
СВЯТОЙ КПК

#BlessRNG

ИЛИ КАК НЕ СДОХНУТЬ НА 3 СЕМЕ ИЗ-ЗА МАТАНА

РАЗРАБОТАЛ

НИКИТА БАРЛАМОВ @SNITRON

ПОЧЁТНЫЙ АВТОР

ТИМОФЕЙ БЕЛОУСОВ @IMODRE

V0.0 ALPHA

ОКТАБРЬ-UNDEFINED 2022-2023

Заметки авторов

В данном конспекте названия всех задач имеют ссылку на своего автора в виде верхнего индекса:

1. @imodre
2. @snitron

По любым вопросам и предложениям/улучшениям обращаться в телеграмм к соответствующему автору.

Known Issues

Вы в любой момент можете добавить любую недостающую теорему, затехав её и отправив код (фотографии письменного текста запрещены) в телегу любому из указанных авторов. Ваше авторство также будет указано, с вашего разрешения.

Ah shit
Here we go again!
And again...

Содержание

1	Период Палеозойский	4
1.1	Важные определения	4
1.1.1	Норма линейного оператора	4
1.1.2	Простое k -мерное гладкое многообразие в \mathbb{R}^m	4
1.1.3	Формулировка достаточного условия относительного экстремума	4
1.2	Определения	6
1.2.1	Положительно-, отрицательно-, знако- определенная квадратичная форма	6
1.2.2	Локальный максимум, минимум, экстремум	6
1.2.3	Диффеоморфизм	6
1.2.4	Теорема о локальной обратимости	6
1.2.5	Формулировка теоремы о гладкости обратного отображения в терминах систем уравнений	7
1.2.6	Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений	7
1.2.7	Касательное пространство к k -мерному многообразию в \mathbb{R}^m	7
1.3	Важные теоремы	8
1.3.1	Достаточное условие экстремума	8
1.3.2	Теорема о неявном отображении	9
1.3.3	Необходимое условие относительного локального экстремума	11
1.4	Теоремы	13
1.4.1	Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора . .	13
1.4.2	Теорема Лагранжа для отображений	14
1.4.3	Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому . .	14
1.4.4	Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях	16
1.4.5	Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля	17
1.4.6	Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах	17
1.4.7	Лемма о “почти локальной инъективности”	18
1.4.8	Теорема о сохранении области	19
1.4.9	Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности	21
1.4.10	Теорема о гладкости обратного отображения	22
1.4.11	Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений	23
1.4.12	Следствие о двух параметризациях	25
1.4.13	Лемма о корректности определения касательного пространства	27
1.4.14	Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей . . .	27
1.4.15	Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня . . .	29
1.4.16	Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел . . .	31
1.4.17	Теорема о функциональной зависимости	31
2	Период Мезозойский	34
2.1	Важные определения	34
2.1.1	Равномерная сходимость последовательности функций на множестве	34
2.2	Определения	35
2.2.1	Поточечная сходимость последовательности функций на множестве	35
2.3	Важные теоремы	36

2.3.1	Теорема Стокса–Зайдля о непрерывности предельной функций. Следствие для рядов	36
2.3.2	Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда . . .	37
2.4	Теоремы	38
2.4.1	Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота . .	38
2.4.2	Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов	38
2.4.3	Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру	39
2.4.4	Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда	40
2.4.5	Теорема о предельном переходе в суммах.	41

1 Период Палеозойский

1.1 Важные определения

1.1.1 Норма линейного оператора

Пусть X, Y — нормированные линейные пространства, $A \in \mathbb{L}(X, Y)$ (это множество линейных отображений над $X \rightarrow Y$). Тогда нормой линейного оператора называется $\|A\|_{X, Y} = \sup_{x \in X_{|x|=1}} |Ax|_Y$

Замечания (для $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$):

1. По лемме об ограниченности нормы линейного оператора ($L = (l_{i,j}), |Lx| \leq C_L |x| = C_L \cdot 1 = \sqrt{\sum l_{i,j}^2}$) — всегда ограничена!
2. $x \rightarrow |Lx|$ — непрерывная функция, заданная на компакте ($|x| = 1 \Leftrightarrow x \in S(0, 1)$ — сфера), причём по Вейерштрассу, максимум достигается. (напоминаю, мы в \mathbb{R}^m !)
3. Верно неравенство $\forall x \in \mathbb{R}^m : |Lx| \leq \|L\| \cdot |x|$ (тут у нас важно различать евклидову и неевклидову норму). КПК считает, что это очевидно:
 - (a) $x = 0$ — равенство
 - (b) $x \neq 0$ — делим на норму $x : |L \frac{x}{|x|}| \leq \|L\|$, это очевидно, т.к. наша новая норма задаётся как супремум значений $|x| = 1$, ну и мы вот сравниваем супремум с меньшими значениями.
4. $\forall x \in \mathbb{R}^m$, если нашлось $C > 0 : |Lx| \leq C \cdot |x| \Rightarrow \|L\| \leq C$ — тупо по пункту 3, очевидно.

1.1.2 Простое k-мерное гладкое многообразие в \mathbb{R}^m

Обобщение вот всей этой темы с диффеоморфизмами в одно толковое определение

$M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k-мерное C^r -гладкое многообразие в \mathbb{R}^m , если:

- $\exists O \subset \mathbb{R}^k$ — открытое (область?)
- $\exists \Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^m, \Phi(O) = M$ — гомеоморфизм (непрерывная биекция)
- $\Phi \in C^r(O)$
- $\forall x \in O : \text{rank } \Phi'(x) = k$

Φ — гладкая параметризация.

1.1.3 Формулировка достаточного условия относительного экстремума

- $f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}, \Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f, \Phi \in C^1$
- $M_\Phi \subset E : \{x \mid \Phi(x) = 0\}$
- $a \in E$ — точка относительного локального экстремума ($\forall x \in U(a) \cap M_\Phi, f(x_0) \leq f(x)$ — это нестрогий максимум, остальное аналогично)
- $\Phi(a) = 0$ — уравнение связи

- $\text{rank } \Phi'(a) = n$

это условия из необходимого условия

- $G(x) = f(x) - \lambda_1 \Phi_1(x) - \lambda_2 \Phi_2'(x) \dots \lambda_n \Phi_n(x) = f - \langle \lambda, \Phi \rangle$
- λ из необходимого условия
- $h \in \mathbb{R}^{m+n}, h = (h_x, h_y)$
- $\Phi'(a) \cdot h \neq 0 \Rightarrow$ можно выразить $h_y = \Psi(h_x)$
- $Q(h_x) = d^2 G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$ — это квадратичная форма

Тогда:

1. $Q(h_x)$ — положительно-определённая, тогда a — точка относительного локального минимума
2. $Q(h_x)$ — отрицательно-определённая, тогда a — точка относительного локального максимума
3. $Q(h_x)$ — не знако-определённая, тогда a — не точка относительного локального экстремума
4. $Q(h_x)$ — полу-определённая, тогда информации недостаточно (может быть и так, и так)

1.2 Определения

1.2.1 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

Квадратичная форма: $Q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q(h) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij} h_i h_j$$

- Положительно-: $\forall h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) > 0$
- Отрицательно-: $\forall h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) < 0$
- Незнако-: $\exists h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) < 0, \exists \tilde{h} \neq 0 : Q(\tilde{h}) > 0$
- Полуопределённая (положительно определённая вырожденная): $Q(h) \geq 0, \exists h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) = 0$

1.2.2 Локальный максимум, минимум, экстремум

Рассмотрим только максимум, остальное аналогично (+ строгий)

$$f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$$

Если $\exists U(a) : \forall x \in U(a) \quad f(x) \leq f(a)$, то a — точка локального максимума.

1.2.3 Диффеоморфизм

$F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, O$ — открыто и связно (область)

- F — обратимо
- F — дифференцируемо
- F^{-1} — дифференцируемо

Тогда F — диффеоморфизм

1.2.4 Теорема о локальной обратимости

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $F \in C^1(O)$
- $x_0 \in O : \det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists U(x_0) : F|_{U(x_0)}$ — диффеоморфизм

1.2.5 Формулировка теоремы о гладкости обратного отображения в терминах систем уравнений

- $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$
- $$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_m \end{cases}$$
- $(x_0, y_0) : F(x_0) = y_0, \det \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$
- $\exists U(x_0), W(y_0) : \exists F : U \rightarrow W$ — диффеоморфизм : \exists гладкое решение
$$\begin{cases} x_1(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ x_2(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \vdots \\ x_m(y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$$

1.2.6 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

- $F = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$
- $$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$
- $(x^0, y^0) : F(x^0, y^0) = 0, \det \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \neq 0$
- $\exists U(x^0) \in \mathbb{R}^m, \varphi(x) : F(x, \varphi(x)) = 0, x \in U(x_0)$ — гладкие решения

1.2.7 Касательное пространство к k -мерному многообразию в \mathbb{R}^m

- $M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k -мерное C^r -гладкое многообразие в \mathbb{R}^m
- $p \in M$
- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ — параметризация $M \cap U(p)$
- $t^0 \in O : \Phi(t^0) = p$
- $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейный оператор

Тогда образ $\Phi'(t^0)$ — линейное подпространство в \mathbb{R}^m , не зависящее от Φ . Ну вот оно и называется *касательным пространством* ($T_p M$).

Причём важно, что это пространство не обязано проходить через точку p . Это просто пространство касательных векторов, откладываемых от начала координат (???).

1.3 Важные теоремы

1.3.1 Достаточное условие экстремума

Формулировка:

- $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $a \in \text{Int}(D)$
- $\nabla f(a) = 0$
- $f \in C^2(D)$
- $Q(h) := d^2 f(a, h)$

Тогда:

1. $Q(h)$ — положительно-определённая, тогда a — точка локального минимума
2. $Q(h)$ — отрицательно-определённая, тогда a — точка локального максимума
3. $Q(h)$ — знакоопределённая, тогда a — не точка локального экстремума
4. $Q(h)$ — полуопределённая, тогда информации недостаточно (может быть и так, и так)

Доказательство:

(1)

Давайте поближе присмотримся к $\forall h \in \mathbb{R}^m \ \forall t \in [0, 1] : f(a+h) = f(a) + df(a, h) + \frac{1}{2!} d^2 f(a+th, h)$ — это типа формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

Теперь рассмотрим разность $f(a+h) - f(a)$, и заметим, что $df(a, h) = 0$ по условию.

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{1}{2!} (f''_{x_1, x_1}(a+th)h_1^2 + f''_{x_1, x_2}(a+th)h_1h_2 + \dots) \\ &= f(a) + \frac{1}{2!} d^2 f(a+th, h) \\ &= f(a) + \frac{1}{2!} Q(h) + \frac{1}{2!} (d^2 f(a+th, h) - Q(h)) \\ &= f(a) + \frac{1}{2!} Q(h) + \frac{1}{2!} (d^2 f(a+th, h) - d^2 f(a, h)) \\ &= f(a) + \frac{1}{2!} Q(h) + \frac{1}{2!} (f''_{x_1, x_1}(a+th)h_1^2 - f''_{x_1, x_1}(a)h_1^2 + f''_{x_1, x_2}(a+th)h_1h_2 - \dots) \end{aligned}$$

Теперь заметим, что если повыносить коэффициенты при двойных производных, получится что-то в стиле $(f''_1 - f''_2)(\sum_{i,j} h_i h_j)$, где левая скобка — б.м. при $h \rightarrow 0$, а правая оценивается $|h|^2$. Таким образом, все эти штуки есть ничто иное, как $\alpha(h)|h|^2$, где $\alpha(h)$ — б.м. при $h \rightarrow 0$.

В итоге получаем:

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} Q(h) + \alpha(h)|h|^2 \underset{\text{по лемме об оценке кв. формы}}{\geq} \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2 + \alpha(h)|h|^2$$

$$\underset{\text{при } h \rightarrow 0}{\geq} \frac{\gamma_Q}{4} |h|^2 \underset{h \neq 0}{>} 0$$

Получается, что в окрестности нашей точки a все значения больше, чем в ней самой. Получается, это по определению это точка локального минимума.

(2)

Всё то же самое, только пусть мы рассматриваем функцию $g := -f$. С учётом отрицательно определённой квадратичной формы всё получится, и тут у нас точка локального максимума.

(3)

Шизофазия начинается тут. Т.к. у нас не знакоопределённая форма, значит $\exists h > 0 : Q(h) > 0$, $\exists \tilde{h} > 0 : Q(\tilde{h}) < 0$

Раньше мы с вами считали, что h может быть любым. Теперь же давайте рассмотрим относительно вот этих существующих h, \tilde{h} . Но чтобы устремлять всё это дело к 0, нам необходим некоторый параметр. Пусть он будет s . Тогда рассматриваем по тому же принципу: $f(a + sh) - f(a)$, рассуждения такие же, только там везде дополнительно вылезает s^2 , и, таким образом, функции станут зависеть от него:

$$f(a + sh) - f(a) \geq \frac{1}{2}Q(sh) - |\alpha(s)|s^2 = \frac{s^2}{2}Q(h) - |\alpha(s)|s^2 \geq \frac{1}{4}Q(h)s^2$$

Вот, тут у нас получилось, что это минимум. А если отработаем с \tilde{h} , то получится наоборот.

(4)

Ну а тут, слава Богу, достаточно привести пример.

Пусть $f(x) := x_1^2 - x_2^4$, $a = (0, 0)$

$df(a, h) = 0$, $d^2f(a, h) = 2h_1^2$

Видно, что в этом случае мы можем бегать и по x_1 , и по x_2 , и в итоге получим разные значения, потому что форма вообще зависит только от одной компоненты.

А для почти идентичной $g(x) := x_1^2 + x_2^4$ уже всё наоборот, и существует строгий локальный минимум.

ч. т. д.

1.3.2 Теорема о неявном отображении

Формулировка:

- $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $(a, b) \in O$, $a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$
- $F(a, b) = 0 \in \mathbb{R}^n$
- $F \in C^r, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- $\det F'_y(a, b) \neq 0$

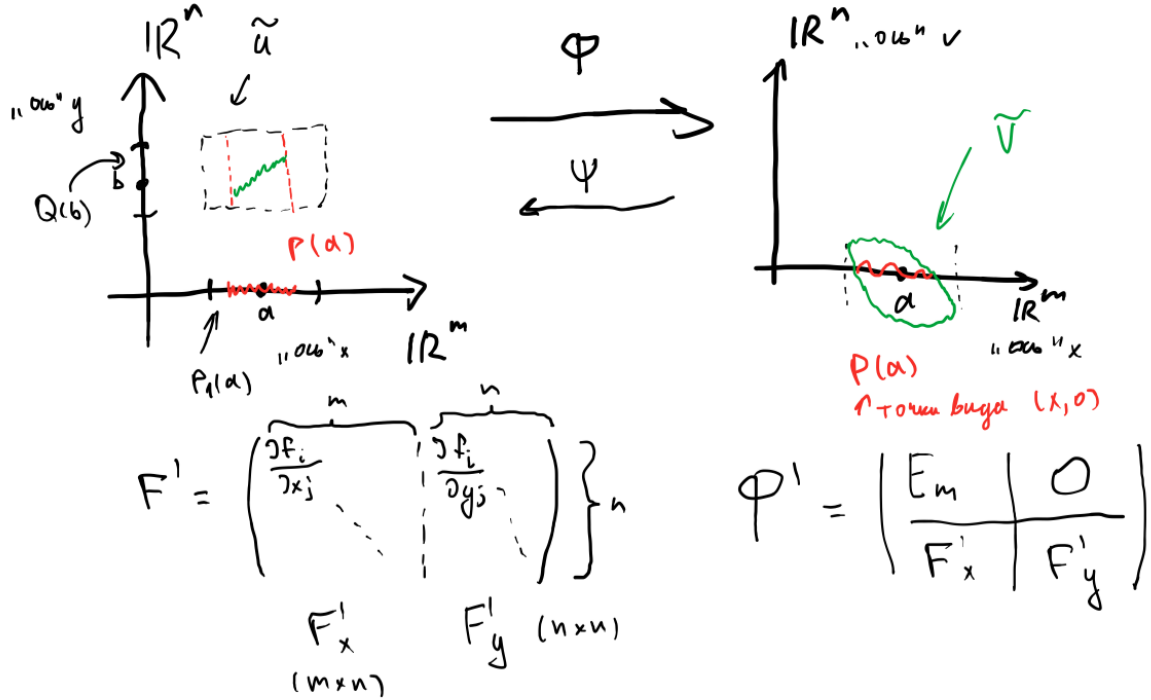
Тогда $\exists P(a) \subset \mathbb{R}^m, Q(b) \subset \mathbb{R}^n$ — окрестности, и $\exists! \varphi : P \rightarrow Q \in C^r$ гладкое:

$$\forall x \in P : F(x, \varphi(x)) = 0$$

Бонус:

$$\varphi'(x) = -(F'_y(x, \varphi(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, \varphi(x)) \Leftrightarrow F'_x(x, \varphi(x)) + F'_y \cdot \varphi'(x) = 0 \text{ (продифференцировали условие)}$$

Доказательство:



Нет, это не шутка. Всё доказательство строится вокруг одной картинки и яростного махания руками со знанием дела.

Заведём $\Phi(x, y) : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$, $\Phi(x, y) = (x, F(x, y))$. Логично, что по условию $\Phi(a, b) = (a, 0)$. Если посмотреть на производный оператор (а она дифференцируема, так как F — дифференцируема (?)), то прекрасно видно, что матрица квадратная, да ещё и блочная $\Rightarrow \det \Phi'(a, b) = \det E_m \cdot \det F'_y(a, b)$. По условию ничего из этого не 0, следовательно определитель невырожден. А поэтому, по теореме о локальной обратимости: Φ — локальный диффеоморфизм класса C^r .

Заведём окрестность (как декартово произведение, почему бы и нет) $\tilde{U} = P_1 \times Q$. P_1 немного большевата для P , поэтому потом мы её немного подрежем. $\tilde{V} = \Phi(\tilde{U})$. Заметим, что все эти окрестности открыты по предыдущим теоремам.

Т.к. у нас $\Phi|_{\tilde{U}}$ — диффеоморфизм, на прообразе и образе имеет место быть обратное отображение $\Psi : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U} = \Phi^{-1}$.

Заметим, что отображение Φ не меняет “ x ”-овые координаты (по построению функции, см. рисунок), “ y ”-овые же как-то колбасит, как показано зелёной областью. Значит и Ψ их тоже не меняет, т.к. диффеоморфизм. Именно поэтому справа у нас координаты (x, v) . Можно представить $\Psi(x, v) = (x, H(x, v))$, $H : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^r$. Поэтому давайте выберем окрестность

$P \subset \mathbb{R}^m := \tilde{V} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Она открыта по теореме (1 сем) о свойствах открытых множеств (конечное пересечение открытых открыто). $U = P \times Q$

Вооот. А теперь давайте предположим в качестве $\varphi(x) : P \rightarrow Q := H(x, 0)$. Она принадлежит классу C^r , т.к. все функции до этого в нём лежали. А почему выполняется условие $F(x, \varphi(x)) = 0, x \in P$? Ну давайте проследим путь. Что такое вообще $H(x, 0)$ — мы берём все точки вида $(x, 0)$ (см. картинку), и взаимно-однозначно отправляем их обратно в левую часть, тем самым вычисляя им значение $b_0 \in Q(b)$ (этим и занимается $H(x, v)$ по своей сути). Ну вот. А потом мы отправляем точку (x, b_0) в правую часть, и куда же она должна приехать, если уезжала из 0? Правильно, в 0. Ура, условие выполняется.

Осталось доказать единственность, опять давайте помашем руками:

$$x \in P, y \in Q : F(x, y) = 0, \quad \Phi(x, y) = (x, 0)$$

$$(x, y) = \Psi\Phi(x, y) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \varphi(x))$$

ч. т. д.

1.3.3 Необходимое условие относительного локального экстремума

Формулировка:

- $f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}, \Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f, \Phi \in C^1$
- $M_\Phi \subset E : \{x \mid \Phi(x) = 0\}$
- $a \in E$ — точка относительного локального экстремума ($\forall x \in U(a) \cap M_\Phi, f(x_0) \leq f(x)$ — это нестрогий максимум, остальное аналогично)
- $\Phi(a) = 0$ — уравнение связи
- $\text{rank } \Phi'(a) = n$

$$\text{Тогда } \lambda \in \mathbb{R}^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) : \begin{cases} f'(a) + \lambda\Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$$

Второе условие бесплатное, оно из условия.

Доказательство:

Так как у нас ранг n на матрице производного оператора Φ' , давайте считать, что он достигается на $m+1 \dots m+n$ (n штук) столбцах матрицы (это матрица n строк \times $(m+n)$ столбцов). Тогда в стиле всех предыдущих теорем а-ля “неявное отображение” разделим переменные: $(x_1, x_2, \dots, x_m), (x_{m+1}, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \mapsto (x, y)$. Точку a тоже: (a_x, a_y) .

Запускаем теорему о неявном отображении: $\Phi(a) = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ — невырожденный оператор. Тогда существует $! \varphi : U(a_x) \rightarrow P(a_y), \Phi(x, \varphi(x)) = 0$. Замечаем, что $x \mapsto (x, \varphi(x))$ — параметризация простого гладкого m -мерного многообразия в $M_\Phi \cap \{U(a_x) \times P(a_y)\}$.

Тогда для $g(x) = f(x, \varphi(x))$ точка a_x — просто точка локального экстремума. Почему? Управляя теперь точкой x , мы с помощью g попадаем в M_Φ , внутри которого $\Phi(x) = 0$ всегда! Поэтому

внутри хорошего (в рамках этой задачи) множества мы и ищем экстремум. Это можно легко понять, если представить поиск экстремума на какой-то области графика (ради этого всё и делается же).

Хорошо, давайте его искать. По необходимому условию экстремума, ЧП g должны быть равны нулю (φ' бывает только по x):

$$f'_x(a) + f'_y(a) \cdot \varphi'(a_x) = 0 \quad (\in \mathbb{R}^m)$$

Начиная с этого места опускаем подстановку точек, но они там есть! Вспоминаем, что у нас есть $\Phi(x, \varphi(x)) = 0$. Также дифференцируем:

$$\Phi'_x + \Phi'_y \varphi' = 0 \quad (\in Mat(n, m))$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^m : \quad \lambda \Phi'_x + \lambda \Phi'_y \varphi' = 0 \quad (\in \mathbb{R}^m)$$

Тогда можно вычесть из уравнения с f уравнение с Φ — размерности сошлись:

$$f'_x - \lambda \Phi'_x + (f'_y - \lambda \Phi'_y) \varphi' = 0$$

Пусть $f'_y - \lambda \Phi'_y = 0$. Тогда:

$$\lambda = f'_y \cdot (\Phi'_y)^{-1}$$

Если мы берём это λ (а нас и просят её предъявить), то наше предположение верно. Раз разность 0, то и иксвая разность равна нулю:

$$\begin{cases} f'_y - \lambda \Phi'_y = 0 \\ f'_x - \lambda \Phi'_x = 0 \end{cases}$$

Это векторная запись точек, которые мы когда-то разъединили. Давайте соединим обратно:

$$f' - \lambda \Phi' = 0 \quad \lambda = f'_y \cdot (\Phi'_y)^{-1}$$

ч. т. д.

1.4 Теоремы

1.4.1 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

Формулировка:

Пусть X, Y — нормированные линейные пространства, $A \in \mathbb{L}(X, Y)$.

Тогда следующие утверждения эквиваленты:

1. A — ограниченный оператор, в том смысле, что $\|A\|$ — конечно
2. A — непрерывно в нуле
3. A — непрерывно на всём X
4. A — равномерно непрерывно

Доказательство: Для $\|A\| \equiv 0$ — тривиально (супремум = 0, следовательно 0), поэтому далее считаем норму оператора ненулевой. Ну, во-первых, $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ — очевидно, просто одно следует из другого.

Во-вторых, $2 \Rightarrow 1$:

По определению непрерывности в нуле: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \forall x \in B(0, \delta) : |Ax| < \varepsilon$ (это нам дано, значит можем пользоваться, как хотим)

Давайте рассмотрим $\varepsilon = 1 : |Ax| < 1$, потом делим на δ :

$$|A \frac{x}{\delta}| < \frac{1}{\delta}$$

Переназначим x и заметим, что $x \in \overline{B(0, 1)} : |Ax| \leq \frac{1}{\delta}$ (обратите внимание, мы взяли замыкание шара и получили нестрогое неравенство)

Тогда для $x \in S(0, 1) : |Ax| \leq \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} \cdot |x|$ — по замечанию 4 из определения, $\|L\| \leq \frac{1}{\delta}$.

В-третьих, $1 \Rightarrow 4$:

Давайте опять запишем определение равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Назначим $\delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|}$

$$|Ax_1 - Ax_2| < \varepsilon$$

По линейности:

$$|A(x_1 - x_2)| < \|A\| \cdot |x_1 - x_2| = \|A\| \delta = \|A\| \frac{\varepsilon}{\|A\|} = \varepsilon$$

ч.т.д.

1.4.2 Теорема Лагранжа для отображений

Формулировка: $F : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l, D$ — открытое

F — дифференцируемо на $D, [a, b] \subset D$

Тогда $\exists c \in [a, b] : |F(a) - F(b)| \leq \|F'(c)\| \cdot |b - a|$ *Доказательство:* Заведём функцию $f(t) = F(a + t(b - a)), t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$. То есть как-бы двигаем точку по $[a, b]$.

$$f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$$

Заметим, что это оператор $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^l$, т.к. $F'(a + t(b - a)) - l$, а $b - a - m$ (???)

Вспомним также теорему Лагранжа для векторнозначных функций:

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, F$ — дифференцируема на $[a, b], \exists c \in [a, b]$

$$|F(a) - F(b)| = |F'(c)| \cdot |b - a|$$

Рассмотрим нашу функцию $f(t)$ по этой теореме в точках 0 и 1:

$$|f(1) - f(0)| = |f'(c)| \cdot |1 - 0|$$

Подставим:

$$|F(b) - F(a)| = |F'(a + c(b - a)) \cdot (b - a)| \underset{\text{по замечанию 3}}{\leq} \|F'(a + c(b - a))\| \cdot |b - a|$$

Ну а дальше, пусть $c := a + c(b - a)$ и всё супер.

ч.т.д.

1.4.3 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

Формулировка (безымянная лемма):

Возможно, она нахер не нужна, но пусть всё же будет

Пусть $B \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

Если $c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m : |Bx| \geq c|x|$, тогда $B \in \Omega_m$ и $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

Доказательство:

B — очевидно инъективен, т.к. любой ненулевой вектор у нас отправляется в разные точки \Rightarrow биекция \Rightarrow обратимый $\Rightarrow \exists B^{-1}$

Теперь пусть $y = B^{-1}x \Rightarrow |Bx| = |y| \geq c|x| = c|B^{-1}y| \Rightarrow |B^{-1}y| \leq \frac{1}{c} \cdot |y| \underset{\text{по замечанию 3}}{\Rightarrow} \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

ч.т.д.

Замечание:

Если $A \in \Omega_m$, то можно провенуть такую штуку: $|x| = |A^{-1}Ax| \leq \|A^{-1}\| \cdot |Ax|$ (по 3 замечанию). Тогда:

$$|Ax| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} |x|$$

Формулировка:

Пусть $L \in \Omega_m$ — обратимый оператор, $M \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\|L - M\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$

Тогда:

1. $M \in \Omega_m$ — обратимый
2. $\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{\|L^{-1}\|} - \|L - M\|}$
3. $\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\frac{1}{\|L^{-1}\|} - \|L - M\|} \cdot \|L - M\|$

Доказательство:

(1) и (2)

Рассмотрим $|Mx|$ с рандомным возможным x . По неравенству треугольника (это всё же норма) и оценкам по замечаниям сверху:

$$|Mx| \geq |Lx| - |(M - L)x| \geq \frac{1}{\|L^{-1}\|}|x| - \|M - L\| \cdot |x| = \left(\frac{1}{\|L^{-1}\|} - \|M - L\| \right) |x|$$

По безымянной лемме всё доказано (заметим, что выражение в скобочках — положительная константа).

(3)

Неповторимый оригинал:

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{m} = \frac{m - l}{ml}$$

Жалкая копия (доказывается тривиально, раскрытием скобок):

$$L^{-1} - M^{-1} = M^{-1}(M - L)L^{-1}$$

Отнормируем:

$$\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \|M^{-1}\| \cdot \|L - M\| \cdot \|L^{-1}\|$$

Ну и просто подставим (2).

ч.т.д.

Следствие:

Отображение $\Omega_m \rightarrow \Omega_m : L \rightarrow L^{-1}$ непрерывно.

Доказательство:

Давайте по Гейне: если $B_k \rightarrow L$, то сходится ли $B_k^{-1} \rightarrow L^{-1}$???

Во-первых, начиная с некоторого места:

$$|B_k - L| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|}$$

$$|B_k^{-1} - L^{-1}| \leq \underbrace{\frac{\|L^{-1}\|}{\frac{1}{\|L^{-1}\|} - \underbrace{\|L - B_k\|}_{\rightarrow 0}}}_{\text{огр.}} \cdot \|L - B_k\| \rightarrow 0$$

ч.т.д.

1.4.4 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

Формулировка: $F : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, F дифференцируема на D , $F' : D \rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $F \in C^1(D) \Leftrightarrow \forall i, j : \frac{\partial f_i}{\partial x_j} — непрерывны$
2. $F' — непрерывно на D : \forall x : \mathbb{R}^m \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{x} |x - \tilde{x}| < \delta \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| < \varepsilon$

Доказательство:

(1) \Rightarrow (2)

Давайте зафиксируем какие-то i, j и относительно них рассмотрим наше условие непрерывности частных производных по отдельности. Также, применим китайскую грамоту и возьмём немного другой эпсилон:

$$\forall x : \mathbb{R}^m \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{x} |x - \tilde{x}| < \delta \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$$

Тогда, так как нам это уже известно, проверим условие (2):

$$\|F'(x) - F'(\tilde{x})\| \underset{\text{по лемме об ограниченности нормы}}{\leq} \sqrt{\sum_{i,j} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) \right)^2}$$

Ну а теперь просто оцениваем всё это дело эпсилоном!

$$\leq \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \sqrt{ml \cdot \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

(2) \Rightarrow (1)

Ну а вот тут душный пиздец. Идея в том, что мы хотим проверить для каждой частной производной с индексами (v, u) наше предположение.

Давайте выберем $h \in \mathbb{R}^m = (0, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{u\text{-ое число}}, 0, \dots, 0, 0)^T$. Теперь нам известно, что:

$$|(F'(x) - F'(\tilde{x}))h| \leq \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| \cdot |h| \underset{|h|=1}{\leq} \varepsilon$$

Ну а с другой стороны, $(F'(x) - F'(\tilde{x}))h$ есть ничто иное, как вектор $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_u}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_u}(\tilde{x}) \right)_{i=1\dots l}$. Поэтому давайте рассмотрим его норму по вышеиспользованной лемме:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_u}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_u}(\tilde{x}) \right)^2} \leq \varepsilon$$

Ну, раз уж у нас корень суммы квадратов меньше, то и каждое слагаемое по отдельности тоже меньше. Давайте зафиксируем $i = v$ и получим долгожданное:

$$\left| \frac{\partial f_v}{\partial x_u}(x) - \frac{\partial f_v}{\partial x_u}(\tilde{x}) \right| \leq \varepsilon$$

Так как данные эпсилон-дельта преамбуды везде были одинаковыми, то и тут всё супер. Доказано, не умаляя общности!!!!

ч. т. д.

1.4.5 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

Формулировка (Ферма):

$f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Int}(D), f$ — дифференцируема в точке a (точка локального экстремума)

Тогда $\forall l \in \mathbb{R}^m : |l| = 1$ (направление) $\frac{\partial f}{\partial l}(a) = 0$

Доказательство:

Тривиалити, для $f|_{\text{прямая через } a \text{ по направлению } la}$ — тоже точка локального экстремума, поэтому по одномерной теореме Ферма всё работает!

ч. т. д.

Следствие (Необходимое условие экстремума)

a — точка локального экстремума $\Rightarrow \forall k \in [1, m] : \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$

Следствие (Ролль)

- $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $K \subset D$ — компакт
- f — дифференцируема в $\text{Int}(K)$, непрерывна на K
- $f|_{\text{граница } K} = \text{const}$

Тогда $\exists a \in \text{Int}(K) : \nabla f \equiv 0$

Доказательство

По теореме Вейерштрасса (привет, 1 сем), на компакте функция достигает своего минимума и максимума. Тогда либо у нас на $K f \equiv \text{const}$, тогда такая точка — любая, либо же по теореме Ферма она существует где-то внутри компакта.

ч. т. д.

1.4.6 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

Формулировка (Лемма об оценке квадратичной формы): Q — положительно определённая квадратичная форма.

Тогда $\exists \gamma_Q : \forall h \quad Q(h) \geq \gamma_Q \cdot |h|^2$

Доказательство:

А давайте так:

$$\gamma_Q := \min_{|x|=1} Q(x)$$

. Он достигается, так как мы гоняем по компакту (сфере), следовательно по Вейерштрассу всё хорошо.

Для $x = 0$ всё тривиально, поэтому при $x \neq 0$: $Q(x) = |x|^2 Q(\frac{x}{|x|}) \underset{\frac{x}{|x|} \text{ от } 0 \text{ до } 1!}{\geq} \gamma_Q |x|^2$

Формулировка (Лемма об эквивалентных нормах):

$p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — норма

Тогда $\exists C_1, C_2 > 0 : \forall x \quad C_1|x| \leq p(x) \leq C_2|x|$

Доказательство:

То же самое:

$$C_1 := \min_{|x|=1} p(x), \quad C_2 := \max_{|x|=1} p(x)$$

Для минимума: $\forall x : p(x) = |x| \cdot p(\frac{x}{|x|}) \geq C_1|x|$, для максимума аналогично.

ч. т. д.

1.4.7 Лемма о “почти локальной инъективности”

Формулировка:

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $x_0 \in O$
- F — дифференцируема в x_0
- $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists C > 0, \delta > 0 \quad \forall h \in B(0, \delta) \quad |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$

Доказательство:

1. Если F — линейное отображение, то рассмотрим: $|h| = |F^{-1}Fh| \leq \|F^{-1}\| \cdot |Fh|$. По линейности:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |Fh| \geq \underbrace{\frac{1}{\|F^{-1}\|}}_C |h| \quad \forall \delta$$

2. В противном случае, запишем определение дифференцируемости: $|F(x_0 + h) - F(x_0)| = \underbrace{|F'(x_0)h|}_{>0} + \underbrace{|h| \cdot \alpha(h)}_{\text{б. м.}} \underset{\text{нер-во треугольника}}{\geq} \underbrace{C}_{\text{из пункта 1}} |h| + \alpha(h) \cdot |h|$. Давайте выберем δ так, чтобы $\alpha(h) < \frac{C}{2}$

$$\dots \geq \frac{C}{2}|h|$$

ч.т.д.

Замечание

При $\forall x \quad \det F'(x) \neq 0$ не следует инъективность!

1.4.8 Теорема о сохранении области

Формулировка:

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, O$ — открытое
- F — дифференцируемо
- $\forall x \in O : \det F'(x) \neq 0$

Тогда $F(O)$ — открытое множество.

Замечания

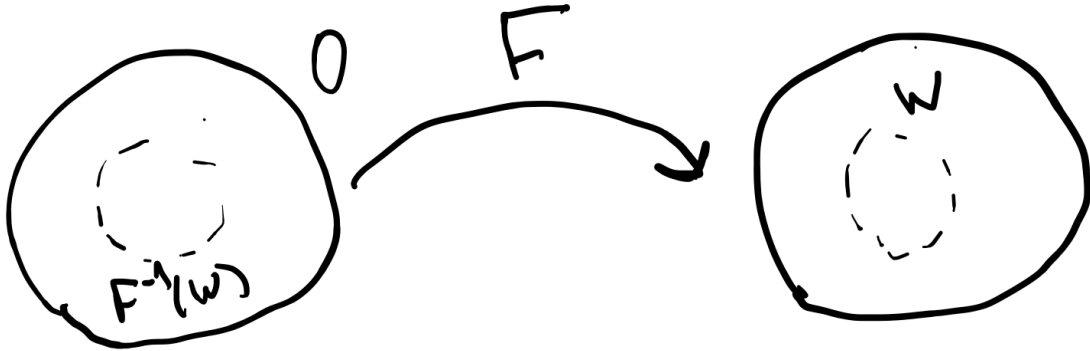
1. Если O — связное и F — непрерывное, то $F(O)$ — связное

Доказательство:

Ну, типа очев. Если у нас есть $W_1, W_2 \subset F(O)$, причём они не связны, то логично что получиться они могли только вследствие $F^{-1}(W_1) \cap F^{-1}(W_2) = \emptyset$

2. F — непрерывное $\Leftrightarrow \forall W \subset F(O)$ — открытого, $F^{-1}(W)$ — открыто Доказательство:

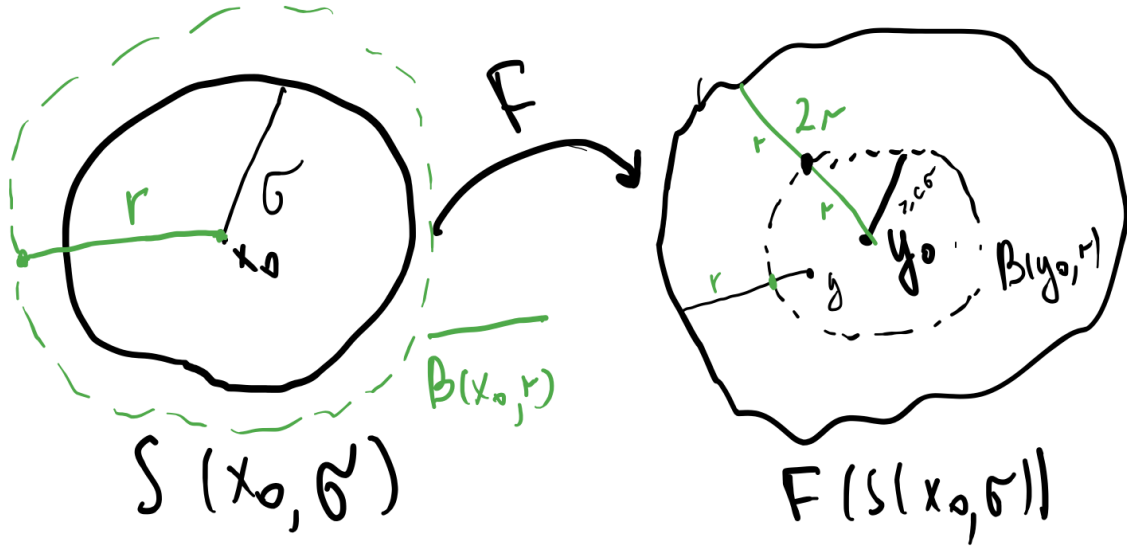
По топологическому определению непрерывности (привет, 1 сем!).



Доказательство:

В общем, основная идея доказательства состоит в том, чтобы доказать, что любая точка из образа является внутренней, тогда по определению открытого множества мы докажем и вывод. $\forall x_0 \in O : y_0 = F(x_0)$.

По лемме выше, $\exists C > 0, \exists \delta > 0 : \forall h \in \overline{B(0, \delta)} : |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$. Не стоит смущаться при виде замкнутого шара, это мы просто провели двойную бухгалтерию. Причём, как видно на картинке, граница нашей области отображается куда-то далеко (аж на константу) больше, чем просто на δ .



Заведём расстояние $dist(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$ между точкой и множеством. Пусть $r = \frac{1}{2} \cdot dist(y_0, \underbrace{F(S(x_0, \delta))}_{\text{компакт}})$.
непр. \Rightarrow компакт

Так как у нас там всё компакты то минимум достигается, и, что важнее всего, всё это больше нуля.

Теперь самое интересное: докажем, что $B(y_0, r) \subset F(O) : \forall y \in B(y_0, r) \exists x \in B(x_0, \delta) : F(x) = y$. Это докажет нам всё остальное.

$\forall y \in B(y_0, r) : \rho(y, F(S(x_0, \delta))) > r$. Это очевидно, на рисунке всё видно. Рассмотрим $g(x) := |F(x) - y|^2, x \in B(x_0, \delta)$. Как было сказано выше, мы доказываем, что у нас $\exists x \Leftrightarrow g(x) = 0$ возможно. Ну, очевидно, что, видимо, в если там и есть ноль, то это экстремум функции (модуль же, лол).

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 \underset{\text{очевидно по рисунку}}{\leq} r^2$$

Также, по рисунку очевидно, что для всех x с границы, наша функция отправляет их сильно дальше.

$$\forall x \in S(x, \delta) \quad g(x) \geq r^2$$

Получается, наш минимум лежит где-то внутри сферы. Поищем его. По определению евклидовой нормы:

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + (F_2(x) - y_2)^2 + \dots + (F_m(x) - y_m)^2$$

По необходимому условию экстремума, $\nabla F(x) = 0 \Rightarrow \forall i \in [1, m] : \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$

$$g'(x) = 2(F_1(x) - y_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + 2(F_2(x) - y_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + 2(F_m(x) - y_m) \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0$$

Или в векторной форме:

$$2 \cdot (F(x) - y) \cdot F'(x) = 0$$

Однако, по условию у нас производный оператор невырожденный! Следовательно, остаётся только $F(x) = y$. А это то, что мы и искали!!!!

ч. т. д.

1.4.9 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

Формулировка:

- $f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- O — открыто
- $l < m$
- $F \in C^1(O)$
- $\forall x \in O : \text{rank}(F') = l$

Тогда $F(O)$ — открыто

Доказательство:

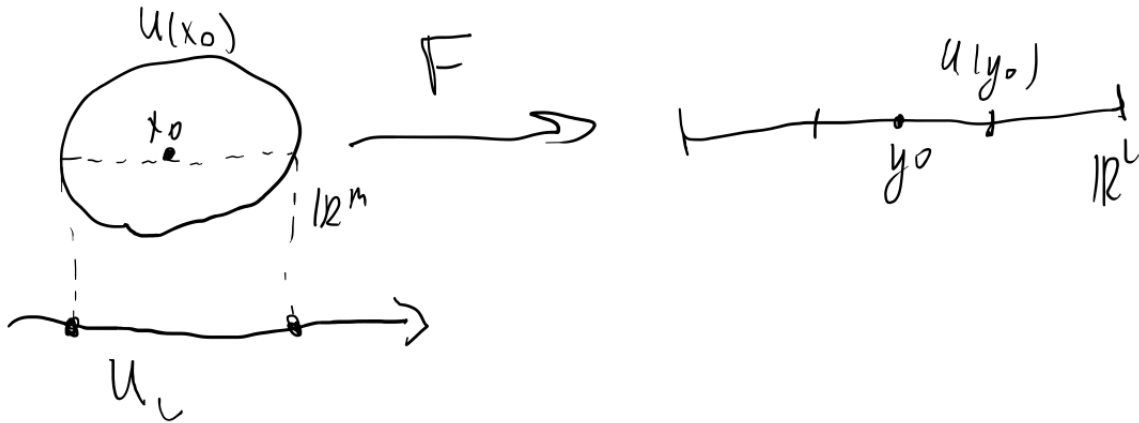
Зафиксируем $x_0 \in O$. Так как у нас матрица производного оператора теперь имеет вид не квадратный, а прямоугольный $(l \times m)$, просто так применить предыдущую теорему не получится. Поэтому, не умаляя общности, давайте считать, что вот этот ЛНЗ набор векторов в матрице реализуется на позициях $1 \dots l$. Тогда мы можем посчитать определитель этой матрицы:

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq l} (x_0) \neq 0$$

При этом, так как мы потребовали непрерывность, немножко пошевелив x_0 всё также будет работать:

$$\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \quad \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq l} (x) \neq 0$$

Мы уже доказали, что $F(x_0)$ — внутренняя в $F(U(x_0))$ (по предыдущей теореме). Осталось немного пошаманить, чтобы доказать, что действительно из пространства большей в меньшую всё корректно отобразится.



Давайте заведём такую окрестность $U_l = (t_1, t_2, \dots, t_l) : (t_1, t_2, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m)$. Как видно на рисунке, это такая проекция в пространстве большей размерности на пространство меньшей. Теперь заведём $\tilde{F} : U_l \rightarrow \mathbb{R}^l$ и посмотрим на её матрицу производных:

$$\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial t_j} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t_1, t_2, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m) \right)$$

И вот теперь, по непрерывности \tilde{F} и прошлой теореме, всё по идее работает.

ч. т. д.

1.4.10 Теорема о гладкости обратного отображения

Формулировка:

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
- F — обратимо
- $F \in C^r(O), r \in 1, 2, \dots$
- $\forall x \in O : \det F'(x) \neq 0$

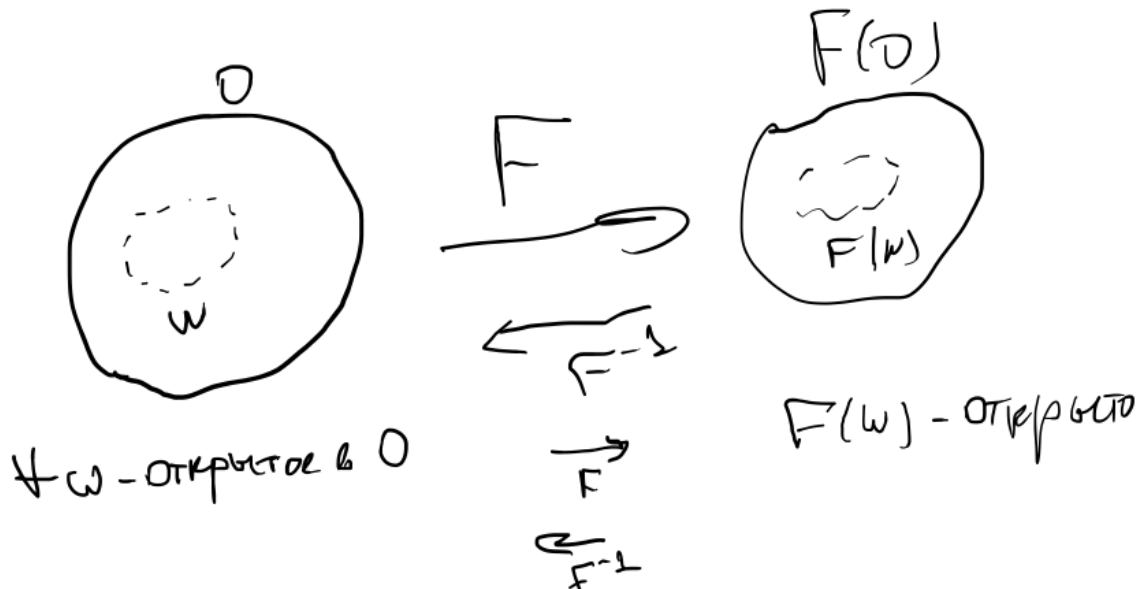
Тогда $F^{-1} \in C^r$, $((F^{-1}(y)))' = (F'(x))^{-1}$ при $F(x) = y$

Доказательство:

Докажем по индукции по r . Замое запарное — база.

База:

Пусть $x_0 \in O$, $F(x_0) = y_0$. $S := F^{-1}$. Заметим, что S — непрерывно по теореме о сохранении области и теореме о топологическом определении непрерывности (типа для любого открытого из прообраза образ тоже открыт)



По лемме о “почти” локальной инъективности:

$$\exists C, \delta > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta) \quad |F(x) - F(x_0)| \geq C|x - x_0| \Rightarrow |x - x_0| \leq \frac{1}{C}|F(x) - F(x_0)|$$

Запишем определение дифференцируемости для F и сразу распишем всё в терминах y :

$$A = F'(x_0), \quad \underbrace{F(x) - F(x_0)}_{y - y_0} = A(\underbrace{x - x_0}_{S(y) - S(y_0)}) + \underbrace{\alpha(x)}_{S(y)}|x - x_0|$$

Выражаем $(S(y) - S(y_0))$:

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)|}_{\beta(y) \stackrel{???}{=} o(|y - y_0|)}$$

Получилось вполне себе нормальное определение для дифференцируемости S . Надо лишь доказать “о”-шку при $y \rightarrow y_0$. Оценим её с помощью вывода из леммы выше и стандартной оценки операторной нормы (не забываем, что мы как-бы управляем y ???):

$$\begin{aligned} |x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta &\stackrel{\text{при } y \text{ близких к } y_0}{\Rightarrow} |\beta(y)| = |A^{-1}\alpha(S(y))| \cdot |S(y) - S(y_0)| \\ &\leq \underbrace{\frac{\|A^{-1}\|}{C}}_{\text{const}} \cdot \underbrace{|y - y_0|}_{|F(x) - F(x_0)|} \cdot |\alpha(S(y))| \\ &= o(|y - y_0|) \end{aligned}$$

Фактически “о”-шка доказана по определению. Тем самым доказана дифференцируемость. А что с непрерывностью производной то? Этого мы ещё не доказывали. Построим цепочку непрерывных отображений:

$$y \mapsto S(y) = x \mapsto A(x) \mapsto A^{-1}(x) = S'(y)$$

Непрерывность дифференцирования обратного производного оператора доказывается маханием руками на тему отдельных производных в матрице. Тем самым база доказана.

Переход

Достаточно тривиальный. Посмотрим при $m = 1$: $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x(y))}$. То есть, пусть $f \in C^{r+1}$, тогда надо доказать, что $f' \in C^r$. Ну там вот это и написано, обратная функция вообще C^∞ , $f'(x) \in C^r$ — очев. Для многомерного случая всё тоже самое, только формула выглядит пафоснее $\dots = (F'(x(y)))^{-1}$

ч. т. д.

1.4.11 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

Формулировка:

$$M \subset \mathbb{R}^m, 1 \leq k \leq m, 1 \leq r \leq \infty$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\exists U(p) \in \mathbb{R}^m : M \cap U(p)$ — гладкое k -мерное C^r -гладкое многообразие

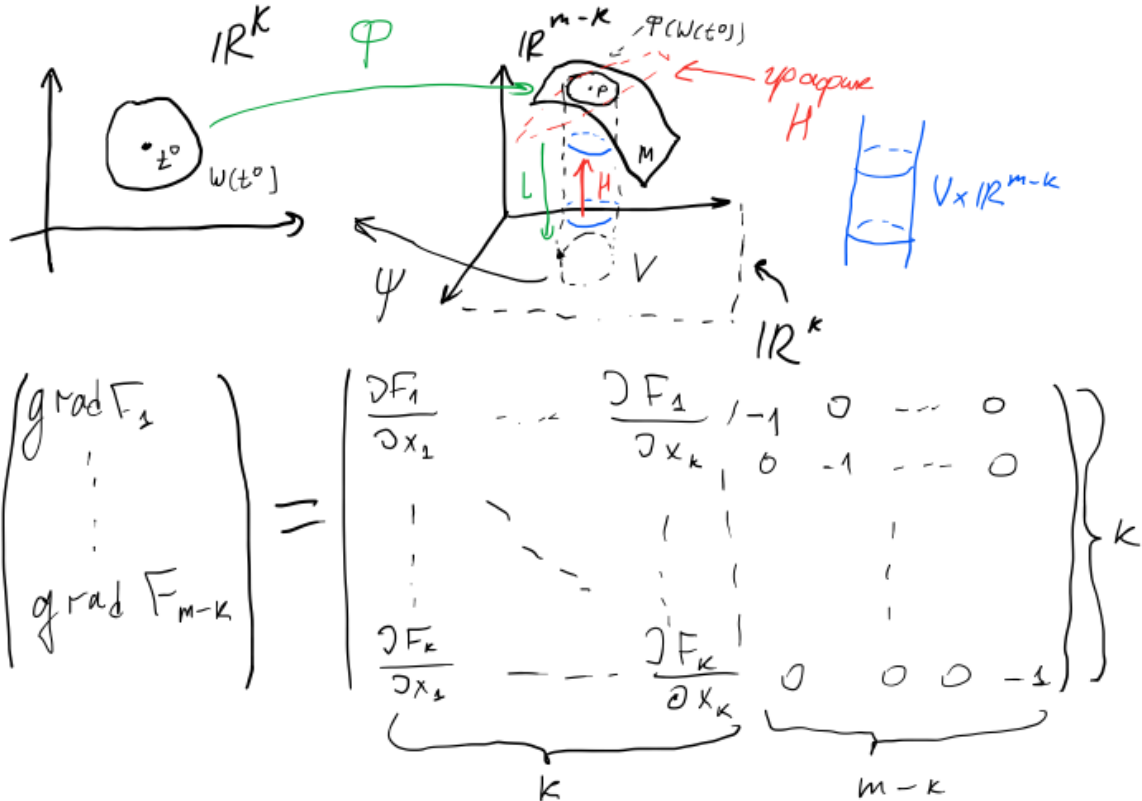
2. $\exists \tilde{U}(p) \in \mathbb{R}^m : \exists (F_1, F_2, \dots, F_{m-k}) : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}, F_i \in C^r$

(a) $\forall x \in \tilde{U} \cap M \Leftrightarrow F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_{m-k}(x) = 0$

(b) $\nabla F_1, \nabla F_2, \dots, \nabla F_{m-k}$ — ЛНЗ

Доказательство (оставь надежду всяк сюда идущий):

(1) \Rightarrow (2)



Нам дано многообразие. А что это значит? $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^r$ — гомеоморфизм. Давайте посмотрим на неё в смысле координатных функций: $\exists \Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l), p = \Phi(t^0), \text{rank } \Phi'(t^0) = k$. Всё по определению.

У нас тут ЛНЗ набор (ранг k), поэтому давайте опять считать, что он реализуется на первых k векторов, поэтому:

$$\left(\det \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j} \right)_{i=1 \dots k} = 0$$

Теперь давайте, во-первых, примем за $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^k$ (на рисунке справа, всё логично). И заведём $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k : (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_k)$ — просто проекция первых k координат. Тогда заметим, что $(L \circ \Phi)'(t^0)$ — невырожденный оператор: всё просто, он мапит первые k координат, а оператор по ним невырожден по определению многообразия, вон, наверху написано. Значит, это локальный диффеоморфизм (по соответствующей теореме). А если $W(t^0)$ — окрестность, то $L \circ \Phi : W \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k \in C^r$ — диффеоморфизм (класс гладкости сохраняется).

Тогда давайте введём ещё парочку отображений: $\Psi : V \rightarrow W := (L \circ \Phi)$ — обратное отображение, также диффеоморфизм, т. к. оно там всё диффеоморфизм, следовательно биекция сохраняется. Также, получается, раз у нас биекция, над V множество в \mathbb{R}^{m-k} это график какого-то отображения. Оно точно существует, ведь L — биективно. Назовём его $H : V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$

При $x' \in V : (\underbrace{x'}_{1\dots k}, \underbrace{H(x')}_{k+1\dots m-k}) = \Phi\Psi(x')$ — это правда, просто проехали по путям и вернулись. В

L у нас только первые k координат, а H нам дорисовывает остальные $m - k$ штук. Ну и вот, в правой стороне равенства у нас диффеоморфизмы, слева проекция (там вообще всё гуд) и $H \Rightarrow$ это тоже диффеоморфизм класса C^r .

Почти всё. Осталось чётко определить, на какой окрестности будут определены наши функции. Смотрите, вообще наш график H может в принципе быть и шире, чем $W(t^0)$, и тогда $L(\text{график } H)$ может быть больше, чем V , и мы не хотим со всем этим разбираться — зачем? Поэтому давайте аккуратненько всё подрежем. $V \times \mathbb{R}^{m-k}$ — открытое, такой типа цилиндр вверх. Φ — гомеоморфизм, поэтому $\Phi(W)$ — открытое. Но в M — это важно! Оно может и не быть открыто во всём \mathbb{R}^m , а конкретно на M с индуцированной метрикой точно открыто. Тогда вспоминаем теорему из 1-го семестра об открытом множестве в пространстве и подпространстве: $M \subset \mathbb{R}^m, \Phi(W) \subset M$ — открытое, тогда $\exists G \subset \mathbb{R}^m : G \cap M = \Phi(W), G$ — открытое. И тогда пусть область определения $\tilde{U}(p) = G \cap \{V \times \mathbb{R}^{m-k}\}$ — открытое в \mathbb{R}^m , отрезали всё лишнее.

Ну всё, совсем немного осталось. Надо задать такие функции, что они будут нулевыми при $x \in \tilde{U} \cap M$. Пусть $F_j(x) = H_j(L(x)) - x_{j+k}$. Что тут написано: мы берём x , отправляем его в L , оставляя только первые k координат. Потом H отправляем его обратно наверх, причём конкретно H_j вернёт нам x_{k+j} -ю координату, ведь, как мы писали выше, точки из графика H выглядят как $(\underbrace{x'}_{1\dots k}, \underbrace{H(x')}_{k+1\dots m-k})$. Ну всё, (А) выполнено автоматически. А что там с градиентами? Давайте просто

их построим и увидим, что в конце будет просто $-E$, что и даст нам $m - k$ независимых векторов (ну, ранг такой).

(2) \Rightarrow (1)

Тут нам сильно помогут наработки предков. Давайте подгоним наше условие под условие теоремы о неявном отображении (в смысле системы уравнений). У нас там была система из уравнений $F(x, y) = 0$, где x — “переменные”, а y — “функции” и решение (x^0, y^0) , такое что при $\forall x \in P(x^0), y \in Q(y^0) : F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \exists \varphi : P \rightarrow Q : \phi(x) = y$. Давайте назначим первые k координат переменными, а следующие $m - k$ — функциями. Опять же, у нас ЛНЗ лабор этих градиентов этих функций, а именно:

$$\left(\det \frac{\partial F_i}{\partial x_{j+k}} \right)_{1 \leq i, k \leq m-k} (x^0, y^0) \neq 0$$

Значит, условие теоремы выполнено, и параметризация есть ничто иное, как $\Phi : U(p_1, p_2, \dots, p_k) \rightarrow \mathbb{R}^m$ $x' \mapsto (x', \varphi(x'))$ на $x \in M \cap \tilde{U} \cap \{P \times Q\}$ (по сути график φ). В том числе это и гомеоморфизм, так как в одну сторону всё непрерывно, так как функции непрерывны $(x', \varphi(x'))$, а обратно — это по сути проекция, так что всё тоже непрерывно. Классы гладкости тоже переезжают из прошлой теоремы.

ч. т. д.

1.4.12 Следствие о двух параметризациях

Формулировка:

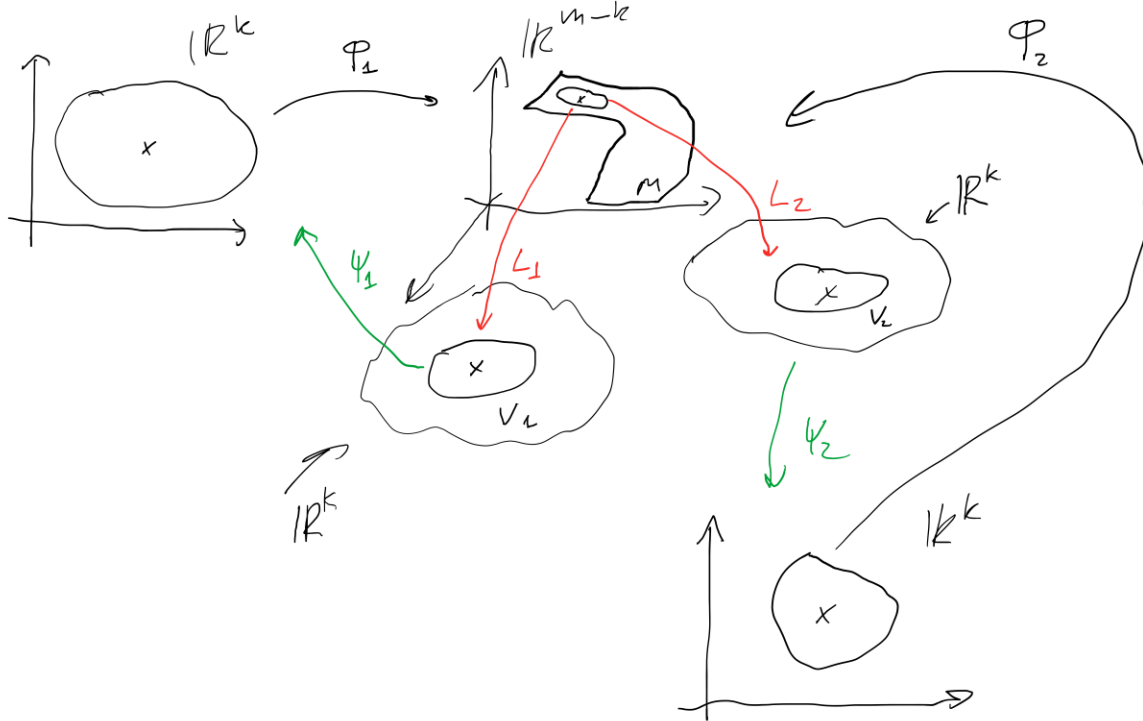
$M \subset \mathbb{R}^m$ — k -мерное C^r -гладкое многообразие в \mathbb{R}^m

1. $\exists \Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
2. $\exists \Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$

— гладкие параметризации.

Тогда $\exists \Theta : O_1 \rightarrow O_2 : \Phi_1 = \Phi_2 \circ \Theta$ — диффеоморфизм класса C^r

Доказательство:



Продолжаем повествование из прошлой теоремы. Гомеоморфизм $O_1 \rightarrow O_2$, вообще говоря, существует тривиально: $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$. Однако, так говорить не совсем правильно, потому что для корректного взятия обратной функции, необходимо сузить образ Φ_2 на его реальную область значений. Поэтому давайте поступим умнее: нарисует возможные пути точки (крестика) на рисунке (кстати, важно заметить, что разные параметризации могут отправлять точки в разные пространства \mathbb{R}^k , ведь ранг может реализовываться на произвольных строчках матрицы производного оператора; поэтому у нас появилось 2 пространства и соответствующие отображения между ними (см. картинку)).

$$\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Psi_2 \circ L_2 \circ \Phi_1) = \Psi_2 \circ \Theta$$

Супер, гомеоморфизм есть. А обратим ли он? Да пожалуйста:

$$\Theta^{-1} = \Psi_1 \circ L_1 \circ \Psi_2$$

А всякие гладкости и классы приходят просто из предыдущих отображений, всё там супер.

ч. т. д.

1.4.13 Лемма о корректности определения касательного пространства

Формулировка:

- $M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k -мерное C^r -гладкое многообразие в \mathbb{R}^m
- $p \in M$
- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ — параметризация $M \cap U(p)$
- $t^0 \in O : \Phi(t^0) = p$
- $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейный оператор

Тогда образ $\Phi'(t^0)$ — линейное подпространство в \mathbb{R}^m , не зависящее от Φ .

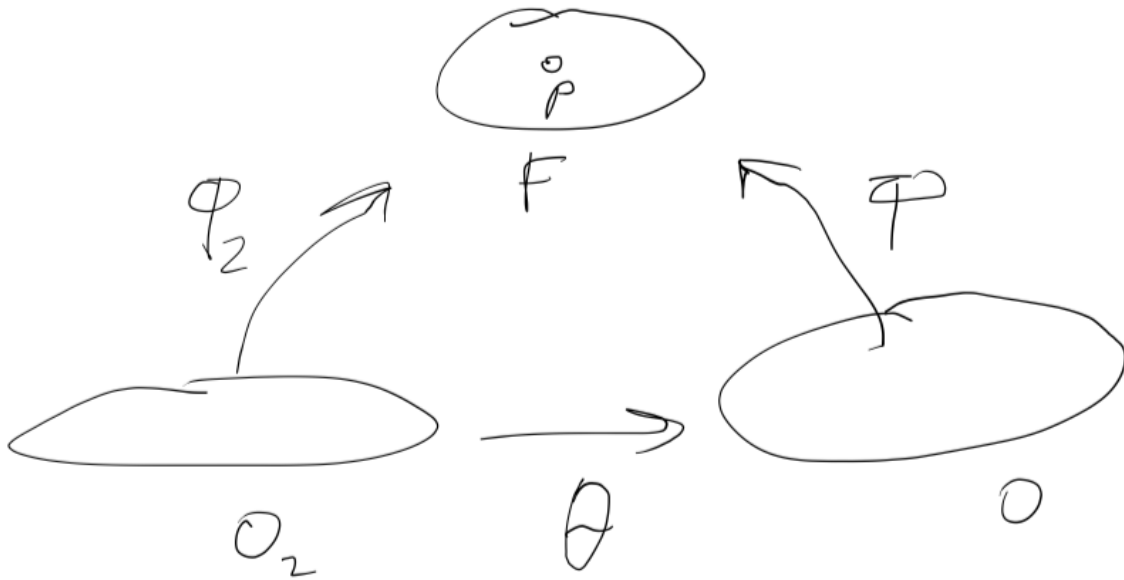
Доказательство:

Так как Φ — параметризация, $\text{rank } \Phi = k$. Ну и тогда всё очевидно по знаниям из линейной алгебры, размерность пространства определяется количеством ЛНЗ столбцов.

По поводу независимости, по следствию о двух параметризациях:

$$\Phi_2 = \Phi \circ \Theta \Rightarrow \Phi'_2 = \Phi' \Theta'$$

Θ — диффеоморфизм, следовательно $\Theta'(t^0)$ — невырожденный. Поэтому образ $\Phi'_2 = \Phi'$ (см. картинку)



ч. т. д.

1.4.14 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

Формулировка (Лемма):

$$v \in T_p M$$

Тогда \exists гладкий $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M : \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$

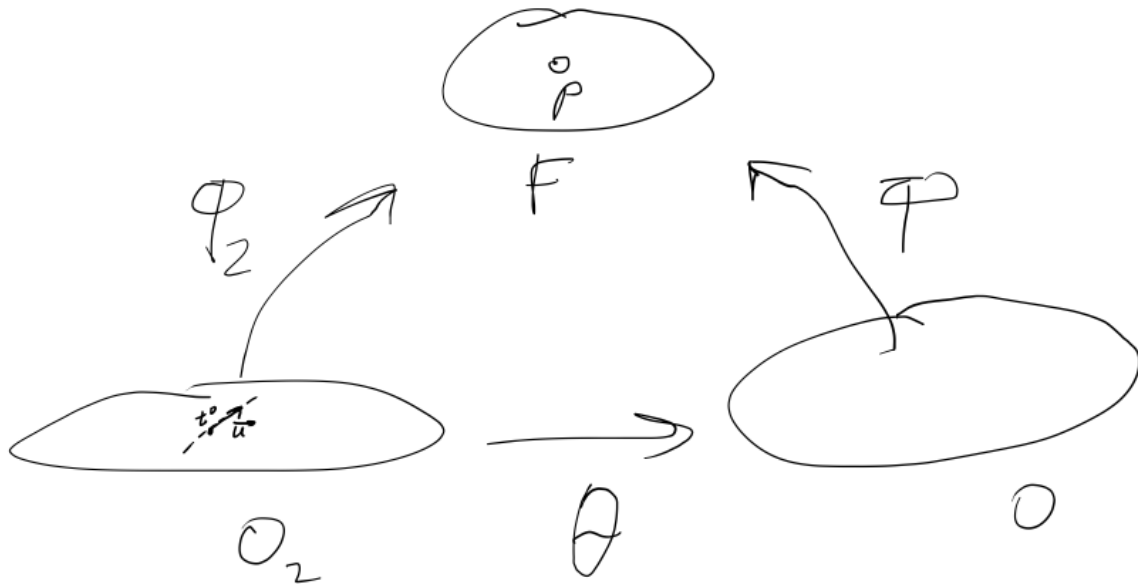
Доказательство:

Раз у нас есть v в образе, значит оно откуда-то пришло. Давайте найдём: $u = (\Phi'(t_0))^{-1}v$.

Тогда предъявим путь в $O : \tilde{\gamma}(s) = t^0 + su, s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Типа мы выбрали направление, и гоняем по нему в O .

А настоящий путь будет таким: $\gamma(s) = \Phi \circ \tilde{\gamma}(s)$. Тогда $\gamma'(s) = \Phi' \circ \tilde{\gamma}(s)$.

Проверим: $\gamma(0) = \Phi(t^0 + 0) = p, \quad \gamma'(0) = \Phi' u = v$



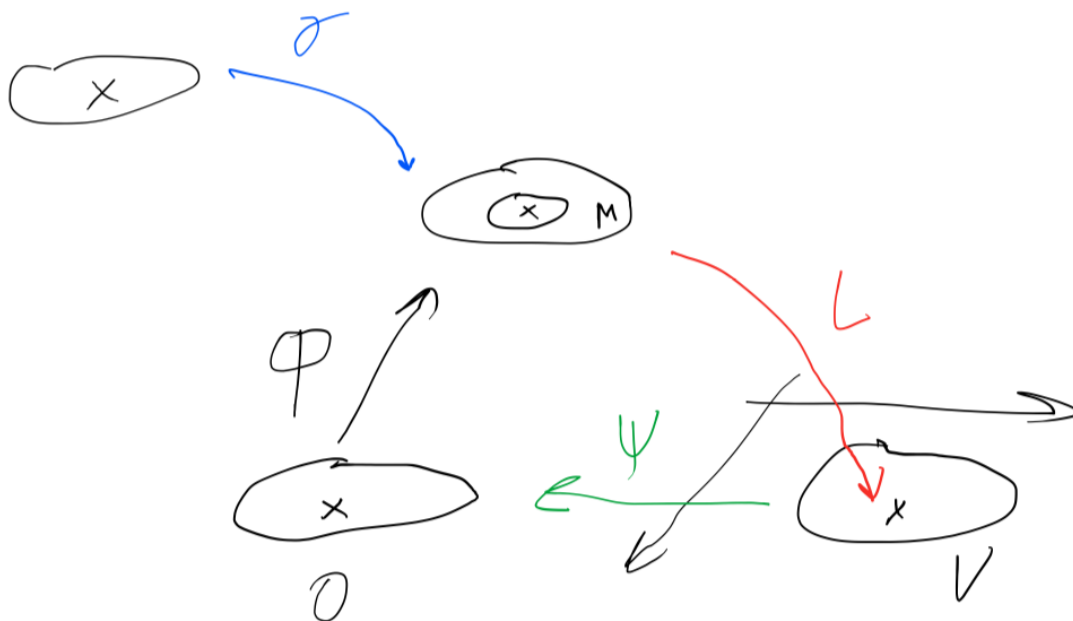
ч. т. д.

Формулировка:

\exists гладкий путь $\gamma : [-1, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = p$

Тогда $\gamma'(0) \in T_p M$

Доказательство:



Давайте опять прогуляемся по картинке из теоремы о задаче параметризации:

$$\gamma(s) = \Phi \circ \Psi \circ L \circ \gamma(s)$$

Это очевидно, просто прошли по кругу.

$$\gamma'(0) = \Phi'(t^0) \Psi' L' \gamma'$$

Всё лежит в образе $\Phi'(t^0)$, так что по определению касательного пространства всё супер.

ч. т. д.

1.4.15 Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня

Формулировка (к графику функции):

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- $f \in C^1$
- $y = f(x)$ — задаёт простое гладкое n -мерное многообразие в \mathbb{R}^{n+1} (???)
- есть точка $f(x^0) = y^0$

Тогда $y - y^0 = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x^0)(x_i - x_i^0)$ задаёт аффинное касательное пространство

Доказательство:

Пусть $\Phi : x \mapsto (x, f(x))$. Посмотрим на производный оператор этого отображения:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & f'_{x_3} & \dots & f'_{x_n} \end{pmatrix}$$

Заметим, что в нашей формуле неизвестные — y и x_i . Давайте рассмотрим вектор, образующийся перед x_i :

$$\begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \\ f'_{x_3} \\ \vdots \\ f'_{x_n} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что этот вектор ортогонален матрице производного оператора (при перемножении даёт нуль-вектор, следовательно косинус 0, по скалярному произведению). Ну это то, что нам нужно. Вектор (фактически нормаль) к касательному пространству. Ещё и через точку начальную проходит (x^0, y^0) .

ч. т. д.

Формулировка (к уровню):

- $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая
- $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ — функция
- x^0 — точка, в которой ищем касательное пространство

Тогда касательное пространство задаётся уравнением $f'_{x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + f'_{x_m}(x_m - x_m^0) = 0$

Доказательство:

Во-первых, давайте опять прогоним трюк с теоремой о неявном отображении: будем считать первые $m - 1$ координату “неизвестными”, а x_m — “функцией”.

Тогда пусть $f'_{x_m}(x^0) \neq 0$. Значит, существует $x_m = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$. Ещё один трюк: $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}))$ — параметризация многообразия $f(x) = 0$ в окрестности точки x^0 .

Тогда по предыдущему, что мы доказали, касательная плоскость задаётся $\sum_{i=1}^{m-1} \varphi'_i(x^0)(x_i - x_i^0) = x_m - x_m^0$, или:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \varphi'_i(x^0)(x_i - x_i^0) - (x_m - x_m^0) = 0$$

Это всё замечательно, но условие требует вывод в терминах f . А как они связаны? По условию:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})) = 0$$

Давайте вычислим рецепт замены φ_{x_i} :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : f'_{x_i} + f'_{x_m} \cdot \varphi'_{x_i} = 0 \Rightarrow \varphi_{x_i} = -\frac{f'_{x_i}}{f'_{x_m}} \quad (f'_{x_m}(x^0) \neq 0 \text{ по усл.})$$

Итого:

$$-\sum_{i=1}^{m-1} \frac{f'_{x_i}}{f'_{x_m}}(x^0)(x_i - x_i^0) - (x_m - x_m^0) = 0 \quad | \cdot - f'_{x_m}$$

ч. т. д.

1.4.16 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

Формулировка:

$$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Тогда $\|A\| = \max \sqrt{\lambda}, \lambda \in \sigma(A^T A)$ — множество собственных чисел.

Доказательство:

Рассмотрим $x \in S^{m-1} : \{y \in \mathbb{R}^m : |y| = 1\}$.

$$\|A\|^2 = \sup_{x \in S^{m-1}} |Ax|^2 = \sup_{x \in S^{m-1}} \langle Ax, Ax \rangle = \sup_{x \in S^{m-1}} \langle \underbrace{A^T A}_{\text{симметричная}} x, x \rangle = \sup_{x \in S^{m-1}, \lambda \in \sigma(A^T A)} \lambda |x|^2 = \max_{\lambda \in \sigma(A^T A)} \lambda$$

Немного контекста: собственное число, это такое число, что A отображает x в λx . Матрица $A^T A$ — симметричная $(m \times n) \times (n \times m) = m \times m$. Так как у нас эта матрица вещественная, то и собственные числа у неё вещественные. Ну и значит, что максимальный вектор, который может получиться, это вектор, домноженный на максимальное собственное число.

ч. т. д

1.4.17 Теорема о функциональной зависимости

Формулировка:

- $f_1, f_2, \dots, f_n : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$
- $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : O \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $\forall x \in O : \text{rank } F'(x) \leq k$
- $x^0 \in O : \text{rank } F'(x^0) = k$
- $y^0 = F(x^0)$

Тогда: $\exists U(x^0), \exists g_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_n : V(y_1^0, y_2^0, \dots, y_k^0) \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$

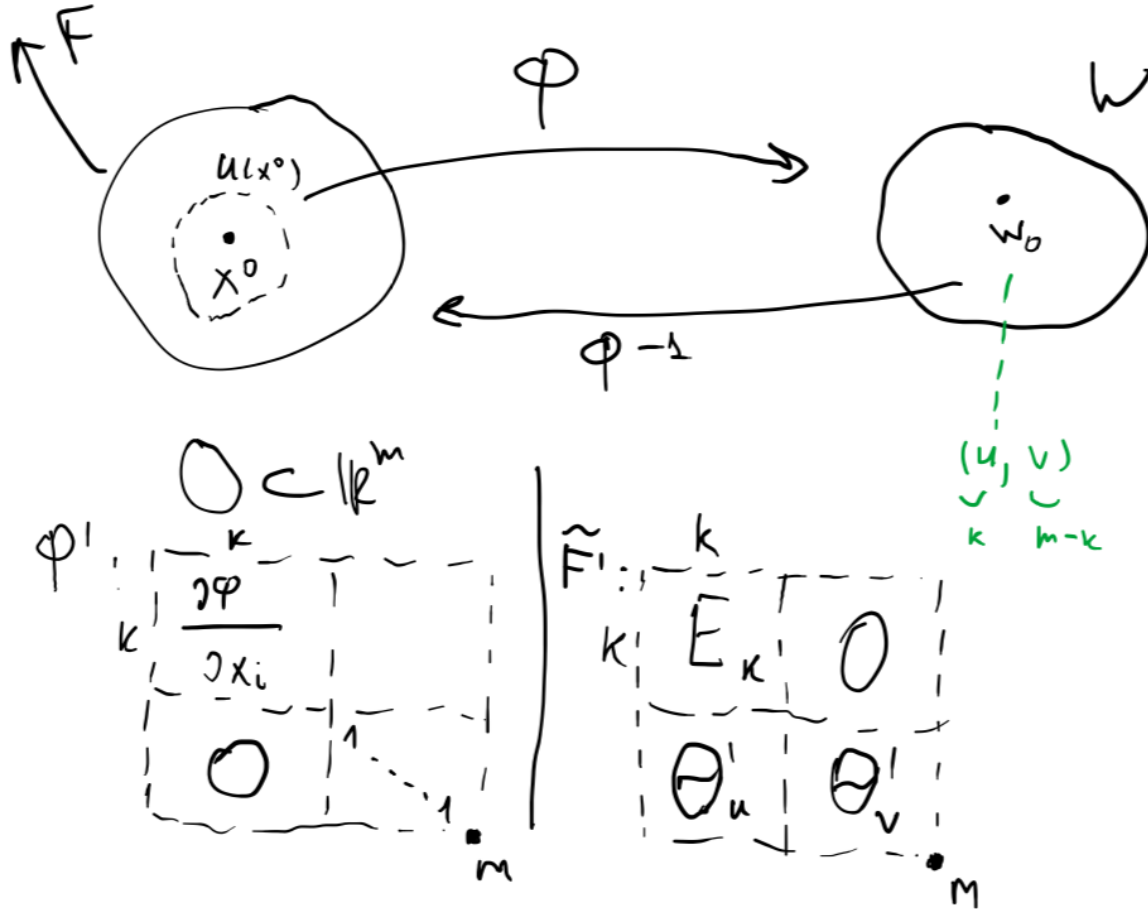
Что: $f_i = g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)), i = k+1 \dots n, x \in U(x^0)$

Доказательство:

Пусть в точке x^0 ранг реализуется на первом k -миноре (строчки $1 \dots k$, столбцы $1 \dots k$).

Введём дополнительную функцию $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \Phi(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, x_{k+1}, \dots, x_k)$.

Тогда, если посмотреть на матрицу производного оператора $\Phi'(x^0)$ (см. рисунок), то окажется, что она невырождена: $\det \Phi'(x^0) \neq 0$. Поэтому Φ действует как локальный диффеоморфизм класса C^1 (по определению там внутри функции минимум C^1). Опять начинаем рисовать:



$\Phi(U(x^0)) = W, \Phi(x^0) = w_0$. Рассмотрим функцию $\tilde{F} : W \rightarrow \mathbb{R}^n : F \circ \Phi^{-1}$. Посмотрим подробнее на точку $w_0 = (u, v)$. Координата u вычислялась как $f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_k(x_0)$, теперь мы снова отправляем её обратно, получая $x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0$, и плём в F , снова применяя к точке функции f_i . Получается, что координата u отображается в саму себя. v же под действием какого-то отображения отображается во что-то другое: $\tilde{F}(u, v) = (u, \Theta(u, v))$.

Рассмотрим производный оператор $\tilde{F}' = F' \underbrace{(\Phi^{-1})'}_{\text{невырожден}}$. Невырожденный оператор (кстати, не

только в точке w , но и во всей окрестности, на которой работает локальный диффеоморфизм (W)) не меняет ранг матрицы, поэтому $\text{rank } \tilde{F} = k$. С другой стороны, если посмотреть на матрицу производного оператора (см. рисунок), Θ'_v обязана быть тождественно равна 0, в противном случае мы могли бы сочинить минор большего ранга, чем k . Таким образом, $\Theta'_v = 0 \Rightarrow \Theta = \Theta(u)$ (зависит только от u).

Тогда давайте перенесём (домножим на обратную), выразим F и аккуратно распишем:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \tilde{F} \circ \Phi(x) \\
&= \tilde{F}(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m) \\
&= (f_1(x), \dots, f_k(x), \Theta(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))_{k+1}, \dots, \Theta(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))_n)
\end{aligned}$$

Ч. Т. Д.

2 Период Мезозойский

2.1 Важные определения

2.1.1 Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

- $(f_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}$
- $f_n : E \subset \underbrace{X}_{\text{мн-во}} \rightarrow \mathbb{R}$

Если $\exists f(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x \in E \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

— тогда f_n равномерно сходится к f на E ($f_n \xrightarrow[E]{} f$).

Это же условие равносильно $M_n := \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

2.2 Определения

2.2.1 Поточечная сходимость последовательности функций на множестве

- $(f_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}$
- $f_n : E \subset \underbrace{X}_{\text{МН-ВО}} \rightarrow \mathbb{R}$

Если $\exists f(x) : \forall x \in E$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

— тогда f_n поточечно сходится к f на E .

2.3 Важные теоремы

2.3.1 Теорема Стокса–Зайдля о непрерывности предельной функций. Следствие для рядов

Формулировка (последовательности):

- $f_n, f : \underbrace{X}_{\text{метрическое пространство}} \rightarrow \mathbb{R}$
- $c \in X : f_n$ — непрерывно в c
- $f_n \rightrightarrows_X f$

Тогда: f — непрерывно в c

Следствие:

$f_n \in C(X), f_n \rightrightarrows_X f \Rightarrow f \in C(X)$ — доказательства не требует, просто по всем точкам пробегаемся

Доказательство:

Зафиксируем ε из определения равномерной сходимости и распишем гига-неравенство треугольника:

$$|f(x) - f(c)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(1)} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(c)|}_{(2)} + \underbrace{|f_n(c) - f(c)|}_{(3)}$$

Оно верно при всех n . Но нам дали равномерную сходимость, из чего мы достаём $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Это обстоятельство с ходу говорит нам, что существует большое n , при котором (1) и (3) (то, что они $< \varepsilon$). С другой стороны, раз так, мы можем считать, что в (2) стоит вполне конкретная функция, непрерывная в $c \Leftrightarrow \forall x \in U(c) : (2) < \varepsilon$. Ну и всё, получается, что наше неравенство целиком меньше 3ε :

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)| < 3\varepsilon$$

Ну и вот, по китайской методике в определении непрерывности всё работает.

ч. т. д.

Бонус:

☺

Доказательство работает и в топологических пространствах без единой правки, потому что мы разговариваем на языке окрестностей и метрику не трогаем!

Формулировка (ряды):

- $u_n : \underbrace{X}_{\text{метрическое пространство}} \rightarrow \underbrace{Y}_{\text{нормированное пространство}}$
- $c \in X : u_n$ — непрерывно в c
- $S_n(x) := \sum^n u_n(x)$

- $S(x) := \sum u_n(x) \rightrightarrows_X$

Тогда $S(x)$ — непрерывно в c

Доказательство:

По предыдущей теореме $S_n(x) \rightrightarrows_X S(x)$, $S_n(c)$ — непрерывно в $c \Rightarrow S(x)$ — непрерывно в c

ч. т. д.

2.3.2 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

Формулировка:

- $\sum u_n(x)$ — функциональный ряд
- $u_n : \underbrace{X}_{\text{мн-во}} \rightarrow \mathbb{R}$
- $\exists (c_n)$ — вещественная последовательность, причём $\sum c_n$ — сходится
- $\forall n \in \mathbb{N} \ x \in X : |u_n(x)| \leq c_n$

Тогда $\sum u_n \rightrightarrows_X$

Доказательство:

Доказательство более-менее тривиально. Распишем определение равномерной сходимости:

$$n \rightarrow \infty : \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sup_{x \in X} \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \rightarrow 0$$

ч. т. д.

2.4 Теоремы

2.4.1 Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота

Формулировка:

- $\rho(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ — метрика (это доказывалось на лекции, хз, надо ли тут, но там вроде всё тривиально: аксиомы тождества, симметрии и правило треугольника)
- X — компактное метрическое пространство

Тогда $(C(X), \rho)$ — полное метрическое пространство

Доказательство:

Полное метрическое пространство — это такое, в котором у любой фундаментальной последовательности есть предел:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \rho(f_n, f_m) = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Давайте возьмём какой-нибудь $x_0 \in X$ и заметим, что $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$ (очев, раз супремум меньше, то и отдельный x_0 меньше). Значит $n \mapsto f_n(x_0)$ — фундаментальная **вещественная** последовательность (просто подставить в определение выше)! Ну а \mathbb{R} — полное, поэтому у такой последовательности существует предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ (к какой-то f). Получается, что поточечно всё норм сходится. Но нам то надо равномерную (в силу того, какую метрику мы выбрали). Давайте немного перепишем определение фундаментальной последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Сделаем предельный переход по $m \rightarrow \infty$ и подставим найденную предельную функцию:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

А это — определение $f_n \xrightarrow{X} f$. Ну всё, супер, значит фундаментальная последовательность сходится.

А непрерывность приходит из теоремы Стокса-Зайдля. Значит наша фундаментальная последовательность имеет предел, и этот предел лежит в $C(X)$.

ч. т. д.

2.4.2 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов

Формулировка (последовательности):

- $f_n \in C[a, b]$
- $f_n \xrightarrow{[a, b]} f$

Тогда:

$$\int_a^b f_n(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство:

Тривиальности (скажем, что их разность стремится к 0, т. к. есть равномерная сходимость):

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &= \left| \int_a^b f_n(x) - f(x)dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\ &\leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|(b-a) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

по метрике

ч. т. д.

Формулировка (ряды):

- $u_n : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
- $\sum_{[a, b]} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$

Тогда $\int_a^b S(x)dx = \sum \int_a^b u_n(x)dx$, причём интегрировать можно, т. к. $S(x)$ — непрерывна по Стоксу-Зайдлю

Доказательство:

По теореме для последовательностей:

$$\int_a^b S_n(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b S(x)dx$$

С другой стороны:

$$\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=1}^n u_n(x)dx \stackrel{\text{линейность интеграла}}{=} \sum_{i=1}^n \int_a^b u_n(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$$

Ну и вот, у нас интеграл частичных сумм в пределе стремится одновременно к интегралу предельной суммы и ряду интегралов. Всё хорошо.

2.4.3 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

Формулировка:

- $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y)$
- f, f'_y — непрерывны на $[a, b] \times [c, d]$

- $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$

Тогда $\Phi(y)$ — дифференцируема и $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$

Доказательство:

Ну, давайте попробуем подифференцировать. Возьмём какую-то $t_n \rightarrow 0$ и напомним а-ля определение дифференцируемости и применим теорему Лагранжа (привет, НТР!):

$$\frac{\Phi(y + t_n) - \Phi(y)}{t_n} = \Phi'(y + \Theta_x t_n) = \int_a^b f'_y(x, y + \Theta_x t_n) dx \xrightarrow{?} \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

Ну и вот, мы теперь хотим понять, а действительно ли оно стремится? Применим “тяжёлую артиллерию”: теорема Кантора о равномерной непрерывности:

$$f — \text{непр.} \in C(K) \text{ (компакт)} \Rightarrow f — \text{равномерно непрерывна}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

У нас непрерывная функция на компакте, поэтому давайте подгоним под Кантора наше условие:

$$\exists N \forall n > N |t_n| < \delta, \rho((x, y + \Theta_x t_n), (x, y)) < \delta, |f'_y(x, y + \Theta_x t_n) - f'_y(x, y)| < \varepsilon$$

Тогда:

$$\left| \int_a^b f'_y(x, y + \Theta_x t_n) dx - \int_a^b f'_y(x, y) dx \right| \leq \varepsilon(b - a)$$

Следовательно, разность между ними меньше ε , тогда всё действительно стремится.

ч. т. д.

2.4.4 Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда

Формулировка (последовательности):

- $f_n \in C^1\langle a, b \rangle$
- $f_n \rightarrow f_0$ — поточечно
- $f'_n \rightrightarrows \varphi_{\langle a, b \rangle}$

Тогда $f_0 \in C^1\langle a, b \rangle$ и $f'_0 = \varphi$ на $\langle a, b \rangle$

Доказательство:

Давайте (не умаляя общности) возьмём какой-то подотрезок $[x_0, x_1] \subset \langle a, b \rangle$. Тогда по предыдущей теореме (у нас непрерывно равномерно сходится по условию):

$$\int_{x_0}^{x_1} f'_n \longrightarrow \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Интегрируем:

$$\int_{x_0}^{x_1} f'_n = f_n(x_1) - f_n(x_0) \underset{n \rightarrow \infty}{=} f_0(x_1) - f_0(x_0) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Получается, что f_0 — первообразная φ . Причём, по Стоксу-Зайдлю, φ — непрерывна, значит и её первообразная тоже непрерывна ($f'_0 = \varphi$).

ч. т. д.

Формулировка (ряды):

- $u_n \in C^1\langle a, b \rangle$
- $\sum u_n(x) = S(x)$ — поточечно
- $\sum u'_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$
 $\langle a, b \rangle$

Тогда $S(x) \in C^1\langle a, b \rangle$ и $S'(x) = \varphi(x)$ на $\langle a, b \rangle$. То есть $(\sum u_n(x))' = \sum u'_n(x)$

Доказательство:

Запускаем теорему для последовательностей с вводными: $f_n = S_n, f_0 = S, f'_n = \sum_{k=1}^n u'_k$

ч. т. д.

2.4.5 Теорема о предельном переходе в суммах.

Формулировка:

- $u_n : E \subset \underbrace{X}_{\text{метрическое пространство}} \rightarrow \mathbb{R}$
- $x_0 \in X$ — предельная точка E
- $\forall n \exists$ конечный $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = a_n$
- $\sum u_n(x) \rightrightarrows$
 E

Тогда:

1. $\sum a_n$ — сходится
2. $\sum a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)$$

Доказательство:

Нам, честно говоря, не за что зацепиться, поэтому давайте попробуем проверить, что a_n — фундаментальная последовательность, тогда у неё точно будет предел.

Пусть $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_n(x)$, $S_n^a = \sum_{k=1}^n a_n$

Опять распишем гига-неравенство треугольника:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq \underbrace{|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)|}_{(1)} + \underbrace{|S_{n+p}(x) - S_n(x)|}_{(2)} + \underbrace{|S_n(x) - S_n^a|}_{(3)}$$

По критерию Больцано-Коши равномерной сходимости ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p : \sup_{x \in E} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Сейчас мы получили, что при достаточно большом n $(2) < \frac{\varepsilon}{3}$ при любых $x \in E$. Теперь заметим, что мы доказываем фундаментальность числовой последовательности, следовательно никаких ограничений на x изначально не наложено. (???) Поэтому давайте возьмём такой x , близкий к x_0 , чтобы (1) и (3) были $\frac{\varepsilon}{3}$. Итого:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Мы взяли частичные суммы a_n , и проверили, что разности рядом лежащих сумм сколь угодно малы.

Ура, у a_n есть предел! А чему же он равен? Давайте заведём дополнительную функцию:

$$\tilde{u}_n(x) := \begin{cases} u_n(x), & x \neq x_0 \\ a_n, & x = x_0 \end{cases}$$

Такая сложность необходима для обеспечения непрерывности в x_0 (если x_0 лежит в E , то мы просто подменили значение, а если не лежала, то дополнили). Теперь эта функция непрерывна на x_0 , ряд $\sum \tilde{u}_n \xrightarrow{E \cup \{x_0\}} (*) \Rightarrow$ по Стоксу-Зайдлю $S_{\tilde{u}_n}(x)$ непрерывна в x_0 . А поэтому:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(x) = \sum a_n$$

А равномерная сходимость ряда $\sum \tilde{u}_n$ доказывается так:

$$(*) : \sup_{x \in E \cap \{x\}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{u}_k \right| = \max \left\{ \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{u}_k \right|, \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n \right\} \leq \underbrace{\sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{u}_k \right|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

ч. т. д.