Неравенство Минковского

$p \geq 1$

Отобр. $(x_1, x_2 \dots x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ явл. нормой, (см. 1 сем)

т. е. выполняется нер-во Δ-ка

$$\left(\sum |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

При $p=1$ очевидно.

$p>1$, рассмотрим только при положительных a_i, b_i, ост. сводятся к ним

рассмотрим

$\sum |a_i| |a_i+b_i|^{p-1}$, $\sum |b_i| |a_i+b_i|^{p-1}$. По Гёльдеру их:

$$\sum |a_i| |a_i+b_i|^{p-1} \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum |a_i+b_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

с $b_i(a_i+b_i)^{p-1}$ аналогично. И складываем два неравенства

$$\sum |a_i+b_i|^{p-1} |a_i+b_i| \leq \left(\left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

нер-во Δ → $\geq \sum |a_i+b_i|^p$

$\cancel{\sum |a_i+b_i|^p \leq}$ Делим обе части на $\left(\sum |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$

$$\left(\sum |a_i+b_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ч.т.д.