Исследование сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ ($p \in \mathbb{R}$) + абс.

1) $\frac{|\sin x|}{x^p} \le \frac{1}{x^p}$ => при $p > 1$ есть абсолютная сходимость

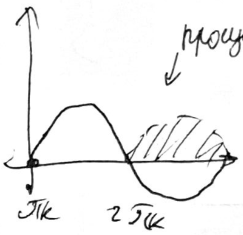
$p \le 1$ — нет абс. сх.

Докажем по кр. Б-К. (следствие)

Выберем $A_k = \pi k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

$B_k = 2\pi k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

$$\int\limits_{\pi k}^{2\pi k} \frac{|\sin x|}{x^p} \ge \int\limits_{\pi k}^{2\pi k} \frac{|\sin x|}{x} \quad (\text{т.к. } p \le 1)$$

Финт ушами: $\ge \frac{1}{2\pi k}\int\limits_{\pi k}^{2\pi k} |\sin x| \pm$  $= \frac{1}{\cancel{2}\pi k}\cdot \cancel{2}k \not\to 0$

площадь арксинусоиды

(Конечно: т.к. x в промежутке $[\pi k, 2\pi k]$, заменим x на самое большое значение) м.б. ошиблись в 2 раза, но не страшно)

=> при $p \le 1$ нет абс. сх.

Теперь просто сходимость: интегрируем по частям:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{x^p} & u' = -\frac{p}{x^{p+1}} \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} = \underbrace{-\frac{\cos x}{x^p}\Bigg|_{1}^{+\infty}}_{\to 0 \Rightarrow \text{сх}} - \underbrace{p\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}\,dx}_{\text{абс. сх}}$$

$p > 0$

=> $p > 0$ — сходится, а т.к. $p > 1$ ~ абс. сх =>

просто сходится при $p \in (0, 1]$; при $p < 0$ $-\frac{\cos x}{x^p} \to \infty$

А что же с $p<0$? Судя по всему, он расходится. Докажем по кр. БК

$A_n = 2\pi k$

$B_n = 2\pi k + \pi$

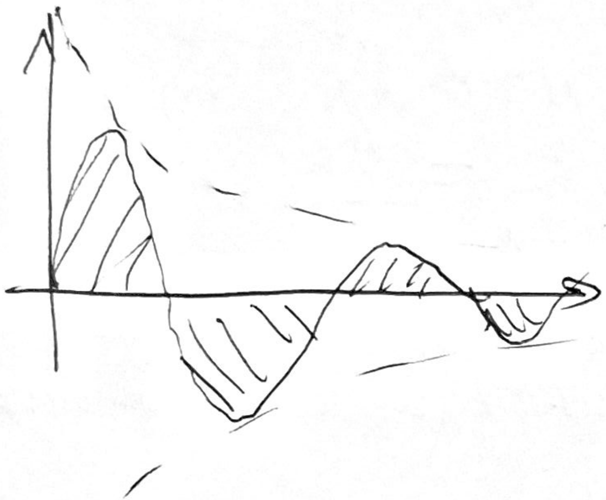
$$\int_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \frac{\sin x}{x^p} \geq \frac{1}{(2\pi k+\pi)^p} \int_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin x =$$

$$= \frac{2}{(2\pi k+\pi)^p} \not\to 0$$

$\Rightarrow$ расходится

Картиночки:

$p > 0$



S = /// + \\\

$p < 0$