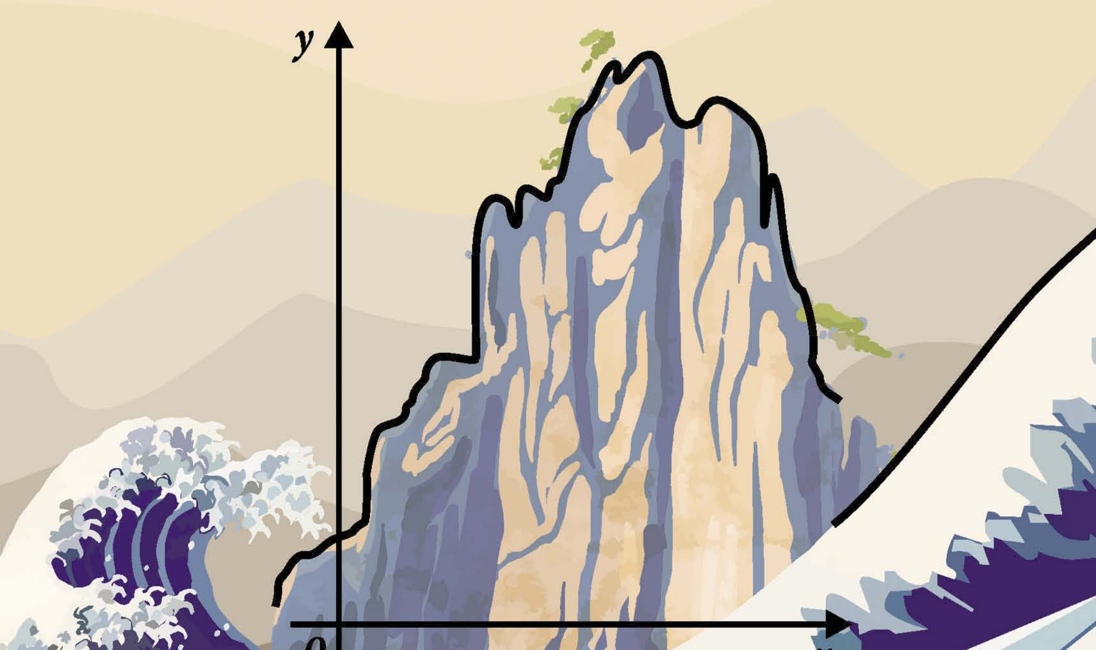
А. Д. Блинков    В. М. Гуровиц

# Непрерывность




Школьные
Математические
Кружки

А. Д. Блинков, В. М. Гуровиц

# Непрерывность

Издательство МЦНМО
Москва, 2015

УДК 51(07)
ББК 22.1
Б69

**Блинков А. Д, Гуровиц В. М.**

Б69 Непрерывность. — М.: МЦНМО, 2015.— 160 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-0160-2

Двенадцатая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена одному из фундаментальных понятий математики — непрерывности и предназначена для занятий со школьниками 7–11 классов. В неё вошли разработки девяти занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для учителя. В приложении содержится список дополнительных задач и их решения. Отдельная часть этого раздела посвящена строгим формулировкам определений непрерывности и её свойств, а также формулировкам утверждений более высокого уровня, которые практически являются теоремами и фактами высшей математики. Для удобства использования заключительная часть книжки, как всегда, сделана в виде раздаточных материалов.

Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям математики.

*Александр Давидович Блинков*, *Владимир Михайлович Гуровиц*

Непрерывность

Серия «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

Технический редактор *Е. Горская* Иллюстрации *А. Неледва*

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 28.08.2014 г.
Формат $60 \times 88$ $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объём 10 печ. л.
Тираж 3000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499)-241-74-83.

Отпечатано в ОАО «Щербинская типография»
117623, Москва, Типографская ул., 10. Тел. (495)-659-23-27.

**978-5-4439-0160-2**

## Предисловие

Непрерывность — основное и достаточно сложное понятие, на котором строится математический анализ, а значит, и вся современная математика. Но основы математического анализа начинают изучать лишь в старших классах (а в последнее время звучат предложения вообще исключить высшую математику из школьной программы!), так, казалось бы, о чём же здесь можно говорить со школьниками меньшего возраста? Тем не менее, нам представляется важным познакомить школьников с этим понятием на наглядном и интуитивном уровне (до введения его формального определения и строгого доказательства свойств) и показать многочисленные применения непрерывности для решения задач из различных областей математики. Это делается и в школьном курсе алгебры, например, при решении неравенств методом интервалов. Но класс задач, которые могут быть решены с применением *соображений непрерывности*, гораздо шире. Сложно даже его описать, настолько разнообразны применения непрерывных функций во всех разделах математики.

Предлагаемая книжка содержит девять занятий математического кружка. В материалы каждого занятия входят вступительный и поясняющий текст учителя, включающий в себя несколько подробно разобранных типовых задач по теме; задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач; методические комментарии для учителя.

В разделе приложений представлены дополнительные задачи различного уровня сложности, часть из которых в какой-то степени дублирует задачи, предложенные для занятий, а часть — дополняет их новыми идеями (наиболее сложные задачи отмечены знаком *). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них также, как правило, приведены подробные решения (в наиболее простых случаях — ответы и указания). Для удобства в конце каждого занятия приведён список задач из этого раздела, которые имеет смысл использовать для закрепления материала, контроля его освоения и углубления. Следует учесть, что есть задачи, которые отнесены к нескольким занятиям (поскольку допускают различные подходы). Отдельная часть этого раздела посвящена строгим формулировкам определений непрерывности и её свойств, а также формулировкам утверждений более высокого уровня, которые практически являются теоремами и фактами высшей математики. Кроме того, для удобства преподавателей в разделе приложений помещён раздаточный материал.

В конце книги приведён список литературы, на которую иногда делаются ссылки в тексте. Большую часть этих изданий и публикаций можно использовать в качестве дополнительной литературы.

Приведём краткое описание занятий.

**Занятие 1. Дискретная непрерывность.** Доступно учащимся 7–8 классов. Посвящено введению понятия дискретно непрерывной величины. Для школьников более старших классов можно проводить это занятие, используя более строгую технику в доказательствах и требуя явного выделения «непрерывной последовательности».

**Занятие 2. Непрерывные траектории.** Доступно учащимся 7–8 классов. Посвящено плавному переходу от дискретной непрерывности к обычной на наглядном уровне. Рассмотрены простейшие зависимости, графики которых можно провести «не отрывая руки».

**Занятие 3. Дискретная непрерывность на плоскости.** Ориентировано на учащихся 8–9 классов. Посвящено переходу от объектов, расположенных последовательно в ряд, к объектам, расположенным на плоскости, при рассмотрении дискретно непрерывных величин.

**Занятие 4. Непрерывность в алгебре.** Ориентировано на учащихся 8–9 классов и требует предварительных знаний об элементарных функциях в рамках базового курса математики основной школы. Занятие направлено на расширение приёмов, обсуждаемых при изучении соответствующих тем на уроках алгебры (на примерах квадратичной функции и модуля).

**Занятие 5. Непрерывность в геометрии (планиметрия).** Ориентировано на учащихся 8–9 классов и требует предварительных знаний в объёме базового школьного курса планиметрии. Посвящено, в основном, отработке уже изученных приёмов на геометрическом материале. Позволяет существенно расширить арсенал возможностей построения примеров геометрических объектов с различными свойствами.

**Занятие 6. Площади, периметры, массы.** Ориентировано на учащихся 9–10 классов, но может быть адаптировано и для более младших школьников. Посвящено применению непрерывности к задачам комбинаторной геометрии и близким к ним «по духу» задачам комбинаторики.

**Занятие 7. Непрерывность в геометрии (стереометрия).** Ориентировано на учащихся 10 классов. Требует предварительных знаний основ геометрии в пространстве и представлений о простейших многогранниках и круглых телах. Изучаемые приёмы решения задач тесно связаны с материалом занятия 5, но требуют более серьёзных технических навыков.

**Занятие 8. Малые шевеления.** Ориентировано на учащихся 10 классов, но может быть адаптировано и для более младших школьников. Посвящено особому приёму решения задач, связанному с непрерывностью, который может применяться в комбинаторной геометрии и алгебре.

**Занятие 9. Функции общего вида и функциональные соотношения.** Ориентировано на учащихся 10–11 классов. Требует предварительного знания ряда общих свойств функций (монотонности, периодичности, дифференцируемости) и умения их применять при различных рассуждениях. Также требует уверенного владения понятием композиции функций и понимания поведения функций «на бесконечности». Вплотную подводит к дальнейшему изучению ряда теорем математического анализа, комплексного анализа и топологии.

Понятно, что преподаватель математического кружка может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, поменять порядок их изучения и т. д.

Авторы благодарны А. В. Акопяну, Н. Н. Андрееву, Ю. А. Блинкову, Е. С. Горской, А. А. Заславскому, П. А. Кожевникову, Г. А. Мерзону, Д. В. Прокопенко и В. Ю. Протасову, Б. Шигиде, а также ученикам школы №218 г. Москвы А. Зерцалову и М. Сандриковой за помощь в подборе материала, полезные обсуждения и ценные замечания.

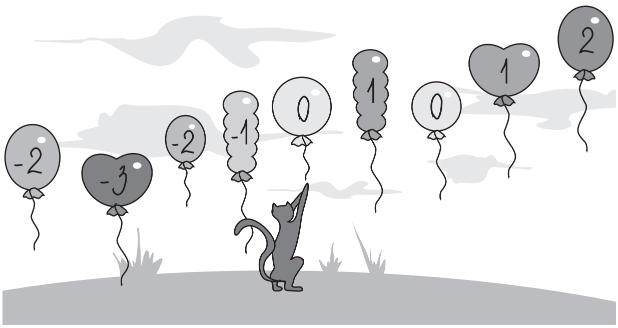
Отдельная и огромная благодарность — Александру Васильевичу Шаповалову: за подборки задач, внимательное прочтение книжки и подробные комментарии, способствовавшие существенному улучшению её композиции и текста.

# Занятие 1

## Дискретная непрерывность

Разберём несколько задач, выявив общие идеи их решения.

**Пример 1.1.** В ряд выписаны целые числа, причём каждые два соседних отличаются ровно на 1. Самое левое число равно $-10$, а самое правое равно 10. Докажите, что в этом ряду есть число 0.




**Решение.** Будем идти по ряду слева направо, пока не встретим первое положительное число. Предыдущее число не будет положительным. По условию два этих числа отличаются на единицу, поэтому положительное число равно 1, а предыдущее число — это 0.

Проанализируем это решение подробнее. Мы рассматривали числовой ряд, в котором соседние числа отличаются на 1 (наименьшее возможное целое значение), без «перескока». Мы доказали, что если в такой последовательности есть и отрицательные, и положительные числа, то в ней есть число 0.

Таким же образом можно доказать и более общее утверждение, которое сформулируем так:

*Пусть последовательность целых чисел такова, что соседние числа отличаются не более чем на единицу. Пусть также $m$ — наименьший член этой последовательности, а $M$ — наибольший (не обязательно единственные). Тогда, какое бы целое число $n$ между ними мы ни взяли ($m < n < M$), найдётся член последовательности, равный числу $n$.*

Например, если наименьшее из чисел в такой последовательности — это 3, а наибольшее — 7, то в ней обязательно найдутся числа 4, 5 и 6.

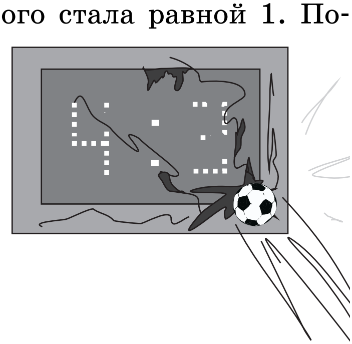
В таких случаях говорят, что имеет место «*дискретная непрерывность*», а это утверждение выражает её основное свойство, называемое «*теоремой о промежуточном значении*». Оно аналогично свойству непрерывных функций с действительной переменной, которое будет сформулировано позднее.

Методы решения задач, основанные на этой теореме, обычно сводятся к следующему. Вводится некоторая величина, доказывается её дискретная непрерывность (мы будем называть такую величину *дискретно непрерывной величиной — ДНВ*), вычисляются значения данной величины для крайних положений, и для доказательства того, что ДНВ принимает требуемое значение, применяется *теорема о промежуточном значении*.

В рассмотренном примере в качестве ДНВ выступает заданная последовательность чисел, в качестве крайних значений — самое левое и самое правое число, а в качестве требуемого значения ДНВ — число 0.

**Пример 1.2.** Первый тайм футбольного матча закончился со счётом 0 : 1, а матч — со счётом 4 : 3. Докажите, что в некоторый момент счёт на табло был ничейным.

**Решение.** Рассмотрим разность между мячами, забитыми первой и второй командами. После первого тайма она была равна $-1$, а после второго стала равной 1. Поскольку при каждом забитом мяче эта разность изменяется на 1, то в некоторый момент она принимает промежуточное значение 0. В этот момент на табло и будет ничейный счёт.



Отметим несколько моментов, существенных для дальнейших обсуждений.

1) В задаче присутствует процесс (изменение счёта матча).

2) Можно ввести некоторую величину (в данном случае — разность забитых и пропущенных мячей), которая на каждом шаге изменяется не более чем на 1.

3) В данном случае удобно было использовать именно разность, поскольку заданные в условии величины в рассматриваемом процессе как бы меняются местами (после первого тайма меньше очков было у первой команды, а после второго тайма — у второй).

4) Мы доказали наличие ничейного счёта *неконструктивно*, а именно, мы не можем явно указать ни сам этот счёт, ни момент матча, в который его можно было наблюдать, но строго доказали, что такой момент действительно был.

Отметим, что использование в качестве ДНВ разности двух величин — это весьма распространённый приём для решения задач, в которых требуется доказать равенство двух значений.

**Пример 1.3.** Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?

**Решение.** Если в предыдущих задачах мы использовали соображения дискретной непрерывности там, где ответ был в общем-то очевиден, то в данной задаче на поставленный вопрос сложно ответить «с ходу». На самом деле такие числа существуют. Мы не сможем их назвать, но факт существования этих чисел докажем строго.

Хорошо известно, что среди первых ста натуральных чисел много простых (гораздо больше пяти). Хорошо бы найти набор из ста чисел, в котором простых чисел мало (меньше пяти) или их нет совсем. Например, можно рассмотреть такой набор чисел: $101!+2$, $101!+3$, ..., $101!+101$. Каждое из этих чисел — составное: первое делится на 2, второе — на 3, ..., последнее — на 101. Таким образом, простых чисел среди них нет.

Теперь будем последовательно рассматривать сотни чисел:

$1, 2, 3, \ldots, 99, 100;$

$2, 3, \ldots, 99, 100, 101;$

$3, \ldots, 99, 100, 101, 102;$

...

$101!+2, \ldots, 101!+100, 101!+101.$

При переходе от каждой сотни к следующей мы удаляем одно число слева и добавляем одно новое число справа, поэтому количество простых чисел не может при этом уменьшиться или увеличиться больше чем на 1. Поскольку в первой сотне простых чисел больше пяти, а в последней — меньше пяти, то в промежутке найдётся сотня, в которой ровно пять простых чисел, что и требовалось.

Обратите внимание, что, в отличие от предыдущей задачи, в условии этой задачи процесса нет — нам пришлось его самим организовать!

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.1.** На доске было записано число 1. За один шаг число, имеющееся на доске, либо умножали на произвольное однозначное число, либо прибавляли к нему произвольное однозначное число, и результат записывали вместо него. Через некоторое время на доске оказалось записано стозначное число. Верно ли, что в какой-то момент на доске было записано тридцатизначное число?

**Задача 1.2.** В ряд выложены 200 шаров, из них 100 чёрных и 100 красных, причём первый и последний шары — чёрные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и чёрных шаров осталось поровну.

**Задача 1.3.** Матч «Бавария»–«Спартак» закончился со счётом 5 : 8. Муж (болеющий за «Баварию») и жена (болеющая за «Спартак») собираются посмотреть этот матч в записи по очереди, уже зная итоговый счёт: сначала смотрит муж (а жена сидит с ребёнком), а в некоторый момент они меняются. Докажите, что они смогут поменяться так, чтобы увидеть поровну мячей, забитых любимой командой.

**Задача 1.4.** Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Нале-во!» некоторые из них повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

**Задача 1.5.** Некто расставил в произвольном порядке десятитомное собрание сочинений. Назовём «беспорядком» пару томов (не обязательно соседних), в которой том с бо́льшим номером стоит левее. Для некоторой расстановки томов подсчитано количество всех «беспорядков». Какие значения оно может принимать?

**Задача 1.6.** В ряд стоят 20 сапог: 10 правых и 10 левых. Обязательно ли среди них найдутся 10 сапог, стоящих подряд, среди которых поровну правых и левых?

**Задача 1.7.** В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдётся чётное число.

## Ответы и решения

**Задача 1.1. Ответ:** да, верно.

При выполнении указанных операций каждое новое число отличается от предыдущего менее чем в 10 раз. Поэтому количество знаков в числе либо не изменялось, либо увеличивалось на 1. Значит, в какие-то моменты на доске были записаны числа с любым количеством знаков от 2 до 99, в том числе и тридцатизначное число.

**Задача 1.2.** Пусть убрано $k$ шаров справа. При $k = 1$ останется 99 чёрных шаров и 100 красных, то есть чёрных шаров останется меньше, чем красных. При $k = 199$ останется 1 чёрный шар и 0 красных, то есть чёрных шаров останется больше, чем красных. При изменении значения $k$ на 1 значение разности между количествами чёрных и красных шаров изменяется на 1. Следовательно, найдётся такое натуральное число $k$ ($2 \leqslant k \leqslant 198$), что эта разность равна нулю, то есть чёрных и красных шаров останется поровну.

Ещё раз обратим внимание на тот факт, что мы можем доказать только возможность требуемой ситуации, но не можем указать конкретно, сколько именно шаров потребуется убрать.

**Задача 1.3.** В начале матча сумма мячей, забитых обеими командами, равнялась нулю, а в итоге такая сумма равна 13, причём эта величина каждый раз изменялась на 1. Следовательно, по ходу матча обязательно был такой момент, когда в сумме было забито столько мячей, сколько в итоге забил «Спартак», то есть 8 мячей. В этот момент и должна произойти смена.

Действительно, если из этих восьми мячей «Спартак» забил $x$, то «Бавария» забила $8 - x$ мячей. Значит, после этого момента «Спартак» забил $8-x$ мячей, то есть столько же, сколько «Бавария» до этого.

Отметим, что может случиться так, что каждый из них увидит только голы «чужой» команды (если $x = 8$), но условие задачи будет выполнено!

В данном случае, используя ДНВ, мы не только доказали возможность смены, но и конкретно указали, когда она должна произойти: после того как сумма забитых мячей станет равна 8, но до того момента, когда будет забит следующий мяч.

**Задача 1.4. Ответ:** да, всегда.

Если сержант стоит в строю, то обозначим число человек, стоящих слева от него к нему лицом через $m$, а справа от него к нему лицом — через $n$. Пусть сначала сержант встанет на левый фланг шеренги. Тогда слева от него не будет никого ($m = 0$). Если и справа от сержанта никто не будет стоять к нему лицом ($n = 0$), то задача решена.

В противном случае ($n > 0$) пусть сержант идёт слева направо от человека к человеку. Если он проходит новобранца, стоявшего к нему спиной, то число $m$ увеличивается на 1, а число $n$ не изменяется. Если сержант проходит новобранца, стоявшего к нему лицом, то число $n$ уменьшается на 1, а число $m$ не изменяется. Если же этот новобранец стоит боком, то оба числа $m$ и $n$ не изменяются.

Таким образом, вначале число $m - n$ отрицательно, а в процессе движения сержанта вдоль строя может увеличиваться не более чем на 1 после прохождения каждого новобранца. Но в тот момент, когда сержант дойдёт до правого края шеренги, уже $n$ будет равно нулю, значит, число $m - n$ будет неотрицательным.

Итак, начав с отрицательного значения $m - n$ и прибавляя к нему несколько раз по единице, мы получили неотрицательное число. Значит, в какой-то момент мы должны были получить ноль. В этот момент $m = n$, то есть с обеих сторон от сержанта лицом к нему находилось поровну новобранцев.

**Задача 1.5. Ответ:** любые целые значения от 0 до 45.

Очевидно, что количество «беспорядков» не меньше нуля, но не больше, чем количество всевозможных пар из 10 томов (оно равно $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$). Покажем, что любое из целых значений от 0 до 45 может достигаться при некоторой расстановке томов. Вначале расставим все тома строго в обратном порядке. Тогда каждая пара томов будет являться «беспорядком», то есть общее количество «беспорядков» равно 45.

Из этой расстановки можно получить расстановку томов в правильном порядке, меняя местами на каждом шаге только два соседних тома. Действительно, поменяем сначала десятый том с девятым, затем десятый — с восьмым, и так далее, пока десятый том не окажется правее всех остальных. Затем ту же операцию проделаем с девятым томом, затем с восьмым, седьмым, ..., со вторым.

При правильной расстановке томов количество «беспорядков» равно нулю, а при обмене местами двух соседних томов количество беспорядков либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 1.

Таким образом, будет достигнуто каждое количество беспорядков от 0 до 45.

Обратите внимание, что решение данной задачи состоит из двух частей, которые обычно называют «оценка» и «пример»: во-первых, показано, что количество «беспорядков» не может быть меньше нуля и не может быть больше чем 45, а во-вторых, показано, что каждое значение от 0 до 45 достигается.

При этом вместо того, чтобы приводить 46 конкретных примеров, мы привели примеры лишь для 45 и для 0 «беспорядков», после чего провели рассуждение, доказывающее, что количество беспорядков принимает также и все промежуточные значения.

Отметим, что при решении данной задачи мы воспользовались алгоритмом выстраивания томов в правильном порядке путём последовательного обмена местами соседних томов. В программировании такой алгоритм называют *сортировка «пузырьком»*.

**Задача 1.6. Ответ:** да, обязательно.

До сих пор мы тщательно старались избегать алгебраического формализма, считая, что это занятие рассчитано на школьников, ещё не обладающих соответствующей техникой. В некоторых случаях это усложняло изложение доказательства. На примере решения этой задачи покажем, каким образом, при помощи введения разумных определений и обозначений, можно добиться более явного применения *теоремы о промежуточном значении*.

Занумеруем сапоги слева направо натуральными числами от 1 до 20. Для каждых десяти сапог с номерами $n$, $n+1$, ..., $n+9$, где $1 \leqslant n \leqslant 11$, рассмотрим величину $d_n$ — разность между количествами левых и правых сапог среди этих десяти. Заметим, что $d_1 + d_{11}$ — это разность между количеством левых и правых среди всех двадцати сапог, поэтому $d_1 + d_{11} = 0$. Следовательно, либо $d_1 = d_{11} = 0$, либо $d_1$ и $d_{11}$ — ненулевые противоположные числа.

В первом случае можно выбрать первые 10 сапог (слева или справа) и утверждение задачи будет выполнено.

Во втором случае рассмотрим два произвольных соседних члена последовательности $\{d_n\}$: $d_n$ и $d_{n+1}$. При вычислении значения $d_{n+1}$ мы, по сравнению с вычислением $d_n$, не учитываем $n$-й сапог, но учитываем $(n+10)$-й. Если оба эти сапога на одну ногу, то $d_n = d_{n+1}$. Если же один из этих сапог правый, а другой левый, то $d_n$ отличается от $d_{n+1}$ на 2 (в бо́льшую или в меньшую сторону). Кроме того, заметим, что среди десяти сапог либо чётное количество как левых, так и правых, либо нечётное. Поэтому их разность $d_n$ — всегда число чётное.

Рассмотрим теперь целочисленную последовательность $\left\{\frac{d_n}{2}\right\}$. Её соседние члены отличаются не более чем на 1, а числа $\frac{d_1}{2}$ и $\frac{d_{11}}{2}$ имеют разные знаки, следовательно, по теореме о промежуточном значении, найдётся член $\frac{d_k}{2}$ этой последовательности, равный нулю ($1 < k < 11$). Тогда и $d_k = 0$, то есть условию задачи удовлетворяют 10 сапог, начиная с сапога с номером $k$.

Ещё раз хотим предостеречь: для школьников, хорошо владеющих соответствующей техникой, введение удобных обозначений и рассуждение на алгебраическом языке облегчают доказательство и делают его более стереотипным. Для школьников, ещё не обладающих такими навыками, попытка использования большого количества обозначений и проведение формальных рассуждений приведёт к тому, что основные идеи темы усвоены не будут.

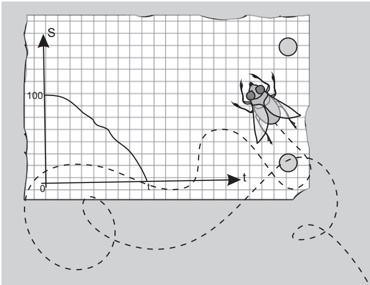
**Задача 1.7.** Заметим, что соседние числа данной последовательности отличаются меньше чем на 10. Отбросим у каждого числа последнюю цифру. Получим новую последовательность, в которой соседние числа отличаются не более чем на 1. Так как эта последовательность бесконечна и каждый её член не меньше предыдущего, то в ней встречаются все натуральные числа, начиная с некоторого (поскольку не могут бесконечно повторяться цифры любого разряда). В частности, в ней найдётся число, которое записывается только нечётными цифрами (например, число вида 99...9).

Соответствующее число в исходной последовательности либо чётно, либо также состоит только из нечётных цифр. Во втором случае следующее за ним число обязано быть чётным.

Можно также использовать задачи Д1–Д6.

# Занятие 2

## Непрерывные траектории




Представим себе, что по поверхности стола с ограниченной скоростью ползает (но не взлетает!) муха. Тогда, как бы она ни меняла направление своего движения, мы сможем нарисовать траекторию этого движения, «не отрывая руки». Понятно, что в этом случае муха проходит через все промежуточные точки этой кривой и если измерять путь, пройденный мухой, то можно утверждать, что эта величина принимает любое значение от 0 (в начале маршрута) до его значения в конце маршрута (в какие-то моменты времени). Тем самым мы опять имеем дело с величиной, изменяющейся *непрерывно*. Можно провести аналогию с ДНВ (рассмотренной на занятии 1), но её отличие от ДНВ состоит в том, что количество рассматриваемых точек (а также моментов времени и значений пройденного пути) бесконечно.

Зафиксируем какую-либо точку (например, центр стола). Тогда и расстояние от мухи до этой точки по мере её движения также изменяется *непрерывно*. Более того, если в этой точке поместить фонарик и его лучом плавно следить за перемещением мухи, то угол, образуемый лучом фонаря с каким-то фиксированным направлением, также изменяется *непрерывно*.

Попробуем на очень простом примере разобраться с бесконечным количеством точек. Для наглядности рассмотрим случай, когда процесс уже задан.

**Пример 2.1.** Два автомобиля выехали из пунктов $A$ и $B$, расстояние между которыми 100 км, навстречу друг другу по одному и тому же шоссе. Докажите, что расстояние между автомобилями принимает любое значение от 0 до 100 км (*в какие-то моменты времени*).

**Решение.** Отметим сначала очевидный факт: автомобили обязательно встретятся, независимо от того, как менялись их скорости, а также от того, в какое время каждый из них выехал. Тем не менее, полезно на это посмотреть с точки зрения графиков движения автомобилей.

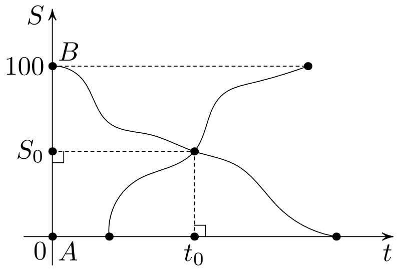



Рис. 2.1а

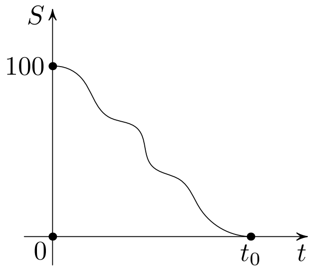



Рис. 2.1б

Рассмотрим систему координат на плоскости: ось абсцисс $t$ — время движения, ось ординат $S$ — расстояние автомобиля от пункта $A$. Тогда графики движения машин являются линиями (ломаными или кривыми), которые можно провести «не отрывая руки» (см., например, рис. 2.1а). Поскольку каждый график соединяет какую-то точку оси $t$ с точкой, лежащей на прямой $S = 100$, и одна *непрерывная линия* идёт «снизу вверх», а другая — «сверху вниз», то эти линии обязательно пересекутся. Абсцисса $t_0$ точки пересечения графиков показывает время встречи автомобилей, а ордината $S_0$ — расстояние от пункта $A$ до места встречи (*если в тот момент, когда одна машина ещё не выехала, другая уже проехала весь путь, то «встреча» произошла на оси $t$, либо на прямой $S = 100$*).

Для решения задачи также удобно посмотреть на график в такой же системе координат, но теперь имеет смысл проследить зависимость расстояния между автомобилями от времени, например, от момента выезда одного из автомобилей (того, который выехал первым) до момента встречи. Этот график также является *непрерывной линией* (см. рис. 2.1б). Объяснить *непрерывность этой величины* можно, например, так, как это принято в физике. По *принципу относительности движений*, можно считать, что один автомобиль стоит на месте, а другой движется к нему со скоростью, равной в каждый момент сумме скоростей автомобилей (скоростью сближения). Тогда наше рассуждение ничем не будет отличаться от рассуждений о траектории движения мухи.

Таким образом, расстояние $S$ между машинами принимает все значения от 0 до 100.

Тот же результат можно было получить, рассмотрев аналогичную зависимость в другой промежуток времени — от момента встречи автомобилей до момента, когда в пунктах назначения уже окажутся оба автомобиля.

Итак, от дискретной непрерывности мы перешли к *непрерывности траекторий движения*, которые, в частности, можно изображать в виде графиков *функций*. Для таких *непрерывных функций* справедлива *теорема о промежуточном значении*, дискретным аналогом которой мы уже пользовались для последовательностей:

**если некоторая непрерывная функция $S(t)$ такова, что $S(t_1) = A$, $S(t_2) = B$, то на промежутке от $t_1$ до $t_2$ она принимает все значения от $A$ до $B$.**

**Пример 2.2.** В противоположных концах диаметра $AB$ окружности сидят два таракана. По команде они побежали по окружности в одном направлении (например, против часовой стрелки) и через минуту поменялись местами (движение тараканов не обязательно равномерное). Докажите, что в какой-то момент соединяющая их хорда была перпендикулярна диаметру $AB$.

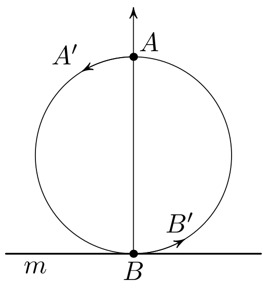


Рис. 2.2

**Решение.** Без ограничения общности можно расположить диаметр $AB$ вертикально (см. рис. 2.2). Будем рассматривать изменения расстояний от тараканов до горизонтальной касательной $m$ к окружности, проходящей через точку $B$. По мере движения тараканов каждое из расстояний изменяется *непрерывно*. В начальный момент расстояние от $m$ до таракана в точке $A$ равно диаметру $d$ окружности, а расстояние от $m$ до таракана в точке $B$ равно нулю. Через минуту, наоборот, первое расстояние равно нулю, а второе равно $d$.

Таким образом, разность расстояний от $m$ до тараканов *непрерывно* изменилась от $d$ до $-d$, поэтому, по *теореме о промежуточном значении*, в какой-то момент эта разность была равна нулю. В этот момент соединяющая их хорда и была перпендикулярна диаметру $AB$.

В этом рассуждении, помимо теоремы о промежуточном значении, мы практически использовали тот факт, что из непрерывности движения точки по какой-то траектории следует непрерывность движения её проекции на координатную ось (в данном случае — вертикальную). Поэтому возможно и другое рассуждение: проекция первого таракана непрерывно пробежала по диаметру из $A$ в $B$, а проекция второго таракана — из $B$ в $A$. Значит, в какой-то момент проекции «встретились» (совпали). В этот момент хорда, соединяющая тараканов, была перпендикулярна $AB$.

В последующих занятиях свойства непрерывных функций с действительным аргументом будут обсуждаться более подробно.

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 2.1.** Два скалолаза шли двумя разными маршрутами, стартовав одновременно, и достигли точки финиша на вершине скалы также одновременно. Расстояние между точками их старта — 50 метров. Докажите, что в какой-то момент расстояние между скалолазами было 30 метров.

**Задача 2.2.** В полночь со среды на четверг было холоднее, чем в полночь со вторника на среду и в полночь с четверга на пятницу. Докажите, что в среду и четверг были два момента времени, отличающиеся ровно на сутки, когда температура была одинаковой.

**Задача 2.3.** (*Задача о буддийском монахе.*) Монах поднимался на священную гору. Он начал восхождение в 6 часов утра и достиг вершины в 6 часов вечера. На вершине он заночевал, а на следующий день в 6 утра начал спускаться по пути подъёма, и достиг подножия горы в 6 часов вечера. Докажите, что существует такая точка на его маршруте, в которой монах сможет помолиться на пути туда и обратно в одно и то же время.

**Задача 2.4.** Король прошёл из левого нижнего угла шахматной доски в правый верхний угол. Ладья прошла из правого нижнего в левый верхний угол этой же доски, делая ходы на одну клетку. Докажите, что на этой доске есть клетка, на которой побывали обе фигуры.

**Задача 2.5.** В противоположных углах квадратного пруда со стороной 100 метров сидели два гуся. Поплавав по пруду, они оказались в двух других противоположных углах. Докажите, что в некоторый момент времени расстояние между кончиками их клювов было равно 110 метров.

**Задача 2.6.** Докажите, что за любой промежуток времени длиной 36 минут часовая и минутная стрелка часов (движущиеся без «скачков») хотя бы раз окажутся на одной прямой.

**Задача 2.7.** Докажите, что на высоте $AD$ остроугольного треугольника $ABC$ можно так выбрать точку $M$, что $\angle BMC = 100^\circ$.

## Ответы и решения

**Задача 2.1.** Прежде всего отметим, что скала может иметь любую, даже весьма причудливую, форму (например, см. рис. 2.3), поэтому было бы ошибкой считать, что расстояние между скалолазами всё время уменьшается.

Зависимость расстояния $S$ между скалолазами от времени $t$ является *непрерывной функцией* (*график можно провести*, «*не отрывая руки*»). Так как при $t = 0$ $S = 50$, а в момент времени, когда оба скалолаза оказались на вершине, $S = 0$, то, по *теореме о промежуточном значении*, величина $S$ принимает все значения от 0 до 50, в том числе и значение 30.

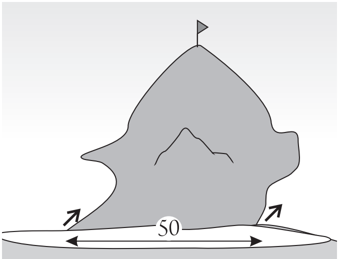



Рис. 2.3

**Задача 2.2.** Рассмотрим примерные графики изменения температуры $T$ за сутки в одной системе координат, учитывая условие задачи (см. рис. 2.4, $t$ — время в часах). В одном случае моментам времени 0 и 24 соответствуют точки $V$ (полночь со вторника на среду) и $S$ (полночь со среды на четверг), а в другом — опять же $S$ (на той же горизонтали) и $C$ (полночь с четверга на пятницу).

Так как температура изменяется *непрерывно*, эти графики пересекутся. Абсцисса $t_0$ точки пересечения — искомый момент времени.

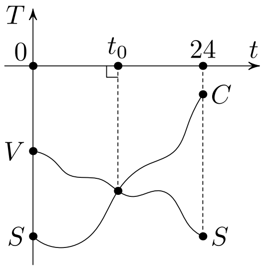



Рис. 2.4

**Задача 2.3.** Представим себе, что монахов было двое, и в тот момент, когда первый начал подниматься на гору, второй начал спускаться с горы по тому же маршруту. Тогда в некоторый момент времени (между 6.00 и 18.00) они окажутся в одной точке, поскольку шли навстречу друг другу. Этот момент времени и эта точка маршрута будут искомыми.

При решении данной задачи мы организовали процесс движения монахов навстречу друг другу и использовали *непрерывность траекторий их движения* (*сравните с задачей* 2.2).

**Задача 2.4.** Последовательно соединим отрезками центры клеток, пройденные королём, и получим некоторую ломаную. Соединим её концы с соответствующими углами контура доски. По тому же правилу построим ломаную для маршрута ладьи. Получим две непрерывные ломаные, соединяющие две пары противоположных углов доски. Эти ломаные пересекаются в некоторой точке $M$.

Если $M$ лежит внутри клетки, то эту клетку посетили и король, и ладья. Пусть $M$ лежит на границе клеток. Так как $M$ не может быть углом доски и лежит на траектории движения ладьи, то $M$ — середина общей границы двух соседних клеток (и в обеих ладья побывала). Отрезок, изображающий диагональный ход короля, через такие точки не проходит. Значит, через $M$ проходит отрезок, изображающий ход короля по горизонтали или по вертикали. Следовательно, король побывал в обеих рассмотренных клетках.

Использованное в решении наглядно очевидное утверждение иногда называют *теоремой о пересечении ломаных*: *если внутри квадрата $ABCD$ проходят две ломаные*: *одна с концами $A$ и $C$*, *а другая с концами $B$ и $D$*, *то эти ломаные пересекаются.*

**Задача 2.5.** Изначально гуси находились на концах диагонали квадрата, то есть на расстоянии $100\sqrt{2}$ м. Без ограничения общности (*в силу симметрии квадрата*) можно считать, что первый гусь переплыл из левого верхнего угла в правый верхний, а второй гусь — из правого нижнего угла в левый нижний (см. рис. 2.5).

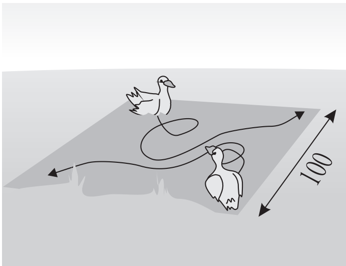



Рис. 2.5

Проведём через точки, обозначающие гусей, вертикальные прямые и будем считать, что они двигаются вместе с гусями. Тогда в процессе движения гусей эти прямые должны поменяться местами. Следовательно, в какой-то момент прямые совпадут, а это означает, что гуси окажутся на одной вертикали. В этот момент расстояние между гусями будет не больше чем 100 м.

Поскольку расстояние между гусями изменялось *непрерывно* и $100 < 110 < 100\sqrt{2}$, то, *по теореме о промежуточном значении*, в какой-то момент времени расстояние между клювами гусей было равно 110 м.

**Задача 2.6.** Скорость минутной стрелки — 1 оборот в час, а часовой — $\frac{1}{12}$ оборота в час. Будем условно считать часовую стрелку неподвижной, тогда относительная скорость минутной стрелки по отношению к часовой равна $\frac{11}{12}$ оборота в час. За 36 минут минутная стрелка по отношению к часовой проходит $\frac{11}{12} \cdot \frac{36}{60} = \frac{11}{20} > \frac{1}{2}$ оборота, то есть больше чем $180^\circ$ по отношению к часовой стрелке. В силу *непрерывности движения стрелок* на этом промежутке *достигается любое промежуточное значение* угла, значит, будет либо момент, когда этот угол равен $0^\circ$ (стрелки «совпадают»), либо момент, когда он равен $180^\circ$ (стрелки противоположно направлены). Любой из этих моментов является искомым.

Утверждение задачи останется верным даже для промежутков длиной 33 минуты.

**Задача 2.7.** Представим себе, что точка $M$ непрерывно движется по высоте $AD$ от точки $D$ к точке $A$ (см. рис. 2.6). При таком движении величины углов $MBD$ и $MCD$ также изменяются непрерывно, поэтому непрерывно изменяется и их сумма. В начальный момент эта

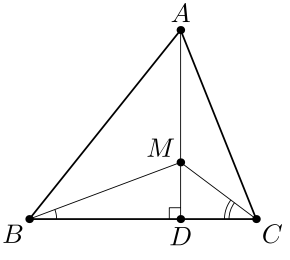


Рис. 2.6

сумма равна нулю, а в тот момент, когда точка $M$ совпадёт с точкой $A$, значение этой суммы больше чем $90^\circ$. По *теореме о промежуточном значении*, существует положение точки $M$, для которого указанная сумма равна $80^\circ$. В этом случае $\angle BMC = 100^\circ$, что и требовалось.

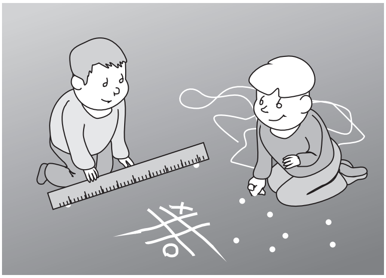
Задачи на применение непрерывности в геометрии будут более подробно рассматриваться в последующих занятиях. Но уже на этом примере можно уточнить понятие непрерывной величины. Говоря о непрерывном движении точки, мы, на самом деле, рассматривали зависимость суммы $S$ величин указанных углов от расстояния $x = MD$. Очевидно, что при малых изменениях значения $x$ мало изменяется и величина $S$.

Таким образом, *функция является непрерывной на некотором промежутке, если при малых изменениях значения аргумента мало изменяется и значение функции*. В дальнейшем будет показано, что функции, графики которых можно провести, «не отрывая руки», удовлетворяют этому определению.

Можно также использовать задачи Д7–Д12.

# Занятие 3

## Дискретная непрерывность на плоскости



Как было показано на предыдущих занятиях, для того чтобы воспользоваться соображениями *непрерывности*, нужно рассмотреть (или создать) подходящий процесс. В задачах первого занятия практически все рассматриваемые объекты были расположены последовательно (ряды целых чисел или шаров, шеренга новобранцев и так далее), их количество было конечно, а в качестве процесса чаще всего выбиралось движение по имеющейся последовательности слева направо. В задачах второго занятия процессы были организованы так, что рассматривалось бесконечное количество точек (состояний) и это можно было, как правило, изобразить в виде непрерывной кривой на плоскости.

В этом занятии опять пойдёт речь о ДНВ, но здесь собраны задачи, в которых количество объектов конечно (как и в занятии 1), но они, как правило, расположены на плоскости (как в занятии 2), образуя тем самым различные двумерные конфигурации. Поэтому для использования соображений *непрерывности* процессы придётся организовывать иначе.

Первый пример демонстрирует следующий приём: рассматривается прямая на плоскости, которая перемещается параллельно самой себе. Рассматривается количество объектов в одной полуплоскости и доказывается, что оно изменяется непрерывно. Во втором примере аналогичный эффект достигается за счёт вращения плоского угла. Третий пример демонстрирует идею обхода дискретных объектов, расположенных на плоскости, в некотором порядке, при котором наблюдаемая величина также изменяется дискретно непрерывно.

**Пример 3.1.** На плоскости отмечено 100 точек. Можно ли провести прямую так, чтобы по одну сторону от неё лежало 30 точек, а по другую — 70?

**Решение.** Интуиция подсказывает, что ответ на вопрос задачи — положительный. Начнём с «наброска», который постепенно доведём до строгого решения. Проведём прямую на плоскости так, чтобы все точки лежали по одну сторону от неё. Будем двигать эту прямую в направлении, ей перпендикулярном. В некоторый момент все точки окажутся по другую сторону от прямой.

Проследим за тем, как точка попадает в другую часть плоскости: изначально точка находится по одну сторону от прямой, затем она оказывается на прямой (в этот момент количество точек в первой полуплоскости уменьшается на 1), а затем эта точка попадает во вторую полуплоскость (в этот момент количество точек во второй полуплоскости увеличивается на 1).

Таким образом, величина «количество точек в данной полуплоскости» принимает как значение 0, так и значение 100. Если в процессе перемещения прямой никакие две точки не оказываются на ней одновременно, то указанная величина изменяется на 1, тогда, *по теореме о промежуточном значении*, в какой-то момент эта величина принимает значение 30.

Во всех задачах этого занятия мы будем ссылаться на очевидность того, что та или иная величина изменяется непрерывно.

Что же делать, если прямая в некоторый момент будет содержать сразу две отмеченные точки (или более)? Оказывается, такой ситуации можно избежать за счёт правильного выбора начального положения прямой. Рассмотрим все прямые, соединяющие данные точки попарно. Выберем нашу прямую так, чтобы она не была параллельна ни одной из этих прямых. Это можно сделать всегда, потому что множество направлений прямых на плоскости бесконечно, а количество направлений, параллельных рассмотренным прямым, конечно.

Заметим, что провести требуемую прямую с заданным направлением (например, горизонтальную) не всегда возможно (например, если все данные точки лежат на одной горизонтальной прямой).

**Пример 3.2.** За круглым столом сидят 15 мальчиков и 15 девочек. Докажите, что найдётся группа из 20 сидящих подряд детей, в которой девочек и мальчиков будет поровну.

**Решение.** Предположим, что это не так. Рассмотрим все возможные группы из 20 сидящих подряд детей (таких групп всего 30). Пусть в каждой такой группе мальчиков больше, чем девочек. Тогда, просуммировав количество мальчиков и количество девочек во всех тридцати группах, получим, что общее количество мальчиков больше, чем общее количество девочек. Но при таком подсчёте каждый ребёнок был учтён ровно 20 раз, поэтому окажется, что мальчиков за столом больше, чем девочек, что противоречит условию.

Следовательно, найдётся группа детей, в которой больше мальчиков, и найдётся группа детей, в которой больше девочек. Рассмотрим первую из этих групп. Будем совершать с этой группой такую операцию: удалим из неё первого ребёнка и добавим ребёнка, сидящего следующим с другого конца. При этом количество девочек в этой группе изменится не более чем на 1. За несколько таких операций мы из группы, в которой было больше мальчиков, получим группу, в которой больше девочек. Количество девочек — *ДНВ*, поэтому для некоторой промежуточной группы оно будет равно количеству мальчиков.

Процесс, описанный в решении, можно представить себе наглядно: считая, что дети посажены за стол равномерно, рассмотрим плоский центральный угол величиной $240^\circ$, соответствующий первой группе детей. Каждый раз будем поворачивать его вокруг центра стола на $12^\circ$ («на одного ребёнка»), пока угол не станет соответствовать второй группе детей.

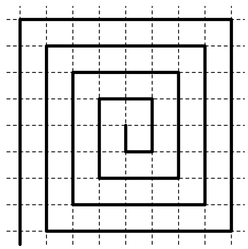
**Пример 3.3.** В клетках доски размером $100 \times 100$ произвольным образом расположено 1000 шашек. Докажите, что доску можно разрезать по границам клеток на две части с равным количеством шашек.

**Решение.** В каждой из частей должно оказаться по 500 шашек. Будем обходить доску клетка за клеткой следующим образом: сначала пройдём по верхней горизонтали слева направо, затем по следующей горизонтали слева направо и так далее. В процессе движения будем подсчитывать количество шашек, стоящих в пройденных клетках. Как только насчитаем ровно 500 шашек — остановимся. Этот момент обязательно наступит, так как при переходе в соседнюю клетку количество шашек изменяется не более чем на 1. Отнесём все пройденные клетки к первой части, а оставшиеся клетки — ко второй, и проведём соответствующую линию разреза.

Заметим, что в этом случае линия разреза будет либо горизонтальным отрезком, либо ломаной из трёх звеньев, в которой крайние звенья — горизонтальные, а среднее — вертикальное (длиной в одну клетку).

## Задачи для самостоятельного решения

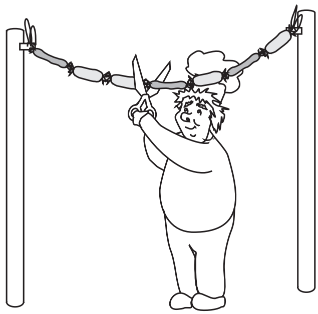
**Задача 3.1.** На клетчатой плоскости нарисовали несамопересекающуюся ломаную в виде спирали, идущую по границам клеток и состоящую из двухсот звеньев (на рисунке изображены начальные звенья ломаной). Докажите, что можно провести прямую, которая имеет со спиралью ровно 64 общие точки.



**Задача 3.2.** На окружности единичной длины отмечено 25 точек. Докажите, что найдётся дуга длины 0,4, внутри которой лежит ровно 10 точек.

**Задача 3.3.** Пусть на плоскости расположены $2n$ точек. Назовём *медианой* этого множества точек прямую, проходящую ровно через две из них, по обе стороны от которой находится одинаковое количество точек. Какое наименьшее количество медиан может иметь множество, состоящее из $2n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

**Задача 3.4.** В линейной связке сосисок — 100 говяжьих и 200 свиных вперемешку. Какое наименьшее количество разрезов достаточно сделать, чтобы можно было разложить сосиски на две кучки, в каждой из которых 50 говяжьих и 100 свиных?



**Задача 3.5.** За круглым столом равномерно посажены 100 дедов, причём у любых двух соседей количество волос в бородах отличается не больше чем на 100. Докажите, что найдётся пара дедов, сидящих напротив друг друга, у которых количество волос в бородах также отличается не больше чем на 100.

**Задача 3.6*.** Мозаика состоит из набора плоских прямоугольников. Все прямоугольники можно уложить в один слой в прямоугольную коробку (так, что их стороны параллельны сторонам коробки). В бракованном наборе у каждого прямоугольника одна из сторон оказалось меньше стандартной. Можно ли утверждать, что у коробки, в которую складывается набор, также можно уменьшить одну из сторон?

## Ответы и решения

**Задача 3.1.** Данная ломаная содержит два соседних звена длины 1, два звена длины 2, и так далее, 2 звена длины 100. Проведём прямую, проходящую через конец $O$ ломаной под углом 45° к горизонтали (см. рис. 3.1). Эта прямая пересечёт ломаную ровно в ста точках (из двух звеньев нечётной длины она пересекает ровно одно, а также проходит через общую вершину звеньев чётной длины).

Будем *непрерывно* перемещать эту прямую в направлении, ей перпендикулярном («влево–вверх»), до тех пор, пока ломаная не окажется полностью в одной полуплоскости относительно этой прямой. В этот момент количество точек пересечения прямой и ломаной равно 0. Проследим, как изменяется количество точек пересечения при движении прямой. Сначала исчезает точка пересечения со звеном длины 1, затем точки пересечения со звеньями 2 и 3 «сливаются» в одну, потом исчезает и эта точка, затем следующие две точки пересечения «сливаются» в одну и так далее, то есть количество общих точек постепенно уменьшается на 1. Таким образом, *количество точек — ДНВ*, принимающая все промежуточные значения между 0 и 100, в частности, в какой-то момент эта величина принимает значение 64.

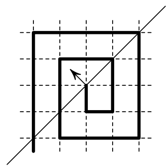


Рис. 3.1

В данной задаче можно указать такую прямую и явно. Эта прямая, параллельная указанной и проходящая через общую вершину звеньев длины 36 и 37.

**Задача 3.2.** Разобьём данную окружность точками $A$, $B$, $C$, $D$ и $E$, ни одна из которых не совпадает с отмеченной, на 5 равных дуг длины 0,2 (см. рис. 3.2). Рассмотрим дуги $AC$, $CE$, $EB$, $BD$ и $DA$ длины 0,4. Если внутри одной из них лежит ровно 10 отмеченных точек, то задача решена. Если это не так, то среди них найдётся дуга, внутри которой меньше десяти точек. Действительно, пусть внутри каждой из рассматриваемых дуг больше десяти отмеченных точек, тогда в сумме этих точек больше пятидесяти, причём все точки окружности учтены ровно

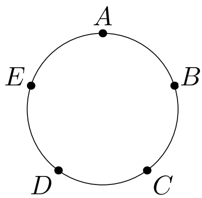



Рис. 3.2

два раза. Это означает, что отмеченных точек больше чем 25, что противоречит условию. По аналогичным соображениям найдётся и дуга, внутри которой больше десяти отмеченных точек. Будем постепенно поворачивать одну из этих дуг, например, по часовой стрелке, до тех пор пока она не совпадёт с другой. По мере вращения *количество отмеченных точек внутри дуги* изменяется не более чем на одну, то есть это количество — *ДНВ*. Значит, в какой-то момент этих точек окажется ровно 10.

**Задача 3.3. Ответ:** $n$ медиан.

Покажем, что через каждую точку $A$ данного множества проходит медиана. Действительно, проведём через точку $A$ произвольную прямую $l$, которая разобьёт плоскость на две полуплоскости $\alpha$ и $\beta$ (будем считать, что точки этой прямой не принадлежат полуплоскостям). Пусть в полуплоскости $\alpha$ меньше точек из данного множества, чем в полуплоскости $\beta$, то есть разность этих величин отрицательна. Будем постепенно поворачивать прямую $l$ вокруг точки $A$. В любом положении она будет проходить не более чем ещё через одну точку данного множества. Поэтому данные точки «заходят» на прямую и «сходят» с неё по одной, значит, *разность между количеством точек в полуплоскости $\alpha$ и полуплоскости $\beta$ является ДНВ*.

При повороте на $180^\circ$ полуплоскости поменяются «ролями» и в полуплоскости $\alpha$ будет больше точек из данного множества, чем в полуплоскости $\beta$, то есть рассматриваемая разность станет положительной. Следовательно, при некотором положении прямой $l$ эта разность будет равна нулю, и, ввиду чётности данного количества точек, на прямой $l$ будут ровно две точки.

Так как на каждой медиане лежит ровно две точки из данного множества, то медиан не может быть меньше чем $n$. Пример множества точек, в котором ровно $n$ медиан, — вершины правильного $2n$-угольника.

Опишем ещё раз процесс, который помог нам решить задачу. Рассмотрим прямую, которая делит объекты из некоторого набора на плоскости на две части. Будем вращать эту прямую вокруг фиксированной точки. Тогда при повороте на $180^\circ$ объекты, расположенные по одну и по другую сторону от прямой, как бы поменяются местами.

Отметим, что медиан может быть и больше чем $n$. Например, при $n = 2$ можно расположить 4 точки в вершинах и в центре равностороннего треугольника, тогда каждая из трёх осей симметрии получившейся конфигурации является медианой этого множества точек.

**Задача 3.4. Ответ:** два разреза.

Если при разрезании связки пополам количество сосисок каждого сорта в двух получившихся частях одинаково, то нам хватит и одного разреза. Пусть это не так, тогда докажем, что двух разрезов достаточно. Рассмотрим первые 150 сосисок, отсчитав их, например, от левого края связки. Без ограничения общности можно считать, что говяжьих сосисок в этой части связки больше чем 50, поэтому в оставшейся части их меньше чем 50. Будем «двигаться» вправо, каждый раз добавляя одну сосиску «спереди» и убирая одну сосиску «сзади», то есть получая фрагмент связки, состоящий из 150 сосисок. При этом количество говяжьих сосисок в нём либо не изменяется, либо уменьшается на 1, либо увеличивается на 1, то есть это количество является *ДНВ*. Проделав эту операцию 150 раз, мы получим правую часть связки, дополнительную к рассмотренной первоначально, в которой говяжьих сосисок меньше чем 50. Следовательно, в силу *теоремы о промежуточном значении*, в какой-то момент в нашем фрагменте было ровно 50 говяжьих сосисок (значит, ровно 100 свиных). Произведя в этот момент два разреза по краям этого фрагмента, мы сможем его отделить, и задача будет решена.

Отметим, что ни ответ, ни решение практически не изменятся, если исходная связка не линейная, а представляет собой «ожерелье». Отличие состоит в том, что одного разреза не хватит ни в каком случае, а рассматривать можно произвольный фрагмент из 150 сосисок и «двигать» его по кругу.

**Задача 3.5.** Рассмотрим прямую, соединяющую двух дедов, сидящих напротив друг друга, и разность между количеством волос в бородах этих дедов. Будем последовательно поворачивать эту прямую, каждый раз «на одного деда», например, по часовой стрелке. После того как будет сделано 50 поворотов, прямая повернётся на $180^\circ$, то есть деды поменяются местами, поэтому рассматриваемая разность примет значение, противоположное исходному. Значит, после какого-то поворота знак этой разности поменялся на противоположный. Так как при каждом повороте разность изменялась не более чем на 200, то либо перед рассмотренным поворотом, либо в результате него значение рассматриваемой разности окажется числом из диапазона от $-100$ до 100, что и требовалось.

**Задача 3.6*. Ответ:** да, можно.

Предположим противное. Расположим коробку вертикально, вложим в неё исходные прямоугольники, а после этого уменьшим их так, как в бракованном наборе (до «бракованных» размеров). В результате часть прямоугольников «сползёт» вниз (под действием силы тяжести). Но, согласно предположению, один из прямоугольников, примыкающих к верхней стороне коробки, не сползёт. Это означает, что у него уменьшилась не *высота*, а *ширина*. Кроме того, это означает, что по крайней мере один из прямоугольников, примыкающих к нему снизу, также не сполз вниз. Продолжая это рассуждение для каждого слоя («двигаясь сверху вниз»), получим, что в исходном расположении имелась цепочка прямоугольников, соединяющая верхнюю и нижнюю сторону коробки, у каждого из которых *не уменьшилась высота*. Повернув теперь коробку на $90^\circ$ и проведя аналогичное рассуждение, получим, что в исходном расположении имелась цепочка прямоугольников, соединяющая левую и правую сторону коробки, у каждого из которых *не уменьшилась ширина*.

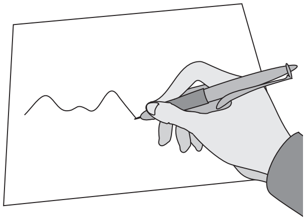
В каждой из цепочек соединим последовательно середины общих участков границ соприкасающихся прямоугольников с их центрами. Получим две ломаные. Опустив из концов каждой ломаной перпендикуляр на соответствующую сторону коробки, получим, что каждая ломаная идёт внутри прямоугольников своей цепочки и соединяет теперь противоположные стороны прямоугольной коробки. В силу *непрерывности*, они обязаны пересечься (*см. комментарий к задаче* Д10), то есть у этих цепочек есть общий прямоугольник. У этого прямоугольника не уменьшился ни один размер, что противоречит условию задачи.

Отметим, что аналогичное утверждение в пространстве (для набора параллелепипедов) будет неверным. Рассуждение, похожее на рассмотренное, «не проходит»: три цепочки параллелепипедов вполне могут «разойтись».

Можно также использовать задачи Д4, Д13–Д18.

# Занятие 4

## Непрерывность в алгебре



Элементарные функции, которые изучаются в рамках базового курса математики основной школы, являются *непрерывными* на своей области определения. Для тех функций, которые определены на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел или на некотором промежутке (линейная; квадратичная; $y = x^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$, где $n$ — натуральное число, большее 1; $y = |x|$) это видно из того, что их графики можно провести, «*не отрывая руки*».

Функция $y = \dfrac{k}{x}$, где $k$ — действительное число, отличное от нуля, также *непрерывна* на области определения: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, но её график состоит из двух частей, каждую из которых также можно провести, «не отрывая руки».

*Непрерывными* являются и многие функции, изучаемые в старшей школе: многочлены, дробно-рациональные и тригонометрические функции. Строго это доказывается в курсе математического анализа, в частности, для каждой из этих и уже рассмотренных функций можно показать, что для любой точки $x_0$ из её области определения *при малых изменениях значения аргумента мало изменяется и значение функции*. (*Отметим, что для функций вида* $y = \sqrt[2k]{x}$ *в точке* $x_0 = 0$ *это не совсем так — в этом случае имеет место односторонняя непрерывность*).

Кроме того, в курсе анализа доказывается, что *непрерывными* являются сумма и произведение нескольких непрерывных функций, а также частное и композиция двух непрерывных функций (там, где они определены).

С применением непрерывности элементарных функций школьники сталкиваются уже тогда, когда начинают решать неравенства методом интервалов. Этот метод основан на том, что *функция, которая непрерывна на промежутке* $(a; b)$ *и не принимает на нём нулевого значения, сохраняет на этом промежутке свой знак*.

Рассмотрим задачу, иллюстрирующую применение этого свойства (*задания на решение неравенств оставляем за рамками занятий кружка, так как на уроках алгебры решается много неравенств*).

**Пример 4.1.** Определите знак выражения

$$a^3 + 7a^2 + 14a + 8,$$

если $-4 < a < -2$.

**Ответ:** положительный.

**Решение.** Разложим данное выражение на множители:

$$a^3 + 7a^2 + 14a + 8 = (a^3 + 8) + (7a^2 + 14a) =$$
$$= (a+2)(a^2 - 2a + 4) + 7a(a+2) = (a+2)(a^2 + 5a + 4) =$$
$$= (a+1)(a+2)(a+4).$$

Рассмотрим функцию $f(a) = (a+1)(a+2)(a+4)$, которая определена и непрерывна на $(-\infty; +\infty)$, как многочлен; $f(a) = 0$ при $a = -4$, или $a = -2$, или $a = -1$.

Таким образом, на промежутке $(-4; -2)$ эта функция непрерывна и не имеет нулей, поэтому она сохраняет на нём знак. Так как $f(-3) > 0$, то такой же знак и на всём промежутке.

Разберём ещё две задачи, в которых очень эффективно применяется уже знакомая нам *теорема о промежуточном значении*.

**Пример 4.2.** Сколько корней имеет уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

если известно, что $c(a + b + c) < 0$?

**Ответ:** два корня.

**Решение.** Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$. Заметим, что $f(0) = c$, а $f(1) = a + b + c$, тогда из условия задачи следует, что $f(0) \cdot f(1) < 0$, то есть при $x = 0$ и при $x = 1$ функция принимает значения разных знаков. Так как квадратичная функция непрерывна, то существует такое $x_0 \in (0; 1)$, что $f(x_0) = 0$. Существование второго корня уравнения следует из симметрии графика квадратичной функции.

**Пример 4.3.** Пусть $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ — некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0; 1]$. Докажите, что на этом отрезке найдётся такое число $x$, что

$$\frac{1}{n}\left(|x-x_1|+|x-x_2|+\ldots+|x-x_n|\right)=\frac{1}{2}.$$

**Решение.** Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{1}{n}\left(|x-x_1|+|x-x_2|+\ldots+|x-x_n|\right)$$

на отрезке [0; 1]. Она непрерывна, так как является суммой непрерывных функций. Рассмотрим два её значения:

$$f(0)=\frac{1}{n}\left(|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|\right)$$

и

$$f(1)=\frac{1}{n}\left(|1-x_1|+|1-x_2|+\ldots+|1-x_n|\right).$$

Так как для любого $x_k \in [0; 1]$ $|x_k|+|1-x_k| = x_k+1-x_k = 1$, то $f(0)+f(1)=1$.

Если $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$, то доказываемое равенство выполняется как при $x = 0$, так и при $x = 1$. Если же одно из этих чисел меньше чем $\frac{1}{2}$, то другое — больше чем $\frac{1}{2}$. Тогда, *по теореме о промежуточном значении*, найдётся значение $x \in [0; 1]$, для которого $f(x) = \frac{1}{2}$, что и требовалось.

Отметим, что аналогичное рассуждение также можно провести на «геометрическом» языке, не вводя функции в явном виде. Для этого достаточно рассмотреть соответствующие точки на координатной прямой и использовать, что при «движении» точки $M(x)$ по отрезку $[0; 1]$ сумма её расстояний до точек с заданными координатами изменяется непрерывно.

В заключение заметим, что для упрощения решений в некоторых задачах удобно применять *обобщение теоремы о промежуточном значении: пусть имеются две непрерывные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$, *для которых существуют такие* $x_1 < x_2$, *что* $f(x_1) > g(x_1)$, *а* $f(x_2) < g(x_2)$, *тогда найдётся такое* $x_0 \in (x_1; x_2)$, *что* $f(x_0) = g(x_0)$.

Это утверждение очевидным образом следует из *теоремы о промежуточном значении*, если ввести вспомогательную функцию $h(x) = f(x) - g(x)$, которая также непрерывна. Графической интерпретацией этого утверждения является пересечение непрерывных линий на плоскости (см. занятие 2).

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 4.1.** Решите неравенство $ax^2 + x - c > 0$, если $ac < -0{,}25$ и $c < 9a + 3$.

**Задача 4.2.** Сколько корней имеет уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, если известно, что $c(a - b + c) < 0$?

**Задача 4.3.** На доске было записано уравнение

$$x^2 + 10x + 20 = 0.$$

К доске поочерёдно подходили школьники, стирали либо второй коэффициент, либо свободный член и заменяли его на число, отличающееся ровно на 1. В результате оказалось записано уравнение $x^2 + 20x + 10 = 0$. Докажите, что в какой-то момент на доске было записано уравнение с целыми корнями.

**Задача 4.4.** Известно, что модули корней каждого из двух квадратных трёхчленов $x^2+ax+b$ и $x^2+cx+d$ меньше десяти. Может ли трёхчлен $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}$ иметь корень, модуль которого не меньше десяти?

**Задача 4.5.** Докажите, что уравнение

$$\Big|\Big|\big||x| - 4\big| - 2\Big| - 1\Big| = \frac{1}{2} + \frac{x^4}{1000000}$$

имеет не менее шестнадцати корней.

**Задача 4.6.** Даны уравнения $ax^2+bx+c = 0$ (1) и $-ax^2 + bx + c = 0$ (2), где $a \neq 0$. Докажите, что если $x_1 \neq 0$ — корень уравнения (1), а $x_2 \neq 0$ — корень уравнения (2), то найдётся такой корень $x_3$ уравнения $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$, который лежит между $x_1$ и $x_2$.

**Задача 4.7*.** Существует ли выпуклый 2011-угольник, все стороны которого равны, а все вершины лежат на параболе $y = x^2$?

## Ответы и решения

**Задача 4.1. Ответ:** $(-\infty; +\infty)$.

Рассмотрим квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + x - c$. Его дискриминант $D = 1 + 4ac < 0$, так как $ac < -0{,}25$ (из этого же условия следует, что $a \neq 0$). Следовательно, $f(x)$ не имеет корней и, в силу непрерывности, сохраняет знак на $(-\infty; +\infty)$.

Так как $f(3) = 9a + 3 - c > 0$, то $f(x)$ принимает только положительные значения.

**Задача 4.2. Ответ:** два корня.

Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$. Заметим, что $f(0) = c$, а $f(-1) = a - b + c$, тогда из условия задачи следует, что $f(0) \cdot f(-1) < 0$, то есть при $x = -1$ и при $x = 0$ функция принимает значения разных знаков. Так как квадратичная функция непрерывна, то существует такое $x_0 \in (-1; 0)$, что $f(x_0) = 0$. Существование второго корня уравнения следует из симметрии графика квадратичной функции.

**Задача 4.3.** Заметим, что уравнение $x^2 + (m+1)x + m = 0$ при любом целом значении переменной $m$ имеет целые корни $-1$ и $-m$. Докажем, что такая ситуация обязательно возникнет.

Действительно, в начальный момент разность второго коэффициента и свободного члена равна $-10$, а в конце эта разность равна $10$. Так как на каждом шаге эта разность изменяется на $1$, то любое целое *промежуточное значение* от $-9$ до $9$ также достигается. В том числе, в какой-то момент рассматриваемая разность равна $1$, что и требовалось.

Отметим, что эта задача — *пример применения в алгебре дискретной непрерывности*, что встречается не так уж часто.

**Задача 4.4. Ответ:** нет, не может.

Заметим, что графики всех трёх трёхчленов являются параболами, у которых «ветви» направлены вверх. Тогда из условия задачи следует, что при $|x| \geqslant 10$ каждый из двух данных трёхчленов принимает положительные значения. Следовательно, для таких значений $x$:

$$x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=\frac{1}{2}((x^2+ax+b)+(x^2+cx+d))>0.$$

Следовательно, график этого трёхчлена либо целиком лежит выше оси $x$, либо имеет с этой осью одну или две общие точки, лежащие между $-10$ и $10$. В первом случае этот трёхчлен не имеет корней, а во втором — модуль любого его корня меньше десяти.

**Задача 4.5.** Рассмотрим функции

$$f(x)=\left|\Big|\big||x|-4\big|-2\Big|-1\right|$$

и

$$g(x)=\frac{1}{2}+\frac{x^4}{1000000}.$$

Обе функции непрерывны на $(-\infty;+\infty)$. Найдём значения $x$, для которых $f(x)=0$ или $f(x)=1$.

$$\left|\Big|\big||x|-4\big|-2\Big|-1\right|=0\Leftrightarrow\Big|\big||x|-4\big|-2\Big|=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\big||x|-4\big|=2\pm1\Leftrightarrow|x|=4\pm(2\pm1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\pm1;\ \pm3;\ \pm5;\ \pm7.$$

Аналогично

$$\left|\Big|\big||x|-4\big|-2\Big|-1\right|=1\Leftrightarrow\Big|\big||x|-4\big|-2\Big|=1\pm1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\big||x|-4\big|=2\pm(1\pm1)\Leftrightarrow|x|=4\pm(2\pm(1\pm1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=0;\ \pm2;\ \pm4;\ \pm6;\ \pm8.$$

Заметим, что на $[-10;10]$ все значения функции $g(x)$ «близки» к $\frac{1}{2}$ и для таких $x$ заведомо выполняется неравенство $0<g(x)<1$. Тогда, *по обобщению теоремы о промежуточном значении*, на каждом из промежутков вида

$(n; n+1)$, где $n = -8;\ \pm 7;\ \pm 6;\ \pm 5;\ \pm 4;\ \pm 3;\ \pm 2;\ \pm 1;\ 0$, найдётся такое значение $x$, что $f(x) = g(x)$. Поскольку указанных промежутков ровно 16, то данное уравнение имеет не менее шестнадцати корней.

Можно также использовать чётность обеих рассмотренных функций и доказывать, что исходное уравнение имеет не менее восьми положительных корней.

**Задача 4.6.** Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c.$$

Заметим, что

$$f(x) = (ax^2 + bx + c) - \frac{a}{2}x^2 = (-ax^2 + bx + c) + \frac{3a}{2}x^2.$$

Тогда из условия задачи следует, что $f(x_1) = -\frac{a}{2}x_1^2$; $f(x_2) = \frac{3a}{2}x_2^2$. Так как $a \neq 0$, то эти значения имеют разные знаки. Следовательно, *по теореме о промежуточном значении*, один из нулей $x_3$ функции $f(x)$ расположен между $x_1$ и $x_2$, что и требовалось.

**Задача 4.7*. Ответ:** да, существует.

Пусть $O$ — вершина параболы. Отложим на правой ветви параболы 1005 равных хорд некоторой длины $t$: $OA_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_{1004}A_{1005}$ и построим ломаную $OB_1B_2\ldots B_{1005}$, симметричную ломаной $OA_1A_2\ldots A_{1005}$ относительно оси параболы (см. рис. 4.1). Рассмотрим зависимость длины $L$ отрезка $A_{1005}B_{1005}$ от $t$. При малых изменениях значения $t$ мало изменяется $L$, поэтому $L(t)$ — непрерывная функция.

При $t = \sqrt{2}$ точки $A_1$ и $B_1$ имеют координаты $(1; 1)$ и $(-1; 1)$ соответственно, поэтому $L > A_1B_1 = 2$. Заметим, что ордината точки $A_{1005}$ меньше, чем длина отрезка $OA_{1005}$, которая, в свою очередь, меньше длины ломаной $OA_1A_2\ldots A_{1005}$. Следовательно, при $t = 4020$ эта ордината меньше чем $1005 \cdot 4020 = 2010^2$, значит, абсцисса точки $A_{1005}$ меньше чем 2010, тогда $L < 2 \cdot 2010 = 4020$.

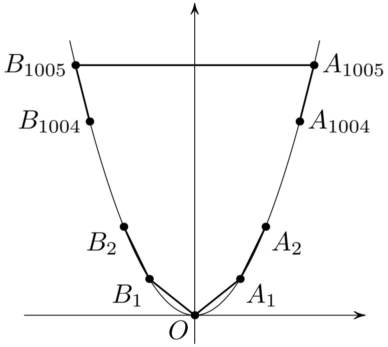



Рис. 4.1.

Таким образом, существует как значение $t$, при котором $L(t) > t$, так и значение $t$, при котором $L(t) < t$. По *обобщению теоремы о промежуточном значении*, найдётся такое $t$, для которого $L(t) = t$. В этом случае многоугольник $OA_1A_2\ldots A_{1005}B_{1005}\ldots B_1$ — равносторонний, что и требовалось.

Очевидно, что утверждение задачи верно для любого равностороннего выпуклого многоугольника с нечётным количеством вершин. Отметим также, что для многоугольников с чётным количеством вершин это не так.

Можно также использовать задачи Д19–Д25, Д29, Д30, Д48–Д50.

# Занятие 5

## Непрерывность в геометрии (планиметрия)

В геометрических задачах непрерывность, как правило, используется для того, чтобы доказать существование какого-либо объекта, не предъявляя его «в явном виде». Для этого, чаще всего, вновь используется *теорема о промежуточном значении*.

Для обоснования непрерывности рассматриваемых зависимостей мы будем использовать определение непрерывности, сформулированное в занятии 4: *функция непрерывна, если при малых изменениях значения аргумента мало изменяется и значение функции*.

**Пример 5.1.** Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 1. Может ли площадь треугольника быть равна 6?

**Ответ:** да, может.

**Решение.** Рассмотрим окружность с центром $O$ радиуса 1, прямую $a$, которая касается окружности в некоторой точке $D$, и прямую $DO$ (см. рис. 5.1). Так как $DO \perp a$, то, выбрав какое-то положение точки $C$ на луче $DO$ (вне окружности) и проведя через эту точку касательные к окружности, пересекающие прямую $a$ в точках $A$ и $B$, мы получим равнобедренный треугольник $ABC$ с основанием $AB$, в который эта окружность вписана.

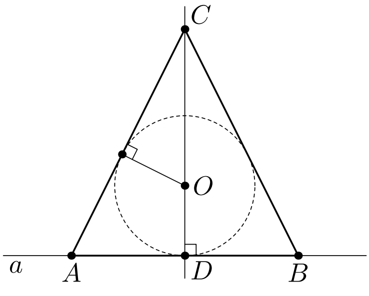


Рис. 5.1

Зафиксируем рассмотренную окружность, прямую $a$ и точку $D$ и будем «двигать» вершину $C$ по лучу $DO$, изменяя расстояние $h$ от $C$ до $AB$ так, чтобы данная окружность оставалась вписанной в равнобедренный треугольник $ABC$. Вершины $A$ и $B$ в этом случае будут смещаться вдоль прямой $AB$ (в противоположных направлениях). При малых изменениях $h$ мало изменяется периметр треугольника, а так как $S_{\triangle ABC} = pr$ (где $p$ — полупериметр $ABC$), то мало изменяется и его площадь. Таким образом, зависимость $S(h)$ является непрерывной функцией.

Выберем значение $h$ так, чтобы треугольник $ABC$ был равносторонним, тогда его сторона $b = 2r \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3}$, а площадь $S = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} < 6$. Так как $AB > 2$, то, выбрав $h = 6$, получим треугольник, у которого $S > 6$. По *теореме о промежуточном значении*, найдётся такое $h$, для которого $S = 6$, что и требовалось.

Таким образом, для решения задачи:

1) зафиксированы некоторые точки заданной конфигурации, выбрана независимая переменная $h$ и показано, каким образом изменяется положение остальных точек в зависимости от $h$;

2) объяснено, почему зависимость $S(h)$ искомой величины от выбранной переменной является непрерывной функцией;

3) показано существование значений переменной, при которых искомая величина принимает значения как меньше, так и больше искомого;

4) использована теорема о промежуточном значении.

Отметим, что другие способы решения, связанные с поиском параметров искомого треугольника в явном виде, так или иначе приводят к кубическому уравнению, которое невозможно решить «школьными» методами.

Здесь же уместно привести ещё одну задачу, связанную с рассмотренной конфигурацией. Для её решения удобно использовать ещё одно свойство непрерывных функций: *функция, непрерывная на отрезке, достигает на нём своего наименьшего и наибольшего значения.*

**Пример 5.2.** У двух равнобедренных треугольников соответственно равны боковые стороны и радиусы вписанных окружностей. Обязательно ли эти треугольники равны?

**Ответ:** нет, не обязательно.

**Решение.** Зафиксируем некоторую окружность радиуса $r$ и будем рассматривать равнобедренные треугольники $ABC$, описанные около этой окружности (см. рис. 5.1). Такие треугольники однозначно определяются длиной $h$ высоты, опущенной на основание $AB$.

Величина $h$ при этом может принимать любые значение из интервала $(2r; +\infty)$. Рассмотрим зависимость длины боковой стороны $b$ от $h$. При малых изменениях $h$ мало изменяется и значение $b$, поэтому $b(h)$ является непрерывной функцией.

Если $h$ стремится к границам выбранного интервала, то в обоих случаях $b$ становится очень большим (стремится к «плюс бесконечности»).

Рассмотрим функцию $b(h)$ на отрезке $[h_1; h_2]$, где $h_1$ чуть больше чем $2r$, а $h_2$ достаточно велико. Тогда значение функции $b(h)$ на концах отрезка будет достаточно большим. На этом отрезке функция достигает своих экстремальных значений, причём наибольшее достигается на одном из концов, а наименьшее — в какой-то внутренней точке $h_0$ (см. рис. 5.2).

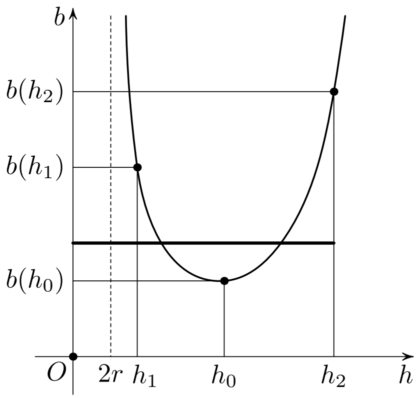



Рис. 5.2

Рассмотрим теперь какое-нибудь фиксированное значение функции, которое немного больше чем $b(h_0)$. Оно достигается по крайней мере, при двух различных значениях $h$.

Следовательно, найдутся хотя бы два неравных равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами и равными радиусами вписанных окружностей.

Рассмотрим теперь «классическую» задачу, в которой сначала покажем стандартное применение непрерывности, а затем обсудим другой подход, позволяющий сделать некоторые обобщения.

**Пример 5.3.** Дан шарнирный четырёхугольник (длины его сторон и их порядок зафиксированы, а углы могут меняться). Докажите, что существует такое положение этого четырёхугольника, при котором он вписан в окружность.

**Решение.** *Первый способ.* Заметим, что четырёхугольник $ABCD$ однозначно определяется длиной любой из его диагоналей. Без ограничения общности можно считать, что $AB + BC \leqslant CD + DA$. Рассмотрим такое положение четырёхугольника, при котором вершина $B$ лежит на диагонали $AC$ (четырёхугольник «вырождается» в треугольник $ACD$, см. рис. 5.3а).

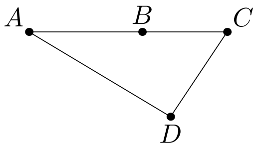


Рис. 5.3а

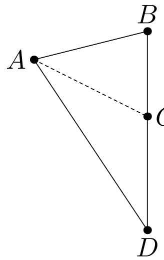


Рис. 5.3б

В этом случае $\varphi = \angle ABC + \angle ADC > 180^\circ$, а длина $AC = x$ — наибольшая. Будем постепенно уменьшать длину $AC$ (сохраняя выпуклость четырёхугольника) до тех пор, пока не получим другое «вырожденное» положение $ABCD$: вершина $A$ или вершина $C$ окажется на диагонали

$BD$ (в зависимости от того, какая из сумм меньше: $AB+AD$ или $CB+CD$). В этом положении $\varphi = \angle ABC + \angle ADC < 180^\circ$ (см. рис. 5.3б).

При малых изменениях длины $AC$ сумма углов $ABC$ и $ADC$ также мало изменяется, поэтому зависимость $\varphi(x)$ является непрерывной функцией. Значит, существует такое положение данного четырёхугольника, при котором $\varphi = 180^\circ$, то есть $ABCD$ — вписанный, что и требовалось.

Отметим, что множество шарнирных многоугольников включает в себя и многоугольники, ограниченные самопересекающейся замкнутой ломаной, но в данном случае мы их не рассматриваем.

*Второй способ.* Без ограничения общности можно считать, что $AB$ — наибольшая сторона данного четырёхугольника. Рассмотрим окружность достаточно большого радиуса (точнее, $R > \frac{P_{ABCD}}{4}$), отметим на ней точку $A$ и последовательно отложим стороны четырёхугольника в виде вписанной ломаной (см. рис. 5.3в). В этом случае ломаная не «замкнётся».

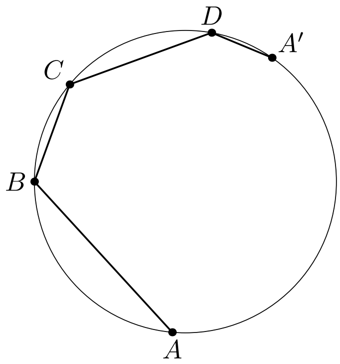



Рис. 5.3в

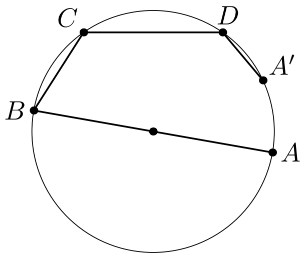



Рис. 5.3г

Далее, будем постепенно уменьшать радиус окружности, сближая точки $A$ и $A'$. Возможны два случая: 1) точки $A$ и $A'$ совпадут, то есть ломаная «замкнётся», тогда полученный четырёхугольник и будет искомым; 2) ломаная займёт положение, при котором отрезок $AB$ станет диаметром окружности, но при этом ещё не «замкнётся» (см.

рис. 5.3г). Тогда начнём постепенно увеличивать радиус окружности, зафиксировав на ней точку $B$, и опять-таки сближая точки $A$ и $A'$ до тех пор, пока ломаная не «замкнётся» (точка $A$ в этом случае «движется» по той же полуокружности, на которой лежат остальные вершины ломаной).

Объяснить, почему это произойдёт, можно, например, так. С увеличением радиуса длина меньшей дуги, стягиваемой хордой $AB$, стремится к длине хорды. Так как $BC + CD + DA' > BA$, то эта дуга когда-нибудь станет короче, чем ломаная $BCDA'$. Тогда она будет заведомо короче, чем сумма дуг $BC + CD + DA'$, а это означает, что точка $A'$ окажется по другую сторону от хорды $AB$. Ввиду *непрерывности*, в какой-то промежуточный момент точки $A$ и $A'$ должны совпасть.

При таком способе решения мы в «неявном виде» рассматриваем зависимость расстояния между точками $A$ и $A'$ по дуге от радиуса окружности и используем тот факт, что при малых изменениях радиуса положение каждой вершины ломаной меняется незначительно.

Второй способ решения позволяет обобщить утверждение задачи на любой шарнирный многоугольник. Можно также доказать, что искомый многоугольник является единственным. Кроме того, среди всех шарнирных многоугольников с фиксированными сторонами (и порядком сторон) вписанный многоугольник имеет наибольшую площадь. Подробнее об этом — см. [21].

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 5.1.** Докажите, что в круге с центром $O$ можно провести хорду $AB$ так, что площадь треугольника $AOB$ равна площади сегмента, отсекаемого этой хордой.

**Задача 5.2.** Можно ли в окружность радиуса 1 вписать треугольник периметра 5?

**Задача 5.3.** а) Докажите, что любой треугольник можно разбить на два треугольника так, чтобы окружности, вписанные в получившиеся треугольники, были равны.

б) Останется ли утверждение верным, если вписанные окружности заменить на описанные?

**Задача 5.4.** Периметр выпуклого четырёхугольника равен 2004, одна из его диагоналей равна 1001. Может ли вторая диагональ быть равна: а) 1001; б) 2?

**Задача 5.5.** Существует ли неравносторонний треугольник, в котором наименьшая медиана равна наибольшей высоте?

**Задача 5.6*.** Через точку $O$ пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ проведена произвольная прямая, пересекающая стороны $AD$ и $BC$ в точках $K$ и $M$ соответственно. Докажите, что длина отрезка $MK$ не превосходит наибольшей из диагоналей четырёхугольника.

## Ответы и решения

**Задача 5.1.** Пусть $\angle AOB = \alpha$, тогда $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha$, а $S_{\text{сектора AOB}} = \frac{1}{2}R^2\alpha$ ($R$ — радиус круга), следовательно, $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\text{сектора AOB}}} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$. Рассмотрим два положения хорды $AB$:

1) $A_1B_1$, для которого $\angle A_1OB_1 = \frac{\pi}{6}$;

2) $A_2B_2$, для которого $\angle A_2OB_2 = \frac{5\pi}{6}$ ($A_1B_1 \parallel A_2B_2$, см. рис. 5.4).

В первом случае: $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\text{сектора AOB}}} = \frac{3}{\pi} > \frac{1}{2}$, то есть площадь треугольника больше площади сегмента. Во втором случае $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\text{сектора AOB}}} = \frac{3}{5\pi} < \frac{1}{2}$, то есть площадь треугольника меньше площади сегмента.

Рассмотрим величину $S(\alpha)$ — зависимость разности площадей сегмента и треугольника от положения хорды $AB$, которое в данном случае задаётся величиной угла $\alpha$. При малых изменениях этого угла величина $S$ также мало изменяется, поэтому указанная зависимость является непрерывной функцией. При этом существуют как отрицательные, так и положительные значения $S$, значит, найдётся такое положение хорды, при котором $S = 0$. Это и означает, что площади треугольника и сегмента равны.

Отметим, что вместо рассмотрения разности площадей можно было применить *обобщение теоремы о промежуточном значении* (см. занятие 4).

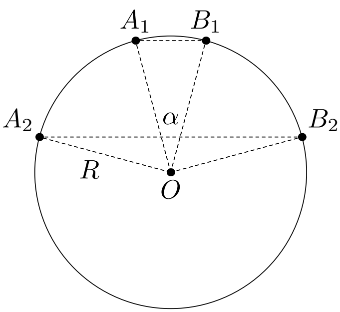



Рис. 5.4

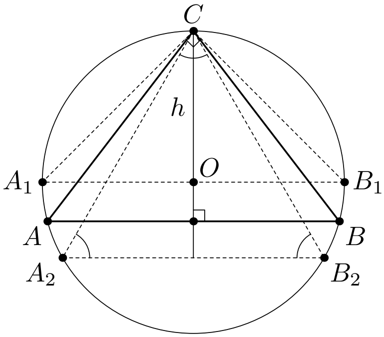



Рис. 5.5

**Задача 5.2. Ответ:** да, можно.

Рассмотрим равнобедренный треугольник $ABC$ с основанием $AB$, вписанный в окружность радиуса 1 (см. рис. 5.5). Зафиксируем вершину $C$ и будем параллельно перемещать основание $AB$, изменяя его расстояние $h$ до точки $C$. При малых изменениях этого расстояния периметр $P$ треугольника изменяется мало, поэтому зависимость $P(h)$ является непрерывной функцией.

Выберем значение $h$ так, чтобы треугольник $ABC$ стал прямоугольным (сторона $AB$ займёт положение $A_1B_1$). Тогда $h = R = 1$, значит, $A_1B_1 = 2$, $A_1C = B_1C = \sqrt{2}$, следовательно, $P = 2(1 + \sqrt{2}) < 5$. Если же $h = 1{,}5R = 1{,}5$, то сторона $AB$ займёт такое положение $A_2B_2$, что треугольник $A_2B_2C$ — равносторонний, тогда $A_2B_2 = R\sqrt{3} = \sqrt{3}$, а $P = 3\sqrt{3} > 5$.

По *теореме о промежуточном значении*, найдётся значение $h$, для которого $P = 5$, что и требовалось.

Отметим, что, при желании, можно вычислить значение $h$ и стороны искомого треугольника, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 2a + 2b = 5, \\ b^2 = h^2 + a^2, \\ (h-1)^2 + a^2 = 1, \end{cases}$$

где $AB = 2a$; $AC = BC = b$.

**Задача 5.3.** а) Пусть дан треугольник $ABC$, у которого радиус вписанной окружности равен $r$. На стороне $AB$ рассмотрим такие точки $D_1$ и $D_2$, что расстояния $AD_1$ и $BD_2$ мало отличаются от нуля (см. рис. 5.6). Тогда радиус окружности, вписанной в треугольник $ACD_1$, также близок к нулю, а радиус окружности, вписанной в треугольник $BCD_1$ немного меньше чем $r$. Аналогично радиус окружности, вписанной в треугольник $BCD_2$, близок к нулю, а радиус окружности, вписанной в треугольник $ACD_2$, немного меньше чем $r$.

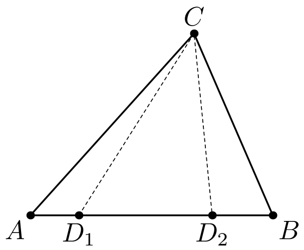


Рис. 5.6

Пусть точка $D$ «движется» из положения $D_1$ в положение $D_2$. Рассмотрим величину $\Delta r$, равную разности радиусов окружностей, вписанных в треугольники $ACD$ и $BCD$. При малых изменениях положения точки $D$ эта величина изменяется мало, поэтому зависимость между положением точки $D$ и значением $\Delta r$ является непрерывной функцией.

Если точка $D$ находится в положении $D_1$, то $\Delta r < 0$, а если она находится в положении $D_2$, то $\Delta r > 0$. Тогда, *в силу непрерывности*, существует положение точки $D$, при котором $\Delta r = 0$. В этом положении окружности, вписанные в треугольники $ACD$ и $BCD$, равны.

И в этом случае можно было при доказательстве использовать теорему о промежуточном значении в обобщённом виде. Кроме того, указанное разбиение можно построить циркулем и линейкой (см., например, А. Блинков, Ю. Блинков. *Геометрические задачи на построение*. — М.: МЦНМО, 2010.)

б) На первый взгляд кажется, что рассуждение пункта а) можно безболезненно повторить, но это не так. Дело в том, что если треугольник $ABC$ задан, то для любой внутренней точки $D$ на стороне $AB$ отношение радиусов $R_1$ и $R_2$ описанных окружностей треугольников $ACD$ и $BCD$ одно и то же!

Действительно, из теоремы синусов следует, что $R_1 = \dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$, а $R_2 = \dfrac{BC}{\sin\angle BDC}$. Учитывая, что углы $ADC$ и $BDC$ — смежные, получим: $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{AC}{BC}$. Поэтому хотя непрерывность по-прежнему имеет место, но «перемены ролей» не произойдёт: независимо от положения точки $D$ разность рассматриваемых радиусов имеет один и тот же знак.

**Задача 5.4. Ответ:** да, может (в обоих пунктах).

а) Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, в котором $AC = BD = 1001$, $O$ — точка пересечения диагоналей (см. рис. 5.7а). Зависимость периметра $P$ прямоугольника от величины $\angle AOB = \varphi$ является непрерывной функцией, так как при малых изменениях величины $\varphi$ мало изменяется значение $P$.

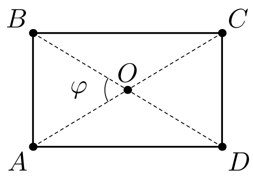


Рис. 5.7а

При значении $\varphi = 0$ («вырожденный» случай) $P = 2002$, а при $\varphi = 90^\circ$ $ABCD$ — квадрат, поэтому $P = 4 \cdot \dfrac{1001}{2}\sqrt{2} = 2002\sqrt{2} > 2004$. По *теореме о промежуточном значении*, найдётся угол $\varphi$, при котором $P = 2004$, что и требуется.

Отметим, что при желании можно вычислить размеры искомого прямоугольника, решив уравнение $x^2 + (1002 - x)^2 = 1001^2$ (где $x$ и $(1002 - x)$ — длины его сторон).

б) Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором диагонали перпендикулярны и диагональ $AC$ длины 1001 делит диагональ $BD$ длины 2 пополам (см. рис. 5.7б).

Пусть диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $K$. Будем «двигать» точку $K$ по лучу $AC$ (то есть параллельно перемещать диагональ $BD$), меняя расстояние $AK = x$. При малых изменениях $x$ периметр $P$ четырёхугольника $ABCD$ также мало изменяется, поэтому зависимость $P(x)$ является непрерывной функцией.

При $x = 0$ точки $K$ и $A$ совпадут, четырёхугольник $ABCD$ «выродится» в треугольник $BCD$, периметр которого равен $2 + 2\sqrt{1001^2 + 1} > 2004$. При $x = \frac{1001}{2}$ точка $K$ будет серединой $AC$, тогда $ABCD$ — ромб, а его периметр равен $4\sqrt{\left(\frac{1001}{2}\right)^2 + 1} = 2\sqrt{1001^2 + 4} <$ $< 2004$. По *теореме о промежуточном значении*, при некотором положении точки $K$ периметр $ABCD$ равен 2004, что и требовалось.

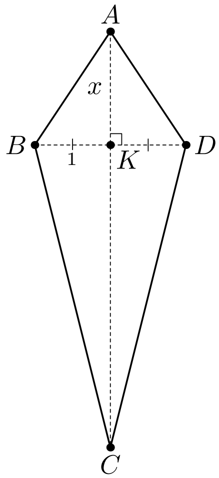



Рис. 5.7б

Использованный при решении четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями, в котором точка пересечения диагоналей делит одну из них пополам, называют *дельтоидом*.

Отметим также, что для решения этой задачи (в отличие от предыдущих) надо было самим придумать конфигурации, в которых соображения непрерывности «заработают».

**Задача 5.5. Ответ:** да, существует.

Рассмотрим, например, треугольник $ABC$, в котором $AC < BC$ и $\angle C \geqslant 90^\circ$ (см. рис. 5.8а). Наименьшая медиана треугольника проведена к наибольшей стороне (*следует из формулы* $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ *для вычисления медианы*), а наибольшая высота — к наименьшей стороне, поэтому проведём медиану $CM$ и высоту $BH$. Зафиксируем положение точек $A$ и $C$ и будем «двигать» вершину $B$ по дуге $BL$ окружности с центром $C$ и радиусом $CB$. При малых изменениях величины угла $ACB$ мало изменяются длины $CM$ и $BH$, поэтому зависимость длины каждой из них от величины этого угла является непрерывной функцией.

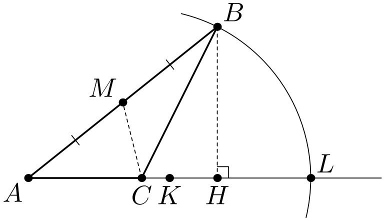



Рис. 5.8а

Если $\angle C = 90^\circ$, то точка $H$ совпадёт с вершиной $C$, $BC$ — больший катет прямоугольного треугольника, поэтому $CM < BH$. Если же угол $C$ близок к развёрнутому, то точка $B$ близка к $L$, точка $M$ близка к середине $K$ отрезка $AL$, длина $BH$ близка к нулю, а длина $CM$ близка к длине $CK$, то есть $CM > BH$. Таким образом, *по обобщению теоремы о промежуточном значении*, найдётся значение угла $C$, при котором $CM = BH$, что и требовалось.

Отметим, что искомый треугольник можно получить и в явном виде. Построим треугольник $ACD$, в котором $AC < CD$ и $\angle C = 150^\circ$ (см. рис. 5.8б). Достроим его до параллелограмма $ACBD$, тогда треугольник $ABC$ — искомый. Действительно, его наибольшая сторона $AB$, а наименьшая — $AC$. Если $CM$ — его медиана, а $BH$ — высота, то $BH = \frac{1}{2}CD = CM$ (так как $\angle DCH = 30^\circ$).

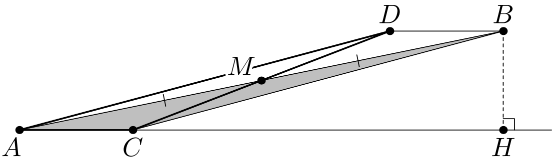



Рис. 5.8б

**Задача 5.6***. Зафиксируем одно из возможных положений отрезка $MK$ и будем «двигать» точку $K$ по стороне $AD$. Тогда положение точки $M$ определяется однозначно (см. рис. 5.9). Рассмотрим зависимость длины отрезка $MK$ от длины $AK = x$, где $x$ принимает все значения от 0 до длины $DA$ (включительно). При малых изменениях значения $x$ мало изменяется и длина $MK$, поэтому эта зависимость является непрерывной функцией. Следовательно, в какой-то точке отрезка $AD$ она принимает своё наибольшее значение.

Докажем, что это происходит на одном из концов отрезка. Действительно, пусть это не так, тогда между точками $A$ и $D$ найдётся такое положение точки $K$, для которого длина $MK$ — наибольшая. Тогда проведём через точку $O$ две прямые $EF$ и $PQ$ под равными малыми углами к прямой $KM$ так, чтобы точки $E$ и $P$ попали на сторону $AD$, а точки $F$ и $Q$ — на сторону $BC$ (а не на их продолжения).

Воспользуемся тем, что биссектриса треугольника меньше медианы, проведённой к той же стороне, а медиана меньше полусуммы сторон, между которыми она проведена. Тогда $OK < \dfrac{OE+OP}{2}$ и $OM < \dfrac{OF+OQ}{2}$. Складывая эти неравенства почленно, получим, что $MK < \dfrac{EF+PQ}{2}$. Значит, один из отрезков $EF$ или $PQ$ длиннее, чем $MK$, что противоречит нашему предположению.

Таким образом, наибольшим значением рассматриваемой функции является длина одной из диагоналей четырёхугольника, откуда и следует утверждение задачи.

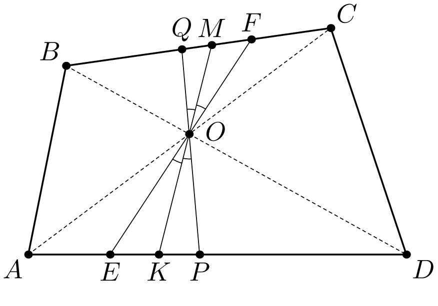



Рис. 5.9

Особо отметим, что при решении этой задачи существенно используется тот факт, что наибольшее значение функции достигается!

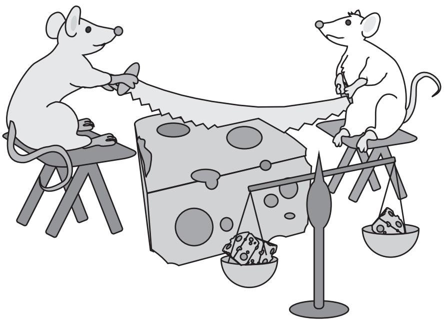
Можно также использовать задачи Д26–Д30, Д49, Д50.

# Занятие 6

## Площади, периметры, массы

Начнём с простой задачи, которая естественным образом продолжает «линию», намеченную в занятиях 1 и 3.

**Пример 6.1.** Есть несколько кусков сыра разной массы. Докажите, что можно разрезать не более одного куска на два меньших так, что после этого можно будет разложить все куски на две порции одинаковой массы.



**Решение.** Условие задачи подразумевает, что у режущего «идеальный глазомер», то есть он может отрезать от куска сыра любую часть меньшей массы. Так как форма куска нас не интересует, то удобно представлять куски сыра в виде отрезков, длины которых численно равны массам соответствующих кусков (от отрезка несложно отрезать кусок требуемой длины!).

Рассмотрим координатный луч. Будем последовательно слева направо откладывать на луче эти отрезки, начиная с точки 0. Пусть суммарная масса всех кусков равна $m$. Тогда, разделив отрезок $[0; m]$ пополам, мы получим две порции равной массы, разрезав не более одного куска.

Возможно также рассуждение с точки зрения дискретной непрерывности. Пусть сначала все куски сыра находятся в первой порции, тогда масса этой порции будет больше, чем масса второй, которая равна нулю. Далее будем перекладывать по одному куску из первой порции во вторую. Если переложить таким образом все куски, то масса второй порции станет больше, чем масса первой.

Следовательно, существовал такой кусок сыра, что до его перекладывания масса первой порции была больше, а после перекладывания — меньше, чем масса второй порции. Тогда от этого куска можно отрезать такую часть, чтобы при её перекладывании массы порций сравнялись (в частности, возможен и случай, когда ничего отрезать не придётся).

На прошлом занятии уже встречались задачи, связанные с площадями или периметрами различных фигур. На этом занятии мы разберём подробнее, каким образом соображения непрерывности помогают при решении задач, связанных с разбиением фигур на части с равными площадями или периметрами, а также рассмотрим аналогичные ситуации, связанные с массами тел. В отличие от уже рассмотренных задач, в этом занятии указанные величины, как правило, не будут задаваться числовыми характеристиками.

Фигуры на плоскости, с которыми мы встретимся в этом занятии, будут *выпуклыми* и *ограниченными*. Напомним, что *выпуклая фигура* — это фигура, которая целиком содержит отрезок, соединяющий любые две её точки, а *ограниченная фигура* — это фигура, которую можно целиком поместить внутри некоторого круга. Напомним также, что *равновеликими фигурами* называются фигуры, у которых равны площади.

**Пример 6.2.** Докажите, что любую выпуклую ограниченную фигуру на плоскости можно одним прямолинейным разрезом разбить на две равновеликие фигуры.

**Решение.** Любую ограниченную фигуру $F$ площади $S$ можно поместить между двумя параллельными прямыми $a$ и $b$. Проведём прямую $c$, параллельную этим прямым, так, чтобы она пересекала $F$ (см. рис. 6.1). Она разобьёт $F$ на две фигуры, площади которых $S_1$ и $S_2$. Рассмотрим зависимость площадей $S_1$ и $S_2$ от расстояния $d$ между прямыми $c$ и $a$. При малых изменениях $d$ значения $S_1(d)$ и $S_2(d)$ также изменяются мало. Действительно, если данную фигуру заключить в прямоугольник, у которого длина стороны, параллельной прямой $a$, равна $p$, то изменение площади фигуры не будет превосходить $p\Delta d$, где $\Delta d$ — величина изменения $d$. Уменьшая значение $\Delta d$, можно сделать изменение площади сколь угодно малым.

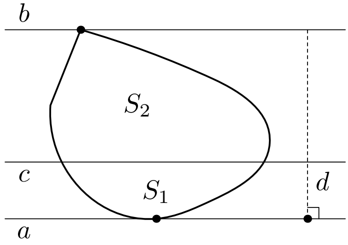



Рис. 6.1

Таким образом, рассматриваемые зависимости являются *непрерывными функциями*. Пусть $S(d) = S_2(d) - S_1(d)$, тогда функция $S(d)$ также *непрерывна*. При этом существует значение $d$, для которого $S(d) = S - 0 = S > 0$, и существует значение $d$, для которого $S(d) = 0 - S = -S < 0$. По *теореме о промежуточном значении* существует значение $d$, для которого $S(d) = 0$, то есть $S_1 = S_2$.

Заключительную часть рассуждения можно провести иначе, используя обобщение теоремы о промежуточном значении (см. занятие 4): так как $S_2(0) > S_1(0)$ и $S_2(d_0) < S_1(d_0)$, где $d_0$ — расстояние между $a$ и $b$, то существует значение $d$, для которого $S_1(d) = S_2(d)$.

Отметим, что ввиду монотонности функции $S(d)$ из приведённого рассуждения следует, что требуемое разбиение фигуры можно осуществить *в любом направлении*, причем *единственным образом*.

Заметим также, что условие ограниченности фигуры требуется для того, чтобы её площадь была определена и её изменение было непрерывным, а условие выпуклости — для того чтобы любым разрезом она разбивалась именно на две фигуры.

**Пример 6.3.** Верно ли, что любой выпуклый многоугольник можно разбить прямой так, чтобы площади и периметры двух получившихся многоугольников были равны?

**Ответ:** да, верно.

**Решение.** Сначала докажем, что для любой точки $X$ на границе многоугольника найдётся такая точка $Y$ (также на границе этого многоугольника), что отрезок $XY$ разделит многоугольник на два многоугольника с равными периметрами. Действительно, отметив на границе многоугольника точку $X$ и пройдя от неё по контуру многоугольника путь, равный половине периметра, получим на контуре искомую точку $Y$. В силу выпуклости, отрезок $XY$ разделит наш многоугольник на два меньших с одинаковыми периметрами.

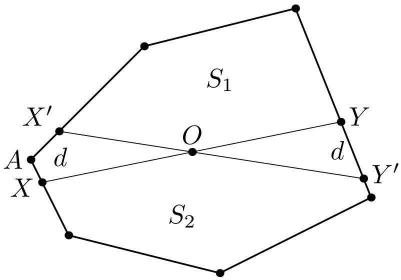



Рис. 6.2

Заметим теперь, что при малом изменении положения точки $X$ положение точки $Y$ также изменяется мало (обе точки сдвигаются по контуру на одно и то же расстояние $d$), то есть положение точки $Y$ *непрерывно* зависит от положения точки $X$.

Рассмотрим теперь некоторое положение точки $X$ и соответствующую ей точку $Y$. Будем перемещать точку $X$ по границе данного многоугольника (например, по часовой стрелке), пока она не займёт положение точки $Y$. Точка $Y$ одновременно будет также двигаться по границе многоугольника и в итоге займёт положение точки $X$. Пусть изначально отрезок $XY$ делил многоугольник на две части неравной площади, например, $S_1 < S_2$ (см. рис. 6.2). В описанном процессе движения точек эти части поменялись «ролями».

Площадь каждой части при описанном перемещении изменялась *непрерывно*. Действительно, пусть при движении по контуру точки $X$ и $Y$ сместились по контуру в точки $X'$ и $Y'$ соответственно на расстояние $d$, близкое к нулю (см. рис. 6.2). Тогда площади $S_1$ и $S_2$ изменились на некоторую величину $\Delta S$ за счёт прибавления и вычитания двух частей с общей вершиной $O$. Эти части могут быть либо треугольниками, либо четырёхугольниками. Если это треугольник (см., например, $YOY'$), то его площадь не превосходит $\frac{1}{2}OY \cdot d$, где $OY$ заведомо меньше диаметра данного многоугольника. Если это четырёхугольник (см., например, $XOX'A$), то его площадь не превосходит $\frac{1}{2}OA \cdot XX'' \leqslant \frac{1}{2}OA \cdot d$, где $OA$ меньше этого диаметра. В любом случае, величина $\Delta S$ близка к нулю.

Таким образом, *в силу непрерывности*, в процессе описанного движения был момент, когда площади частей были равны.

Отметим, что доказанные утверждения останутся верными, если в условии задачи заменить многоугольник на произвольную выпуклую ограниченную фигуру.

Отметим также, что многие из утверждений, рассматриваемых на этом занятии, естественным образом обобщаются для пространства, но их сравнительно строгие доказательства (также основанные на соображениях непрерывности) требуют существенно более «тонких» рассуждений, поэтому о них говорится в заключении (см. раздел Приложения).

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 6.1.** Докажите, что любую выпуклую ограниченную плоскую фигуру можно разбить на две равновеликие фигуры прямой, проходящей через заданную точку.

**Задача 6.2.** На тарелке лежат 9 разных кусков сыра. Всегда ли можно разрезать не более одного из кусков на две части так, чтобы получившиеся 10 кусков сыра можно было разложить на две порции равной массы по 5 кусков в каждой?

**Задача 6.3.** Садовый участок в форме выпуклого многоугольника с каменной оградой расположен вблизи прямого шоссе. Владельцы хотят разделить его на две части прямым деревянным забором, который перпендикулярен шоссе. Всегда ли они тем самым смогут добиться, чтобы:

а) площади участков разделились в отношении 3 : 2;

б) длина каменной ограды разделилась в отношении 3 : 2?

**Задача 6.4.** Докажите, что если выпуклая ограниченная плоская фигура имеет центр симметрии, то в неё можно вписать квадрат.

**Задача 6.5.** Есть несколько кусков сыра разной массы и разной цены за килограмм. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков так, что после этого можно будет разложить все куски на две порции одинаковой массы и одинаковой стоимости.

**Задача 6.6*.** Докажите, что любую выпуклую ограниченную плоскую фигуру можно разрезать двумя взаимно перпендикулярными прямыми на четыре фигуры равной площади.

## Ответы и решения

**Задача 6.1.** Если заданная точка $O$ лежит вне фигуры $F$, то существует угол с вершиной $O$, внутри которого лежит данная фигура. Тогда проводим через точку $O$ прямую, пересекающую $F$, задаём функцию $S(\alpha)$ и проводим рассуждения, аналогичные тем, которые приведены в примере 6.2 (см. рис. 6.3а).

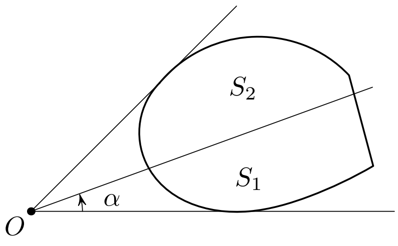



Рис. 6.3а

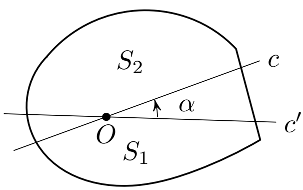



Рис. 6.3б

Отметим, что если точку $O$ «устремить к бесконечности», то мы получим утверждение, доказанное в примере 6.2.

Если точка $O$ принадлежит фигуре $F$, то проводим через $O$ произвольную прямую $c$ (см. рис. 6.3б). Эта прямая разобьёт $F$ на две фигуры, площади которых $S_1$ и $S_2$. Будем поворачивать прямую $c$ вокруг точки $O$ против часовой стрелки. Рассмотрим функцию $S(\alpha) = S_2(\alpha) - S_1(\alpha)$, где $\alpha$ — угол поворота. При малых изменениях $\alpha$ мало изменяются значения $S_1(\alpha)$ и $S_2(\alpha)$, поэтому эти функции непрерывны, значит, *непрерывна* и рассматриваемая функция. Пусть $S_2$ — площадь той из двух фигур, к которой двигается луч с началом $O$ выбранного направления, и $S_2 > S_1$, то есть $S(0) > 0$, тогда $S(\pi) < 0$, так как при повороте на угол $\alpha = \pi$ фигуры поменяются ролями. Следовательно, существует значение $\alpha$, для которого $S(\alpha) = 0$, то есть $S_1 = S_2$.

Отметим, что для доказательства существования искомой прямой можно было отдельно не рассматривать случай, когда точка $O$ лежит вне фигуры $F$. Тем не менее это полезно сделать ещё и потому, что при таком положении точки $O$ искомая прямая — единственная. В случае же, если точка $O$ лежит внутри фигуры $F$, это не так, например, если $F$ — круг, а $O$ – его центр.

**Задача 6.2. Ответ:** да, всегда.

Упорядочим данные куски сыра по возрастанию массы: $m_1 < m_2 < \ldots < m_8 < m_9$. Тогда $S_1 = m_1 + m_3 + m_5 + m_7 < m_2 + m_4 + m_6 + m_8 = S_2$, а $S_1 + m_9 > S_2$ (так как $m_9 > m_8$, $m_7 > m_6$, $m_5 > m_4$, $m_3 > m_2$). Следовательно, можно разрезать самый тяжёлый кусок на две части с массами $k$ и $n$ так, чтобы $S_1 + k = S_2 + n$. Тем самым условие задачи будет выполнено.

Отметим, что возможность разрезать кусок сыра в любом заданном отношении масс следует из соображений непрерывности. Несложно также указать конкретные значения $n$ и $k$: $n = \dfrac{S_1 + m_9 - S_2}{2}$; $k = S_2 - S_1 + n = \dfrac{S_2 + m_9 - S_1}{2}$.

**Задача 6.3. Ответ:** а) да, всегда; б) нет, не всегда.

а) Рассуждение аналогично приведённому в примере 6.2.

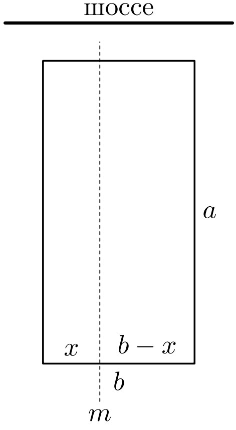


Рис. 6.4

б) Пусть участок имеет форму прямоугольника со сторонами $a$ и $b$, у которого $a = 2b$ и меньшая сторона параллельна шоссе (см. рис. 6.4).

Тогда любая прямая $m$, пересекающая эту сторону и перпендикулярная ей, разбивает периметр прямоугольника на две части. Пусть расстояние от этой прямой до левого края участка равно $x$, тогда отношение периметров получившихся прямоугольников равно $\dfrac{2a+2x}{2a+2(b-x)} < \dfrac{2a+2b}{2a} = 1 + \dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{2}$.

Попробуем разобраться, почему в данном случае не «срабатывают» соображения непрерывности. Отношение периметров рассмотренных прямоугольников (как и отношение их площадей) зависит от $x$ непрерывно. В обоих случаях переменная $x$ может принимать значения из промежутка $(0; b)$ (граничные значения 0 и $b$ по смыслу задачи не допускаются). Однако при $x$, близких к нулю, площадь соответствующего прямоугольника стремится к нулю, а его периметр — нет! (Периметр остается большим чем $2a$.) Поэтому отношение площадей прямоугольников может принимать значения как большие чем $\dfrac{3}{2}$, так и меньшие, а для отношения их периметров это неверно.

Вывод: для того чтобы применить теорему о промежуточном значении, непрерывности недостаточно, требуется ещё, чтобы для независимой переменной был обеспечен подходящий промежуток!

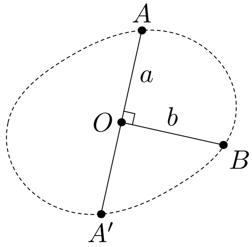


Рис. 6.5

**Задача 6.4.** Пусть $O$ — центр симметрии данной фигуры. Проведём два перпендикулярных луча с началом $O$, которые пересекают границу фигуры в точках $A$ и $B$ (см. рис. 6.5). Пусть, например, $OA = a < OB = b$. Будем поворачивать эти лучи вокруг точки $O$ (например, по часовой стрелке). При малых изменениях угла поворота длины соответствующих отрезков также изменяются мало, поэтому зависимости этих длин от угла являются *непрерывными функциями*. При повороте на $90^\circ$ точка $A$ займёт положение точки $B$, а точка $B$ — положение точки $A'$ (симметричной точке $A$ относительно $O$). Тем самым будет выполняться неравенство $a > b$. По обобщению теоремы о промежуточном значении, существует промежуточное положение лучей, при котором $a = b$. В этом положении точки пересечения лучей с границей фигуры являются двумя соседними вершинами искомого квадрата (другие две вершины симметричны им относительно $O$).

Отметим, что утверждение задачи верно и при отсутствии центральной симметрии (эта теорема доказана выдающимся советским математиком Л. Г. Шнирельманом в тридцатых годах прошлого века, но для обоснования этого факта только соображений непрерывности не хватит).

**Задача 6.5.** *Первый способ.* Разобьём окружность на дуги, пропорциональные массам кусков. Тогда каждому диаметру соответствует разрез не более двух кусков на две части с равными массами. Выберем, например, горизонтальный диаметр. Пусть стоимость сыра в верхней полуокружности равна $S_1$, а в нижней — $S_2$. Если оказалось, что $S_1 = S_2$, то задача решена. Пусть $S_1 > S_2$, тогда начнём поворачивать диаметр вокруг центра окружности, например, против часовой стрелки. При малых углах поворота массы частей изменяются незначительно, поэтому незначительно изменяются и их стоимости. Таким образом, зависимость стоимости каждой части от угла поворота является *непрерывной функцией*.

При повороте на $180^\circ$ части поменяются «ролями», то есть в этом случае $S_1 < S_2$. Следовательно, найдётся такое положение диаметра, для которого $S_1 = S_2$, что и требовалось.

*Второй способ.* Рассмотрим координатный луч. Условимся изображать куски сыра отрезками, длина которых численно равна массе соответствующего куска. Будем последовательно слева направо откладывать на луче эти отрезки, начиная с точки 0. Пусть суммарная масса всех кусков равна $m$, а общая стоимость всего сыра — $S$ (см. рис. 6.6а). Рассмотрим функцию $S(x)$ — стоимость сыра на отрезке $\left[x; x+\frac{m}{2}\right]$, где $x \in \left[0; \frac{m}{2}\right]$. Масса сыра на каждом таком отрезке равна $\frac{m}{2}$ (независимо от значения $x$). При малых изменениях значения $x$ значение $S(x)$ также изменяется мало, то есть эта функция *непрерывна* на рассматриваемом отрезке.

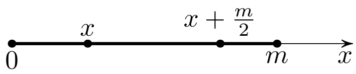



Рис. 6.6а

Пусть $S(0) = S_1$, $S\left(\frac{m}{2}\right) = S_2$. Заметим, что $S_1 + S_2 = S$. Если $S_1 = S_2 = \frac{S}{2}$, то условие задачи выполнено и нам хватило одного разреза. Если это не так, например, $S_1 > \frac{S}{2} > S_2$, то, *по теореме о промежуточном значении*, найдётся такая точка $x_0$, что $S(x_0) = \frac{S}{2}$, и тогда нам потребуется два разреза: в точке $x_0$ и в точке $x_0 + \frac{m}{2}$.

Отметим, что второй способ решения по сути близок к первому. Он использует подход, описанный в примере 6.1, и является обобщением идеи решения задачи 3.4.

*Третий способ.* Рассмотрим систему координат с осями $m$ (*масса*) и $S$ (*стоимость*). Условимся изображать любой кусок сыра в виде вектора $\overrightarrow{(m; S)}$, где $m$ — численное значение его массы, а $S$ — численное значение стоимости. Последовательно отложим эти векторы от начала координат, упорядочив их по убыванию угла наклона к оси $m$ (по сути — по убыванию цены): $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, ..., $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ ($n$ — количество кусков), тогда $\overrightarrow{OA_n}$ является суммой отложенных векторов (см. рис. 6.6б).

Заметим, что фигура, ограниченная вектором $\overrightarrow{OA_n}$ и ломаной $OA_1A_2\ldots A_n$, является выпуклой. Следовательно, любая прямая, параллельная $OA_n$, пересекает не более двух звеньев ломаной. Постепенно двигая прямую $OA_n$ в направлении, ей перпендикулярном, мы от случая, когда сумма векторов, оказавшихся выше этой прямой, больше, чем сумма векторов, оказавшихся ниже, неизбежно придём к случаю, когда знак этого неравенства изменится на противоположный.

Поэтому, в силу *непрерывности*, существует прямая, параллельная $OA_n$, которая разбивает ломаную $A_1A_2\ldots A_n$ на две части с равной суммой векторов.

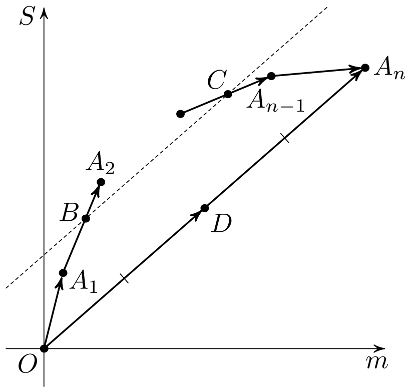



Рис. 6.6б

Это рассуждение аналогично разобранному в примере 6.2.

Полученное разбиение — искомое. Действительно, пусть прямая пересекла векторы $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ и $\overrightarrow{A_mA_{m+1}}$ в точках $B$ и $C$ соответственно. Тогда $\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{A_kB}+\overrightarrow{CA_{m+1}}+$ $+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OD}$, где $D$ — середина отрезка $OA_n$. Следовательно, проекции вектора $\overrightarrow{OD}$ на оси координат составляют половину от соответствующих проекций вектора $\overrightarrow{OA_n}$ на эти оси, что и требовалось.

Отдельно отметим, что в случае, когда масса какого-то из кусков больше суммы масс всех остальных кусков, может потребоваться разрезание только одного этого куска, но на три части.

Нам представляется полезным разобрать со школьниками несколько способов решения задачи, так как это даёт возможность показать различные способы построения «математической модели».

**Задача 6.6***. Выберем два взаимно перпендикулярных направления, введя на плоскости систему координат. Существуют две прямые, параллельные осям координат, каждая из которых делит данную фигуру на две равновеликие части (*см. пример* 6.2).

Таким образом, мы получим разбиение фигуры на четыре части, площади которых равны $S_1$, $S_2$, $S_3$ и $S_4$ (см. рис. 6.7а). Так как $S_1+S_2 = S_3+S_4$ и $S_1+S_4 = S_2+S_3$, то $S_1 = S_3 = P$ и $S_2 = S_4 = Q$.

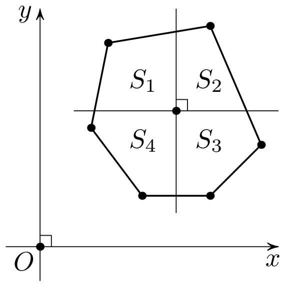


Рис. 6.7а

Будем постепенно поворачивать выбранную систему координат до тех пор, пока она не повернётся на $90^\circ$. В этом случае произойдёт «перемена ролей», то есть $S_1 = S_3 = Q$ и $S_2 = S_4 = P$. При вращении системы координат зависимости величин $P$ и $Q$ от угла поворота являются *непрерывными функциями*, поэтому найдётся такой угол, при котором $P = Q$. Соответствующее разбиение будет искомым, так как в этом случае $S_1 = S_3 = S_2 = S_4$.

Разберём подробнее, почему $P$ и $Q$ непрерывно зависят от угла поворота. В отличие от уже разобранного, пара прямых не вращается вокруг одной точки, почему же точка их пересечения не может «прыгать»?

Оценим, как могут измениться значения $P$ и $Q$ при повороте осей на малый угол $\alpha$. Обозначим диаметр круга, которым можно покрыть заданную фигуру, через $d$. Пусть в исходном положении делящим площадь пополам был отрезок $AB$, а после поворота на угол $\alpha$ — отрезок $A'B'$ (см. рис. 6.7б). Угол между этими отрезками также равен $\alpha$. Проведём через точки $A$ и $B$ прямые параллельно $A'B'$ и выделим прямоугольник $KLMN$, ограниченный этими прямыми и перпендикулярными им касательными к окружности. Площади частей фигуры, расположенных как справа от прямой $ML$, так и слева от прямой $KN$, составляют меньше её половины, поэтому отрезок $A'B'$ лежит внутри прямоугольника. Площадь пересечения $KLMN$ и круга не превосходит площади $KLMN$, то есть не больше, чем $d^2 \operatorname{tg} \alpha$, поэтому при уменьшении $\alpha$ она может стать сколь угодно малой.

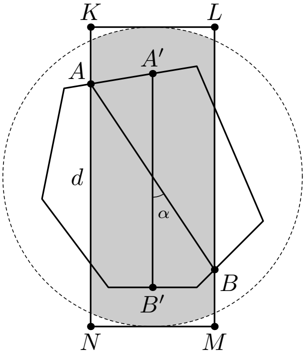



Рис. 6.7б

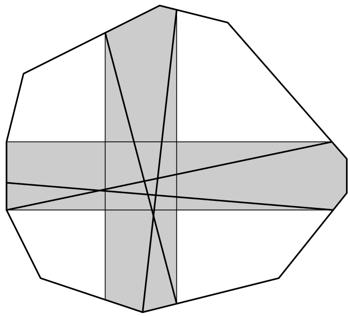


Рис. 6.7в

Рассмотрим два положения для пары перпендикулярных отрезков: до и после поворота осей (см. рис. 6.7в). Рассмотренные ранее части фигуры с площадями $S_1$, $S_2$, $S_3$ и $S_4$ изменяются на части, покрытые выделенным «крестом». Но площадь «креста» не превосходит $2d^2 \operatorname{tg} \alpha$, то есть мала при малых значениях $\alpha$. Поэтому как значения $P$, так и значения $Q$ для обоих положений пар отрезков отличаются мало, то есть непрерывно зависят от угла поворота.

Можно также использовать задачи Д31–Д33.

# Занятие 7

## Непрерывность в геометрии (стереометрия)

В стереометрических задачах, так же как и в планиметрии, непрерывность часто используется для доказательства существования объекта (без явного его предъявления). И в этом случае основную роль играет *теорема о промежуточном значении* и её обобщение. При этом происходит «расширение возможностей» за счёт того, что «крайними» случаями могут служить планиметрические конфигурации.

**Пример 7.1.** Существует ли тетраэдр $ABCD$, в котором $AB = CD = 8$, $AC = BD = 10$, $BC = 12$, $AD = 13$?

**Ответ:** да, существует.

**Решение.** Рассмотрим в пространстве два равных треугольника: $ABC$ и $DCB$, длины сторон которых соответствуют условию задачи (см. рис. 7.1а). Плоскости $ABC$ и $DBC$ образуют двугранный угол с ребром $BC$. При малых изменениях величины $\varphi$ этого угла расстояние $AD = x$ также мало изменяется, поэтому зависимость $x(\varphi)$ *является непрерывной функцией*.

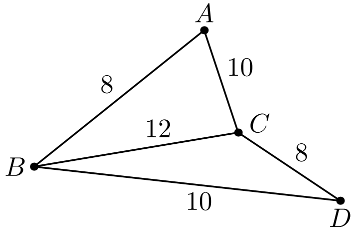



Рис. 7.1а

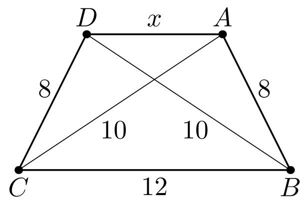



Рис. 7.1б

Пусть $\varphi = 0$, то есть рассматриваемые треугольники лежат в одной плоскости и симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку $BC$, тогда $ABCD$ —

равнобокая трапеция (см. рис. 7.1б). Следовательно, $x = AD < BC < 13$.

Пусть $\varphi = 180^\circ$, тогда рассматриваемые треугольники опять-таки лежат в одной плоскости и образуют параллелограмм $ABDC$ (см. рис. 7.1в). В этом случае, используя теорему о сторонах и диагоналях параллелограмма, получим: $x^2 + 12^2 = 2(8^2 + 10^2)$, откуда $x = \sqrt{184} > 13$. По *теореме о промежуточном значении*, существует значение $\varphi$, при котором $AD = 13$, причём точки $A$, $B$, $C$ и $D$ являются вершинами тетраэдра.

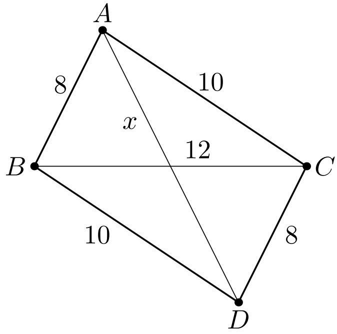


Рис. 7.1в

В стереометрических задачах чаще, чем в планиметрических, используется также *теорема о множестве значений*: *функция, непрерывная на отрезке, принимает на нём все промежуточные значения от наименьшего до наибольшего.*

Это утверждение следует из теоремы о промежуточном значении и из того, что такие функции принимают на отрезке свои экстремальные значения (см. занятие 5).

**Пример 7.2.** В пространстве дан произвольный угол $A$. Докажите, что найдётся такая плоскость $\alpha$, что проекцией угла $A$ на $\alpha$ является угол величины $\varphi$, где $\varphi$ принимает любое заранее заданное значение от 0 до $180^\circ$.

**Решение.** Пусть величина данного угла равна $\gamma$. Выберем сначала плоскость $\alpha$ таким образом, чтобы она была параллельна плоскости данного угла (см. рис. 7.2а).

Тогда ортогональной проекцией угла $A$ на $\alpha$ является угол $A'$, равный углу $A$, то есть угол величины $\gamma$. Проведём биссектрису угла $A$ и будем поворачивать данный угол вокруг прямой $m$, содержащей биссектрису. Рассмотрим зависимость величины $\varphi$ ортогональной проекции от угла поворота. При малых углах поворота величина ортогональной проекции изменяется мало, поэтому эта зависимость является *непрерывной функцией*.

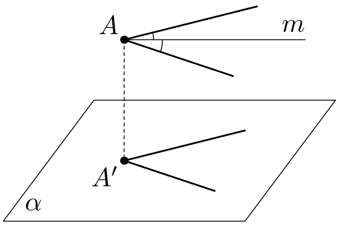



Рис. 7.2а

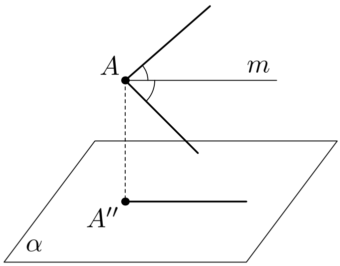



Рис. 7.2б

При повороте на $90^\circ$ получим угол, плоскость которого перпендикулярна $\alpha$ (см. рис. 7.2б). Его проекцией на плоскость $\alpha$ является угол $A''$ величиной $0^\circ$. *По теореме о множестве значений*, $\varphi$ принимает любое значение от 0 до $\gamma$.

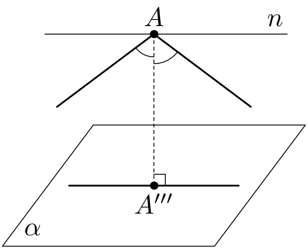



Рис. 7.2в

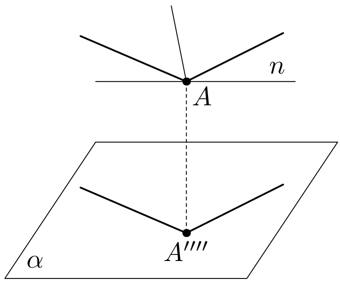



Рис. 7.2г

Выберем теперь плоскость $\alpha$ таким образом, чтобы биссектриса угла $A$ пересекала $\alpha$ и была ей перпендикулярна (см. рис. 7.2в). Тогда ортогональной проекцией угла $A$ на $\alpha$ является угол $A'''$, равный $180^\circ$. В плоскости данного угла через вершину $A$ проведём прямую $n$, перпендикулярную биссектрисе, и будем поворачивать данный угол вокруг прямой $n$. И в этом случае при малых углах поворота величина $\varphi$ ортогональной проекции изменяется мало, поэтому зависимость $\varphi$ от угла поворота является непрерывной функцией.

При повороте на $90^\circ$ получим угол $A$, плоскость которого параллельна $\alpha$, значит, его проекцией является острый угол $A''''$, равный данному, то есть угол величины $\gamma$ (см. рис. 7.2г). По *теореме о множестве значений*, $\varphi$ принимает любое значение от $\gamma$ до $180^\circ$.

Таким образом, $\varphi$ может принимать любое значение от 0 до $180^\circ$.

Поясним подробнее, почему при малых поворотах исходного угла величина его ортогональной проекции меняется мало. Отложим на сторонах угла $A$ точки $B$ и $C$ так, чтобы $AB = AC$, и будем следить за проекцией $A'B'C'$ треугольника $ABC$.

При повороте вокруг биссектрисы $m$ высота $AH$ треугольника $ABC$ будет проектироваться в равную ей высоту $A'H'$, а проекция $B'C'$ будет непрерывно изменяться от длины $BC$ до нуля. Поэтому и угол $B'A'C'$ будет меняться непрерывно от $\gamma$ до нуля. При повороте вокруг прямой $n$, наоборот, $B'C'$ будет оставаться равной $BC$, а проекция $A'H'$ высоты будет непрерывно изменяться от нуля до $AH$, поэтому угол $B'A'C'$ будет меняться непрерывно от $180^\circ$ до $\gamma$.

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 7.1.** Существует ли правильная треугольная пирамида, у которой двугранный угол при боковом ребре равен $75^\circ$?

**Задача 7.2.** Две полуокружности имеют общий диаметр $AB$ длины 2 и лежат в перпендикулярных плоскостях. Из точки $A$ по одной из них и из точки $B$ по другой одновременно и с одинаковыми скоростями начинают двигаться точки $X$ и $Y$. Найдите множество значений, которые может принимать расстояние $XY$.

**Задача 7.3.** Дан правильный тетраэдр с ребром 1. Докажите, что у него существует четырёхугольное сечение периметра 2,2.

**Задача 7.4.** Существует ли правильная треугольная пирамида, у которой высота равна расстоянию между серединами двух скрещивающихся рёбер?

**Задача 7.5.** Существует ли тетраэдр, у которого каждая грань является тупоугольным треугольником?

**Задача 7.6.** Основанием пирамиды служит выпуклый четырёхугольник. Обязательно ли существует сечение этой пирамиды, не пересекающее основания и являющееся вписанным четырёхугольником?

## Ответы и решения

**Задача 7.1. Ответ:** да, существует.

Рассмотрим правильную пирамиду $PABC$. Проведём высоту $AM$ треугольника $APC$, тогда $BM$ — высота равного ему треугольника $BPC$, то есть угол $AMB$ — линейный угол двугранного угла при ребре $PC$ (см. рис. 7.3). Пусть $PQ$ — высота пирамиды. Рассмотрим зависимость величины $\varphi$ угла $AMB$ от длины $PQ$. При малых изменениях длины высоты значение $\varphi$ также мало изменяется, поэтому эта зависимость является *непрерывной функцией*.

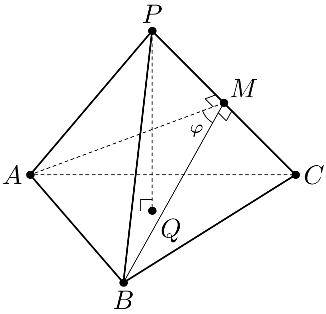



Рис. 7.3

Очевидно, что существует правильная треугольная пирамида, в которой $\varphi = 90^\circ$. Действительно, такую пирамиду можно получить, отложив на рёбрах трёхгранного угла $P$, все плоские углы которого прямые, равные отрезки $PA = PB = PC$.

При желании несложно вычислить высоту такой пирамиды. Если длина бокового ребра равна $a$, то $PQ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Вместе с тем, если длина $PQ$ существенно больше длины ребра основания, то величина $\varphi$ мало отличается от $60^\circ$ (в этом случае точка $M$ близка к точке $C$, поэтому длины равных отрезков $AM$ и $BM$ мало отличаются от $AB$ и треугольник $AMB$ близок к равностороннему). По *теореме о промежуточном значении*, существует значение длины $PQ$, для которого $\varphi = 75^\circ$, что и требовалось.

**Задача 7.2. Ответ:** $[\sqrt{2}; 2]$.

Рассмотрим зависимость величины $S = XY$ от времени $t$. При малых изменениях $t$ величина $S$ также мало изменяется, поэтому *функция* $S(t)$ — *непрерывная*.

Найдём наибольшее и наименьшее значения, которые может принимать $S$. Рассмотрим сферу с диаметром $AB$, тогда точки $X$ и $Y$ двигаются по её поверхности, поэтому расстояние между ними не может превышать диаметра сферы (см. рис. 7.4). Значение $S = 2$ достигается, например, в начальный момент, то есть при $t = 0$. Кроме того, точки $X$ и $Y$ одновременно оказываются в серединах дуг данных полуокружностей. Пусть $O$ — центр сферы, тогда в этот момент $\angle XOY = 90^\circ$, значит, $S = \sqrt{2}$.

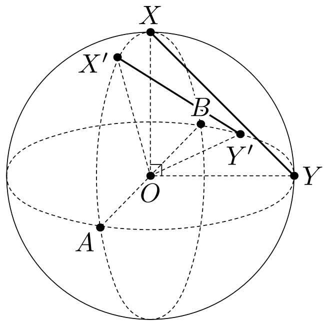


Рис. 7.4

Докажем, что значение $S = \sqrt{2}$ является наименьшим. Действительно, рассмотрим произвольное положение $X'$ и $Y'$ данных точек. Из двух углов $X'OA$ и $Y'OA$ один острый, а другой — тупой, поэтому, используя формулу «трёх косинусов», получим: $\cos\angle X'OY' = \cos\angle X'OA \times \times \cos\angle Y'OA < 0$, следовательно, $\angle X'OY' > 90^\circ$. Из двух хорд равных окружностей под меньшим углом видна хорда меньшей длины, значит, $XY < X'Y'$.

По *теореме о множестве значений*, расстояние $XY$ принимает все значения от $\sqrt{2}$ до 2 включительно.

**Задача 7.3.** Пусть $DABC$ — данный тетраэдр. Отметим точки $M$ и $N$ — середины рёбер $AB$ и $BC$, а также точки $K$ и $L$ на рёбрах $AD$ и $DC$ так, что $KL \parallel AC$ (см. рис. 7.5). Так как $MN \parallel AC$, то $MN \parallel KL$, значит, точки $K$, $L$, $M$ и $N$ лежат в одной плоскости. Таким образом, четырёхугольник $MNLK$ — сечение пирамиды, являющееся трапецией или параллелограммом.

Зафиксируем точки $M$ и $N$ и будем менять положение отрезка $KL$. Рассмотрим зависимость периметра сечения от расстояния $x$ от вершины $D$ до $KL$. При малых изменениях $x$ мало изменяются длины сторон $KL$, $LN$ и $KM$ сечения, а значит, и его периметр, поэтому рассматриваемая зависимость является *непрерывной функцией*.

При этом, если $KL$ — средняя линия треугольника $ADC$ $\left(x = \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, то $MNLK$ — квадрат со стороной 0,5 и его периметр равен 2, а если выбрать значение $x$, близкое к нулю, то периметр трапеции $MNLK$ мало отличается от периметра треугольника $MDN$, который равен $MN+DM+DN = \frac{1}{2}+\sqrt{3} > 2{,}2$. По *теореме о промежуточном значении*, найдётся значение $x$, при котором периметр сечения равен 2,2, что и требовалось.

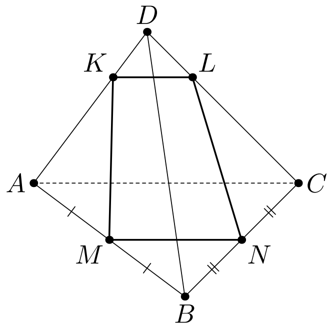



Рис. 7.5

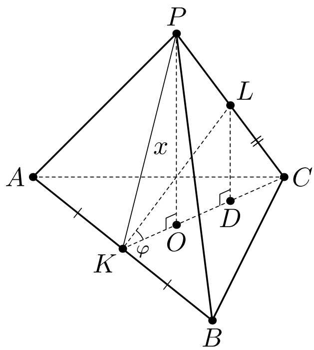



Рис. 7.6

**Задача 7.4. Ответ:** да, существует.

Пусть $PABC$ — правильная треугольная пирамида, $PO$ — её высота, $K$ и $L$ — середины рёбер $AB$ и $PC$ соответственно (см. рис. 7.6). Так как треугольник $ABC$ — правильный, то точка $O$ — центр его описанной окружности — лежит на отрезке $KC$. Плоскость $PKC$ перпендикулярна плоскости $ABC$, поэтому перпендикуляр $LD$ к $ABC$ лежит в $PKC$. Кроме того, $LD = \frac{1}{2}PO$, значит, выполнение условия задачи равносильно тому, что $\angle LKC = \varphi = 30^\circ$.

Покажем, что это возможно. Действительно, зафиксируем основание пирамиды, а точку $P$ будем смещать по прямой $PO$. Зависимость $\varphi(x)$, *где* $x = PO$, *является непрерывной функцией*, так как при малых изменениях $x$ мало изменяется положение точки $L$, значит, мало изменяется и величина угла $\varphi$. При этом, если $x$ близко к нулю, то значение $\varphi$ также близко к нулю, а если, например, $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром $a$, то $KL = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $PO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, тогда $\sin\varphi = \frac{LD}{KL} = \frac{PO}{2KL} = \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{2}$, то есть $\varphi > 30^\circ$.

По *теореме о промежуточном значении*, найдётся значение $x$, для которого $\varphi = 30^\circ$, то есть указанная пирамида существует.

**Задача 7.5. Ответ:** да, существует.

Рассмотрим трёхгранный угол, у которого тупые плоские углы при вершине $A$ равны, например, по $110^\circ$ (см. рис. 7.7). Существование такого угла практически очевидно, но его можно доказать и строго (*подсказка — задача* Д34).

Выберем точки $B$, $C$ и $D$ на сторонах этого угла так, что $AB = AC$. При движении точки $D$ по третьей стороне трёхгранного угла величина любого плоского угла в грани $BDC$ получившегося тетраэдра $ABCD$ будет изменяться непрерывно. Если точка $D$ достаточно близка к вершине $A$, то длины сторон треугольника $BDC$ мало отличаются от длин сторон треугольника $ABC$, поэтому величина угла $BDC$ близка к величине угла $BAC$. Следовательно, угол $BDC$ — тупой.

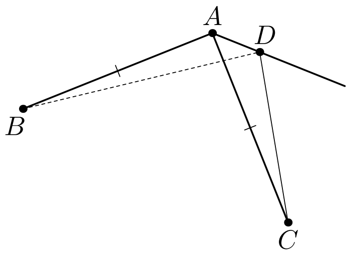


Рис. 7.7

Таким образом, каждый из треугольников $ABC$, $ABD$, $ACD$ и $BCD$ будет тупоугольным.

Отметим, что при решении этой задачи (в отличие от предыдущих) надо самим придумать конфигурацию, для которой соображения непрерывности «заработают».

**Задача 7.6. Ответ:** да, обязательно.

Пусть $PABCD$ — данная пирамида, где $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Заметим, что если $ABCD$ — вписанный, то любое сечение пирамиды, параллельное основанию, является искомым. Если это не так, то без ограничения общности можно считать, что $\angle BAD+\angle BCD > 180^\circ$. Выберем точки $B'$ и $D'$ на рёбрах $PB$ и $PD$ соответственно, так, что $B'D' \parallel BD$, а точку $A'$ — на ребре $PA$ так, чтобы её расстояние $d$ до плоскости основания было меньше, чем расстояние от $B'D'$ до этой плоскости (см. рис. 7.8). Проведём сечение пирамиды плоскостью $A'B'D'$, которое пересечёт ребро $PC$ в точке $C'$.

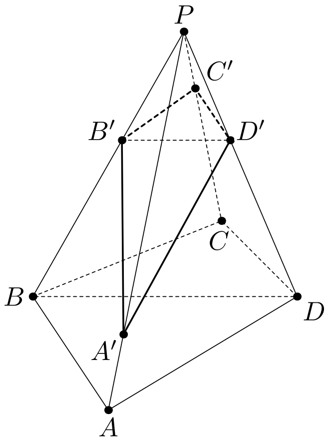


Рис. 7.8

Если выбирать точку $A'$ близко к вершине $A$, а точки $B'$ и $D'$ — близко к вершине $P$ (сохраняя параллельность $B'D'$ и $BD$), то и точка $C'$ будет близка к точке $P$. Тогда величина угла $A'B'C'$ будет мало отличаться от величины тупого угла $AB'P$, а величина угла $A'D'C'$ — от величины тупого угла $AD'P$. Значит, сумма углов $A'B'C'$ и $A'D'C'$ будет больше, чем $180^\circ$, поэтому сумма $S$ углов $B'A'D'$ и $B'C'D'$ будет меньше чем $180^\circ$.

Рассмотрим зависимость $S$ от $d$. При малых изменениях $d$ мало изменяется положение точки $C'$ на ребре $PC$, поэтому значение $S$ также мало изменяется, то есть $S(d)$ — *непрерывная функция*. Так как существует как значение $d$, при котором $S < 180^\circ$, так и $d$, при котором $S > 180^\circ$ ($A'B'D' \parallel ABD$), то по *теореме о промежуточном значении*, найдётся четырёхугольное сечение пирамиды, у которого сумма противолежащих углов равна $180^\circ$, что и требовалось.

Можно использовать также задачи Д34–Д39.

# Занятие 8

## Малые шевеления

Вначале рассмотрим задачу, которая уже встречалась на предыдущем занятии (см. задачу 7.5). На сей раз метод её решения будет совсем другим.

**Пример 8.1.** Существует ли тетраэдр, у которого каждая грань является тупоугольным треугольником?

**Ответ:** да, существует.

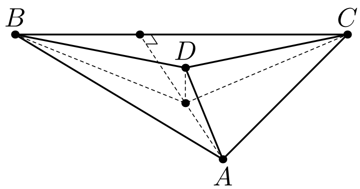



Рис. 8.1

**Решение.** Построим сначала «вырожденный» тетраэдр $ABCD$, у которого точка $D$ лежит в плоскости треугольника $ABC$, но остальные требуемые в задаче условия выполняются. Для этого рассмотрим произвольный треугольник $ABC$ с тупым углом $A$ (см. рис. 8.1). Из вершины $A$ проведём высоту этого треугольника и выберем на ней произвольную точку $D$. Заметим, что $\angle BDC > \angle BAC > 90°$. Углы $ADB$ и $ADC$ также тупые, значит, все четыре «грани вырожденного тетраэдра» $ABCD$ — тупоугольные треугольники.

Теперь чуть-чуть «поднимем» точку $D$ над плоскостью $ABC$. Получим настоящий (не «вырожденный») тетраэдр, при этом каждый из трёх углов с вершиной $D$ изменится мало, поэтому эти углы останутся тупыми.

Приём, продемонстрированный в этом решении называют «*методом малых шевелений*»: сначала строится некоторая конфигурация с требуемыми свойствами, а затем она «улучшается» в результате небольшого «шевеления».

Покажем связь метода малых шевелений с непрерывностью. Пусть мы хотим применить *метод малых шевелений* к некоторой конфигурации. Эта конфигурация характеризуется набором взаимосвязанных числовых параметров (длины отрезков и величины углов, коэффициенты и корни многочленов и тому подобное), при этом одни параметры *непрерывно* зависят от других. Поэтому при малых изменениях одних параметров другие также изменяются мало, что позволяет сохранить интересующие нас свойства конфигурации (вид угла, знаки коэффициентов многочлена и тому подобное).

**Пример 8.2.** На плоскости отмечено несколько точек. Докажите, что можно провести прямую так, чтобы расстояния от всех точек до неё были различными.

**Решение.** Рассмотрим две отмеченные точки $A$ и $B$. Пусть некоторая прямая $m$ (отличная от $AB$) такова, что расстояния до неё от точек $A$ и $B$ равны. Если при этом точки $A$ и $B$ лежат в одной полуплоскости относительно $m$, то прямая $m$ параллельна прямой $AB$ (см. рис. 8.2а). Если же точки $A$ и $B$ лежат в разных полуплоскостях относительно $m$, то прямая $m$ проходит через середину отрезка $AB$ (см. рис. 8.2б).

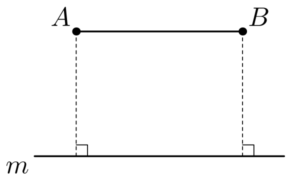



Рис. 8.2а

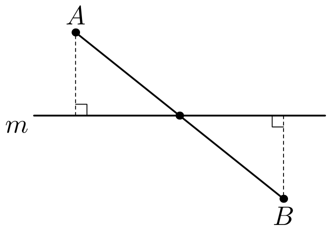



Рис. 8.2б

Итак, если расстояния от двух точек до прямой равны, то эта прямая либо параллельна прямой, соединяющей данные точки, либо проходит через середину отрезка, соединяющего эти точки.

Рассмотрим теперь все прямые, проходящие через всевозможные пары отмеченных точек. Эти прямые образуют конечное множество $L$. Рассмотрим также середины всевозможных отрезков, соединяющих пары отмеченных точек. Эти точки образуют конечное множество $P$. Выберем прямую, не параллельную никакой прямой из множества $L$ и не проходящую ни через одну из точек множества $P$ (это возможно, так как множества $L$ и $P$ конечны). Эта прямая и будет искомой.

Понятно, что искомая прямая — далеко не единственная.

В этом решении демонстрируется другая идея, по духу близкая к методу малых шевелений: для доказательства существования объекта с указанными свойствами мы исследуем объекты, которые *этим свойством не обладают*, и обнаруживаем, что их в некотором смысле мало.

Вторую фазу решения данной задачи можно было изложить по-другому. Рассмотрим какую-нибудь прямую на плоскости, содержащую не более одной отмеченной точки. Если она не является искомой, то эту прямую можно немного пошевелить так, чтобы она была не параллельна ни одной из указанных прямых и не проходила ни через одну из середин указанных отрезков (например, постепенно поворачивая). Но такое рассуждение, оставаясь верным по сути, будет существенно менее строгим и «прозрачным».

**Пример 8.3.** Дан выпуклый многоугольник и точка $O$ внутри него. Известно, что любая прямая, проходящая через точку $O$, делит данный многоугольник на две равновеликие части. Докажите, что точка $O$ является центром симметрии многоугольника.

**Решение.** Пусть $l$ — произвольная прямая, проходящая через точку $O$; $A$ и $B$ — точки её пересечения с границей многоугольника (см. рис. 8.3). Требуется доказать, что $OA = OB$.

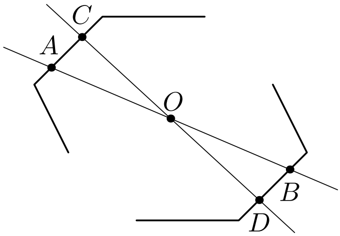


Рис. 8.3

Пусть это не так, то есть отрезки $OA$ и $OB$ не равны; например, $OA > OB$. Рассмотрим прямую $l'$, проходящую через точку $O$ и пересекающую границу многоугольника в точках $C$ и $D$, *расположенных настолько близко от то-*

*чек $A$ и $B$ соответственно, что выполняется неравенство $OC > OD$*. Кроме того, прямая $l'$ такова, что на участках границы от $A$ до $C$ и от $B$ до $D$ не должно быть вершин многоугольника (в силу выпуклости многоугольника такую прямую всегда можно выбрать).

Прямая $l$ разбивает многоугольник на две части с площадями $S_1$ и $S_2$, а прямая $l'$ — на части с площадями $S'_1$ и $S'_2$, причём, по условию, $S_1 = S_2$ и $S'_1 = S'_2$. Вычитая одно равенство из другого, получим, что $S_{BOD} = S_{AOC}$. Но в этих треугольниках углы при вершине $O$ равны, а стороны первого треугольника, образующие угол $O$, соответственно меньше, чем стороны второго. Используя формулу площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, получим противоречие. Оно показывает, что для любой прямой $l$, проходящей через точку $O$, имеет место равенство $OA = OB$. Это и означает, что точка $O$ — центр симметрии многоугольника.

Ключевая идея решения выделена в тексте: благодаря непрерывности можно «рядом» с имеющимся объектом выбрать другой объект с тем же свойством.

Описанные идеи, связанные с «*методом малого шевеления*», встречаются не только в геометрических конфигурациях, но и, например, в алгебраических. Это вы увидите в задачах, предлагаемых ниже.

## Задачи для самостоятельного решения

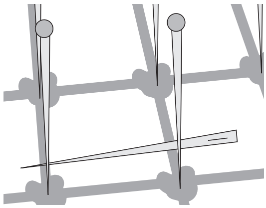
**Задача 8.1.** В некоторой стране 1985 аэродромов, расстояния между которыми попарно различны. С каждого из них вылетел самолёт и приземлился на самом удалённом от места старта аэродроме. Могло ли случиться так, что в результате все 1985 самолётов оказались на пятидесяти аэродромах? (*Землю можно считать плоской, а маршруты — прямыми.*)

**Задача 8.2.** Среди коэффициентов многочлена $P(x)$ есть отрицательный. Может ли оказаться так, что для всех натуральных $n > 1$ коэффициенты многочленов $(P(x))^n$ положительны?

**Задача 8.3.** Существует ли выпуклый многогранник, любое сечение которого плоскостью, не проходящей через его вершину, является многоугольником с нечётным количеством сторон?

**Задача 8.4.** Докажите, что на координатной плоскости можно провести окружность, внутри которой лежит ровно $n$ точек с целочисленными координатами.

**Задача 8.5.** В круге провели 100 различных хорд так, что любые две хорды пересекаются. Всегда ли можно провести ещё одну хорду, которая пересечёт все остальные?



**Задача 8.6.** В каждый узел бесконечной клетчатой бумаги воткнута вертикальная булавка. Иголка лежит на бумаге параллельно линиям сетки. При какой наибольшей длине $l$ иголки её можно повернуть на $90^\circ$, не выходя из плоскости бумаги? (*Иголку разрешается как угодно двигать по плоскости, но так, чтобы она проходила между булавками; толщиной булавок и иголки нужно пренебречь.*)

## Ответы и решения

**Задача 8.1. Ответ:** да, могло.

Расположим сначала 50 аэродромов в вершинах правильного пятидесятиугольника, а остальные аэродромы — в центре этого многоугольника. Тогда все самолёты из центра прилетят в вершины, а самолёты из вершин прилетят в диаметрально противоположные вершины. Таким образом, все самолёты соберутся во всех вершинах пятидесятиугольника. Учитывая, что попарные расстояния между аэродромами должны быть различными, немного пошевелим описанную конструкцию, чуть-чуть сдвинув каждую вершину, чтобы добиться выполнения и этого условия.

Отметим, что при шевелении некоторой точки $C$ расстояния от неё до других точек изменяются непрерывно. Поэтому, если, например, для её расстояний до точек $A$ и $B$ выполнялось неравенство $CA < CB$, то малым шевелением знак этого неравенства можно сохранить (то есть и после этого шевеления точки $C$ будет выполняться неравенство $CA < CB$).

**Задача 8.2. Ответ:** да, может.

Поскольку любую натуральную степень $n > 3$ многочлена можно представить в виде произведения его квадратов и кубов, то достаточно найти такой многочлен с отрицательным коэффициентом, что все коэффициенты его второй и третьей степеней положительны.

Сконструируем сначала многочлен $P_0(x)$, обладающий указанными свойствами, у которого нет отрицательных коэффициентов, но один из коэффициентов равен нулю. Рассмотрим, например, многочлен $P_0(x) = x^4 + x^3 + x + 1$. Непосредственным возведением в степень можно проверить, что все коэффициенты многочленов $\big(P_0(x)\big)^2$ и $\big(P_0(x)\big)^3$ будут положительными.

Осталось немного пошевелить (уменьшить) коэффициент при $x^2$ многочлена $P_0(x)$. Так как зависимости коэффициентов квадрата и куба многочлена от коэффициентов самого многочлена непрерывны, то при достаточно малом по модулю отрицательном коэффициенте при $x^2$ коэффициенты квадрата и куба останутся положительными.

Таким, образом, пример можно привести в таком виде: $P(x) = P_0(x) - \varepsilon x^2 = x^4 + x^3 - \varepsilon x^2 + x + 1$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Можно проверить, что в данном случае достаточно выбрать $\varepsilon = 0{,}5$.

В этой задаче показывается применение метода малых шевелений к алгебраическим объектам — многочленам.

**Задача 8.3. Ответ:** нет, не существует.

Предположим, что такой многогранник существует. Если бы у него была вершина $A$, в которой сходится чётное количество рёбер, то можно было бы провести чётноугольное сечение многогранника, отделяющее вершину $A$ от остальных вершин.

Значит, в каждой вершине многогранника должно сходиться нечётное количество рёбер. Проведём плоскость, касающуюся многогранника по некоторому ребру $AB$ (такая плоскость существует в силу выпуклости многогранника). Сдвинем её чуть-чуть параллельно себе так, чтобы вершины $A$ и $B$ оказались по одну сторону плоскости, а все остальные вершины — по другую. Тогда полученная плоскость пересечёт все рёбра многогранника, выходящие из $A$ и $B$, кроме самого ребра $AB$. Количество пересечённых ею рёбер будет чётно, поэтому сечением многогранника этой плоскостью будет многоугольник с чётным количеством сторон.

**Задача 8.4.** Рассмотрим квадрат со стороной $2k+1$, где $k$ — некоторое достаточно большое число (насколько большим оно должно быть, будет разъяснено ниже), в котором выделим центральный единичный квадрат. Внутри этого единичного квадрата можно выбрать такую точку $A$ (её координаты не будут целыми), что на любой окружности с центром $A$ и радиусом, не большим чем $k$ (то есть полностью лежащей внутри большого квадрата) расположено не более одной точки с целочисленными координатами. Для этого достаточно, чтобы все расстояния от точки $A$ до точек большого квадрата с целочисленными координатами были различны, то есть чтобы точка $A$ не лежала на серединных перпендикулярах к отрезкам, соединяющим пары целочисленных точек большого квадрата. Поскольку таких серединных перпендикуляров конечное количество, то этого всегда можно добиться. При этом число $k$ выберем таким, чтобы в любом круге с центром внутри выбранного единичного квадрата содержалось не менее чем $n$ точек.

Построим окружность с центром в точке $A$ настолько малого радиуса, чтобы все точки с целочисленными координатами оказались вне её. Будем постепенно «раздувать» эту окружность (непрерывно увеличивая её радиус), тогда указанные точки будут попадать внутрь окружности по одной. Значит, в некоторый момент внутри окружности окажется ровно $n$ точек с целочисленными координатами.

**Задача 8.5. Ответ:** да, всегда.

Выберем внутри круга точку $O$, не принадлежащую ни одной из данных хорд. Проведём через точку $O$ произвольную прямую, и будем вращать её вокруг этой точки. В любой момент этого вращения все хорды делятся на два класса: «зацепленные» (имеющие с прямой вращения общую точку) и «свободные» (не имеющие общих точек с этой прямой). Заметим, что поскольку хорды попарно пересекаются, все свободные хорды всегда лежат по одну сторону от прямой.

После поворота на $180^\circ$ градусов все «свободные» хорды окажутся по другую сторону от прямой. Хорда оказывается по другую сторону от прямой так: в некоторый момент прямая проходит через её конец, а затем при продолжении поворота на сколь угодно малый угол хорда становится свободной. Рассмотрим первый момент $t$, после которого хорда $R$ стала свободной, перейдя по другую сторону от прямой. Пусть в этот момент есть свободная хорда $L$, ещё не перешедшая на другую сторону. Некоторый малый поворот не успеет «зацепить» $L$. Тогда после этого малого поворота обе хорды $R$ и $L$ будут «свободными», но находиться по разные стороны от прямой. Противоречие.

Значит, в момент $t$ свободных хорд по одну сторону от прямой уже не было, а свободных хорд по другую сторону от прямой ещё не было. В этот момент прямая пересекает круг по хорде, которая пересекает все имеющиеся 100 хорд.

**Задача 8.6. Ответ:** при любой длине.

Рассмотрим произвольный круг радиуса $R > 2l$. Через каждую пару узлов в круге проведём прямую. Количество таких прямых конечно, поэтому в круге радиуса $R - 2l$ с тем же центром есть точка $O$, не лежащая ни на одной из проведённых прямых. Поместим иголку одним концом в точку $O$ и начнём её поворачивать вокруг этого конца.

Если в процессе поворота она упрётся в булавку, то станем двигать иголку вдоль себя до тех пор, пока она не перестанет соприкасаться с булавкой (при таком движении мы можем быть уверены, что не упрёмся ни в какую другую булавку $B$, иначе $OB$ была бы проведённой прямой). Затем будем двигать иголку вдоль себя в обратном направлении (но оставляя булавку на сей раз с другой стороны от иголки) до тех пор, пока её конец не вернётся в точку $O$. Продолжая действовать таким образом, мы сможем повернуть иголку на любой угол.

Можно использовать также задачи Д40–Д43.

# Занятие 9

## Функции общего вида и функциональные соотношения

В отличие от занятия 4, на котором рассматривались конкретные элементарные функции, в большинстве задач этого занятия будут фигурировать функции общего вида, а также равенства и неравенства, в которых такие функции присутствуют. Кроме того, помимо непрерывности будут использоваться и другие общие свойства функций, в частности монотонность, периодичность, дифференцируемость, а также поведение функций «на бесконечности».

**Пример 9.1.** Докажите, что любой многочлен нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень.

**Решение.** Рассмотрим сначала многочлен нечётной степени, у которого первый коэффициент равен 1: $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, где все $a_i$ — действительные числа, $n$ — нечётное натуральное число. Запишем его в виде: $P(x) = x^n\left(1 + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}\right)$, тогда при достаточно больших (по модулю) значениях $x$ все слагаемые в скобках, кроме первого, близки к нулю, поэтому, независимо от их знака, выражение в скобках будет положительно. Для таких $x$ знак $P(x)$ будет зависеть только от знака $x^n$. Так как $n$ — нечётное, то старший член $x^n$ при $x > 0$ положителен, а при $x < 0$ отрицателен. Следовательно, найдутся как значения $x$, для которых $P(x) > 0$, так и значения $x$, для которых $P(x) < 0$. Так как многочлен — *непрерывная функция*, в силу *теоремы о промежуточном значении*, в некоторой точке $x$ многочлен $P(x)$ будет принимать значение 0.

Случай произвольного многочлена нечётной степени сводится к уже разобранному, так как при почленном делении многочлена на первый коэффициент корни многочлена не изменяются.

**Пример 9.2.** Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и уравнение $f(x) = x$ не имеет корней, то уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет корней.

**Решение.** Из условия задачи следует, что функция $g(x) = f(x) - x$ не имеет нулей. Так как эта функция непрерывна (*разность непрерывных функций*), то для всех значений $x$ либо $g(x) > 0$, либо $g(x) < 0$.

В первом случае, $f(x) > x$ для всех $x$ или, говоря иначе, $f(t) > t$ для всех $t$. Подставив $t = f(x)$, получим, что $f(f(x)) > f(x)$. Следовательно, $f(f(x)) > x$. Аналогично во втором случае: из того что $f(x) < x$ для всех $x$, следует неравенство $f(f(x)) < x$. Таким образом, уравнение $f(f(x)) = x$ корней не имеет.

Следующая задача на первый взгляд не имеет никакого отношения к функциям, однако это не так.

**Пример 9.3.** Цирковая лошадь по команде дрессировщика плавно начинает бег по окружности арены в точке $A$ и, пробежав круг, плавно останавливается в той же точке. Докажите, что существуют две диаметрально противоположные точки арены, которые лошадь проходит с одной и той же скоростью.

**Решение.** Рассмотрим радиус арены $OA$, проведённый в исходную точку, произвольную точку $P$ окружности и ей диаметрально противоположную точку $P'$ (см. рис. 9.1а). Пусть $\angle POA = \alpha$, тогда значение скорости в соответствующей точке обозначим через $V(\alpha)$. Рассмотрим функцию $U(\alpha) = V(\alpha + \pi) - V(\alpha)$. Она *непрерывна* на $[0; \pi]$, так как лошадь двигалась плавно. При этом $U(0) = V(\pi) - V(0) = V(\pi)$, $U(\pi) = V(2\pi) - V(\pi) = -V(\pi)$. Тогда либо $V(\pi) = 0$, то есть $U(0) = U(\pi) = 0$, либо

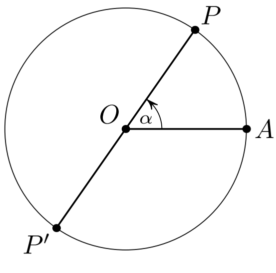


Рис. 9.1а

$V(\pi) \neq 0$, тогда числа $U(0)$ и $U(\pi)$ имеют противоположные знаки, значит, по *теореме о промежуточном значении*, найдётся значение $\alpha$, для которого $U(\alpha) = 0$. Диаметрально противоположные точки, соответствующие этому значению $\alpha$, являются искомыми.

Отметим, что условие равенства нулю начальной скорости не существенно, важно только условие $V(2\pi) = V(0)$, то есть точку $A$ лошадь должна проходить с одной и той же скоростью.

Полученный результат можно также интерпретировать графически. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a) = f(b)$. Из доказанного следует, что существует отрезок длины $l = \dfrac{b-a}{2}$, параллельный оси $x$, концы которого лежат на графике функции (см. рис. 9.1б). Более того, это утверждение можно усилить.

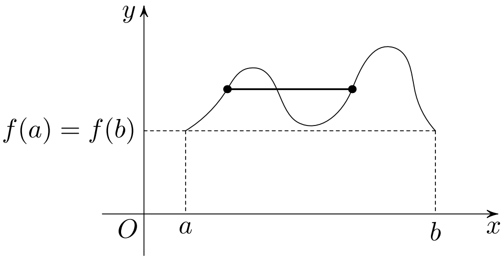



Рис. 9.1б

По аналогии с окружностью, назовём отрезок, концы которого лежат на графике, *хордой* этого графика.

Докажем, что *если функция непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и* $f(a) = f(b)$, *то для любого натурального* $n$ *найдётся горизонтальная хорда длины* $l = \dfrac{b-a}{n}$.

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - f\left(x + \dfrac{b-a}{n}\right)$ на отрезке $\left[a; b - \dfrac{b-a}{n}\right]$. Доказываемое утверждение равносильно тому, что на этом отрезке существует точка $x_0$, для которой выполняется равенство $f(x_0) = f\left(x_0 + \dfrac{b-a}{n}\right) \Leftrightarrow g(x_0) = 0$.

Так как функция $f(x)$ непрерывна на рассматриваемом отрезке, то и $g(x)$ также непрерывна. Рассмотрим значения $f(x)$ в точках вида $x_k = a + (k-1)\cdot\frac{b-a}{n}$, где $k = 1; 2; \ldots; n$. Поскольку $g(x_k) = f(x_k) - f(x_{k+1})$, то $g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_n) = f(a) - f(b) = 0$. Значит, либо для какого-то значения $k$ $g(x_k) = 0$ (и тогда искомая точка $x_0$ найдена), либо все эти значения отличны от нуля, тогда среди них найдутся значения разных знаков. Значит, найдутся и два соседних значения $g(x_k)$ и $g(x_{k+1})$ разных знаков. Следовательно, *по теореме о промежуточном значении*, на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ найдётся точка $x_0$, для которой $g(x_0) = 0$.

Понятно, что искомых хорд может быть и несколько (см., например, рис. 9.1в).

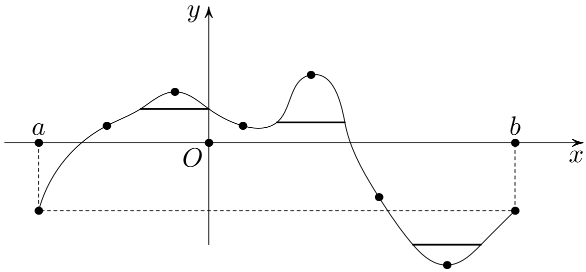



Рис. 9.1в

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 9.1.** Существует ли непрерывная функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

**Задача 9.2.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и её множество значений принадлежит этому же отрезку. Докажите, что на этом отрезке уравнение $f(x) = x$ имеет хотя бы один корень.

**Задача 9.3.** Пусть $f(x)$ — некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться так, что уравнение $f(x) = a$ при любом значении $a$ имеет чётное количество решений?

**Задача 9.4.** Непрерывная функция $f(x)$ такова, что для всех действительных $x$ выполняется неравенство:

$$f(x^2) - \left(f(x)\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}.$$

Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно имеет точки экстремума?

**Задача 9.5.** Функция $f(x)$ определена на множестве $\mathbb{R}$, и для любого $x$ выполняется равенство $f(x+1) \cdot f(x) + f(x+1) + 1 = 0$. Докажите, что функция $f(x)$ не является непрерывной.

**Задача 9.6.** а) Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна и $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет корень на отрезке $[a; b]$.

б) Сколько точек пересечения с осью $x$ имеет график функции вида $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots + b_k \cos kx$, где $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $b_j \in \mathbb{R}$?

**Задача 9.7*.** Из города $A$ в город $B$ ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что два экипажа, выехавшие по двум разным дорогам из $A$ в $B$ и связанные верёвкой некоторой длины, меньшей чем $2R$, смогли доехать от $A$ до $B$, не порвав веревки. Смогут ли разминуться, не задев друг друга, два круглых воза радиуса $R$, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

## Ответы и решения

**Задача 9.1. Ответ:** да, существует.

Например, рассмотрим функцию $f(x) = x^3$. Её график пересекается с любой вертикальной прямой вида $x = a$ в точке $(a; a^3)$. Остальные прямые на плоскости задаются уравнениями вида $y = kx + b$. Абсциссами точек пересечения графика $f(x)$ и таких прямых являются корни уравнения $x^3 - kx - b = 0$. Так как в левой части уравнения — многочлен нечётной степени, то при любых значениях $k$ и $b$ это уравнение имеет хотя бы один корень (см. пример 9.1), то есть график функции $f(x)$ пересекается и с любой прямой вида $y = kx + b$.

**Задача 9.2.** Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - x$. Она непрерывна на $[a; b]$ (*разность непрерывных функций*). Так как $a \leqslant f(x) \leqslant b$, то $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$, а $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Следовательно, *по теореме о промежуточном значении*, найдётся такое значение $x \in [a; b]$, что $g(x) = 0$, то есть $f(x) = x$.

**Задача 9.3. Ответ:** нет, не может.

Заметим, что данный многочлен обязан иметь точки экстремума (иначе функция $f(x)$ строго монотонна, а так как она *непрерывна*, то при любом значении $a$ уравнение $f(x) = a$ будет иметь ровно одно решение). В каждой точке экстремума проведём к графику $y = f(x)$ горизонтальные касательные, например, синим цветом (*это возможно*, *так как многочлен дифференцируем в любой точке*).

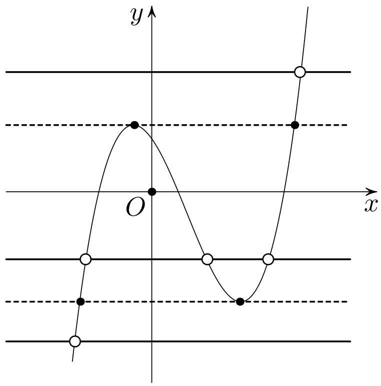



Рис. 9.2

Между каждыми двумя соседними синими прямыми, а также выше самой верхней прямой и ниже самой нижней проведём по одной горизонтальной прямой, например, красного цвета (см. рис. 9.2). Синие точки (точки пересечения и касания синих прямых с графиком) разделяют график на конечное число участков монотонности, при этом, *в силу непрерывности*, на каждом таком участке есть ровно одна красная точка. Поэтому красных точек на графике на одну больше, чем синих, и общее количество «цветных» точек нечётно. Значит, хотя бы на одной из «цветных» прямых лежит нечётное число точек графика. Это означает, что найдётся значение $a$, для которого уравнение $f(x) = a$ имеет нечётное количество решений.

**Задача 9.4. Ответ:** да, верно.

При $x = 0$ получим, что

$$f(0) - \big(f(0)\big)^2 \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \big(f(0)\big)^2 - f(0) + \frac{1}{4} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow f(0) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, при $x = 1$: $f(1) - \big(f(1)\big)^2 \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{2}$.

Так как *непрерывная функция* принимает одинаковые значения на концах отрезка $[0; 1]$, то внутри этого отрезка есть хотя бы одна точка максимума или точка минимума, что и требовалось.

Отметим, что если для всех $x \in [0; 1]$ $f(x) = \frac{1}{2}$, то любая точка этого отрезка является точкой экстремума.

**Задача 9.5.** Пусть это не так, то есть функция $f(x)$ непрерывна. Предположим, что существует такое $x_0 \in \mathbb{R}$, что $f(x_0) = 0$. Тогда исходное равенство не выполняется в точке $x = x_0 - 1$, так как в этом случае левая часть равенства равна 1. Значит, $f(x)$ не имеет нулей, поэтому для всех значений $x$ либо $f(x) > 0$, либо $f(x) < 0$. В первом случае левая часть данного равенства положительна, значит, оно выполняться не может.

Во втором случае, преобразовав исходное равенство, получим, что для всех $x$ $f(x) = -\frac{1}{f(x+1)} - 1 > -1$, так как $f(x+1) < 0$. Вместе с тем $-f(x+1) = 1 + f(x) \cdot f(x+1) > 1$, то есть $f(x+1) < -1$. Противоречие.

**Задача 9.6.** а) Пусть это не так, тогда для всех $x \in [a; b]$ либо $f(x) > 0$, либо $f(x) < 0$. В первом случае $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен площади соответствующей криволинейной трапеции, значит, $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$.

Во втором случае это число противоположно значению площади, то есть $\int\limits_a^b f(x)dx < 0$. В обоих случаях получено противоречие с условием.

Отметим, что число $\frac{1}{|a-b|}\int\limits_a^b f(x)dx$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Учитывая это, доказанное свойство можно сформулировать иначе: *если на* $[a; b]$ *среднее значение непрерывной функции равно нулю, то на этом отрезке существует точка, в которой функция обращается в ноль.*

б) **Ответ:** бесконечно много.

Заметим, что заданная функция определена на $\mathbb{R}$ и $T = 2\pi$ является её периодом. Докажем, что на каком-то отрезке длины $T$, например на $[0; 2\pi]$, график $f(x)$ функции пересекает ось $x$.

Действительно, для любых натуральных $p$ и $q$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin px dx = \left.\frac{-\cos px}{p}\right|_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$$

и

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos qx dx = \left.\frac{\sin qx}{q}\right|_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0.$$

Так как $\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$ является суммой соответствующих интегралов, то $\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx = 0$. Кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на $[0; 2\pi]$ (*сумма непрерывных функций*), значит, она обращается в ноль в некоторой точке этого отрезка.

Следовательно, в силу периодичности, $f(x)$ имеет бесконечно много нулей.

**Задача 9.7*.** **Ответ:** нет, не смогут.

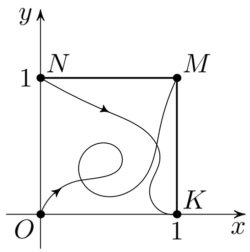



Рис. 9.3

Пусть $x$ — доля расстояния от $A$ до $B$ по первой дороге между экипажем, находящимся на этой дороге, и городом $A$. Аналогичную долю на второй дороге обозначим через $y$. Так как $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$, то множество точек с координатами $(x; y)$ образует единичный квадрат $OKMN$ (см. рис. 9.3). Тогда каждому положению экипажей на двух дорогах соответствует точка этого квадрата и, наоборот, каждой точке квадрата соответствует некоторое положение экипажей.

В частности, начальному положению экипажей в городе $A$ соответствует точка $O(0; 0)$, а их прибытию в город $B$ — точка $M(1; 1)$. Движение экипажей из $A$ в $B$ изображается некоторой кривой, ведущей из $O$ в $M$. Аналогично, начальное положение центров возов соответствует точке $N(0; 1)$, прибытие возов в конечный пункт — точке $K(1; 0)$, а их движение — кривая, ведущая из $N$ в $K$.

Так как любые две непрерывные кривые, соединяющие пары противоположных вершин квадрата, пересекаются, то, независимо от того, как двигались возы, в какой-то момент их центры окажутся в том же положении, в котором в некоторый момент находились экипажи. В этот момент расстояние между центрами возов будет меньше чем $2R$, то есть возы заденут друг друга.

Рассмотренный при решении квадрат называется *фазовым пространством* движения экипажей и возов, а точки этого квадрата — *фазовыми точками*. Описание состояний процесса как точек подходящего фазового пространства часто оказывается полезным при решении различных задач вплоть до решения дифференциальных уравнений.

Отметим, что третий способ решения задачи 6.5 по сути также опирается на понятие фазового пространства.

Можно также использовать задачи Д25, Д44–Д50.

# Приложения

## Дополнительные задачи

**Задача Д1.** К автомату с газированной водой стояла очередь из ста гномов. Газировка бывает двух сортов: с сиропом — за 3 копейки — и без сиропа — за 1 копейку. Самый первый гном купил газировку с сиропом, а второй — без сиропа. Верно ли, что в некоторый момент гномов, уже купивших газировку с сиропом было столько же, сколько гномов, собиравшихся купить газировку без сиропа?

**Задача Д2.** В стране Ш. человек считается богатым, если его зарплата больше зарплаты премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают жениться на бедных женщинах. Докажите, что можно премьер-министру установить такую зарплату, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин. (Все зарплаты в стране различные.)

**Задача Д3.** Петя записал в ряд несколько чисел так, что любые два соседних отличаются не больше чем на 1. Самое маленькое из этих чисел равно $-5$, а самое большое — это 100,25. Докажите, что хотя бы одно из записанных чисел отличается от нуля не больше чем на 0,5.

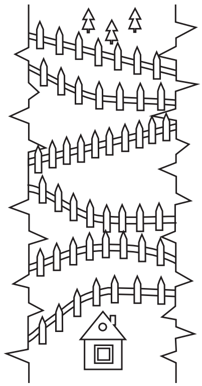
**Задача Д4.** Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся точки разного цвета на расстоянии 1.

**Задача Д5.** Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 различных монет, половина из которых — фальшивые (но какие именно — знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет либо поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже чем на двадцать пятый день?

**Задача Д6.** Школьники играли в настольный теннис «на победителя». Они установили очередь и правила: вначале играют первый и второй, а в дальнейшем каждый очередной участник играет с победителем предыдущей пары. На следующий день те же школьники снова сыграли по тем же правилам, но очередь шла в обратном порядке (вчерашний последний стал первым, предпоследний — вторым, и так далее). Известно, что каждый сыграл хотя бы раз и в первый день, и во второй. Докажите, что найдутся два школьника, которые играли между собой и в первый день, и во второй.

**Задача Д7.** Может ли прямая пересечь все стороны а) 101-угольника; б) 100-угольника, не пройдя через его вершины?

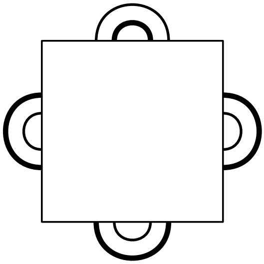
**Задача Д8.** Изгородь разделяет участок на два владения. По обрывку карты этого участка (см. рисунок) определите, можно ли из дома пройти в лес, не перелезая через изгородь (*изгородь — замкнутая непрерывная кривая*).



**Задача Д9.** Бегун и велосипедист стартовали одновременно в диаметрально противоположных точках круговой дорожки и двигались все время по часовой стрелке (не обязательно с постоянными скоростями). Пока бегун сделал два круга, велосипедист сделал три. Докажите, что велосипедист хотя бы раз обогнал бегуна.

**Задача Д10.** Докажите, что если на клетчатой доске одна хромая ладья прошла от самой верхней горизонтали к самой нижней, а другая — от самой левой вертикали к самой правой, то на доске есть клетка, через которую прошли обе ладьи. (*Хромая ладья — фигура, которая ходит по доске на соседнюю по стороне клетку.*)

**Задача Д11.** На столе лежат шесть непересекающихся контуров из проволоки, частично накрытые листом бумаги (см. рисунок). Известно, что три контура сделаны из медной проволоки (она потолще), а три — из тонкой алюминиевой, причём один из контуров закрыт полностью, а пять других частично видны. Какой контур закрыт полностью, алюминиевый или медный?



**Задача Д12*.** Электрическая схема имеет вид решётки размером $3 \times 3$: всего в схеме 16 узлов (вершины единичных квадратов решётки), которые соединены проводами (стороны квадратов решётки). Часть проводов, возможно, перегорела. За одно измерение можно выбрать любую пару узлов схемы и проверить, проходит ли между ними ток (то есть проверить, существует ли цепочка исправных проводов, соединяющих эти узлы). В действительности известно, что ток проходит от любого узла к любому. За какое наименьшее количество измерений можно всегда в этом удостовериться?

**Задача Д13.** На окружности отмечены 77 точек, среди которых нет диаметрально противоположных. Докажите, что можно провести диаметр через одну из этих точек так, что по обе стороны диаметра точек окажется поровну.

**Задача Д14.** На плоскости отмечены 10000 точек.

а) Докажите, что найдётся окружность, внутри которой лежат ровно 2013 отмеченных точек.

б) Верно ли, что найдётся такая окружность с центром в фиксированной точке $O$?

в) Верно ли, что найдётся такая окружность радиуса 2013?

г) Верно ли, что найдётся такая окружность целого радиуса?

**Задача Д15.** В клетках доски размером $100 \times 100$ произвольным образом расположено 1000 шашек. Докажите, что доску можно разрезать по границам клеток на две равные части с равным количеством шашек. (*Равенство частей в данном случае понимается как равенство фигур*.)

**Задача Д16*.** $2n$ радиусов разделили круг на $2n$ равных секторов: $n$ синих и $n$ красных, расположенных в произвольном порядке. В синие секторы, начиная с некоторого, записывают по порядку против хода часовой стрелки числа от 1 до $n$. В красные секторы, начиная с некоторого, записывают по порядку те же числа, но по ходу часовой стрелки. Докажите, что найдётся полукруг, в котором записаны все числа от 1 до $n$.

**Задача Д17*.** На одной стороне правильного картонного 100-угольника в вершинах записаны числа 1, 2, ..., 100. Многоугольник кладут на стол числами вверх и выписывают эти числа в строку в порядке удаления от переднего края стола (то есть начиная с самого близкого к краю). Если две вершины находятся на равном расстоянии от края, сначала записывается левое число, затем правое. Таким образом, по разу записываются все возможные различные строки чисел, соответствующие разным положениям 100-угольника. Найдите сумму чисел, стоящих в этих наборах на тринадцатых местах слева.

**Задача Д18*.** Вершины пятидесятиугольника делят окружность на 50 дуг, длины которых равны числам 1, 2, 3, ..., 50, взятым в каком-то порядке. Каждая пара «противоположных» дуг (соответствующих противоположным сторонам 50-угольника) отличается по длине на 25. Докажите, что у пятидесятиугольника найдётся пара параллельных сторон.

**Задача Д19.** Решите неравенство $3x^2 - c \leqslant bx$, если $b^2 + 12c < 0$.

**Задача Д20.** Найдите знак коэффициента $c$ квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что он не имеет корней и а) $a + b + c > 0$; б) $a - b + c < 0$; в) $4a + 2b + c > 0$.

**Задача Д21.** Докажите, что если $b > a + c > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня.

**Задача Д22.** Квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня, один из которых лежит внутри отрезка $[0; 1]$, а другой — вне этого отрезка. Определите знак $f(b)$.

**Задача Д23.** Пусть $x_1 \neq 0$ — корень уравнения $x^2 + px + q = 0$, а $x_2 \neq 0$ — корень уравнения $x^2 - px - q = 0$. Докажите, что уравнение $2x^2 - 3px - 3q = 0$ имеет корень $x_3$, лежащий между $x_1$ и $x_2$.

**Задача Д24.** В неравенстве $x^2 + px + q > 0$ коэффициенты $p$ и $q$ — целые числа. Известно, что это неравенство выполняется при всех целых значениях $x$. Докажите, что оно выполняется при всех действительных значениях $x$.

**Задача Д25.** Существует ли такое значение $a$, при котором уравнение $\sin x = ax$ имеет ровно 2013 корней?

**Задача Д26.** Даны концентрические окружности радиусов $R$ и $2R$. Докажите, что можно провести прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней три равных отрезка.

**Задача Д27.** Существует ли выпуклый четырёхугольник и точка $P$ внутри него такие, что сумма расстояний от $P$ до вершин равна периметру четырёхугольника?

**Задача Д28*.** Существует ли неравнобедренный треугольник, у которого медиана, проведённая из одной вершины, биссектриса, проведённая из другой, и высота, проведённая из третьей, равны?

**Задача Д29.** Найдите все значения, которые может принимать отношение суммы катетов к гипотенузе прямоугольного треугольника.

**Задача Д30.** Рассматриваются такие всевозможные четвёрки чисел, что $a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 4$. Для каждой четвёрки вычисляется значение выражения $(a-c)^2 + (b-d)^2$. Найдите множество значений этого выражения.

**Задача Д31.** Докажите, что вокруг любого выпуклого многоугольника можно описать квадрат.

**Задача Д32.** Докажите, что у любой выпуклой ограниченной плоской фигуры найдутся две равные и параллельные хорды, делящие её на три равновеликие части. (*По аналогии с окружностью, хордой фигуры называется отрезок, концы которого лежат на границе этой фигуры.*)

**Задача Д33.** Даны две плоские выпуклые ограниченные фигуры, одна из которых лежит внутри другой. Докажите, что: а) можно провести две параллельные хорды внешней фигуры, которые касаются внутренней и отсекают от внешней две равновеликие части; б) найдутся две равные параллельные хорды внешней фигуры, которые касаются внутренней; в) найдётся точка $P$ на границе внешней фигуры, из которой можно провести две равные хорды внешней фигуры, касательные к внутренней.

**Задача Д34.** Докажите, что на высоте правильного тетраэдра существует точка, из которой ребро основания видно под углом $90^\circ$.

**Задача Д35.** В кубе $ABCDA'B'C'D'$ по рёбрам $A'A$ и $CB$ из вершин $A'$ и $C$ соответственно одновременно и с одинаковыми скоростями начинают двигаться точки $X$ и $Y$. Найдите множество значений, которые может принимать расстояние $XY$, если ребро куба равно 1.

**Задача Д36.** Дан прямой двугранный угол. Можно ли провести плоскость так, чтобы она пересекла его грани по прямым, образующим угол $140^\circ$?

**Задача Д37.** Дан куб с ребром 1. Докажите, что у него существует сечения: а) четырёхугольное площади 1,4; б) треугольное площади 0,8; в) пятиугольное и шестиугольное площади 1,2.

**Задача Д38*.** В пространстве дан треугольник, все углы которого меньше $\varphi$, где $\varphi < 120^\circ$. Докажите, что существует точка, из которой каждая сторона треугольника видна под углом $\varphi$.

**Задача Д39*.** Дан пространственный шарнирный четырёхугольник $ABCD$ (длины его сторон и их порядок — зафиксирован, а углы могут меняться). Докажите, что существует такое его положение, при котором в тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при рёбрах $AC$ и $BD$ — прямые.

**Задача Д40.** Назовём выпуклый семиугольник «особым», если три его диагонали пересекаются в одной точке. Докажите, что, слегка пошевелив одну из вершин «особого» семиугольника, можно получить выпуклый семиугольник, не являющийся «особым».

**Задача Д41.** Коэффициенты $p$ и $q$ квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ изменили не больше чем на 0,001. Может ли бо́льший корень уравнения измениться больше чем на 1000?

**Задача Д42.** Верно ли, что при непрерывном изменении одного из коэффициентов кубического уравнения его наименьший корень также изменяется непрерывно?

**Задача Д43.** Астрономический прожектор освещает октант (трёхгранный угол, у которого все плоские углы прямые). Прожектор помещён в центр куба. Можно ли его повернуть таким образом, чтобы он не освещал ни одной вершины куба?

**Задача Д44.** Существует ли непрерывная функция, принимающая каждое действительное значение ровно три раза?

**Задача Д45.** Постройте график функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[0; 3]$, у которого нет горизонтальной хорды длины 2 и $f(0) = f(3)$.

**Задача Д46.** О функции $f(x)$, определённой на множестве $\mathbb{R}$, известно, что при любом $a > 1$ функция $f(x) +$

$+f(ax)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Докажите, что функция $f(x)$ также непрерывна на $\mathbb{R}$.

**Задача Д47*.** Пусть $P(x)$ — многочлен нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

**Задача Д48.** Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что это уравнение имеет корень на промежутке $(0; 1)$.

**Задача Д49.** Существует ли треугольник, в котором синус одного угла равен косинусу другого и равен тангенсу третьего?

**Задача Д50.** Можно ли разрезать квадрат на три попарно подобных, но не равных прямоугольника?

# Решения дополнительных задач

**Д1. Ответ:** да, верно.

В каждый момент времени будем рассматривать разность между количеством гномов, купивших газировку с сиропом, и количеством гномов, которые собираются купить газировку без сиропа. В самом начале эта разность отрицательна (уменьшаемое равно 0, а вычитаемое не меньше чем 1, так как известно, что второй гном хочет купить воду без сиропа). А в конце, когда все гномы уже купили воду, эта разность положительна (уменьшаемое не меньше единицы, так как первый гном купил воду с сиропом, а вычитаемое равно нулю, поскольку больше желающих покупать воду нет). После каждой покупки эта разность изменяется не более чем на 1, поэтому в некоторый момент она была равна нулю.

**Д2.** Рассмотрим разность между количествами богатых мужчин и бедных женщин. Заметим, что при постепенном изменении зарплаты премьер-министра эта величина изменяется дискретно непрерывно. Если установить премьер-министру зарплату, равную 0, то все мужчины будут богатыми, а бедных женщин не будет вовсе, то есть рассматриваемая величина будет положительной. Если же премьер-министру назначить очень большую зарплату, то все мужчины окажутся бедными, и интересующая нас величина будет отрицательной. Следовательно, по *теореме о промежуточном значении*, найдётся такое значение зарплаты, когда разность между количествами богатых мужчин и бедных женщин будет равна нулю, что и требовалось.

**Д3.** Среди записанных чисел есть положительные. Рассмотрим первое из них. Если оно не больше чем 0,5, то оно и является искомым. В противном случае (если оно больше чем 0,5) предыдущее число — неположительное и оно больше чем $-0{,}5$, значит, искомым будет оно.

**Д4.** Выберем две точки разного цвета. Построим ломаную с концами в этих точках, все звенья которой имеют длину 1 (*это можно сделать, так как «степень свободы» достаточно велика*). Будем двигаться по звеньям этой ломаной, начав с любого из концов. Тогда, так как концы этой ломаной разного цвета, то рано ли поздно найдётся звено, у которого вершины имеют разный цвет. Эти точки и будут искомыми.

При решении этой задачи школьники часто пытаются апеллировать к таким понятиям, как «соседняя точка», «граница между областями двух цветов» и тому подобное. У учителя должны быть наготове примеры, опровергающие такие рассуждения.

**Д5. Ответ:** да, сможет.

В первый день разложим монеты на две кучки: в первой — 49 монет, а во второй — 51 монета. Монет какого-то сорта (скажем, фальшивых) в первой кучке не менее половины, то есть не менее чем 25. Каждый день будем перекладывать по одной монете из первой кучки во вторую. Тогда на 25-й день в первой кучке останется 25 монет, из них фальшивых — не более чем 25. Таким образом, в первой кучке фальшивых монет было не менее 25, а стало не более 25, и каждый день это количество изменялось не более чем на 1, следовательно, в какой-то день их было ровно 25. Тогда в этот день и во второй кучке фальшивых монет было ровно 25, значит, в этот день рыцарь освободился.

**Д6.** Пусть школьник А был последним в очереди в первый день и свою первую партию сыграл со школьником Б. Тогда Б — либо предпоследний, либо выиграл у всех, кто стоял в очереди между ним и А. Тем самым Б сыграл со всеми, кто стоял в очереди после него. На следующий день все эти школьники (и только они!) окажутся в очереди впереди Б, поэтому свою первую партию он сыграет с кем-то из них.

**Д7. Ответ:** а) нет; б) да.

Будем считать, что прямая — это непрерывная траектория движения точки. Тогда, пересекая сторону многоугольника первый раз, точка окажется внутри многоугольника, а при втором пересечении — снаружи. Повторяя это рассуждение, получим, что после сотого пересечения точка находится вне многоугольника, а после сто первого — внутри. Таким образом, рассматриваемая прямая в пункте а) будет обязана ещё раз пересечь какую-то сторону 101-угольника, а пример для пункта б) схематически показан на рис. 1.

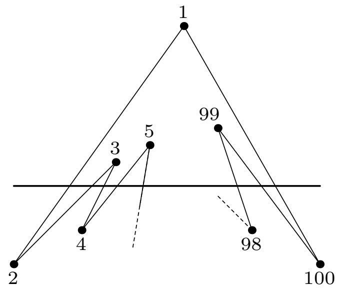


Рис. 1

**Д8. Ответ:** да, можно.

Если бы участок был изображён на карте полностью, то изгородь представляла бы собой часть непрерывной кривой. Покажем, что ДОМ и ЛЕС находятся по одну сторону от изгороди (в одном владении). Действительно, представим себе, что мы двигаемся напрямую, каждый раз перелезая через изгородь. Тогда отрезок, соединяющий ДОМ и ЛЕС, пересечёт изгородь шесть раз. При первом пересечении мы оказываемся по другую сторону от изгороди (по отношению к ДОМУ), при втором — по ту же сторону и так далее. Так как 6 — чётное число, то ДОМ и ЛЕС находятся по одну сторону от изгороди (в одном владении), поэтому существует непрерывная кривая или ломаная, соединяющая ДОМ и ЛЕС.

**Д9.** Примем за начало отсчёта точку старта бегуна и будем считать, что вначале велосипедист отставал от бегуна на полкруга (см. рис. 2). Тогда разность расстояний велосипедиста и бегуна до точки старта равна $-0{,}5$ круга. Из условия задачи следует, что на финише велосипедист опережал бегуна на полкруга, то есть эта разность стала равна 0,5 круга. Таким образом, разность *непрерывно* изменялась от $-0{,}5$ до 0,5. Тогда, по *теореме о промежуточном значении*, хотя бы в один момент времени она была равна нулю. При каком-то «переходе» через 0 обязательно произошло изменение знака разности с отрицательного на положительный. Такая смена и означает, что велосипедист обогнал бегуна.

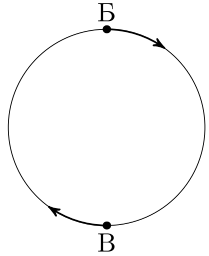


Рис. 2

**Д10.** Расширим доску за счёт каёмки шириной в одну клетку. Продолжим маршруты ладей, сделав с каждого края ход на каёмку, а затем по каёмке — до угла: с верхней — до правого верхнего, с правой — до правого нижнего, с нижней — до левого нижнего, с левой — до левого верхнего. Получим две траектории движения в виде ломаных, связывающих противоположные углы, аналогично рассмотренным в задаче 2.4. Используя результат этой задачи, делаем вывод, что у этих маршрутов есть общая клетка. Так как эта клетка заведомо не лежит на каёмке (продолжая маршруты ладей, мы не пересекали эти продолжения), то она лежит на доске, что и требовалось доказать.

Фактически мы доказали дискретный аналог теоремы о пересечении ломаных: если две ломаные проходят внутри квадрата и одна соединяет его верхнюю сторону с нижней, а другая — правую сторону с левой, то ломаные пересекаются. При решении олимпиадных задач на эту теорему принято ссылаться без доказательства.

**Д11. Ответ:** полностью закрыт медный контур.

Пусть это не так, то есть целиком закрыт один алюминиевый контур, а части двух других алюминиевых контуров видны. Рассмотрим верхнюю часть алюминиевого контура. Она не может быть соединена ни с одной из трёх других видимых алюминиевых частей, иначе соединение обязано пересечь какой-то из медных контуров (*). Значит, эта часть принадлежит одному тонкому контуру, а три остальных — другому. Но в этом случае три медных куска, расположенные слева, снизу и справа, обязаны принадлежать одному контуру. Следовательно, видны дуги только двух таких контуров, что противоречит условию (закрыт ровно один контур). Значит, наше предположение неверно и целиком закрыт медный контур, например, так, как показано на рис. 3.

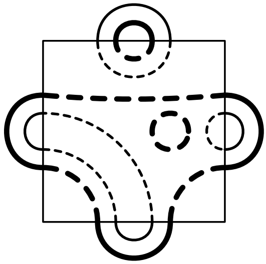


Рис. 3

* Если это утверждение покажется неочевидным, то можно обосновать его более строго. Предположим, что верхний алюминиевый контур соединён с каким-то другим. Линия соединения разбивает лист на две части. Границы частей состоят из границы листа и этой линии. Каждый медный контур должен пересекать границу левой части чётное число раз. Между тем нетрудно убедиться, что в любом случае границу листа в левой части медные контуры пересекут нечётное число раз. Значит, пересечена и алюминиевая часть границы.

Аналогично обосновываются и другие утверждения из доказательства, изложенного выше.

**Д12*. Ответ:** 8.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *E* | ***A*** | ***B*** | *F* |
| ***C*** | *G* | *H* | ***C*** |
| ***D*** | *E* | *F* | ***D*** |
| *G* | ***A*** | ***B*** | *H* |

Рис. 4

Заметим, что если перегорели только провода, выходящие из фиксированного узла, то между любыми двумя из остальных узлов ток проходит. Значит, в процессе измерений должен быть задействован каждый узел, то есть количество измерений не может быть меньше половины количества узлов данной схемы.

Покажем, что восьми проверок достаточно. Для удобства будем вместо решётки размером $3 \times 3$ изображать клетчатую доску размером $4 \times 4$ (см. рис. 4, каждый узел — центр клетки). Разобьём узлы на пары определённым образом (узлы одной пары обозначим одинаковыми буквами). Заметим, что линии прохождения тока в такой схеме соответствуют путям ладей по доске.

Рассмотрим сначала линии тока $A$ — $A$ и $B$ — $B$. Каждая из них пересекается с линиями тока $C$ — $C$ и $D$ — $D$ (*см. задачу Д*10). Следовательно, все узлы, обозначенные буквами от $A$ до $D$, соединены проводами (принадлежат одной *компоненте связности*). Заметим теперь, что остальные узлы также принадлежат этой компоненте. Действительно, линия тока $E$ — $E$ проходит либо через $A$, либо через $C$, линия $F$ — $F$ проходит либо через $B$, либо через $C$, линия $G$ — $G$ проходит либо через $A$, либо через $D$, а линия $H$ — $H$ проходит либо через $B$, либо через $D$.

Следовательно, осуществив указанные восемь измерений, мы сможем убедиться, что ток проходит от любого узла схемы к любому.

Утверждение задачи можно обобщить на любую решётку размером $(2n-1)\times(2n-1)$, но схема доказательства будет существенно сложнее.

**Д13.** Проведём диаметр окружности через произвольную отмеченную точку. Он разобьёт окружность на две полуокружности $\alpha$ и $\beta$. Пусть внутри полуокружности $\alpha$ меньше отмеченных точек, чем внутри полуокружности $\beta$, то есть разность этих величин отрицательна. Будем постепенно поворачивать диаметр вокруг центра окружности. Так как среди отмеченных точек нет диаметрально противоположных, то количество отмеченных точек внутри каждой полуокружности будет изменяться не более чем на одну, причём только в те моменты, когда отмеченная точка либо «уходит» с диаметра, либо попадает на него. Значит, *разность между количеством точек внутри полуокружностей является ДНВ*.

При повороте на $180^\circ$ полуокружности поменяются «ролями» и внутри $\alpha$ будет больше отмеченных точек, чем внутри $\beta$, то есть рассматриваемая разность станет положительной. Следовательно, при некотором положении диаметра эта разность будет равна нулю, этот диаметр будет проходить через одну из отмеченных точек и по обе его стороны отмеченных точек будет поровну.

**Д14.** а) Рассмотрим всевозможные пары отмеченных точек и проведём серединные перпендикуляры к каждому отрезку, концами которого являются точки одной пары. Количество таких перпендикуляров конечно (*а именно*, $C_{10000}^2$), поэтому найдётся точка $O$ на плоскости, не принадлежащая ни одному из них. Рассмотрим окружность с центром $O$ такого маленького радиуса, чтобы внутри неё не было отмеченных точек (либо была одна, если сама точка $O$ — отмеченная). Будем постепенно «раздувать» эту окружность до тех пор, пока внутри неё не окажутся все отмеченные точки. Заметим, что, ввиду нашего выбора точки $O$, *количество отмеченных точек внутри окружности* по мере увеличения её радиуса будет увеличиваться не более чем на одну, то есть эта величина является *ДНВ*. Следовательно, найдётся значение радиуса, для которого отмеченных точек внутри окружности будет ровно 2013.

б) Это не верно. Пусть, например, все отмеченные точки находятся на одинаковом расстоянии от данной точки $O$, тогда либо они все лежат внутри окружности с центром $O$, либо внутри такой окружности не будет ни одной отмеченной точки.

в) Это не верно. Пусть, например, все попарные расстояния между отмеченными точками больше чем 4026, тогда внутри любой окружности радиуса 2013 может располагаться не более одной отмеченной точки.

г) Верно. *В силу непрерывности* найдётся прямая $m$, по одну сторону от которой лежит ровно 2013 точек (*см. пример* 3.1). Выберем произвольную точку $M$ на этой прямой и рассмотрим некоторую окружность, касающуюся $m$ в точке $M$ и лежащую в той же полуплоскости, что и выбранные точки. Будем *непрерывно* двигать центр окружности (сохраняя точку касания) в направлении, перпендикулярном прямой $m$, постепенно увеличивая её радиус.

Так как количество точек конечно, то найдётся окружность такого радиуса, чтобы все рассматриваемые точки оказались внутри неё. Увеличив этот радиус до ближайшего целого числа, получим искомую окружность.

Более аккуратно построение искомой окружности можно описать, например, так. Заключим все выбранные точки в половину полосы, границами которой является лучи $a$ и $b$, перпендикулярные прямой $m$ (см. рис. 5). Пусть $M$ — середина отрезка $AB$ ($A$ и $B$ — начала лучей). В точке $M$ восставим перпендикуляр $MN$ к отрезку $AB$. Каждую точку $C_k$ из выбранного множества ($k = 1, 2, ..., 2013$) соединим отрезком с точкой $M$ и проведём серединные перпендикуляры к этим отрезкам. На их пересечении с лучом $MN$ получим соответствующие точки $O_k$. Выбрав из них точку $O$, наиболее удалённую от прямой $m$, построим окружность радиуса $OM$, тогда все выбранные точки будут лежать либо внутри этой окружности, либо на ней. «Подвинув» точку $O$ по лучу $MN$ так, чтобы радиус $OM$ увеличился до ближайшего целого числа, получим искомую окружность.

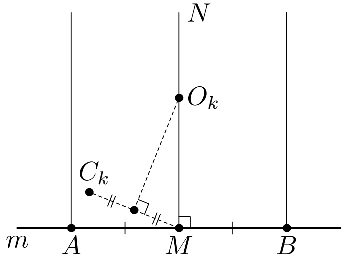



Рис. 5

**Д15.** Сделаем сначала вертикальный разрез, делящий доску на две равные части (см. рис. 6). Эти части симметричны относительно центра доски (если не брать в расчёт расположение шашек). Будем последовательно изменять форму этих частей так, чтобы эта центральная симметрия сохранялась.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 | ... |
| | | | | 51 | 52 | 53 | ... |
| | | | | 101 | 102 | 103 | ... |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| ... | 103 | 102 | 101 | | | | |
| ... | 53 | 52 | 51 | | | | |
| ... | 3 | 2 | 1 | | | | |

Рис. 6

Сначала рассмотрим клетки, помеченные на рисунке числом 1. Они центрально-симметричны и принадлежат к разным частям. Поменяем их принадлежность (нижняя клетка 1 теперь будет принадлежать к правой части, а верхняя клетка 1 — к левой). Следующим шагом проделаем ту же операцию с клетками, помеченными числом 2, и так далее. Таким образом, мы последовательно выбираем клетки левой половины доски, двигаясь по горизонталям снизу вверх и справа налево в каждой горизонтали, и меняем их «ролями» с центрально-симметричными клетками правой половины. В конце концов все клетки, которые изначально принадлежали левой половине, попадут в правую, и наоборот. То есть части доски как бы поменяются местами.

Пусть изначально в левой части доски было $x$ шашек, тогда в правой — $(1000 - x)$ шашек. Пусть, для определенности, $1000 - x > x$. Тогда в конце описанного процесса знак неравенства изменится на противоположный. Поскольку за один шаг количество шашек в каждой половине доски изменяется не более чем на 1 (увеличивается на одну, уменьшается на одну или остаётся неизменным), то, *в силу непрерывности*, в некоторый момент будет выполняться равенство, то есть в каждой части окажется ровно по 500 шашек. При этом части доски в этот момент (как и в любой другой) будут равными, так как они симметричны относительно центра доски.

**Д16.** Обойдём секторы против часовой стрелки. В каком-то месте сразу за красным сектором $K$ находится синий сектор $S$. Можно считать, что в секторе $S$ записана единица (мы можем все числа в секторах сдвигать по «кругу» $1 \to 2 \to \ldots \to n \to 1$ столько раз, сколько потребуется, и на ситуацию это не повлияет). Пусть в секторе $K$ записано число $k$. «Пройдём» группу из $k$ секторов против часовой стрелки, начиная с сектора $K$. Пусть в этой группе $b$ синих и $r$ красных секторов. Тогда в них стоят синие числа 1, 2, ..., $b$ и красные числа $k$, $k-1$, ..., $k-(r-1)$.

Поскольку $b + r = k$, то $k - (r - 1) = b + 1$, то есть числа от 1 до $k$ стоят в этих секторах ровно по одному разу.

«Пройдём» теперь группу из $n - k$ секторов по часовой стрелке, начиная с сектора, следующего за $K$. Пусть среди них $c$ синих и $d$ красных секторов. Тогда синие — это числа $n$, $n - 1$, ..., $n - (c - 1)$, а красные — это числа $k + 1$, $k + 2$, ..., $k + d$, и, ввиду равенства $c + d = n - k$, числа от $k + 1$ до $n$ встречаются по одному разу. Объединение этих двух групп и даст нам искомый полукруг.

Мы организовали разбиение искомого полукруга на два участка, заполненные наборами подряд идущих чисел. Это производит впечатление фокуса: кажется невероятным, что на каждом участке всё сошлось, и непонятно, как догадаться взять участки именно такой длины.

Но существование таких участков можно предсказать благодаря дискретной непрерывности. Будем считать, что покрашены не только секторы, но и числа. Пусть в паре соседних секторов разного цвета записаны числа $k$ и $s$, $k \leqslant s$. Если пойти от $k$ в нужную сторону, то попадающиеся числа цвета $k$ будут возрастать с шагом 1. В то же время попадающиеся числа цвета $s$ будут убывать с шагом 1. Итак, одни увеличиваются от $k$, а другие убывают от $s$. Тем самым, числа «идут навстречу друг другу», заполняя промежуток $[k, s)$ с обоих концов. Ввиду дискретной непрерывности, «встреча» неизбежна, и к этому моменту числа заполнят весь промежуток без повторов и пробелов. Ну, а количество чисел, которые придется пройти, равно числу «пустых мест» на промежутке.

**Д17. Ответ:** 10100.

Если *непрерывно* поворачивать правильный 100-угольник против часовой стрелки вокруг его центра, то каждая строка чисел обязательно встретится. Заметим, что строка будет изменяться только в тот момент, когда одна из диагоналей или сторон 100-угольника, которая не была параллельна краю стола, станет ему параллельной. Если же отрезок перестаёт быть параллельным краю, то строка не изменяется. Действительно, при равенстве расстояний от вершин до края сначала записывалось левое число, а при повороте против часовой стрелки дальше от края отодвинется правое число.

У правильного 100-угольника ровно 50 различных направлений сторон. Любая его диагональ параллельна либо какой-то стороне, либо диагонали, соединяющей вершины многоугольника, идущие через одну, — таких различных направлений ещё 50. За полный оборот 100-угольника каждое направление оказывается параллельным краю ровно два раза, направлений — 100, поэтому смена строк происходит ровно 200 раз. Значит, различных строк не более чем 200. С другой стороны, каждое число $N$ встречается на 13-м месте по крайней мере в двух строках. Действительно, пусть шестое и седьмое числа против часовой стрелки от $N$ — это $X$ и $Y$, а шестое число по часовой стрелке от $N$ — это $Z$.

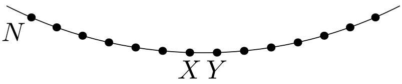



Рис. 7а

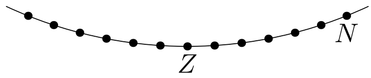



Рис. 7б

Повернём 100-угольник так, чтобы вершины $X$ и $Y$ оказались ближайшими к краю, а сторона $XY$ — параллельна краю (см. рис. 7а). Тогда на первом месте в строке будет $X$, а на тринадцатом — $N$. Повернём теперь 100-угольник так, чтобы вершина $Z$ стала ближайшей к краю, а диагональ, соединяющая соседей $Z$, параллельна краю (см. рис. 7б). Тогда на первом месте в строке будет $Z$, а на тринадцатом — $N$.

Итак, мы нашли 200 различных строк. Значит, это все возможные строки, и каждое из чисел от 1 до 100 встречается на тринадцатом месте ровно в двух строках. Следовательно, сумма чисел на тринадцатых местах равна

$$2(1 + 2 + \ldots + 100) = 10100.$$

В этой задаче непрерывность не используется явным образом, но демонстрируется приём, который часто используется вкупе с соображениями непрерывности: мы вращаем фигуру и отслеживаем изменение некоторой величины.

**Д18***. Уменьшим окружность в 25 раз, тогда длины противоположных дуг будут отличаться на 1. Занумеруем стороны 50-угольника, например, по часовой стрелке. Пусть $a_k$ — сторона с номером $k$, $L_k$ — длина соответствующей дуги (удобно использовать для сторон и дуг индексы, большие пятидесяти: если $k > 50$, то $a_k$ — это $a_{k-50}$ и аналогично для $L_k$).

Стороны $a_k$ и $a_{k+25}$ параллельны, если две дуги, заключённые между ними, равны, то есть когда число $S_k = (L_{k+1} + L_{k+2} + \ldots + L_{k+24}) - (L_{k+26} + L_{k+27} + \ldots + L_{k+49})$ равно нулю.

Заметим, что при любом $k$ число $S_k$ – чётное, так как является суммой 24 разностей $L_{k+1} - L_{k+26}$, $L_{k+2} - L_{k+27}$, ..., $L_{k+24} - L_{k+49}$, каждая из которых равна $\pm 1$. Так как $S_{k+1} = (L_{k+2}+L_{k+3}+\ldots+L_{k+25})-(L_{k+27}+L_{k+28}+\ldots+L_{k+50})$, то $S_{k+1} - S_k = (L_{k+25} - L_k) + (L_{k+26} - L_{k+1})$. Эта разность может принимать значения 0 и $\pm 2$, то есть каждое следующее значение $S_k$ либо не отличается от предыдущего, либо отличается на 2. Заметим, что $S_{26} = -S_1$ (уменьшаемое и вычитаемое меняются ролями). Поэтому, по *теореме о промежуточном значении*, между $S_1$ и $S_{26}$ найдётся число $S_k$, которое обращается в нуль, что и требовалось.

Отметим, что абсолютные значения длин дуг в условии задачи не существенны, важно только равенство их разностей.

**Д19. Ответ:** решений нет.

Данное неравенство равносильно неравенству $3x^2 - bx - c \leqslant 0$. Дискриминант квадратного трёхчлена $f(x) = 3x^2 - bx - c$: $D = b^2 + 12c < 0$, значит, $f(x)$ не имеет корней, следовательно, в силу *непрерывности*, она сохраняет свой знак на $(-\infty; +\infty)$. Так как коэффициент при $x^2$ положителен, то только отрицательные значения трёхчлен принимать не может. Значит, все его значения положительные.

**Д20. Ответ:** а) $c > 0$; б) $c < 0$; в) $c > 0$.

Так как трёхчлен не имеет корней, то, *в силу непрерывности*, он сохраняет свой знак на $(-\infty; +\infty)$. При этом а) $y(1) = a + b + c > 0$;

б) $y(-1) = a - b + c < 0$;

в) $y(2) = 4a + 2b + c > 0$.

Так как $c = y(0)$, то в пунктах а) и в) $c > 0$, а в пункте б) $c < 0$.

**Д21.** Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$. Из данного неравенства следует, что $a - b + c < 0$ и $a + b + c > 0$. Первое условие означает, что $f(-1) < 0$, а второе условие — что $f(1) > 0$. Таким образом, график функции, которая *непрерывна*, должен пересечь ось $x$, а поскольку это парабола, то она пересекает ось $x$ в двух точках, то есть данное уравнение имеет два корня.

**Д22. Ответ:** $f(b) < 0$.

График данного трёхчлена — парабола, ветви которой направлены вверх.

*Первый способ.* Заметим, что $f(b) = b^2 + ab + b = b(a + b + 1) = f(0) \cdot f(1)$. Из *непрерывности квадратного трёхчлена* и из условия задачи следует, что числа $f(0)$ и $f(1)$ имеют разные знаки (см. рис. 8а, б). Следовательно, $f(b) < 0$.

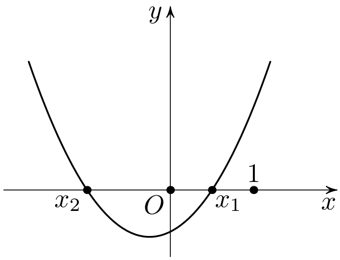



Рис. 8а

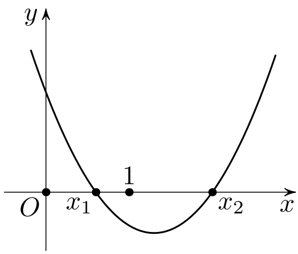



Рис. 8б

*Второй способ.* Пусть $x_1 \in (0; 1)$, $x_2 \notin [0; 1]$. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = b$, значит, $x_2 = \dfrac{b}{x_1}$. Тогда $|x_2| > |b|$. Учитывая, что $x_1 > 0$, рассмотрим два случая:

1) Если $x_2 < 0$, то $b = x_1 \cdot x_2 < 0$ и $x_2 < b$. Следовательно, $b \in (x_2; x_1)$, то есть $f(b) < 0$ (см. рис. 8а).

2) Если $x_2 > 1$, то $b = x_1 \cdot x_2 > 1$ и $x_2 > b$. Следовательно, $b \in (x_1; x_2)$, то есть $f(b) < 0$ (см. рис. 8б).

**Д23.** Заметим, что уравнение $2x^2 - 3px - 3q = 0$ равносильно уравнению $\frac{2}{3}x^2 - px - q = 0$, а уравнение $x^2 + px + q = 0$ равносильно уравнению $-x^2 - px - q = 0$. Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - px - q$. Тогда $f(x) = (x^2 - px - q) - \frac{1}{3}x^2 = (-x^2 - px - q) + \frac{5}{3}x^2$. Из условия задачи следует, что $f(x_2) = -\frac{1}{3}x_2^2 \leqslant 0$; $f(x_1) = \frac{5}{3}x_1^2 \geqslant 0$. Следовательно, по *теореме о промежуточном значении*, один из нулей $x_3$ функции $f(x)$ расположен между $x_1$ и $x_2$, что и требовалось. (*Сравните с задачей* 4.6.)

**Д24.** Рассмотрим квадратичную функцию $y = x^2 + px + q$. Её график — парабола, ветви которой направлены вверх. Докажем, что этот график не имеет общих точек с осью абсцисс, тогда из этого, *в силу непрерывности функции*, будет следовать, что она принимает только положительные значения.

Пусть это не так, то есть $x_1$ и $x_2$ — нули функции, тогда, по теореме Виета, $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$. Кроме того, из условия задачи следует, что числа $x_1$ и $x_2$ не могут быть целыми. Заметим, что $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{p^2 - 4q}$. Так как числа $p$ и $q$ — целые, то эта величина либо равна нулю, либо её значение не меньше чем 1.

В первом случае $x_1 = x_2$. Тогда число $q = x_1 \cdot x_2$ является квадратом нецелого числа, поэтому и само не является целым, что невозможно.

Во втором случае между числами $x_1$ и $x_2$ на оси абсцисс есть хотя бы одно целое число $m$, причем $y(m) < 0$ — противоречие.

**Д25. Ответ:** да, существует.

Так как обе функции $y = \sin x$ и $y = ax$ являются нечётными и $x = 0$ — корень данного уравнения при любом значении $a$, то достаточно доказать, что уравнение может иметь 1006 положительных корней.

При $a = 1$ корень $x = 0$ — единственный, так как при $x > 0$ выполняется неравенство $\sin x < x$. Будем непрерывно поворачивать эту прямую вокруг начала координат по часовой стрелке. Так как на отрезках вида $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$ график располагается выпуклостью вверх, то сначала прямая пересечёт график синуса на отрезке $[0; \pi]$ ещё в одной точке, затем станет касательной к графику на отрезке $[2\pi; 3\pi]$, а затем пересечёт график на этом отрезке в двух точках, и так далее.

Таким образом, при таком непрерывном движении будет постепенно добавляться по одному корню уравнения. Вместе с тем, существует значение $a$, например, $a = 10^{-6}$, для которого количество положительных корней уравнения заведомо больше, чем 1006.

Следовательно, по *теореме о промежуточном значении*, найдётся искомое значение $a$.

**Д26.** Рассмотрим произвольную прямую $m$, пересекающую обе окружности. Точки их пересечения последовательно обозначим через $A$, $B$, $C$ и $D$ (см. рис. 9). Тогда, в силу симметрии относительно общего серединного перпендикуляра к отрезкам $AD$ и $BC$, получим, что $AB = CD$.

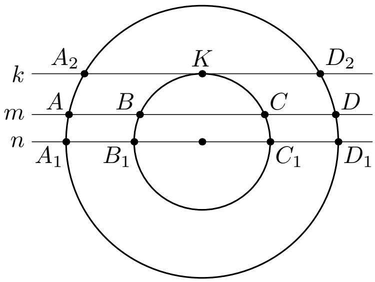



Рис. 9

Проведём также прямые $n$ и $k$, параллельные $m$, так, чтобы $n$ содержала общий центр окружностей, а $k$ была касательной к меньшей окружности и располагалась в той же полуплоскости относительно прямой $n$, что и $m$ (общие точки этих прямых и окружностей обозначим так, как показано на рис. 9). Тогда $A_1B_1 = C_1D_1 = R$; $B_1C_1 = 2R$; $A_2K = D_2K > R$.

Будем параллельно перемещать прямую $m$ между прямыми $n$ и $k$. Для любого положения прямой $m$, которое можно задать, например, её расстоянием $d$ до центра окружностей, рассмотрим величину $P = AB - BC$. При малых изменениях $d$ величина $P$ также мало изменяется, поэтому зависимость $P$ от $d$ является непрерывной функцией. При этом при $d = 0$ значение $P = -R < 0$, а при $d = R$ значение $P = R\sqrt{3} > R > 0$ (так как $B_2 \equiv C_2 \equiv K$). Следовательно, найдётся такое положение прямой $m$, для которого $P = 0$. Оно и будет искомым.

При желании можно, используя теорему Пифагора, вычислить, что искомая прямая удалена от центра окружностей на расстояние $d = \frac{R\sqrt{10}}{4}$.

**Д27. Ответ:** да, существует.

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$: $AD = BD = CD = a$, $AB = BC = b < \frac{a}{2}$ (см. рис. 10). Его периметр равен $2(a+b)$. Рассмотрим произвольную точку $P$ на диагонали $BD$, $PD = x$. Тогда зависимость искомой суммы расстояний от $x$ является непрерывной функцией, так как при малых изменениях $x$ сумма $PB + PD$ не изменяется, а $PA = PC$ изменяется мало.

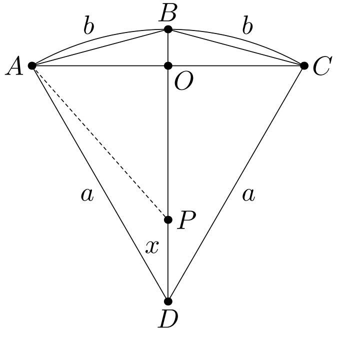


Рис. 10

Пусть точка $P$ совпала с точкой $O$ пересечения диагоналей четырёхугольника, тогда искомая сумма равна $AC + BD < a + 2b < 2(a+b)$. Если же точка $P$ совпала с вершиной $D$ ($x = 0$), то искомая сумма равна $AD+BD+CD = 3a > 2(a+b)$, так как $a > 2b$.

По *теореме о промежуточном значении*, при некотором положении точки $P$ внутри четырёхугольника искомая сумма будет равна периметру четырёхугольника.

**Д28*. Ответ:** да, существует.

Зафиксируем вершины $A$ и $B$ треугольника $ABC$, построим точку $D$, симметричную точке $A$ относительно точки $B$, и выберем точку $C$ так, что $\angle BCD = 150^\circ$ (см. рис. 11). Тогда высота $AK$ треугольника $ABC$ равна расстоянию $DH$ от точки $D$ до прямой $BC$, то есть равна половине $CD$. С другой стороны, медиана $BM$ является средней линией треугольника $ACD$, значит, она также равна половине $CD$. Таким образом, $AK = BM$.

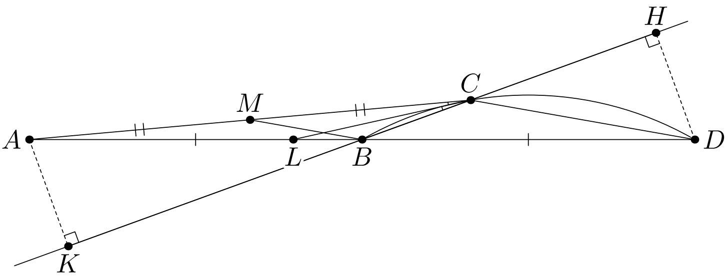



Рис. 11

Будем теперь «двигать» точку $C$ по дуге $BD$, вмещающей угол $150^\circ$. При таком изменении положения точки $C$ доказанное равенство медианы и высоты сохраняется. Рассмотрим зависимости длин биссектрисы $CL$ и медианы от длины дуги $BC$. При малых изменениях длины дуги обе рассматриваемые величины изменяются мало, то есть обе зависимости являются непрерывными функциями.

Если точка $C$ близка к точке $B$, то длина $AC$ мало отличается от длины $AB$, а длина $BC$ близка к нулю. Поэтому и отношение $LB : LA = CB : CA$ близко к нулю, значит, и длина $CL$ близка к нулю. В то же время длина $CD$ близка к длине $BD$ (равной $AB$), значит, длина $BM = \frac{1}{2}CD$ близка к половине длины $AB$. Следовательно, в этом случае $CL < BM$.

Если же точка $C$ близка к точке $D$, то длина $BM$ близка к нулю. В то же время длина $CL$ близка к длине $DL \geqslant$ $\geqslant DB = AB$, откуда $CL \geqslant BC > BM$.

Таким образом, по обобщению *теоремы о промежуточном значении*, найдётся положение точки $C$, при котором $CL = BM$.

Нетрудно заметить, что по мере движения по дуге точки $C$ от $B$ к $D$ длина биссектрисы возрастает, а длины высоты и медианы убывают. Следовательно, углы искомого треугольника в построенной конфигурации определяются однозначно.

**Д29. Ответ:** $\left(1; \sqrt{2}\,\right]$.

Искомое отношение равно $\dfrac{a+b}{c} = \sin\alpha + \cos\alpha =$ $\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$, где $\alpha$ — величина одного из острых углов прямоугольного треугольника. Если $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то наибольшее значение полученного выражения достигается при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, а наименьшее — при $\alpha = 0$.

В силу *непрерывности функции синус*, выражение принимает все значения от наименьшего до наибольшего. Так как при $\alpha = 0$ треугольник — «вырожденный», то соответствующее значение в ответ не включено.

**Д30. Ответ:** $[1; 9]$.

*Первый способ.* Рассмотрим две окружности на координатной плоскости: $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$, их радиусы 1 и 2 соответственно, а $O(0; 0)$ — общий центр. По условию, точка $M(a; b)$ принадлежит первой окружности, а точка $N(c; d)$ — второй. Так как $(a-c)^2 + (b-d)^2 = MN^2$, то найдём вначале наибольшее и наименьшее расстояние между точками этих окружностей.

По неравенству треугольника: $MN \leqslant MO + ON = 1 + 2 =$ $= 3$ и $MN \geqslant NO - OM = 2 - 1 = 1$, причём эти значения достигаются в случаях, когда точки $O$, $M$ и $N$ лежат на одной прямой (треугольник — «вырожденный»). Таким образом, наибольшее значение $MN^2$ равно 9, а наименьшее равно 1.

Зафиксируем положение точки $N$ на большей окружности и рассмотрим зависимость $MN^2$ от положения точки $M$ на меньшей окружности. При малых изменениях этого положения (длины дуги) мало изменяется и значение $MN^2$, то есть эта зависимость является *непрерывной функцией*. Значит, *по теореме о множестве значений* (*см. занятие* 7), $MN^2$ может принимать все значения от наименьшего до наибольшего.

*Второй способ.* Преобразуем: $(a-c)^2+(b-d)^2=a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2=5-2(ac+bd)$. Для оценки значений полученного выражения рассмотрим векторы $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{(a;b)}$ и $\overrightarrow{y}=\overrightarrow{(c;d)}$. Тогда скалярное произведение $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}=|\overrightarrow{x}|\cdot|\overrightarrow{y}|\cdot\cos\angle(\overrightarrow{x};\overrightarrow{y})=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\cdot\cos\angle(\overrightarrow{x};\overrightarrow{y})=2\cos\angle(\overrightarrow{x};\overrightarrow{y})$. Так как *функция косинус непрерывна* на $[0;180^\circ]$, то скалярное произведение векторов принимает все значения от наименьшего до наибольшего. Эти значения $-2$ и $2$ достигаются в случаях противоположной и одинаковой направленности векторов соответственно.

Следовательно, $-4\leqslant-2(ac+bd)\leqslant4\Leftrightarrow1\leqslant5-2(ac+bd)\leqslant9$ (и все промежуточные значения достигаются).

*Третий способ.* Так как $a^2+b^2=1$, то существует значение $\alpha\in(-\pi;\pi]$, для которого $\cos\alpha=a$; $\sin\alpha=b$. Аналогично, $c^2+d^2=4\Leftrightarrow\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2=1$, поэтому существует значение $\beta\in(-\pi;\pi]$, для которого $\cos\beta=\frac{c}{2}$; $\sin\beta=\frac{d}{2}$. И наоборот, выбрав произвольные значения $\alpha$ и $\beta$ из указанных промежутков, мы получим четвёрку чисел $a$, $b$, $c$ и $d$, удовлетворяющую условию.

Тогда

$$(a-c)^2+(b-d)^2=(\cos\alpha-2\cos\beta)^2+(\sin\alpha-2\sin\beta)^2=$$
$$=\cos^2\alpha-4\cos\alpha\cos\beta+4\cos^2\beta+\sin^2\alpha-4\sin\alpha\sin\beta+$$
$$+4\sin^2\beta=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+4(\cos^2\beta+\sin^2\beta)-$$
$$-4(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=5-4\cos(\alpha-\beta).$$

Так как $-1 \leqslant \cos(\alpha - \beta) \leqslant 1$ (значения $1$ и $-1$ достигаются в случаях, когда $\alpha = \beta$ и $\alpha = \pi + \beta$ соответственно), то $1 \leqslant (a-c)^2 + (b-d)^2 \leqslant 9$. Все промежуточные значения достигаются в силу *непрерывности функции* $\cos x$.

Заметим, что «векторный» и «тригонометрический» способы решения похожи потому, что тригонометрическая формула косинуса разности доказывается, как правило, с помощью векторов.

**Д31.** Заметим, что существует единственный прямоугольник, стороны которого имеют заданное направление, описанный около данной фигуры. Рассмотрим один из таких прямоугольников со сторонами $a$ и $b$ (см. рис. 12). Пусть, например, $a > b$, тогда будем постепенно менять направление, заменяя прямоугольник на другой описанный. По мере изменения направления длины сторон прямоугольника изменяются *непрерывно*. При смене направления на $90^\circ$ мы получим тот же прямоугольник, стороны которого поменялись ролями, то есть возникнет ситуация, когда $a < b$. По *обобщению теоремы о промежуточном значении*, существует промежуточное положение прямоугольника, при котором $a = b$, что и требовалось.

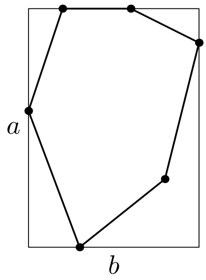


Рис. 12

Почему длины сторон меняются непрерывно? Хочется воспользоваться тем, что положение касательной к выпуклому многоугольнику непрерывно зависит от положения точки касания. Однако в нашем случае этого не достаточно, поскольку мы меняем не точку касания, а направление прямой (угол), а точка касания при этом может «скакнуть»: например, из одного конца стороны многоугольника в другой.

Рассмотрите этот случай отдельно и убедитесь, что расстояние между противоположными параллельными касательными (длина стороны описанного прямоугольника) изменяется непрерывно и при таком «скачке».

Отметим, что утверждение задачи выполняется для любой выпуклой ограниченной фигуры, но доказательство этого факта требует ещё более «тонких» рассуждений. Более того, оно справедливо не только для выпуклых фигур, поскольку невыпуклую фигуру можно заменить её выпуклой оболочкой.

**Д32.** Рассуждением, аналогичным разобранному в примере 6.2, показываем, что в каждом направлении существуют две параллельные хорды, которые делят площадь фигуры в отношении 1 : 2. Рассмотрим две такие хорды с длинами $a$ и $b$ (см. рис. 13). Пусть, например, $a > b$, тогда будем постепенно менять направление, заменяя эти хорды на другие, обладающие аналогичным свойством (см. пример 6.3). По мере изменения направления длины обеих хорд меняются *непрерывно*. При смене направления на $180^\circ$ хорды поменяются ролями, то есть возникнет ситуация, когда $a < b$. По обобщению *теоремы о промежуточном значении*, существует положение, при котором $a = b$, что и требовалось.

И в этом случае возникает вопрос: почему, собственно, длина хорды изменяется непрерывно? Доказать это можно так же, как в комментарии к задаче 6.6.

Вкратце: пусть при смене угла хорда с концом $A'$ заняла положение хорды с концом $A$. Тогда новая хорда лежит в полосе, проходящей через концы старой. При малых изменениях угла ширина полосы мала, поэтому мало́ и расстояние $h$ от точки $A'$ до края полосы (где лежит точка $A$). В то же время $A'$ лежит на стороне многоугольника, которая образует с полосой фиксированный угол $\varphi$. Поэтому точка $A'$ сместится на расстояние $\dfrac{h}{\operatorname{tg}\varphi}$, которое мало́ при малых значениях $h$. А если концы хорды сместились мало, то и её длина изменилась мало.

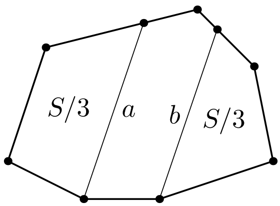



Рис. 13

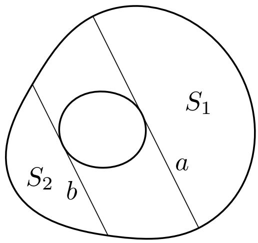



Рис. 14а

**Д33.** а) Проведём две произвольные параллельные хорды внешней фигуры, являющиеся касательными к внутренней. Они отсекут от внешней фигуры части с площадями $S_1$ и $S_2$ (см. рис. 14а). Пусть, например, $S_1 > S_2$. Будем постепенно поворачивать прямые, содержащие эти хорды (*например, по часовой стрелке*), так, чтобы сохранялось касание получающихся хорд с внутренней фигурой. При малых изменениях угла мало изменяются и площади отсекаемых фигур, то есть зависимости площадей этих фигур от угла поворота являются *непрерывными функциями*. При повороте на $180^\circ$ отсекаемые части поменяются «ролями», то есть окажется, что $S_1 < S_2$. По обобщению *теоремы о промежуточном значении*, найдётся положение хорд, для которого $S_1 = S_2$, что и требовалось.

Заметим, что если внутренняя фигура «стянется» в точку, то мы получим условие задачи 6.1.

б) Проведём две произвольные параллельные хорды внешней фигуры, являющиеся касательными к внутренней. Пусть длины этих хорд равны $a$ и $b$ и, например, $a > b$. Будем постепенно поворачивать прямые, содержащие эти хорды (*например, по часовой стрелке*), так, чтобы сохранялось касание получающихся хорд с внутренней фигурой. При малых изменениях угла мало изменяются и длины хорд, то есть зависимости этих длин от угла поворота являются *непрерывными функциями*. При повороте на $180^\circ$ хорды поменяются «ролями», то есть окажется, что $a < b$. По обобщению *теоремы о промежуточном значении*, найдётся положение хорд, для которого $a = b$, что и требовалось.

в) Средивсех хорд внешней фигуры, которые касаются внутренней, существует хорда $AB$ наибольшей длины (не обязательно единственная[1]). Проведём из точек $A$ и $B$ хорды $AC$ и $BD$, которые также касаются внутренней фигуры (см. рис. 14б), тогда $AC \leqslant AB$ и $BD \leqslant AB$. Будем

[1]Существование хорды наибольшей длины, на самом деле, следует из того, что *функция, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве* (*компакте*), достигает на нём наименьшего и наибольшего значений. Для функций, непрерывных на отрезке, это свойство было сформулировано и использовано в занятии 5, но в данном случае оно применяется для функции, непрерывной на замкнутой кривой.

«двигать» точку $B$ по границе внешней фигуры, проводя каждый раз по две хорды, касающиеся внутренней фигуры. Рассмотрим зависимость разности $BD - BA$ от положения точки $B$. При малых изменениях этого положения разность изменяется мало, поэтому такая зависимость является *непрерывной функцией*. В начальном положении $BD - BA \leqslant 0$, а в случае, когда точка $B$ займёт положение точки $A$, эта разность станет равна $AB - AC \geqslant 0$. Таким образом, по *теореме о промежуточном значении*, найдётся такая точка $P$, что рассматриваемая разность равна нулю, что и требовалось.

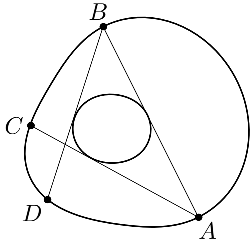


Рис. 14б

Обосновать непрерывность изменения длины хорды по мере движения её конца по границе фигуры можно примерно так же, как это описано в комментариях к задачам 6.6 и Д32.

**Д34.** Пусть $DH$ — высота правильного тетраэдра $DABC$ (см. рис. 15). Для любой точки $M$, лежащей на высоте, выполняется равенство $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = \alpha$. Пусть точка $M$ движется по отрезку $DH$, тогда зависимость $\alpha(x)$, где $x = MD$, является непрерывной функцией, так как при малых изменениях значения $x$ величина $\alpha$ также изменяется мало.

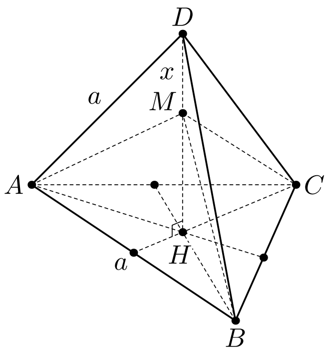


Рис. 15

Кроме того, если точка $M$ совпадает с вершиной $D$ ($x = 0$), то $\alpha = 60^\circ$, а если $M$ совпадает с $H$ ($x = DH$), то $\alpha = 120^\circ$. По *теореме о промежуточном значении*, найдётся такое положение точки $M$, что $\alpha = 90^\circ$, что и требовалось.

При необходимости можно вычислить соответствующее значение $DM$. Пусть длина ребра тетраэдра равна $a$, тогда $HA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $DH =$

$= \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Если $\angle AMB = 90^\circ$, то $MA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $MH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6} = DM$, то есть $M$ — середина $DH$!

**Д35. Ответ:** $\left[1; \sqrt{3}\right]$.

Рассмотрим зависимость величины $S = XY$ от времени $t$. При малых изменениях $t$ величина $S$ также мало изменяется, поэтому *функция* $S(t)$ — *непрерывная*.

Найдём наибольшее и наименьшее значения, которые может принимать $S$ (см. рис. 16). Наиболее удалённые точки куба — концы его диагонали, поэтому значение $S = A'C = \sqrt{3}$, которое достигается в начальный момент, является наибольшим. Кроме того, точки $X$ и $Y$ одновременно достигнут вершин $A$ и $B$, значит, существует значение $S$, равное 1. Оно является наименьшим, так как для любого промежуточного положения точек $X$ и $Y$ выполняются неравенства $XY > AY > AB$ (см. рис. 16).

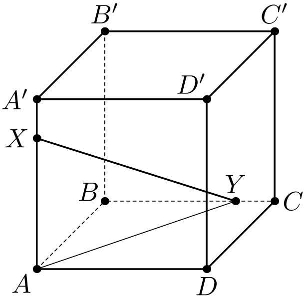


Рис. 16

*По теореме о множестве значений*, расстояние $XY$ принимает все значения от 1 до $\sqrt{3}$ включительно.

**Д36. Ответ:** да, можно.

Утверждение задачи практически является следствием факта, доказанного в примере 7.2.

**Д37.** Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — данный куб (см. рисунки 17а–в).

а) Рассмотрим сечения, проходящие через ребро $AD$ и пересекающие грань $BB'C'C$. Так как $AD || BB'C'$, то прямая $RT$ пересечения этой грани с плоскостью сечения параллельна $AD$ (см. рис. 17а). Кроме того, $RT = BC = AD$, следовательно, $ADRT$ — параллелограмм. Так как $AD \perp ABB'$, то $AD \perp AT$, значит, $ADRT$ — прямоугольник. Изменяя угол наклона $\alpha$ плоскости сечения к плоскости $ABC$, мы будем получать прямоугольники различной площади $S = AD \cdot AT$. При малых изменениях $\alpha$ длина $AT$ изменяется мало, значит, и площадь сечения изменяется мало, то есть $S(\alpha)$ — непрерывная функция. (*При желании можно записать выражение для площади сечения в явном виде*: $S = \frac{S_{ABCD}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$, *где* $\alpha \in [0; 45°]$.)

При $\alpha = 0$ сечением куба является грань $ABCD$ площади 1, а при $\alpha = 45°$ сечением является прямоугольник $AB'C'D$ площади $\sqrt{2} > 1{,}4$. По *теореме о промежуточном значении*, найдётся значение $\alpha$, для которого площадь сечения равна 1,4, что и требовалось.

Несложно получить искомое сечение и в явном виде. Отложим на ребрах $BB'$ и $CC'$ соответственно точки $T$ и $R$ так, чтобы $BT = CR = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Тогда сечением будет являться прямоугольник со сторонами 1 и $\frac{7}{5}$.

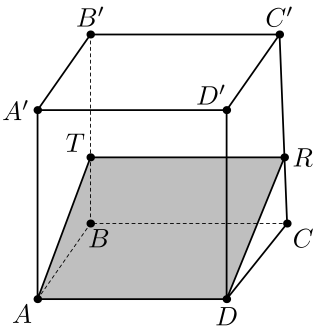



Рис. 17а

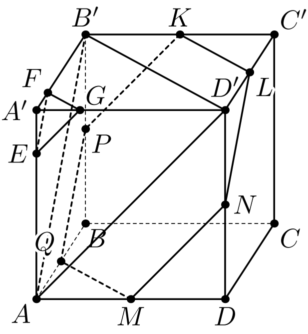



Рис. 17б

б) Отметим на рёбрах $A'A$, $A'D'$ и $A'B'$ куба точки $E$, $F$ и $G$ на одинаковом расстоянии от вершины $A'$ (см. рис. 17б). Тогда сечение куба плоскостью $EFG$ является равносторонним треугольником. Так как вершины этого треугольника равноудалены от точки $A'$, то ортогональной проекцией $A'$ на плоскость сечения является центр треугольника $EFG$. Аналогично вершины сечения равноудалены от точки $C$ (это следует, например, из равенства прямоугольных треугольников $EAC$, $GD'C$ и $FB'C$), поэтому и точка $C$ проектируется в центр треугольника $EFG$. Таким образом, плоскость сечения перпендикулярна диагонали $A'C$ куба.

Изменяя положение точек $E$, $F$ и $G$ (но сохраняя их равноудалённость от $A'$), можно получить различные треугольные сечения куба, перпендикулярные $A'C$. Рассмотрим зависимость площади $S$ сечения от расстояния $x$ от $A'$ до плоскости сечения. Так как при малых изменениях значения $x$ мало изменяются длины сторон сечения, то мало изменяется и его площадь, то есть эта зависимость является *непрерывной функцией*.

При этом если сечение $EFG$ проходит близко к вершине $A'$, то его площадь близка к нулю, а если вершины сечения совпадают с вершинами $A$, $B'$ и $D'$ куба, то его сторона равна $\sqrt{2}$, а $S = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0{,}8$ $\left(x = \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. В силу *теоремы о промежуточном значении*, существует значение $x$, при котором треугольное сечение имеет площадь $0{,}8$, что и требовалось.

Несложно вычислить, что искомую площадь $0{,}8$ имеет равносторонний треугольник со стороной $a = \sqrt{\frac{3{,}2}{\sqrt{3}}} < \sqrt{2}$. Поэтому его вершины можно построить, отложив от вершины куба на трёх рёбрах, выходящих из неё, отрезки длиной $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

в) Рассмотрим сначала сечения, параллельные плоскости $AB'D'$ и пересекающие ребро $D'C'$ на расстоянии $x$ от вершины $D'$ $(0 < x \leqslant 0{,}5)$. Плоскости таких сечений пересекают все грани куба, поэтому эти сечения — шестиугольники. И в этом случае при малых изменениях $x$ мало изменяются длины сторон сечения, а значит, мало изменяется и его площадь, поэтому $S(x)$ *является непрерывной функцией*.

При $x = 0{,}5$ сечение проходит через середины рёбер, значит, оно является правильным шестиугольником $MNLKPQ$ со стороной $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. рис. 17б). Его площадь

$S = \frac{0{,}5\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{3\sqrt{3}}{4} > 1{,}25$. При значениях $x$, близких к нулю, сечение проходит близко к вершинам треугольника $AB'D'$, поэтому его площадь мало отличается от площади этого треугольника, которая равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть $S < 1$. В силу *теоремы о промежуточном значении*, существует значение $x$, при котором шестиугольное сечение имеет площадь 1,2, что и требовалось.

Теперь выберем точки $M$ и $N$ на рёбрах $AA'$ и $CC'$ соответственно так, чтобы $A'M = C'N = a < 0{,}5$. Тогда сечение куба плоскостью $DMN$ является пятиугольником (см. рис. 17в). При малых изменениях $a$ длины сторон сечения и его углы изменяются мало, поэтому мало изменяется и его площадь $S$, то есть зависимость $S(a)$ *является непрерывной функцией*.

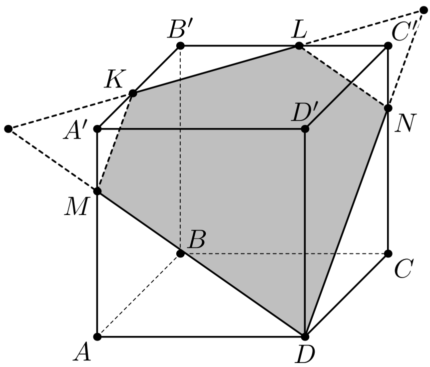



Рис. 17в

При этом если значение $a$ близко к нулю, то точки $M$ и $N$ практически совпадают с вершинами $A'$ и $C'$, поэтому площадь пятиугольника мало отличается от площади треугольника $DA'C'$, равной $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. При значении $a$, близком к 0,5, площадь пятиугольника почти не отличается от площади четырёхугольного сечения, проходящего через середины рёбер $AA'$ и $CC'$ и вершину $B'$. Такое сечение является ромбом с диагоналями $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$, поэтому его площадь равна $\dfrac{\sqrt{6}}{2} > 1{,}2$. По *теореме о промежуточном значении*, найдётся значение $a$, для которого площадь пятиугольного сечения равна 1,2, что и требовалось.

**Д38$^*$.** Для каждой стороны треугольника $ABC$ построим на плоскости множество точек, из которых эти отрезки видны под углом $\varphi$. Мы получим шесть дуг, которые попарно ограничивают три области. Обозначим границы областей через $\omega_A$, $\omega_B$ и $\omega_C$, а точки их попарного пересечения через $K$, $L$ и $M$ так, как показано на рис. 18.

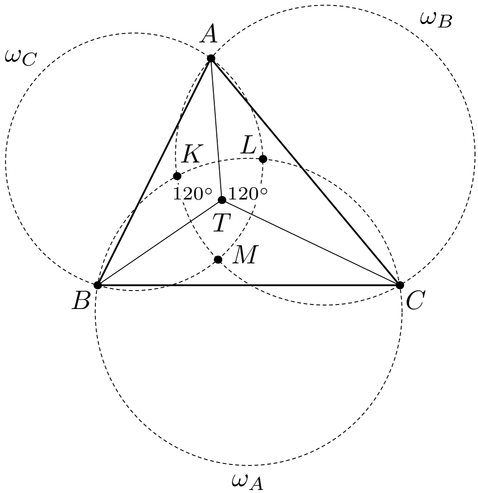



Рис. 18

Пересечение трёх областей также является некоторой областью (этой области, например, принадлежит точка Торричелли $T$, из которой каждая сторона треугольника $ABC$ видна под углом $120^\circ$). Понятно также, что точки $M$, $L$ и $K$ лежат в областях, ограниченных $\omega_A$, $\omega_B$ и $\omega_C$ соответственно.

Рассмотрим теперь множество точек пространства, из которых отрезок $BC$ виден под углом $\varphi$. Оно представляет собой поверхность, получающуюся при вращении $\omega_A$ вокруг $BC$, которую обозначим $F_A$. Аналогично получим ещё две поверхности — $F_B$ и $F_C$. Пересечением поверхностей $F_A$ и $F_B$ будет некоторая непрерывная кривая, проходящая через точки $C$ и $K$, причём $K$ лежит внутри тела, ограниченного поверхностью $F_C$, а $C$ — вне этого тела. Значит, линия пересечения поверхностей $F_A$ и $F_B$ будет также пересекать и $F_C$. Эта точка и будет искомой.

**Д39*.** Объём тетраэдра $ABCD$ зависит от величин $\alpha$ и $\beta$ двугранных углов при рёбрах $AC$ и $BD$. Допуская вырожденные случаи, можно считать, что $\alpha \in [0; 2\pi]$ и $\beta \in \in [0; 2\pi]$. При малых изменениях углов этот объём изменяется незначительно, поэтому является *непрерывной функцией двух переменных*, заданной на замкнутом ограниченном множестве (*компакте*). Следовательно, на этом множестве достигается её наибольшее значение (*см. комментарий к задаче* Д33).

Рассмотрим тетраэдр $ABCD$ наибольшего объёма. Предположим, что двугранный угол хотя бы при одном из рассматриваемых рёбер — не прямой (например, угол $\alpha$ при ребре $AC$). Тогда, зафиксировав грань $ABC$, можно повернуть грань $ADC$ так, что объём тетраэдра увеличится. Полученное противоречие показывает, что оба рассматриваемых угла — прямые.

**Д40.** Пусть $P$ — точка пересечения диагоналей $A_1A_4$, $A_2A_5$ и $A_3A_7$ выпуклого семиугольника $A_1A_2 \ldots A_7$. Тогда диагональ $A_3A_6$ не проходит через точку $P$.

Рассмотрим точки пересечения диагоналей шестиугольника $A_1 \ldots A_6$. Их количество конечно, поэтому вблизи точки $A_7$ (вне исходного семиугольника) можно выбрать такую точку $A_7'$, что прямые $A_1A_7'$, $A_2A_7'$, ..., $A_6A_7'$ не проходят через эти точки. Через точки пересечения $A_1A_6$ с диагоналями семиугольника, выходящими из вершины $A_7$, эти прямые проходить не могут. Если точка $A_7'$ окажется на прямой, содержащей сторону исходного семиугольника, то это можно изменить небольшим её шевелением. Кроме того, выбор этой точки обеспечивает выпуклость семиугольника $A_1A_2\ldots A_7$, и он не является «особым».

**Д41. Ответ:** да, может.

Пусть изменённое уравнение имеет вид $x^2 + (p+a)x + (q+b) = 0$, где $|a| \leqslant 0{,}001$ и $|b| \leqslant 0{,}001$. Запишем формулы для вычисления бóльших корней обоих уравнений:

$$x_0 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

и

$$x_1 = \frac{-(p+a) + \sqrt{(p+a)^2 - 4(q+b)}}{2} = \frac{-(p+a) + \sqrt{2pa + (p^2 - 4q) + (a^2 - 4b)}}{2}.$$

Пусть $a = b = 0{,}001$. Выберем коэффициент $p$ так, чтобы $2pa > 10\,000\,000$, то есть $p > 5 \cdot 10^9$. После этого выберем $q$ так, чтобы $p^2 = 4q$, то есть $q = \frac{p^2}{4}$.

Тогда

$$|x_1 - x_0| = \left| -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{2pa + a^2 - 4b} \right| > -0{,}0005 + \frac{1}{2}\sqrt{9\,000\,000} = -0{,}0005 + 1500 > 1000,$$

что и требовалось.

**Д42. Ответ:** нет, неверно.

Рассмотрим, например, многочлен $P(x)$ третьей степени, имеющий единственный действительный корень $x_0$ и точку минимума $x_1 < x_0$, причём $P(x_1) > 0$ (см. рис. 19). При непрерывном уменьшении свободного члена график многочлена постепенно опускается, и в некоторый момент у него появляется новый действительный корень $x_1$.

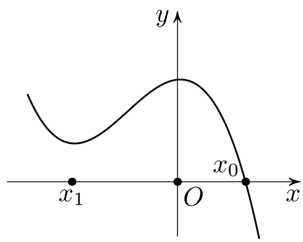



Рис. 19

Значит, непрерывно уменьшая свободный член соответствующего кубического уравнения, мы в какой-то момент получим «скачок» наименьшего корня от $x_0$ к $x_1$.

**Д43. Ответ:** да, можно.

Докажем сначала, что прожектор можно повернуть так, чтобы он освещал соседние вершины $A$ и $B$ куба $ABCDA'B'C'D'$.

Поместим прожектор в центр $O$ куба, а отрезок $AB$ в плоскость грани $MON$ освещаемого трёхгранного угла $OKMN$ (см. рис. 20). Так как $AOB$ — угол между диагоналями прямоугольника $ABC'D'$, лежащий против меньшей стороны, то $\angle AOB < 90^\circ$, значит, прожектор можно повернуть вокруг прямой $OK$ так, чтобы вершины $A$ и $B$ лежали в грани $MON$. Затем повернём прожектор на малый угол вокруг прямой $PQ$, проходящей через центры боковых граней, так, чтобы вершины $A$ и $B$ оказались внутри освещаемого угла.

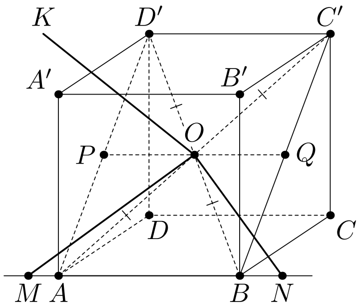


Рис. 20

Плоскости граней освещаемого прожектором угла разбивают пространство на 8 октантов. Если в этом положении найдутся вершины куба, лежащие в плоскостях граней октантов, то пошевелим чуть-чуть прожектор, чтобы такого не было, а вершины $A$ и $B$ остались в одном октанте. Теперь в одном из октантов лежат две из восьми вершин куба, поэтому найдётся октант, не содержащий ни одной вершины. Этот октант и задаёт требуемое положение прожектора.

**Д44. Ответ:** да, существует.

Пример проще всего искать в виде суммы периодической и линейной функций. Один из возможных примеров — функция, график которой похож на «пилу» (см. рис. 21а). Другой пример — функция $f(x) = \sin x + \frac{2x}{3\pi}$. Этот график — «сглаженная пила» (см. рис. 21б).

В обоих случаях можно так установить соответствие между точками максимума и минимума, чтобы в соответствующих точках функция принимала равные значения.

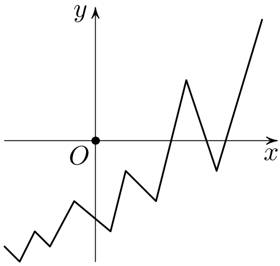



Рис. 21а

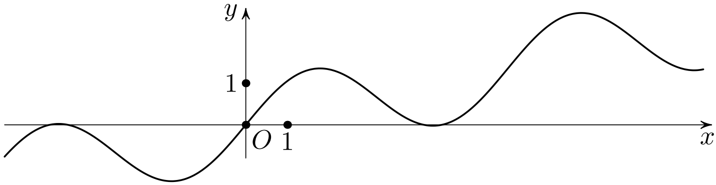



Рис. 21б

**Д45. Ответ:** например, см. рис. 22.

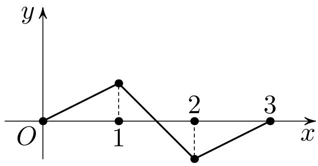



Рис. 22

**Д46.** Используем свойства непрерывных функций (*см. занятие* 4): сумма и разность непрерывных функций непрерывна; если $g(x)$ — непрерывная функция, то функция $g(ax)$ также непрерывна (композиция непрерывных функций).

Из условия задачи следует, что функции $f(x) + f(4x)$ и $f(x)+f(2x)$ непрерывны. Вместе с функцией $f(x)+f(2x)$ непрерывна и функция $f(2x)+f(4x)$. Поэтому непрерывна и функция $(f(x)+f(2x)) + (f(x)+f(4x)) - (f(2x)+f(4x)) = 2f(x)$, а значит, непрерывна и функция $f(x)$.

**Д47***. Пусть $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ — все различные действительные корни уравнения $P(x) = 0$. Докажем, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет по крайней мере $n$ различных корней. Рассмотрим $n$ уравнений: $P(x) = x_1$, $P(x) = x_2$, ..., $P(x) = x_n$. Каждое из них имеет хотя бы один корень, так как $P(x)$ — многочлен нечётной степени (*см. пример* 9.1).

Пусть $a_1$ — корень первого уравнения, $a_2$ — корень второго, ..., $a_n$ — корень $n$-го уравнения. Тогда для любых $i$ и $j$ $(i \neq j)$ числа $a_i$ и $a_j$ различны, так как $P(a_i) = x_i \neq \neq x_j = P(a_j)$. При этом каждое из чисел $a_k$ является корнем уравнения $P(P(x)) = 0$, так как $P(P(a_k)) = P(x_k) = 0$. Таким образом, уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет по крайней мере $n$ различных корней $a_1,\ \ldots,\ a_n$.

**Д48.** *Первый способ.* Предположим, что данное уравнение не имеет корней на промежутке $(0; 1)$. Тогда, в силу непрерывности, квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ сохраняет знак на этом промежутке. При этом её значения: $f(0) = c$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(a + 2b + 4c)$, $f(1) = a + b + c$ — числа одного знака. Следовательно, число $f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + + f(1) = 2a + 3b + 6c$ имеет тот же знак, что противоречит условию. Предположение неверно, следовательно, данное уравнение имеет корень на промежутке $(0; 1)$.

*Второй способ.* Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1) Если $c = 0$, то $f(x) = 0$ при $x = 0$ или $x = -\frac{b}{a}$. Из условия $2a + 3b = 0$ следует, что $-\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \in (0; 1)$, что и требовалось.

2) Если $c \neq 0$, то $f(0) = c$,

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4a + 6b + 9c}{9} = \frac{2(2a + 3b) + 9c}{9} = \frac{-12c + 9c}{9} = -\frac{c}{3}.$$

Таким образом, на концах отрезка $\left[0; \frac{2}{3}\right]$ функция принимает значения разных знаков. Следовательно, по *тео-*

*реме о промежуточном значении*, она обращается в ноль в некоторой внутренней точке этого отрезка.

*Третий способ.* Так как

$$\int\limits_0^1 \left(ax^2+bx+c\right)dx = \left(\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2a+3b+6c}{6} = 0$$

и функция $f(x) = ax^2+bx+c$ непрерывна на отрезке $[0; 1]$, то она обращается в ноль в некоторой его точке (*см. задачу* 9.6). Эта точка является внутренней, так как иначе площадь соответствующей криволинейной трапеции отлична от нуля.

**Д49. Ответ:** да, существует.

Пусть $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — углы треугольника, тогда по условию:

$$\begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta = \operatorname{tg}\gamma, \\ \alpha+\beta+\gamma = \pi, \\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0. \end{cases}$$

Так как $\sin\alpha > 0$ при $0 < \alpha < \pi$, то $\cos\beta > 0$ и $\operatorname{tg}\gamma > 0$, то есть углы $\beta$ и $\gamma$ — острые.

1) Если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то из равенства $\sin\alpha = \cos\beta$ следует, что $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$. Тогда $\gamma = \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\gamma$ не существует, то есть этот случай невозможен.

2) Если $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha < \pi$, то $\sin\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \sin(\pi-\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$, где углы $\pi-\alpha$ и $\frac{\pi}{2}-\beta$ не тупые. Следовательно, полученное равенство равносильно тому, что $\pi-\alpha = \frac{\pi}{2}-\beta \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}+\beta$. Далее можно рассуждать по-разному.

*Первый способ.* В этом случае $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\pi-(\alpha+\beta)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right) = \operatorname{ctg}2\beta$, то есть исходная система уравнений имеет решения тогда и только тогда, когда имеет решения система

$$\begin{cases} \cos\beta = \operatorname{ctg} 2\beta, \\ 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\beta \cos\beta = \cos 2\beta, \\ 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\beta\cos^2\beta = 1 - 2\sin^2\beta, \\ 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^3\beta - 2\sin^2\beta - 2\sin\beta + 1 = 0, \\ 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Пусть $\sin\beta = t$, получим уравнение $2t^3-2t^2-2t+1 = 0$.

Рассмотрим многочлен $f(t) = 2t^3 - 2t^2 - 2t + 1$, являющийся непрерывной функцией, тогда $f(0) = 1 > 0$; $f(1) = -1 < 0$, поэтому такое уравнение имеет хотя бы один корень на $(0; 1)$. Это означает, что существует $\beta$, удовлетворяющее полученной системе, значит, существует и треугольник, удовлетворяющий условию задачи.

*Второй способ.* Пусть угол $\beta$ близок к нулю, тогда угол $\alpha$ немного больше $\frac{\pi}{2}$, а угол $\gamma$ немного меньше $\frac{\pi}{2}$. В этом случае $\sin\alpha$ и $\cos\beta$ близки к 1, а $\operatorname{tg}\gamma$ очень велик, то есть $\sin\alpha = \cos\beta < \operatorname{tg}\gamma$.

Если же угол $\beta$ выбрать немного меньше $\frac{\pi}{4}$, то угол $\alpha$ будет немного меньше $\frac{3\pi}{4}$, а угол $\gamma$ будет близок к нулю. Тогда $\sin\alpha = \cos\beta > \operatorname{tg}\gamma$. Так как любая из функций $\sin x$ или $\cos x$ непрерывна и функция $\operatorname{tg} x$ на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ также непрерывна, то в какой-то момент выполняется равенство $\sin\alpha = \cos\beta = \operatorname{tg}\gamma$, то есть существует треугольник, удовлетворяющий условию задачи.

**Д50. Ответ:** да, можно.

Для удобства рассмотрим квадрат со стороной 1. Разобьём его на три прямоугольника (см. рис. 23) и докажем, что существуют такие $x$ и $y$ ($0 < x < 1$, $0 < y < 1$), что эти прямоугольники попарно подобны.

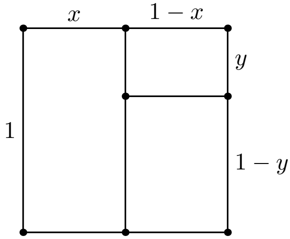



Рис. 23

Подобие прямоугольников означает, что у этих прямоугольников отношение большей стороны к меньшей одинаково, то есть $\frac{1}{x} = \frac{1-x}{y} = \frac{1-y}{1-x}$.

Из первой пропорции получим, что $y = x - x^2$, значит, $1 - y = 1 - x + x^2$. Подставляя эти выражения во вторую пропорцию, получим уравнение: $\frac{1-x}{x(1-x)} = \frac{1-x+x^2}{1-x}$. Так как знаменатели дробей положительны, то оно равносильно кубическому уравнению $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$.

Докажем, что такое уравнение имеет хотя бы один корень в интервале $(0; 1)$. Действительно, функция $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ непрерывная (так как представляет собой многочлен) и при этом $f(0) = -1$, а $f(1) = 1$, то есть на $[0; 1]$ функция принимает значения разных знаков. Следовательно, внутри этого отрезка найдётся такое число $x_0$, что $f(x_0) = 0$.

Найдём и оценим соответствующее значение $y$: $y_0 = x_0 - x_0^2 = -(x_0 - 0{,}5)^2 + 0{,}25$. Если $0 < x_0 < 1$, то $0 \leqslant (x_0 - 0{,}5)^2 < 0{,}25$, значит, $0 < y_0 \leqslant 0{,}25$. При таком значении $y_0$ два меньших прямоугольника не равны. Таким образом, требуемое разрезание квадрата возможно.

Можно доказать, что полученный многочлен имеет единственный действительный корень. Для этого достаточно найти его производную: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$ и проверить, что дискриминант этого трехчлена отрицательный, то есть $f'(x) > 0$. Значит, $f(x)$ — возрастающая функция.

Также можно доказать, что с точки зрения геометрии других вариантов разрезания квадрата на подобные прямоугольники не существует, поэтому указанный в решении способ разрезания — единственный. При этом отношение сторон прямоугольников будет выражаться через кубические корни, поэтому построение такого разбиения произвольного квадрата только с помощью циркуля и линейки невозможно.

# Вместо заключения

**1.** Приведём строгие определения понятий, связанных с непрерывностью, а также формулировки теорем, выражающие свойства непрерывных функций, в том виде, в котором они обычно даются в классических курсах математического анализа.

**Определение 1.** Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Часто используется также *утверждение*, *равносильное этому определению*:

*Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда для приращений функции в этой точке выполняется равенство* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$.

*Односторонняя непрерывность функции в точке* (*о которой, в частности, упоминается в занятии* 4), определяется аналогично путём замены предела на односторонний.

*Непрерывность в точке суммы*, *частного*, *произведения и композиции функций* следует из соответствующих теорем о пределах.

**Определение 2.** Функция $f(x)$ называется *непрерывной на* $(a; b)$, если она непрерывна в любой точке этого промежутка.

**Определение 3.** Функция $f(x)$ называется *непрерывной на* $[a; b]$, если она непрерывна в любой внутренней точке этого отрезка, в точке $a$ непрерывна справа, а в точке $b$ — слева.

*Непрерывность элементарных функций*, изучаемых в школьном курсе алгебры, *на своих областях определения* доказывается с учётом этих определений с помощью сформулированных выше теорем о непрерывности.

### Свойства функций, непрерывных на отрезке

**Теорема Больцано** (*об обращении в нуль непрерывной функции*). Если функция непрерывна на $[a; b]$ и на его концах принимает значения разного знака, то внутри этого отрезка существует точка $x_0$, в которой значение функции равно нулю.

**Следствие 1.** Если функция при этом строго монотонна на $[a; b]$, то точка $x_0$ — единственная.

**Следствие 2** (*о сохранении знака непрерывной функции, не имеющей нулей*). Если на промежутке $(a; b)$ функция непрерывна и нигде не обращается в нуль, то на этом промежутке она сохраняет свой знак.

**Следствие 3** (*о промежуточных значениях непрерывной функции*). Если функция непрерывна на $[a; b]$ и её значения на концах этого отрезка равны $P$ и $Q$ ($P < Q$), то для любого числа $T$ из промежутка $(P; Q)$ найдётся такая точка $x_0$ из промежутка $(a; b)$, что $f(x_0) = T$.

Другими словами, такая функция принимает все значения между $P$ и $Q$.

**Теорема Вейерштрасса** (*об экстремальных значениях непрерывной функции*). Функция, непрерывная на $[a; b]$, достигает на нём своего наибольшего и наименьшего значений.

**Следствие 1.** Множеством значений функции, непрерывной на $[a; b]$, является $[m; M]$, где $m$ и $M$ — наименьшее и наибольшее значение функции на этом отрезке соответственно.

**Следствие 2.** Если функция непрерывна на $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Несмотря на то, что эти утверждения наглядно очевидны, их строгое доказательство весьма непросто и опирается, помимо прочего, на аксиоматику действительных чисел.

**2.** Приведём без доказательства ряд фактов, которые в реальности доказываются с привлечением соображений непрерывности, но весьма непросто! Многие из них являются по сути теоремами из различных разделов высшей математики. Они обобщают утверждения, рассмотренные в основной части брошюры (см. прежде всего занятия 6 и 9).

1) *Пусть на плоскости даны две выпуклые ограниченные фигуры, тогда существует прямая, одновременно делящая пополам*: а) *периметры*; б) *площади обеих фигур.*

Если одна из фигур «вырождается» в точку, то в пункте б) мы получим условие задачи 6.1.

2) *Вокруг любого выпуклого тела можно описать куб.*

Это утверждение является трёхмерным обобщением задачи Д31.

3) *Любое выпуклое тело можно разбить плоскостью так, чтобы объёмы и площади поверхностей получившихся тел были равны.*

Пространственная аналогия утверждения, рассмотренного в примере 6.3.

4) *Пусть в пространстве даны два выпуклых тела, тогда существует плоскость, одновременно делящая пополам*: а) *площади поверхностей*; б) *объёмы обеих фигур.*

Утверждение пункта б) является трёхмерным обобщением 1) и его часто формулируют иначе: *бутерброд с сыром можно одним прямолинейным разрезом разделить на две части с равными количествами хлеба и сыра в каждой.*

Справедлив даже «более мощный» факт:

5) *Пусть в пространстве произвольным образом расположены три тела, тогда существует плоскость, которая разобьёт каждое из них на две части равного объема.*

Это утверждение (как и предыдущее) часто называют *теоремой о бутерброде* и формулируют так: *одним прямолинейным разрезом можно разбить бутерброд с сыром и колбасой на две части так, чтобы в каждой части всех продуктов было поровну.*

6) *Любой многочлен (отличный от постоянной функции) имеет хотя бы один комплексный корень.*

Это утверждение является существенным обобщением факта, рассмотренного в примере 9.1. Оно называется *основной теоремой алгебры* и доказывается исходя из *соображений непрерывности на комплексной плоскости.*

7) *Если функции $f$ и $g$ определены и непрерывны на некоторой сфере, то на этой сфере найдутся две диаметрально противоположные точки $P$ и $P'$, для которых $f(P) = f(P')$ и $g(P) = g(P')$.*

Это утверждение является трёхмерным обобщением факта, изложенного в примере 9.3, и называется *теоремой Борсука — Улама.* Эту теорему часто формулируют в занимательной форме: *в любой момент времени на Земле найдутся две такие диаметрально противоположные точки, в которых совпадают температура и давление.*

Из теоремы *Борсука — Улама* есть следствие, весьма огорчительное для географов. Известно, что положение любой точки на земной поверхности описывается двумя координатами: широтой и долготой. Их можно рассматривать как функции точек земной сферы. В этой системе координат особое место занимают полюсы: широта у каждого из них $90^\circ$ (северная или южная), а долготу им можно приписать любую. Поэтому если, например, двигаться к Северному полюсу по одному меридиану, а достигнув его, продолжить движение по любому другому меридиану, то при таком *непрерывном движении* широта будет изменяться *непрерывно*, а долгота испытает «скачок». Если условиться приписать знак плюс восточной долготе, а знак минус — западной, то долгота испытывает «скачок» и при переходе из западного полушария в восточное через меридиан, являющийся «продолжением» гринвичского.

Возникает вопрос: нельзя ли на поверхности сферы ввести координаты так, чтобы они обе являлись непрерывными функциями соответствующих точек сферы?

Согласно теореме *Борсука — Улама* это невозможно. Действительно, в этом случае нашлись бы две диаметрально противоположные точки с одинаковыми координатами!

### 8) *Пусть $f$ — непрерывная функция, задающая в каждой точке сферы вектор, касательный к ней. Тогда существует хотя бы одна такая точка $P$, в которой $f(P) = 0$.*

Это утверждение является следствием *теоремы Брауэра*, доказанной в 1912 году, которая обычно формулируется так: *любое непрерывное отображение замкнутого шара в себя в конечномерном евклидовом пространстве имеет неподвижную точку.*

Само утверждение часто называют *теоремой о причёсывании ежа*, так как оно интерпретируется следующим образом: сфера — это ёж, свернувшийся в клубок, векторы — его колючки. Такого ежа нельзя «причесать» так, чтобы об него нельзя было уколоться (без вихров и проборов).

Интересное «метеорологическое» приложение этой теоремы получится, если считать ветер *непрерывным векторным полем* на поверхности планеты. Рассмотрим идеализированный случай, в котором нормальная к поверхности составляющая поля пренебрежимо мала.

Случай, когда полностью отсутствует ветер, соответствует нулевому векторному полю. Этот случай неинтересен и физически невозможен (в силу неустойчивости). Но если ветер есть, то *теорема о причёсывании ежа* утверждает, что на поверхности планеты всегда будет точка, в которой не будет ветра (нуль касательного векторного поля).

Такая точка будет центром циклона или антициклона: как иголки ежа, ветер будет закручиваться вокруг этой точки (в силу непрерывности, он не может быть направлен внутрь этой точки или из неё). Таким образом, по *теореме о причёсывании ежа*, если на Земле дует хоть какой-то ветер, то где-то обязательно должен быть циклон. Его центр может быть сколь угодно большим, так же как и сила ветра вокруг.

### 9) *График любой непрерывной периодической функции имеет горизонтальную хорду любой длины.*

Это обобщение факта, вытекающего из графической интерпретации примера 9.3.

## Авторы задач

Большинство использованных в книге задач давно и заслуженно стали математическим фольклором или восходят к нему. Эти задачи вошли в некоторые школьные учебники и задачники (см. список литературы), поэтому обычно их публикуют без указания авторов. Это, однако, не повод умалчивать об авторах в тех случаях, когда они нам известны (в случаях, когда автор не один, его соавторы указаны в скобках).

*А. Акопян*: Д27

*В. Арнольд*: Д49 (*Б. Френкин*, *А. Хачатурян*)

*А. Блинков*: 2.1, 2.6, 3.1 (*В. Гуровиц*), 5.1, 7.3, 7.4, Д9, Д26, Д37

*И. Богданов*: 4.7

*С. Волченков*: 3.6

*М. Волчкевич*: 7.6

*Г. Гальперин*: пример 1.3

*Е. Горская*: Д39

*В. Гуровиц*: 3.1 (*А. Блинков*)

*В. Дольников*: 6.2

*Жюри турнира городов* (по мотивам А. Шаповалова): Д5

*А. Заславский*: Д28

*Ю. Ионин*: пример 9.2

*П. Кожевников*: 9.3

*Н. Константинов*: 9.7

*О. Крижановский*: 8.2

*В. Произволов*: Д16, Д18

*В. Сендеров*: Д38

*А. Толпыго*: 5.4

*Д. Фомин*: 1.6, 3.2

*Б. Френкин*: 5.5, Д6, Д49 (*В. Арнольд*, *А. Хачатурян*)

*А. Хачатурян*: Д49 (*В. Арнольд*, *Б. Френкин*)

*А. Шаповалов*: 1.7, пример 2.2, 2.5, 3.3, 5.3б, 6.3, 6.5, Д2, Д12, Д14, Д15, Д24, Д50

*И. Шарыгин*: 5.6

Выражаем благодарность всем упомянутым авторам, а также тем неизвестным, кто сочинил фольклорные жемчужины! Просим извинить за те случаи, когда, исходя из целей книжки, задачи были использованы не в исходной формулировке.

## Список литературы и веб-ресурсов

1. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. *Геометрия для* 8–9 *классов.* М.: Просвещение, 1991.

2. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. *Геометрия для* 10–11 *классов.* М.: Просвещение, 1992.

3. Алфутова Н. Б., Устинов А. В. *Алгебра и теория чисел.* М.: МЦНМО, 2009.

4. Арнольд В. И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: МЦНМО, 2012.

5. Балк Г. Д., Балк М. Б., Болтянский В. Г. *Метод малых шевелений.* «Квант», №4, 1979.

6. Башмаков М. И. *Математика в кармане «Кенгуру»*. Международные олимпиады школьников. — М.: Дрофа, 2010.

7. Блинков А. Д. *Непрерывность в геометрии.* «Квант», №4, 2012.

8. Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. *Сборник задач по алгебре для* 8– 9 *классов*: М.: Просвещение, 1992.

9. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. *Ленинградские математические кружки*: *пособие для внеклассной работы.* — Киров: «Аса», 1994.

10. *Геометрические олимпиады им. И.Ф. Шарыгина* / Сост. Заславский А. А., Протасов В. Ю., Шарыгин Д. И. — М.: МЦНМО, 2007.

11. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. *Как решают нестандартные задачи* / Под ред. В. О. Бугаенко — М.: МЦНМО, 2012.

12. Крейн М. Г., Нудельман А. А. *Теорема Борсука — Улама.* «Квант», №8, 1983.

13. Курант Р., Роббинс Г. *Что такое математика*? — М.: МЦНМО, 2013.

14. Медников Л. Э., Шаповалов А. В. *Турнир городов*: *математика в задачах.* — М.: МЦНМО, 2012.

15. *Московские математические регаты* / Сост. Блинков А. Д., Горская Е. С., Гуровиц В. М. — М.: МЦНМО, 2007.

16. Прасолов В. В. *Задачи по алгебре, арифметике и анализу.* М.: МЦНМО, 2011.

17. Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии.* М.: МЦНМО, 2007.

18. Прасолов В. В. *Задачи по стереометрии.* М.: МЦНМО, 2010.

19. Прасолов В. В. и др. *Московские математические олимпиады.* 1935–1957 г. — М.: МЦНМО, 2010.

20. Прасолов В. В. и др. *Московские математические олимпиады.* 1958–1967 г. — М.: МЦНМО, 2013.

21. Произволов В. В. *Задачи на вырост.* М.: МИРОС, 1995.

22. Протасов В. Ю. *Максимумы и минимумы в геометрии.* — М.: МЦНМО, 2005.

23. Табачников С. Л. *Соображения непрерывности.* «Квант», №9, 1987.

24. Фёдоров Р. М., Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К., Ященко И. В. *Московские математические олимпиады* 1993–2005 *г.* М.: МЦНМО, 2008.

25. Шаповалов А. В. *Принцип узких мест* М.: МЦНМО, 2012.

26. Яглом И. М. *О хордах непрерывных кривых*. «Квант», №4, 1977.

27. `http://cdoosh.ru/lmsh/archive.html` — Материалы Кировской летней многопредметной школы.

28. `olympiads.mccme.ru/ustn` — Устные геометрические олимпиады.

29. `www.geometry.ru/olimp` — Всероссийские олимпиады по геометрии имени И. Ф. Шарыгина.

30. `www.etudes.ru` — Математические этюды.

31. `www.problems.ru` — База задач по математике.

# Раздаточный материал

## Занятие 1. Дискретная непрерывность

**Задача 1.1.** На доске было записано число 1. За один шаг число, имеющееся на доске, либо умножали на произвольное однозначное число, либо прибавляли к нему произвольное однозначное число, и результат записывали вместо него. Через некоторое время на доске оказалось записано стозначное число. Верно ли, что в какой-то момент на доске было записано тридцатизначное число?

**Задача 1.2.** В ряд выложены 200 шаров, из них 100 чёрных и 100 красных, причём первый и последний шары — чёрные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и чёрных шаров осталось поровну.

**Задача 1.3.** Матч «Бавария»–«Спартак» закончился со счётом 5 : 8. Муж (болеющий за «Баварию») и жена (болеющая за «Спартак») собираются посмотреть этот матч в записи по очереди, уже зная итоговый счёт: сначала смотрит муж (а жена сидит с ребёнком), а в некоторый момент они меняются. Докажите, что они смогут поменяться так, чтобы увидеть поровну мячей, забитых любимой командой.

**Задача 1.4.** Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Нале-во!» некоторые из них повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

**Задача 1.5.** Некто расставил в произвольном порядке десятитомное собрание сочинений. Назовём «беспорядком» пару томов (не обязательно соседних), в которой том с бóльшим номером стоит левее. Для некоторой расстановки томов подсчитано количество всех «беспорядков». Какие значения оно может принимать?

**Задача 1.6.** В ряд стоят 20 сапог: 10 правых и 10 левых. Обязательно ли среди них найдутся 10 сапог, стоящих подряд, среди которых поровну правых и левых?

**Задача 1.7.** В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдётся чётное число.

## Занятие 2. Непрерывные траектории

**Задача 2.1.** Два скалолаза шли двумя разными маршрутами, стартовав одновременно, и достигли точки финиша на вершине скалы также одновременно. Расстояние между точками их старта — 50 метров. Докажите, что в какой-то момент расстояние между скалолазами было 30 метров.

**Задача 2.2.** В полночь со среды на четверг было холоднее, чем в полночь со вторника на среду и в полночь с четверга на пятницу. Докажите, что в среду и четверг были два момента времени, отличающиеся ровно на сутки, когда температура была одинаковой.

**Задача 2.3.** (*Задача о буддийском монахе.*) Монах поднимался на священную гору. Он начал восхождение в 6 часов утра и достиг вершины в 6 часов вечера. На вершине он заночевал, а на следующий день в 6 утра начал спускаться по пути подъёма, и достиг подножия горы в 6 часов вечера. Докажите, что существует такая точка на его маршруте, в которой монах сможет помолиться на пути туда и обратно в одно и то же время.

**Задача 2.4.** Король прошёл из левого нижнего угла шахматной доски в правый верхний угол. Ладья прошла из правого нижнего в левый верхний угол этой же доски, делая ходы на одну клетку. Докажите, что на этой доске есть клетка, на которой побывали обе фигуры.

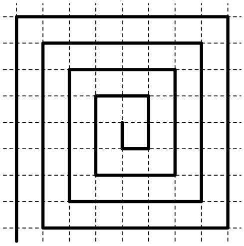
**Задача 2.5.** В противоположных углах квадратного пруда со стороной 100 метров сидели два гуся. Поплавав по пруду, они оказались в двух других противоположных углах. Докажите, что в некоторый момент времени расстояние между кончиками их клювов было равно 110 метров.

**Задача 2.6.** Докажите, что за любой промежуток времени длиной 36 минут часовая и минутная стрелка часов (движущиеся без «скачков») хотя бы раз окажутся на одной прямой.

**Задача 2.7.** Докажите, что на высоте $AD$ остроугольного треугольника $ABC$ можно так выбрать точку $M$, что $\angle BMC = 100^\circ$.

## Занятие 3. Дискретная непрерывность на плоскости

**Задача 3.1.** На клетчатой плоскости нарисовали несамопересекающуюся ломаную в виде спирали, идущую по границам клеток и состоящую из двухсот звеньев (на рисунке изображены начальные звенья ломаной). Докажите, что можно провести прямую, которая имеет со спиралью ровно 64 общие точки.



**Задача 3.2.** На окружности единичной длины отмечено 25 точек. Докажите, что найдётся дуга длины 0,4, внутри которой лежит ровно 10 точек.

**Задача 3.3.** Пусть на плоскости расположены $2n$ точек. Назовём *медианой* этого множества точек прямую, проходящую ровно через две из них, по обе стороны от которой находится одинаковое количество точек. Какое наименьшее количество медиан может иметь множество, состоящее из $2n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

**Задача 3.4.** В линейной связке сосисок — 100 говяжьих и 200 свиных вперемешку. Какое наименьшее количество разрезов достаточно сделать, чтобы можно было разложить сосиски на две кучки, в каждой из которых 50 говяжьих и 100 свиных?

**Задача 3.5.** За круглым столом равномерно посажены 100 дедов, причём у любых двух соседей количество волос в бородах отличается не больше чем на 100. Докажите, что найдётся пара дедов, сидящих напротив друг друга, у которых количество волос в бородах также отличается не больше чем на 100.

**Задача 3.6**[*]. Мозаика состоит из набора плоских прямоугольников. Все прямоугольники можно уложить в один слой в прямоугольную коробку (так, что их стороны параллельны сторонам коробки). В бракованном наборе у каждого прямоугольника одна из сторон оказалось меньше стандартной. Можно ли утверждать, что у коробки, в которую складывается набор, также можно уменьшить одну из сторон?

## Занятие 4. Непрерывность в алгебре

**Задача 4.1.** Решите неравенство $ax^2 + x - c > 0$, если $ac < -0{,}25$ и $c < 9a + 3$.

**Задача 4.2.** Сколько корней имеет уравнение $ax^2+bx+c = 0$ ($a \neq 0$), если известно, что $c(a - b + c) < 0$?

**Задача 4.3.** На доске было записано уравнение $x^2 + 10x + 20 = 0$. К доске поочерёдно подходили школьники, стирали либо второй коэффициент, либо свободный член и заменяли его на число, отличающееся ровно на 1. В результате оказалось записано уравнение $x^2+20x+10 = 0$. Докажите, что в какой-то момент на доске было записано уравнение с целыми корнями.

**Задача 4.4.** Известно, что модули корней каждого из двух квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$ меньше десяти. Может ли трёхчлен $x^2 + \dfrac{a+c}{2}x + \dfrac{b+d}{2}$ иметь корень, модуль которого не меньше десяти?

**Задача 4.5.** Докажите, что уравнение

$$\Big|\big|\,||x| - 4| - 2\big| - 1\Big| = \frac{1}{2} + \frac{x^4}{1000000}$$

имеет не менее шестнадцати корней.

**Задача 4.6.** Даны уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (1) и $-ax^2 + bx + c = 0$ (2), где $a \neq 0$. Докажите, что если $x_1 \neq 0$ — корень уравнения (1), а $x_2 \neq 0$ — корень уравнения (2), то найдётся такой корень $x_3$ уравнения $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$, который лежит между $x_1$ и $x_2$.

**Задача 4.7*.** Существует ли выпуклый 2011-угольник, все стороны которого равны, а все вершины лежат на параболе $y = x^2$?

## Занятие 5. Непрерывность в геометрии (планиметрия)

**Задача 5.1.** Докажите, что в круге с центром $O$ можно провести хорду $AB$ так, что площадь треугольника $AOB$ равна площади сегмента, отсекаемого этой хордой.

**Задача 5.2.** Можно ли в окружность радиуса 1 вписать треугольник периметра 5?

**Задача 5.3.** а) Докажите, что любой треугольник можно разбить на два треугольника так, чтобы окружности, вписанные в получившиеся треугольники, были равны.

б) Останется ли утверждение верным, если вписанные окружности заменить на описанные?

**Задача 5.4.** Периметр выпуклого четырёхугольника равен 2004, одна из его диагоналей равна 1001. Может ли вторая диагональ быть равна: а) 1001; б) 2?

**Задача 5.5.** Существует ли неравносторонний треугольник, в котором наименьшая медиана равна наибольшей высоте?

**Задача 5.6*.** Через точку $O$ пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ проведена произвольная прямая, пересекающая стороны $AD$ и $BC$ в точках $K$ и $M$ соответственно. Докажите, что длина отрезка $MK$ не превосходит наибольшей из диагоналей четырёхугольника.

## Занятие 6. Площади, периметры, массы

**Задача 6.1.** Докажите, что любую выпуклую ограниченную плоскую фигуру можно разбить на две равновеликие фигуры прямой, проходящей через заданную точку.

**Задача 6.2.** На тарелке лежат 9 разных кусков сыра. Всегда ли можно разрезать не более одного из кусков на две части так, чтобы получившиеся 10 кусков сыра можно было разложить на две порции равной массы по 5 кусков в каждой?

**Задача 6.3.** Садовый участок в форме выпуклого многоугольника с каменной оградой расположен вблизи прямого шоссе. Владельцы хотят разделить его на две части прямым деревянным забором, который перпендикулярен шоссе. Всегда ли они тем самым смогут добиться, чтобы:

а) площади участков разделились в отношении 3 : 2;

б) длина каменной ограды разделилась в отношении 3 : 2?

**Задача 6.4.** Докажите, что если выпуклая ограниченная плоская фигура имеет центр симметрии, то в неё можно вписать квадрат.

**Задача 6.5.** Есть несколько кусков сыра разной массы и разной цены за килограмм. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков так, что после этого можно будет разложить все куски на две порции одинаковой массы и одинаковой стоимости.

**Задача 6.6$^*$.** Докажите, что любую выпуклую ограниченную плоскую фигуру можно разрезать двумя взаимно перпендикулярными прямыми на четыре фигуры равной площади.

## Занятие 7. Непрерывность в геометрии (стереометрия)

**Задача 7.1.** Существует ли правильная треугольная пирамида, у которой двугранный угол при боковом ребре равен $75^\circ$?

**Задача 7.2.** Две полуокружности имеют общий диаметр $AB$ длины 2 и лежат в перпендикулярных плоскостях. Из точки $A$ по одной из них и из точки $B$ по другой одновременно и с одинаковыми скоростями начинают двигаться точки $X$ и $Y$. Найдите множество значений, которые может принимать расстояние $XY$.

**Задача 7.3.** Дан правильный тетраэдр с ребром 1. Докажите, что у него существует четырёхугольное сечение периметра 2,2.

**Задача 7.4.** Существует ли правильная треугольная пирамида, у которой высота равна расстоянию между серединами двух скрещивающихся рёбер?

**Задача 7.5.** Существует ли тетраэдр, у которого каждая грань является тупоугольным треугольником?

**Задача 7.6.** Основанием пирамиды служит выпуклый четырёхугольник. Обязательно ли существует сечение этой пирамиды, не пересекающее основания и являющееся вписанным четырёхугольником?

## Занятие 8. Малые шевеления

**Задача 8.1.** В некоторой стране 1985 аэродромов, расстояния между которыми попарно различны. С каждого из них вылетел самолёт и приземлился на самом удалённом от места старта аэродроме. Могло ли случиться так, что в результате все 1985 самолётов оказались на пятидесяти аэродромах? (*Землю можно считать плоской, а маршруты — прямыми.*)

**Задача 8.2.** Среди коэффициентов многочлена $P(x)$ есть отрицательный. Может ли оказаться так, что для всех натуральных $n > 1$ коэффициенты многочленов $(P(x))^n$ положительны?

**Задача 8.3.** Существует ли выпуклый многогранник, любое сечение которого плоскостью, не проходящей через его вершину, является многоугольником с нечётным количеством сторон?

**Задача 8.4.** Докажите, что на координатной плоскости можно провести окружность, внутри которой лежит ровно $n$ точек с целочисленными координатами.

**Задача 8.5.** В круге провели 100 различных хорд так, что любые две хорды пересекаются. Всегда ли можно провести ещё одну хорду, которая пересечёт все остальные?

**Задача 8.6.** В каждый узел бесконечной клетчатой бумаги воткнута вертикальная булавка. Иголка лежит на бумаге параллельно линиям сетки. При какой наибольшей длине $l$ иголки её можно повернуть на $90^\circ$, не выходя из плоскости бумаги? (*Иголку разрешается как угодно двигать по плоскости, но так, чтобы она проходила между булавками; толщиной булавок и иголки нужно пренебречь.*)

## Занятие 9. Функции общего вида и функциональные соотношения

**Задача 9.1.** Существует ли непрерывная функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

**Задача 9.2.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и её множество значений принадлежит этому же отрезку. Докажите, что на этом отрезке уравнение $f(x) = x$ имеет хотя бы один корень.

**Задача 9.3.** Пусть $f(x)$ — некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться так, что уравнение $f(x) = a$ при любом значении $a$ имеет чётное количество решений?

**Задача 9.4.** Непрерывная функция $f(x)$ такова, что для всех действительных $x$ выполняется неравенство:

$$f\left(x^2\right) - \left(f(x)\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}.$$

Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно имеет точки экстремума?

**Задача 9.5.** Функция $f(x)$ определена на множестве $\mathbb{R}$, и для любого $x$ выполняется равенство $f(x+1) \cdot f(x) + f(x+1) + 1 = 0$. Докажите, что функция $f(x)$ не является непрерывной.

**Задача 9.6.** а) Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна и $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет корень на отрезке $[a; b]$.

б) Сколько точек пересечения с осью $x$ имеет график функции вида $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots + b_k \cos kx$, где $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $b_j \in \mathbb{R}$?

**Задача 9.7*.** Из города $A$ в город $B$ ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что два экипажа, выехавшие по двум разным дорогам из $A$ в $B$ и связанные верёвкой некоторой длины, меньшей чем $2R$, смогли доехать от $A$ до $B$, не порвав веревки. Смогут ли разминуться, не задев друг друга, два круглых воза радиуса $R$, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

# Оглавление