СВЯТОЙ КПК
#BlessRNG

Или как не сдохнуть на 4 семе из-за матана

Разработал

Никита Варламов @snitron

Почётный автор

Тимофей Белоусов @imodre

v0.0
Февраль-??? 2023

Вы в любой момент можете добавить любую недостающую теорему, затехав её и отправив код (фотографии письменного текста запрещены) в телегу любому из указанных авторов, или создав Pull Request в Git-репозиторий конспекта (click). Ваше авторство также будет указано, с вашего разрешения.

Ah shit
Here we go again!
And again...
Oh, fuck.

Содержание

1 Период Палеозойский

1.1 Важные определения

1.1.1 Пространство $L^p(E, \mu)$

$1 \le p < +\infty$, $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $E \in \mathfrak{A}$

Тогда $\mathfrak{L}_p(E, \mu) = \{f :$ почти всех $E \to \mathbb{R}(\mathbb{C}), f$ — измерима. $\int_E |f|^p < +\infty\}$

1. $\mathfrak{L}_p(E, \mu)$ — линейное пространство
2. $f \equiv g$, если $f = g$ почти всюду

$L_p := \mathfrak{L}_p/_{\equiv}$ — точки этого пространства

$[f] = \{g : f \equiv g\}$ $[f_1] + [f_2] = [f_1 + f_2]$

И введём норму $||[f]|| = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

1.1.2 Пространство $L^\infty(E, \mu)$

$\mathfrak{L}^\infty(E, \mu) = \{f :$ почти всех $E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, измерима, $\operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty\}$

$||f||_\infty = \operatorname{ess\,sup} f$

Дописать всё

1.1.3 Существенный супремум

$\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{a : f \le a$ почти всюду $\}$

a — существенная верхняя граница функции f, если при почти всех x $f(x) \le a$

Свойства:

1. $\operatorname{ess\,sup} f(x) \le \sup f(x)$
2. при почти всех $x : f(x) \le \operatorname{ess\,sup} f(x)$
3. f — суммируемая, g — измерима: $\operatorname{ess\,sup} |g| < +\infty$

$$\left|\int_E fg\right| \le \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot \int_E |f|$$

1.1.4 Гильбертово пространство

$\mathfrak{H}$ — линейное пространство, в котором задано скалярное произведение и соответствующая норма. Если $\mathfrak{H}$ — полное, то оно называется гильбертовым.

1.1.5 Ортонормированная система, примеры

e_k — О. С. , тогда $\frac{e_k}{||e_k||}$ — ортонормированная система.

Примеры:

1. $l^2 \quad e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$
2. $L^2[0, 2\pi] \quad \{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cos 3t, \sin 3t, ldots\}$
3. $\left(\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$

1.2 Определения

1.2.1 Произведение мер

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой.

Лемма: $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — полукольца. Тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ — полукольцо.

Также, множества из $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ являются измеримыми прямоугольниками.

μ, ν — σ-конечные меры. Тогда стандартное продолжение m_0 (в смысле теоремы о продолжении меры (?)) с полукольца $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, определённой на некоторой σ-алгебре $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, и являющееся σ-конечной полной мерой — обзначается просто m.

И тогда m — и есть произведение мер μ и ν ($\mu \times \nu$).

Замечание:

$$(\mu \times \nu) \times \rho = \mu \times (\nu \times \rho)$$

1.2.2 Сечения множества

X, Y — множества. $C \subset X \times Y$

Тогда:

$$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$$

$$C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$$

— сечения множества C (1 и 2 рода)

Замечания:

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha\right)_x = \bigcup_{\alpha \in A} (C_\alpha)_x$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha\right)_x = \bigcap_{\alpha \in A} (C_\alpha)_x$$

$$(C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

1.2.3 Полная мера, сигма-конечная мера

См. конспект прошлого семестра

1.2.4 Образ меры при отображении

Пусть у нас есть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \_)$ — пространства с мерой, $\Phi : X \to Y$.

1. $\forall \Phi \quad \Phi^{-1}(\mathfrak{B})$ — σ-алгебра (это предлагается доказать как уражнение)
2. Пусть Φ — "измеримо" $\left(\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}\right)$

Для $E \in \mathfrak{B}$ зададим $\nu R := \mu\left(\Phi^{-1}(E)\right) = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$

ν — образ меры μ при отображении Φ

NB: ДОПИСАТЬ НА СЕССИИ, ТУТ ЕЩЁ ЕСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, ЧТО ЭТО МЕРА

1.2.5 Взвешенный образ меры

$\omega : X \to \mathbb{R} \geq 0$, измерима на X

$B \in \mathfrak{B}, \tilde{\nu}(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$ — тоже мера, это и есть взвешенный образ меры μ при отображении Φ

1.2.6 Плотность одной меры по отношению к другой

$X = Y, \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \Phi = \mathrm{id}$

$\nu b = \int_B \omega d\mu$ — ещё одна мера в X

Здесь ω называется плотностью меры ν относительно меры μ. И в этом случае:

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \int f(x) \cdot \omega(x) d\mu(x)$$

1.2.7 Условие L_{loc}

$f : X \times \tilde{Y} \to \overline{\mathbb{R}}, Y \subset \tilde{Y}, a$ — предельная точка Y в $\tilde{Y}$.

f удовлетворяет условию $L_{loc}(a) : \exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая, $\exists U(a) : \forall$ почти всех $x \forall y \in U(a)$:

$$|f(x, y)| \leq g(x)$$

1.2.8 Интеграл комплекснозначной функции

База базовая: $(X, \mathfrak{A}, \mu), f : X \to \mathbb{C}$

$$\int_E f(z) d\mu = \int_E \mathrm{Re}(f(z)) d\mu + i \int_E \mathrm{Im}(f(z)) d\mu$$

Также измеримость и суммируемость следует из сотттветствующих свойств реальной и мнимой частей функций.

1.2.9 Фундаментальная последовательность, полное пространство

$A \subset X$ — нормированное пространство

A — (всюду) плотное в X

$$\forall x \in X \ \exists \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A \text{— непусто}$$

1.2.10 Мера Лебега-Стилтьеса, мера Бореля-Стилтьеса

1. $\mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, возрастает, непрерывно

$$\mu_g[a, b) := g(b) - g(a)$$

   — счётно аддитивная мера

2. g — возрастает, не обязательно непрпрывно

$$\mu_g[a, b) = g(b - 0) - g(a - 0)$$

   — мера

Запускаем теорему о продолжении, тогда

$\exists \mathfrak{A} \supset \mathcal{P}^1 \exists$ продолжение $\mu_g \subset \mathcal{P}$ на $\mathfrak{A}$

μ_g — полная мера на $\mathfrak{A}$ — мера Лебега-Стильтьеса

Если нассмотреть μ_g на борелевском $\mathfrak{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера Бореля

1.2.11 Функция распределения

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, измерима, вочти всюду конечна

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mu X(h < t) < +\infty$

Пусть $H(t) = \mu X(h < t)$ — возрастающая

$H(t)$ — называется функцией распределеиния по мере μ

1.2.12 Ортогональный ряд

Ряд $\sum a_k$ — ортогональный, если $\forall k, l a_k \perp a_l$

1.2.13 Сходящийся ряд в гильбертовом пространстве

$\sum a_n, a_n \in \mathfrak{H}$

$S_N := \sum_{1 \leq n \leq N} a_n$, если $\exists S \in \mathfrak{H} : S_N \xrightarrow[\mathfrak{H}]{} S$

Такой ряд называется сходящимся.

1.2.14 Ортогональная система (семейство) векторов

$e_k \subset \mathcal{H}$ — ортогональная система, если:

1. $k \neq j \ e_k \perp e_j$
2. $\forall k \ e_k \neq 0$

1.2.15 Коэффициенты Фурье

$$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$$

— коэффициент Фурье вектора x по О. С. e_k

1.2.16 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$$c_k \cdot e_k$$

— ряд Фурье ветора x по О. С. e_k

1.3 Важные теоремы

1.3.1 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримые
- $f_n \to f$ почти всюду
- $\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая, и $\forall n$ и при почти всех x $|f_n(x)| \leq g(x)$

Тогда:

$$\int_X |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

И, как очевидное ("уж тем более"):

$$\int_X f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f d\mu$$

Дисклеймер:

Развеем все сомнения насчёт корректности условия (вдруг они у вас были):

$$\left| \int f_n - \int f \right| = \left| \int f_n - f \right| \leq \int |f_n - f| \text{ (уж тем более)}$$

А также, наши функции из условия на самом деле даже суммируемые, не просто измеримые. Давайте для каждого n соберём точки, на который f_n не сходится к f, сложим (это всё будет множемтво меры 0) и вычтем, а на остатке сделаем предельный переход:

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$
$$|f(x)| \leq g(x) < +\infty$$

Доказательство:

Заведём последовательность $h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, |f_{n+2} - f|, \ldots)$. Она убывает, так как по условию у нас есть сходимость почти везде. Также, можно ограничить её: $0 \geq h_n \geq 2g$ (модули больше нуля и по условию все $|f_n| \geq g$). А ещё это просто определение последовательности из верхнего предела:

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n - f| = 0 \text{ (почти везде)}$$

Теперь берём положительную возврастающую последовательность $2g - h_n$ и запускаем теорему Леви (см. 3 семестр, там как раз нужна возрастающая последовательность):

$$\int_X (2g - h_n)d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X 2gd\mu$$

Откуда по линейности первого интеграла следует, что $\int_X h_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ну и добиваем:

$$0 \underset{n\to\infty}{\longleftarrow} \int_X h_n \geq \int_X |f_n - f|d\mu$$

ч. т. д.

1.3.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере

Формулировка (то же самое, что и выше, только сходится по мере теперь):

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримые
- $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$
- $\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая, и $\forall n$ и при почти всех x $|f_n(x)| \leq g(x)$

Тогда:

$$\int_X |f_n - f|d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство:

Рассмотрим 2 случая.

1. $\mu X < +\infty$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и сооружаем множества $X_n = X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$. Сделовательно, $\mu X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т.к. есть сходимость по мере. Расписываем:

$$\int_X |f_n - f|d\mu = \int_{X_n} |f_n - f|d\mu + \int_{X_n^c} |f_n - f|d\mu \leq \underbrace{\int_{X_n} 2gd\mu}_{(1)} + \underbrace{\int_{X_n^c} \varepsilon d\mu}_{(2)}$$

(1) — оценка разности по условию, и ещё при больших n меньше эпсилона по абсолютной непрерывности интеграла. (2) — из условия о сходимости по мере выше оцениваем эпсилоном.

$$\leq \varepsilon + \varepsilon \cdot \mu X_n^c \leq \varepsilon \cdot (1 + \mu X)$$

(оцениваем меру дополнения просто всем пространством)

2. $\mu X = \infty$

Сначала докажем небольшое свойство интеграла по мере:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \subset X \text{ измеримое } \mu A < +\infty \quad \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$$

Если по-русски, то существует некоторое множество в исходном, на котором в основном концентрируется интеграл, следовательно, на остальном кусочке интеграл крайне мал. И мы можем предъявить такое для сколь угодно малого ε.

Рассмотрим интеграл как супремум ступенчатых функций:

$$\int_X g = \sup_{0 \geq g_n \geq |g|} \int_X g_n d\mu$$

Этот супремум значит, что существует какая-то g_{n_0}, хорошо (ε) оценивающая нашу функцию:

$$\exists g_{n_0} : \int_X g - g_{n_0} < \varepsilon$$

Давайте возьмём за A носитель функции g_{n_0}:

$$A := \operatorname{supp} g_{n_0} = \{x : g_{n_0}(x) \neq 0\}$$

Так как ступенчатая функция есть сумма константы на характеристическую функцию, её интеграл конечен (?). Ну, а на "хвостиках" где она равна нулю нам не особо интересно. Таким образом, $\mu A < +\infty$:

$$\int_{X \setminus A} g d\mu = \int_{X \setminus A} g \underbrace{-g_{n_0}}_{\text{так как вне } A \ g_{n_0} = 0} \leq \int_X g - g_{n_0} < \varepsilon$$

Ну и всё, раз доказали, давайте разобъём на два интеграла:

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \underbrace{\int_A |f_n - f| d\mu}_{< \varepsilon \text{ по пункту 1}} - \underbrace{\int_{X \setminus A} |f_n - f| d\mu}_{< 2\varepsilon \text{ по доказанному выше}} \leq 3\varepsilon$$

ч. т. д.

1.3.3 Принцип Кавальери

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные, полные меры
- $C \in \mathfrak{C}$
- $m = \mu \times \nu, \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. при почти всех $x \quad C_x \in \mathfrak{B}$
2. $x \mapsto \nu C_X$ — измеримо на X (сама функция задана почти везде)
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогично для сечений C^y

Замечания:

1. C — измеримо $\not\Rightarrow \forall x C_x$ — измеримое
2. $\forall x \forall y : C_x, C^y$ — измеримы $\not\Rightarrow C$ — измеримо

Доказательство:

Введём D — это множество тех множеств, которые удовлетворяют принципу Кавальери :) . Давайте докажем, что разные типы множеств содержатся в D. А потом (внезапно) окажется, что это все множества.

1. $G = A \times B$ **(измеримые прямоугольники)**

Проверяем здесь и далее попунктно:

1. Так как это прямоугольники, $C_x = \begin{cases} B, \ x \in A \\ \varnothing, \ x \notin A \end{cases}$ (очев). Ну, значит, при всех $x: \ C_x \in \mathfrak{B}$
2. Берём в качестве такой функции $\nu(B) \cdot \chi_A(x)$. Она измерима на X.
3. Ну давайте поинтегрируем) $\int_X \nu(C_x) d\mu = \int_X \nu(B) \cdot \chi_A(x) d\mu = \nu(B) \cdot \mu(A) = m(A \times B)$

2. $E_i \in D, E_i$ **дизъюнктны,** $E = \bigsqcup_{\textbf{НБЧС}} E_i$**. Тогда** $E \in D$

1. $E_x = \bigsqcup (E_i)_x$. Обратите внимание, что все множества справа уже лежат в D, поэтому они "измеримы" (лежат в $\mathfrak{B}$) при почти всех x. Ну, значит и объединение их тоже.
2. Если вы ещё не поняли, мы в этом пункте фактически хотим предоставить функцию вычисления меры сечения по заданному x. $\nu E_x = \sum \nu E_{i_x}$. Это сумма измеримых неотрицательных функций, определённых на почти всех x (потому что кусочки уже лежат в D).
3. $\int_X \nu(C_x) d\mu = \int_X \sum \nu E_{i_x} d\mu$. Тут напрашивается переставить местами сумму и интегрирование, и это можно сделать по теореме об интегрировании положительных рядов!. $\sum \int_X \nu E_{i_x} d\mu = \sum mE_i = (*)$ (кусочки уже в D, и по счётной аддитивности) $(*) = mE$

3. $E_i \in D, \ E_i \supset E_{i+1} \supset \dots, \ \bigcap E_i = E, \ mE_1 < +\infty$**. Тогда** $E \in D$

1. $E_x = \bigcap (E_i)_x$. Аналогично предыдущему.
2. По теореме о непрерывности меры сверху (условия подходят): $\lim \nu E_{i_x} = \nu E_x$. Ну и тогда, добавляя оговорку о том, что всё это работает на тех x, на которых определены функции для кусочков, то и наша функция сопоставления измерима.
3. $\int_X \nu(C_x) d\mu = \int_X \lim_{i\to\infty} \nu E_{i_x} d\mu =$. Замечаем, что все наши функции в пределе положительны (меры) и суммируемы (т. к. $0 \le \nu E_{i_x} \le \nu E_1 < +\infty$ по условию, значит суммируемы). Тогда запускаем теорему Лебега о мажорированной сходимости для случая почти везде (в обратку) и выигрываем! $= \lim_{i\to\infty} \int_X \nu E_{i_x} d\mu = \lim_{i\to\infty} mE_i = mE$ (последнее тоже по непрерывности меры сверху).

Сделаем небольшое лирическое отступление в прошлое. Как мы помним, у нас есть теорема о продолжении меры, по которой, в частности, строилась и мера Лебега. По одному из её пунктов, меру предлагалось высчитывать, выбирая всё лучше оценивающее покрытие ячейками, и беря по всем таким покрытиям инфимум: $(\mathcal{P}(\text{п-к.}),\ \mu_0) \to (\mathfrak{A}(\sigma-\text{алг.}), \mu); \quad \mu A = \inf\{\sum \mu P_k,\ A \subset \bigcup P_k\}$. Также, если мы рассмотрим конкретно меру Лебега, то измеримое про ней множество можно представить (по теореме о регуляризации?) в виде $A \in \mathfrak{A},\ A = B \setminus C$, где B — "борелевское", а C — "меры 0" (кавычки тут не просто так, ведь мы не задавали никаких топологий и прочего, чтобы их снять. Тут это для общего понимания происходящего). Ну и получается, что если берём за основу "измеримости" вот это определение с инфимумом, то B представляется в виде $\bigcap_i \bigcup_j P_{ij}$ (типа взяли всевозможные покрытия и пересекли, получив тем самым наилучшее, чтоли). И некоторый остаток меры 0. Однако, не стоит его недооценивать, у нас мера по условию принципа — полная, а это значит, что "иерархия" на этих множествах должна соблюдаться (см. определение полной меры из 3 сем.). Рассматриваем всё это далее!

4. $mE = 0$**. Тогда** $E \in D$

То же самое: $mD = 0,\ H = \bigcap_i \bigcup_j P_{ij},\ P_{ij} \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B},\ E \subset H$. Заметим, что $H \in D$ по пункту 3.

1. $0 = mH = \int_X \nu(H_x) d\mu$. Если так случилось, то логично, что $\nu(H_x) = 0$ п. в. x. Ну тогда $\nu(E_x) = 0$ при этих x, так как $E_x \subset H_x$ по полноте меры.
2. Доказано предыдущим пунктом, всё 0.
3. Как следствие, $\int_X \nu(E_x) = 0 = mE$

5. $A \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, mA < +\infty$**. Тогда** $A \in D$

Пользуясь лирическим отступлением (и "обобщённой регулярностью"): $A = B \backslash C,\ B = \bigcap_i \bigcup_j P_{ij} \in D,\ mC = 0 \Rightarrow C \in D$

1. $mA = mB - mC = mB$, сечения: $A_x = B_x \setminus C_x$ (измеримы при п. в. x, т. к. составляющие уже в D)
2. Из общих соображений, $\nu B_x - \nu C_x \geq \nu A_x$. С другой стороны, по монотонности ($A \subset B$): $\nu A_x \leq \nu B_x$. А т. к. $\nu C_x = 0$ при п. в. x, то при тех же $x : \nu A_x = \nu B_x$.
3. $\int_X \nu A_x d\mu = \int_X \nu B_x d\mu =$ (оно уже в D) $= mB = mA$ (из начала).

Ну и всё, осталось обощить всё вышеперечисленное и показать, что всё-таки любое множество лежит в нашем классе D (фактически, остались только множества бесконечной меры).

6. $A \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ **— любое** $\in D$

$\mu A = +\infty$. Запускаем $\sigma-$конечность: $X = \bigsqcup X_k, Y = \bigsqcup Y_i$. С другой стороны, $X \times Y = \bigsqcup X_k \times Y_i$. Тогда $A \cap (X_k \times Y_i) \in D$ по пункту 5 (конечная мера), а их дизъюнктное объединение $\bigsqcup A \cap (X_k \times Y_i) \in D$ по пункту 2.

ч. т. д.

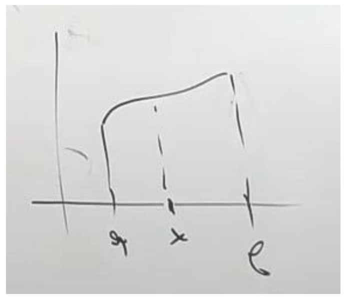
Следствия:

1. $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B},\ P_1(C) = \{x \in X : C_x \neq 0\}$ (проекция на X) и она измерима на нём, то меру можно считать по ней $mC = \int_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$. Это очевидно (ну просто проекция удаляет те точки, где сечение и так было равно нулю).

2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $\int_a^b f(x) = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$

Доказательство:

Достаточно рассмотреть неотрицательную функцию, т. к. оба интеграла аддитивны и можно просто разбить. Тогда, $\text{ПГ}(f, [a,b]) = C$ — измеримое множество (очев). А $C_x = [0, f(x)]$ (см. картинку). Причём, если вспомнить 2й сем, то окажется, что той загадочной площадью σ, которую мы использовали в рассуждениях, может быть и λ! Давайте посмотрим поближе: $\lambda(C_x) = \lambda([0, f(x)]) = f(x)$.



$\int_a^b f(x)dx = \lambda_2(\text{ПГ}(f, [a,b]))$ = (по следствию 1 можем считать просто на проекции) = $\int_{[a,b]} \lambda(C_x) d\lambda_1 = \int_{[a,b]} f(x) d\lambda_1$

1.3.4 Теорема Фубини

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные меры
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, суммируема на $X \times Y$ по мере m

Тогда:

1. при почти всех x функция f_x суммируема на Y
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu$ — это суммируемая функция на X
3. $$\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi(x) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

Доказательство:

Теорема-клон Тонелли, и выводится ровно из неё.

Подготовка

$0 \le f_-, f_+ \le |f|$ — по определению суммируемых функций. Также сразу заметим, что:

$$\underbrace{\int_{X\times Y} f_{-,+} dm}_{(1)} = \underbrace{\int_X \left(\int_Y f_{-,+} d\nu\right) d\mu}_{(2)} < +\infty$$

(это всё потому что они измеримы, поэтому применяем Тонелли. Ну и интегралы конечны почти везде в силу суммируемости самой f).

$(f_-)_x, (f_+)_x$ — измеримы по Тонелли. Можно также рассмотреть и 2й пункт:

$$\varphi_- = \int_Y (f_-)_x d\nu, \quad \varphi_+ = \int_Y (f_+)_x d\nu$$

Эти функции точно так же измеримы по Тонелли *(note для душнил: да, измеримо*, на области определения и почти везде, но кажется, что это уже и так все поняли).*

По гига-неравенству с интегралами сразу делаем вывод, что f_-, f_+ — суммируемы (интеграл (1) конечен). Но также и φ_-, φ_+ — суммируемы по интегралу (2).

Содержательная часть

1. $f_x = (f_+)_x - (f_-)_x$ — суммируемая как сумма суммируемых.
2. $\varphi = \varphi_+ - \varphi_+$ — аналогично.
3. $\int_{X\times Y} f dm = \int_{X\times Y} f_+ dm - \int_{X\times Y} f_- dm$ (по определению). Ну и дальше можно расписать $\int_X \int Y \ldots$, погруппировав, но всем уже и так всё понятно.

ч. т. д.

Следствие (аналогичное принципу Кавальери) [валидно также и для Тонелли]:

$C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, f$ — суммируемая [измеримая, ≥ 0]. Если $P_1(C)$ — измеримо на X, тогда:

$$\int_C f dm = \int_{P_1(C)} \int_{C_x} f d\nu d\mu$$

Доказательство:

Полагаем, что f вне проекции равно 0 и не вносит ничего в результат.

1.3.5 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме

Формулировка:

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, диффеоморфизм

Тогда $\forall A \in \mathbb{M}^m, A \subset O$

$$\lambda\Phi(a) = \int_A |\det \Phi'(x)| dx$$

Доказательство:

1.3.6 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

Формулировка:

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, диффеоморфизм
- $\Phi(O) = O'$
- $f : O' \to \mathbb{R} \geq 0$ — измерима

Тогда:

$$\int_{O'} f dx = \int_{O} f\left(\Phi(x)\right) \cdot |\det \Phi'(x) d\lambda(x)|$$

Доказательство:

1.3.7 Теорема о непрерывности сдвига

Формулировка:

- $f : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$
- $h \in \mathbb{R}^m$
- $f_h(x) := f(x+h)$

1. f — равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^m$
   Тогда $||f_h - f||_\infty \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$
2. $1 \leq p < +\infty,\ f \in L^p(\mathbb{R}^m)$
   Тогда $||f_h - f||_p \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$
3. $f \in \tilde{C}[0, \tau]$
   Тогда $||f_h - f||_\infty \longrightarrow 0$
4. $1 \leq p < +\infty,\ f \in L^p[0, \tau]$
   Тогда $||f_h - f||_p \longrightarrow 0$

Доказательство:

1.4 Теоремы

1.4.1 Теорема об интегрировании положительных рядов

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, u_n \geq 0$ (при почти всех x ?)
- u_n — измеримы на $E \in \mathfrak{A}$

Тогда:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E u_n(x) d\mu(x) \right)$$

Доказательство:

Подгоним под теорему Леви 3 (3 семестр). Пусть $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$ — последовательность частичных сумм. Очевидно, что эта последовательность — монотонно неубывающая (так как функции у нас неотрицательные):

$$0 \leq S_N \leq S_{N+1} \leq S_{N+2} \leq \dots$$

Тогда, делаем предельный переход (вот тут есть вопрос, почему должен существовать предел, но если подумать: если его не существует, вообще вся эта теорема не имеет смысла (ну бесконечности, чел, смысл их интегрировать)). А так же, измеримость сохраняется, так как у нас исходные функции все были измеримы (ну и по теореме о пределе измеирмых функций):

$$S_N(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} S(x)$$

Ну и всё, значи, по теореме Леви можем перейти к предельному переходу интегралов:

$$\int_E S_N(x) d\mu(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \int_E S(x) d\mu(x)$$

Левую часть можно расписать по линейности интеграла (там у нас конечное число членов):

$$\int_E S_N(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{N} \int_E u_n(x) d\mu(x)$$

Ну, а раз интграл суммы стремится к интегралу предельной функции, то и сумма интегралов обязана туда стремиться.

$$\sum_{n=1}^{N} \int_E u_n(x) d\mu(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x) d\mu(x)$$

ч. т. д.

Следствие:

- $u_n : X \to \mathbb{R}$, измеримы на $E \in \mathfrak{A}$
- $\sum \int_E |u_n(x)| d\mu < +\infty$ (конечна)

Тогда $\sum u_n(x)$ — абсолютно сходящийся при почти всех x

Доказательство:

Пусть:

$$S(x) = \int_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$

Тогда, по предыдущей теореме:

$$\int_E S(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E |u_n(x)| d\mu \right) < +\infty$$

Раз интеграл конечен, значит $S(x)$ — суммируема, а это значит, что $S(x)$ — почти везде конечна. Ну значит и сходится.

ч. т. д.

Пример:

- (x_n) — вещественная последовательность
- $\sum a_n$ — абсолютно сходящийся числовой ряд

Тогда функциональный ряд $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x-x_n|}}$ — абсолютно сходится при почти всех x (в $\mathbb{R}$ по мере Лебега)

Доказательство:

Во-первых, можно доказать, что если для $\forall A$ на $[-A, A]$ абсолютно сходится почти везде, то и везде (на $\mathbb{R}$) почти везде сходится (лол). Счётное количество п. в. $\Rightarrow$ п. в. (чтобы количество отрезков было счётным, надо чтобы A были хотя бы рациональными. Кажется, что это не сильная проблема, так как отрезки включают в себя и все вещественные числа на отрезке тоже).

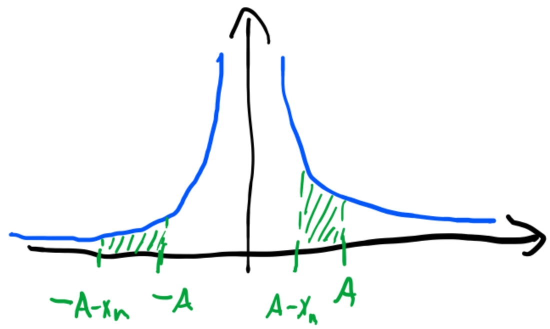
Попробуем подогнать под предыдущую теорему:

$$\int_{[-A,A]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} d\lambda = |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x-x_n|}} \leq$$

Так, стоп. А как мы перешли к определённому интегралу? Оказывается, что так можно делать, на доказано это будет позже (в курсе).

$$\underset{x:=x-x_n}{\leq} |a_n| \int_{-A-x_n}^{A-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq$$

Почему верен последний переход? Посмотрим на картинке:



Ну, по ней очевидно, что мы откусили кусочек поменьше, а добавили побольше. Тогда оценим модуль:

$$\leq 2 \cdot |a_n| \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4 \cdot \sqrt{A} \cdot |a_n|$$

Всё, абсолютный интеграл ограничен, значит сходится (при почти всех x).

ч. т. д.

1.4.2 Абсолютная непрерывность интеграла

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \quad \forall E \text{— измеримое } \mu E < \delta \qquad \left| \int_E f d\mu \right| < \varepsilon$$

Доказательство:

Для доказательства сего факта нам бы хотелось поисследовать, как на таких множествах ведёт себя функция в зависимости он величиные её значений на соответствующих множествах. Давайте заведём множества X_n:

$$X_n = X(|f| \geq n)$$

Заметим, что $\ldots \supset X_n \supset X_{n+1} \supset \ldots$. Причём:

$$\bigcap X_n = X_\infty = X(|f| = \infty)$$

А также, ведь по условию наша функция f суммируема, значит она почти везде конечна (а там, где не конечна — множество меры 0):

$$\mu\left(\bigcap X_n\right) = 0$$

Теперь заведём вспомогательную меру:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

И внезапно заметим, что для неё выполняется теорема об непрерывности меры сверху! ($X_0 = X$, так как там у нас условие модуль больший нуля, и интеграл по нему конечен, так как функция суммируема):

$$\nu(X_0) = \int_{X_0 = X} |f|\mu < +\infty$$

Ну а в пересечении, как мы уже выяснили, у нас множество меры ноль (а на нём интеграл тоже нулевой):

$$\nu\left(\bigcap X_n\right) = 0$$

Таким образом, $\nu(X_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. И это даёт нам право с полной уверенностью сказать, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \quad \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

Все приготовления сделаны, давайте оценивать:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} \; \mu E < \delta \qquad \left|\int_{X_{n_\varepsilon}} f d\mu\right| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| d\mu = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| d\mu + \int_{E \cap X^c_{n_\varepsilon}} |f| d\mu$$

Первое слагаемое оценим X_{n_ε}, для которого у нас уже есть готовое утвверждение выше. А второе оценим мерой, умноженной на n_ε. Так можно сделать, ведь дополнение X_{n_ε} есть множество точек, на котором функция $< n_\varepsilon$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + n_\varepsilon \cdot \overbrace{\underbrace{\mu\left(E \cap X^c_{n_\varepsilon}\right) \leq \mu\left(E\right) < \delta}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ч. т. д.

Следствие:

- $(e_n) \in \mathfrak{A}$ — последовательность (?) множеств
- $\mu e_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- f — суммируемая на X

Тогда:

$$\int_{e_n} f d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство:

Очевидно следует из теоремы, ну камон)

1.4.3 Теорема о произведении мер

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой (полукольца (?))
- Зададим $m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$

Тогда:

1. m_0 — мера на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$
2. μ, ν — σ-конечные меры $\Longrightarrow m_0$ — σ-конечная

Доказательство:

1.

Давайте рассмотрим какой-то $P = \bigsqcup P_k$ — измеримые прямоугольники. Чтобы доказать, что это действительно мера на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, необходимо доказать счётную аддитивность: $m_0(P) \underset{?}{=} \sum m_0(P_k)$

Верно, что $P = A \times B, P_k = A_k \times B_k$ (наше множество есть результат перемножение множеств из каждого пространства). Также из этого следует, что:

$$\chi_P = \sum \chi_{P_k}$$
$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y)$$

Поинтегрируем это по Y!

$$\chi_A(x)\nu(B) = \sum \chi_{A_k}(x)\nu(B_k)$$

А теперь по X!

$$\mu(A)\nu(B) = \sum \mu(A_k)\nu(B_k)$$

Всё проверили, это действительно мера.

2.

По сигма-конечности исходных мер, мы можем расбить исходные простанства на счётное объединение множеств, имеющих конечную меру.

$$X = \bigcup X_k,\ \mu X_k < +\infty$$
$$Y = \bigcup Y_k,\ \nu Y_n < +\infty$$

Ну и тогда мера перемножения двух этих множеств будет просто результатом перемножения нескольких конечных чисел и их сумма, что, очевидно, конечно:

$$X \times Y = \bigcup_{(i,j)} X_i \times Y_j$$

$$m_0(X \times Y) = \sum_{(i,j)} \mu(X_i) \cdot \nu(Y_j)$$

ч. т. д.

1.4.4 Теорема Тонелли

Формулировка:

$f_x(y) = f^y(x) = f(x, y)$ — новая нотация для функций с фиксированным аргументом.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν — σ-конечные меры
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, измерима относительно $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. при почти всех x функцияf_x измерима на Y
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu$ — это измеримая функция на X
3. $$\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi(x) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

Всё то же самое валидно и для y.

Доказательство:

будет принципом "конструктора". Соберём измеримую функцию из кусочков.

1. $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, f = \chi_C$

То есть, сначала рассмотрим функцию-"ступеньку".

1. $f_x = \chi_{C_x}$ — она измерима тогда, когда измеримо C_x. А оно измеримо по принципу Кавальери!
2. $\int_Y f_x d\nu = \int_Y \chi_{C_x} d\nu = \nu(C_x)$ — измеримо по принципу Кавальери!
3. $\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu(C_x) d\mu = mC$ (по принципу Кавальери). Тогда в обратную сторону $= \int_{X \times Y} \chi_C dm = \int_{X \times Y} f dm$

2. $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_i \geq 0$ — **ступенчатая**

1. $f_x = \sum c_i(\chi_{C_I})_x$ — аналогично предыдущему пункту, сумма измеримых почти везде.
2. $\int_Y f_x d\nu = \int_Y \sum c_i(\chi_{C_i})_x d\nu = \sum c_i \int_Y (\chi_{C_i})_x d\nu$. Ну и собственно говоря, у нас конечная сумма почти везде измеримых функций. Всё хорошо.
3. $\int_{X\times Y} f dm = \sum c_i \int_{X\times Y} \chi_{C_i} dm =$ вот тут просто раскрываем по пункту для "ступеньки" и заносим сумму внутрь $= \sum c_i \int_X \left(\int_Y \chi_{C_i} d\nu\right) d\mu = \int_X \sum c_i \left(\int_Y \chi_{C_i} d\nu\right) d\mu = \int_X \int_Y \left(\sum c_i \chi_{C_i}\right) d\nu d\mu$

3. $f \geq 0$ — ступенчатая

Идея: аппроксимация + теорема Леви $\times 2$. *(в этом разделе постоянно используется такой приём — прим. авт.)*

Запускаем теорему о характеризации измеримых функций ступенчатыми (?), $f = \lim_{n\to\infty} g_n, g_n$ — ступенчатые, возрастающие.

1. $f_x = \lim_{n\to\infty}(g_n)_x$ — измерима как предел измеримых функций (3 сем).
2. $\int_Y f_x d\nu \underset{\infty\leftarrow n}{\longleftarrow} \int_Y (g_n)_x d\nu$ (по теореме Леви). Предел измеримых.
3. Обозначим интеграл каждой ступенчатой функции как $\varphi_n(x) = \int_Y g_n d\nu$. Так вот, оказывается $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_{n+2}(x)$ (так как там подынтегральные функции возрастающие, все дела), и при этом $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$ (предыдущий пункт). Тогда давайте просто $\int_X \varphi(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x) d\mu$ по теореме Леви (типа в обратную сторону). А ещё, зная что в основе φ_n лежит ступенчатая функция, мы понимаем, что для неё уже выполняется наша теорема, таким образом применив пункты 2 и 3 мы можем перейти к равенству $= \lim \int_{X\times Y} g_n dm =$ и опять по Леви $= \int_{X\times Y} f dm$

ч. т. д.

1.4.5 Формула для бета-функции

Формулировка:

Бета-функция задаётся следующим образом:

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx, \quad s,t > 0$$

Тогда:

$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

Доказательство:

Рассмотрим:

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \cdot \int_0^\infty y^{t-1} e^{-y} dy =$$

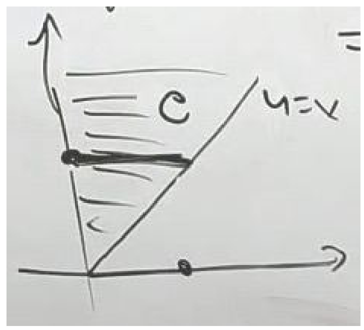
Заметим, что второй интеграл есть ничто иное, как константа! Внесём его внутрь:

$$= \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \left(\int_0^\infty y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x^{s-1} y^{t-1} e^{-(x+y)} dy \right) dx =$$

Заменим $y = u - x$:

$$= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u} du \right) dx =$$

А теперь финт ушами! По теореме Тонелли, этот повторный интеграл является двойным интегралом по некоторой области C:



Так давайте просто поменяем пределы интегрирования:

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^u x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u} dx \right) du =$$

И ещё раз заменим: $x = uv$, $dx = udv$ (u типа как константа, пределы интегрирования тоже поменялись!)

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^1 (uv)^{s-1} (u - uv)^{t-1} e^{-u} dv \right) udu = \int_0^\infty \left(\int_0^1 u^{s-1} v^{s-1} u^{t-1} (1-v)^{t-1} e^{-u} dv \right) udu =$$

$$\int_0^\infty u^{s+t-1} e^{-u} du \cdot \int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv = \Gamma(s+t) B(s,t)$$

ч. т. д.

1.4.6 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

Формулировка:

- $B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \leq R^2\}$
- $\alpha_m \ \lambda_m(B(0,1))$

Тогда:

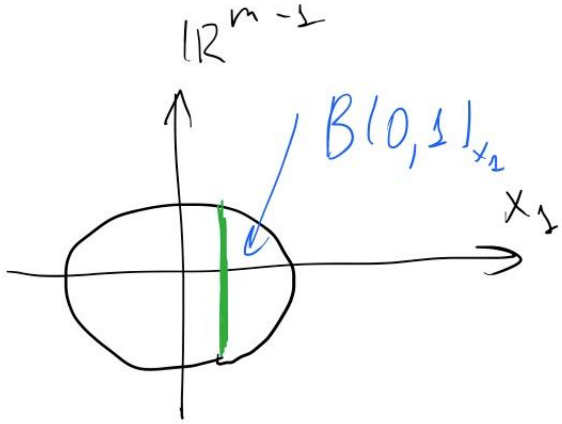
$$\mu\left(B(0,R)\right) = \alpha_m R^m$$

Доказательство:

Почему вылез радиус в степени m — это при линейном растяжении шарика $B(0,1)$ просто вылез множитель (по прошлому сему (?)). Поэтому достаточно рассмотреть только этот базированный шар единичного радиуса. Будем же наконец искать его объём, интегрируя!

$$\alpha_m = \int_{-1}^{1} \lambda_{m-1}\left(B(0,1)_{x_1}\right) dx_1 =$$

А почему так? Да очень просто. Дело в том, что сечение шара размерности m есть подпространство размерности $m-1$, а именно — шар радиуса $\sqrt{1-x_1^2}$.



$$= \int_{-1}^{1} \alpha_{m-1}(1-x_1^2)^{\frac{m-1}{2}} dx_1 =$$

Делаем замену $x_1^2 = x,\ dx_1 = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$:

$$= \frac{\alpha_{m-1}}{2} \int_{-1}^{1} x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{m-1}{2}} dx = \alpha_{m-1} \cdot B\left(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) = \alpha_{m-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

Двойка из знаменателя пропала из-за того, что подинтергальная функция чётна, значит, изначальный интеграл можно разбить на два на промежутках $(-1,0)$ и $(0,1)$ и они будут равны, и равны бета-функции. Ну и всё, двойка сократилась. Гораздо интереснее, что же там будет, если мы будем раскрывать "альфы" до талого. Сразу заметим, что $\alpha_1 = 2$ (ну просто длина промежутка $(-1,1)$). Посмотрим (пары, эквивалентные "подчёркнутым" сократятся, и так далее со сдвигом на один через один, лол):

$$\alpha_m = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\underline{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\underline{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}+1\right)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}+1\right)} \cdot \ldots \cdot 2 =$$

Вспоминаем “факториальность” гамма-функции $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ и формулу из темы про бесконечные произведения $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$:

$$= 2\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = 2\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{m}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \frac{\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

(можно прогнать ещё для первых размерностей 2, 3)

ч. т. д.

1.4.7 Теорема Фату. Следствия

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f_n \geq 0$ — измерима
- $f_n \to f$ почти везде
- Если $\exists C > 0 \;\; \forall n \int_X f_n d\mu \leq C$

Тогда:

$$\int_X f d\mu \leq C$$

(тут, вообще говоря, не предполагается, что интегрально функции сходятся)

Доказательство:

Заведём $g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots\}$ (должно уже на что-то намекать). Очевидно, что эта последовательность возрастающая, так как у нас есть сходимость почти везде изначально. Также $\forall n : 0 \leq g_n \leq f_n$

Очевидно, что $g_n \leq f_n$, интегрируем!

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C \quad (*)$$

С другой стороны, так как $\lim_{n\to\infty} g_n$ суть есть $\underline{\lim} f_n = f$ (ну раз у нас есть сходимость, то и нижний предел сходится к f). Тогда по теореме Леви:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X g_n = \int_X f \leq C$$

ч. т. д.

Следствие:

То же самое, только меняем сходимость почти везде на:

- $f_n, f \geq 0$, измеримы, почти везде конечны

- $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$

Доказательство:

Запускаем теорему Рисса, выбираем сходящуюся подпоследовательность и доказательство сработает.

Следствие:

- $f_n \geq 0$, измеримы

Тогда:

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

Доказательство: Вспоминаем 2й сем, там было несколько теорем о частичном пределе. Одна из них говорит, что если существует нижний предел, то существует и подпоследовательность к нему ведущая. А раз он существует (почему?), то всё гуд:

$$\exists n_k : \int_X f_{n_k} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \underline{\lim} \int_X f_n$$

Тогда запускаем (*):

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n$$

Левый интеграл по выкладкам из основной теоремы стремится к тому, чему надо. А для правого написано выше:

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

ч. т. д.

1.4.8 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \_)$ — пространства с мерой
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ — измеримо
- $\Phi : X \to Y$ — "измеримое"
- ν — взвешенный образ μ (с весом ω)

Тогда для $\forall f : Y \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ — измеримых:

1. $f \circ \Phi$ — измеримо (относительно $\mathfrak{A}$)

2. $\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) d\mu(x)$

Доказательство:

1.

Ну тут всё достаточно просто, нам дано, что f — измерима относительно $\mathfrak{B}$. Выводим измеримость через данное:

$$X(f \circ \Phi < a) = \Phi^{-1}(Y(f < a)) \in \mathfrak{A}, \quad (Y(f < a) \in \mathfrak{B})$$

Ну типа, мы перегоняем каждую точку из пространства, в котором нам известна измеримость, в новое. Причём, важно что прообраз этих множеств точно лежит в $\mathfrak{A}$ (по "измеримости" отображения Φ)

2. "Зоологическая теорема"

Запускаем классическое "ступенчатое" доказательство.

2.1 $B \in \mathfrak{B}, f = \chi_B$ **– ступенька**

По условию: $f \circ \Phi(x) = \chi_B(\Phi(x))$. Вообразим это в голове, и поймём, что это характеристическая функция образа $B_k := \chi_{\Phi^{-1}(B)}(x)$. С другой стороны, мы можем поинтегрировать функцию по Y :

$$\int_Y f d\nu = \nu(B) =$$

ν — взвешенная мера (по определению). Распишем:

$$= \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu = \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu =$$

Мы расширили интеграл, но добавили характеристическую функцию, чтобы занулить его вне искомой области. Ну и теперь подинтегральная функция просто и есть f:

$$= \int_X f \circ \Phi(x) \omega(x) d\mu$$

2. $f = \sum \alpha_k \chi_{B_k}(x)$ **— ступенчатая**

По линейности интеграла всё работает.

$$\int_Y \sum \alpha_k \chi_{B_k} d\nu = \sum \alpha_k \int_Y \chi_{B_k} d\nu = \sum \alpha_k \nu(B_k) =$$

$$= \sum \alpha_k \int_X (f_{B_k} \circ \Phi)(x) \omega(x) d\mu = \int_X \sum \alpha_k = \dots$$

Ну короче, всё хорошо.

3. $f \geq 0$ **— измеримая**

$g_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f, g_n \geq 0$ — ступенчатые. Запускаем теорему Леви и всё получается.

ч. т. д.

Следствие:

Вместо измеримости ≥ 0 можно взять и суммируемость.

Доказательство:

$|f|$ подходит по условию теоремы.

$|f|$ — суммируема относительно $\nu \Leftrightarrow f \circ \Phi$ суммируема относительно μ (почему?). "Тогда с задачей срезок не будет никаких проблем"

1.4.9 Критерий плотности

Тут мы резко свернули с абстрактных рельс на $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \Phi = \mathrm{id}$

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- ν — ещё одна мера на $\mathfrak{A}$
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, измеримо

Тогда эквивалентно:

1. ω — плотность μ отностительно μ
2. $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \inf_A \omega \cdot \mu A \leq \nu A \leq \sup_A \omega \cdot \mu A$

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$

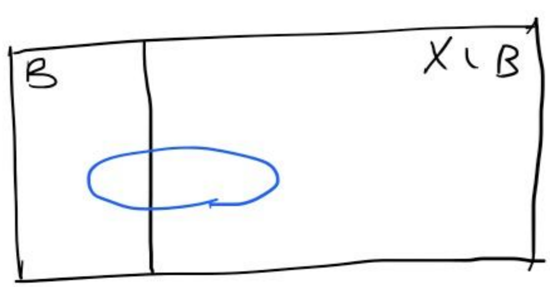
Очевидно (расписать по определению).

$2 \Rightarrow 1$

Проще рассматривать множество на ненулевых ω. Для начала, на нулевых всё выполняется: $B = X(\omega = 0)$.

$$\nu B = 0 = \int_B 0 d\mu$$

Ещё надо бы показать, что если множесто оказалось на перечении "нулевого" и "пложительного" веса, то оно не испортит нам оценку.

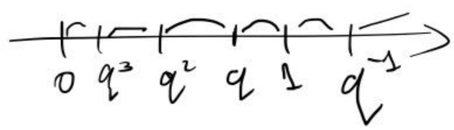


A — синее множество. Тогда $A \cap B$ — часть, где вес равен нулю, а $A \setminus B$ — где положительный. Посмотрим методом пристального взгляда на неравенства:

$$\nu A \leq \sup \omega \mu A$$
$$\nu A \setminus B + \underbrace{\nu A \cap B}_{=0} \leq \sup \omega \cdot (\mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B))$$

Как видно, мы только усилили неравенство (во втором случае мы проверяем только часть множества).

Зафиксируем $q \in (0, 1)$. Рассмотрим $A_j = A(q^j < \omega < q^{j-1})$, $j \in \mathbb{Z}$. Так как степень пробегает целые числа, то такое замощение покрывает всю положительную ось $\mathbb{R}$ ($A = \bigsqcup A_j$).



$$q^j \mu A_j \underbrace{\leq}_{1} \nu A_j \underbrace{\leq}_{2} q^{j-1} \mu A_j$$

$$q^j \mu A_j \underbrace{\leq}_{3} \int_{A_j} \omega d\mu \underbrace{\leq}_{4} q^{j-1} \mu A_j$$

Откуда взялись эти неравенства? Ну, первое просто напросто вытекает из предпосылки, и т. к. мы ограничили множество, очевидно, какие у него инфимум и супремум. А второе — просто расписали взвешенную меру. Записываем *очень* длинное оценочное неравенство:

$$q \int_A \omega d\mu = q \sum \int_{A_j} \omega d\mu \underbrace{\leq}_{4} q \sum q^{j-1} \mu A_j = \sum q^j \mu A_j \leq$$
$$\underbrace{\leq}_{1} \sum \nu A_j \underbrace{\leq}_{2} \sum q^{j-1} \mu A_j = q^{-1} \sum q^j \mu A_j \leq$$
$$\underbrace{\leq}_{3} q^{-1} \sum \int_{A_j} \omega d\mu = q^{-1} \int_A \omega d\mu$$

Таким образом, мы окольцевали:

$$q \int_A \omega d\mu \leq \sum \nu A_j = \nu A \leq q^{-1} \int_A \omega d\mu$$

Устремляем $q \to 1$ и получаем искомое.

ч. т. д.

1.4.10 Лемма о единственности плотности

Формулировка:

- f, g — суммируемы на X
- $\forall A$ — измеримое, $\int_A f = \int_A g$

Тогда $f = g$ почти везде

Доказательство:

Для удобства будем расматривать $h := f - g$. Тогда по условию теоремы $\forall A : \int_A |h| = 0$

Заведём $X_+ := X(h \geq 0), X_- := X(h < 0)$. Очевидно, что $X = X_+ \sqcup X_-$.

$\int_{X_+} |h| = \int_{X_+} h = 0$ (как и по любому измеримому множеству), $\int_{X_-} |h| = -\int_{X_-} h = 0$

Ну и значит и по всему пространству: $\int_X |h| = \int_{X_+} |h| + \int_{X_-} |h| = 0 - 0 = 0$. Получается, что $h = 0$ почти везде.

ч. т. д.

Следствие:

Плотность меры определяется однозначно с точностью до изменения на множестве меры 0.

1.4.11 Лемма об оценке мер образов малых кубов

Формулировка:

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^1$
- $a \in O$
- Пусть $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда $\exists \delta > 0$ $\forall$ Куб $Q \subset B(a, \delta)$

$$\lambda \cdot \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$$

Доказательство:

1.4.12 Предельный переход по параметру в несобственном интеграле

Формулировка:

- $f : \langle a, b \rangle \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$
- $Y \subset \tilde{Y}$ — метризуемое
- $y_0 \in \tilde{Y}$ — предельная точка Y

1. при почти всех $x \exists f_0(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y)$
2. $\forall t \in (a, b)\ \forall f(x, y_0), f(x, y)$ — суммируемые по x на (a, t) и $\int_a^t f(x, y)dx \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} \int_a^t f_0(x)dx$
3. $J(y) = \int_a^{\to b} f(x, y)$ — равномерно сходящаяся при $y \in Y$

Тогда $\int_a^{\to b} f_0(x)dx$ — существует (как несобственный)

Доказательство:

1.4.13 Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости или L_{loc}

Формулировка:

- $f : X \times \tilde{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$
- X — пространство с мерой, $\mu X < +\overline{\mathbb{R}}$
- $\tilde{Y}$ — метрезуемое топологическое пространство
- $Y \subset \tilde{Y}$
- $a \in \tilde{Y}$ — предельная точка Y
- $\forall y \in Y \quad x \mapsto f(x, y)$ — суммируема на X
- Пусть $f(x, y) \underset{y \to a}{\rightrightarrows} \varphi(x)$

Тогда φ — суммируема на X и

$$\lim_{y \to a} \int_X f(x, y)d\mu(x) = \int_X \varphi(x)d\mu(x)$$

Доказательство:

1.4.14 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

Формулировка:

- Y — промежуток $\subset \mathbb{R}$
- $f : X \times Y \to \mathbb{R}$
- $\forall \quad f(x, y)$ — суммируемая функция от x
- При почти всех $x\ \forall y \exists f'_y(x, y)$
- f'_y — удовлетворяет условию $L_{loc}(y_0)$

Тогда:

- $J(y) = \int_X f(x, y)d\mu(x)$ — дифференцируема в y_0
- $J'(y_0) = \int_X f'_y(x, y)d\mu(x)$

Доказательство:

1.4.15 Теорема о вложении пространств L^p

Формулировка:

- $\mu E < +\infty, 1 \leq s < r \leq +\infty$

Тогда:

1. $L_r(E,\mu) \subset L_s(E,\mu)$
2. $||f||_s \leq (\mu E)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \cdot ||f||_r$

fix

Доказательство:

1.4.16 Теорема о сходимости в L^p и по мере

Формулировка:

$1 \leq p < +\infty \quad f_n \in L_p(E,\mu)$:

1. $f \in L_p \quad f_n \xrightarrow[L_p]{} f$, тогда $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$
2. $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$ [либо $f_n \to f$ почти всюду], $|f_n| \leq g$ почти всюду, при всех n, где $g \in L^p$. Тогда $f_n \xrightarrow[L_p]{} f$

Доказательство:

1.4.17 Полнота L^p

Формулировка:

$L^p(E,\mu)$ — полное $(1 \leq p < +\infty)$

Доказательство:

1.4.18 Плотность в L^p множества ступенчатых функций

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu), 1 \leq p \leq +\infty$

Тогда множество ступенчатых функций плотно в $L_p(X,\mu)$

Доказательство:

1.4.19 Лемма Урысона

Формулировка:

- X — нормированное топологическое пространство (например, $\mathbb{R}^m$)
- $F_0, F_1 \subset X$ — замкнутое
- $F_0 \cap F_1 = \varnothing$

Тогда: $f : X \to \mathbb{R}, \quad 0 \le f \le 1$ — непрерывное

$f|_{F_0} \equiv 0$, $f|_{F_1} \equiv 1$

Доказательство:

1.4.20 Плотность в L^p непрерывных финитных функций

Формулировка:

- $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}^m, \lambda_m)$

Тогда $C_0(\mathbb{R}^m)$ плотно в $L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

Доказательство:

1.4.21 Интегрирование по мере Бореля–Стильтьеса, порожденной функцией распределения (с леммой)

Формулировка:

- $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} \ge 0$, измерима по Борелю
- $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, измерима, почти везде конечна
- H — функция распеределения
- μ_H — мера Бореля-Стильетса

Тогда:

$$\int_X f\left(h(x)\right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_H(t)$$

Доказательство:

1.4.22 Теорема об интегрировании по частям

Формулировка:

- $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, возрастающая

- f — абсолютно непрерывная функция (C^1) на $[a, b]$
- μ_H — мера Бореля(Лебега ?)-Стильетса

Тогда:

$$\int_{[a,b)} f(x)dg(x) = fg|_a^b - \int_{[a,c]} f'(x)g(x)dx$$

Доказательство:

1.4.23 Лемма о "почти признаке Дирихле"

Формулировка:

- $-\inf < a < b \leq +\inf$
- f — "доп." на $[a,b)$ ($\forall A \in (a,b) f$ — суммируема на (a,A))
- $g(x)$ — монотонно стремится к 0 при $x \to b-0$
- Пусть функция $F(t) = \int_a^t f dx$ — ограничена

Тогда:

$$\int_a^{\to b} fg dx$$

— сходится

$$\left|\int_a^{\to b} fg dx\right| \leq |g(a)| \cdot \sup_{t\in(a,b)} \left|\int_t^{\to b} f dx\right|$$

Доказательство:

1.4.24 Следствие о "почти признаке Абеля"

Формулировка:

- $\int_a^{\to b} f dx$ — сходится, g — монотонна и ограничена на $[a,b)$

Тогда: $\int_a^{\to b} f dx$ — сходится, и к тому же:

$$\left|\int_a^{\to b} fg\right| \leq 5(???) \cdot \sup_{(a,b)} |g(t)| \cdot \sup_{(a,b)} \left|\int_t^{\to b} f(x)dx\right|$$

Доказательство:

1.4.25 Признак Абеля равномерной сходимости интеграла

Формулировка:

- $f, g : [a,b) \times Y \to \mathbb{R}$
- $\int_a^{\to b} f(x,y)dx$ — равномерно сходящийся на Y
- $g(x,y)$ — ограничена на $[a,b) \times Y$

Тогда:

$$\int_a^{\to b} f(x,y)g(x,y)dx$$

— равномерно сходящийся на Y.

Доказательство:

2 Период Мезозойский

2.1 Важные определения

2.2 Определения

2.2.1 Кусочно-гладкий путь

γ — кусочно-гладкий, V — непрерывно, $V = (V_1, V_2, \ldots, V_m)$

$$I(V, \gamma) = \int_a^b \langle V\left(\gamma(t)\right), \gamma'(t)\rangle dt =$$

$$\int_a^b V_1\left(\gamma(t)\right)\gamma_1'(t) + V_2\left(\gamma(t)\right)\gamma_2'(t) + \ldots + V_m\left(\gamma(t)\right)\gamma_m'(t)dt =$$

Делаем замену: $x = \gamma(t)$; $x_1 = \gamma_1(t), x_2 = \gamma_2(t)$; $dx_m = \gamma_m'(t)dt$

$$\int_\gamma V_1 dx_1 + V_2 dx_2 + \ldots + D_m dm$$

2.3 Важные теоремы

2.4 Теоремы

2.4.1 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

Формулировка:

- $x_n \to x_0, y_n \to y_0 \quad \langle x_n, y_n \rangle \to \langle x_0, y_0 \rangle$
- $\sum_n x_n$ — сходится
  Тогда $\forall y \in \mathcal{H} \quad \langle \sum x_n, y \rangle = \sum \langle x_n, y \rangle$
- $\sum x_n$ — ортогональный ряд
  Тогда $\sum x_n$ — сходится $\Leftrightarrow \sum ||x_n||^2$ — сходится

Доказательство:

2.4.2 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

Формулировка:

- e_k — ортогональная система в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $x = \sum_{x=1}^{\infty} c_k e_k$

Тогда:

1. e_k — ЛНЗ
2. $c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$
3. $c_k e_k$ — это проекция на прямую $l_k = te_k, t \in \mathbb{R}, x = c_k e_k + z$, где $z \perp l_k$

Доказательство:

2.4.3 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

Формулировка:

-

Доказательство: