СВЯТОЙ КПК
#BlessRNG

Или как не сдохнуть на 4 семе из-за матана

Разработал

Никита Варламов @snitron

Почётный автор

Тимофей Белоусов @imodre

v0.0

Февраль-??? 2023

Вы в любой момент можете добавить любую недостающую теорему, затехав её и отправив код (фотографии письменного текста запрещены) в телегу любому из указанных авторов, или создав Pull Request в Git-репозиторий конспекта (click). Ваше авторство также будет указано, с вашего разрешения.

Ah shit
Here we go again!
And again...
Oh, fuck.

Содержание

1 Период Палеозойский

1.1 Важные определения

1.2 Определения

1.3 Важные теоремы

1.4 Теоремы

1.4.1 Теорема об интегрировании положительных рядов

Формулировка:

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, u_n \geq 0$ (при почти всех x ?)
- u_n — измеримы на $E \in \mathfrak{A}$

Тогда:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E u_n(x) d\mu(x) \right)$$

Доказательство:

Подгоним под теорему Леви 3 (3 семестр). Пусть $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$ — последовательность частичных сумм. Очевидно, что эта последовательность — монотонно неубывающая (так как функции у нас неотрицательные):

$$0 \leq S_N \leq S_{N+1} \leq S_{N+2} \leq \dots$$

Тогда, делаем предельный переход (вот тут есть вопрос, почему должен существовать предел, но если подумать: если его не существует, вообще вся эта теорема не имеет смысла (ну бесконечности, чел, смысл их интегрировать)). А так же, измеримость сохраняется, так как у нас исходные функции все были измеримы (ну и по теореме о пределе измеирмых функций):

$$S_N(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} S(x)$$

Ну и всё, значи, по теореме Леви можем перейти к предельному переходу интегралов:

$$\int_E S_N(x) d\mu(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \int_E S(x) d\mu(x)$$

Левую часть можно расписать по линейности интеграла (там у нас конечное число членов):

$$\int_E S_N(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{N} \int_E u_n(x) d\mu(x)$$

Ну, а раз интграл суммы стремится к интегралу предельной функции, то и сумма интегралов обязана туда стремиться.

$$\sum_{n=1}^{N} \int_E u_n(x) d\mu(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x) d\mu(x)$$

ч. т. д.

Следствие:

- $u_n : X \to \mathbb{R}$, измеримы на $E \in \mathfrak{A}$
- $\sum \int_E |u_n(x)| d\mu < +\infty$ (конечна)

Тогда $\sum u_n(x)$ — абсолютно сходящийся при почти всех x

Доказательство:

Пусть:

$$S(x) = \int_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$

Тогда, по предыдущей теореме:

$$\int_E S(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E |u_n(x)| d\mu \right) < +\infty$$

Раз интеграл конечен, значит $S(x)$ — суммируема, а это значит, что $S(x)$ — почти везде конечна. Ну значит и сходится.

ч. т. д.

Пример:

- (x_n) — вещественная последовательность
- $\sum a_n$ — абсолютно сходящийся числовой ряд

Тогда функциональный ряд $\sum \frac{a_n}{\sqrt{|x-x_n|}}$ — абсолютно сходится при почти всех x (в $\mathbb{R}$ по мере Лебега)

Доказательство:

Во-первых, можно доказать, что если для $\forall A$ на $[-A, A]$ абсолютно сходится почти везде, то и везде (на $\mathbb{R}$) почти везде сходится (лол). Счётное количество п. в. $\Rightarrow$ п. в. (чтобы количество отрезков было счётным, надо чтобы A были хотя бы рациональными. Кажется, что это не сильная проблема, так как отрезки включают в себя и все вещественные числа на отрезке тоже).

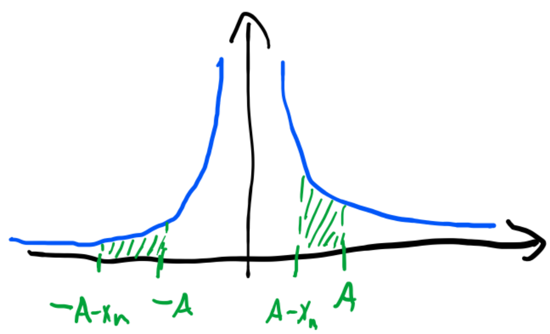
Попробуем подогнать под предыдущую теорему:

$$\int_{[-A,A]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} d\lambda = |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x-x_n|}} \leq$$

Так, стоп. А как мы перешли к определённому интегралу? Оказывается, что так можно делать, на доказано это будет позже (в курсе).

$$\underset{x:=x-x_n}{\leq} |a_n| \int_{-A-x_n}^{A-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leq$$

Почему верен последний переход? Посмотрим на картинке:



Ну, по ней очевидно, что мы откусили кусочек поменьше, а добавили побольше. Тогда оценим модуль:

$$\leq 2 \cdot |a_n| \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4 \cdot \sqrt{A} \cdot |a_n|$$

Всё, абсолютный интеграл ограничен, значит сходится (при почти всех x).

ч. т. д.