СВЯТОЙ КПК
#BlessRNG

Или как не сдохнуть на 3 семе из-за матана

Разработал

Никита Варламов @snitron

Почётный автор

Тимофей Белоусов @imodre

v0.0 alpha
Октябрь-Undefined 2022-2023

Заметки авторов
В данном конспекте названия всех задач имеют ссылку на своего автора в виде верхнего индекса:

1. @imodre
2. @snitron

По любым вопросам и предложениям/улучшениям обращаться в телеграмм к соответвующему автору.

Known Issues
Вы в любой момент можете добавить любую недостающую теорему, затехав её и отправив код (фотографии письменного текста запрещены) в телегу любому из указанных авторов. Ваше авторство также будет указано, с вашего разрешения.

Ah shit
Here we go again!
And again...

Содержание

1 Период Палеозойский

1.1 Важные определения

1.1.1 Норма линейного оператора

Пусть X, Y — нормированные линейные пространства, $A \in \mathbb{L}(X,Y)$ (это множество линейных отображений над $X \to Y$). Тогда нормой линейного оператора называется $||A||_{X,Y} = \sup_{x \in X_{|x|=1}} |Ax|_Y$

Замечания (для $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$):

1. По лемме об ограниченности нормы линейного оператора ($L = (l_{i,j}), |Lx| \leq C_L|x| = C_L \cdot 1 = \sqrt{\sum l_{i,j}^2}$) — всегда ограничена!
2. $x \to |Lx|$ — непрерывная функция, заданная на компакте ($|x| = 1 \Leftrightarrow x \in S(0,1)$ — сфера), причём по Вейерштрассу, максимум достигается. (напоминаю, мы в $\mathbb{R}^m$!)
3. Верно неравенство $\forall x \in \mathbb{R}^m : |Lx| \leq ||L|| \cdot |x|$ (тут у нас важно различать евклидову и неевклидову норму). КПК считает, что это очевидно:
   (a) $x = 0$ — равенство
   (b) $x \neq 0$ — делим на норму $x : |L\frac{x}{|x|}| \leq ||L||$, это очевидно, т.к. наша новая норма задаётся как супремум значений $|x| = 1$, ну и мы вот сравниваем супрермум с меньшими значениями.
4. $\forall x \in \mathbb{R}^m$, если нашлось $C > 0 : |Lx| \leq C \cdot |x| \Rightarrow ||L|| \leq C$ — тупо по пункту 3, очевидно.

1.1.2 Простое k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

Обобщение вот всей этой темы с диффеоморфизмами в одно толковое определение

$M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$, если:

- $\exists O \subset \mathbb{R}^k$ — открытое (область?)
- $\exists \Phi : O \to \mathbb{R}^m, \Phi(O) = M$ — гомеоморфизм (непрерывная биекция)
- $\Phi \in C^r(O)$
- $\forall x \in O : \operatorname{rank} \Phi'(x) = k$

Φ — гладкая параметризация.

1.2 Определения

1.2.1 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

Квадратичная форма: $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$Q(h) = \sum_{1 \le i,j \le m} a_{ij} h_i h_j$$

- Положительно-: $\forall h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) > 0$
- Отрицательно-: $\forall h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) < 0$
- Незнако-: $\exists h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) < 0, \exists \widetilde{h} \neq 0 : Q(\widetilde{h}) > 0$
- Полуопределённая (положительно определённая вырожденая): $Q(h) \geq 0, \exists h \in \mathbb{R}^m \neq 0 : Q(h) = 0$

1.2.2 Локальный максимум, минимум, экстремум

Рассмотрим только максимум, остальное аналогично (+ строгий)

$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in D$

Если $\exists U(a) : \forall x \in U(a) \quad f(x) \leq f(a)$, то a — точка локального максимума.

1.2.3 Диффеоморфизм

$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, O$ — открыто и связно (область)

- F — обратимо
- F — дифференцируемо
- F^{-1} — дифференцируемо

Тогда F — диффеоморфизм

1.2.4 Теорема о локальной обратимости

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $F \in C^1(O)$
- $x_0 \in O : \det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists U(x_0) : F|_{U(x_0)}$ — диффеоморфизм

1.2.5 Формулировка теоремы о гладкости обратного отображения в терминах систем уравнений

- $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$
- $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_m \end{cases}$
- $(x_0, y_0) : F(x_0) = y_0, \det \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$
- $\exists U(x_0), W(y_0) : \exists F : U \to W$ — диффеоморфизм : $\exists$ гладкое решение $\begin{cases} x_1(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ x_2(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \vdots \\ x_m(y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$

1.2.6 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

- $F = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$
- $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$
- $(x^0, y^0) : F(x^0, y^0) = 0, \det \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \neq 0$
- $\exists U(x^0) \in \mathbb{R}^m,\ \varphi(x) : F(x, \varphi(x)) = 0, x \in U(x_0)$ — гладкие решения

1.2.7 Касательное пространство к k-мерному многообразию в R^m

- $M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$
- $p \in M$
- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — параметризация $M \cap U(p)$
- $t^0 \in O : \Phi(t^0) = p$
- $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор

Тогда образ $\Phi'(t^0)$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$, не зависящее от Φ. Ну вот оно и называется *касательным пространством* (T_pM).

Причём важно, что это пространство не обязано проходить через точку p. Это просто пространство касательных векторов, откладываемых от начала координат (???).

1.3 Важные теоремы

1.3.1 Достаточное условие дифферецируемости

Формулировка:

- $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $a \in Int(D)$
- $\nabla f(a) = 0$
- $f \in C^2(D)$
- $Q(h) := d^2 f(a, h)$

Тогда:

1. $Q(h)$ — положительно-определённая, тогда a — точка локального минимума
2. $Q(h)$ — отрицательно-определённая, тогда a — точка локального максимума
3. $Q(h)$ — незнако-определённая, тогда a — не точка локального экстремума
4. $Q(h)$ — полу-определённая, тогда информации недостаточно (может быть и так, и так)

Доказательство:

(1)

Давайте поближе присмотримся к $\forall h \in \mathbb{R}^m\ \forall t \in [0, 1]: \quad f(a+h) = f(a)+df(a, h)+\frac{1}{2!}d^2 f(a+th, h)$ — это типа формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

Теперь рассмотрим разность $f(a + h) - f(a)$, и заметим, что $df(a, h) = 0$ по условию.

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + \frac{1}{2!}(f''_{x_1,x_1}(a+th)h_1^2 + f''_{x_1,x_2}(a+th)h_1h_2 + \ldots) \\
&= f(a) + \frac{1}{2!}d^2 f(a+th, h) \\
&= f(a) + \frac{1}{2!}Q(h) + \frac{1}{2!}(d^2 f(a+th, h) - Q(h)) \\
&= f(a) + \frac{1}{2!}Q(h) + \frac{1}{2!}(d^2 f(a+th, h) - d^2 f(a, h)) \\
&= f(a) + \frac{1}{2!}Q(h) + \frac{1}{2!}(f''_{x_1,x_1}(a+th)h_1^2 - f''_{x_1,x_1}(a)h_1^2 + f''_{x_1,x_2}(a+th)h_1h_2 - \ldots)
\end{aligned}$$

Теперь заметим, что если повыносить коэффициенты при двойных производных, получится что-то в стиле $(f''_1 - f''_2)(\sum_{i,j} h_i h_j)$, где левая скобка — б.м. при $h \to 0$, а правая оценивается $|h|^2$. Таким образом, все эти штуки есть ничто иное, как $\alpha(h)|h|^2$, где $\alpha(h)$ — б.м. при $h \to 0$.

В итоге получаем:

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2}Q(h) + \alpha(h)|h|^2 \underset{\text{по лемме об оценке кв. формы}}{\geq} \frac{\gamma_Q}{2}|h|^2 + \alpha(h)|h|^2$$

$$\underset{\text{при } h \to 0}{\geq} \frac{\gamma_Q}{4}|h|^2 \underset{h \neq 0}{>} 0$$

Получается, что в окрестности нашей точки a все значения больше, чем в ней самой. Получается, это по определению это точка локального минимимума.

(2)

Всё то же самое, только пусть мы рассматриваем функцию $g := -f$. С учётом отрицательно определённой квадратичной формы всё получится, и тут у нас точка локального максимума.

(3)

Шизофазия начинается тут. Т.к. у нас незнакоопределённая форма, значит $\exists h > 0 : Q(h) > 0, \quad \exists \widetilde{h} > 0 : Q(\widetilde{h}) < 0$

Раньше мы с вами считали, что h может быть любым. Теперь же давайте рассмотрим относительно вот этих существующих $h, \widetilde{h}$. Но чтобы устремлять всё это дело к 0, нам необходим некоторый параметр. Пусть он будет s. Тогда рассматриваем по тому же принципу: $f(a+sh)-f(a)$, рассуждения такие же, только там везде дополнительно вылезает s^2, и, таким образом, функции станут зависеть от него:

$$f(a+sh) - f(a) \geq \frac{1}{2}Q(sh) - |\alpha(s)|s^2 = \frac{s^2}{2}Q(h) - |\alpha(s)|s^2 \geq \frac{1}{4}Q(h)s^2$$

Вот, тут у нас получилось, что это минимум. А если отработаем с $\widetilde{h}$, то получится наоборот.

(4)

Ну а тут, слава Богу, достаточно привести пример.

Пусть $f(x) := x_1^2 - x_2^4, \quad a = (0,0)$

$df(a,h) = 0, \quad d^2f(a,h) = 2h_1^2$

Видно, что в этом случае мы можем бегать и по x_1, и по x_2, и в итоге получим разные значения, потому что форма вообще зависит только от одной компоненты.

А для почти идентичной $g(x) := x_1^2 + x_2^4$ уже всё наоборот, и существует строгий локальный минимум.

ч. т. д.

1.3.2 Теорема о неявном отображении

Формулировка:

- $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$
- $(a,b) \in O, \quad a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$
- $F(a,b) = 0 \in \mathbb{R}^{m+n}$
- $F \in C^r, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- $\det F'_y(a,b) \neq 0$

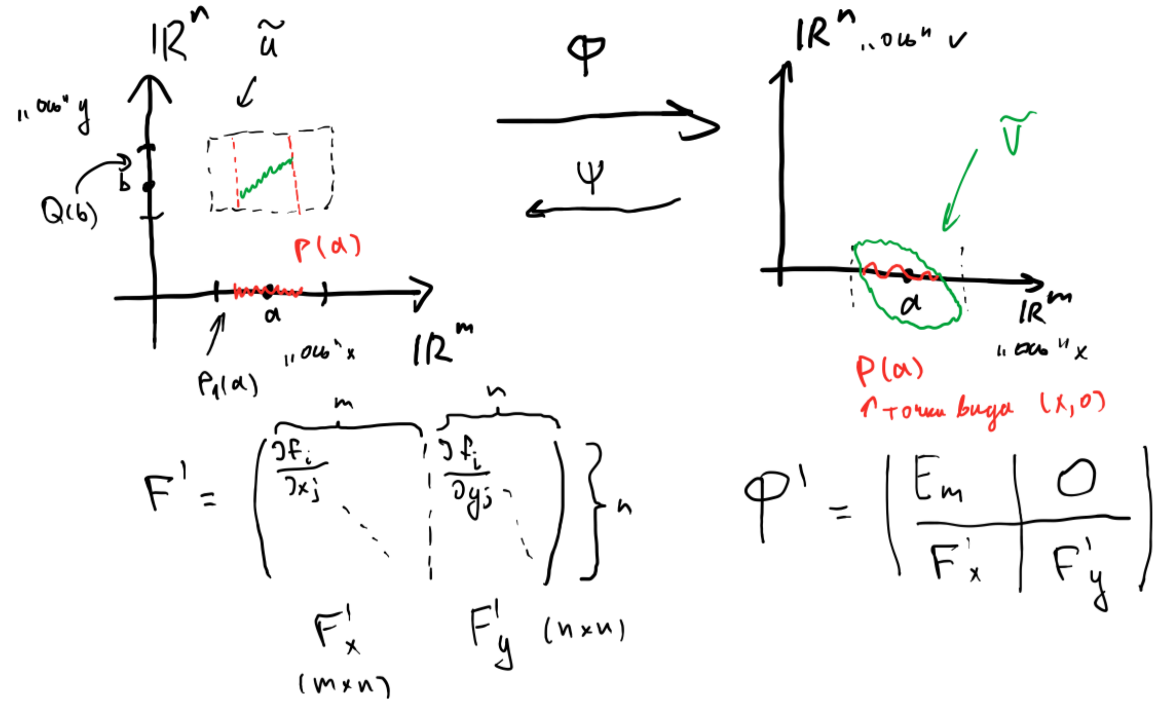
Тогда $\exists P(a) \subset \mathbb{R}^m, Q(b) \subset \mathbb{R}^n$ — окрестности, и $\exists! \varphi : P \to Q \in C^r$ гладкое:

$$\forall x \in P : F(x, \varphi(x)) = 0$$

Бонус:

$\varphi'(x) = -(F'_y(x, \varphi(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, \varphi(x)) \Leftrightarrow F'_x(x, \varphi(x)) + F'_y \cdot \varphi'(x) = 0$ (продифференцировали условие)

Доказательство:



Нет, это не шутка. Всё доказательство строится вокруг одной картинки и яростного махания руками со знанием дела.

Заведём $\Phi(x, y) : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}, \quad \Phi(x, y) = (x, F(x, y))$. Логично, что по условию $\Phi(a, b) = (a, 0)$. Если посмотреть на производный оператор (а она дифференцируема, так как F — дифференцируема (?)), то прекрасно видно, что матрица квадратная, да ещё и блочная $\Rightarrow \det \Phi'(a, b) = \det E_m \cdot \det F'_y(a, b)$. По условию ничего из этого не 0, следовательно определитель невырожден. А поэтому, по теореме о локальной обратимости: Φ — локальный диффеоморфизм класса C^r.

Заведём окрестность (как декартово произведение, почему бы и нет) $\widetilde{U} = P_1 \times Q$. P_1 немного большевата для P, поэтому потом мы её немного подрежем. $\widetilde{V} = \Phi(\widetilde{U})$. Заметим, что все эти окрестности открыты по предыдущим теоремам.

Т.к. у нас $\Phi|_{\widetilde{U}}$ — диффеоморфизм, на прообразе и образе имеет место быть обратное отображение $\Psi : \widetilde{V} \to \widetilde{U} = \Phi^{-1}$.

Заметим, что отображение Φ не меняет "x"-овые координаты (по построению функции ,см. рисунок), "y"-овые же как-то колбасит, как показано зелёной областью. Значит и Ψ их тоже не меняет, т.к. диффеоморфизм. Именно поэтому справа у нас координаты (x, v). Можно представить $\Psi(x, v) = (x, H(x, v)), \quad H : \widetilde{V} \to \mathbb{R}^n \in C^r$. Поэтому давайте выберем окрестность

$P \subset \mathbb{R}^m := \widetilde{V} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Она открыта по теореме (1 сем) о свойствах открытых множеств (конечное пересечение открытых открыто). $U = P \times Q$

Вооот. А теперь давайте предложим в качестве $\varphi(x) : P \to Q := H(x, 0)$. Она прнадлежит классу C^r, т.к. все функции до этого в нём лежали. А почему выполняется условие $F(x, \varphi(x)) = 0, x \in P$? Ну давайте проследим путь. Что такое вообще $H(x, 0)$ — мы берём все точки вида $(x, 0)$ (см. картинку), и взаимно-однозначно отправляем их обратно в левую часть, тем самым вычисляя им значение $b_0 \in Q(b)$ (этим и занимается $H(x, v)$ по своей сути). Ну вот. А потом мы отправляем точку (x, b_0) в правую часть, и куда же она должна приехать, если уезжала из 0? Правильно, в 0. Ура, условие выполняется.

Осталось доказать едиственность, опять давайте помашем руками:

$$x \in P, y \in Q : F(x, y) = 0, \quad \Phi(x, y) = (x, 0)$$

$$(x, y) = \Psi\Phi(x, y) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \varphi(x))$$

ч. т. д.

1.4 Теоремы

1.4.1 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

Формулировка:

Пусть X, Y — нормированные линейные пространства, $A \in \mathbb{L}(X, Y)$.

Тогда следующие утверждения эквиваленты:

1. A — ограниченный оператор, в том смысле, что $||A||$ — конечно
2. A — непрерывно в нуле
3. A — непрерывно на всём X
4. A — равномерно непрерывно

Доказательство: Для $||A|| \equiv 0$ — тривиально (супремум $= 0$, следовательно 0), поэтому далее считаем норму оператора ненулевой. Ну, во-первых, $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ — очевидно, просто одно следует из другого.

Во-вторых, $2 \Rightarrow 1$:

По определению непрерывности в нуле: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \forall x \in B(0, \delta) : |Ax| < \varepsilon$ (это нам дано, значит можем пользоваться, как хотим)

Давайте рассмотрим $\varepsilon = 1 : |Ax| < 1$, потом делим на δ:

$$|A\frac{x}{\delta}| < \frac{1}{\delta}$$

Переназначим x и заметим, что $x \in \overline{B(0, 1)} : |Ax| \leq \frac{1}{\delta}$ (обратите внимание, мы взяли замыкание шара и получили нестрогое неравенство)

Тогда для $x \in S(0, 1) : |Ax| \leq \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} \cdot |x|$ — по замечанию 4 из определения, $||L|| \leq \frac{1}{\delta}$.

В-третьих, $1 \Rightarrow 4$:

Давайте опять запишем определение равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Назначим $\delta := \frac{\varepsilon}{||A||}$

$$|Ax_1 - Ax_2| < \varepsilon$$

По линейности:

$$|A(x_1 - x_2) < ||A|| \cdot |x_1 - x_2| = ||A||\delta = ||A||\frac{\varepsilon}{||A||} = \varepsilon$$

ч.т.д.

1.4.2 Теорема Лагранжа для отображений

Формулировка: $F : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, D$ — открытое

F — дифференцируемо на D, $[a, b] \subset D$

Тогда $\exists c \in [a, b] : |F(a) - F(b)| \leq ||F'(c)|| \cdot |b - a|$ *Доказательство:* Заведём функцию $f(t) = F(a + t(b - a)), t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$. То есть как-бы двигаем точку по $[a, b]$.

$$f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$$

Заметим, что это оператор $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$, т.к. $F'(a + t(b - a))$ — l, а $b - a$ — m (???)

Вспомним также теорему Лагранжа для векторнозначных функций:

$F : [a, b] \to \mathbb{R}^n, F$ — дифференцируема на $[a, b], \exists c \in [a, b]$

$$|F(a) - F(b)| = |F'(c)| \cdot |b - a|$$

Рассмотрим нашу функцию $f(t)$ по этой теореме в точках 0 и 1:

$$|f(1) - f(0)| = |f'(c)| \cdot |1 - 0|$$

Подставим:

$$|F(b) - F(a)| = |F'(a + c(b - a)) \cdot (b - a)| \underset{\text{по замечанию 3}}{\leq} ||F'(a + c(b - a))|| \cdot |b - a|$$

Ну а дальше, пусть $c := a + c(b - a)$ и всё супер.

ч.т.д.

1.4.3 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

Формулировка (безымянная лемма):

Возможно, она нахер не нужна, но пусть всё же будет

Пусть $B \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

Если $c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m : |Bx| \geq c|x|$, тогда $B \in \Omega_m$ и $||B^{-1}|| \leq \frac{1}{c}$

Доказательство:

B — очевидно инъективен, т.к. любой ненулевой вектор у нас отправляется в разные точки $\Rightarrow$ биекция $\Rightarrow$ обратимый $\Rightarrow \exists B^{-1}$

Теперь пусть $y = B^{-1}x \Rightarrow |Bx| = |y| \geq c|x| = c|B^{-1}y| \Rightarrow |B^{-1}y| \leq \frac{1}{c} \cdot |y| \underset{\text{по замечанию 3}}{\Rightarrow} ||B^{-1}|| \leq \frac{1}{c}$

ч.т.д.

Замечание:

Если $A \in \Omega_m$, то можно провенуть такую штуку: $|x| = |A^{-1}Ax| \leq ||A^{-1}|| \cdot |Ax|$ (по 3 замечанию). Тогда:

$$|Ax| \geq \frac{1}{||A^{-1}||}|x|$$

Формулировка:

Пусть $L \in \Omega_m$ — обратимый оператор, $M \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $||L - M|| < \frac{1}{||L^{-1}||}$

Тогда:

1. $M \in \Omega_m$ — обратимый
2. $||M^{-1}|| \le \frac{1}{\frac{1}{|L^{-1}|} - ||L-M||}$
3. $||L^{-1} - M^{-1}|| \le \frac{||L^{-1}||}{\frac{1}{|L^{-1}|} - ||L-M||} \cdot ||L - M||$

Доказательство:

(1) и (2)

Рассмотрим $|Mx|$ с рандомным возможным x. По неравенству треугольника (это всё же норма) и оценкам по замечаниям сверху:

$$|Mx| \ge |Lx| - |(M-L)x| \ge \frac{1}{||L^{-1}||}|x| - ||M-L|| \cdot |x| = \left(\frac{1}{||L^{-1}||} - ||M-L||\right)|x|$$

По безымянной лемме всё доказано (заметим, что выражение в скобочках — положительная константа).

(3)

Неповторимый оригинал:

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{m} = \frac{m-l}{ml}$$

Жалкая копия (доказывается тривиально, раскрытием скобок):

$$L^{-1} - M^{-1} = M^{-1}(M-L)L^{-1}$$

Отнормируем:

$$||L^{-1} - M^{-1}|| \le ||M^{-1}|| \cdot ||L - M|| \cdot ||L^{-1}||$$

Ну и просто подставим (2).

ч.т.д.

Следствие:

Отображение $\Omega_m \to \Omega_m : L \to L^{-1}$ непрерывно.

Доказательство:

Давайте по Гейне: если $B_k \to L$, то сходится ли $B_k^{-1} \to L^{-1}$????

Во-первых, начиная с некоторого места:

$$|B_k - L| \le \frac{1}{||L^{-1}||}$$

$$|B_k^{-1} - L^{-1}| \le \underbrace{\frac{||L^{-1}||}{\frac{1}{|L^{-1}|} - \underbrace{||L - B_k^{-1}||}_{\to 0}}}_{\text{огр.}} \cdot ||L - B_k^{-1}|| \to 0$$

ч.т.д.

1.4.4 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

Формулировка: $F : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, F$ дифференцируема на $D, F' : D \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $F \in C^1(D) \Leftrightarrow \forall i, j : \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ — непрерывны
2. F' — непрерывно на $D : \forall x : \mathbb{R}^m \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall \widetilde{x} \ |x - \widetilde{x}| < \delta \ ||F'(x) - F'(\widetilde{x})|| < \varepsilon$

Доказательство:

(1) ⇒ (2)

Давайте зафиксируем какие-то i, j и относительно них рассмотрим наше условие непрерывности частных производных по отдельности. Также, применим китайскую грамоту и возьмём немного другой эпсилон:

$$\forall x : \mathbb{R}^m \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall \widetilde{x} \ |x - \widetilde{x}| < \delta \ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\widetilde{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$$

Тогда, так как нам это уже известно, проверим условие (2):

$$||F'(x) - F'(\widetilde{x})|| \underset{\text{по лемме об ограниченности нормы}}{\leq} \sqrt{\sum_{i,j} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\widetilde{x}) \right)^2}$$

Ну а теперь просто оцениваем всё это дело эпсилоном!

$$\leq \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \sqrt{ml \cdot \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

(2) ⇒ (1)

Ну а вот тут душный пиздец. Идея в том, что мы хотим проверить для каждой частной производной с индексами (v, u) наше предположение.

Давайте выберем $h \in \mathbb{R}^m = (0, 0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{u\text{-ое число}}, 0, \ldots, 0, 0)^T$. Теперь нам известно, что:

$$|(F'(x) - F'(\widetilde{x}))h| \leq ||F'(x) - F'(\widetilde{x})|| \cdot |h| \underset{|h|=1}{\leq} \varepsilon$$

Ну а с другой стороны, $(F'(x) - F'(\widetilde{x}))h$ есть ничто иное, как вектор $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_u}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_u}(\widetilde{x}) \right)_{i=1 \ldots l}$. Поэтому давайте рассмотрим его норму по вышеиспользованной лемме:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_u}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_u}(\widetilde{x}) \right)^2} \leq \varepsilon$$

Ну, раз уж у нас корень суммы квадратов меньше, то и каждое слагаемое по отдельности тоже меньше. Давайте зафиксируем $i = v$ и получим долгожданное:

$$\left|\frac{\partial f_v}{\partial x_u}(x) - \frac{\partial f_v}{\partial x_u}(\widetilde{x})\right| \leq \varepsilon$$

Так как данные эпсилон-дельта преамбуды везде были одинаковыми, то и тут всё супер. Доказано, не умаляя общности!!!!

ч. т. д.

1.4.5 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

Формулировка (Ферма):

$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in Int(D), f$ — дифференцируема в точке a (точка локального экстремума)

Тогда $\forall l \in \mathbb{R}^m : |l| = 1$ (направление) $\frac{\partial f}{\partial l}(a) = 0$

Доказательство:

Тривиалити, для $f|_{\text{прямая через } a \text{ по направлению } l} a$ — тоже точка локального экстремума, поэтому по одномерной теореме Ферма всё работает!

ч. т. д.

Следствие (Необходимое условие экстремума)

a — точка локального экстремума $\Rightarrow \forall k \in [1, m] : \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$

Следствие (Ролль)

- $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $K \subset D$ — компакт
- f — дифференцируема в $Int(K)$, непрерывна на K
- $f|_{\text{граница } K} = \text{const}$

Тогда $\exists a \in Int(K) : \nabla f \equiv 0$

Доказательство

По теореме Вейерштрасса (привет, 1 сем), на компакте функция достигает своего миниминума и максимума. Тогда либо у нас на $K f \equiv const$, тогда такая точка — любая, либо же по теореме Ферма она существует где-то внутри компакта.

ч. т. д.

1.4.6 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

Формулировка (Лемма об оценке квадратичной формы): Q — положительно определённая квадратичная форма.

Тогда $\exists \gamma_Q : \forall h \quad Q(h) \geq \gamma_Q \cdot |h|^2$

Доказательство:

А давайте так:
$$\gamma_Q := \min_{|x|=1} Q(x)$$
. Он достигается, так как мы гоняем по компакту (сфере), следовательно по Вейерштрассу всё хорошо.

Для $x = 0$ всё тривиально, поэтому при $x \neq 0 : Q(x) = |x|^2 Q(\frac{x}{|x|}) \underset{\frac{x}{|x|} \text{ от 0 до 1!}}{\geq} \gamma_Q |x|^2$

Формулировка (Лемма об эквивалентных нормах):

$p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — норма

Тогда $\exists\, C_1, C_2 > 0 : \forall x \quad C_1|x| \leq p(x) \leq C_2|x|$

Доказательство:

То же самое:
$$C_1 := \min_{|x|=1} p(x), \quad C_2 := \max_{|x|=1} p(x)$$

Для минимума: $\forall x : p(x) = |x| \cdot p(\frac{x}{|x|}) \geq C_1|x|$, для максимума аналогично.

ч. т. д.

1.4.7 Лемма о “почти локальной инъективности”

Формулировка:

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- $x_0 \in O$
- F — дифференцируема в x_0
- $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists C > 0, \delta > 0 \quad \forall h \in B(0, \delta)\ |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$

Доказательство:

1. Если F — линейное отображение, то рассмотрим: $|h| = |F^{-1}Fh| \leq ||F^{-1}|| \cdot |Fh|$. По линейности:
$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |Fh| \geq \underbrace{\frac{1}{||F^{-1}||}}_{C} |h| \quad \forall \delta$$

2. В противном случае, запишем определение дифферецируемости: $|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |\underbrace{F'(x_0)h}_{>0} + |h| \cdot \underbrace{\alpha(h)}_{\text{б. м.}}| \underset{\text{нер-во треугольника}}{\geq} \underbrace{C}_{\text{из пункта 1}} |h| + \alpha(h) \cdot |h|$. Давайте выберем δ так, чтобы $\alpha(h) < \frac{C}{2}$
$$\ldots \geq \frac{C}{2}|h|$$

ч.т.д.

Замечание

При $\forall x\ \det F'(x) \neq 0$ не следует инъективность!

1.4.8 Теорема о сохранении области

Формулировка:

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, O$ — открытое
- F — дифференцируемо
- $\forall x \in O : \ \det F'(x) \neq 0$

Тогда $F(O)$ — открытое множество.

Замечания

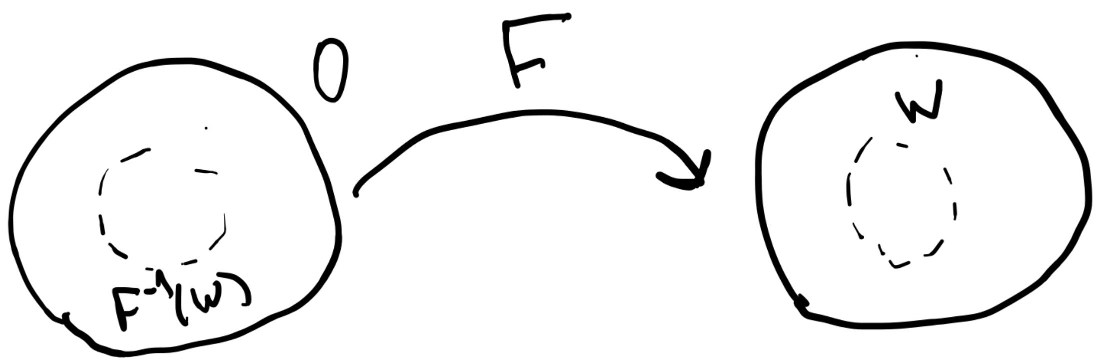
1. Если O — связное и F — непрерывное, то $F(O)$ — связное

   Доказательство:

   Ну, типа очев. Если у нас есть $W_1, W_2 \subset F(O)$, причём они не связны, то логично что получиться они могли только вследствие $F^{-1}(W_1) \cap F^{-1}(W_2) = \emptyset$

2. F — непрерывное $\Leftrightarrow \forall W \subset F(O)$ — открытого, $F^{-1}(W)$ — открыто *Доказательство:*

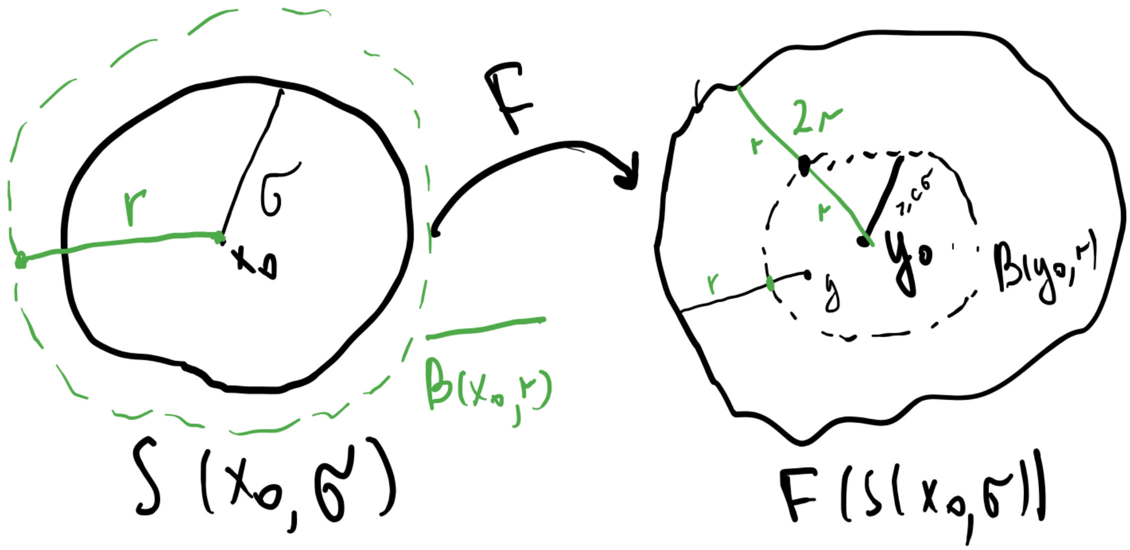
   По топологическому определению непрерывности (привет, 1 сем!).



Доказательство:

В общем, основная идея доказательства состоит в том, чтобы доказать, что любая точка из образа является внутренней, тогда по определению открытого множества мы докажем и вывод. $\forall x_0 \in O : \ y_0 = F(x_0)$.

По лемме выше, $\exists C > 0, \exists \delta > 0 : \forall h \in \overline{B(0, \delta)} : |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$. Не стоит смущаться при виде замкнутого шара, это мы просто провели двойную бухгалтерию. Причём, как видно на картинке, граница нашей области отображается куда-то далеко (аж на константу) больше, чем просто на δ.



Заведём расстояние $dist(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$ между точкой и множеством. Пусть $r = \frac{1}{2} \cdot dist(y_0, \underbrace{F(\underbrace{S(x_0, \delta)}_{\text{компакт}})}_{\text{непр.} \Rightarrow \text{компакт}})$.

Так как у нас там всё компакты то минимум достигается, и, что важнее всего, всё это больше нуля.

Теперь самое интересное: докажем, что $B(y_0, r) \subset F(O) : \forall y \in B(y_0, r)\ \exists x \in B(x_0, \delta) : F(x) = y$. Это докажет нам всё остальное.

$\forall y \in B(y_0, r) : \rho(y, F(S(x, \delta))) > r$. Это очевидно, на рисунке всё видно. Рассмотрим $g(x) := |F(x) - y|^2, x \in B(x_0, \delta)$. Как было сказано выше, мы доказываем, что у нас $\exists x \Leftrightarrow g(x) = 0$ возможно. Ну, очевидно, что, видимо, в если там и есть ноль, то это экстремум функции (модуль же, лол).

$$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 \underset{\text{очевидно по рисунку}}{\leq} r^2$$

Также, по рисунку очевидно, что для всех x с границы, наша функция отправляет их сильно дальше.

$$\forall x \in S(x, \delta) \quad g(x) \geq r^2$$

Получается, наш минимум лежит где-то внутри сферы. Поищем его. По определению евклидовой нормы:

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + (F_2(x) - y_2)^2 + \ldots + (F_m(x) - y_m)^2$$

По необходимому условию экстремума, $\nabla F(x) = 0 \Rightarrow \forall i \in [1, m] : \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$

$$g'(x) = 2(F_1(x) - y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + 2(F_2(x) - y_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + 2(F_m(x) - y_m)\frac{\partial f}{\partial x_m} = 0$$

Или в векторной форме:

$$2 \cdot (F(x) - y) \cdot F'(x) = 0$$

Однако, по условию у нас производный оператор невырожденный! Следовательно, остаётся только $F(x) = y$. А это то, что мы и искали!!!!

ч. т. д.

1.4.9 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

Формулировка:

- $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
- O — открыто
- $l < m$
- $F \in C^1(O)$
- $\forall x \in O : \text{rank}(F') = l$

Тогда $F(O)$ — открыто

Доказательство:

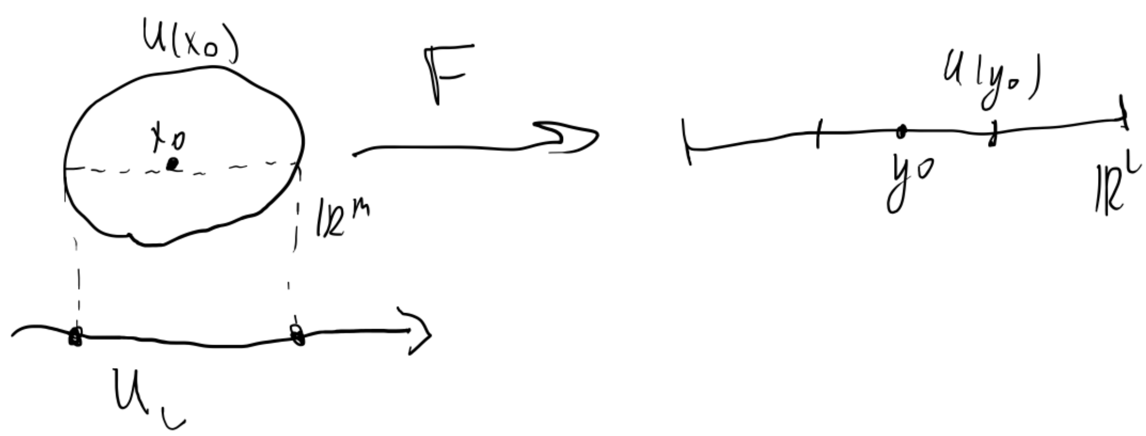
Зафиксируем $x_0 \in O$. Так как у нас матрица производного оператора теперь имеет вид не квадратный, а прямоугольный ($l \times m$), просто так применить предыдущую теорему не получится. Поэтому, не умаляя общности, давайте считать, что вот этот ЛНЗ набор векторов в матрице реализуется на позициях $1 \dots l$. Тогда мы можем посчитать определитель этой матрицы:

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \le i,j \le l} (x_0) \neq 0$$

При этом, так как мы потребовали непрерывность, немножко пошевелив x_0 всё также будет работать:

$$\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \quad \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \le i,j \le l} (x) \neq 0$$

Мы уже доказали, что $F(x_0)$ — внутренняя в $F(U(x_0))$ (по предыдущей теореме). Осталось немного пошаманить, чтобы доказать, что действительно из пространства большей в меньшую всё корректно отобразится.



Давайте заведём такую окрестность $U_l = (t_1, t_2, \dots, t_l) : (t_1, t_2, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m)$. Как видно на рисунке, это такая проекция в пространстве большей размерности на пространство меньшей. Теперь заведём $\widetilde{F} : U_l \to \mathbb{R}^l$ и посмотрим на её матрицу производных:

$$\frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial t_j} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t_1, t_2, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m) \right)$$

И вот теперь, по непрерывности $\widetilde{F}$ и прошлой теореме, всё по идее работает.

ч. т. д.

1.4.10 Теорема о гладкости обратного отображения

Формулировка:

- $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- F — обратимо
- $F \in C^r(O), r \in 1, 2, \dots$
- $\forall x \in C : \det F'(x) \neq 0$

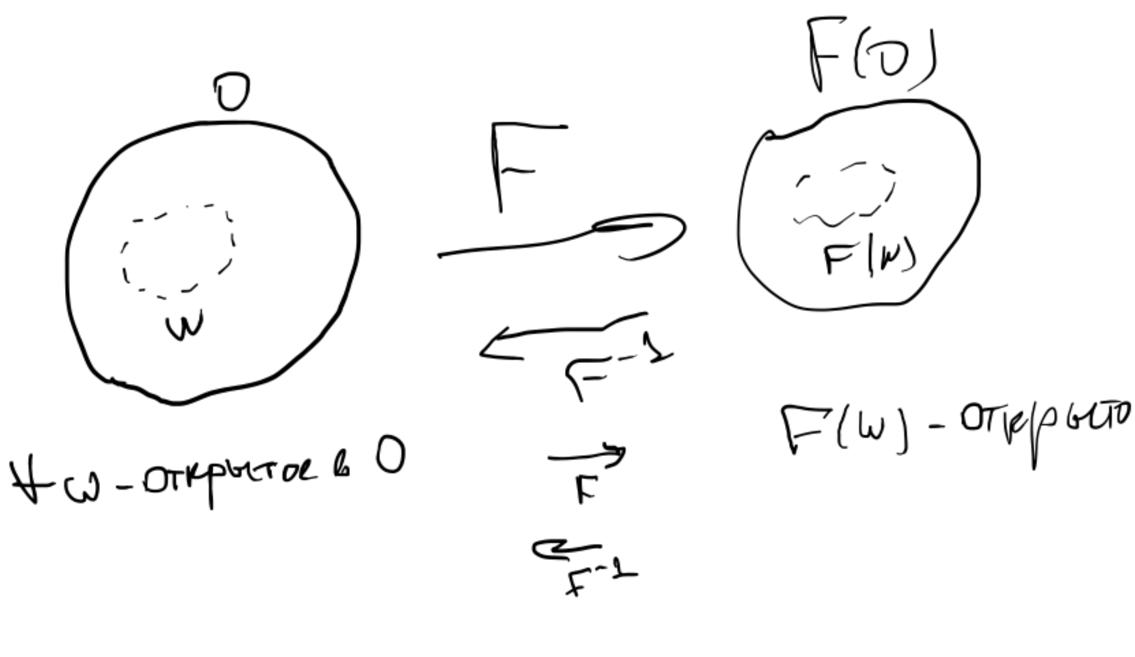
Тогда $F^{-1} \in C^r, \quad ((F^{-1}(y))' = (F'(x))^{-1})$ при $F(x) = y$

Доказательство:

Докажем по индукции по r. Замое запарное — база.

База:

Пусть $x_0 \in O, \quad F(x_0) = y_0$. $S := F^{-1}$. Заметим, что S — непрерывно по теореме о сохранении области и теореме о топологическом определении непрерывности (типа для любого открытого из прообраза образ тоже открыт)



По лемме о “почти” локальной инъективности:

$$\exists C, \delta > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta) \quad |F(x) - F(x_0)| \geq C|x - x_0| \Rightarrow |x - x_0| \leq \frac{1}{C}|F(x) - F(x_0)|$$

Запишем определение дифференцируемости для F и сразу распишем всё в терминах y:

$$A = F'(x_0), \quad \underbrace{F(x) - F(x_0)}_{y-y_0} = A(\underbrace{x - x_0}_{S(y)-S(y_0)}) + \alpha(\underbrace{x}_{S(y)})|x - x_0|$$

Выражаем $(S(y) - S(y_0)))$:

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \underbrace{A^{-1}\alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)|}_{\beta(y) \underset{???}{=} o(|y-y_0|)}$$

Получилось вполне себе нормальное определение для дифференцируемости S. Надо лишь доказать “o”-шку при $y \to y_0$. Оценим её с помощью вывода из леммы выше и стандартной оценки операторной нормы (не забываем, что мы как-бы управляем y ???):

$$\begin{aligned} |x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta \underset{\text{при } y \text{ близких к } y_0}{\Rightarrow} |\beta(y)| &= |A^{-1}\alpha(S(y))| \cdot |S(y) - S(y_0)| \\ &\leq \underbrace{\frac{||A^{-1}||}{C}}_{\text{const}} \cdot \underbrace{|y - y_0|}_{|F(x)-F(x_0)|} \cdot |\alpha(S(y))| \\ &= o(|y - y_0|) \end{aligned}$$

Фактически “o”-шка доказана по определению. Тем самым доказана дифференцируемость. А что с непрерывностью производной то? Этого мы ещё не доказывали. Построим цепочку непрерывных отображений:

$$y \mapsto S(y) = x \mapsto A(x) \mapsto A^{-1}(x) = S'(y)$$

Непрерывность дифференцирования обратного производного оператора доказывается маханием руками на тему отдельнызх производных в матрице. Тем самым база доказана.

Переход

Достаточно тривиальный. Посмотрим при $m = 1 : (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f(x(y))}$. То есть, пусть $f \in C^{r+1}$, тогда надо доказать, что $f' \in C^r$. Ну там вот это и написано, обратная функция вообще $C^\infty, f'(x) \in C^r$ — очев. Для многомерного случая всё тоже самое, только формула выглядит пафоснее $\ldots = (F'(x(y)))^{-1}$

ч. т. д.

1.4.11 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

Формулировка:

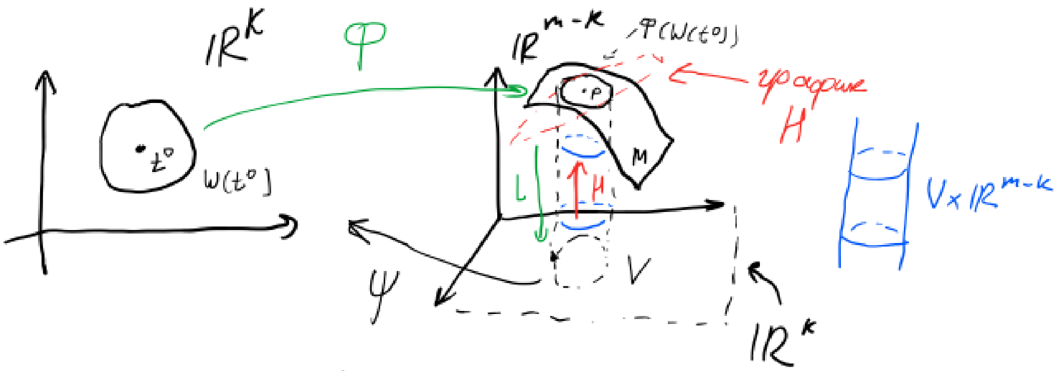
$M \subset \mathbb{R}^m, 1 \leq k \leq m, 1 \leq r \leq \infty$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\exists U(p) \in \mathbb{R}^m : M \cap U(p)$ — гладкое k-мерное C^r-гладкое многообразие
2. $\exists \widetilde{U}(p) \in \mathbb{R}^m : \exists (F_1, F_2, \dots, F_{m-k}) : \widetilde{U} \to \mathbb{R}, F_i \in C^r$
   (a) $\forall x \in \widetilde{U} \cap M \Leftrightarrow F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_{m-k} = 0$
   (b) $\nabla F_1, \nabla F_2, \dots, \nabla F_{m-k}$ — ЛНЗ

Доказательство (оставь надежду всяк сюда идущий):

(1) ⇒ (2)



$$\begin{pmatrix} \operatorname{grad} F_1 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} F_{m-k} \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \end{matrix}}_{k} & \underbrace{\begin{matrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}}_{m-k} \end{pmatrix}\right\} k$$

Нам дано многобразие. А что это значит? $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \in C^r$ — гомеоморфизм. Давайте посмотрим на неё в смысле координатных функций: $\exists \Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l), p = \Phi(t^0), \operatorname{rank} \Phi'(t^0) = k$. Всё по определнию.

У нас тут ЛНЗ набор (ранг k), поэтому давайте опять считать, что он реализуется на первых k векторов, поэтому:

$$\left(\det \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}\right)_{i=1\dots k} = 0$$

Теперь давайте, во-первых, примем за $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^k$ (на рисунке справа, всё логично). И заведём $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k : (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_k)$ — просто проекция первых k координат. Тогда заметим, что $(L \circ \Phi)'(t^0)$ — невырожденный оператор: всё просто, он мапит первые k координат, а оператор по ним невырожден по определению многообразия, вон, наверху написано. Значит, это локальный диффеоморфизм (по соответствующей теореме). А если $W(t^0)$ — окрестность, то $L \circ \Phi : W \to V \subset \mathbb{R}^k \in C^r$ — диффеорморфизм (класс гладкости сохраняется).

Тогда давайте введём ещё парочку отображений: $\Psi : V \to W := (L \circ \Phi)$ — обратное отображение, также диффеоморфизм, т. к. оно там всё диффеоморфизм, следовательно биекция сохраняется. Также, получается, раз у нас биекция, над V множество в R^{m-k} это график какого-то отображения. Оно точно существует, ведь L — биективно. Назовём его $H : V \to \mathbb{R}^{m-k}$

При $x' \in V : (\underbrace{x'}_{1\ldots k}, \underbrace{H(x')}_{k+1\ldots m-k}) = \Phi\Psi(x')$ — это правда, просто проехались по путям и вернулись. В L у нас только первые k координат, а H нам дорисовывает остальные $m-k$ штук. Ну и вот, в правой стороне равенства у нас диффеоморфизмы, слева проекция (там вообще всё гуд) и $H \Rightarrow$ это тоже диффеоморфизм класса C^r.

Почти всё. Осталось чётко определить, на какой окрестности будут определены наши функции. Смотрите, вообще наш график H может в принципе быть и шире, чем $W(t^0)$, и тогда $L(\textit{график } H)$ может быть больше, чем V, и мы не хотим со всем этим разбираться — зачем? Поэтому давайте аккуратненько всё подрежем. $V \times \mathbb{R}^{m-k}$ — открытое, такой типа цилиндр вверх. Φ — гомеоморфизм, поэтому $\Phi(W)$ — открытое. Но в M — это важно! Оно может и не быть открыто во всём $\mathbb{R}^m$, а конкретно на M с индуцированной метрикой точно открыто. Тогда вспоминаем теорему из 1-го семестра об открытом множестве в пространстве и подпространстве: $M \subset \mathbb{R}^m, \Phi(W) \subset M$ — открытое, тогда $\exists G \subset \mathbb{R}^m : G \cap M = \Phi(W), G$ — открытое. И тогда пусть область определения $\widetilde{U}(p) = G \cap \{V \times \mathbb{R}^{m-k}\}$ — открытое в $\mathbb{R}^m$, отрезали всё лишнее.

Ну всё, совсем немного осталось. Надо задать такие функции, что они будут нулевыми при $x \in \widetilde{U} \cap M$. Пусть $F_j(x) = H_j(L(x)) - x_{j+k}$. Что тут написано: мы берём x, отпрявляем его в L, оставляя только первые k координат. Потом H отправляем его обратно наверх, причём конкретно H_j вернёт нам x_{k+j}-ю координату, ведь, как мы писали выше, точки из графика H выглядят как $(\underbrace{x'}_{1\ldots k}, \underbrace{H(x')}_{k+1\ldots m-k})$. Ну всё, (а) выполнено автоматически. А что там с градиентами? Давайте просто их построим и увидим, что в конце будет просто $-E$, что и даст нам $m-k$ независимых векторов (ну, ранг такой).

(2) $\Rightarrow$ (1)

Тут нам сильно помогут наработки предков. Давайте подгоним наше условие под условие теоремы о неявном отображении (в смысле системы уравнений). У нас там была система из уравнений $F(x,y) = 0$, где x — "переменные", а y — "функции" и решение (x^0, y^0), такое что при $\forall x \in P(x^0), y \in Q(y^0) : F(x,y) = 0 \Leftrightarrow \exists \varphi : P \to Q : \phi(x) = y$. Давайте назначим первые k координат переменными, а следующие $m-k$ — функциями. Опять же, у нас ЛНЗ лабор этих градиентов этих функций, а именно:

$$\left(\det \frac{\partial F_i}{\partial x_{j+k}}\right)_{1 \le i,k \le m-k} (x^0, y^0) \neq 0$$

Значит, условие теоремы выполнено, и параметризация есть ничто иное, как $\Phi : U(p_1, p_2, \ldots, p_k) \to \mathbb{R}^m \quad x' \mapsto (x', \varphi(x'))$ на $x \in M \cap \widetilde{U} \cap \{P \times Q\}$ (по сути график φ). В том числе это и гомеоморфизм, так как в одну сторону всё непрерывно, так как функции непрервыны $(x', \varphi(x'))$, а обратно — это по сути проекция, так что всё тоже непрерывно. Классы гладкости тоже переезжают из прошлой теоремы.

ч. т. д.

1.4.12 Следствие о двух параметризациях

Формулировка:

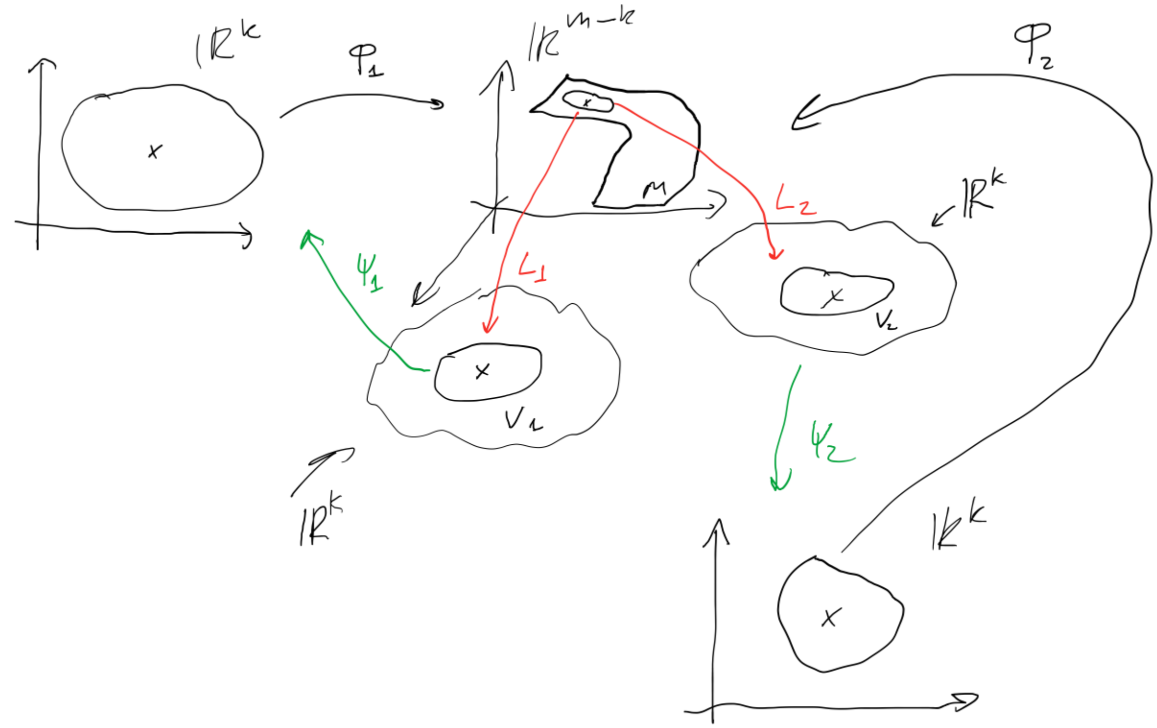
$M \subset \mathbb{R}^m$ — k-мерное C^r-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

1. $\exists \Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
2. $\exists \Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$

— гладкие параметризации.

Тогда $\exists \Theta : O_1 \to O_2 : \Phi_1 = \Phi_2 \circ \Theta$ — диффеоморфизм класса C^r

Доказательство:



Продолжаем повествование из прошлой теоремы. Гомеоморфизм $O_1 \to O_2$, вообще говоря, существует тривиально: $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$. Однако, так говорить не совсем правильно, потому что для корректного взятия обратной функции, необходимо сузить образ Φ_2 на его реальную область значений. Поэтому давайте поступим умнее: нарисуем возможные пути точки (крестика) на рисунке (кстати, важно заметить, что разные параметризации могут отправлять точки в разные пространства $\mathbb{R}^k$, ведь ранг может реализоваываться на произвольных строчках матрицы производного опреатора; поэтому у нас народилось 2 пространства и соответствующие отображения между ними (см. картинку)).

$$\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Psi_2 \circ L_2 \circ \Phi_1) = \Psi_2 \circ \Theta$$

Супер, гомеоморфизм есть. А обратим ли он? Да пожалуйста:

$$\Theta^{-1} = \Psi_1 \circ L_1 \circ \Psi_2$$

А всякие гладкости и классы приходят просто из предыдущих отображений, всё там супер.

ч. т. д.

1.4.13 Лемма о корректности определения касательного пространства

Формулировка:

- $M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$
- $p \in M$
- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — параметризация $M \cap U(p)$
- $t^0 \in O : \Phi(t^0) = p$
- $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор

Тогда образ $\Phi'(t^0)$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$, не зависящее от Φ.

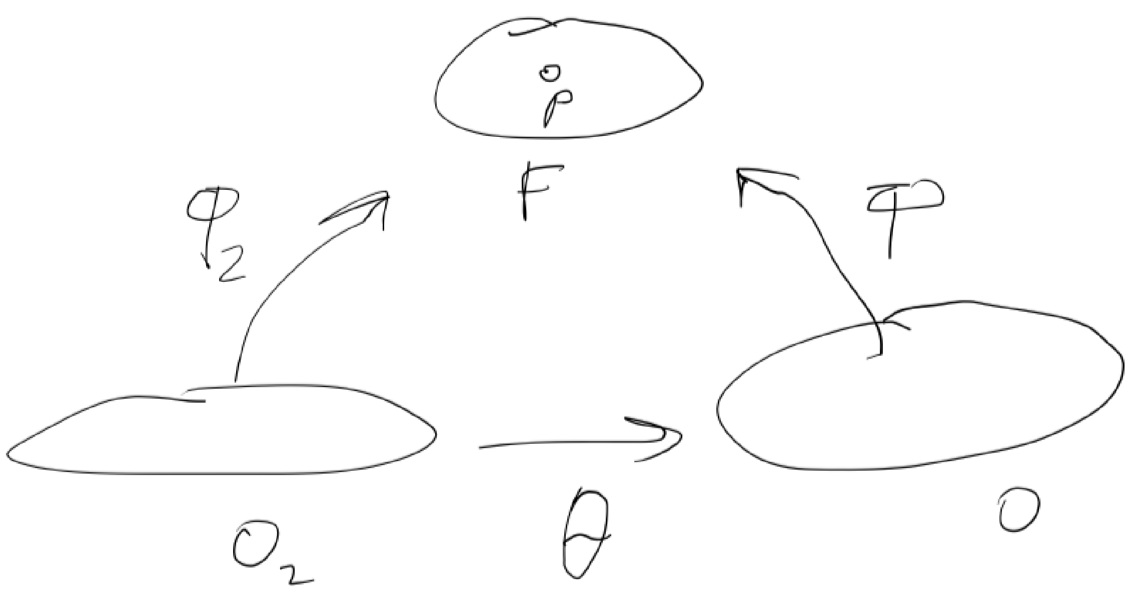
Доказательство:

Так как Φ — параметризация, $\operatorname{rank}\Phi = k$. Ну и тогда всё очевидно по знаниям из линейной алгебры, размерность пространства определяется количеством ЛНЗ столбцов.

По поводу независимости, по следствию о двух параметризациях:

$$\Phi_2 = \Phi \circ \Theta \Rightarrow \Phi_2' = \Phi'\Theta'$$

Θ — диффеоморфизм, следовательно $\Theta'(t^0)$ — невырожденный. Поэтому образ $\Phi_2' = \Phi'$ (см. картинку)



ч. т. д.

1.4.14 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

Формулировка (Лемма):

$v \in T_pM$

Тогда $\exists$ гладкий $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M : \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$

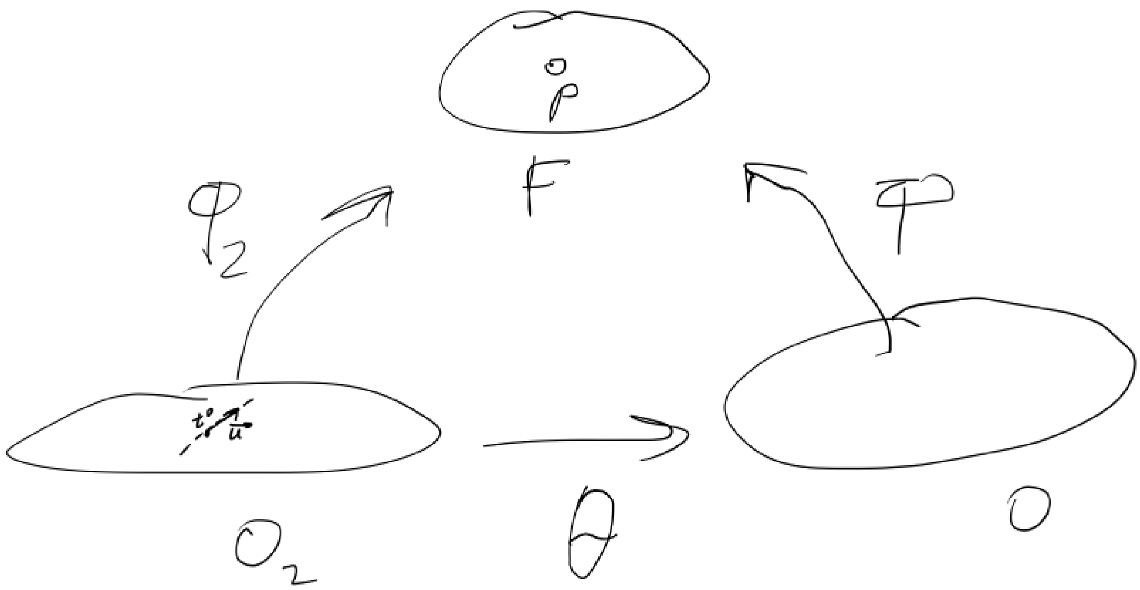
Доказательство:

Раз у нас есть v в образе, значит оно откуда-то пришло. Давайте найдём: $u = (\Phi'(t_0))^{-1}v$.

Тогда предъявим путь в $O : \widetilde{\gamma}(s) = t^0 + su, s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Типа мы выбрали направление, и гоняем по нему в O.

А настоящий путь будет таким: $\gamma(s) = \Phi \circ \widetilde{\gamma}(s)$. Тогда $\gamma'(s) = \Phi' \circ \widetilde{\gamma}(s)$.

Проверим: $\gamma(0) = \Phi(t^0 + 0) = p, \quad \gamma'(0) = \Phi' u = v$



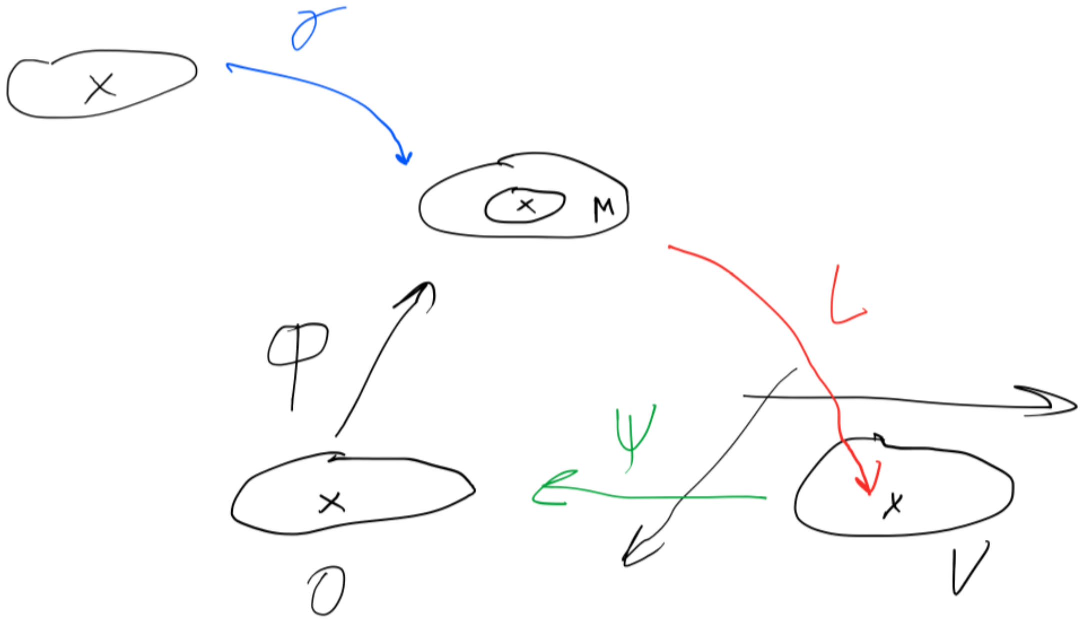
ч. т. д.

Формулировка:

$\exists$ гладкий путь $\gamma : [-1, 1] \to M, \gamma(0) = p$

Тогда $\gamma'(0) \in T_pM$

Доказательство:



Давайте опять прогуляемся по картинке из теоремы о задачи параметризации:

$$\gamma(s) = \Phi \circ \Psi \circ L \circ \gamma(s)$$

Это очевидно, просто прошли по кругу.

$$\gamma'(0) = \Phi'(t^0)\Psi' L' \gamma'$$

Всё лежит в образе $\Phi'(t^0)$, так что по определению касательного пространства всё супер.

ч. т. д.