Андрей Щетников

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ДЛЯ ЮНЫХ ФИЗИКОВ

ШКОЛА ПИФАГОРА

Новосибирск 2013

Оглавление

Глава 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Треугольник Паскаля

Подсчёт числа путей

Задача 1. Фишка стоит в левом нижнем углу клетчатого поля — в клетке с целочисленными координатами (0, 0). Каждым ходом она может перемещаться либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх. Каким числом способов она может перейти из клетки с координатами (0, 0) в клетку с координатами (7, 5)?

РЕШЕНИЕ 1. В каждую клетку нулевой строки и в каждую клетку нулевого столбца из клетки (0, 0) ведёт всего один путь; запишем во все эти клетки число «1». Число путей, ведущих в данную клетку, складывается из числа путей, приходящих в эту клетку слева и снизу. Этот факт позволяет последовательно заполнять те клетки, у которых уже заполнены соседи снизу и слева. Так мы доберёмся и до клетки (7, 5) — и узнаем, что в неё можно попасть 792 способами.

5	1	6	21	56	126	252	462	792
4	1	5	15	35	70	126	210	330
3	1	4	10	20	35	56	84	120
2	1	3	6	10	15	21	28	36
1	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	1	2	3	4	5	6	7

РЕШЕНИЕ 2. Чтобы добраться из клетки (0, 0) в клетку (7, 5), фишке нужно сделать 5 шагов вверх и 7 шагов вправо, чередуя их в произвольном порядке. Обозначим шаг вверх «В», шаг вправо «П». Всякий путь из клетки (0, 0) в клетку (7, 5) будет закодирован цепочкой из 12 букв, среди которых 5 букв «В» и 7 букв «П», — например, так:

П В В П П В П П В В В П П П

Выбор определённого пути — это выбор 5 мест из 12, на которые ставится буква «В»; оставшиеся 7 мест заполняются буквами «П». Спросим себя, каким числом способов можно пометить 5 мест из 12? Первым ходом мы помечаем любое из 12 мест; вторым ходом — любое из 11 оставшихся мест; третьим ходом — любое из 10 оставшихся мест, и т. д. Получается, что полное число способов, которым мы можем выбрать 5 мест из 12 в определённом порядке, равно $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040$.

Заметим теперь, что один и тот же набор из 5 мест мог быть выбран многими разными способами. Первым ходом мы могли пометить любое из этих 5 мест, вторым — любое из 4 оставшихся мест, третьим — любое из 3 оставшихся мест, и т. д.; так что число способов, которыми помечаются одни и те же 5 мест, равно $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Тем самым число способов, которым мы можем выбрать 5 мест из 12 без учёта порядка выбора, равно

$$\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{95040}{120}=792.$$

Можно искать число вариантов не для 5 букв «В», но для 7 букв «П» — в итоге мы получим приводящее к тому же результату выражение

$$\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=792.$$

Чтобы подчеркнуть эту симметрию, представим результат в виде выражения, составленного из трёх факториалов:

$$\frac{12!}{7!\cdot 5!}=792.$$

В общем виде: число способов C_n^k (эта запись читается «*C* из *n* по *k*»), которым можно из *n* предметов выбрать *k* предметов, вычисляется по формуле

$$\boxed{C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}} \qquad (1.1)$$

Биномиальные коэффициенты

Задача 2. Из школьного курса математики известны формулы сокращённого умножения $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Запишите аналогичную формулу для $(a+b)^{10}$.

РЕШЕНИЕ 1. Вычислим $(a+b)^4$, умножая $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ на очередную скобку $(a+b)$. Каждое слагаемое в первой сумме умножается на *a* и на *b*; результат первого умножения отправим «налево», а второго — «направо», чтобы сгруппировать подобные члены.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & a^3 & & + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & b^3 & \\
\swarrow & & \searrow & \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow \\
a^4 & + & a^3b+3a^3b & + & 3a^2b^2+3a^2b^2 & + & 3ab^3+ab^3 & + & b^4 &
\end{array}$$

Мы видим, что коэффициенты следующей строки получаются сложением соседних коэффициентов предыдущей строки. Ясно, что этот принцип сохранится и при вычислении $(a+b)^5$, равно как и следующих натуральных степеней бинома *a* + *b*.

Запишем первые строки получающейся таблицы *биномиальных коэффициентов*[1] в виде числового треугольника, известного под названием *треугольника Паскаля*.

[1] Слово «бином» в переводе с латыни на русский означает «двухимённый». «Полином» = «многочлен», «бином» = «двучлен».

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Последняя выписанная строка даёт искомые коэффициенты:

$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + \ldots + b^{10}.$$

РЕШЕНИЕ 2. Это же результат можно получить комбинаторным путём. Развернём в строку выражение

$$(a+b)^{10} = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)(a+b)}_{10\text{ раз}}.$$

Если при перемножении скобок не приводить подобные члены, всего получится 2^{10} отдельных слагаемых: из каждой скобки берётся либо a, либо b, так что осуществляется 10 последовательных выборов с 2 возможностями на каждом шаге.

Чтобы получить a^{10}, надо из каждой скобки взять a; это можно сделать единственным образом. Чтобы получить a^9b^1, надо из 9 скобок взять a, а из одной скобки взять b; это можно сделать 10 различными способами. Чтобы получить a^8b^2, надо из 8 скобок взять a, а из 2 скобок взять b; это можно сделать $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ различными способами; и т. д. В итоге получаем, что

$$(a+b)^{10} = a^{10} + \frac{10}{1}a^9b + \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}a^8b^2 + \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}a^7b^3 + \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^6b^4 + \ldots + b^{10}.$$

В общем виде:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}} \qquad (1.2)$$

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите сумму чисел, лежащих в какой-нибудь строке треугольника Паскаля. Сформулируйте соответствующее общее утверждение и проверьте его для других строк. Докажите его.

2. Найдите сумму квадратов всех чисел, лежащих в какой-нибудь строке треугольника Паскаля. Найденное вами число само записано в некоторой клетке треугольника Паскаля; отыщите его. Сформулируйте соответствующее общее утверждение и проверьте его для других строк. Докажите его.

2. Приближённое извлечение корней

Извлечение квадратного корня

В качестве примера извлечём квадратный корень из 105. Представим его в виде $10\sqrt{1,05}$. Нам осталось извлечь квадратный корень из числа, близкого к единице. Будем искать ответ в виде

$$\sqrt{1,05} = 1 + \delta,$$

где $\delta \ll 1$ (этот знак, которым любят пользоваться физики, читается «много меньше»). Возведём это равенство в квадрат:

$$1,05 = (1+\delta)^2 = 1 + 2\delta + \delta^2.$$

Отсюда получаем

$$0,05 = 2\delta + \delta^2.$$

Поскольку $\delta \ll 1$, тем более $\delta^2 \ll 1$. Пренебрегая δ^2, запишем приближённое равенство $0,05 \approx 2\delta$, откуда $\delta \approx 0,025$. Таким образом, мы получили $\sqrt{105} \approx 10,25$. Пользуясь калькулятором, находим $\sqrt{105} \approx 10,2469...$; ошибка наших вычислений составила около 0,003.

Теперь произведём те же самые выкладки в общем виде. Пусть нам надо извлечь $\sqrt{1+a}$, где $|a| \ll 1$. Сразу же запишем

$$\sqrt{1+a} = 1 + \delta,$$

где $|\delta| \ll 1$. Возведём это равенство в квадрат:

$$1 + a = 1 + 2\delta + \delta^2.$$

Пренебрегая δ^2, получаем $\delta \approx a/2$, откуда

$$\boxed{\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{a}{2}} \qquad (2.1)$$

Извлечение корня *n*-ой степени

Поступая аналогично, запишем

$$\sqrt[n]{1+a} = 1 + \delta,$$

Возведём это равенство в *n*-ую степень:

$$1 + a = (1+\delta)^n.$$

Раскроем скобки по формуле бинома:

$$1+a=1+n\delta+\tfrac{n(n-1)}{2}\delta^2+\ldots.$$

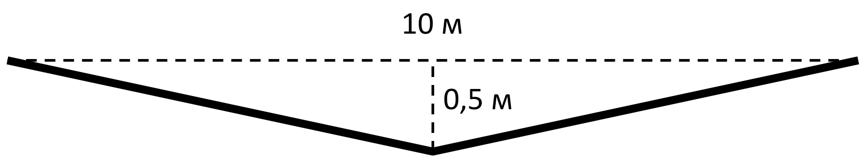
А теперь, опираясь на малость δ, пренебрежём всеми членами, содержащими δ во второй и более высоких степенях. Остаётся $a=n\delta$, и тем самым

$$\sqrt[n]{1+a}\approx 1+\frac{a}{n} \tag{2.2}$$

Задание для самостоятельной работы

1. Объём шара увеличился на 20%. На сколько процентов увеличился при этом радиус шара? (ПОЯСНЕНИЕ. Во всех задачах этого параграфа надо дать удовлетворительный приближённый ответ.)

2. Натянутая верёвка соединяет два гвоздя, находящиеся на одном уровне на расстоянии 10 м друг от друга. К середине верёвки подвесили груз, после чего эта середина опустилась на 50 см по сравнению со своей начальной высотой. На сколько процентов растянулась верёвка?



3. Человек стоит на берегу моря и смотрит на горизонт. Найдите расстояние от берега до горизонта. Радиус Земли равен 6400 км.

3. Геометрическая прогрессия

Ахилл и черепаха

Рассмотрим апорию знаменитого древнегреческого мыслителя Зенона Элейского «Ахилл и черепаха».

«Ахилл, преследуя черепаху, не сможет её догнать. В самом деле, необходимо, чтобы догоняющий сначала достиг черты, с которой стартовал убегающий. Но за то время, пока догоняющий придёт к ней, убегающий продвинется на какое-то расстояние. И опять за то время, пока догоняющий будет проходить это расстояние, убегающий вновь пройдёт какое-то расстояние — настолько меньшее пройденного им в прошлый раз, насколько он бежит медленнее догоняющего. И хотя с каждым разом это расстояние будет всё меньше и меньше, в любом случае этот процесс будет продолжаться бесконечно, и последнего раза не будет. Поэтому Ахилл не догонит не только Гектора, но даже черепаху».

Мы понимаем, что Ахилл всё-таки догонит черепаху, поскольку он бежит быстрее, чем она ползёт. Апория же говорит о том, что к моменту встречи Ахилл пройдёт бесконечное множество последовательно убывающих отрезков. Однако сумма длин этих отрезков имеет конечную длину.

Отрезок, разделяющий Ахилла и черепаху на старте, примем за единицу длины; время, за которое Ахилл пробегает этот отрезок — за единицу времени. Пусть черепаха за единицу времени удаляется от места своего старта на расстояние $q < 1$. Ахилл покроет это расстояние за время q; черепаха пройдёт за время q ещё один отрезок q^2. Ахилл покроет отрезок q^2 за время q^2; черепаха пройдёт за время q^2 ещё один отрезок q^3; и т. д. Когда Ахилл наконец догонит черепаху, пройденное им расстояние выразится суммой бесконечной геометрической прогрессии

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots .$$

Теперь найдём эту сумму. Когда Ахилл пройдёт расстояние S, черепаха пройдёт расстояние $S-1$. Но расстояния, пройденные Ахиллом и черепахой, относятся друг к другу так же, как их скорости:

$$\frac{S}{S-1} = \frac{1}{q}.$$

Выразим отсюда S:

$$S = \frac{1}{1-q}.$$

Тем самым мы получаем, что

$$\boxed{1 + q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + \dots = \frac{1}{1-q}} \qquad (3.1)$$

Определение

Геометрической прогрессией называется последовательность чисел a_0, a_1, a_2, … , каждое из которых, начиная со второго, получается из предыдущего умножением на одно и то же действительное число q, называемое *знаменателем* прогрессии:

$$a_{n+1} = a_n q\,.$$

Если $q > 0$, все члены геометрической прогрессии будут одного знака; если $q < 0$, члены геометрической прогрессии будут менять знак на каждом шаге. Далее, если $|q| > 1$, последовательные члены геометрической прогрессии будут нарастать по абсолютной величине; если $0 < |q| < 1$, последовательные члены геометрической прогрессии будут убывать по абсолютной величине.

Сумма конечной геометрической прогрессии

Пусть требуется найти сумму

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n.$$

Прибавим к обеим сторонам этого равенства q^{n+1} и преобразуем его к виду

$$S_n + q^{n+1} = 1 + q(1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^n) = 1 + qS_n.$$

Отсюда получаем, что

$$\boxed{S_n = 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}} \qquad (3.2)$$

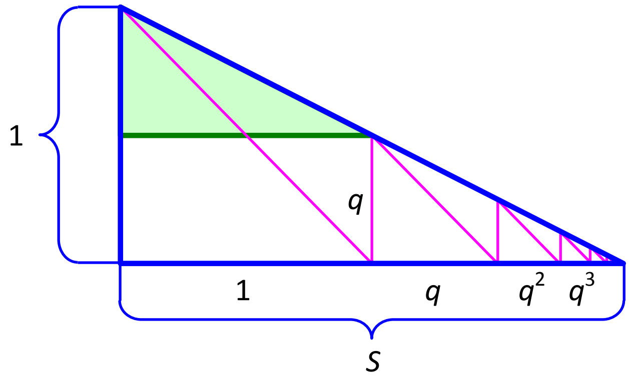
Формула (3.2) может рассматриваться в качестве исходной для суммирования геометрической прогрессии с бесконечным числом членов. Если $|q| < 1$, при неограниченном росте n величина q^{n+1} становится сколь угодно малой; поэтому сумма S_n приближается к $\frac{1}{1-q}$ сколь угодно близко.

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots.$$

2. Объясните, как вывести формулу для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии с помощью следующего чертежа.



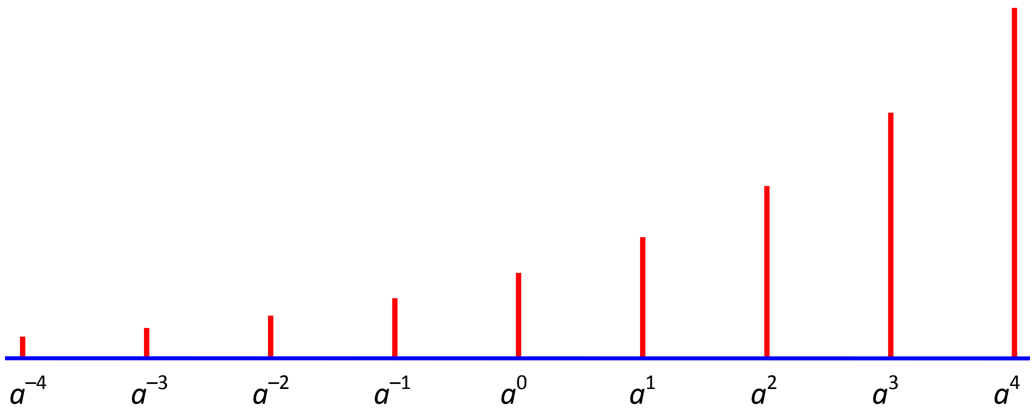
3. Докажите, что при $|a| < 1$

$$1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + 5a^4 + \ldots = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

4. Показательная функция

Целые показатели

Последовательность отрезков, длины которых образуют геометрическую прогрессию со знаменателем a, можно неограниченно продолжать в обе стороны. Выберем один из отрезков за единицу измерения, а его место в последовательности — за начало отсчёта.



Переходу на один шаг вправо соответствует умножение на a; переходу на один шаг влево — деление на a. Эти шаги образуют геометрическую прогрессию, члены которой могут быть символически записаны в виде *степени с целым показателем*:

Символическое обозначение	…	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^{0}	a^{1}	a^{2}	a^{3}	…
Способ вычислений	…	$1/a^3$	$1/a^2$	$1/a$	1	a	a^2	a^3	…

Удобство такой системы обозначений связано прежде всего с тем, что умножение и деление степеней с одним и тем же основанием сводится к сложению и вычитанию показателей, возведение в степень — к умножению показателей:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$
$$a^n : a^m = a^{n-m},$$
$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Рациональные показатели

Будем вставлять в рассмотренную выше систему отрезков новые отрезки на места с *рациональными показателями*, руководствуясь идеей непрерывности возникающих пропорций. К примеру, отрезок $a^{1/2}$, находящийся посредине между отрезками a^0 и a^1, должен быть в $a^{1/2}$ раз больше отрезка a^0, а отрезок a^1, в свою очередь, должен быть в

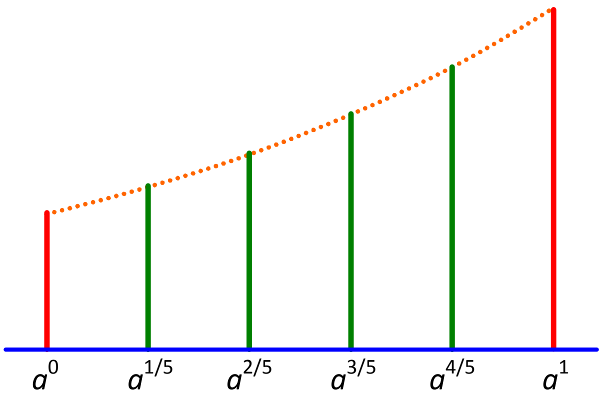
$a^{1/2}$ раз больше отрезка $a^{1/2}$. Но отрезок a^1 в a раз больше отрезка a^0, откуда следует соотношение

$$(a^{1/2})^2 = a\,.$$

Тем самым

$$a^{1/2} = \sqrt{a}\,.$$

Аналогичным образом в эту систему вставляются отрезки с произвольными рациональными показателями: если показатели образуют арифметическую прогрессию, то длины отрезков образуют геометрическую прогрессию.



Разбив интервал [0, 1] на q одинаковых частей, вставим в точках разбиения отрезки, длины которых образуют геометрическую прогрессию

$$a^0, a^{1/q}, a^{2/q}, \ldots, a^{(q-1)/q}, a^1\,.$$

Поскольку должно выполняться соотношение

$$(a^{1/q})^q = a\,,$$

тем самым имеют место равенства

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a}\,,$$

$$a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}\,.$$

Сформулируем основные правила действий со степенями одного основания:

$$\begin{aligned} &a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \\ &a^x : a^y = a^{x-y}, \\ &(a^x)^y = a^{xy}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Действительные показатели

Рассмотрим величину $f(x)$, непрерывно меняющуюся по мере изменения x таким образом, что во всех рациональных точках $f(x) = a^x$. Значения $f(x)$, соответствующие иррациональным точкам, могут быть доопределены по непрерывности.

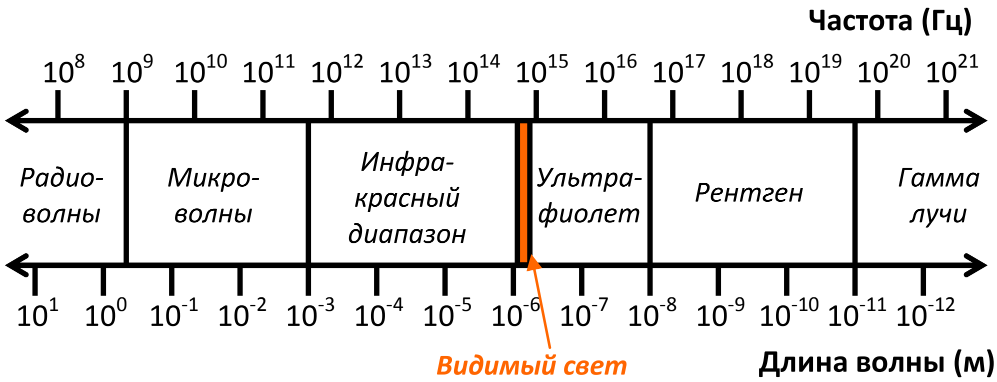
Например, поскольку иррациональное число π может рассматриваться как предел последовательности рациональных чисел $\{3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots\}$, то и степень a^{π} может рассматриваться как предел последовательности $\{a^{3{,}1};\ a^{3{,}14};\ a^{3{,}141};\ a^{3{,}1415};\ \ldots\}$.

Зависимость $f(x) = a^x$ носит название *показательной*, или *экспоненциальной функции*.[2] Иногда пользуются также символическим обозначением

$$a^x \equiv \exp_a x\ .$$

Логарифмические шкалы

Если на одной шкале надо изобразить диапазон изменения некоторой величины, крайние значения которой различаются в тысячи или миллионы раз, то шкала обычно строится так, чтобы её равным отрезкам соответствовало возрастание рассматриваемой величины в одно и то же число раз. Устроенные таким образом шкалы называются логарифмическими. На приведённом ниже рисунке логарифмическая шкала использована для того, чтобы показать разные диапазоны электромагнитных колебаний, от радиоволн до гамма-лучей.



Логарифмы

Определение. Логарифмом числа q по основанию a называется степень s, в которую надо возвести основание a, чтобы получить q. В символической записи:

$$q = \exp_a s \ \leftrightarrow\ s = \log_a q\ .$$

Логарифмическая и показательная функции представляют собой одну и ту же зависимость, рассматриваемую под двумя взаимно обратными углами зрения. Взаимная обратность показательной и логарифмической функций выражается в соотношениях

$$\exp_a(\log_a q) = \log_a(\exp_a q) = q\ .$$

Правила действий с логарифмами соответствуют правилам действий со степенями:

[2] «Экспонент» на латыни = «показатель» по-русски.

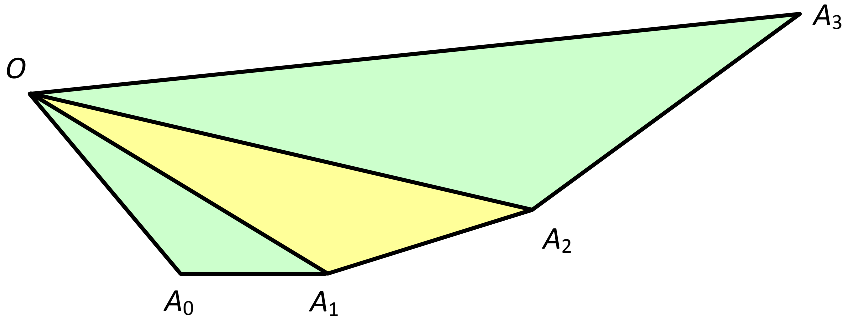
$$\begin{gathered}\log_a pq = \log_a p + \log_a q,\\ \log_a (p:q) = \log_a p - \log_a q,\\ \log_a (\exp_p s) = s\log_a p.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Задание для самостоятельной работы

1. Яркость луча света, проникающего вертикально в толщу воды, уменьшается в 2 раза на глубине 5 м. На какой глубине яркость этого же луча уменьшится в 1000 раз? (ПОДСКАЗКА: воспользуйтесь приближённым равенством $1000 \approx 1024$.)

2. В индийской легенде рассказывается о награде, которую попросил себе изобретатель шахмат: на первую клетку доски кладётся одно зерно, на вторую — два, на третью — четыре, и так далее, с удвоением на каждом шаге. Оцените размер кучи зерна, получающейся при таком процессе.

3. К треугольнику OA_0A_1 пристраивается подобный треугольник OA_1A_2, к треугольнику OA_1A_2 — подобный треугольник OA_2A_3, и т. д. Дополните систему отрезков OA_0, OA_1, OA_2, OA_3, ... отрезками с отрицательными индексами и вставьте в систему отрезков с целочисленными индексами отрезки с рациональными индексами.



4. Постройте логарифмическую шкалу с основанием 10. Какая отметка находится на этой шкале посредине между отметками 1 и 10? Приближённо нанесите на эту шкалу отметки 2, 3, 4, 5.

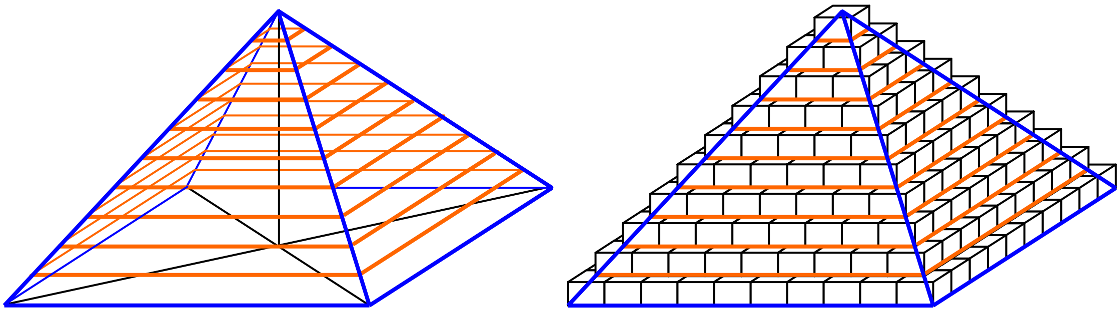
Глава 2

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СУММЫ

5. Объём пирамиды

Объём пирамиды

Знакомство с методом интегральных сумм мы начнём с задачи о нахождении объёма пирамиды с площадью основания S и высотой H. На рисунке изображена правильная пирамида на квадратном основании; однако наше рассуждение будет применимо к любой пирамиде с произвольной формой основания и местоположением вершины.



Разделим высоту пирамиды H на n равных частей. Через точки деления проведём секущие плоскости, параллельные основанию пирамиды. Полученные сечения подобны основанию пирамиды; линейные размеры сечений пропорциональны их номерам, если вести счёт от вершины пирамиды. Площади подобных фигур относятся как квадраты их линейных размеров; поэтому площади последовательных сечений равны

$$\frac{S}{n^2},\ \frac{4S}{n^2},\ \frac{9S}{n^2},\ \ldots,\ \frac{(n-1)^2 S}{n^2},\ \frac{n^2 S}{n^2} = S.$$

На каждом сечении установим призматический слой толщины $\Delta = H/n$. Все эти слои в совокупности образуют ступенчатую пирамиду, объём которой равен

$$V_{\text{ст}} = SH \cdot \frac{1+4+9+16+\ldots+n^2}{n^3}. \tag{5.1}$$

Воспользуемся известной формулой для суммы последовательных квадратов

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6},$$

и преобразуем формулу (5.1) к виду

$$V_{\text{ст}} = SH\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right). \tag{5.2}$$

Этот результат относится к ступенчатой пирамиде; мы же хотим найти точную формулу для объёма гладкой пирамиды. Пусть число слоёв n стремится к бесконечности, а толщина слоя Δ стремится к нулю. Ясно, что превышение объёма ступенчатой пирамиды над объёмом гладкой пирамиды может быть сделано при этом сколь угодно малым. В самом деле, превышение объёма ступенчатой пирамиды $V_{\text{ст}}$ над объёмом гладкой пирамиды не превышает $S{\cdot}\Delta$, а толщина слоя Δ может быть сделана сколь угодно малой.

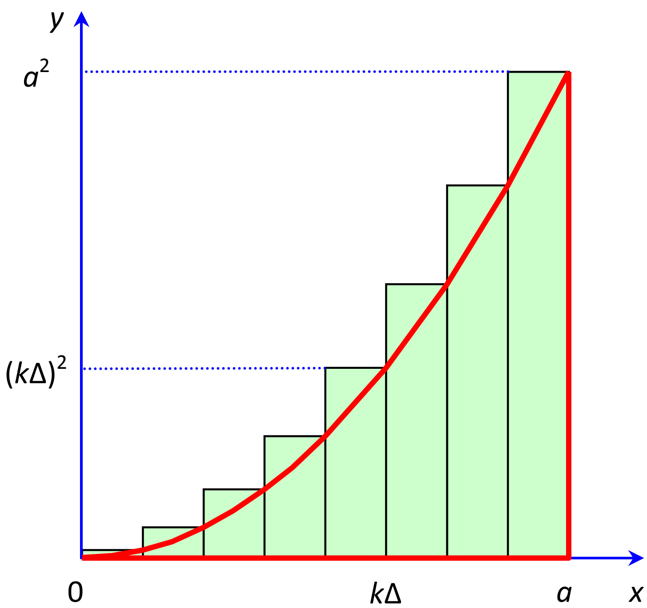
Заметим, что при стремлении n к бесконечности (что символически записывается как $n \to \infty$) второе и третье слагаемые в (5.2) стремятся к нулю, а первое слагаемое останется неизменным, поскольку оно вообще не зависит от n. Поэтому при неограниченном увеличении числа слоёв n объём ступенчатой пирамиды стремится к своему предельному значению — объёму гладкой пирамиды, вычисляемому по формуле

$$\boxed{V = \frac{1}{3} SH} \tag{5.3}$$

Площадь под графиком параболы

С помощью этой же техники найдём площадь криволинейной фигуры, заключённой между графиком квадратичной параболы $y = x^2$, осью абсцисс $y = 0$ и ординатой $x = a$.

Разобьём основание этой фигуры на n отрезков одинаковой ширины $\Delta = a/n$ и построим на k-ом отрезке прямоугольный столбик высотой $y_n = (k\Delta)^2$.



Совокупная площадь всех столбиков равна

$$S = \Delta\left(\Delta^2 + (2\Delta)^2 + (3\Delta)^2 + \ldots + (n\Delta)^2\right) = a^3 \cdot \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}.$$

Мы видим здесь ту же самую конструкцию, что и в формуле (5.1). Все последующие рассуждения будут такими же, как и в предыдущей задаче, и искомая площадь оказывается равной

$$\boxed{S = \frac{1}{3} a^2} \tag{5.4}$$

Определённый интеграл

Используя символическое обозначение, введённое Лейбницем, представим полученный выше результат в следующем виде:

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3} \tag{5.5}$$

Эта запись читается так: «определённый интеграл от функции x^2 по dx на интервале от 0 до a равен $a^3/3$». Определённый интеграл для нас — это площадь фигуры, лежащей под графиком некоторой функции между указанными нижним и верхним пределами. Знак интеграла $\int$ — это сильно вытянутая буква S, сокращение от слова *summa*. Символический смысл этой записи таков: вычисляя определённый интеграл, мы находим сумму бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. В нашем случае каждое слагаемое имеет вид x^2dx, где x^2 — высота соответствующего прямоугольника, dx — его бесконечно малое основание.

Задание для самостоятельной работы

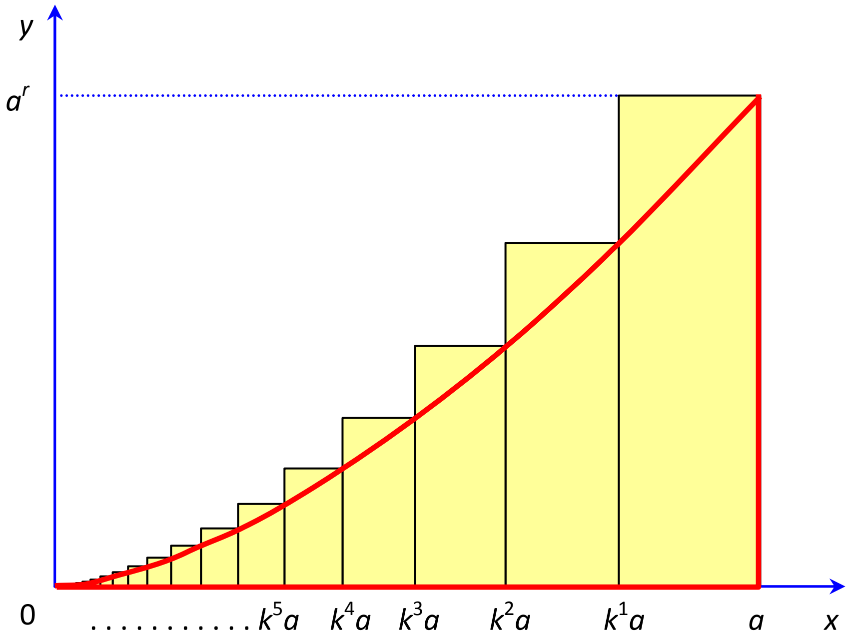
1. Выведите формулу объёма шара радиуса R. Покажите, что объём шара равен ⅔ от объёма прямого кругового цилиндра, описанного вокруг этого шара.

2. Найдите площадь криволинейной фигуры, заключённой между графиком кубической параболы $y = x^3$, осью абсцисс $y = 0$ и ординатой $x = a$.

6. Метод Ферма

Парабола с произвольным показателем степени

Чтобы обобщить полученный выше результат на случай произвольных положительных степеней, рассмотрим задачу о нахождении площади под графиком функции $y = x^r$ (где $r > 0$) на интервале от 0 до a.



На основании $[0, a]$ отметим бесконечную последовательность точек, абсциссы которых образуют убывающую геометрическую прогрессию с нулевым членом a и знаменателем $k < 1$:

$$a,\ k^1a,\ k^2a,\ k^3a,\ \ldots\ .$$

Замечательное свойство такого разбиения заключается в том, что убывающие геометрические прогрессии образуют также:

1) длины интервалов между соседними точками последовательности:

$$(1-k)a,\ k^1(1-k)a,\ k^2(1-k)a,\ k^3(1-k)a,\ \ldots\ .$$

2) ординаты, восстановленные в этих точках:

$$a^r,\ (k^r)^1a^r,\ (k^r)^2a^r,\ (k^r)^3a^r,\ \ldots\ .$$

3) а тем самым и площади прямоугольников, основаниями которых служат указанные интервалы, а высотами — указанные ординаты:

$$(1-k)a^{r+1},\ (k^{r+1})^1(1-k)a^{r+1},\ (k^{r+1})^2(1-k)a^{r+1},\ (k^{r+1})^3(1-k)a^{r+1},\ \ldots\ .$$

Площадь ступенчатой фигуры, составленной из этих прямоугольников, может быть найдена по формуле суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$S_{\text{ст}} = a^{r+1}(1-k)\left\{1+(k^{r+1})^1+(k^{r+1})^2+(k^{r+1})^3+\ \dots\right\} = a^{r+1}\frac{1-k}{1-k^{r+1}}. \qquad (6.1)$$

Чтобы совершить предельный переход от площади ступенчатой фигуры к площади под графиком функции $y = x^r$, надо в (6.1) устремить $k \to 1$. Если мы просто положим $k = 1$, числитель и знаменатель рассматриваемой дроби обратятся в ноль, в результате чего возникнет неопределённость 0/0. Чтобы совершить правильный предельный переход, будем считать степень r рациональной; пусть $r = \frac{m}{n}$, и $r+1 = \frac{m+n}{n}$. Сделаем подстановку $k = \beta^n$, тогда $k^{r+1} = \beta^{m+n}$, и тем самым

$$\frac{1-k}{1-k^{r+1}} = \frac{1-\beta^n}{1-\beta^{m+n}}.$$

Показатели степеней в этом выражении являются натуральными числами, поэтому мы можем воспользоваться тождеством для разности степеней:

$$\frac{1-\beta^n}{1-\beta^{m+n}} = \frac{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{n-1})}{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{m+n-1})} = \frac{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{n-1}}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{m+n-1}}.$$

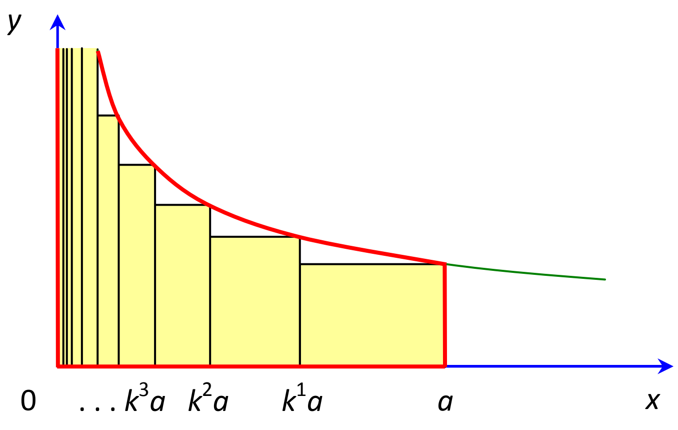
При $k \to 1$ также и $\beta \to 1$, что приводит к результату

$$\boxed{S = \frac{n}{m+n}a^{r+1} = \frac{1}{r+1}a^{r+1}} \qquad (6.2)$$

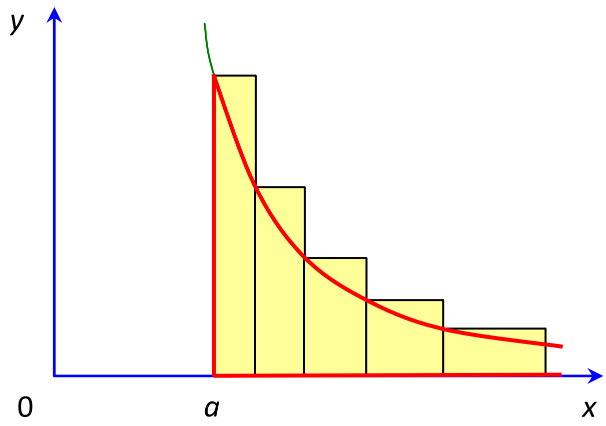
Что касается иррациональных значений, то для них формула (6.2) может быть расширена по непрерывности функции $S(r)$ — в точности так же, как понятие о степени с рациональным показателем расширялось до понятия степени с произвольным действительным показателем.

Задание для самостоятельной работы

1. С помощью метода Ферма вычислите площадь бесконечной фигуры, заключённой между гиперболой $y = x^r$ (где $-1 < r < 0$), её ординатой $x = a$ и осью ординат.



2. С помощью метода Ферма вычислите площадь бесконечной фигуры, заключённой между гиперболой $y = x^r$ (где $r < -1$), её ординатой $x = a$ и осью абсцисс.



3. Убедитесь в том, что полученные выше результаты сводятся в общую формулу, справедливую для всех показателей $s \neq 1$ и для любых a, $b > 0$:

$$\boxed{\int_a^b x^s\,dx = \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{s+1}} \tag{6.3}$$

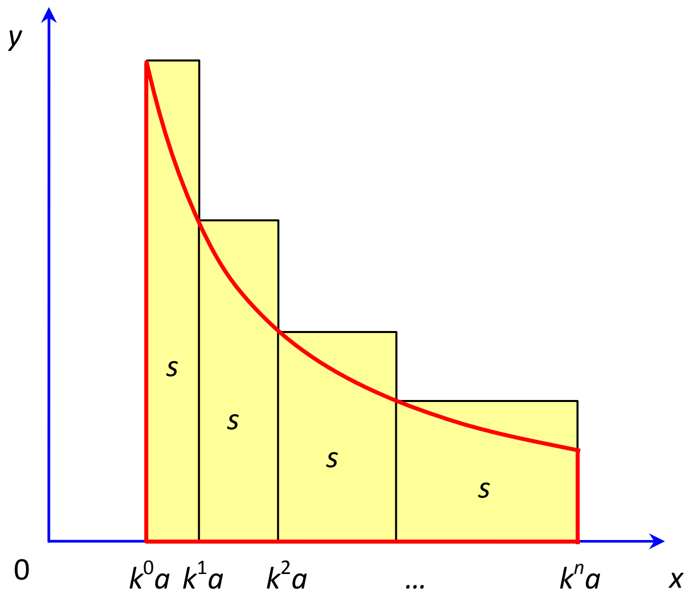
7. Число «е»

Задача о нахождении площади под графиком гиперболы

Чтобы найти площадь под графиком гиперболы $y = 1/x$ на интервале $[a, b]$, вставим между a и b цепочку промежуточных точек, абсциссы которых образуют геометрическую прогрессию

$$a,\ ka,\ k^2a,\ k^3a,\ \ldots\ k^na = b.$$

Обозначим отношение $\frac{b}{a} = \alpha$ и представим знаменатель геометрической прогрессии k в виде $k = \alpha^{1/n}$. Построим столбчатую фигуру, как мы это делали в предыдущем разделе.



Основания столбиков образуют геометрическую прогрессию со знаменателем k; высоты столбиков образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $1/k$. Поэтому площади всех столбиков одинаковы и равны площади первого столбика. Первый столбик имеет основание $(k - 1)a$ и высоту $1/a$, поэтому его площадь равна $k - 1$. Площадь столбчатой фигуры получается умножением площади первого столбика $k - 1$ на число столбиков n:

$$S_{\text{ст}} = (k-1)n = (\alpha^{1/n} - 1)n\,.$$

Обозначим площадь под графиком гиперболы через $S(\alpha)$. Чтобы перейти от площади столбчатой фигуры к площади под графиком гиперболы, надо устремить $n \to \infty$:

$$S(\alpha) = \lim_{n\to\infty}\Big(\,(\alpha^{1/n} - 1)n\Big). \qquad (7.1)$$

При непрерывном увеличении α от 1 до ∞ площадь $S(\alpha)$ непрерывно увеличивается от 0 до ∞. Стало быть, существует такое значение α, для которого $S(\alpha) = 1$. Обозначим это значение буквой e.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1*. Число e — это такое действительное число, для которого справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left((e^{1/n}-1)\,n\right)=1 \tag{7.2}$$

Показательная функция e^x получила особое название *экспоненты* и часто используемое обозначение $\exp x$. Логарифмы, построенные по основанию e, получили название *натуральных логарифмов* и обозначение $\ln x$.

Воспользуемся тождеством

$$\alpha = e^{\ln\alpha}$$

и перепишем (7.1) в виде

$$S(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(e^{\frac{\ln\alpha}{n}}-1\right)\frac{n}{\ln\alpha}\right)\cdot\ln\alpha\,. \tag{7.3}$$

Сделаем замену $m=\dfrac{n}{\ln\alpha}$:

$$S(\alpha)=\lim_{m\to\infty}\left((e^{1/m}-1)\,m\right)\cdot\ln\alpha\,.$$

В силу определения (7.2) стоящий здесь предел равен 1. Отсюда получаем, что искомая площадь под графиком гиперболы

$$S(\alpha)=\ln\alpha \tag{7.4}$$

Число *e* как замечательный предел

Число e было формально определено в (7.2), однако его конкретное значение остаётся до сих пор невычисленным. Чтобы вычислить e, извлечём его из (7.2) и дадим ему второе определение, эквивалентное первому:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Число e — это такое действительное число, для которого справедливо соотношение

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{7.5}$$

К выражению, стоящему под знаком предела, применим формулу бинома:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}=$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n^n}.$$

При $n \to \infty$ число слагаемых в этой сумме неограниченно возрастает, а все сомножители в скобках обращаются в единицы. В результате число e предстаёт в виде суммы бесконечного ряда

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots \tag{7.6}$$

Этот ряд весьма быстро сходится; суммирование первых его членов, вплоть до $\frac{1}{20!}$, даёт для e приближённое значение

$$2{,}7182818284590452353\ldots,$$

верное вплоть до последнего знака.

Задача о полоскании белья

ЗАДАЧА. После стирки хозяйка набирает полную ванну воды, чтобы прополоскать бельё и очистить его от растворённого в воде мыла. Но не лучше ли делить чистую воду на части? Пусть выстиранное бельё содержит 1 л мыльной воды, и для его полоскания отведено 10 л чистой воды. Если мы просто прополощем бельё в чистой воде, коэффициент очистки будет равен 11, поскольку мыло разойдётся с 1 л воды на 11 л воды. Если мы разделим чистую воду на две порции по 5 л, каждая такая порция обеспечит очистку в 6 раз, так что коэффициент очистки будет равен $6^2 = 36$. Если мы разделим чистую воду на 10 порций по 1 л каждая, коэффициент очистки будет равен $2^{10} = 1024$. Спрашивается, какое предельное значение коэффициента очистки мы можем получить при дальнейшем увеличении числа порций?

Если поделить чистую воду на n равных частей объёмом $10/n$, коэффициент очистки после одного полоскания будет равен $1 + 10/n$. Тем самым итоговый коэффициент очистки K_n будет равен

$$K_n = \left(1 + \frac{10}{n}\right)^n.$$

Сделаем замену $m = n/10$ и перепишем эту формулу в виде

$$K_n = \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^{10}.$$

Если $n \to \infty$, то и $m \to \infty$; отсюда в силу (7.5) получаем, что выражение во внешних скобках стремится к предельному значению e, и предельный коэффициент очистки равен

$$K = e^{10} \approx 22026.$$

В общем случае, когда отношение объёма чистой воды к объёму воды в отжатом белье равно u, предельный коэффициент очистки равен

$$K(u) = e^u$$

Разложение экспоненты в степенной ряд

Решая задачу о полоскании белья, мы воспользовались соотношением

$$e^x = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n},$$

где сделана замена $m = nx$. Применяя формулу бинома, запишем

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = 1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{x^n}{n^n}.$$

Устремив $n \to \infty$, получаем разложение функции e^x в степенной ряд:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \tag{7.7}$$

Задание для самостоятельной работы

1. Какую скорость v приобретёт ракета, израсходовав все запасы своего топлива, если скорость истечения продуктов сгорания из сопла двигателя равна u, а отношение масс заправленной и пустой ракеты равно β?

2. Пусть каждый участник компании из n человек покупает подарок, а затем купленные подарки распределяются среди участников компании по жребию. Докажите, что при стремлении $n \to \infty$ вероятность того, что каждый участник получит не тот подарок, который он сам купил, стремится к некоторой конечной величине. Установите, как значение этой величины связано с числом e.

Глава 3

ПРОЕКТ ИСЧИСЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

8. Взаимосвязь между мгновенной скоростью и расстоянием

Равномерное движение

Тело движется равномерным движением, если за любые равные промежутки времени оно проходит равные расстояния. Скоростью равномерного движения мы называем коэффициент пропорциональности между временем движения и пройденным за это время расстоянием. Когда мы говорим, что тело движется равномерно со скоростью 1 метр в секунду, это означает, что за каждую секунду оно проходит 1 метр, за каждые 5 секунд — 5 метров, за каждую 0,1 секунды — 0,1 метра, и т. д. в той же пропорции.

Мгновенная скорость

Английский учёный Уильям Хейтсбери, живший в первой половине XIV века, определял мгновенную скорость неравномерного движения в данный момент времени путём мысленного развёртывания этого неравномерного движения в производное от него равномерное движение:

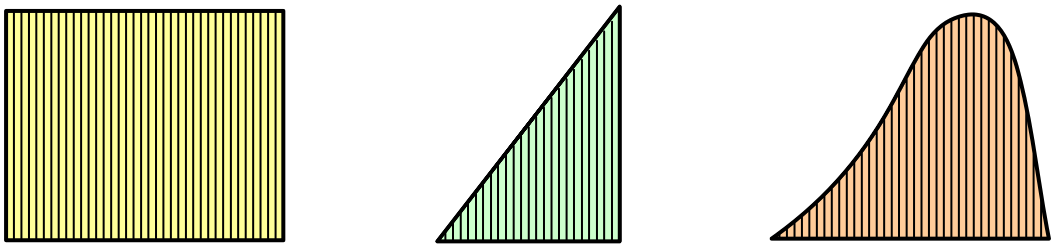
«В неравномерном движении скорость в какое-либо мгновение измеряется путём, какой был бы описан движущейся точкой, если бы она равномерно двигалась некоторое время с той же степенью скорости, с какой она движется в это данное мгновение».

Когда мы говорим, что в данный момент времени тело имело скорость 10 м/с, это означает, что если бы с этого момента времени оно продолжило своё движение равномерно, оно прошло бы за следующую секунду 10 м. В действительности же оно могло изменить за эту секунду свою мгновенную скорость весьма заметным образом, пройдя «через бесконечное число последовательных степеней скорости».

Представление движения на графике

Равномерные и неравномерные движения рассматривал ещё один средневековый учёный — Николай Орем, живший во Франции в середине XIV века. В трактате «О конфигурации качеств» он предложил графическую модель движения, в которой мгновенные скорости изображались перпендикулярами к горизонтальному отрезку, представлявшему время движения, а само движение как целое характеризовалось фигурой движения, составленной из всего бесконечного множества перпендикуляров.

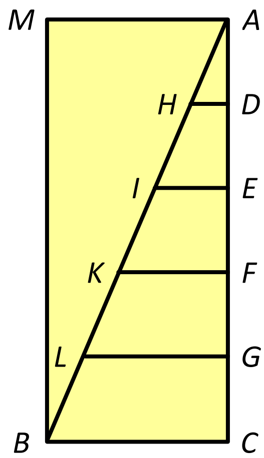
Такой взгляд на движение позволил Орему классифицировать движения по их «фигурности» и различить равномерные движения, изображаемые прямоугольниками (такие движения он называл униформными), равноускоренные движения, изображаемые трапециями и треугольниками (такие движения он называл униформно-дифформными), а также движения более сложной формы.



Теорема о средней скорости

Это же представление обнаруживается впоследствии у Галилео Галилея, воспроизводящего в «Диалоге о двух главнейших системах мира» (1632) теорему о средней скорости равноускоренного движения, доказанную тремя столетиями ранее Хейтсбери и Оремом. Галилея интересует, какое расстояние пройдёт за данное время тело, свободно падающее из исходного состояния покоя, если считать, что мгновенная скорость свободно падающего тела нарастает пропорционально времени движения.

«Если приращение скорости в ускоренном движении идёт непрерывно, то нельзя разбить его на какое-то определённое число постоянно возрастающих градусов скорости, потому что, изменяясь каждое мгновение, они бесчисленны. Поясним нашу мысль примером, изобразив треугольник, например *ABC*, отложив на стороне *AC* произвольные равные части *AD*, *DE*, *EF*, *FG* и проведя через точки *D*, *E*, *F*, *G* прямые линии, параллельные основанию *BC*, и представив себе, что части, отмеченные на линии *AC*, изображают равные промежутки времени, параллели же, проведенные через точки *D*, *E*, *F*, *G*, изображают градусы скорости, увеличивающиеся и возрастающие равномерно за равные промежутки времени, а точка *A* — состояние покоя. Выйдя из состояния покоя, движущееся тело приобретёт, скажем, за время *AD* градус скорости *DH*; в следующий промежуток времени скорость по сравнению с градусом *DH* возрастет до градуса *EI* и становится все большей в последовательные промежутки времени соответственно увеличению линий *FK*, *GL* и т. д. Ускорение совершается непрерывно от одного мгновения к другому, а не скачками от одного интервала времени определенной величины к другому. Поэтому, приняв точку *A* за наименьший момент скорости, то есть как бы за состояние покоя и за первое мгновение последующего времени *AD*, мы ясно увидим, что до приобретения градуса скорости *DH* в течение времени *AD* тело прошло через бесконечное множество всё меньших градусов, приобретённых за бесконечное множество мгновений, заключающихся в промежутке времени *DA* и соответствующих бесконечному множеству точек, содержащихся в линии *DA*. Поэтому, чтобы представить бесконечное множество градусов скорости, предшествующих *DH*, нужно мысленно провести бесконечное множество всё меньших и меньших линий, проходящих от бесконечного множества точек линии *DA* параллельно *DH*; такое бесконечное множество линий дает нам в пределе площадь треугольника *AHD*. Отсюда мы поймём, что какое бы пространство не проходило тело, движущееся таким движением, которое, начинаясь с покоя, идет равномерно ускоряясь, оно израсходовало и использовало бесконечное множество возрастающих градусов скорости в соответствии с бесконечным множеством линий, которые, начинаясь от точки *A*, мыслятся проведёнными параллельно линиям *HD*, *IE*, *KF*, *LG*, *BC* при продолжении движения сколь угодно далеко.



Построим теперь полный параллелограмм *AMBC* и продолжим до пересечения с его стороной *BM* не только параллели, проведенные на чертеже в треугольнике, но и всё бесконечное число тех, которые мыслятся исходящими от всех точек стороны *AC*; и подобно тому, как *BC* была наибольшей из бесконечного множества параллелей в треугольнике и представляла нам наибольший градус скорости, приобретённый телом, движущимся ускоренно, а вся площадь этого треугольника была совокупностью и суммой всей скорости, с которой оно прошло данное пространство за время *AC*, так же точно параллелограмм является совокупностью и агрегатом стольких же градусов скорости, причем каждый из них равен наибольшему *BC*; эта совокупность скоростей оказывается вдвое больше совокупности возрастающих скоростей в треугольнике, также, как и параллелограмм вдвое больше треугольника. Таким образом, если движущееся тело, которое при падении использовало градусы возрастающей скорости соответственно треугольнику *ABC*, за данное время прошло некоторое расстояние, то у нас есть достаточное основание и вероятие полагать, что оно, пользуясь скоростями униформными, соответствующими параллелограмму, проходит за то же время равномерным движением расстояние, вдвое большее, чем пройденное ускоренным движением».

Две взаимно обратные задачи кинематики

Теперь обратимся к двум основным задачам кинематики, сформулированным великим английским учёным Исааком Ньютоном в трактате «Метод флюксий и бесконечных рядов» (1671).

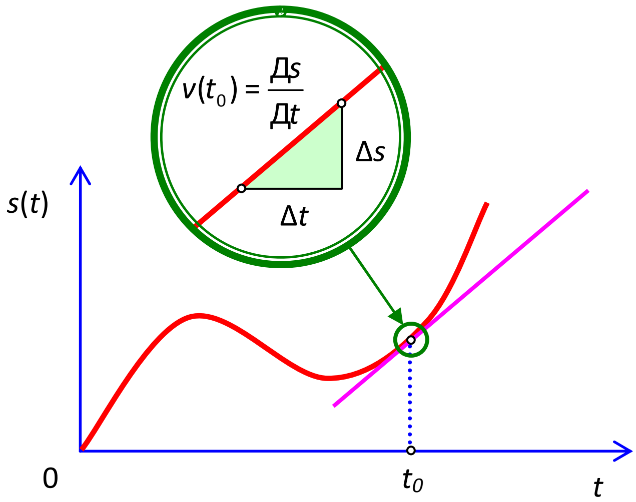
Задача I. Длина проходимого пути постоянно дана; требуется найти скорость движения в предложенное время.

Задача II. Скорость движения постоянно дана; требуется найти длину пройденного пути в предложенное время.

Рассмотрим сначала первую, а потом вторую задачу.

Мгновенная скорость как скорость «касательного движения»

Пусть зависимость проходимого расстояния от времени $s(t)$ задана графически. Чтобы определить по этому графику мгновенную скорость движения в момент времени t_0, рассмотрим малую окрестность точки A с координатами $(t_0, s(t_0))$ *«под сильным увеличением»*. Если график функции $s(t)$ был в окрестности точки A достаточно гладким, его малая часть будет почти неотличима от прямолинейной касательной к этому графику, проходящей через точку A. Тем самым мгновенная скорость неравномерного движения будет совпадать со скоростью «касательного» равномерного движения, и её величина будет определяться отношением $\Delta s/\Delta t$ для касательной.



Если зависимость $s(t)$ задана формулой, естественно попробовать выразить формулой и зависимость $v(t)$. Будем рассматривать касательную, проведённую к графику $s(t)$ через точку A, как предельное состояние секущей, проходящей через ту же самую точку A $(t_0, s(t_0))$ и отличную от неё точку B $(t_0 + \Delta t, s(t_0 + \Delta t))$, возникающее при $\Delta t \to 0$. График секущей задаёт равномерное движение с постоянной скоростью

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Устремив в этом выражении $\Delta t \to 0$, определим мгновенную скорость движущегося тела как предел отношения $\Delta s/\Delta t$:

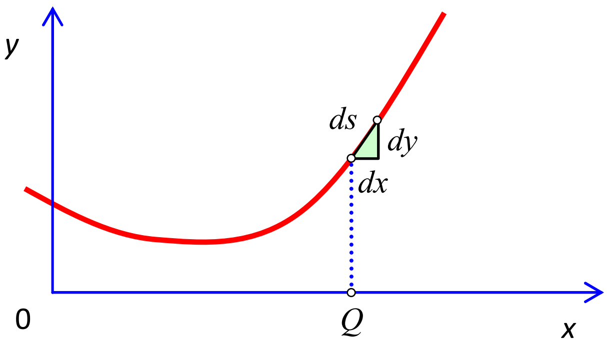
$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}} \tag{8.1}$$

Что такое касательная?

Как говорил Готфрид Вильгельм Лейбниц, являющийся наряду с Исааком Ньютоном одним из создателей дифференциального и интегрального исчисления,

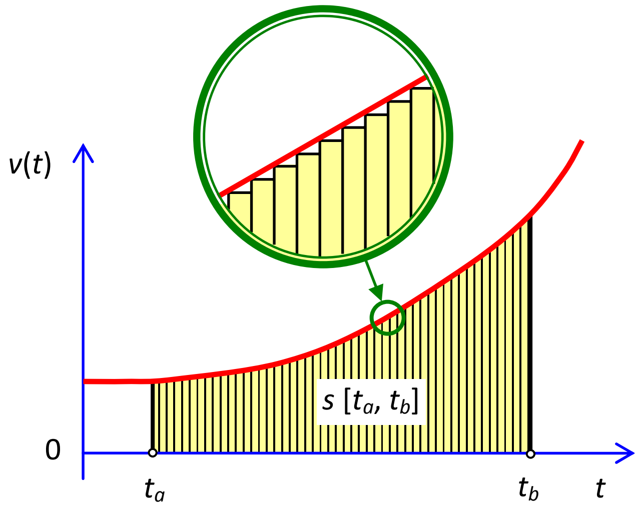
«найти касательную — значит провести прямую, соединяющую две точки кривой, расстояние между которыми бесконечно мало, или же провести продолженную сторону бесконечноугольного многоугольника, который для нас равнозначен кривой».

Представление о том, что кривая линия составлена из бесконечно малых прямолинейных отрезков, получает дальнейшее развитие в идее *характеристического треугольника*, которой мы и воспользовались при определении мгновенной скорости. Таким термином Лейбниц предложил называть бесконечно малый прямоугольный треугольник с катетами dx, dy и гипотенузой ds (будучи бесконечно малым, этот треугольник по сути дела не может быть изображён на чертеже, но мы всё же даём его условное изображение). Хотя длины сторон характеристического треугольника по отдельности и являются неопределёнными, однако между собой они имеют вполне определённое отношение dy/dx.



Пройденный путь как площадь под графиком скорости

Рассмотрим обратную задачу нахождения зависимости $s(t)$ по данной зависимости $v(t)$. Разобьём всё время движения на интервале $[t_a, t_b]$ на малые интервалы $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ и будем приближённо считать, что на каждом таком интервале тело двигалось с постоянной скоростью $v(t_n)$.



За каждый отдельный интервал Δt тело проходит частичное расстояние $s_n = v(t_n)\Delta t$; соответственно полное расстояние, которое тело пройдёт на интервале $[t_a, t_b]$, будет равно сумме всех частичных расстояний s_n:

$$s = \sum_n s_n = \sum_n v(t_n)\Delta t\ .$$

На чертеже эта сумма изображается столбчатой фигурой под графиком скорости. При стремлении $\Delta t \to 0$ эта сумма превратится в площадь под графиком скорости, так что путь s, пройденный на интервале $[t_a, t_b]$, будет определяться соотношением

$$\boxed{s = \int_{t_a}^{t_b} v(t)dt} \qquad (8.2)$$

9. Основы дифференциального и интегрального исчисления

Основные понятия

Основную роль в исчислении бесконечно малых играют введённые Лейбницем понятия *переменной величины*, а также её *дифференциала* и *интеграла*. Дифференциал по Лейбницу есть бесконечно малая разность двух бесконечно близких значений переменной величины. Дифференциал переменной величины g обозначается символом dg.

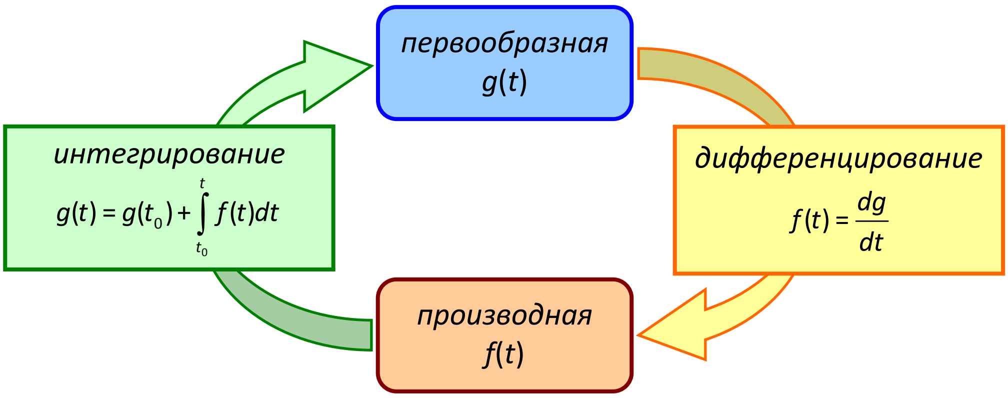
Сама переменная величина при таком рассмотрении оказывается суммой бесконечно большого числа своих дифференциалов. Такая сумма называется *интегралом*, что символически обозначается так:

$$g = \int dg \,.$$

Пусть переменная величина $g(t)$ является функцией другой переменной величины t. При данном значении t отношение дифференциалов dg/dt может рассматриваться как функция $f(t)$:

$$\frac{dg}{dt} = f(t)\,.$$

Функцию $g(t)$ называют *первообразной* по отношению к функции $f(t)$; соответственно функцию $f(t)$ называют *производной* по отношению к функции $g(t)$.



Операция перехода от первообразной функции к производной называется *дифференцированием*. Обратная операция перехода от производной функции к первообразной называется *интегрированием*.

Проинтегрировать $f(t)$ по t — значит перейти от дифференциала $dg = f(t)dt$ к его интегралу $g(t)$. Пусть начальное значение аргумента t есть t_0; в таком случае

$$g(t) = g(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(t)dt\,.$$

Теорема Ньютона-Лейбница

Значение некоторых определенных интегралов ранее находилось нами с помощью какой-либо разновидности метода интегральных сумм. Теперь это значение может быть найдено как разность значений первообразной на концах интервала интегрирования. Это утверждение составляет содержание **теоремы Ньютона-Лейбница**:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt = g(t_1) - g(t_0) \qquad (9.1)$$

Дифференциал суммы

Дифференциал суммы равен сумме дифференциалов:

$$d(u + v) = du + dv \qquad (9.2)$$

Поэтому интеграл суммы равен сумме интегралов:

$$\int \{f_1(x) + f_2(x)\}dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \qquad (9.3)$$

Дифференциал постоянной величины

Дифференциал постоянной величины равен нулю:

$$dC = 0 \qquad (9.4)$$

Из (9.2) и (9.4) следует, что прибавление константы к переменной величине, стоящей под знаком дифференциала, не меняет величины самого дифференциала:

$$d(u + C) = du.$$

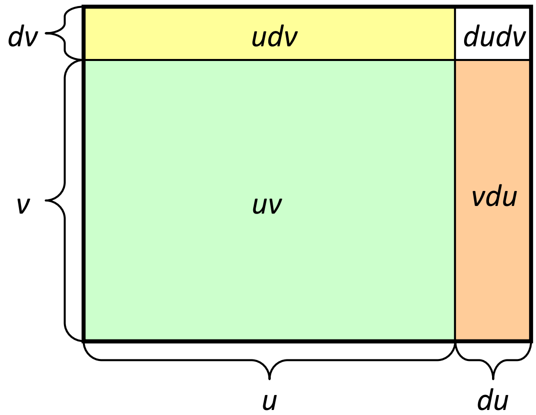
Тем самым первообразная функция определена с точностью до константы.

Дифференциал произведения

Если каждому сомножителю в произведении двух переменных величин uv придать соответствующее бесконечно малое приращение du и dv, то само произведение получит приращение

$$d(uv) = udv + vdu + dudv,$$

что следует из простой геометрической схемы:



Последнее слагаемое *dudv* следует отбросить, поскольку оно является бесконечно малым по сравнению со слагаемыми *udv* и *vdu*. Тем самым имеет место дифференциальное соотношение

$$d(uv) = udv + vdu \tag{9.5}$$

Дифференциал степенной функции

Дифференциал произвольной степени с натуральным показателем находится с помощью формулы (9.5), что приводит к доказываемой по индукции формуле

$$d(x^m) = mx^{m-1}dx \tag{9.6}$$

Рассмотрим теперь случай рационального положительного показателя. Пусть $y = x^{p/q}$, тогда $y^q = x^p$. Дифференцируя обе части этого равенства, получаем

$$qy^{q-1}dy = px^{p-1}dx\ ,$$

откуда

$$dy = (p/q)x^{p/q-1}dx\ .$$

Аналогичным образом поступим и в случае рационального отрицательного показателя. Пусть $y = x^{-p/q}$, тогда $y^q x^p = 1$. Дифференцируя обе части этого равенства, получаем

$$qy^{q-1}x^p dy + py^q x^{p-1}dx = 0\ ,$$

откуда

$$dy = -(p/q)x^{-p/q-1}dx\ .$$

Тем самым и в общем виде для произвольного рационального показателя:

$$d(x^s) = sx^{s-1}dx \tag{9.7}$$

Справедливость формулы (9.7) для произвольного действительного показателя обеспечивается переходом по непрерывности, которого мы здесь проделывать не будем.

Дифференциал сложной функции

Если переменная величина z является функцией другой переменной величины y, а эта другая величина y является функцией третьей переменной величины x, то говорят, что переменная величина z представляет собой сложную функцию от переменной величины x: $z(y(x))$. Пусть переменная x получила бесконечно малое приращение dx. Тогда и переменная y получила бесконечно малое приращение dy. Это изменение в свою очередь, приводит к тому, что переменная z получила бесконечно малое приращение dz. Эту связь бесконечно малых приращений естественно представить в виде цепной формулы

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \tag{9.8}$$

К примеру, пусть $z(y) = \sqrt{y}$, $y(x) = 1 + x^2$. Тогда $z(x) = \sqrt{1+x^2}$. Найдём связь между дифференциалами dz и dx, опосредовав её дифференциалом dy.

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \frac{dy}{dx} = 2x, \quad \text{отсюда } \frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Дифференциалы показательной и логарифмической функций

Чтобы найти дифференциал показательной функции, запишем

$$d(e^x) = e^{x+dx} - e^x = e^x(e^{dx} - 1).$$

В силу (7.7) $e^{dx} = 1 + dx$, поэтому

$$d(\exp x) = \exp x \cdot dx \tag{9.9}$$

Теперь найдём дифференциал логарифмической функции. Поскольку $\exp(\ln x) = x$, тем самым $d(\exp(\ln x)) = dx$. Применяя формулу для дифференциала сложной функции, получаем цепочку соотношений

$$\frac{d\exp(\ln x)}{d\ln x} d\ln x = dx \to \exp(\ln x) \cdot d\ln x = dx \to x \cdot d\ln x = dx.$$

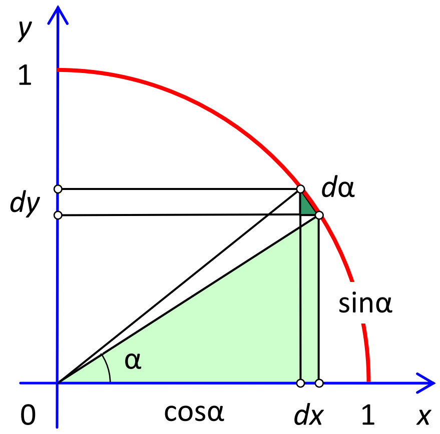
Отсюда получаем

$$d(\ln x) = dx / x \tag{9.10}$$

Дифференциалы синуса и косинуса

Радианной мерой угла называется длина дуги, высекаемой этим углом на окружности единичного радиуса, центр которой находится в вершине угла. Радианная мера угла исключительна удобна в математике и механике, поскольку дифференциальные соотношения для тригонометрических функций принимают с её использованием самый простой вид.

Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Отметим на ней произвольную точку с координатами $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Построим для этой точки бесконечно малый треугольник, гипотенуза которого $d\alpha$ является касательной к окружности, а катеты $dx = d(\cos\alpha)$, $dy = d(\sin\alpha)$ параллельны осям координат.



Из подобия конечного и бесконечно малого треугольников следуют дифференциальные соотношения

$$d(\sin\alpha) = \cos\alpha \cdot d\alpha \quad (9.11)$$

$$d(\cos\alpha) = -\sin\alpha \cdot d\alpha \quad (9.12)$$

Интегрирование по частям

Интегрирование по частям представляет собой приём, в некотором смысле обратный приёму дифференцирования произведения. Интегрируя (9.5), получаем

$$u_2 v_2 = u_1 v_1 + \int_{v_1}^{v_2} u dv + \int_{u_1}^{u_2} v du,$$

откуда

$$\int_{v_1}^{v_2} u dv = (u_2 v_2 - u_1 v_1) - \int_{u_1}^{u_2} v du \quad (9.13)$$

Примеры:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C;$$

$$\int x e^x dx = \int x de^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Производные высших порядков

Производную данной функции $u(t)$ символически обозначим через u'. В свою очередь, производную функции u' обозначим через u'', производную функции u'' обозначим через u''', и т. д.

$$\begin{aligned}
&u' = \frac{du}{dt},\\
&u'' = \frac{du'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{d^2u}{dt^2},\\
&u''' = \frac{du''}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right)\right) = \frac{d^3u}{dt^3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

К примеру,

$$\begin{aligned}
&(\sin x)' = \cos x,\\
&(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x,\\
&(\sin x)''' = (-\sin x)' = -\cos x,\\
&(\sin x)'''' = (-\cos x)' = \sin x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Задание для самостоятельной работы

1. Выедите формулу для дифференциала частного. Исходя из формул для дифференциалов синуса и косинуса, получите формулу для дифференциала тангенса.

2. Выведите формулу для дифференциала общей показательной зависимости u^v, где u и v — переменные величины.

Глава 4

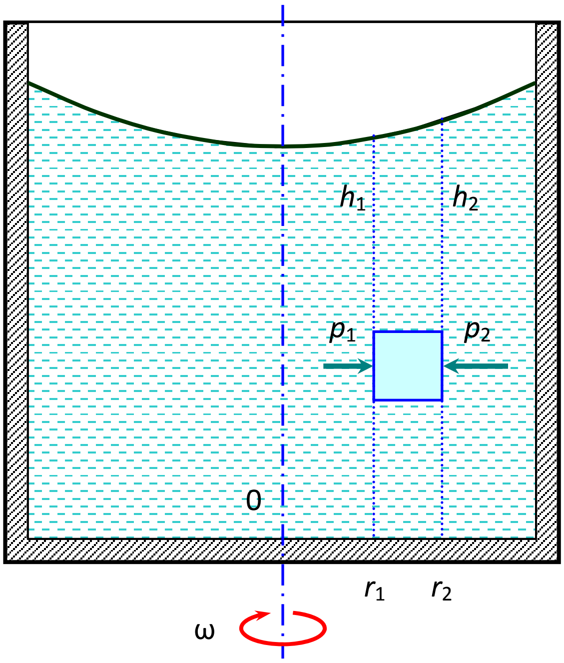
ПРИЛОЖЕНИЯ АНАЛИЗА К МЕХАНИКЕ

10. Составление и интегрирование дифференциальных уравнений

Форма поверхности жидкости во вращающемся стакане

Задача 1. Требуется найти, какую форму принимает поверхность жидкости в вращающемся стакане, и установить, как форма этой поверхности зависит от угловой частоты вращения ω.

Прежде всего надо понять, какая сила вынуждает отдельные частицы воды двигаться по окружности. Очевидно, это разность сил давления, приложенных к каждой частице по радиальному направлению.



Выделим бесконечно малый элемент жидкости, торцы которого ограничены радиусами r_1 и $r_2 = r_1 + dr$, и имеют площадь S. Пусть на внутренний торец действует давление p_1, на внешний — давление $p_2 = p_1 + dp$. Разность давлений возникает за счёт разности уровней жидкости $dh = h_2 - h_1$; а именно, $dp = \rho g \cdot dh$. Тем самым разность сил давления, действующих на торцы выделенного элемента, равна $\rho g S \cdot dh$.

Эта сила служит причиной центростремительного ускорения $\omega^2 r$, с которым движется выделенный элемент. Масса этого элемента равна произведению его плотности на объём: $dm = \rho S \cdot dr$. Согласно второму закону Ньютона, действующая сила равна произведению массы на ускорение. Тем самым мы получаем дифференциальное уравнение, описывающее форму поверхности жидкости во вращающемся стакане:

$$dh = \frac{\omega^2}{g} r dr\,. \qquad (10.1)$$

Интегрируя это уравнение, находим, что

$$h = h_0 + \frac{\omega^2}{g}\int_0^r r dr = h_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}, \qquad (10.2)$$

где h_0 — глубина жидкости на оси сосуда. Мы видим, что поверхность жидкости во вращающемся сосуде принимает форму параболоида вращения.

Large Zenith Telescope
http://www.astro.ubc.ca/LMT/lzt

Поскольку зеркала в телескопах должны иметь форму параболоидов вращения, ещё более ста лет назад американским физиком Робертом Вудом была высказана идея строительства телескопов с жидкими зеркалами. Стоимость таких телескопов с зеркалами диаметром в несколько метров будет составлять лишь несколько процентов от стоимости телескопов с обычными стеклянными зеркалами. Правда, такие жидкостные телескопы имеют существенный недостаток — они могут смотреть только в зенит. Впрочем, для некоторых специальных целей такие телескопы могут быть вполне пригодны. Именно на таких принципах работает Большой зенитный телескоп (LZT) с диаметром зеркала в 6 метров, находящийся в Канаде.

Торможение в среде, сила сопротивления которой пропорциональна скорости тела

Задача 2. При малых скоростях и большой вязкости среды сила сопротивления среды пропорциональна скорости движущегося в этой среде тела: $F = -kv$. Требуется установить, как при торможении в такой среде зависят от времени скорость движущегося тела и пройденное им расстояние.

Пусть движущееся тело за бесконечно малое время dt изменяет свою скорость на dv. По второму закону Ньютона приобретаемый телом импульс mdv равен импульсу силы Fdt. Поэтому дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\,dv = -kv\,dt\,. \tag{10.3}$$

Заметим, что комбинация m/k имеет размерность времени; обозначим её буквой τ. В уравнении (10.3) мы можем разделить переменные v и t, переписав его в виде

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau}\,.$$

Теперь можно по отдельности проинтегрировать как левую, так и правую часть уравнения. При интегрировании сразу же учтём, что в начальный момент времени $t = 0$ начальная скорость тела была равна v_0:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t dt\,.$$

Отсюда получаем

$$\ln(v / v_0) = -(t / \tau)\,.$$

Выражая v через t, находим зависимость скорости от времени:

$$v = v_0 e^{-t/\tau}\,. \tag{10.4}$$

Мы видим отсюда, что скорость экспоненциально падает со временем.

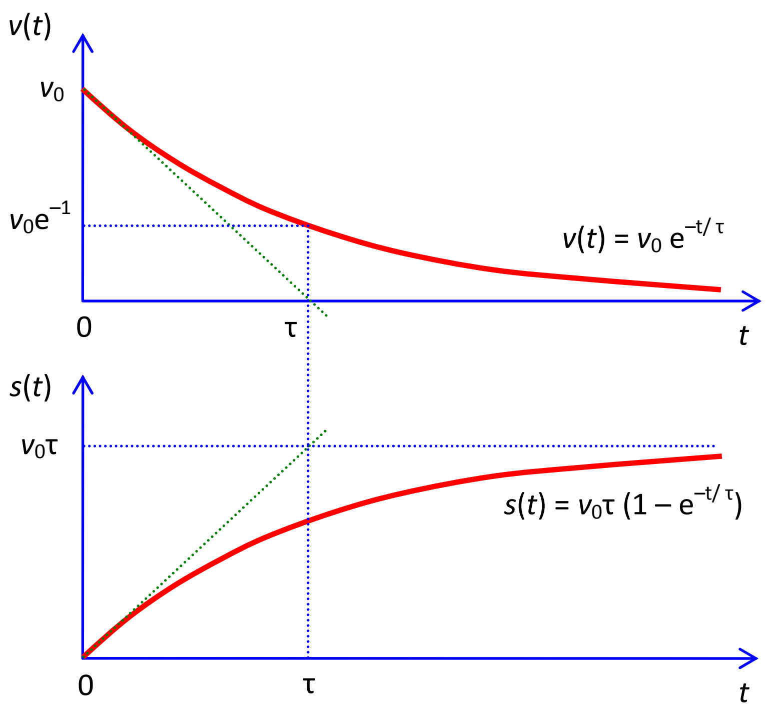
Пройденное расстояние — это интеграл от скорости по времени:

$$s = v_0 \int_0^t e^{-t/\tau} dt\,.$$

Чтобы взять интеграл, сделаем замену $y = -t/\tau$:

$$s = v_0 \int_0^t e^{-t/\tau} dt = v_0\tau \int_0^{t/\tau} e^{-y} dy = v_0\tau\left[-e^{-y}\right]_0^{t/\tau} = v_0\tau(1 - e^{-t/\tau})\,. \tag{10.5}$$

Мы видим, что при достаточно больших временах величина в скобках сколь угодно близко подходит к единице снизу, никогда не превышая её; поэтому тело подходит к предельной отметке расстояния $v_0\tau$, никогда не переходя за неё.



Торможение в среде, сила сопротивления которой пропорциональна квадрату скорости тела

Задача 3. Опыты показывают, что сила сопротивления воздуха движущемуся телу в достаточно широких диапазонах скоростей пропорциональна квадрату скорости движущегося тела: $F = -kv^2$. Требуется найти, как при торможении тела в такой среде зависят от времени его скорость и пройденное им расстояние.

Соответствующее дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\,dv = -kv^2 dt\,. \tag{10.6}$$

Заметим, что комбинация m/k имеет размерность расстояния; обозначим её буквой σ. Разделим переменные, представим (10.6) в виде

$$\sigma \frac{dv}{v^2} = -dt\,.$$

При интегрировании сразу же учтём, что в начальный момент времени $t = 0$ начальная скорость тела была равна v_0:

$$\sigma \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -\int_0^t dt\,.$$

Взяв интегралы слева и справа, получаем

$$\frac{\sigma}{v} - \frac{\sigma}{v_0} = t\,.$$

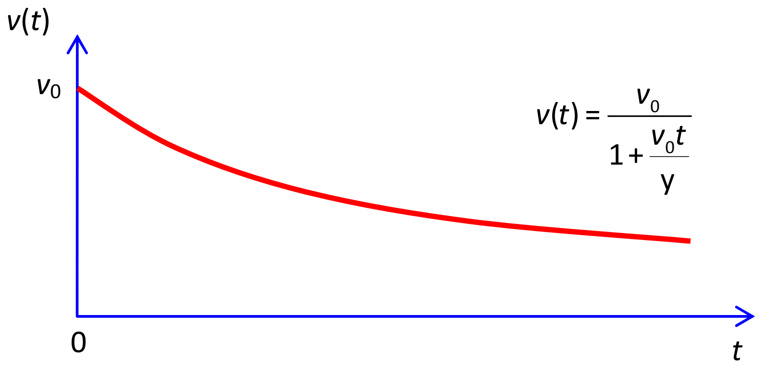
Выражая отсюда v, находим зависимость скорости от времени:

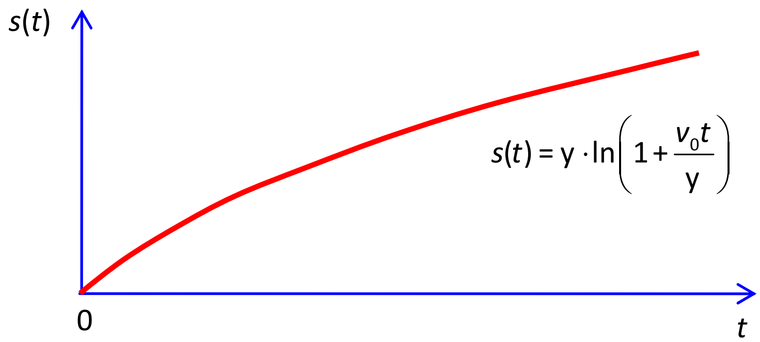
$$v = \frac{v_0}{1 + \dfrac{v_0 t}{\sigma}}.$$

Пройденное расстояние — это интеграл от скорости по времени. Чтобы взять этот интеграл, сделаем необходимые замены:

$$s = v_0 \int_0^t \frac{dt}{1 + \dfrac{v_0 t}{\sigma}} = \sigma \int_0^{\frac{v_0 t}{\sigma}} \frac{dy}{1+y} = \sigma \int_1^{1+\frac{v_0 t}{\sigma}} \frac{dz}{z} = \sigma \ln\left(1 + \frac{v_0 t}{\sigma}\right).$$

Отсюда мы видим, что расстояние растёт со временем логарифмически, так что рассматриваемое тело сможет пройти любое наперёд заданное расстояние — правда, за экспоненциально большое время.





Задание для самостоятельной работы

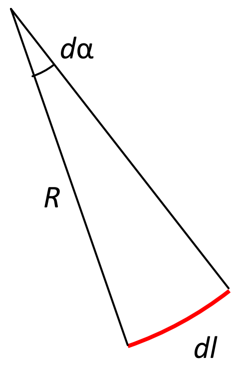
1. Тело падает из состояния покоя в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости. Найдите зависимость скорости от времени.

2. Цепочка длины L переброшена через блок, размеры и масса которого пренебрежимо малы по сравнению с размерами и массой цепочки. В начальный момент времени цепочка неподвижна, а её концы сдвинуты от положения равновесия вверх и вниз на расстояние l. Определите, за какое время цепочка сойдёт с блока.

11. Кривизна линии и изгиб балки

Определение

Рассмотрим кривую линию, проведённую на плоскости. В первом приближении можно считать, что всякая кривая линия локально является прямой, проходящей через две бесконечно близкие точки этой кривой. Во втором приближении, учитывающем кривизну кривой, можно считать, что всякая кривая линия локально является окружностью, проходящей через три бесконечно близкие точки этой кривой. Вычислим кривизну кривой в данной точке, исходя из геометрических соображений.



Пусть точка прошла по дуге расстояние dl, и её радиус-вектор, проведённый из центра кривизны, повернулся при этом на угол $d\alpha$. В таком случае

$$dl = R \cdot d\alpha \,,$$

и радиус кривизны

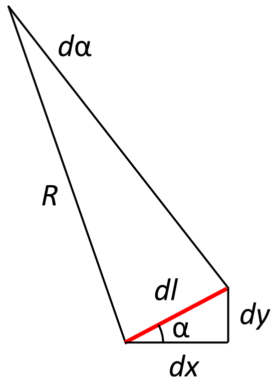
$$R = \frac{dl}{d\alpha}.$$

Удобнее иметь дело с величиной, обратной к радиусу кривизны. Эту величину называют кривизной кривой в данной точке (чем больше кривизна, тем меньше радиус) и обозначают греческой буквой «каппа»:

$$\kappa = \frac{d\alpha}{dl} \tag{11.1}$$

Вычисление кривизны кривой в декартовых координатах

Рассмотрим кривую, заданную в декартовых координатах уравнением $y = y(x)$ и поставим задачу вычисления кривизны этой кривой в некоторой точке.



Перепишем (11.1) в виде

$$\kappa = \frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{dx}{dl} = \frac{d\alpha}{dx}\cdot\cos\alpha\,. \tag{11.2}$$

Теперь обратимся к геометрическому определению производной

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha\,.$$

Дифференцируя это соотношение ещё раз по x, получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\operatorname{tg}\alpha}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx}\,.$$

Отсюда

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\cos^2\alpha\,,$$

и тем самым (11.2) переписывается в виде

$$\kappa = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\cos^3\alpha\,.$$

Но

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\,.$$

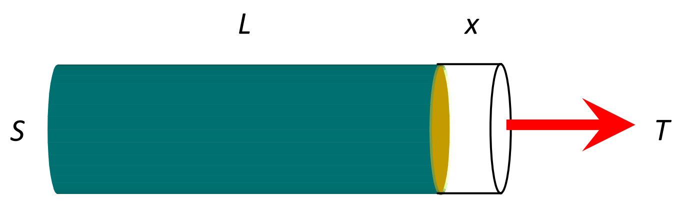
Отсюда окончательно

$$\boxed{\kappa = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}} \tag{11.3}$$

Изгиб балки

Задача 1. Балка прямоугольного сечения жёстко заделана в стену на одном из её концов. К другому концу перпендикулярно к балке приложена нагрузка F. Требуется найти форму, которую балка примет под этой нагрузкой. Прогибу балки следует считать малыми; собственным весом балки пренебречь.

Начнём с того, что дадим определение модуля Юнга. Рассмотрим стержень длины L и поперечного сечения S. Пусть этот стержень растягивается (или сжимается) в длину приложенной к нему силой T.



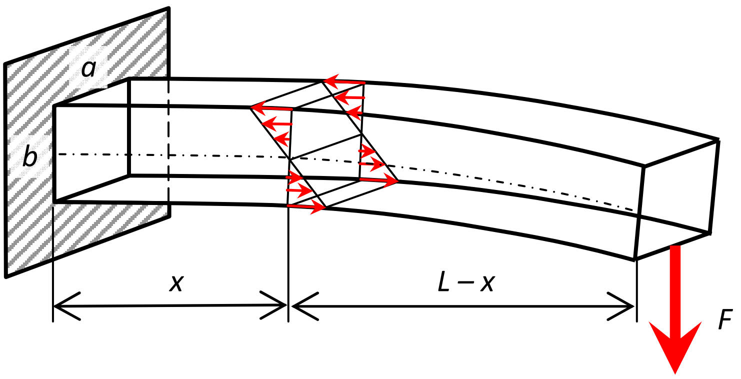
Пусть оказалось, что под действием этой силы стержень растянулся на длину x. Если деформации невелики и выполняется закон Гука, то деформация x будет пропорциональна силе T и длине L, а также обратно пропорциональна сечению стержня S. Модулем Юнга называется коэффициент пропорциональности E в формуле

$$E \cdot x = \frac{T \cdot L}{S}. \tag{11.4}$$

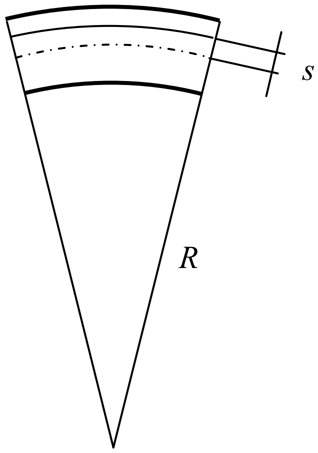
Отношение растягивающей силы T к площади S называется напряжением σ. Отношение растяжения x к длине стержня L называется деформацией ε. С учётом этих обозначений формулу (11.4) можно переписать в виде

$$\sigma = \varepsilon E. \tag{11.5}$$

Теперь вернёмся к нашей основной задаче. Рассмотрим произвольное сечение балки, отделённое от свободного конца расстоянием $(L - x)$. В этом сечении сила F создаёт изгибающий момент $-F(L - x)$. (Моменты, направленные по часовой стрелке, будем считать отрицательными.) Этот изгибающий момент растягивает верхние слои балки и сжимает нижние слои. При растяжении и сжатии возникают соответствующие напряжения. Эти напряжения создают внутренний вращающий момент сечения, которым уравновешивается момент внешней силы.



Расстояние по вертикали будем отсчитывать от нейтрального слоя, в котором продольные волокна балки не сжимаются и не растягиваются. Рассмотрим кусочек изогнутой балки, находящийся между двумя её близкими сечениями.



Деформация нейтрального слоя равна нулю. Деформация слоя, отстоящего от нейтрального слоя на расстояние s, равна отношению разницы длин этих двух слоёв к длине нейтрального слоя. Из геометрического подобия секторов заключаем, что $\varepsilon(s) = s/R$, где R — радиус кривизны рассматриваемого элемента балки. Воспользовавшись понятием кривизны балки $\kappa = 1/R$, перепишем это соотношение в виде

$$\varepsilon(s) = \kappa s\,. \tag{11.6}$$

Растягивающие и сжимающие напряжения связаны с соответствующими деформациями законом Гука (11.5), поэтому $\sigma(s) = E\varepsilon(s) = E\kappa s$. Тогда вращающий момент, создаваемый всеми напряжениями, действующими в одном сечении балки, равен

$$\int\limits_{-b/2}^{b/2} a\sigma(s)ds = \kappa\cdot Ea\int\limits_{-b/2}^{b/2} sds = \kappa\frac{Eab^2}{4}\,. \tag{11.7}$$

Стоящая в этом выражении композиция геометрических параметров называется геометрическим моментом инерции сечения прямоугольной балки:

$$J = \frac{ab^2}{4}\,. \tag{11.8}$$

Отсюда действующий в сечении вращающий момент равен κEJ.

Мы знаем, что при малых углах наклона кривой линии $y(x)$ к оси x её кривизна определяется формулой $\kappa = \frac{d^2y}{dx^2}$. Тем самым вращающий момент, действующий в соответствующем сечении изогнутой балки, будет равен $EJ\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$. Приравнивая его внешнему вращающему моменту $-F(L-x)$, получаем дифференциальное уравнение прогиба балки

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F}{EJ}\cdot(L-x)} \tag{11.9}$$

Интегрируя это уравнение и учитывая, что $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$, получаем искомое выражение для прогиба балки:

$$y(x) = \frac{F}{EJ} \cdot \left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} \right).$$

Задание для самостоятельной работы

1. Балка лежит своими концами на двух опорах и прогибается под собственным весом. Найдите её форму.

2. Балка лежит своими концами и серединой на трёх опорах. Найдите, как вес балки распределяется между этими тремя опорами.