Пример 1 (Асимптотика степенных сумм)

$f = x^p, \quad p > -1 \qquad \sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x) + \int_m^n f''(x)\{x\}\{1-x\}\,dx$

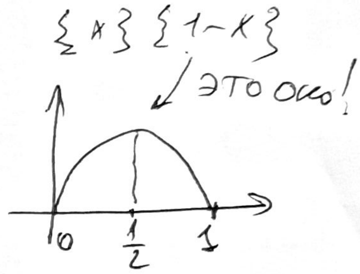
$$\underbrace{1^p + 2^p + \dots + n^p = \frac{1}{2}(1+n^p) + \int_1^n x^p\,dx + \frac{p(p-1)}{2}\int_1^n x^{p-2}\{x\}\{1-x\}\,dx}_{\text{Формула Эйлера-Маклорена (пол)}}$$

$$= \frac{1}{2}(1+n^p) + \underbrace{\frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}}_{\text{взяли интеграл}} + \frac{p(p-1)}{2}\underbrace{\int_1^n x^{p-2}\{x\}\{1-x\}\,dx}$$

$$= O(\max(1, n^{p-1})), \quad \text{т.к. } 0 \le \int_1^n x^{p-2}\underbrace{\{x\}\{1-x\}}_{\ge 0}\,dx \le$$

$$\le \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n^{p-1}-1}{p-1}\right)$$

тоже проинтегрировали



$\Rightarrow \max$ в т. $x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \max(\dots) = \frac{1}{4}$

$\boxed{\text{Причём при } p = 1 \text{ всё тривиально}}$ $\left(\frac{p(p-1)}{2} \text{ будет } 0\right)$

Итого:

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \frac{1}{2}(1+n^p) + \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} + O(\max(1, n^{p-1}))$$

Запихиваем все константы под $O(\dots)$

$$\boxed{1^p + 2^p + \dots + n^p = \frac{n^p}{2} + \frac{n^{p+1}}{p+1} + O(\max(1, n^{p-1}))}$$

Интересный факт, при $p < -1$ $\quad 1^p + 2^p + \dots n^p = O(1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n^p$ — сходится

частичных сумм