Правило Лопиталя

1) Лемма об ускоренной сходимости

$f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad a$ — п.т. D, $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$\exists\, U(a)$ $\quad f, g \neq 0$ в $\dot{U}(a) \cap D$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

Тогда: $\forall (x_k)$: $x_k \to a$, $x_k \in D$, $x \neq a$ $\quad \exists (y_k)$ $y_k \to a$, $y_k \in D$, $y_k \neq a$ такая, что:

$\lim \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0$

$\lim \frac{g(y_k)}{g(x_k)} = 0$

Получается, что y_k гораздо быстрее стремится к a, чем x_k

Доказательство: Очевидно.

$\forall k$ можно подобрать N $\quad \left|\frac{g(x_N)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k}$ $\quad \left|\frac{f(x_N)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k}$

Очев. по опр. предела, $\Rightarrow y_k := x_N$

Замечание:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ — аналогично

---

2) Само правило Лопиталя

$f, g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, дифф

Пусть $g' \neq 0$ на $\langle a, b \rangle$ $\quad$; $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ — неопр $\left\{\frac{0}{0}; \frac{+\infty}{+\infty}\right\}$

$\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$ Тогда $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Доказательство: $g' \neq 0 \underset{\text{т. Дарбу}}{\Rightarrow} g'$ пост. знака

$g \neq 0$ в окр. т. a $\quad f([a,b]) = [c,d] \Rightarrow$ не меняет знак.

Изучаем? $\exists \lim \frac{f(x)}{g(x)}$. По Гейне берём какие-то x_k, y_k

По т. Коши: $\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(z_k)}{g'(z_k)}$, выражаем $\frac{f(x_k)}{g(x_k)} \left(\cdot \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)\right)$

(z_k между x_k и y_k)

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{f(y_k)}{g(x_k)}} + \underset{\substack{\downarrow \\ A}}{\frac{f'(z_k)}{g'(z_k)}} \left(1 - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{g(y_k)}{g(x_k)}}\right)$$

; выбираем y_k по Лемме об усл. сходимости.

$x_k \to a$

$y_k \to a$

$\Rightarrow$ (z_k зажат между x_k и $y_k \to a$)

ч.т.д.