Формула Стирлинга

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{n}\sqrt{2\pi}$$

Доказательство:

Рассмотрим сумму первых натуральных n как аргумент логарифма натурального:

$$\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = \frac{\ln 1}{2} + \frac{\ln n}{2} + \int_1^n \ln n \, dn - \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2}\,dx$$

Сразу записали Эйлера-Маклорена

вторая производная

$$= 0 + \frac{\ln n}{2}$$

$$\boxed{\int \ln n \, dn = \begin{bmatrix} u = \ln n & u' = \frac{1}{n} \\ v' = 1 & v = n \end{bmatrix} = n \ln n - \int \frac{1}{n}\cdot n \cdot dn = n\ln n - n + C}$$

(по частям)

$$= 0 + \frac{\ln n}{2} + (n\ln n - n)\Big|_1^n + C_1 + O(1)$$

← сократили константы

$\frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2}$, т.к. возр. ф-ция.

$$= \frac{\ln n}{2} + n\ln n - n + C_1 + O(1) = \sum_{i=1}^{n} \ln i = \ln n! \text{ — по св-вам}$$

логарифма!

$$\Rightarrow \ln n! = \frac{\ln n}{2} + n\ln n - n + C_1 + O(1) \quad \Big| \, e$$

$$n! = e^{\frac{\ln n}{2} + n\ln n - n + C_1 + O(1)}$$

$$n! = \sqrt{n}\cdot n^n \cdot e^{-n}\cdot e^{C_1 + O(1)} \underset{n\to\infty}{\sim} C\cdot\sqrt{n}\cdot n^n\cdot e^{-n}$$

Осталось выяснить, что за $C_1 + O(1)$

Рассмотрим $\sqrt{\pi}$ по Валлису:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2k)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}} =$$

$\cdot (2k)!!$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{(2^k \cdot (k!))^2}{2k!} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = \cancel{\lim_{k\to\infty} 2^{2k} \cdot (2k)!}$$

$= $ замена на эквив (которые мы там сверху вывели)

$$\cancel{\lim_{k\to\infty} \frac{(2^k \cdot \sqrt{2n} \cdot (2n)^{(2n)} \cdot e^{-2n} \cdot C)^2}{\sqrt{2n} \cdot (2n)^{(2n)} \cdot e^{-2n} \cdot C}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(2^k \cdot \sqrt{k} \cdot k^k \cdot e^{-k} \cdot C)^2}{\sqrt{2k} \cdot (2k)^{(2k)} e^{-2k} \cdot C} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{C}{\sqrt{2}} = \frac{C}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{\pi} = \frac{C}{\sqrt{2}} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$$

ч.т.д.