



Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Д. В. Юмашев

ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ В ФИЗИКЕ

Учебно-методическое пособие для старшеклассников
и студентов I-го курса ФАЛТ МФТИ

ФАЛТ МФТИ, 2006

Предлагаемое учебно-методическое пособие *“Интегралы и производные в физике”* можно рассматривать как полезный пропедевтический курс высшей математики, обеспечивающий мост между школой и институтом. На примере классических и оригинальных олимпиадных задач курс учит школьника и студента не бояться новой для них области математики.

Зав. кафедрой физики ФАЛТ МФТИ
профессор А. Л. Стасенко

Оглавление

Вместо предисловия	6
Глава 1. Примеры, когда для описания явления нужно рассматривать бесконечно малые изменения физических величин	9
Пример 1.1. Скатывание шарика с поверхности цилиндра под действием тяжести	9
Пример 1.2. Движение пули в деревянной доске	12
Пример 1.3. Гармонические колебания и сводящиеся к ним движения	14
Пример 1.4. Полет ракеты с непрерывным выбросом топлива	16
Пример 1.5. Нахождение массы неоднородных тел	18
Пример 1.6. Работа газа в термодинамическом процессе	19
Пример 1.7. Разлет одноименных зарядов под действием Кулоновского от- талкивания	19
Пример 1.8. Переходные процессы в электрических цепях	20
Глава 2. Предельный переход от дискретной модели к непрерывной	22
Пример 2.1. Движение ракеты с дискретными выбросами топлива	22
Пример 2.2. Изотермическая откачка газа из баллона	24
Пример 2.3. Веревка в поле тяжести	29
Пример 2.4. Распространение упругой волны по резиновому шнуру	33
Пример 2.5. Переход от дискретной среды к сплошной	38
Пример 2.6. Радиоактивный распад	40
Пример 2.7. Частица между сближающимися стенками	43
Глава 3. Значение понятий функции и производной для описания фи- зических явлений	47
3.1. Процессы	47
3.2. Стационарные распределения	48
3.3. Процессы, распределенные в пространстве	49
Пример 3.1. Основные дифференциальные уравнения механики	49
Пример 3.2. Основные дифференциальные уравнения термодинамики	50
Пример 3.3. Основные дифференциальные уравнения электричества	51

Глава 4. Примеры задач, сводящихся к простейшим дифференциальным уравнениям	54
Задача 4.1. Движение под действием сил сопротивления	54
4.1.1. Вязкое трение	54
4.1.2. Аэродинамическое сопротивление	58
Задача 4.2. Наполнение бачка	59
Задача 4.3. Вытекание воды из бака под действием тяжести	61
Задача 4.4. Движение муравья по растягиваемому жгуту	62
Задача 4.5. Политропические процессы	66
Задача 4.6. Движение ракеты с непрерывным выбросом топлива	69
Задача 4.7. Переходные процессы в электрических цепях	70
Задача 4.8. Колебания	71
Глава 5. Задачи, сводящиеся к более сложным дифференциальным уравнениям	74
Задача 5.1. Кеплерово движение	74
Задача 5.2. Форма мениска у жидкости	84
Задача 5.3. Траектория волка	90
Задача 5.4. Форма провисающей веревки	95
Приложение	103

Благодарности

Я признателен аспиранту Мехмата МГУ Е. А. Ширяеву и преподавателю кафедры физики ФАЛТ МФТИ С. В. Серохвостову, высказавшим ряд критических замечаний по рукописным материалам, сотруднице ФАЛТ МФТИ Н. А. Путилиной, осуществившей набор значительной части пособия в электронном виде, Союзу Попечителей ФАЛТ и лично А. М. Кузнецову за моральную и финансовую поддержку, оказанную данному проекту. Нельзя не отметить помощь со стороны моих родителей, Е. В. Юмашевой и В. Л. Юмашева, давших ряд ценных рекомендаций по литературному стилю текста и его форматированию в системе \LaTeX . Искреннюю благодарность хочется выразить также заведующему кафедрой физики ФАЛТ А. Л. Стасенко за труд по написанию рецензии, коллегам-преподавателям из ВФТШ при ФАЛТ за их готовность помочь дельным советом и поднять настроение, а также ученикам 11^а класса ВФТШ, которые в 2004–2005 учебном году имели терпение прослушать мои лекции, послужившие основой для этой книги.

Манчестер, июнь 2006.

Вместо предисловия

Дорогой читатель! Ты держишь в своих руках не совсем обычное пособие по физике. Основное место в нем занимает разговор о физическом приложении одного из самых интересных и загадочных разделов математики – *дифференциального исчисления*. Центральными понятиями дифференциального исчисления являются *производная* и *интеграл*, и эти понятия тесно связаны с физикой, с законами окружающей нас природы. Созданное впервые И. Ньютоном и Г. Лейбницем во второй половине XVII в., новое направление математики на протяжении двух последующих столетий получило бурное развитие, будучи в центре внимания величайших ученых: Эйлера, Гаусса, Лагранжа, Лапласа, Коши, Римана, Вейерштрасса, Пуанкаре и многих, многих других. Современное дифференциальное исчисление включает в себя огромное количество направлений, которым посвящены сотни книг. Несомненно, оно стоит в ряду наиболее значительных разделов математики.

Однако не нужно забывать, что основы дифференциального исчисления были разработаны Ньютоном при исследовании именно физической задачи о движении планет вокруг Солнца. Впоследствии многие вопросы из математического анализа и теории дифференциальных уравнений также были сформулированы и разрешены физиками, которые пытались построить адекватное описание природных явлений. Поэтому попытка опереться в изучении производных на их физическое приложение продиктована историей математики и, если хотите, самой сущностью дифференциального исчисления. Именно это автор и попробовал сделать в настоящем пособии, предложив читателю знакомство с рядом интересных физических задач, подразумевающих использование производных.

Ни для кого не секрет, что начала математического анализа очень тяжело даются многим ребятам. Усвоив формальные правила дифференцирования степенных функций и синусоид, они зачастую не отдают себе отчет, что за этими правилами стоит. В подобном случае производные кажутся школьникам (а также и некоторым студентам) чем-то совершенно абстрактным, и они чувствуют естественную неприязнь к новому математическому языку. Сходные проблемы испытывал и сам автор.

С другой стороны, всем хорошо известна некоторая ограниченность школьного курса физики, которая естественным образом проистекает из необходимости использовать в нем только “элементарную” математику. Автор ни в коем случае не хочет этим сказать, что элементарную физику изучать не нужно; более того, она является фундаментом, без которого почти невозможно построить понимание общей и теоретической физики и заниматься впоследствии собственной научной работой. В рамках элементарного курса рассматривается масса интересных и красивых задач, направленных на тренировку физической интуиции, физического чутья. В приложе-

нии вы найдете отдельные примеры, позаимствованные из условий Всероссийских Олимпиад и задачника “Квант”, а также предложенные коллективом преподавателей ВФТИ при ФАЛТ МФТИ. Используйте их в качестве небольшой разминки и проверки уровня своих знаний.¹⁾

Все включенные в приложение задачи решаются “элементарными” методами; правда иногда они требуют использования “готовых” формул (например для КПД цикла Карно), вывод которых невозможен без применения производных и обычно не дается в школьном курсе физики. И тем не менее... Во многих случаях возникают “непреодолимые” преграды – вспомним хотя бы движение под действием силы сопротивления, зависящей от скорости. А возьмем, к примеру, слив воды из ванной или наполнение бачка. Эти процессы не поддаются описанию в терминах средней скорости, равномерного или равноускоренного движения и других средств из “школьного” арсенала. И часто возникает сильное желание “заглянуть за ширму” и узнать, как же все-таки смоделировать математически подобные явления. Настоящее пособие призвано помочь вам немного этому научиться.

Пособие включает в себя пять глав. В них последовательно излагаются основные вопросы, связанные с применением дифференциального исчисления в физических задачах. При этом очередные главы и разделы как правило предполагают знание материала предыдущих. В главе 1 дается обзор типичных задач, при решении которых исследователь сталкивается с необходимостью рассмотрения *бесконечно малых величин*. Так возникают, собственно, понятия производной и интеграла. В главе 2 обсуждается важный вопрос о соотношении между *дискретными* и *непрерывными* моделями физических явлений. На основе *предельного перехода* от дискретного рассмотрения к непрерывному выводятся ключевые математические правила, связанные с дифференциальным исчислением. Так, вводятся в употребление *экспоненциальная* и *логарифмическая функции*, столь часто встречающиеся в физике, определяется значение площади под графиком гиперболы и т.п. Глава 3 посвящена общей философии использования дифференциального исчисления в физике. В качестве иллюстрации приводятся *основные дифференциальные уравнения механики, термодинамики и электричества*, с которыми студенты обычно имеют дело на первом курсе любого технического ВУЗа. В следующей за этим главе 4 автор знакомит читателя с рядом физических задач, подразумевающих написание и последующее решение простейших дифференциальных уравнений. По ходу изложения продолжается вывод основных математических правил дифференцирования и интегрирования. Заключительная глава 5 составлена из четырех задач, сводящихся к более сложным дифференциальным уравнениям. В процессе их решения демонстрируются методы вычисления некоторых стандартных интегралов, понижения порядка в уравнениях определенного вида, вводятся *гиперболические функции*. В этой главе также упоминаются *специальные функции* и поднимается вопрос о причинах неразрешимости большинства уравнений.

Разумеется, в последних двух главах речь идет только об *обыкновенных дифференциальных уравнениях*, т.е. уравнениях, которые не содержат *частных производных*. Последние немного затрагиваются в главах 2 и 3, однако связанные с ними

¹⁾Чтобы нормально читать материал пособия, вовсе необязательно суметь решить все задачи из этого списка. —

разделы при прочтении могут быть опущены без ущерба для основного материала. Завершает пособие уже упомянутое выше приложение, включающее в себя подборку интересных задач из “школьной” физики.

Для плодотворного чтения материала пособия желательно хорошо знать “элементарную” физику в объеме 9-го и 10-го классов спецшколы (разделы “механика”, “термодинамика” и “электричество”), уверенно владеть элементарной алгеброй и тригонометрией, а также обладать начальными навыками по взятию производных от простейших функций (степенных и тригонометрических). Последний пункт, однако, не является обязательным; пособие вводит в рассмотрение производные практически с нуля.

Итак, мы с вами увидим, насколько дифференциальное исчисление значимо для математического описания физических явлений. Использование даже самых элементарных операций с производными и интегралами позволит уже на вашем теперешнем уровне подготовки рассмотреть множество интересных задач (*движение планет, реактивное движение*, и т.д.), которые раньше казались недостижимыми. В добрый путь!

Глава 1

Примеры, когда для описания явления нужно рассматривать бесконечно малые изменения физических величин

Давайте вспомним, какие явления в основном рассматриваются в школьном курсе физики. В механике – преимущественно движение под действием постоянной силы, например, полет камня в поле тяжести; в термодинамике – процессы, в которых один из параметров газа (p, V, T) оставался постоянным (*изопроцессы*), и т.д. В перечисленных примерах вам всегда удавалось свести задачу к несложному алгебраическому уравнению. Так, нетрудно получить, что при одномерном движении тела с постоянным ускорением (которое в силу II-го закона Ньютона соответствует действию на тело постоянной силы) его скорость и координата зависят от времени по законам

$$v(t) = v_0 + at, \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Применение этих зависимостей позволяет сразу решить большое количество задач. Точно так же при исследовании изопроцессов, как правило, достаточно посчитать площадь под графиком линейной функции (для вычисления работы, совершенной газом), что тоже делается простейшими алгебраическими методами.

А теперь вспомним те многочисленные случаи, в которых так просто обойтись элементарной математикой не удавалось. Если говорить о механике, то движение под действием постоянной силы – довольно редкое явление; как правило, силы переменны. Аналогичная ситуация имеет место и в других областях физики. Приведем конкретные примеры и вспомним, как вам до сих пор удавалось преодолевать трудности.

Пример 1.1. Скатывание шарика с поверхности цилиндра под действием тяжести.

Рассмотрим следующую задачу. Из верхней точки на поверхности расположенного горизонтально цилиндра под действием тяжести начинает скатываться маленький шарик (рис. 1). Требуется исследовать его движение вплоть до момента отрыва от поверхности цилиндра.²⁾

²⁾ Движение после отрыва не представляет для нас интереса, поскольку оно является просто свободным падением.

Из рис. 1 мы видим, что составляющая силы тяжести $mg \sin \varphi$, вызывающая скатывание, изменяется в ходе движения шарика, поскольку увеличивается угол φ . Значит такое движение не является равноускоренным, и для его описания мы не можем воспользоваться приведенными выше зависимостями координаты и скорости тела от времени. Используя элементарные средства школьной физики, вы могли опреде-

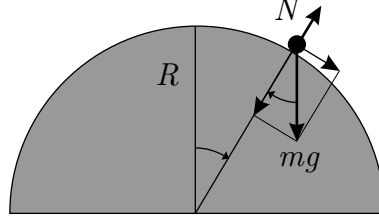


Рис. 1. Скатывание шарика с поверхности цилиндра

лить положение шарика в момент отрыва от поверхности цилиндра (φ_*), а также его скорость в этот момент (v_*). В самом деле, вычисляя полную энергию шарика в начале скатывания (когда $\varphi = 0$, $v = 0$) и в момент отрыва (*), запишем условие ее сохранения в процессе движения:

$$mgR = mgR \cos \varphi_* + \frac{mv_*^2}{2}.$$

К этому уравнению нужно еще добавить, собственно, условие отрыва – обращение силы реакции N в ноль. Поскольку разность сил $mg \cos \varphi$ и N сообщает шарiku центростремительное ускорение (иными словами, искривляет его траекторию), то в момент отрыва

$$mg \cos \varphi_* = \frac{mv_*^2}{R}.$$

Из полученных двух уравнений нетрудно выразить искомые φ_* и v_* :

$$v_* = \sqrt{\frac{2}{3}gR}, \quad \cos \varphi_* = \frac{2}{3}.$$

Мы счастливы и радуемся жизни, но если бы нас попросили найти, как в ходе движения изменялись со временем скорость и координата шарика (зависимости $v(t)$, $\varphi(t)$), или сколько времени прошло от начала движения до момента отрыва, нам пришлось бы развести руками. Попробуем понять, почему.

Уравнения движения шарика (II-ой закон Ньютона) имеют вид

$$\begin{cases} m \frac{\Delta v}{\Delta t} = mg \sin \varphi & (\text{в тангенциальном направлении}) \\ m \frac{v^2}{R} = mg \cos \varphi - N & (\text{в радиальном направлении}); \end{cases} \quad (1.1)$$

к ним нужно еще добавить очевидное кинематическое соотношение

$$v = R \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}.$$

Закон сохранения энергии, который в первую очередь приходит на ум в качестве панацеи от всех бед, не дает ответа на поставленный вопрос. Если записать его для произвольного положения шарика φ до момента отрыва, получится уравнение

$$mgR = mgR \cos \varphi + \frac{mv^2}{2},$$

позволяющее найти лишь зависимость $v(\varphi)$, но не $v(t)$ и $\varphi(t)$.

Сложность состоит в том, что все силы, входящие в правые части уравнений (1.1), переменны. Более того, они не просто переменны, но зависят непосредственно от координаты шарика φ , изменение которой ими же и производится.³⁾ Получается нечто вроде системы с обратной связью, наподобие сливного бачка с поплавком или центробежного регулятора частоты вращения двигателя. Следовательно, при записи скорости $v = R \cdot \Delta\varphi / \Delta t$ и ускорения $\Delta v / \Delta t$ мы вынуждены рассматривать как можно меньшие промежутки времени Δt и соответствующие им малые изменения $\Delta\varphi$ и Δv – такие, чтобы за время Δt изменением угла φ , а с ним и сил в (1.1) можно было бы пренебречь.

Действительно, уравнения движения будут иметь смысл, если мы сможем приписать силам определенные значения (т.е. значения, взятые при фиксированных v и φ). И вместе с тем мы должны сохранить в уравнениях приращения Δv , $\Delta\varphi$ и Δt , которые вносят “неопределенность”. Более того, наше описание движения, очевидно, не должно зависеть от того, какие Δv , $\Delta\varphi$ и Δt рассматривать – именно такие или, скажем, вдвое меньшие. Поэтому идеально точное описание, как вы наверное уже догадались, получится при рассмотрении бесконечно малых промежутков времени dt и связанных с ними бесконечно малых приращений $d\varphi$ и dv ; символ “ d ” здесь просто заменяет привычное вам “ Δ ”. А это означает, что наши уравнения движения, вообще говоря, должны записываться с помощью *производных*:

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \varphi, \quad v = R \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.2)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ величина $v = R \cdot \Delta\varphi / \Delta t$, переходящая в $R \cdot d\varphi / dt$, соответствует лишь текущему моменту времени t , относительно которого берется исчезающе малое приращение dt . Так возникает понятие *мгновенной скорости*. То же самое относится и к *мгновенному ускорению* dv/dt .

Из-за того, что уравнения (1.2) содержат не только искомые функции v и φ , но и их приращения dv и $d\varphi$ (а также приращение времени dt), их решением являются не отдельные значения координаты и скорости шарика, но непрерывные функции $v(t)$ и $\varphi(t)$. Они характеризуют движение во все моменты времени, пока шарик находится на поверхности цилиндра. И в этом принципиальное отличие системы (1.2) от любимых вами алгебраических уравнений. В последние неизвестная величина x входит без каких-либо приращений; всякое алгебраическое уравнение дает лишь ограниченное (в лучшем случае *счетное*) множество корней.

³⁾Заметим, что второе уравнение системы (1.1) нужно лишь для определения силы реакции N после нахождения зависимостей $v(t)$, $\varphi(t)$, которые получаются каким-то неизвестным нам пока способом из двух оставшихся уравнений.

Итак, производная есть просто отношение связанных друг с другом бесконечно малых приращений физических величин, и ничего сверхъестественного в этом понятии нет. Тем не менее, введение в рассмотрение производной (вместо отношения конечных приращений) в свое время было качественным скачком в сознании естествоиспытателей; этот “скачок” продолжает оставаться таковым и для нас с вами. К сожалению, для многих подобный скачок превращается скорее в непреодолимый барьер. Поэтому основной целью настоящего пособия является помочь вам в понимании сути новых математических объектов.

Реальность такова, что подавляющее большинство уравнений, характеризующих физические процессы, содержат производные. То, что иногда мы можем от производных перейти к отношению конечных приращений (Δ , а не d) – лишь редкий частный случай. В этом мы убедимся из последующих примеров.

Пример 1.2. Движение пули в деревянной доске.

Еще один пример движения под действием изменяющейся силы – *движение пули в деревянной доске* (рис. 2). Экспериментально установлено, что при таком движении сила сопротивления пропорциональна скорости пули: $F_{\text{сопр}} = -\alpha v$, где коэффициент пропорциональности α постоянен и зависит от свойств дерева, а также от формы и размеров пули.⁴⁾ Значит, уравнение движения в любой момент времени $t > 0$ ($t = 0$ – начало движения в доске) имеет вид

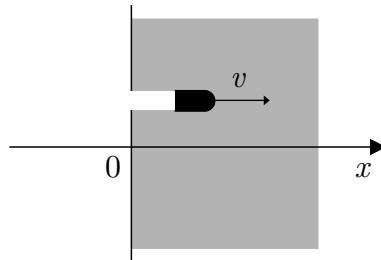


Рис. 2. Движение пули в доске

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v \quad (1.3)$$

(m – масса пули). Заметим, что аналогичное уравнение описывает движение лодки по инерции, движение шарика в глицерине и множество других подобных явлений. При записи (1.3) опять нужно использовать бесконечно малые приращения, поскольку сила в правой части переменна; только за бесконечно малый промежуток времени dt изменением силы можно пренебречь, приписав ей определенное значение. Так снова возникают понятия мгновенных скорости и ускорения, которые необходимо вводить при исследовании любых неравномерных движений.

⁴⁾ Силы сопротивления, линейные по скорости, принято называть *вязким трением*.

В школьном курсе физики производные обычно не используются, и уравнение (1.3) записывается в конечных приращениях:

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\alpha v; \quad (1.4)$$

при этом все равно говорится, что величины Δt и Δv должны быть достаточно малыми – иначе не получится адекватного описания движения. Мы также знаем из школы, что

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}; \quad (1.5)$$

Δx есть путь, пройденный пулей за время Δt (иными словами, изменение координаты x пули за время Δt). Поскольку промежуток времени Δt , очевидно, один и тот же в определениях скорости ($\Delta x/\Delta t$) и ускорения ($\Delta v/\Delta t$), после подстановки (1.5) в (1.4) на Δt можно сократить, и это приведет нас к уравнению

$$m \Delta v = -\alpha \Delta x. \quad (1.6)$$

Получается, что уменьшение скорости под действием сопротивления пропорционально пройденному пути. Нам ничего не остается, кроме как просуммировать все подобные приращения по мере движения пули вплоть до самой остановки: $\sum \Delta v = v_{\text{конеч}} - v_{\text{нач}} = -v_0$ (посредством v_0 обозначена начальная скорость пули); $\sum \Delta x = L$ – пройденный до остановки путь. В результате

$$mv_0 = \alpha L.$$

Отсюда можно найти L , если известны m , v_0 и α . Напротив, экспериментальное определение длины пробега L позволяет оценить коэффициент сопротивления α , который часто бывает трудно рассчитать теоретически.

Производя также суммирование соотношений (1.6) не до самой остановки, а до произвольного положения пули x ($0 < x < L$) в ходе движения, получим

$$m(v(x) - v_0) = -\alpha x.$$

Данная формула определяет зависимость скорости пули v от преодоленного ею к данному моменту расстояния x (см. рис. 3). Уравнение (1.6), таким образом, справедливо для любых конечных приращений и является тем редким частным случаем, когда мы имеем возможность обойтись без производных (т.е. бесконечно малых приращений). Однако на этом “школьное” решение задачи заканчивается. Именно, мы не можем элементарными средствами установить зависимости скорости и пройденного пути от времени ($v(t)$, $x(t)$). В самом деле, переписывая точное уравнение движения (1.3) в виде

$$m \frac{dv}{v} = -\alpha dt \quad (1.7)$$

(умножив (1.3) на dt и поделив на v), мы приходим к выводу, что приращения dv и dt не пропорциональны друг другу в обычном смысле слова, будучи связанными переменной величиной v . Ключ к нахождению зависимости $v(t)$, как вы наверное

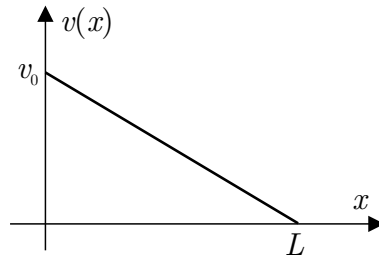


Рис. 3. Зависимость скорости пули от пройденного пути

уже догадались, состоит в суммировании уравнений вида (1.7), записанных последовательно вдоль всего движения пули. Однако подобное суммирование из-за наличия v в знаменателе теперь равносильно вычислению площади под графиком гиперболы $1/v$ (рис. 4), чего мы делать пока не умеем. Задачу придется отложить до лучших времен.⁵⁾

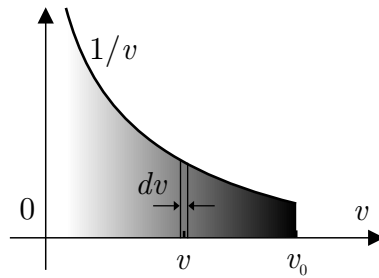


Рис. 4. Площадь под графиком гиперболы

Пример 1.3. Гармонические колебания и сводящиеся к ним движения.

При рассмотрении ряда явлений (см. рис. 5, 6, 7, 8) получается одно и то же уравнение движения с переменной силой:

$$a_x + \omega^2 x = 0. \quad (1.8)$$

В приведенных примерах

$$\omega^2 = \left\{ \frac{g}{R}, \quad \frac{k}{m}, \quad \frac{g \sin \alpha}{l}, \quad \frac{g}{l} \right\}.$$

В соответствии с уравнением (1.8) ускорение a_x , приводящее к изменению положения тела x , зависит от этого положения. Иными словами, действующая на тело сила снова переменна. Тут и возникает трудность сродни той, что обсуждалась в предыдущих примерах. Уже в 9-ом классе вы знали, что уравнение (1.8) описывает гармонические колебания, однако его решение давалось либо без доказательства,

⁵⁾См. главу 4, задачу 4.1.

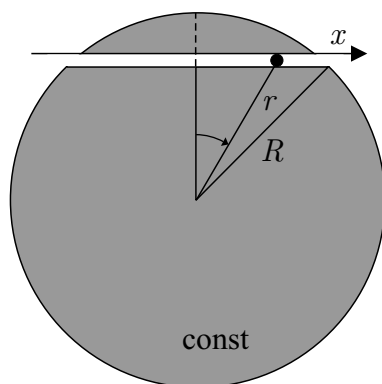


Рис. 5. Движение в тоннеле вдоль хорды планеты

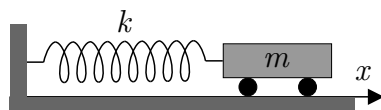


Рис. 6. Пружинный маятник

либо из аналогии колебаний с вращательным движением. Зависимости координаты и скорости тела от времени (т.е. решения уравнения (1.8)) в случае гармонических колебаний имеют вид

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \theta_0), \quad v(t) = v_m \cos(\omega t + \theta_0),$$

причем $v_m = \omega x_m$,⁶⁾ ω суть круговая частота колебаний, квадрат которой стоит в уравнении. Она связана с механическими свойствами колебательной системы следующим образом:

$$\omega = \sqrt{\frac{\text{жесткость}}{\text{инертность}}}.^{7)}$$

Те же самые зависимости $x(t)$, $v(t)$, а также и соотношение $v_m = \omega x_m$ для амплитуд, совершенно элементарно выводятся с помощью производных. В самом деле, мы уже знаем, что мгновенные ускорение и скорость в общем случае определяются как

$$a_x = \frac{dv}{dt}, \quad v = \frac{dx}{dt};$$

⁶⁾ Данное соотношение в школьном курсе физики выводится из закона сохранения энергии.

⁷⁾ Проверьте эту общую закономерность на приведенных выше примерах колебательных систем.

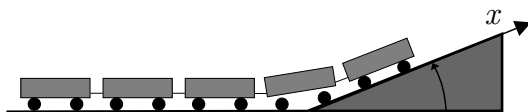


Рис. 7. Въезд состава на горку

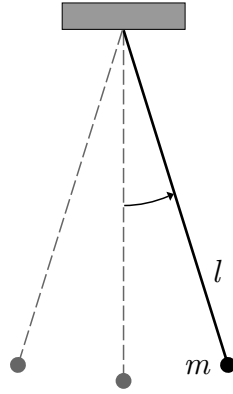


Рис. 8. Маятник в стенных часах

значит ускорение есть производная от производной, т.е. вторая производная от координаты тела по времени:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Если координата тела изменяется по закону

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \theta_0), \quad (1.9)$$

то его скорость и ускорение есть

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega x_m \cos(\omega t + \theta_0), \quad a_x = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \theta_0).$$

Именно поэтому функция (1.9) удовлетворяет уравнению (1.8), а $v_m = \omega x_m$. Амплитуда x_m и фаза θ_0 в (1.9) определяются начальными условиями колебаний, а частота ω – механическими свойствами колебательной системы.⁸⁾

Пример 1.4. Полет ракеты с непрерывным выбросом топлива.

Рассмотрим *полет ракеты с непрерывным выбросом топлива*. При отсутствии каких-либо внешних сил для описания такого движения удобно воспользоваться законом сохранения импульса (в силу замкнутости системы “ракета + реактивная струя”). И тут появляются две трудности. Во-первых, изменение импульса ракеты связано не только с изменением ее скорости, но и с уменьшением ее массы вследствие выброса реактивной струи.⁹⁾ Во-вторых, импульс струи в неподвижной системе отсчета, в которой выполняется закон сохранения, зависит от переменной скорости ракеты v . Действительно, так как скорость газа u относительно ракеты в большинстве случаев постоянна и определяется просто параметрами двигателя, а скорость самой ракеты v , очевидно, изменяется в ходе полета, то скорость струи относительно

⁸⁾ Более подробно о колебаниях речь пойдет в конце главы 4 (задача 4.8).

⁹⁾ Об этом типе движения специально говорят как о *движении с изменяющейся массой*.

неподвижной системы (в проекции на направление полета ракеты), равная $v - u$, тоже переменна. Уже до записи закона сохранения импульса появляется предчувствие, что точная формулировка получится при рассмотрении бесконечно малых изменений массы и скорости ракеты за бесконечно малое время dt .

Пусть dm' – выброшенная за время dt масса газа; $v(t)$ – скорость ракеты в неподвижной системе в момент t (в начале промежутка dt). Преимущество рассмотрения бесконечно малого (стремящегося к нулю) промежутка времени dt состоит в том, что в ходе него скорость ракеты v в выражении $v - u$ для скорости струи может считаться постоянной. Иными словами, скорости выброшенных газов в неподвижной системе в течение времени dt можно приписывать постоянное значение $v - u$. А вот с точки зрения движения самой ракеты бесконечно малое изменение ее скорости dv , происходящее за время dt , очень даже существенно – оно определяет тип движения, которое, очевидно, далеко от равномерного. Итак, импульс системы в начале и в конце промежутка времени dt один и тот же, и равен, соответственно,

$$(m - dm') \cdot v + v \cdot dm' = (m - dm') \cdot (v + dv) + (v - u) \cdot dm'$$

ракета порция струи ракета порция струи .

После сокращений и раскрытия скобок получим

$$mv = mv + mdv - dm'dv - udm' . \quad (1.10)$$

Слагаемое $dm'dv$ бесконечно мало по сравнению с остальными, и его с математической строгостью можно отбросить, чего нельзя было бы сделать при конечных $\Delta m'$ и Δv . Итак, из (1.10) вытекает уравнение $mdv = udm'$. Если dm суть изменение массы ракеты за время dt , то $dm = -dm'$, и

$$mdv = -udm .$$

В такой форме уравнение, называемое *уравнением Мещерского*, содержит только переменные величины m и v , относящиеся к ракете, а также их бесконечно малые приращения. Это дифференциальное соотношение, записанное в виде $dv = -(dm/m)u$ ($u = \text{const}$), похоже на то, что было получено при исследовании полета пули в доске. Суммируя подобные выражения по мере движения ракеты от начального момента (когда скорость и масса ракеты равны v_0, m_0) до некоторого произвольного момента t (когда $v = v(t)$, $m = m(t)$), мы найдем зависимость $v(m)$. Она объясняет, как скорость ракеты связана с ее текущей массой. Если задать закон, по которому изменяется масса ракеты вследствие выброса струи газа, например,

$$m(t) = m_0 - \mu t$$

(μ – постоянный массовый расход газа, кг/сек), из функции $v(m)$ автоматически получится зависимость скорости ракеты от времени, характеризующая ее движение. Но все, как мы видим, опять упирается в площадь под графиком гиперболы. В дальнейшем мы научимся вычислять и не такие площади – функции будут куда сложнее. Однако я немного забегаю вперед.

Пример 1.5. Нахождение массы неоднородных тел.

Представим себе астероид, планету или звезду, которые имеют сферическую форму (по определенным причинам форма крупных небесных тел близка к сфере). Думаю, вам понятно, что плотность вещества у небесных тел в разных частях различна; кроме того, внутренности сферических небесных тел, очевидно, тоже сферически симметричны. Поэтому распределение плотности можно задать в виде функции $\rho(r)$, где r – расстояние от центра планеты до сферического слоя с данной плотностью; $0 \leq r \leq R$ (R – радиус планеты). Функция $\rho(r)$ может быть какой угодно; ее вид зависит от физических процессов, протекавших при образовании небесного тела, как, впрочем, и от его активности в данный момент. Для иллюстрации, однако, можно использовать модельные функции, например линейную $\rho(r) = \alpha r + \beta$ (α, β – постоянные).

Возникает вопрос: как рассчитать массу такой планеты? В случае $\rho = \text{const}$ еще чуть ли ни в младших классах школы вас учили, что

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho.$$

Но теперь $\rho \neq \text{const}$. И тут на помощь опять приходит логика бесконечно малых величин. На сей раз, воспользовавшись сферической симметрией, мысленно разделим планету на множество сферических слоев – сделаем из нее этакую капусту (рис. 9). Все слои похожи, поэтому рассмотрим произвольный слой радиуса r и малой толщины Δr . Если Δr устремить к нулю, т.е. перейти к бесконечно малой толщине dr , то в пределах тонкого слоя плотность вещества можно считать постоянной и равной $\rho(r)$. Более того, объем такого слоя есть

$$dV = 4\pi r^2 dr,$$

т.к. бесконечно тонкий сферический слой радиусом r по объему эквивалентен плоскому листу с той же толщиной dr и площадью поверхности $4\pi r^2$. В результате масса нашего слоя равна

$$dm = 4\pi r^2 \rho(r) dr.$$

Чтобы получить полную массу планеты, нужно просуммировать массы всех тонких слоев. Тут нам уже придется искать площадь под графиком функции $r^2 \cdot \rho(r)$, но это нас не должно пугать – в дальнейшем мы научимся находить площади для большого набора типов функции $\rho(r)$.

Здесь уместно сказать, что суммирование бесконечно малых величин называется *интегрированием*. То есть интегрирование – это предельный случай суммирования, своеобразное “непрерывное” суммирование. Уже сейчас вам должно быть понятно, что интегрирование постоянно используется при работе с бесконечно малыми. Сами же бесконечно малые приращения называются *дифференциалами* (отсюда и обозначение “ d ”).

Какое бы физическое явление мы ни изучали, почти всегда придем к выводу: необходимо рассматривать бесконечно малые изменения в системе, такие, что те или иные параметры системы можно при этом считать постоянными. Только тогда мы

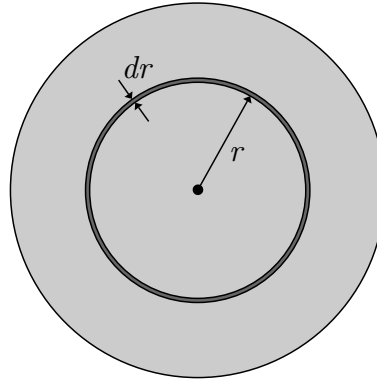


Рис. 9. Нахождение массы сферически симметричного тела с переменной плотностью

будем получать адекватное описание явления. Приведем еще несколько типичных примеров.

Пример 1.6. Работа газа в термодинамическом процессе.

При рассмотрении *изотермического* и *адиабатического* процессов для нахождения работы газа приходится снова вычислять площади под графиками гипербол ($p \sim 1/V$ в изотермическом и $p \sim 1/V^\gamma$ в адиабатическом процессах); это нужно, в частности, для определения КПД цикла Карно:

$$\eta = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}.$$

Собственно, поэтому данная формула приводится в 10-м классе без доказательства.¹⁰⁾

Пример 1.7. Разлет одноименных зарядов под действием Кулоновского отталкивания.

Предположим, что два одноименных электрических заряда, находящиеся первоначально в состоянии покоя на некотором расстоянии r_0 друг от друга, начинают разлетаться под действием электростатического отталкивания. Законы сохранения импульса и энергии в данном примере позволяют найти зависимости скоростей заряженных частиц от расстояния r между ними:

$$\begin{cases} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \\ 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \end{cases}$$

¹⁰⁾Подробнее о термодинамике идеального газа речь пойдет в примере 3.2 (глава 3), а также в задаче 4.5 (глава 4).

В частности, при $m_1 = m_2 = m$ получается $|v_1| = |v_2| = v$, и

$$v(r) = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 m} \cdot \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right]}, \quad (r \geq r_0).$$

Но законы сохранения, увы, ничего не могут сказать о том, как меняется скорость разлетающихся частиц с течением времени. Для ответа на подобный вопрос нужно опять рассматривать уравнение движения, которое из-за переменного характера силы должно быть записано в бесконечно малых приращениях, т.е. с использованием производной:

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.11)$$

С помощью законов сохранения мы получили связь между v и r . Из нее можно выразить r через v и подставить в (1.11); затем перенести $r^2(v)$ туда, где находится dv , а dt – в другую часть равенства. В итоге нужно будет суммировать выражение вида

$$m r^2(v) dv = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} dt$$

от начала разлета ($t = 0, v = 0$) до интересующего нас момента времени t ; так мы получим зависимость $v(t)$, а с ней и $r(t)$. Опять нужно научиться считать хитрую площадь – научимся.

Пример 1.8. Переходные процессы в электрических цепях.

Еще один пример – протекание тока через конденсатор и катушку индуктивности при подключении их через сопротивление к источнику постоянного тока. В первом случае величина

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{U - q/C}{R}$$

есть интенсивность протекания заряда по цепи (сила тока), равная скорости изменения заряда q на пластинах конденсатора (U – ЭДС источника). Это уравнение похоже на уравнение движения пули в доске; добавилось только “внешнее воздействие” U/R . Во втором случае процесс описывается уравнением

$$L \frac{dI}{dt} = U - I \cdot R,$$

которое имеет ту же структуру. Приведенные выше уравнения применимы также и в случае переменного воздействия $U(t)$.

Заметим, что многие уравнения, описывающие динамические процессы, (т.е. развитие, изменение чего-то во времени), обладают схожей структурой: в одной части (слева) стоит мгновенная скорость изменения какой-то физической величины, а в другой (справа) – “силовое воздействие”, которое вызывает данное изменение. Это универсальный закон. Математически же мгновенная скорость изменения величины выражается посредством производной:

$$\frac{dv}{dt}, \quad \frac{dq}{dt}, \quad \frac{dI}{dt},$$

и т.д. Надеюсь, после рассмотренных примеров вам понятно, откуда в физике возникает понятие мгновенной скорости, подразумевающее использование производных. Должен быть также понятен основной путь при работе с дифференциалами – “непрерывное суммирование”, или, как его называют, интегрирование.

А пока давайте задумаемся вот над чем. Если мы еще толком не знаем, что такое производная и интеграл, и как и с чем их едят, то, может быть, мы попытаемся решать некоторые из перечисленных задач, не переходя к бесконечно малым величинам? Так, применимо к движению ракеты вместо непрерывного истечения газа можно рассмотреть порционные выбросы: через равные промежутки времени Δt ракета мгновенно выбрасывает малую порцию газа $\Delta m'$. Понятно, что такое движение после N выбросов будет описываться системой N алгебраических уравнений, выражающих собой закон сохранения импульса на каждой стадии. Худо бедно, после решения мы получим $v(N)$ – скорость ракеты на N -ом “шаге”, а с ней и зависимость $v(m)$ скорости от текущей массы ракеты (т.к. $m = m_0 - N\Delta m'$). Но что произойдет, если в этом решении мы начнем уменьшать Δt и $\Delta m'$, сохраняя их отношение $\mu = \Delta m' / \Delta t$ (массовый расход газа) постоянным? Придем ли мы таким образом к решению уже рассмотренной задачи о полете ракеты с непрерывным истечением топлива, в которой потребовалось использовать дифференциалы и вычислять площадь под гиперболой? Обсуждению этой проблемы посвящена следующая глава пособия.

Глава 2

Предельный переход от дискретной модели к непрерывной

Рассмотренная в самом конце предыдущей главы модель движения ракеты может быть названа *дискретной*. Дискретное – это нечто, состоящее из отдельных звеньев, этапов. К примеру, лестница в доме позволяет подняться на строго определенные высоты $h_N = N\Delta h$ (где Δh – высота ступеньки), т.е. является “дискретной”. Горка же для вкатывания колясок позволяет подняться на любую высоту в своих пределах, т.е. является непрерывной. Остановимся на конкретных примерах.

Пример 2.1. Движение ракеты с дискретными выбросами топлива.

Опишем *движение ракеты с дискретными выбросами топлива*. При этом будем считать, что после выброса небольшой порции $\Delta m'$ скорость ракеты меняется на Δv ; влиянием же этого изменения на скорость газов относительно неподвижной системы в силу малости Δv пренебрежем. Закон сохранения импульса для выброса N -ой порции имеет вид

$$(m_0 - N\Delta m') v_{N-1} + \Delta m' v_{N-1} = (m_0 - N\Delta m') v_N + \Delta m' (v_{N-1} - u)$$

ракета без N -ой порции N -ая порция ракета без N -ой порции N -ая порция ;

здесь v_k – скорость ракеты после k -го выброса. Из данного уравнения находим связь скоростей до и после N -го выброса:

$$v_N = v_{N-1} + u \frac{\Delta m'}{m_0 - N\Delta m'}.$$

Такое соотношение называется *рекуррентным* – оно связывает величины на двух соседних шагах между собой. Понятно, что это соотношение справедливо для любого N . В частности, при $N = 1$ (1-ый выброс)

$$v_1 = v_0 + u \frac{\Delta m'}{m_0 - \Delta m'},$$

при $N = 2$

$$v_2 = v_1 + u \frac{\Delta m'}{m_0 - 2\Delta m'},$$

и т.д. Когда мы запишем все подобные уравнения вплоть до N -го одно под другим, то сразу обратим внимание на любопытное обстоятельство. Если их просуммировать, все промежуточные значения скорости сократятся, и мы получим связь v_N с v_0 :

$$v_N = v_0 + u \Delta m' \sum_{n=1}^N \frac{1}{m_0 - n \Delta m'}. \quad (2.1)$$

Теперь начнем уменьшать $\Delta m'$ таким образом, чтобы массовый расход топлива

$$\mu = \frac{\Delta m'}{\Delta t}$$

оставался неизменным.¹¹⁾ Рассматриваемые начальное и текущее (спустя N выбросов) значения массы ракеты (m_0 и $M = m_0 - N \Delta m'$, соответственно) при этом не меняются, а вот количество выбросов N , приходящееся на то же самое уменьшение массы ракеты, возрастает. В пределе $\Delta m' \rightarrow 0$

$$N = \frac{m_0 - M}{\Delta m'} \rightarrow \infty,$$

и сумма в (2.1) состоит из бесконечного количества слагаемых, непрерывным образом переходящих друг в друга.¹²⁾ При $N \rightarrow \infty$ вместо зависимости скорости ракеты от числа выбросов (v_N) имеет смысл ввести зависимость скорости от текущей массы ракеты: $v(M)$. Величины M и v теперь изменяются непрерывным образом. С учетом этих замечаний уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$v(M) = v_0 + u \int_{m_0}^M \frac{dm'}{m},$$

причем дифференциал dm' получается из конечной величины $\Delta m'$ в результате предельного перехода. Символом $\int_{m_0}^M$ обозначена непрерывная сумма (*интеграл*) по всем значениям m массы ракеты от ее первоначального значения m_0 и до интересующего нас текущего значения M . Особое внимание обращаю на то, что в знаменателе стоит произвольное значение массы ракеты $m = m_0 - n \Delta m'$, которое по совершении предельного перехода $\Delta m' \rightarrow dm'$ изменяется в процессе суммирования (интегрирования) непрерывным образом от m_0 до M .

Заменяя dm' на $-dm$ (dm – изменение массы ракеты), найдем:

$$v(M) = v_0 - u \int_{m_0}^M \frac{dm}{m}.$$

¹¹⁾ Δt суть время между двумя последовательными выбросами.

¹²⁾ «Расстояние» между соседними слагаемыми $\Delta m'$ при совершении предельного перехода становится исчезающе малым и может быть заменено дифференциалом dm' . Малая величина каждого слагаемого в сумме компенсируется большим их количеством.

Такой же результат, как легко убедиться, непосредственно вытекает из дифференциального соотношения Мещерского $mdv = -vdm$, описывающего полет ракеты с непрерывным выбросом топлива.¹³⁾ Мы опять приходим к необходимости вычисления площади под гиперболой (рис. 10), только несколько иным путем – после предельного перехода в дискретной модели. Окончательное решение задачи о полете ракеты придется пока отложить.¹⁴⁾

Чтобы, наконец, научиться считать площадь под гиперболой, рассмотрим еще один пример перехода от дискретной модели к непрерывной.

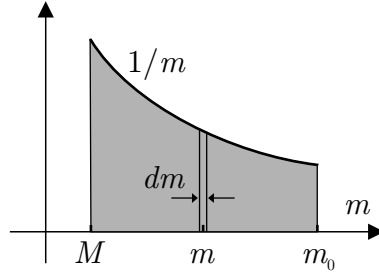


Рис. 10. Увеличение скорости ракеты пропорционально площади под графиком гиперболы

Пример 2.2. Изотермическая откачка газа из баллона.

Пусть у нас есть баллон объема V , в котором заключено ν_0 моль идеального газа при температуре T . Будем при постоянной температуре (изотермически) откачивать из баллона небольшие порции газа, подсоединя маленький пустой резервуар объемом $\Delta v \ll V$. Организовав изотермическое перетекание части газа в объем Δv , отсоединим его, удалим из него весь газ и снова подсоединим к баллону. Вопрос: каково будет давление и количество вещества в баллоне после N подобных операций?

На N -ом шаге в силу $T = \text{const}$ имеем:

$$p_{N-1}V = p_N(V + \Delta v)$$

до заплн. после заплн.

(давление в объединенном сосуде $V + \Delta v$, очевидно, всюду одинаково после установления динамического равновесия). Кроме того, запишем уравнение состояния для газа в малом объеме Δv :

$$p_N \Delta v = \Delta \nu_N RT;$$

здесь $\Delta \nu_N$ – количество вещества, откаченное на N -ом шаге. p_N , таким образом, пропорционально $\Delta \nu_N$. Полученные соотношения справедливы для любого N , и мы

¹³⁾См. главу 1, пример 1.4.

¹⁴⁾См. главу 4, задачу 4.6.

опять приходим к системе рекуррентных уравнений:

$$\begin{cases} p_1 = p_0 \frac{V}{V + \Delta v} \\ p_2 = p_1 \frac{V}{V + \Delta v} \\ \dots\dots\dots \\ p_N = p_{N-1} \frac{V}{V + \Delta v} . \end{cases}$$

На сей раз путем их перемножения, все промежуточные значения p удается сократить, что позволяет установить связь давления на N -ом шаге откачки с начальным давлением:

$$p_N = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta v} \right)^N, \quad \Delta \nu_N = \frac{p_0 \Delta v}{RT} \left(\frac{V}{V + \Delta v} \right)^N .$$

С использованием уравнения состояния несложно найти, что после N -го шага в баллоне осталось количество вещества

$$\nu_N = \frac{p_N V}{RT} = \frac{p_0 V}{RT} \left(\frac{V}{V + \Delta v} \right)^N .$$

Величину ν_N можно посчитать иначе, просуммировав все откаченные порции $\Delta \nu_k$ и вычтя их из первоначального количества вещества ν_0 :

$$\begin{aligned} \nu_N &= \nu_0 - \Delta \nu_1 - \Delta \nu_2 - \dots - \Delta \nu_N = \frac{p_0 V}{RT} - \frac{p_0 \Delta v}{RT} \sum_{n=1}^N \left(\frac{V}{V + \Delta v} \right)^n = \\ &= \frac{p_0}{RT} \left[V - \Delta v \frac{\left(\frac{V}{V + \Delta v} \right) - \left(\frac{V}{V + \Delta v} \right)^{N+1}}{1 - \frac{V}{V + \Delta v}} \right] = \dots = \frac{p_0 V}{RT} \left(\frac{V}{V + \Delta v} \right)^N . \end{aligned}$$

Как ни странно, результат получился тот же самый, однако мы отвлеклись от сути.

Пусть порции откачиваются за время Δt каждая; тогда $t_N = N \Delta t$ – время откачки N порций. Теперь будем устремлять Δt и Δv к нулю так, чтобы объемная скорость откачки (л/сек) оставалась постоянной:

$$q = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{const} ;$$

в результате мы будем иметь непрерывный процесс откачки. При такой откачке значение давления в любой момент времени t есть

$$\begin{aligned} p(t) &= \lim_{\Delta t, \Delta v \rightarrow 0} p_0 \left(\frac{V + \Delta v}{V} \right)^{-N(t)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{заменим } \Delta v \text{ на } q \Delta t, \\ N \text{ на } t / \Delta t \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_0 \left(1 + \frac{q \Delta t}{V} \right)^{-\frac{t}{\Delta t}} . \end{aligned}$$

В любом курсе высшей математики доказывается, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha x)^{1/x} = e^\alpha, \quad (2.2)$$

где число $e = 2,718\dots$, подобно числу π , суть фундаментальная математическая константа. Данное число является *иррациональным* и *трансцендентным*. Исходя из двух последних уравнений, получим:¹⁵⁾

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[1 + \left(-\frac{\Delta t}{t} \right) \left(-\frac{qt}{V} \right) \right]^{-\frac{t}{\Delta t}} = \left\{ \text{в данном случае } \alpha = -\frac{qt}{V} \right\} = \\ &= p_0 \exp \left(-\frac{qt}{V} \right). \end{aligned}$$

Мы установили зависимость давления в баллоне от времени при непрерывной изотермической откачке с постоянным объемным расходом q (q – объем, проходящий через насос за единицу времени). Характерный вид этой функции, называемой *экспонентой* (или *экспоненциальной функцией*), показан на рис. 11. Экспонента есть частный случай *показательной функции* $y(x) = a^x$ и имеет огромное значение для описания физических явлений.

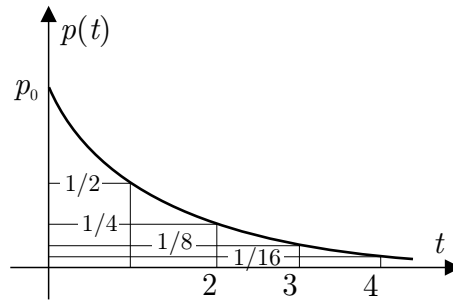


Рис. 11. Изменение давления в баллоне при непрерывной изотермической откачке

Такой же результат, разумеется, должен получиться, если сразу написать дифференциальное соотношение для бесконечно малого объема $dv = qdt$ откачиваемого за время dt газа:

$$pV = (p + dp)(V + dv).$$

Это есть условие изотермичности перетекания газа в подсоединенный к баллону малый резервуар dv . Как и в случае с ракетой, после раскрытия скобок величиной $dpdv$ можно с математической строгостью пренебречь (она имеет другой порядок малости по сравнению с величинами dp и dv). Следовательно,

$$Vdp = -pdv;$$

¹⁵⁾Запись $\exp(-qt/V)$ означает то же самое, что и $e^{-qt/V}$ (число e в степени $-qt/V$).

$dp < 0$, т.к. давление при откачке непрерывно уменьшается. Деля это уравнение на pV и вспоминая определение объемного расхода q , приведем его к виду

$$\frac{dp}{p} = -\frac{q}{V} dt. \quad (2.3)$$

Чтобы из данного уравнения определить зависимость $p(t)$, нужно вновь считать площадь под гиперболой. Действительно, при суммировании (2.3) по ходу откачки от самого начала ($t = 0$) до интересующего момента t в силу $q = \text{const}$ получим:

$$\int_{p_0}^{p(t)} \frac{dp}{p} = -\frac{qt}{V}. \quad (2.4)$$

Возведение числа “ e ” в степень, равную левой и правой частям равенства (2.4),¹⁶⁾ приведет к соотношению

$$\exp \left[\int_{p_0}^{p(t)} \frac{dp}{p} \right] = \exp \left(-\frac{qt}{V} \right). \quad (2.5)$$

Отметим сразу, что площадь под гиперболой в данном случае равна стоящему в (2.5) интегралу, взятому со знаком минус. Объясняется это тем, что $p(t) < p_0$, и при интегрировании получатся $dp < 0$; площадь же должна быть положительной величиной. Ну а теперь вспомним, что из рассмотрения дискретной откачки мы уже установили искомую зависимость $p(t)$:

$$p(t) = p_0 \exp \left(-\frac{qt}{V} \right).$$

Сравнивая последние две формулы, найдем:

$$\frac{p(t)}{p_0} = \exp \left[\int_{p_0}^{p(t)} \frac{dp}{p} \right]. \quad (2.6)$$

Введем операцию “ \ln ”, обратную возведению числа “ e ” в любую степень:

$$\ln(e^\alpha) = \alpha; \quad (2.7)$$

следовательно, $\exp(\ln e^\alpha) = e^\alpha$. Обозначая $x = e^\alpha$, получим важное свойство:

$$e^{\ln x} = x. \quad (2.8)$$

Функция $\ln x$ носит название *натурального логарифма*; она является обратной функцией для экспоненты.¹⁷⁾ Здесь мы не будем перечислять все ее свойства, поскольку

¹⁶⁾ Такая операция называется *потенцированием*.

¹⁷⁾ Рекомендую вам самостоятельно построить график логарифмической функции, найдя предварительно область ее определения, множество значений, нули и т.п. Исходите из того, что экспонента и натуральный логарифм есть взаимно обратные функции (см. (2.7), (2.8)).

сейчас важно другое. Применим операцию \ln к “перевернутому” уравнению (2.6):

$$\ln \left(\frac{p_0}{p(t)} \right) = \ln \left(\exp \left[- \int_{p_0}^{p(t)} \frac{dp}{p} \right] \right) = - \int_{p_0}^{p(t)} \frac{dp}{p} \equiv \int_{p(t)}^{p_0} \frac{dp}{p} = S_{\text{под гип.}}^{18)}$$

В результате долгожданная площадь под гиперболой в общем случае определяется следующим образом (рис. 12):

$$S_{\text{под гип.}} = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right).$$

Отсюда легко установить геометрический смысл числа e . Полагая $p_1 = 1$ и $p_2 = e$ ($e = 2.718... > 1$), получим, что площадь под графиком гиперболы на отрезке $[1, e]$ равна $\ln(e) = 1$ (последнее равенство вытекает из формулы (2.7) при $\alpha = 1$).

Элементарно выводится также правило дифференцирования логарифмической функции. Одним из важнейших свойств логарифма является его аддитивность:

$$\ln a + \ln b = \ln(ab), \quad \ln a - \ln b = \ln \left(\frac{a}{b} \right).$$

С учетом второго свойства перепишем выражение для площади под графиком гиперболы в виде

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \ln p_2 - \ln p_1.$$

Отсюда заключаем, что

$$\frac{dp}{p} = d(\ln p),$$

поскольку только при интегрировании (суммировании) дифференциалов от логарифма на отрезке $[p_1, p_2]$ получается разность его конечного и начального значений. Деля последнее равенство на dp , найдем искомое правило:

$$\frac{d(\ln p)}{dp} = \frac{1}{p}.$$

Его легко установить непосредственным дифференцированием формулы (2.8), однако такой путь основан на знании правил взятия производной от сложной функции и от экспоненты, которые могут быть еще незнакомы читателю. О них речь пойдет в главах 4 и 5 (производная от экспоненты упоминается также в конце примера 2.6 настоящей главы).

Пример 2.3. Вербка в поле тяжести.

¹⁸⁾Здесь мы использовали важное свойство интеграла: при взаимной перестановке пределов перед интегралом появляется знак “−”. Попробуйте самостоятельно это доказать.

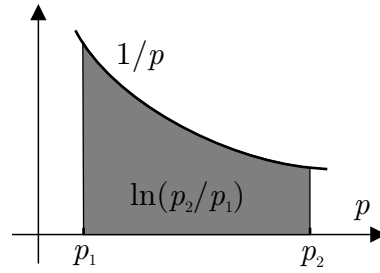


Рис. 12. Выражение для площади под гиперболой

Рассмотрим типичную олимпиадную задачу: *в поле тяжести висит однородная веревка* массой m и длиной l , конец A которой подвешен на высоте h ниже конца B (рис. 13). Спрашивается, на сколько сила натяжения веревки в точке B больше силы натяжения в точке A , и чему равна сила натяжения $T(y)$ на произвольной высоте y от нижней точки веревки? Давайте подробно в этом разберемся.

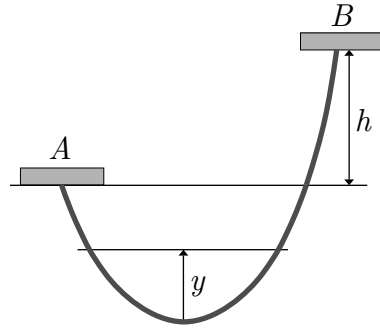


Рис. 13. Провисание веревки под действием тяжести

Представим веревку в виде цепочки, состоящей из точечных масс Δm , соединенных невесомыми нерастяжимыми стержнями длиной Δl . Таким образом, мы рассматриваем дискретную модель веревки. Если в цепочке N грузиков, то $\Delta m = m/N$; $\Delta l = l/(N + 1)$ (количество стержней равно $N + 1$). Теперь рассмотрим n -ый грузик. Помимо силы тяжести, на него действуют также силы T_n и T_{n+1} со стороны стержней, направленные под углами α_n и α_{n+1} к горизонту, соответственно (рис. 14). Условия равновесия n -го грузика записываются в виде системы:

$$\begin{cases} T_n \cos \alpha_n = T_{n+1} \cos \alpha_{n+1} \\ T_{n+1} \sin \alpha_{n+1} - T_n \sin \alpha_n = g \Delta m \end{cases} \quad \forall n = 1, 2, \dots, N.$$

Из первого уравнения следует, что горизонтальная составляющая $T_n \cos \alpha_n$ одинакова всюду вдоль цепочки. В частности, $T_1 \cos \alpha_1 = T_{N+1} \cos \alpha_{N+1} = T_{k+1}$, где T_{k+1} — сила натяжения нижнего звена, которая направлена горизонтально ($\alpha_{k+1} = 0$); при этом $T_1 = T_A$, $T_{N+1} = T_B$. Запишем последовательно уравнения для вертикальной

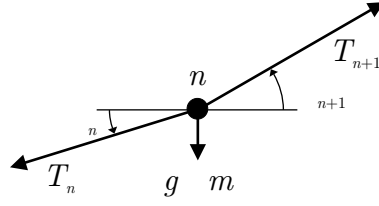


Рис. 14. Силы, действующие на звено цепочки

компоненты силы, начиная от k -го грузика и заканчивая 1-ым:

$$\left\{ \begin{array}{l} -T_{k+1} \sin \alpha_{k+1} + T_k \sin \alpha_k = g\Delta m \\ -T_k \sin \alpha_k + T_{k-1} \sin \alpha_{k-1} = g\Delta m \\ \dots\dots\dots \\ -T_2 \sin \alpha_2 + T_1 \sin \alpha_1 = g\Delta m . \end{array} \right.$$

Производя суммирование и принимая во внимание, что $\alpha_{k+1} = 0$, будем иметь:

$$T_1 \sin \alpha_1 = (k - 1) g\Delta m .$$

Аналогично, записывая уравнения для вертикальной компоненты силы от $k + 1$ -го грузика до N -го и складывая их, получим, что $T_{N+1} \sin \alpha_{N+1} = (N + 1 - k)g\Delta m$. Из последних двух уравнений вытекает соотношение

$$T_1 \sin \alpha_1 + T_{N+1} \sin \alpha_{N+1} = Ng\Delta m = mg .$$

Вес цепочки, как и должно быть, уравновешивается силами натяжения на концах.

Изменим нумерацию. Нижнее звено (горизонтальное) назовем нулевым и пойдем, скажем, по правой части цепочки (рис. 15). Левую часть можно отдельно не рассматривать, поскольку до уровня точки A цепочка симметрична относительно вертикали (рис. 13). В самом деле, если мы на данном уровне мысленно закрепим правую часть, форма цепочки не изменится; ниже точки A при этом получится кусок цепочки, концы которого подвешены на одинаковой высоте. Симметрия такого куска очевидна. Запишем еще раз условия равновесия для n -го груза:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_n \cos \alpha_n = T_{n+1} \cos \alpha_{n+1} \\ T_{n+1} \sin \alpha_{n+1} - T_n \sin \alpha_n = g\Delta m . \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Возводя определенным образом в квадрат и складывая уравнения (2.9), получим:

$$T_{n+1}^2 - T_n^2 = (g\Delta m)^2 + 2g\Delta m T_n \sin \alpha_n .$$

Из цепного характера уравнений (2.9) следует, что

$$T_n \sin \alpha_n = T_0 \sin \alpha_0 + n \cdot g\Delta m .$$

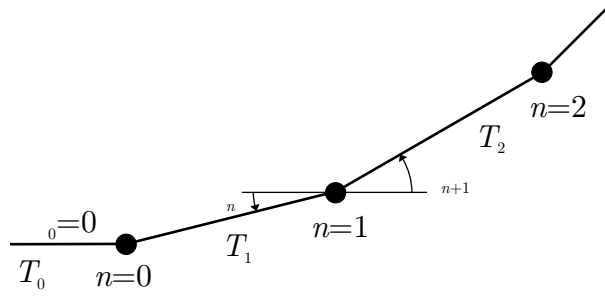


Рис. 15. Цепочка с измененной нумерацией звеньев

Так как $\alpha_0 = 0$, на основании двух последних формул имеем:

$$T_{n+1}^2 - T_n^2 = (g\Delta m)^2 + 2(g\Delta m)n(g\Delta m) = (g\Delta m)^2 [1 + 2n].$$

Подобные уравнения можно записать для любого $n = 0, 1, 2, \dots$. Если все их выписать одно под другим и сложить, то промежуточные значения силы, как видно, сократятся, и останутся только крайние:

$$\begin{aligned} T_{n+1}^2 - T_0^2 &= (g\Delta m)^2 \sum_{k=0}^n [1 + 2k] = \left\{ \sum_{k=0}^n k = \frac{0+n}{2} (n+1) \right\} = \\ &= (g\Delta m)^2 [n+1 + n(n+1)] = (g\Delta m)^2 (n+1)^2. \end{aligned}$$

Итак, мы получили, что $T_n^2 = T_0^2 + (g\Delta m)^2 n^2$. По сути дела это есть закон, по которому сила натяжения в произвольном (n -ом) звене зависит от его расстояния до нижней точки, измеряемого вдоль цепочки. В самом деле, масса и длина звена, равные $\Delta m = m/N$ и $\Delta l = l/(N+1)$, пропорциональны друг другу:

$$\Delta m = \frac{m}{l} \frac{(N+1)}{N} \Delta l.$$

Значит

$$T_n^2 = T_0^2 + \left(\frac{mg}{l} \frac{(N+1)}{N} \right)^2 (s_n)^2,$$

где $s_n = n\Delta l$ – расстояние от n -го грузика до нулевого. Устремляя $N \rightarrow \infty$, что соответствует переходу к непрерывной веревке, получим непрерывную зависимость

$$T(s) = \sqrt{T_0^2 + (mg)^2 \left(\frac{s}{l} \right)^2}.$$

Если бы мы знали, какова длина участка веревки между уровнями точек A и B (рис. 13), то могли бы с использованием данной формулы ответить на вопрос задачи. Но из условия известен только перепад высот h_{AB} , и поэтому нам скорее нужна зависимость $T(y)$ силы натяжения от высоты, а не от расстояния s . Кроме того, сила натяжения T_0 в нижней точке тоже остается неопределенной.

Нетрудно убедиться (рекомендую вам сделать это самостоятельно), что в рамках дискретного рассмотрения найти зависимость силы натяжения в n -ом звене от высоты

$$y_n = \Delta l \sum_{k=1}^n \sin \alpha_k,$$

на которой оно находится, в явном виде не удастся. Однако все резко меняется, если вернуться к непрерывной веревке. Обозначим посредством $\rho = m/l$ ее погонную плотность. На произвольной высоте y выделим бесконечно маленький элемент длины dl и запишем условие его равновесия в проекции на касательную к нему (рис. 16):

$$dT = g\rho dl \sin \alpha.$$

Здесь α – угол наклона касательной, а dT – приращение силы натяжения на элементе dl . Но из геометрии следует, что $dl \sin \alpha = dy$ есть высота между верхними и нижними точками элемента dl . Значит $dT = g\rho dy$. Суммируя аналогичные соотношения вдоль всей веревки от самого низа и до уровня y , получим искомую зависимость:

$$T(y) - T_0 = g\rho y.$$

Она справедлива для любого y в пределах веревки, причем, как для правого, так

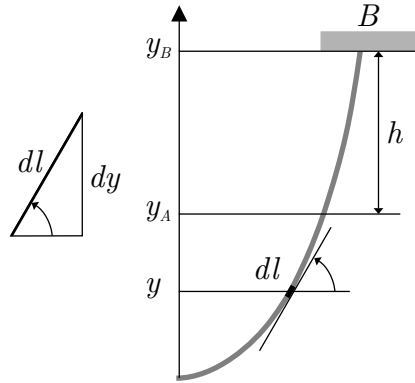


Рис. 16. Решение задачи для непрерывной веревки

и для левого куска. В частности, $T_A = T_0 + g\rho y_A$, $T_B = T_0 + g\rho y_B$, откуда искомая разница сил натяжения в точках подвеса

$$T_A - T_B = g\rho (y_B - y_A) = g\rho h = mg \frac{h}{l};$$

она просто пропорциональна h . Вот такое любопытное и легкое решение. Заметим, что по имеющимся данным ничего нельзя сказать о силе натяжения T_0 в самой нижней точке веревки. Дело в том, что T_0 зависит от расстояния между концами AB не только в вертикальном, но и в горизонтальном направлении, которое не приведено в условии.

Приравнивая выражения для $T(s)$ и $T(y)$, получим также функцию $s(y)$:

$$s(y) = \sqrt{y^2 + \frac{2lT_0}{mg}y}.$$

Пример 2.4. Распространение упругой волны по резиновому шнуру.

Аналогичный пример – *распространение упругой волны по резиновому шнуру*. Пусть погонная плотность шнура ρ , сила натяжения в нем T , а сила тяжести отсутствует. Если вблизи одного конца по шнуру резко ударить палкой, по нему побежит горб (возмущение, волна), который дойдет до противоположного конца, отразится и пройдет обратно (рис. 17). Неплохо было бы найти скорость его перемещения v . Очевидно, что эта скорость зависит от параметров T и ρ , но каким образом? Для ответа на поставленный вопрос нам с вами нужно будет рассмотреть дискретную и непрерывную модели шнура.

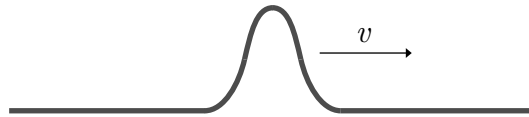


Рис. 17. Волна, бегущая по резиновому шнуру

Будем считать, что отклонение участков шнура в поперечном направлении y при прохождении горба мало по сравнению с длиной горба в направлении x (вдоль шнура).¹⁹⁾ Это предположение позволит сильно упростить решение задачи. Представим шнур в виде набора N одинаковых грузиков массой Δm , соединенных невесомыми пружинками некоторой жесткости k (мы опять переходим от непрерывного шнура к дискретной цепочке).

Теперь сделаем еще одно очень смелое, но вместе с тем достаточно разумное предположение: каждый грузик при прохождении волны смещается только в поперечном направлении (y), и не движется в продольном (x). Оправданиями, однако, сейчас заниматься не будем – поверим автору пособия на слово. Волна, в которой частицы передающей ее среды (в данном случае элементы цепочки) смещаются поперек направления ее распространения, называется *поперечной*. Рассмотримхождение такой волны через участок шнура, содержащий $(n - 1)$ -ый, n -ый и $(n + 1)$ -ый грузики. Их отклонения от оси шнура в момент времени t равны, соответственно, $y_{n-1}(t)$, $y_n(t)$ и $y_{n+1}(t)$, а расстояние между ними по оси x одинаково и составляет Δx .

Из рис. 18 видно, что избыточное удлинение пружинки A вследствие отклонения грузиков составляет

$$\delta l_A = \frac{\Delta x}{\cos \varphi_A} - \Delta x,$$

¹⁹⁾ О волнах, удовлетворяющих подобному ограничению, говорят как о *малых возмущениях*.

поэтому избыток силы натяжения в ней по сравнению с недеформированным участком цепочки есть

$$\delta T_A = k\Delta x \left[\frac{1}{\cos \varphi_A} - 1 \right].$$

Полное натяжение пружинки A равно $T_A = T + \delta T_A$. Аналогично для пружинки B :

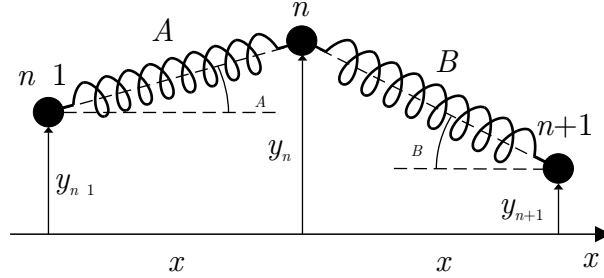


Рис. 18. Отклонение грузов при прохождении поперечной волны по дискретной цепочке

$$T_B = T + \delta T_B.$$

Запишем уравнение движения n -го грузика. Мы уже знаем, что ускорение есть вторая производная от координаты по времени:²⁰⁾

$$a_n = \frac{d^2 y_n}{dt^2} = \ddot{y}_n.$$

Значит

$$\Delta m \ddot{y}_n = -[T_A \sin \varphi_A + T_B \sin \varphi_B].$$

Так как углы φ_A, φ_B малы в силу предполагаемой малости возмущения, то $\cos \varphi_{A,B} \approx 1$ и $\sin \varphi_{A,B} \approx \operatorname{tg} \varphi_{A,B}$. Это позволяет переписать уравнение движения в виде

$$\begin{aligned} \Delta m \ddot{y}_n &\approx -[T_A \operatorname{tg} \varphi_A + T_B \operatorname{tg} \varphi_B] = \left\{ \operatorname{tg} \varphi_A = \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x}, \quad \operatorname{tg} \varphi_B = \frac{y_n - y_{n+1}}{\Delta x} \right\} = \\ &= -T \left[\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x} - \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} \right] - \delta T_A \operatorname{tg} \varphi_A - \delta T_B \operatorname{tg} \varphi_B. \end{aligned}$$

Из-за малости отклонений грузиков в направлении y имеет место также оценка $\delta T_{A,B} \ll T$, и поправками к силе натяжения можно пренебречь с той же точностью, с какой $\sin \varphi_{A,B}$ был заменен на $\operatorname{tg} \varphi_{A,B}$.²¹⁾ В дальнейшем будем работать с уравнением движения

$$\Delta m \ddot{y}_n = -T \left[\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x} - \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} \right]. \quad (2.10)$$

Попробуем сначала найти скорость волны, не переходя к непрерывному шнуру, т.е. не устремляя $N \rightarrow \infty$ и $\Delta x \rightarrow 0$. С этой целью рассмотрим самую простую волну,

²⁰⁾ Производная по времени обычно обозначается точкой над функцией.

²¹⁾ В основе данного утверждения лежит т.н. *Тейлоровское разложение* функций $\cos x$ и $\sin x$.

какую только можно себе представить – синусоидальную; в жизни часто бывает так, что за кажущейся простотой скрывается огромная значимость. По определенным причинам волны, имеющие форму синусоиды, являются наиболее распространенными в природе. Кроме того, в подавляющем большинстве случаев волна с более сложной формой на самом деле представима в виде некоторой комбинации все тех же синусоид с разными амплитудами и частотами.

По цепочке побежит синусоидальная волна, если “трясти” начальное звено по закону $y_0(t) = A \sin(\omega t)$. Оказывается, что свойства уравнения (2.10), описывающего распространение возмущений, позволяют сделать очень важный вывод: синусоидальная волна при движении вдоль цепочки сохраняет свою форму (т.е. перемещается без искажения, или, как говорят, без *дисперсии*).²²⁾ Иными словами, движение n -го грузика, которое для данного вида волны является просто гармоническими колебаниями, в точности повторяется следующим за ним $(n + 1)$ -ым грузиком спустя некоторое время $\Delta\tau$, причем это время одинаково для всех n . В результате имеет место простое “запаздывание” движения каждого последующего груза по сравнению с предыдущим, а не изменение в характере движения. Искомая скорость волны, очевидно, связана со временем запаздывания $\Delta\tau$ соотношением $v = \Delta x / \Delta\tau$. Поэтому для ее определения нам нужно связать $\Delta\tau$ с Δx , используя уравнение (2.10).

Математически условие запаздывания выражается следующим образом:

$$y_{n+1}(t) = y_n(t - \Delta\tau),$$

т.е. с $(n + 1)$ -ым грузиком в момент t происходит то же, что с n -ым происходило на время $\Delta\tau$ раньше. Аналогично можно записать, что

$$y_{n-1}(t) = y_n(t + \Delta\tau).$$

Подставляя данные соотношения в формулу (2.10), в которой отклонения всех грузиков, естественно, относятся к одному и тому же моменту t , получим уравнение только для функции y_n :

$$\rho v \Delta\tau \ddot{y}_n = -\frac{T}{v} \left[\frac{y_n(t) - y_n(t + \Delta\tau)}{\Delta\tau} - \frac{y_n(t - \Delta\tau) - y_n(t)}{\Delta\tau} \right]; \quad (2.11)$$

здесь мы заменили Δm на $\rho \Delta x$ (ρ – погонная плотность шнура), а Δx на $v \Delta\tau$. Движение n -го груза описывается функцией

$$y_n(t) = A \sin(\omega t - \theta) \quad (2.12)$$

(фаза θ отражает запаздывание по сравнению с началом цепочки). Приближение малости возмущений требует, чтобы отклонения грузиков от оси были много меньше характерной длины волны, которая, как нетрудно сообразить, в случае синусоидальной формы равна $v \cdot 2\pi / \omega$. В результате критерий применимости уравнения (2.11) сводится к условию $A \ll 2\pi v / \omega$.

²²⁾ Обоснование этого факта требует достаточно глубокого знакомства с теорией волн, и сейчас вам придется принять его на веру.

После подстановки $y_n(t)$ из (2.12) в уравнение (2.11) и несложных алгебраических преобразований, заключающихся в нахождении разности синусов и косинусов, мы придем к соотношению

$$v^2 = \frac{T}{\rho} \left(\frac{\sin(\omega\Delta\tau/2)}{\omega\Delta\tau/2} \right)^2. \quad (2.13)$$

Отсюда непосредственно следует уравнение для скорости волны:

$$\frac{\omega\Delta x}{2} \sqrt{\frac{\rho}{T}} = \sin \left(\frac{\omega\Delta x}{2v} \right).$$

Таким образом, при заданных параметрах T , ρ , Δx по цепочке без искажения могут распространяться только волны с частотами

$$\omega \leq \frac{2}{\Delta x} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.^{23)}$$

Скорость волны при этом составляет

$$v = \frac{\omega\Delta x}{2} \bigg/ \arcsin \left(\frac{\omega\Delta x}{2} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \right),$$

т.е. существенным образом зависит от частоты колебаний.

А теперь совершим предельный переход к непрерывному шнуру, устремив $\Delta x \rightarrow 0$. Вспоминая, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) = 1,$$

из (2.13) получим:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (2.14)$$

Мы видим с вами, что скорость волны в непрерывном шнуре одинакова для всех частот, и определяется только двумя параметрами: натяжением и плотностью шнура. Оказывается, что с такой скоростью по непрерывному шнуру распространяется возмущение любой формы (не обязательно синусоидальной, рис. 19) и частоты, причем в ходе движения волны не происходит ее искажения (волна сохраняет свою форму). Обоснование этого утверждения, однако, требует основательного знакомства с теорией волн.

Формулу (2.14) можно получить иным способом. Излагаемый ниже материал выходит за пределы школьной программы по математике, однако он полезен для формирования общей культуры физико-математического мышления. Еще раз повторю, что ничего принципиально трудного для понимания в том, что будет изложено ниже, нет. Нужно лишь совершить небольшой скачок в мышлении, который на сей

²³⁾Рекомендую вам самостоятельно дать объяснение наличию подобного ограничения.

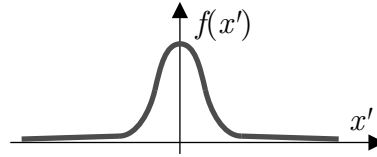


Рис. 19. Форма волны, бегущей по шнуру

раз состоит в рассмотрении *функции двух переменных* и определении ее *частных производных* по каждой переменной.²⁴⁾

В случае непрерывного шнура характеризующее волну смещение “ y ”, очевидно, есть функция как от времени, так и от изменяющейся непрерывным образом продольной координаты x . То есть вместо смещений отдельных грузов $y_n(t)$ ($n = 0, 1, \dots, N$) теперь нужно работать с непрерывно меняющейся вдоль оси x функцией $y(t, x)$. При этом производная функции $y(t, x)$ по времени при фиксированной координате x (грузики не смещаются по оси x !) называется *частной производной по времени*, и обозначается как $\partial y / \partial t$. Аналогично для второй производной по времени:

$$a_n = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Посмотрим на бегущее по шнуру возмущение в фиксированный момент времени t . В пределе $N \rightarrow \infty$ (когда $\Delta x \rightarrow dx$) отношения

$$\frac{y_n - y_{n+1}}{\Delta x}, \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x}$$

в уравнении (2.10) есть производные функции y по переменной x , определяющие тангенс угла наклона касательной к шнуру в соответствующих точках. Они называются *частными производными по координате x* и обозначаются как $\partial y / \partial x$. Легко заметить, что эти производные вычисляются в соседних бесконечно близких по x точках, отстоящих друг от друга на бесконечно малое расстояние dx .

Таким образом, при стремлении $\Delta x \rightarrow dx$ уравнение (2.10) переходит в

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T \left(\frac{\partial y}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial y}{\partial x}(t, x + dx) \right).$$

Если поделить данное уравнение на dx , то мы получим, что отношение

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial x}(t, x + dx) - \frac{\partial y}{\partial x}(t, x)}{dx}$$

есть частная производная от функции $\partial y / \partial x$ по переменной x , т.е. вторая частная производная $\partial^2 y / \partial x^2$. В итоге уравнение для функции $y(t, x)$, описывающее распространение возмущения, имеет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

²⁴⁾ При включении данного материала в пособие автор ориентировался на “продвинутых” школьников и студентов, уже знакомых с понятием частной производной. Соответствующие разделы пособия могут быть опущены при прочтении без ущерба для понимания излагаемого дальше материала.

Это так называемое *волновое уравнение*. Подобного рода уравнение, которое можно в общем случае представить в форме

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(a^2 – положительный параметр, связанный со свойствами передающей волну среды), описывает распространение волн самой разнообразной физической природы (наиболее яркие представители – *звук, электромагнитные волны*). Следует подчеркнуть, что далеко не все волны подчиняются волновому уравнению. Так, если бы мы не сделали предположение о малости отклонений элементов шнура от оси x , у нас получилось бы куда более сложное уравнение, которое даже и выписывать не хочется. Волновое уравнение как правило применимо для описания волн сравнительно небольшой амплитуды.

Нетрудно сообразить, что в движущейся системе x' , связанной с возмущением, оно неподвижно и имеет некоторую форму $y = f(x')$ (рис. 19).²⁵⁾ Поскольку $x' = x \pm vt$ (v – скорость перемещения горба; знак “–” соответствует волне, бегущей вправо, т.е. в область положительных x ; “+” характеризует волну, бегущую влево), функция

$$y = f(x \pm vt)$$

и есть общее решение полученного уравнения; она описывает эволюцию возмущения со временем в неподвижной системе. Подставим эту функцию в волновое уравнение. При вычислении частной производной по переменной t переменная x считается постоянной величиной, и наоборот. Если $\xi = x \pm vt$ и $f' = df/d\xi$ – производная от функции $f(\xi)$ по своему аргументу, то

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f'', \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \pm v \frac{df}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \pm v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{df}{d\xi} \right) = \pm v \frac{d^2 f}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} = v^2 f''.$$

Подставляя вторые производные в волновое уравнение, получим, что $v^2 f'' = (T/\rho) f''$, откуда

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Пример 2.5. Переход от дискретной среды к сплошной.

Познакомимся с еще одним предельным переходом. На сей раз дискретная модель будет отражением физической сути явления, а переход к непрерывной модели просто сильно упростит его математическое описание. Речь идет о *механике движения жидкости и газа (гидромеханике)*.

²⁵⁾ Тем самым подчеркивается, что волна не искажается в ходе распространения, т.е. сохраняет свою форму.

В большинстве протекающих в гидросфере и нижних слоях атмосферы гидромеханических явлений, заключающихся в разнообразных перемещениях воды и воздуха, движение происходит на масштабах L , которые много больше среднего расстояния между молекулами среды (длины свободного пробега l). Представьте себе плывущего дельфина или летящую в небе птицу с точки зрения их обтекания встречным потоком среды. Понятно, что картина такого обтекания формируется вблизи движущихся в среде тел, и параметры потока (скорость, плотность, температура) меняются на масштабах порядка $10^{-4} \div 10^2$ м в зависимости от конкретного случая. То же касается и неживой природы, например волн на поверхности жидкости или торнадо, а также искусственных (созданных человеком) явлений, например обтекания самолета или катера. Во всех указанных примерах масштаб развития и перестройки течения на много порядков превосходит длину свободного пробега молекул. Поэтому “зернистость” среды никак не влияет на характер потока – газ или жидкость с нашей точки зрения движутся как непрерывная масса, т.е. ведут себя как *сплошная среда*.

Итак, модель сплошной среды работает в тех гидродинамических явлениях, в которых $l/L \ll 1$. Может ли случиться так, что это условие не выполняется? Очевидно, например, что обтекание спутника потоком разреженного воздуха в верхних слоях атмосферы нельзя рассматривать как сплошносредное – там расстояния между молекулами являются величинами порядка и даже много больше размеров самого аппарата и, соответственно, масштабов изменения течения. Однако в нашей повседневной жизни в основном встречаются как раз сплошносредные явления.

Что дает переход от дискретной среды к сплошной? Допустим, мы захотели описать механику потока воздуха около обтекаемого тела, проследив за движением каждой отдельно взятой молекулы. Задача эта совершенно нереальная – ведь мы с вами прекрасно знаем, что в 1 литре воздуха при нормальных условиях содержится $\sim N_A$ молекул. А при переходе к сплошной среде у нас появляется шанс. В сплошной среде можно говорить о плотности вещества в данной точке пространства в данный момент времени, т.е. определить функцию $\rho(\vec{r}, t)$, $\vec{r} = (x, y, z)$. Можно также ввести импульс единицы массы газа $\vec{v}(\vec{r}, t)$,²⁶⁾ давление $p(\vec{r}, t)$ и температуру $T(\vec{r}, t)$. Тут к механике присоединяется термодинамика, которая также рассматривает газ как целое, а не как набор отдельных молекул (что делается в МКТ). В результате для описания движения среды достаточно найти функции $\rho(\vec{r}, t)$, $p(\vec{r}, t)$, $\vec{v}(\vec{r}, t)$; температуру в каждой точке можно выразить через p и ρ посредством уравнения состояния. Указанные функции полностью определяют картину течения: по ним можно построить линии тока (вдоль которых движутся частицы жидкости), изобары, линии постоянной плотности и температуры. Кроме того, с помощью этих функций можно найти характеристики, описывающие воздействие потока на тело, например, силу сопротивления, нагрев, и т.д.

Откуда берутся указанные функции? Оказывается, что из рассмотрения законов сохранения массы, импульса и энергии в произвольном объемчике внутри сплошносредного потока выводятся уравнения, описывающие изменение ρ , p , \vec{v} в пространстве и во времени. Такие уравнения чем-то похожи на волновое уравнение – они содержат частные производные от рассматриваемых функций по пространственным координатам.

²⁶⁾ Имеется в виду вектор скорости.

натам (x, y, z) и по времени (t) . Однако уравнения механики сплошной среды (с.с.) существенно сложнее волнового уравнения, и попытка решить их в каждой конкретной задаче почти всегда заканчивается неудачей. О причинах этого мы поговорим позднее. В последнее время уравнения с.с. со все большим успехом решаются на компьютерах. Тут тоже возникают трудности, которые, тем не менее, существенно уступают трудностям прямого описания движения отдельных молекул. Т.е. переход к с.с. все равно на много порядков уменьшает затраты по исследованию и расчету течений жидкости и газа.

Пример 2.6. Радиоактивный распад.

Можно приводить еще много примеров дискретных и соответствующих им непрерывных физических явлений. Так, обычная гитара позволяет извлекать только определенные ноты, поскольку на ее грифе есть порожки (лады), тогда как на скрипке можно извлечь звук любой высоты. В старых спортивных велосипедах скорости переключаются рычажком, который может перемещаться непрерывным образом (в то время как множество “звездочек”, очевидно, дискретно) – приходится находить нужное положение на слух; в современных же велосипедах переключение скоростей дискретное – рычажок занимает только определенные положения, соответствующие скоростям. Но это все примеры из области техники. В природе подобные ситуации тоже возникают сплошь и рядом. Очень хороший пример, который имеет прямое отношение к нашей теме, связан с *ядерной физикой*.

Всем известны *радиоактивные элементы*, ядра которых способны делиться с образованием более легких элементов. Возьмем, к примеру, уран. Атом урана может распасться, когда ему вздумается – тут предугадать ничего нельзя. Но если у нас есть кусок урановой руды, в котором этак $N \sim 10^{23}$ атомов урана, то распады в таком куске будут происходить с некоторой периодичностью, и излучение легких ядер будет иметь вполне определенную интенсивность. Причина кроется в том, что в большой системе атомов работают некие общие *статистические* закономерности, управляющие процессом. Статистика позволяет говорить о среднем количестве распадов, произошедших в куске урановой руды за некоторое время Δt , вместо их фактического количества. Так открывается путь к сравнительно простому описанию процесса радиоактивного распада.

Введем понятие *вероятности распада каждого атома за единицу времени* (λ). Величина λ определяется только внутренними свойствами атома; ее можно оценить теоретически исходя из модели атомного ядра и законов квантовой механики. Что означает эта вероятность с точки зрения статистического описания распада в системе, состоящей из большого количества атомов (например, в куске урановой руды)? Она означает, что доля распавшихся за время Δt атомов в куске руды в среднем составляет $\lambda \Delta t$. Иными словами, если мы возьмем десяток одинаковых кусков урановой руды из $N \sim N_A$ атомов²⁷⁾ и экспериментально определим, сколько распадов произошло в каждом из них за малое время Δt , то с большой точностью получится

²⁷⁾Здесь $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ – число Авогадро. Введение числа Авогадро в данном случае указывает лишь на характерный порядок величины для количества атомов в макроскопических телах.

одно и то же число $N \cdot \lambda \Delta t$. Еще раз подчеркну, что с точки зрения одного атома величина λ не позволяет сказать ничего конкретного о моменте его распада – на то она и вероятность. Однако для большого числа атомов данная вероятность определяет статистические закономерности протекания процесса распада; она позволяет рассчитать среднее число распадов за единицу времени.

Теперь обратим внимание на одно любопытное обстоятельство. Фактическое количество распадов за время Δt с точки зрения здравого смысла должно принимать только целочисленные значения. Однако при статистическом описании мы заменяем фактическое количество средним значением $N \cdot \lambda \Delta t$, которое, очевидно, принимает непрерывное множество значений (в зависимости от величины Δt). Таким образом, статистический подход позволяет считать, что количество атомов в куске руды изменяется не дискретно, а непрерывно, т.е. рассматривать непрерывную функцию $N(t)$. Так мы опять приходим к бесконечно малым количествам. Данная логика говорит, что за сколь угодно малый промежуток времени dt в системе распадается очень малое число атомов dN , как-то связанное с dt . Это число должно быть катастрофически мало по сравнению с общим количеством еще не распавшихся атомов $N(t)$. Только в таком случае мы сможем ввести мгновенную интенсивность распада (которая, очевидно, зависит от N), приписав ей конкретное значение. В самом деле, уменьшение числа атомов в системе за время dt есть

$$dN = -(\lambda dt)N,$$

где знак “ $-$ ” подчеркивает, что $dN < 0$ – число атомов в куске руды уменьшается со временем из-за распада. Значит, интенсивность распада (количество распадов за единицу времени) просто пропорциональна N :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N. \quad (2.15)$$

Уравнение подобного типа уже где-то встречалось, не правда ли?!

Вероятность λ распада каждого атома за единицу времени от t не зависит (она определяется только строением атомного ядра). Поэтому после разделения переменных в уравнении (2.15) интегрирование сводится всего-навсего к вычислению площади под графиком гиперболы:

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN}{N} = -\lambda t.$$

Делать это мы уже научились. В результате непрерывная зависимость $N(t)$ имеет вид

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t). \quad (2.16)$$

Сопоставим ее с результатами вымышленного эксперимента по определению истинного числа еще не распавшихся атомов в любой момент времени. Данные такого эксперимента представимы в виде точек на плоскости (t, N) , т.е. являются дискретными; каждый последующий шаг t_n будет соответствовать уменьшению N на единицу (рис. 20). Сравнивая подобную дискретную зависимость с непрерывной функцией

(2.16) на привычных нам временах (порядка одной секунды), мы не увидим разницы! Тем более не будет разницы на куске кривой длительностью в год, тысячу лет и т.д. Разница станет заметна лишь под “микроскопом”, как и разница между дискретным и непрерывным видением строения вещества. Этот микроскоп должен обладать очень большим усилением; дискретный характер распада начнет проявляться на промежутках времени $\Delta t \sim 10^{-10}$ сек и меньше (для разных радиоактивных элементов это время существенно различно). А для человеческих временных масштабов (1 сек, 1 год) и, тем более, для космических масштабов ($10^6 \div 10^9$ лет) идеально подходит непрерывная модель.

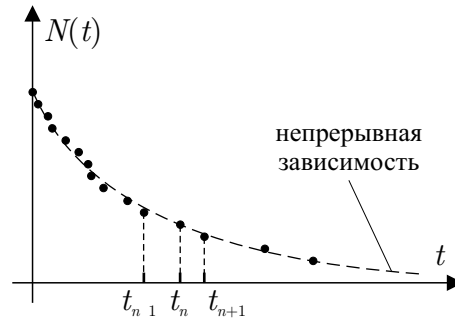


Рис. 20. Дискретная и непрерывная зависимости для числа оставшихся атомов в урановой руде

В заключение укажем правило дифференцирования экспоненциальной функции, которое непосредственно вытекает из уравнений (2.15) и (2.16). Обозначая в них $x = -\lambda t$ (новая переменная, $dx = -\lambda dt$) и $y(x) = N/N_0$ (новая функция), получим, соответственно:

$$\frac{dy}{dx} = -y, \quad y(x) = e^x.$$

Отсюда делаем вывод, что экспонента при дифференцировании вновь дает экспоненту. В более общем виде, учитывая постоянный множитель α в показателе, данный результат можно сформулировать так:

$$\frac{d(e^{\alpha x})}{dx} = \alpha e^{\alpha x}. \quad (2.17)$$

Именно из-за этого замечательного свойства экспоненциальная функция имеет невероятно большое значение как для “чистой” математики, так и для ее физических приложений. Она постоянно возникает в физических задачах самой разнообразной природы, в чем вы убедитесь на конкретных примерах в главах 4 и 5. Заметим, что правило (2.17) может быть выведено непосредственно из определения числа e (см. (2.2)). Приведенные здесь рассуждения в конечном счете тоже восходят к данному определению, поскольку используют выражение для площади под графиком гиперболы (см. пример 2.2).

Пример 2.7. Частица между сближающимися стенками.

Давайте рассмотрим еще один важный пример предельного перехода от дискретной модели к непрерывной. Пусть имеется частица, которая летает между двумя стенками, упруго отражаясь от них (рис. 21). Первая стенка неподвижна, а вторая приближается к ней со скоростью $u = \text{const}$. Интересно, за какое время t_n частица отразится от движущейся стенки n раз? Силы тяжести, разумеется, нет, и частица летает перпендикулярно стенкам, приобретая после каждого отражения от подвижной стенки дополнительную скорость $2u$.

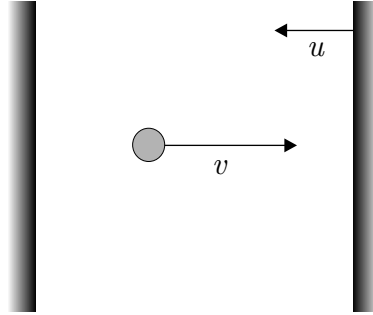


Рис. 21. Частица между сближающимися стенками

Для определенности предположим, что в начальный момент времени частица начала движение от неподвижной стенки в сторону подвижной со скоростью v_0 . Если l_0 – начальное расстояние между стенками, то столкновение с последней произойдет спустя время t_1 , которое определяется из очевидного соотношения

$$v_0 t_1 + u t_1 = l_0 .$$

Аналогично можно записать соотношение для времени t_2 между 1-ым и 2-ым соударениями:

$$(v_0 + 2u) t_2 + u t_2 = 2(l_0 - u t_1) ;$$

множитель “2” в правой части соответствует пролету частицы туда и обратно. Похожим образом будет выглядеть соотношение для t_3 :

$$(v_0 + 4u) t_3 + u t_3 = 2(l_0 - u t_1 - u t_2) .$$

Для времени t_n между $(n - 1)$ -ым и n -ым соударениями в результате имеем:

$$(v_0 + 2(n - 1)u) t_n + u t_n = 2 \left\{ l_0 - u \sum_{k=1}^{n-1} t_k \right\} .$$

Чтобы определить искомое время τ , в течение которого частица совершает n соударений, нужно найти все t_k . Полученная рекуррентная система уравнений для t_k конечно может быть решена, однако это потребует от нас довольно больших усилий.

Гораздо проще дело обстоит в том случае, когда начальная скорость частицы v_0 значительно превосходит скорость стенки u (т.е. $v_0/u \gg 1$). Такая ситуация довольно правдоподобна, особенно если стенка существенно массивнее частицы. При

этом, как оказывается, можно перейти от дискретного рассмотрения движения частицы к непрерывному. В самом деле, если соударения происходят очень часто, мы не замечаем дискретности в изменении скорости частицы. Иными словами, в случае $v_0/u \gg 1$ можно говорить о непрерывном изменении скорости частицы с течением времени: $v(t)$. Непрерывность, как и в примере с ядерным распадом, является кажущимся эффектом на “больших” временах. Под “большим” временем здесь понимается время, за которое существенно успевает сместиться “медленная” стенка.

Итак, в момент времени t при непрерывном рассмотрении скорость частицы равна $v(t)$, а расстояние между стенками составляет $l(t) = l_0 - ut$. За время dt скорость частицы увеличивается на бесконечно малую величину dv , причем быстрота этого изменения, как будет показано ниже, дается выражением

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2u}{2(l_0 - ut)/v(t)} \equiv \frac{uv(t)}{l_0 - ut}. \quad (2.18)$$

В данном соотношении и заключена вся логика перехода к бесконечно малым изменениям. С одной стороны, мы помним, что частица все-таки движется дискретно, и после пролета “туда и обратно” длительностью $T = 2(l_0 - ut)/v(t)$ ее скорость изменяется на величину $2u$ вследствие отражения от стенки.²⁸⁾ Значит, на промежуток времени T приходится изменение скорости величиной $2u$, и ускорение равно $2u/T$, что записано в правой части уравнения (2.18). С другой стороны, с точки зрения “медленного” наблюдателя, который не успевает следить за болтанием частицы туда-сюда, ее скорость меняется почти непрерывно, и чем больше отношение v/u , тем слабее ощущается дискретность в движении частицы. Когда $v/u \rightarrow \infty$, с полным правом можно говорить о непрерывном изменении ее скорости и ввести мгновенное ускорение dv/dt . Поэтому левая часть уравнения (2.18) есть быстрота изменения скорости частицы при непрерывном рассмотрении ее движения, в то время как правая отражает быстроту изменения скорости при дискретном рассмотрении. Понятно, что в пределе $v/u \rightarrow \infty$ правая часть переходит в левую, однако даже для конечного отношения $v/u \gg 1$ можно с хорошей точностью приравнять их друг другу, что и было сделано при написании (2.18).

Уравнение (2.18) и есть тот “спасательный круг”, который избавляет нас от необходимости решать систему рекуррентных алгебраических уравнений. Приводя его к виду

$$\frac{dv}{v} = \frac{u dt}{l_0 - ut}$$

и записывая аналогичные соотношения вдоль всего движения частицы от начального момента (когда $t = 0$, $v = v_0$) до произвольного момента t (когда $v = v(t)$), мы можем произвести суммирование:

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = \int_0^t \frac{u dt}{l_0 - ut}.$$

²⁸⁾ При написании соотношения $T = 2(l_0 - ut)/v(t)$ мы пренебрегли смещением медленной стенки за время T одного пролета частицы туда и обратно.

Если внимательно присмотреться к этим интегралам, то нетрудно заметить, что они имеют абсолютно одинаковую структуру. Действительно, простое правило дифференцирования линейной функции дает: $u dt \equiv -d(l_0 - ut)$. Вводя переменную $x = l_0 - ut$, вы без труда преобразуете стоящий в правой части уравнения интеграл к уже знакомому виду

$$- \int_{l_0}^{l_0 - ut} \frac{dx}{x};$$

пределы интегрирования по x соответствуют пределам интегрирования по t . Мы уже знаем, как вычислять площадь под графиком гиперболы, и можем смело записать результат интегрирования обеих частей уравнения:

$$\ln \frac{v(t)}{v_0} = - \ln \left(\frac{l_0 - ut}{l_0} \right). \quad (2.19)$$

Осталось всего-навсего возвести число “ e ” в степень (2.19), чтобы найти зависимость скорости частицы от времени:

$$v(t) = \frac{v_0 l_0}{l_0 - ut}.$$

Рост скорости, как видно, получился гиперболическим (рис. 22). Момент $t_* = l_0/u$ соответствует “схлопыванию” стенок; понятно, почему при $t \rightarrow t_*$ скорость частицы обращается в бесконечность.

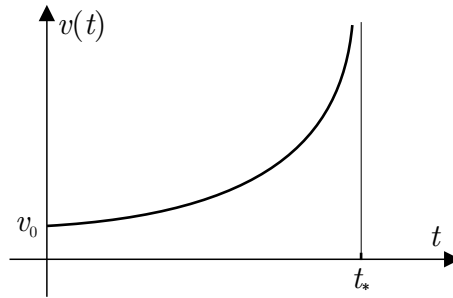


Рис. 22. Зависимость скорости частицы от времени при непрерывном рассмотрении ее движения

Мы, тем не менее, пока еще не ответили на вопрос задачи: чему равно время τ , за которое произойдет n соударений с движущейся стенкой. Воспользуемся все той же непрерывной моделью движения, считая что $v_0/u \gg 1$. За время dt частица испытывает dn соударений, причем

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{2(l_0 - ut)/v(t)}. \quad (2.20)$$

Действительно, на промежуток времени $T = 2(l_0 - ut)/v(t)$, соответствующий пролету туда и обратно, приходится одно соударение с подвижной стенкой. Разделив переменные в уравнении (2.20), проинтегрируем его (иными словами, произведем суммирование подобных соотношений на протяжении всего движения частицы). Здесь нам

пригодится зависимость $v(t)$, которая была получена перед этим:

$$\int_0^{n(t)} dn = \int_0^t \frac{v(t)dt}{2(l_0 - ut)} = \int_0^t \frac{v_0 l_0 dt}{2(l_0 - ut)^2} = \{x = l_0 - ut\} = -\frac{v_0 l_0}{2u} \int_{l_0}^{l_0 - ut} \frac{dx}{x^2}.$$

Так как

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2},$$

то $dx/x^2 = -d(1/x)$, и правую часть уравнения можно легко просуммировать:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2} = -\int_{x_1}^{x_2} d\left(\frac{1}{x}\right) = -\left[\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right].$$

Следовательно, зависимость количества ударов от времени имеет вид

$$n(t) = \frac{v_0 l_0}{2u} \left[\frac{1}{l_0 - ut} - \frac{1}{l_0} \right].$$

Обратная зависимость

$$t(n) = \frac{1}{u} \left(l_0 - \frac{v_0 l_0}{2un + v_0} \right)$$

определяет время, необходимое для совершения n соударений; она и дает ответ на вопрос задачи. Теперь мы можем мысленно вернуться к исходной модели, в которой величина n дискретна: $n = 1, 2, \dots$. Заменяя непрерывную функцию $t(n)$ ее дискретными значениями t_n , для искомого времени найдем:

$$t_n = \frac{l_0}{u} \left[1 - \frac{v_0}{v_0 + 2un} \right].$$

Такой же результат, как ни странно, получается из исходной системы алгебраических уравнений, если в них совершить ряд упрощений в предположении $v_0/u \gg 1$.

Надеюсь, рассмотренные примеры дали вам неплохое представление о соотношении между дискретными и непрерывными моделями физики. Какая модель в каком случае удобнее, зависит от конкретной задачи. Часто бывают нужны обе. Физика все же в существенно большей степени основывается на непрерывных моделях природных явлений, а языком для построения таких моделей являются любимые вами функции и производные. О них мы продолжим разговор в следующих разделах пособия, чему, по убеждению автора, должно способствовать это маленькое введение.

Глава 3

Значение понятий функции и производной для описания физических явлений

Уже довольно давно вы знакомы с понятием *функции*. Вспомним хотя бы последний пример: $v(t)$, $n(t)$ есть функции, характеризующие движение частицы между стенками. В предыдущих задачах мы также постоянно сталкивались с различными функциональными зависимостями: $v(t)$, $m(t)$, $\varphi(t)$, $v(\varphi)$, и т.д. (см. главы 1, 2). Возникает вопрос: почему для описания физических явлений постоянно используются именно функции? А теперь еще появились *производные*, *дифференциальные уравнения* и прочие объекты из области высшей математики. Можно ли дать некое общее объяснение подобному факту? Давайте попытаемся это обсудить.

Основной задачей классической физики, как вы наверное уже догадываетесь, является описание либо какого-то процесса во времени, либо структуры некой “неподвижной” системы. Об этих двух типах задач нужно поговорить подробнее.²⁹⁾

3.1. Процессы

Всякий физический процесс характеризуется значением определенной физической величины в различные моменты времени, например массы ракеты и ее скорости. Это означает, что для описания движения ракеты нужны функциональные зависимости $m(t)$ и $v(t)$; подставив в них любое интересующее нас время t , мы сразу найдем массу и скорость в этот момент. Более того, структура функции в целом, как правило, может сказать многое о характере описываемого ей процесса. Иными словами, нам вовсе не обязательно вычислять значения массы и скорости ракеты в отдельные моменты времени; знания того, что скорость меняется со временем, скажем, по логарифмическому закону $v(t) \sim \ln t$ вполне достаточно для понимания особенностей движения ракеты.

Функция – это универсальное математическое обозначение зависимости одних величин от других. В случае с ракетой ее масса m и скорость v есть функции от времени полета t , которое является *независимой переменной*. Если мы исключим время из данных функций, например выразив t из $m(t)$ и подставив в $v(t)$, то получим функцию $v(m)$, дающую информацию о связи скорости ракеты с ее массой в ходе полета, и т.д. Итак, всякий процесс описывается зависимостями некоторых физических величин f, g, \dots от времени. Возникает вопрос: как найти характеризующие конкретную систему функции $f(t), g(t), \dots$? Ответ очень простой: из универсальных

²⁹⁾В данной главе также упоминаются частные производные, однако связанные с ними разделы могут быть опущены без ущерба для оставшегося материала пособия.

уравнений вида

$$\frac{df}{dt} = \text{“воздействие, изменяющее величину } f\text{”},$$

$$\frac{dg}{dt} = \text{“воздействие, изменяющее величину } g\text{”}.$$

Об этом законе мы упоминали еще в прошлой главе. Присутствующее в правой части уравнения “внешнее воздействие” может зависеть от самих величин f и g , изменение которых им вызвано. Подобное свойство, именуемое *обратной связью*, присуще большинству физических систем. К примеру, скорость зарядки конденсатора зависит от мгновенного значения его заряда q :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U - q/C}{R}.$$

Воздействие на систему также может некоторым заданным образом зависеть от времени, как, например, в случае с силой тяги самолета во время выполнения маневров, контролируемой летчиком. Следовательно, любой физический процесс математически описывается примерно такими уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{df}{dt} = F_f(f, g, t, \dots) \\ \frac{dg}{dt} = F_g(f, g, t, \dots) \\ \dots\dots\dots, \end{cases}$$

где многоточие говорит о возможности существования других параметров в системе и соответствующих им уравнений. В простейших задачах в центре внимания оказывается одна физическая величина и одно уравнение: $df/dt = F(f, t)$. Таков математический язык физики, когда речь идет о процессах.

3.2. Стационарные распределения

Теперь представим, что физическое явление состоит в изменении какой-либо величины от точки к точке в пространстве, но не во времени. К примеру, в “штиль” совсем нет ветра, и воздух в атмосфере практически неподвижен. Однако несмотря на статичность такой системы, можно задаться вопросом, как изменяется температура и плотность воздуха с высотой, и т.п. В данном случае речь идет не о процессе, а о неподвижной картине распределения чего-то в пространстве. Исследовать такое распределение – значит найти функцию $f(x, y, z)$, характеризующую некоторую физическую величину в различных точках. Теперь независимыми переменными являются пространственные координаты (x, y, z) .

Распределения, как правило, являются трехмерными; в таком случае функция f зависит от всех трех координат. Однако часто встречаются вырожденные случаи –

двумерные и одномерные распределения, например распределение высоты гор по поверхности земного шара (отсчитываемой от уровня моря) или изменение температуры воды вдоль теплотрассы. Универсального уравнения для функции $f(x, y, z)$, разумеется, нет. Тем не менее, во многих задачах такое уравнение удастся написать; оно содержит производные от функции f по каждой из независимых переменных в отдельности (т.е. частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$).

3.3. Процессы, распределенные в пространстве

Очень распространены в природе явления, в которых физическая величина претерпевает изменения во времени, и при этом как-то распределена в пространстве в каждый фиксированный момент времени. С подобной ситуацией мы уже сталкивались при описании движения волны по шнуру: отклонение шнура y есть функция от точки пространства x и момента времени t ($y = y(x, t)$), и определяется из решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Разумеется, в других случаях уравнение может быть совершенно иным, и как правило гораздо более сложным. Однако общей чертой всех подобных явлений является то, что они описываются функцией от t и от x, y, z , которая может быть найдена из некоего дифференциального уравнения. Таков универсальный путь математического описания большинства физических явлений.

Вывод: физические явления описываются функциями времени (если это процессы), функциями пространственных координат (если это стационарные распределения), и функциями как времени, так и пространственных координат (если это распределенные процессы). Все эти функции находятся из наших с вами любимых дифференциальных уравнений, отражающих какие-то общие закономерности в физической системе (например, законы сохранения). Чтобы не быть голословными, давайте сформулируем основные дифференциальные уравнения *механики, термодинамики и электричества*.

Пример 3.1. Основные дифференциальные уравнения механики.

Какие задачи решает механика? До безобразия однотипные: проследить за движением тел, т.е. за изменением их положения в пространстве с течением времени. Значит, для описания движения нужно найти функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ (в общем виде $\vec{r}(t)$ – зависимость радиус-вектора от времени). Дифференцируя эти функции, можно также получить зависимость скорости от времени $\vec{v}(t)$. Итак, в задачах механики функциями, как правило, являются координаты и скорость, а переменной – время. Основное уравнение, описывающее изменение этих функций со временем (т.е. движение тела), есть II закон Ньютона:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t).^{30)} \quad (3.1)$$

³⁰⁾ Сила может зависеть как от координат тела (например сила упругости пружины), так и от его

Если масса тела неизменна в ходе движения ($m = \text{const}$), то ее можно вынести из-под знака дифференцирования, и уравнение движения примет вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (3.2)$$

Это основной частный случай, который вам встречался на протяжении всего школьного курса физики.

Сразу бросается в глаза одно обстоятельство: в уравнение (3.1) помимо функции $\vec{v}(t)$ входит также функция $\vec{r}(t)$ (в качестве аргумента в правой части). Следовательно, уравнение движения на самом деле содержит две функции, и для них требуется пара уравнений. Второе уравнение, очевидно, есть просто кинематическая связь $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Однако во многих случаях бывает удобно оставить в уравнении (3.1) только одну функцию. Это достигается двумя способами. Первый способ состоит в том, чтобы заменить скорость \vec{v} производной $d\vec{r}/dt$ в основном уравнении (3.1). В частности, применимо к (3.2) мы получим следующее дифференциальное уравнение:

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \equiv m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t \right).$$

Оно содержит только функцию $\vec{r}(t)$ и ее производные по времени. Решением является искомая функция $\vec{r}(t)$, из которой нетрудно получить $\vec{v}(t)$ простым дифференцированием. Второй способ заключается в использовании закона сохранения энергии (в тех случаях, когда это возможно). Из классических задач механики (гармонические колебания, движение в поле тяготения, и т.п.) вы уже знаете, что этот фундаментальный закон тем или иным образом связывает координаты тела и модуль его скорости. Представляя данную зависимость в виде $\vec{r}(v)$,³¹⁾ подставим ее в уравнение движения:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}(v), \vec{v}, t).$$

Теперь уравнение содержит только функцию $\vec{v}(t)$ и ее производные по времени; решая его, мы найдем эту функцию. Чтобы получить зависимость $\vec{r}(t)$, вовсе не надо производить интегрирование $\vec{v}(t)$ – достаточно подставить определенную уже функцию $\vec{v}(t)$ в закон сохранения энергии $\vec{r}(v)$. Подобный путь решения мы, в частности, намечали в задаче о разлете одноименных электрических зарядов под действием кулоновского отталкивания.³²⁾

Пример 3.2. Основные дифференциальные уравнения термодинамики.

Посмотрим, как обстоят дела в термодинамике. Во всяком термодинамическом процессе должен выполняться закон сохранения энергии; по причинам, разобранным в

скорости (вспомним задачу о движении пули в доске), а также изменяться по заданному закону со временем под влиянием неких внешних факторов.

³¹⁾ $v = |\vec{v}|$ – модуль скорости.

³²⁾ См. главу 1, пример 1.7.

предыдущих параграфах, его почти всегда приходится записывать в дифференциальной форме:

$$dQ = dU + pdV. \quad (3.3)$$

Термодинамическое явление характеризуется набором из трех основных функций: (p, V, T) или (p, ρ, T) . Эти функции связаны между собой уравнением состояния, которое можно представить в форме $T = f(p, V)$.³³⁾ В частности, в идеальном газе уравнение состояния имеет вид

$$T(p, V) = \frac{pV}{\nu R}.$$

Таким образом, независимыми являются только две термодинамические функции; третья выражается через них с помощью уравнения состояния. Пока у нас есть лишь одно дифференциальное уравнение, а именно, закон сохранения энергии (3.3), и пара неизвестных функций, например p и V .

Для полного описания термодинамического процесса, т.е. для нахождения значений термодинамических функций на всем его протяжении, нужно привлечь дополнительные предположения. К примеру, в хорошо известных вам изопроцессах предполагается постоянной одна термодинамическая величина из набора (p, V, T) , в адиабатическом процессе нет теплообмена системы с окружающей средой ($dQ = 0$), в политропическом процессе реализуется связь $dQ = \nu c dT$ ($c = \text{const}$ – молярная теплоемкость газа). И это лишь малая часть всех процессов, которые теоретически могут происходить с газом. Такое многообразие объясняется очень просто. Дело все в том, что мы абсолютно свободны в выборе способа подвода тепла dQ к газу. Иными словами, у нас имеется одна степень свободы, и мы вольны распоряжаться ей по своему усмотрению при организации конкретного процесса. Фиксирование этой степени свободы, например наложение условия $T = \text{const}$, и дает то дополнительное уравнение, которое наряду с (3.3) позволяет полностью описать соответствующий термодинамический процесс.

Пример 3.3. Основные дифференциальные уравнения электричества.

Что касается электричества и магнетизма, то в этом разделе встречаются задачи различных типов. При исследовании *переходных процессов в электрических цепях* мы получали довольно несложные дифференциальные уравнения вида

$$\frac{df}{dt} = F(f, t), \quad (3.4)$$

в которых под величиной f понимался заряд конденсатора, ток в контуре с катушкой индуктивности и т.п., а функция $F(f, t)$ оказывалась линейной по первому аргументу. Иногда нам удавалось дать ответ на вопрос задачи, не решая уравнение (3.4), описывающее изменение основного физического параметра цепи со временем. В большинстве случаев это было возможно благодаря закону сохранения энергии, а также с

³³⁾Здесь f – некоторая функция двух переменных.

привлечением простых и логичных физических соображений, вроде равенства нулю тока в колебательном контуре в момент максимальной зарядки конденсатора. Имейте в виду, что решать в лоб основное дифференциальное уравнение нужно далеко не всегда – вы ведь не станете вызывать бульдозер для того, чтобы снести стену дома и проникнуть внутрь, если можно просто войти через открытую дверь! В других случаях, однако, только решение $f(t)$ уравнения (3.4) дает ответ на интересующий нас вопрос; функция $f(t)$ всегда содержит наиболее полную информацию о том, что происходит с системой в каждый момент времени. Выбор того или иного пути решения – дело сугубо личное, однако зачастую он предопределяется целью, которую мы преследуем при постановке задачи.

Другой тип задач встречается в *электростатике* и *магнитостатике*. В данных разделах физики электричества исследуются распределения электрической и магнитной компонент стационарного электромагнитного поля в пространстве.³⁴⁾ А это означает, что решение задачи состоит в определении функций $\vec{E}(\vec{r})$ и $\vec{B}(\vec{r})$; радиус-вектор $\vec{r} = (x, y, z)$ задает положение точки наблюдения в пространстве. Разумеется, иногда мы имеем дело с теми или иными упрощенными ситуациями, например в задачах со сферической симметрией, когда вместо зависимости от трех переменных (x, y, z) в функциях $\vec{E}(\vec{r})$ и $\vec{B}(\vec{r})$ удастся выделить зависимость от одной переменной $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \equiv |\vec{r}|$; подобные упрощения сильно облегчают жизнь.

Общее уравнение, описывающее распределение поля от заданной конфигурации зарядов и токов в пространстве (*уравнение Лапласа*), на данный момент является для вас слишком сложным, и я не буду его здесь приводить. Тем не менее, довольно часто удастся воспользоваться так называемыми *фундаментальными решениями* этого уравнения – *законами Кулона* и *Био-Савара*, которые определяют структуру поля от точечных зарядов. Если же мы имеем дело не с точечными, а с распределенными в пространстве по некоторому закону зарядами и токами, то заряженную область нужно разбить на множество бесконечно малых элементов. Такие элементы, очевидно, можно считать точечными зарядами, и записать для каждого из них, скажем, закон Кулона. Затем, естественно, необходимо произвести суммирование (интегрирование) полей от всех малых элементов заряженной области в общую картину.

Наконец, в природе встречаются более сложные явления, к примеру *электромагнитные волны*, в которых электрические и магнитные поля некоторым образом распределены в пространстве, и при этом меняются со временем. Подобного рода явления описываются функциями $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{B}(\vec{r}, t)$, характеризующими зависимость компонент электромагнитного поля от пространственных координат и от времени. Как найти эти функции? Иногда их структуру удастся установить исходя из довольно несложных физических соображений, как в случае плоской, цилиндрической или сферической электромагнитных волн постоянной частоты. В общем же случае приходится решать основные дифференциальные уравнения электродинамики – так называемые *уравнения Максвелла*. Не хочу лишать вас сегодня спокойного сна, выписывая эти уравнения. На данном этапе вам нужно осознать лишь то, что все электричество основывается по сути дела на одних и тех же уравнениях с производными (уравнениях Максвелла), подобно тому как механика основывается на II-ом

³⁴⁾ Электрическое поле стационарно в том случае, когда создающие его заряды неподвижны; стационарное магнитное поле порождается постоянными токами.

законе Ньютона.

Надеюсь, из перечисленных выше примеров вам понятно, насколько важным средством для описания природных явлений служат функции и производные. Попробуем еще раз осмыслить философию этого математического языка. В древней Греции жил мыслитель Гераклит, которому принадлежит известное высказывание об устройстве нашего мира: “все течет, все меняется”. Гераклит, конечно же, имел в виду изменение окружающего мира со временем, и при этом не ограничивал область действия данного закона природными явлениями, перенося его в жизнь людей и общества. Тут, наверное, он был не до конца прав – в жизни встречаются вещи неизменные и непоколебимые. Не в нашей с вами власти, однако, говорить о человеческой жизни также определенно, как мы можем говорить, скажем, о движении планет. А вот о природе поговорить можно всегда, и тут Гераклит совершенно прав: все в природе меняется – не во времени, так в пространстве, а может и во времени, и в пространстве одновременно. Нам с вами теперь уже ясно, что изменение физической величины описывается функцией, а быстрота изменения – производной.³⁵⁾ Любые изменения происходят под влиянием неких “воздействий”, которые, как правило, сами реагируют на совершаемые ими изменения. В результате природные явления описываются дифференциальными уравнениями, связывающими функции с их производными.

Дифференциальное уравнение при решении дает не отдельное число (корень или набор корней), как алгебраическое уравнение, а непрерывную последовательность чисел – множество значений функции при непрерывном изменении аргумента в соответствующих пределах. В последующих двух главах мы познакомимся с разнообразными физическими задачами, сводящимися к простым и более сложным дифференциальным уравнениям.

³⁵⁾ В случае изменения величины в пространстве – частными производными по пространственным координатам.

Глава 4

Примеры задач, сводящихся к простейшим дифференциальным уравнениям

В прошлых главах мы достаточно говорили о необходимости использования производных при описании физических явлений. Теперь давайте познакомимся с рядом задач, которые сводятся к довольно простому дифференциальному уравнению. Это будет вам полезно для систематизации представлений о возможностях математического описания физических явлений.

Задача 4.1. Движение под действием сил сопротивления.

Наиболее распространенными видами сил сопротивления являются: *сухое трение* (сила сопротивления не зависит от скорости, а определяется давлением и механическими свойствами на поверхности контакта двух тел), *вязкое трение* (когда сила сопротивления пропорциональна скорости тела) и *аэродинамическое сопротивление* (когда сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости). С сухим трением вы имели дело еще в 9 классе, и для описания движения с таким трением обходились обычной математикой. Теперь рассмотрим по порядку оставшиеся два типа сил.

4.1.1. Вязкое трение

Вязкое трение имеет место при движении тел в жидкости и газе с небольшими скоростями, при движении пули в деревянной доске, и т.п. Уравнение движения в таком случае записывается в виде

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v, \quad (4.1)$$

где α – постоянный коэффициент трения, который определяется свойствами среды и формой тела. Задача формулируется так: частица массой m , имеющая скорость v_0 , попадает в среду, где на нее действует сила вязкого трения (см. рис. 2, глава 1). Нужно исследовать ее движение, т.е. найти зависимости пройденного пути и скорости от времени, длину пробега до полной остановки, и т.п.

Разделяя переменные в (4.1), получим $dv/v = -\alpha dt/m$. Проинтегрируем это соотношение (т.е. произведем суммирование) от момента попадания частицы в среду ($t = 0$) до произвольного момента t , когда скорость тела равна $v(t)$:

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = \ln \left(\frac{v(t)}{v_0} \right) = -\frac{\alpha}{m} \int_0^t dt = -\frac{\alpha}{m} t.$$

Значит, скорость тела изменяется со временем по уже известному нам закону

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right). \quad (4.2)$$

Она довольно быстро уменьшается, стартуя с начального значения v_0 при $t = 0$, причем замедление тела тем больше, чем больше отношение α/m (рис. 23). Это и понятно: чем больше вязкость среды и легче тело, тем быстрее оно будет останавливаться. Величина $\tau = m/\alpha$ есть характерное время торможения; строго говоря, в соответствии с (4.2) скорость тела обращается в ноль при $t \rightarrow \infty$, однако даже времени порядка 5τ оказывается достаточно для уменьшения начальной скорости в сотню раз.

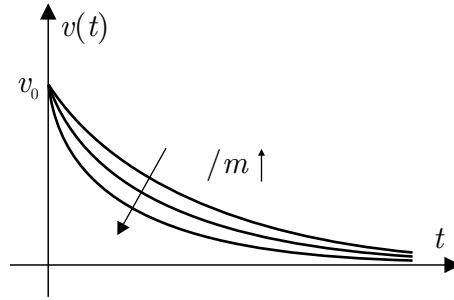


Рис. 23. Зависимость скорости тела от времени при различных значениях параметров α и m

Теперь найдем зависимость пройденного частицей пути от времени: $s(t)$. Очевидно, что $v = ds/dt$. Подставляя данное представление скорости в правую часть (4.1), мы можем сократить на dt , что приведет нас к уравнению с разделенными переменными:

$$mdv = -\alpha ds.$$

Производя интегрирование от начала движения ($s = 0$, $v = v_0$) до произвольного момента времени, получим линейную зависимость пройденного пути от скорости:

$$s = \frac{m}{\alpha}(v_0 - v);$$

подобное соотношение мы уже получали в первой главе.³⁶⁾ Чтобы из него найти интересующую нас зависимость пути от времени, осталось подставить $v(t)$ из (4.2):

$$s(t) = \frac{mv_0}{\alpha} \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \right]. \quad (4.3)$$

График данной функции показан на (рис. 24); по своей структуре она в точности совпадает с функцией $q(t)$, описывающей процесс зарядки конденсатора. Максимальный пройденный до остановки путь

$$s_{\max} = s(t \rightarrow \infty) = \frac{mv_0}{\alpha}.$$

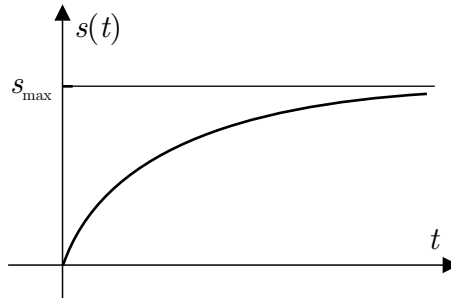


Рис. 24. Зависимость пройденного пути от времени при движении под действием вязкого трения

Не нужно, однако, думать, что частица на самом деле движется бесконечно долго до полной остановки. Экспоненциальная функция (4.2) очень быстро сводит ее скорость на нет, и приближает пройденный путь к предельному значению mv_0/α . Если от момента попадания частицы в среду пройдет, скажем, время $10m/\alpha$, ее скорость будет составлять всего-навсего $10^{-4}v_0$, и мы можем просто не ощутить остаточного движения. Более того, уравнение (4.1) годится для описания движения только с “макроскопическими” скоростями, при которых импульс тела существенно превосходит импульс отдельных молекул среды. При очень сильном замедлении могут вступить в силу дополнительные факторы, связанные, например, с небольшой асимметрией частицы, неровностью ее поверхности, и т.д. Однако все “драматические события” подобного рода, приводящие к отклонению от решения (4.3), начинаются только в ничтожно малой окрестности конечной точки остановки mv_0/α , предсказанной с помощью (4.3). И если мы не обладаем очень точными приборами, нам будет казаться, что частица остановилась строго на расстоянии mv_0/α спустя некоторое конечное время.

Формулу (4.3) можно получить иным способом. Если подставить $v = ds/dt$ не в уравнение (4.1), как это было сделано раньше, а в его решение (4.2), мы придем к простому дифференциальному уравнению для функции $s(t)$:

$$\frac{ds}{dt} = v_0 \exp(-t/\tau), \quad \tau = \frac{\alpha}{m}.$$

Любой уважающий себя школьник должен суметь разделить в нем переменные и произвести интегрирование от начала движения до произвольного момента t :

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} ds &= s(t) = \int_0^t \exp(-t/\tau) dt = \{ \text{введем переменную } \xi = -t/\tau; \, dt = -\tau d\xi \} = \\ &= -\tau v_0 \int_0^{-t/\tau} e^{\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Если представить себе, что мы не умеем интегрировать экспоненту, то полученное ранее решение (4.3) позволит нам научиться это делать. В самом деле, из сравнения

³⁶⁾ См. пример 1.2.

(4.3) с последним соотношением непосредственно вытекает связь

$$e^{-t/\tau} - 1 = \int_0^{-t/\tau} e^{\xi} d\xi.$$

Следовательно, имеет место общее правило: для любого x_1 интеграл

$$\int_0^{x_1} e^x dx = e^{x_1} - 1.$$

Поскольку такое же правило справедливо при интегрировании экспоненты до некоторого x_2 , мы можем записать

$$\int_0^{x_2} e^x dx = e^{x_2} - 1.$$

Если теперь вычесть одно из другого, получим:

$$\int_0^{x_2} e^x dx - \int_0^{x_1} e^x dx = e^{x_2} - e^{x_1}.$$

Очевидно, что разность площадей в левой части данного уравнения есть площадь под графиком экспоненты в промежутке между точками x_1 и x_2 . Значит общее правило интегрирования экспоненты в произвольных пределах имеет вид

$$\int_{x_1}^{x_2} e^x dx = e^{x_2} - e^{x_1}.$$

Из него сразу вытекает, что $e^x dx = d(e^x)$, т.к. только при суммировании дифференциалов от экспоненты мы можем получить разность ее конечного и начального значений на отрезке $[x_1, x_2]$. Деля последнюю связь на dx , найдем до безобразия простое правило дифференцирования экспоненциальной функции:

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x;$$

только не говорите, что вы не знали его раньше. В этом примере мне хотелось лишний раз показать, как из решения физической задачи можно установить важные математические свойства функций (вспомните также задачу об откачке газа из сосуда, разобрannую в главе 2).

4.1.2. Аэродинамическое сопротивление

Сила сопротивления данного типа приходит на смену вязкому трению при увеличении скорости движения в среде (оно, в частности, действует на самолет в ходе полета). Уравнение движения теперь имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = -\beta v^2, \quad (4.4)$$

где постоянный коэффициент β зависит от свойств среды и формы тела. Задача опять заключается в исследовании процесса торможения частицы при попадании в среду с сопротивлением.

Переменные в уравнении движения легко разделяются: $dv/v^2 = -\beta dt/m$. Проинтегрируем данное соотношение от момента попадания частицы в среду ($t = 0$) до произвольного момента t :

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^2} = \left\{ \text{т.к. } \frac{d(1/v)}{dv} = -\frac{1}{v^2}, \text{ то } \frac{dv}{v^2} = -d\left(\frac{1}{v}\right) \right\} = -\int_{v_0}^{v(t)} d\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v(t)} = -\frac{\beta}{m}t.$$

Отсюда легко выразить интересующую нас зависимость скорости от времени:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + (\beta v_0 t/m)}. \quad (4.5)$$

Торможение частицы теперь происходит по гиперболическому закону; чем больше параметр $\beta v_0/m$, тем оно интенсивнее.³⁷⁾

Чтобы найти зависимость пройденного пути от времени $s(t)$, подставим $v = ds/dt$ в (4.5):

$$\frac{ds}{dt} = \frac{v_0}{1 + (\beta v_0 t/m)}.$$

Это уравнение также позволяет без труда разделить переменные и произвести интегрирование от начала движения до момента t :

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^{s(t)} ds = v_0 \int_0^t \frac{dt}{1 + (\beta v_0 t/m)} = \left\{ \xi = \frac{\beta v_0 t}{m}, \quad d\xi = \frac{\beta v_0}{m} dt \right\} = \frac{m}{\beta} \int_0^{\beta v_0 t/m} \frac{d\xi}{1 + \xi} = \\ &= \left\{ \frac{d\xi}{1 + \xi} = \frac{d(1 + \xi)}{1 + \xi} = d[\ln(1 + \xi)] \right\} = \frac{m}{\beta} \int_0^{\beta v_0 t/m} d[\ln(1 + \xi)]. \end{aligned}$$

Поскольку $\ln(1) = 0$, окончательно получим:

$$s(t) = \frac{m}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta v_0 t}{m} \right); \quad (4.6)$$

³⁷⁾ Отметим, что темп замедления под действием аэродинамического сопротивления зависит также от начальной скорости частицы v_0 . В случае вязкого трения замедление определяется лишь массой тела и коэффициентом сопротивления.

данная зависимость показана на рис. 25. В отличие от движения под действием вязкого трения, пройденный частицей путь теперь неограниченно увеличивается со временем. Иными словами, аэродинамического сопротивления оказывается недостаточно для полной остановки тела. Хотя на начальном этапе темп аэродинамического замедления может быть даже выше, чем в случае вязкого трения, по мере торможения аэродинамическое трение постепенно становится меньше вязкого (рассчитанного для той же скорости); это и приводит к неограниченности пройденного пути в рамках зависимости (4.6). Не нужно, однако, забывать, что при торможении тела в большинстве сред аэродинамическое сопротивление рано или поздно уступает место вязкому, которое и завершает процесс торможения вплоть до полной остановки тела.

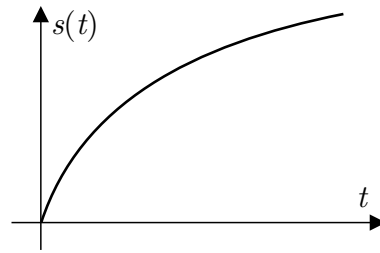


Рис. 25. Зависимость пройденного пути от времени в случае аэродинамического трения

Задача 4.2. Наполнение бачка.

Еще один любопытный пример использования простейших дифференциальных уравнений – задача о *наполнении туалетного бачка*. Пусть бачок имеет форму параллелепипеда с площадью основания S_* (рис. 26). При наполнении его водой поднимается поплавок, который постепенно закрывает кран подачи воды. Для простоты предположим, что с увеличением уровня воды h в бачке площадь отверстия крана S уменьшается по линейному закону

$$S(h) = S_0[1 - (h/h_{\max})]. \quad (4.7)$$

Здесь $S_0 = S(0)$ – площадь полностью открытого отверстия, а h_{\max} – предельный уровень воды (при $h = h_{\max}$ в силу (4.7) $S = 0$, т.е. кран закрыт и уровень больше не меняется). Если p_0 – заданный напор в трубе, по которой подается вода, а p_a – атмосферное давление, то в силу уравнения Бернулли

$$p_0 = p_a + \frac{\rho v^2}{2},$$

где v – скорость вытекающей из крана струи. Последняя, таким образом, не зависит от площади отверстия крана и определяется только перепадом давлений $p_0 - p_a$; в дальнейшем будем считать v постоянной величиной.³⁸⁾ Это означает, что объемный

³⁸⁾Мы предполагаем, что напор в трубе не зависит от степени открытости крана. Это, конечно, не совсем так, особенно для небольших водопроводных систем. Однако в случае типичного городского водоснабжения каждый отдельно взятый потребитель очень слабо влияет на значение p_0 , что мы и используем при решении.

расход воды через кран $Q = vS$ также есть линейная функция от h . Поступивший в

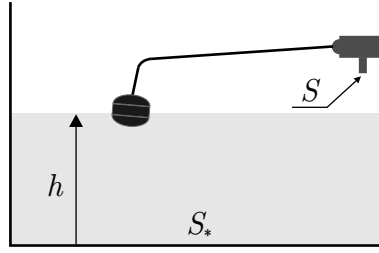


Рис. 26. Поплавковый регулятор наполнения туалетного бачка

бачок за время dt объем воды $dV = Qdt$ приводит к увеличению уровня в бачке на dh . Т.к. объем в несжимаемой жидкости сохраняется, то $dV = S_*dh$, откуда вытекает соотношение $S_*dh = Qdt = vSdt$. Подставляя сюда выражение (4.7) для S и деля на S_*dt , мы получим основное дифференциальное уравнение для процесса наполнения бачка:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{vS_0[1 - (h/h_{\max})]}{S_*}.$$

Оно напоминает уравнение, описывающее зарядку конденсатора или установление тока в катушке индуктивности. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int_0^{h(t)} \frac{dh}{[1 - (h/h_{\max})]} = -h_{\max} \ln \left(1 - \frac{h(t)}{h_{\max}} \right) = \frac{vS_0}{S_*} \int_0^t dt = \frac{vS_0}{S_*} t.$$

Отсюда легко найти зависимость уровня воды в бачке от времени:

$$h(t) = h_{\max} \left[1 - \exp \left(-\frac{vS_0}{h_{\max}S_*} t \right) \right]; \quad (4.8)$$

это стандартный процесс установления, график которого приведен на рис. 24. Величина $\tau = h_{\max}S_*/vS_0$ есть характерное время наполнения; оно пропорционально объему бачка $h_{\max}S_*$.

Возникает вопрос: неужели наполнение бачка продолжается неограниченно долго? На самом деле, конечно же, нет. Поступление воды в бачок прекращается в некоторый момент T , когда уровень воды h близок к h_{\max} , но еще не равен ему, и связано это с поверхностным натяжением воды. Если предполагать, что отверстие крана в ходе закрытия сохраняет цилиндрическую форму, то при некотором значении радиуса отверстия r_σ в нем образуется мениск, способный удержать перепад давлений $p_0 - p_a$:

$$\frac{2\sigma}{r_\sigma} = p_0 - p_a;$$

σ – коэффициент поверхностного натяжения воды. Именно при радиусе отверстия $r = r_\sigma$ кран перестанет пропускать воду, и наполнение бачка закончится. Значению

$$r_\sigma = 2\sigma/(p_0 - p_a)$$

соответствует площадь отверстия крана $S_\sigma = \pi r_\sigma^2$, которая, в свою очередь, связана с окончательным уровнем h_σ в баке посредством формулы (4.7):

$$S_\sigma = S_0[1 - (h_\sigma/h_{\max})].$$

Предположив также, что поверхностное натяжение не влияет на процесс вплоть до конечного момента T , мы можем использовать решение (4.8) (которое получено без учета действия сил поверхностного натяжения в отверстии) для определения T по известному h_σ :

$$h_\sigma = h(T) = h_{\max}[1 - \exp(-T/\tau)].$$

Из последних трех соотношений легко найти время наполнения T :

$$\begin{aligned} T &= \tau \cdot \ln \left[\frac{S_0 (p_0 - p_a)^2}{4\pi\sigma^2} \right] = \left\{ v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_a)}{\rho}} \right\} = \\ &= h_{\max} \left(\frac{S_*}{S_0} \right) \sqrt{\frac{2(p_0 - p_a)}{\rho}} \ln \left[\frac{S_0 (p_0 - p_a)^2}{4\pi\sigma^2} \right]. \end{aligned}$$

Данный результат нетрудно проверить экспериментально, однако большой точности он не даст, поскольку в реальности форма отверстия крана далека от круговой. Кроме того, в теоретической модели нужно было учитывать влияние поверхностного натяжения и вязкости воды на завершающих стадиях процесса (когда отверстие в кране мало); эти факторы могут изменить T в разы.

Задача 4.3. Вытекание воды из бака под действием тяжести.

Допустим, что в баке с начальным уровнем воды h_0 имеется небольшое отверстие вблизи дна. Требуется найти, как уровень изменяется со временем из-за вытекания воды через отверстие.

Скорость истечения, очевидно, зависит от уровня воды $h(t)$ в каждый момент. Простейший путь к решению основан на предположении о том, что давление в вытекающей струе равно атмосферному, т.е. струя не расширяется и не сжимается вдоль своей длины. На самом деле это не совсем так, однако сейчас нас вполне устроит предложенная модель (ее мы использовали и в предыдущей задаче). Поскольку понижение уровня – процесс достаточно медленный (если, конечно, отверстие в баке не слишком большое), то в каждый момент времени вертикальным движением воды в сосуде можно пренебречь и записать уравнение Бернулли в следующем виде:

$$\begin{array}{ccc} p_a + g\rho h & = & p_a + \rho \frac{v^2}{2}, \\ \text{на поверхности} & \text{в вытекающей} & \\ \text{воды в сосуде} & \text{струе} & \end{array}$$

откуда $v = \sqrt{2gh}$ – зависимость скорости воды в отверстии от уровня воды в баке. Теперь запишем, как и в предыдущей задаче, условие сохранения объема жидкости,

вытекающей за время dt . Если S_0 – площадь отверстия, S_1 – площадь дна бака, а dh – понижение уровня за время dt , то закон сохранения объема можно записать в виде

$$S_1 dh = -S_0 v(h) dt;$$

знак “–” соответствует уменьшению уровня ($dh < 0$). Деля обе части на dt и подставляя выражение для v , мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dh}{dt} = -\alpha\sqrt{h}, \quad (4.9)$$

где коэффициент $\alpha = S_0\sqrt{2g}/S_1$. Разделим переменные и проинтегрируем это уравнение от $t = 0$ (когда $h = h_0$) до произвольно интересующего нас момента t :

$$\begin{aligned} \int_{h_0}^{h(t)} \frac{dh}{\sqrt{h}} &= \left\{ \text{т.к. } \frac{d(\sqrt{h})}{dh} = \frac{1}{2\sqrt{h}}, \text{ то } \frac{dh}{\sqrt{h}} = 2d(\sqrt{h}) \right\} = \\ &= 2 \int_{h_0}^{h(t)} d(\sqrt{h}) = 2[\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0}] = -\alpha t. \end{aligned}$$

Отсюда без труда находим закон, по которому изменяется уровень воды в баке:

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{\alpha t}{2} \right)^2.$$

Мы видим, что истечение воды из бака длится конечное время $\tau = 2\sqrt{h_0}/\alpha$ (рис. 27). В момент $t = \tau$ производная dh/dt , равная в силу уравнения (4.9) $-\alpha\sqrt{h}$, обращается в ноль, т.е. график функции $h(t)$ касается оси t в точке $t = \tau$. При $t = 0$ производная, очевидно, максимальна по абсолютной величине и равна $\alpha\sqrt{h_0}$. Чем больше постоянная $\alpha = S_0\sqrt{2g}/S_1$, тем меньше время истечения τ ; последнее выражается через исходные параметры задачи следующим образом:

$$\tau = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \left(\frac{S_1}{S_0} \right).$$

Эту формулу нетрудно проверить экспериментально, открывая разное количество отверстий и изменяя таким образом площадь S_1 , а также варьируя начальный уровень воды h_0 . Вообще водобачковая тема очень интересна, однако пора перейти с нее на тему биологическую.

Задача 4.4. Движение муравья по растягиваемому жгуту.

Весьма поучительна следующая задача. По длинному и хорошо растяжимому жгуту, один конец которого неподвижен (прикреплен к стенке), а другой оттягивается с постоянной скоростью u , ползет муравей (рис. 28). Скорость муравья относительно жгута также постоянна и равна v , и направлена в сторону движущегося конца жгута.

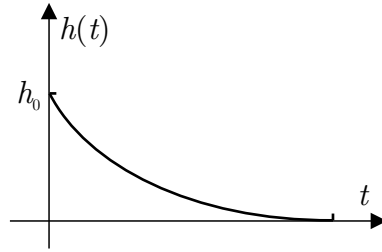


Рис. 27. Зависимость уровня воды в баке от времени

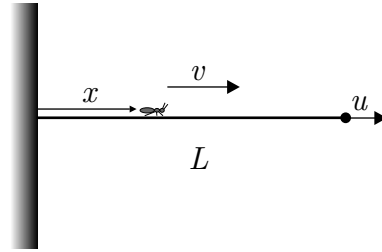


Рис. 28. Муравей на растягиваемом жгуте

Возникает вопрос: доберется ли муравей до этого конца, и если доберется, то за какое время? Начальная длина жгута L_0 , а муравей стартует от неподвижного конца.

В момент времени t , когда муравей находится на расстоянии $x = x(t)$ от стенки, длина жгута составляет $L(t) = L_0 + ut$; очевидно, что $L > x$. Следовательно, участок жгута, по которому в данный момент ползет муравей, имеет скорость

$$w = u \frac{x(t)}{L(t)} \equiv \frac{ux(t)}{L_0 + ut} < u$$

относительно стенки. Чтобы ответить на вопросы задачи, нужно найти зависимость $x(t)$. Как вы, наверное, уже догадались, функция $x(t)$ является решением некоторого дифференциального уравнения. Это уравнение получается из довольно простых кинематических соображений. Скорость муравья относительно стенки, с одной стороны, равна dx/dt . С другой стороны, она же представима в виде суперпозиции скорости движения муравья относительно жгута (v) и скорости участка жгута, на котором муравей пребывает в данный момент, относительно стенки (w). Мы, таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{dx}{dt} = v + w \equiv v + \frac{ux}{L_0 + ut}.$$

Это дифференциальное уравнение является более сложным в сравнении с теми, что мы получали раньше, т.к. в нем не удастся разделить переменные. Перепишем его в таком виде, чтобы неизвестная функция $x(t)$ и ее производные были слева, а все остальные члены, характеризующие не зависящее от x “воздействие”, справа:

$$\frac{dx}{dt} - \left(\frac{u}{L_0 + ut} \right) x = v. \quad (4.10)$$

Подобная форма записи дифференциального уравнения называется *канонической*.

В теории дифференциальных уравнений принята определенная классификация. Данное уравнение имеет *1-ый порядок*, т.к. содержит только первую производную от искомой функции. Коэффициент, стоящий при функции $x(t)$, зависит от переменной t , поэтому наше уравнение относится к типу *уравнений с переменными коэффициентами*. Более того, в правой части стоит “внешнее воздействие” v , оказывающее существенное влияние на решение; уравнение, в котором есть внешнее воздействие, называют *неоднородным*. Да, и попали же мы с муравьем впросак!.. Одно душу греет – в нашем уравнении функция $x(t)$ и ее производная dx/dt стоят в 1-ой степени, т.е. в нем, нет произведений вида $x^\alpha (dx/dt)^\beta$. Подобные уравнения, где функция и ее производная входят в 1-ой степени и не перемножаются между собой (а также не являются аргументами более сложных функций, например $\sin(x)$), называются *линейными*. В классификации дифференциальных уравнений, таким образом, наблюдается аналогия с классификацией алгебраических систем.

Линейность уравнения (4.10) является для нас “спасительным кругом”. В силу линейности мы можем воспользоваться так называемым *методом вариации постоянных*, позволяющим “разобраться” с неоднородностью в правой части уравнения. Хочу обратить особое внимание на то, что данный метод работает **только для линейных уравнений**. Суть его в следующем.

Давайте забудем на время про слагаемое v в правой части (4.10) и решим однородное уравнение, которое имеет вид

$$\frac{dx}{dt} - \left(\frac{u}{L_0 + ut} \right) x = 0.$$

При этом совершенно не важно, какие коэффициенты стоят при x и dx/dt (постоянные или переменные) – главное, что уравнение линейное. Однородное уравнение, как правило, гораздо легче решать, нежели неоднородное; в данном случае мы можем просто разделить переменные и проинтегрировать его от некоторого момента $t_0 > 0$ до произвольного момента t :

$$\ln \left[\frac{x(t)}{x(t_0)} \right] = \ln \left[\frac{L_0 + ut}{L_0 + ut_0} \right]$$

(от $t_0 = 0$ интегрировать нельзя, т.к. $x(0) = 0$, и логарифм будет плохо себя чувствовать). Следовательно, решение однородного уравнения есть

$$x(t) = \left(\frac{x(t_0)}{L_0 + ut_0} \right) [L_0 + ut].$$

Неизвестную константу $x(t_0)/[L_0 + ut_0]$ обозначим через C . Это – так называемая *постоянная интегрирования*, которая возникает во всех случаях, когда пределы интегрирования не определены (в нашем случае не определен параметр t_0). К слову сказать, интеграл с неопределенными пределами называется *неопределенным* и обозначается просто символом \int . По своему смыслу неопределенный интеграл суть множество *первообразных* от подынтегральной функции, например

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

тогда как *определенный интеграл*, использовавшийся нами до сих пор, является разностью двух значений одной и той же первообразной, соответствующих верхнему и нижнему пределу.

Итак, общее решение однородного уравнения имеет вид $x(t) = C[L_0 + ut]$; это не есть окончательное представление для интересующей нас зависимости $x(t)$, поскольку она описывается неоднородным уравнением (4.10). Тем не менее, на основе полученного без особых проблем решения однородного уравнения с помощью метода вариации постоянной можно перейти к решению неоднородного уравнения. Как это сделать? Нужно всего-навсего предположить, что решение неоднородного уравнения имеет ту же структуру, что и у соответствующего однородного уравнения, но только в нем “постоянная” C зависит от t , т.е. *варьируется* под влиянием правой части – отсюда и название метода. Чтобы найти зависимость $C(t)$, которая определяет искомый вид решения, нужно подставить $x(t) = C(t) \cdot [L_0 + ut]$ в неоднородное уравнение (4.10):

$$\frac{dC}{dt}[L_0 + ut] + Cu - \frac{u}{L_0 + ut}C[L_0 + ut] = v.$$

Здесь мы использовали правило дифференцирования произведения двух функций, в данном случае $C(t)$ и $L_0 + ut$. И, о чудо! Слагаемые, содержащие функцию C , сокращаются, и получается простейшее дифференциальное уравнение

$$\frac{dC}{dt}[L_0 + ut] = v,$$

допускающее разделение переменных:

$$dC = \frac{v dt}{L_0 + ut}.$$

Теперь мы можем проинтегрировать это уравнение от самого начала движения, когда $t = 0$ и $C = C_0$ (значение, которое мы определим чуть позже), до произвольного момента t :

$$C(t) - C_0 = v \int_0^t \frac{dt}{L_0 + ut} = \frac{v}{u} \int_0^t \frac{d(L_0 + ut)}{L_0 + ut} = \frac{v}{u} \ln \left(\frac{L_0 + ut}{L_0} \right).$$

Подставляя функцию $C(t)$ в соотношение $x(t) = C(t) \cdot [L_0 + ut]$, мы получим интересующую нас зависимость положения муравья от времени:

$$x(t) = \left[C_0 + \frac{v}{u} \ln \left(1 + \frac{ut}{L_0} \right) \right] (L_0 + ut). \quad (4.11)$$

Осталось найти постоянную C_0 . Из условия задачи мы знаем, что в начальный момент $t = 0$ (когда $L(t) = L_0$) муравей находился у стенки, т.е. $x(0) = 0$. Полагая в (4.11) $t = 0$, мы, таким образом, получим уравнение

$$\left(C_0 + \frac{v}{u} \ln(1) \right) L_0 = 0,$$

откуда вытекает значение $C_0 = 0$ (поскольку $\ln(1) = 0$). Итак, окончательное решение имеет вид

$$x(t) = \frac{v}{u}[L_0 + ut] \ln \left(1 + \frac{ut}{L_0} \right). \quad (4.12)$$

Функция (4.12) позволяет ответить на вопрос о том, доползет ли муравей до подвижного конца или нет. Если это произойдет в какой-то момент τ , то в данный момент расстояние от муравья до неподвижной стенки совпадет с текущей длиной жгута: $x(\tau) = L_0 + u\tau$. С учетом (4.12) мы получим следующее уравнение для τ :

$$\frac{v}{u}[L_0 + u\tau] \ln \left(1 + \frac{u\tau}{L_0} \right) = L_0 + u\tau.$$

Отсюда

$$\tau = \frac{L_0}{u} [e^{u/v} - 1]. \quad (4.13)$$

Подобное решение имеет смысл для любого неотрицательного отношения скоростей u/v . Чем больше u/v , тем дольше муравью придется ползти, однако каким бы ни было это отношение, муравей всегда доползет до конца жгута (при условии, что последний не порвется от сильного растяжения). Если же $u/v = 0$ (т.е. $u = 0$, и жгут сохраняет свою длину L_0), то и числитель, и знаменатель в (4.13) обращаются в ноль, однако их отношение в силу очевидных физических соображений должно быть конечным и равным L_0/v . Мы, таким образом, приходим к выводу, что при стремлении аргумента к нулю экспоненциальная функция в главном приближении равна

$$e^\xi = 1 + \xi + \dots,$$

где многоточием обозначены следующие слагаемые разложения, которые малы по сравнению с ξ при $\xi \rightarrow 0$.³⁹⁾ Подобное представление экспоненты часто применяется для вычисления разнообразных пределов.

Задача 4.5. Политропические процессы.

Очень важный пример использования простых дифференциальных уравнений связан с термодинамикой идеального газа, а именно с так называемыми *политропическими процессами* (процессами с постоянной теплоемкостью). Газу можно сообщить тепло при различных условиях; в зависимости от этого у него будет разная теплоемкость. Теплоемкость может меняться в ходе процесса, однако во многих процессах она остается постоянной. В этом случае бесконечно малое количество тепла dQ , подведенное к газу, связано с производимым им изменением температуры газа dT соотношением $dQ = CdT$, где теплоемкость $C = \text{const}$ вне зависимости от состояния газа в ходе процесса. Следовательно, первое начало термодинамики запишется в виде $CdT = C_V dT + pdV$, или

$$(C - C_V) dT = pdV; \quad (4.14)$$

³⁹⁾ Следующее слагаемое есть $\xi^2/2$, за ним идет $\xi^3/3!$ и т.д. Все вместе они составляют так называемый *ряд Тейлора* для экспоненциальной функции.

входящие в это уравнение теплоемкости рассчитаны для ν молей газа. К записанному в таком виде закону сохранения энергии нужно еще добавить уравнение состояния $pV = \nu RT$. Дифференцируя его, получим $p dV + V dp = \nu R dT$. Отсюда можно выразить dT и подставить в (4.14), что позволяет исключить из уравнения температуру:

$$(c - c_V) \left(\frac{p dV + V dp}{R} \right) = p dV;$$

здесь c и c_V – соответствующие молярные теплоемкости. Вспоминая, что $R = c_p - c_V$, и выполняя элементарные преобразования, мы получим дифференциальное уравнение

$$(c_p - c) p dV = (c - c_V) V dp. \quad (4.15)$$

Его решение есть функция $p(V)$, описывающая политропический процесс; она представима в виде некоторой кривой в плоскости (p, V) .

Простейшими решениями уравнения (4.15) являются уже известные вам изобарный и изохорный процессы. Они реализуются, когда $c = c_p$ и $c = c_V$, соответственно. В самом деле, при $c = c_p$ из (4.15) вытекает уравнение $dp = 0$, которое имеет решение $p = \text{const}$; аналогичным образом, при $c = c_V$ получается решение $V = \text{const}$. Далее, однако, мы сделаем акцент на более сложных и не совсем привычных для вас политропических процессах, в которых $c \neq c_p, c_V$. Если это так, то в уравнении (4.15) обе части не вырождены, и для его решения нужно произвести разделение переменных:

$$(c_p - c) \frac{dV}{V} = (c - c_V) \frac{dp}{p}.$$

Интегрируя от некоторого начального состояния газа (p_0, V_0) до текущего состояния с параметрами (p, V) , получим:

$$(c_p - c) \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) = (c - c_V) \ln \left(\frac{p}{p_0} \right), \text{ т.е. } \left(\frac{V}{V_0} \right)^{c_p - c} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{c - c_V}.$$

Мы, таким образом, вывели общее уравнение политропического процесса, которое можно переписать в виде

$$p^{c - c_V} V^{c - c_p} = \text{const}. \quad (4.16)$$

Выходит, что политропические процессы описываются степенными функциями. Рассмотрим их наиболее важные свойства. Из (4.16), в частности, следует, что при $c = c_V$ $V = \text{const}$, а при $c = c_p$ $p = \text{const}$. Если $c = 0$, т.е. $dQ = 0$ и тепло к газу не подводится, то в силу (4.16) имеем $pV^{(c_p/c_V)} = \text{const}$ – хорошо знакомое нам уравнение адиабаты. Если же $c \rightarrow \infty$, т.е. вне зависимости от подвода тепла температура неизменна ($dT = 0$), решение (4.16), переписанное в виде $pV^{(c - c_p)/(c - c_V)} = \text{const}$, переходит в $pV = \text{const}$ – уравнение изотермы. Таким образом, все известные вам еще со времен детского сада изопроцессы являются частными случаями политропического процесса, т.е. процесса, в котором у газа сохраняется одна и та же теплоемкость.

Исследуем математические свойства кривой (4.16). Для этого от физических переменных (p, V) перейдем к нормированным переменным $\bar{p} = p/p_0$ и $\bar{V} = V/V_0$,⁴⁰⁾ где

⁴⁰⁾ Нормировка позволяет сравнивать процессы с различными абсолютными значениями давления и объема.

(p_0, V_0) – некоторое состояние газа, и запишем (4.16) в виде

$$\bar{p}(\bar{V}) = \bar{V}^{\frac{c_p - c}{c - c_V}}.$$

Производная от данной функции есть

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{V}} = \left(\frac{c_p - c}{c - c_V} \right) \bar{V}^{\frac{c_p + c_V - 2c}{c - c_V}}.$$

Знак производной определяется знаком коэффициента $\alpha = (c_p - c)/(c - c_V)$. Если

$$c_V < c < c_p,$$

то $\alpha > 0$, и функция $\bar{p}(\bar{V})$ монотонно возрастает (рис. 29); при этом ее выпуклость или вогнутость зависит от знака второй производной, т.е. от соотношения между c и $(c_p + c_V)/2$. В случае, когда $c = (c_p + c_V)/2$, процесс имеет форму прямой линии с углом наклона 45° в плоскости (\bar{p}, \bar{V}) . Если же

$$c < c_V \quad \text{или} \quad c > c_p,$$

то $\alpha < 0$, и процесс внешне похож на изотерму и адиабату (рис. 30). Рекомендую вам самим разобраться в том, какие области на диаграмме (p, V) соответствуют процессам со значением теплоемкости из промежутков $0 < c < c_V$ и $c_p < c < \infty$.

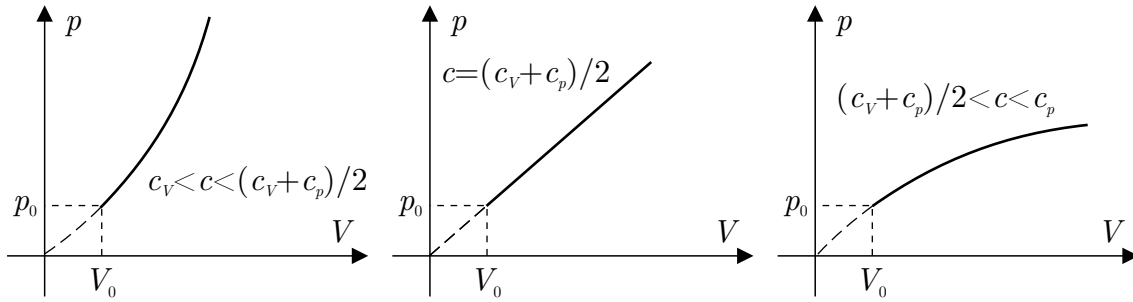


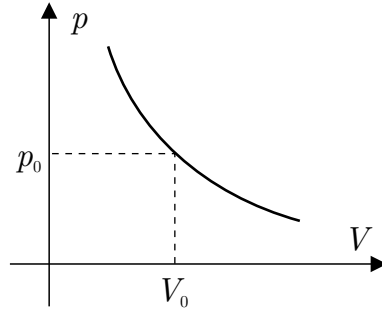
Рис. 29. Политропические процессы с идеальным газом при $c_V < c < c_p$

Особое внимание я хочу обратить на то, что возможны также процессы с отрицательной теплоемкостью. В самом деле, если мы будем очень быстро расширять газ, то даже при подводе тепла его температура будет падать, и теплоемкость газа окажется отрицательной. В случае, когда $c < 0$,

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{V}} < 0, \quad \frac{d^2\bar{p}}{d\bar{V}^2} = \frac{(c_p - c)}{(c - c_V)^2} \cdot [c_p + c_V - 2c] \cdot \bar{V}^{\frac{c_p - c}{c - c_V} - 2} > 0.$$

Посмотрим, какие области на диаграмме (p, V) соответствуют подобным процессам. Отношение $(c_p - c)/(c - c_V)$ есть функция от c ; обозначим ее через $f(c)$. Уравнение (4.16) переписывается в виде

$$\bar{p}(\bar{V}) = \bar{V}^{f(c)}.$$


 Рис. 30. Политропические процессы при $c < c_V$ или $c > c_p$

Поскольку

$$\frac{df}{dc} = -\frac{R}{(c - c_V)^2} < 0 \quad \forall c,$$

то при изменении c от $-\infty$ до 0 функция $f(c)$ монотонно убывает от $f(-\infty) = -1$ до $f(0) = -(c_p/c_V) = -\gamma$. Следовательно, все процессы с отрицательной теплоемкостью лежат в области между адиабатой и изотермой (рис. 31).⁴¹⁾

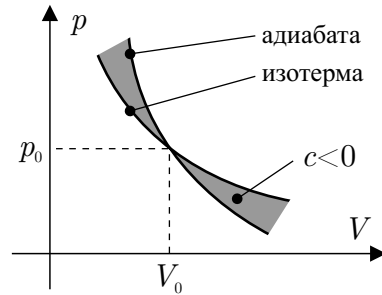


Рис. 31. Политропические процессы с отрицательной теплоемкостью

Задача 4.6. Движение ракеты с непрерывным выбросом топлива.

Мы уже рассматривали в главе 1 движение ракеты с непрерывным выбросом топлива.⁴²⁾ Тогда мы не могли проинтегрировать уравнение движения; теперь же для нас это будет проще пареной репы. Уравнение Мещерского $mdv = -udm$, в котором m – масса ракеты, v – ее скорость, u – скорость выбрасываемых газов относительно ракеты, непосредственно допускает разделение переменных и интегрирование. Поскольку в большинстве случаев $u = \text{const}$, то интегрирование от начала движения

⁴¹⁾Мы, естественно, рассматриваем множество процессов, проходящих через одно и то же состояние (p_0, V_0) .

⁴²⁾См. пример 1.4.

($v = 0$, $m = m_0$) до произвольного момента t дает:

$$\int_{m_0}^{m(t)} \frac{dm}{m} = \ln \left(\frac{m(t)}{m_0} \right) = -\frac{1}{u} \int_0^{v(t)} dv = -\frac{v(t)}{u}.$$

Задавая закон $m(t)$ изменения массы ракеты (вследствие выброса топлива), мы легко найдем зависимость скорости ракеты от времени. Наиболее простым и, вместе с тем, реалистичным законом является линейный: $m(t) = m_0 - \mu t$; он соответствует постоянному расходу топлива μ . В этом случае возрастание скорости ракеты описывается функцией

$$v(t) = u \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right). \quad (4.3)$$

Более показательной, однако, является информация о том, как остаточная масса ракеты связана со скоростью, до которой эту массу удалось разогнать:

$$m(v) = m_0 \cdot \exp(-v/u); \quad (4.17)$$

данное соотношение называется *формулой Циолковского*. Из него видно, что на химическом топливе, дающем $u \sim 1 \div 10$ км/сек, в прямом смысле слова далеко не улетишь – до большой скорости разгонится ничтожная часть первоначальной массы. Если использовать “нейтронные” двигатели, выбрасывающие продукты ядерного распада тяжелых элементов со скоростями $u \sim 10^3$ км/сек (что составляет порядка 1% от скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с), можно разогнаться до скоростей $v \sim u$, израсходовав чуть больше 60% начальной массы. Однако для достижения околосветовых скоростей и такие двигатели не годятся – нужны “фотонные” ракеты, т.е. ракеты, реактивной струей у которых является пучок световых квантов (фотонов). Свет тоже обладает импульсом, и если установить в хвосте ракеты мощный лазер, то ракета будет разгоняться. В случае фотонного двигателя $u = c$, и для разгона, к примеру, до скорости $v = c/2$ на генерацию световой “струи” нужно израсходовать массу

$$\Delta m = m_0 - m(c/2) = m_0 [1 - e^{-1/2}] \approx 0,4m_0.$$

При таких скоростях, однако, решение (4.17) становится неприменимым. Причина этого заключается в специфических динамических эффектах, возникающих при движении тел с околосветовыми скоростями, которые требуют модификации исходного уравнения движения ракеты.

Задача 4.7. Переходные процессы в электрических цепях.

Переходные процессы, имеющие место при зарядке конденсатора и при установлении тока в катушке, описываются уже надоевшими вам уравнениями

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U - q/C}{R}, \quad \frac{dI}{dt} = \frac{U - IR}{L}.$$

⁴³⁾Рекомендую вам самостоятельно построить ее график и выяснить, что с ним происходит при изменении μ .

После разделения переменных и интегрирования от нулевых начальных значений заряда и тока получаются решения

$$q(t) = UC \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{RC} \right) \right], \quad I(t) = \frac{U}{R} \left[1 - \exp \left(-\frac{R}{L}t \right) \right].$$

Типичный вид подобных процессов показан на рис. 24. Характерные времена установления параметров цепи в соответствии с данными зависимостями есть RC (для заряда) и L/R (для тока).

Задача 4.8. Колебания.

Скажем несколько слов еще об одном явлении, которое описывается несложным дифференциальным уравнением. Это – любимые вами *гармонические колебания*,⁴⁴⁾ рассмотренные в главе 1 (пример 1.3). Общее уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Здесь $x(t)$ – смещение колеблющегося тела относительно положения равновесия, а ω_0 – *собственная частота колебаний*, которая определяется механическими свойствами системы. Данное уравнение, в отличие от всех предыдущих уравнений, рассмотренных в этой главе, имеет *второй* порядок, так как содержит вторую производную от неизвестной функции. Его общее решение есть

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \equiv C \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

причем

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \varphi = \arcsin \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Такое решение соответствует *собственным колебаниям* системы, т.е. колебаниям, протекающим исключительно благодаря ее внутренним свойствам. Постоянные A и B (или C и φ) определяются начальными условиями, а именно, скоростью и положением тела в момент $t = 0$; они, как правило, известны из имеющихся в конкретной задаче данных.

Если на колеблющееся тело помимо “внутренней” силы $-\omega_0^2 x$ (например, силы упругости пружины в маятнике, равной $-kx$) действует еще какая-нибудь внешняя сила $F(x, \dot{x}, t)$,⁴⁵⁾ то уравнение колебаний будет *неоднородным*:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F(x, \dot{x}, t),$$

⁴⁴⁾ Термин “гармонические” соответствует колебаниям, протекающим по законам синуса и косинуса.

⁴⁵⁾ Силовое воздействие на маятник в общем случае зависит от положения груза x и от его скорости \dot{x} , что учтено при написании аргументов функции F ; оно также может изменяться со временем по заданному закону. Попробуйте самостоятельно привести соответствующие примеры.

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}, t) ;$$

$f = F/m$. Из многообразия внешних силовых воздействий принято выделять т.н. *диссипативные силы* (разнообразные силы трения), которые всегда отнимают энергию у колебательной системы. Так, при действии на тело вязкого трения уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt} + F(x, \dot{x}, t) ,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\sigma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}, t) ,$$

где $\alpha > 0$ суть коэффициент трения, $\sigma = \alpha/2m$, $\omega_0^2 = k/m$, а под f понимается любая не диссипативная сила (например, магнитная сила Лоренца, не производящая работы над телом, или какая-нибудь механическая сила, сообщающая ему энергию). О колебаниях, описываемых таким уравнением, говорят как о *вынужденных колебаниях с затуханием*. Термин “вынужденные” связан с действием на систему внешней силы f , в то время как термин “затухание” отражает наличие трения в системе.

При отсутствии внешних не диссипативных сил ($f = 0$) имеют место *собственные колебания с затуханием*, соответствующие линейному однородному уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\sigma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 . \quad (4.18)$$

Как видно, диссипативные силы принято относить скорее ко внутренним силам, присутствующим самой колебательной системе, нежели ко внешним. Общее решение уравнения (4.18) хорошо известно и имеет вид

$$x(t) = Ce^{-\sigma t} \sin(\omega t + \varphi) , \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2} ; \quad (4.19)$$

здесь я привожу его без доказательства.⁴⁶⁾ Хочу отметить, что при наличии не слишком большого трения ($0 < \sigma < \omega_0$) колебания происходят не с собственной частотой ω_0 , а с несколько уменьшенной частотой $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}$. Постоянные C и φ , как и раньше, определяются начальными условиями (скоростью и положением тела в момент $t = 0$).

Рекомендую вам попытаться самостоятельно получить решение (4.19), построить качественный график функции $x(t)$ и разобраться, что происходит с маятником при $\omega_0 = \sigma$ (когда фактическая частота колебаний ω обращается в нуль) и $\omega_0 < \sigma$ (когда ω становится мнимой величиной). Дам лишь небольшую подсказку: при $\omega_0 < \sigma$ силы трения доминируют над упругими силами, и колебания отсутствуют как таковые – любое сообщенное системе в начальный момент времени движение аperiодическим образом затухает. Важно понимать, как математически осуществляется переход от колебательного решения к аperiодическому при плавном увеличении σ (и фиксированной ω_0).

⁴⁶⁾ Данный материал подробно излагается в стандартном курсе общей физики (теория колебаний и волн), а также в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если трение в системе отсутствует, а внешняя не диссипативная сила f не зависит от x и \dot{x} , то вынужденные колебания описываются линейным неоднородным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f(t). \quad (4.20)$$

В рамках данной модели возникает явление, называемое *резонансом*.⁴⁷⁾ Резонанс имеет место в том случае, когда внешнее воздействие изменяется со временем по гармоническому закону $f(t) = f_m \sin(\Omega t)$, причем его частота Ω совпадает с собственной частотой колебательной системы ω_0 . Нетрудно убедиться, что в подобном случае решение неоднородного уравнения есть

$$x(t) = -\frac{f_m}{2\omega_0} t \cdot \cos(\omega_0 t),$$

т.е. амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает со временем. Физическая интерпретация резонанса довольно проста. При совпадении частоты вынуждающей силы с собственной частотой маятника воздействие на него происходит в такт с собственными колебаниями, и сила f не испытывает сопротивления со стороны силы упругости. В результате совершаемая ей за один период колебаний работа положительна, что приводит к увеличению полной энергии маятника.

В заключение хочу предложить читателю немного закрепить навыки в решении простых дифференциальных уравнений и самостоятельно исследовать оставшиеся не разобранными здесь задачи, которые были упомянуты в главе 1 в качестве примеров. Речь идет о нахождении массы сферы с неоднородным распределением плотности (пример 1.5), выводе формулы для КПД цикла Карно (пример 1.6), а также об описании разлета одноименных электрических зарядов под действием кулоновского отталкивания (пример 1.7). Задача о скатывании шарика с поверхности цилиндра, с которой, собственно, и началось пособие (пример 1.1), не может быть решена в элементарных функциях; по этой причине ее придется отложить до знакомства с заключительной главой, где рассказывается о более сложных дифференциальных уравнениях.

⁴⁷⁾Резонанс реализуется и при наличии трения в системе; последнее, однако, приводит к ослаблению эффекта.

Глава 5

Задачи, сводящиеся к более сложным дифференциальным уравнениям

Насладившись вдоволь “простыми” задачами, требующими использования производных, рассмотрим несколько более сложные с точки зрения математического описания явления.

Задача 5.1. Кеплерово движение.

Законы, в соответствии с которыми происходит движение спутников вокруг центра тяготения, были открыты Иоганном Кеплером в начале XVII-го века. Кеплер занимался анализом уже имевшихся к тому времени в большом количестве данных астрономических наблюдений за движением планет Солнечной системы. Среди хаоса на первый взгляд никак не связанных между собой чисел ему удалось разглядеть красивые и простые закономерности, а именно: орбиты планет имеют эллиптическую форму, причем их параметры определенным образом связаны между собой. Последнее очевидно хотя бы из того, что у всех планет единый центр тяготения – Солнце. Движение по эллиптическим орбитам, естественно, является неравномерным, однако обладает важным свойством постоянства секториальной скорости. В законах Кеплера природа в очередной раз обнаруживает разумность своего устройства.

Однако Кеплер не дал никакого физического объяснения открытым законам; его работы носили скорее философский характер, что было отличительной чертой любых научных изысканий того периода. После открытия законов движения планет прошло чуть больше пятидесяти лет, и английский естествоиспытатель по имени Исаак Ньютон дал им строгое физико-математическое объяснение. А попутно, в качестве “бесплатного приложения”, он сформулировал фундаментальные законы механики, закон всемирного тяготения, и разработал основы дифференциального исчисления – неплохой урожай для одной задачи и одного человека. Производные понадобились Ньютону для преодоления трудностей в описании неравномерного движения, с которыми я вас познакомил в главе 1. Сейчас мы попытаемся воспроизвести теоретический путь вывода законов Кеплера, став ненадолго соучастниками их второго открытия.

Давайте рассмотрим движение какой-нибудь одной планеты массой m вокруг Солнца, имеющего массу M . Поскольку даже для самой тяжелой планеты (Юпитера) $m \approx M/2000$, Солнце с хорошей точностью является неподвижным, а взаимным гравитационным притяжением планет можно пренебречь (в главном приближении). Кроме того, и Солнце, и планета могут считаться материальными точками на фоне

разделяющих их расстояний. При сделанных выше предложениях движение планеты вокруг неподвижного точечного центра тяготения описывается уравнением

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -G \cdot \frac{Mm}{r^3} \cdot \vec{r}, \quad (5.1)$$

где \vec{r} – радиус-вектор планеты относительно Солнца; $r = |\vec{r}|$. Это движение плоское, так как нет сил, стремящихся вывести планету из плоскости вращения. Интуитивно понятно (даже если мы не знаем законов Кеплера), что в ходе движения изменяется как длина радиус-вектора \vec{r} , так и его направление, которое характеризуется углом φ между \vec{r} и некоторым фиксированным направлением $C-O$ (рис. 32). Таким образом, решение дифференциального уравнения (5.1) сводится к нахождению функций $r(t)$ и $\varphi(t)$. Но как их выделить из векторного соотношения (5.1)? Оказывается, что далеко не так сложно, как это может показаться на первый взгляд; нужно лишь принять во внимание некоторые геометрические соображения. Полное приращение вектора

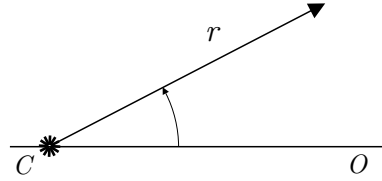


Рис. 32. Положение планеты в полярной системе координат

\vec{r} за время dt , как видно из рис. 33, складывается из радиального удлинения dr и тангенциальной составляющей $r d\varphi$. Значит, скорость планеты в любой момент времени складывается из радиальной компоненты $v_r = dr/dt$ и окружной компоненты $v_\tau = r d\varphi/dt$; в векторной форме $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\tau$. Теперь посмотрим, из каких компонент состоит ускорение планеты. За время dt изменяются как радиальная, так и окружная компоненты скорости. Приращение каждой компоненты в отдельности складывается из тех же двух составляющих: dv_r и $v_r d\varphi$ для вектора \vec{v}_r и $-v_\tau d\varphi$ и dv_τ для вектора \vec{v}_τ ; на первом месте стоят приращения скорости в радиальном направлении, а на втором – в окружном направлении (рекомендую вам самостоятельно в этом убедиться). В итоге ускорение также имеет радиальную и окружную составляющие, которые по модулю равны

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} - v_\tau \frac{d\varphi}{dt}, \quad a_\varphi = v_r \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dv_\tau}{dt}. \quad (5.2)$$

В силу уравнения (5.1)

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_r + \vec{a}_\tau = -\frac{GM}{r^3} \cdot \vec{r},$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} \vec{a}_r = -\frac{GM}{r^3} \cdot \vec{r} \\ \vec{a}_\tau = 0, \end{cases}$$

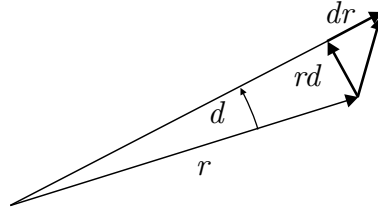


Рис. 33. Компоненты приращения радиус-вектора планеты

поскольку $\vec{a}_r \parallel \vec{r}$, $\vec{a}_\tau \perp \vec{r}$ (вектора равны между собой, когда равны их компоненты по соответствующим направлениям, в данном случае по направлениям \vec{r} и $\vec{\tau}$). С учетом представления (5.2) для компонент ускорения эта система записывается следующим образом (в скалярном виде):

$$\begin{cases} \frac{dv_r}{dt} - v_\tau \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \\ v_r \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dv_\tau}{dt} = 0. \end{cases}$$

Подставляя сюда $v_r = dr/dt$ и $v_\tau = r d\varphi/dt$, получим систему двух дифференциальных уравнений второго порядка для функций $r(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\frac{GM}{r^2} \\ 2 \left(\frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

При написании второго уравнения данной системы мы использовали правило дифференцирования произведения функций:

$$\frac{d}{dt} \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Система (5.3) оказалась довольно сложной – в нее входят произведения функций и их производных, т.е. уравнения являются нелинейными. А с решением нелинейных дифференциальных уравнений дело обстоит куда хуже, чем с линейными. Кроме того, уравнения имеют второй порядок, да и наличие двух искомых функций $r(t)$ и $\varphi(t)$, тесно переплетенных между собой, существенно осложняют дело. Нужно что-то предпринять...

Ключ к решению нашей планетной задачи состоит в следующем: давайте забудем на время, что мы ищем функции $r(t)$ и $\varphi(t)$. Что, если попытаться сначала найти зависимость $r(\varphi)$, которая, очевидно, определяет *траекторию движения планеты*? В самом деле, если допустить, что мы уже нашли функции $r(t)$ и $\varphi(t)$, то можно из них исключить время t , и это даст нам зависимость r от φ . Но как исключить переменную t , не решив предварительно систему и не найдя таким образом функции $r(t)$

и $\varphi(t)$? На самом деле сделать это очень просто. Нужно лишь понимать, что приращение dt переменной t порождает приращения $d\varphi$ и dr , которые как-то соотносятся между собой; их отношение $dr/d\varphi$ есть производная от искомой функции $r(\varphi)$. Мы можем записать

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

просто умножив числитель и знаменатель на приращение $d\varphi$, соответствующее приращению dt . Так осуществляется преобразование производной от функции r по времени, входящей в уравнения (5.3), в производную от $v_r = dr/dt$ по новой переменной φ . Аналогично для второй производной по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{производная от произведения} \\ \text{двух функций} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{в первом слагаемом умножим} \\ \text{числитель и знаменатель на } d\varphi \end{array} \right\} = \\ &= \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \cdot \frac{d^2r}{d\varphi^2} + \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \end{aligned}$$

Подставим данные представления для производных dr/dt и d^2r/dt^2 в систему (5.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \frac{d^2r}{d\varphi^2} + \frac{d^2\varphi}{dt^2} \frac{dr}{d\varphi} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\frac{GM}{r^2} \\ 2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \frac{dr}{d\varphi} + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0. \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Как видно, простой заменой производных от функции r по времени производными по переменной φ добиться заметных упрощений не удалось. В новой системе (5.4) все равно остались производные от функции φ по времени ($d\varphi/dt$, $d^2\varphi/dt^2$), которые не позволяют окончательно перейти к переменной φ . Чтобы все-таки получить решаемое уравнение, содержащее только функцию $r(\varphi)$ и ее производные по φ , нужно привлечь на помощь дополнительные соображения.

Сила тяготения, управляющая движением планеты, является центральной, т.е. направлена вдоль радиус-вектора планеты \vec{r} . Следовательно, момент этой силы относительно центра тяготения равен нулю – у силы просто нет плеча (рис. 34). К чему приводит равенство нулю “вращательного воздействия” на планету, коим является момент силы? В случае поступательного движения равенство нулю силы означает постоянство количества движения (импульса) тела $p = mv$. В случае же равенства нулю момента силы относительно некоторого центра постоянным оказывается *момент импульса* тела относительно того же центра (т.е. имеет место аналогия вращательного и поступательного движений). Ну а что такое момент импульса? Эта величина определяется также, как и момент силы. Момент импульса планеты относительно Солнца L равен произведению окружной составляющей $mv \cdot \sin \alpha$ ее импульса на расстояние r до Солнца:

$$L = mvr \cdot \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{r} и $m\vec{v}$ (рис. 34). По физическому смыслу L суть количество вращательного движения; в случае твердого тела $L = I \cdot \omega$, где I – момент инерции тела относительно оси вращения, а ω – угловая скорость. Именно из-за цен-

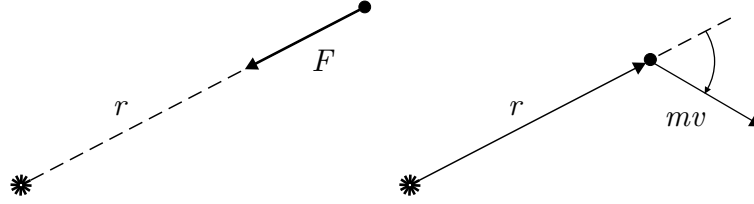


Рис. 34. К определению момента силы тяготения и момента импульса планеты относительно Солнца

трального, а не “закручивающего” характера силы тяготения момент импульса планеты сохраняется. Величина $v \cdot \sin \alpha = v_\tau$, входящая в определение L , есть окружная компонента скорости планеты; она связана с функциями r и φ следующим образом:

$$v_\tau = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Значит, в ходе движения

$$L = mv_\tau \cdot r = mr^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}.$$

Из данного обстоятельства вытекает любопытное следствие. За время dt радиус-вектор планеты \vec{r} “заметает” площадь

$$dS = \frac{1}{2} r \cdot (r + dr) \cdot \sin(d\varphi) \approx \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

с точностью до пренебрежимо малого слагаемого $drd\varphi$ (площадью маленького треугольника, очевидно, можно пренебречь по сравнению с площадью большого, рис. 35). Следовательно, скорость заметания площади радиус-вектором планеты, или ее *секториальная скорость*, равна

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{2m}, \quad (5.5)$$

причем $\sigma = \text{const}$ в силу постоянства момента импульса планеты. Мы получили II-ой закон Кеплера:

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const}.$$

А теперь вернемся к системе (5.4). Давайте исключим из нее производную $d^2\varphi/dt^2$, а вместо производной $d\varphi/dt$ подставим величину L/mr^2 из (5.5):

$$\left(\frac{L}{mr^2} \right)^2 \cdot \left[\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - r \right] + \frac{dr}{d\varphi} \left[-\frac{2}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi} \left(\frac{L}{mr^2} \right)^2 \right] = -\frac{GM}{r^2}.$$

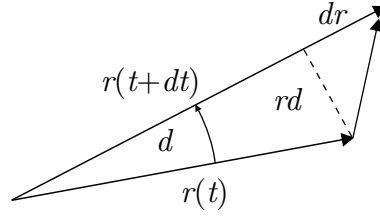


Рис. 35. К определению секториальной скорости

В результате мы приходим к уравнению, которое не содержит производных по времени:

$$\left[\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \right] = -\frac{GM(mr)^2}{L^2}; \quad (5.6)$$

его решением является искомая функция $r(\varphi)$, определяющая форму орбиты планеты. Это уравнение нелинейное, порядок у него второй, и так просто проинтегрировать его не получится. Что же делать? Счастье от предчувствия скорого успешного решения задачи опять ускользает из рук! Попробуем с вами от нечего делать заменить функцию $r(\varphi)$ на функцию $w(\varphi) = 1/r(\varphi)$. Поскольку $r = 1/w$, входящие в (5.6) производные преобразуются следующим образом:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{w} \right) = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{d\varphi}, \quad \frac{d^2 r}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{1}{w^2} \frac{dw}{d\varphi} \right) = \frac{2}{w^3} \left(\frac{dw}{d\varphi} \right)^2 - \frac{1}{w^2} \frac{d^2 w}{d\varphi^2}.$$

Подставляя их в (5.6), получим уравнение

$$\frac{2}{w^3} \left(\frac{dw}{d\varphi} \right)^2 - \frac{1}{w^2} \cdot \frac{d^2 w}{d\varphi^2} - 2w \left(-\frac{1}{w^2} \frac{dw}{d\varphi} \right)^2 - \frac{1}{w} + \frac{GMm^2}{L^2} \frac{1}{w^2} = 0.$$

И, о чудо! Слагаемые, содержащие $(dw/d\varphi)^2$, сокращаются! После домножения на $-w^2$ мы приходим к уравнению

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = \frac{GMm^2}{L^2}.$$

Это неоднородное уравнение гармонических колебаний. Уравнение линейное, его решение хорошо известно... Легко проверить, что функция

$$w(\varphi) = \frac{GMm^2}{L^2} + A \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)$$

удовлетворяет данному уравнению. Здесь A и φ_0 – некоторые постоянные, физическое значение которых мы обсудим чуть позже. Таким образом, для $r(\varphi)$ получается решение

$$r(\varphi) = \frac{1}{(GMm^2/L^2) + A \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)} \equiv \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

где по определению

$$p = \frac{L^2}{GMm^2}, \quad e = A \cdot \frac{L^2}{GMm^2};$$

не путайте вторую постоянную с числом “ $e = 2.718\dots$ ”. Величина p называется *параметром эллипса*, а e – его *эксцентриситетом*. Обе эти постоянные однозначно определяются энергией E и моментом импульса L планеты на конкретной орбите (при заданных M и m). И если для p данное утверждение очевидно (в силу определения), то для e придется давать обоснование, чем мы займемся несколько позже. Значение постоянной φ_0 зависит от того, откуда отсчитывать угол φ . Если за начало отсчета φ взять точку наибольшего приближения планеты к Солнцу (*перигей*), то при $A > 0$ имеем $\varphi_0 = 0$, а при $A < 0$ – соответственно $\varphi_0 = \pi$, и уравнение траектории в общем виде записывается так:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + |e| \cdot \cos \varphi}. \quad (5.7)$$

При $\varphi = 0$ знаменатель в (5.7) максимален и расстояние r минимально. В дальнейшем мы можем, не ограничивая общности, считать постоянные e и A положительными, что позволяет заменить $|e|$ просто на e .

Полученное уравнение кривой в полярных координатах (5.7) при $e = 0$ соответствует окружности, при $0 < e < 1$ – эллипсу, при $e = 1$ – параболе, а при $e > 1$ – гиперболе (рис. 36). Физически это означает, что движение планеты может быть либо ограниченным в пространстве (когда $0 \leq e < 1$), либо неограниченным (при $e \geq 1$). Нас сейчас интересует первый тип движения, т.е. движение по эллиптической орбите (окружность является вырожденным случаем). Анализируя астрономические таблицы, Иоганн Кеплер, который еще и знать не знал о производных, II-ом законом Ньютона и законе сохранения момента импульса, пришел именно к эллиптическим орбитам. Данный результат составляет I-ый закон Кеплера: движение планет происходит по эллиптическим орбитам, в фокусе которых находится Солнце. Уравнение (5.7) при $e < 1$ суть уравнение эллипса в полярной системе координат, связанной с фокусом (рис. 37). Эллипс – это вытянутая окружность. При $\varphi = 0$

$$r = r_p = \frac{p}{1 + e}, \quad (5.8)$$

а при $\varphi = \pi$

$$r = r_a = \frac{p}{1 - e}; \quad (5.9)$$

таковы значения r в точках минимума и максимума удаления планеты от Солнца, которые, соответственно, называются *перигеем* и *апогеем*. Легко проверить, хотя это и так очевидно, что только в этих двух точках вектор скорости планеты перпендикулярен ее радиус-вектору (рис. 37). Значит, в данных точках справедливы простые соотношения для момента импульса:

$$L = mv_a r_a = mv_p r_p. \quad (5.10)$$

При движении планеты под действием силы тяготения сохраняется ее полная механическая энергия E . В частности, в точках перигея и апогея

$$E = \frac{mv_a^2}{2} - \frac{GMm}{r_a} = \frac{mv_p^2}{2} - \frac{GMm}{r_p} = \text{const}.$$

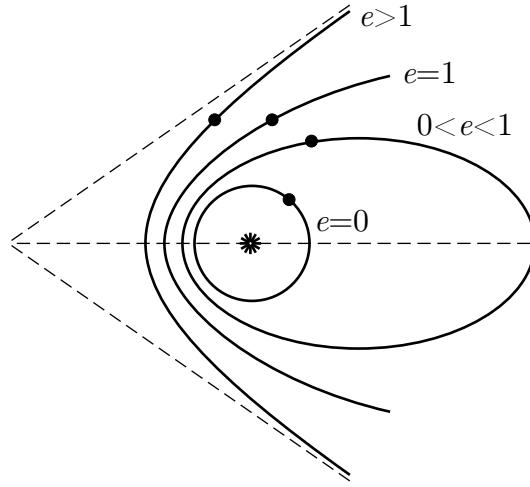


Рис. 36. Возможные орбиты при движении в поле силы тяготения

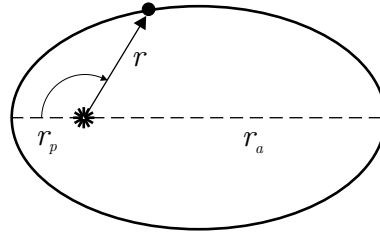


Рис. 37. Эллиптическая орбита

Поскольку в силу (5.10) $v_a = L/mr_a$, $v_p = L/mr_p$, последнее уравнение можно переписать только для координат планеты r_a и r_p :

$$E = \frac{L^2}{2mr_a^2} - \frac{GMm}{r_a} = \frac{L^2}{2mr_p^2} - \frac{GMm}{r_p}.$$

Умножая его на $2m$, выделим в средней и правой частях полный квадрат, добавив слагаемое $(GMm^2/L)^2$ во все три части уравнения:

$$\begin{aligned} 2mE + \left(\frac{GMm^2}{L}\right)^2 &= \left(\frac{L}{r_a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{L}{r_a} \cdot \frac{GMm^2}{L} + \left(\frac{GMm^2}{L}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{L}{r_p}\right)^2 - 2 \cdot \frac{L}{r_p} \cdot \frac{GMm^2}{L} + \left(\frac{GMm^2}{L}\right)^2, \end{aligned}$$

т.е.

$$2mE + \left(\frac{GMm^2}{L}\right)^2 = \left(\frac{L}{r_a} - \frac{GMm^2}{L}\right)^2 = \left(\frac{L}{r_p} - \frac{GMm^2}{L}\right)^2. \quad (5.11)$$

Второе равенство может выполняться, только если

$$\left(\frac{L}{r_a} - \frac{GMm^2}{L}\right) = -\left(\frac{L}{r_p} - \frac{GMm^2}{L}\right);$$

решение $r_a = r_p$, при котором в правой части стоит знак “+”, является тривиальным и соответствует просто движению по окружности. Подставляя в последнее уравнение выражения (5.8) и (5.9) для r_p и r_a , получим

$$\frac{L}{p} \cdot [1 - e + 1 + e] \equiv \frac{2L}{p} = \frac{2GMm^2}{L},$$

откуда

$$p = \frac{L^2}{GMm^2}. \quad (5.12)$$

Данное соотношение мы уже получили раньше, когда определяли параметр p . Таким образом, правая часть уравнения (5.11) не дает ничего, кроме подтверждения правильности всех предыдущих рассуждений. А что получается из левой части (5.11)? Записывая равенство

$$\left(\frac{L}{r_p} - \frac{GMm^2}{L} \right)^2 = 2mE + \left(\frac{GMm^2}{L} \right)^2,$$

извлечем из него корень:

$$\frac{L}{r_p} - \frac{GMm^2}{L} = +\sqrt{2mE + \left(\frac{GMm^2}{L} \right)^2}.$$

В случае с r_a перед корнем нужно было бы взять знак “−”, поскольку должно быть $r_a > r_p$. Для r_p получим следующее представление:

$$r_p = \frac{L}{\frac{GMm^2}{L} + \sqrt{2mE + \left(\frac{GMm^2}{L} \right)^2}} = \frac{p}{1 + \sqrt{1 + 2mE \cdot \left(\frac{L}{GMm^2} \right)^2}}.$$

Сравнивая данное выражение с (5.8), найдем значение постоянной e :

$$e = \sqrt{1 + 2mE \cdot \left(\frac{L}{GMm^2} \right)^2}. \quad (5.13)$$

Для константы A имеем:

$$A = \frac{GMm^2}{L} \cdot |e| = \sqrt{2mE + \left(\frac{GMm^2}{L} \right)^2}.$$

Мы доказали, что эксцентриситет эллиптической орбиты определяется энергией E и моментом импульса L планеты на данной орбите. Иными словами, конкретным значениям E и L соответствует вполне определенная (единственная) орбита, параметры которой определяются формулами (5.12) и (5.13).

Из (5.13) вытекает, что при движении по окружности ($e = 0$) выполняется условие

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{GMm^2}{L} \right)^2 = \left\{ \text{на окружности } r \equiv p = \frac{L^2}{GMm^2} \right\} = \\ &= -\frac{L^2}{2mp^2} = -\frac{(mvp)^2}{2mp^2} = -\frac{mv^2}{2}, \end{aligned}$$

которое вы наверняка получали раньше исходя из более простых соображений. Движение по эллиптической (т.е. по ограниченной) орбите с заданным моментом импульса L соответствует значениям полной энергии, определенным из неравенства

$$-\frac{1}{2m} \left(\frac{GMm^2}{L} \right)^2 < E < 0,$$

что следует непосредственно из (5.13) при наложении условия $0 < e < 1$. При $E = 0$ из (5.13) получается $e = 1$, т.е. имеет место неограниченное движение по параболе. Если же $E > 0$, то планета движется по гиперболе с $e > 1$.

Итак, ограниченное движение возможно только при $E < 0$. Мы теоретически получили законы, установленные Кеплером экспериментально – не здорово ли это?! Представляете, насколько был счастлив Ньютон, когда он пришел к тем же результатам. Что касается III-го закона Кеплера, то вы без труда сможете его вывести, если рассмотрите движение планеты во все тех же перигее (p) и апогее (a); нужно будет, однако, еще ввести понятие большой полуоси эллипса и вспомнить, чему равна его площадь. Сейчас мы не будем тратить на это время. А для торжественного завершения продолжительного рассказа о Кеплеровом движении посмотрим, как найти исходные функции $\varphi(t)$ и $r(t)$, характеризующие изменение положения планеты со временем. Понятно, что нам достаточно теперь найти одну из них, к примеру $\varphi(t)$; подставив ее в уравнение траектории

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi(t))},$$

мы получим вторую неизвестную функцию $r(t)$. Последнюю можно также определить из соотношения $r^2 = L/m\dot{\varphi}$, отражающего закон сохранения момента импульса. Так как же найти зависимость $\varphi(t)$? Если во второе уравнение системы (5.4) подставить $r(\varphi)$, получится дифференциальное уравнение для функции $\varphi(t)$:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left[\frac{e \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right] \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 0.$$

Решение данного нелинейного уравнения не выражается через знакомые нам “элементарные” функции вроде $f(t) = at + b$, t^2 , $\sin(\omega t)$, $\exp(t/\tau)$, $\ln(t/\tau)$ и т.п.; $\varphi(t)$ сводится к так называемой *эллиптической функции*, и ее определение для вашего уровня знаний пока не по силам.⁴⁸⁾ Качественный вид данной функции для случая $0 < e < 1$ показан на рис. 38; при $e \rightarrow 0$ она переходит в прямую $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$, где ω – угловая скорость движения по окружности. Если же $e \geq 1$, то $\varphi(t)$ выглядит совсем иначе (см. рис. 39; предельный угол $\varphi_{\max} \leq \pi$). Функция $r(t)$ в случае движения по эллиптической орбите имеет вид деформированной синусоиды: “вершины” у нее растянуты, а “впадины” сжаты (рис. 38).

Ситуация, когда уравнение для функции $\varphi(t)$ оказывается неразрешимым в известных нам элементарных функциях, лишний раз свидетельствует о многообразии

⁴⁸⁾ Эллиптические функции возникают также в задаче о скатывании шарика с поверхности цилиндра, упомянутой в главе 1 (см. пример 1.1).

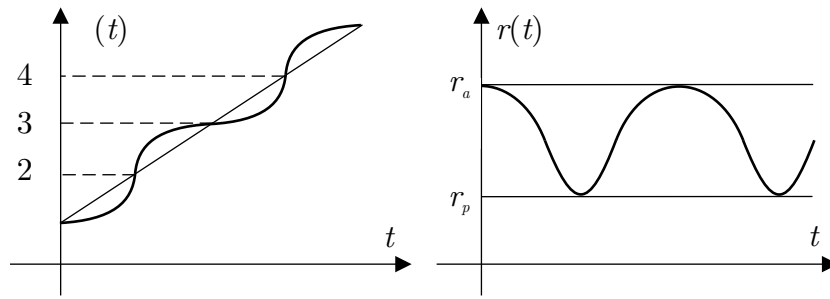


Рис. 38. Функции $\varphi(t)$ и $r(t)$ при движении по эллиптической орбите (в момент $t = 0$ планета находится в апогее)

природных явлений, и напоминает неразрешимость некоторых алгебраических уравнений в радикалах. Ничего страшного, поверьте, в этом нет. Напротив, если бы все в окружающем мире описывалось экспонентами и синусоидами, было бы не так интересно жить. На такой оптимистической ноте перейдем к следующей задаче.

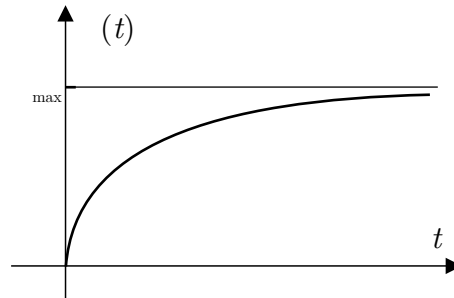


Рис. 39. Зависимость угловой координаты от времени при $e \geq 1$

Задача 5.2. Форма мениска у жидкости.

Мы с вами прекрасно знаем, что смачивающая стенку жидкость стремится на нее “вскарабкаться”. Интересно было бы найти, какую форму имеет образованная жидкостью горка (мениск).

Определим систему координат: за $y = 0$ примем уровень воды в сосуде, а за $x = 0$ – стенку (рис. 40). Нам нужно найти форму поверхности мениска, описываемую функцией $y(x)$. Рассмотрим для этого равновесие столбика жидкости высотой h и толщиной dx (рис. 40). Давление в нижней части треугольного элемента с основанием dx и высотой $\operatorname{tg} \alpha dx = -y' dx$ равно $p(h) = p_a - \rho g h$, где p_a – атмосферное давление (на поверхности воды в сосуде), ρ – плотность жидкости, $y' = dy/dx$ – производная от искомой функции $y(x)$. Возникает вопрос: что удерживает наш столбик выше уровня воды в сосуде? Очевидно, поверхностное натяжение жидкости.

Механизм очень прост: на выпуклой вниз поверхности жидкости образуется избыточное давление по направлению к атмосфере. Оно и компенсирует вес столбика жидкости, не давая ему опуститься. Давление под выпуклой вниз поверхностью

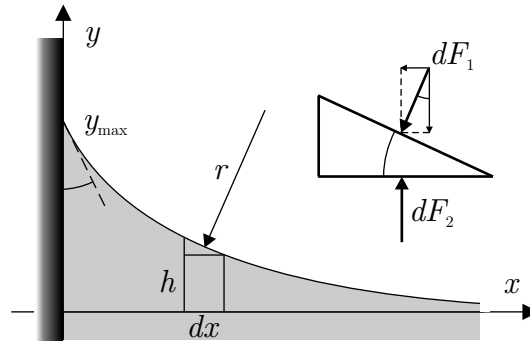


Рис. 40. К определению формы мениска у жидкости

жидкости на величину $\Delta p = \sigma/r$ меньше, чем атмосферное давление снаружи; здесь r – местный радиус кривизны мениска.⁴⁹⁾ Оказывается, что этот радиус кривизны однозначно определяется искомой формой поверхности $y(x)$:

$$r = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y''}.$$

Теперь мы можем записать условие равновесия нашего треугольного элемента в вертикальном направлении. К наклонной грани (перпендикулярно ее поверхности) приложена сила

$$dF_1 = \left(p_a - \frac{\sigma}{r}\right) \frac{dx}{\cos \alpha},$$

а к нижней – сила

$$dF_2 = (p_a - g\rho h) dx.$$

Заметим, что в вертикальном направлении действует проекция $dF_1 \cos \alpha$ силы dF_1 (рис. 40). Кроме того, в выражении для dF_2 имеет смысл заменить h на $y(x)$, поскольку собственной высотой треугольного элемента можно пренебречь по сравнению с h . Приравнявая вертикальные проекции сил, получим дифференциальное уравнение для функции $y(x)$:

$$\left(p_a - \frac{\sigma y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}\right) = p_a - g\rho y.$$

Его можно переписать в более удобном виде:

$$y'' = \frac{g\rho}{\sigma} y (1 + (y')^2)^{3/2}. \quad (5.14)$$

Условие равновесия нашего треугольного элемента в горизонтальном направлении выполняется автоматически, если справедливо полученное уравнение (рекомендую вам самим убедиться в этом). Итак, для нахождения формы мениска $y(x)$ достаточно решить уравнение (5.14). Оно является нелинейным, что существенно усложняет

⁴⁹⁾ В направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, радиус кривизны равен бесконечности.

процедуру решения. К счастью, в данном случае удастся довести решение до конца, выразив $y(x)$ через известные функции, однако такое везение бывает далеко не всегда.

Один из основных путей решения дифференциальных уравнений состоит в замене независимой переменной и искомой функции. Иногда это позволяет заметно упростить уравнение (например, избавиться от нелинейности или понизить порядок). Вспомним предыдущую задачу: при решении уравнений, описывающих движение планет, мы перешли от переменной t к переменной φ , и заменили функцию $r(\varphi)$ на $w(\varphi) = 1/r$. Что-то подобное нужно попытаться сделать и в данной задаче.

Заметим во-первых, что в уравнении (5.14) нигде в явном виде не содержится сама переменная x : имеется только функция $y(x)$ и ее производные. В подобной ситуации в качестве новой независимой переменной целесообразно взять саму функцию y , а в качестве новой функции $u(y)$ – производную $y'(x)$, которую с помощью обратной зависимости $x(y)$ можно представить как функцию от y . Тем самым мы понизим порядок уравнения. Действительно,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx}(u) = \frac{d}{dy}(u) \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy},$$

и вместо второй производной мы получим первую, а наше уравнение примет вид

$$u \frac{du}{dy} = \frac{g\rho}{\sigma} y (1 + u^2)^{3/2}.$$

В этом уравнении первого порядка мы с легкостью можем разделить переменные:

$$\frac{u du}{(1 + u^2)^{3/2}} = \frac{g\rho}{\sigma} y dy.$$

Проинтегрируем данное соотношение от $y = 0$ до произвольной высоты y в пределах мениска. Учтем, что при $y \rightarrow 0$ (поверхность жидкости в сосуде) $u = y' \rightarrow 0$, т.е. мениск “стелется” по поверхности жидкости (рис. 40); интегрирование левой части нужно, таким образом, производить в пределах от $u = 0$ до $u = u(y)$. Поскольку

$$u du = \frac{1}{2} d(u^2), \quad y dy = \frac{1}{2} d(y^2),$$

получим:

$$\int_0^{u(y)} \frac{d(u^2)}{(1 + u^2)^{3/2}} = \frac{g\rho}{\sigma} \int_0^y d(y^2) = \frac{g\rho y^2}{\sigma}.$$

Интеграл в левой части легко берется заменой $v = 1 + u^2$, $dv = d(u^2)$:

$$\int_1^{1+u^2(y)} \frac{dv}{v^{3/2}} = \left\{ \frac{d}{dv}(v^{-1/2}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{v^{3/2}} \right\} = -2 \int_1^{1+u^2(y)} d\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right) = 2 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + u^2(y)}} \right].$$

В результате для функции $u(y)$ имеем алгебраическое уравнение:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1 + u^2(y)}} = \frac{g\rho}{2\sigma} y^2. \quad (5.15)$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать величину

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\sigma}{g\rho}};$$

она обладает размерностью длины и носит название *капиллярной постоянной*. Физический смысл капиллярной постоянной станет ясен чуть позже. Из (5.15) несложно выразить $u(y)$:

$$u \equiv \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{1}{[1 - (y/\lambda)^2]^2} - 1}. \quad (5.16)$$

Знак “—” перед корнем в (5.16) соответствует отрицательному наклону поверхности мениска в выбранной системе координат.

Легко видеть, что выражение (5.16) по сути дела образует новое дифференциальное уравнение, решением которого является искомая функция $y(x)$. В отличие от исходного уравнения (5.14), оно имеет всего-навсего первый порядок. Чтобы подступиться к его решению заметим, что, исходя из здравого смысла, производная u может принимать значения $-\infty \leq u \leq 0$, и в силу (5.15) для всех y в пределах поверхности мениска выполняется неравенство

$$0 \leq \left(\frac{y}{\lambda}\right)^2 \leq 1.$$

Поэтому от функции $y(x)$ целесообразно перейти к новой функции $w(x)$ в соответствии с определением

$$\sqrt{2} \sin(w) = y/\lambda, \quad dy = \lambda\sqrt{2} \cos(w) dw. \quad (5.17)$$

С увеличением y функция w монотонно возрастает от нуля (при $y = 0$), и теоретически способна достигнуть значения $w = \pi/4$, когда $y = \lambda$.⁵⁰⁾ Ниже мы покажем, что подъем мениска на высоту λ имеет место при абсолютной смачиваемости стенки жидкостью.

Замена (5.17) хороша тем, что позволяет существенно упростить правую часть уравнения (5.16). Благодаря $\sqrt{2}$ мы можем в знаменателе перейти к двойному углу:

$$1 - (y/\lambda)^2 = 1 - 2 \sin^2(w) = \cos(2w).$$

Уравнение (5.16), таким образом, примет вид:

$$\lambda\sqrt{2} \cos(w) \frac{dw}{dx} = -\sqrt{\frac{\sin^2(2w)}{\cos^2(2w)}}.$$

Так как w изменяется в пределах $0 \leq w \leq \pi/4$, $\cos(2w)$ является неотрицательной величиной; данное обстоятельство существенно при извлечении корня из $\cos^2(2w)$ в

⁵⁰⁾Разумеется, подъем на максимальную высоту достигается у стенки сосуда ($x = 0$).

знаменателе. Приводя $\sin(2w)$ и $\cos(2w)$ обратно к одинарному аргументу w и разделяя переменные, окончательно получим следующее уравнение:

$$\frac{1 - 2 \sin^2(w)}{\sin(w)} dw = -\frac{\sqrt{2}}{\lambda} dx. \quad (5.18)$$

Чтобы его решить, нужно вычислить интегралы вида

$$\int \frac{dw}{\sin(w)} \quad \text{и} \quad \int \sin(w) dw.$$

Второй интеграл берется элементарно, а в первом нужно сделать хитрую замену. Положив $F = \operatorname{tg}(w/2)$, нетрудно найти, что

$$\sin(w) = \frac{2F}{1+F^2}, \quad dw = \frac{2dF}{1+F^2},$$

и интеграл первого типа легко вычисляется:

$$\int \frac{dw}{\sin(w)} = \int \frac{dF}{F} = \ln F = \ln [\operatorname{tg}(w/2)].$$

Теперь разберемся с пределами интегрирования в (5.18). Обозначим посредством y_{\max} высоту мениска у стенки, т.е. $y_{\max} = y(0)$. По x будем интегрировать от 0 до произвольного значения x ; при этом y , очевидно, будет меняться от y_{\max} до $y(x) < y_{\max}$ (рис. 40). В силу монотонности замены (5.17) w будет меняться от w_{\max} до некоторого $w(x) < w_{\max}$. Итак, после интегрирования уравнения (5.18) в указанных пределах получим:

$$\ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{w(x)}{2} \right) \right] - \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{w_{\max}}{2} \right) \right] + 2[\cos(w(x)) - \cos(w_{\max})] = -\frac{\sqrt{2}}{\lambda} x. \quad (5.19)$$

Если выразить w через y в соответствии с (5.17), мы найдем форму мениска, которая явным образом представима в виде обратной функции $x(y)$:

$$\begin{aligned} x(y) = & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \ln \left[\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{y_{\max}}{\lambda\sqrt{2}} \right\} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{y}{\lambda\sqrt{2}} \right\} \right)} \right] + \\ & + \lambda\sqrt{2} \left[\cos \left(\arcsin \left\{ \frac{y_{\max}}{\lambda\sqrt{2}} \right\} \right) - \cos \left(\arcsin \left\{ \frac{y}{\lambda\sqrt{2}} \right\} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Чему равна высота подъема мениска у стенки y_{\max} (рис. 40)? Она, очевидно, зависит от *смачиваемости* стенки жидкостью, характеризуемой значением *краевого угла* $\theta \geq 0$ (при $\theta = 0$ смачиваемость *абсолютная*). Угол θ определяет нам значение производной dy/dx при $x = 0$, т.е. на стенке сосуда:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = -\theta.$$

С другой стороны, в силу уравнения (5.16)

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -\sqrt{\frac{1}{[1 - (y_{\max}/\lambda)^2]^2} - 1}.$$

В результате

$$\frac{1}{[1 - (y_{\max}/\lambda)]^2} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta},$$

откуда

$$y_{\max} = \lambda \sqrt{1 - \sin \theta}. \quad (5.21)$$

Формула (5.21) дает связь высоты мениска у стенки с краевым углом. Капиллярная постоянная $\lambda = \sqrt{2\sigma/g\rho}$, таким образом, определяет характерную высоту подъема жидкости по стенке сосуда.

Попытаемся упростить выражение (5.20). Вспомним, что в силу (5.17)

$$\sin(w) = \frac{y}{\lambda\sqrt{2}}, \quad \cos(w) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{2\lambda^2}}. \quad (5.22)$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}(w) = \frac{2 \operatorname{tg}(w/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(w/2)},$$

то $\operatorname{tg}(w/2)$ выражается через $\operatorname{tg}(w)$ следующим образом:

$$\operatorname{tg}(w/2) = -1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}(w)}.$$

Какой знак следует выбрать? При $w = 0$, очевидно, $\operatorname{tg}(w/2) = \operatorname{tg}(w) = 0$, и для выполнения этого условия нужно выбрать “+”. Выражая $\operatorname{tg}(w)$ из (5.22), получим:

$$\operatorname{tg}(w/2) = -1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2(\lambda/y)^2 - 1}}},$$

$$\operatorname{tg}(w_{\max}/2) = -1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{1 - \sin \theta} - 1}}} = -1 + \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}}},$$

$$\cos(w_{\max}) = \sqrt{1 - \frac{(1 - \sin \theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sin \theta}{2}}.$$

Подставляя все в (5.19), мы найдем еще одно представление для функции $x(y)$:

$$x(y) = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left[\ln \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}}}}{-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2(\lambda/y)^2 - 1}}}} \right) + 2 \left(\sqrt{\frac{1 + \sin \theta}{2}} - \sqrt{\frac{2(\lambda/y)^2 - 1}{2(\lambda/y)^2}} \right) \right] \quad (5.23)$$

О том, чтобы разрешить это уравнение относительно y и получить зависимость $y(x)$, не может быть и речи. Тем не менее, нас вполне устраивает обратная функция $x(y)$; уже то, что удалось получить ее в явном виде, является несомненным достижением. Такое бывает далеко не всегда при решении физических задач.

Решение (5.23) обладает следующими свойствами. При $x = 0$

$$y(0) = y_{\max} = \lambda \sqrt{1 - \sin \theta}.$$

К примеру, когда $\theta = 0$ (абсолютная смачиваемость), $y_{\max} = \lambda$ есть максимально возможная высота подъема жидкости по стенке большого (по сравнению с λ) сосуда. Если же $y \rightarrow 0$, то в соответствии с (5.23) $x \rightarrow \infty$ по логарифмическому закону:

$$x(y) \sim -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{y}{\lambda} \right);$$

обратная зависимость в этом случае имеет вид

$$y(x) \sim \lambda \exp \left(-x\sqrt{2}/\lambda \right).$$

При остальных $x \in (0, \infty)$ функция $x(y)$ монотонна, т.к. $dx/dy < 0$ (см. (5.16)). Характерный размер мениска в направлении x тоже равен λ , а площадь под графиком функции $y(x)$ пропорциональна λ^2 .

Задача 5.3. Траектория волка.

Известно, что волк, преследуя жертву, всегда ориентирует свой бег на нее. Иными словами, вектор скорости волка все время направлен на жертву, и при ее перемещении изменяет свое направление. Этого, разумеется, не происходит, когда волк и жертва двигаются по одной прямой. Однако нам интересен другой случай: волк замечает цель, перемещающуюся по прямой с постоянной скоростью u , когда она оказывается на минимальном от него расстоянии h (рис. 41), и начинает бежать со скоростью v , все время держа направление на эту цель. Задача состоит в том, чтобы найти траекторию движения волка, время, за которое он настигнет жертву, и соотношение скоростей u и v , при котором волк жертву не догонит.

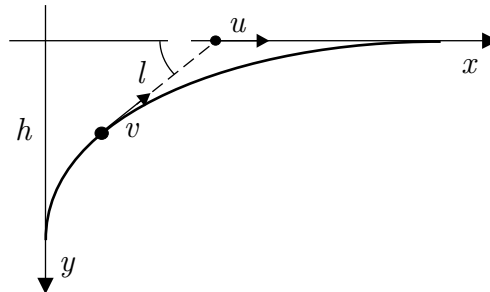


Рис. 41. Траектория волка

Определим систему координат (x, y) так, чтобы жертва двигалась вдоль оси x . За $x = 0, y = 0$ примем начальное положение жертвы (в момент $t = 0$); положение волка в этот момент соответствует значениям координат $x = 0, y = h$ (рис. 41). Рассмотрим произвольный момент времени $t > 0$. Пусть расстояние между волком и жертвой (вдоль соединяющей их прямой) в этот момент равно $l(t)$, а угол наклона траектории волка по отношению к оси x составляет $\theta(t)$ (рис. 41). Описать движение волка – значит найти зависимости $l(t)$ и $\theta(t)$, по которым нетрудно восстановить его траекторию $y(x)$ в выбранной системе координат. Как получить указанные функции? Нужно вывести для них дифференциальные уравнения, что обычно делается путем рассмотрения бесконечно малых изменений, происходящих в системе.

Применимо к нашей задаче можно сказать, что за время dt жертва преодолит расстояние $u dt$, и расстояние между ней и волком станет равным $l + dl$ ($dl < 0$, если волк догоняет жертву), а угол наклона траектории волка изменится на $d\theta$ (очевидно, $d\theta < 0$). Волк за время dt продвигается по своей траектории на расстояние $ds = v dt$; в силу бесконечной малости dt участок ds можно считать прямой линией, так что отрезки l , $u dt$ и $l + dl + ds$ образуют треугольник (рис. 42). Кроме того, так как dl и $d\theta$ – тоже бесконечно малые величины, в этом треугольнике $BD \perp AC$ и справедливы соотношения

$$l = AB \approx AD, \quad AC = AD + DC, \quad DC = DC \cos(\theta + d\theta).$$

Подставляя сюда длины указанных отрезков, выраженные через наши переменные

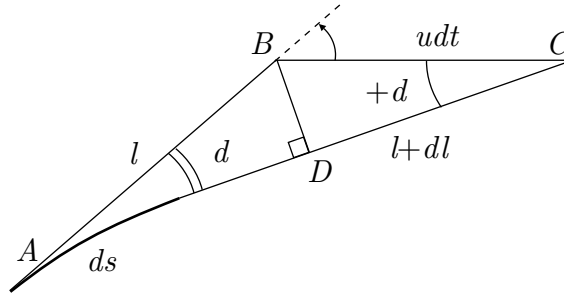


Рис. 42. К выводу дифференциальных уравнений движения волка

(l , s и т.п.) получим уравнение

$$l + dl + ds - u dt \cos(\theta + d\theta) = l.$$

С учетом $ds = v dt$ имеем:

$$\frac{dl}{dt} = u \cos \theta - v. \quad (5.24)$$

Если $u < v$, то $dl/dt < 0$ для любых значений θ , и волк догонит жертву. Однако одного уравнения (5.24) недостаточно для полного описания движения волка; нам ведь нужно найти две функции – $l(t)$ и $\theta(t)$. Второе уравнение получается из того же треугольника (см. рис. 42). Поскольку

$$AB \sin(-d\theta) = BC \sin(\theta + d\theta),$$

то искомое уравнение есть

$$l \frac{d\theta}{dt} = -u \sin \theta.$$

Система уравнений

$$\begin{cases} \dot{l} = u \cos \theta - v \\ l \dot{\theta} = -u \sin \theta \end{cases} \quad (5.25)$$

в принципе позволяет найти функции $l(t)$ и $\theta(t)$, однако тут нас снова ждет разочарование. Оказывается, что зависимости $l(t)$ и $\theta(t)$ не выражаются через стандартные (элементарные) функции; несмотря на кажущуюся простоту уравнений (5.25) путь их решения не так уж очевиден. И в подобной ситуации опять возникает идея, уже использовавшаяся нами при решении уравнений кеплерова движения: что, если исключить из уравнений переменную t и найти зависимость одной функции от другой, т.е. $l(\theta)$? В данном случае сделать это совсем просто – достаточно поделить одно уравнение на другое. Так как

$$\frac{dl}{dt} \bigg/ \frac{d\theta}{dt} = \frac{dl}{d\theta},$$

то после деления мы приходим к уравнению

$$\frac{dl}{l d\theta} = \frac{v - u \cos \theta}{u \sin \theta};$$

оно интегрируется простым разделением переменных. Будем производить интегрирование от $t = 0$ до произвольного момента t . При $t = 0$ в силу начальных условий $\theta = \pi/2$ и $l = h$, и пределы интегрирования выглядят следующим образом:

$$\int_h^{l(\theta)} \frac{dl}{l} = \frac{v}{u} \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin \theta} - \int_{\pi/2}^{\theta} \operatorname{ctg} \theta d\theta.$$

По аналогии с тем, как это было сделано в предыдущей задаче, первый интеграл в правой части заменой $\xi = \operatorname{tg}(\theta/2)$ сводится к

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\xi} = \ln(\xi) - \ln(\xi_0) = \ln [\operatorname{tg} (\theta/2)] - \ln [\operatorname{tg} (\pi/4)] \equiv \ln [\operatorname{tg} (\theta/2)].$$

Второй интеграл равен $\ln [\sin \theta]$. В результате мы получаем соотношение

$$\ln \left[\frac{l(\theta)}{h} \right] = \frac{v}{u} \ln [\operatorname{tg} (\theta/2)] - \ln [\sin \theta],$$

из которого вытекает решение для $l(\theta)$:

$$l(\theta) \cdot \sin \theta = h [\operatorname{tg} (\theta/2)]^{v/u}. \quad (5.26)$$

Но как из этого решения получить интегрирующую нас форму траектории $y(x)$ (или $x(y)$)? Давайте сначала подставим функцию $l(\theta)$ во второе уравнение системы (5.25), чтобы получить дифференциальное уравнение для функции $\theta(t)$:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{u \sin^2 \theta}{h[\operatorname{tg}(\theta/2)]^{v/u}}.$$

Мы можем разделить переменные и проинтегрировать данное соотношение от $t = 0$ до произвольного момента t :

$$\int_{\pi/2}^{\theta(t)} \frac{[\operatorname{tg}(\theta/2)]^{v/u}}{\sin^2 \theta} d\theta = -\frac{u}{h} \int_0^t dt = -\frac{ut}{h}.$$

Интеграл в левой части берется все той же заменой $\xi = \operatorname{tg}(\theta/2)$, после выполнения которой он сводится к

$$\begin{aligned} \int_1^{(\theta/2)} \left(\frac{\xi^{(v/u)} + \xi^{(v/u)-2}}{2} \right) d\xi &= \frac{1}{2} \left[\frac{\xi^{(v/u)+1}}{(v/u)+1} + \frac{\xi^{(v/u)-1}}{(v/u)-1} \right] \Big|_1^{(\theta/2)} = \\ &= \frac{u}{2} \left[\left[\frac{\xi^{(v/u)+1}}{v+u} + \frac{\xi^{(v/u)-1}}{v-u} \right] \Big|_{\xi=\operatorname{tg}(\theta/2)} - \frac{2v}{v^2-u^2} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, мы установили в явном виде обратную зависимость $t(\theta)$:

$$\frac{t(\theta)}{h} = \frac{v}{v^2-u^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{[\operatorname{tg}(\theta/2)]^{\frac{v+u}{u}}}{v+u} + \frac{[\operatorname{tg}(\theta/2)]^{\frac{v-u}{u}}}{v-u} \right]. \quad (5.27)$$

Данное выражение имеет смысл еще немножко преобразовать. Поскольку в силу (5.26) справедливы тождества

$$[\operatorname{tg}(\theta/2)]^{\frac{v+u}{u}} = \frac{2l}{h} \cos^2(\theta/2), \quad [\operatorname{tg}(\theta/2)]^{\frac{v-u}{u}} = \frac{2l}{h} \sin^2(\theta/2),$$

зависимость (5.27) приводится к виду

$$vh - t(\theta)(v^2 - u^2) = l(\theta)[v + u \cos \theta]. \quad (5.28)$$

Из (5.27) (как, впрочем, и из (5.28)) легко определить время преследования t_* . На основании (5.26) можно сделать вывод, что при $l \rightarrow 0$ (когда волк нагоняет жертву) угол $\theta \rightarrow 0$, если только $v/u > 1$.⁵¹⁾ Значит

$$t_* = \frac{vh}{v^2 - u^2};$$

⁵¹⁾ Условие $\theta \rightarrow 0$ означает, что траектория “стелется” вдоль оси x .

чем больше v по сравнению с u , тем меньше это время. Длина пути, пройденного волком за время t_* , т.е. длина искомой траектории, составляет

$$s_{\max} = vt_* = h \left(\frac{v^2}{v^2 - u^2} \right).$$

Теперь попробуем найти уравнение траектории волка в декартовых координатах (x, y) , т.е. функцию $y(x)$ (или $x(y)$). В момент времени t координаты волка равны, соответственно, $x = ut - l \cos \theta$, $y = l \sin \theta$. Если подставить в выражение для x связь $t(\theta)$ из (5.28) и выполнить ряд увлекательных преобразований, то удастся в правой части сформировать комбинации $l \sin \theta / h \equiv y/h$. В результате мы получим искомую функцию $x(y)$, однако все это довольно сложно. Куда проще другой путь, который основан на использовании вспомогательного дифференциального уравнения. Так как в силу (5.26) $y = l \sin \theta = h (\operatorname{tg}(\theta/2))^{v/u}$, то

$$\xi = \operatorname{tg}(\theta/2) = (y/h)^{u/v}.$$

Для $\operatorname{tg} \theta$ находим:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)} = \frac{2\xi}{1 - \xi^2}.$$

Но при этом $\operatorname{tg} \theta = -dy/dx$, что следует из геометрических свойств касательной к траектории (рис. 41). Таким образом, мы приходим к дифференциальному уравнению для искомой функции $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(y/h)^{u/v}}{(y/h)^{2u/v} - 1}.$$

После разделения переменных и интегрирования имеем:

$$x(y) = \frac{uvh}{v^2 - u^2} - \frac{vh}{2} \left[\frac{(y/h)^{\frac{v-u}{v}}}{v - u} - \frac{(y/h)^{\frac{v+u}{v}}}{v + u} \right].$$

Обратную функцию $y(x)$, как и в предыдущей задаче, получить не удастся. Когда y обращается в ноль, $x = x_{\max} = uvh/(v^2 - u^2) = ut_*$; это есть максимальное расстояние, которое преодолевает жертва.

Нетрудно убедиться, что зависимости $x(t)$ и $y(t)$ тоже не выражаются через элементарные функции. Мы вновь приходим к ситуации, когда физические явления оказываются гораздо богаче нашего математического языка. Математика позволяет написать дифференциальные уравнения едва ли ни для всех природных явлений – на данном этапе трудностей особых нет, поскольку подобные уравнения являются отражением каких-то общих физических законов (например, законов сохранения). Но вот решить эти уравнения в виде элементарных функций удастся далеко не всегда; более того, почти никогда.

Как правило, решение дифференциального уравнения описывается некой *специальной функцией*, т.е. функцией, которая не выражается через элементарные функции. На сегодняшний день в математике исследовано около 1000 (!) специальных

функций – а ведь подавляющее большинство из них описывают физические процессы. Однако довольно часто встречаются ситуации, когда и этих специальных функций не хватает. Пусть, к примеру, зависимость $y(x)$ неявно задается трансцендентным уравнением

$$\sqrt{y} + \sin y + \ln y = x;$$

сумеете ли вы разрешить его относительно y ? Сомневаюсь, что у вас получится определить специальную функцию $y(x)$ (или найти подходящую среди 1000 уже исследованных функций), которая являлась бы решением данного уравнения. И ничего страшного в этом нет – наоборот, это скорее радует и восхищает; мы не перестаем удивляться, насколько наш мир красив и многообразен. Гораздо страшнее, поверьте мне, жизненная драма охоты одних живых существ на других, положенная в основу данной задачи. . . Ну а если нам все-таки “кровь из носа” нужно будет найти $y(x)$ из уравнения $\sqrt{y} + \sin y + \ln y = x$, то к нашим услугам компьютер – с его помощью мы с хорошей точностью построим решение в любой допустимой точке x . При желании, вычисляя y во множестве точек с некоторым шагом Δx , можно провести через них непрерывную кривую $y_N(x)$ (например полином). Такая кривая будет очень неплохо аппроксимировать истинное решение $y(x)$. Выход найдется всегда.

Задача 5.4. Форма провисающей веревки.

Мы немного коснулись данной задачи в главе 2,⁵²⁾ и теперь сможем довести решение до конца. Сформулируем еще раз условие: в поле тяжести висит однородная нерастяжимая веревка массой m и длиной L , конец A которой подвешен на высоте h ниже конца B (рис. 43). Расстояние между точками A и B по горизонтали составляет l . Требуется найти форму веревки.

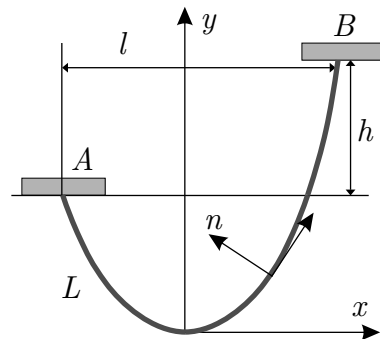


Рис. 43. Вережка в поле силы тяжести

Определим декартову систему координат (x, y) с центром в нижней точке веревки. Левую часть веревки можно отдельно не рассматривать, поскольку она симметрична относительно вертикали вплоть до уровня точки A (рис. 43).⁵³⁾ Выделим

⁵²⁾ См. пример 2.3.

⁵³⁾ Симметрия веревки относительно вертикали, вообще говоря, требует обоснования. Когда мы рассматривали данную задачу в главе 2, такое обоснование было дано. Если вы не помните приведенные там рассуждения, попробуйте самостоятельно доказать симметрию, прежде чем заглядывать в соответствующий раздел пособия.

произвольный бесконечно малый элемент веревки длиной ds и запишем условия его равновесия под действием приложенных сил. В данном случае удобнее рассмотреть проекции сил тяжести и натяжения на касательное ($\vec{\tau}$) и нормальное (\vec{n}) направления (рис. 44). При этом учтем одно важное обстоятельство: несмотря на малую длину элемента ds направления действия сил натяжения на его концах (направления касательных) отличаются на бесконечно малый угол $d\alpha$. Именно благодаря тому, что $d\alpha \neq 0$ (т.е. из-за наличия кривизны у элемента) обеспечивается равновесие в направлении \vec{n} (рис. 44):

$$g\rho ds \cdot \cos \alpha = (T + dT) \sin(d\alpha) \approx T d\alpha.$$

Здесь мы ввели погонную плотность веревки $\rho = m/L$ (масса элемента dm равна

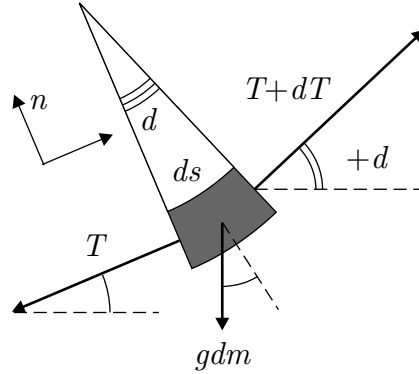


Рис. 44. Силы, действующие на элемент веревки

ρds), заменили \sin его аргументом и пренебрегли произведением $dT \cdot d\alpha$, которое имеет другой порядок малости (вспомним задачу с ракетой). Еще раз подчеркну, что в случае бесконечно малых ds , $d\alpha$, dT приближенное равенство можно с математической строгостью заменить на точное, что мы и будем делать в дальнейшем. Итак,

$$g\rho ds \cdot \cos \alpha = T d\alpha. \quad (5.29)$$

Теперь запишем условие равновесия элемента в направлении $\vec{\tau}$:

$$(T + dT) \cos(d\alpha) - T = g\rho ds \cdot \sin \alpha.$$

Так как $d\alpha \rightarrow 0$, то $\cos(d\alpha) = 1 - (d\alpha)^2/2 + \dots \rightarrow 1$, и последнее уравнение с математической строгостью можно переписать в следующем виде:

$$dT = g\rho ds \cdot \sin \alpha. \quad (5.30)$$

Дифференциальные уравнения (5.29) и (5.30) образуют систему, позволяющую определить функции $\alpha(y)$, $T(y)$, а также искомую форму веревки $y(x)$. Однако элементарного решения у данной системы явно не просматривается, поскольку в нее входит еще и элемент длины ds .

Начнем по порядку. Произведение $ds \cdot \sin \alpha$ в уравнении (5.30) в силу очевидных геометрических соображений есть просто разность высот dy между концами нашего элемента (рис. 44). В результате (5.30) сводится к

$$dT = g\rho dy.$$

Интегрирование этого уравнения дает зависимость силы натяжения в веревке от высоты y , отсчитываемой от нижней точки (в которой сила натяжения составляет T_0):

$$T(y) = T_0 + g\rho y. \quad (5.31)$$

Функция $T(y)$ аналогична той, что описывает рост давления воды в море по мере погружения. Подстановка $ds \cdot \sin \alpha = dy$ в формулу (5.29) приводит к уравнению

$$g\rho dy = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} T d\alpha \equiv -T \frac{d(\cos \alpha)}{\cos \alpha},$$

которое с учетом решения (5.31) для T приобретает вид

$$\frac{g\rho dy}{T_0 + g\rho y} = -\frac{d(\cos \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Интегрируя его в пределах от 0 до y (угол α при этом изменяется от 0 до $\alpha(y)$), получим:

$$\ln \left[\frac{T_0 + g\rho y}{T_0} \right] = -\ln \left[\frac{\cos \alpha(y)}{1} \right].$$

Отсюда мы находим зависимость угла наклона касательной к веревке от высоты $\alpha(y)$:

$$\cos \alpha(y) = \frac{T_0}{T(y)} = \frac{T_0}{T_0 + g\rho y}. \quad (5.32)$$

Но как определить форму веревки $y(x)$? Для этого придется немного вернуться назад и посмотреть внимательнее на уравнение (5.29). Думаю, для вас является очевидным следующий геометрический факт. К элементу ds всегда можно провести бесконечное количество касательных окружностей, но только одна из них, обладающая той же кривизной, что и ds , будет в точности повторять его форму (рис. 44). Радиус такой окружности r и называется радиусом кривизны элемента ds . В результате мы приходим к соотношению $ds = r d\alpha$, которое вытекает из свойств окружности и определения величины r .

Радиус кривизны каждого малого элемента веревки, естественно, связан с ее формой $y(x)$. Вполне понятно, что он должен тем или иным образом определяться производными от функции $y(x)$. Получить соответствующую формулу совсем несложно, однако сейчас мы просто приведем ее без доказательства (как и в задаче 5.2 этой главы); пусть она до поры до времени останется для вас окутанной ореолом таинственности:

$$r(x) = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y''}. \quad (5.33)$$

Штрихами здесь обозначены производные по переменной x . Смысл данного выражения читается из его структуры. Действительно, если вторая производная y'' мала, что означает плавное изменение угла наклона касательной к веревке, то кривизна веревки также мала и радиус кривизны велик. Числитель в (5.33) выступает просто в роли нормировочного коэффициента.

Теперь у нас есть все, чтобы вывести дифференциальное уравнение, описывающее форму веревки. Подставляя $ds = r d\alpha$ в соотношение (5.29) и используя решения (5.31) и (5.32) для функций $T(y)$, $\alpha(y)$, мы придем к соотношению

$$g\rho T_0 \cdot r = (T_0 + g\rho y)^2.$$

С учетом (5.33) получим искомое уравнение:

$$g\rho T_0 (1 + (y')^2)^{3/2} = (T_0 + g\rho y)^2 y''. \quad (5.34)$$

В данное уравнение явным образом не входит переменная x . Следовательно, мы можем в качестве новой независимой переменной взять саму функцию y , а под новой функцией от y понимать производную y' : $w(y) = y'$; это позволит понизить порядок уравнения. Поскольку

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} \frac{dy}{dx} = w \frac{dw}{dy} = \frac{1}{2} \frac{d(w^2)}{dy},$$

(5.34) приводится к виду

$$2g\rho T_0 (1 + w^2)^{3/2} = (T_0 + g\rho y)^2 \frac{d(w^2)}{dy}.$$

Подобное уравнение первого порядка (с первой производной) решается простым разделением переменных:

$$2g\rho T_0 \frac{dy}{(T_0 + g\rho y)^2} = \frac{d(w^2)}{(1 + w^2)^{3/2}}.$$

При интегрировании в пределах от 0 до произвольного y функция $w = y'$, очевидно, будет меняться от 0 до $w(y)$. В результате мы получим:

$$-2T_0 \left[\frac{1}{(T_0 + g\rho y)} - \frac{1}{T_0} \right] = -2 \left[\frac{1}{(1 + w^2)^{1/2}} - 1 \right]. \quad (5.35)$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать величину

$$\gamma = \frac{g\rho}{T_0},$$

имеющую размерность обратной длины; ее физический смысл станет ясен несколько позже. Выразим w^2 из (5.35):

$$w^2 = 2(\gamma y) + (\gamma y)^2.$$

Заметим, что $w = y' > 0$, так как с самого начала мы ограничились рассмотрением только правой части веревки (это можно делать в силу ее симметрии). Значит

$$w = \frac{dy}{dx} = +\sqrt{2(\gamma y) + (\gamma y)^2}. \quad (5.36)$$

Уравнение (5.36) записано уже для исходной функции $y(x)$ и ее производной по x ; оно имеет первый порядок и решается все тем же разделением переменных. При интегрировании, однако, возникает функция $\text{ch}(x)$, называемая *гиперболическим косинусом*. Хотя $\text{ch}(x)$ и относится к элементарным функциям, скорее всего она не встречалась вам раньше, и мне придется дать ее определение и перечислить элементарные свойства.

Гиперболические косинус и синус определяются следующим образом:

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad (5.37)$$

первая, очевидно, является четной, а вторая – нечетной. Графики их приведены на рис. 45. При больших абсолютных значениях x гиперболические функции выходят просто на экспоненту (с множителем $1/2$). Отметим также, что $\text{ch}(0) = 1$, а $\text{sh}(0) = 0$ (следует непосредственно из определения (5.37)). Гиперболические косинус и синус по структуре напоминают обычные косинус и синус:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

однако отсутствие в показателях экспоненты мнимой единицы $i = \sqrt{-1}$ делает поведение гиперболических функций совершенно не похожим на поведение обычных синуса и косинуса. Возводя каждую из функций (5.37) в квадрат и вычитая одну из другой, получим основное тождество

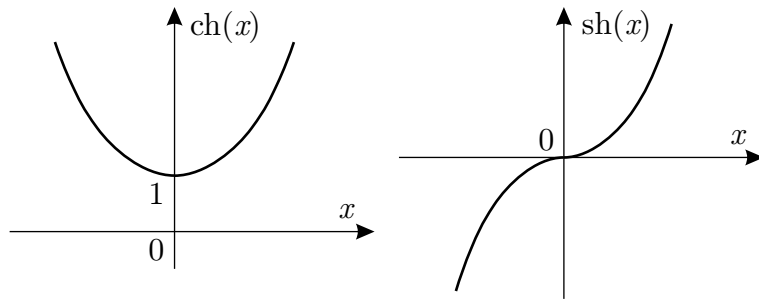


Рис. 45. Графики гиперболических косинуса и синуса

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1,$$

аналогичное тригонометрическому тождеству $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Простым взятием производной от экспонент в (5.37) легко установить правила дифференцирования гиперболических функций:

$$\frac{d(\text{ch } x)}{dx} = \text{sh } x, \quad \frac{d(\text{sh } x)}{dx} = \text{ch } x.$$

Этих сведений вполне достаточно, чтобы проинтегрировать уравнение (5.36). Представляя его в виде

$$\frac{dy}{\sqrt{(1+\gamma y)^2 - 1}} = dx, \quad (5.38)$$

введем новую переменную z следующим образом:

$$\operatorname{ch} z = 1 + \gamma y, \quad \operatorname{sh} z \cdot dz = \gamma dy. \quad (5.39)$$

Выберем из двух возможных значений z положительные; это позволяет после подстановки z в (5.38) устранить неопределенность при извлечении корня в знаменателе:

$$\frac{\operatorname{sh} z \cdot dz}{\operatorname{sh} z} = \gamma dx.$$

Мы приходим к элементарному уравнению $dz = \gamma dx$, решение которого есть $z(x) = \gamma x + C$. Поскольку в основании веревки $x = y = 0$, то в соответствии с (5.39) $z(0) = 0$, и константа $C = 0$. Искомая форма веревки, таким образом, описывается гиперболической функцией:

$$y(x) = \frac{1}{\gamma} [\operatorname{ch}(\gamma x) - 1]. \quad (5.40)$$

Отсюда видно, что величина $\lambda = 1/\gamma = T_0/g\rho$ определяет некоторый характерный масштаб в направлении обеих осей x и y . Если λ увеличить, например, вдвое (изменяя параметры T_0 и ρ), то веревка растянется в два раза как по оси x , так и по оси y , и ее пропорции не будут нарушены. Даже у сильно натянутой бельевой веревкой пропорции соответствуют “чистому” гиперболическому косинусу; просто величина λ в этом случае довольно большая (несколько десятков метров), и точки закрепления находятся практически у основания косинусоиды (5.40). Иными словами, высота точек закрепления H , отсчитываемая от основания, существенно меньше λ , и поэтому мы видим практически прямую веревку. Однако стоит нам отойти достаточно далеко и мысленно продолжить веревку до высоты порядка λ , как мы узнаем обычный (недеформированный) гиперболический косинус.

Теперь вспомним, какие данные приведены в условии задачи. В реальной жизни мы знаем, конечно же, не силу натяжения T_0 в нижней части веревки, а ее длину L , плотность $\rho = m/L$, а также расстояния между точками закрепления A и B по горизонтали (l) и по вертикали (h) (рис. 43). Именно эти четыре параметра даны в условии; величину же T_0 , входящую в постоянную γ в решении (5.40), можно выразить через них. Посмотрим, как это делается.

Получим зависимость $s(y)$ для расстояния, отсчитываемого вдоль веревки от самого низа до текущей высоты y . Такая зависимость уже была установлена нами в главе 2 из рассмотрения дискретной цепочки, однако сейчас мы выведем ее из дифференциальных уравнений. У нас уже есть соотношение (5.29), содержащее явным образом длину ds бесконечно малого элемента веревки. Подставляя в него решение (5.32) для $\cos \alpha$, найдем:

$$g\rho ds = \frac{T^2}{T_0} d\alpha; \quad (5.41)$$

зависимость силы натяжения T от y дается формулой (5.31). Осталось связать приращение $d\alpha$ с высотой dy нашего элемента, после чего можно будет проинтегрировать уравнение (5.41). Дифференцирование выражения (5.32) дает:

$$\sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{T_0}{T^2} g \rho dy.$$

Синус выражается через y посредством (5.32); у рассматриваемой части веревки $\alpha > 0$, и

$$\sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{T_0}{T} \sqrt{2\gamma y + (\gamma y)^2}.$$

Подставляя все в (5.41), получим:

$$ds = \frac{(1 + \gamma y)dy}{\sqrt{2\gamma y + (\gamma y)^2}}.$$

Так как

$$(1 + \gamma y)dy = \frac{1}{2\gamma} d(2\gamma y + (\gamma y)^2),$$

последнее уравнение легко интегрируется, и зависимость $s(y)$ имеет следующий вид:

$$s(y) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{2\gamma y + (\gamma y)^2}. \quad (5.42)$$

Формула (5.42) позволяет использовать заданную в условии длину веревки для определения T_0 . Обозначим координаты точек закрепления A и B посредством (x_A, y_A) и (x_B, y_B) . Тогда длина веревки L , очевидно, есть

$$L = s(y_A) + s(y_B) = \frac{1}{\gamma} \left[\sqrt{2(\gamma y_A) + (\gamma y_A)^2} + \sqrt{2(\gamma y_B) + (\gamma y_B)^2} \right] \quad (5.43)$$

(у веревки две симметричные относительно оси y части). Кроме того, согласно условиям закрепления координаты (x_A, y_A) и (x_B, y_B) связаны соотношениями

$$x_B - x_A = l, \quad y_B - y_A = h. \quad (5.44)$$

Наконец, не нужно забывать, что x и y координаты точек A, B удовлетворяют уравнению (5.40), которое описывает форму веревки:

$$y_A = \frac{1}{\gamma} [\operatorname{ch}(\gamma x_A) - 1], \quad y_B = \frac{1}{\gamma} [\operatorname{ch}(\gamma x_B) - 1]. \quad (5.45)$$

Уравнения (5.43), (5.44) и (5.45) образуют замкнутую систему для определения пяти неизвестных: четырех координат x_A, y_A, x_B, y_B точек закрепления и, собственно, постоянной γ , входящей в (5.40) и в (5.42). Однако аналитического решения данной системы получить не удастся, поскольку соотношения (5.45) приводят к трансцендентному уравнению.

Вот еще один пример задачи, решение которой невозможно довести до конца. Правда тот факт, что мы получили в аналитическом виде форму веревки, уже говорит о многом; трудность возникла лишь на заключительном этапе, когда мы пытались соотнести с общим решением (5.40) реальные физические условия закрепления. При желании систему $\{(5.43), (5.44), (5.45)\}$ можно без особых проблем решить численно на компьютере. Кроме того, постоянная γ легко определяется экспериментально. Измерим силу натяжения веревки в одной из двух точек закрепления, например в точке A (T_A) – для этого достаточно обычного динамометра. В соответствии с (5.31) T_A удовлетворяет уравнению

$$\frac{T_A}{g\rho} = \frac{1}{\gamma} + y_A.$$

Измеряя также длину s_A левой части веревки (от основания до точки A) и используя формулу (5.42), которую удобно представить в виде

$$y_A = \frac{1}{\gamma} \left[-1 + \sqrt{1 + (\gamma s_A)^2} \right],$$

из двух последних соотношений найдем искомую величину γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(T_A/g\rho)^2 - s_A^2}}.$$

Приложение

Привожу здесь небольшую подборку интересных задач, рассматриваемых в *элементарном курсе физики*.⁵⁴⁾ Все они допускают решение без использования производных; во многих случаях такое решение становится возможным благодаря разнообразным “олимпиадным приемам”. Задачи позаимствованы преимущественно из условий Всероссийских Олимпиад и сборника “Квант”. Отдельные задачи (*) предложены коллективом преподавателей ВФТШ при ФАЛТ МФТИ.

1. На прямолинейном участке железной дороги стояла платформа с грузом. Ночью к ней подкрался похититель, захвативший с собой легкий и упругий резиновый шнур. Привязав один конец шнура к платформе, а второй к своему поясу, он бросился бежать с постоянной скоростью $v = 5$ м/с вдоль железнодорожного полотна. Удар... Через некоторое время похититель очнулся, лежа на платформе, которая двигалась со скоростью $u = 9$ м/с. Во сколько раз масса платформы превышала массу похитителя? Что же там все-таки произошло, и в чем была ошибка похитителя? Считайте, что ботинки злодея не проскальзывали, а платформа не испытывала в ходе движения заметного сопротивления.

2. Два мыльных пузыря с радиусами r_1 и r_2 и с одинаковой температурой воздуха внутри сливаются в один. При этом температура и количество “внутреннего” воздуха не изменились. Найдите поверхностное натяжение мыльной воды, если радиус образовавшегося пузыря равен r , а атмосферное давление p_0 .

3. Тонкое проволочное кольцо радиусом R несет электрический заряд q . В центре кольца расположен одноименный с q заряд Q , причем $Q \gg q$. Определите силу, с которой растянуто кольцо. Постарайтесь решить задачу двумя способами: динамическим и энергетическим.

4.* Небольшую картину требуется подвесить к стене с помощью одинарной веревки длиной l , которая крепится в вертикальной плоскости симметрии картины на расстоянии x от верхнего ее края. Коэффициент трения между нижним краем картины и стеной равен μ . Каким нужно выбрать угол наклона картины α , чтобы она висела устойчиво? Считайте картину тонкой однородной пластинкой массой m и высотой h .

5.* Бусинка массой m может без трения скользить по горизонтальному стержню. Сверху к бусинке прикреплена невесомая пружина жесткостью k , точка подвеса которой находится на высоте L над стержнем. Определите период колебаний такого маятника. Как будут реагировать период и амплитуда колебаний на плавное увеличения расстояния L ,

⁵⁴⁾В данном разделе представлены задачи в основном по *механике, термодинамике и электричеству*, что соответствует программе за 9-ый и 10-ый классы спецшколы.

производимое прямо во время колебаний? Считайте, что $L \gg L_0$, где L_0 – длина недеформированной пружины (пружина очень хорошо растягивается).

6. К идеальному одноатомному газу, заключенному внутри масляного пузыря, подводится тепло. Найдите теплоемкость газа (в расчете на один моль) в этом процессе, если давлением снаружи пузыря можно пренебречь.

7.* У велосипеда с ручными тормозами на каждом колесе установлены две тормозные колодки, которые во время торможения прижимаются к ободу колеса. Радиус обода R примерно равен радиусу всего колеса (вместе с шиной), а колодки установлены в верхних точках колес. Какие силы действуют на колесо во время торможения? Чему равен коэффициент трения между колодками и ободом, если под действием сил трения в тормозах велосипед замедляется с ускорением a (при работе обоих тормозов)? Каждая колодка прижимается к ободу с силой F . Масса колеса равна m и сосредоточена в тонком ободе. Масса велосипеда (вместе с колесами и велосипедистом) равна M . Проскальзывание между колесами и дорогой отсутствует. При каком усилии в переднем тормозе велосипедист будет переброшен через руль? С какой минимальной скоростью должен двигаться велосипед, чтобы это могло произойти? Считайте, что центр масс системы расположен на уровне тормозных колодок и на равном расстоянии от обоих колес. Диаметр колеса равен d , а расстояние между осями составляет $L = 3d/2$.

8. Заряженная частица попадает в среду, где на нее действует сила сопротивления, пропорциональная скорости. До полной остановки частица проходит путь $s = 10$ см. Если в среде имеется некоторое магнитное поле, перпендикулярное скорости частицы, она при той же начальной скорости останавливается на расстоянии $l = 6$ см от точки входа в среду. На каком расстоянии от точки входа частица остановилась бы, если бы поле было в два раза слабее? Указание: рассмотрите движение частицы в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, отдельно по двум направлениям – вдоль начальной скорости частицы и перпендикулярно ей.

9. По реке со скоростью v плывут мелкие льдины, которые равномерно распределяются по поверхности воды, покрывая ее n -ю часть. В некотором месте реки образовался затор. В заторе льдины полностью покрывают поверхность воды, не нагромождаясь друг на друга. С какой скоростью растет граница сплошного льда? Какая сила действует на один метр ледяной границы между водой и сплошным льдом в заторе со стороны останавливающихся льдин? Плотность льда $\rho = 910$ кг/м³, толщина $h = 20$ см, скорость реки $v = 0,72$ км/ч, плывущие льдины покрывают одну десятую часть поверхности воды ($n = 10$).

10.* Газонная поливалка изготовлена из изогнутой трубки, насаженной шарнирно в середине на вертикальную трубу, по которой подается вода. Под действием реактивной силы трубка вращается в горизонтальной плоскости, разбрызгивая воду равномерно во все стороны. Чему равен момент силы трения в оси трубки, если установившаяся угловая скорость ее вращения (при данном напоре воды) равна ω ? Скорость течения воды внутри трубки v , площадь сечения трубки S . Струи воды выбрасываются по касательной к окружности радиусом R , вдоль которой вращаются сопла. Чему равна мощность потерь на трение в оси трубки?

11. Английский физик У. Томсон предложил следующую отопительную систему. В топке

при температуре T_1 сжигается топливо. Выделяющееся тепло приводит в действие двигатель D , отдающий избыток тепла отопляемому помещению, в котором поддерживается температура $T_2 < T_1$. Двигатель приводит в действие холодильную машину C , отбирающую тепло от грунтовых вод с температурой $T_3 < T_2$, отдавая его отопляемому помещению. Считая, что двигатель и холодильник работают по циклу Карно, а рабочим веществом является идеальный газ, определите тепло, передаваемое отопляемому помещению за единицу времени. В топке за единицу времени выделяется тепло q .

12.* В современных видеомэгнитофонах при перемотке кассеты используется система автоматического ограничения частоты вращения катушек кассеты. Данная система не допускает превышения некоторого максимально допустимого значения Ω_{\max} для угловой скорости разматываемой катушки. Чтобы выполнить это требование, двигатель на роторе наматывающей катушки плавным образом уменьшает угловую скорость вращения от максимального значения ω_{\max} до нуля. По какому закону $\omega(t)$ нужно изменять угловую скорость вращения наматывающей катушки в зависимости от времени, чтобы продолжительность перемотки кассеты (из исходного положения) была минимальной? Считайте, что $\Omega_{\max} = \omega_{\max} = 40\pi$ рад/с, радиус “полной” катушки $R_1 = 10\sqrt{15}$ мм, радиус барабана “пустой” катушки $R_2 = 10$ мм, а толщина пленки $b = 20$ мкм. Определите также продолжительность T всей перемотки и аналитические зависимости угловых скоростей вращения катушек кассеты от времени.

13. Рабочее вещество тепловой машины совершает цикл Карно между изотермами T и T_1 ($T_1 > T$). Холодильником является резервуар, температура которого постоянна и равна $T_2 = 200$ К, причем $T_2 < T$. Теплообмен между рабочим веществом и холодильником осуществляется посредством теплопроводности. Количество теплоты, отдаваемое в единицу времени газом с изотермы T холодильнику, пропорционально разности температур: $q = \alpha \cdot (T - T_2)$, где $\alpha = 1$ кВт/К. Теплообмен рабочего вещества с нагревателем происходит непосредственно при $T_1 = 800$ К. Полагая, что продолжительность изотермических процессов одинакова, а адиабатических весьма мала, найдите температуру холодной изотермы T , при которой мощность N тепловой машины наибольшая. Определите наибольшую мощность тепловой машины.

14. Металлическая сфера радиусом a , удаленная от других предметов, заземлена через резистор сопротивлением R . На сферу налетает пучок электронов, скорость которых вдали от сферы была v . В секунду на сферу попадают n электронов. Чему равен установившийся заряд сферы? Какие количества теплоты выделяются на сфере и резисторе за единицу времени?

15. На сколько изменится подъемная сила воздушного шара объема V , если относительная влажность атмосферного воздуха увеличится на $\Delta\varphi$? Давление и температура влажного воздуха остались при этом неизменными. Известно, что плотность насыщенного пара воды при данной температуре равна ρ_* . Молярная масса сухого воздуха $\mu = 29$ г/моль. Воздух шара не сообщается с атмосферой.

16. Колебательный контур состоит из вакуумного конденсатора емкостью C , расстояние между пластинами которого d , и катушки индуктивности. Собственная частота колебаний контура равна ω_0 . Какой будет собственная частота, если между пластинами конденсатора поместить свободную точечную частицу массой m , имеющую заряд q ? В ходе колебаний частица не долетает до пластин, сила тяжести отсутствует. Влиянием частицы на распре-

деление заряда по поверхности пластин, а также краевыми эффектами, можно пренебречь (т.е. поле в конденсаторе однородное).

17.* Автомобильное колесо объемом V накачивается поршневым насосом через запирающий клапан. Насос, имеющий рабочий объем v , забирает атмосферный воздух с давлением p_0 . Считая, что сжатие воздуха происходит адиабатически, определите количество циклов накачки, необходимое для увеличения избыточного давления в колесе от $\Delta p_1 = 0$ до $\Delta p_2 = \alpha p_0$, где $\alpha > 0$. Получите числовой ответ для случая, когда $V/v = 50$, $\alpha = 2$. Объемом соединительного шланга можно пренебречь.

18. Реакцию синтеза тяжелого и сверхтяжелого изотопов водорода ($\text{H}^2 + \text{H}^3 = \text{n}^1 + \text{He}^4$) изучают, направляя ускоренные до энергии $E_D = 2$ Мэв ионы дейтерия на тритиевую мишень. Детектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно к направлению пучка дейтронов. Определите энергию регистрируемых нейтронов в предположении о том, что выделяющаяся в реакции энергия $W = 14$ Мэв полностью переходит в кинетическую энергию образующихся частиц.

19. Оцените, сколько столкновений молекул азота друг с другом происходит за время $\tau = 1$ с в объеме $V = 1 \text{ см}^3$ воздуха при нормальных условиях ($t = 20^\circ \text{ C}$, $p = 10^5 \text{ Па}$). Считайте, что массовые доли азота и кислорода в воздухе равны $\alpha_1 = 76\%$ и $\alpha_2 = 24\%$. Радиус молекул азота равен $r = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.

20.* Две прямолинейные автострады пересекаются под углом α . На первой автостраде на расстоянии l_1 от перекрестка стоит машина, которая в некоторый момент времени начинает двигаться в сторону перекрестка с ускорением \vec{a}_1 . В тот же самый момент другая машина, находящаяся на второй автостраде на расстоянии l_2 от перекрестка, начинает разгоняться в сторону перекрестка с ускорением \vec{a}_2 . Найдите минимальное расстояние, которое будет достигнуто между машинами в ходе их движения.

21.* Метеорит влетает в верхние слои атмосферы со скоростью $v_0 = 20 \text{ км/с}$. Температура его лобовой поверхности вскоре выходит на постоянное значение $T = 1500 \text{ К}$. Пусть a , b , c – доли молекул (молярные), которые сталкиваются с метеоритом абсолютно упруго (a), абсолютно неупруго (b), и отлетают от метеорита с кинетической энергией, соответствующей температуре лобовой поверхности (c). Площадь поперечного сечения метеорита $S = 10 \text{ м}^2$. Найдите силу сопротивления, действующую на метеорит. Можно считать, что воздух в рассматриваемой области атмосферы состоит исключительно из азота, его плотность $\rho = 0,01 \text{ кг/м}^3$, а скорость метеорита не успевает существенно измениться и равна v_0 .

22.* На наклонной плоскости с изменяемым углом наклона α находится однородный брусок, имеющий форму параллелепипеда. Высота бруска равна b , его длина – a , ширина (в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка) произвольная. Коэффициент трения между поверхностью бруска и наклонной плоскостью μ . Исследуйте возможные движения бруска, которые возникнут при плавном увеличении угла α , в зависимости от соотношения между параметрами a , b , μ .

23.* В метро при подходе к эскалатору образуется очередь. Плотность людей вдоль очереди вдвое больше, чем вдоль эскалатора. Кроме того, поперек очереди в среднем передвигаются

4 человека, тогда как на всю ширину эскалатора всегда приходится один человек (эскалатор работает на подъем). Найдите скорость движения людей в очереди, если скорость движения эскалатора равна 1 м/с.

24. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 1$ Гн и сопротивлением $R = 1$ Ом и конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ. Конденсатор неидеален – сопротивление его изоляции R_x конечно. При какой величине R_x в конденсаторе выделится $k = 2/3$ начальной энергии контура? Указание: при указанных значениях параметров контура затухание колебаний является малым (т.е. за время, равное периоду колебаний, затуханием можно пренебречь).

25.* Под колоколом вакуумного насоса находится стакан с водой. Масса воды в стакане равна m , а пространство внутри колокола заполнено водяным паром. При откачке паров воды со скоростью Q (л/мин) плотность (давление) паров под колоколом остается постоянной вследствие испарения жидкости из стакана. Температура в системе поддерживается постоянной и равна T . Давление насыщенных паров воды при температуре T составляет p_* . Определите, через какое время вся вода из стакана испарится, если интенсивность испарения G (кг/мин) пропорциональна разности между фактическим давлением паров над поверхностью воды и давлением насыщенных паров воды при данной температуре, т.е. $G = \alpha \cdot (p_* - p)$, где α – заданная постоянная.

26.* Оцените максимальную мощность, которую должен развивать мотор кресельного горнолыжного подъемника. Трос подъемника представляет собой две параллельные прямые линии, вдоль одной из которых кресла поднимаются в гору, а вдоль другой возвращаются вниз (трос образует замкнутую петлю). Перепад высот между концами подъемника $h = 0.5$ км, длина линии $l = 2$ км, скорость движения троса $v = 10$ км/ч. Общее число кресел равно 100, т.е. одновременно поднимаются и опускаются по $N = 50$ кресел (трос не прогибается под тяжестью кресел благодаря наличию достаточного количества промежуточных опор). Средняя масса горнолыжника с экипировкой $m = 100$ кг, общий КПД механизмов подъемника $\eta = 90\%$. Какое усилие должен выдерживать трос на растяжение? Почему для расчета не нужно знать массу кресел и троса? Изменится ли значение максимальной мощности, если при неизменном взаимном положении концов подъемника и том же самом расстоянии между соседними креслами поменяется форма линии (т.е. форма склона горы)?

27. Диэлектрик состоит из молекул, каждую из которых можно представить в виде двух зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии λ друг от друга. При этом расстояние λ зависит от напряженности поля E , действующего на заряды, по закону $k\lambda(E) = qE$, где k – постоянный коэффициент. Определите напряженность электрического поля E внутри бесконечной плиты из такого диэлектрика, внесенной во внешнее однородное поле с напряженностью E_0 перпендикулярно к силовым линиям. Концентрация молекул в диэлектрике равна n .

28.* Грампластинка при проигрывании вращается с частотой $\nu = 33$ об/мин. Как должна меняться в зависимости от радиуса плотность записи на дорожке такой пластинки? Под плотностью записи звукового сигнала обычно понимают отношение длительности малого фрагмента записи Δt к соответствующей малой длине участка носителя Δs , на которой этот фрагмент записан. Какова должна быть плотность записи (в сравнении с обычной пластинкой) у пластинки, предназначенной для проигрывания с частотой $\nu = 45$ об/мин?

29. И какой же русский не любит быстрой езды?... Жил-был один новый русский, и были у него красивые Жигули, на которых ему удавалось разогнаться по ровной горизонтальной дороге только до $v_1 = 200$ км/ч. И тогда он решил поставить на них мотор от какой-нибудь иномарки. В ближайшем автосервисе его просьбу удовлетворили, поставив мотор от Запорожца. После этого даже на ровной горизонтальной дороге при всем старании он смог выжать лишь $v_2 = 100$ км/ч, чем был обескуражен и поспешил в автосервис более высокого уровня, к которому вела уходящая вверх длинная ровная прямая дорога. Хотя мотор работал на полную катушку, автомобиль полз в гору со скоростью $v_3 = 50$ км/ч. Подъехав к автосервису, новый русский был так возмущен, что, выключив мотор, забыл поставить машину на тормоз. До какой максимальной скорости v смог бы разогнаться его автомобиль, двигаясь с горки вниз, если бы не врезался в сарай? Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости автомобиля. Трение в осях можно не учитывать. Считайте, что масса нового русского пока еще много меньше массы его автомобиля.

30. Вертикальный теплоизолированный сосуд, в котором находится одноатомный газ, закрыт поршнем массы M . В сосуде включают нагреватель мощностью P , и поршень начинает медленно двигаться вверх. За какое время он поднимается на высоту H относительно начального положения? Теплоемкостью поршня, трением и давлением атмосферы можно пренебречь.

31. Две металлические сферы радиусом r каждая удалены друг от друга на большое расстояние и соединены друг с другом очень тонким проводником, в разрыв которого включена катушка индуктивностью L . На одну из сфер помещают электрический заряд. Через какое время заряд этой сферы уменьшится в два раза? Через какое время заряд станет таким же, как в первый момент?

32.* Циклический процесс с идеальным газом, заданный в плоскости $(p - V)$ уравнением

$$\left(\frac{p - p_0}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{V - V_0}{V_0}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

разделен изохорой $V = V_0$ и изобарой $p = p_0$ на четыре замкнутых цикла (в виде четвертушек от окружности). КПД этих циклов равны $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, соответственно; все циклы обходятся по часовой стрелке. Определите КПД исходного циклического процесса.

Цель данного курса может считаться достигнутой, если по его прочтении вы сумеете решить наиболее сложные задачи из данного списка двумя способами: ограничившись только “элементарными” средствами школьной физики, и используя производные.