

# Диффузия гелия через оболочку резинового шарика

Дмитрий Павлов, 790

16 июня 2018 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Диффузия гелия.</b>	<b>3</b>
1.1	Предыстория. . . . .	3
1.2	Задание. . . . .	3
1.3	Оборудование. . . . .	3
1.4	Начальные данные и предположения. . . . .	3
<b>2</b>	<b>Решение.</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Проведение эксперимента.</b>	<b>5</b>
3.1	Параметры эксперимента: . . . . .	5
3.2	Коэффициент диффузии: . . . . .	5
3.2.1	Найдем зависимость силы давления груза на весы от времени: . . . .	6
3.2.2	Вычисление коэффициента диффузии . . . . .	8
3.3	Погрешности измерений . . . . .	8
3.3.1	Погрешность углового коэффициента: . . . . .	8
3.3.2	Погрешность вычисления коэффициента диффузии: . . . . .	9
3.4	Вывод для коэффициента диффузии: . . . . .	10
3.5	Проникал ли воздух в шарик? . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Фотографии эксперимента.</b>	<b>12</b>

# 1 Диффузия гелия.

## 1.1 Предыстория.

Воздушный шарик, накачанный гелием, относительно быстро сдувается (за несколько часов его объём уменьшается в два раза). Это связано с диффузией гелия через резиновую оболочку шарика. Плотность потока  $j$  гелия (число молекул, проникающих через единичную площадку резины в единицу времени) определяется законом Фика:

$$j = D \frac{\Delta n}{\delta}, \quad (1)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии гелия через резину,  $\delta$  — толщина оболочки надутго шарика,  $\Delta n = n - n_0$  — разность концентрации  $n$  гелия внутри шарика и  $n_0$  вне.

## 1.2 Задание.

Определим коэффициент диффузии  $D$  гелия через резину. Считаем, что шарик пропускает только для гелия, то есть воздух не проникает внутрь шарика. Позже убедимся в этом экспериментально. Опишем причины этого явления.

## 1.3 Оборудование.

- Три резиновых шарика с гелием;
- Весы;
- Груз №1 и груз №2;
- Бумажная измерительная лента;
- Секундомер;

## 1.4 Начальные данные и предположения.

Молярная масса воздуха и гелия:  $\mu_{\text{воз}} = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$ ,  $\mu_{\text{He}} = 4 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$ . Плотность резины  $\rho_{\text{рез}} = 1.05 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ , ускорение свободного падения  $g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . Считаем, что при надувании шарика плотность резины не меняется и утечкой гелия через узел можно пренебречь.

# 2 Решение.

Пусть  $S$  — площадь поверхности шарика,  $V$  — его объём,  $\rho_0$  — плотность воздуха,  $\rho_{\text{He}}$  — плотность гелия. За время  $t$  через поверхность шарика в атмосферу выйдет

$$\Delta N = jSt = \frac{DSnt}{\delta} = \frac{DSNt}{V\delta} \quad (2)$$

молекул гелия (внутри шарика концентрация  $n = \frac{N}{V}$ , вне шарика концентрацию гелия считаем равной нулю:  $n_0 = 0$ ). За небольшое время относительное уменьшение объёма  $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta N}{N} = \frac{DSnt}{V\delta}$ . Соответственно, относительное уменьшение подъёмной силы  $F_{\text{под}} =$

$(\rho_0 - \rho_{He})Vg$  равно:  $\frac{\Delta F_{\text{под}}}{F} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{SDt}{V\delta}$ . Тогда  $\Delta F_{\text{под}} = \frac{DSFt}{V\delta} = \frac{DS(\rho_0 - \rho_{He})gt}{\delta}$ . Последняя формула даёт закон изменения подъёмной силы с течением времени:  $\Delta F_{\text{под}} = \Delta F_{\text{под}}(t)$ .

Прикрепим к шарiku, заполненному гелием, груз и взвесим его на весах (Рисунок 1). Сила тяжести груза превышает подъёмную силу шарика. Груз давит на весы с силой равной разности силы тяжести, действующей на груз, оболочку и нить, и подъёмной силы шарика  $P = mg - F_{\text{под}}$ . Поскольку с течением времени подъёмная сила уменьшается, то показания весов увеличиваются по закону

$$m(t) = \frac{F}{g} = m_0 + \beta t, \quad (3)$$

$$\text{где } \beta = \frac{DS(\rho_0 - \rho_{He})}{\delta}.$$

Коэффициент  $\beta$  можно определить экспериментально по наклону графика  $m(t)$ . Зная  $\beta$ , коэффициент  $D$  рассчитываем по формуле:

$$D = \frac{\beta\delta}{S(\rho_0 - \rho_{He})}. \quad (4)$$

Толщина  $\delta$  измеряется делением массы растягивающейся поверхности на её площадь и на плотность резины:

$$\delta = \frac{m_{\text{об}}}{S\rho_{\text{рез}}}.$$

Площадь поверхности шара оценим, считая её полусферой и конусом:

$$S = \frac{1}{2}(\pi d^2 + \pi ld), \quad (5)$$

где  $d$  - диаметр обхвата шарика,  $l$  - длина ребра.

Для оценки толщины резины  $\delta$  измерим массу растягивающейся части шарика  $m$  и поделим на площадь и плотность (объем резины при растяжении считаем неизменным).

Плотность воздуха:  $\rho_0 = \frac{\mu_{\text{воз}} p_0}{RT} = 1,16 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Плотность гелия  $\rho_{He} = 0,16 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Искомый коэффициент диффузии (ориентировочно):

$$D = 1 \cdot 10^{-7} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}.$$

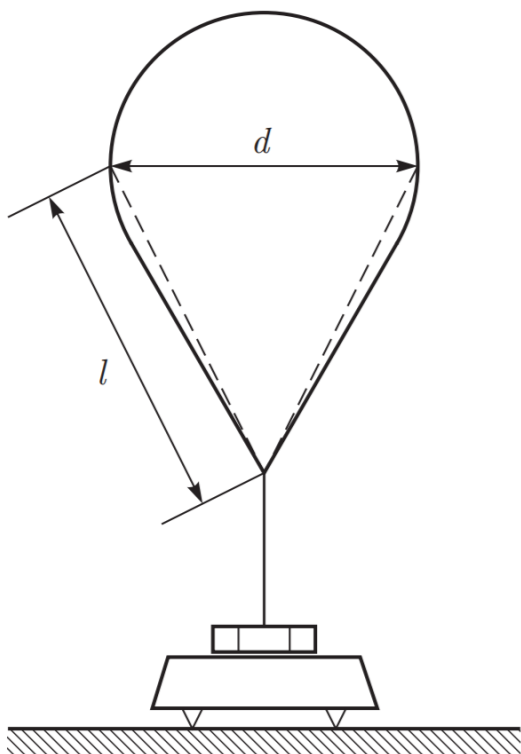


Рисунок 1 – Шарик, заполненный гелием и груз

### 3 Проведение эксперимента.

#### 3.1 Параметры эксперимента:

- ускорение свободного падения:  $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ ;
- масса груза №1:  $m_1 = 11,27 \pm 0,01 \text{ г}$ ;
- масса груза №2:  $m_2 = 16,77 \pm 0,01 \text{ г}$ ;
- масса шарика:  $m = 1,8 \text{ г}$ ;
- плотность резины:  $1,2 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ .

Таблица 1 – Параметры шариков

Номер шарика	1	2	3
Обхват лентой, см	64	84	66
Радиус, см	10,19	13,37	10,5
Образующая конуса, см	17,6	27	18,2
Высота конуса, см	14,4	24,4	14,8
Площадь шарика, см <sup>2</sup>	1216	2257	1292
Толщина, мм	0,0123	0,00664	0,0116

Радиус вычислен из значения обхвата ленты по формуле:  $R = \frac{L}{2\pi}$

Высота конуса найдена по теореме Пифагора из значений радиуса и образующей:

$$h = \sqrt{l^2 - R^2}$$

Площадь  $S = \frac{1}{2}(\pi d^2 + \pi ld)$ , где  $d$  - диаметр шарика,  $l$  - образующая конуса

Толщина найдена по формуле  $\delta = \frac{m}{S \cdot \rho}$

#### 3.2 Коэффициент диффузии:

Коэффициент диффузии найдем с помощью закона Фика, для этого нужно экспериментально найти количество покидающих за секунду шарик молекул ( $\Delta n$  и  $\delta$  известны). Заметим что со временем шарик уменьшается в размерах, значит, из закона Архимеда  $F = \rho g V$ , должна меняться подъемная сила, действующая на шарик. Зависимость  $F_{\text{арх}}(t)$  можно найти с помощью груза и весов, весы будут показывать силу давления груза, к которому привязан шарик. Со стороны шарика на груз действует изменяющаяся со временем сила. Изменение этой силы можно представить как

$$\Delta M(t) = \beta \cdot t = DS \frac{\rho_0 - \rho_{He}}{\delta} t,$$

где  $\beta$  - угол наклона графика  $\Delta M(t)$ . Его можно найти построив график зависимости силы давления груза, к которому привязан шарик, от времени.

### 3.2.1 Найдем зависимость силы давления груза на весы от времени:

Проведем три серии измерений. В первой серии используем груз №1, во втором – груз №2, в третьем – груз №1.

**Таблица 2** – Показания весов, измеряющих массу груза, первое измерение

m, г	6,65	6,72	6,76	6,8	6,83	6,87	6,93	7,00	7,04	7,11	7,24	7,39
t, мин	0	4	8	12	16,25	20	25	30	35	40	50	65

**Таблица 3** – Показания весов, измеряющих массу груза, второе измерение

m, г	8,09	8,27	8,36	8,45	8,53	8,78	9,00	9,18	9,35	9,51	9,68	10,04
t, мин	0	5	7,45	10	12	19,25	25	30	35	40	45	55

**Таблица 4** – Показания весов, измеряющих массу груза, третье измерение

m, г	8,82	8,86	8,36	8,92	8,96	9,00	9,04	9,1	9,15	9,23	9,29	9,34
t, мин	0	4	8,5	12	16	20	26	30	35	40	45	50

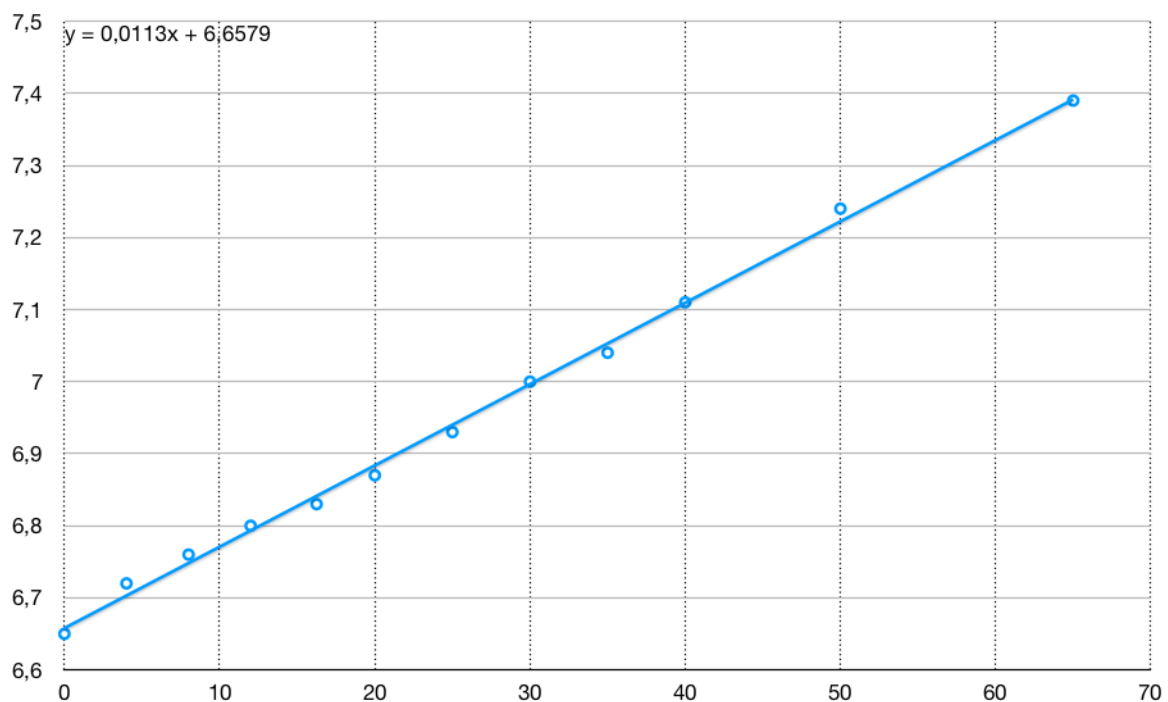


Рисунок 2 – График зависимости массы шарика с грузом от времени в 1 измерении

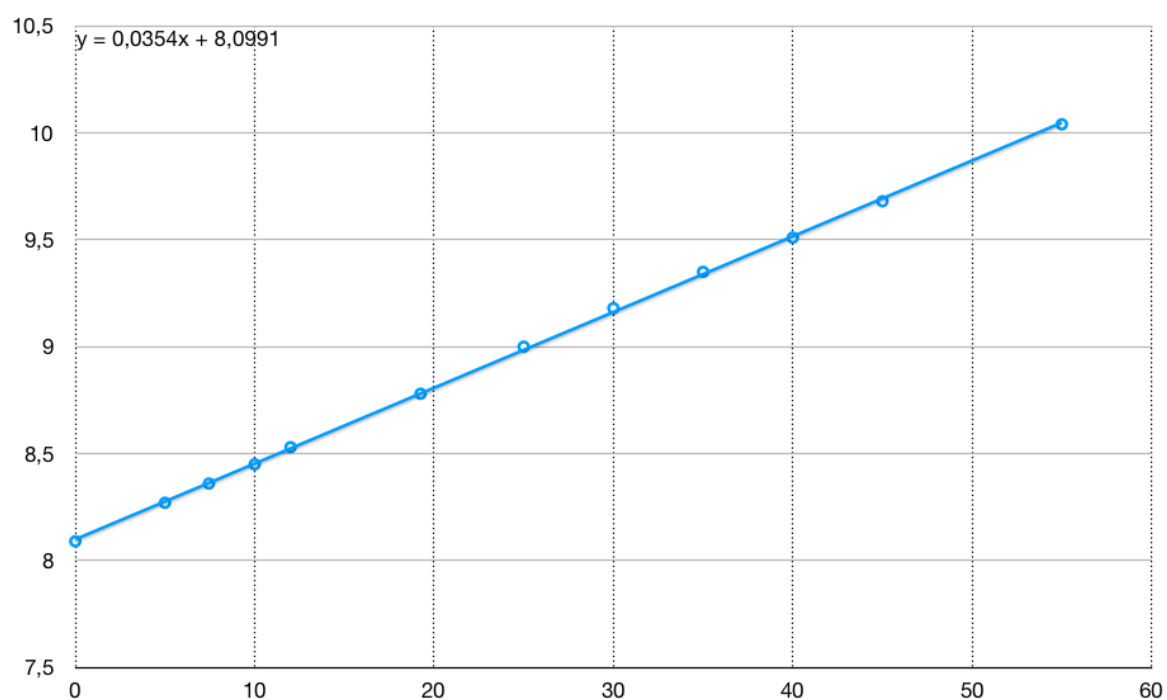


Рисунок 3 – График зависимости массы шарика с грузом от времени в 2 измерении

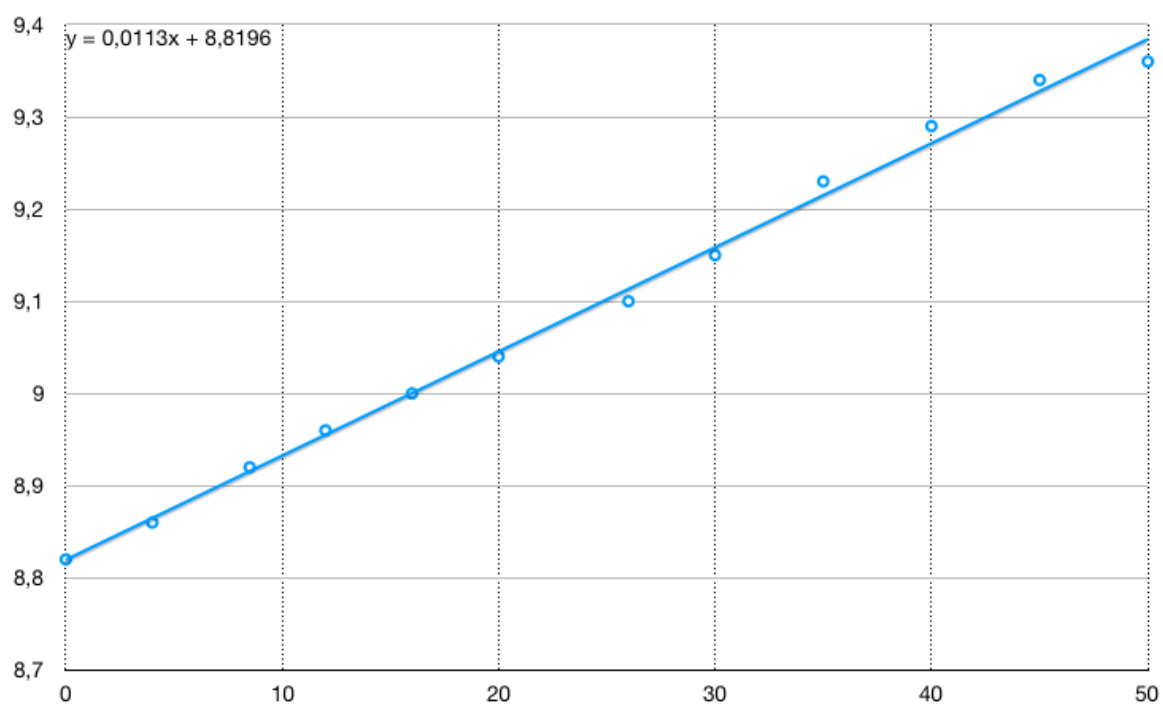


Рисунок 4 – График зависимости массы шарика с грузом от времени в 3 измерении

Рассчитаем по МНК коэффициент наклона графиков. Полученные результаты представлены в таблице 5.

**Таблица 5** – Угол наклона графика

	Угол наклона $\beta$ , г/мин
Шарик №1	0,0113
Шарик №2	0,0351
Шарик №3	0,0113

### 3.2.2 Вычисление коэффициента диффузии

Воспользуемся соотношением:

$$D = \frac{\beta\delta}{S(\rho_0 - \rho)},$$

где толщина стенки  $\delta = \frac{m_{об}}{S\rho_{рез}}$ .

Получаем значения коэффициента диффузии: таблица 6.

**Таблица 6** – Коэффициент диффузии для каждого шарика

	Площадь, см <sup>2</sup>	Толщина стенок, мм	Коэффициент диффузии $10^{-7} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$
Шарик №1	1216,75	0,0123	1,91
Шарик №2	2257,56	0,00664	1,74
Шарик №3	1292,64	0,0116	1,69

## 3.3 Погрешности измерений

### 3.3.1 Погрешность углового коэффициента:

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2}$$

**Таблица 7** – Расчет случайной погрешности по МНК

	$\langle x^2 \rangle$	$\langle y^2 \rangle$	$\langle x \rangle^2$	$\langle y \rangle^2$	$k$	$\sigma_k, 10^{-4}$	$\varepsilon$	$\varepsilon, \%$
Шарик №1	996,9218	48,2777	647,0664	48,2330	0,0113	0,66	0,0058	0,6
Шарик №2	841,2554	80,2184	558,9284	79,8640	0,0354	4,4	0,012	1,2
Шарик №3	817,8541	82,6447	570,0156	82,6129	0,0113	1,8	0,016	1,6



### 3.3.2 Погрешность вычисления коэффициента диффузии:

Коэффициент диффузии находим по формуле:

$$D = \frac{\beta \delta}{S(\rho_0 - \rho)},$$

где  $\delta$  и  $S$  находили по формулам:

$$\delta = \frac{m_{\text{об}}}{S \rho_{\text{рез}}}$$

$$S = \frac{1}{2}(\pi d^2 + \pi l d).$$

**Таблица 8** – Причины погрешности

Измерение	Значение	Абс. погрешность	Отн. погрешность
Обхват лентой	64 см	0,5 мм	$7,8 \cdot 10^{-4}$
	84 см	0,5 мм	$5,9 \cdot 10^{-4}$
	66 см	0,5 мм	$7,6 \cdot 10^{-4}$
Образующая конуса	17,6 см	0,5 мм	$2,8 \cdot 10^{-3}$
	27 см	0,5 мм	$1,8 \cdot 10^{-3}$
	18,2 см	0,5 мм	$2,7 \cdot 10^{-3}$

Погрешность измерения площади шарика:

$$\sigma(S) = S \sqrt{2^2 \left(\frac{\sigma(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(l)}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(d)}{d}\right)^2}$$

**Таблица 9** – Погрешность измерения площади

	Значение	Абс. погрешность	Отн. погрешность	Отн. погрешность, %
Шарик № 1	1216,75 см <sup>2</sup>	4 см <sup>2</sup>	0,003	0,3%
Шарик № 2	2257,56 см <sup>2</sup>	5 см <sup>2</sup>	0,002	0,2%
Шарик № 3	1292,64 см <sup>2</sup>	4 см <sup>2</sup>	0,003	0,3%

Погрешность измерения толщины оболочки равна погрешности измерения площади:

$$\frac{\sigma(\delta)}{\delta} = \frac{\sigma(S)}{S}.$$

Тогда погрешность измерения диффузии:

$$\sigma(D) = D \sqrt{\left(\frac{\sigma(\beta)}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(\delta)}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(S)}{S}\right)^2}.$$

Основной вклад в погрешность измерения коэффициента диффузии вносит погрешность измерения угла наклона  $\beta$ , найденная при помощи МНК.

**Таблица 9** – Погрешность измерения коэффициента диффузии

	Значение	Абс. погрешность	Отн. погрешность	Отн. погрешность
Шарик № 1	$1,91 \cdot 10^{-7} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$	$1,34 \cdot 10^{-9} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$	0,007	0,7%
Шарик № 2	$1,74 \cdot 10^{-7} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$	$2,09 \cdot 10^{-9} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$	0,012	1,2%
Шарик № 3	$1,69 \cdot 10^{-7} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$	$2,7 \cdot 10^{-9} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$	0,016	1,6%

### 3.4 Вывод для коэффициента диффузии:

В результате эксперимента вычислили коэффициент диффузии гелия через оболочку резинового шарика:

$$D = (178 \pm 2) \cdot 10^{-9} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$$

$$\varepsilon(D) = 1,1\%.$$

Это сходится по порядку с коэффициентом диффузии гелия через полиэтилен:

**Значения констант проницаемости, а также диффузии и растворимости гелия и аргона в полиэтилене (толщина 0,4 мм) при 25° при различных дозах облучения**

Доза, Мрад	Гелий			Аргон		
	$P \cdot 10^{10}$ $\frac{\text{см}^3/\text{см}^2/\text{сек} \cdot \text{см}/\text{см. рт. ст.}}$	$D \cdot 10^7$ $\text{см}^2/\text{сек}$	$\sigma \cdot 10^3$ $\frac{\text{см}^3/\text{см}^2/\text{см. рт. ст.}}$	$P \cdot 10^{10}$ $\frac{\text{см}^3/\text{см}^2/\text{сек} \cdot \text{см}/\text{см. рт. ст.}}$	$D \cdot 10^7$ $\text{см}^2/\text{сек}$	$\sigma \cdot 10^3$ $\frac{\text{см}^3/\text{см}^2/\text{см. рт. ст.}}$
0	2,6	4,9	0,53	2,40	2,40	1,00
100	2,0	3,5	0,57	—	—	—
270	—	—	—	1,80	1,60	1,12
420	2,6	3,2	0,80	1,40	1,30	1,08
600	—	—	—	1,15	1,10	1,04
800	2,5	3,1	0,80	0,51	1,30	0,40

Исследование диффузионных процессов в некоторых полимерах 1960 г. стр 1337

[http://polymsci.ru/static/Archive/1960/VMS\\_1960\\_T2\\_9/VMS\\_1960\\_T2\\_9\\_1335-1348.pdf](http://polymsci.ru/static/Archive/1960/VMS_1960_T2_9/VMS_1960_T2_9_1335-1348.pdf)

### 3.5 Проникал ли воздух в шарик?

Чтобы убедиться в том, что в шарик не попадает воздух, оценим объем шарика №1 в конце эксперимента. Если воздух не проникал в шарик в ходе эксперимента, то подъемная сила, вычисленная по формуле для силы Архимеда (в предположении, что в шарике гелий) и измеренная экспериментально, должны быть равны. Объем шарика рассчитаем, разбив его на полусферу и конус:  $V = \frac{\pi d^2}{12} (d + \sqrt{l^2 - (d/2)^2})$ .

Учитывая предыдущие значения для шара №1, а также вычисляя по теореме Пифагора высоту конуса, находим объем:

$$V = \frac{\pi(8,1 \cdot 2)^2}{12}(8,1 \cdot 2 + \sqrt{12,4^2 - (8,1)^2}) = 1758 \text{ см}^3$$

Величину подъемной силы измерим таким образом: придержим шарик, чтобы измерить массу груза. Она равна 11,27г. Масса пустого шарика - 1,8г. Тогда подъемная сила в конце эксперимента (через 1 час) равна 11,27г - 1,8г - 7,39г = 2,08г. Найдем силу Архимеда:

$$F_{\text{Арх}} = \rho_{\text{воз}} g V,$$

$$m_{\text{пол}} = 1,98 \text{ г}$$

То есть в пределах погрешности шарик по-прежнему заполнен гелием.

## 4 Фотографии эксперимента.









