Дифференцирование и произведений

$F, G : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ $\quad a \in \operatorname{Int} E$

$\lambda : E \to \mathbb{R}$

F, G, λ — дифф. в точке a

причём тут на h мы типа „действуем", а не умножаем

Тогда:

1) $(\lambda F)'(a)\cdot h = (\lambda'(a)h)F(a) + \lambda(a)F'(a)\cdot h$

2) $(\langle F, G\rangle)'(a)h = \langle F'(a)h, G(a)\rangle + \langle F(a), G'(a)h\rangle$

__Док-во:__

1) Сначала рассмотрим basic версию для $L = 1$:

$\cancel{(\lambda f)'(a)\cdot h = (\lambda' f)(a)\cdot h}$ $\quad (\lambda f)(a+h) - (\lambda f)(a) =$

$= \lambda(a+h)f(a+h) - \lambda(a)f(a) = [\lambda(a) + \lambda'(a)h + \alpha(h)|h|]\cdot$

$\cdot(f(a) + f'(a)h + \beta(h)\cdot|h|] - \lambda(a)f(a) = \lambda(a)f(a) + \underline{f(a)\cdot f'(a)h} +$

$+ \underline{f(a)\alpha(h)|h|} + \lambda'(a)h\cdot f(a) + \lambda'(a)\cdot f'(a)h\cdot h + \underline{\lambda'(a)h\cdot\beta(h)|h|} +$

$+ \underline{\alpha(h)|h|(\text{sm}+h)}$. Всё, что подчёркнуто — б.м., что либо очевидно, либо можно применить лемму об ограниченности нормы ЛО) и в итоге всё получится б.м!

Итого: $(\lambda'(a)\cdot h)\cdot f(a) + \lambda(a)\cdot(f'(a)\cdot h + o(h)$

А давайте теперь просто напишем эту формулу l раз и допишем всем f буковки i: (f_i), и скажем, что мы дифференцируем покоординатно. ВУАЛЯ!

2) $(\langle F, G \rangle)'$

А что же такое, это ваше "$\langle\ \rangle$"?

По определению: $\langle F, G \rangle(x) = \sum\limits_{i=1}^{l} f_i(x) g_i(x)$

А теперь: $((\langle F, G \rangle)'(a))h = \sum\limits_{i=1}^{l} (f_i(a) g_i(a))' h =$

$= \sum\limits_{i=1}^{l} f_i'(a) h g_i(a) + f_i(a) g_i'(a) h = \sum\limits_{i=1}^{l} f_i'(a) h g_i(a) + \sum\limits_{i=1}^{l} f_i(a) g_i'(a) h =$

$= \langle F'(a) h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a) h \rangle$

если $h = 1$
$\langle F, G \rangle' = \langle F'(a), G(a) \rangle +$
$+ \langle F(a), G'(a) \rangle$

Ч.Т.Д.