Экстремальное свойство градиента

$F: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\quad a \in \operatorname{Int}(E)$

и

f $\quad f$ – дифф. в т. a $\quad \operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a) \neq 0$

$l := \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$ – вектор-направление градиента а.к.а. наискорейшего возрастания функции

т.е. $\forall h \in \mathbb{R}^m \quad |h| = 1$

$-|\nabla f(a)| \le \frac{\partial f}{\partial h}(a) \le |\nabla f(a)|$ $\quad$ Док-во:

$h = -l$ $\quad$ достигается при $h = l$ ~~корт~~

Почему это работает?

$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \nabla f(a), h \rangle$ – по определению градиента.

По КБШ: $\langle \nabla f(a), h \rangle \le |\nabla f(a)| \underbrace{|h|}_{=1} \le |\nabla f(a)|$

Т.к. по факту у нас под модулем, то и исходное условие выполняется.

Замечание: а почему реально так? т.к. l у нас нормирован, и h тоже нормирован, $\langle l, h \rangle$ будет максимальным при $l = h$, и.т.д.