

Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич

# ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для классов  
с углубленным и профильным  
изучением математики

Под научной редакцией  
А. Р. Рязановского

10  
к л а с с

Рекомендовано  
Министерством образования и науки  
Российской Федерации

6-е издание, стереотипное

*Обложка книги расположена в самом конце.  
Это позволило оптимизировать нумерацию страниц.*



ДРОФА

Москва · 2008

*polinom (с) 2010*

УДК 373.167.1:514  
ББК 22.151я721  
П29

**Потоскуев, Е. В.**

**П29** Геометрия. 10 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Ззавич. — 6-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2008. — 223, [1] с. : ил.

ISBN 978-5-358-02728-2

Новый учебник по стереометрии для классов с углубленным и профильным изучением математики соответствует современным тенденциям развития школьного курса геометрии, идеям дифференциации, углубления и расширения знаний учащихся. В основе концепции предлагаемого курса лежат идеи дальнейшего формирования и развития конструктивно-пространственного воображения, а также таких качеств учащихся, как интеллектуальная восприимчивость и способность к усвоению новой информации, гибкость и независимость логического мышления.

Данный учебник может быть использован учащимися общеобразовательных учреждений, интересующимися математикой, для самостоятельных занятий, а также студентами педагогических вузов и репетиторами, занимающимися подготовкой абитуриентов.

В учебный комплект входит задачник тех же авторов, полностью соответствующий содержанию учебника.

УДК 373.167.1:514  
ББК 22.151я721

ISBN 978-5-358-02728-2



© ООО «Дрофа», 2003



# ПРЕДИСЛОВИЕ



Новый комплект по стереометрии для 10 класса с углубленным изучением математики состоит из трех частей: учебника, задачника по стереометрии, книги для учителя.

Настоящая книга представляет собой учебник по стереометрии для 10 классов с углубленным изучением математики.

Основная часть учебника соответствует программе теоретического курса геометрии классов с углубленным изучением математики. Изучение материала рассчитано на 3 часа в неделю (хотя гораздо лучше было бы иметь 4 часа в неделю). Примерное планирование учебного материала приведено в конце учебника.

В процессе изложения основного курса стереометрии авторы предлагают и дополнительный материал. Знаки ... обозначают начало и окончание изложения этого материала.

Знаки ... означают начало и окончание текста, связанного с уже изученными в курсе планиметрии вопросами, которые авторы считают необходимым еще раз обсудить.

Символ  означает окончание доказательства утверждения, а символ  — задача из учебника.

Помимо основного текста, содержащего теоретический материал курса геометрии, в книге имеются:

- Дополнения, в которых подробно рассматриваются некоторые вопросы изображения фигур в параллельной проекции и построения сечений многогранников. Они предназначены для более глубокого и неформального понимания материала и овладения продуктивными методами решения стереометрических задач. Построение сечений развивает пространственное и конструктивно-логическое мышление.

- Список основных теорем стереометрии 10 класса, в котором отражается структура логически последовательного построения нашего курса. Список будет также полезен при оформлении письменного решения задач на контрольных работах и при ответах на уроке. Этот список дает представление о том, какие из приведенных в тексте учебника теорем авторы считают минимально необходимыми.

- Список задач на построение в пространстве, в котором содержатся опорные задачи, лежащие в основе решения большинства стереометрических задач курса.

- Метрические формулы планиметрии и стереометрии; они в определенной мере заменяют справочный материал.

- Проспект содержания учебного комплекта 11 класса.

Наглядные представления о пространстве и пространственных фигурах в той или иной мере имеет каждый выпускник, приобретая и вырабатывая их в процессе учебной и практической деятельности. (Некоторые из выпускников 9 классов изучали геометрию по фузионистским учебникам и их представления о стереометрии уже довольно-таки широки.) Этим обстоятельством мы пользуемся в учебнике.

Мы считаем, что такие понятия, как пространство, плоскость, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, а также куб, тетраэдр, параллелепипед, призма, пирамида, шар и другие на интуитивном уровне выпускникам 9 класса уже известны. Мы не ставили целью построение курса стереометрии на строго аксиоматической основе; о возможности такого построения вы сможете прочесть в «Дополнениях» к учебнику 11 класса.

Трудности, которые могут возникнуть буквально с первых уроков стереометрии, связаны не столько с абстрактным характером материала, сколько с отличиями между плоскими и пространственными фигурами. Чтобы усвоение материала строилось не на заучивании, а приобретенные знания не были формальными, целесообразно с самого начала изучение теоретического материала сопровождать построениями изображений пространственных фигур и соответствующими последующими построениями на этих изображениях. Полезно также внимательнее изучать и даже воспроизводить стереометрические чертежи. Таких чертежей в книге несколько сотен, ряд из них дан в динамике развития построения. Стоит изучать и модели пространственных фигур, а несколько таких моделей изготовить самому. Опыт показывает, что время, затраченное на решение задач такого рода, окупается при изучении последующих разделов стереометрии: при решении таких задач аксиомы и теоремы усваиваются сознательно, а следовательно, сохраняются в нашей памяти.

В настоящей книге многое поясняется с помощью изображений куба, параллелепипеда, призмы, пирамиды. И хотя

многогранники будут подробно рассмотрены лишь в 11 классе, такое опережающее знакомство с «устройством» упомянутых многогранников позволит увереннее «войти в стереометрию», «наглядно увидеть» параллельные и перпендикулярные прямые и плоскости, обнаруживая при этом определенную аналогию между тетраэдром и треугольником, кубом и квадратом, а также и существенные их различия.

Построение сечений многогранников является одним из опорных разделов в изучении стереометрии. В данной книге сечения многогранников строятся сначала на основании аксиом и следствий из них, а затем, в «Дополнениях», — с применением все новых и новых теорем и приемов. Построение сечений многогранников делает предмет стереометрии наглядным, доступным и интересным, формирует конструктивные пространственные представления.

Большое внимание в этом учебнике уделяется изучению элементов векторной алгебры и координатного метода в пространстве. Дело в том, что векторный и координатный, а также векторно-координатный методы могут быть успешно использованы при решении широкого круга содержательных геометрических задач на параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, нахождение углов и расстояний между ними, вычисление площадей поверхностей и объемов геометрических фигур. Следует заметить, что векторный метод решения задач иногда оказывается проще «элементарно-геометрического» метода. Кроме того, методы векторной алгебры широко используются при учебе в вузах.

Активное и эффективное изучение стереометрии возможно лишь при условии решения достаточно большого числа задач различной степени сложности. Поэтому вторая часть комплекта представляет собой задачник, содержащий более 1000 задач и строго соответствующий изложению теоретического курса. Теоретическому материалу каждого параграфа учебника соответствует набор задач в соответствующем параграфе задачника. Главы и параграфы задачника имеют ту же нумерацию и те же названия, что и главы и параграфы учебника.

В учебнике дано приблизительное планирование учебного материала, которое после апробации учебника будет детализировано в книге для учителя. Там же будут опубликованы примерные контрольные и самостоятельные работы. До опуб-

ликования книги для учителя материалы для составления самостоятельных и контрольных работ можно брать как из задачника, так и из книг «Геометрия. 8—11 классы. Дидактические материалы». Л. И. Звавич и др. М.: Дрофа, 2000.

Авторы выражают благодарность рецензентам учебника доктору педагогических наук, профессору Ирине Михайловне Смирновой, заслуженному учителю России, кандидату педагогических наук учителю школы 420 г. Москвы Борису Петровичу Пигареву, учителю школы 1741 г. Москвы Илье Евгеньевичу Феоктистову. Авторы отмечают неоценимую помощь в подготовке рукописи к печати учителя математики Тамары Николаевны Потоскуевой.

Авторы будут благодарны за все замечания, присланные по адресу: 121096, Москва, а/я 534, Звавичу Л. И. или 445030, г. Тольятти, Потоскуеву Е. В. до востребования.

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

### Геометрические фигуры

$A, B, C, \dots, M, P, Q$  — точки;

$a, b, c, \dots, m, p, q$  — прямые;

$AB$  — прямая, проходящая через точки  $A$  и  $B$ ;

$\alpha, \beta, \gamma$  — плоскости;

$(ABC)$  — плоскость, проходящая через точки  $A, B$  и  $C$  (т. е. плоскость  $ABC$ );

$(a; A)$  — плоскость, проходящая через прямую  $a$  и точку  $A$ ;

$A(BC)D$  — двугранный угол с ребром  $BC$  и гранями  $ABC$  и  $DBC$ ;

$\alpha\beta$  — двугранный угол с ребром  $a$  и гранями  $\alpha$  и  $\beta$ ;

$\angle(a, b)$  — угол между прямыми  $a$  и  $b$ ;

$\angle(a, \alpha)$  — угол между прямой  $a$  и плоскостью  $\alpha$ ;

$\angle(\alpha, \beta)$  — угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

### Отношения между геометрическими фигурами

$=$  — равенство;

$\simeq$  — подобие;

$\parallel$  — параллельность;

$\perp$  — перпендикулярность;

$\in$  — принадлежность элемента множеству;

$\subset$  — включение одного множества в другое;

$\cap$  — пересечение множеств;

$\cup$  — объединение множеств.

Например:

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  — треугольник  $ABC$  равен треугольнику  $A_1B_1C_1$ ;

$\triangle ABC \simeq \triangle A_1B_1C_1$  — треугольник  $ABC$  подобен треугольнику  $A_1B_1C_1$ ;

$a \parallel \alpha$  — прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ ;

$a \perp \alpha$  — прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ ;

$A \in \alpha$  — точка  $A$  принадлежит плоскости  $\alpha$  или плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $A$ <sup>1</sup>;

$a \subset \alpha$  — прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$  или плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $a$ ;

$A \notin \alpha$  — точка  $A$  не принадлежит плоскости  $\alpha$  или плоскость  $\alpha$  не проходит через точку  $A$ ;

$a \not\subset \alpha$  — прямая  $a$  не лежит в плоскости  $\alpha$  или плоскость  $\alpha$  не проходит через прямую  $a$ ;

$a \cap \alpha = A$  — прямая  $a$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $A$  или плоскость  $\alpha$  пересекает прямую  $a$  в точке  $A$ .

### Величины

$AB, |AB|, \rho(A; B)$  — длина отрезка  $AB$  или расстояние между точками  $A$  и  $B$ ;

$\rho(\Phi_1; \Phi_2)$  — расстояние между фигурами  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ ;

$\widehat{A(BC)D}$  — величина двугранного угла;

$\widehat{(a; b)}$  — величина угла между прямыми  $a$  и  $b$ ;

$\widehat{(a; \alpha)}$  — величина угла между прямой  $a$  и плоскостью  $\alpha$ ;

$\widehat{(\alpha; \beta)}$  — величина угла между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

### Прочие символы

$\Rightarrow$  — знак следования; заменяет слова «следовательно», «поэтому» и т. п.;

$\Leftrightarrow$  — знак равносильности; заменяет слова «тогда и только тогда», «равносильно» и т. п.

<sup>1</sup> Мы не будем в дальнейшем различать высказывания «точка принадлежит плоскости (прямой)» и «точка лежит в (на) плоскости (прямой)», хотя второе высказывание является более «разговорным».





## § 1. Предмет стереометрии. Основные понятия

Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур на плоскости (плоских фигур), называется *планиметрией*. Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве (пространственных фигур), называется *стереометрией*.

Слово «*стереометрия*» состоит из греческих слов «*стереос*» — телесный, пространственный и «*метрео*» — измеряю.

При изучении математики вы уже встречались с основными понятиями стереометрии: точками, прямыми и плоскостями, а также расстояниями. На интуитивном уровне вы, скорее всего, уже говорили:

- о принадлежности точки прямой или плоскости;
- о взаимном расположении прямых в пространстве (параллельны, пересекаются или скрещиваются);
- о взаимном расположении прямой и плоскости (прямая лежит в плоскости, пересекает ее или ей параллельна);
- о взаимном расположении двух плоскостей (плоскости пересекаются или параллельны).

Всюду в дальнейшем выражения «две точки», «две прямые», «две плоскости» следует понимать соответственно так: две различные точки, две различные прямые, две различные плоскости.

При изучении стереометрии мы будем пользоваться рисунками, чертежами: они помогут нам понять, представить, проиллюстрировать содержание того или иного факта, суть понятия, представить то, о чем идет речь в задаче, теореме.

Более того, *интуитивное, живое пространственное воображение в сочетании со строгой логикой мышления — это ключ к изучению стереометрии*. Поэтому прежде, чем приступить к пониманию сущности аксиомы, определения, доказательству теоремы, решению геометрической задачи, постарайтесь наглядно представить, вообразить, нарисовать фигуры, о которых идет речь. *«Мой карандаш бывает еще остроумней моей головы»*, — признавался великий математик Леонард Эйлер (1707—1783).

Однако при строгом подходе к изучению геометрии рисунок не имеет доказательной силы, даже если он выполнен безупречно. И тем не менее, верно, наглядно и хорошо выполненный рисунок (чертеж) к задаче — это надежный помощник при ее решении.

В научной литературе доказательство должно основываться лишь на логических умозаключениях. В школьном же курсе геометрии из-за громоздкости ряда рассуждений, многообразия различных частных случаев при доказательствах теорем, с одной стороны, и ограниченности времени, с другой стороны, порой приходится жертвовать логической строгостью, прибегая к наглядности, что является вполне допустимым и разумным.

## § 2. О некоторых пространственных фигурах

Хотя изучение пространственных фигур нам еще предстоит, мы будем использовать отдельные виды многогранников при рассмотрении ряда вопросов стереометрии.

Напомним некоторые сведения о многогранниках и дадим каждому многограннику наглядное описание.

**Многогранник** представляет собой тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников (рис. 1—10). Эти многоугольники называются *гранями многогранника*, а стороны и вершины многоугольников называются соответственно *ребрами* и *вершинами многогранника*. Многогранники могут быть *выпуклыми* (рис. 1) и *невыпуклыми* (рис. 2). **Выпуклый многогранник** расположен по одну сторону относительно плоскости, проходящей через любую его грань. (Мы будем изучать только выпуклые многогранники.)

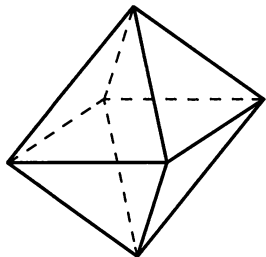


Рис. 1

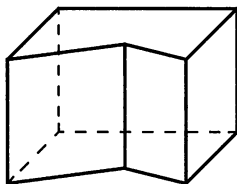


Рис. 2

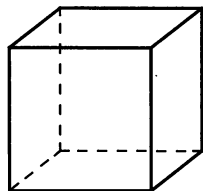


Рис. 3

Приведем примеры отдельных многогранников.

*Куб* представляет собой многогранник, у которого шесть граней, и все они — равные квадраты. У куба 12 равных ребер и 8 вершин (рис. 3).

*Параллелепипед* представляет собой многогранник, у которого шесть граней, и каждая из них — параллелограмм. Параллелепипед может быть *прямым* (рис. 4) или *наклонным* (рис. 5).

Параллелепипед, все грани которого прямоугольники, называют *прямоугольным*. Прямоугольный параллелепипед изображается также, как прямой. Из сказанного следует, что куб — это прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

*n-угольная пирамида* представляет собой многогранник, одна грань которого, называемая *основанием пирамиды*, — некоторый выпуклый  $n$ -угольник, а остальные  $n$  граней — треугольники с общей вершиной (рис. 6). Эта общая вершина называется *вершиной пирамиды*, а треугольники — *боко-*

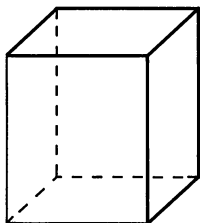


Рис. 4

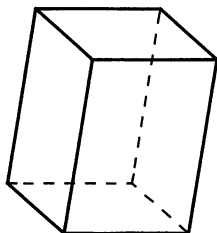


Рис. 5

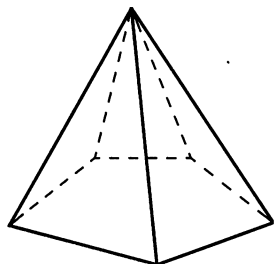


Рис. 6

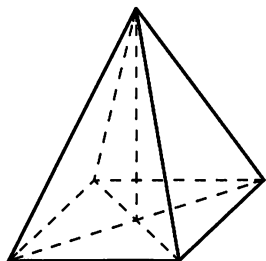


Рис. 7

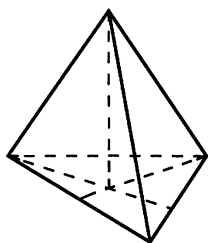


Рис. 8

выми гранями пирамиды. Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами ее основания, называются *боковыми ребрами пирамиды*. Пирамида, в основании которой лежит правильный  $n$ -угольник, а боковые ребра равны между собой, называется *правильной пирамидой* (рис. 7). Пирамида, в основании которой лежит треугольник, называется *треугольной пирамидой* или *тетраэдром*. Таким образом, тетраэдр — это четырехгранник. Все его четыре грани — треугольники. Тетраэдр, все четыре грани которого — равные правильные треугольники, называется *правильным тетраэдром* (рис. 8). Правильный тетраэдр — частный случай правильной треугольной пирамиды.

*$n$ -угольная призма* представляет собой многогранник, две грани которого, называемые *основаниями призмы*, — равные  $n$ -угольники, а все остальные  $n$  граней — параллелограммы. Они называются *боковыми гранями призмы*. Призма может быть *прямой* (рис. 9) или *наклонной* (рис. 10). У прямой призмы все боковые грани — прямоугольники, у наклонной призмы хотя бы одна грань — параллелограмм, не являющийся прямоугольником.

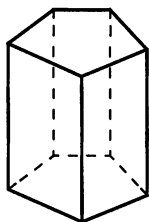


Рис. 9

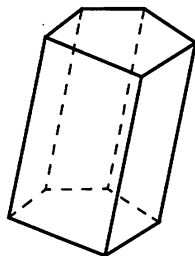


Рис. 10

*Параллелепипед — это призма, в основании которой лежит параллелограмм.*

Кроме многогранников мы будем изучать также свойства сферы, шара и других пространственных фигур.

*Сферой* называется множество всех точек пространства, удаленных от данной точки, называемой *центром сферы*, на одно и то же расстояние (рис. 11).

Отрезок, соединяющий любую точку сферы с ее центром, называется *радиусом сферы*. Радиусом сферы называют также расстояние от любой точки сферы до ее центра. Для сферы, как и для окружности, определяются хорды и диаметр.

*Шаром* называется множество всех точек пространства, расстояние от каждой из которых до данной точки — *центра шара* — не превосходит данного положительного числа, которое называется *радиусом шара*.

*Шар и куб* — примеры *геометрических тел*, *сфера и плоскость* — примеры *поверхностей*.

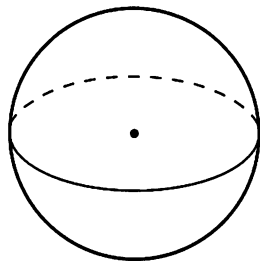


Рис. 11

### § 3. Аксиомы стереометрии

Слово «*аксиома*» греческого происхождения и в переводе означает истинное, исходное положение теории.

Из курса планиметрии мы знаем, что *плоскость* — это множество, элементами которого являются точки и в котором выполняется система аксиом планиметрии, описывающая свойства точек и прямых.

Аналогично, *пространство* — это множество, элементами которого являются точки и в котором выполняется система аксиом стереометрии, описывающая свойства точек, прямых и плоскостей.

Иначе говоря, система аксиом стереометрии дает описание свойств пространства и основных его элементов. Понятия «*точка*», «*прямая*» и «*плоскость*», «*расстояние*» принимаются без определений: их описание и свойства содержатся в аксиомах. Аксиомы играют для них роль «*неявных определений*». С другой стороны, понятия «*точка*», «*прямая*», «*плоскость*» имеют наглядный смысл, отраженный на чертежах или рисунках.

В научных работах по геометрии свойства геометрических фигур изучаются в отвлеченном (абстрактном) виде со строгой логической обоснованностью.

Данный курс стереометрии, разумеется, не основан на строгом аксиоматическом методе его изложения, однако знакомство со списком аксиом стереометрии необходимо. Не всеми из этих аксиом в явном виде и в равной мере мы будем пользоваться в дальнейшем при изучении стереометрии, но особо хотим обратить ваше внимание на аксиомы  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ .

Подробнее о логическом построении различных геометрий мы поговорим в 11 классе.

Изучение пространства приводит к необходимости расширения системы аксиом планиметрии. Система аксиом стереометрии, таким образом, состоит из всех аксиом планиметрии и новой группы аксиом, в которых выражены свойства взаимного расположения точек, прямых и плоскостей в пространстве.

---

**Аксиома  $R_1$ .** В пространстве существуют плоскости. В каждой плоскости пространства выполняются все аксиомы планиметрии.

---

Эта аксиома дает нам право рассматривать в любой плоскости пространства отрезки, прямые, треугольники, многоугольники, окружности и другие плоские фигуры со всеми их свойствами, которые изучались в планиметрии. Например, если прямая  $a$  и не принадлежащая ей точка  $M$  лежат в некоторой плоскости  $\alpha$ , то в этой плоскости можно провести через точку  $M$  прямую, параллельную прямой  $a$ , и притом только одну.

**! Обратите внимание.** В планиметрии иллюстрация решения этой задачи состояла в построении данных прямой  $a$ , точки  $M$  и искомой прямой  $t$  ( $M \in t, t \parallel a$ ) (рис. 12).

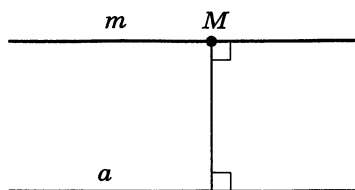




Рис. 12

В стереометрии иллюстрацию решения упомянутой задачи необходимо начинать с изображения данной плоскости  $\alpha$  (рис. 13). Затем в плоскости  $\alpha$  проводим данную прямую  $a$ . Отмечаем данную точку  $M \notin a$  и строим искомую прямую  $m$ :  $M \in m$ ,  $m \parallel a$ .

**Аксиома  $R_2$  (аксиома плоскости).** Через любые три точки, не принадлежащие одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

На рис. 14 проиллюстрировано содержание аксиомы  $R_2$ : плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $A, B, C$  — концы трех стержней, не принадлежащие одной прямой, а плоскость  $\beta$  проходит через другие концы  $M, K$  и  $P$  этих стержней, также не принадлежащие одной прямой.

 Три точки, принадлежащие одной прямой, называются *коллинеарными*, а три точки, не принадлежащие одной прямой, — *неколлинеарными*. Так, три вершины треугольника неколлинеарны, а середины оснований трапеции и точка пересечения ее диагоналей коллинеарны. Вообще, все точки одной прямой коллинеарны. 

Плоскость, которая проходит через три точки  $A, B$  и  $C$ , не принадлежащие одной прямой ( $C \notin AB$ ), обозначают символически  $(ABC)$ ; если этой плоскостью является плоскость  $\alpha$ , то пишут  $\alpha = (ABC)$  или  $(ABC) = \alpha$ . (В таком случае также говорят, что *три неколлинеарные точки в пространстве определяют плоскость*.)

Стол, имеющий три ножки, не может качаться на плоском полу. Его устойчивость объясняется тем, что концы трех его ножек (три точки) принадлежат одной плоскости — плоскос-

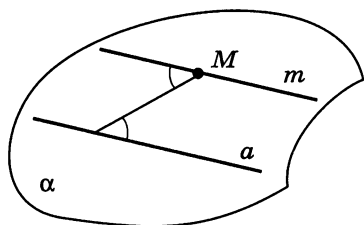


Рис. 13

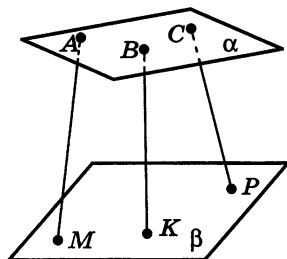


Рис. 14

ти пола, но не принадлежат одной прямой. Плохо сделанный стол на четырех ножках качается на плоском полу, и под одну из его ножек что-нибудь стараются подложить.

Через любые две точки  $A$  и  $B$  в пространстве можно провести плоскость  $\alpha$ . По аксиоме  $R_1$  в этой плоскости выполняются все аксиомы планиметрии. Согласно одной из этих аксиом через точки  $A$  и  $B$  можно провести единственную прямую.

**Аксиома  $R_3$ .** Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

Данной аксиомой утверждается, что для любой плоскости в пространстве можно выбрать любое количество точек в этой плоскости, равно как и сколько угодно точек вне ее. В случае, если точка  $A$  лежит в (принадлежит) плоскости  $\alpha$ , то записывают:  $A \in \alpha$  и говорят, что *плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $A$* . Если точка  $A$  не принадлежит плоскости  $\alpha$ , то записывают:  $A \notin \alpha$  и говорят, что *плоскость  $\alpha$  не проходит через точку  $A$* . На рисунке 15 плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $A$ , но не проходит через точку  $B$ .

**Аксиома  $R_4$  (аксиома прямой и плоскости).** Если прямая проходит через две точки плоскости, то она лежит в этой плоскости (рис. 16).

**!** Если прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$ , то записывают:  $a \subset \alpha$ . (Не путать знак « $\subset$ » со знаком « $\in$ ». Прямая  $a$  представляет собой множество точек, которое является подмножеством множества точек плоскости  $\alpha$ . Поэтому в данном случае используют не знак принадлежности « $\in$ », а знак включения « $\subset$ » одного множества в другое.)

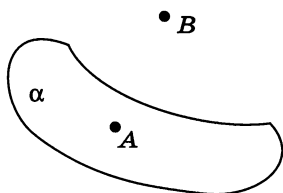
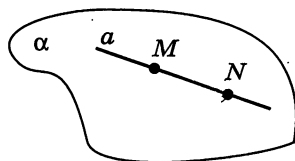


Рис. 15



$$\left. \begin{array}{l} M \in a, N \in a \\ M \in \alpha, N \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset \alpha$$

Рис. 16



Итак, из аксиомы  $R_4$  следует:  $(M \in \alpha, N \in \alpha) \Rightarrow MN = a$ ;  $a \subset \alpha$  (рис. 16). При этом также говорят, что *плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $a$  (через прямую  $MN$ )*.

В пространстве прямая может не лежать в данной плоскости, но иметь с этой плоскостью ровно одну общую точку. В этом случае говорят, что прямая и плоскость *пересекаются*.

**Определение.** Прямая и плоскость, имеющие ровно одну общую точку, называются *пересекающимися*.

Если прямая  $a$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $B$  (рис. 17), то символически записывают:  $\alpha \cap a = B$  или  $B = a \cap \alpha$ .

**!** **Важное замечание.** Заметим, что запись « $a \cap \alpha$ » не может заменить фразу: «прямая  $a$  пересекает плоскость  $\alpha$ », так как эта запись имеет совершенно другой смысл. Запись « $a \cap \alpha$ » означает множество всех общих точек прямой  $a$  и плоскости  $\alpha$ ; это множество может быть пустым, состоять из одной точки, а может содержать и всю прямую  $a$ .

Существуют ли в пространстве прямые, пересекающие данную плоскость? С одной стороны, ответ очевиден — конечно, существуют; однако посмотрим, каким образом аксиомы позволяют обосновать существование таких прямых.

Прямую, пересекающую данную плоскость  $\alpha$ , можно получить следующим образом. На основании аксиомы  $R_3$  выберем произвольную точку  $A$  вне плоскости  $\alpha$  и произвольную точку  $B$  в плоскости  $\alpha$  (рис. 18). Тогда прямая  $m = AB$  является искомой: она имеет общую точку  $B$  с плоскостью  $\alpha$  и не лежит в этой плоскости, так как точка  $A$  выбрана вне плоскости  $\alpha$ . Значит, прямая  $AB$  имеет с плоскостью  $\alpha$  единственную общую точку — точку  $B$ , а поэтому пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $B$ . Таким образом, прямые, пересекающие данную плоскость, в пространстве существуют.

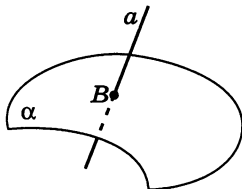


Рис. 17

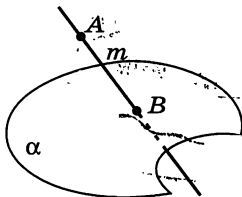


Рис. 18

**Аксиома  $R_5$**  (аксиома пересечения плоскостей). Если две плоскости имеют общую точку, то пересечение этих плоскостей есть их общая прямая.

Аксиома  $R_5$  утверждает, что если две плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  имеют общую точку  $M$ , то они имеют некоторую общую прямую  $a$ , которая проходит через точку  $M$  (рис. 19). Кроме того, из этой аксиомы следует, что у плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  нет общих точек вне их общей прямой  $a$ . В таком случае говорят, что плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$  и записывают:  $\alpha \cap \beta = a$  или  $a = \alpha \cap \beta$ .

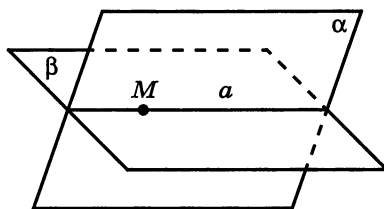


Рис. 19

Если мы возьмем две фигуры  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , имеющие общие точки и лежащие соответственно в двух различных пересекающихся плоскостях, то все эти общие точки лежат на одной прямой и представляют собой либо отрезок, либо луч, либо отдельные точки, либо всю прямую, либо объединение нескольких отрезков, лучей или точек фигур. Вот почему, например, плоскость, пересекающая грань куба, имеет с этой гранью либо общую точку, либо общий отрезок.

**Определение.** Две плоскости, имеющие общую точку (следовательно, общую прямую), называются пересекающимися плоскостями.



**Аксиома  $R_6$**  (аксиома разбиения пространства плоскостью).

Любая плоскость  $\alpha$  разбивает множество не принадлежащих ей точек пространства на два непустых множества так, что: а) любые две точки, принадлежащие разным множествам, разделены плоскостью  $\alpha$ ; б) любые две точки, принадлежащие одному и тому же множеству, не разделены плоскостью  $\alpha$ .

Проиллюстрируем смысл этой аксиомы. На рисунке 20 изображена плоскость  $\alpha$ . Она разбивает множество всех не принадлежащих ей точек пространства на два непустых множества  $P$  и  $Q$ , которые не имеют общих точек. Это разбиение обладает следующим свойством: если две точки, например  $A$  и  $B$ , принадлежат одному и тому же множеству  $P$ , то отрезок  $AB$  не пересекает плоскость  $\alpha$ . Это означает, что точки  $A$  и  $B$  не разделены плоскостью  $\alpha$ . Если же точки, например  $A$  и  $C$ , принадлежат разным множествам ( $A \in P$ ,  $C \in Q$ ), то отрезок  $AC$  пересекает плоскость  $\alpha$ . Это означает, что точки  $A$  и  $C$  разделены плоскостью  $\alpha$ .

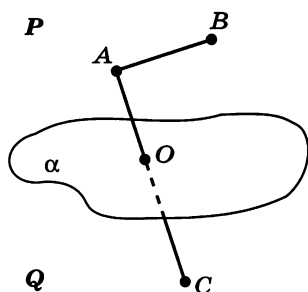



Рис. 20

Все пространство (в нашем случае) является объединением точечных множеств  $P$ ,  $Q$  и плоскости  $\alpha$ . Объединение  $P \cup \alpha$  множества  $P$  и плоскости  $\alpha$  называется *полупространством*, ограниченным плоскостью  $\alpha$ . Плоскость  $\alpha$ , ограничивающая это полупространство, называется его *границей*. Аналогично, объединение  $Q \cup \alpha$  является также полупространством с границей  $\alpha$ .

Таким образом, пространство является объединением двух полупространств, границей каждого из которых является плоскость  $\alpha$ . Изменение положения плоскости  $\alpha$  влечет за собой разбиение пространства в объединение новых полупространств. 

---

**Аксиома  $R_7$  (аксиома расстояния).** Расстояние между любыми двумя точками пространства одно и то же на любой плоскости, проходящей через эти точки.

---

Смысл этой аксиомы состоит в следующем. По аксиоме  $R_1$  в каждой плоскости выполняются аксиомы планиметрии. Следовательно, на каждой плоскости любым двум точкам  $A$  и  $B$  ставится в соответствие положительное число — расстояние между ними на этой плоскости. Хотя через точки  $A$  и  $B$  проходят одновременно различные плоскости (рис. 21), аксиома  $R_7$  утверждает, что расстояние между точками  $A$  и  $B$  будет одно и то же на каждой из этих плоскостей.

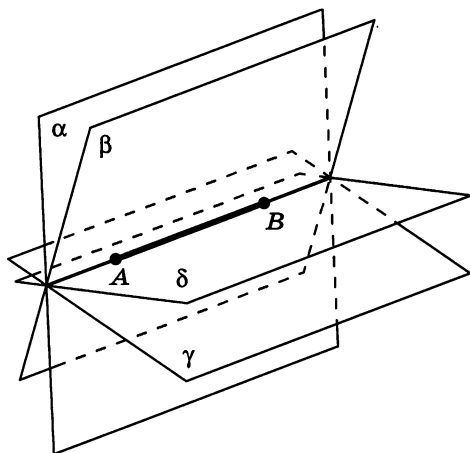


Рис. 21

Расстояние между точками  $A$  и  $B$  будем обозначать символом  $AB$ , либо  $\rho(A; B)$ , либо  $|AB|$  в зависимости от контекста, если речь идет о длине отрезка  $AB$ .

При выбранной единице измерения расстояние между любыми двумя точками выражается положительным числом, которое показывает, сколько единиц измерения длин и частей этой единицы измерения содержится в данном расстоянии. Так как число, выражающее расстояние между точками, зависит от выбранной единицы измерения, то единица измерения длин (см, дм, м и т. д.) пишется после этого числа. Например, если единица измерения длин — см, а численное значение расстояния между точками  $A$  и  $B$  равно 9, то пишут  $AB = 9$  см. Если же единичный отрезок не имеет названия, то пишут  $AB = 9$ , имея в виду  $AB = 9$  ед.

#### § 4. Следствия из аксиом.

##### Способы задания плоскости

Рассматриваемые здесь простейшие следствия из аксиом будут играть в дальнейшем важную роль. Они почти очевидны, но доказываются; их доказательства приведены с целью показать на примерах строгую логическую обоснованность каждого шага рассуждения со ссылками на соответствующие аксиомы и ранее доказанные теоремы.

**Теорема 1.** Через любую прямую и не принадлежащую ей точку можно провести плоскость, и притом только одну.

**Доказательство.** Пусть даны прямая  $a$  и не принадлежащая ей точка  $A$ .

Выберем на прямой  $a$  любые точки  $B$  и  $C$  (рис. 22). Через точки  $B$  и  $C$  проходит только одна прямая — прямая  $a$ . Так как точка  $A$  по условию теоремы не принадлежит прямой  $a$ , то точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  не принадлежат одной прямой.

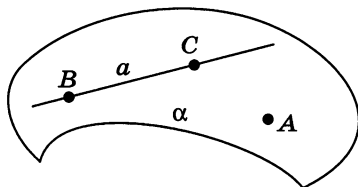


Рис. 22

По аксиоме  $R_2$  через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  проходит только одна плоскость — плоскость  $ABC$ , которую обозначим  $\alpha$ . Прямая  $a$  имеет с ней две общие точки — точки  $B$  и  $C$ , следовательно, по аксиоме  $R_4$  эта прямая лежит в плоскости  $\alpha$ . Таким образом, плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $a$  и точку  $A$  и является искомой.

Докажем, что другой плоскости, проходящей через прямую  $a$  и точку  $A \notin a$ , не существует.

Предположим, что есть другая плоскость —  $\alpha_1$ , проходящая через точку  $A$  и прямую  $a$ . Тогда плоскости  $\alpha$  и  $\alpha_1$  проходят через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не принадлежащие одной прямой, а значит, совпадают. Следовательно, плоскость  $\alpha$  единственна. Теорема доказана. ▼

**Определение.** Две прямые в пространстве называются пересекающимися, если они имеют ровно одну общую точку.

**Теорема 2.** Через любые две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.

**Доказательство.** Пусть данные прямые  $a$  и  $b$  пересекаются в точке  $C$  (рис. 23). Выберем на прямых  $a$  и  $b$  любые точ-

ки  $A$  и  $B$ , отличные от  $C$ :  $A \in a$ ,  $B \in b$ . Тогда три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  не принадлежат одной прямой (почему?), и по аксиоме  $R_2$  через них можно провести только одну плоскость. Обозначим ее  $\alpha$ .

Точки  $A$  и  $C$  прямой  $a$  принадлежат плоскости  $\alpha$ , значит, плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $a$  (аксиома  $R_4$ ). Плоскость  $\alpha$  проходит и через прямую  $b$ , так как точки  $B$  и  $C$  этой прямой принадлежат плоскости  $\alpha$ .

Таким образом, плоскость  $\alpha$  проходит через прямые  $a$  и  $b$ , следовательно, является искомой.

Докажем единственность плоскости  $\alpha$ . Допустим, что есть другая, отличная от плоскости  $\alpha$  и проходящая через прямые  $a$  и  $b$ , плоскость  $\beta$ .

Так как плоскость  $\beta$  проходит через прямую  $a$  и не принадлежащую ей точку  $B$ , то по теореме 1 она совпадает с плоскостью  $\alpha$ . Единственность плоскости  $\alpha$  доказана. ▼

**Определение.** Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Если прямые  $a$  и  $b$  параллельны, то пишут  $a \parallel b$ .

**Теорема 3.** Через две параллельные прямые можно провести единственную плоскость.

**Доказательство.** Пусть  $a$  и  $b$  — данные параллельные прямые. Из определения параллельных прямых следует, что через прямые  $a$  и  $b$  можно провести плоскость. Обозначим ее  $\alpha$  (рис. 24) и убедимся, что она единственна.

Допустим противное. Пусть существует другая плоскость, отличная от  $\alpha$ , которая содержит каждую из прямых  $a$  и  $b$ . Обозначим эту плоскость  $\beta$ .

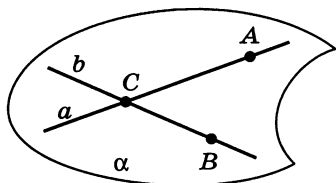


Рис. 23

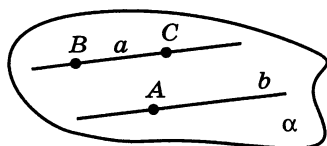


Рис. 24

Выберем на прямой  $a$  точки  $B$  и  $C$ , на прямой  $b$  — точку  $A$ . В силу параллельности прямых  $a$  и  $b$  точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  не принадлежат одной прямой.

Каждая из плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  содержит обе прямые  $a$  и  $b$ , значит, каждая из них проходит через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Но по аксиоме  $R_2$  через эти точки можно провести лишь одну плоскость. Следовательно, плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  совпадают. Теорема доказана. ▼

Из аксиомы  $R_2$  и теорем 1, 2 и 3 следует, что плоскость в пространстве можно задать:

- тремя точками, не принадлежащими одной прямой;
- прямой и не принадлежащей ей точкой;
- двумя пересекающимися прямыми;
- двумя параллельными прямыми.

В дальнейшем мы узнаем, что задать плоскость в пространстве можно и другими определяющими ее элементами.

Применяя аксиомы стереометрии и первые следствия из них, мы можем решать *стереометрические задачи*, то есть задачи, в которых исследуются некоторые свойства геометрических фигур, расположенных в пространстве. К стереометрическим относятся, например, задачи на построение сечений многогранников плоскостями.

Сечением многогранника плоскостью является многоугольник, представляющий собой множество всех точек пространства, принадлежащих одновременно данным многограннику и плоскости, плоскость при этом называется *секущей плоскостью*.

Как мы уже говорили при обсуждении аксиомы  $R_3$ , плоскость не может пересечь грань многогранника по ломаной, а имеет с ней либо общий отрезок, либо общую точку (вершину многогранника), либо не имеет с ней общих точек. Число сторон многоугольника-сечения не может превышать числа граней многогранника. Причем *если пересечением плоскости и многогранника является точка* (вершина многогранника) *или отрезок* (ребро многогранника), *то эту плоскость мы не будем называть секущей*.

В качестве примера построения сечения многогранника плоскостью решим следующую задачу.

■ ЗАДАЧА. Дана четырехугольная пирамида  $PABCD$  с вершиной  $P$ . Постройте сечение этой пирамиды плоскостью  $\alpha = (MНК)$ , где  $M \in PC$ ,  $H \in PB$ ,  $K \in PD$  (рис. 25).

Решение. Так как две плоскости пересекаются по прямой, а прямая и плоскость — в точке, то сечением многогранника (в данном случае — пирамиды) плоскостью является плоский многоугольник. Вершинами этого многоугольника служат точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника (или с прямыми, содержащими его ребра). Это означает, что для построения искомого сечения пирамиды плоскостью  $\alpha$  достаточно построить точки ее пересечения с прямыми, содержащими ребра пирамиды, после чего последовательно их соединить отрезками прямых.

У нас точки  $M$ ,  $K$  и  $H$ , через которые проходит секущая плоскость, принадлежат ребрам пирамиды, значит, эти точки — вершины искомого сечения. Отрезок, который соединяет две вершины, принадлежащие одной грани пирамиды, является стороной искомого сечения. Поэтому, проведя отрезки  $MK$  и  $MН$ , получаем две стороны искомого сечения, лежащие в гранях соответственно  $PCD$  и  $PBC$ .

Для построения оставшихся вершин, а следовательно, и сторон многоугольника-сечения построим точки пересечения плоскости  $\alpha$  с прямыми, содержащими другие ребра пирамиды. Из рисунка 25 видно, что для построения этих вершин удобно использовать прямые, содержащие ребра  $BC$  и  $CD$ .

Найдем точку пересечения плоскости  $MНК$  с прямой  $BC$ .

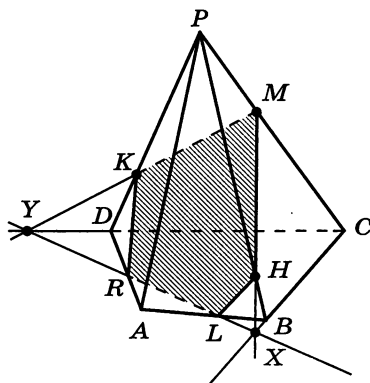
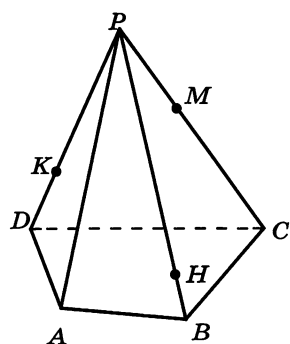
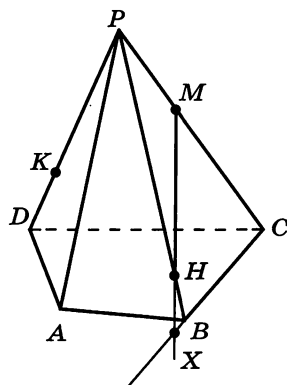


Рис. 25

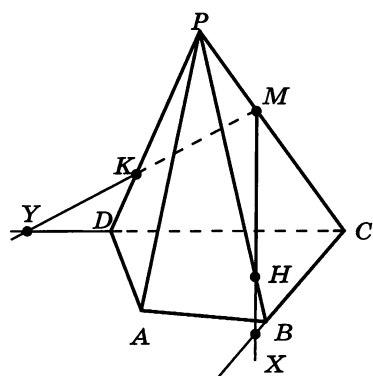




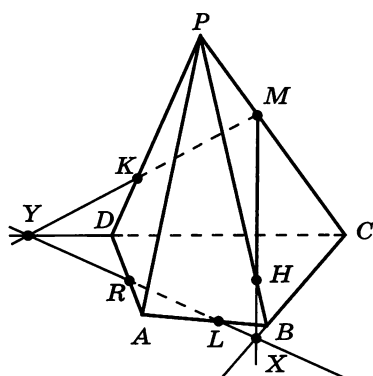
a)



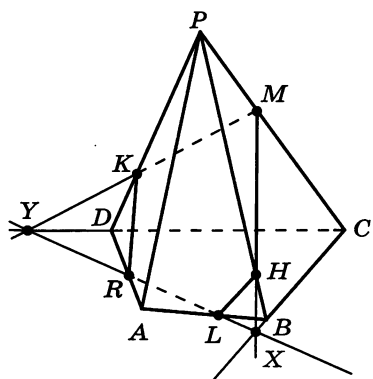
б)



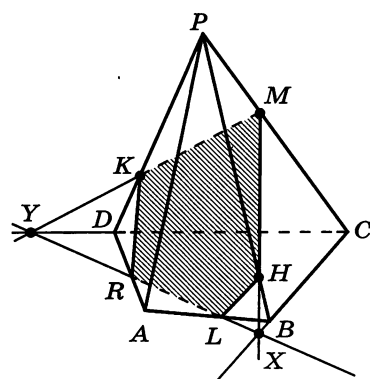
в)



г)



д)



е)

Рис. 26

**!** **Обратите внимание!** Точка пересечения прямой  $BC$  с плоскостью сечения есть точка пересечения этой прямой с прямой, лежащей в плоскости сечения и в плоскости грани  $BSP$ . Этой прямой является прямая  $MH$ .

Пусть  $X$  — точка пересечения прямых  $BC$  и  $MH$ . Тогда точка  $X$  — точка пересечения плоскости  $MHK$  с прямой  $BC$ .

Аналогично, точка  $Y$  пересечения прямых  $CD$  и  $MK$  является точкой пересечения прямой  $CD$  и секущей плоскости  $MHK$ , так как прямая  $MK$  лежит в секущей плоскости.

Таким образом, точки  $X$  и  $Y$  принадлежат как плоскости основания  $ABCD$ , так и секущей плоскости  $MHK$ . Значит,  $XY$  — прямая пересечения этих плоскостей. Она пересекает ребра  $AB$  и  $AD$  соответственно в точках  $L$  и  $R$ , которые служат также вершинами искомого сечения. Тогда пятиугольник  $MHLRK$  — искомое сечение пирамиды  $PABCD$ .

Итак, «цепочка шагов построения» вершин искомого сечения такова: 1.  $X = BC \cap MH$ . 2.  $Y = CD \cap MK$ . 3.  $L = XY \cap AB$ . 4.  $R = XY \cap AD$ . Последовательно соединив эти точки отрезками, получаем пятиугольник  $MHLRK$  — искомое сечение пирамиды  $PABCD$ .

Динамика построения этого сечения видна на рисунке 26.

## § 5. Рисунки на доске и в тетради

Очень многие «беды» начинающих изучать стереометрию происходят от неумения сделать правильный и удобный («конструктивный» для решения задачи) рисунок, или чертеж (мы не различаем эти понятия). Причем речь идет сейчас вовсе не об аккуратности, а о смысловой нагрузке чертежа.

Чертеж в стереометрии резко отличается от чертежа в планиметрии. В планиметрии чертеж, как правило, точно (по крайней мере с точностью до подобия на плоскости) соответствует данным задачи или условию теоремы: если прямые нарисованы параллельными — они параллельны по условию, перпендикулярными — они перпендикулярны по условию. Если отрезки равны по условию задачи, то они равны и на чертеже. Если луч  $OM$  на чертеже расположен во внутренней области угла  $POK$ , то величина угла  $POK$  равна сумме величин углов  $POM$  и  $МОК$  (рис. 27) и так далее.

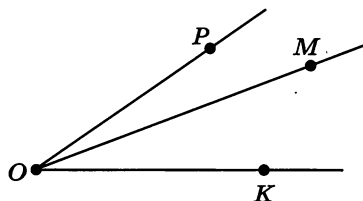


Рис. 27

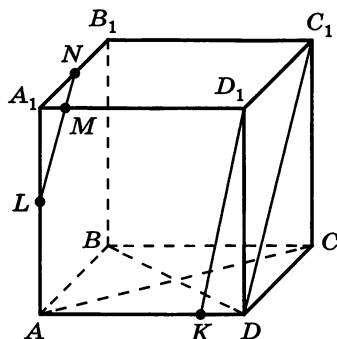


Рис. 28

В стереометрии, при изображении пространственных фигур на плоскости, наблюдается совершенно иная картина. Например, на рисунке 28, изображающем куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ :

- прямая  $BB_1$  «пересекает» прямую  $A_1 D_1$ , а на самом деле — не имеет с ней общих точек;
- угол  $ABC$  — «тупой», а в квадрате  $ABCD$  он равен  $90^\circ$ ;
- «параллельные» прямые  $C_1 D$  и  $D_1 K$  изображают вовсе и не параллельные прямые;
- сумма величин углов  $BAD$  и  $A_1 AB$  отнюдь не равна величине угла  $A_1 AD$  (более того, все названные углы — прямые);
- «неравные» отрезки  $AC$  и  $BD$  на самом деле равны;
- параллелограмм  $AA_1 B_1 B$  с «острым» углом  $A_1 AB$  изображает квадрат;
- «отрезок» с точками  $N$ ,  $M$  и  $L$ , взятыми соответственно на ребрах  $A_1 B_1$ ,  $A_1 D_1$  и  $AA_1$ , в действительности вовсе и не отрезок, а треугольник.

Вернемся к вопросу об изображении куба.

Куб можно было бы изобразить и так, как на рисунке 29. Это изображение является верным и с точки зрения планиметрии, и с точки зрения стереометрии, но, в силу своей не наглядности, становится неудобным и «неконструктивным».

Заметим, к слову, что рисунок 28 также «не удобен и не конструктивен» для изучения треугольника  $NLM$ . Но если на тот же самый куб «посмотреть» в другом ракурсе

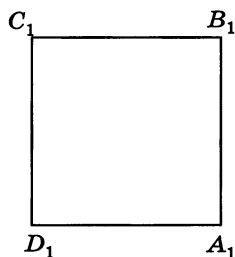


Рис. 29

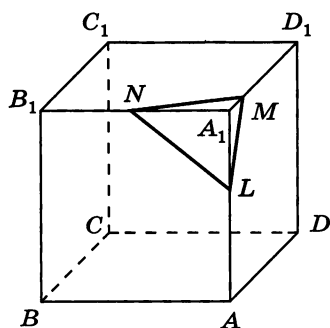


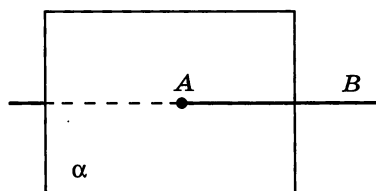
Рис. 30

(«с другой стороны») (рис. 30), то треугольник  $NLM$  (хотя и все равно — искаженный) будет виден «как на ладони».

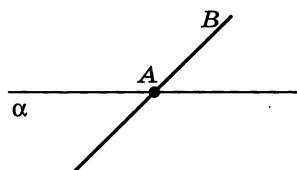
Рассмотрим более простой рисунок. Ситуация: прямая  $AB$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $A$ . На рисунках 31, а, б и в совершенно правильно изображено взаимное положение прямой  $AB$  и плоскости  $\alpha$ . Любой из этих рисунков объективно отражает ситуацию, но полезен и конструктивен только рисунок 31, в.

Замечательная книга Антуана де Сент-Экзюпери «Маленький принц» начинается с рисунка, сделанного рассказчиком в 6 лет. На этом рисунке изображена вовсе не шляпа, как думали окружающие, а кролик внутри удава. В данной книге этот рисунок прекрасен и конструктивен, но нужно ли его помещать в учебник по биологии?

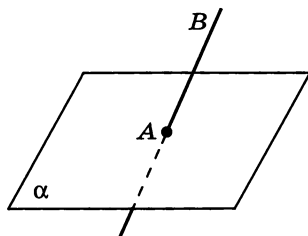
Так и в курсе стереометрии: наглядные и правильно выполненные рисунки и чертежи обладают определенной специфич-



а)



б)



в)

Рис. 31

кой изображения на них пространственных фигур, и очень важно овладеть этой спецификой изображать верно и наглядно пространственные фигуры как на доске, так и в тетради.

Заметим также, что изображение пространственной фигуры является не только эстетически более приятным и более эффективным при использовании двух или трех цветов, но становится также и более эффективным.

Далее, при изучении отдельных тем курса стереометрии, вам будет предложено примерное содержание трех графических работ, которые следует выполнить.

Работа № 1. (После изучения темы «Следствия из аксиом».)

Работа № 2. (После изучения темы «Параллельность в пространстве».)

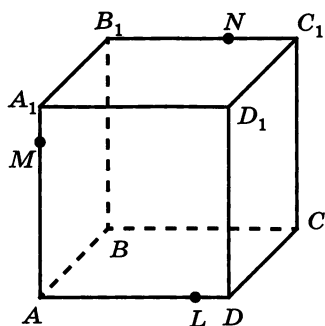
Работа № 3. (После изучения темы «Перпендикулярность в пространстве».)

Предлагаемые в этих работах задачи, с одной стороны, достаточно просты, но, с другой стороны, они очень важны. Разобравшись в их решениях и безукоризненно выполнив нужный для каждой из них рисунок (чертеж), вы достигаете необходимого уровня геометрической культуры, который позволит вам в дальнейшем справиться со стереометрическими задачами более высокой трудности.

Отметим также важность и необходимость того, чтобы каждый изучающий стереометрию «видел» динамику (последовательность) и диалектику построения изображения геометрической фигуры на рисунке (чертеже).

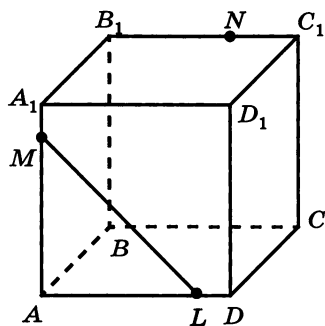
Например, надо построить сечение куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , проходящее через внутренние точки  $M$ ,  $N$  и  $L$  ребер соответственно  $AA_1$ ,  $B_1 C_1$  и  $AD$ . На рисунках 32, а — л вы можете видеть динамику построения требуемого сечения куба.

Мы «сняли фильм» о решении данной задачи. Такие «фильмы» можно «снимать» и при решении более сложных стереометрических задач на построение вообще, а не только сечений. Удобно при этом все построения делать, например, простым карандашом и только нужные (новые) для данного «кадра» отрезки (линии) строить (выделять) особым цветом. Аналогичный прием нескольких цветов и «развивающегося» рисунка удобно применять и при доказательствах теорем.



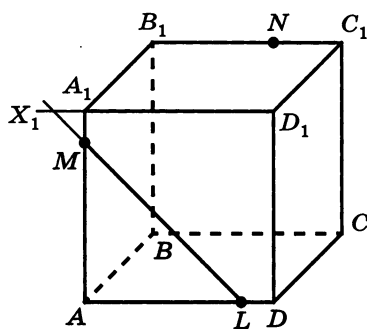
$$(MNL) = \alpha$$

a)



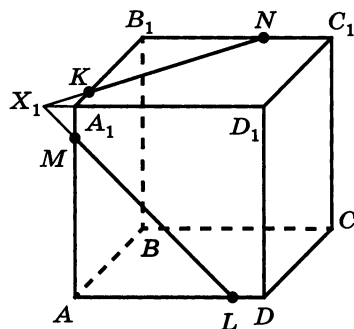
$$\alpha \cap (AA_1D) = ML$$

б)



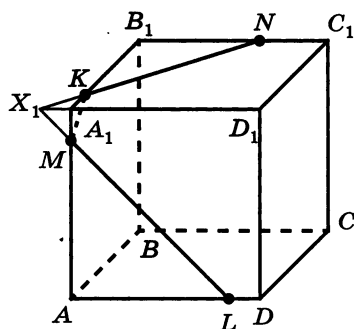
$$ML \cap (A_1B_1C_1) = ML \cap A_1D_1 = X_1$$

в)



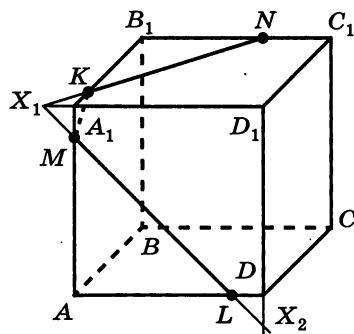
$$\alpha \cap (A_1B_1C_1) = KN$$

г)



$$\alpha \cap (AA_1B_1) = MK$$

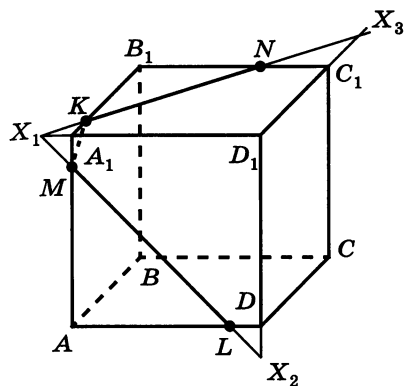
д)



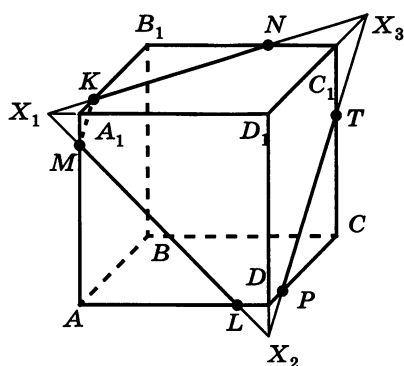
$$ML \cap (DD_1C_1) = ML \cap DD_1 = X_2$$

е)

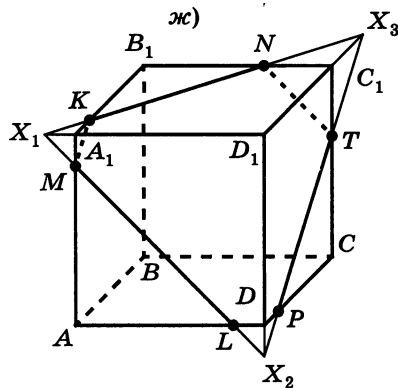
Рис. 32



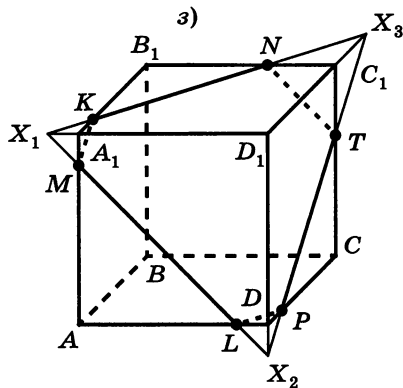
$$KN \cap (DD_1C_1) = KN \cap D_1C_1 = X_3$$



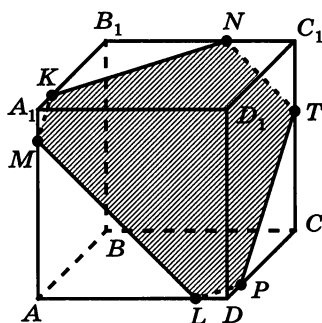
$$\alpha \cap (DD_1C_1) = TP$$



$$\alpha \cap (BB_1C_1) = NT$$



$$\alpha \cap (ABC) = LP$$



$LMKNTP$  — искомое сечение

$MK \parallel TP, KN \parallel LP, NT \parallel ML$

л)



## § 6. Классификации взаимного расположения двух прямых в пространстве

Из планиметрии известно, что на плоскости две прямые могут либо пересекаться, либо не пересекаться (быть параллельными). При этом напомним, что в планиметрии речь идет о таких прямых, которые заведомо лежат в одной плоскости.

В стереометрии же, где фигуры рассматриваются в пространстве, для взаимного расположения двух прямых возможностей больше, чем в планиметрии. Это объясняется тем, что в пространстве не для всяких двух прямых существует плоскость, которая содержала бы каждую из этих прямых. Иначе говоря, не всякие две прямые пространства лежат в одной плоскости.

Например, ребра  $AB$  и  $PC$  тетраэдра  $PABC$  (рис. 33, *а*) не лежат в одной плоскости; также не лежат в одной плоскости ребра  $AB$  и  $B_1C_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 33, *б*).

**Определение.** Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Иначе говоря, две скрещивающиеся прямые — это такие прямые, через которые не проходит ни одна плоскость.

Таким образом, можно сказать, что прямые, содержащие ребра  $AB$  и  $CP$  тетраэдра  $PABC$  (рис. 33, *а*), скрещиваются; также скрещиваются прямые, содержащие ребра  $AB$  и  $B_1C_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 33, *б*).



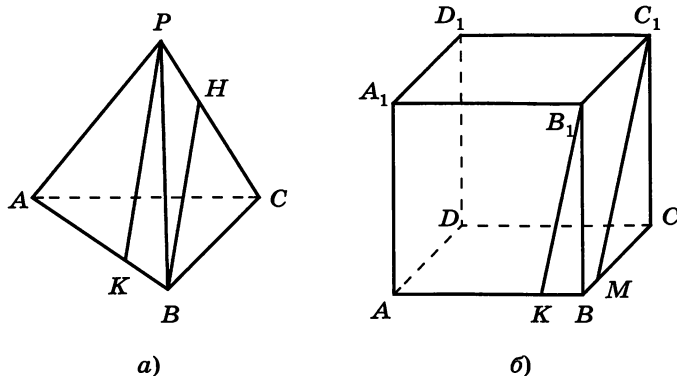


Рис. 33

Заметим, что на «плоском» чертеже две скрещивающиеся прямые изображаются либо пересекающимися, либо параллельными прямыми.

Определите на рисунках 33, а, б все пары скрещивающихся прямых, содержащих ребра тетраэдра (куба). Какие из них изображены пересекающимися, а какие — параллельными прямыми?

Из сказанного выше следует, что для взаимного расположения двух прямых в пространстве возможен один и только один из трех случаев.

- Две прямые лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку — *пересекающиеся прямые* (рис. 34, а).

- Две прямые лежат в одной плоскости и не имеют общей точки — *параллельные прямые* (рис. 34, б).

- Две прямые не лежат в одной плоскости — *скрещивающиеся прямые* (рис. 34, в).

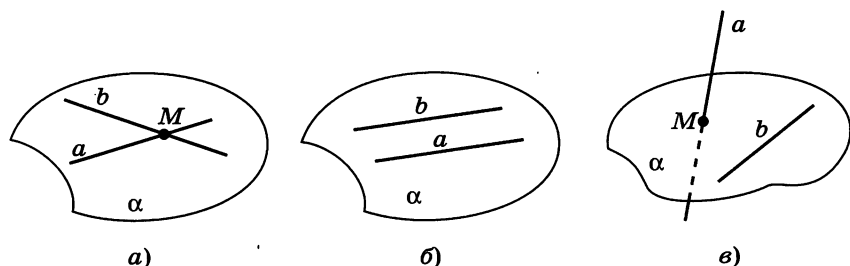


Рис. 34

### 6.1. Скрещивающиеся прямые

При решении вопроса о равенстве двух треугольников мы пользуемся, как правило, не непосредственно определением равных треугольников, а признаками их равенства.

Аналогичная ситуация будет нам встречаться при решении вопроса о взаимном расположении двух прямых в пространстве, особенно в случае, когда мы хотим убедиться, что прямые скрещиваются. В этом случае желательно иметь в распоряжении признаки скрещивающихся прямых. Один из таких признаков выражает

**Теорема 4 (признак скрещивающихся прямых).** Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещиваются.

Дано:  $b \subset \alpha$ ,  $a \cap \alpha = C$ ,  $C \notin b$  (рис. 35).

Доказать: прямые  $a$  и  $b$  скрещиваются.

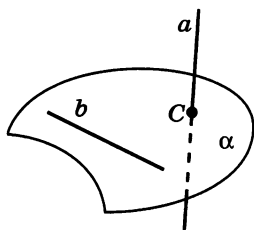


Рис. 35

**Доказательство.** Докажем эту теорему методом от противного. Предположим, что прямые  $a$  и  $b$  не скрещиваются. Тогда они или параллельны, или пересекаются, и, следовательно, лежат в некоторой одной плоскости  $\beta$  (теоремы 2, 3).

Плоскость  $\beta$  содержит прямую  $b$  и точку  $C = a \cap \alpha$ . Но через прямую  $b$  и точку  $C$  проходит также и плоскость  $\alpha$ . По теореме

1 плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  совпадают. Это означает, что прямая  $a$  должна лежать в плоскости  $\alpha$ . По условию же прямая  $a$  пересекает плоскость  $\alpha$ . Пришли к противоречию с условием теоремы. Значит, предположение было неверным. Следовательно, прямые  $a$  и  $b$  не лежат в одной плоскости, то есть скрещиваются. Теорема доказана. ▼

Из доказанного следует, что если прямая  $a$  в точке  $M$  пересекает плоскость  $\alpha$ , то эта прямая скрещивается с любой прямой плоскости  $\alpha$ , не проходящей через точку  $M$  (рис. 36).

Часто бывает удобно использовать и такой признак скрещивающихся прямых: если четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $E$  не лежат в одной плоскости (рис. 37), то прямые  $AB$  и  $CE$ ,  $AC$  и  $BE$ ,  $AE$  и  $BC$  попарно скрещиваются.

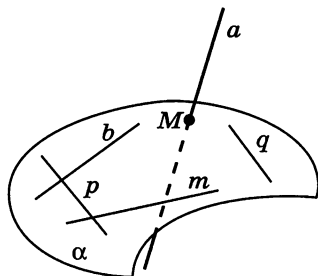


Рис. 36

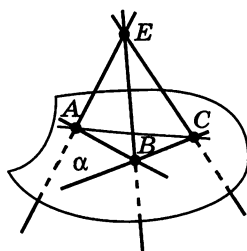


Рис. 37

Действительно, точки  $A, B, C$  и  $E$  не лежат в одной плоскости, тогда и прямые  $AB$  и  $CE$  также не лежат в одной плоскости (почему?), а, следовательно, скрещиваются по определению. Аналогично можно рассмотреть и другие пары прямых.

### 6.2. Параллельные прямые в пространстве

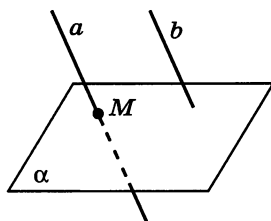
Параллельные прямые в пространстве обладают рядом свойств, напоминающих свойства параллельных прямых на плоскости. Рассмотрим некоторые из них.

**Теорема 5.** Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

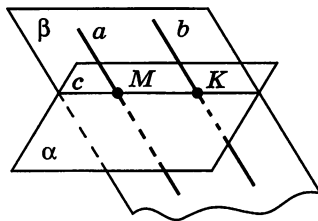
Дано:  $a \parallel b$ ,  $a \cap \alpha = M$  (рис. 38, а).

Доказать:  $b$  пересекает  $\alpha$ .

Доказательство. Пусть через параллельные прямые  $a$  и  $b$  проходит плоскость  $\beta$  (т. 3) (рис. 38, б). Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  имеют общую точку  $M = a \cap \alpha$ , значит, они пересекаются по прямой, которая проходит через  $M$ . Обозначим эту прямую  $c$ .



а)



б)

Рис. 38

Из планиметрии известно, что *если одна из двух параллельных прямых пересекает данную прямую, то и другая прямая пересекает данную прямую*.

У нас в плоскости  $\beta$  лежат три прямые:  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Причем  $a \parallel b$  и прямая  $a$  пересекается с прямой  $c$ . Это означает, что прямые  $b$  и  $c$  также пересекаются в некоторой точке  $K$ . А так как прямая  $c$  лежит в плоскости  $\alpha$ , то точка  $K$  принадлежит плоскости  $\alpha$ . Следовательно, прямая  $b$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $K$ . Теорема доказана. ▼

Заметим, что из вышесказанного следует: *если одна из двух параллельных прямых лежит в данной плоскости, то другая, параллельная ей прямая, не может эту плоскость пересекать*.

**Теорема 6.** Через точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну.

**Доказательство.** Пусть даны прямая  $a$  и не принадлежащая ей точка  $M$  (рис. 39). Проведем через них плоскость  $\alpha$  (т. 1). В этой плоскости через точку  $M$  можно провести единственную прямую, параллельную прямой  $a$  (из планиметрии). Обозначим эту прямую  $b$  и покажем, что в пространстве не существует другой прямой, проходящей через точку  $M$  и параллельной прямой  $a$ .

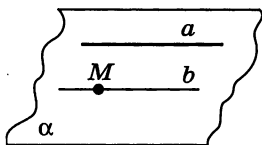


Рис. 39

Предположим, что через точку  $M$  можно провести некоторую другую прямую  $c$ , параллельную прямой  $a$ . Прямая  $c$  не лежит в плоскости  $\alpha$  (в плоскости  $\alpha$  уже проведена через точку  $M$  прямая  $b \parallel a$ ), а пересекает ее в точке  $M$ . Тогда прямая  $a$ , будучи параллельной прямой  $c$ , по теореме 5 также должна пересекать плоскость  $\alpha$ . Это противоречит тому, что  $a \subset \alpha$ . Значит,

наше предположение было неверным, то есть прямая  $b$  — единственна. Теорема доказана. ▼

Из теоремы 6 следует, что из двух пересекающихся прямых только одна может быть параллельна некоторой данной прямой.

**Теорема 7 (признак параллельности прямых).** Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Дано:  $a \parallel b, c \parallel b$  (рис. 40).

Доказать:  $a \parallel c$ .

Доказательство. Случай, когда прямые  $a, b$  и  $c$  лежат в одной плоскости, был рассмотрен в планиметрии.

Рассмотрим теперь случай, когда прямые  $a, b$  и  $c$  не лежат в одной плоскости.

Проведем плоскость  $\alpha$  через прямую  $a$  и любую точку  $M$  прямой  $c$  (т. 1).

Возникает вопрос: лежит или не лежит в плоскости  $\alpha$  прямая  $c$ ?

Так как прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$  и параллельна прямой  $b$ , то прямая  $b$  не может пересекать плоскость  $\alpha$ . Следовательно, плоскость  $\alpha$  не может пересекать и прямая  $c$ , параллельная прямой  $b$ . Получили: прямая  $c$  имеет с плоскостью  $\alpha$  общую точку  $M$  и не пересекает эту плоскость. Это означает, что прямая  $c$  лежит в плоскости  $\alpha$ .

Таким образом, прямые  $a$  и  $c$  лежат в одной плоскости  $\alpha$ . Они не могут пересекаться по теореме 6. Следовательно, прямые  $a$  и  $c$  параллельны. Теорема доказана. ▼

Из теоремы 7 следует, что из двух скрещивающихся прямых только одна может быть параллельна некоторой данной прямой.

**Замечание.** Из теоремы следует:  $a \parallel b, b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$ , то есть отношение параллельности прямых в пространстве обладает свойством транзитивности.

■ ЗАДАЧА 2.004. Прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$ . Прямая  $b$  параллельна прямой  $a$  и имеет общую точку  $M$  с плоскостью  $\alpha$ . Докажите, что прямая  $b$  также лежит в плоскости  $\alpha$ .

Решение. Так как прямые  $a$  и  $b$  параллельны, то через них можно провести плоскость. Обозначим ее  $\beta$  (рис. 41). Прямая  $b$  проходит через точку  $M$ , поэтому плоскость  $\beta$  проходит через пря-

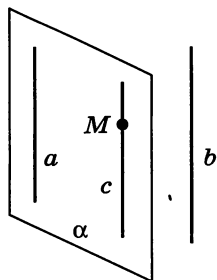


Рис. 40

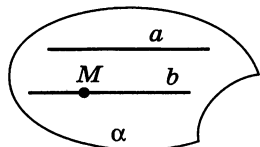


Рис. 41

мую  $a$  и точку  $M$ . Но через  $M$  и  $a$  проходит и плоскость  $\alpha$ . По теореме 1 плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  совпадают. Это означает, что  $b \subset \alpha$ .

Заметим, что можно рассуждать и так. Предположим, что прямая  $b$  не лежит в плоскости  $\alpha$ , а имеет с ней только одну общую точку  $M$ , то есть прямая  $b$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $M$ .

Так как прямые  $a$  и  $b$  параллельны, то они не пересекаются. Значит, точка  $M$  пересечения прямой  $b$  с плоскостью  $\alpha$  не принадлежит прямой  $a$ , которая, в свою очередь, лежит в плоскости  $\alpha$ . Тогда по признаку скрещивающихся прямых прямые  $a$  и  $b$  должны скрещиваться. Это противоречит условию задачи:  $a \parallel b$ . Следовательно, предположение о том, что прямая  $b$  не лежит в плоскости  $\alpha$ , неверно. Это означает, что  $b \subset \alpha$ .

■ ЗАДАЧА 2.015. Конец  $B$  отрезка  $AB$  лежит в плоскости  $\alpha$ ;  $C$  — внутренняя точка отрезка  $AB$ . Через  $A$  и  $C$  проведены параллельные прямые, пересекающие  $\alpha$  соответственно в точках  $A_1$  и  $C_1$ . Найдите длину отрезка  $CC_1$ , если: а)  $BC = 12$ ,  $AB : AA_1 = 3 : 5$ ; б)  $AA_1 = 15$ ,  $AC : CB = 2 : 3$ ; в)  $AA_1 = 21$ ,  $AC : AB = 2 : 7$ .

Решение. а) Параллельные отрезки  $AA_1$  и  $CC_1$  определяют плоскость  $\beta$ , которая содержит отрезок  $AB$  и пересекает плоскость  $\alpha$  по прямой  $A_1C_1$ , проходящей через точку  $B$  (рис. 42).

Для вычисления длины отрезка  $CC_1$ , лежащего в плоскости  $\beta$ , используем обобщенную теорему Фалеса.

Исходя из условия  $CC_1 \parallel AA_1$ , имеем: а)  $AB : AA_1 = BC : CC_1 = 3 : 5$ , откуда  $CC_1 = \frac{5}{3} BC = 20$ ;

$$\text{б) } AC : CB = 2 : 3 \Rightarrow BC : AB = 3 : 5 \Rightarrow BC = \frac{3}{5} AB.$$

$$\text{Далее, } \triangle CBC_1 \sim \triangle ABA_1 \Rightarrow BC : AB = CC_1 : AA_1 \Rightarrow CC_1 = \frac{BC \cdot AA_1}{AB} = \frac{0,6 AB \cdot AA_1}{AB} = 0,6 \cdot 15 = 9;$$

$$\text{в) } AC : AB = 2 : 7 \Rightarrow BC : AB = 5 : 7 \Rightarrow BC = \frac{5}{7} AB.$$

$$\text{Тогда } \triangle CBC_1 \sim \triangle ABA_1 \Rightarrow CC_1 : AA_1 = BC : AB \Rightarrow CC_1 = \frac{BC \cdot AA_1}{AB} = \frac{5}{7} AA_1 = 15.$$

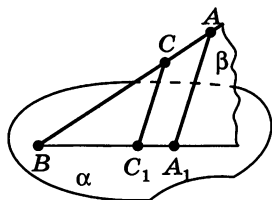


Рис. 42

Ответ: а) 20; б) 9; в) 15.

## § 7. Угол между лучами. Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярные прямые

### 7.1. Угол между лучами в пространстве

В стереометрии, как в планиметрии, два луча  $h = OA$  и  $k = O_1A_1$  называются *сонаправленными* или *одинаково направленными* (пишут:  $h \uparrow\uparrow k$ ,  $OA \uparrow\uparrow O_1A_1$ ), если они или лежат на параллельных прямых и расположены в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через их начала (рис. 43, а), или один из них содержится в другом.

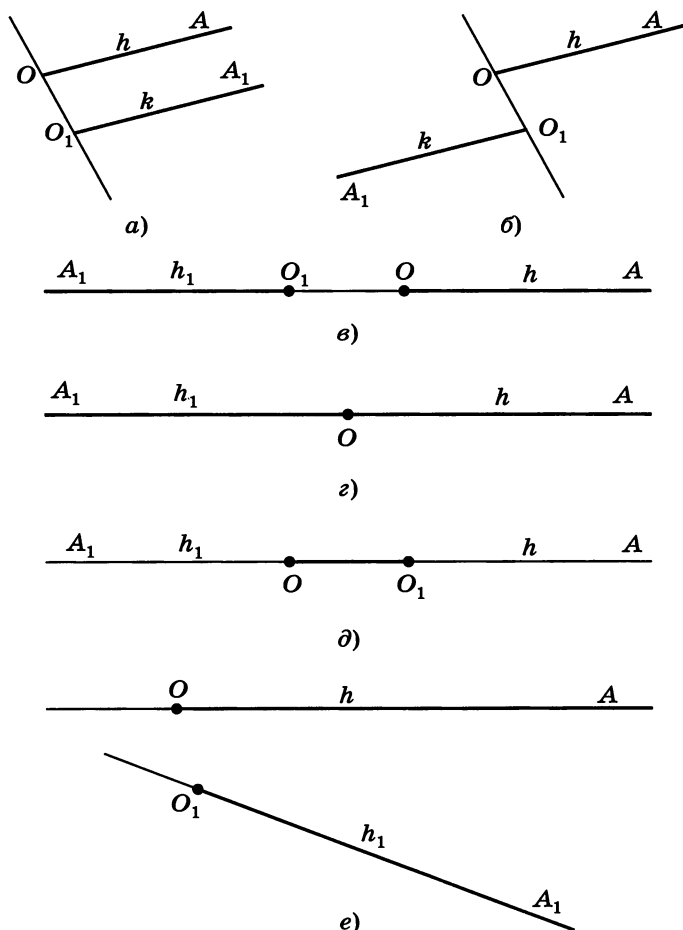


Рис. 43

Два луча  $h = OA$  и  $k = O_1A_1$  называются *противонаправленными* или *противоположно направленными* (пишут:  $h \uparrow\downarrow k$ ,  $OA \uparrow\downarrow O_1A_1$ ), если они лежат на параллельных прямых и расположены в различных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через их начала (рис. 43, б), или в том случае, когда лучи лежат на одной прямой и либо не имеют общих точек (рис. 43, в), либо их общей частью является одна точка (рис. 43, г) или отрезок этой прямой (рис. 43, д). Если лучи  $h = OA$  и  $k = O_1A_1$  лежат ни на параллельных прямых и ни на одной прямой (рис. 43, е), то эти лучи не сонаправлены и не противонаправлены.

Угол между сонаправленными лучами принимается равным  $0^\circ$ .

Если лучи  $h$  и  $k$  не сонаправлены и имеют общее начало (рис. 44), то величина угла между ними определяется как угловая величина плоского угла  $\angle(h, k)$  со сторонами  $h$  и  $k$  и обозначается:

$\widehat{(h; k)}$ . Из этого определения следует, что  $0^\circ < \widehat{(h; k)} \leq 180^\circ$ .

Если же начала несонаправленных лучей  $h$  и  $k$  различны (рис. 45), то для определения величины угла между ними поступают так: из любой точки  $O$  пространства проводят лучи  $h_1 \uparrow\uparrow h$  и  $k_1 \uparrow\uparrow k$ . Тогда величина угла между лучами  $h$  и  $k$  равна величине угла между лучами  $h_1$  и  $k_1$ .

Покажем, что в таком случае величина угла между лучами  $h$  и  $k$  не зависит от выбора точки  $O$ . Для этого докажем следующую теорему.

**Теорема 8.** Два угла с попарно сонаправленными сторонами равны.

**Доказательство.** Рассмотрим два угла с вершинами  $O$  и  $O_1$  и попарно сонаправленными сторонами:  $h \uparrow\uparrow h_1$ ,  $k \uparrow\uparrow k_1$ .

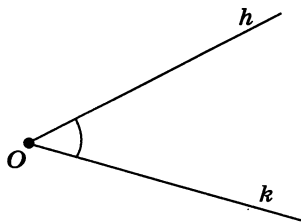


Рис. 44

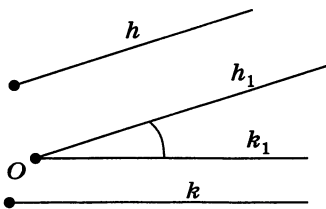


Рис. 45



Если данные углы лежат в одной плоскости, то утверждение теоремы известно из планиметрии.

Пусть данные углы не лежат в одной плоскости (рис. 46). Докажем, что они равны.

Отметим на сторонах  $h$  и  $k$  угла с вершиной  $O$  любые точки  $A$  и  $B$ , а затем отложим на сонаправленных сторонах соответственно  $h_1$  и  $k_1$  угла с вершиной  $O_1$  отрезки  $O_1A_1 = OA$  и  $O_1B_1 = OB$  и проведем отрезки  $OO_1$ ,  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $AB$  и  $A_1B_1$ .

Так как  $OA = O_1A_1$  и  $OA \parallel O_1A_1$ , то четырехугольник  $OAA_1O_1$  — параллелограмм, значит,  $AA_1 = OO_1$  и  $AA_1 \parallel OO_1$ . Аналогично,  $BB_1 = OO_1$  и  $BB_1 \parallel OO_1$ . Поэтому четырехугольник  $ABB_1A_1$  — параллелограмм, откуда  $AB = A_1B_1$ . Тогда в равных (по трем равным сторонам) треугольниках  $AOB$  и  $A_1O_1B_1$  соответственные углы  $AOB$  и  $A_1O_1B_1$  равны, то есть  $\angle(h, k) = \angle(h_1, k_1)$ . Теорема доказана. ▽

Докажите самостоятельно, что два луча, сонаправленные с третьим лучом, сонаправлены.

На основании доказанного и определения угла между лучами подтверждено: величина угла между двумя лучами не зависит от выбора точки, от которой проводятся сонаправленные с ними лучи.

## 7.2. Угол между прямыми в пространстве

Величина угла между параллельными прямыми считается равной нулю.

Из планиметрии известно, что за величину угла между пересекающимися прямыми принимается величина наименьшего из углов, образованных этими прямыми.

Величина угла между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$  определяется следующим образом. Через произвольную точку  $M$  пространства проводят прямые  $a_1 \parallel a$  и  $b_1 \parallel b$  и находят величину угла между пересекающимися прямыми  $a_1$  и  $b_1$ . Эту величину и принимают за величину угла между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$  (рис. 47).

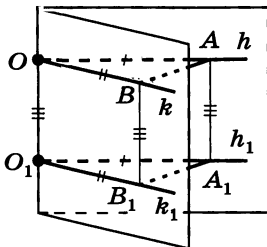


Рис. 46

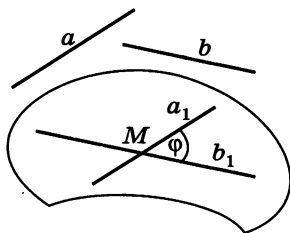


Рис. 47

**Определение.** За величину угла между двумя скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$  принимается величина угла между параллельными им пересекающимися в некоторой точке  $M$  прямыми  $a_1$  и  $b_1$ , то есть

$$(\widehat{a; b}) = (\widehat{a_1; b_1}) = \varphi, \text{ где } a_1 \parallel a, b_1 \parallel b, a_1 \cap b_1 = M.$$

На основании доказанного в п. 7.1 величина угла между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки  $M$ .

Из вышесказанного следует, что величина угла между прямыми в пространстве принадлежит промежутку  $[0^\circ; 90^\circ]$ .

В соответствии с этим определением две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если величина угла между ними равна  $90^\circ$ .

Докажите самостоятельно, что если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна некоторой прямой, то и вторая прямая перпендикулярна этой прямой.

Например, скрещивающиеся ребра  $BC$  и  $DD_1$  куба (рис. 48) взаимно перпендикулярны, так как соответственно параллельные им пересекающиеся ребра  $AD$  и  $AA_1$  перпендикулярны ( $ADD_1A_1$  — квадрат). Аналогично, взаимно перпендикулярными в этом кубе являются пары ребер  $AB$  и  $B_1C_1$ ,  $AD$  и  $CC_1$ . А величина угла между прямыми  $B_1C$  и  $AA_1$  равна  $45^\circ$ , так как этот угол равен углу между пересекающимися прямыми  $B_1C$  и  $B_1B$  ( $B_1B \parallel A_1A$ ).

Докажите самостоятельно, что величина угла между прямыми  $AC$  и  $BC_1$  равна  $60^\circ$ .

Для нахождения величины угла между двумя скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$  можно взять на одной из них, напри-

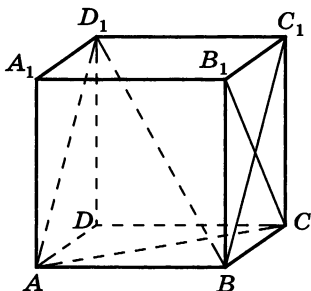


Рис. 48

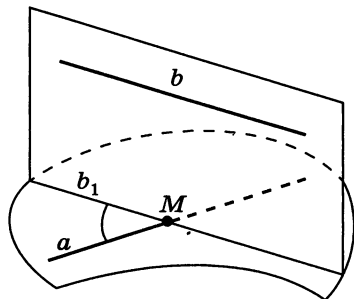


Рис. 49

мер, на прямой  $a$ , любую точку  $M$  и в плоскости, определяемой прямой  $b$  и точкой  $M$ , провести через точку  $M$  прямую  $b_1 \parallel b$  (рис. 49). Угол между прямыми  $a$  и  $b_1$  равен углу между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$ . При этом выбирать следует ту из двух данных скрещивающихся прямых, а также такую точку на другой из них, чтобы полученное изображение было наглядным, а его построение наиболее простым; величина искомого угла не зависит от выбора точки  $M$ .



## § 8. Параллельность прямой и плоскости

В пространстве прямая может лежать в плоскости, а может и не лежать в ней. При этом, если прямая не лежит в плоскости, то по аксиоме прямой и плоскости она не может иметь с этой плоскостью более одной общей точки. Это означает, что плоскость и не лежащая в ней прямая либо имеют одну общую точку, либо не имеют ни одной общей точки. Если прямая и плоскость имеют ровно одну общую точку, то они пересекаются. А если прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки?

**Определение.** Прямая и плоскость, не имеющие общей точки, называются параллельными.

Если прямая  $a$  и плоскость  $\alpha$  параллельны, то записывают  $a \parallel \alpha$  или  $\alpha \parallel a$ . При этом говорят, что прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$  или плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $a$ .

При решении стереометрических задач обоснование параллельности прямой и плоскости при помощи только одного определения их параллельности часто затруднительно и не приводит к желаемому результату. В таких случаях пользуются признаками параллельности прямой и плоскости, один из которых выражает

**Теорема 9 (признак параллельности прямой и плоскости).**  
Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то эти прямая и плоскость параллельны.

Дано:  $b \subset \alpha$ ,  $a \parallel b$ ,  $a \not\subset \alpha$  (рис. 50).

Доказать:  $a \parallel \alpha$ .

**Доказательство.** Так как прямая  $b$  лежит в плоскости  $\alpha$ , то (по теореме о двух параллельных прямых, одна из которых пересекает плоскость (т. 5)) прямая  $a$ , параллельная прямой  $b$ , не может пересекать плоскость  $\alpha$ ; а так как прямая  $a$  по условию не лежит в плоскости  $\alpha$ , то прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ . Теорема доказана. ▼

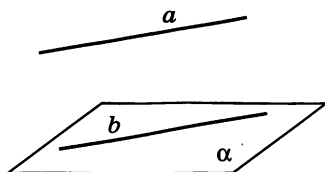


Рис. 50

Из этой теоремы, в частности, вытекает факт существования и способ построения прямой, параллельной данной плоскости и проходящей через данную точку, не лежащую в этой плоскости.

**Теорема 10.** Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой.

Дано:  $a \parallel \beta$ ,  $a \subset \alpha$ ,  $\alpha \cap \beta = b$  (рис. 51).

Доказать:  $b \parallel a$ .

**Доказательство.** Прямые  $a$  и  $b$  лежат в одной плоскости  $\alpha$ . Кроме того, прямая  $a$  не имеет общих точек с прямой  $b$ , так как прямая  $a$  по условию параллельна плоскости  $\beta$ , в которой лежит прямая  $b$ . Таким образом, прямые  $a$  и  $b$  лежат в одной плоскости и не имеют общих точек, следовательно, они параллельны по определению. Теорема доказана. ▼

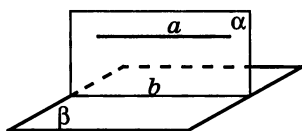


Рис. 51

Из этой теоремы, в частности, следует, что если прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ , то в плоскости  $\alpha$  существует прямая, параллельная прямой  $a$ , и таких прямых в плоскости  $\alpha$  бесконечно много.

**Теорема 11.** Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти плоскости пересекаются, то прямая их пересечения параллельна каждой из данных прямых.

Дано:  $a \parallel b$ ,  $a \subset \alpha$ ,  $b \subset \beta$ ,  $\alpha \cap \beta = c$  (рис. 52).

Доказать:  $c \parallel a$ ,  $c \parallel b$ .

Доказательство. Докажем, что прямая  $c$  параллельна прямой  $a$ .

По условию теоремы прямая  $a$  параллельна прямой  $b$ , лежащей в плоскости  $\beta$ , а значит (по признаку параллельности прямой и плоскости), прямая  $a$  параллельна и самой плоскости  $\beta$ . Кроме того, плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $a$  и пересекает плоскость  $\beta$  по прямой  $c$ . По теореме 10 прямые  $a$  и  $c$  параллельны. Тогда на основании свойства транзитивности параллельности прямых прямая  $b$  параллельна прямой  $c$ . Теорема доказана. ▼

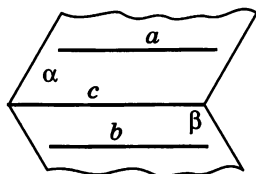


Рис. 52

Докажите самостоятельно еще один признак параллельности прямой и плоскости.

Плоскость и не лежащая в ней прямая, параллельные некоторой прямой, параллельны.

**Теорема 12.** Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.

Дано:  $\alpha \cap \beta = a$ ,  $b \parallel \alpha$ ,  $b \parallel \beta$  (рис. 53).

Доказать:  $b \parallel a$ .

Доказательство. По следствию из теоремы 10 в плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  существуют соответственно прямые  $m$  и  $n$ , параллельные прямой  $b$ , а следовательно, параллельные между собой. Тогда по теореме 11 прямые  $m$  и  $n$  параллельны прямой  $a$  пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ . На основании транзитивности параллельности прямых прямая  $b$  параллельна прямой  $a$ . Теорема доказана. ▼

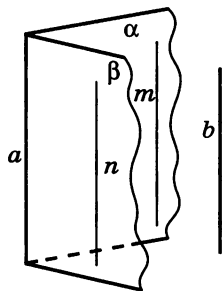


Рис. 53

■ ЗАДАЧА 3.005. Даны две скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$ . Через каждую точку прямой  $a$  проводится прямая, параллельная прямой  $b$ . Докажите, что все такие прямые лежат в одной плоскости. Как расположена эта плоскость по отношению к прямой  $b$ ? Ответ обоснуйте.

Решение. Отметим на прямой  $a$  произвольную точку  $B$  и проведем через нее прямую  $c$  (единственную!), параллельную прямой  $b$ . Через пересекающиеся прямые  $a$  и  $c$  проводим плоскость (единственную!). Обозначим ее  $\alpha$  (рис. 54). Эта плоскость (по признаку параллельности прямой и плоскости) параллельна прямой  $b$ .

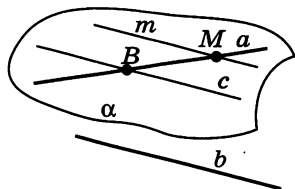


Рис. 54

Пусть  $M$  — произвольная точка прямой  $a$ ,  $m$  — прямая, проходящая через точку  $M$  параллельно прямой  $b$ . Тогда прямая  $m$  параллельна прямой  $c$  (т. 7) и лежит в плоскости  $\alpha$  (почему?). В силу произвольного выбора точки  $M$  на прямой  $a$  можно сделать вывод: **все прямые пространства, параллельные прямой  $b$  и пересекающие прямую  $a$ , лежат в плоскости, которая проходит через прямую  $a$  и параллельна прямой  $b$ .**

Самостоятельно докажете единственность плоскости  $\alpha$ .

## § 9. Перпендикулярность прямой и плоскости

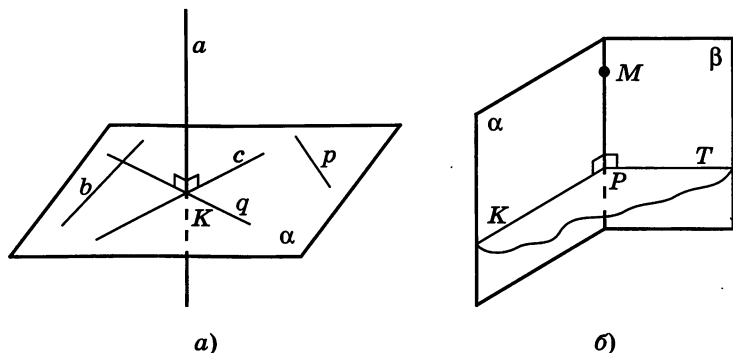
### 9.1. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Построение перпендикулярных прямой и плоскости

Мы приступаем к изучению важного раздела стереометрии — перпендикулярности прямых и плоскостей. Интуитивное представление о прямой, перпендикулярной плоскости (иногда говорят: «*перпендикулярной к плоскости*»), мы получили из практики.

**Определение.** Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 55,  $a$ ).

Если прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ , то записывают  $a \perp \alpha$  или  $\alpha \perp a$  и также говорят, что плоскость  $\alpha$  перпендикулярна прямой  $a$  или прямая  $a$  и плоскость  $\alpha$  перпендикулярны. (Прямую  $a$  называют также *нормалью* плоскости  $\alpha$ .)

На плоскости прямая может быть перпендикулярна двум прямым только в том случае, когда они параллельны, в пространстве же прямая может быть перпендикулярна двум пересекающимся прямым. Действительно, рассмотрим две плос-



$$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha, \\ b \subset \alpha, c \subset \alpha, p \subset \alpha, q \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp b, a \perp c, a \perp p, a \perp q$$

Рис. 55

кости  $\alpha$  и  $\beta$ , пересекающиеся по прямой  $MP$  (рис. 55, б). В плоскости  $\alpha$  проведем прямую  $PK$ , перпендикулярную  $MP$ , и в плоскости  $\beta$  — прямую  $PT$ , также перпендикулярную  $MP$ . Теперь прямая  $MP$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $PK$  и  $PT$ . Ниже будет доказано, что прямая  $MP$  перпендикулярна и плоскости  $KPT$ .

При решении задач затруднительно обосновывать перпендикулярность прямой и плоскости при помощи только одного определения. Более того, возникает вопрос о существовании прямой, перпендикулярной данной плоскости. Решению этих вопросов нам поможет признак перпендикулярности прямой и плоскости, который выражает

**Теорема 13** (признак перпендикулярности прямой и плоскости). Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Дано:  $b \subset \alpha, c \subset \alpha; a \perp b, a \perp c; b$  и  $c$  пересекаются (рис. 56).

Доказать:  $a \perp \alpha$ .

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что прямая  $a$  перпендикулярна любой прямой  $m$ , лежащей в плоскости  $\alpha$  и не параллельной ни одной из прямых  $b$  и  $c$ .



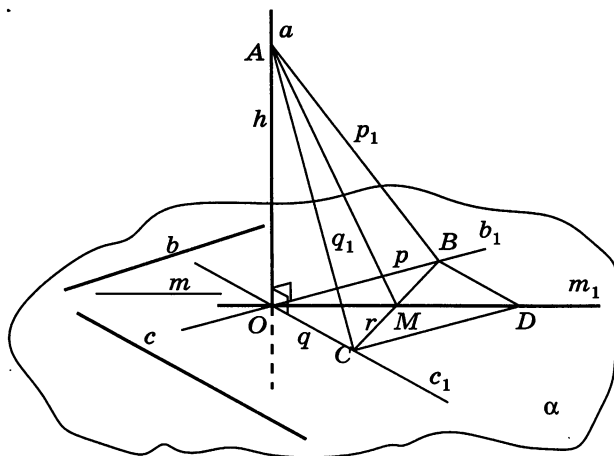


Рис. 56

Проведем в плоскости  $\alpha$  через точку  $O = a \cap \alpha$  прямые  $b_1 \parallel b$ ,  $c_1 \parallel c$ ,  $m_1 \parallel m$  и, выбрав на прямой  $b_1$  любую точку  $B$ , отличную от  $O$ , построим параллелограмм  $OBDC$  с вершинами  $D$  и  $C$  на прямых соответственно  $m_1$  и  $c_1$ . Тогда:

$$(a \perp b, b \parallel b_1) \Rightarrow a \perp b_1;$$

$$(a \perp c, c \parallel c_1) \Rightarrow a \perp c_1.$$

Если  $A$  — любая точка прямой  $a$  ( $A \neq O$ ) и  $M$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма  $OBDC$ , то отрезки  $OM$  и  $AM$  — медианы треугольников  $OBC$  и  $ABC$  соответственно. Обозначив длины отрезков:  $OA = h$ ,  $OB = p$ ,  $OC = q$ ,  $BC = r$ ,  $AB = p_1$ ,  $AC = q_1$ , на основании соотношения между медианой и сторонами треугольника получаем:

$$\text{в } \triangle BOC: OM^2 = \frac{2OB^2 + 2OC^2 - BC^2}{4} = \frac{2p^2 + 2q^2 - r^2}{4};$$

$$\text{в } \triangle ABC: AM^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4} = \frac{2p_1^2 + 2q_1^2 - r^2}{4}.$$

Учитывая, что треугольники  $AOB$  и  $AOC$  — прямоугольные, находим:

$$AM^2 - OM^2 = \frac{2(p_1^2 - p^2) + 2(q_1^2 - q^2)}{4} = \frac{2h^2 + 2h^2}{4} = h^2 = OA^2.$$

Тогда в  $\triangle AOM$  получаем  $OA^2 + OM^2 = AM^2$ . Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора,  $\triangle AOM$  — прямоугольный, откуда  $OA \perp OM$ , то есть  $a \perp m_1$ . А так как  $m_1 \parallel m$ , то  $a \perp m$ .

В силу произвольного выбора прямой  $m$  в плоскости  $\alpha$ , приходим (на основании определения прямой, перпендикулярной плоскости) к выводу: прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ . Теорема доказана. ▼

Векторное доказательство теоремы 13 вы сможете прочесть в пункте 23.3.

Переходим к построению перпендикулярных прямой и плоскости.

■ **ЗАДАЧА 1.** Через данную точку  $M$  провести плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную данной прямой  $a$ .

Решение. Возможны два случая: 1) точка  $M$  не принадлежит данной прямой  $a$ ; 2) точка  $M$  принадлежит данной прямой  $a$ .

Рассмотрим случай, когда  $M \notin a$  (рис. 57, а).

Через прямую  $a$  и точку  $M$  проведем плоскость  $\beta$  (рис. 57, б) и в ней через точку  $M$  — прямую  $b$ , перпендикулярную прямой  $a$ ;  $K = a \cap b$  (рис. 57, в). Далее, через прямую  $a$  проведем любую плоскость  $\gamma$  (рис. 57, г), отличную от  $\beta$ , и в ней через точку  $K$  — прямую  $c$ , перпендикулярную  $a$  (рис. 57, д). Теперь через прямые  $b$  и  $c$  проведем плоскость  $\alpha$  (рис. 57, е), которая по признаку перпендикулярности прямой и плоскости

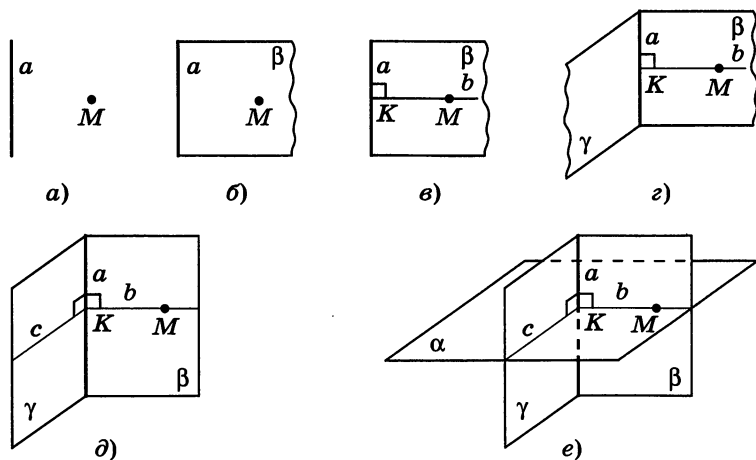


Рис. 57

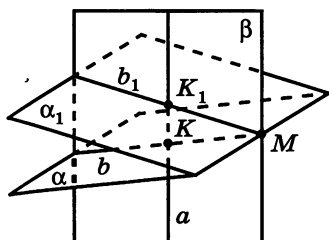


Рис. 58

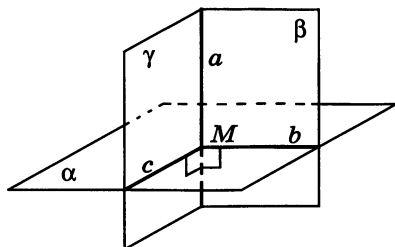


Рис. 59

перпендикулярна прямой  $a$  ( $c \subset \alpha$ ,  $b \subset \alpha$ ,  $c \cap b = K$ ,  $a \perp c$ ,  $a \perp b$ ). Таким образом,  $\alpha$  — искомая плоскость.

Докажем, что  $\alpha$  — единственная плоскость, удовлетворяющая условию задачи. В самом деле, предположим, что через точку  $M$  можно провести другую плоскость, например  $\alpha_1$ , перпендикулярную прямой  $a$  (рис. 58). Тогда плоскости  $\alpha_1$  и  $\beta$ , имея общую точку  $M$ , пересекаются по некоторой прямой  $b_1$ , которая перпендикулярна прямой  $a$  ( $a \perp \alpha_1$ ,  $b_1 \subset \alpha_1$ ). Получили: в плоскости  $\beta$  через точку  $M$  проходят две прямые  $b$  и  $b_1$ , перпендикулярные прямой  $a$ , что невозможно. Следовательно, наше предположение неверно, и плоскость  $\alpha$  единственна.

Случай, когда  $M \in a$ , рассмотрите самостоятельно. Его иллюстрация дана на рисунке 59.

■ **ЗАДАЧА 2.** Через данную точку  $M$  провести прямую  $c$ , перпендикулярную данной плоскости  $\alpha$ .

Рассмотрим случай, когда  $M \in \alpha$  (рис. 60, а). Шаги построения:

1) в плоскости  $\alpha$  через точку  $M$  проводим произвольную прямую  $b$  (рис. 60, б);

2) через точку  $M$  проводим плоскость  $\beta$ , перпендикулярную прямой  $b$  (задача 1), при этом  $\beta$  пересекает плоскость  $\alpha$  по прямой  $a$ , перпендикулярной прямой  $b$  (рис. 60, в);

3) в плоскости  $\beta$  проводим через точку  $M$  прямую  $c$  перпендикулярно прямой  $a$  (рис. 60, г). Прямая  $c$  — искомая.

В самом деле, прямая  $c$  проходит (по построению) через точку  $M$  и перпендикулярна пересекающимся в точке  $M$  и лежащим в плоскости  $\alpha$  прямым  $a$  и  $b$  ( $c \perp b$ , так как прямая  $c$  лежит в плоскости  $\beta$ , которая перпендикулярна прямой  $b$ ). Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая  $c$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ .

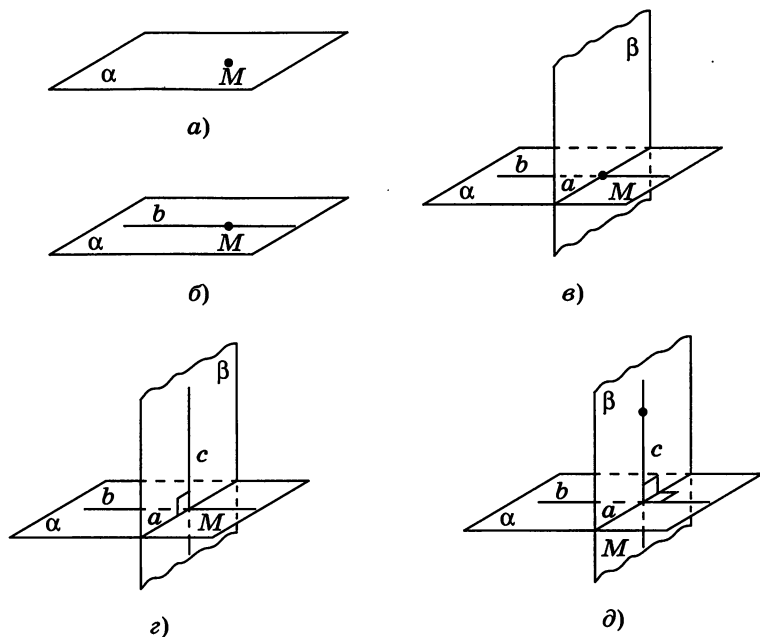


Рис. 60

Доказательство (методом от противного) единственности прямой  $a$  проделайте самостоятельно.

Для случая, когда точка  $M$  не принадлежит плоскости  $\alpha$ , проведите доказательство самостоятельно по рисунку 60, г.

Обобщая вышесказанное, отметим, что:

- через каждую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой, следовательно, две различные плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, не имеют общих точек.

В дальнейшем (в главе 4) мы, естественно, назовем не имеющие общих точек плоскости *параллельными* (рис. 61).

Мы доказали, что параллельные плоскости существуют, и будем этим пользоваться.

- Через каждую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости, следовательно, две раз-

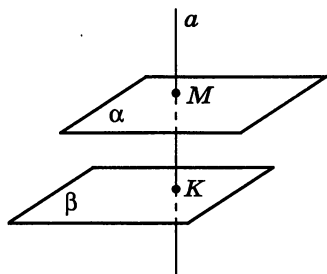


Рис. 61

личные прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, не могут пересекаться.

В дальнейшем (в п. 9.2) мы докажем, что такие прямые параллельны.

## 9.2. О прямых, перпендикулярных плоскости

**Теорема 14.** Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Дано:  $l_1 \parallel l_2$ ,  $l_1 \perp \alpha$ .

Доказать:  $l_2 \perp \alpha$ .

**Доказательство.** Проведем в плоскости  $\alpha$  две пересекающиеся прямые  $a$  и  $b$  (рис. 62). Так как прямая  $l_1$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ , то (по определению прямой, перпендикулярной плоскости) прямая  $l_1$  перпендикулярна каждой из прямых  $a$  и  $b$ . Значит, прямая  $l_2$ , параллельная  $l_1$ , также перпендикулярна каждой из прямых  $a$  и  $b$  (почему?).

Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая  $l_2$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ . Теорема доказана. ▼

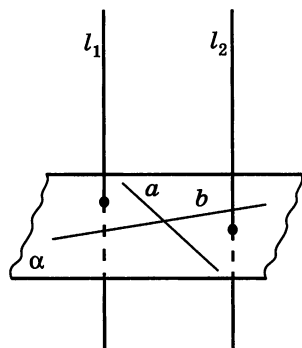


Рис. 62

Верна и обратная теорема.

**Теорема 15.** Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.

Дано:  $l_2 \perp \alpha$ ,  $l_1 \perp \alpha$  (рис. 63).

Доказать:  $l_1 \parallel l_2$ .

**Доказательство.** Прямые  $l_1$  и  $l_2$  не могут пересекаться в силу единственности перпендикуляра, проведенного через точку к данной плоскости.

Прямые  $l_1$  и  $l_2$  не могут и скрещиваться. Действительно, допустив, что прямые  $l_1$  и  $l_2$  скрещиваются, прове-

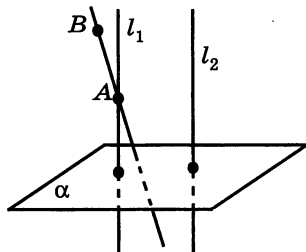


Рис. 63

дем через любую точку  $A$  прямой  $l_1$  прямую  $AB$ , параллельную  $l_2$ , но не совпадающую с  $l_1$  (почему?). По предыдущей теореме прямая  $AB$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ . Мы получили два перпендикуляра (прямые  $l_1$  и  $AB$ ) к плоскости  $\alpha$ , проходящих через точку  $A$ , что невозможно. Следовательно, прямые  $l_1$  и  $l_2$  не могут быть скрещивающимися.

Таким образом, прямые  $l_1$  и  $l_2$  не могут быть ни пересекающимися, ни скрещивающимися, значит, они параллельны. Теорема доказана. ▼

## § 10. Перпендикуляр и наклонная к плоскости.

### Теорема о трех перпендикулярах

Отрезок прямой, перпендикулярной данной плоскости, один конец которого принадлежит этой плоскости, а другой — данная точка, называется *перпендикуляром, проведенным из данной точки на данную плоскость*. Конец этого отрезка, принадлежащий плоскости, называется *основанием перпендикуляра*. Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость, называется *расстоянием от этой точки до данной плоскости*.

На рисунке 64 отрезок  $CD$  — перпендикуляр, проведенный из точки  $C$  на плоскость  $\alpha$ , точка  $D$  — основание этого перпендикуляра; длина отрезка  $CD$  — расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\alpha$ . Это расстояние обозначают:  $|C, \alpha| = |CD|$  или  $\rho(C; \alpha)$ . (Можно сказать, что через точку  $C$  проведен перпендикуляр  $CD$  к плоскости  $\alpha$  или из точки  $C$  опущен перпендикуляр  $CD$  на плоскость  $\alpha$ , или из точки  $D$  восстановлен перпендикуляр  $DC$  к плоскости  $\alpha$ .)

*Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется всякий отрезок, который соединяет*

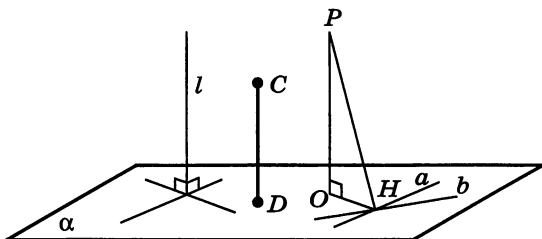


Рис. 64

данную точку с точкой на плоскости и не является перпендикуляром к этой плоскости. Конец этого отрезка, принадлежащий плоскости, называется *основанием наклонной*. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных к плоскости из одной точки, называется *ортогональной проекцией наклонной на эту плоскость*.

На рисунке 64 отрезок  $PO$  — перпендикуляр, проведенный из точки  $P$  на плоскость  $\alpha$ ; отрезок  $PH$  — наклонная, проведенная из точки  $P$  к плоскости  $\alpha$ ; отрезок  $OH$  — проекция этой наклонной на плоскость  $\alpha$ ; в плоскости  $\alpha$  проведены прямые  $a$  и  $b$  через основание  $H$  наклонной  $PH$ .

Докажите самостоятельно следующие утверждения:

- если из одной точки, не принадлежащей плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и наклонная, то длина наклонной больше длины перпендикуляра;

- длина проекции наклонной меньше длины самой наклонной;

- длины наклонных, проведенных из одной точки, не принадлежащей плоскости, равны тогда и только тогда, когда равны длины их проекций;

- если из одной точки, не принадлежащей плоскости, проведены две наклонные к этой плоскости, то большей наклонной соответствует большая проекция. (Сформулируйте обратное утверждение.)

**!** Снова обращаем ваше внимание на аналогию с соответствующими утверждениями в планиметрии относительно перпендикуляра, наклонной и ее проекции на прямую.

**Наклонной к плоскости** называют также любую прямую, пересекающую плоскость и не перпендикулярную к ней. В таком случае ортогональной проекцией наклонной является прямая. (Подробнее с параллельным проектированием вы познакомитесь в § 12.)

Докажите самостоятельно, что если  $AM$  — наклонная к плоскости  $\alpha$ , то основания перпендикуляров, проведенных к плоскости  $\alpha$  через все точки наклонной  $AM$ , принадлежат одной прямой. Эту прямую называют *ортогональной проекцией наклонной  $AM$  на плоскость  $\alpha$* . Доказанное вами утверждение подсказывает способ построения ортогональной проекции наклонной на данную плоскость.

**Теорема 16** (теорема о трех перпендикулярах). Если прямая, лежащая на плоскости, перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то данная прямая перпендикулярна и самой наклонной.

Дано:  $AC$  — наклонная к плоскости  $\alpha$ ,  $m$  — прямая, лежащая в плоскости  $\alpha$ , перпендикулярная проекции наклонной  $AC$  (рис. 65, а).

Доказать:  $m \perp AC$ .

Доказательство. Проведем  $AB \perp \alpha$  (рис. 65, б). Тогда  $BC$  — ортогональная проекция наклонной  $AC$  на плоскость  $\alpha$ . Рассмотрим прямую  $m$  и плоскость  $ABC$ . Имеем:  $m \perp BC$  (по условию) и  $m \perp AB$  (так как  $AB \perp \alpha$ ), то есть прямая  $m$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости  $ABC$ . Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая  $m$  перпендикулярна самой плоскости  $ABC$ , а следовательно, и прямой  $AC$ , лежащей в этой плоскости. Теорема доказана. ▼

Справедлива и обратная теорема.

**Теорема 17.** Если на плоскости проведена прямая перпендикулярно наклонной, то эта прямая перпендикулярна проекции наклонной.

Дано:  $AC$  — наклонная к плоскости  $\alpha$ ,  $m$  — прямая плоскости  $\alpha$ , перпендикулярная  $AC$  (рис. 65).

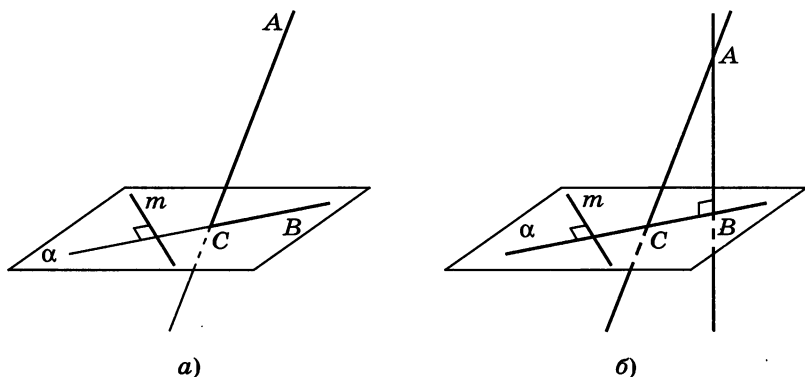


Рис. 65



**Доказать:**  $m \perp BC$  (проекция наклонной  $AC$ ).

**Доказательство.** Проведем  $AB \perp \alpha$ . Тогда  $BC$  — ортогональная проекция наклонной  $AC$  на плоскость  $\alpha$ . Рассмотрим прямую  $m$  и плоскость  $ABC$ . Имеем:  $m \perp AB$  (так как  $AB$  — перпендикуляр к плоскости  $\alpha$ ) и  $m \perp AC$  (по условию). Таким образом, прямая  $m$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости  $ABC$ . Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая  $m$  перпендикулярна самой плоскости  $ABC$ , а следовательно, и прямой  $BC$ , лежащей в этой плоскости. Теорема доказана. ▽

Векторное доказательство теорем 16 и 17 вы сможете прочесть в пункте 23.3.

Обе эти теоремы можно объединить одним предложением:

**наклонная к плоскости тогда и только тогда перпендикулярна прямой, лежащей в этой плоскости, когда проекция наклонной перпендикулярна данной прямой.**

Или, иначе говоря:

**для того чтобы проекция наклонной к плоскости была перпендикулярна прямой, лежащей в этой плоскости, необходимо и достаточно, чтобы сама наклонная была перпендикулярна данной прямой.**

Придумайте еще несколько аналогичных формулировок теоремы о трех перпендикулярах и заодно подумайте: что это за «три перпендикуляра»?

Заметим, что теорема о трех перпендикулярах позволяет нам построить проекцию наклонной  $s$  к плоскости  $\alpha$ , не опуская на эту плоскость перпендикуляра, если в плоскости  $\alpha$  дана прямая  $b$ , перпендикулярная наклонной  $s$ . В таком случае достаточно через основание наклонной провести в плоскости  $\alpha$  прямую  $a$ , перпендикулярную прямой  $b$ . Прямая  $a$  является искомой проекцией наклонной  $s$  на плоскость  $\alpha$ . *Этот прием часто используется при решении задач.*

■ **ЗАДАЧА 3.050.** К плоскости прямоуг-  
 ольного треугольника  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ )  
 проведен перпендикуляр  $BP$ . На на-  
 клонных  $PA$  и  $PC$  отмечены соответ-  
 ственно такие точки  $E$  и  $K$ , что отрезок  
 $EK$  параллелен  $AC$  (рис. 66). Верно ли,  
 что треугольник  $BKE$  — прямоуголь-  
 ный?

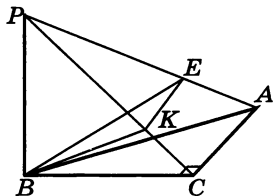


Рис. 66

Решение. Имеем  $BP \perp (ABC) \Rightarrow BP \perp AC$ . Кроме того,  $AC \perp BC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ). Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости  $AC \perp (BCP)$ . Тогда  $AC \perp BK$ . А так как  $KE \parallel AC$  и  $AC \perp BK$ , то  $KE \perp BK$ . Это означает, что  $\angle BKE = 90^\circ$ , то есть  $\triangle BKE$  — прямоугольный.

■ ЗАДАЧА 3.069. Через вершину прямого угла равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$  проведена прямая  $CM$ , перпендикулярная его плоскости. Найдите расстояние от точки  $M$  до прямой  $AB$ , если  $AC = 4$  см,  $CM = 2\sqrt{7}$  см.

Решение. Пусть точка  $K$  — середина гипотенузы  $AB$  треугольника  $ABC$  (рис. 67). Так как  $AC = CB$ , то  $CK \perp AB$ , и по теореме о трех перпендикулярах отрезок  $MK$  перпендикулярен  $AB$ . Это означает, что длина отрезка  $MK$  — искомое расстояние от точки  $M$  до прямой  $AB$ .

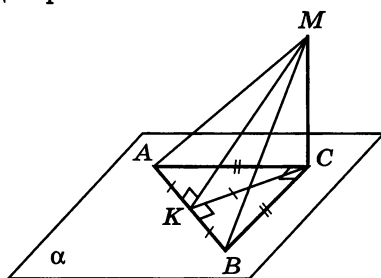


Рис. 67

Далее, так как  $MC \perp (ABC)$ , то  $MC \perp CK$  (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Поэтому  $\triangle MCK$  — прямоугольный, значит,  $MK^2 = MC^2 + CK^2$ .

Так как  $\triangle ABC$  — равнобедренный прямоугольный ( $\angle C = 90^\circ$ ) и  $CK$  — его медиана, то  $\triangle CBK$  — равнобедренный прямоугольный ( $\angle K = 90^\circ$ ). Тогда  $CK^2 = \frac{1}{2}BC^2 = 8$ . Учитывая, что  $MK^2 = MC^2 + CK^2$ , получаем  $MK = 6$  (см).

## § 11. Угол между прямой и плоскостью

**Определение.** Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее проекцией на эту плоскость (рис. 68).

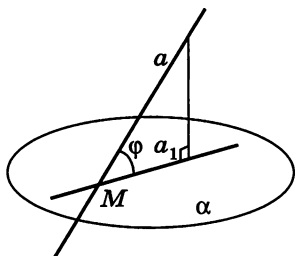


Рис. 68

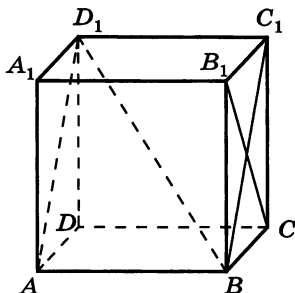


Рис. 69

Угол между плоскостью и прямой, лежащей в плоскости или параллельной плоскости, считается равным  $0^\circ$ .

Угол между плоскостью и прямой, перпендикулярной этой плоскости, считается равным  $90^\circ$ .

Таким образом,  $0 \leq (\widehat{a; \alpha}) \leq 90^\circ$ .

На рисунке 69  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб, в котором:

- угол между прямой  $BD_1$  и плоскостью  $ADD_1$  равен углу между прямыми  $BD_1$  и  $AD_1$ , так как  $BA \perp (ADD_1)$ , т. е. равен  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;

- угол между прямой  $BC_1$  и плоскостью  $ABC$  равен углу между прямыми  $BC_1$  и  $BC$ , так как  $C_1C \perp (ABC)$ , т. е. равен  $45^\circ$ ;

- угол между прямой  $BC_1$  и плоскостью  $DAA_1$  равен  $0^\circ$ , так как  $BC_1 \parallel (DAA_1)$ ;

- угол между прямой  $B_1C$  и плоскостью  $ABC_1$  равен  $90^\circ$  (почему?).

На рисунке 70:  $AC$  и  $AB$  — соответственно перпендикуляр и наклонная к плоскости  $\alpha$ , проведенные из точки  $A$ ;  $\varphi$  — угол между наклонной  $AB$  и ее проекцией  $BC$  на плоскость  $\alpha$ ;  $\beta$  — угол между наклонной  $AB$  и произвольной прямой  $a$ , лежащей в плоскости  $\alpha$  и проходящей через основание  $B$  наклонной  $AB$ ;  $AD$  — перпендикуляр к прямой  $a$ , проведенный из точки  $A$ .

Тогда:  $\sin \varphi = \frac{AC}{AB}$ ;  $\sin \beta = \frac{AD}{AB}$ .

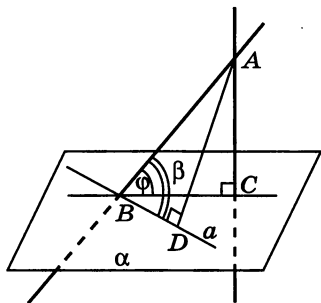


Рис. 70

Имеем  $AC < AD \Rightarrow \sin \varphi < \sin \beta$ , а так как, кроме того, углы  $ABC$  и  $ABD$  — острые, то из неравенства  $\sin \varphi < \sin \beta$  следует:  $\varphi < \beta$ , т. е. угол между наклонной и плоскостью не больше, чем угол между этой наклонной и любой прямой, лежащей в данной плоскости.

Попробуйте доказать самостоятельно, что параллельные между собой прямые образуют с данной плоскостью равные углы. Подумайте, почему обратное утверждение неверно.

## § 12. Параллельное проектирование и его свойства. Ортогональное проектирование

В начале нашего учебника мы изображали на плоскости некоторые фигуры, расположенные в пространстве. Эти изображения строились с целью придать наглядность тому, о чем шла речь в соответствующей теореме или задаче.

Однако изображения пространственных фигур на плоскости строятся по определенным правилам и в школьном курсе геометрии обычно осуществляются с помощью метода параллельного проектирования, сущность которого состоит в следующем.

В пространстве выбирается произвольная плоскость  $\pi^1$ , которую называют *плоскостью проекций* или *плоскостью изображения*, и прямая  $l$ , пересекающая эту плоскость (рис. 71, а).

Пусть  $M'$  — произвольная точка пространства. Через эту точку проведем прямую  $p$ , параллельную  $l$ . Точка  $M$  пересечения прямой  $p$  с плоскостью  $\pi$  называется *параллельной проекцией точки  $M'$  на плоскость  $\pi$  в направлении прямой  $l$* . Если  $M'$  — точка плоскости  $\pi$ , то  $M$  совпадает с  $M'$ .

При этом часто пользуются обозначением:  $M = Pr_\pi^l(M')$ .

Прямую  $l$  и все прямые пространства, параллельные ей, называют *проектирующими прямыми*; они определяют направление проектирования. Всякая плоскость пространства, параллельная проектирующей прямой, называется *проектирующей плоскостью*.

*Фигура, которую проектируют или изображают, называется оригиналом.* Для построения проекции фигуры достаточно построить проекции всех точек этой фигуры или проекции точек фигуры, ее определяющих. На рисунке 71, б

<sup>1</sup> Именно так (плоскость  $\pi$ ) чаще всего обозначают плоскость проекций в начертательной геометрии.

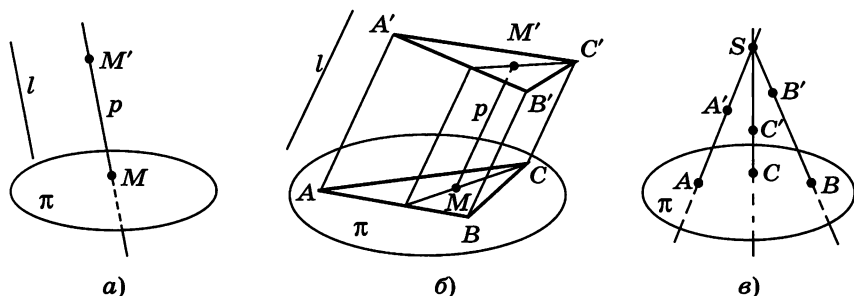


Рис. 71

треугольник  $ABC$  является параллельной проекцией треугольника  $A'B'C'$  на плоскость  $\pi$  в направлении прямой  $l$ .

*Замечание.* Наряду с параллельным проектированием рассматривается также *центральное проектирование* фигур на плоскость. В этом случае проектирующие прямые проходят через одну точку — *центр проектирования*, произвольно выбранную вне плоскости проекций (рис. 71, в).

Параллельное и центральное проектирование можно наблюдать в реальном пространстве: тень, которую отбрасывает предмет в солнечный день, является параллельной проекцией этого предмета, так как солнечные лучи можно считать приближенно параллельными вследствие большого удаления Солнца от Земли. А изображение на экране кинотеатра фигуры, заснятой на киноплёнку, является центральной проекцией этой фигуры.

На рисунках 72, 73, 74 спроектированы соответственно квадрат, треугольник и каркас тетраэдра. Из этих рисунков

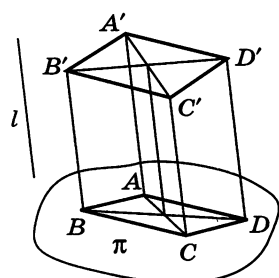


Рис. 72

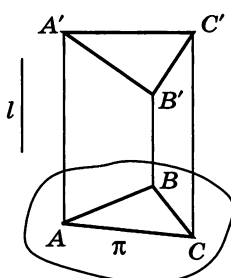


Рис. 73

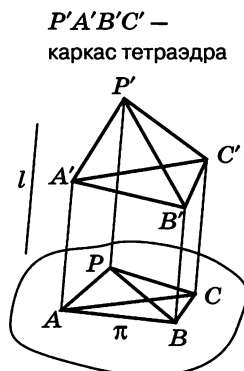


Рис. 74

можно сделать предположение, что ни величина угла, ни длина отрезка при параллельном проектировании, вообще говоря, не сохраняются.



Рассмотрим некоторые свойства параллельного проектирования.

**1. Все точки проектирующей прямой проектируются в одну точку** — точку пересечения этой прямой с плоскостью проекций (рис. 75).

*В дальнейшем мы будем рассматривать проекции прямых, не параллельных проектирующим прямым.*

**2. Проекция прямой есть прямая.** Действительно, все прямые, проектирующие точки данной прямой  $m'$  (рис. 76), принадлежат некоторой проектирующей плоскости, которая пересекает плоскость проекций по некоторой прямой  $m$  — параллельной проекции прямой  $m'$ .

Причем, так как через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести лишь одну прямую, параллельную этой прямой (т. 6) (мы проводим прямые, параллельные прямой  $l$ ), то каждая точка прямой  $m'$  проектируется в единственную точку своей проекции — прямой  $m$ , и наоборот, каждая точка прямой  $m$  является проекцией единственной точки прямой  $m'$ .

Из доказательства этого свойства следует: **три точки, лежащие на одной прямой, проектируются в три точки, также лежащие на одной прямой.**  Также говорят, что **три коллинеарные точки проектируются в три коллинеарные точки.** 

**3. Две параллельные прямые проектируются либо в две параллельные прямые, либо в одну и ту же прямую.** Действительно, если прямые  $a'$  и  $b'$  лежат в одной проектирующей плоскости, то они проектируются в одну и ту же прямую,

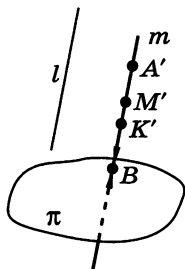


Рис. 75

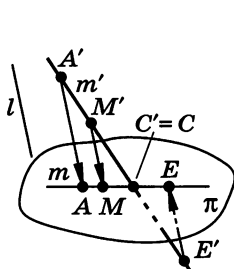


Рис. 76

именно, в прямую, по которой эта проектирующая плоскость пересекает плоскость проекций.

Пусть теперь прямые  $a'$  и  $b'$  параллельны (рис. 77) и не лежат в одной проектирующей плоскости.

Обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$  плоскости, образованные прямыми, проектирующими точки прямых соответственно  $a'$  и  $b'$ . Прямые  $a$  и  $b$ , по которым плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекают плоскость проекции, не могут пересекаться, так как если бы эти прямые имели общую точку  $M$ , то и прямые  $a'$  и  $b'$  по свойству 2 имели бы общую точку  $M'$ , что невозможно в силу параллельности прямых  $a'$  и  $b'$ . А так как прямые  $a$  и  $b$  лежат в одной плоскости (плоскости проекций) и не имеют общей точки, то они параллельны, т. е. параллельными проекциями параллельных прямых, не лежащих в одной проектирующей плоскости, являются параллельные прямые.

Заметим, что плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , проектирующие параллельные прямые  $a'$  и  $b'$ , не лежащие в одной проектирующей плоскости, параллельны (в п. 9.1 мы показали, что параллельные плоскости существуют; о свойствах параллельных плоскостей мы подробно будем говорить в следующей главе).

**4. Проекция параллельных отрезков лежат либо на параллельных прямых, либо на одной прямой. Отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин проекций этих отрезков.**

Если отрезки  $A'B'$  и  $B'C'$  лежат на одной прямой  $a'$  и проектируются на отрезки соответственно  $AB$  и  $BC$  прямой  $a$  (рис. 78), то по обобщенной теореме Фалеса в плоскости, определяемой прямыми  $a$  и  $a'$ , получаем  $A'B' : B'C' = AB : BC = m : n$ .

Пусть теперь отрезки  $A'B'$  и  $C'D'$  расположены соответственно на данных параллельных прямых  $a'$  и  $b'$ , не лежащих

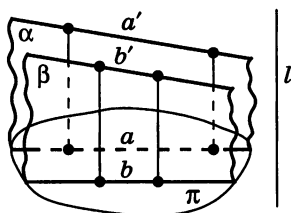


Рис. 77

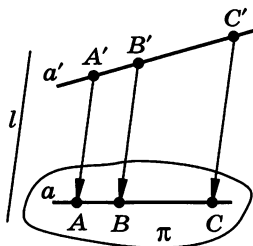


Рис. 78

в одной проектирующей плоскости, и  $A'B' : C'D' = m : n$ ;  $AB$  и  $CD$ ,  $a$  и  $b$  — соответственно их параллельные проекции на плоскость  $\pi$  (рис. 79).

Так как  $a' \parallel b'$ , то (по свойству 3)  $a \parallel b$ . Пусть  $E$  — такая точка прямой  $a$ , что четырехугольник  $BCDE$  — параллелограмм. Тогда на прямой  $a'$  существует (единственная!) такая точка  $E'$ , что  $E'E \parallel DD'$  и  $A'B' : B'E' = AB : BE$ . А так как  $BC \parallel ED$ , то  $B'C' \parallel E'D'$  (по свойству 3), значит,  $B'C'D'E'$  — параллелограмм. Поэтому  $A'B' : C'D' = A'B' : B'E' = AB : BE = AB : CD$ , то есть  $A'B' : C'D' = AB : CD = m : n$ .

Из этого свойства, очень важного для теории построений изображений пространственных фигур на плоскости, следует не менее важный вывод: если отрезок  $A'C'$  параллельно проектируется на отрезок  $AC$  и точка  $B'$  делит отрезок  $A'C'$  в отношении  $A'B' : B'C' = m : n$ , то точка  $B$  — проекция точки  $B'$  — делит отрезок  $AC$  в том же отношении  $m : n$ , то есть  $AB : BC = A'B' : B'C' = m : n$ . В частности, середина отрезка  $A'C'$  параллельно проектируется в середину отрезка  $AC$  ( $m : n = 1 : 1$ ) (рис. 80).

Пусть  $M$  — внутренняя точка отрезка  $AB$ .

**Определение.** Число  $\lambda$ , равное отношению длин отрезков  $AM$  и  $MB$ , на которые точка  $M$  делит отрезок  $AB$ , называется простым отношением трех точек  $A$ ,  $B$  и  $M$ , лежащих на одной прямой, и обозначается  $(AB; M)$ , т. е.  $(AB; M) = \lambda = AM : MB$ .

При этом точки  $A$  и  $B$  называются *базисными*, а точка  $M$  — *делящей* точкой.

Упорядоченность точек простого отношения необходима. Например, если  $AA_1$  — медиана треугольника  $ABC$ ,  $M$  — его

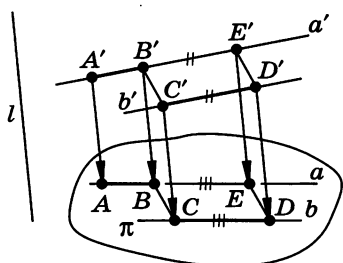


Рис. 79

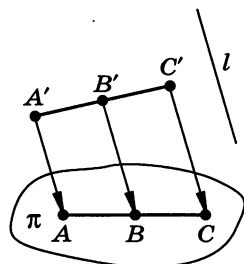


Рис. 80



центроид (точка пересечения медиан треугольника), то  $(AA_1; M) = AM : MA_1 = 2 : 1$ , но  $(A_1A; M) = A_1M : MA = 1 : 2$  (рис. 81). Поэтому, если  $AM \neq MA_1$ , то  $(AA_1; M) \neq (A_1A; M)$ .

Учитывая свойство 4 параллельного проектирования, можно сделать вывод: **простое отношение трех точек, лежащих на одной прямой, при параллельном проектировании сохраняется**. В этом случае также говорят, что **простое отношение трех точек, лежащих на одной прямой, — инвариант параллельного проектирования**.

Свойства фигуры, сохраняющиеся при параллельном проектировании, называются **аффинными свойствами** этой фигуры. Например, свойства прямых быть параллельными — аффинное свойство этих прямых; инвариантность простого отношения трех точек одной прямой — аффинное свойство таких точек.

Подробнее о параллельном проектировании и изображениях фигур на плоскости читайте в конце учебника.

**Определение.** Проектирование в направлении прямой, перпендикулярной плоскости проекций, называется **ортогональным**.

Удобно пользоваться обозначением:  $M = \Pi p_{\alpha}^{\perp}(M')$ .

Ортогональное проектирование является частным случаем параллельного и обладает всеми его свойствами. Однако, если при параллельном проектировании, не являющемся ортогональным, длина проекции отрезка может быть меньше, больше или равна длине самого отрезка, то при ортогональном проектировании длина проекции отрезка не больше чем длина самого отрезка, и длины этих отрезков связаны соотношением  $\Pi p_{\alpha}^{\perp}(AB) = |AB| \cdot \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — величина угла между прямой  $AB$  и плоскостью проекций  $\alpha$ .

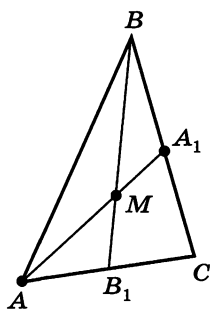


Рис. 81



## § 13. Параллельность плоскостей

### 13.1. Признак параллельности плоскостей

При взаимном расположении двух плоскостей в пространстве возможен один из двух взаимно исключающих случаев.

1. Две плоскости имеют общую точку. Тогда по аксиоме пересечения двух плоскостей они имеют общую прямую. Такие плоскости называются *пересекающимися*.

2. Две плоскости не имеют общей точки.

**Определение.** Две плоскости, не имеющие общей точки, называются **параллельными**.

Если плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны, то записывают:  $\alpha \parallel \beta$  или  $\beta \parallel \alpha$ . При этом также говорят, что плоскость  $\alpha$  параллельна плоскости  $\beta$  или плоскость  $\beta$  параллельна плоскости  $\alpha$ .

В п. 9.1 мы доказали, что в пространстве существуют параллельные плоскости. Но возникает вопрос: как определить, параллельны ли две данные плоскости? Ответить на этот вопрос помогают признаки параллельности двух плоскостей (т. 18, 19 и 24).

**Теорема 18 (признак параллельности плоскостей).** Если каждая из двух пересекающихся прямых одной плоскости параллельна другой плоскости, то данные плоскости параллельны.

Дано:  $a \subset \alpha, b \subset \alpha, \alpha \cap \beta = M; a \parallel \beta, b \parallel \beta$  (рис. 82).

Доказать:  $\alpha \parallel \beta$ .

**Доказательство.** Рассуждаем методом от противного. Предположим, что плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой  $c$  (см. рис. 82).

В плоскости  $\alpha$  расположены прямая  $c$  и данные пересекающиеся прямые  $a$  и  $b$ . Так как из двух пересекающихся прямых не более, чем одна может быть параллельна данной прямой, то прямая  $c$  пересекает, по крайней мере, одну из прямых  $a$  и  $b$ . Пусть  $c$  пересекает прямую  $a$  в некоторой точке  $K$ :  $a \cap c = K$ .

Имеем: прямая  $c$ , следовательно, и точка  $K$  лежат в плоскости  $\beta$ . Значит, прямая  $a$  пересекает плоскость  $\beta$ . Это противоречит условию теоремы ( $a \parallel \beta$ ).

Также к противоречию с условием теоремы придем, если допустим, что пересекаются прямые  $c$  и  $b$  или прямая  $c$  пересекает обе прямые  $a$  и  $b$ .

Таким образом, предположив, что плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  не параллельны, мы пришли к противоречию. Это означает, что предположение неверно. Следовательно,  $\alpha \parallel \beta$ . Теорема доказана. ▼

**Теорема 19.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

**Доказательство.** Пусть прямые  $a$  и  $b$  плоскости  $\alpha$  пересекаются в точке  $M$ , прямые  $a_1$  и  $b_1$  плоскости  $\beta$  параллельны соответственно прямым  $a$  и  $b$  (рис. 83). Тогда по признаку параллельности прямой и плоскости имеем:

$$a \parallel a_1, a_1 \subset \beta \Rightarrow a \parallel \beta;$$

$$b \parallel b_1, b_1 \subset \beta \Rightarrow b \parallel \beta.$$

Таким образом, пересекающиеся прямые  $a$  и  $b$  в плоскости  $\alpha$  параллельны плоскости  $\beta$ . По предыдущей теореме плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. Теорема доказана. ▼

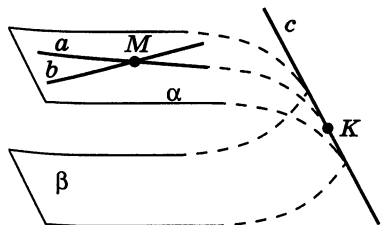


Рис. 82

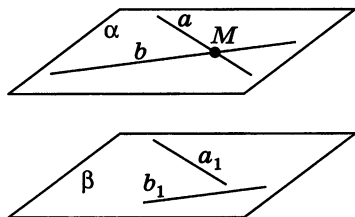


Рис. 83

Заметим, что доказанная теорема 19 также является признаком параллельности двух плоскостей и может быть доказана независимо от теоремы 18. Самостоятельно докажите теорему 19, не используя теорему 18.

Докажите самостоятельно, что две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

### 13.2. Свойства параллельных плоскостей

**Теорема 20.** Прямые, по которым две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, параллельны.

Дано:  $\alpha \parallel \beta$ ,  $\gamma \cap \alpha = a$ ,  $\gamma \cap \beta = b$  (рис. 84).

Доказать:  $a \parallel b$ .

**Доказательство.** Прямые  $a$  и  $b$  лежат в одной плоскости  $\gamma$ . Эти прямые не имеют общей точки, так как плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. Следовательно, прямые  $a$  и  $b$  параллельны по определению. Теорема доказана. ▼

**Теорема 21.** Если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

Дано:  $\alpha \parallel \beta$ ,  $a \cap \alpha = A$  (рис. 85).

Доказать:  $a$  пересекает  $\beta$ .

**Доказательство.** Выберем в плоскости  $\beta$  любую точку  $C$ . Через эту точку и прямую  $a$  проведем плоскость  $\gamma$ .

Так как плоскость  $\gamma$  имеет с плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  общие точки  $A$  и  $C$  соответственно, то она пересекает эти плоскости по некоторым прямым  $b$  и  $c$ , которые проходят соответственно че-

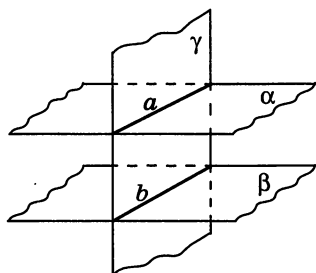


Рис. 84

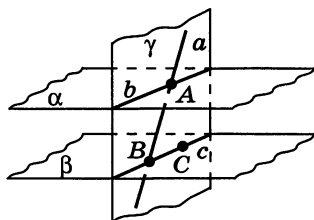


Рис. 85

рез точки  $A$  и  $C$ . По предыдущей теореме прямые  $b$  и  $c$  параллельны. Тогда в плоскости  $\gamma$  прямая  $a$  пересекает (в точке  $A$ ) прямую  $b$ , которая параллельна прямой  $c$ . Значит, прямая  $a$  пересекает и прямую  $c$  в некоторой точке  $B$ . Так как прямая  $c$  лежит в плоскости  $\beta$ , то точка  $B$  является точкой пересечения прямой  $a$  и плоскости  $\beta$ . Теорема доказана. ▼

**Теорема 22.** Если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость.

Дано:  $\alpha \parallel \beta$ ,  $\alpha$  и  $\gamma$  пересекаются (рис. 86).

Доказать:  $\beta$  и  $\gamma$  пересекаются.

Доказательство. Проведем в плоскости  $\gamma$  прямую  $a$ , пересекающую плоскость  $\alpha$  в некоторой точке  $B$ . Тогда по теореме 21 прямая  $a$  пересекает и плоскость  $\beta$  в некоторой точке  $A$ . Следовательно, плоскости  $\beta$  и  $\gamma$  имеют общую точку  $A$ , т. е. пересекаются. Теорема доказана. ▼

Вернемся к вопросу о существовании параллельных плоскостей.

**Теорема 23.** Через точку, не лежащую в данной плоскости, можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

Дано:  $\alpha$ ,  $M$ ;  $M \notin \alpha$  (рис. 87).

Доказать: существует единственная плоскость  $\beta$  такая, что  $M \in \beta$ ,  $\beta \parallel \alpha$ .

Доказательство. В данной плоскости  $\alpha$  проведем две произвольные пересекающиеся прямые  $a$  и  $b$ . Через точку  $M$  проведем прямые  $a_1$  и  $b_1$ , параллельные соответственно  $a$  и  $b$ .

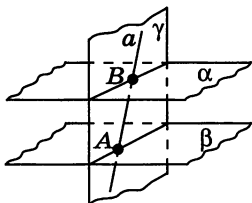


Рис. 86

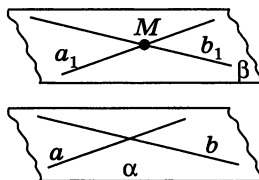


Рис. 87

Плоскость, проходящую через пересекающиеся прямые  $a_1$  и  $b_1$ , обозначим  $\beta$ . На основании теоремы 19 плоскость  $\beta$  параллельна плоскости  $\alpha$ .

Докажем методом от противного, что  $\beta$  — единственная плоскость, удовлетворяющая условию теоремы.

Допустим, что через точку  $M$  проходит другая плоскость, например  $\beta_1$ , параллельная  $\alpha$ .

Так как  $\beta_1$  пересекает плоскость  $\beta$  (они имеют общую точку  $M$ ), то по теореме 22 плоскость  $\beta_1$  пересекает и плоскость  $\alpha$  ( $\beta \parallel \alpha$ ). Мы пришли к противоречию. Таким образом, предположение о том, что через точку  $M$  можно провести плоскость, отличную от плоскости  $\beta$  и параллельную плоскости  $\alpha$ , неверно. Значит, плоскость  $\beta$  — единственна. Теорема доказана. ▽

Данная теорема дает нам хороший способ построения в пространстве плоскости, параллельной данной плоскости.

■ ЗАДАЧА. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  через точку  $K$  — середину ребра  $A_1 D_1$  провести сечение, параллельное плоскости  $A_1 C_1 D$ .

Решение. Плоскость сечения пересекает плоскость  $AA_1 D_1$  по прямой  $KM$ , параллельной прямой  $A_1 D$  (почему?), а плоскость  $DCC_1$  — по прямой  $ME$ , параллельной прямой  $C_1 D$  (почему?). Треугольник  $KME$  — искомое сечение (рис. 88).

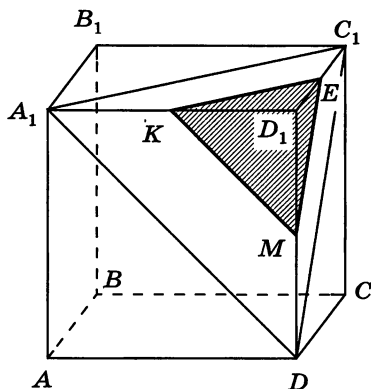


Рис. 88

Самостоятельно постройте сечение этого куба плоскостью, проходящей через середину ребра  $AA_1$  параллельно плоскости  $A_1C_1D$ , и вы получите в сечении правильный шестиугольник.

**Теорема 24.** Две плоскости, параллельные третьей, параллельны.

Дано:  $\alpha \parallel \beta$ ,  $\gamma \parallel \beta$  (рис. 89).

Доказать:  $\alpha \parallel \gamma$ .

Доказательство. Допустим, что плоскости  $\alpha$  и  $\gamma$  пересекаются по некоторой прямой  $c$ . Выберем на прямой  $c$  произвольную точку  $M$ . Через эту точку проходят две различные плоскости  $\alpha$  и  $\gamma$ , каждая из которых параллельна плоскости  $\beta$ . Это противоречит теореме 23. Значит, предположение было неверно. Поэтому  $\alpha \parallel \gamma$ . Теорема доказана. ▼

**Теорема 25.** Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Дано:  $\alpha \parallel \beta$ ;  $a \parallel b$ ;  $a \cap \alpha = A_1$ ,  $a \cap \beta = B_1$ ;  
 $b \cap \alpha = A_2$ ,  $b \cap \beta = B_2$  (рис. 90).

Доказать:  $A_1B_1 = A_2B_2$ .

Доказательство. Проведем через параллельные прямые  $a$  и  $b$  плоскость  $\gamma$  (т. 3). Она пересекает параллельные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  по параллельным прямым  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$  (т. 20). А так как  $a \parallel b$ , то четырехугольник  $A_1A_2B_2B_1$  — параллелограмм. Поэтому  $A_1B_1 = A_2B_2$  (как противоположные стороны этого параллелограмма). Теорема доказана. ▼

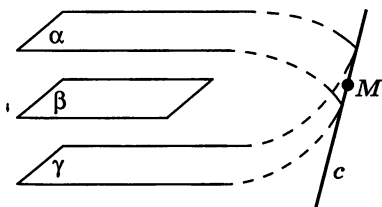


Рис. 89

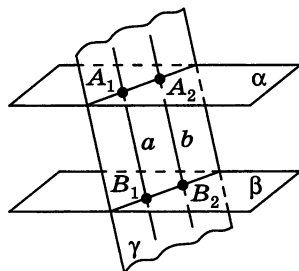


Рис. 90

**Теорема 26.** Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.

Дано:  $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ ,  $l \perp \alpha_1$ .

Доказать:  $l \perp \alpha_2$ .

Проведите доказательство самостоятельно, построив две любые плоскости  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , проходящие через прямую  $l$  (рис. 91).

■ ЗАДАЧА 4.007. Постройте сечение пятиугольной пирамиды  $PABCDE$  плоскостью  $\alpha$ , которая проходит через внутреннюю точку  $M$  основания  $ABCDE$  параллельно грани  $PAB$  (рис. 92).

Решение. Так как прямые, по которым две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, параллельны, а плоскость  $\alpha$  параллельна грани  $PAB$ , то: а) прямая пересечения плоскости  $\alpha$  с гранью  $ABC$  (плоскостью основания пирамиды) должна быть параллельна  $AB$ ; б) прямая пересечения плоскости  $\alpha$  с гранью  $PAE$  — параллельна  $AP$ ; в) прямая пересечения  $\alpha$  с плоскостью грани  $PBC$  — параллельна  $PB$ ; г) прямая пересечения плоскости  $\alpha$  с плоскостью  $PAD$  — параллельна  $PA$ , поэтому проводим: 1) через точку  $M$  прямую  $KF \parallel AB$ ,  $K \in BC$ ,  $F \in AE$ ; 2) прямую  $FH \parallel PA$ ,  $H \in PE$ ; 3) прямую  $KR \parallel PB$ ,  $R \in PC$ ; 4) прямую  $ML \parallel AP$ ,  $L \in PD$ . Пятиугольник  $HLRKF$  — искомое сечение.

Доказательство сделайте самостоятельно.

**Замечание.** При внимательном анализе обнаруживается аналогия между свойствами параллельных плоскостей в пространстве и свойствами параллельных прямых на плоскости.

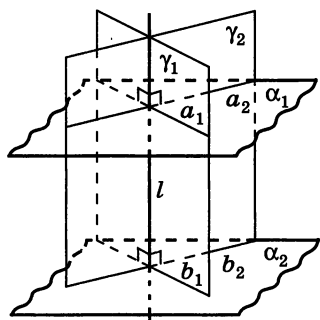


Рис. 91

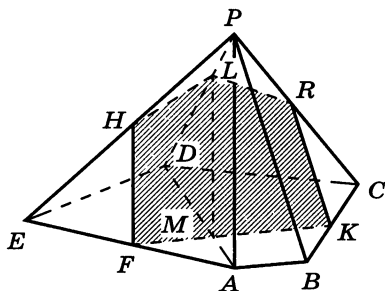
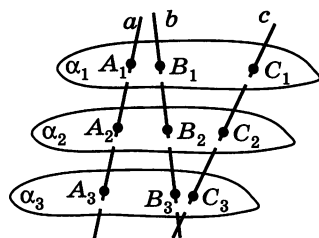


Рис. 92





$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \parallel \alpha_3, A_1A_2 = A_2A_3 \Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3, C_1C_2 = C_2C_3$$

Рис. 93

Попробуйте, например, пользуясь рисунком 93, сформулировать и доказать «пространственный аналог теоремы Фалеса».

## § 14. Двугранные углы.

### Угол между двумя плоскостями

#### 14.1. Двугранный угол и его измерение

Рассмотрим два полупространства, образованных непараллельными плоскостями. Пересечение этих полупространств будем называть *двугранным углом*.

Прямую, по которой пересекаются плоскости — границы полупространств, называют *ребром двугранного угла*, а полуплоскости этих плоскостей, образующие двугранный угол, — *гранями двугранного угла*.

Двугранный угол с гранями  $\alpha$ ,  $\beta$  и ребром  $a$  обозначают  $\alpha a \beta$ . Можно использовать и такие обозначения двугранного угла, как  $K(AB)T$ ;  $\alpha(AB)\beta$  (рис. 94, 95).

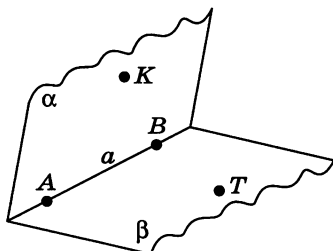


Рис. 94

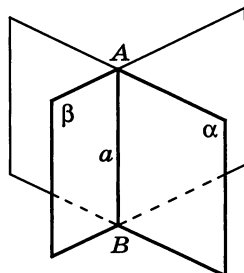


Рис. 95

**Замечание.** Иногда говорят, что двугранный угол  $\alpha\beta$  образован двумя полуплоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , имеющими общую граничную прямую  $a$ .

Фигуры, образованные двумя страницами одной книги, двумя соседними гранями куба, — модели двугранного угла.

Для измерения двугранного угла введем понятие его линейного угла. На ребре  $a$  двугранного угла  $\alpha\beta$  отметим произвольную точку  $O$  и в гранях  $\alpha$  и  $\beta$  проведем из точки  $O$  соответственно лучи  $OA$  и  $OB$ , перпендикулярные ребру  $a$  (рис. 96, а). Угол  $AOB$ , образованный этими лучами, называется *линейным углом двугранного угла  $\alpha\beta$* .

Так как  $OA \perp a$  и  $OB \perp a$ , то плоскость  $AOB$  перпендикулярна прямой  $a$ . Это означает, что **линейный угол двугранного угла есть пересечение данного двугранного угла и плоскости, перпендикулярной его ребру**.

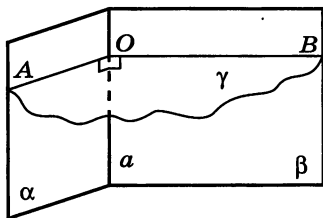
Вследствие произвольного выбора точки  $O$  на ребре двугранного угла заключаем, что двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов. Докажем, что все они равны.

Действительно, рассмотрим два линейных угла  $AOB$  и  $A_1O_1B_1$  двугранного угла  $\alpha\beta$  (рис. 96, б). Лучи  $OA$  и  $O_1A_1$  лежат в одной грани  $\alpha$  и перпендикулярны прямой  $a$  — ребру двугранного угла, поэтому они сонаправлены. Аналогично получаем, что сонаправлены лучи  $OB$  и  $O_1B_1$ . Тогда  $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$  (как углы с сонаправленными сторонами).

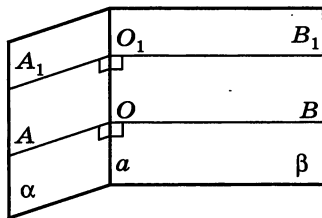
Таким образом, нами доказана

**Теорема 27.** Величина линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла.

Иначе говоря, все линейные углы данного двугранного угла равны между собой.



а)



б)

Рис. 96

Это позволяет ввести следующее

**Определение.** Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Величина двугранного угла (измеренная в градусах) принадлежит промежутку  $(0^\circ; 180^\circ)$ .

На рисунке 97 изображен двугранный угол, градусная мера (величина) которого равна  $30^\circ$ . В этом случае также говорят, что двугранный угол равен тридцати градусам.

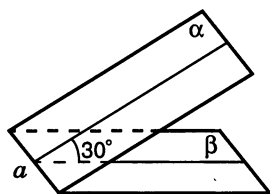


Рис. 97

Двугранный угол является *острым* (рис. 98, а), *прямым* (рис. 98, б) или *тупым* (рис. 98, в), если его линейный угол соответственно острый, прямой или тупой.

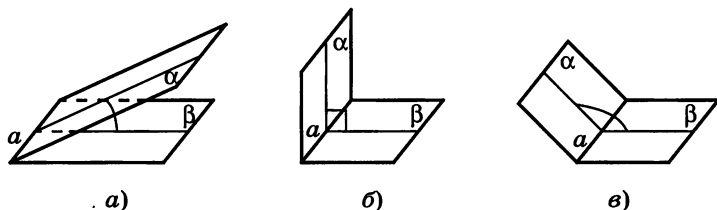


Рис. 98

Заметим, что аналогично тому, как и на плоскости, в пространстве определяются *смежные* (рис. 99, а) и *вертикальные* (рис. 99, б) *двугранные углы*. При этом справедливы и аналогичные теоремы о величинах этих углов.

Попробуйте доказать самостоятельно следующие два утверждения, *важные* для решения задач.

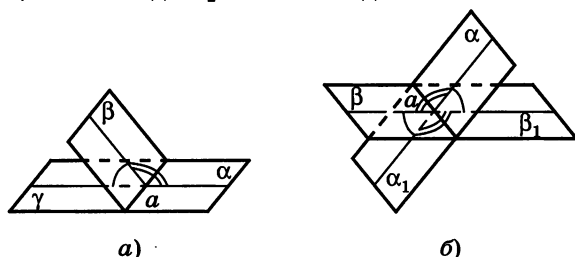


Рис. 99

• На гранях двугранного угла величины  $\alpha$  взяты точки  $A$  и  $B$ ;  $A_1$  и  $B_1$  — проекции этих точек на ребро двугранного угла;  $AA_1 = a$ ;  $BB_1 = b$ ;  $A_1B_1 = h$ . Тогда  $AB = \sqrt{h^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$ .

• Если внутри двугранного угла величины  $\alpha$  взята точка на расстояниях  $a$  и  $b$  от граней двугранного угла, то ее расстояние от ребра двугранного угла равно  $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{\sin \alpha}$ .

#### 14.2. Угол между двумя плоскостями

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром (рис. 100). Если величина одного из них равна  $\varphi$ , то величины трех остальных равны соответственно  $180^\circ - \varphi$ ,  $\varphi$ ,  $180^\circ - \varphi$  (почему?). Наименьшая из этих величин принимается за величину угла между данными пересекающимися плоскостями.

**Определение.** Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных при их пересечении.

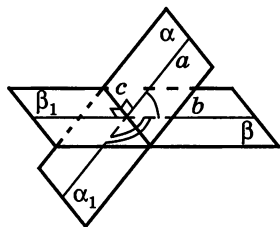


Рис. 100

Угол между параллельными или совпадающими плоскостями полагается равным нулю.

Если величина угла между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  равна  $\varphi$ , то пишут:  $\widehat{(\alpha; \beta)} = \varphi$ .

Так как двугранный угол измеряется своим линейным углом, то из выше приведенного определения следует, что угол между пересекающимися

плоскостями равен углу между пересекающимися прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными к линии их пересечения (рис. 100). Это означает, что величина угла между плоскостями принадлежит промежутку  $[0^\circ; 90^\circ]$ .

■ ЗАДАЧА. Отрезок  $DM$  длиной 3,2 перпендикулярен плоскости ромба  $ABCD$  ( $\angle ADC$  — тупой). Диагонали ромба равны 12 и 16. Найдите углы между плоскостями: а)  $ABC$  и  $MBC$ ; б)  $AMD$  и  $CMD$ .

Решение. а) Пусть  $DE$  — высота ромба  $ABCD$  (рис. 101). Тогда по теореме о трех перпендикулярах  $ME \perp BC$  и  $\angle DEM = \varphi$  —

линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями  $ABC$  и  $MBC$ . Найдем величину этого угла.

По условию задачи  $DM \perp (ABC)$ , поэтому  $\triangle MDE$  — прямоугольный, значит,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{DM}{DE}$ . Так как  $DE$  — высота

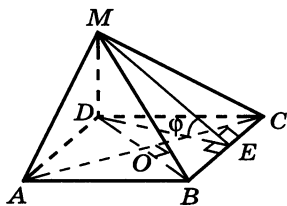


Рис. 101

ромба  $ABCD$ , то  $DE = \frac{S}{BC}$ , где  $S$  —

площадь этого ромба. Сторона  $BC$  ромба является гипотенузой прямоугольного треугольника  $BOC$ , катеты  $OB$  и  $OC$  которого равны 6 и 8. Значит,  $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ .

Учитывая, что  $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$ , находим:  $DE = \frac{96}{10} = 9,6$ . Тогда  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{DM}{DE} = \frac{3,2}{9,6} = \frac{1}{3}$ , откуда  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ .

б) Так как отрезок  $DM$  — перпендикуляр к плоскости ромба  $ABCD$ , то  $AD \perp DM$ ,  $CD \perp DM$ , значит,  $\angle ADC = \psi$  — линейный угол двугранного угла, образованного пересекающимися плоскостями  $ADM$  и  $CDM$ . Найдем этот угол.

В треугольнике  $ACD$  по теореме косинусов находим

$$\cos \psi = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD} = \frac{10^2 + 10^2 - 16^2}{2 \cdot 10 \cdot 10} = -\frac{7}{25},$$

$$\text{откуда } \psi = \arccos \left( -\frac{7}{25} \right).$$

Ответ: а)  $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ ; б)  $\arccos \left( -\frac{7}{25} \right)$ .

## § 15. Перпендикулярность плоскостей

### 15.1. Признаки перпендикулярности двух плоскостей

**Определение.** Две плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен  $90^\circ$  (рис. 102).

Взаимную перпендикулярность плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  обозначают  $\alpha \perp \beta$ . При этом также говорят, что плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $\beta$  или плоскость  $\beta$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ .

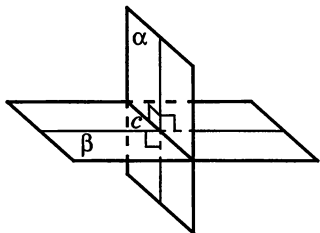


Рис. 102

Заметим, что все четыре двугранных угла, образованные взаимно перпендикулярными плоскостями, прямые.

Примерами взаимно перпендикулярных плоскостей могут служить плоскости пола и стены комнаты в хорошо построенном доме, плоскости двух соседних граней куба или прямоугольного параллелепипеда.

Для стены и пола перпендикулярность проверяют при помощи «отвеса». А как определить, проверить, перпендикулярны ли две плоскости? Ответы на эти вопросы дают признаки перпендикулярности двух плоскостей, а также свойства, которыми обладают перпендикулярные плоскости.

Рассмотрим признаки перпендикулярности двух плоскостей.

**Теорема 28** (признак перпендикулярности двух плоскостей). Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Дано:  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются;  $a \perp \alpha$ ;  $a \subset \beta$  (рис. 103).

Доказать:  $\beta \perp \alpha$ .

Доказательство. Обозначим:  $A = a \cap \alpha$ ,  $b = \alpha \cap \beta$ . Так как по условию теоремы прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ , то эта прямая перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости  $\alpha$ . Значит,  $a \perp b$ .

Проведем в плоскости  $\alpha$  через точку  $A$  прямую  $AC$ , перпендикулярную прямой  $b$ . Тогда  $\angle BAC$  — линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ .

Так как  $AB \perp \alpha$ , то  $\angle BAC = 90^\circ$  (почему?). Это означает, что  $\widehat{(\alpha; \beta)} = 90^\circ$ , т. е.  $\alpha \perp \beta$  (по определению перпендикулярных плоскостей).

Теорема доказана. ▽

**С л е д с т в и е 1.** Если в плоскости есть хоть одна прямая, перпендикулярная другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны.

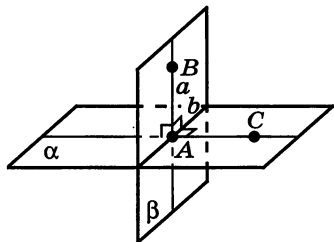


Рис. 103

**С л е д с т в и е 2.** Если плоскость перпендикулярна прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, то эта плоскость перпендикулярна каждой из данных плоскостей.

Докажите эти следствия самостоятельно.

### 15.2. Свойства перпендикулярных плоскостей

**Теорема 29.** Если прямая лежит в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярна линии их пересечения, то эта прямая перпендикулярна другой плоскости.

Дано:  $\alpha \perp \beta$ ;  $\alpha \cap \beta = c$ ;  $a \subset \alpha$ ,  $a \perp c$  (рис. 104).

Доказать:  $a \perp \beta$ .

Доказательство. Обозначим  $O = a \cap c$  и в плоскости  $\beta$  проведем через точку  $O$  прямую  $b$ , перпенди-

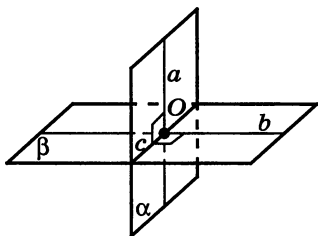


Рис. 104

кулярную прямой  $c$ . Тогда  $(\widehat{a; b}) = 90^\circ$  (как линейный угол прямого двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ ). Получаем  $(a \perp c, a \perp b) \Rightarrow a \perp \beta$  (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Теорема доказана. ▼

**Теорема 30.** Если прямая, проведенная через точку одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна другой плоскости, то она лежит в первой из них.

Дано:  $\alpha \perp \beta$ ,  $A \in \alpha$ ,  $A \in a$ ,  $a \perp \beta$  (рис. 105).

Доказать:  $a \subset \alpha$ .

Доказательство. Обозначим  $c = \alpha \cap \beta$  и через точку  $A$  проведем в плоскости  $\alpha$  прямую  $m$ , перпендикулярную прямой  $c$ . По теореме 29 прямая  $m$  перпендикулярна плоскости  $\beta$ . Так как в пространстве через точку можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную данной плоскости, то прямая  $a$  совпадает с прямой  $m$ , лежащей в плоскости  $\alpha$ . Значит,  $a \subset \alpha$ . Теорема доказана. ▼

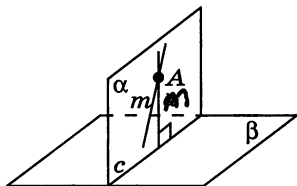


Рис. 105

Докажите самостоятельно следующее предложение («теореме отвеса»). Если прямая, проведенная через точку одной из двух пересекающихся плоскостей, перпендикулярна другой плоскости и не лежит в первой, то данные плоскости не перпендикулярны.

В планиметрии две прямые, перпендикулярные третьей прямой, не могут пересекаться. Проводя аналогию, можно предположить, что не могут пересекаться и две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости. Однако это не так. Достаточно посмотреть на две соседние стены вашей комнаты (мы надеемся, что они обе перпендикулярны к полу), чтобы убедиться, что эти стены не параллельны. Вообще, если две плоскости пересекаются по прямой, перпендикулярной третьей плоскости, то каждая из них перпендикулярна этой третьей плоскости.

Верно и обратное утверждение.

**Теорема 31.** Если две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости.

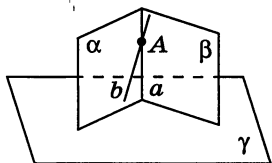
Дано:  $\alpha \perp \gamma$ ,  $\beta \perp \gamma$ ;  $\alpha \cap \beta = a$  (рис. 106, а).

Доказать:  $a \perp \gamma$ .

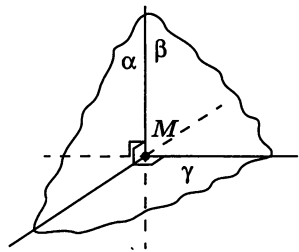
Доказательство. Отметим на прямой  $a$  произвольную точку  $A$  и проведем через нее прямую  $b$ , перпендикулярную плоскости  $\gamma$ . Так как точка  $A$  принадлежит плоскости  $\alpha$  ( $A \in a = \alpha \cap \beta$ ), которая перпендикулярна плоскости  $\gamma$ , то прямая  $b$  лежит в плоскости  $\alpha$  (т. 30). Аналогично, точка  $A$  принадлежит плоскости  $\beta$ , поэтому прямая  $b$  лежит в плоскости  $\beta$ .

Таким образом, прямая  $b$  проходит через точку  $A$ , перпендикулярна плоскости  $\gamma$  и лежит в плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$ . Это означает, что прямая  $b$  совпадает с прямой  $a$ , т. е.  $a \perp \gamma$ . Теорема доказана. ▼

В дальнейшем мы будем часто рассматривать три попарно взаимно перпендикулярные плоскости, имеющие общую точку (рис. 106, б).




а)



б)

Рис. 106



 Вернемся к вопросу об измерении угла между двумя пересекающимися плоскостями.

Прямую, перпендикулярную данной плоскости, называют *нормалью к этой плоскости*.

Пусть плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , величина угла между которыми равна  $\varphi$ , пересекаются по прямой  $c$ . На рисунке 107 плоскость  $\gamma$ , перпендикулярная прямой  $c$ , пересекает плоскость  $\alpha$  по прямой  $m$ , а плоскость  $\beta$  по прямой  $n$ ; через точки  $P \in m$  и  $H \in n$  проведены прямые соответственно  $a$  и  $b$ , перпендикулярные к плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$ .

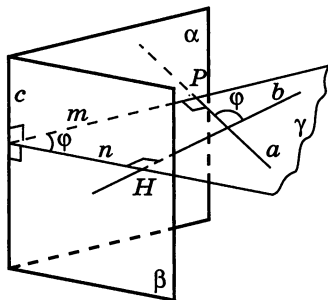



Рис. 107

Так как  $c \perp \gamma$ , то по признаку перпендикулярности двух плоскостей каждая из плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ . По теореме 30 прямые  $a$  и  $b$  лежат в плоскости  $\gamma$ , в которой лежат также и прямые  $m$  и  $n$ . Тогда в плоскости  $\gamma$  угол между прямыми  $m$  и  $n$  (линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ ) и угол между прямыми  $a$  и  $b$  равны (как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Таким образом, **величина угла между двумя пересекающимися плоскостями равна углу между нормальными к этим плоскостям.** 

## § 16. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых

**Определение.** Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок, имеющий концы на данных прямых и перпендикулярный к ним.

Пусть  $a$  и  $b$  — данные скрещивающиеся прямые (рис. 108). Докажем, что существует общий перпендикуляр прямым  $a$  и  $b$ , и притом только один.

Проведем через прямые  $a$  и  $b$  параллельные плоскости соответственно  $\alpha$  и  $\beta$ . Кроме того, через прямую  $a$  проведем плоскость  $\gamma$ , перпендикулярную плоскости  $\beta$ . Пусть  $a_1 = \gamma \cap \beta$ . Очевидно, плоскость  $\gamma$  пересекает плоскость  $\alpha$  по прямой  $a$ ,

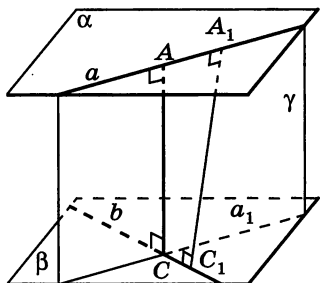


Рис. 108

и прямая  $a_1$  является ортогональной проекцией прямой  $a$  на плоскость  $\beta$ .

Так как  $\alpha \parallel \beta$ , а прямые  $a$  и  $b$  скрещиваются, то прямая  $a_1$  параллельна прямой  $a$  (почему?) и пересекает прямую  $b$  в некоторой точке  $C$ : точка  $C$  является ортогональной проекцией на плоскость  $\beta$  некоторой точки  $A$  прямой  $a$ . Это означает, что отрезок  $AC$  перпендикулярен плоскости  $\beta$ . Тогда отрезок  $AC$

перпендикулярен прямым  $a_1$  и  $b$  (почему?), следовательно, он перпендикулярен прямой  $a$  (почему?). Учитывая, что  $A \in a$ ,  $C \in b$ , приходим к выводу: отрезок  $AC$  — искомый перпендикуляр прямых  $a$  и  $b$ .

Докажем единственность общего перпендикуляра прямых  $a$  и  $b$ . Допустим, что существует другой общий перпендикуляр прямым  $a$  и  $b$ , например отрезок  $A_1C_1$ , причем  $A_1 \in a$ ,  $C_1 \in b$  (рис. 108). Так как  $A_1C_1 \perp a$ ,  $a_1 \parallel a$ , то  $A_1C_1 \perp a_1$ . Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая  $A_1C_1$  перпендикулярна плоскости  $\beta$ . Теперь имеем:  $AC \perp \beta$ ,  $A_1C_1 \perp \beta \Rightarrow AC \parallel A_1C_1$ . Это означает, что точки  $A$ ,  $C$ ,  $A_1$ ,  $C_1$ , следовательно, и данные скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$ , лежат в одной плоскости, что невозможно. Значит, допущение неверно, и общий перпендикуляр скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$  единствен.

*Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.*

Из предыдущих рассуждений следует, что общий перпендикуляр  $AC$  двух скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$  является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые. Следовательно, расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

Итак, мы доказали: две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.

## § 17. Площадь ортогональной проекции многоугольника

Из свойств параллельного проектирования (§ 12) следует, что если фигура лежит в плоскости, параллельной плоскости проекций, то ортогональной проекцией этой фигуры является равная ей фигура.

Рассмотрим вопрос о площади ортогональной проекции многоугольника, расположенного в плоскости  $\alpha$ , которая образует угол  $\varphi$  ( $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ ) с плоскостью проекций  $\pi$  и пересекает ее по прямой  $l$  (рис. 109). Предварительно рассмотрим ортогональное проектирование отрезка, лежащего в плоскости  $\alpha$ , выделив два случая расположения этого отрезка относительно прямой  $l = \alpha \cap \pi$ .

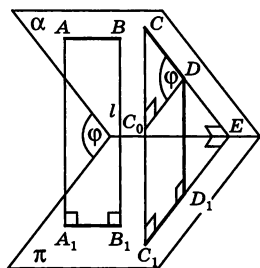


Рис. 109

**С л у ч а й 1.**  $AB \parallel l$  (рис. 109). Отрезок  $A_1B_1$ , являющийся ортогональной проекцией отрезка  $AB$ , равен и параллелен отрезку  $AB$  (§ 12).

**С л у ч а й 2.**  $CD \perp l$  (рис. 109). По теореме о трех перпендикулярах прямая  $C_1D_1$ , являющаяся ортогональной проекцией прямой  $CD$ , также перпендикулярна прямой  $l$ . Следовательно,  $\angle CEC_1$  — угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью проекций  $\pi$ , т. е.  $\widehat{CEC_1} = \varphi = \widehat{(\alpha; \pi)} = \widehat{(CD; C_1D_1)} = \widehat{CDC_0}$ , где  $C_0D \parallel C_1D_1$ . Поэтому

$$|C_1D_1| = |CD| \cdot \cos \varphi. \quad (1)$$

Теперь рассмотрим вопрос об ортогональном проектировании многоугольника.

**Теорема 32.** Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекций.



**Доказательство. 1. Площадь проекции треугольника.**

а) Пусть одна из сторон, например  $AC$ , проектируемого треугольника  $ABC$  параллельна прямой  $l = \alpha \cap \pi$  (рис. 110) или

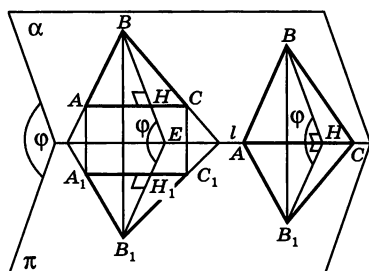


Рис. 110

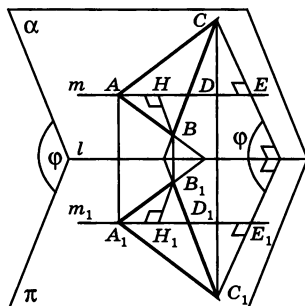


Рис. 111

лежит на ней. Тогда его высота  $BH$  перпендикулярна прямой  $l$ , а площадь равна  $\frac{1}{2}AC \cdot BH$ , т. е.  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH$ .

На основании выше рассмотренных свойств ортогональной проекции отрезка имеем:

$$AC \parallel l \Rightarrow A_1C_1 \parallel l; AC = A_1C_1; B_1H_1 = BH \cdot \cos \varphi.$$

По теореме о трех перпендикулярах прямая  $B_1H_1$  — ортогональная проекция прямой  $BH$  — перпендикулярна прямой  $l$ , следовательно, отрезок  $B_1H_1$  — высота треугольника  $A_1B_1C_1$ . Поэтому

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1H_1 = \frac{1}{2}AC \cdot BH \cdot \cos \varphi = S_{\triangle ABC} \cdot \cos \varphi.$$

Таким образом,

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos \varphi. \quad (2)$$

б) Ни одна из сторон проектируемого треугольника  $ABC$  не параллельна прямой  $l$  (рис. 111).

Проведем через каждую вершину треугольника прямую, параллельную прямой  $l$ . Одна из этих прямых лежит между двумя другими (на нашем рисунке — это прямая  $m$ ), и, следовательно, разбивает треугольник  $ABC$  на треугольники  $ABD$  и  $ACD$  с высотами соответственно  $BH$  и  $CE$ , проведенными к их общей стороне  $AD$  (или ее продолжению), которая параллельна  $l$ .

Прямая  $m_1$  — ортогональная проекция прямой  $m$  — также разбивает треугольник  $A_1B_1C_1$  — ортогональную проекцию треугольника  $ABC$  — на треугольники  $A_1B_1D_1$  и  $A_1C_1D_1$ , где  $A_1D_1 \parallel l$ ,  $B_1H_1 \perp A_1D_1$ ,  $C_1E_1 \perp A_1D_1$ . Принимая во внимание (1) и (2), получаем

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle A_1 B_1 C_1} &= S_{\triangle A_1 B_1 D_1} + S_{\triangle A_1 C_1 D_1} = S_{\triangle ABD} \cdot \cos \varphi + S_{\triangle ACD} \cdot \cos \varphi = \\
 &= (S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}) \cdot \cos \varphi = S_{\triangle ABC} \cdot \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

Итак, для произвольно расположенного в плоскости  $\alpha$  треугольника  $ABC$  выполняется

$$S_{\triangle A_1 B_1 C_1} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos \varphi. \quad (3)$$

**2. Площадь проекции многоугольника.** Пусть  $\Phi$  — данный выпуклый многоугольник  $ABCDEF$  (рис. 112), расположенный в плоскости  $\alpha$ . Его ортогональную проекцию — многоугольник  $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — обозначим  $\Phi_1$ .

Проведя из вершины  $A$  многоугольника  $\Phi$  все его диагонали, разобьем этот многоугольник в объединение непересекающихся треугольников  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $ADE$  и  $AEF$  и обозначим их площади соответственно  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ . Тогда для площади  $S_\Phi$  многоугольника  $\Phi$  выполняется

$$S_\Phi = S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \quad (4)$$

Аналогичным образом многоугольник  $\Phi_1$  разобьем в объединение треугольников  $A_1 B_1 C_1$ ,  $A_1 C_1 D_1$ ,  $A_1 D_1 E_1$  и  $A_1 E_1 F_1$ , площади которых обозначим соответственно  $S'_1$ ,  $S'_2$ ,  $S'_3$  и  $S'_4$ .

Тогда для площади  $S_{\Phi_1}$  многоугольника  $\Phi_1$  выполняется

$$S_{\Phi_1} = S'_1 + S'_2 + S'_3 + S'_4.$$

Принимая во внимание (2), (3) и (4), находим

$$\begin{aligned}
 S_{\Phi_1} &= S'_1 + S'_2 + S'_3 + S'_4 = S_1 \cdot \cos \varphi + S_2 \cdot \cos \varphi + S_3 \cdot \cos \varphi + \\
 &+ S_4 \cdot \cos \varphi = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \cdot \cos \varphi = S_\Phi \cdot \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

Разбивая указанным способом на треугольники любой  $n$ -угольник  $\Phi$ , получим аналогичное соотношение между площадью  $S(\Phi)$  этого  $n$ -угольника и площадью  $S(\Phi_1)$  его проекции  $\Phi_1$ :

$$S(\Phi_1) = S(\Phi) \cdot \cos \varphi,$$

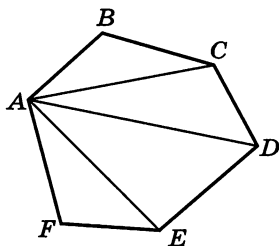



Рис. 112

где  $\varphi$  — угол между плоскостью данного  $n$ -угольника и плоскостью проекций. Теорема доказана. ▼ 

В школьном курсе геометрии изучаются выпуклые многоугольники. Тем не менее, представляет интерес вопрос о том, как изменяется площадь выпуклого многоугольника при его ортогональном проектировании на другую плоскость, образующую с плоскостью данного многоугольника угол  $\varphi$  ( $\varphi \leq 90^\circ$ ).

Заметим, что разбиение многоугольника в объединение непересекающихся треугольников называют триангуляцией данного многоугольника. На интуитивном уровне очевидно, что невыпуклый многоугольник  $M$  площади  $S$ , так же как и выпуклый можно триангулировать, допустим на  $n$  треугольников, площади которых равны  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . При ортогональном проектировании каждый треугольник площади  $S'_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) проектируется в треугольник площади  $S_k = S_k \cdot \cos \varphi$ . Тогда многоугольник  $M'$  — ортогональная проекция данного многоугольника  $M$  имеет площадь

$$\begin{aligned} S' &= S'_1 + S'_2 + \dots + S'_n = S_1 \cdot \cos \varphi + S_2 \cdot \cos \varphi + \dots + S_n \cdot \cos \varphi = \\ &= (S_1 + S_2 + \dots + S_n) \cdot \cos \varphi = S \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, доказанная теорема справедлива и для невыпуклых многоугольников.



## § 18. Расстояние от точки до фигуры

Мы уже говорили о расстоянии между двумя точками (рис. 113).

Расстояние от точки  $M$  до фигуры  $F$  мы будем обозначать:  $\rho(M; F)$ <sup>1</sup>.

Если точка  $M$  принадлежит фигуре  $F$ , то расстояние от нее до фигуры  $F$  равно нулю. Например, расстояние от любой вершины куба до этого куба равно нулю.

Если точка  $M$  не принадлежит фигуре  $F$ , то рассматриваются всевозможные расстояния от данной точки до каждой точки фигуры  $F$ . Наименьшее из них и принимается за расстояние от точки  $M$  до фигуры  $F$ .

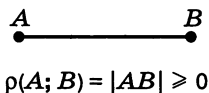


Рис. 113

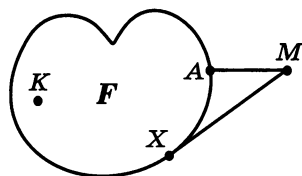
Таким образом: если точка  $M$  не принадлежит фигуре  $F$  и существует принадлежащая фигуре  $F$  точка  $A$  такая, что  $|MA| \leq |MX|$  для любой точки  $X$  фигуры  $F$ , то длина отрезка  $MA$  называется *расстоянием от точки  $M$  до фигуры  $F$* , а точка  $A$  — *ближайшей к точке  $M$  точкой фигуры  $F$* . При этом пишут:  $\rho(M; F) = |MA|$  (рис. 114).

Заметим, что такое определение расстояния от точки до фигуры применимо как на плоскости, так и в пространстве. Более того, если точка  $M$  и фигура  $F$  лежат в одной плоскости ( $F$  — плоская фигура), то расстояние  $\rho(M; F)$  на плоскости будет таким же, как и в пространстве.

Рассмотрим расстояния от различных точек пространства до сферы  $S$  с центром  $O$  радиуса  $R$ .

• Если точка  $M$  расположена вне шара с центром  $O$  и радиусом  $R$  (т. е.  $|OM| > R$ ), то точка  $A$  пересечения отрезка  $OM$

<sup>1</sup> Это обозначение не является общепринятым, но, как нам кажется, очень удобно.



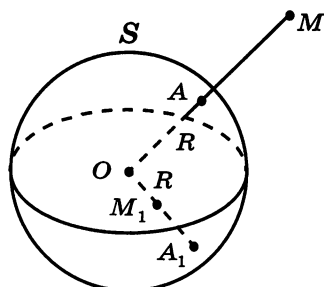
$$X \in F, A \in F, K \in F$$

$$\rho(M; F) = |MA|$$

$$\rho(K; F) = 0$$

$$|MX| \geq |MA|$$

Рис. 114



$$\rho(M; S) = |MA| = |MO| - R, A \in S$$

$$\rho(M_1; S) = |M_1A_1| = R - |M_1O|; A_1 \in S$$

$$\rho(M; S) = ||MO| - R|$$


Рис. 115

со сферой  $S$  является ближайшей к  $M$  точкой этой сферы (что нетрудно показать при помощи неравенства треугольника) (рис. 115). Таким образом,  $\rho(M; S) = |MA| = |MO| - R$ .

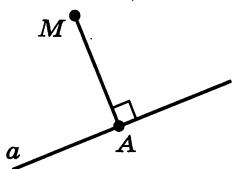
• Если точка  $M_1$  расположена внутри шара (рис. 115), но не совпадает с его центром (т. е.  $0 < |OM_1| < R$ ), то точка  $A_1$  пересечения луча  $OM_1$  со сферой является ближайшей к  $M_1$  точкой сферы, то есть  $\rho(M_1; S) = R - |OM_1|$ .

• Если точка  $M$  лежит на сфере, то  $\rho(M; S) = 0$ .

• Если, наконец, точка  $M$  является центром сферы, то любая точка сферы является ближайшей к точке  $M$  и  $\rho(M; S) = R$ .

 В данной фигуре  $F$  может не быть точек, ближайших к данной точке  $M$ . Такая ситуация может быть, например в случае, когда фигура  $F$  — множество всех внутренних точек шара с центром  $O$  и радиусом, равным 1 (т. е. всех таких точек  $X$ , для которых  $0 \leq |OX| < 1$ ). Такое множество точек называют открытым шаром (шар без ограничивающей его сферы). Если при этом точка  $M$  удалена от центра  $O$  шара на расстояние, равное 5, то в открытом шаре нет точки, ближайшей к точке  $M$ : на отрезке  $MO$  не существует такой точки  $X$ , принадлежащей данному шару, для которой длина отрезка  $MX$  достигает своего минимума. Поэтому введенное выше определение расстояния от точки до замкнутой фигуры не распространяется для определения расстояния от данной точки до открытого множества точек («открытой» фигуры). В курсе школьной геометрии рассматривается вообще говоря, замкну-





$$\begin{aligned} M &\notin a \\ \rho(M; a) &= |MA| \\ A &\in a, MA \perp a \end{aligned}$$

Рис. 116

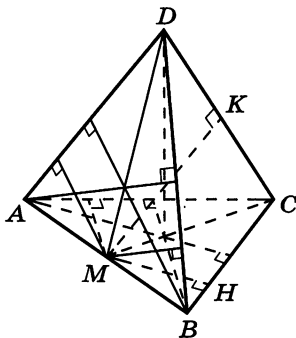



Рис. 117

тые фигуры: шар с ограничивающей его сферой — поверхностью шара, которую называют шаровой поверхностью; многогранник — геометрическое тело, границей (поверхностью) которого является объединение конечного числа многоугольников — многогранная поверхность. Об этом речь пойдет в курсе стереометрии 11 класса. 

Расстоянием от данной точки  $M$  до данной прямой  $a$ , не проходящей через точку  $M$ , является длина перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на прямую  $a$  (рис. 116); основание этого перпендикуляра есть ближайшая к  $M$  точка прямой  $a$ .

Рассмотрим, к примеру, правильный тетраэдр  $ABCD$  с длиной ребра  $a$ , в котором точка  $M$  — середина ребра  $AB$ . Найдем расстояния от этой точки до прямых, содержащих ребра тетраэдра (рис. 117).

Получаем:

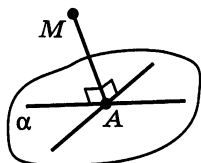
- $\rho(M; AB) = 0$ , так как точка  $M$  лежит на прямой  $AB$ ;
- расстояния от точки  $M$  до прямых  $AC$ ,  $BC$ ,  $BD$ ,  $AD$  равны

$\frac{a\sqrt{3}}{4}$ , а ближайшей к  $M$  точкой, например, ребра  $BC$  является

точка  $H_{BC}$ , делящая это ребро в отношении  $BH : HC = 1 : 3$ ;

• так как треугольник  $MDC$  — равнобедренный (почему?), то нетрудно показать, что расстояние от точки  $M$  до прямой  $DC$  равно длине отрезка  $MK$ , где точка  $K$  — середина  $DC$  — является ближайшей к  $M$  точкой прямой  $CD$ . Поэтому

$$\rho(M; DC) = |MK| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



$M \notin \alpha$   
 $\rho(M; \alpha) = |MA|$   
 $A \in \alpha, MA \perp \alpha$

Рис. 118

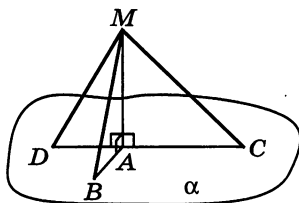


Рис. 119

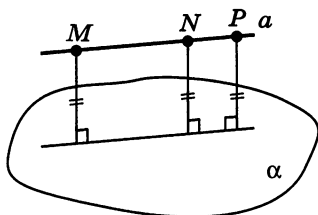


Рис. 120

Расстоянием от точки  $M$  до плоскости  $\alpha$ , не проходящей через эту точку, является длина перпендикуляра  $MA$ , опущенного из данной точки  $M$  на плоскость (рис. 118), а основание  $A$  этого перпендикуляра есть ближайшая к  $M$  точка плоскости  $\alpha$  (это утверждение становится совершенно очевидным, если вспомнить о сравнении длин перпендикуляра и наклонной) (рис. 119).

Заметим, что если прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ , то расстояние между ними равно расстоянию от любой точки прямой  $a$  до плоскости  $\alpha$ , так как это расстояние для любой точки прямой  $a$  одно и то же (рис. 120).

Далее, если две плоскости параллельны, то расстояние между ними равно расстоянию от любой точки одной из данных плоскостей до другой, так как расстояния от любой точки одной из этих плоскостей до другой плоскости одинаковы (рис. 121).

Докажите самостоятельно одно часто используемое при решении задач соотношение: пусть точки  $A$  и  $B$  не лежат в плоскости  $\alpha$ , а прямая  $AB$  пересекает эту плоскость в точке  $O$ , тогда  $\frac{\rho(A; \alpha)}{\rho(B; \alpha)} = \frac{OA}{OB}$  (рис. 122).

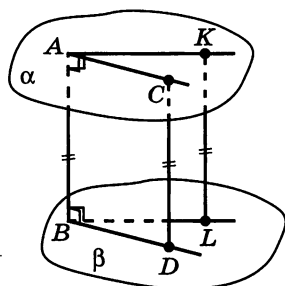


Рис. 121

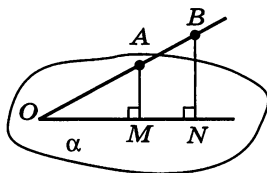


Рис. 122

В качестве примера рассмотрим следующую геометрическую ситуацию. Пусть  $MABCD$  — правильная четырехугольная пирамида (рис. 123). Расстояние от точки  $O$  пересечения диагоналей квадрата  $ABCD$  до плоскости  $MBC$  равно 1. Требуется найти расстояние до плоскости  $MBC$  от: а) вершины  $D$ ; б) точки  $K$  пересечения медиан треугольника  $MAD$ ; в) точки  $F$  пересечения медиан треугольника  $MDC$ .

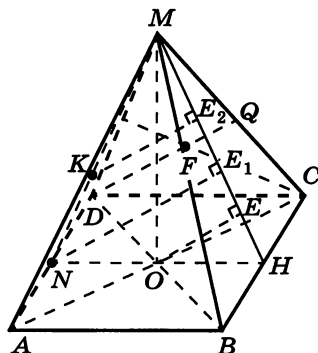


Рис. 123

а) Так как точка  $O$  является серединой отрезка  $BD$ , то

$$\frac{\rho(D; (MBC))}{\rho(O; (MBC))} = \frac{DB}{OB} = 2.$$

Следовательно,  $\rho(D; (MBC)) = 2$ .

б) Пусть  $N$  — середина  $AD$ ,  $H$  — середина  $BC$ . Тогда  $\rho(N; (MBC)) = 2$ , так как точка  $O$  — середина  $NH$  и  $\rho(O; (MBC)) = 1$ .

Далее, прямая  $NK$  пересекает плоскость  $MBC$  в точке  $M$  и  $\frac{KM}{NM} = \frac{2}{3}$ . Значит,

$$\frac{\rho(K; (MBC))}{\rho(N; (MBC))} = \frac{KM}{NM} = \frac{2}{3}.$$

Тогда  $\rho(K; (MBC)) = \frac{4}{3}$ .

в) Если  $DF$  пересекает  $MC$  (а следовательно, и плоскость  $(MBC)$ ) в точке  $Q$ , то  $\frac{\rho(F; (MBC))}{\rho(D; (MBC))} = \frac{FQ}{DQ} = \frac{1}{3}$ . А так как  $\rho(D; (MBC)) = 2$ , то  $\rho(F; (MBC)) = \frac{2}{3}$ .

Отметим, что приведенный нами метод нахождения расстояния от точки до плоскости позволяет решать подобного рода задачи без построения на рисунках тех перпендикуляров, длины которых равны искомым расстояниям от точек до соответствующих плоскостей. (На рис. 123 перпендикуляры проведены для наглядности и понимания предложенного метода; для решения задачи достаточно найти на рисунке подобные треугольники.)

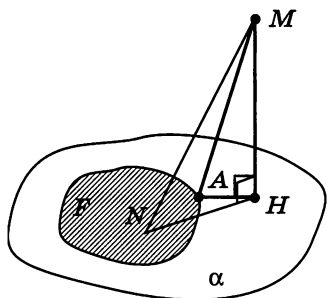


Рис. 124

Очень многие задачи на нахождение расстояний в пространстве состоят в нахождении расстояния от некоторой точки  $M$ , не лежащей в плоскости  $\alpha$ , до фигуры  $F$ , лежащей в этой плоскости. Для решения задач такого рода удобно применять следующий прием.

Опустим из точки  $M$  на плоскость  $\alpha$  перпендикуляр  $MH$  (его длина  $|MH| = h$  есть расстояние от точки  $M$  до плоскости  $\alpha$  (рис. 124)).

Если точка  $H$  принадлежит фигуре  $F$ , то расстояние от точки  $M$  до фигуры  $F$  равно  $h$ .

Если же точка  $H$  не принадлежит фигуре  $F$ , то мы находим на фигуре  $F$  точку  $A$ , ближайшую к  $H$ . Тогда расстояние от точки  $M$  до фигуры  $F$  равно длине отрезка  $AM$ , т. е.

$$AM^2 = \rho^2(M; F) = \rho^2(M; \alpha) + \rho^2(H; F).$$

Действительно, так как  $A$  — точка фигуры  $F$ , ближайшая к точке  $H$ , то  $|HA| \leq |HN|$  для любой точки  $N$  фигуры  $F$ . После применения теоремы Пифагора к прямоугольным треугольникам  $AMH$  и  $NMH$  получаем соответственно  $|MA|^2 = \rho^2(M; \alpha) + |HA|^2$  и  $|MN|^2 = \rho^2(M; \alpha) + |HN|^2$ , откуда (с учетом  $|HA| \leq |HN|$ ) следует  $|MA|^2 \leq |MN|^2$ , т. е.  $|MA| \leq |MN|$ .

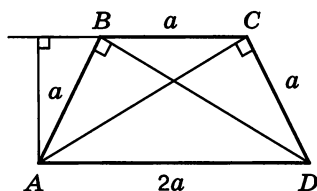
Используя соотношение  $\rho^2(M; F) = \rho^2(M; \alpha) + \rho^2(H; F)$ , попробуйте придумать новое доказательство теоремы о трех перпендикулярах.

Рассмотрим следующую *задачу*. Из вершины  $A$  трапеции  $ABCD$  ( $AB = BC = CD = a$ ;  $AD = 2a$ ) к ее плоскости проведен перпендикуляр  $AM$ , длина которого равна  $a$ . Найдите расстояния от точки  $M$  до прямых, содержащих стороны и диагонали данной трапеции (рис. 125,  $a, б$ ).

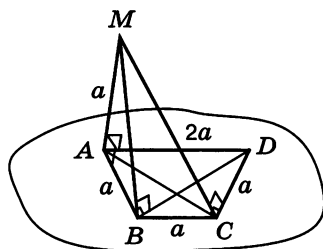
Расстояния от точки  $M$  до прямых  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$  равны  $a$ , так как эти прямые содержат точку  $A$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на плоскость трапеции.

Так как расстояние от точки  $A$  до прямой  $BC$  равно высоте трапеции и равно  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ , то расстояние от  $M$  до прямой  $BC$  рав-

$$\text{но } \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$



а)



б)

Рис. 125

Расстояние от точки  $A$  до прямой  $DC$  равно длине диагонали  $AC$  (треугольник  $ACD$  — прямоугольный) и равно  $a\sqrt{3}$ , следовательно, расстояние от точки  $M$  до прямой  $DC$  равно  $\sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$ .

Расстояние от точки  $A$  до прямой  $BD$  равно длине отрезка  $AB$  (треугольник  $ABD$  — прямоугольный), следовательно, расстояние от точки  $M$  до прямой  $BD$  равно  $a\sqrt{2}$ .

При решении задач на нахождение угла между прямой и плоскостью полезно пользоваться следующим приемом.

Пусть расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$  равно  $h$ , а точка  $O$  лежит в плоскости  $\alpha$ . Тогда синус угла  $\varphi$  между прямой  $OA$  и плоскостью  $\alpha$  равен  $\frac{h}{OA}$  ( $\sin \varphi = \frac{h}{OA}$  (рис. 126)).

Есть удобное соотношение и для нахождения угла  $\varphi$  между двумя пересекающимися плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ . Именно, если точка  $A$  лежит в плоскости  $\alpha$ , а расстояния от нее до плоскости  $\beta$  и до прямой пересечения данных плоскостей равны соответственно  $h$  и  $m$ , то синус угла между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  равен  $\frac{h}{m}$  ( $\sin \varphi = \frac{h}{m}$ ) (рис. 127).

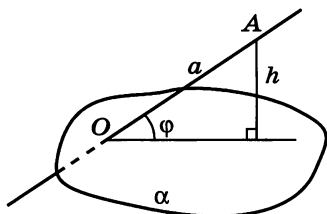


Рис. 126

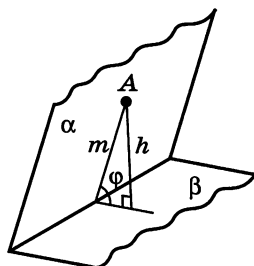


Рис. 127

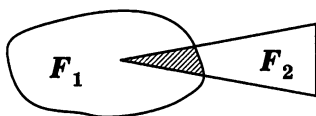
## § 19. Расстояние между фигурами

Рассмотрим две фигуры  $F_1$  и  $F_2$ . Если они имеют хотя бы одну общую точку, то расстояние между ними равно нулю (рис. 128). Если же фигуры не имеют общих точек, то рассматриваются всевозможные расстояния между каждой точкой  $A$  первой фигуры и каждой точкой  $B$  второй фигуры. Наименьшее из этих расстояний (чисел) и принимается за расстояние между фигурами  $F_1$  и  $F_2$ . Как и расстояние между фигурой и точкой, расстояние между двумя фигурами  $F_1$  и  $F_2$  мы будем обозначать:  $\rho(F_1; F_2)$ .

Из вышесказанного следует, что если  $\rho(F_1; F_2) = d$  и фигуры не имеют общих точек (рис. 129), то существуют такая точка  $A_1$  фигуры  $F_1$  и такая точка  $A_2$  фигуры  $F_2$ , что  $|A_1 A_2| = d$ , а для любых других точек  $M$  первой фигуры и точек  $N$  второй фигуры  $|MN| \geq d$ .

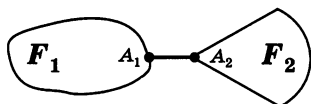
Рассмотрим расстояние между двумя фигурами на примере двух сфер радиусов  $R_1$  и  $R_2$  с центрами соответственно  $O_1$  и  $O_2$ .

• Если  $|O_1 O_2| > R_1 + R_2$ , то сферы не имеют общих точек. Пусть  $A$  — точка пересечения первой сферы с отрезком  $O_1 O_2$ ,  $B$  — точка пересечения второй сферы с этим же отрезком (рис. 130). Тогда для любых точек  $M$  первой сферы и точек  $N$  второй сферы справедливо  $|MN| \geq |AB|$  и, таким образом, расстояние между сферами равно длине отрезка  $AB$  и равно  $|O_1 O_2| - (R_1 + R_2)$ .



$$\rho(F_1; F_2) = 0$$

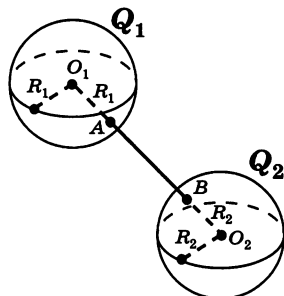
Рис. 128



$$\rho(F_1; F_2) = |A_1 A_2|$$

$$A_1 \in F_1, A_2 \in F_2$$

Рис. 129



$Q_1, Q_2$  не имеют  
общих точек

$$\rho(Q_1; Q_2) =$$

$$= |O_1 O_2| - (R_1 + R_2)$$

Рис. 130

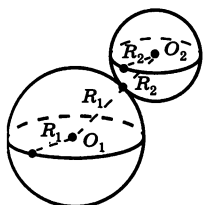


Рис. 131

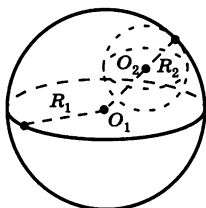


Рис. 132

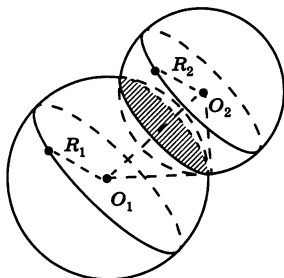


Рис. 133

• Если расстояние  $O_1O_2$  между центрами сфер равно сумме радиусов, то сферы касаются друг друга внешним образом (рис. 131).

• Если расстояние  $O_1O_2$  равно модулю разности радиусов, но не равно нулю, то сферы касаются друг друга внутренним образом (рис. 132).

• Если же расстояние между центрами больше модуля разности радиусов, но меньше их суммы, то сферы пересекаются по окружности (рис. 133). Во всех этих случаях расстояние между сферами равно нулю.

• Если расстояние между центрами сфер меньше модуля разности радиусов, но не равно нулю, то сфера меньшего радиуса находится целиком внутри шара сферы большего радиуса, и расстоянием между этими сферами является длина отрезка  $AB$  прямой центров сфер (рис. 134). Это расстояние равно  $|R_1 - R_2| - |O_1O_2|$ .

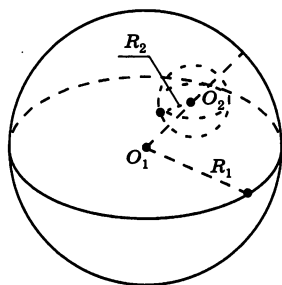


Рис. 134

• Если же центры сфер совпадают, а их радиусы не равны, то расстояние между этими сферами равно  $|R_1 - R_2|$ , причем таких точек  $A$  и  $B$ , что  $|AB| = |R_1 - R_2|$  бесконечно много (рис. 135).

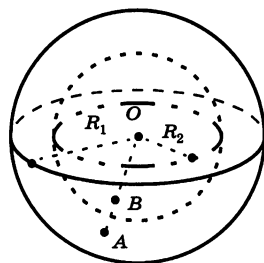


Рис. 135

• Наконец, если центры сфер совпадают, а их радиусы равны, то совпадают и сферы, следовательно, расстояние между данными сферами равно нулю.

Как видите, мы провели небольшое исследование на тему «Расстояния между двумя сферами в пространстве». Попробуйте провести аналогичное исследование о расстояниях между:

- плоскостью и сферой (что сравнительно легко);
- кубом и сферой с центром на прямой, содержащей диагональ куба, и радиусом, равным ребру куба (что значительно сложнее).

Поговорим теперь о расстоянии между прямой и плоскостью.

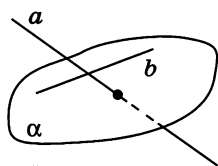
Если прямая лежит в плоскости или ее пересекает, то расстояние между прямой и плоскостью равно нулю (рис. 136).

Если прямая параллельна плоскости, то, как мы отмечали в предыдущем параграфе, расстояния от любой точки прямой до плоскости равны между собой и равны длине отрезка перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой на эту плоскость (рис. 120). Следовательно, расстояние между плоскостью и параллельной ей прямой равно расстоянию от любой точки этой прямой до данной плоскости.

Аналогично, расстояние между двумя параллельными плоскостями также равно длине отрезка их общего перпендикуляра (рис. 121).

Интересным является следующее свойство расстояний между двумя фигурами: если расстояние между фигурами  $F_1$  и  $F_2$  равно  $d$  ( $\rho(F_1; F_2) = d$ ), а расстояние между фигурами  $Q_1$  и  $Q_2$ , принадлежащими соответственно фигурам  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 137), равно  $d_1$  ( $\rho(Q_1; Q_2) = d_1$ ), то  $d \leq d_1$ . Это утверждение легко доказывается методом от противного.

Теперь рассмотрим две параллельные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , расстояние между которыми равно  $h$  и в которых лежат соответственно прямые  $a$  и  $b$ .



$$a \nparallel \alpha \Rightarrow \rho(a; \alpha) = 0$$

$$b \subset \alpha \Rightarrow \rho(b; \alpha) = 0$$

Рис. 136

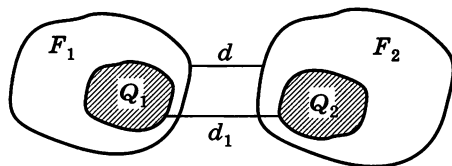


Рис. 137



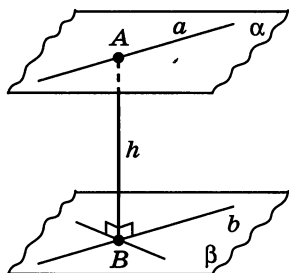


Рис. 138

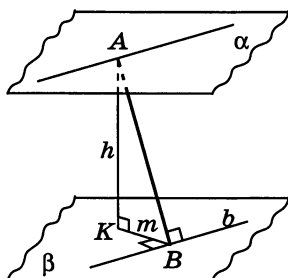


Рис. 139

• Если прямые  $a$  и  $b$  параллельны, то расстояние между ними либо равно  $h$  (если перпендикуляр, опущенный из точки  $A$  прямой  $a$  на плоскость  $\beta$ , пересечет прямую  $b$  (рис. 138)), либо равно  $\sqrt{h^2 + m^2}$  (если этот перпендикуляр пересечет плоскость  $\beta$  в некоторой точке  $K$ , не принадлежащей прямой  $b$ , а удаленной от нее на расстояние  $m$  (рис. 139)).

• Если прямые  $a$  и  $b$  скрещиваются, то опустим из точки  $A$  прямой  $a$  перпендикуляр  $AK$  на плоскость  $\beta$  и через пересекающиеся прямые  $a$  и  $AK$  проведем плоскость  $\gamma$ , которая будет перпендикулярна каждой из двух данных параллельных плоскостей (по признаку перпендикулярности двух плоскостей). Плоскость  $\gamma$  пересечет плоскость  $\beta$  по некоторой прямой  $KM$  (рис. 140), параллельной прямой  $a$  и пересекающей (почему?) прямую  $b$  в некоторой точке  $P$  (которая может совпасть с  $K$ ). Расстояние от точки  $P$ , принадлежащей прямой  $b$ , до прямой  $a$  равно  $h$  и равно расстоянию между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$ , которое, в свою очередь, равно длине их общего перпендикуляра  $PT$ , проведенного из точки  $P$  на прямую  $a$  ( $T \in a$ ).

Пусть  $a$  и  $b$  — две скрещивающиеся прямые. Проведем через прямую  $a$  и прямую  $b$  соответственно параллельные друг другу плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ . Мы получим уже знакомую нам ситуацию, а расстояние между прямыми  $a$  и  $b$  будет равно, как было показано, расстоянию между параллельными плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ . Если же мы хотим найти на прямых  $a$  и  $b$  такие точки  $P$  и  $T$ , чтобы длина отрезка  $PT$  была равна расстоянию между

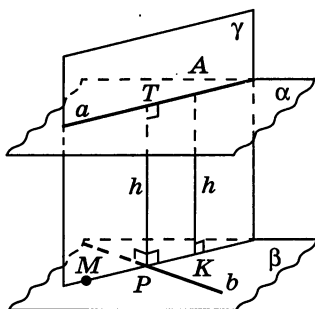


Рис. 140

этими прямыми, то нам необходимо построить «общий перпендикуляр» двух скрещивающихся прямых. Это всегда можно сделать способом, указанным выше.

В некоторых случаях для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми удобно использовать метод ортогонального проектирования, состоящий в следующем. Пусть  $a$  и  $b$  — скрещивающиеся прямые (рис. 141). Построим плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную прямой  $a$ , и спроектируем на плоскость  $\alpha$  прямую  $b$ . Пусть эта проекция есть прямая  $b_1$ . Очевидно, что плоскость  $\beta$ , проходящая через прямые  $b$  и  $b_1$ , параллельна прямой  $a$ . Следовательно, если  $A$  — точка пересечения прямой  $a$  с плоскостью  $\alpha$ , то расстояние  $\rho(a; b) = \rho(A; b_1)$ .

■ ЗАДАЧА 1. Дана треугольная пирамида  $ABCD$  (рис. 142), все ребра которой равны  $a$ . Найти расстояние между прямыми  $BC$  и  $DM$ , где  $M$  — середина ребра  $AB$ .

Решение. Пусть  $L$  — середина отрезка  $BC$ . Тогда плоскость  $ALD \perp BC$ .

Спроектируем прямую  $DM$  на плоскость  $ALD$ . Для этого из точки  $M$  опустим перпендикуляр  $MH$  на  $AL$ . Тогда  $MH \parallel BC$  и, значит,  $MH \perp (ALD)$ , а  $BC \parallel (MHD)$ . Следовательно, искомое расстояние  $\rho(BC; DM)$  есть высота  $\triangle DHL$ , опущенная из его вершины  $L$ .

Рассмотрим треугольник  $ADL$ . Он равнобедренный, поскольку  $AL = DL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , а его основание  $AD = a$ . Заметим, что  $DH$  — медиана  $\triangle ADL$ , поскольку  $M$  — середина  $AB$ , а  $MH \parallel BC$ .

Пусть  $LP$  — искомая высота  $\triangle DHL$ , а  $DT$  — высота  $\triangle DHL$ , опущенная из вершины  $D$ . Тогда справедливо равенство

$$\text{ство } \frac{LP}{DT} = \frac{LH}{DH} \Rightarrow LP = \frac{DT \cdot LH}{DH}.$$

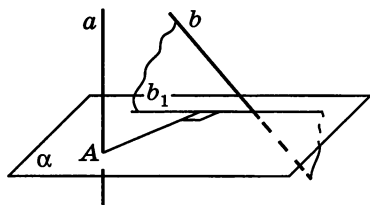


Рис. 141

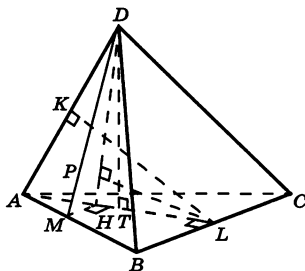


Рис. 142

Медиану  $DH$  найдем из соотношения между сторонами и медианой  $\triangle ADL$ :

$$AL^2 + 4DH^2 = 2(DL^2 + AD^2),$$

откуда  $DH = \frac{a\sqrt{11}}{4}$ .

Отрезок  $DT$  найдем из соотношения между сторонами и высотами треугольника  $ADL$ :  $DT \cdot AL = LK \cdot AD$ , где  $LK$  — высота  $\triangle ADL$ . Отсюда получаем

$$DT = \frac{AD \cdot LK}{AL} = \frac{a \cdot \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Теперь окончательно находим

$$LP = \frac{DT \cdot LH}{DH} = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a\sqrt{11}}{4}} = \frac{a\sqrt{22}}{11}.$$

Ответ:  $\rho(BC; DM) = \frac{a\sqrt{22}}{11}$ .

■ ЗАДАЧА 2. Рассмотрите рисунок 143 и убедитесь, что расстояние  $\rho(DB_1; D_1C) = OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ .

Заметим: чтобы найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, совершенно не обязательно строить их общий перпендикуляр. Удобно пользоваться следующими вытекающими из выше сказанного утверждениями: расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из них до плоскости, проходящей через другую прямую параллельно первой прямой, а также равно расстоянию между параллельными плоскостями, проведенными через две данные скрещивающиеся прямые.

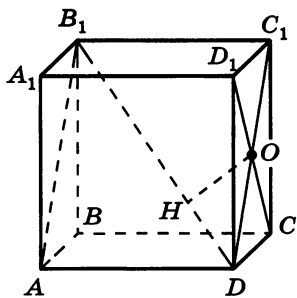


Рис. 143

## § 20. Геометрические места точек, связанные с расстояниями в пространстве

Некоторые множества точек в пространстве задаются условиями, связанными с расстояниями между точками, точкой и фигурой, двумя фигурами. Перечислим некоторые из этих множеств, предложив читателю осмыслить и доказать, где это требуется, описанные нами факты.

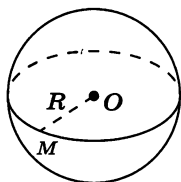


Рис. 144

• Множество всех точек пространства, удаленных от данной точки на данное расстояние  $R$  ( $R > 0$ ), есть сфера с центром в данной точке радиуса  $R$  (рис. 144).

• Множество всех точек пространства, удаленных от данной прямой на данное расстояние  $R$  ( $R > 0$ ), есть цилиндрическая поверхность (рис. 145).

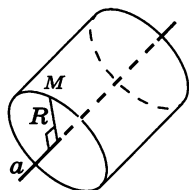
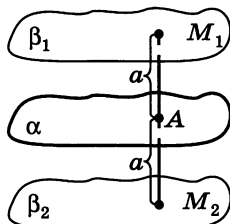


Рис. 145

• Множество всех точек пространства, удаленных от данной плоскости на данное расстояние  $a$  ( $a > 0$ ), есть две параллельные ей плоскости (рис. 146).

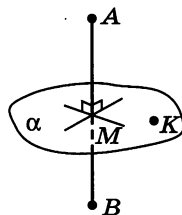
• Множество всех точек пространства, равноудаленных от двух данных точек, есть плоскость, проходящая через середину отрезка с концами в этих точках перпендикулярно прямой, проходящей через данные точки. В этой плоскости лежат центры всех сфер, проходящих через данные точки (рис. 147).

• Множество всех точек пространства, равноудаленных от трех данных точек, не лежащих на одной прямой, есть прямая, перпендикулярная плоскости этих точек и проходящая



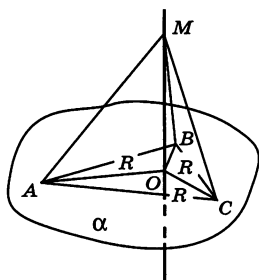
$$\alpha \parallel \beta_1, \alpha \parallel \beta_2; AM_1 = AM_2 = a \\ M_1M_2 \perp \alpha, A \in \alpha, A \in M_1M_2$$

Рис. 146



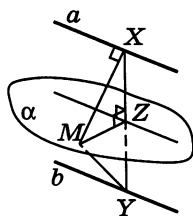
$$AM = MB; AK = KB \\ AB \perp \alpha, K \in \alpha$$

Рис. 147



$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = OC \\ MO \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow MA = MB = MC$$

Рис. 148



$$\left. \begin{array}{l} a \parallel b, X \in a, Y \in b, M \in \alpha, \\ XY \perp \alpha, XY \perp a, XY \perp b; \\ XZ = ZY \end{array} \right\} \Rightarrow MX = MY$$

Рис. 149

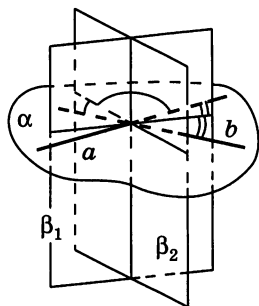
через центр окружности, описанной около треугольника с вершинами в данных точках. Этой прямой принадлежат центры всех сфер, проходящих через данные точки (рис. 148).

- Множество всех точек пространства, равноудаленных от четырех данных точек, не лежащих в одной плоскости, есть единственная точка — центр сферы, проходящей через данные четыре точки.

- Множество всех точек пространства, равноудаленных от двух данных параллельных прямых, есть плоскость, проходящая через середину отрезка общего перпендикуляра этих прямых и ему перпендикулярная. В этой плоскости лежат центры всех сфер, касающихся данных прямых (рис. 149).

- Множество всех точек пространства, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых, есть две плоскости, перпендикулярные плоскости, в которой лежат эти прямые, и проходящие через биссектрисы углов, образованных данными прямыми (рис. 150).

- Множество всех точек пространства, равноудаленных от прямых, содержащих стороны данного треугольника, есть четыре прямые, перпендикулярные плоскости треугольника и проходящие соответственно через центр окружности, вписанной в этот треугольник, и через центр каждой из трех окружностей, вневписанных для этого треугольника (рис. 151).



$$\beta_1 \perp \alpha, \beta_2 \perp \alpha$$

Рис. 150

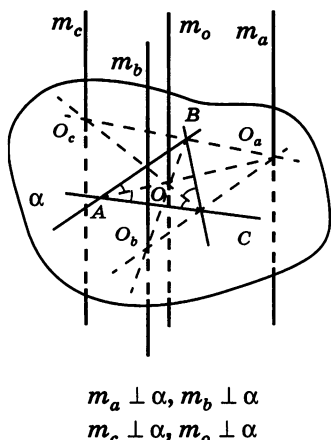
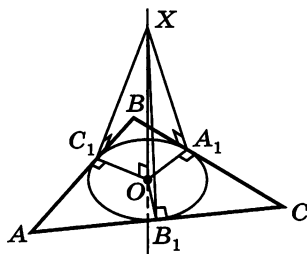


Рис. 151



$$\left. \begin{aligned}
 XO &\perp (ABC) \\
 OC_1 &= OA_1 = OB_1 \\
 OC_1 &\perp AB, OA_1 \perp BC, OB_1 \perp AC
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

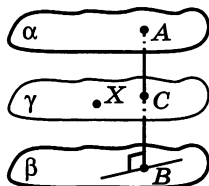
$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow XC_1 \perp AB, XB_1 \perp AC, \\
 &XA_1 \perp BC; XA_1 = XB_1 = XC_1
 \end{aligned}$$

Рис. 152

• Множество всех точек пространства, равноудаленных от сторон данного треугольника, есть прямая, перпендикулярная плоскости треугольника, проходящая через центр вписанной в него окружности. На этой прямой лежат центры всех шаров, касающихся сторон треугольника (рис. 152).

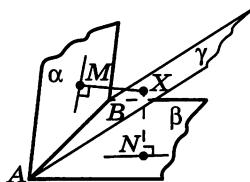
• Множество всех точек пространства, равноудаленных от двух параллельных плоскостей, есть параллельная им плоскость, проходящая через середину отрезка их общего перпендикуляра. Ей принадлежат центры всех шаров, касающихся обеих плоскостей (рис. 153).

• Множество всех точек двугранного угла, равноудаленных от граней этого угла, есть «биссекторная» полуплоскость этого угла. Ей принадлежат центры всех шаров, вписанных в этот угол (рис. 154).



$$\begin{aligned}
 &\alpha \parallel \beta, \gamma \parallel \alpha, AB \perp \alpha, AC = CB \\
 &X \in \gamma \Rightarrow \rho(X; \alpha) = \rho(X; \beta)
 \end{aligned}$$

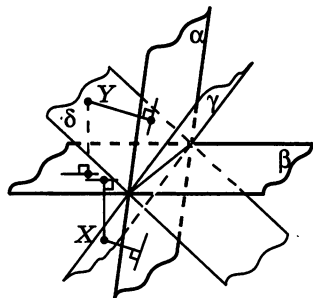
Рис. 153



$$\begin{aligned}
 &\angle M (AB) X = \angle X (AB) N \\
 &X \in \gamma \Rightarrow \rho(X; \alpha) = \rho(X; \beta)
 \end{aligned}$$

Рис. 154

• Множество всех точек пространства, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей, есть две «биссекторные» плоскости, проходящие через прямую пересечения этих плоскостей и делящие образованные двугранные углы пополам. Им принадлежат центры всех шаров, касающихся обеих плоскостей (рис. 155).



$$\angle(\alpha, \gamma) = \angle(\beta, \gamma)$$

$$X \in \gamma \Rightarrow \rho(X; \alpha) = \rho(X; \beta)$$

$$\angle(\alpha, \delta) = \angle(\beta, \delta)$$

$$Y \in \delta \Rightarrow \rho(Y; \alpha) = \rho(Y; \beta)$$

Рис. 155

• Множество всех точек пространства, лежащих внутри трехгранного угла и равноудаленных от его граней, есть луч прямой пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов этого трехгранного угла. Этому лучу принадлежат центры всех сфер, вписанных в трехгранный угол (рис. 156).

• Множество середин всех отрезков, концы которых лежат на данных скрещивающихся прямых, есть плоскость, параллельная каждой из данных скрещивающихся прямых.

• Множество всех точек пространства, равноудаленных от двух равных касающихся шаров, есть плоскость, проходящая через точку касания этих шаров перпендикулярно линии их центров.

• Пусть  $A$  и  $B$  — данные точки. Множество всех точек  $M$  пространства таких, что треугольник  $ABM$  — равнобедренный, представляет собой объединение, компонентами которого являются: 1) плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная прямой  $AB$  и делящая отрезок  $AB$  пополам, за исключением точки пересечения  $AB$  с плоскостью  $\alpha$ ; 2) сферы  $S_1$  радиуса  $AB$  с центром в точке  $A$ , за исключением точек пересечения прямой  $AB$  с этой сферой; 3) сфера  $S_2$  радиуса  $BA$  с центром в точке  $B$ , за исключением точек пересечения прямой  $AB$  с этой сферой.

• Множество всех точек пространства, из каждой из которых данный отрезок  $AB$  виден под прямым углом, есть сфера с диаметром  $AB$ , за исключением точек  $A$  и  $B$ .

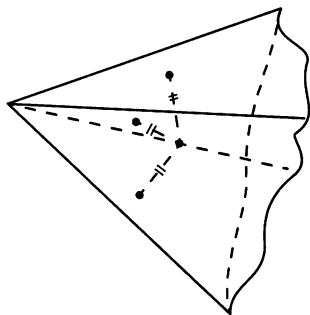


Рис. 156



## § 21. Понятие вектора.

### Линейные операции над векторами

#### 21.1. Понятие вектора

Замечательным является то обстоятельство, что понятие вектора, определения линейных операций над векторами и свойства этих операций одинаковы для векторов на плоскости и в пространстве. Поэтому мы лишь **напомним** некоторые основные факты, относящиеся к векторам на плоскости, и рассмотрим подробнее те свойства, которыми обладают векторы и операции над ними в пространстве.

*Отрезок  $AB$ , у которого указан порядок концов, называется **направленным отрезком**: точка  $A$  называется «началом», а точка  $B$  — «концом» направленного отрезка  $AB$ .*



Рис. 157

Направленный отрезок с началом в точке  $A$  и концом в точке  $B$  обозначают  $\overrightarrow{AB}$  и рисуют со стрелкой на конце (рис. 157). Длину направленного отрезка  $\overrightarrow{AB}$  обозначают  $|\overrightarrow{AB}|$ .

Направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  называются **коллинеарными** (обозначают  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ ), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых (рис. 158  $a—г$ ).

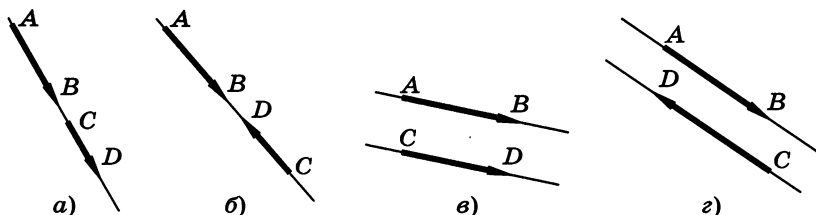


Рис. 158



Направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  называются *одинаково направленными* (сонаправленными) (обозначают  $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$ ), если одинаково направлены лучи  $AB$  и  $CD$  (рис. 158, а, в), и *противоположно направленными* (обозначают  $\overrightarrow{AB} \updownarrow \overrightarrow{CD}$ ), если лучи  $AB$  и  $CD$  противоположно направлены (рис. 158 б, г).

**Определение.** Два направленных отрезка  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  называются **равными**, если они сонаправлены и имеют равные длины, то есть  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$  и  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$  (рис. 159).

Два направленных отрезка  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  называются *противоположными*, если они имеют равные длины и противоположные направления (рис. 160). В таком случае говорят, что эти направленные отрезки противоположны друг другу.

Отношение равенства направленных отрезков обладает свойствами<sup>1</sup> **рефлексивности**, **симметричности** и **транзитивности**:

- 1)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$  (рефлексивность);
  - 2)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$  (симметричность);
  - 3)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$  (транзитивность)
- (рис. 161).

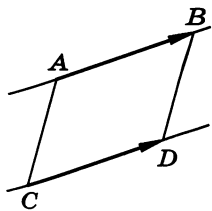


Рис. 159

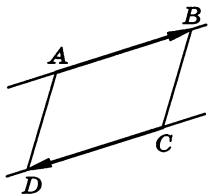


Рис. 160

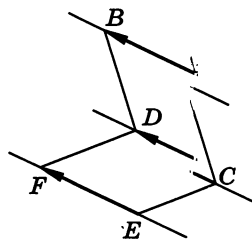


Рис. 161

<sup>1</sup> Такими же свойствами обладают отношения равенства чисел, отношения равенства фигур.

Свойства симметричности, транзитивности и рефлексивности равенства направленных отрезков позволяют разбить множество всех направленных отрезков пространства на подмножества — попарно непересекающиеся классы равных между собой направленных отрезков: каждый класс представляет собой множество всех равных друг другу направленных отрезков пространства и называется **вектором в пространстве**.

**Определение.** Ненулевым вектором в пространстве называется множество всех равных между собой направленных отрезков пространства.

Векторы обозначают обычно строчными буквами латинского алфавита со стрелкой сверху:  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ .

Таким образом, вектор  $\vec{a}$  — это множество всех равных между собой направленных отрезков пространства. Если  $\overrightarrow{AB}$  — один из отрезков этого множества, то записывают  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ; направленный отрезок вполне определяет (почему?) все множество равных ему направленных отрезков пространства, то есть определяет вектор  $\vec{a}$ . В таком случае говорят, что *направлен-*

*ный отрезок  $\overrightarrow{AB}$  изображает (задает) вектор  $\vec{a}$*  и вектор  $\vec{a}$  часто обозначают через  $\overrightarrow{AB}$ :  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  (рис. 162); про направленный отрезок  $\overrightarrow{AB}$  говорят: «Вектор  $\overrightarrow{AB}$  равен вектору  $\vec{a}$ ». При этом на чертеже рисуют направленный отрезок  $\overrightarrow{AB}$  и говорят также, что изображен вектор  $\overrightarrow{AB}$ .

*Длиной или модулем ненулевого вектора  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  называется длина отрезка  $AB$ . Длина вектора  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  обозначается:  $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}|$ .*

Вектор, длина которого равна 1 (единице), называется *единичным вектором*.

*Направлением ненулевого вектора  $\overrightarrow{AB}$  называется направление луча  $AB$ .*

Рассматривается также нулевой вектор. Длина нулевого вектора равна нулю, а его направление не определено. Нулевой вектор изображается точкой и обозначается  $\vec{0}$ . Начало нуль-вектора совпадает с его концом, т. е.  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ .

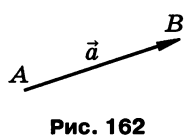


Рис. 162

В дальнейшем будем предполагать, что все рассуждения проводятся для векторов, среди которых нет нуль-вектора, если это не оговорено специально.

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются *одинаково направленными* (сонаправленными) (обозначают  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ), если одинаково направлены изображающие их направленные отрезки, и *противоположно направленными* (обозначают  $\vec{a} \downarrow \vec{b}$ ), если противоположно направлены изображающие их отрезки.

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они сонаправлены или противоположно направлены. **Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.** Коллинеарность векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначают:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ . На рисунке 163 изображены попарно коллинеарные векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ :  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ,  $\vec{a} \parallel \vec{c}$ ,  $\vec{b} \parallel \vec{c}$ .

При этом:  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ , так как сонаправлены изображающие их отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ ;  $\vec{a} \downarrow \vec{c}$ , так как изображающие их направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{EF}$  противоположно направлены.

Два вектора называются *равными*, если они совпадают, т. е. они сонаправлены и имеют *одинаковую длину*.

Равенство векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначают  $\vec{a} = \vec{b}$ .

Заметим, что два равных треугольника могут занимать различное положение в пространстве (или на плоскости), т. е. два равных треугольника в пространстве — это, вообще говоря, две различные геометрические фигуры. Совершенно иная картина наблюдается с «равными» векторами. Когда говорят, что вектор  $\overrightarrow{AB}$  равен вектору  $\overrightarrow{CD}$ , то это означает, что **различные** направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  имеют равные длины и сонаправлены: эти отрезки являются **различными представителями одного и того же вектора  $\vec{a}$** . Иначе говоря, вектор  $\vec{a}$ , как множество всех равных между собой направленных отрезков пространства, равен только сам себе, а задан (изображен) может быть различными, но равными по длине и одинаково направленными, отрезками.

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются *противоположными*, если они имеют равные длины и противоположные направления. Век-

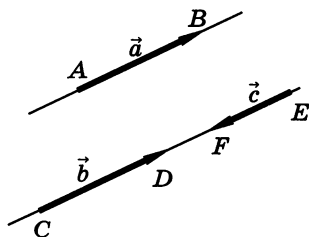


Рис. 163

тор, противоположный вектору  $\vec{a}$ , обозначают  $-\vec{a}$ . Поэтому, если  $\vec{b}$  — вектор, противоположный вектору  $\vec{a}$ , то пишут  $\vec{b} = -\vec{a}$  или  $\vec{a} = -\vec{b}$ .

Заметим, что векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BA}$  — противоположны и  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ .

Таким образом, из определений равных и противоположных векторов следует:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \text{ и } |\vec{a}| = |\vec{b}|,$$

$$\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \text{ и } |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  изображены направленными отрезками соответственно  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ , то

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{CD} \text{ и } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \text{ (рис. 164),}$$

$$\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{CD} \text{ и } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \text{ (рис. 165).}$$

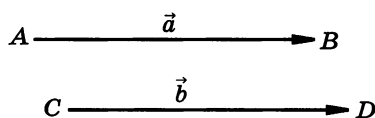


Рис. 164

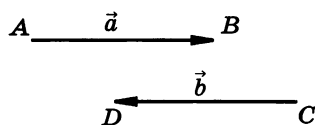


Рис. 165

Из сказанного следует, что равные векторы изображаются равными направленными отрезками, в частности, одним и тем же направленным отрезком.

На данной прямой от данной ее точки в заданном направлении можно отложить лишь один отрезок, равный данному,

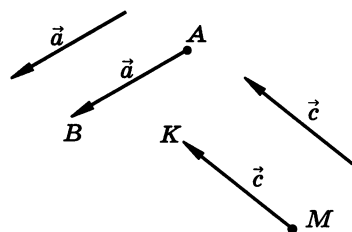


Рис. 166

поэтому от любой точки  $A$  пространства можно отложить лишь один направленный отрезок  $\overrightarrow{AB}$ , изображающий данный вектор  $\vec{a}$ , то есть  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ . Это означает, что от каждой точки пространства можно отложить вектор, равный данному, и притом только один (рис. 166).

Таким образом, чтобы изобразить вектор с началом в данной точке, равный данному, достаточно изобразить направленный отрезок, задающий данный вектор с началом в этой точке.

**Замечание.** Вектор, как множество всех равных между собой направленных отрезков, часто называют *свободным вектором*. Свободный вектор характеризуется только длиной и направлением: от каждой точки пространства можно отложить вектор, равный данному. Именно свободные векторы применяются в геометрии при доказательстве теорем и решении задач. В физике примером свободного вектора является вектор скорости прямолинейно движущегося твердого тела.

Мы будем изучать только свободные векторы и называть их просто векторами.

## 21.2. Линейные операции над векторами

**а) Сложение векторов.** В стереометрии сумму двух векторов можно найти, как и в планиметрии, *по правилу треугольника*: если даны два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , то от произвольной точки  $A$  пространства откладывают вектор  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ , затем от точки  $B$  откладывают вектор  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$  (рис. 167). Вектор  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ , полученный таким образом, называется *суммой* векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

При этом записывают:  $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$  или  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ . Результат сложения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не зависит от выбора точки  $A$ , то есть если взять другую точку, например  $A_1$ , и откладывать векторы  $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{b}$ , то в результате получим вектор  $\overrightarrow{A_1C_1} = \vec{c}$  (рис. 167).

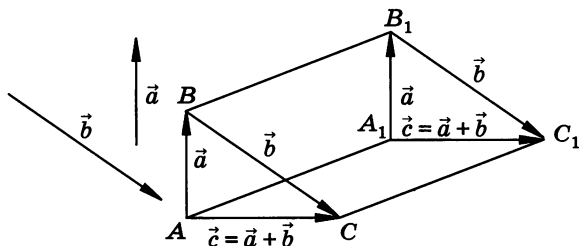


Рис. 167

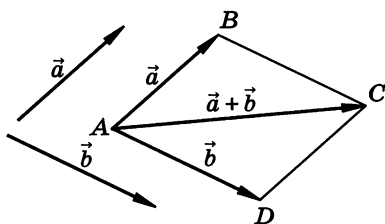


Рис. 168

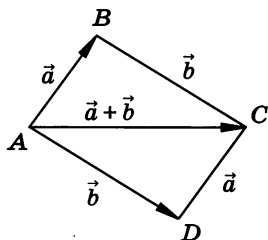


Рис. 169

Сумму двух неколлинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  можно получить также по *правилу параллелограмма*: от одной и той же произвольной точки  $A$  пространства нужно отложить векторы  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ , затем на отрезках  $AB$  и  $AD$  построить параллелограмм, как на сторонах, выходящих из одной вершины (рис. 168). Тогда вектор — диагональ  $\overrightarrow{AC}$  есть искомая сумма векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .

Правило параллелограмма при сложении векторов широко применяется в физике для нахождения равнодействующей векторных величин — «векторных сил», приложенных в одной точке тела.

Свойства операции сложения векторов в пространстве те же, что и на плоскости, и доказываются они так же, как на плоскости. Перечислим эти свойства, сопроводив их соответствующими рисунками.

• *Коммутативность сложения (переместительное свойство)*:

для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имеет место равенство  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (рис. 169).

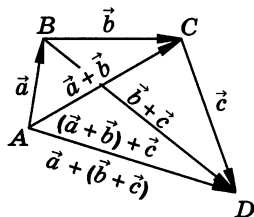


Рис. 170

• *Ассоциативность сложения (сочетательное свойство)*:

для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  справедливо:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (рис. 170).

• *Свойство нуль-вектора*:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  для любого вектора  $\vec{a}$ .

• *Существование и единственность противоположного вектора*:

для любого вектора  $\vec{a}$  пространства существует противоположный вектор  $-\vec{a}$ , и притом единственный, такой, что  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$  (рис. 171).

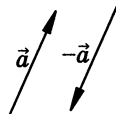


Рис. 171

При сложении трех и более векторов применяется *правило многоугольника* (или *правило ломаной линии*). Пусть надо найти сумму  $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$  векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ . Выбрав произвольную точку  $A$ , откладываяем последовательно векторы  $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}_1, \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}_2, \overrightarrow{A_2A_3} = \vec{a}_3, \overrightarrow{A_3A_4} = \vec{a}_4$  (рис. 172). Затем, тоже последовательно, применяем правило треугольника сначала для векторов  $\overrightarrow{AA_1}$  и  $\overrightarrow{A_1A_2}$ , затем — для векторов  $\overrightarrow{AA_2}$  и  $\overrightarrow{A_2A_3}$  и, наконец, для векторов  $\overrightarrow{AA_3}$  и  $\overrightarrow{A_3A_4}$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{AA_4}$  — искомая сумма:

$$\overrightarrow{AA_4} = ((\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}) + \overrightarrow{A_2A_3}) + \overrightarrow{A_3A_4} = ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3) + \vec{a}_4 = \vec{c}.$$

Если три вектора  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$  отложены от одной точки, но не лежат в одной плоскости, то их сумма находится по *правилу параллелепипеда*: построим параллелепипед на отрезках  $OA, OB$  и  $OC$ , как на ребрах, выходящих из одной вершины (рис. 173). Тогда вектор  $\overrightarrow{OD_1}$  — искомая сумма. В самом деле, учитывая, что  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DD_1}$ , и применяя правило ломаной, получаем  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{OD_1}$ .

Если векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  не параллельны одной плоскости, то от произвольной точки  $O$  пространства откладываем векторы

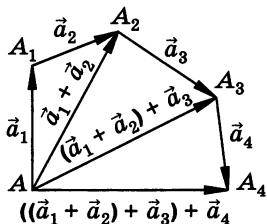


Рис. 172

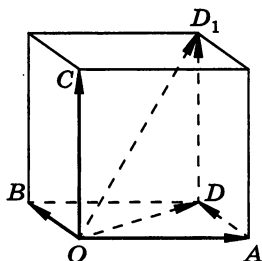


Рис. 173

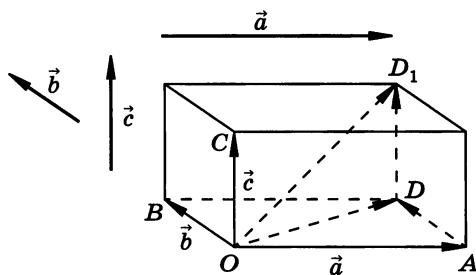


Рис. 174

$\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  и по правилу параллелепипеда находим сумму векторов  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{OD}_1$  (рис. 174).

На наш взгляд, «удобнее» складывать векторы по правилу ломаной.

**б) Вычитание векторов.** Вычитание векторов — это операция, обратная сложению векторов. *Разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется такой вектор  $\vec{c}$ , который в сумме с вектором  $\vec{b}$  дает вектор  $\vec{a}$ , т. е.  $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ .*

Если  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  (рис. 175), то  $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ , так как по правилу треугольника  $\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$ . Отсюда  $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ .

Вычитание векторов можно свести к сложению векторов. Действительно, если  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ , то  $\vec{BA} = \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{OA} - \vec{OB}$ . По правилу треугольника  $\vec{BA} = \vec{BO} + \vec{OA} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{OA} + (-\vec{OB}) = \vec{a} + (-\vec{b})$ .

Получим:  $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{BA} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .

Значит,

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (*)$$

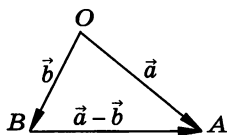


Рис. 175

Из соотношения (\*) следует: из одной части векторного равенства в другую его часть можно переносить вектор, изменяя его знак на противоположный, т. е. заменяя этот вектор на противоположный ему вектор. Из равенства  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  следует, что  $\vec{b} = \vec{c} + (-\vec{a}) = \vec{c} - \vec{a}$ .



Заметим, что  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

**в) Умножение вектора на число.** Пусть даны вектор  $\vec{a}$  и действительное число  $\lambda$ .

**Определение.** Произведением вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  называется такой вектор  $\vec{b}$  (обозначается  $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ ), который удовлетворяет условиям:

- если  $\lambda = 0$  или  $\vec{a} = \vec{0}$ , то по определению вектор  $\lambda\vec{a}$  будем считать нулевым, т. е.  $0 \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ ;
- длина вектора  $\vec{b}$  равна произведению длины вектора  $\vec{a}$  и модуля числа  $\lambda$ , т. е.  $|\vec{b}| = |\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ;
- вектор  $\vec{b}$  сонаправлен с вектором  $\vec{a}$ , если  $\lambda > 0$ , и противоположен вектору  $\vec{a}$ , если  $\lambda < 0$  (рис. 176), то есть

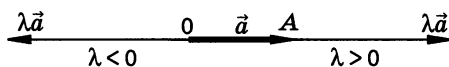


Рис. 176

$\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ , если  $\lambda > 0$ ;  $\lambda\vec{a} \downarrow\downarrow \vec{a}$ , если  $\lambda < 0$ .

Операция умножения вектора на число обладает одними и теми же свойствами как в планиметрии, так и в стереометрии. Именно:

1.  $x(y\vec{a}) = (xy)\vec{a}$  для любых чисел  $x, y$  и любого вектора  $\vec{a}$  (ассоциативность) (рис. 177, а);
2.  $(x + y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}$  для любых чисел  $x, y$  и любого вектора  $\vec{a}$  (дистрибутивность умножения по отношению к сложению чисел);

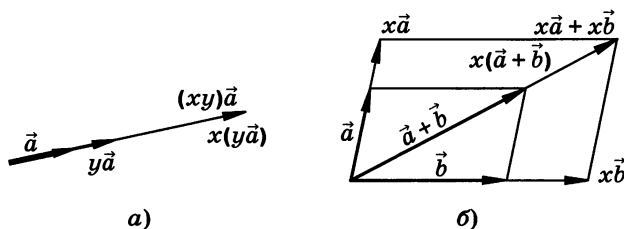


Рис. 177

3.  $x(\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}$  для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и любого числа  $x$  (*дистрибутивность умножения по отношению к сложению векторов*) (рис. 177, б).

Свойства 2 и 3 называются также *распределительными законами* операции *умножения вектора на число*.

Как и на плоскости, в пространстве имеет место *признак коллинеарности двух ненулевых векторов*.

**Теорема 33.** Ненулевые векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда найдется такое число  $x$ , что выполняется равенство  $\vec{b} = x\vec{a}$ . При этом число  $x$  единственно.

Доказательство этого признака опирается на определение умножения вектора на число и было проведено в планиметрии.

**Геометрический смысл коллинеарности двух ненулевых векторов**  $\vec{AB}$  и  $\vec{AM}$ , отложенных от одной точки, состоит в том, что они лежат на одной прямой и один из них получается из другого «сжатием» или «растяжением». Из этого следует: точка  $M$  лежит на прямой  $AB$  тогда и только тогда, когда выполняется условие  $\vec{AM} = x\vec{AB}$  (рис. 178).

В частности, если  $3\vec{AB} + 2\vec{BC} = \vec{0}$ , то это означает, что точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой и точка  $B$  делит отрезок  $AC$  в отношении  $AB : BC = 2 : 3$ . Подумайте, как расположены точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , если:



Рис. 178

- $m\vec{AB} + n\vec{BC} = \vec{0}$  ( $m > 0$ ,  $n > 0$ );
- $\vec{AB} + \lambda\vec{BC} = \vec{0}$ ;
- $k_1\vec{AB} + k_2\vec{BC} = \vec{0}$ .

**Замечание.** Если векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  умножить соответственно на числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , а затем полученные векторы  $\lambda_1\vec{a}_1, \lambda_2\vec{a}_2, \dots, \lambda_k\vec{a}_k$  сложить, то получим некоторый вектор  $\vec{c} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_k\vec{a}_k$ , который называется *линейной комбинацией векторов*  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ , числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  называются *коэффициентами линейной комбинации*.

Например, вектор  $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$  является линейной комбинацией векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  с коэффициентами 2 и 3, а вектор  $\vec{p} = -2\vec{a} + 0,5\vec{b} - \vec{c}$  — линейной комбинацией векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  с коэффициентами  $(-2)$ ,  $(0,5)$  и  $(-1)$ .

■ ЗАДАЧА 6.029. Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . На диагонали  $AC$  грани  $ABCD$  взята такая точка  $M$ , что  $AM : MC = 1 : 4$ , а на диагонали  $AC_1$  параллелепипеда — такая точка  $N$ , что  $AN : NC_1 = 1 : 5$ . Докажите, что точки  $M$ ,  $N$  и  $A_1$  лежат на одной прямой. Найдите отношение, в котором точка  $N$  делит отрезок  $MA_1$ .

Решение. Для доказательства принадлежности трех точек  $M$ ,  $N$  и  $A_1$  одной прямой достаточно показать, что векторы  $\overrightarrow{MA_1}$  и  $\overrightarrow{MN}$  коллинеарны, т. е.  $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{MA_1}$  (рис. 179).

Пользуясь условием задачи, находим:  $AM : MC = 1 : 4 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AC}$ ;  $AN : NC_1 = 1 : 5 \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{6} (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC})$ .

Тогда  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{6} (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{5} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{30} (5\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC})$ .

Далее,  $\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{5} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{5} (5\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC})$ . Таким

образом, получили:  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{30} (5\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC})$ ,  $\overrightarrow{MA_1} = \frac{1}{5} (5\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC})$ ,

откуда следует  $\overrightarrow{MA_1} = 6\overrightarrow{MN}$ . Это означает, что точки  $M$ ,  $N$  и  $A_1$  принадлежат одной прямой и  $MN : NA_1 = 1 : 5$ .

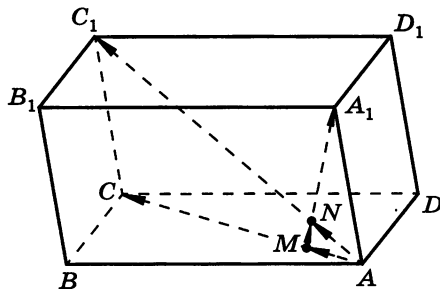


Рис. 179

## § 22. Разложение вектора по базису

## 22.1. Компланарные векторы

**Определение.** Ненулевые векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  называются компланарными, если изображающие их направленные отрезки лежат в одной плоскости или параллельны одной и той же плоскости (рис. 180, а).

Понятие компланарности определяется для произвольной совокупности векторов. Так один (любой) вектор компланарен некоторой плоскости. Два любых вектора также компланарны некоторой плоскости. Но три любых вектора считаются компланарными некоторой плоскости, если направленные отрезки, изображающие эти векторы, будучи отложенными от одной точки, лежат в одной плоскости. Аналогично определяется компланарность для четырех, пяти и т. д. произвольной совокупности векторов.

На рисунке 180, б векторы  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{D_1B_1}$  компланарны, так как отрезок  $B_1D_1$  параллелен плоскости  $ABD$ , но тройка векторов  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  и  $\vec{AA_1}$  не является компланарной, так как отрезок  $AA_1$  не параллелен плоскости  $ABD$ , в которой расположены отрезки  $AB$  и  $AD$ . Некомпланарны и тройки векторов  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AA_1}$  и  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{BB_1}$ . Почему?

Укажите тройки компланарных и некомпланарных векторов, изображенных на рисунке 180, б, в.

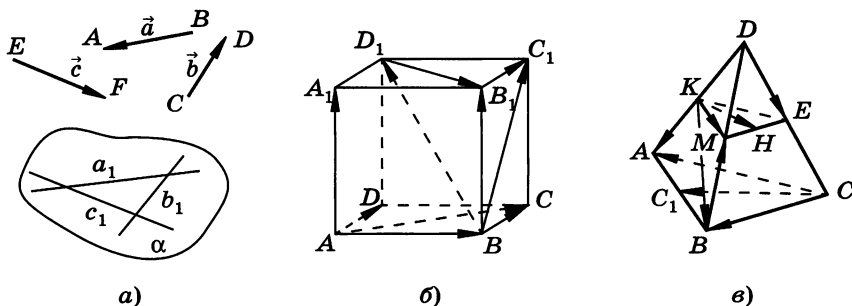


Рис. 180

**Замечание.** Если среди трех векторов хотя бы два коллинеарны, то эти три вектора компланарны. В самом деле, пусть среди трех векторов  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{MN}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$  коллинеарны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , т. е.  $\vec{a} = x\vec{b}$ . Проведем плоскость  $\alpha$ , параллельную непараллельным прямым  $AB$  и  $CD$  (рис. 181). Тогда  $MN \parallel \alpha$  (почему?). От произвольной точки  $O$  плоскости  $\alpha$

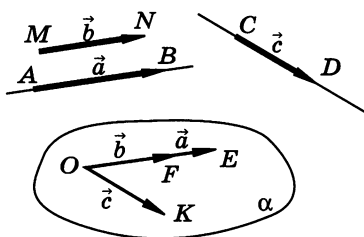


Рис. 181

отложим направленные отрезки  $\overrightarrow{OE} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OF} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OK} = \vec{c}$ .

Эти отрезки лежат в плоскости  $\alpha$  (почему?). Следовательно, векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны. Три вектора, среди которых имеется нулевой вектор, считаются также компланарными.

## 22.2. Разложение вектора на плоскости

☐<sup>1</sup> Пусть на плоскости  $\alpha$  даны неколлинеарные векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;  $\vec{p}$  — произвольный вектор этой плоскости.

Если вектор  $\vec{p}$  коллинеарен с одним из векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , то или  $\vec{p} = x \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b}$  ( $\vec{p} \parallel \vec{a}$ ), или  $\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$  ( $\vec{p} \parallel \vec{b}$ ). Заметим, что  $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b}$ .

Пусть теперь вектор  $\vec{p} = \overrightarrow{OC}$  не коллинеарен ни с одним из векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (рис. 182). Через точку  $C$  проведем прямые  $a_1 \parallel a$  и  $b_1 \parallel b$ , при этом получим точки  $A_1 = a$  и  $B_1 = b \cap a_1$ . Тогда по правилу параллелограмма пишем:  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} = x\vec{a} + y\vec{b}$  или

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}. \quad (1)$$

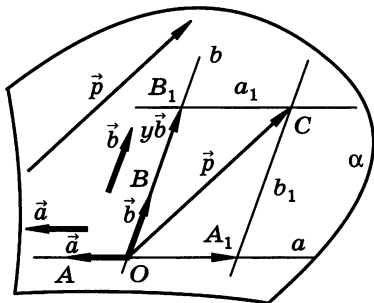


Рис. 182

<sup>1</sup> Знаки ☐ ... ☐ означают, что обсуждается уже изученный в курсе планиметрии вопрос.

Равенство  $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$  называется **разложением вектора  $\vec{p}$  по двум неколлинеарным векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$** ; числа  $x$  и  $y$  называются **коэффициентами разложения**.

Покажем, что числа  $x$  и  $y$  в разложении (1) однозначно определены. Действительно, предположим, что существуют другие числа  $x_1$  и  $y_1$  такие, что, по крайней мере, или  $x_1 \neq x$ , или  $y_1 \neq y$  и при этом верно равенство

$$\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем  $x\vec{a} + y\vec{b} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$  или  $(x_1 - x)\vec{a} + (y_1 - y)\vec{b} = \vec{0}$ , откуда следует, что либо векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны (что противоречит условию), либо  $y_1 = y$  и  $x_1 = x$ . Таким образом, нами доказана

**Теорема 34.** Если на плоскости дана упорядоченная пара  $(\vec{a}; \vec{b})$  неколлинеарных векторов, то для любого вектора  $\vec{p}$  этой плоскости существует единственная упорядоченная пара чисел  $(x; y)$  такая, что выполняется векторное равенство

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Из равенства (1) следует, что любой вектор  $\vec{p}$ , компланарный с неколлинеарными векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , является линейной комбинацией векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Поэтому пару векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называют **базисом** на плоскости, а также базисом на множестве всех векторов пространства, компланарных с векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

**Определение.** Базисом на плоскости называется любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются базисными векторами.

Базис из векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначают  $(\vec{a}; \vec{b})$ . При этом равенство  $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$  называется **разложением вектора  $\vec{p}$  по базису  $(\vec{a}; \vec{b})$**  (или разложением вектора  $\vec{p}$  по базисным векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ), а числа  $x$  и  $y$  — **координатами вектора  $\vec{p}$  в базисе  $(\vec{a}; \vec{b})$** .  $\square$

Если вектор  $\vec{p}$  компланарен с неколлинеарными векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , то выполняется равенство  $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ .

Справедливо и обратное предложение: если для векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{p}$  выполняется равенство  $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ , то векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{p}$  компланарны.

(Докажите это предложение самостоятельно.)

Таким образом: три вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  (где  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  неколлинеарные векторы) пространства компланарны, если существуют числа  $x$  и  $y$  такие, что выполняется равенство

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Признак компланарности трех векторов можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 35** (признак компланарности трех векторов). Три вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  пространства компланарны тогда и только тогда, когда существуют такие числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , из которых хотя бы одно отлично от нуля, что выполняется равенство

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}.$$

Докажите это утверждение самостоятельно.

□ Напомним одно важное векторное равенство на плоскости. Пусть точка  $O$  не лежит на прямой  $AB$ . Тогда точка  $M$  лежит на прямой  $AB$  тогда и только тогда, когда  $\vec{OM} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB}$  при  $x + y = 1$  (рис. 183). □

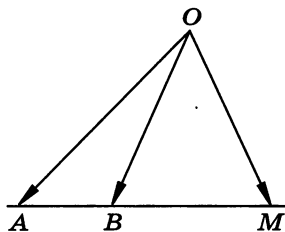


Рис. 183

### 22.3. Разложение вектора по трем некопланарным векторам

**Определение.** Три вектора называются некопланарными, если изображающие их направленные отрезки не лежат в одной плоскости и не параллельны одной плоскости.

**Теорема 36.** Если дана упорядоченная тройка  $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$  некопланарных векторов, то для любого вектора  $\vec{p}$  пространства существует единственная упорядоченная тройка чисел  $(x; y; z)$ , удовлетворяющая равенству

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

**Доказательство.** Пусть даны три некопланарных вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и произвольный вектор  $\vec{p}$ .

Если вектор  $\vec{p}$  компланарен с любыми двумя из данных трех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , то теорема верна (например, если  $\vec{p}$

компланарен с векторами  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , то  $\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$  (рис. 184).

Пусть теперь никакие три из векторов  $\vec{p}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  некопланарны.

От произвольной точки  $O$  отложим векторы  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  и  $\vec{OD} = \vec{p}$ . Так как направленные отрезки  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  и  $\vec{OC}$  не компланарны, то плоскости  $AOB$ ,  $AOC$  и  $BOC$  различны (рис. 185).

Проведем через точку  $D$  прямую, параллельную  $OC$  ( $D_1$  — точка пересечения этой прямой с плоскостью  $AOB$ ). Тогда по правилу треугольника

$$\vec{p} = \vec{OD} = \vec{OD_1} + \vec{D_1D}. \quad (1)$$

Векторы  $\vec{OD_1}$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  компланарны. Следовательно,  $\vec{OD_1} = x\vec{a} + y\vec{b}$ . Так как  $\vec{D_1D} = \vec{OC_1}$ , а вектор  $\vec{OC_1}$  коллинеарен вектору  $\vec{OC} = \vec{c}$ , то есть  $\vec{OC_1} = z\vec{c}$ , то

$$\vec{p} = \vec{OD} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Таким образом, для произвольного вектора  $\vec{p}$  пространства выполняется равенство

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, \quad (2)$$

где  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  — данные некопланарные векторы. Равенство (2) называется **разложением вектора  $\vec{p}$  по трем некопла-**

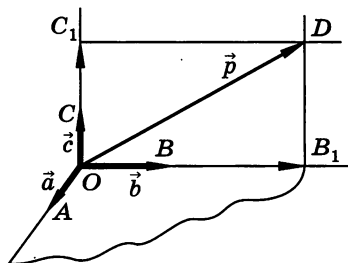


Рис. 184

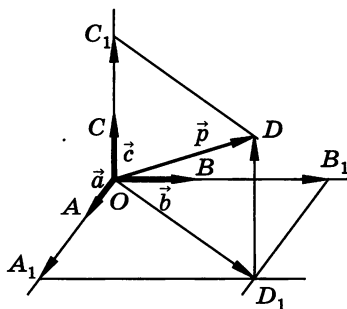


Рис. 185



**нарным векторам  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$** ; числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  называются **коэффициентами разложения**.

Докажем, что коэффициенты  $x$ ,  $y$  и  $z$  в разложении (2) однозначно определены. Предположим, что существует другая тройка чисел  $(x_1; y_1; z_1)$ , для которой верно равенство

$$\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}. \quad (3)$$

Вычитая (3) из (2), получаем

$$(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c} = \vec{0}.$$

Из этого равенства на основании теоремы 35 следует, что либо векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны (что противоречит условию), либо  $z = z_1$ ,  $x = x_1$  и  $y = y_1$ . Следовательно, тройки чисел  $(x; y; z)$  и  $(x_1; y_1; z_1)$  равны. Теорема доказана. ▼

Из равенства  $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$  следует, что любой вектор  $\vec{p}$  пространства является линейной комбинацией тройки некопланарных векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ . Поэтому говорят, что эта тройка образует базис векторов в пространстве.

**Определение.** Базисом векторов в пространстве называется любая упорядоченная тройка некопланарных векторов. Векторы, образующие базис, называются базисными векторами.

Базис из векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  обозначают  $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ . Равенство  $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$  называется **разложением вектора  $\vec{p}$  по базису  $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$**  или **разложением вектора  $\vec{p}$  по базисным векторам  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$** ; числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  называются **координатами вектора  $\vec{p}$  в базисе  $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$** .

Из теоремы 36 следует, что любой вектор пространства можно единственным образом разложить в данном базисе.

■ ЗАДАЧА. В тетраэдре  $PABC$  точка  $M$  — центроид (точка пересечения медиан, центр тяжести) треугольника  $PBC$ , точка  $H$  — середина ребра  $PC$ , точка  $E$  взята на ребре  $AP$  так, что  $AE : EP = 2 : 1$ . Разложите вектор  $\overrightarrow{EM}$  по базису  $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ , если  $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{BP}$  (рис. 186).

Решение. По правилу ломаной  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ .

Находим:

$$\begin{aligned} AE : EP = 2 : 1 \Rightarrow \overrightarrow{EA} &= \frac{2}{3} \overrightarrow{PA} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BP}) = \\ &= \frac{2}{3} (\vec{a} - \vec{c}); \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} = -\vec{a}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} M - \text{центроид треугольника } PBC \Rightarrow \overrightarrow{BM} &= \\ &= \frac{2}{3} \overrightarrow{BH} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BP}) = \frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{c}). \end{aligned}$$

Рис. 186

Тогда

$$\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3} (\vec{a} - \vec{c}) - \vec{a} + \frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{c}) = -\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{1}{3} \vec{c}.$$

Ответ:  $-\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{1}{3} \vec{c}$ .

 Попробуйте доказать самостоятельно важный стереометрический факт. Пусть даны треугольник  $ABC$  и любая точка  $O$ , не лежащая в плоскости этого треугольника. В таком случае: точка  $M$  тогда и только тогда будет лежать в плоскости  $ABC$ , когда выполняется векторное равенство  $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$  при условии, что  $x + y + z = 1$  (рис. 187). 

■ ЗАДАЧА 6.044.  $ABCA_1B_1C_1D_1$  — куб. Докажите, что центр тяжести  $M$  треугольника  $ACD_1$  принадлежит диагонали  $B_1D$  и делит ее в отношении 1 : 2, считая от вершины  $D$ .

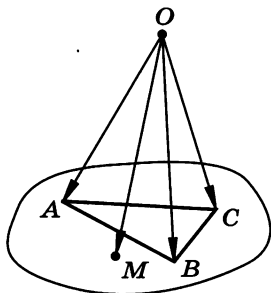


Рис. 187

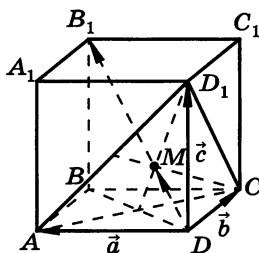


Рис. 188

Решение. Для решения задачи достаточно убедиться, что векторы  $\overrightarrow{DM}$  и  $\overrightarrow{DB_1}$  (рис. 188) коллинеарны (почему?).

Введем базис  $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{DD_1}$  и найдем разложение векторов  $\overrightarrow{DB_1}$  и  $\overrightarrow{DM}$  по этому базису.

По правилу параллелепипеда имеем

$$\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}. \quad (1)$$

Так как точка  $M$  — центроид треугольника  $ACD_1$ , то

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}). \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что  $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB_1}$ , поэтому векторы  $\overrightarrow{DM}$  и  $\overrightarrow{DB_1}$  коллинеарны и сонаправлены. Это означает, что точка  $M$  принадлежит диагонали  $DB_1$  и  $DM : DB_1 = 1 : 3$ , откуда  $DM : MB_1 = 1 : 2$ , что и требовалось доказать.

## § 23. Скалярное произведение векторов

### 23.1. Определение скалярного произведения векторов

Напомним, что *углом между двумя ненулевыми векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$*  называется *угол между равными им векторами  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ , отложенными от одной точки* (рис. 189). Если векторы сонаправлены, то угол между ними считается равным нулю; если векторы противоположно направлены, то угол между ними равен  $180^\circ$ ; если угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $90^\circ$ , то векторы называют *перпендикулярными* и записывают:  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

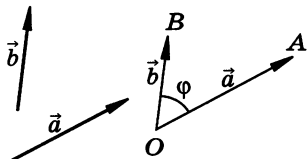


Рис. 189

**Определение.** Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение модулей этих векторов и косинуса угла между ними. Если из двух данных векторов хотя бы один нулевой, то скалярное произведение двух таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначают  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  или  $\vec{a}\vec{b}$ . Таким образом, по определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad \text{где } \varphi = \widehat{(\vec{a}; \vec{b})}, \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ. \quad (1)$$

Если  $\vec{a} = \vec{b}$ , то скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  принимает вид  $\vec{a} \cdot \vec{a}$ , называется **скалярным квадратом вектора**  $\vec{a}$  и обозначается  $\vec{a}^2$ . Так как  $\cos \widehat{(\vec{a}; \vec{a})} = \cos 0^\circ = 1$ , то из (1) получаем  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ , то есть **скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля**. Отсюда  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ . Если вектор  $\vec{a}$  единичный, то  $\vec{a}^2 = 1$ .

### 23.2. Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  пространства выполняются следующие свойства:

1.  $\vec{a}^2 \geq 0$ , причем  $\vec{a}^2 > 0$ , если  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ;
2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (коммутативный закон);
3.  $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$  (ассоциативный закон);
4.  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$  (дистрибутивный закон умножения по отношению к сложению векторов).

Справедливость свойств 1—3 скалярного произведения векторов в пространстве доказывается (практически) точно так же, как и в планиметрии.

Свойство 4 доказано в планиметрии для случая, когда векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны (лежат в одной плоскости).

Часто используются вытекающие из этих свойств равенства:

$$\begin{aligned} \bullet (\vec{a} + \vec{b})^2 &= \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2; \\ \bullet (\vec{a} - \vec{b})^2 &= \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь докажем свойство 4 для трех некомпланарных векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .

Построим параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  такой, что  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$  и  $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$  (рис. 190).

Пусть  $M$  и  $K$  — середины ребер соответственно  $DD_1$  и  $BB_1$ . Тогда в параллелограмме  $AMC_1K$  сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон, то есть  $AC_1^2 + KM^2 = 2AK^2 + 2AM^2$ . В векторной форме это равенство перепишем так:

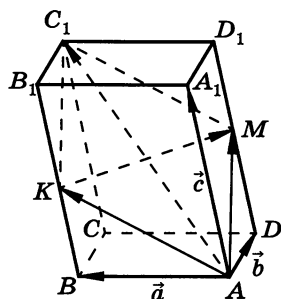
$$\overrightarrow{AC_1}^2 + \overrightarrow{KM}^2 = 2\overrightarrow{AK}^2 + 2\overrightarrow{AM}^2.$$


Рис. 190

Разложив векторы  $\overrightarrow{AC_1}$ ,  $\overrightarrow{KM}$ ,  $\overrightarrow{AK}$  и  $\overrightarrow{AM}$  по векторам  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , запишем:

$$((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c})^2 + (\vec{b} - \vec{a})^2 = 2(\vec{a} + 0,5\vec{c})^2 + 2(\vec{b} + 0,5\vec{c})^2.$$

Используя равенства (2) и затем раскрывая скобки, получим:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b})^2 + 2(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = \\ = 2(\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} + 0,25\vec{c}^2) + 2(\vec{b}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} + 0,25\vec{c}^2), \end{aligned}$$

откуда:  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ . Что и требовалось доказать.

### 23.3. Признак перпендикулярности двух векторов

Если ненулевые векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны, то  $\widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = 90^\circ$ . Значит,  $\cos \widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = \cos 90^\circ = 0$ . Следовательно,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$ . Таким образом,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = 90^\circ \Rightarrow \cos \widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Обратно, для ненулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  справедливо:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = 0 \Rightarrow \cos \widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Мы доказали: два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Для решения многих задач с применением векторов полезны следующие (кажущиеся, на первый взгляд, формальными) формулы:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a})^2}; \quad \cos \widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Приводим обещанные в пунктах 9.1 и 9.2 векторные доказательства признака перпендикулярности прямой и плоскости, а также теорем о трех перпендикулярах. Впоследствии эти доказательства вы можете использовать наравне с предыдущими доказательствами.

**Теорема 13** (признак перпендикулярности прямой и плоскости). Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Дано:  $b \subset \alpha, c \subset \alpha, b \cap c = O; a \perp b, a \perp c$ .

Доказать:  $a \perp \alpha$ .

Доказательство. Для доказательства теоремы возьмем в плоскости  $\alpha$  произвольную прямую  $d$ , отличную от прямых  $b$  и  $c$ , и докажем, что  $a \perp d$ . Для этого обозначим  $A = a \cap \alpha$  и выберем точки  $A_1 \in a, B_1 \in b, C_1 \in c, D \in d, E \in d$  (рис. 191).

Так как прямые  $b$  и  $c$  пересекаются, то направляющие векторы  $\vec{p} = \overrightarrow{OB_1}$  и  $\vec{q} = \overrightarrow{OC_1}$  этих прямых неколлинеарны. Поэтому пару векторов  $(\vec{p}; \vec{q})$  можно принять в качестве базиса для всех векторов плоскости  $\alpha$ .

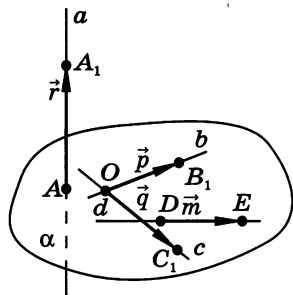


Рис. 191

Тогда вектор  $\vec{m} = \overrightarrow{DE}$  можно разложить по базисным векторам  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$ :

$$\vec{m} = x\vec{p} + y\vec{q}.$$

Найдем скалярное произведение направляющих векторов  $\overrightarrow{AA_1} = \vec{r}$  и  $\vec{m}$  прямых  $a$  и  $d$ .

Из условия теоремы получаем:

$$a \perp b \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{p} \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{p} = 0;$$

$$a \perp c \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{q} \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{q} = 0.$$

Тогда  $\vec{r} \cdot \vec{m} = \vec{r} \cdot (x\vec{p} + y\vec{q}) = x(\vec{r} \cdot \vec{p}) + y(\vec{r} \cdot \vec{q}) = x \cdot 0 + y \cdot 0 = 0$ .

Таким образом,

$$\vec{r} \cdot \vec{m} = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{m} \Rightarrow a \perp d.$$

На основании определения прямой, перпендикулярной плоскости, приходим к выводу, что  $a \perp \alpha$ . Теорема доказана. ▼

**Теорема 16 (теорема о трех перпендикулярах).** Если на плоскости проведена прямая перпендикулярно проекции наклонной, то эта прямая перпендикулярна и самой наклонной.

**Доказательство.** Пусть отрезки  $AB$  и  $AC$  — соответственно перпендикуляр и наклонная к плоскости  $\alpha$  (рис. 192),  $m$  — прямая, проведенная на плоскости  $\alpha$  перпендикулярно проекции  $BC$  наклонной  $AC$ . Докажем, что  $m \perp AC$ .

Пусть  $\vec{p}$  — направляющий вектор прямой  $m$ . Тогда для доказательства перпендикулярности прямых  $m$  и  $AC$  достаточно убедиться, что  $\vec{p} \perp \vec{CA}$ , то есть что  $\vec{p} \cdot \vec{CA} = 0$ . Докажем это.

Из условия теоремы и признака перпендикулярности двух ненулевых векторов получаем:

$$\begin{aligned} AB \perp \alpha, m \subset \alpha &\Rightarrow AB \perp m \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{p} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{BA} = 0; \end{aligned}$$

$$CB \perp m \Rightarrow \vec{CB} \perp \vec{p} \Rightarrow \vec{CB} \cdot \vec{p} = 0.$$

Так как  $\vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$ , то  $\vec{p} \cdot \vec{CA} = \vec{p} \cdot (\vec{CB} + \vec{BA}) = \vec{p} \cdot \vec{CB} + \vec{p} \cdot \vec{BA} = 0 + 0 = 0$ , откуда  $\vec{p} \perp \vec{CA}$ , то есть  $m \perp AC$ . Теорема доказана. ▼ Справедлива обратная теорема.

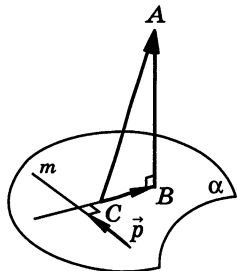


Рис. 192

**Теорема 17.** Если на плоскости проведена прямая перпендикулярно наклонной, то эта прямая перпендикулярна проекции наклонной.

**Доказательство.** Используем рисунок 193. Прямая  $m$  в плоскости  $\alpha$  проведена перпендикулярно наклонной  $AC$ . Нужно доказать, что  $m \perp BC$ , где  $BC$  — проекция  $AC$  на плоскость  $\alpha$ .

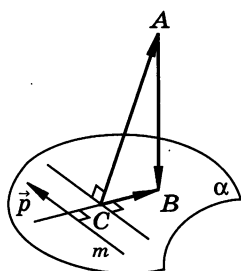


Рис. 193

Из условия теоремы получаем:

$$AC \perp m \Rightarrow \overrightarrow{CA} \perp \vec{p} \Rightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \vec{p} = 0,$$

$$AB \perp \alpha, m \subset \alpha \Rightarrow AB \perp m \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{p} \Rightarrow \\ \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{p} = 0.$$

Так как  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ , то  $\vec{p} \cdot \overrightarrow{CB} =$   
 $= \vec{p} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{p} \cdot \overrightarrow{CA} + \vec{p} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ , от-  
 куда  $\vec{p} \perp \overrightarrow{CB}$ . Это означает, что  $m \perp BC$ .

Теорема доказана. ▼

■ ЗАДАЧА 6.083.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб с ребром 2. Точка  $M$  — центр основания  $A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точки  $E$  и  $H$  взяты соответственно на отрезках  $BB_1$  и  $AC$  так, что  $BE : BB_1 = 1 : 2$ ,  $AH : AC = 1 : 4$ . Найдите: 1) длину отрезка: а)  $AM$ ; б)  $EH$ ; в)  $MH$ ; 2) угол между векторами: а)  $\overrightarrow{BC_1}$  и  $\overrightarrow{AC}$ ; б)  $\overrightarrow{A_1 D}$  и  $\overrightarrow{BD_1}$ ; в)  $\overrightarrow{HM}$  и  $\overrightarrow{CB_1}$  (рис. 194).

Решение. Введем базис  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$ . Так как грани куба — равные квадраты со стороной 2, то

$$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим некоторые случаи.

1. б) Длина отрезка  $EH$  равна длине вектора  $\overrightarrow{EH}$ . Разложим вектор  $\overrightarrow{EH}$  по базису  $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ . По правилу ломаной  $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2} \vec{c} - \vec{a} + \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{3}{4} \vec{a} +$

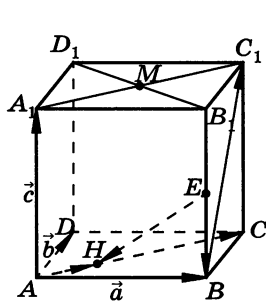


Рис. 194

$$+ \frac{1}{4} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c}. \text{ Тогда } |\overrightarrow{EH}|^2 = \overrightarrow{EH}^2 = \left( -\frac{3}{4} \vec{a} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c} \right)^2 = \frac{9}{16} \vec{a}^2 + \frac{1}{16} \vec{b}^2 + \frac{1}{4} \vec{c}^2 - \frac{3}{8} \vec{a} \cdot \vec{b} + \\ + \frac{3}{4} \vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{4} \vec{b} \cdot \vec{c}. \text{ Учитывая (1), получаем}$$

$$|\overrightarrow{EH}|^2 = \frac{9}{16} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{7}{2}, \text{ откуда}$$

$$|\overrightarrow{EH}| = \sqrt{\frac{7}{2}}. \text{ Следовательно, } |EH| = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$



2. а) Обозначим  $\widehat{(\vec{BC}_1; \vec{AC})} = \varphi$ . Тогда  $\cos \varphi = \frac{\vec{BC}_1 \cdot \vec{AC}}{|\vec{BC}_1| \cdot |\vec{AC}|}$ . Находим:  $\vec{BC}_1 \cdot \vec{AC} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$ . Учитывая (1), получаем  $\vec{BC}_1 \cdot \vec{AC} = \vec{b}^2 = 4$ .

$$|\vec{BC}_1| = \sqrt{(\vec{b} + \vec{c})^2} = \sqrt{\vec{b}^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2} = \sqrt{4 + 2 \cdot 0 + 4} = 2\sqrt{2};$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = 2\sqrt{2}.$$

Получаем

$$\cos \varphi = \frac{4}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \text{ откуда } \varphi = 60^\circ.$$

Ответ: 1. б)  $\sqrt{\frac{7}{2}}$ . 2. а)  $60^\circ$ .

■ ЗАДАЧА 6.085. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды  $PABCD$  равны 1 (рис. 195). Точка  $O$  — центр грани  $ABCD$ . Точки  $E, F, H$  — середины ребер соответственно  $BP, CP, AP$ . Найдите: а) длину отрезка  $OP$ ; б) длину отрезка  $CH$ ; в) угол между векторами  $\vec{AE}$  и  $\vec{BF}$ ; г) угол между медианой  $PM$  грани  $BPC$  и высотой  $AE$  грани  $APB$ . При решении пунктов а) и в) используйте векторы.

Решение. Введем базис  $\vec{BA} = \vec{a}$ ,  $\vec{BC} = \vec{b}$ ,  $\vec{BP} = \vec{c}$ . Так как боковые грани пирамиды — правильные треугольники, а основа-

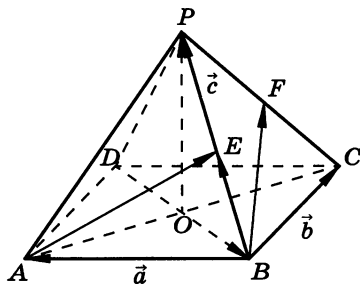


Рис. 195

ние — квадрат, то  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ ,  $\widehat{(\vec{a}; \vec{c})} = \widehat{(\vec{b}; \vec{c})} = 60^\circ$ ,  $\widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = 90^\circ$ . Поэтому имеем

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \quad (1)$$

а) Длина отрезка  $OP$  равна длине вектора  $\vec{OP}$ . Разложим этот вектор по базису  $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ .

По правилу треугольника  $\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BP} = \vec{BP} - \vec{BO} = \vec{BP} - \frac{1}{2}\vec{BD}$ . По правилу параллелограмма  $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC}$ . Значит,  $\vec{OP} = \vec{BP} - \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC}) = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ . Тогда  $|\vec{OP}|^2 = \vec{OP}^2 = \left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\right)^2 = \frac{1}{4}\vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c}$ . Учитывая (1), получаем  $|\vec{OP}|^2 = \frac{1}{2}$ , откуда  $|\vec{OP}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , т. е.  $OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

в) Пусть  $\widehat{(\vec{AE}; \vec{BF})} = \varphi$ . Тогда  $\cos \varphi = \frac{\vec{AE} \cdot \vec{BF}}{|\vec{AE}| \cdot |\vec{BF}|}$ . Разложим векторы  $\vec{AE}$  и  $\vec{BF}$  по базису  $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ . Имеем:  $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$ ,  $\vec{BF} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BP}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$ .

Находим:

$$\begin{aligned} \vec{AE} \cdot \vec{BF} &= (-\vec{a} + 0,5\vec{c}) \cdot (0,5\vec{b} + 0,5\vec{c}) = \\ &= -0,5\vec{a} \cdot \vec{b} - 0,5\vec{a} \cdot \vec{c} + 0,25\vec{b} \cdot \vec{c} + 0,25\vec{c}^2; \\ |\vec{AE}|^2 &= (-\vec{a} + 0,5\vec{c})^2 = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{c} + 0,25\vec{c}^2; \\ |\vec{BF}|^2 &= \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c})^2 = \frac{1}{4}(\vec{b}^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2). \end{aligned}$$

Принимая во внимание (1), получаем:  $\vec{AE} \cdot \vec{BF} = 0,125$ ,  $|\vec{AE}| = |\vec{BF}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Поэтому  $\cos \varphi = \frac{0,125}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{6}$ , значит,  $\varphi = \arccos \frac{1}{6}$ .

Ответ: а)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; в)  $\arccos \frac{1}{6}$ .

### 23.4. Применение векторного метода к решению стереометрических задач

■ ЗАДАЧА 6.091. Дана правильная четырехугольная пирамида  $MABCD$ . Векторы  $\vec{MA}$ ,  $\vec{MB}$ ,  $\vec{MC}$ ,  $\vec{MD}$  — единичные. Выразите вектор  $\vec{MD}$  через  $\vec{MA}$ ,  $\vec{MB}$ ,  $\vec{MC}$ .

Решение. Так как  $ABCD$  — квадрат (рис. 196, а), то  $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD} = 2\vec{MO}$ , где  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Тогда  $\vec{MD} = 1 \cdot \vec{MA} - 1 \cdot \vec{MB} + 1 \cdot \vec{MC}$ .

■ ЗАДАЧА 6.092. Дана правильная шестиугольная пирамида  $MABCDEF$ . Векторы  $\vec{MA}$ ,  $\vec{MB}$ ,  $\vec{MC}$ ,  $\vec{MD}$ ,  $\vec{ME}$ ,  $\vec{MF}$  — единичные. Выразите:

- векторы  $\vec{MD}$ ,  $\vec{ME}$ ,  $\vec{MF}$  через векторы  $\vec{MA}$ ,  $\vec{MB}$ ,  $\vec{MC}$ ;
- векторы  $\vec{MB}$ ,  $\vec{MD}$ ,  $\vec{MF}$  через векторы  $\vec{MA}$ ,  $\vec{MC}$ ,  $\vec{ME}$ .

Решение. а) Пусть точка  $O$  — центр правильного шестиугольника  $ABCDEF$  (рис. 196, б);  $K$  — точка пересечения диагоналей ромба  $ABCO$ . Тогда  $2\vec{MK} = \vec{MB} + \vec{MO} = \vec{MA} + \vec{MC}$ , откуда  $\vec{MO} = 1 \cdot \vec{MA} - 1 \cdot \vec{MB} + 1 \cdot \vec{MC}$ .

Из равенств  $2\vec{MO} = \vec{MB} + \vec{ME} = \vec{MC} + \vec{MF} = \vec{MA} + \vec{MD}$  найдем:

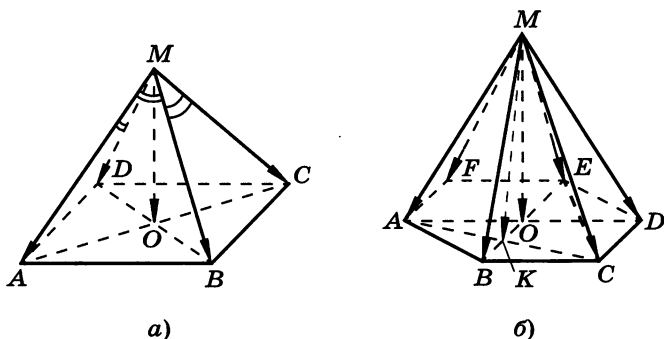


Рис. 196

$$\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC};$$

$$\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC};$$

$$\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}.$$

б) Пусть точка  $O$  — центроид треугольника  $ACE$ . Это означает, что  $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME})$ . Тогда из равенств  $2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MF}$  находим:

$$\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ME};$$

$$\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{ME} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{ME};$$

$$\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{MC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ME}.$$

■ ЗАДАЧА 6.093. В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  точка  $F$  — середина ребра  $MB$ ,  $K$  — такая точка ребра  $MD$ , что  $MK = 5KD$ . В каком отношении плоскость  $AFK$  делит: а) ребро  $MC$ ; б) высоту  $MO$  данной пирамиды?

Решение. а) Выберем пространственный базис:  $\vec{a} = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{MB}$ ,  $\vec{d} = \overrightarrow{MD}$  (рис. 197). Тогда  $2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$ , откуда

$$\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}. \quad (1)$$

Обозначим  $L = MC \cap (AFK)$ . Так как точка  $L$  принадлежит плоскости  $AFK$ , то

$$\overrightarrow{ML} = x \cdot \overrightarrow{MA} + y \cdot \overrightarrow{MF} + z \cdot \overrightarrow{MK}, \quad \text{где} \\ x + y + z = 1. \quad (2)$$

Учитывая условие задачи, получаем

$$\overrightarrow{ML} = x \cdot \vec{a} + \frac{1}{2}y \cdot \vec{b} + \frac{5}{6}z \cdot \vec{d}. \quad (3)$$

Из условия коллинеарности векторов  $\overrightarrow{MC}$  и  $\overrightarrow{ML}$  имеем:

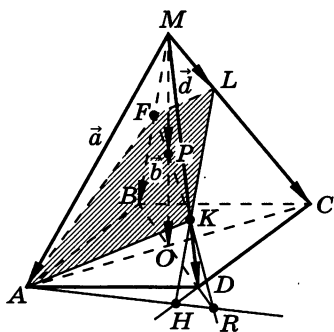


Рис. 197

$$\overrightarrow{ML} = t\overrightarrow{MC} \Rightarrow x = -t, \frac{1}{2}y = t, \frac{5}{6}z = t \Rightarrow x = -t, y = 2t, z = \frac{6}{5}t,$$

где  $t$  — коэффициент пропорциональности.

Из условия (2) находим значение  $t$ :

$$\begin{aligned} -t + 2t + \frac{6}{5}t &= 1 \Rightarrow -5t + 10t + 6t = 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow t &= \frac{5}{11}. \text{ Тогда } \frac{ML}{MC} = \frac{5}{11} \Rightarrow \frac{ML}{LC} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

б) Обозначим  $P = MO \cap (AFK)$ . Точка  $O$  — середина  $BD$ , значит,  $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d})$ . Так как точки  $K, F$  и  $P$  принадлежат одной прямой, то

$$\overrightarrow{MP} = m\overrightarrow{MF} + n\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}m\vec{b} + \frac{5}{6}n\vec{d}, \quad \text{где } m + n = 1. \quad (4)$$

Из коллинеарности векторов  $\overrightarrow{MP}$  и  $\overrightarrow{MO}$  имеем:

$$\overrightarrow{MP} = u\overrightarrow{MO} \Rightarrow \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}u, \frac{5}{6}n = \frac{1}{2}u \text{ или } m = u, n = \frac{3}{5}u. \text{ Из ус-}$$

ловия (4) получаем  $u + \frac{3}{5}u = 1$  или  $8u = 5$ , откуда  $u = \frac{5}{8}$ . Это означает, что  $MP : MO = 5 : 8$  или  $MP : PO = 5 : 3$ .

Ответ: а) 5 : 6; б) 5 : 3.

■ ЗАДАЧА 6.094. В тетраэдре  $МABC$  боковые ребра  $МА$ ,  $МВ$  и  $МС$  попарно взаимно перпендикулярны и  $МА = 1$ ,  $МВ = 2$ ,  $МС = 3$ ;  $K$  — середина  $BC$ ;  $F$  — внутренняя точка ребра  $AM$  такая, что  $AF : FM = 3 : 1$ . Найдите расстояние между прямыми  $AK$  и  $CF$  (рис. 198).

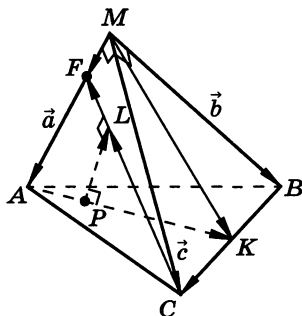


Рис. 198

Решение. В качестве базисных примем векторы  $\vec{a} = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{MB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{MC}$ . Имеем:

$$\overrightarrow{AK} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{4}\vec{a} + 0 \cdot \vec{b} - \vec{c}.$$

Пусть  $PL$  — общий перпендикуляр прямых  $AK$  и  $CF$ , где  $P \in AK$ ,  $L \in CF$ . Тогда

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PL} &= \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CL} = x\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC} + y\overrightarrow{CF} = \\ &= -x\vec{a} + \frac{1}{2}x\vec{b} + \frac{1}{2}x\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} + y\left(-\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{a}\right) = \\ &= \left(-x + \frac{1}{4}y\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}\right)\vec{c}. \end{aligned} \quad (1)$$

Коэффициенты разложения (1) вектора  $\overrightarrow{PL}$  по базису  $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$  найдем из условия перпендикулярности  $PL$  к прямым  $AK$  и  $CF$ .

Имеем:

$$\begin{cases} PL \perp AK \Rightarrow \overrightarrow{PL} \cdot \overrightarrow{AK} = 0, \\ PL \perp CF \Rightarrow \overrightarrow{PL} \cdot \overrightarrow{CF} = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}\right) = 0, \\ \frac{1}{4}\left(-x + \frac{1}{4}y\right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) - 1 \cdot \left(\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ -12x + 17y = 8 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x = \frac{4}{11}, \\ y = \frac{8}{11}. \end{cases}$$

Тогда, подставив в (1) вместо  $x$  и  $y$  их найденные значения, получаем  $\overrightarrow{PL} = -\frac{1}{22}(4\vec{a} + 7\vec{b} + \vec{c})$ . Значит,

$$|PL| = |\overrightarrow{PL}| = \frac{1}{22}\sqrt{16 \cdot 1 + 49 \cdot 4 + 9} = \frac{1}{22}\sqrt{221}.$$

Ответ:  $\frac{1}{22}\sqrt{221}$ .

■ ЗАДАЧА 6.095. На ребрах  $MA$ ,  $MB$  и  $AC$  тетраэдра  $MABC$  отмечены соответственно такие точки  $K$ ,  $F$  и  $T$ , что  $AK : KM = 1 : 2$ ,  $F$  — середина  $BM$ ,  $T$  — середина  $AC$ ;  $KF = 3$ . Точки  $P$  и  $Q$  принадлежат соответственно прямым  $KF$  и  $BT$ , при этом  $PQ \parallel AM$  (рис. 199). Найдите длину отрезка  $KP$ .

Решение. Выберем векторы  $\vec{a} = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{MB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{MC}$  в качестве базисных. По правилу ломаной  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TQ}$ . Имеем:  $AK : KM = 1 : 2 \Rightarrow \overrightarrow{KA} = \frac{1}{3}\vec{a}$ ;  $P \in KF \Rightarrow \overrightarrow{PK} = x\overrightarrow{KF} = x(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a})$ ;  $AT = TC \Rightarrow \overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a})$ ;  $Q \in TB \Rightarrow \overrightarrow{TQ} = y\overrightarrow{TB} = -y\overrightarrow{BT} = -y(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MT}) = -y(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b})$ .

Тогда

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \frac{1}{3}\vec{a} + x(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) - y(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}) = \\ &= (-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{6})\vec{a} + (\frac{1}{2}x + y)\vec{b} + \frac{1}{2}(1 - y)\vec{c}.\end{aligned}\quad (1)$$

Так как  $PQ \parallel AM$ , то векторы  $\overrightarrow{PQ}$  и  $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$  коллинеарны. Следовательно, координаты  $\frac{1}{2}x + y$  и  $\frac{1}{2}(1 - y)$  в разложении (1) вектора  $\overrightarrow{PQ}$  в базисе  $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$  должны быть одновременно равны нулю, то есть

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 0, \\ 1 - y = 0, \end{cases}$$

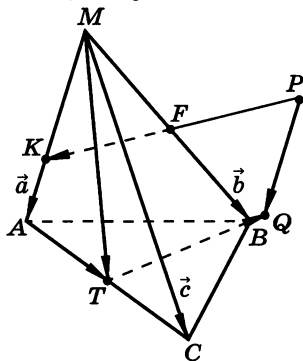


Рис. 199

откуда  $x = -2$ ,  $y = 1$ . Тогда  $\overrightarrow{PK} = x\overrightarrow{KF} = -2\overrightarrow{KF}$ . Значит,  $|PK| = |\overrightarrow{PK}| = |-2\overrightarrow{KF}| = 6$ .

Ответ: 6.

■ ЗАДАЧА 6.096. Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точки  $P$ ,  $M$  и  $Q$  выбраны на ребрах соответственно  $AA_1$ ,  $AB$  и  $AD$  так, что  $AP : PA_1 = 3 : 1$ ,  $AQ : QD = 1 : 4$ ,  $AM = MB$  (рис. 200). В каком отношении плоскость  $PMQ$  делит диагональ  $AC_1$  параллелепипеда?

Решение. Примем в качестве базисных векторы  $\overrightarrow{AP} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AM} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AQ} = \vec{c}$ .

Тогда  $\overrightarrow{AA_1} = \frac{4}{3}\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = 2\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = 5\vec{c}$ ;  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c}$ .

Пусть  $F = AC_1 \cap (PMQ)$ . Для точек  $M$ ,  $P$ ,  $Q$  и  $F$ , лежащих в одной плоскости, имеем

$$\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AP} + y\overrightarrow{AM} + z\overrightarrow{AQ} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c},$$

где

$$x + y + z = 1. \quad (1)$$

Так как  $\overrightarrow{AF} \parallel \overrightarrow{AC_1}$ , то одноименные координаты этих векторов пропорциональны, то есть  $x = \frac{4}{3}t$ ,  $y = 2t$ ,  $z = 5t$ . Подстав-

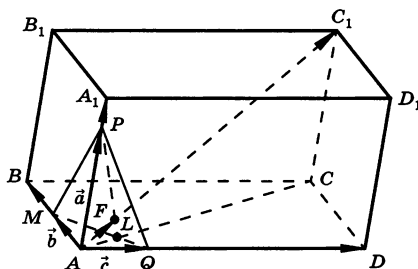


Рис. 200



для эти значения  $x$ ,  $y$  и  $z$  в левую часть соотношения (1), получаем  $\frac{4}{3}t + 2t + 5t = 1$ , откуда  $t = \frac{3}{25}$ . Это означает:

$$AF : AC_1 = 3 : 25 \Rightarrow AF : FC_1 = 3 : 22.$$

Ответ:  $AF : FC_1 = 3 : 22$ .

■ ЗАДАЧА 6.097. Все плоские углы трехгранного угла  $MABC$  равны  $\alpha$ . Прямая  $MP$  образует со всеми его ребрами углы, равные  $\varphi$ , а со всеми гранями — углы, равные  $\psi$ . Найдите величины углов  $\varphi$  и  $\psi$ .

Решение. Пусть  $\vec{MA} = \vec{a}$ ,  $\vec{MB} = \vec{b}$ ,  $\vec{MC} = \vec{c}$  — единичные векторы базиса в пространстве, точка  $O$  — центроид треугольника  $ABC$  (рис. 201);  $\vec{MK} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .

Так как вектор  $\vec{MK}$  коллинеарен вектору  $\vec{MO} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ ,

то

$$\begin{aligned} \angle(\vec{MK}; \vec{a}) &= \angle(\vec{MK}; \vec{b}) = \angle(\vec{MK}; \vec{c}) = \varphi \\ \text{и } \angle(MP; (AMB)) &= \angle(MP; (AMC)) = \\ &= \angle(MP; (CMB)) = \angle(\vec{MK}; \vec{ML}) = \psi, \end{aligned}$$

где  $\vec{ML} = \vec{a} + \vec{b}$  — направляющий вектор прямой  $ML$ , являющийся проекцией прямой  $MK$  на плоскость  $AMB$ . Прямая  $ML$  содержит биссектрису угла  $AMB$ , так как каждая точка прямой  $MP$ , образующей равные углы с ребрами трехгранно-

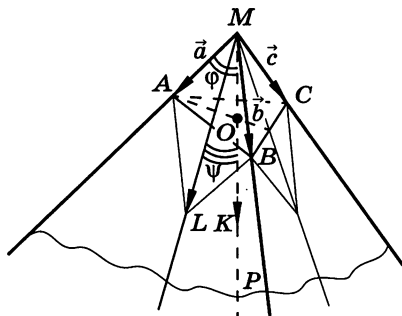


Рис. 201

го угла, равноудалена от каждого из этих ребер. Имеем:

$$\overrightarrow{MK}^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = 3 + 6\cos \alpha \Rightarrow |\overrightarrow{MK}| = \sqrt{3(1 + 2\cos \alpha)}. \text{ Тогда}$$

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{MK} \cdot \vec{a}}{|\overrightarrow{MK}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a}}{|\overrightarrow{MK}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{1 + 2\cos \alpha}{\sqrt{3(1 + 2\cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{1 + 2\cos \alpha}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos \sqrt{\frac{1 + 2\cos \alpha}{3}};$$

$$\cos \psi = \frac{\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML}}{|\overrightarrow{MK}| \cdot |\overrightarrow{ML}|} = \frac{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \cdot |\vec{a} + \vec{b}|} =$$

$$= \frac{2(1 + 2\cos \alpha)}{\sqrt{3(1 + 2\cos \alpha)}\sqrt{2(1 + \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{2(1 + 2\cos \alpha)}{3(1 + \cos \alpha)}} =$$

$$= \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1 + 2\cos \alpha}{3}} \Rightarrow \psi = \arccos \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1 + 2\cos \alpha}{3}}.$$

$$\text{Ответ: } \varphi = \arccos \sqrt{\frac{1 + 2\cos \alpha}{3}}; \psi = \arccos \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1 + 2\cos \alpha}{3}}.$$



## § 24. Декартова прямоугольная система координат в пространстве

### 24.1. Координаты вектора в пространстве.

#### Линейные операции над векторами в координатах

□ С координатным методом на плоскости вы уже знакомы. Напомним, что координаты вектора на плоскости вводятся так. От произвольной точки  $O$  откладывают взаимно перпендикулярные единичные векторы  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  (рис. 202). Упорядоченную пару  $(\vec{i}; \vec{j})$  векторов  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  называют **декартовым (ортонормированным) базисом векторов на плоскости**, а векторы  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  — **базисными (координатными) векторами**.

Любой вектор  $\vec{p}$  плоскости можно единственным образом разложить в базисе  $(\vec{i}; \vec{j})$ , то есть представить в виде:  $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . Числа  $x$  и  $y$  называются **декартовыми прямоугольными координатами вектора  $\vec{p}$  в базисе  $(\vec{i}; \vec{j})$  и декартовыми прямоугольными координатами точки  $M$  ( $\overrightarrow{OM} = \vec{p}$ ) в системе координат  $Oxy$** , определяемой базисными векторами  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ ; при этом вектор  $\overrightarrow{OM}$  называют **радиусом-вектором точки  $M$** . □

Аналогично вводятся декартовы прямоугольные координаты вектора в пространстве. От произвольной точки  $O$  откладывают три некомпланарных попарно взаимно перпендикулярных единичных вектора  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  (рис. 203), то есть  $\vec{i} \perp \vec{j}$ ,  $\vec{j} \perp \vec{k}$ ,  $\vec{k} \perp \vec{i}$ ,  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ .

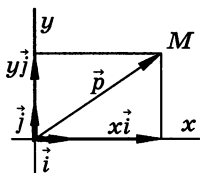


Рис. 202

Упорядоченная тройка векторов  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  называется **декартовым прямоугольным ортонормированным базисом векторов в пространстве**, а векторы  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  называются **базисными (координатными) векторами**.

Базисными векторами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , отложенными от точки  $O$ , определяют три взаимно перпендикулярные направленные прямые, которые называются **координатными осями** и обозначаются соответственно  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  (рис. 203). При этом говорят, что в пространстве задана **декартова прямоугольная система координат**, которую обозначают  $Oxyz$ . Точка  $O$  называется **началом системы координат**; направленные прямые  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  называются соответственно **осью абсцисс**, **осью ординат** и **осью аппликат**. Плоскости, проходящие через каждые две координатные оси, называются **координатными плоскостями** и обозначаются:  $Oxy$  — проходит через оси  $Ox$  и  $Oy$ ;  $Oyz$  — проходит через оси  $Oy$  и  $Oz$ ;  $Oxz$  — проходит через оси  $Ox$  и  $Oz$ .

Такую **систему координат** называют **декартовой** по имени всемирно известного французского ученого Рене Декарта (1596—1650), который впервые ввел координаты в геометрии (на плоскости).

По теореме 36 любому вектору  $\vec{p}$  пространства соответствует единственная упорядоченная тройка чисел  $(x; y; z)$  такая, что выполняется равенство

$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1)$$

Справедливо обратное утверждение: если в пространстве дан базис  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , то любой упорядоченной тройке чисел  $(x; y; z)$  со-

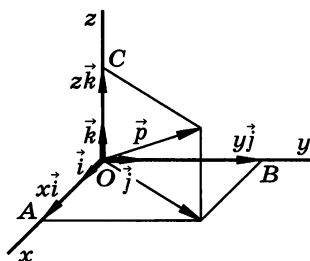


Рис. 203

ответствует единственный вектор  $\vec{r}$  пространства такой, что выполняется условие (1). Для доказательства этого утверждения достаточно отложить от точки  $O$  векторы  $\vec{OA} = x\vec{i}$ ,  $\vec{OB} = y\vec{j}$ ,  $\vec{OC} = z\vec{k}$ . Тогда для вектора  $\vec{r} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  (рис. 203) выполняется равенство (1) и он является соответствующим данной тройке чисел  $(x; y; z)$ . Такой вектор единствен.

Таким образом, если в пространстве дан прямоугольный базис  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , то между множеством всех векторов пространства и множеством всех упорядоченных троек действительных чисел  $(x; y; z)$  устанавливается взаимно однозначное соответствие, при котором для каждого вектора  $\vec{r}$  и соответствующей ему упорядоченной тройки чисел  $(x; y; z)$  выполняется равенство (1). Числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  в этом равенстве называются **декартовыми прямоугольными координатами вектора  $\vec{r}$  в базисе  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$** . При этом символически обозначают  $\vec{r}(x; y; z)$  и говорят: «Вектор  $\vec{r}$  с координатами  $x, y, z$ » или «Вектор  $\vec{r}$  имеет координаты  $x, y, z$  в базисе  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ».

В частности, так как  $\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$  и  $\vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$ , то базисные векторы  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  и вектор  $\vec{0}$  имеют координаты:  $\vec{i}(1; 0; 0)$ ,  $\vec{j}(0; 1; 0)$ ,  $\vec{k}(0; 0; 1)$  и  $\vec{0}(0; 0; 0)$ .

Используя свойства операции сложения векторов и умножения вектора на число, рассмотрим эти операции над векторами, заданными своими координатами.

Пусть имеем векторы  $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$  и  $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ , то есть  $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ ,  $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ . Тогда

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (x_1\vec{i} + x_2\vec{i}) + (y_1\vec{j} + y_2\vec{j}) + (z_1\vec{k} + z_2\vec{k}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}.\end{aligned}$$

Аналогично найдем:

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k};$$

$$\lambda\vec{a} = \lambda(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j} + (\lambda z_1)\vec{k}.$$

Получили:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a}(x_1; y_1; z_1) \\ \vec{b}(x_2; y_2; z_2) \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{a} \pm \vec{b} = \overrightarrow{(x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)}, \\ \lambda \vec{a} = \overrightarrow{(\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)}. \end{array}$$

Таким образом:

**!** 1) каждая координата суммы (разности) двух векторов равна сумме (разности) одноименных координат данных векторов;

2) каждая координата произведения вектора на число равна произведению этого числа на одноименную координату данного вектора.

Тогда можно сформулировать *признак коллинеарности двух векторов в координатах*: два ненулевых вектора  $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$  и  $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$  коллинеарны тогда и только тогда, когда пропорциональны их одноименные координаты, то есть

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = t \cdot b_1, \\ a_2 = t \cdot b_2, \\ a_3 = t \cdot b_3. \end{cases}$$


Для векторов с ненулевыми координатами также записывают:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Допускается запись равенства таких отношений, когда некоторые компоненты этих отношений равны нулю. Например, записи  $\frac{1}{2} = \frac{-3}{-6} = \frac{0}{0}$  и  $\frac{0}{0} = \frac{-3}{-6} = \frac{0}{0}$  верны и допустимы, но используются редко. (В первом случае рассматриваются коллинеарные векторы  $\vec{a}(1; -3; 0)$  и  $\vec{b}(2; -6; 0)$ , во втором — коллинеарные векторы  $\vec{p}(0; -3; 0)$  и  $\vec{q}(0; -6; 0)$ .)

**■** Три ненулевых вектора  $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$  и  $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$  компланарны тогда и только тогда, когда существуют такие одновременно не равные нулю числа  $x, y, z$ , что выполняется векторное равенство  $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$  (см. т. 35), то есть когда система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение  $(x; y; z)$ . 

■ ЗАДАЧА 7.001.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб с ребром 1. Пусть  $\vec{AD} = \vec{i}$ ,  $\vec{AB} = \vec{j}$ ,  $\vec{AA}_1 = \vec{k}$ . Найдите в базисе  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  координаты векторов: а)  $\vec{AC}_1$ ; б)  $\vec{CA}_1$ ; в)  $\vec{AK}$ , где  $K = BC_1 \cap B_1C$  (рис. 204).

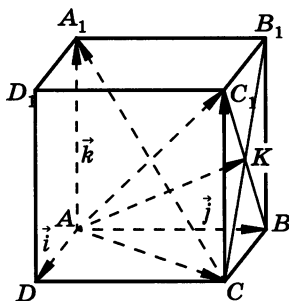


Рис. 204

Решение. а) Так как  $\vec{CC}_1 = \vec{AA}_1 = \vec{k}$ ,  $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{AB} = \vec{i} + \vec{j}$ , то  $\vec{AC}_1 = \vec{AC} + \vec{AA}_1 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ , значит, вектор  $\vec{AC}_1$  имеет координаты  $(1; 1; 1)$ , то есть  $\vec{AC}_1(1; 1; 1)$ ; б)  $\vec{CA}_1 = \vec{AA}_1 - \vec{AC} = \vec{k} - (\vec{i} + \vec{j}) = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ , то есть  $\vec{CA}_1(-1; -1; 1)$ ; в)  $\vec{AK} = \vec{AC} + \vec{CK} = \vec{AC} + \frac{1}{2}(\vec{CC}_1 + \vec{CB}) = \vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} + \frac{1}{2}(-\vec{i}) = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$ , то есть  $\vec{AK}(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2})$ .



Ответ: а)  $(1; 1; 1)$ ; б)  $(-1; -1; 1)$ ; в)  $(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2})$ .

■ ЗАДАЧА 7.002. Коллинеарны ли векторы: а)  $\vec{a}(3; 4; 5)$  и  $\vec{b}(6; 8; 10)$ ; б)  $\vec{p}(2; -3; 3)$  и  $\vec{q}(4; -6; 2)$ ?

Решение. а) Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, так как  $3 : 6 = 4 : 8 = 5 : 10$ ; б) координаты вектора  $\vec{q}$  не пропорциональны одноименным координатам вектора  $\vec{p}$ , например  $2 : 4 \neq 3 : 2$ . Поэтому векторы  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$  не коллинеарны.

Попытайтесь установить, компланарны ли векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{p}$ , если:

а)  $\vec{a}(-1; 4; 6)$ ,  $\vec{b}(1; 7; 3)$ ,  $\vec{p}(0; 11; 9)$ ; б)  $\vec{a}(-3; 14; 6)$ ,  $\vec{b}(6; -8; 7)$ ,  $\vec{p}(-9; 62; 37)$ ; в)  $\vec{a}(-1; 0; 0)$ ,  $\vec{b}(0; 7; 0)$ ,  $\vec{p}(0; 0; 9)$ ?

 Пусть векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  заданы своими координатами:  $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ , ...,  $\vec{a}_k(x_k; y_k; z_k)$ . Тогда, учитывая правила нахождения координат суммы, разности векторов и произведения вектора на число, вектор  $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k$ , являющийся линейной комбинацией векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ , будет иметь координаты:  $\vec{c}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k; \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_k y_k; \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_k z_k)$ , то есть каждая координата вектора  $\vec{c}$ , являющегося линейной комбинацией векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  с коэффициентами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , равна линейной комбинации одноименных координат этих векторов с теми же коэффициентами. Докажите это самостоятельно, если сможете. 

## 24.2. Скалярное произведение векторов в координатах

Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равно (см. п. 23.1):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \text{ где } \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Мы знаем, что: а)  $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$ ; б)  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

Так как базисные векторы  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  попарно взаимно перпендикулярны и единичны, то

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1. \quad (2)$$

Найдем скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , заданных координатами:  $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ ,  $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ .



Воспользуемся свойствами сложения векторов и умножения вектора на число:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (x_1x_2)\vec{i}^2 + x_1y_2(\vec{i} \cdot \vec{j}) + \\ &+ x_1z_2(\vec{i} \cdot \vec{k}) + y_1x_2(\vec{j} \cdot \vec{i}) + (y_1y_2)\vec{j}^2 + y_1z_2(\vec{j} \cdot \vec{k}) + z_1x_2(\vec{k} \cdot \vec{i}) + \\ &+ z_1y_2(\vec{k} \cdot \vec{j}) + (z_1z_2)\vec{k}^2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,\end{aligned}$$

то есть

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (3)$$

Скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

Тогда признак перпендикулярности векторов  $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$  и  $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$  в координатах выражается условием

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \quad (4)$$

Так как  $|\vec{p}| = \sqrt{p^2}$ , то длина вектора  $\vec{p}(x; y; z)$  находится по формуле

$$|\vec{p}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (5)$$

Из определения скалярного произведения векторов следует, что угол  $\varphi$  между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  находится с помощью формулы

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (6)$$

### 24.3. Проекция вектора на ось в координатах

Пусть задан вектор  $\vec{a}$  и ось — прямая  $b$ , направление которой сонаправлено с вектором  $\vec{b}$  (рис. 205).

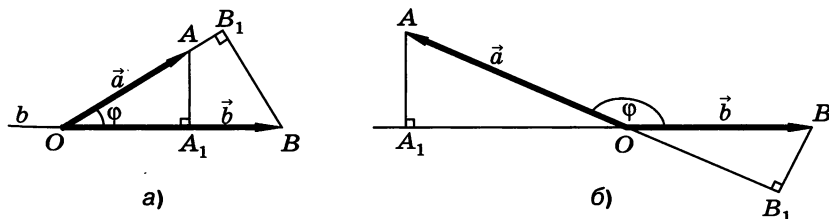


Рис. 205

**Проекцией вектора  $\vec{a}$  на ось вектора  $\vec{b}$**  называется число, равное произведению длины вектора  $\vec{a}$  на косинус угла  $\varphi$  между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$\text{Пр.}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi.$$

Тогда:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \begin{cases} |\vec{a}| \cdot (|\vec{b}| \cdot \cos \varphi) = |\vec{a}| \cdot \text{Пр.}_{\vec{b}} \vec{a}; \\ |\vec{b}| \cdot (|\vec{a}| \cdot \cos \varphi) = |\vec{b}| \cdot \text{Пр.}_{\vec{a}} \vec{b}, \text{ т. е.} \end{cases} \quad (7)$$

**скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженной на проекцию второго на направление первого.**

Заметим, что проекция одного вектора на направление второго может быть положительной (при  $0 < \varphi < 90^\circ$ , рис. 205, а), отрицательной (при  $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ , рис. 205, б) или равной нулю (при  $\varphi = 90^\circ$ ).

Пусть дан вектор

$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (8)$$

Покажем, что координата  $x$  этого вектора равна его проекции на направление базисного вектора  $\vec{i}$ . В самом деле, умножив обе части равенства (8) на вектор  $\vec{i}$  скалярно, получим

$$\vec{i} \cdot \vec{p} = \vec{i} \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

Находим:

$$\vec{i} \cdot \vec{p} = |\vec{i}| \cdot |\vec{p}| \cos \varphi_1 = 1 \cdot \text{Пр.}_{\vec{i}} \vec{p} = \text{Пр.}_{\vec{i}} \vec{p}, \quad \text{где } \varphi_1 = \angle(\vec{p}; \vec{i});$$

$$\vec{i} \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = x\vec{i}^2 + y(\vec{i} \cdot \vec{j}) + z(\vec{i} \cdot \vec{k}) = x.$$

Таким образом,

$$x = \text{Пр.}_{\vec{i}} \vec{p}. \quad (9)$$

Аналогично, умножив равенство (8) скалярно на  $\vec{j}$ , затем на  $\vec{k}$ , получим

$$y = \text{Пр.}_{\vec{j}} \vec{p}, \quad z = \text{Пр.}_{\vec{k}} \vec{p}. \quad (10)$$

Итак, геометрический смысл декартовых прямоугольных координат вектора состоит в следующем: **каждая координата вектора равна ортогональной проекции этого**

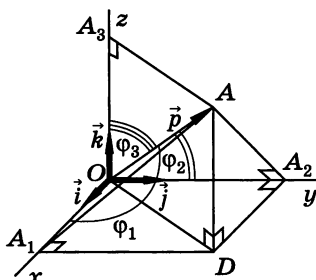


Рис. 206

**вектора на направление соответствующего базисного вектора.**

На рисунке 206 проекции  $OA_1$ ,  $OA_2$  и  $OA_3$  вектора  $\vec{p}$  на направления векторов  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$  положительны ( $OA_1 \uparrow \vec{i}$ ,  $OA_2 \uparrow \vec{j}$ ,  $OA_3 \uparrow \vec{k}$ ), следовательно, углы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ , образованные вектором  $\vec{p}$  соответственно с базисными векторами  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$ , являются острыми.

■ ЗАДАЧА 7.003. Найдите длины векторов  $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ ,  $\vec{q} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ , их скалярное произведение и угол между ними, если  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ .

Решение. Найдем координаты векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$  в базисе  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

$$\text{Имеем: } \vec{a}(1; -1; 2) \Rightarrow 2\vec{a} = \overrightarrow{(2; -2; 4)},$$

$$\vec{b}(2; 2; 0) \Rightarrow 3\vec{b} = \overrightarrow{(6; 6; 0)}.$$

$$\text{Тогда } 2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{p}(8; 4; 4), \quad 2\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{q}(-4; -8; 4). \text{ Значит, } |\vec{p}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{6}; \quad |\vec{q}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 4^2} = 4\sqrt{6}; \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = 8 \cdot (-4) + 4 \cdot (-8) + 4 \cdot 4 = -48;$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|} = -\frac{48}{4\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{6}} = -\frac{1}{2}, \quad \text{откуда } \varphi = \angle(\vec{p}; \vec{q}) = 120^\circ.$$

Ответ:  $4\sqrt{6}$ ;  $4\sqrt{6}$ ;  $-48$ ;  $120^\circ$ .

■ ЗАДАЧА 7.008. Компланарны ли векторы: а)  $\vec{a}(1; -2; -1)$ ,  $\vec{b}(3; 1; 2)$ ,  $\vec{c}(5; -3; 0)$ ; б)  $\vec{p}(2; 0; -3)$ ,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ; в)  $\vec{m}(2; 0; -3)$ ,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ; г)  $\vec{a}(1; -1; 2)$ ,  $\vec{b}(5; -1; 0)$ ,  $\vec{c}(-2; 0; 1)$ ; д)  $\vec{a}(0; 5; 3)$ ,  $\vec{b}(3; 3; 3)$ ,  $\vec{c}(1; 1; 4)$ ?

Решение. а) Векторы  $\vec{a}(1; -2; -1)$  и  $\vec{b}(3; 1; 2)$  не коллинеарны, так как их одноименные координаты не пропорциональны ( $1 : 3 \neq -2 : 1$ ). Если вектор  $\vec{c}(5; -3; 0)$  можно разложить по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , то векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны (т. 35); в противном случае векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  не компланарны. Таким образом, для решения задачи достаточно установить, существуют ли числа  $x$  и  $y$  такие, что  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ . В координатах это означает, имеет ли решение система уравнений относительно  $x$  и  $y$

$$\begin{cases} x + 3y = 5, \\ -2x + y = -3, \\ -x + 2y = 0. \end{cases}$$

Складывая первое и третье уравнения этой системы, получаем  $y = 1$ , тогда  $x = 2$ . Поэтому  $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ . Это означает, что вектор  $\vec{c}$  является линейной комбинацией векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , следовательно, векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны.

#### 24.4. Декартовы прямоугольные координаты точки

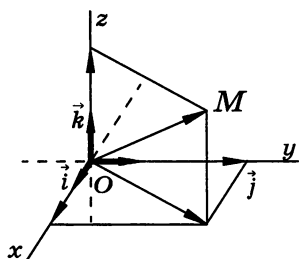


Рис. 207

Пусть  $M$  — произвольная точка пространства (рис. 207). Точке  $M$  соответствует единственный отложенный от точки  $O$  вектор  $\overrightarrow{OM}$ , который называется **радиусом-вектором** точки  $M$ . Вектор  $\overrightarrow{OM}$  имеет единственную тройку координат  $x, y, z$  в базисе  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . Числа  $x, y, z$  называют **координатами точки  $M$  в системе координат  $Oxyz$** .

**Определение.** Декартовыми прямоугольными координатами точки  $M$  в системе координат  $Oxyz$  называются координаты ее радиуса-вектора  $\overrightarrow{OM}$  в прямоугольном базисе  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Так как вектор  $\overrightarrow{OM}$  имеет единственную тройку координат  $x, y, z$  в базисе  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , то точка  $M$  имеет единственную тройку координат в системе координат  $Oxyz$ . При этом записывают  $M(x; y; z)$ .

Справедливо и обратное утверждение: любая упорядоченная тройка чисел  $(x; y; z)$  определяет в системе координат  $Oxyz$  единственную точку  $M$  пространства. Действительно, тройка чисел  $(x; y; z)$  определяет в базисе  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  единственный вектор  $\vec{OM}$  с координатами  $x, y, z$ . Вектор  $\vec{OM}$  является радиусом-вектором единственной точки  $M$ , координаты которой (по определению) — тройка чисел  $(x; y; z)$ .

Таким образом, если в пространстве введена прямоугольная система координат  $Oxyz$ , то между множеством всех точек пространства и множеством всех упорядоченных троек действительных чисел  $(x; y; z)$  устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому, если дана тройка чисел  $(x; y; z)$ , то говорят, что в системе координат  $Oxyz$  задана точка  $(x; y; z)$ . В частности, точке  $O$  — началу системы координат — соответствует тройка чисел  $(0; 0; 0)$ , то есть  $O(0; 0; 0)$ .

### 24.5. Решение простейших задач стереометрии в координатах

#### а) Расстояние между двумя точками

Пусть даны две точки  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$ . Тогда векторы  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$  имеют координаты:  $\vec{OA}(x_1; y_1; z_1)$ ,  $\vec{OB}(x_2; y_2; z_2)$ . По правилу вычитания векторов, заданных своими координатами, находим (рис. 208):  $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ .

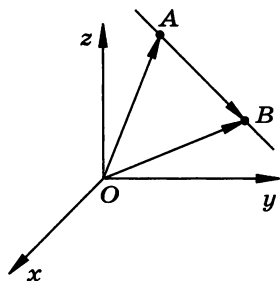


Рис. 208

Расстояние  $|AB|$  между точками  $A$  и  $B$  равно длине вектора  $\vec{AB}$ , то есть  $|AB| = |\vec{AB}| = \sqrt{\vec{AB}^2}$ . В координатном виде это означает:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Из этих рассуждений следует, что если вектор  $\vec{AB}$  задан координатами начала  $A(x_1; y_1; z_1)$  и конца  $B(x_2; y_2; z_2)$ , то его длина  $|\vec{AB}|$  находится по формуле

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

**б) Деление отрезка в данном отношении**

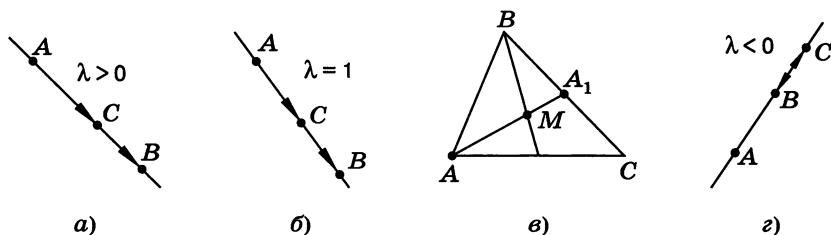
Пусть  $AB$  — данный отрезок,  $C$  — некоторая точка прямой  $AB$ , отличная от точек  $A$  и  $B$  (рис. 209, а).

Говорят, что точка  $C$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $\lambda$  ( $\lambda \neq -1$ ), если  $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$ , и записывают  $(AB; C) = \lambda$ . При этом точки  $A$  и  $B$  называют *базисными*, а точку  $C$  — *делящей* (см. § 12).

Если точка  $C$  лежит внутри отрезка  $AB$ , то векторы  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{CB}$  сонаправлены, поэтому  $\lambda > 0$ . В частности, если точка  $C$  — середина отрезка  $AB$  (рис. 209, б), то  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} = 1 \cdot \overrightarrow{CB}$ . Следовательно,  $\lambda = 1$ .

Следует помнить, что речь идет о делении **направленного отрезка**. Так, например, центроид  $M$  треугольника  $ABC$  (рис. 209, в) делит медиану  $AA_1$  треугольника в отношении  $AM : MA_1 = 2 : 1$ , считая от вершины  $A$ , но в отношении  $1 : 2 = A_1M : MA$ , считая от вершины  $A_1$  ( $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MA_1}$ , но  $\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA}$ ).

Кроме того, если точка  $C$  принадлежит прямой  $AB$ , но лежит вне отрезка  $AB$  (рис. 209, г), то  $\overrightarrow{AC} \uparrow \downarrow \overrightarrow{CB}$ . Это означает,



$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ . Зависимость  $\lambda$  от расположения точки  $M$

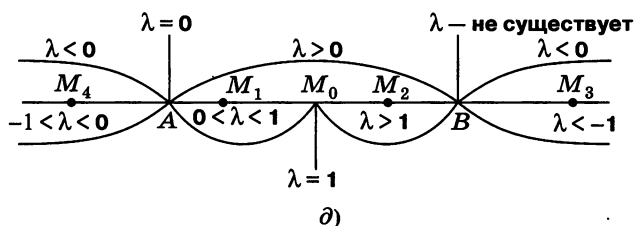


Рис. 209

что равенство  $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$  выполняется при  $\lambda < 0$ , т. е. отношение, в котором точка  $C$  делит отрезок  $AB$ , отрицательно, если точка  $C$  лежит вне отрезка  $AB$ . На рисунке 209, в точка  $A_1$  делит отрезок  $AM$  в отношении  $\lambda = -3$ , так как точка  $A_1$  лежит вне отрезка  $AM$  и  $\overrightarrow{AA_1} = -3\overrightarrow{A_1M}$ .

Так как точки  $A$  и  $B$  различны, то на прямой  $AB$  не существует такой точки  $C$ , для которой было бы справедливо равенство  $\overrightarrow{AC} = (-1) \cdot \overrightarrow{CB}$ . Рассмотрите рисунок 209, д и изучите зависимость  $\lambda$  от расположения точки  $M$  на прямой  $AB$ .

Выведем формулы, позволяющие находить координаты делящей точки  $C$ , если известны координаты базисных точек  $A$  и  $B$ .

Пусть отрезок  $AB$  задан в системе координат  $Oxyz$  координатами своих концов  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$ , а точка  $C(x; y; z)$  делит отрезок  $AB$  в данном отношении  $\lambda$ :

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}. (1)$$

Имеем (рис. 210):

$$A(x_1; y_1; z_1) \Rightarrow \overrightarrow{OA}(x_1, y_1, z_1),$$

$$B(x_2; y_2; z_2) \Rightarrow \overrightarrow{OB}(x_2, y_2, z_2),$$

$$C(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{OC}(x; y; z).$$

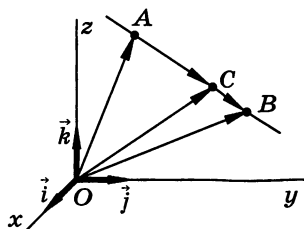


Рис. 210

Так как

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}, \quad (2)$$

то, исходя из (1) и учитывая (2), получаем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} &= \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \Rightarrow (1 + \lambda)\overrightarrow{OC} = \\ &= \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1 + \lambda} \quad (\text{при } \lambda \neq -1). \end{aligned} \quad (3)$$

В координатах векторное равенство (3) равносильно системе трех равенств:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (4)$$

Формулы (4) позволяют находить координаты точки  $C$ , делящей отрезок  $AB$  в данном отношении  $\lambda$  ( $\lambda \neq -1$ ). В частности, если точка  $C$  — середина отрезка  $AB$  ( $\lambda = 1$ ), то ее координаты находятся по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (5)$$

■ ЗАДАЧА 7.026. Найдите расстояние от вершины  $A$  треугольника  $ABC$  до его центра тяжести  $M$ , если  $A(-2; 1; -3)$ ,  $B(-1; 0; 4)$ ,  $C(1; 2; 6)$ .

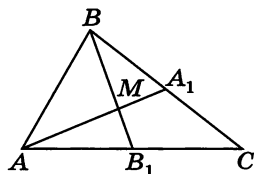


Рис. 211

Решение. Пусть  $AA_1$  — медиана  $\triangle ABC$  (рис. 211). Точка  $A_1$  — середина стороны  $BC$  — имеет координаты:

$$x = \frac{-1 + 1}{2} = 0, \quad y = \frac{0 + 2}{2} = 1, \quad z = \frac{4 + 6}{2} = 5,$$

то есть  $A_1(0; 1; 5)$ .

Далее, точка  $M$  делит медиану  $AA_1$  в отношении  $\lambda = AM : MA_1 = 2 : 1 = 2$ . Поэтому координаты точки  $M$  равны:

$$x = \frac{-2 + 2 \cdot 0}{1 + 2} = -\frac{2}{3}, \quad y = \frac{1 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = 1, \quad z = \frac{-3 + 2 \cdot 5}{1 + 2} = \frac{7}{3}.$$

Таким образом, можно записать  $M\left(-\frac{2}{3}; 1; \frac{7}{3}\right)$ . Тогда  $|AM| =$

$$= \sqrt{\left(-\frac{2}{3} + 2\right)^2 + (1 - 1)^2 + \left(\frac{7}{3} + 3\right)^2} = \frac{4}{3} \sqrt{17}.$$

Ответ:  $\frac{4}{3} \sqrt{17}$ .

**Замечание.** Координаты точки  $M$  можно найти проще, если учесть, что  $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ , где точка  $O$  — начало координат. Кроме того,  $AM = \frac{2}{3}AA_1$ .

■ ЗАДАЧА 7.027. Дан треугольник  $ABC$ :  $A(1; 5; 3)$ ,  $B(3; 6; 5)$ ,  $C(1; 1; 0)$ . Найдите координаты точки пересечения стороны  $BC$  и биссектрисы угла  $A$ .

Решение.  $|AB| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$ ;  $|AC| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = 5$ . Если биссектриса угла  $A$  пересекает сторону  $BC$  в точке



$A_1(x; y; z)$ , то по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника  $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC} = 0,6$ , то есть точка  $A_1$  делит отрезок  $BC$  в отношении  $\lambda = 0,6$ . Тогда:

$$x = \frac{3 + 0,6 \cdot 1}{1 + 0,6} = \frac{9}{4}, \quad y = \frac{6 + 0,6 \cdot 1}{1 + 0,6} = \frac{33}{8}, \quad z = \frac{5 + 0,6 \cdot 0}{1 + 0,6} = \frac{25}{8}.$$

Ответ:  $\left(\frac{9}{4}; \frac{33}{8}; \frac{25}{8}\right)$ .

■ ЗАДАЧА 7.043. Даны точки  $A(1; 3; 5)$  и  $B(2; 1; -7)$ . Найдите на оси абсцисс все такие точки  $C$ , что треугольник  $ABC$  — прямоугольный.

Решение. Пусть  $C(x; 0; 0)$  — искомая точка. Тогда имеем:  $\overrightarrow{AB}(1; -2; -12)$ ,  $\overrightarrow{AC}(x - 1; -3; -5)$ ,  $\overrightarrow{BC}(x - 2; -1; 7)$ . Может представиться один и только один из трех случаев: в треугольнике  $ABC$  прямым окажется или угол при вершине  $A$ , или угол при вершине  $B$ , или, наконец, угол при вершине  $C$ . Рассмотрим каждый из этих случаев.

а)  $\angle BAC$  — прямой, если  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ . В координатной форме это означает:  $x - 1 + 6 + 60 = 0$ , откуда  $x = -65$ , то есть вершина прямого угла имеет координаты:  $C_1(-65; 0; 0)$ .

б)  $\angle ABC$  — прямой, если  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ . В координатах это равносильно уравнению  $x - 2 + 2 - 84 = 0$ , откуда  $x = 84$ , то есть вершина прямого угла имеет координаты:  $C_2(84; 0; 0)$ .

в)  $\angle ACB$  — прямой, если  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ . В координатах это равносильно уравнению  $(x - 1)(x - 2) + 3 - 35 = 0$  или  $x^2 - 3x - 30 = 0$ , откуда  $x_1 = \frac{3 - \sqrt{129}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{3 + \sqrt{129}}{2}$ , то есть существуют два прямоугольных треугольника, вершинами прямых углов которых являются точки  $C_3\left(\frac{3 - \sqrt{129}}{2}; 0; 0\right)$  и  $C_4\left(\frac{3 + \sqrt{129}}{2}; 0; 0\right)$ .

Ответ:  $C_1(-65; 0; 0)$ ;  $C_2(84; 0; 0)$ ;  $C_3\left(\frac{3 - \sqrt{129}}{2}; 0; 0\right)$ ;  $C_4\left(\frac{3 + \sqrt{129}}{2}; 0; 0\right)$ .

## § 25. Задание фигур уравнениями и неравенствами

## 25.1. Уравнение сферы

Пусть  $f(x, y, z) = 0$  — уравнение с переменными  $x, y, z$ ;  $\Phi$  — некоторая поверхность (на рис. 212 изображена часть этой поверхности).

**Определение.** Уравнение  $f(x, y, z) = 0$  называется уравнением поверхности  $\Phi$ , если этому уравнению удовлетворяют координаты  $x, y, z$  любой точки  $M$  этой поверхности и не удовлетворяют координаты никакой точки пространства, не принадлежащей поверхности  $\Phi$ .

Если  $f(x, y, z)$  — многочлен, то его *степень называют порядком поверхности  $\Phi$* .

Составим, например, уравнение сферы  $S$  с центром  $K(a; b; c)$  и радиусом  $R$ .

Пусть  $M(x; y; z)$  — произвольная точка сферы  $S(K, R)$ . Тогда расстояние от точки  $M$  до центра  $K$  сферы равно  $R$ , то есть  $|KM| = R$  или  $KM^2 = R^2$  (рис. 213).

Учитывая, что  $|KM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ , получаем искомое уравнение сферы

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \quad (1)$$

Например, сфера с центром в точке  $(1; -2; 3)$  и радиусом 5 имеет уравнение  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$  или после преобразований

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0.$$

В уравнении (1) сферы  $S(K, R)$  в алгебраической форме выражено характеристическое свойство точек данной сферы и

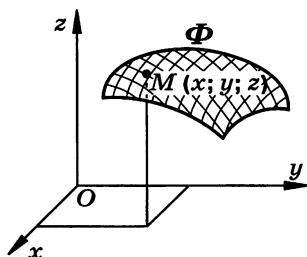


Рис. 212

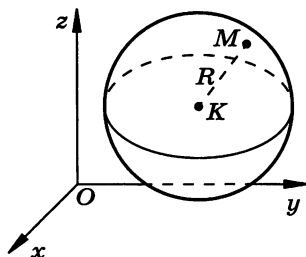


Рис. 213

только точек  $M$  этой сферы таких, что  $KM = R$ . Говорят, что сфера с центром  $(a; b; c)$  и радиусом  $R$  задается уравнением (1).

Сфера, центр которой совпадает с началом системы координат  $(a = b = c = 0)$ , задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что сфера — это поверхность второго порядка. (Наблюдается аналогия с окружностью, которая на плоскости является линией второго порядка.)

Если в пространстве некоторая линия  $\gamma$  является пересечением двух поверхностей  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , заданных уравнениями  $f_1(x, y, z) = 0$  и  $f_2(x, y, z) = 0$ , то координаты  $x, y, z$  любой точки  $M$  линии  $\gamma$  удовлетворяют каждому из этих уравнений, то есть удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

В этом случае говорят, что *система уравнений (\*) задает линию  $\gamma$* .

**!** Фигуры в пространстве могут быть заданы как уравнениями, так и неравенствами. Говорят, что *фигура  $\Phi$  задается неравенством  $g(x, y, z) \geq a$  или  $g(x, y, z) \leq a$  в прямоугольной системе координат  $Oxyz$ , если этому неравенству удовлетворяют координаты  $x, y, z$  любой точки  $M$  фигуры  $\Phi$  и не удовлетворяют координаты  $x, y, z$  любой точки пространства, не принадлежащей данной фигуре.*

Например, шар с центром  $K$  и радиусом  $R$  представляет собой множество всех точек  $M$  пространства, для каждой из которых справедливо

$$|KM| \leq R \quad \text{или} \quad |KM|^2 \leq R^2. \quad (3)$$

Пусть в прямоугольной системе координат  $Oxyz$  центр  $K$  шара и его произвольная точка  $M$  имеют координаты:  $K(a; b; c)$ ,  $M(x; y; z)$ . Тогда расстояние  $|KM|$  равно

$$|KM| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}.$$

Следовательно, характеристическое свойство (3) для точек  $M$  этого шара в координатах равносильно неравенству

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq R^2. \quad (4)$$

Неравенству (4) удовлетворяют координаты  $x, y, z$  любой точки  $M(x; y; z)$  шара с центром  $K(a; b; c)$  и радиусом  $R$  и не удовлетворяют координаты ни одной из точек пространства, не принадлежащих этому шару. Это говорит о том, что *неравенство (4) задает в системе координат  $Oxyz$  шар с центром  $(a; b; c)$  и радиусом  $R$ .*

Заметим, что не всякое уравнение вида  $f(x, y, z) = 0$  задает поверхность. Например, уравнение  $x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 0$  задает единственную точку  $A(0; -2; 1)$ ; уравнение  $x^2 + y^2 = 0$  задает прямую — ось аппликат; уравнение  $((x - 3)^2 + y^2 + z^2) \cdot x = 0$  задает плоскость  $Oyz$  и точку  $M(3; 0; 0)$ .

Подумайте, какие поверхности определены уравнениями:

- $y = 0$ ;
- $x = -5$ ;
- $z^2 + 4z + 4 = 0$ ;
- $z \cdot x = 0$ ;
- $z^2 - 4z = 0$ ;
- $\square\square x^2 + y^2 = 9. \square\square$

## 25.2. Уравнение плоскости

Пусть даны точка  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  и ненулевой вектор  $\vec{n}(A; B; C)$  ( $\vec{n} \neq \vec{0}$ , то есть  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ ). Тогда через точку  $M_0$  проходит только одна плоскость (рис. 214), для которой вектор  $\vec{n}$  является перпендикулярным. Обозначим эту плоскость  $\alpha$  (она однозначно определяется точкой  $M_0$  и вектором нормали  $\vec{n}$ ).

Для вывода уравнения плоскости  $\alpha$  определим то свойство, которым обладают лишь точки плоскости  $\alpha$  по отношению к точке  $M_0$  и вектору  $\vec{n}$ .

Так как  $\vec{n} \perp \alpha$ , то вектор  $\vec{n}$  перпендикулярен любому вектору плоскости  $\alpha$ . Поэтому, если  $M(x; y; z)$  — произвольная точка плоскости  $\alpha$ , то  $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$ . Это означает, что скалярное произведение векторов  $\vec{n}$  и  $\overrightarrow{M_0M}$  равно 0:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0. \quad (1)$$

Равенство (1) выражает характеристическое свойство точек плоскости  $\alpha$  (*необходимое и достаточное условие*

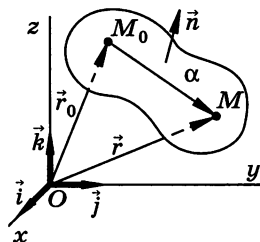


Рис. 214

принадлежности точки  $M$  плоскости  $\alpha$ ); для любой точки  $M$  пространства, не принадлежащей плоскости  $\alpha$ , условие  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$  не выполняется, так как векторы  $\vec{n}$  и  $\overrightarrow{M_0M}$  не перпендикулярны.

Равенство (1) называют **векторным уравнением плоскости  $\alpha$**  (или уравнением плоскости  $\alpha$  в векторной форме).

Так как вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  имеет координаты:  $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ , то векторное уравнение (1) плоскости принимает в координатной форме вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) называется **уравнением плоскости по точке и вектору нормали**.

Раскрывая скобки в левой части уравнения (2) и обозначая  $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ , получим уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (3)$$

которое называется **общим уравнением плоскости**.

В общем уравнении (3) плоскости коэффициенты  $A, B, C$  являются координатами ненулевого вектора  $\vec{n}$ , поэтому

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0, \quad (4)$$

(иначе говоря, коэффициенты  $A, B$  и  $C$  не равны нулю одновременно).

Таким образом, любой плоскости  $\alpha$  пространства в системе прямоугольных координат  $Oxyz$  соответствует линейное уравнение  $Ax + By + Cz + D = 0$  с тремя переменными  $x, y, z$  при условии  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ .

Справедливо обратное утверждение: любое уравнение вида (3) при условии (4) является в системе прямоугольных координат  $Oxyz$  уравнением некоторой плоскости.

В самом деле, уравнение (3) имеет бесконечное множество решений. Пусть  $(x_0; y_0; z_0)$  — какое-нибудь одно из них. Тогда справедливо равенство

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (5)$$

Вычитая из уравнения (3) равенство (5), получаем уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Это уравнение является уравнением плоскости, которая проходит через точку  $(x_0; y_0; z_0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n}(A; B; C)$  и, следовательно, является единственной.

Таким образом, нами доказана

**Теорема 37.** Каждое уравнение первой степени  $Ax + By + Cz + D = 0$  при условии  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$  задает в прямоугольной системе координат  $Oxyz$  единственную плоскость, для которой вектор  $\vec{n}(A; B; C)$  является вектором нормали.

Итак, все векторы, перпендикулярные плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ , имеют координаты  $(kA; kB; kC)$  ( $k \neq 0$ ); координаты  $(a; b; c)$  любого вектора, параллельного этой плоскости, удовлетворяют условию:  $a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0$ .

Из вышесказанного следует, что две плоскости

$$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad \beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

— совпадают, если существует такое число  $k$ , что

$$\begin{cases} A_1 = k \cdot A_2, \\ B_1 = k \cdot B_2, \\ C_1 = k \cdot C_2, \\ D_1 = k \cdot D_2; \end{cases}$$

— параллельны, если существует такое число  $k$ , что

$$\begin{cases} A_1 = k \cdot A_2, \\ B_1 = k \cdot B_2, \\ C_1 = k \cdot C_2, \\ D_1 \neq k \cdot D_2. \end{cases}$$

В остальных случаях плоскости пересекаются.

Угол между двумя плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , заданными уравнениями соответственно  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ , удобно связать с углом между векторами их нормалей  $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$  и  $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$  (рис. 215). Именно,

$$\cos \angle (\alpha; \beta) = |\cos \angle (\vec{n}_1; \vec{n}_2)| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В частности, равенство  $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$  выражает необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ .

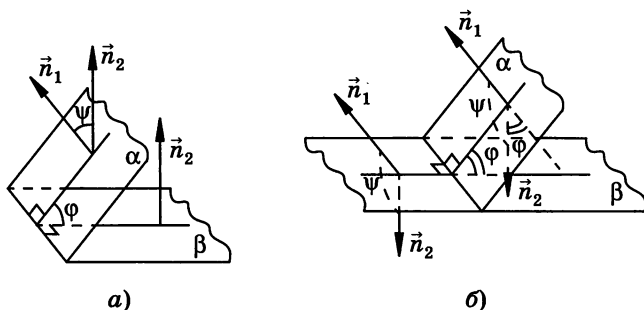


Рис. 215

Общее уравнение плоскости (3) называется *полным*, если все его коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, уравнение называется *неполным*.

Рассмотрим все возможные виды *неполных уравнений* плоскости  $\alpha$ .

1) Если  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ ,  $C \neq 0$ ,  $D = 0$ , то уравнение примет вид:  $Ax + By + Cz = 0$ . Убедитесь, что плоскость  $\alpha$  проходит через начало координат (рис. 216).

2) Если  $A = 0$ ,  $B \neq 0$ ,  $C \neq 0$ ,  $D \neq 0$ , то уравнение имеет вид:  $By + Cz + D = 0$ . В этом случае вектор  $\vec{n}(0; B; C)$  перпендикулярен координатной оси  $Ox$ , а плоскость  $\alpha$  не проходит через начало координат и параллельна оси  $Ox$  (рис. 217).

Аналогично, в случае равенства нулю только одного из коэффициентов  $B$  или  $C$  в уравнении (3), плоскость  $\alpha$  параллельна (почему?) соответственно оси  $Oy$  (рис. 218) или оси  $Oz$ .

3) Если  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C \neq 0$ ,  $D \neq 0$ , то плоскость имеет уравнение  $Cz + D = 0$ ; она не проходит через начало координат и

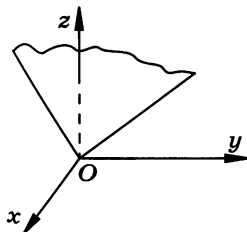


Рис. 216

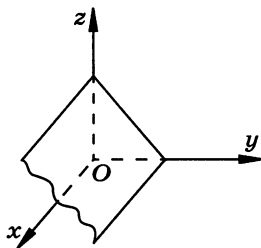


Рис. 217

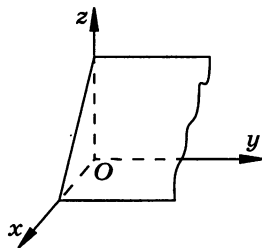


Рис. 218

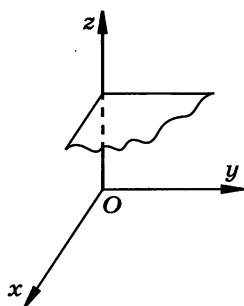


Рис. 219

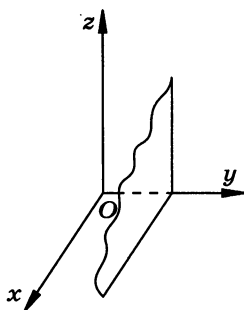


Рис. 220

параллельна координатной плоскости  $Oxy$  (так как она параллельна осям  $Ox$  и  $Oy$ ) (рис. 219).

Аналогично убедитесь, что если  $B = 0$ ,  $C = 0$ ,  $A \neq 0$ ,  $D \neq 0$  или  $A = 0$ ,  $C = 0$ ,  $B \neq 0$ ,  $D \neq 0$ , то плоскость  $\alpha$  имеет соответственно уравнение  $Ax + D = 0$  или  $By + D = 0$ , при этом она параллельна координатной плоскости соответственно  $Oyz$  или  $Oxz$  (рис. 220).

4) Если  $A \neq 0$ ,  $B = C = D = 0$ , то плоскость  $\alpha$  имеет уравнение  $Ax = 0$  или  $x = 0$ ; плоскость  $\alpha$  проходит через начало координат и параллельна осям  $Oy$  и  $Oz$ . Это означает, что уравнением  $x = 0$  задана координатная плоскость  $Oyz$ . Аналогично, уравнением  $y = 0$  задается координатная плоскость  $Oxz$ , а уравнением  $z = 0$  — координатная плоскость  $Oxy$  (рис. 221).

Пусть теперь  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ ,  $C \neq 0$ ,  $D \neq 0$ . Тогда плоскость  $\alpha$  не проходит через начало координат и не параллельна ни одной из координатных осей, значит, она пересекает каждую из них (рис. 222).

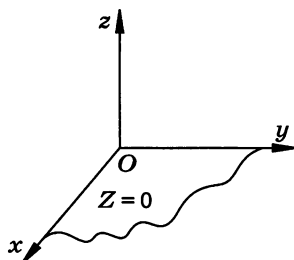


Рис. 221

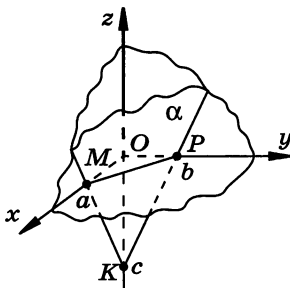


Рис. 222



Найдем точки пересечения этой плоскости с координатными осями.

Для определения точки ее пересечения с осью  $Ox$  преобразуем уравнение  $Ax + By + Cz + D = 0$  к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (4a)$$

где  $a = -\frac{D}{A}$ ,  $b = -\frac{D}{B}$ ,  $c = -\frac{D}{C}$ . Тогда, решая систему уравнений

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad y = 0, \quad z = 0$$

(ось  $Ox$  — прямая пересечения координатных плоскостей  $Oxy$  и  $Oxz$  задана системой уравнений  $y = 0$ ,  $z = 0$ ), получим: плоскость  $\alpha$  пересекает ось  $Ox$  в точке с координатами  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , то есть в точке  $(a; 0; 0)$ .

Аналогично рассуждая, получим: плоскость  $\alpha$  пересекает координатные оси  $Oy$  и  $Oz$  соответственно в точках  $(0; b; 0)$  и  $(0; 0; c)$ .

Сравнивая числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  в уравнении (4a) плоскости  $\alpha$  и координаты точек ее пересечения с координатными осями, приходим к выводу: числа  $|a|$ ,  $|b|$  и  $|c|$  равны длинам отрезков, которые отсекает плоскость на осях  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно. Поэтому уравнение (4a) называется *уравнением плоскости «в отрезках»*. Этим уравнением часто пользуются при изображении плоскости относительно системы координат, когда эта плоскость задана своим общим уравнением (рис. 222).

■ ЗАДАЧА 7.085. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки: а)  $P(2; 0; 0)$ ,  $K(0; 2; 0)$ ,  $H(0; 0; 2)$ ; б)  $P(2; -1; 2)$ ,  $K(1; -2; 3)$ ,  $H(-1; 2; 0)$ .

Решение. а) Воспользуемся уравнением плоскости в отрезках. В нашем случае  $a = b = c = 2$ , поэтому уравнение плоскости

$PKH$  запишется в виде  $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$  или  $x + y + z - 2 = 0$ .

б) Пусть плоскость  $\alpha = (PKH)$  имеет уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (1)$$

Чтобы составить уравнение плоскости  $\alpha$ , нужно найти коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и свободный член  $D$ . Для этого используем условие принадлежности точек  $P$ ,  $K$  и  $H$  плоскости  $\alpha$ . Так как

точки  $P$ ,  $K$  и  $H$  принадлежат плоскости  $\alpha$ , то их координаты удовлетворяют уравнению (1), то есть

$$\begin{cases} P(2; -1; 2) \in \alpha \Rightarrow A \cdot 2 + B \cdot (-1) + C \cdot 2 + D = 0, \\ K(1; -2; 3) \in \alpha \Rightarrow A \cdot 1 + B \cdot (-2) + C \cdot 3 + D = 0, \\ H(-1; 2; 0) \in \alpha \Rightarrow A \cdot (-1) + B \cdot 2 + C \cdot 0 + D = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2A - B + 2C + D = 0, \\ A - 2B + 3C + D = 0, \\ -A + 2B + D = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, выразим коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  через  $D$ :  $A = -\frac{D}{9}$ ,  $B = -\frac{5D}{9}$ ,  $C = -\frac{2D}{3}$ . Полагая  $D = -9$ , имеем  $A = 1$ ,  $B = 5$ ,  $C = 6$ . Подставив найденные значения  $A$ ,  $B$  и  $C$  в уравнение (1), получаем искомое уравнение плоскости  $PKH$ :  $x + 5y + 6z - 9 = 0$ .

### 25.3. Прямая в пространстве в координатах

**Вектор  $\overrightarrow{AM}$  называется направляющим вектором прямой  $l$** , если отрезок  $AM$  параллелен прямой  $l$  или лежит на ней (в таком случае также говорят, что вектор  $\overrightarrow{AM}$  параллелен прямой  $l$ ).

#### а) Задание прямой точкой и направляющим вектором

Пусть в прямоугольной системе координат  $Oxyz$  заданы точка  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  и ненулевой вектор  $\vec{p}(a; b; c)$ . Через точку  $M_0$  проходит лишь одна прямая, для которой вектор  $\vec{p}$  является направляющим (рис. 223). Обозначим эту прямую  $l$  и составим ее уравнение.

Для любой точки  $M(x; y; z)$  прямой  $l$  (в отличие от точек вне прямой  $l$ ) характерным является то, что вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  коллинеарен вектору  $\vec{p}$ , то есть

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{p}, \quad \text{где } t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

При каждом значении параметра  $t$  получается определенная точка  $M$  прямой  $l$ , в частности, при  $t = 0$  получаем «начальную» точку  $M_0$  этой прямой.

Соотношение (1) называется **параметрическим уравнением прямой в векторной форме**.

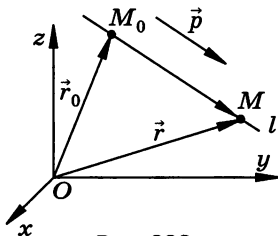


Рис. 223

Так как вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  имеет координаты  $(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ , то векторное уравнение (1) прямой равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb, \\ z = z_0 + tc, \end{cases} \quad (2)$$

которые называются **параметрическими уравнениями прямой** в координатной форме ( $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ).

Выражая из каждого уравнения системы (2) параметр  $t$  и приравнявая эти значения, получаем

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \quad (3)$$

Равенства (3) называются **каноническими уравнениями прямой**, в которых числа  $a, b, c$  — координаты направляющего вектора  $\vec{p}$  данной прямой.

В равенствах уравнений (3) выражается в координатной форме условие коллинеарности векторов  $\vec{p}$  и  $\overrightarrow{M_0M}$ . Поэтому в случае, если одна или две координаты направляющего вектора прямой равны нулю, то в уравнениях вида (3) этой прямой могут равняться нулю соответственно один или два (но не три!) знаменателя. Такая форма записи канонических уравнений прямой верна и, следовательно, допустима. Например, канонические уравнения координатной оси  $Ox$  можно записать в виде:  $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$ .

Уравнения прямой, проходящей через точку  $A(2; -1; 3)$  параллельно вектору  $\vec{p}(1; -2; 0,5)$ , имеют вид:

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = 3 + 0,5t; \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

При  $t = -2$  получаем точку  $M(0; 3; 2)$ , лежащую на данной прямой.

Тогда эту прямую можно задать так:

$$\begin{cases} x = 0 + t, \\ y = 3 - 2t, \\ z = 2 + 0,5t; \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Заметим, что параметр в уравнениях прямой можно обозначать любой буквой (например,  $t$  или  $u$ ).

Более того, если в качестве направляющего вектора данной прямой взять вектор  $\vec{q}$ , коллинеарный вектору  $\vec{p}$ , например,  $\vec{q} = -2\vec{p}$ , то есть  $\vec{q}(-2; 4; -1)$ , то уравнения прямой примут вид:

$$\begin{cases} x = -2u, \\ y = 3 + 4u, \\ z = 2 - u; \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$$

Если в одной задаче даны две различные прямые, то в их уравнениях параметры обозначают обычно разными буквами. Например, при исследовании взаимного расположения двух прямых

$$\begin{cases} x = u, \\ y = 3 - u, \\ z = 3; \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

и

$$\begin{cases} x = -5 + 3t, \\ y = 2, \\ z = -17 + 10t; \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

рассматривается система

$$\begin{cases} -5 + 3t = u, \\ 2 = 3 - u, \\ -17 + 10t = 3. \end{cases}$$

Ее решение позволяет сделать вывод, что данные прямые имеют единственную общую точку  $(1; 2; 3)$ , которая получается при  $u = 1$  для первой прямой и при  $t = 2$  для второй прямой. Если бы в уравнениях этих прямых параметр был обозначен одной и той же буквой, то эту задачу не удалось бы решить.

#### б) Угол между прямыми в координатах

Пусть прямые  $a$  и  $b$  имеют направляющие векторы  $\vec{p}_1(a_1; a_2; a_3)$  и  $\vec{p}_2(b_1; b_2; b_3)$  и заданы параметрическими уравнениями соответственно

$$\begin{cases} x = x_1 + a_1 t, \\ y = y_1 + a_2 t, \\ z = z_1 + a_3 t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_2 + b_1 t, \\ y = y_2 + b_2 t, \\ z = z_2 + b_3 t. \end{cases}$$

Обозначим:  $\varphi = \angle(a; b)$ ,  $\psi = \angle(\vec{p}_1; \vec{p}_2)$ . Так как угол  $\psi$  между векторами изменяется в промежутке  $[0^\circ; 180^\circ]$ , а угол  $\varphi$

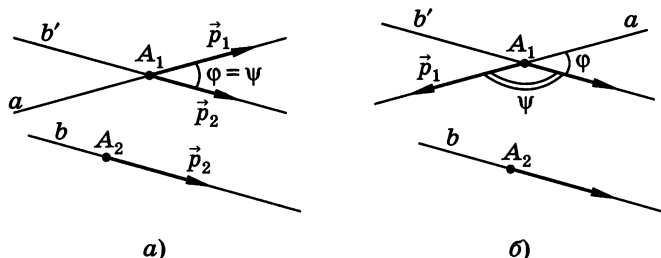


Рис. 224

между прямыми — в промежутке  $[0^\circ; 90^\circ]$  (п. 12.1), то либо  $\varphi = \psi$  (рис. 224, а), либо  $\varphi + \psi = 180^\circ$  (рис. 224, б). Учитывая, что  $\cos \varphi \geq 0$  при  $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ]$ , получаем  $\cos \varphi = |\cos \psi|$ . Это означает, что косинус угла между прямыми может быть найден с помощью формулы:

$$\cos \varphi = |\cos \psi| = \frac{|\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2|}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|} \quad \text{или в координатном виде}$$

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (4)$$

Учитывая условия коллинеарности и перпендикулярности двух ненулевых векторов, мы получаем в координатном виде условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве:

$$a \parallel b \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad (5)$$

или

$$\begin{cases} a_1 = u \cdot a_2, \\ b_1 = u \cdot b_2, \\ c_1 = u \cdot c_2; \end{cases} \quad \text{где } u \in \mathbf{R}.$$

$$a \perp b \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0. \quad (6)$$

**в) Уравнения прямой, проходящей через две данные точки**

Пусть в системе координат  $Oxyz$  заданы две точки:  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ . Прямую, проходящую через точки  $M_1$  и  $M_2$ , обозначим  $l$  и составим ее уравнения. Для этого воспользуемся уравнениями (3).

Вектор  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  примем в качестве направляющего вектора прямой  $l$ , а точку  $M_1$  — в качестве ее «начальной» точки (рис. 225).

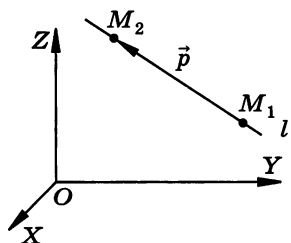


Рис. 225

Направляющий вектор имеет координаты:  $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ . Поэтому  $a = x_2 - x_1$ ,  $b = y_2 - y_1$ ,  $c = z_2 - z_1$ . Тогда, заменив в уравнениях (3) координаты точки  $M_0$  одноименными координатами точки  $M_1$ , а вместо  $a$ ,  $b$  и  $c$  подставив указанные выше их значения, получаем уравнения

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad (7)$$

или

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1), \end{cases} \quad \text{где } t \in \mathbb{R},$$

которые называются *уравнениями прямой по двум ее точкам* (см. замечание к (3)).

■ ЗАДАЧА 7.140. Составьте уравнения прямой, проходящей через точки  $A(1; -2; 3)$  и  $B(2; 1; 5)$ .

Решение. Пусть  $A(1; -2; 3)$  — «начальная» точка прямой  $l = AB$ , а  $\overrightarrow{AB}(1; 3; 2)$  — ее направляющий вектор. Тогда параметрические уравнения (2) прямой  $l$  имеют вид:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 3 + 2t. \end{cases} \quad (*)$$

Уравнения (4) прямой  $l$  по двум ее точкам имеют вид

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y + 2}{1 + 2} = \frac{z - 3}{5 - 3} \quad \text{или} \quad \frac{x - 1}{1} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 3}{2}. \quad (**)$$

Заметим, что уравнения (\*\*) являются каноническими уравнениями прямой  $l$ .

г) Прямая как линия пересечения двух плоскостей

Если прямая  $a$  является линией пересечения двух плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ , заданных уравнениями соответственно  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ , то координаты  $x, y, z$

любой точки  $M$  прямой  $a$  удовлетворяют уравнениям этих плоскостей, то есть удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

В таком случае говорят, что *в пространстве прямая  $a$  задается системой двух общих уравнений первого порядка с тремя переменными  $x, y, z$ .*

Попробуйте сами рассмотреть прямую, заданную системой уравнений

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3 = 0, \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

и убедиться, что ее параметрические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} + 3u, \\ y = -\frac{3}{2} + u, \text{ где } u \in \mathbf{R}. \\ z = -2u; \end{cases}$$

#### 25.4. Взаимное расположение прямой и плоскости в координатах

Условие параллельности прямой  $l$ :

$$\begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb, \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

и плоскости  $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$  следует из условия ортогональности направляющего вектора  $\vec{p}(a; b; c)$  прямой  $l$  и вектора  $\vec{n}(A; B; C)$  нормали к плоскости  $\alpha$ . Это означает: **прямая  $l$  и плоскость  $\alpha$  параллельны тогда и только тогда, когда  $Aa + Bb + Cc = 0$ .** В противном случае прямая и плоскость пересекаются. В частности, если векторы  $\vec{p}(a; b; c)$  и  $\vec{n}(A; B; C)$  коллинеарны, то плоскость  $\alpha$  перпендикулярна прямой  $l$ .

Угол между прямой и плоскостью можно найти, используя угол между направляющим вектором  $\vec{p}(a; b; c)$  прямой  $l$  и вектором  $\vec{n}(A; B; C)$  нормали к плоскости  $\alpha$  (рис. 226):

$$\sin \angle (l; \alpha) = |\cos \angle (\vec{p}; \vec{n})| = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

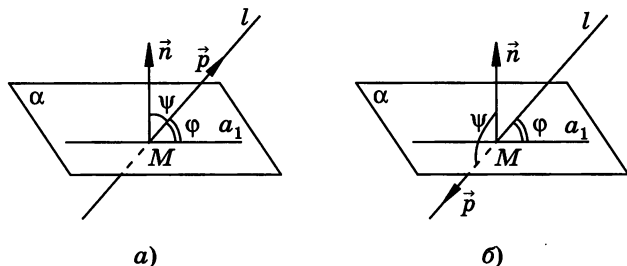


Рис. 226

Пусть в системе координат  $Oxyz$  плоскость  $\alpha$  и прямая  $l$  заданы уравнениями:

$$(\alpha) \quad Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1)$$

$$(l) \quad \begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (2)$$

и пересекаются в некоторой точке  $K$  (рис. 227).

Как же найти координаты точки  $K$ , зная уравнения плоскости  $\alpha$  и прямой  $l$ ? Ответ на этот вопрос помогают найти следующие рассуждения.

Так как точка  $K$  принадлежит и прямой  $l$ , и плоскости  $\alpha$ , то координаты этой точки должны удовлетворять уравнениям (1) и (2), то есть искомая тройка чисел  $x, y, z$  является решением системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t. \end{cases} \quad (3)$$

Каждому значению параметра  $t$  соответствует некоторая единственная точка прямой  $l$ . Найдем то значение параметра  $t$ ,

при котором точка прямой  $l$  является точкой пересечения этой прямой и плоскости  $\alpha$ : в первое уравнение системы (3) вместо  $x, y, z$  подставим их выражения из (2), после чего получаем уравнение  $A(x_0 + a_1 t) + B(y_0 + a_2 t) + C(z_0 + a_3 t) + D = 0$  относительно параметра  $t$ , из которого находим:

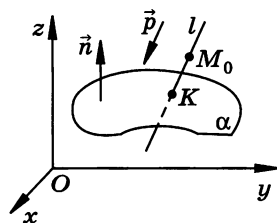


Рис. 227



$t = \frac{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}$  — это значение параметра  $t$ , соответствующее той точке прямой  $l$ , в которой она пересекает плоскость  $\alpha$ . Подставив в (2) найденное значение  $t$ , получим искомые координаты точки пересечения прямой  $l$  и плоскости  $\alpha$ .

*Замечание.* Так как по условию прямая  $l$  и плоскость  $\alpha$  пересекаются, то  $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$ . Это является следствием неперпендикулярности направляющего вектора  $\vec{p}(a_1; a_2; a_3)$  прямой  $l$  и вектора нормали  $\vec{n}(A; B; C)$  к плоскости  $\alpha$ .

■ ЗАДАЧА 7.141. Найдите точку пересечения прямой  $l$ :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = -1 + t \end{cases}$$

и плоскости  $\alpha$ :  $x + y + 2z - 3 = 0$ .

Решение. Обозначим  $K = l \cap \alpha$ . Координаты точки  $K$  удовлетворяют уравнениям прямой  $l$  и плоскости  $\alpha$ , поэтому являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} x + y + 2z - 3 = 0, \\ x = 1 - 2t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

Подставив в уравнение  $x + y + 2z - 3 = 0$  вместо  $x, y, z$  их выражения через  $t$ , имеем  $(1 - 2t) + (2 + 3t) + 2(-1 + t) - 3 = 0$ , откуда  $t = \frac{2}{3}$ . При  $t = \frac{2}{3}$  получаем координаты точки  $K$ :

$x = 1 - 2 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$ ,  $y = 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 4$ ;  $z = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$ , то есть  $K(-\frac{1}{3}; 4; -\frac{1}{3})$ . Проверьте, что точка  $K$  является искомой.

Ответ:  $(-\frac{1}{3}; 4; -\frac{1}{3})$ .

## § 26. Расстояние от точки до плоскости в координатах

Напомним, что расстояние от данной точки  $M_0$  до плоскости  $\alpha$  равно длине перпендикуляра  $M_0M_1$ , опущенного из точки  $M_0$  на плоскость  $\alpha$  (рис. 228).

Проведем через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , не лежащую на плоскости  $\alpha$ , прямую  $h$ , перпендикулярную  $\alpha$ . Так как вектор нормали плоскости  $\alpha$  является направляющим вектором прямой  $h$ , то для поиска координат  $x_1, y_1, z_1$  точки  $M_1$  пересечения прямой  $h$  и плоскости  $\alpha$  достаточно, как и в предыдущем параграфе, решить систему уравнений относительно параметра  $t$ :

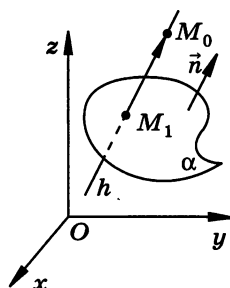


Рис. 228

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x = x_0 + At, \\ y = y_0 + Bt, \\ z = z_0 + Ct. \end{cases}$$

Решением этой системы является

$$t_0 = \frac{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A \cdot A + B \cdot B + C \cdot C} = \frac{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}, \text{ что по-}$$

зволяет нам найти искомые координаты точки пересечения прямой  $h$  и плоскости  $\alpha$ :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + At_0, \\ y_1 = y_0 + Bt_0, \\ z_1 = z_0 + Ct_0. \end{cases}$$

Тогда находим длину отрезка  $M_0M_1$ , равную искомому расстоянию  $d$  от точки  $M_0$  до плоскости  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} d &= |M_0M_1| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} = \\ &= \sqrt{(At_0)^2 + (Bt_0)^2 + (Ct_0)^2} = |t_0| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

Если точка  $M_0$  лежит на плоскости, то  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$  и искомое расстояние равно нулю, что также следует из полученной формулы

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Расстояние от начала координат  $O(0; 0; 0)$  до плоскости  $\alpha$  равно

$$\frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Приведем еще один способ рассуждений.

Расстояние от точки  $M_0$  до плоскости  $\alpha$  обозначим:  $d = |M_0; \alpha| = |M_0 M_1|$ , где точка  $M_1$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M_0$  на плоскость  $\alpha$  (рис. 228).

Пусть в системе координат  $Oxyz$  плоскость  $\alpha$  задана уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1)$$

точки  $M_0$  и  $M_1$  имеют координаты:  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ,  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ .

Заметим, что

$$M_1 \in \alpha \Rightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \quad (2)$$

Вектор  $\overrightarrow{M_1 M_0}(x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1)$  и вектор нормали  $\vec{n}(A; B; C)$  плоскости  $\alpha$  коллинеарны, так как каждый из них перпендикулярен плоскости  $\alpha$ , поэтому

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1 M_0} &= |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M_1 M_0}| \cdot (\pm 1) = \pm d \cdot |\vec{n}|; \\ (+1, \text{ если } \vec{n} \uparrow \uparrow \overrightarrow{M_1 M_0}; \quad -1, \text{ если } \vec{n} \uparrow \downarrow \overrightarrow{M_1 M_0}). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} |M_0; \alpha| = d &= |\overrightarrow{M_1 M_0}| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1 M_0}|}{|\vec{n}|} = \\ &= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

Раскроем в числителе скобки и, пользуясь соотношением (2), заменим выражение  $-Ax_1 - By_1 - Cz_1$  числом  $D$ . Получаем

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3)$$

Сравните два приведенных способа рассуждений и выберите для себя наиболее приятный.

■ ЗАДАЧА 7.182. Найдите расстояние от точки  $K(1; -2; 3)$  до плоскости  $3x + 2y - 6z + 5 = 0$ .

Решение. Находим координаты вектора нормали  $\vec{n}$  плоскости:  $\vec{n}(3; 2; -6)$ . Тогда

$$d = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-6) \cdot 3 + 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{|-14|}{7} = 2.$$

Ответ: 2.

■ ЗАДАЧА 7.183. Найдите множество точек, равноудаленных от плоскостей  $2x + 2y - z - 3 = 0$  и  $3x + 4y + 12z - 13 = 0$ .

Решение. Пусть точка  $M(x; y; z)$  равноудалена от данных плоскостей, тогда

$$\frac{|2x + 2y - z - 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|3x + 4y + 12z - 13|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}},$$

$$\text{то есть } \frac{|2x + 2y - z - 3|}{3} = \frac{|3x + 4y + 12z - 13|}{13}.$$

Данное уравнение распадается на совокупность двух уравнений

$$\frac{2x + 2y - z - 3}{3} = \frac{3x + 4y + 12z - 13}{13}$$

$$\text{или } \frac{2x + 2y - z - 3}{3} = -\frac{3x + 4y + 12z - 13}{13}.$$

После упрощения получим уравнения двух плоскостей

$$17x + 14y - 49z = 0 \quad \text{и} \quad 35x + 38y + 23z - 78 = 0.$$

Подумайте, почему эти плоскости получились взаимно перпендикулярными и как они связаны с данными в задаче плоскостями.



## Изображение фигур в параллельной проекции

### § 1. Об изображениях фигур в параллельной проекции

Зачастую при решении стереометрических задач возникают затруднения, в значительной степени по той причине, что по условиям этих задач строятся неверные или верные, но не наглядные изображения (рисунки (чертежи)) фигур.

В школьном курсе геометрии изображения фигур на плоскости обычно осуществляются с помощью метода параллельного проектирования, сущность которого была рассмотрена нами ранее в § 12.

Теперь мы приступаем к рассмотрению некоторых вопросов теории изображений фигур (плоских и неплоских) при помощи параллельного проектирования этих фигур на плоскость изображения (плоскость проекций).

Напомним, что *фигуру, которую проектируют или изображают, называют оригиналом*, а фигуру, которая получается на плоскости проекций (или плоскости изображения) при проектировании данного оригинала, называют *параллельной проекцией* этого оригинала (этой фигуры). Обычно для построения проекции данной фигуры строят проекции тех точек фигуры, которые ее определяют.

В дальнейшем изображения фигур будут осуществляться только с помощью параллельного проектирования, поэтому вместо слов «параллельная проекция фигуры» будем говорить просто «проекция фигуры».

Прямую  $l$  (рис. 229—233), в направлении которой проектируют фигуры на

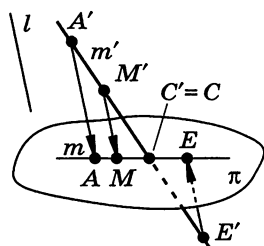


Рис. 229

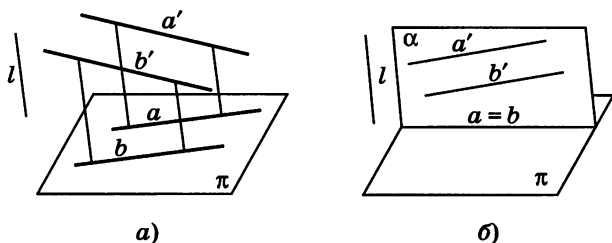


Рис. 230

плоскость проекций  $\pi$ , и все прямые пространства, параллельные ей, называют *проектирующими прямыми*. Прямая  $l$  задает направление проектирования; она выбирается пересекающей плоскость проекций  $\pi$ . Любая плоскость, параллельная проектирующей прямой, называется *проектирующей плоскостью*.

При построении изображений фигур на плоскости мы будем использовать следующие свойства параллельного проектирования, которые также рассматривались нами в § 12.

1. Проекция прямой есть прямая (рис. 229) или точка<sup>1</sup>.

2. Две параллельные прямые проектируются либо в две параллельные прямые (рис. 230, а), либо в одну и ту же прямую (рис. 230, б).

3. Проекции параллельных отрезков лежат либо на параллельных прямых (рис. 231, а), либо на одной прямой (рис. 231, б).

4. Отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой (рис. 232, а) или на параллельных прямых (рис. 232, б), равно отношению длин проекций этих отрезков.

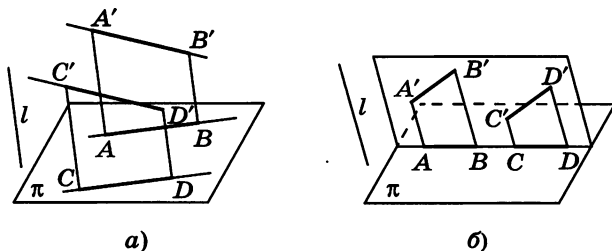


Рис. 231

<sup>1</sup> В дальнейшем мы будем обсуждать, как правило, проекции прямых, не параллельных проектирующей прямой (см. § 12).

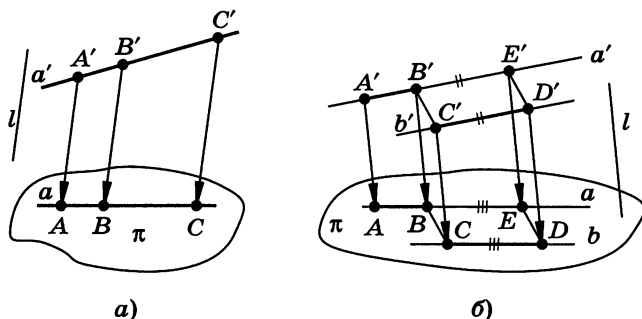


Рис. 232

В частности, середина отрезка-оригинала проектируется в середину проекции этого отрезка (рис. 233).

Фигура, подобная любой параллельной проекции данной фигуры  $\Phi$  на данную плоскость  $\pi$ , называется **изображением данной фигуры  $\Phi$  на этой плоскости  $\pi$** .

Из этого определения следует, что непосредственно параллельная проекция данной фигуры является ее изображением. Но так как плоскость изображения и направление проектирования выбираются произвольно, то проекции некоторых фигур могут оказаться «неудобно расположенными» на плоскости изображения, иметь очень малые или, наоборот, очень большие размеры. Поэтому в качестве изображения фигуры на плоскости принимают не только саму проекцию данной фигуры на эту плоскость, но и любую фигуру плоскости изображения, подобную параллельной проекции оригинала. При этом к изображениям (рисункам, чертежам), выполненным в средней школе, предъявляются следующие требования:

1. **Изображение должно быть верным**, то есть должно представлять собой фигуру, подобную параллельной проекции оригинала. Иначе говоря, по верному изображению можно представить реально существующую фигуру-оригинал. (Вероятно, многим из вас знакомы картины художника М. Эшера с «изображениями» несуществующих в реальности фигур.)

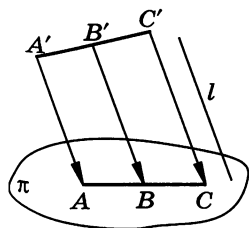


Рис. 233

2. **Изображение должно быть наглядным**, то есть должно вызывать пространственное представление о форме оригинала. Иначе говоря, **наглядность** — это

способность изображения вызывать зрительное впечатление, наиболее сходное с тем, какое вызывает геометрическая форма оригинала.

На рисунке 234 даны изображения куба. Однако верным и наглядным является изображение куба на рисунке 234, *г*. На рисунке 234, *а* и *б* изображение верно, но ненаглядно; на рисунке 234, *в* изображение неверно, так как не выделены штриховыми линиями невидимые ребра куба. Вместе с тем, изображение на рисунке 234, *в* можно считать и верным, и наглядным, если на нем изображена каркасная модель куба.

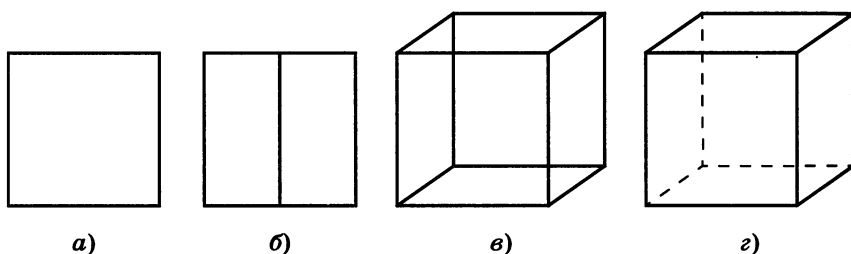




Рис. 234

 В курсе черчения наглядным изображением фигуры служит аксонометрическая проекция этой фигуры. 

**3. Изображение должно быть быстро и легко выполнимым,** то есть правила, по которым строится изображение, должны быть максимально просты.

Следует заметить: если верность изображения является строго определяемым понятием, то «наглядность» и «легкая выполнимость» изображения — субъективные понятия.

Так как грани многогранника — многоугольники, то сначала рассмотрим вопрос об изображениях плоских многоугольников, в частности, правильных многоугольников. При этом в дальнейшем будем считать, что плоскости, содержащие изображаемые фигуры, не являются проектирующими — в противном случае проекцией многоугольника служит отрезок.



## § 2. Изображение плоских фигур в параллельной проекции

### 2.1. Изображение окружности и многоугольников

#### а) Изображение окружности

Если данная окружность расположена в плоскости, которая параллельна плоскости проекций  $\pi$ , то на основании свойств параллельного проектирования проекцией данной окружности на плоскость  $\pi$  является окружность, равная данной (рис. 235, а).

Если же данная окружность расположена в плоскости  $\alpha$ , которая не параллельна плоскости проекций  $\pi$ , и проектирующие прямые пересекают плоскость  $\alpha$ , то проекцией данной окружности на плоскость  $\pi$  является кривая, которую называют *эллипсом* (рис. 235, б).

Из сказанного следует, что окружность является частным случаем эллипса. А так как середина отрезка проектируется в середину его проекции, то проекцией центра окружности (центра ее симметрии) является точка, в которой делится пополам любой проходящий через нее отрезок с концами на эллипсе. Значит, эта точка является *центром симметрии эллипса* и называется *центром эллипса*; любой отрезок с концами на эллипсе, проходящий через его центр, называется *диаметром эллипса*. Таким образом, центр и диаметр окружности проектируется в центр и диаметр эллипса.

В дальнейшем будем считать, что центр данного эллипса дан.

Эллипс используется при изображениях на плоскости фигур вращения — цилиндров, конусов и усеченных конусов, сфер и шаров, шаровых сегментов и секторов, а также шаровых слоев, о чем речь пойдет во второй части нашего учебника — в 11 классе.

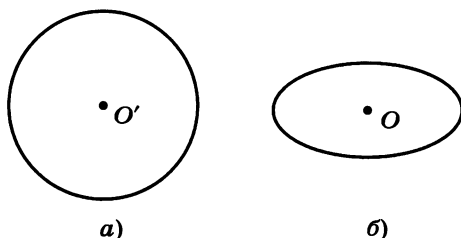


Рис. 235

### б) Изображение треугольника

Изображения плоских фигур в параллельной проекции основаны на следующих двух теоремах об изображении треугольника.

**Теорема 1** (теорема об изображении треугольника). Любым треугольник  $ABC$  может служить изображением любого треугольника  $A'B'C'$ .

**Доказательство.** Пусть в плоскости изображения  $\pi$  дан треугольник  $ABC$ , а в пространстве — треугольник  $A'B'C'$ .

Покажем, что треугольнику  $A'B'C'$  можно придать в пространстве такое положение относительно плоскости  $\pi$  и выбрать при этом такое направление проектирования, что проекцией треугольника  $A'B'C'$  будет треугольник, подобный треугольнику  $ABC$ . Тогда посредством преобразования подобия полученный треугольник-проекцию можно преобразовать в треугольник  $ABC$ , то есть  $\triangle ABC$  можно считать изображением  $\triangle A'B'C'$ .

Действительно, построим в плоскости  $\pi$  треугольник  $A_1B_1C_1$  так, чтобы: а) отрезки  $A_1B_1$  и  $A'B'$  были равны; б) треугольник  $A_1B_1C_1$  был подобен треугольнику  $ABC$ . При этом плоскость треугольника  $A'B'C'$  расположим таким образом относительно плоскости  $\pi$ , чтобы сторона  $A'B'$  совместилась со стороной  $A_1B_1$  и плоскости  $ABC$  и  $A'B'C'$  не совпадали (рис. 236). Тогда при параллельном проектировании в направлении прямой  $C'C_1$  проекцией треугольника  $A'B'C'$  служит треугольник  $A_1B_1C_1$ , подобный треугольнику  $ABC$ . Это означает, что треугольник  $ABC$  — искомое изображение треугольника  $A'B'C'$ .

Из приведенного доказательства следует вывод: изображением данного треугольника (в частности, как равнобедрен-

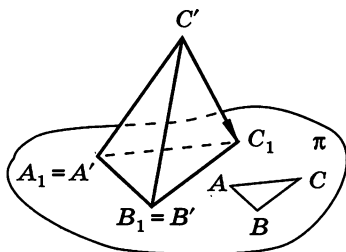


Рис. 236

ного, так и равностороннего) может быть произвольный треугольник (треугольник произвольной формы). Это означает, что длина отрезка и величина угла, вообще говоря, не сохраняются при параллельном проектировании.

Имея изображение данного треугольника, можно построить изображение любой фигуры, содержащей этот треугольник или лежащей в его плоскости. Сказанное подтверждает

**Теорема 2.** Если на плоскости изображения  $\pi$  треугольник  $ABC$  служит изображением треугольника  $A'B'C'$ , то на плоскости  $\pi$  однозначно строится изображение любой точки плоскости  $\alpha = (A'B'C')$ .

**Доказательство.** Пусть  $M'$  — произвольная точка плоскости  $\alpha$  (рис. 237, а). Будем строить изображение точки  $M'$  следующим образом. Луч  $A'M'$  пересекает прямую  $B'C'$  в точке  $K'$ , изображением которой в плоскости  $\pi$  служит такая точка  $K$  прямой  $BC$ , что выполняется условие  $BK : KC = B'K' : K'C'$ . Из этого соотношения следует, что точку  $K$  на прямой  $BC$  (рис. 237, б) можно построить (как?), и притом только одну (почему?). Далее на луче  $AK$  можно построить (каким образом?) такую единственную (почему?) точку  $M$ , что  $AK : KM = A'K' : K'M'$ .

Точка  $M$  — искомое изображение точки  $M'$ .

Смысл и важность теорем 1 и 2 состоит в следующем: при изображении плоской фигуры в параллельной проекции в плоскости изображения произвольно строится изображение трех точек оригинала, не лежащих на одной прямой (трех неколлинеарных точек). Изображения остальных точек оригинала

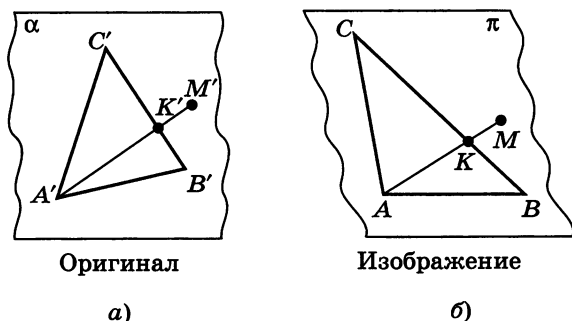


Рис. 237

нала (элементов оригинала) не могут быть произвольными, а строятся с учетом его аффинных свойств. Поэтому алгоритм построения изображения плоской фигуры таков.

1. Начертить оригинал (с точностью до подобия).
2. Выделить в оригинале какой-либо треугольник.
3. Изобразить этот треугольник произвольным треугольником.
4. Постепенно строить изображения остальных точек (элементов) оригинала, используя лишь его аффинные свойства.

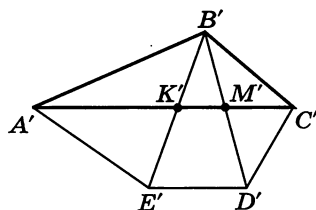
Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Пусть данная фигура — плоский пятиугольник  $A'B'C'D'E'$  (рис. 238, а). Построим его изображение в плоскости  $\pi$ .

Выделяем в данном пятиугольнике треугольник  $A'B'C'$  (см. рис. 238, а) и строим в плоскости  $\pi$  произвольный треугольник  $ABC$  (рис. 238, б), приняв его за изображение треугольника  $A'B'C'$ . Далее, проведя диагонали  $B'E'$  и  $B'D'$ , пересекающие диагональ  $A'C'$  пятиугольника  $A'B'C'D'E'$ , строим на основании соотношений  $AK : KC = A'K' : K'C'$  и  $BK : KE = B'K' : K'E'$  вершину  $E$ , а на основании соотношений  $AM : MC = A'M' : M'C'$  и  $BM : MD = B'M' : M'D'$  — вершину  $D$ . Тогда пятиугольник  $ABCDE$  — искомое изображение данного пятиугольника  $A'B'C'D'E'$ .

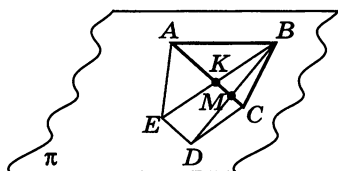
■ **ЗАДАЧА 1.** Треугольник  $ABC$  является изображением правильного треугольника  $A'B'C'$ . Постройте изображение центра окружности, описанной около треугольника  $A'B'C'$  (рис. 239).

Решение. Так как при параллельном проектировании центр окружности, описанной около правильного треугольника-



Оригинал

а)



Изображение

б)

Рис. 238

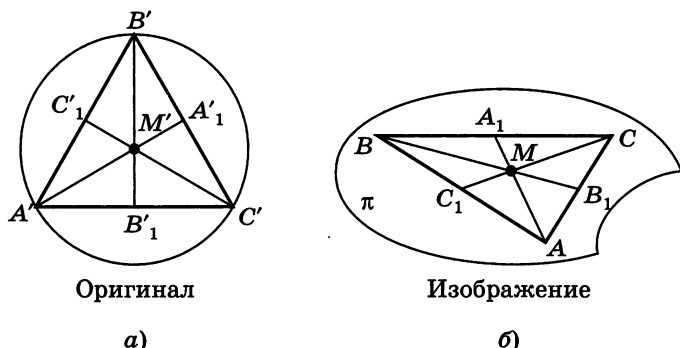


Рис. 239

оригинала  $A'B'C'$ , есть точка  $M'$  пересечения его медиан  $A'A_1$  и  $B'B_1$  (которые являются в нем высотами) (рис. 239, а), то изображением искомого центра является точка  $M$  пересечения медиан  $AA_1$  и  $BB_1$  треугольника  $ABC$  (рис. 239, б).

■ ЗАДАЧА 2. Дано изображение окружности  $\omega'$ , ее центра  $O'$  и вписанного в нее треугольника  $A'B'C'$ . Постройте изображение точки  $H'$  пересечения высот этого треугольника (рис. 240).

Решение. Отыскиваем те свойства оригинала, которые сохраняются при параллельном проектировании (аффинные свойства оригинала).

Пусть точки  $K'$  и  $L'$  — середины сторон соответственно  $A'C'$  и  $B'C'$  треугольника-оригинала  $A'B'C'$  (рис. 240, а). Тогда вы-

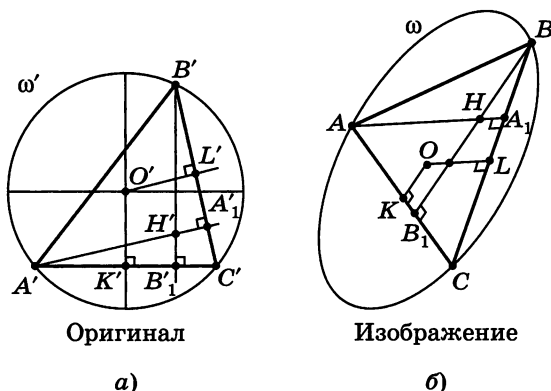


Рис. 240

соты  $A'A_1$  и  $B'B_1$  этого треугольника параллельны соответственно прямым  $O'L$  и  $O'K'$  (почему?). Так как середина отрезка изображается серединой его проекции и параллельные прямые изображаются параллельными прямыми, то на изображении (рис. 240, б) строим: 1. Точки  $K$  и  $L$  — середины сторон соответственно  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ . 2. Проводим прямые  $AA_1$  и  $BB_1$ , параллельные прямым соответственно  $OL$  и  $OK$ . Точка  $H$  пересечения прямых  $AA_1$  и  $BB_1$  является искомой.

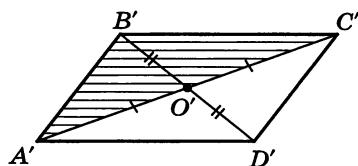
### в) Изображение параллелограмма и трапеции

Пусть дан параллелограмм  $A'B'C'D'$  (рис. 241, а). В частности, это может быть ромб, прямоугольник или квадрат.

Так как у параллелограмма противоположные стороны попарно равны и параллельны, то на основании свойств параллельного проектирования (каких?) изображением параллелограмма является параллелограмм.

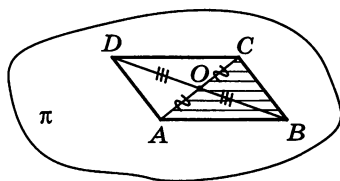
Проведем диагональ  $A'C'$  параллелограмма  $A'B'C'D'$ . Изображение треугольника  $A'B'C'$  выполним в виде произвольного треугольника  $ABC$  (рис. 241, б). Вершину  $D$  искомого параллелограмма  $ABCD$  получаем как точку, симметричную точке  $B$  относительно точки  $O$  — середины отрезка  $AC$  ( $BO : OD = B'O' : O'D' = 1 : 1$ ).

Изображение трапеции  $A'B'C'D'$  ( $A'D' \parallel B'C'$ ) можно выполнить в такой же последовательности, что и при построении изображения параллелограмма, то есть сначала построить произвольный треугольник  $ABC$ . Но для построения четвертой вершины  $D$  трапеции-изображения  $ABCD$  необходимо учитывать параллельность оснований трапеции-оригинала и отношение их длин (аффинные свойства трапеции):  $A'D' \parallel B'C' \Rightarrow AD \parallel BC$ ;  $BC : AD = B'C' : A'D'$  (рис. 242).



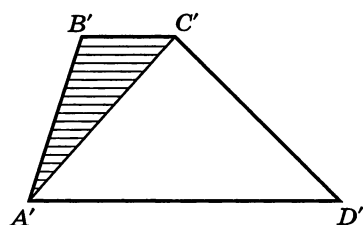
Оригинал

а)



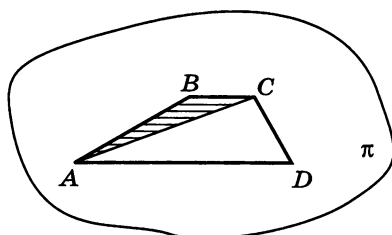
Изображение

б)



Оригинал

а)



Изображение

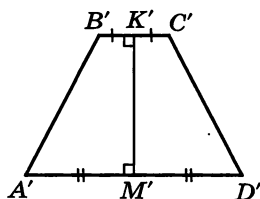
б)

Рис. 242

При этом изображении равнобедренной трапеции  $A'B'C'D'$  ( $A'D' \parallel B'C'$ ) (рис. 243) может служить как равнобедренная трапеция, так и не равнобедренная, однако середины  $M'$  и  $K'$  оснований  $A'D'$  и  $B'C'$  трапеции  $A'B'C'D'$  проектируются соответственно в середины  $M$  и  $K$  оснований  $AD$  и  $BC$  трапеции  $ABCD$ . Поэтому отрезок  $MK$  изображает высоту равнобедренной трапеции  $A'B'C'D'$  (см. рис. 243).

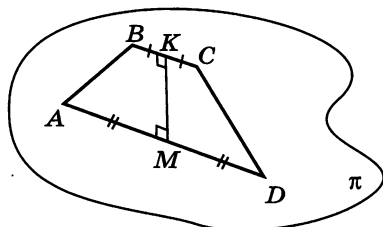
#### г) Изображение правильного шестиугольника

Рассмотрим оригинал — правильный шестиугольник  $A'B'C'D'E'F'$  (рис. 244, а). Его диагонали  $A'D'$  и  $C'F'$  делятся точкой  $O'$  — центром симметрии этого шестиугольника — пополам, а четырехугольники  $A'B'C'O'$  и  $E'F'O'D'$  — равные ромбы. Поэтому: 1) изображаем ромб  $A'B'C'O'$  в виде произвольного параллелограмма  $ABCO$  (рис. 244, б); 2) строим точки  $D$ ,  $E$  и  $F$ , симметричные точкам соответственно  $A$ ,  $B$  и  $C$



Оригинал

а)



Изображение

б)

Рис. 243

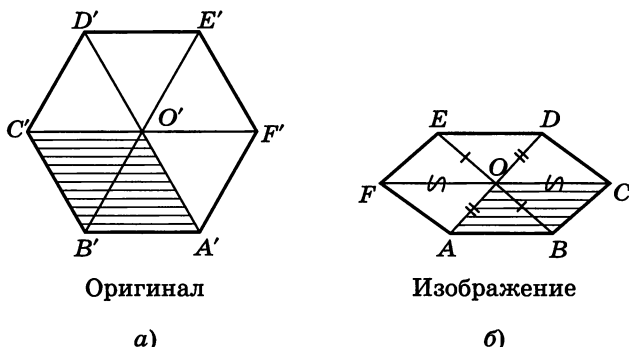


Рис. 244

относительно точки  $O$  (середина отрезка-оригинала изображается серединой его проекции).

Шестиугольник  $ABCDEF$  — искомое изображение данного шестиугольника.

## 2.2. Изображение многоугольников, вписанных в окружность

Мы знаем, что при параллельном проектировании ни величина угла, ни длина отрезка не являются инвариантными, но параллельные отрезки (прямые) изображаются параллельными отрезками (прямыми) и середина отрезка-оригинала изображается серединой отрезка-изображения. Кроме того, три точки, лежащие на одной прямой, изображаются тремя точками, также лежащими на одной прямой. Эти свойства фигур будем использовать при построении изображений многоугольников, вписанных в окружность.

### а) Взаимно перпендикулярные диаметры окружности

Если диаметры  $A'B'$  и  $C'D'$  окружности  $\omega'$  взаимно перпендикулярны (рис. 245, а), то диаметр  $A'B'$  делит пополам хорды, параллельные диаметру  $C'D'$ , а диаметр  $C'D'$  делит пополам хорды, параллельные диаметру  $A'B'$ .

**Определение.** Два диаметра эллипса называются сопряженными, если каждый из них делит хорды, параллельные другому, пополам.

Так как середины параллельных хорд окружности  $\omega'$  изображаются серединами параллельных хорд эллипса  $\omega$ , и точ-



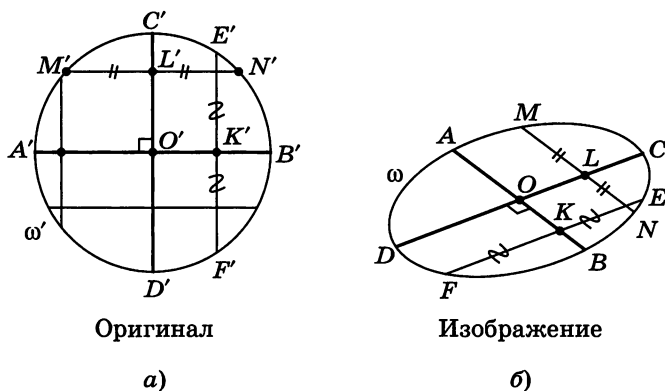


Рис. 245

ки, лежащие на одной прямой, проектируются в точки, также лежащие на одной прямой, то взаимно перпендикулярные диаметры окружности изображаются сопряженными диаметрами эллипса. Поэтому для построения изображения диаметра  $C'D'$  окружности  $\omega'$ , перпендикулярного диаметру  $A'B'$ , достаточно: 1) провести произвольный диаметр  $AB$  эллипса  $\omega$  (рис. 245, б); 2) провести любую хорду  $MN \parallel AB$ ; 3) построить середину  $L$  хорды  $MN$ . Диаметр  $CD$  эллипса  $\omega$ , проходящий через точку  $L$ , является искомым.

#### б) Прямоугольный треугольник, вписанный в окружность

Гипотенуза  $A'C'$  прямоугольного треугольника  $A'B'C'$ , вписанного в окружность  $\omega'$  (рис. 246, а), является диаметром этой окружности. Поэтому для построения изображения треугольника  $A'B'C'$  достаточно: 1) провести произвольный диа-

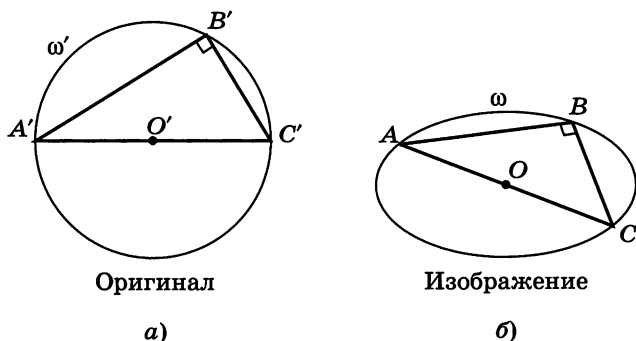


Рис. 246

метр  $AC$  эллипса  $\omega$  (рис. 246, б); 2) выбрать произвольную точку  $B \in \omega$ ;  $\triangle ABC$  — искомое изображение прямоугольного треугольника  $A'B'C'$ .

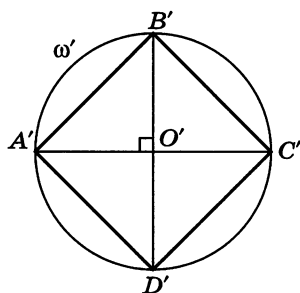
### в) Квадрат, вписанный в окружность

Диагонали  $A'C'$  и  $B'D'$  квадрата  $A'B'C'D'$ , вписанного в окружность  $\omega'$  (рис. 247, а), являются взаимно перпендикулярными диаметрами этой окружности. Поэтому для построения изображения этого квадрата достаточно: 1) провести произвольный диаметр  $AC$  эллипса  $\omega$  (рис. 247, б); 2) построить сопряженный ему диаметр  $BD$ . Параллелограмм  $ABCD$  — искомое изображение квадрата  $A'B'C'D'$ .

*Замечание.* Для построения изображения прямоугольника, вписанного в окружность, достаточно провести два любых диаметра эллипса. Концы этих диаметров — вершины искомого изображения прямоугольника.

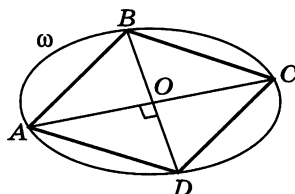
### г) Правильный треугольник, вписанный в окружность

Вершина  $A'$  правильного треугольника  $A'B'C'$ , вписанного в окружность  $\omega'$ , является концом диаметра  $A'D'$ , перпендикулярного его стороне  $B'C'$  (рис. 248, а). Причем сторона  $B'C'$  проходит через середину  $H'$  радиуса  $O'D'$ , значит,  $B'C' \parallel E'F'$ , где  $E'F'$  — диаметр окружности, перпендикулярный диаметру  $A'D'$ . На основании этих рассуждений строим: 1) произвольный диаметр  $AD$  эллипса  $\omega$  (рис. 248, б); 2) диаметр  $EF$ , сопряженный диаметру  $AD$ ; 3) точку  $H$  — середину отрезка  $OD$ ; 4) хорду  $BC$ ,  $BC \parallel EF$ ,  $H \in BC$ ,  $\triangle ABC$  — искомый.



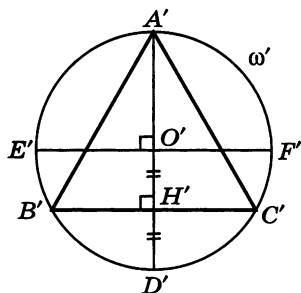
Оригинал

а)



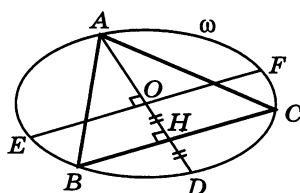
Изображение

б)



Оригинал

а)



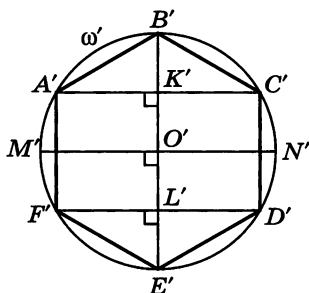
Изображение

б)

Рис. 248

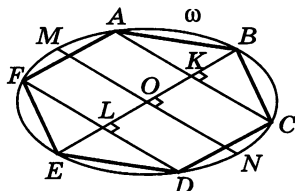
**д) Правильный шестиугольник, вписанный в окружность**

Вершины  $B'$  и  $E'$  правильного шестиугольника  $A'B'C'D'E'F'$ , вписанного в окружность  $\omega'$ , являются концами диаметра  $B'E'$  этой окружности (рис. 249, а); диагональ-хорда  $A'C'$  проходит через середину  $K'$  радиуса  $O'B'$  и параллельна диаметру  $M'N'$ , перпендикулярному диаметру  $B'E'$ ; диагональ-хорда  $D'F'$  проходит через середину  $L'$  радиуса  $O'E'$  и также параллельна диаметру  $M'N'$ . Поэтому строим: 1) произвольный диаметр  $BE$  эллипса  $\omega$  (рис. 249, б); 2) диаметр  $MN$ , сопряженный диаметру  $BE$ ; 3) точку  $K$  — середину  $OB$  и точку  $L$  — середину  $OE$ ; 4)  $AC \parallel MN$ ,  $K \in AC$ ; 5)  $DF \parallel MN$ ,  $L \in DF$ . Тогда  $ABCDEF$  — изображение правильного шестиугольника, вписанного в окружность.



Оригинал

а)



Изображение

б)

Рис. 249

## ■ ЗАДАЧИ

1. Может ли равносторонний треугольник быть параллельной проекцией: а) равностороннего треугольника; б) прямоугольного треугольника? Сделайте рисунки. Ответ обоснуйте.

2. Может ли прямоугольный треугольник быть параллельной проекцией: а) равностороннего треугольника; б) прямоугольного треугольника? Сделайте рисунки. Ответ обоснуйте.

3. Треугольник  $ABC$  является параллельной проекцией треугольника  $A'B'C'$ . В треугольнике  $A'B'C'$  проведены из вершины  $A'$  биссектриса, медиана и высота. Будут ли проекции этих отрезков являться соответственно биссектрисой, медианой и высотой треугольника  $ABC$ ? Ответ обоснуйте.

4. (Устно.) Какие свойства ромба (прямоугольника, квадрата, трапеции) являются аффинными? Ответ обоснуйте.

5. (Устно.) Может ли быть изображением: а) данного четырехугольника произвольный четырехугольник; б) трапеции — параллелограмм; в) квадрата — ромб? Ответ обоснуйте.

6. Треугольник  $ABC$  — параллельная проекция прямоугольного треугольника. Постройте изображение центра окружности, описанной около треугольника-оригинала, если  $AC$  — проекция его гипотенузы.

7. Треугольник  $ABC$  — параллельная проекция равностороннего треугольника. Найдите в треугольнике  $ABC$  изображения радиусов вписанной и описанной окружностей для равностороннего треугольника-оригинала.

8. Нарисуйте несколькими способами параллельную проекцию: а) параллелограмма; б) правильного шестиугольника.

9. Нарисуйте параллельную проекцию прямоугольника, после чего изобразите оси симметрии прямоугольника-оригинала.

10. Нарисуйте параллельную проекцию квадрата, а на полученном изображении укажите радиусы окружностей, вписанной и описанной для квадрата-оригинала.

11. Нарисуйте параллельные проекции равнобедренной трапеции и ее оси симметрии.

12. В трапеции  $A'B'C'D'$   $A'B' = B'C' = C'D'$ ,  $A'D' = 2B'C'$ . Нарисуйте параллельную проекцию этой трапеции и ее высоты, проведенной из вершины  $A'$ .

13.  $ABCDEF$  — параллельная проекция правильного шестиугольника  $A'B'C'D'E'F'$ . Постройте изображение перпендикуляра, проведенного из вершины  $A'$ : а) на диагональ  $C'F'$ ; б) на сторону  $C'D'$ ; в) на диагональ  $B'E'$ ; г) на диагональ  $A'C'$ .

14. Треугольник  $ABC$  — параллельная проекция треугольника  $A'B'C'$ ,  $AM$  и  $BK$  — изображения высот треугольника  $A'B'C'$ . Постройте изображение центра окружности, описанной около треугольника-оригинала, если этот треугольник: а) равносторонний; б) равнобедренный; в) разносторонний.

15. Треугольник  $ABC$  — параллельная проекция треугольника  $A'B'C'$ . Постройте изображение центра окружности, вписанной в треугольник-оригинал, если этот треугольник: а) равносторонний; б) равнобедренный; в) разносторонний.

16. Начертите параллельную проекцию ромба, имеющего угол в  $60^\circ$ . Постройте изображение высоты этого ромба, проведенной из: а) вершины острого угла; б) вершины тупого угла.

17. Нарисуйте параллельную проекцию равностороннего треугольника, вписанного в квадрат так, что они имеют общую сторону и вершина треугольника лежит внутри этого квадрата.

18. Начертите параллельную проекцию квадрата, вписанного в правильный треугольник так, что две соседние вершины квадрата лежат на одной стороне треугольника, а остальные его вершины — по одной на двух других сторонах треугольника.

19. На данном изображении треугольника, длины сторон которого пропорциональны числам 2, 3, 4, построьте изображение центра окружности, вписанной в треугольник.

20. Дан эллипс, являющийся параллельной проекцией некоторой окружности. Начертите изображение: а) центра окружности; б) касательной к ней в некоторой ее точке; в) описанного около нее равностороннего треугольника; г) описанного около нее квадрата.

21. Даны эллипс  $\omega$ , прямая  $a$  и точка  $M$  — изображения в параллельной проекции лежащих в одной плоскости некоторых окружности  $\omega'$ , прямой  $a'$  и точки  $M'$ . Постройте изображение прямой, проходящей через точку  $M'$  перпендикулярно прямой  $a'$ .

### § 3. Изображение многогранников

#### а) Изображение тетраэдра

Объединение плоского четырехугольника  $ABCD$  и двух его диагоналей  $AC$  и  $BD$  представляет собой фигуру, которая называется *полным четырехугольником*  $ABCD$ .

Полный четырехугольник  $ABCD$  может быть выпуклым (рис. 250, а) или невыпуклым (рис. 250, б).

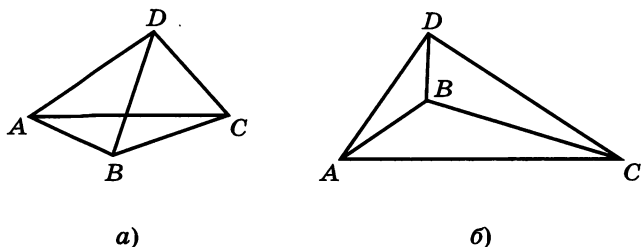


Рис. 250

Если рассматривать различные положения каркасного тетраэдра  $A'B'C'D'$  относительно плоскости проекций  $\pi$ , а направление проектирования такое, что ни одна из граней тетраэдра не лежит в проектирующей плоскости, то можно заметить, что ребра данного тетраэдра изображаются сторонами и диагоналями полного четырехугольника  $ABCD$ , выпуклого (рис. 251, а) или невыпуклого (рис. 251, б). Иными словами, изображением любого тетраэдра в параллельной проекции может служить любой полный четырехугольник.

Этот факт был впервые сформулирован в виде теоремы в 1853 году немецким математиком *Карлом Польке* для частного случая тетраэдра, а затем обобщен в 1864 году учеником Карла Польке — немецким математиком *Германом Амандусом Шварцем* — для произвольного тетраэдра. Теорема эта называется *теоремой Польке—Шварца*.

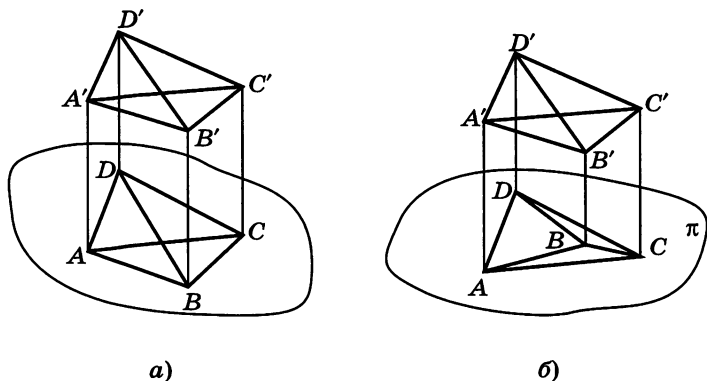


Рис. 251

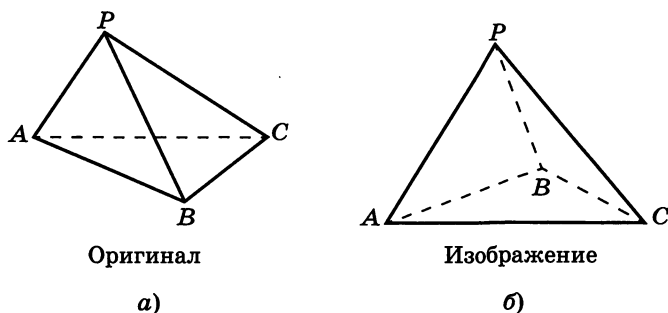


Рис. 252

Тетраэдр — это четырехгранник, противоположные ребра которого попарно скрещиваются. Для достижения наглядности изображения тетраэдра его невидимые ребра изображают штриховыми отрезками, а видимые — сплошными (рис. 252).

Следует заметить: как теорема об изображении треугольника (т. 1) является основополагающей в изображениях плоских фигур в параллельной проекции (см. т. 2), так и теорема Польке—Шварца об изображении тетраэдра является «фундаментом» изображения пространственных фигур на плоскости в параллельной проекции. Именно, если на плоскости изображения полный четырехугольник  $ABCD$  является изображением данного тетраэдра  $A'B'C'D'$ , то однозначно строится изображение любой точки пространства.

Действительно, пусть  $M'$  — любая точка пространства. Обозначим  $E' = A'M' \cap (B'C'D')$ ,  $P' = B'E' \cap C'D'$  (рис. 253). Тогда на основании свойств (каких?) параллельного проектирования на прямую  $CD$  существует единственная точка  $P$  такая,

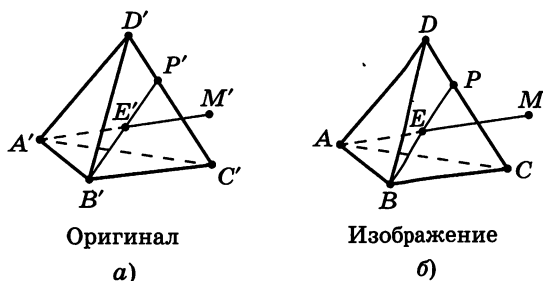



Рис. 253

что  $CP : PD = C'P' : P'D'$ , далее, на прямой  $BP$  существует единственная точка  $E$  такая, что  $BE : EP = B'E' : E'P'$ , а на прямой  $AE$  существует единственная точка  $M$  такая, что  $AE : EM = A'E' : E'M'$ . Точка  $M$  — искомое изображение точки  $M'$ . 

### б) Изображение пирамиды

Для построения изображения четырехугольной пирамиды  $P'A'B'C'D'$  (рис. 254, а) выделим в ней треугольную пирамиду  $P'A'B'C'$  и изобразим ее в виде произвольного полного четырехугольника  $PABC$  (рис. 254, б). Осталось построить точку  $D$  — изображение вершины  $D'$  данной пирамиды. С этой целью проведем диагонали  $A'C'$  и  $B'D'$  основания данной пирамиды. Пусть  $E' = A'C' \cap B'D'$ . Так как при параллельном проектировании простое отношение трех точек, лежащих на одной прямой, сохраняется, то из соотношения  $A'E' : E'C' = AE : EC$  строим точку  $E$  на отрезке  $AC$ , а из соотношения  $B'E' : E'D' = BE : ED$  строим точку  $D$  на луче  $BE$ . Соединив точку  $D$  отрезками прямых с точками  $A$ ,  $P$  и  $C$ , получаем искомое изображение  $PABCD$  данной четырехугольной пирамиды  $P'A'B'C'D'$ . Для достижения наглядности изображения выделяем видимые ребра пирамиды сплошными отрезками, а невидимые — штриховыми.

Аналогично строится изображение любой  $n$ -угольной пирамиды.

Для построения верного и наглядного изображения правильной пирамиды сначала строят (лучше в горизонтальной расположенной плоскости) изображение основания этой пирамиды и его центра. Затем из этого центра верти-

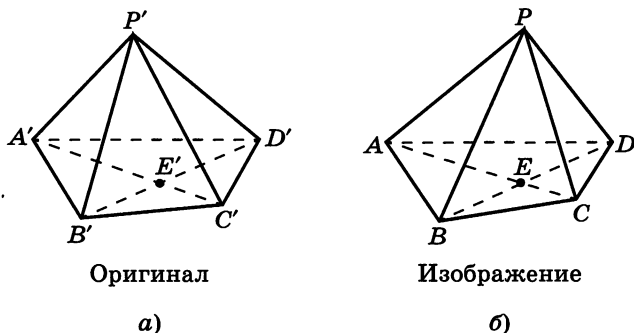


Рис. 254



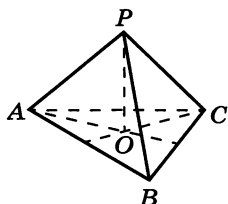


Рис. 255

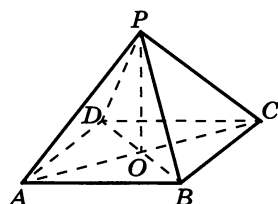


Рис. 256

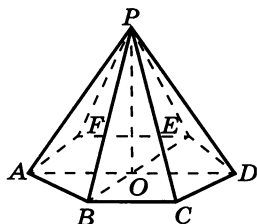


Рис. 257

кально вверх проводят луч, на котором отмечают произвольную точку и принимают ее в качестве вершины искомого изображения данной пирамиды, а отрезок, соединяющий эту вершину с точкой, изображающей центр основания, — в качестве изображения высоты данной правильной пирамиды-оригинала.

На рисунках 255, 256, 257 изображены правильные соответственно треугольная, четырех-, шестиугольная пирамиды  $PABC$ ,  $PABCD$ ,  $PABCDEF$ , а на рисунке 258 — произвольная пятиугольная пирамида  $PABCDE$ .

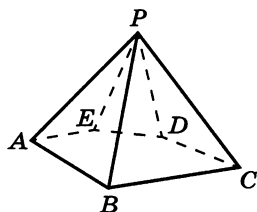
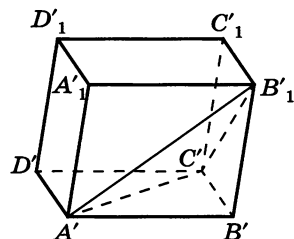


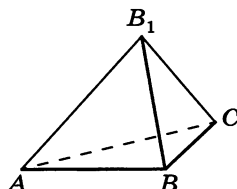
Рис. 258

#### в) Изображение параллелепипеда

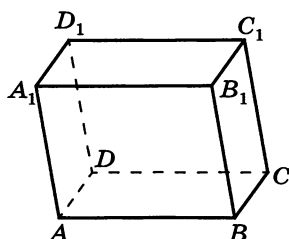
Рассмотрим оригинал — параллелепипед  $A'B'C'D'A_1B_1C_1D_1$  (рис. 259, а). Так как все его грани — параллелограммы, то изображениями этих граней должны быть также параллелограммы. Три ребра  $B'A'$ ,  $B'C'$ ,  $B'B_1$  данного параллелепипеда, имеющие общую вершину  $B'$ , определяют тетраэдр  $A'B'C'B_1$ . Остальные ребра этого параллелепипеда параллельны и равны либо  $B'A'$ , либо  $B'C'$ , либо  $B'B_1$ .



а)



б)



в)

Рис. 259

Сначала строим полный четырехугольник  $ABCB_1$  (рис. 259, б) — изображение тетраэдра  $A'B'C'B'_1$  (строим произвольной длины отрезки  $BA$ ,  $BC$  и  $BB_1$  с общим концом  $B$ , никакие два из которых не лежат на одной прямой). Так как при параллельном проектировании равные параллельные отрезки изображаются также равными параллельными отрезками, то отрезки-изображения остальных ребер параллелепипеда-оригинала строим на основании того, что каждый из них равен и параллелен одному из отрезков  $BA$ ,  $BC$ ,  $BB_1$ . Тогда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 259, в) — искомое изображение данного параллелепипеда, на котором все грани данного параллелепипеда изображены параллелограммами. Видимые ребра параллелепипеда изображаем сплошными отрезками, невидимые — штриховыми.

На практике параллелепипед можно изображать следующим образом.

1. Строим произвольный параллелограмм  $ABCD$  (рис. 259, в).

2. Проводим по одну сторону от плоскости этого параллелограмма равные и параллельные отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$ .

3. Строим параллелограмм  $A_1 B_1 C_1 D_1$ .

4. Выделяем видимые и невидимые ребра.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — искомое изображение параллелепипеда.

Разумеется, изображение  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  данного параллелепипеда  $A'B'C'D' A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$  можно начинать и с изображения параллелограмма  $A_1 B_1 C_1 D_1$  (или же с параллелограмма  $AB B_1 A_1$ ) с последующим учетом взаимных равенств и параллельностей соответствующих ребер параллелепипеда-оригинала.

При изображениях прямоугольного параллелепипеда и куба следует учесть, что у прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники, а у куба — квадраты. Это означает, что изображением каждой грани как прямоугольного параллелепипеда, так и куба является параллелограмм. Но так как боковые ребра прямоугольного параллелепипеда и куба перпендикулярны плоскости его основания, то в целях наглядности целесообразно эти ребра изображать вертикальными отрезками. А если еще плоскость изображения выбрать парал-

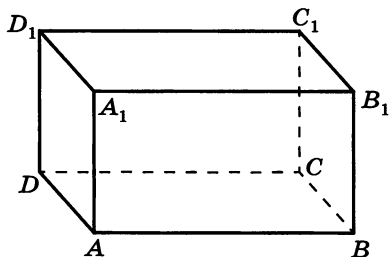


Рис. 260

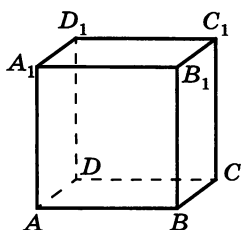


Рис. 261

лельной каким-нибудь двум противоположным боковым граням этого параллелепипеда (куба), то проекции этих граней окажутся им равными. Полученные таким образом изображения прямоугольного параллелепипеда и куба даны на рисунках 260 и 261 (на изображении прямоугольного параллелепипеда четырехугольник  $ABB_1A_1$  — прямоугольник (рис. 260), а куба — квадрат (рис. 261)).

#### г) Изображение призмы

Так как основаниями призмы служат равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а боковыми гранями являются параллелограммы, то **изображение призмы начинают с изображения одного из ее оснований** (лучше в горизонтально расположенной плоскости). Дальнейшие построения аналогичны тем, которые выполнялись при изображении параллелепипеда: боковые ребра прямой призмы целесообразно (для большей наглядности) изображать вертикальными отрезками (рис. 262), а боковые ребра наклонной призмы — наклонными отрезками (рис. 263) по отношению к плоскости основания. При этом необходимо выделить все невидимые ребра призмы штриховыми отрезками, а видимые — сплошными. Вопросы об изображениях круглых тел мы рассмотрим в 11 классе.

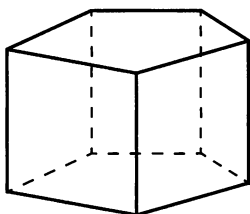


Рис. 262

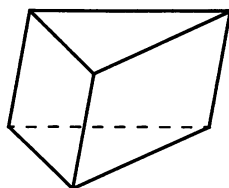
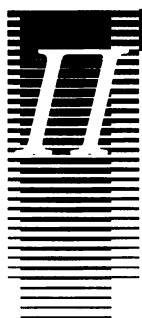


Рис. 263



## Список основных теорем 10 класса

1. О плоскости, проходящей через прямую и не лежащую на ней точку.
  2. О плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые.
  3. О плоскости, проходящей через две параллельные прямые.
- 
4. Признак скрещивающихся прямых.
  5. О двух параллельных прямых, одна из которых пересекает плоскость.
  6. О прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку пространства, не лежащую на данной прямой.
  7. О транзитивности параллельности прямых в пространстве.
  8. Об углах между сонаправленными лучами.
- 
9. Признак параллельности прямой и плоскости.
  10. О линии пересечения плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости.
  11. О линии пересечения двух плоскостей, каждая из которых проходит через одну из параллельных прямых.
  12. О прямой, параллельной каждой из двух пересекающихся плоскостей.
  13. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
  14. О двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости.
  15. О двух прямых, перпендикулярных одной и той же плоскости.
  - 16—17. Теоремы о трех перпендикулярах.
- 
- 18—19. Признаки параллельности плоскостей.
  20. О прямых пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.
  21. О прямой, пересекающей одну из параллельных плоскостей.
  22. О плоскости, пересекающей одну из параллельных плоскостей.

23. О плоскости, проходящей через точку и параллельной другой плоскости, не проходящей через эту точку.
  24. О двух плоскостях, параллельных третьей плоскости.
  25. Об отрезках параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями.
  26. О прямой, перпендикулярной одной из двух параллельных плоскостей.
  27. О линейных углах двугранного угла.
  28. Признак перпендикулярности плоскостей.
  29. О прямой, лежащей в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярной линии пересечения этих плоскостей.
  30. О перпендикуляре к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, имеющем с другой плоскостью общую точку.
  31. О линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости.
  32. О площади ортогональной проекции многоугольника.
- 
33. Признак коллинеарности векторов.
  34. О разложении вектора по двум компланарным векторам.
  35. Признак компланарности векторов.
  36. О разложении вектора в пространстве.

## Список задач на построение в пространстве

1. Построение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой.
2. Построение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной плоскости.
3. Построение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой.
4. Построение плоскости, проходящей через данную прямую и параллельной данной прямой.
5. Построение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой.
6. Построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной плоскости.
7. Построение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной данной плоскости.
8. Построение двух параллельных плоскостей, каждая из которых проходит через одну из двух скрещивающихся прямых.
9. Построение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной каждой из двух скрещивающихся прямых.

10. Построение «общего перпендикуляра» двух скрещивающихся прямых.
11. Построение линейного угла данного двугранного угла.
12. Построение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной плоскости.
13. Построение плоскости, проходящей через данную прямую и перпендикулярной данной плоскости.
14. Построение точек пересечения прямой, лежащей на одной из граней многогранника, с плоскостями граней, не параллельных этой прямой.
15. Построение прямой пересечения плоскости грани многогранника с непараллельной ей плоскостью.

## Формулы планиметрии

## Треугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр ( $P$ )	$P = a + b + c$ $p = \frac{a + b + c}{2}$	$a, b, c$ — длины сторон; $p$ — полупериметр
Сумма внутренних углов	$A + B + C = 180^\circ$	$A, B, C$ — величины углов
Теорема косинусов	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C;$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	$a, b, c$ — длины сторон; $A, B, C$ — величины углов
Теорема синусов	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	
Радиус описанной окружности ( $R$ )	$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	
Площадь ( $S$ )	$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c;$ $S = \frac{1}{2} ab \sin C =$ $= \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A;$ $S = pr;$ $S = \frac{abc}{4R}$	$a, b, c$ — длины сторон; $h_a, h_b, h_c$ — длины высот; $A, B, C$ — величины углов; $p$ — полупериметр; $r$ — радиус вписанной окружности; $R$ — радиус описанной окружности
Формула Герона	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	

Окончание. Начало на с. 198

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Связь между медианой и сторонами	$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$	$a, b, c$ — длины сторон; $m_a$ — длина медианы к стороне $a$ ; $m, n$ — длины отрезков, на которые биссектриса угла $C$ делит сторону $c$ ; $h_a, h_b, h_c$ — длины высот; $r$ — радиус вписанной окружности  $S_{ABC}$ и $S_{A_1B_1C_1}$ — площади треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$
Свойство биссектрисы внутреннего угла	$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$	
Связь между высотами и радиусом вписанной окружности	$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$	
Отношение площадей треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ , имеющих равные углы с вершинами $A$ и $A_1$	$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$	

### Прямоугольный треугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Сумма острых углов	$A + B = 90^\circ$	$A, B$ — величины острых углов
Теорема Пифагора	$a^2 + b^2 = c^2$	$a, b$ — длины катетов; $c$ — длина гипотенузы; $h_c$ — длина высоты; $a_1, b_1$ — длины проекций катетов на гипотенузу; $r$ — радиус вписанной окружности; $R$ — радиус описанной окружности
Метрические соотношения	$h_c^2 = a_1 \cdot b_1$ ; $a^2 = c \cdot a_1, b^2 = c \cdot b_1$	
Зависимость между сторонами, радиусами вписанной и описанной окружностей	$R = \frac{c}{2}; r = \frac{a + b - c}{2}$ ; $r = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ ; $R + r = \frac{1}{2}(a + b)$	
Площадь ( $S$ )	$S = \frac{1}{2}ab$	



## Правильный треугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр ( $P$ )	$P = 3a$	$a$ — длина стороны
Величина угла	$A = B = C = 60^\circ$	$A, B, C$ — величины углов
Зависимость между высотой и стороной	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$h$ — длина высоты; $a$ — длина стороны; $R$ — радиус описанной окружности; $r$ — радиус вписанной окружности
Зависимость между стороной, радиусами вписанной и описанной окружностей	$a = R\sqrt{3}; R = 2r;$ $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	
Выражение площади ( $S$ ) через: сторону, радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$ $S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4};$ $S = 3r^2\sqrt{3}$	$a$ — длина стороны; $R$ — радиус описанной окружности; $r$ — радиус вписанной окружности

## Четырехугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Сумма углов	$A + B + C + D = 360^\circ$	$A, B, C, D$ — величины углов; $A, C$ и $B, D$ — величины пар противоположных углов
Свойство сумм величин противоположных углов вписанного четырехугольника	$A + C = B + D = 180^\circ$	
Свойство сумм длин противоположных сторон описанного четырехугольника	$a + c = b + d$	$a, c$ и $b, d$ — длины пар противоположных сторон; $m, n$ — длины диагоналей; четыреугольник вписан в окружность
Теорема Птолемея	$mn = ac + bd$	

Окончание. Начало на с. 200

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь ( $S$ )	$S = \frac{1}{2} mns \sin \varphi;$ $S = pr$	$m, n$ — длины диагоналей; $\varphi$ — величина угла между ними; $p$ — полупериметр; $r$ — радиус вписанной окружности

## Параллелограмм

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр ( $P$ )	$P = 2(a + b)$	$a, b$ — длины сторон; $m, n$ — длины диагоналей;
Соотношение между квадратами длин сторон и диагоналей	$m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$	$h_a, h_b$ — длины высот; $B$ — величина угла между сторонами;
Площадь ( $S$ )	$S = a \cdot h_a = b \cdot h_b;$ $S = ab \sin B;$ $S = \frac{1}{2} mns \sin \varphi$	$m, n$ — длины диагоналей; $\varphi$ — величина угла между диагоналями
Свойства углов	$A + B + C + D = 360^\circ;$ $A = C; B = D;$ $A + B = B + C = 180^\circ$	$A, B, C, D$ — величины углов

## Прямоугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр ( $P$ )	$P = 2(a + b)$	$a, b$ — длины сторон; $d$ — длина диагонали;
Площадь ( $S$ )	$S = ab;$ $A = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$	$\varphi$ — величина угла между диагоналями

**Ромб**

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр	$P = 4a$	$a$ — длина стороны; $h$ — длина высоты; $m, n$ — длины диагоналей
Площадь ( $S$ )	$S = ah; S = \frac{1}{2} mn$	

**Квадрат**

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Углы	$A = B = C = D = 90^\circ$	$A, B, C, D$ — величины углов
Связь между длиной стороны и радиусом описанной окружности	$a = R\sqrt{2}; R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$a$ — длина стороны; $R$ — радиус описанной окружности; $r$ — радиус вписанной окружности
Связь между длиной стороны и радиусом вписанной окружности	$r = \frac{a}{2}; a = 2r$	
Площадь ( $S$ )	$S = a^2; S = 2R^2$	

**Трапеция**

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Свойство средней линии	$m = \frac{a+b}{2}$	$m$ — длина средней линии; $a, b$ — длины оснований; $h$ — длина высоты
Площадь ( $S$ )	$S = \frac{a+b}{2} \cdot h;$ $S = m \cdot h$	

## Правильный многоугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Сумма внутренних углов ( $\Sigma$ )	$\Sigma = (n - 2) \cdot 180^\circ$	$n$ — число сторон; $A$ — величина угла; $a_n$ — длина стороны; $r$ — радиус вписанной окружности; $R$ — радиус описанной окружности
Угол	$A = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}$	
Связь между длиной стороны и радиусом вписанной окружности	$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n};$ $r = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$	
Связь между длиной стороны и радиусом описанной окружности	$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n};$ $a_3 = R\sqrt{3};$ $a_4 = R\sqrt{2}; a_6 = R$	
Площадь ( $S$ )	$S = \frac{1}{2} arn;$ $S = \frac{1}{2} R^2 n \sin \frac{360^\circ}{n}$	

## Окружность и круг

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Длина окружности ( $C$ )	$C = 2\pi R$	$R$ — радиус окружности; $n$ — градусная мера дуги; $\varphi$ — радианная мера дуги; $d$ — диаметр; $b$ — основание сегмента; $h$ — высота сегмента
Длина дуги ( $l$ )	$l = \frac{\pi R n}{180}; l = \varphi R$	
Площадь круга ( $S$ )	$S = \pi R^2; S = \frac{\pi d^2}{4}$	
Площадь сектора ( $S$ )	$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$	
Площадь сегмента ( $S$ )	$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \pm S_{\Delta};$ $S = \frac{2}{3} bh$	

*Тригонометрические тождества*

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; & \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha; & \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; & \cos(-\alpha) &= \cos \alpha; & 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; & \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha; & 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \\ & & \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha; & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha; \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos^2 \alpha; \quad \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sin^2 \alpha; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta};$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

## Формулы стереометрии

### Векторы и координаты

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Правило треугольника	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	$A, B, C$ — произвольные точки
Правило параллелограмма	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$	$OACB$ — параллелограмм
Правило многоугольника	$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$	$A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ — произвольные точки
Правило параллелепипеда	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_1}$	$OA, OB, OC$ — ребра параллелепипеда; $OC_1$ — диагональ параллелепипеда
Формула вычитания	$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$	$A, B, O$ — произвольные точки
Признак коллинеарности двух ненулевых векторов	$\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ $ \vec{a} \cdot \vec{b}  =  \vec{a}  \cdot  \vec{b} $	$k$ — число, отличное от нуля, $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$
Признак компланарности трех векторов	$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$	$x, y$ — числа
Середина отрезка	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$	$M$ — середина отрезка $AB$ ; $O$ — произвольная точка

Продолжение. Начало на с. 205

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Точка пересечения медиан (центроид)	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$	$M$ — центроид треугольника $ABC$ ; $O$ — произвольная точка
Скалярное произведение векторов	$\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$	$\vec{a}, \vec{b}$ — ненулевые векторы
Сложение и вычитание векторов в координатах	$\vec{a} \pm \vec{b} (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$	$\vec{a}(x_1; y_1; z_1);$ $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$
Умножение вектора на число	$k\vec{a}(kx; ky; kz)$	$k$ — число; $\vec{a}(x; y; z)$
Скалярное произведение	$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$	$\vec{a}(x_1; y_1; z_1);$ $\vec{b}(x_2; y_2; z_2);$
Косинус угла между векторами	$\cos \varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$	$\varphi$ — величина угла между векторами
Длина вектора	$ \vec{a}  = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\vec{a}(x; y; z)$
Расстояние между точками $A$ и $B$	$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$	$A(x_1; y_1; z_1);$ $B(x_2; y_2; z_2)$
Уравнение плоскости	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$	$\vec{d}(A; B; C)$ — вектор, перпендикулярный плоскости; $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка, принадлежащая плоскости

Продолжение. Начало на с. 205

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Общее уравнение плоскости	$Ax + By + Cz + D = 0$	$M(x; y; z)$ — произвольная точка плоскости
Косинус угла между двумя плоскостями	$\cos \varphi = \frac{ A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 }{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$	$\varphi$ — величина угла между этими плоскостями; $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ — плоскости
Условие перпендикулярности двух плоскостей	$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$	
Условие параллельности двух плоскостей	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$	
Расстояние от точки до плоскости ( $d$ )	$d = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	$M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка; $Ax + By + Cz + D = 0$ — плоскость
Параметрические уравнения прямой	$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + k\vec{p}; \\ x = x_0 + ka_1, \\ y = y_0 + ka_2, \\ z = z_0 + ka_3 \end{cases}$	$\vec{r}$ — радиус-вектор произвольной точки прямой; $\vec{r}_0$ — радиус-вектор данной точки прямой; $\vec{p}$ — направляющий вектор прямой; $k$ — параметр; $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — данная точка прямой; $M(x; y; z)$ — произвольная точка прямой; $\vec{p}(a_1; a_2; a_3)$ — направляющий вектор прямой



Окончание. Начало на с. 205

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Уравнения прямой по двум ее точкам	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$	$M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ — данные точки; $\vec{p}_1(a_1; a_2; a_3), \vec{p}_2(b_1; b_2; b_3)$ — направляющие векторы прямых; $\varphi$ — величина угла между ними
Косинус угла между двумя прямыми	$\cos \varphi = \frac{ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 }{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$	
Условие перпендикулярности двух прямых	$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$	
Условие параллельности двух прямых	$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$	
Синус угла между прямой и плоскостью	$\sin \varphi = \frac{ Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$	$Ax + By + Cz + D = 0$ — плоскость; $\vec{p}(a_1; a_2; a_3)$ — направляющий вектор прямой; $\varphi$ — величина угла между прямой и плоскостью
Условие параллельности прямой и плоскости	$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$	
Условие перпендикулярности прямой и плоскости	$\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}$	

## Многогранники

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь поверхности куба ( $S$ )	$S = 6a^2$	$a$ — длина ребра куба
Площадь боковой поверхности прямой призмы ( $S_{\text{бок}}$ )	$S_{\text{бок}} = P \cdot h$	$P$ — периметр основания; $h$ — высота (длина бокового ребра)
Площадь боковой поверхности наклонной призмы ( $S_{\text{бок}}$ )	$S_{\text{бок}} = P \cdot l$	$P$ — периметр перпендикулярного сечения; $l$ — длина бокового ребра
Площадь боковой поверхности прямого параллелепипеда ( $S_{\text{бок}}$ )	$S_{\text{бок}} = P \cdot l$	$P$ — периметр основания; $l$ — длина бокового ребра
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды ( $S_{\text{бок}}$ )	$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P \cdot a$ $S_{\text{бок}} = \frac{Q}{\cos \varphi}$	$P$ — периметр основания; $a$ — апофема; $Q$ — площадь основания; $\varphi$ — величина двугранного угла при стороне основания
Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды ( $S_{\text{бок}}$ )	$S_{\text{бок}} = \frac{P + P_1}{2} \cdot h$	$P, P_1$ — периметры оснований; $h$ — апофема
Объем куба ( $V$ )	$V = a^3$	$a$ — длина ребра куба
Объем прямоугольного параллелепипеда ( $V$ )	$V = abc$	$a, b, c$ — измерения параллелепипеда

Окончание. Начало на с. 209

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Объем призмы (параллелепипеда) ( $V$ )	$V = S_{\text{осн}} \cdot h;$ $V = Q \cdot l$	$S_{\text{осн}}$ — площадь основания; $h$ — высота; $Q$ — площадь перпендикулярного сечения; $l$ — длина бокового ребра
Объем пирамиды ( $V$ )	$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$	$S_{\text{осн}}$ — площадь основания; $h$ — высота
Объем усеченной пирамиды ( $V$ )	$V = \frac{1}{3} h (Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2)$	$Q_1, Q_2$ — площади оснований; $h$ — высота
Отношение объемов тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ , имеющих равные трехгранные углы с вершинами $A$ и $A_1$	$\frac{V_{ABCD}}{V_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot A_1D_1}$	$V_{ABCD}$ и $V_{A_1B_1C_1D_1}$ — объемы тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$

### Фигуры вращения

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь боковой поверхности цилиндра ( $S_{\text{бок}}$ )	$S_{\text{бок}} = 2\pi R \cdot h$	$R$ — радиус основания; $h$ — высота
Площадь полной поверхности цилиндра ( $S_{\text{полн}}$ )	$S_{\text{полн}} = 2\pi R(h + R)$	$R$ — радиус основания; $h$ — высота

Продолжение. Начало на с. 209

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь боковой поверхности конуса ( $S_{\text{бок}}$ )	$S_{\text{бок}} = \pi R l$	$R$ — радиус основания; $l$ — длина образующей
Площадь полной поверхности конуса ( $S_{\text{полн}}$ )	$S_{\text{полн}} = \pi R(l + R)$	$R$ — радиус основания; $l$ — длина образующей
Площадь боковой поверхности усеченного конуса ( $S_{\text{бок}}$ )	$S_{\text{бок}} = \pi l(R + r)$	$R, r$ — радиусы оснований; $l$ — длина образующей
Площадь сферы ( $S$ )	$S = 4\pi R^2$	$R$ — радиус сферы
Площадь сегментной поверхности ( $S$ )	$S = 2\pi R \cdot H$	$R$ — радиус сферы; $H$ — высота сегментной поверхности
Площадь шарового пояса ( $S$ )	$S = 2\pi R \cdot H$	$R$ — радиус шара; $H$ — высота шарового пояса
Площадь поверхности шарового сектора ( $S$ )	$S = \pi R \cdot (2h + \sqrt{2Rh - h^2})$	$R$ — радиус шара; $h$ — высота шарового сектора
Объем цилиндра ( $V$ )	$V = \pi R^2 \cdot H$	$R$ — радиус основания; $H$ — высота
Объем конуса ( $V$ )	$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$	$R$ — радиус основания; $H$ — высота
Объем усеченного конуса ( $V$ )	$V = \frac{1}{3} \pi H(r^2 + Rr + R^2)$	$R, r$ — радиусы оснований; $H$ — высота

Окончание. Начало на с. 210

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Объем шара ( $V$ )	$V = \frac{4}{3}\pi R^3; V = \frac{1}{6}\pi d^3$	$R$ — радиус шара; $d$ — диаметр шара
Объем шарового слоя ( $V$ )	$V = \frac{\pi H}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2)$	$r_1, r_2$ — радиусы оснований шарового слоя; $H$ — высота
Объем шарового сегмента ( $V$ )	$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$ $V = \frac{\pi H}{6}(3r^2 + H^2)$	$R$ — радиус шара; $H$ — высота; $r$ — радиус основания шарового сегмента
Объем шарового сектора ( $V$ )	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot H$	$R$ — радиус шара; $H$ — высота

# ПРИМЕРНОЕ ПОЧАСОВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ (10 класс)

(3 ч в неделю, всего 105 ч)

## *Введение в стереометрию. Аксиомы стереометрии (1—8)*

Предмет стереометрии. Основные понятия стереометрии. Аксиомы стереометрии. Следствия из аксиом. О плоскости, проходящей: через прямую и не лежащую на ней точку; через две пересекающиеся прямые; через две параллельные прямые. Пересечение прямой и плоскости, двух плоскостей. Техника выполнения простейших стереометрических чертежей. Стереометрические фигуры: куб, параллелепипед, призма, пирамида, сфера и шар. Построение сечений куба и тетраэдра. *Графическая работа № 1.*

*Контрольная работа № 1.*

## *Взаимное расположение прямых в пространстве (9—16)*

Пересекающиеся и параллельные прямые в пространстве. Скрещивающиеся прямые. Признаки скрещивающихся прямых. Теорема о двух параллельных прямых, одна из которых пересекает плоскость. Теорема о транзитивности параллельности прямых в пространстве. Направление в пространстве. Теорема о равенстве двух углов с сонаправленными сторонами. Определение угла между скрещивающимися прямыми. Решение простейших задач на построение в пространстве (проведение через точку: прямой, параллельной данной; прямой, скрещивающейся с данной). Число решений задачи на построение.

*Контрольная работа № 2.*

## *Взаимное расположение прямой и плоскости (17—25)*

Параллельность прямой и плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости. Теорема о линии пересечения двух плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости. Теорема о линии пересечения двух плоскостей, каждая из которых проходит через одну из двух параллельных прямых. О плоскости, проходящей через одну из двух скрещивающихся прямых параллельно другой прямой. Решение простейших задач на построение в пространстве

(проведение через точку прямой, параллельной данной плоскости и плоскости, параллельной данной прямой).

### *Перпендикулярность прямой и плоскости (26—34)*

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Теоремы о длинах перпендикуляра, наклонных и их проекций. Теоремы о трех перпендикулярах (прямая и обратная). Теорема о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости. Теорема о двух прямых, перпендикулярных плоскости. Построение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой. Построение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной плоскости.

#### *Контрольная работа № 3.*

### *Угол между прямой и плоскостью (35—43)*

Определение угла между наклонной и плоскостью. О величине угла между наклонной и плоскостью. Угол между прямой и плоскостью. Методы нахождения угла между наклонной и плоскостью. Параллельное проектирование. Свойства параллельного проектирования. Ортогональное проектирование, его свойства.

### *Параллельные плоскости (44—51)*

Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Параллельность плоскостей. Признаки параллельности двух плоскостей. Теорема о линиях пересечения двух параллельных плоскостей с третьей плоскостью. Теорема о прямой, пересекающей одну из двух параллельных плоскостей. Теорема о плоскости, пересекающей одну из двух параллельных плоскостей. Теорема о проведении плоскости, параллельной данной плоскости, через точку, не лежащую на ней; единственность такой плоскости. Теорема о транзитивности параллельности плоскостей в пространстве. Теорема об отрезках параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями. Теорема о прямой, перпендикулярной одной из двух параллельных плоскостей. *Графическая работа № 2.*

#### *Контрольная работа № 4.*

### Угол между двумя плоскостями (52–60)

Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла. Теорема о линейном угле двугранного угла. Перпендикулярные плоскости. Признак перпендикулярности двух плоскостей. Теорема о прямой, перпендикулярной линии пересечения двух взаимно перпендикулярных плоскостей и лежащей в одной из них. Теорема о прямой, перпендикулярной одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и имеющей со второй плоскостью общую точку. *Графическая работа № 3.* Теорема о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей. Угол между двумя плоскостями. Методы нахождения двугранных углов и углов между двумя плоскостями.

**Контрольная работа № 5.**

### Расстояния в пространстве (61–69)

Расстояние между двумя точками. Расстояние между точкой и фигурой. Расстояние между точкой и прямой. Расстояние между точкой и плоскостью. Расстояние между точкой и сферой. Расстояние между двумя фигурами. Расстояние между двумя параллельными прямыми. Расстояние между прямой и плоскостью. Расстояние между двумя плоскостями. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Геометрические места точек пространства, связанные с расстояниями. Приемы нахождения расстояний между фигурами в пространстве.

**Контрольная работа № 6.**

### Уроки обобщения пройденного материала о параллельности, перпендикулярности, углах и расстояниях в пространстве (70–72)

### Векторы в пространстве (73–82)

Вектор в пространстве. Коллинеарность двух векторов; компланарность трех векторов. Угол между векторами. Линейные операции над векторами (сложение, вычитание, умножение вектора на скаляр) и их свойства. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам, компланарным данному вектору. О трех некомпланарных векторах в пространстве; векторный базис пространства; разложение вектора и его координаты в данном базисе. Условие коллинеарности двух векторов и компланарности трех векторов. Скалярное произведе-



ние двух векторов и его свойства. Формулы, связанные со скалярным произведением. Условие ортогональности двух векторов. Решение геометрических задач векторным методом.

### **Контрольная работа № 7.**

### **Координаты в пространстве (83—92)**

Ортонормированный базис в пространстве. Прямоугольная декартова система координат в пространстве. Координаты вектора, действия над векторами в координатах. Проекция вектора на ось в координатах. Условия коллинеарности и ортогональности двух векторов в координатах. Координаты точки. Формулы нахождения: расстояния между двумя точками в координатах; координат середины отрезка и точки, делящей отрезок в данном отношении. Уравнение и неравенства, задающие множества точек в пространстве. Уравнение сферы и неравенство шара.

Уравнение плоскости в пространстве. Уравнение плоскости, проведенной через данную точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение плоскости и его исследование. Уравнение плоскости в отрезках и другие виды уравнений плоскости. Угол между двумя плоскостями в координатах; условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Прямая в координатах. Угол между двумя прямыми в координатах; условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в координатах. Угол между прямой и плоскостью в координатах, условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости. Решение геометрических задач координатным методом.

### **Контрольная работа № 8.**

### **Повторение (93—105)**

*Теория, практикум по решению задач по планиметрии и стереометрии. Устный зачет*

### **Итоговая контрольная работа № 9.**

При возможности выделить на изучение геометрии 4 часа в неделю, время на изучение теоретического материала каждой темы и на решение задач в особенности увеличивается.

## Краткое содержание курса геометрии 11 класса

### Глава 1. Преобразования пространства

- § 1. Отображения пространства
- § 2. Преобразования пространства
- § 3. Движения пространства. Общие свойства движений
- § 4. Симметрия относительно плоскости
- § 5. Параллельный перенос. Скользящая симметрия
- § 6. Поворот вокруг оси. Осевая симметрия. Зеркальный поворот. Винтовое движение
- § 7. Взаимосвязь различных движений пространства
- § 8. Гомотетия и подобие пространства







### Глава 2. Многогранники

- § 9. Понятие многогранника
- § 10. Объемы многогранников
- § 11. Призма
- § 12. Параллелепипед
- § 13. Трехгранные и многогранные углы
- § 14. Пирамида
- § 15. Правильные многогранники

### Глава 3. Фигуры вращения

- § 16. Фигуры вращения
- § 17. Цилиндр
- § 18. Конус
- § 19. Шар и сфера

## Дополнения

-  1. Применение определенного интеграла для нахождения объемов тел
-  2. О симметриях правильных многогранников
-  3. О поверхностях второго порядка
-  4. О векторном произведении двух векторов
-  5. О различных ветвях геометрии
-  6. Об аксиоматическом построении геометрии

## Приложения

- 1. Список основных теорем курса стереометрии
- 2. Формулы планиметрии
- 3. Формулы стереометрии
- 4. Предметный указатель

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсцисса 140  
Аксиомы стереометрии 13  
Аппликата 140
- Базис (прямоугольный) 139  
Базисные (координатные) векторы 118, 121, 140  
Боковая грань пирамиды 11  
— — призмы 12  
Боковые ребра пирамиды 12  
— — призмы 12
- Вектор нормали 157  
— нулевой 106  
— противоположный данному 107  
Вершина многогранника 11  
— пирамиды 11, 193  
Высота пирамиды 193  
Вычисление координат середины отрезка 152  
— расстояния между двумя точками 149  
— от точки до плоскости 89, 169  
— углов между прямой и плоскостью 58  
Вычитание векторов 112
- Градусная мера двугранного угла 75  
Грань двугранного угла 73  
— многогранника 12
- Двугранный угол 73  
Длина вектора 106
- Изображение плоских фигур 177  
— пространственных фигур 189
- Коллинеарные векторы 104, 114  
Компланарные векторы 116, 119  
Координатные векторы 139  
— оси 140  
— плоскости 140  
Координаты вектора 141  
— точки 148  
Куб 11, 13
- Линейный угол двугранного угла 74
- Наклонная к плоскости 54  
Направление вектора 104  
Направляющий вектор прямой 162
- Ордината 140  
Основание наклонной 55  
— перпендикуляра 54  
— пирамиды 11  
Основания параллелепипеда 13  
— призмы 12  
Откладывание вектора от точки 103
- Параллелепипед 11, 13  
— наклонный 11  
— прямой 11  
— прямоугольный 11  
Параллельное проектирование 60, 178  
Параллельность плоскостей 66  
— прямой и плоскости 44  
— прямых 22, 33, 35, 37  
Пересекающиеся плоскости 18  
Перпендикуляр к плоскости 47, 53  
Перпендикулярность векторов 145, 165

- плоскостей 72, 77
- прямой и плоскости 47, 53
- прямых 53
- Пирамида 11
  - правильная 12
- Плоскость 13, 21
- Правило многоугольника 111
  - параллелепипеда 111
  - параллелограмма 105
  - треугольника 109
- Призма 12
  - наклонная 12
  - прямая 12
- Признак параллельности двух плоскостей 66
  - — — прямой и плоскости 44
  - перпендикулярности двух плоскостей 78
  - — — векторов 125, 142, 145
  - — — прямой и плоскости 48, 125
- Проекция наклонной на плоскость 55
  - ортогональная 55
- Противоположно направленные векторы 105, 107
- Прямоугольная система координат в пространстве 139
- Равенство векторов 107
- Разложение вектора по трем некопланарным векторам 119
- Разность векторов 112
- Расстояние между двумя плоскостями 90
  - — скрещивающимися прямыми 82, 99
  - — фигурами 93
  - от прямой до плоскости 90, 96
  - от точки до плоскости 54, 89, 169
- Ребро двугранного угла 73
- Секущая плоскость 23
- Сечение многогранника 23
- Скалярное произведение векторов 123, 144
- Скалярный квадрат вектора 124
- Скрещивающиеся прямые 32, 34
- Сложение векторов 109
- Сонаправленные векторы 105
- Сумма векторов 109
- Сфера 13
- Теорема о трех перпендикулярах 56, 127
- Тетраэдр 12
  - правильный 12
- Угол между векторами 145, 164
  - — плоскостями 73, 76, 158
  - — прямой и плоскостью 58
  - — скрещивающимися прямыми 42
- Умножение вектора на число 113
- Уравнение плоскости 156
  - — в отрезках 161
  - — общее 157
  - поверхности 154
  - сферы 154
- Уравнения прямой 165
  - — канонические 163
  - — параметрические 162
- Эллипс 177

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Условные обозначения .....	7
----------------------------	---

## Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ

§ 1. Предмет стереометрии. Основные понятия .....	9
§ 2. О некоторых пространственных фигурах .....	10
§ 3. Аксиомы стереометрии .....	13
§ 4. Следствия из аксиом. Способы задания плоскости .....	20
§ 5. Рисунки на доске и в тетради. ....	26

## Глава 2. ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 6. Классификация взаимного расположения двух прямых в пространстве .....	32
6.1. Скрещивающиеся прямые. ....	34
6.2. Параллельные прямые в пространстве .....	35
§ 7. Угол между лучами. Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярные прямые .....	39
7.1. Угол между лучами в пространстве. ....	39
7.2. Угол между прямыми в пространстве .....	41

## Глава 3. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 8. Параллельность прямой и плоскости. ....	44
§ 9. Перпендикулярность прямой и плоскости .....	47
9.1 Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Построение перпендикулярных прямой и плоскости .....	47
9.2. О прямых, перпендикулярных плоскости. ....	53
§ 10. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Теорема о трех перпендикулярах .....	54
§ 11. Угол между прямой и плоскостью .....	58
§ 12. Параллельное проектирование и его свойства. Ортогональное проектирование .....	60

## Глава 4. ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 13. Параллельность плоскостей. ....	66
13.1. Признак параллельности плоскостей .....	66
13.2. Свойства параллельных плоскостей .....	68
§ 14. Двугранные углы. Угол между двумя плоскостями ....	73
14.1. Двугранный угол и его измерение. ....	73
14.2. Угол между двумя плоскостями .....	76

§ 15. Перпендикулярность плоскостей . . . . .	77
15.1. Признаки перпендикулярности двух плоскостей . . . . .	77
15.2. Свойства перпендикулярных плоскостей . . . . .	79
§ 16. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых . . . . .	81
§ 17. Площадь ортогональной проекции многоугольника . . . . .	83

## Глава 5. РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 18. Расстояние от точки до фигуры . . . . .	87
§ 19. Расстояние между фигурами . . . . .	93
§ 20. Геометрические места точек, связанные с расстояниями в пространстве . . . . .	100

## Глава 6. ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 21. Понятие вектора. Линейные операции над векторами . .	104
21.1. Понятие вектора . . . . .	104
21.2. Линейные операции над векторами . . . . .	109
§ 22. Разложение вектора по базису . . . . .	116
22.1. Компланарные векторы . . . . .	116
22.2. Разложение вектора на плоскости . . . . .	117
22.3. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам . . . . .	119
§ 23. Скалярное произведение векторов . . . . .	123
23.1. Определение скалярного произведения векторов . . . . .	123
23.2. Свойства скалярного произведения векторов . . . . .	124
23.3. Признак перпендикулярности двух векторов . . . . .	125
23.4. Применение векторного метода к решению стереометрических задач . . . . .	131

## Глава 7. КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 24. Декартова прямоугольная система координат в пространстве . . . . .	139
24.1. Координаты вектора в пространстве. Линейные операции над векторами в координатах . . . . .	139
24.2. Скалярное произведение векторов в координатах . . . . .	144
24.3. Проекция вектора на ось в координатах . . . . .	145
24.4. Декартовы прямоугольные координаты точки . . . . .	148
24.5. Решение простейших задач стереометрии в координатах . .	149
§ 25. Задание фигур уравнениями и неравенствами . . . . .	154
25.1. Уравнение сферы . . . . .	154
25.2. Уравнение плоскости . . . . .	156
25.3. Прямая в пространстве в координатах . . . . .	162

25.4. Взаимное расположение прямой и плоскости в координатах . . . . .	167
§ 26. Расстояние от точки до плоскости в координатах . . . . .	169

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

Изображение фигур в параллельной проекции . . . . .	173
§ 1. Об изображениях фигур в параллельной проекции . . . . .	173
§ 2. Изображение плоских фигур в параллельной проекции . .	177
2.1. Изображение окружности и многоугольников . . . . .	177
2.2. Изображение многоугольников, вписанных в окружность	184
Задачи . . . . .	188
§ 3. Изображение многогранников . . . . .	189

## ПРИЛОЖЕНИЯ

Список основных теорем 10 класса . . . . .	196
Список задач на построение в пространстве . . . . .	197
Формулы планиметрии . . . . .	199
Тригонометрические тождества . . . . .	205
Формулы стереометрии . . . . .	206

Примерное почасовое планирование (10 класс) (3 ч в неделю, всего 105 ч) . . . . .	214
--	-----

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 11 КЛАССА . . . . .	218
--	-----

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ . . . . .	219
--------------------------------	-----

*Учебное издание*

**Потоскуев Евгений Викторович  
Звавич Леонид Исаакович**

## **ГЕОМЕТРИЯ**

**10 класс**

*Учебник для общеобразовательных учреждений  
с углубленным и профильным изучением математики*

**Редактор Г. Н. Хромова  
Художественный редактор А. А. Абрамова  
Технические редакторы В. Ф. Козлова, Н. И. Герасимова  
Компьютерная верстка А. В. Маркин  
Корректор Г. И. Мосякина**

Санитарно-эпидемиологическое заключение  
№ 77.99.60.953.Д.008763.07.07 от 25.07.2007.

Подписано к печати 15.01.08. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 13,0. Тираж 6000 экз. Заказ № 3163.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

**Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги  
просим направлять в редакцию общего образования издательства «Дрофа»:  
127018, Москва, а/я 79. Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru**

**По вопросам приобретения продукции  
издательства «Дрофа» обращаться по адресу:  
127018, Москва, Сущевский вал, 49.  
Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.**

**Торговый дом «Школьник».  
109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.  
Тел.: (495) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.**

**Сеть магазинов «Переpletные птицы».  
Тел.: (495) 912-45-76.**

**Интернет-магазин: <http://www.drofa.ru>**

**Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленных диапозитивов  
в ОАО «Можайский полиграфический комбинат».  
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.**



*Учебное издание*

**Потоскуев Евгений Викторович  
Звавич Леонид Исаакович**

## **ГЕОМЕТРИЯ**

**10 класс**

*Учебник для общеобразовательных учреждений  
с углубленным и профильным изучением математики*

**Редактор Г. Н. Хромова  
Художественный редактор А. А. Абрамова  
Технические редакторы В. Ф. Козлова, Н. И. Герасимова  
Компьютерная верстка А. В. Маркин  
Корректор Г. И. Мосякина**

Санитарно-эпидемиологическое заключение  
№ 77.99.60.953.Д.008763.07.07 от 25.07.2007.  
Подписано к печати 15.01.08. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 13,0. Тираж 6000 экз. Заказ № 3163.  
ООО «Дрофа». 127018, Москва, Суцевский вал, 49.

**Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги  
просим направлять в редакцию общего образования издательства «Дрофа»:  
127018, Москва, а/я 79. Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru**

**По вопросам приобретения продукции  
издательства «Дрофа» обращаться по адресу:  
127018, Москва, Суцевский вал, 49.  
Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.**

**Торговый дом «Школьник».  
109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.  
Тел.: (495) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.**

**Сеть магазинов «Переплетные птицы».  
Тел.: (495) 912-45-76.**

**Интернет-магазин: <http://www.drofa.ru>**

**Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленных диапозитивов  
в ОАО «Можайский полиграфический комбинат».  
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.**



ISBN 978-5-253-02728-2



9 785356 027282