Теорема Лагранжа для векторнозначных функций

$F:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ непр. $[a,b]$, дифференцируема (a,b)

Тогда: $\exists\, c\in(a,b)$ $\quad |F(b)-F(a)|\le|F'(c)|(b-a)$

☹ в обычном Лагранже „=“

Доказательство:

Заведём $\varphi(t):=\langle F(b)-F(a),\ F(t)-F(a)\rangle$, $t\in[a,b]$

Небольшая ревизия:

$\varphi(0)=0$, $\quad \varphi'(t)=\langle \underbrace{(F(b)-F(a))'}_{=0},\ F(t)-F(a)\rangle + \langle F(b)-F(a),\ F'(t)-0\rangle =$

$=\langle F(b)-F(a),\ F'(t)\rangle$ — ~~почему~~ ??? я не понимаю(

понял!!!

$\varphi(b)=|F(b)-F(a)|^2$

$\varphi(b)-\varphi(a)=|F(b)-F(a)|^2+\langle 0,0\rangle$

$\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(c)(b-a)$ — обычная теорема Лагранжа.

$|F(b)-F(a)|^2=\langle F(b)-F(a),\ F'(c)\rangle(b-a) \overset{\text{КБШ}}{\le} |F(b)-F(a)|\,|F'(c)|\,(b-a)$

Делим на $|F(b)-F(a)|$ (для $b=a$ тривиально)

$|F(b)-F(a)|\le|F'(c)|(b-a)$ ч.т.д.