и есть произведение мер μ и ν ($\mu \times \nu$).

Замечание:

$$(\mu \times \nu) \times \rho = \mu \times (\nu \times \rho)$$

1.2.2 Сечения множества

X, Y — множества. $C \subset X \times Y$

Тогда:

$$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$$

$$C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$$

— сечения множества C (1 и 2 рода)

Замечания:

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha\right)_x = \bigcup_{\alpha \in A} (C_\alpha)_x$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha\right)_x = \bigcap_{\alpha \in A} (C_\alpha)_x$$

$$(C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

1.2.3 Полная мера, сигма-конечная мера

См. конспект прошлого семестра

1.2.4 Образ меры при отображении

Пусть у нас есть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \_)$ — пространства с мерой, $\Phi : X \to Y$.

1. $\forall \Phi \quad \Phi^{-1}(\mathfrak{B})$ — σ-алгебра (это предлагается доказать как уражнение)
2. Пусть Φ — “измеримо” $\left(\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}\right)$

Для $E \in \mathfrak{B}$ зададим $\nu R := \mu\left(\Phi^{-1}(E)\right) = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$

ν — образ меры μ при отображении Φ

NB: ДОПИСАТЬ НА СЕССИИ, ТУТ ЕЩЁ ЕСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, ЧТО ЭТО МЕРА

1.2.5 Взвешенный образ меры

$\omega : X \to \mathbb{R} \geq 0$, измерима на X

$B \in \mathfrak{B}, \tilde{\nu}(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$ — тоже мера, это и есть взвешенный образ меры μ при отображении Φ

1.2.6 Плотность одной меры по отношению к другой

$X = Y, \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \Phi = \mathrm{id}$

$\nu b = \int_B \omega d\mu$ — ещё одна мера в X

Здесь ω называется плотностью меры ν относительно меры μ. И в этом случае:

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \int f(x) \cdot \omega(x) d\mu(x)$$

1.3 Важные теоремы

1.3.1 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримые
- $f_n \to f$ почти всюду
- $\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая, и $\forall n$ и при почти всех x $|f_n(x)| \leq g(x)$

Тогда:

$$\int_X |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

И, как очевидное ("уж тем более"):

$$\int_X f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f d\mu$$

Доказательство:

1.3.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере

Формулировка (то же самое, что и выше, только сходится по мере теперь):

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримые
- $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$
- $\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая, и $\forall n$ и при почти всех x $|f_n(x)| \leq g(x)$

Тогда:

$$\int_X |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство:

1.3.3 Принцип Кавальери

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные меры
- $m = \mu \times \nu, \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. при почти всех $x \quad C_x \in \mathfrak{B}$
2. $x \mapsto \nu C_X$ — измеримо на C_x
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогично для сечений C^y

Доказательство:

1.3.4 Теорема Фубини

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные меры
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, суммируема на $X \times Y$ по мере m

Тогда:

1. при почти всех x функция f_x суммируема на Y
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu$ — это суммируемая функция на X
3. $$\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi(x) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

1.3.5 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме

Формулировка:

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, диффеоморфизм

Тогда $\forall A \in \mathbb{M}^m, A \subset O$

$$\lambda\Phi(a) = \int_A |\det \Phi'(x)| dx$$

Доказательство:

1.3.6 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

Формулировка:

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, диффеоморфизм
- $\Phi(O) = O'$
- $f : O' \to \mathbb{R} \geq 0$ — измерима

Тогда:

$$\int_{O'} f dx = \int_{O} f\left(\Phi(x)\right) \cdot |\det \Phi'(x) d\lambda(x)|$$

Доказательство:

1.4 Теоремы

1.4.1 Теорема об интегрировании положительных рядов

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, u_n \geq 0$ (при почти всех x ?)
- u_n — измеримы на $E \in \mathfrak{A}$

Тогда:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E u_n(x) d\mu(x) \right)$$

Доказательство:

Подгоним под теорему Леви 3 (3 семестр). Пусть $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$ — последовательность частичных сумм. Очевидно, что эта последовательность — монотонно неубывающая (так как функции у нас неотрицательные):

$$0 \leq S_N \leq S_{N+1} \leq S_{N+2} \leq \dots$$

Тогда, делаем предельный переход (вот тут есть вопрос, почему должен существовать предел, но если подумать: если его не существует, вообще вся эта теорема не имеет смысла (ну бесконечности, чел, смысл их интегрировать)). А так же, измеримость сохраняется, так как у нас исходные функции все были измеримы (ну и по теореме о пределе измеирмых функций):

$$S_N(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} S(x)$$

Ну и всё, значи, по теореме Леви можем перейти к предельному переходу интегралов:

$$\int_E S_N(x) d\mu(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \int_E S(x) d\mu(x)$$

Левую часть можно расписать по линейности интеграла (там у нас конечное число членов):

$$\int_E S_N(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{N} \int_E u_n(x) d\mu(x)$$

Ну, а раз интграл суммы стремится к интегралу предельной функции, то и сумма интегралов обязана туда стремиться.

$$\sum_{n=1}^{N} \int_E u_n(x) d\mu(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x) d\mu(x)$$

ч. т. д.

Следствие:

- $u_n : X \to \mathbb{R}$, измеримы на $E \in \mathfrak{A}$
- $\sum \int_E |u_n(x)| d\mu < +\infty$ (конечна)

Тогда $\sum u_n(x)$ — абсолютно сходящийся при почти всех x

Доказательство:

Пусть:

$$S(x) = \int_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$

Тогда, по предыдущей теореме:

$$\int_E S(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E |u_n(x)| d\mu \right) < +\infty$$

Раз интеграл конечен, значит $S(x)$ — суммируема, а это значит, что $S(x)$ — почти везде конечна. Ну значит и сходится.

ч. т. д.

Пример:

- (x_n) — вещественная последовательность
- $\sum a_n$ — абсолютно сходящийся числовой ряд

Тогда функциональный ряд $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x-x_n|}}$ — абсолютно сходится при почти всех x (в $\mathbb{R}$ по мере Лебега)

Доказательство:

Во-первых, можно доказать, что если для $\forall A$ на $[-A, A]$ абсолютно сходится почти везде, то и везде (на $\mathbb{R}$) почти везде сходится (лол). Счётное количество п. в. $\Rightarrow$ п. в. (чтобы количество отрезков было счётным, надо чтобы A были хотя бы рациональными. Кажется, что это не сильная проблема, так как отрезки включают в себя и все вещественные числа на отрезке тоже).

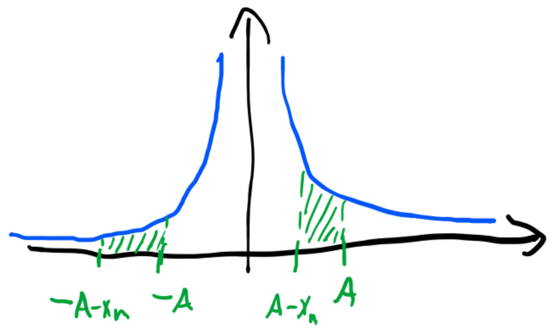
Попробуем подогнать под предыдущую теорему:

$$\int_{[-A,A]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} d\lambda = |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x-x_n|}} \leq$$

Так, стоп. А как мы перешли к определённому интегралу? Оказывается, что так можно делать, на доказано это будет позже (в курсе).

$$\underset{x:=x-x_n}{\leq} |a_n| \int_{-A-x_n}^{A-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq$$

Почему верен последний переход? Посмотрим на картинке:



Ну, по ней очевидно, что мы откусили кусочек поменьше, а добавили побольше. Тогда оценим модуль:

$$\leq 2 \cdot |a_n| \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4 \cdot \sqrt{A} \cdot |a_n|$$

Всё, абсолютный интеграл ограничен, значит сходится (при почти всех x).

ч. т. д.

1.4.2 Абсолютная непрерывность интеграла

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \quad \forall E\text{— измеримое } \mu E < \delta \qquad \left| \int_E f d\mu \right| < \varepsilon$$

Доказательство:

Следствие:

- $(e_n) \in \mathfrak{A}$ — последовательность (?) множеств
- $\mu e_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$
- f — суммируемая на X

Тогда:

$$\int_{e_n} f d\mu \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство:

1.4.3 Теорема о произведении мер

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- Зададим $m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$

Тогда:

1. m_0 — мера на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$
2. μ, ν — σ-конечные меры $\Longrightarrow m_0$ — σ-конечная

Доказательство:

1.4.4 Теорема Тонелли

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные меры
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, измерима относительно $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. при почти всех x функцияf_x измерима на Y
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu$ — это измеримая функция на X
3. $$\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi(x) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

Доказательство:

1.4.5 Формула для бета-функции

Формулировка: Бета-функция задаётся следующим образом:

$$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx, \quad s, t > 0$$

Тогда:

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

Доказательство:

1.4.6 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

Формулировка:

- $B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \leq R^2\}$
- $\alpha_m \ \lambda_m(B(0,1))$

Тогда:

$$\mu\left(B(0, R)\right) = \alpha_m R^m$$

Доказательство:

1.4.7 Теорема Фату. Следствия

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n \geq 0$ — измерима
- $f_n \to f$ почти везде
- Если $\exists C > 0 \ \ \forall n \int_X f_n d\mu \leq C$

Тогда:

$$\int_X f d\mu \leq C$$

Доказательство:

Следствие:

То же самое, только меняем сходимость почти везде на:

- $f_n, f \geq 0$, измеримы, почти везде конечны
- $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$

Следствие:

- $f_n \geq 0$, измеримы

Тогда:

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

1.4.8 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \_)$ — пространства с мерой
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ — измеримо
- $\Phi : X \to Y$ — "измеримое"
- ν — взвешенный образ μ (с весом ω)

Тогда для $\forall f : Y \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ — измеримых:

1. $f \circ \Phi$ — измеримо (относительно $\mathfrak{A}$)
2. $\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) d\mu(x)$

Доказательство:

1.4.9 Критерий плотности

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- ν — ещё одна мера на $\mathfrak{A}$
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, измеримо

Тогда эквивалентно:

1. ω — плотность μ отностительно μ
2. $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \inf_A \omega \cdot \mu A \leq \nu A \leq \sup_A \omega \cdot \mu A$

Доказательство:

1.4.10 Лемма о единственности плотности

Формулировка:

- f, g — суммируемы на X
- $\forall A$ — измеримое, $\int_A f = \int_A g$

Тогда $f = g$ почти везде

Доказательство:

Следствие:

Плотность меры определяется однозначно с точностью до изменения на множестве меры 0.

1.4.11 Лемма об оценке мер образов малых кубов

Формулировка:

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^1$
- $a \in O$
- Пусть $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда $\exists \delta > 0$ $\forall$ Куб $Q \subset B(a, \delta)$

$$\lambda \cdot \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$$

Доказательство: