Дифференцируемость композиции.

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$.

Лемма (об оценке нормы линейного оператора)

$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ — линейный оператор, $A \Leftrightarrow (a_{ij})$

Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^m$

$$|Ax| \le C_A \cdot |x|, \text{ где } C_A = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$$

Доказательство: Рассмотрим:

$$|Ax|^2 = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} \cdot x_j) \right)^2$$ — тупо множим вектор на матрицу

$$\sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot x_j \right)^2 \le \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2 \right)$$

по КБШ внутреннего суммы

(выносим сумму с иксом, т.к. от внешней суммы она не зависит)

$$\cancel{\le} = |x|^2 \cdot \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 = |x|^2 \cdot C_A^2 ; \quad |Ax| \le |x| C_A$$

ч.т.д.

возвращаемся к композиции (но уже на следующей странице, лол!)

$F: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ $F(E) \subset I$

$G: I \subset \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ $a \in \mathrm{Int}(E)$

$F(a) \in \mathrm{Int}(I)$

F — дифф. в т. a, G — дифф. в т. $F(a)$

Тогда $G \circ F$ — дифф. в т. a. $(G\circ F)'(a) = G'(F(a))\cdot F'(a)$

если мы знаем матрицы, то считать — одно удовольствие!

Док-во:

$b := F(a)$, $k := F'(a)\cdot h + \alpha(h)\cdot|h|$

$F(a+h) = F(a) + F'(a)\cdot h + \alpha(h)\cdot|h|$

$G(b+k) = G(b) + G'(b)\cdot k + \beta(k)|k|$

Рассмотрим:

$\cancel{G(F(a+h)) - G(F(a))} =$

$G(F(a+h)) = G(b+k) = G(b) + G'(b)\cdot k + \beta(k)|k| =$

$= G(F(a)) + \underbrace{G'(F(a))\cdot(F'(a)h + \alpha(h)\cdot|h|)}_{\mathrm{II}} + \beta(k)\cdot\underbrace{|F'(a)\cdot h + \alpha(h)\cdot h|}_{\mathrm{III}}$

Тут мы получили как бы формулу „дифференцирования“ для G в т. $F(a)$. Надо доказать, что вот эта длинная блямба в конце — бесконечно малое, и всё будет супер.

Воспользуемся доказанной леммой:

$\cancel{\mathrm{I} \le | G'(b) |}$

$$G(F(a+h)) = G(F(a)) + G'(F(a)) \cdot F'(a) \cdot h + \overbrace{G'(F(a)) \cdot \alpha(h)|h|}^{\mathrm{I}} + \beta(k) \cdot \underbrace{\left(F'(a) \cdot h + \alpha(h)|h| \right)}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I}: \quad \underset{b}{\overset{\shortparallel}{G'(F(a))}} \cdot \alpha(h)|h| \le C_{G'(b)} \cdot |\alpha(h)| \cdot |h|$$

II:

$$|F'(a) \cdot h + \alpha(h)|h|| \underset{\text{правило } \Delta\text{-ка}}{\le} |F'(a)h| + |\alpha(h)|h|| \le$$

$$\le \big(\underset{\text{огранич.}}{C_{F'(a)}} + \underset{\substack{h \to 0 \\ \text{при } x \to a}}{|\alpha(h)|} \big) \cdot |h| \quad \text{Бзее}$$

$$\mathrm{II} \le \cancel{\beta(k) \cdot (C_{F'(a)} + \alpha(h)|h|)}$$

$$\underset{\to 0}{|\beta(k)|} \cdot \big(\underset{\text{огр.}}{C_{F'(a)} + \alpha(h)} \big) \underset{\to 0}{|h|}$$

Итого:

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \mathrm{I} + \mathrm{II} \text{ — бесконечно малое}$$

$\Rightarrow$ формула совпаль и всё хорошо