Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа и Пеано.

$f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $B(x,a) \subset E$ – открытое

$f \in C^{r+1}(E)$, Тогда $\exists\ \Theta \in (0,1)$:

~~Эквива~~

для здоровых людей: $f(x) = \underbrace{\sum_{j:|j|\le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j}_{\text{Многочлен Тейлора порядка } r \text{ ф-ции } f \text{ в точке } a} + \sum_{j:|j|=r+1} \frac{f^{(j)}(a+\Theta(x-a))}{j!}(x-a)^j$

для психов: $f(x) = \sum_{j:|j|\le r} \frac{1}{j^1!j^2!\dots j^m!}\frac{\partial^{|j|} f}{\partial x^j}(a)\cdot(x-a)^j +$

$+ \sum_{j:|j|=r+1} \frac{1}{j^1!j^2!\dots j^m!}\frac{\partial^{r+1} f}{\partial^{j^1}_{x_1}\dots\partial^{j^m}_{x_m}}(a+\Theta(x-a))\cdot(x-a)^j$

(в форме n-го дифф-ла) ~~$f(x)=$~~ $f(a+h) = \sum_{n=1}^{r} \frac{d^n(a,h)}{n!} + d^{n+1}(a+\Theta h, h)$

(в форме $a+h$, Лагранж) $f(a+h) = \sum_{j:|j|\le r} \frac{f^{(j)}}{j!}(a)h^j + \sum_{j:|j|=r+1} \frac{f^{(j)}(a+\Theta h)}{j!} h^j$

~~Доказ~~ Доказательство:

Из прошлой теоремы: $\varphi'(t) = f(a+th)$, $h = x-a$

$\varphi^{(k)} = \sum_{j:|j|\le r} \frac{r!}{j!}\frac{\partial^k}{\partial x^j} f(a+th)$

$\varphi(0) = f(a)$; Распишем формулу Тейлора с остатком в виде Лагранжа для $\varphi(t)$ в точке 0

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi(0)}{1!}(t) + \ldots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}(t) + \frac{\varphi^{(r+1)}(\bar{t})}{(r+1)!} t^{r+1}$$

$$f(x) = \sum_{j:|j|\le r} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \sum_{j:|j|=r+1} \frac{f^{(j)}(a+\theta(x-a))}{j!}(x-a)^j$$

$$\theta \in (0,1)$$

Тут фишка в чём: мы подставляем $\varphi^{(i)}$-ю производную из в ф. Тейлора для φ (которую мы получили ~~для~~ из предыдущей теоремы о сдвиге), тем самым уничтожая факториалы. И всё супер.

<u>в форме Пеано:</u> $f(a+h) = \sum_{j:|j|\le r} \frac{f^{(j)}}{j!}(a) h^j + o(|h|^r)$

Заметим, что $j^1 + j^2 + \ldots j^3 = r+1$ (для последнего члена в форме Лагранжа)

Докажем, что $h_1^{j_1} \cdot h_2^{j_2} \cdots h_m^{j_m} = o(|h|^r)$, $h \to 0$ ← это чтобы $\varepsilon o(|h|^r)$ было

Распишем дробь: $\frac{h_1^{j_1} \cdot h_2^{j_2} \cdots h_m^{j_m}}{|h^r|} \cdot |h| =$

$$= \frac{|h_1^{j_1}|}{|h|^{j_1}} \cdot \frac{|h_2^{j_2}|}{|h|^{j_2}} \cdots \frac{|h_m^{j_m}|}{|h|^{j_m}} \cdot |h|$$

Они все ≤ 1! Почему? $|h| = \sqrt{\sum_{i\in[1,m]} |h_i|^2}$, и, типа, мы просто делим 1 координату на сумму всех ($\pm$) $\Rightarrow$ заведомо меньше.

$\Rightarrow$ при $h \to 0$ всё равно $o(|h|^r)$

Ура!

ч.т.д.