А. В. Шаповалов

Как построить пример

Школьные
Математические
Кружки

А. В. Шаповалов

Как построить пример?

Электронное издание

Издательство МЦНМО
Москва, 2016

УДК 51(07)
ББК 22.1
Ш24

Шаповалов А. В.
Как построить пример?
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2016
80 с.
ISBN 978-5-4439-2370-3

Девятая книжка серии «Школьные математические кружки» призвана научить школьников строить математические примеры и конструкции. В книжку вошли разработки пяти занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для учителя.

Для удобства использования листочки занятий повторены в конце книги в виде раздаточных материалов. Ещё 50 задач с краткими решениями даны дополнительным списком. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она также будет интересна студентам педагогических вузов, школьникам и их родителям, а также всем любителям элементарной математики.

Подготовлено на основе книги: *А. В. Шаповалов*. Как построить пример? — 3-е изд., стереотип.— М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-0666-9.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2370-3

Предисловие

Данная книга содержит пять тематических занятий математического кружка 5–7 классов. В материалы каждого занятия входят: вступительный текст учителя, подробный разбор нескольких задач по теме занятия (включающий решения и комментарии), задачи для самостоятельного решения, решения этих задач с комментариями.

Кроме того, есть раздел «Дополнительные задачи», где даны около 50 задач разной сложности на построение примеров (или невозможность построения). Наиболее сложные задачи отмечены звёздочкой *. Для удобства в конце каждого занятия приведён список задач из дополнительного раздела, а также из других занятий, которые могут быть решены с использованием методов текущего занятия. Так как большинство задач может быть решено несколькими методами, одна и та же задача может фигурировать в нескольких списках.

В конце книги приведён раздаточный материал.

По сути, весь текст брошюры рассчитан на учителя, а не на школьника. Нормальный младшеклассник предпочитает решать и обсуждать решения, и уж вряд ли станет читать пространные рассуждения на тему «Как можно найти решение» (он скажет: а я решал по-другому). Задача учителя: включить в обсуждение то полезное, что он найдёт в этих текстах.

Особенность брошюры: решения задач и *пути к решению* тщательно разделены. Этим автор хотел подчеркнуть, что в задачах на конструкцию готовое решение (то, что школьник в идеале должен написать) и путь к решению (пояснение, как такое придумать) обычно имеют мало общего. Соответственно, и школьников стоит научить их разделять. Такое разделение полезно, впрочем, и для остальных математических задач.

Первые шесть задач каждого занятия — это, фактически, примеры для коллективного обсуждения. Сложность их различна: первые обычно — одноходовки, последние школьники, скорее всего, решить не успеют. Но даже если школьникам самим не удаётся быстро найти *нужное* решение, стоит его подсказать, в любом случае — разобрать на доске и показать на его примере работу *приёмов*.

Задачи для самостоятельного решения учителю стоит обсуждать индивидуально со школьниками, так или иначе продвинувшимися в их решении.

Соглашение о формулировках. Если в условии требуется *построить*, *разрезать*, *расставить*, то поиск *всех возможных вариантов не требуется* (а если он нужен, это специально оговаривается).

Автор благодарен С. Р. Когаловскому, общение с которым помогло ему прийти к пониманию необходимости разделять *решение* и *путь к решению*, и Л. Э. Медникову — за несколько ярких задач, внимательное прочтение книжки и комментарии, способствовавшие существенному улучшению её текста.

Введение

Как можно определить, есть у младшего школьника творческие способности к математике или нет? Надо дать ему нестандартную задачу. Почти наверняка в ней надо придумать какую-то конструкцию. Все мы помним такие задачи с детства: про волка, козу и капусту, разрежь и сложи, нарисуй, не отрывая карандаша от бумаги, расставь числа в кружочке. Оказывается, умение придумать не слишком зависит от оценки по «обычной» школьной математике. И понятно почему: традиционная оценка прежде всего оценивает умение применять *заранее выученные* приёмы в более-менее *стандартных* ситуациях. Это похоже на открывание двери, и цель обучения часто понимается так: дать ученику связку из как можно большего числа ключей и научить быстро выбирать нужный. Это, конечно, важный аспект обучения, но он не должен быть единственным, особенно при обучении математике.

Ведь в жизни попадаются *лёгкие*, *но не стандартные* задачи, когда надо что-то сделать, а готового рецепта «как сделать» нет. Ну не нашлось в связке подходящего ключа, а войти надо. Придётся что-то придумать...

Решение задач на построение примеров эту способность придумывать поддерживает и развивает.

Но ведь придумывать надо не только в математике. Придумывают учёные и поэты, шахматисты и цирковые артисты, бизнесмены и политики. Какое отношение такие задачи имеют собственно к обучению математике? Ведь главное, что отличает математику от других видов деятельности, — строгий стандарт доказательств. А тут придумал пример, один из многих, и доказывать ничего не надо?! Эдак не отличишь невежду от хорошо обученного школьника...

Подобные опасения лежат в основе кружковых программ, где умение строить конструкции рассматривается как своего рода «детская болезнь», от которой надо мягко, но настойчиво лечить.

Автор с таким подходом решительно не согласен. Во-первых, в задачах на конструкции математики ничуть не меньше. Во-вторых, научный опыт автора показал, что создание конструкций при поиске доказательств в «высокой математике» требуется ничуть не меньше, чем применение теорем. В конце концов, любое доказательство само по себе является конструкцией! Наконец, бóльшая часть школьников вовсе не станут профессиональными «чистыми» математиками. Более вероятно, что они будут применять свои знания и навыки в прикладной математике, программировании, других науках и вне науки. Так давайте учить их так, чтобы им эти навыки пригодились в любом случае.

В частности, будем учить их придумывать примеры так, чтобы изобретательность как минимум сохранялась, а строгость ей не только не мешала, но чем дальше, тем больше помогала. В решениях автор старался показать, что классические кружковые темы «Чётность», «Принцип Дирихле», «От противного», «Решение с конца» с тем же успехом работают при построении примеров, что и при доказательстве невозможности.

Занятие 1

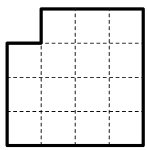
Как такое может быть?

Хороший вопрос — это половина ответа.

Если на вопрос «Может ли?» вы подозреваете ответ «Может», то стоит спросить себя: «Как такое может быть?». Уточните вопрос: «Какими свойствами эта конструкция должна обладать?». И хотя в задании о свойствах не спрашивается, но дополнительное знание может сильно сузить круг поисков или осветить дорогу. Какие именно свойства искать — зависит от задачи. Тут помогает как математический кругозор, так и здравый смысл. В задачах на разрезание считают число сторон, площади, длины, углы. В задачах на делимость раскладывают на простые множители и считают остатки.

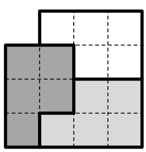
Шерлок Холмс говорил: «Я задаю себе вопросы и последовательно отбрасываю невозможные случаи. То, что останется, и будет правильным, каким бы невероятным это изначально не казалось».

Задавайте себе вопросы на протяжении всего построения. Вы с удивлением увидите, как много конструкций окажутся логичными и единственно возможными.



Задача 1.1. Можно ли квадрат 4×4 без угловой клетки (см. рис.) разрезать на 3 равные части?

Решение. Да, см. рис.



Путь к решению. Надо задаться вопросом о площади части. Вычислив, что площадь *целая* — равна пяти площадям клеток, естественно попробовать разрезать *по границам клеток* на 3 пятиклеточные фигуры.

Задача 1.2. Расшифруйте ребус (одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные — разные):

$$Б + БЕЕЕ = МУУУ.$$

Решение. $1 + 1999 = 2000$.

Путь к решению. Добавив однозначное число, мы увеличили разряд тысяч. Значит, оба четырёхзначных числа отличаются от «круглого» (кратного тысячи) числа не больше чем на 9. У таких чисел три одинаковые последние цифры могут быть только 999 или 000, и разница между такими числами равна 1.

Задача 1.3. Арбуз разрезали на 4 части и съели. Осталось 5 корок. Как такое может быть, если корок никто не грыз?

Решение. Проделав сквозную дырку, вырежем из арбуза продолговатый кусок мякоти с нашлёпками корки с двух сторон. Остальное разрежем на три части плоскими разрезами через ось дырки.

Путь к решению. На вопрос «Как такое могло быть» найдём ответ по принципу Дирихле: должна быть часть с двумя (или более) корками. Понятно, что эти корки соединены куском мякоти.

Задача 1.4. Найдутся ли три натуральных числа, которые друг на друга не делятся, но каждое делит произведение двух других?

Решение. Да. Например, 6, 10 и 15.

Путь к решению.

— Понятно, почему числа не делятся на самое большое из них, а почему не делятся на самое маленькое?

— Наверное, в маленьком есть простой множитель, которого нет в больших?

— Но произведение ведь делится, значит, где-то этот множитель есть...

— Есть в одном, а в другом его нет.

— Ладно, а почему тогда другое на маленькое число не делится?

— Значит, в нём нет другого простого множителя.

— Идея: пусть каждое число раскладывается на два простых множителя, а с любым другим у него только один общий простой множитель. Группируя попарно множители 2, 3, 5, получим пример.

Задача 1.5. Мюнхгаузен говорит: «Позавчера мне было 40 лет, а в следующем году мне исполнится 43». Могут ли его слова быть правдой?

Решение. Могут, если барон родился 31 декабря, а фразу произнёс 1 января.

Путь к решению. Как такое может быть? Если в следующем году барону исполнится 43, то в текущем — 42, а в прошлом — 41.

— Но ведь позавчера было ещё только 40?

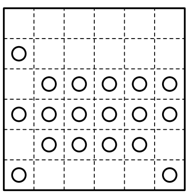
— Значит, 41 исполнилось вчера.

— Но ведь исполнилось в прошлом году?

— Значит, вчера был прошлый год.

Задача 1.6. Расставьте шашки на клетчатой доске 6×6 так, чтобы на всех горизонталях стояло разное число шашек, а на всех вертикалях — одинаковое.

Решение. Например, см. рис.



Путь к решению. Число шашек на горизонтали может быть любым — от 0 до 6. Это даёт 7 вариантов.

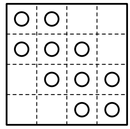
Если бы были 7 разных горизонталей, сумма была бы

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$$

Но один ряд надо убрать, и сумма при этом должна разделиться на 6. Единственная возможность — убрать 3. Далее надо так распределить шашки на горизонталях, чтобы в каждой вертикали оказалось по 3 шашки. Проще всего сгруппировать 5 с 1, а 4 с 2 так, чтобы каждая пара дала по одной шашке на каждую вертикаль (см. рис.).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.7. В квадрате 4×4 отметили 10 клеток (см. рис.). Разрежьте квадрат на четыре одинаковые по форме части так, чтобы они содержали соответственно 1, 2, 3 и 4 отмеченные клетки.



Задача 1.8. Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или отчество, или фамилия. Может ли так быть?

Задача 1.9. Дата 21.02.2012 читается одинаково слева направо и справа налево. А будут ли после неё ещё такие даты в нашем столетии?

Задача 1.10. Придумайте способ разрезать квадрат на семиугольник и восьмиугольник так, чтобы для каждой стороны восьмиугольника нашлась равная ей сторона семиугольника.

Задача 1.11. В однокруговом турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. «Спартак» одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?

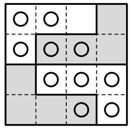
Задача 1.12. Барон Мюнхгаузен каждый день ходил на охоту, а возвратившись, говорил: «Сегодня я добыл уток больше, чем позавчера, но меньше, чем неделю назад».

а) Могли ли его слова 7 дней подряд быть правдой?

б) Какое наибольшее число дней подряд эти слова могли быть правдой?

Ответы и решения

Задача 1.7. См. рис.



Путь к решению. А как распределятся *пустые* клетки среди частей? Ясно, 0, 1, 2 и 3. Пустые клетки разбиты на две несвязанные группы. Могут ли в одну часть войти клетки из обеих групп? Нет, тогда часть должна быть из пяти клеток. Итак, 3 клетки одной группы целиком войдут в одну часть. Это сразу задаёт форму части в виде буквы Г (квадрат 2×2, очевидно, не подходит). С учетом симметрии, расположение части с тремя пустыми клетками — единственно. Дальнейшее очевидно.

Задача 1.8. Может. Например, Иван Ильич Шаров, Пётр Ильич Дугин, Иван Лукич Дугин, Пётр Лукич Шаров.

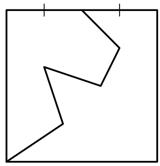
Путь к решению. Сколько раз может встретиться одно имя? У человека каждая из частей фамилии-имени-отчества должна совпадать не более чем с одним другим, но так как частей три, и других трое, то — ровно с одним. Итак, все имена, отчества и фамилии встречаются ровно по два раза, значит, всего имён, отчеств и фамилий тоже по два. Выпишем пару имён, пару отчеств, пару фамилий. Запишем любую комбинацию имени-отчества-фамилии. Тогда все другие комбинации определятся однозначно.

Задача 1.9. Будут, например 02.02.2020.

Путь к решению. Заметим, что цифры года определяют все цифры даты, и поищем ближайший год в будущем, у которого цифры, записанные в обратном порядке, дадут осмысленную дату.

Ложный след. Недостаточно, чтобы последняя пара цифр дала осмысленный день: дата 31.02.2013 не подходит, так как в феврале нет 31-го числа.

Задача 1.10. Подойдёт любое разрезание квадрата пятизвенной ломаной, начинающейся в одной из вершин и заканчивающейся серединой несмежной с этой вершиной стороны (см. рис.). Каждое звено на общей границе равно себе самому, каждая из сторон квадрата в восьмиугольнике равна стороне квадрата в семиугольнике, а половинка стороны квадрата в восьмиугольнике равна другой половинке этой стороны.



Путь к решению. Как вообще можно разрезать квадрат на семиугольник и восьмиугольник? Режем по ломаной, которая будет общей границей. Каждое её звено является стороной как семиугольника, так и восьмиугольника. Значит, у семи- и восьмиугольника должно отличаться на 1 число сторон, примыкающих к контуру квадрата. Но тогда общее число сторон на границе квадрата нечётно. Это получается за счёт примыкания двух сторон многоугольников к одной стороне квадрата. Значит, только один конец ломаной лежит на стороне квадрата (и разбивает её на две части-стороны), а другой лежит в вершине квадрата. Легко видеть, что по существу картинка может быть только такая, как в примере. Теперь уже для всех сторон восьмиугольника, кроме той, которая является частью стороны квадрата, есть равная ей сторона семиугольника. А часть стороны квадрата можно сделать равной либо второй части (разделив, как в примере, сторону пополам), либо построив такую ломаную, у которой есть звено нужной длины.

Задача 1.11. Мог. Возьмём много участников, скажем семь. Пусть все матчи без участия «Спартака» закончились вничью, «Спартак» выиграл два матча, а остальные четыре проиграл. Тогда у него — 4 очка, у победивших его — по 7, а у проигравших ему — по 5.

Путь к решению. Как могли обойти «Спартак» по очкам команды с меньшим числом побед? Только за счет ничьих. Раз очков у «Спартака» мало, то много поражений. В командах, победивших «Спартак», можно сделать эту победу единственной. Тогда «Спартаку» хватит двух побед. Чтобы другим обойти его по очкам, обеспечим им много ничьих между собой.

Задача 1.12. а) Нет, не могли. Пусть барон говорил правду с 8-го по 14-е число. Договоримся числом в скобках обозначать число добытых в этот день уток. Тогда

(8) > (6) > (13) > (11) > (9) > (7) > (14) > (12) > (10) > (8) — противоречие.

б) 6 дней. Например, барон мог убить в первые 13 дней месяца по такому количеству уток:

День	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Утки	**6**	**2**	**7**	**3**	**8**	**4**	**0**	**5**	**1**	**6**	**2**	**7**	**3**

Легко убедиться, что с 8-го по 13-е барон говорил правду.

Путь к решению. Чтобы разобраться, нет ли во многочисленных заявлениях барона противоречий, важно их представить *наглядно*. Добавим к «правдивым» дням предыдущую неделю и соединим каждый правдивый день стрелками с «позавчера» и с днем неделю назад, каждый раз направляя стрелку от дня с бóльшим (по словам барона) числом добытых уток к дню с меньшим. Получится *ориентированный граф*, на первый взгляд довольно запутанный. Распутаем его методом пуговиц и нитей: заменим дни пуговицами, а стрелки — гибкими нитями, и расположим всё так, чтобы пересечений по возможности не было. Для пункта а) у нас, среди прочего, получится *цикл*: некоторые стрелки образуют круг. Это даёт противоречие. Для пункта б) получится такая картинка без циклов:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
⑤ & & ③ & & ① & & & & & & ④ & & ② & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(12) & \longrightarrow & (10) & \longrightarrow & (8) & \longrightarrow & (6) & \longrightarrow & (13) & \longrightarrow & (11) & \longrightarrow & (9) & \longrightarrow & (7)
\end{array}
$$

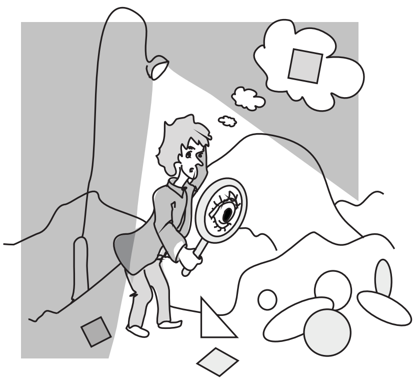
Теперь ясно, что можно 7-го числа добыть минимум уток (например, 0), а дальше идти против стрелок, увеличивая каждый раз число добытых уток на 1.

Можно также использовать задачи **2.9, 2.10, 2.12, 3.1, 3.3, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.10, 3.11, 4.1, 4.2, 4.8, 5.1, 5.2, 5.4, 5.9, Д1–Д10, Д12, Д15, Д19, Д20, Д22–Д25, Д27–Д29, Д33, Д35, Д38, Д40, Д43–Д45, Д47, Д48.**

Занятие 2

Ищи там, где легче. Высматривай знакомое

— Обронили там, а ищете здесь?!
— Так там темно, а здесь хоть фонарь горит...



Часто примеров много, а нужен только один. Избыток свободы может сбивать с толку: неясно, с чего начинать. Но ведь в жизни такая свобода не мешает: если все равно, где покупать, ищем нужный товар в первом попавшемся магазине, в магазине поближе, или в том, который лучше знаем, или там, где дешевле. Так и при поиске примера: главное — начать с чего-нибудь. Можно первые шаги сделать наугад, а дальше появятся ограничения, которым будем следовать. Но можно и самим наложить на себя ограничения, желательно такие, чтобы строить пример было легче. Например, пробуем разрезать по клеточкам. Или стараемся ставить шахматные фигуры подальше друг от друга, чтобы они друг друга не били. Вообще, можно и нужно применять *здравый смысл*, *естественные соображения*. Они ограничивают поле для поиска примера, но зато поиск убыстряется и облегчается. Вообще, ваш опыт гораздо больше, чем вы думаете. Ответом может оказаться хорошо знакомый объект, просто надо посмотреть на него под нужным углом.

Задача 2.1. Можно ли выписать несколько различных чисел по кругу так, чтобы каждое было равно сумме двух своих соседей?

Решение. Да, например, 1, 3, 2, -1, -3, -2.

Путь к решению. Выпишем первые два числа наугад и будем подбирать следующее так, чтобы предыдущее было равно сумме двух соседей. Ясно, что не стоит брать нули. Плохо также, если второе число в два раза больше первого — тогда третье равно первому. Зато отрицательные числа нам подходят. Начав с 1 и 3 и дождавшись повтора (седьмое число равно первому), получим пример.

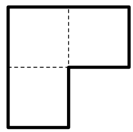
Замечание. Почти любая пара двух первых чисел даст пример из шести чисел. Подумайте, почему.

Задача 2.2. Можно ли расставить на шахматной доске более 30 коней так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Да. Расставим 32 коня на белые поля. Заметим, что кони на полях одного цвета друг друга не бьют.

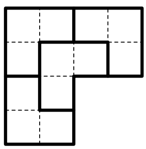
Путь к решению. Заметим, что кони точно не бьют друг друга, если стоят на полях одного цвета. Поэтому естественно попробовать расставить именно так. Собственно, можно доказать, что это и есть единственная (с точностью до цвета) максимальная расстановка.

Вообще, ученикам шахматная раскраска доски хорошо знакома. Использование её свойств — важное подспорье при решении задач.



Задача 2.3. Разрежьте уголок из трёх клеток (см. рис.) на четыре равные части.

Решение. Разобьём предварительно каждую клетку на четыре вдвое меньшие клеточки. Полученную фигуру из 12 клеточек нетрудно по границам клеточек разбить на 4 уголка, каждый из трёх клеточек (см. рис.).



Путь к решению. Резать по клеточкам проще — меньше вариантов, можно считать клеточки, да и опыта таких разрезаний больше. Если сетки нет, полезно её ввести, перерисовав картинку на клетчатую бумагу. «Неподходящую» сетку можно «улучшить», измельчив, укрупнив, сдвинув или повернув. Кроме квадратных сеток бывают ещё треугольные.

Задача 2.4. Можно ли выписать больше ста натуральных чисел (не обязательно различных) так, чтобы их сумма была равна их произведению?

Решение. Обычно произведение натуральных чисел больше их суммы. Но, добавив единицу, мы увеличим сумму на 1, а произведение не изменим. Возьмём теперь два числа, произведение которых больше их суммы более, чем на 100, например, 10 и 20: $10 \cdot 20 - (10 + 20) = 170 > 100$. Добавив к этим числам 170 единиц, получим нужный пример.

Путь к решению. Непросто работать с большим набором чисел. Но если среди чисел много одинаковых, то работать легче. Произведение натуральных чисел больше их суммы, если среди чисел нет единиц и сомножителей больше двух. Значит, возьмём побольше единиц. Если только одно число не равно 1, то сумма и произведение не совпадут. Оставив два числа, не равных единице, мы можем легко следить за ними и в то же время имеем достаточно свободы для поиска решения.

Задача 2.5. Найдите хотя бы одно решение уравнения

$$28x + 30y + 31z = 365$$

в натуральных числах.

Решение. Вспомним, что 365 — число дней в году, а 28, 30 и 31 — число дней в месяце. 28 дней — это только февраль, 30 дней — апрель, июнь, сентябрь и ноябрь, 31 день — в остальных семи месяцах. Значит, подходит $x = 1$, $y = 4$, $z = 7$.

Замечание. Есть ещё решение $x = 2$, $y = 1$, $z = 9$, но это уже надо считать!

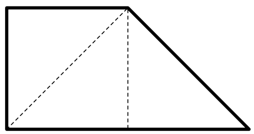
Задача 2.6. Раскрасьте точки плоскости в три цвета так, чтобы на любой прямой были точки не более чем двух цветов и все цвета были использованы.

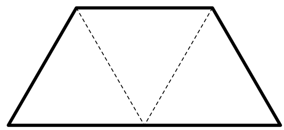
Решение. *Первый способ.* Возьмём синие оси координат на белой плоскости и отметим начало координат чёрным цветом. Тогда на любой прямой, проходящей через начало координат, все остальные точки либо белые, либо синие, а на остальных прямых нет чёрного цвета.

Второй способ. Проведём на белой плоскости прямую и раскрасим точки прямой произвольно в два цвета.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.7. Трапеция на рисунке слева составлена из трёх равных равнобедренных прямоугольных треугольников, а трапеция на рисунке справа — из трёх равных равносторонних треугольников. Разрежьте каждую из трапеций на 4 равные части.





Задача 2.8. Расставьте на шахматной доске 14 слонов так, чтобы они не били друг друга.

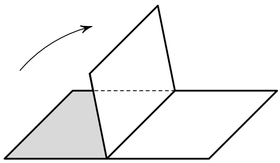
Задача 2.9. Петя задумал однозначное число. Вася может назвать своё число и спросить, чему равен наибольший общий делитель двух этих чисел. Может ли он подобрать такое число, чтобы по ответу наверняка узнать Петино число?

Задача 2.10. Разрежьте квадрат на равные треугольники и сложите из них два меньших неравных квадрата.

Задача 2.11. Перед вами три человека: двое нормальных, один — идиот. На вопрос, требующий ответа «Да» или «Нет», нормальные отвечают честно. Идиот же в смысл вопроса не вникает, а отвечает наугад. Каждый из них знает, кто есть кто. Как и вам за два вопроса определить про всех, кто есть кто?

Задача 2.12*. Разложите 100 орехов на 10 кучек так, чтобы в каждой кучке было разное число орехов, но никакую из них нельзя было бы разбить на две так, чтобы число орехов во всех 11 кучках оставалось различным.

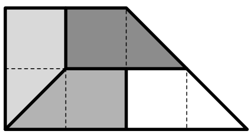
Задача 2.13. На квадратной доске со стороной 1 м лежат, не перекрывая друг друга, два плоских картонных квадратика — квадратный дециметр и квадратный сантиметр. Дима и Сима ходят по очереди. За ход игрок перекатывает свой квадрат через сторону (то есть выбирает сторону квадрата и переворачивает квадрат как листок в книге, так, чтобы именно эта сторона осталась на месте, см. рис.). После хода квадрат не должен выйти за пределы доски, даже частично. Дима катает дециметровый квадрат, а Сима — сантиметровый. Всегда ли Дима может действовать так, чтобы не позднее 100-го хода квадраты перекрылись по куску ненулевой площади?

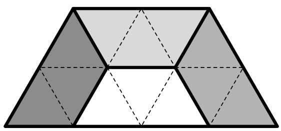


Задача 2.14*. В записи точного квадрата миллион цифр. Может ли количество чётных и нечётных цифр быть одинаковым?

Ответы и решения

Задача 2.7. а) Фактически трапеция состоит из квадрата и треугольника. Поместим её на такую клетчатую доску, чтобы квадрат накрыл ровно 4 клетки. Площадь трапеции равна шести клеткам, значит, площадь части должна быть полторы клетки. Попробуем разбить на части, состоящие из одной клетки и треугольной половинки клетки: получилось (см. рис. слева)!





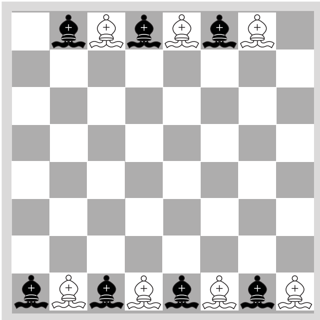
б) Разобьём каждый треугольник на 4 треугольничка вдвое меньшего размера.

Попробуем разбить на части, состоящие из трёх треугольничков каждая: получилось (см. рис. справа).

Задача 2.8. См. рисунок.

Путь к решению. Слоны на одной горизонтали друг друга не бьют. Но на горизонтали лишь 8 клеток. Попробуем взять две горизонтали.

Если разнести их на противоположные края, то взаимных побитий почти не будет!



Задача 2.9. Да. Пусть Вася назовёт число

$$2520 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7.$$

Оно делится на все однозначные числа. В ответ Петя назовёт *задуманное число*. Тут-то Вася его и определит.

Путь к решению. Проще всего определять, если вынудить Петю назвать его число. Для этого Васе достаточно назвать такое число, на которое Петино число заведомо делится. Например, подойдёт число 9!. А 2520 — это НОК однозначных чисел, самое маленькое подходящее число.

Комментарий. На самом деле указанная стратегия — единственно возможная. Петя в любом случае отвечает своим числом или его делителем. Но делитель — тоже число однозначное. Итак, если Петя ответил делителем, то на каком основании Вася мог исключить ту возможность, что у Пети был задуман именно этот делитель?

Задача 2.10. Разрежем квадрат 5×5 на клетки, а каждую клетку — диагональю на два треугольника. Сложим из каждой пары треугольников клетку. Из 16 клеток сложим квадрат 4×4, а из остальных девяти — квадрат 3×3.

Путь к решению. Нужно, чтобы сумма площадей меньших квадратов равнялась площади большого. Самый известный пример с целыми числами — это $3^2 + 4^2 = 5^2$ (стороны *египетского треугольника*; этот пример знают даже те, кто ещё не слышал про теорему Пифагора). Соответственно, квадрат со стороной 5 можно разрезать на единичные квадратики и сложить из них квадраты 4×4 и 3×3. Но ведь нужны треугольники? Нет проблем: разрежем каждый единичный квадратик диагональю на два треугольника!

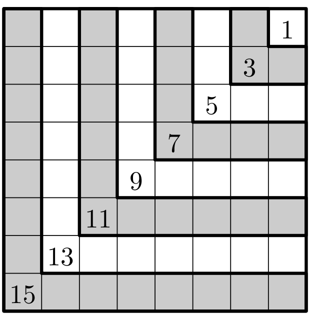
Задача 2.11. Спросим у первого про второго: «Он что, идиот?» Ответ «Да» будет означать, что кто-то из этих двоих идиот (а значит, третий — нормальный!). Ответ «Нет» будет означать, что идиот либо первый, либо третий (а значит, второй — нормальный!). Вторым вопросом спросим: «Он что, идиот?» — у нормального про первого. Зная всё про двоих, состояние головы третьего вычислим.

Путь к решению. Достаточно узнать, кто идиот. Давайте так прямо и спросим. Но не стоит спрашивать человека, не идиот ли он: невежливо, а главное — бесполезно: при ответе «Нет» мы ничего не узнаем. Лучше спросить у одного про другого: «Он что, идиот?» В обоих случаях мы наверняка узнаем одного нормального и второй вопрос адресуем ему.

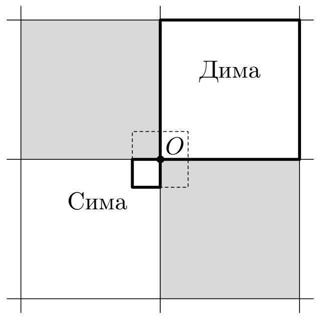
Задача 2.12. Положим в кучки 1, 3, 5, 7, ..., 19 орехов. При попытке разбить кучку из нечётного числа орехов на две в одной из частей окажется меньшее нечётное число орехов, что и даст совпадение.

Путь к решению. Поискав, «где полегче», приходим к выводу, что размеры кучек не идут подряд, а разбросаны. Равных среди них нет. Как же отследить, что при разделении кучки возникает часть, равная одной из меньших кучек? Какое свойство наследуется одной из частей? Есть такое свойство: нечётность!

Полезно здесь знать и такой факт: точный квадрат представляется как сумма последовательных нечётных чисел. Это наглядно видно при разрезании квадрата на уголки, число клеток в каждом уголке нечётно (см. рис.).



Задача 2.13. Нет, не всегда. Разобьём поле на дециметровые клетки и раскрасим их в шахматном порядке. Накроем большим квадратом любую клетку. К некоторой её вершине O примыкает вершиной (но не стороной) клетка того же цвета. Поместим в этот угол малый квадрат. Теперь квадраты соприкасаются углами. Пусть первым ходит Дима. После каждого его хода его квадрат накрывает ровно одну клетку, при этом цвета клеток чередуются. Стратегия Симы: оставаться одной вершиной в точке O, не ходя на клетку с большим квадратом. Тогда Сима тоже чередует цвет клетки, на которой находится. После хода Димы цвета разные, поэтому Дима малый квадрат не накроет. А у Симы всегда есть выбор из двух клеток, и она ходит на свободную.



Путь к решению. Дети хорошо знают, как маленькому убежать от большого: надо бегать вокруг стола. По сути, именно это здесь и происходит: малый квадрат «бегает» вокруг точки O, все время оказываясь напротив большого. Разбиение на клетки помогает найти «безопасную точку», а чередование цветов — грамотно оформить рассуждение.

Задача 2.14. Да. Рассмотрим, например, число $N = 99\ldots9$ (полмиллиона девяток). Тогда $N^2 = 9\ldots9 \times$ $\times(10\ldots0-1) = 9\ldots90\ldots0-9\ldots9 = 9\ldots980\ldots01$ — здесь девяток и нулей поровну, а всего миллион цифр.

Путь к решению. Понятно, что условие про миллион не принципиально. Поищем примеры для 4, 6, 8 цифр. И конечно, легче возводить в квадрат, когда все цифры одинаковы, ещё легче — когда почти все девятки.

Можно также использовать задачи 1.9, 1.10, 1.11, 3.5, 3.10, 3.11, 4.4, Д5, Д11–Д21, Д30, Д32, Д34, Д36, Д37, Д39, Д42, Д51.

Занятие 3

Можно или нельзя?

Кто хочет сделать, ищет способ,
кто не хочет, ищет причину.

Для многих математика начинается с вопроса «Можно ли» и обоснования ответа на него. Пытаясь построить пример, надо быть готовым и к тому, что построить его не удастся. Если не получается, то, прежде чем что-то менять (например, увеличивать количество частей), полезно объяснить себе, почему не удаётся. Это только *я* не могу построить или это в принципе невозможно?

Задачи этого занятия подобраны так, чтобы показать «пограничные» ситуации. В них обычно два-три очень похожих вопроса. Однако небольшое изменение условия меняет ответ на противоположный. Доказательства невозможности просты и, как правило, не требуют знания специальных методов. Цель занятия — научить чувствовать границы между возможным и невозможным и обосновывать невозможность.

Задача 3.1. Может ли произведение цифр трёхзначного числа быть равно **а)** 22; **б)** 28?

Решение. а) Нет. Число 22 делится на 11, а это простое число. Поэтому если 22 представлено как произведение, то какой-то множитель должен делиться на 11. Но никакая цифра не делится на 11, поэтому хотя бы один сомножитель не будет цифрой.

б) Да, например, 227 или 147.

Путь к решению. Любое такое число можно найти, разложив 28 на простые множители и составив из них три однозначных сомножителя (или только два, а третьим тогда будет 1).

Задача 3.2. У шахматной доски выпилены

а) одна угловая клетка;

б) две угловые клетки на одной стороне;

в) две противоположные угловые клетки.

Можно ли такую испорченную доску распилить на двуклеточные прямоугольники?

Решение. а) Нет. В двуклеточные прямоугольники входит всего чётное число клеток, а осталось 63 клетки — число нечётное.

б) Да. Распилим, например, доску сначала на полоски, параллельные испорченной стороне. Получится 7 полосок из восьми клеток каждая и одна полоска из шести клеток. Все полоски легко делятся на двуклеточные прямоугольники.

в) Нет. Доска раскрашена в шахматном порядке, и из неё выпилены две клетки одного цвета. Значит, чёрных и белых клеток осталось не поровну. В то же время, в каждый прямоугольник входят одна белая и одна чёрная клетка, поэтому всего в них чёрных и белых клеток должно быть поровну.

Задача 3.3. Петя и Вася часто играют между собой и записывают все результаты. Оказалось, что за каждые два месяца подряд в 2011 году Петя в сумме чаще выигрывал, чем проигрывал.

а) Может ли случиться, что в сумме за весь год чаще выигрывал Вася?

б) Может ли случиться, что в сумме за первые 11 месяцев года чаще выигрывал Вася?

Решение. а) Нет. Разобьём весь год на 6 пар подряд идущих месяцев: январь + февраль, март + апрель и т. д. В каждой паре у Пети больше выигрышей, чем у Васи, значит, и в сумме — тоже.

б) Да. Пусть в нечётные месяцы выигрывал только Вася, по 6 раз в месяц. И пусть в чётные месяцы выигрывал только Петя, по 7 раз в месяц. Так как в каждую пару соседних месяцев входит один чётный и один нечётный, в сумме за два месяца у Пети больше выигрышей. Однако в одиннадцати месяцах содержится 6 нечётных и только 5 чётных месяцев, поэтому в сумме Вася победил $6 \cdot 6 = 36$ раз, а Петя только $5 \cdot 7 = 35$ раз.

Путь к решению. Чтобы придумать пример, полезно для каждого месяца написать только одно число: разность числа выигрышей Пети и Васи. Далее предполагаем, что общая победа Васи возможна. *Как такое могло быть*? Разбивая на пары, видим, что последний месяц остаётся «непокрытым», и, так как по «покрытым» месяцам преимущество у Пети, в непокрытом месяце должен победить Вася. Двигая пары, видим, что непокрытым можно оставить любой нечётный месяц. Далее пробуем найти пример, где в нечётных месяцах одинаковое число побед у Васи, а в чётных — у Пети.

Замечание. Обратите внимание на то, что недостаточно просто привести пример, надо ещё обосновать, почему он подходит. Соответственно, чем проще пример устроен, тем легче его обосновать!

Задача 3.4. а) В коробке есть карандаши разной длины и есть карандаши разного цвета. Всегда ли среди них найдутся два карандаша, отличающиеся и по цвету, и по длине?

б) В магазин привезли платья трёх цветов и трёх фасонов. Всегда ли можно выбрать для витрины 3 платья, чтобы были представлены все цвета и все фасоны?

Решение. а) Всегда. Выберем два карандаша разной длины. Если они разного цвета, всё хорошо. Если же их цвета одинаковы, возьмём ещё третий карандаш — другого цвета. В пару к нему добавим тот из двух первых карандашей, который отличается от третьего длиной.

б) Не всегда. Пусть есть всего 5 платьев: красные трёх фасонов и ещё синее и белое первого фасона. Будем выбирать платья так, чтобы не было повторения цветов и фасонов. Из первых трёх можно выбрать не более одного, из последних двух — тоже не более одного. Итого выбрано не более двух платьев.

Замечание. Обратите внимание на то, что при вопросе «Всегда ли...?» пример приходится придумывать при ответе «Нет».

Задачи для самостоятельного решения

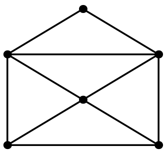
Задача 3.5. Может ли в месяце быть **а)** 5; **б)** 6 воскресений?

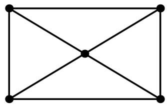
Задача 3.6. Может ли сумма цифр трёхзначного числа быть равна **а)** 22; **б)** 28?

Задача 3.7. Можно ли, не оторвав карандаш от бумаги и не проведя никакой линии более одного раза, нарисовать

а) открытый конверт (рис. слева);

б) закрытый конверт (рис. справа)?





Задача 3.8. Можно ли в прямоугольную таблицу поставить числа так, чтобы

а) в каждом столбце сумма была положительна, а в каждой строке — отрицательна;

б) в каждом столбце сумма была больше 10, а в каждой строке — меньше 10?

Задача 3.9. Можно ли на шахматной доске расставить

а) 9 ладей;

б) 15 слонов

так, чтобы они не били друг друга?

Задача 3.10. а) Может ли наименьшее общее кратное двух натуральных чисел равняться их сумме? **б)** А четырёх?

Задача 3.11. Можно ли в квадрат со стороной 1 поместить несколько неперекрывающихся квадратов

а) с суммой периметров 100;

б) с суммой площадей 100?

Ответы и решения

Задача 3.5. а) Да. Например, в январе 2012 года воскресеньями были 1, 8, 15, 22 и 29 числа.

б) Нет. Между соседними воскресеньями 6 других дней недели. Для шести воскресений подряд будет 5 таких промежутков, итого $6 + 5 \cdot 6 = 36$ дней, что больше любого месяца.

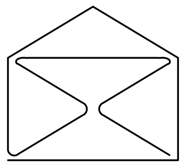
Задача 3.6. а) Да, например 994.

Замечание. Этот пример построен с помощью *жадного алгоритма*: выписывали каждый раз самую большую цифру, чтобы сумма выписанных цифр не превзошла 22.

б) Нет. Каждая цифра не более 9, поэтому сумма цифр не более $9 + 9 + 9 = 27$, а это меньше 28.

Ложный след. Неправильно ссылаться на то, что самое большое трёхзначное число — это 999, и даже его сумма цифр меньше 28. На это можно возразить, что самое большое время «часы + минуты» — это 23:59, однако это не значит, что сумма цифр на часах не может быть больше $2 + 3 + 5 + 9$.

Задача 3.7. а) Да, см. рис.



б) Нет. Заметим, что если точка не является началом или концом обхода, то сколько раз в неё пришли, столько и ушли. Поэтому из таких точек должно выходить *чётное* число отрезков, а точек с нечётным числом отрезков может быть не более двух (начало и конец). Однако, в закрытом конверте есть 4 «нечётные» точки — его вершины.

Задача 3.8. а) Нет. Сумму всех чисел таблицы можно найти, сложив суммы по строкам или суммы по столбцам. Если в каждом столбце сумма положительна, то и сумма всех чисел в таблице положительна, и тогда хотя бы в одной строке сумма чисел положительна.

б) Да. Возьмём таблицу, где 2 строки и 1 столбец, и поместим 6 в каждую клетку.

Замечание. Здесь надо преодолеть *инерцию мышления* и взять не квадратную таблицу. Для квадратной таблицы ответ, конечно, «нет».

Задача 3.9. а) Нет. Ладей больше, чем вертикалей, поэтому на какой-то вертикали окажется две или более ладей (*принцип Дирихле*). Из них две, например, самые нижние, будут бить друг друга.

б) Нет. Рассмотрим большую диагональ, идущую вправо вверх, и все параллельные ей более короткие диагонали (включая две одноклеточные). Всего получится 15 диагоналей. На каждой из них может быть не более одного слона. Поэтому если слонов 15, то они есть на каждой диагонали. Однако тогда слоны с двух одноклеточных диагоналей бьют друг друга по перпендикулярной большой диагонали.

Путь к решению. Невозможность часто доказывают с помощью принципа Дирихле и метода «от противного».

Задача 3.10. а) Нет. Если числа равны, то сумма вдвое больше НОК. А если числа не равны, то сумма не делится на большее из них, а НОК делится.

б) Да. Например, 1, 1, 4, 6 или 1, 3, 8, 12.

Путь к решению. Надо взять число, у которого много делителей (в наших примерах 12 или 24), и представить его как сумму четырёх делителей.

Задача 3.11. а) Да. Разобьём квадрат на квадратные клетки со стороной 0,01. Получим 10000 клеток. В каждую поместим квадратик с периметром 0,01 (и, стало быть, со стороной 0,0025). Итого, сумма периметров квадратиков равна $10000 \cdot 0{,}01 = 100$.

Путь к решению. Если начать резать квадрат на части, то каждый разрез увеличивает сумму периметров частей. Более того, делая разрезы от края до края исходного квадрата, мы увеличиваем сумму периметров каждый раз на 2. Сделаем достаточно много разрезов, чтобы сумма периметров стала больше 100, а потом поместим в каждую часть немного меньший квадратик.

б) Нет. Если квадраты не перекрываются, то сумма их площадей не больше площади исходного квадрата, то есть не больше 1.

Можно также использовать задачи 1.9, 1.11, 1.12, 2.1, 2.4, 2.13, 2.14, 4.9, 4.11, 5.9, 5.10, 5.11, Д6, Д9, Д10, Д12, Д13, Д16, Д19, Д21–Д29, Д33–Д40, Д45, Д49, Д51.

Занятие 4

Повторяемость

Эх раз, ещё раз, ещё много-много раз,
Лучше 40 раз по разу, чем ни разу 40 раз.

Часто конструкция должна состоять из большого числа деталей. Как тут не запутаться?

При наличии выбора проще брать детали одинаковыми. Так, дом легче строить из одинаковых кирпичей, а не из разных камней. Если все детали одинаковыми быть не могут, пусть одинаковых будет как можно больше (см. задачи 2.3, 4.1). Можно ещё выбрать два вида деталей и посчитать, сколько нужно тех и других (см. задачу 4.2).

Ну а если детали «для сборки» заданы, и они разные? Тогда стоит попытаться объединить эти части в *одинаковые блоки* и строить из блоков (см. задачу 4.3). Вообще, идея строительства из *удобных блоков* встречается часто. Так, легче строить дом из стенных панелей, чем из отдельных кирпичей. В частности, даже *одинаковые* детали бывает полезно объединять в блоки, если блоки устроены проще и из них легче составлять целое. Частный, но важный случай удобного блока — крупная клетка (см. задачу 4.4). Блоки необходимы и тогда, когда последовательными действиями надо некоторое сравнительно большое число приблизить к заданному (см. задачу 4.5). Обычно удаётся придумать *группу действий*, при выполнении которой результат на один шаг улучшается (хотя при этом промежуточные действия могут его временно портить). Нередко бывают нужны ещё *вступление* (дополнительные действия до начала повторяющейся группы) и *заключение* (действия по окончании последней повторяющейся группы) (см. задачу 4.6).

Задача 4.1. Представьте число 111 как сумму 51 натурального слагаемого так, чтобы у всех слагаемых была одинаковая сумма цифр.

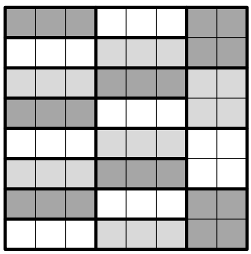
Решение. $11 + 2 + \ldots + 2$.

Путь к решению. Хочется взять все числа одинаковыми, но 111 на 51 не делится. Заметим, что $\frac{111}{51}$ — это чуть больше 2. Попробуем взять много двоек и один или несколько раз по 11 (у нас должно быть хоть одно нечётное число).

Комментарий. Хотя в задаче это не требуется, нетрудно доказать, что решение единственно. Варианты с суммой цифр 1 или 2 нетрудно перебрать, а если сумма цифр больше, то и каждое слагаемое не меньше 3, а сумма — не меньше 153.

Задача 4.2. Разрежьте шахматную доску по границам клеток на 20 частей одинакового периметра.

Решение. См. рис.



Путь к решению. 64 на 20 не делится, поэтому не во всех частях клеток будет поровну. Поскольку $3 < \frac{64}{20} < 4$, стоит выбирать части из трёх и четырёх клеток. Сразу заметим, что у прямоугольника 3×1 и квадрата 2×2 периметры одинаковы. Если взять все части трёхклеточными, не хватит четырёх клеток, значит, надо взять 4 квадрата. Дальнейшее очевидно.

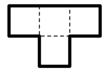
Комментарий. Мы шаг за шагом вводили для себя ограничения, стараясь, где можно, подкрепить их вычислениями.

Задача 4.3. Есть 30 гирек, которые весят 1 г, 2 г, 3 г, ..., 30 г. Можно ли разложить их на три кучки одинакового веса по 10 гирь в каждой?

Решение. Можно. Объединим сначала гирьки в пары: первая с последней, вторая с предпоследней и т. д. Получится 15 пар, каждая весом 31 г. Теперь достаточно разложить пары как угодно по 5 в кучку.

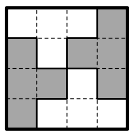
Путь к решению. Требование сделать кучки равными по весу и по числу гирь наводит на мысль: а на какое наибольшее число таких кучек можно разбить гирьки? Ведь если такие кучки образовались, то равные кучки кучек тем более будут обладать нужным свойством...

Комментарий. Разбиение на «симметричные» пары типа «первый с последним» часто применяется в задачах.



Задача 4.4. Как составить квадрат из 100 тетрамино в виде буквы «Т» (см. рис.)?

Решение. Из четырёх тетрамино можно сложить квадрат 4×4 (см. рис.). Всего получится 25 таких квадратов. Из них, как из клеток, составляется большой квадрат.



Задача 4.5. Есть кран, раковина и два бидона ёмкостью 15 и 16 литров без делений. Как отмерить 8 литров воды?

Решение. Обозначим сосуды C_{16} и C_{15}. Наполним из крана C_{16}; льём из C_{16} в C_{15}, пока не наполним; выльем всё из C_{15} в раковину, перельём остаток из C_{16} в C_{15}. В результате в C_{15} стал 1 л воды, а C_{16} пустой. У нас как бы ёмкость C_{15} (то есть объём воды, который туда можно долить) уменьшилась на 1 л. Повторим действия, следуя дословно предыдущим инструкциям. В результате в C_{15} окажется 2 л и ёмкость уменьшится ещё на 1 л. Такую группу действий делаем всего 8 раз, в результате в C_{15} окажется 8 л воды.

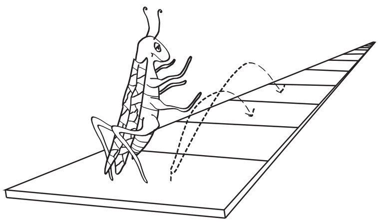
Путь к решению. Начнём с наполнения C_{16}. Тогда следующие шаги делаются автоматически: если не возвращаться к уже пройденному распределению, то вариант всегда один. В результате через два переливания в C_{16} будет 1 л, ещё через четыре переливания — 2 л, ещё через четыре — 3 л. Тут надо заметить, что две последние группы по четыре переливания одинаковы в том смысле, что в том же порядке и для тех же сосудов повторяются переливания, наливания и выливания и, как результат, воды в C_{16} становится на литр больше.

Комментарий. Если начать с наполнения C_{15} и далее на каждом шаге избегать повторения ситуации, мы автоматически придём к уменьшению на 1 л воды в C_{15} после группы из четырёх операций и тоже сможем приблизиться к 8 л, но сверху. Общее здесь то, что в результате повторения группы действий число литров в некотором сосуде «улучшается», в данном случае — приближается к 8. Заметить такое «улучшаемое» число и с его помощью следить за процессом — важный момент решения.

Повторяющийся блок действий с простым результатом часто называют *подпрограммой*.

Задача 4.6. а) На крайней клетке доски 1×101 сидит кузнечик. Одним прыжком он может перепрыгнуть через одну или две клетки и приземлиться в следующей. Сможет ли он побывать на всех клетках ровно по одному разу?

б) То же на доске 1×99.



Решение. а) Если занумеровать клетки по порядку, то прыжок меняет номер клетки на 2 или на 3. Обозначим через $+3$ прыжок на 3 вправо, -2 — на 2 влево. Тогда серия прыжков $+3$, -2, $+3$, -2, $+3$ переведёт кузнечика с первой клетки на шестую, при этом он по разу побывает на *всех промежуточных* клетках. Если серию начать с другой клетки, то в результате сместимся на 5 клеток вправо, побывав на всех промежуточных клетках. Это означает, что можно добавлять посещённые клетки подряд идущими пятёрками. Числа от 2 до 101 разбиваются на 20 таких пятёрок, поэтому достаточно выполнить серию 20 раз подряд. Всё обойдём, закончив на числе 101.

б) Обозначим ещё через -3 прыжок на 3 влево, $+2$ — на 2 вправо. Выполним сначала 18 раз серию $+3$, -2, $+3$,

-2, $+3$, а в заключение выполним $+2$, $+2$, -3, $+2$, $+3$, $+2$, -3, $+2$. Всё обошли, закончив на числе 98.

Путь к решению. а) Попробуем посетить несколько клеток подряд, без пропусков. Серия в решении п. а) — лишь один из вариантов. Есть, например, и такая серия: $+2$, $+2$, -3, $+2$, $+2$. Вообще, обе серии можно прервать на ход раньше — уже посещены несколько клеток подряд. Однако у «урезанной» серии есть большой недостаток — её нельзя повторять. Причина в том, что изменилось положение кузнечика по отношению к непосещённым клеткам.

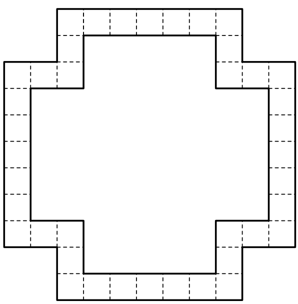
Запомните приём: важно создавать блоки, *пригодные для повторения*. Это особенно важно для подпрограмм.

б) Попробуем посетить как можно больше клеток за счёт повторения найденной ранее серии. Если выполнить серию 19 раз, то окажемся на клетке 96. Нетрудно проверить, что все три оставшиеся клетки посетить не удастся. Выполним теперь серию 18 раз, а для оставшихся восьми клеток придётся придумать отдельную, заключительную серию прыжков.

Комментарий. Для досок нечётной длины большей четырёх есть общее решение. Для нечётных досок стартуем с последней клетки и прыжками по -2 доберёмся до пятой клетки. Далее прыгаем последовательно на клетки 2, 4, 1, 3. Теперь можно прыгать обратно по пропущенным чётным клеткам. Для чётных досок прыжками по -2 доберёмся до шестой клетки. Далее прыгаем последовательно на клетки 3, 1, 4, 2, 5. Теперь можно прыгать обратно по пропущенным нечётным клеткам.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.7. Разрежьте рамку (см. рис.) на 16 равных частей.



Задача 4.8. Полк солдат подошёл к реке. По реке катались на лодке два мальчика. Лодка выдерживает одного солдата или двух мальчиков. Как всем солдатам переправиться на другой берег и вернуть лодку мальчикам?

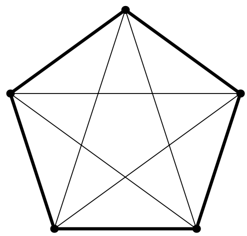
Задача 4.9. Можно ли поверхность куба оклеить без перекрытий

а) 16 одинаковыми прямоугольниками;

б) 15 одинаковыми прямоугольниками?

Задача 4.10. Есть 30 яблок, одно из них — явно червивое. Петя и Вася едят по очереди от одного до трёх яблок за раз. Тот, кому достанется червивое, — проиграл. Петя начинает. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

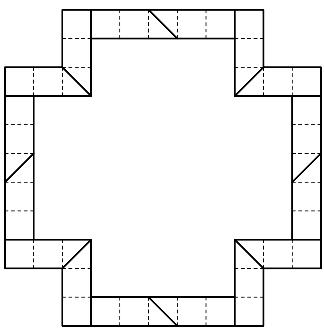
Задача 4.11. Пятиугольник на рисунке разбит диагоналями на 11 частей: десять треугольных и одну пятиугольную. В каждую часть вписали положительное число. Могли ли оказаться равными все суммы в треугольниках с отмеченными вершинами?



Задача 4.12*. Расставьте 48 ладей на клетчатой доске 10×10 так, чтобы каждая била 2 или 4 пустые клетки.

Ответы и решения

Задача 4.7. См. рис.



Путь к решению. Подсчёты показывают, что площадь части — 2,5 клетки. Хочется оттянуть момент появления полуклеток. Если объединить соседние части в пары, то общая площадь пары 5 клеток. Это подсказывает сделать разрезание в два этапа. На первом этапе режем по границам клеток на фигурки из пяти клеток. На втором — разрезаем каждую фигурку на две равные части.

Для первого этапа есть несколько вариантов, но напрашивающимся и единственно правильным будет разрезание на прямоугольники и уголки с равными плечами. Затем разрезаем каждую часть по диагонали средней клетки на две равные части. Обратите внимание на то, что прямоугольники распались на две центрально-симметричные фигуры, а уголки — на две осесимметричные. Да и в целом приведённое решение центрально-симметрично.

Задача 4.8. Пусть солдаты переправляются с левого берега на правый. Достаточно для каждого солдата выполнить такую группу действий: мальчики вдвоём плывут на правый берег, один там остаётся, другой возвращается на левый берег, отдаёт лодку солдату, тот плывёт на правый берег и отдаёт лодку мальчику, который перегоняет лодку на левый берег.

Комментарий. Для повторения группы действий надо проследить, чтобы условия в её конце были такими же, как в начале. В данном случае — что лодка и оба мальчика находятся на левом берегу.

Задача 4.9. Можно.

а) Грань и две её соседки, примыкающие к противоположным рёбрам, можно оклеить прямоугольником 3×1 (перегибая его через рёбра). Оставшуюся часть поверхности куба можно оклеить ещё одним таким прямоугольником. Осталось разбить каждый из прямоугольников на 8 одинаковых параллельных прямоугольных полосок.

б) Разобьём грани на пары соседних: верхняя с правой, фасад с левой, тыл с нижней. Каждую пару можно оклеить прямоугольником 2×1. Осталось разбить каждый из прямоугольников на 5 одинаковых параллельных прямоугольных полосок.

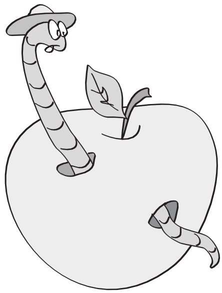
Путь к решению. Хочется разделить каждую грань на одинаковое число частей, но тогда общее число частей будет делиться на 3 (в пункте а) или на 2 (в пункте б). С другой стороны, на любое количество одинаковых прямоугольников можно разбить не только квадрат, но и прямоугольник... Идея: давайте убьём ненужный делитель за счёт объединения граней в прямоугольники!

Комментарий. У куба много симметрий. Конечно, разбиение поверхности на 2 или 3 равных прямоугольника проще найти непосредственно. Но приведённые ниже симметрию и поворот полезно отметить: это поможет решить более сложные задачи.

а) Выбранные тройки граней осесимметричны относительно прямой, проходящей через центр куба параллельно диагонали грани.

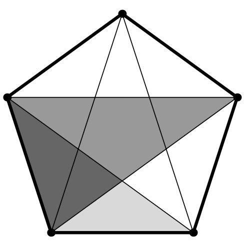
б) Выбранные пары граней переходят друг в друга при повороте на 120° вокруг большой диагонали куба.

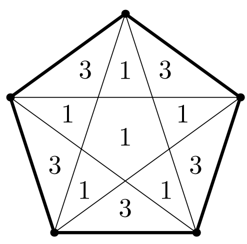
Задача 4.10. Выигрывает Петя. Первым ходом он съедает одно яблоко. После этого остаётся 28 хороших яблок, а это число кратно четырём. Далее на каждый ход Васи Петя съедает в ответ столько яблок, чтобы в сумме было съедено четыре (3 после 1, 2 после 2, 1 после 3). Так, съедая четвёрками, они съедят вместе 28 хороших яблок, и последнее — червивое — достанется Васе.



Путь к решению. Выигрывающему хочется предсказуемости, проигрывающий же хочет уйти от предсказуемого проигрыша. Имея контроль над одним полуходом из пары, можно обеспечить одинаковый результат каждой пары. А именно, вторым полуходом можно обеспечить, чтобы суммарно за два полухода съедалось одинаковое число яблок — 4 штуки. Этот трюк выгоден, если в результате червивое яблоко достанется сопернику, то есть хорошие оставшиеся количества хороших яблок — это кратные 4. Такого количества может достичь Петя первым ходом, значит, он и выигрывает.

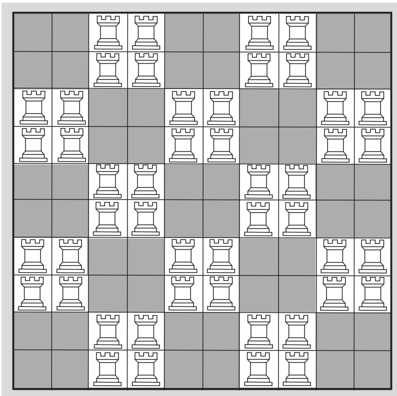
Задача 4.11. Могли, см. пример на рисунке справа.





Путь к решению. С точностью до поворота есть три вида частей и два вида «отмеченных» треугольников. Все числа не могут быть одинаковы, так как есть суммы из разного количества слагаемых. Но можно попробовать вписать одинаковые числа в одинаковые части. Чёрный треугольник можно дополнить до «отмеченного» либо светло-серой частью, либо тремя тёмно-серыми. Значит, число в светло-серой части должно быть равно сумме чисел в трёх так выбранных тёмно-серых. Для простоты впишем во все тёмно-серые части 1, тогда в светло-серые надо вписать 3. Легко убедиться в том, что получится подходящий пример.

Задача 4.12*. См. рис.



Путь к решению. Заметим, что числа 2 и 4 чётные. Хочется, чтобы группы пустых клеток на одном ряду тоже состояли из чётных кусков. Отсюда возникает идея разбить доску на *крупные клетки* 2×2. Если расположить и ладей блоками 2×2, то никакая ладья не будет бить в трёх направлениях. Ещё не надо ставить ладей в углы доски. После раскраски крупных клеток в шахматном порядке расстановка по белым клеткам напрашивается сама собой.

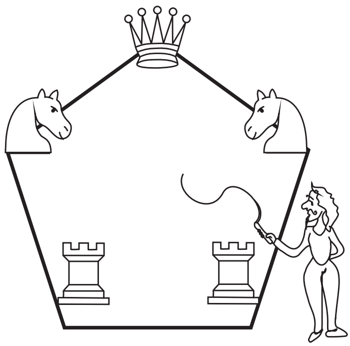
Можно также использовать задачи 1.11, 2.4, 2.10, 2.14, 3.2, 3.3, 3.11, Д7, Д11, Д17, Д23, Д29–Д40.

Занятие 5

Симметрии, сдвиги и повороты

— У тебя один ботинок чёрный, другой — белый.
Сбегай домой, переобуйся.
— Я уже бегал, но дома тоже один чёрный,
другой — белый.

При разбиении на равные части удобно использовать то, что равны части, получающиеся друг из друга симметрией, сдвигом или поворотами (см. задачу 5.1). Приём «Ищи там, где легче» рекомендует при работе с симметричными фигурами и позициями искать сначала симметричное решение (см. задачи 2.2, 2.5, 2.7б, 2.8, 4.2, 4.7, 4.9а, 4.11, 4.12, 5.2). Такое решение заведомо есть, когда симметричные области между собой не связаны (например, в задаче 2.8 достаточно расставить половину слонов на белых полях, а потом симметрично отразить расстановку относительно средней линии). Разумеется, своего рода симметрия может возникать и в негеометрических задачах (см. задачу 4.10).



Центрально-симметричная фигура или конструкция переходит в себя при повороте на 180°. Если же конструкция переходит в себя при повороте на меньший угол, то она «ещё более симметрична». Поворот тоже переводит равные фигуры в равные, но тут уже можно получить больше равных фигур. Так, квадрат переходит в себя при повороте на 90°, поэтому его часто разбивают на 4 части, переходящие в себя при таком повороте (см. задачи 4.4, 5.3). Бывают конструкции, которые переходят в себя при повороте на 120° или на 60° (см. задачу 5.6).

Если несколько точек расположены на окружности и делят её на равные части, то поворот, переводящий точку в соседнюю, тоже переводит конструкцию в себя. При этом перейдут в себя и стороны, и диагонали, и многое другое. Идея «мысленно расположить объекты по кругу» применима и к негеометрическим объектам.

Задача 5.1. Разрежьте прямоугольник на

а) два равных шестиугольника;

б) два равных семиугольника.

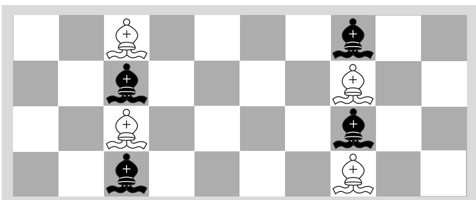
Решение. См. рисунки.

Путь к решению. Воспользуемся тем, что прямоугольник центрально-симметричен, и проведём через его центр центрально-симметричную ломаную. В ней обязательно будет нечётное число звеньев. Поэтому в п. а) её концы обязаны быть на сторонах, а в п. б) — в вершинах прямоугольника.

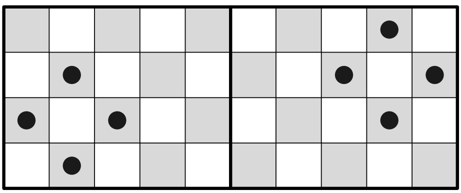
Задача 5.2. а) Могут ли 8 слонов побить все клетки доски 4×10?

б) То же про 7 слонов.

Решение. а) Могут, например так (см. рис.).



б) Не могут. Разделим доску на две половинки 4×5.



Слонов на полях одного из цветов (скажем, чёрного) не более трёх, из них на одной из половинок (скажем, левой) — не более одного. Отметим четыре чёрных поля на этой половинке (см. рис.). Слоны с другой половинки этих полей не бьют, а один слон с данной половинки все 4 поля тоже не побьёт.

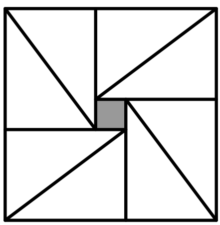
Путь к решению. а) Хочется поместить слонов в «самую середину», но, как ни помещай восьмёрку в центр, до правого и левого краёв не достанешь. Зато если разделить доску на две «более квадратные» половинки 4×5, то в них найдутся средние вертикали, что и даёт пример. Обратите внимание на то, что симметричны и половинки, и решение в каждой половинке.

б) Естественно разбираться с каждым цветом отдельно. Выберем «критические поля» в разных концах доски (обратите внимание на то, что отмеченные четвёрки полей центрально-симметричны) и попробуем добиться, чтобы хотя бы они были побиты. Как видим, для этого надо как минимум по 4 слона для каждого цвета полей.

Кстати, «критические поля» помогают строить пример: варианты, где не все они побиты, надо сразу отбрасывать.

Задача 5.3. Восемь бизнесменов купили большой квадратный остров со стороной 300 м, вокруг которого вдоль берега проложена узкая асфальтовая дорожка. Они хотят вырыть квадратный бассейн со стороной 20 м, а всю остальную территорию разделить на 8 одинаковых треугольных участков для строительства коттеджей. Как это можно сделать?

Решение. Например, так (см. рис.).



Путь к решению. Поищем конструкцию, переходящую в себя при повороте на 90°. Тогда бассейн надо помещать в центр. Треугольники легче получать парами, деля диагональю прямоугольник. Равные прямоугольники можно получить, сделав стороны бассейна параллельными сторонам острова и продолжив каждую вправо до пересечения со стороной квадрата.

Задача 5.4. На балу было по 10 юношей и девушек, и за 10 танцев каждый станцевал с каждой. Как могло получиться, что каждый юноша каждый следующий танец танцевал с более красивой или с более умной девушкой?

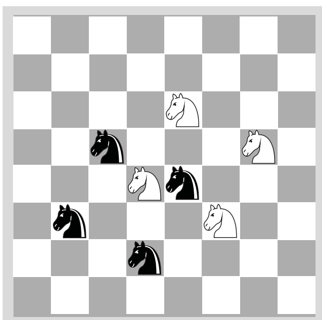
Решение. Пусть девушки делятся на две равные группы — блондинки и брюнетки, причём блондинки красивее брюнеток, а брюнетки умнее блондинок. Выстроим их по кругу так, чтобы блондинки и брюнетки чередовались. Пусть теперь каждый следующий танец юноша танцует со следующей девушкой по часовой стрелке. Тогда, перейдя к брюнетке, он танцует с более умной, а перейдя к блондинке — с более красивой.

Путь к решению. Выбор девушек по кругу напрашивается — просто чтобы юношам не запутаться с выбором очередной партнёрши. Если каждый раз красота или ум улучшается, то почему бы не по очереди?! Отсюда — пример.

Замечание. Разумеется, ничего не получится, если одна из девушек окажется и самой умной, и самой красивой (редко, но бывает). И наоборот, если девушка чем более красива, тем менее умна, то менять партнёрш можно в любом порядке (если, конечно, они не против)!

Задача 5.5. Расставьте на шахматной доске несколько коней так, чтобы каждый бил ровно трёх других.

Решение. См. рис.



Путь к решению. Нетрудно расставить четырёх коней так, чтобы каждый бил ровно двух других (например, 4 белых коня на рисунке). А дальше выберем направление, по которому белые кони друг друга не бьют. Если сдвинуть белую четвёрку в этом направлении, получится чёрная четвёрка. Объединив две эти четвёрки, получим восьмёрку коней. В ней каждый конь бьёт двух коней из своей четвёрки и одного коня из другой четвёрки, итого, каждый бьёт по 3 коня.

Задача 5.6. В лодке, вмещающей только двух человек, через реку должны переправиться три миссионера и три каннибала. Миссионеры боятся оставаться на каком-нибудь берегу в меньшинстве. Как им переправиться?

Решение. Нам важно знать только, сколько миссионеров и каннибалов на каждом берегу и где лодка. Будем записывать позиции коротко, обозначая миссионера **м**, каннибала **к**, лодку **Л**, реку — чертой, которая разделяет два берега. Опишем цепочку ситуаций вначале и после каждой переправы: **мммкккЛ|**, **ммкк|Лмк**, **мммккЛ|к**, **ммм|Лккк**, **мммкЛ|кк**, **мк|Лммкк**, **ммккЛ|мк**, **кк|Лмммк**, **кккЛ|ммм**, **к|Лмммкк**, **мкЛ|ммкк**, **|Лмммккк**. Кто именно в промежутке плыл в лодке, легко восстановить.

Путь к решению. Первую переправу можно сделать двумя способами (могут плыть и два каннибала), но после возвращения лодки на исходном берегу всё равно обязаны оказаться три миссионера и два каннибала. Далее все ходы однозначны. Заметим ещё, что шестая и седьмая позиции *симметричны* (одна переходит в другую, если поменять местами берега). Значит, дальше можно не искать, а просто выписать позиции, симметричные пятой, четвёртой, третьей, второй, первой. Переправы между ними будут повторением соответствующих переправ, только выполненных в противоположном направлении.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.7. Могут ли 8 коней на клетчатой доске 4×12 побить все свободные клетки доски?

Задача 5.8. Можно ли расставить в ряд числа от 1 до 19 в таком порядке, чтобы у каждых двух соседей суммы цифр отличались на 2 или на 3?

Задача 5.9. а) В ряд сидят 30 девочек и мальчиков. Известно, что среди любых десяти подряд сидящих детей мальчиков больше, чем девочек. Может ли в целом девочек быть больше, чем мальчиков?

б) В ряд сидят 15 девочек и мальчиков. Известно, что среди любых десяти подряд сидящих детей мальчиков больше, чем девочек. Может ли в целом девочек быть больше, чем мальчиков?

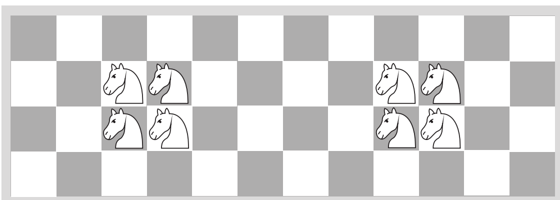
Задача 5.10. Можно ли отметить на плоскости 6 точек и провести 6 прямых так, чтобы на каждой прямой было две отмеченные точки и по обе стороны от неё лежало по две отмеченные точки?

Задача 5.11. Можно ли в 16 клетках квадрата 5×5 провести по диагонали так, чтобы никакие две нарисованные диагонали не имели общей точки (даже общего конца)?

Задача 5.12. В футбольном турнире 2 очка давали за победу, 1 — за ничью, 0 — за поражение. Каждая команда сыграла с каждой, и команда «Госдеп» набрала больше всех очков. Организаторам это не понравилось, они постановили за победу давать не 2, а 3 очка, и пересчитали очки. Мог ли «Госдеп» после пересчёта набрать меньше всех очков?

Ответы и решения

Задача 5.7. Могут, см. рис.



Путь к решению. Если разбить доску на две равные половинки 4×6, то каждую можно побить четвёркой коней из её центральных клеток. Одна половинка получается из другой симметрией или сдвигом.

Задача 5.8. Можно. Например,

1, 3, 5, 2, 4, 7, 9, 6, 8, 19, 17, 15, 18, 16, 13, 11, 14, 12, 10.

Путь к решению. Встречаются суммы цифр от 1 до 10, причём сумма 10 — один раз, остальные — дважды. Если записать в клетки вместо чисел их суммы цифр, то получится почти что задача 4.6. Тогда можно обойти все клетки так: К1, К3, К5, К2, К4, К7, К9, К6, К8, К10 (мы постарались начать в К1 и закончить в К10). Но ведь нам во всех клетках, кроме К10, надо побывать дважды?! Нет проблем: продолжение маршрута после К10 будет отражением начала относительно К10:

К1, К3, К5, К2, К4, К7, К9, К6, К8, К10, К8, К6, К9, К7, К4, К2, К5, К3, К1.

Осталось заменить клетки на соответствующие числа.

То, что нашёлся маршрут от К1 до К10 — повезло. Зная, что мы собираемся сделать, достаточно было найти маршрут, начинающийся в К10 и проходящий по разу по всем остальным клеткам.

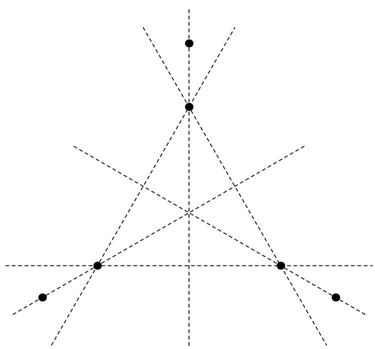
Задача 5.9. а) Не может. Разобьём детей на три десятка. В каждом десятке мальчиков больше, значит, и в целом — тоже.

б) Может. Посадим в ряд четверых девочек, потом семь мальчиков, и ещё четверых девочек. Всего девочек на одну больше, чем мальчиков. Однако, среди любых 10 подряд сидящих есть по крайней мере 6 мальчиков. Значит, мальчиков в каждом десятке будет больше, чем девочек.

Путь к решению. а) Сдвигая десятки, добьёмся, чтобы они не пересекались.

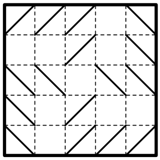
б) Как такое может быть: в первой десятке мальчиков больше, а всего девочек больше? Только если в последней пятёрке девочек больше. И симметрично — в первой пятёрке девочек больше. Но в каждой из этих пятёрок не больше четырёх девочек. Отлично — попробуем сделать крайние четвёрки из девочек, а в середине — все мальчики. Так получается симметричное расположение, дающее решение.

Задача 5.10. Можно, см. рис.



Путь к решению. Напрашивается картинка, переходящая в себя при поворотах на треть или шестую часть полного оборота. Расположить все 6 точек на одной окружности, очевидно, не получается. Срабатывает идея взять две окружности, одна в другой, с общим центром.

Задача 5.11. Можно, см. рис.



Путь к решению. То, что 16 кратно четырём, наводит на мысль поискать решение, переходящее в себя при повороте на 90°. Поставим диагональ в клетку рядом с центром и покрутим квадрат. Заполнились ещё три клетки, и они друг другу не мешают. Добавим по соседству ещё диагональ и опять покрутим. Так *постепенно* пример и получится...

Задача 5.12. Мог. Пусть в турнире участвовало 10 команд. Поставим «Госдеп» в центр, а остальных выстроим по кругу. Пусть каждая команда в круге выиграла у следующих четверых по часовой стрелке. Пусть ещё «Госдеп» выиграл у команды A из круга, а все остальные встречи завершились вничью. Тогда при подсчёте по системе 2–1–0 «Госдеп» набрал 10 очков, команда A — 8 очков, остальные — по 9 очков. При подсчёте по системе 3–1–0 каждая команда увеличит число очков на число побед. У «Госдепа» станет 11, у A — 12, у остальных — по 13.

Можно также использовать задачи 1.7, 1.8, 2.13, 4.3, 4.4, 4.7, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, Д4, Д7, Д14, Д17, Д20, Д21, Д26, Д27, Д32, Д36, Д41–Д51.

Приложение

Задачи для самостоятельного решения

Задача Д1. а) Расставьте на доске 4×2 два коня и два ферзя так, чтобы каждая фигура била ровно одну другую.

б) Расставьте на доске 4×3 три коня и три ладьи так, чтобы каждая фигура била ровно одну другую и была побита ровно одной другой.

Задача Д2. На столе в ряд стоят шесть стаканов: слева три полных, справа три пустых. Разрешается дотронуться только до одного стакана. Как добиться того, чтобы полные и пустые стаканы чередовались?

Задача Д3. Трое туристов должны перебраться с одного берега реки на другой. В их распоряжении старая лодка, которая может выдержать нагрузку всего в 100 кг. Вес одного из туристов 45 кг, второго — 50 кг, третьего — 80 кг. Как должны они действовать, чтобы перебраться на другой берег?

Задача Д4. Как можно расставить 12 стульев в квадратной комнате, чтобы у каждой стены стояло по 4 стула?

Задача Д5. Представьте 100 как сумму пяти различных натуральных чисел так, чтобы каждое делилось на все меньшие.

Задача Д6. Шофёр Саша живёт в своём доме, в котором окон на 2 больше, чем дверей. Все братья Саши — Петя, Коля и Лёня — тоже живут каждый в своём доме. В доме Коли окон на 5 больше, чем дверей, а в доме Пети окон на 4 больше, чем дверей. Может ли у всех братьев Лёни в домах в сумме окон быть в 4 раза больше, чем дверей?

Задача Д7. Пятиклассник разрезал квадрат на 5 одинаковых фигур, а шестиклассник — на 6 одинаковых фигур. Мог ли у шестиклассника периметр фигуры оказаться больше, чем у пятиклассника?

Задача Д8. В выражении $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6$ замените звёздочки знаками $+$ и $\times$ и расставьте скобки так, чтобы после всех вычислений получилось 100.

Задача Д9. На Луне имеют хождение монеты достоинством 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка заплатил за покупку несколько монет и получил на сдачу на одну монету больше. Могла ли покупка стоить

а) 6 фертингов;

б) 14 фертингов?

Задача Д10. Можно ли занумеровать клетки доски 6×6 числами от 1 до 36 так, чтобы числа, отличающиеся на 1, всегда стояли в клетках с общей стороной и все точные квадраты (1, 4, 9, 16, 25, 36) попали на одну вертикаль?

Задача Д11. Расставьте 9 королей на клетчатой доске 9×9 так, чтобы они побили все свободные клетки.

Задача Д12. Число 200 представлено как сумма различных нечётных натуральных чисел. Может ли количество слагаемых быть равным **а)** 16; **б)** 14; **в)** 13?

Задача Д13. Есть 20 гирек, которые весят 1 г, 2 г, 3 г, …, 20 г. Можно ли разложить их на 6 равных по весу кучек?

Задача Д14. Отметьте на плоскости 5 точек так, чтобы образовалось 8 равнобедренных прямоугольных треугольников с вершинами в этих точках.

Задача Д15. Найдите хотя бы одно решение ребуса

$$\text{УДА} \cdot \text{Р} = \text{УХХХ}.$$

Задача Д16. Атос, Портос, Арамис и Д'Артаньян сидели за круглым столом, заспорили, и каждый поссорился со своими двумя соседями. Чтобы ехать дальше, им надо переправиться через реку в двухместной лодке. Каждый из мушкетёров отказывается оставаться вдвоём на берегу или быть в лодке с тем, с кем он в ссоре. Могут ли они всё-таки все переправиться?

Задача Д17. За одну операцию разрешается отрезать от многоугольника по прямой линии равнобедренный треугольник и выбросить этот треугольник. Как за несколько операций превратить квадрат в прямоугольник, одна из сторон которого в 7 раз больше другой?

Задача Д18. Хозяйка ожидает, что за стол сядут трое или пятеро гостей. Как ей разрезать пирог весом 600 г на 7 частей так, чтобы его можно было раздать гостям поровну в любом случае?

Задача Д19. Существует ли 12-значное число, из которого вычёркиваниями цифр можно получить любое число от 1 до 32?

Задача Д20. Петя выставляет на шахматную доску по одной ладье, чередуя чёрные с белыми. Если выставленная ладья побила одну или несколько ладей другого цвета, надо одну из побитых снять с доски. Какое наибольшее количество клеток может заполнить Петя? (Ладьи бьют друг друга, если стоят на одной вертикали или горизонтали и между ними нет других ладей.)

Задача Д21. а) Можно ли разрезать квадрат со стороной 1 на пять прямоугольников (не обязательно одинаковых) с периметром 2?

б) Можно ли разрезать квадрат со стороной 2 на пять прямоугольников (не обязательно одинаковых) с периметром 1?

Задача Д22. а) Один игрок из команды А перешёл в команду Б. Мог ли в результате средний возраст у обеих команд увеличиться?

б) Команды обменялись игроками: Алик перешел из А в Б, а Боря — из Б в А. Мог ли в результате средний возраст у обеих команд увеличится?

Задача Д23. Сумма нескольких натуральных чисел (не обязательно различных) равна их произведению. Может ли **а)** количество чисел быть равным 13; **б)** сумма чисел быть равной 13?

Задача Д24. Гость узнал, что у барона Мюнхгаузена есть затейливый набор из 8 гирек весами 1, 2, ..., 8 г. Барон, конечно, помнит, которая сколько весит, и хочет убедить в этом гостя. Он берётся так провести первое взвешивание на чашечных весах без других гирь, что после этого гость сам сможет определить вес одной из гирь. Не хвастает ли барон?

Задача Д25. По кругу лежат 30 монет, чередуясь: три подряд орлом, три решкой, три орлом, три решкой и т. д. Если у монеты два соседа лежат по-разному, её можно перевернуть. Можно ли положить орлом

а) 25 монет;

б) 26 монет?

Задача Д26*. Числа от 1 до 16 расставлены в таблице 4×4. В каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали (включая диагонали из одной клетки) отметили самое большое из стоящих в ней чисел. (Одно число может быть отмечено несколько раз.) Могли ли оказаться отмечены **а)** все числа, кроме, быть может, одного; **б)** все числа?

Задача Д27. а) Можно ли рёбра куба занумеровать числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой тройки рёбер, выходящих из одной вершины, сумма была одинакова?

б) То же для чисел -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6 на рёбрах.

Задача Д28. а) Можно ли квадрат 6×6 разрезать по границам клеток на пять частей и сложить из них три разных меньших квадрата?

б) Можно ли квадрат 7×7 разрезать по границам клеток на пять частей и сложить из них три разных меньших квадрата?

Задача Д29*. Большая свеча сгорает за час и стоит 60 рублей, а маленькая сгорает за 11 минут и стоит 11 рублей. Можно ли отмерить минуту, затратив не более

а) 300 рублей;

б) 200 рублей;

в) 150 рублей?

Задача Д30. Можно ли разрезать квадрат на 2012 равных треугольников?

Задача Д31. По длинному узкому каналу один за другим идут три парохода. Навстречу им — ещё 3 парохода. Канал такой узкий, что два парохода в нём разъехаться не могут, но в нём есть залив, где может поместиться один пароход. Как им разъехаться?

Задача Д32. Расставьте 16 ферзей на клетчатой доске 9×9 так, чтобы каждый бил ровно трёх других.

Задача Д33. Назовем натуральное число *зеброй*, если в его записи строго чередуются чётные и нечётные цифры. Может ли разность двух 100-значных зебр быть 100-значной зеброй?

Задача Д34. а) Можно ли прямоугольник 10×20 разрезать по границам клеток на 19 различных прямоугольников? **б)** А на 20?

Задача Д35. На доске вначале выписаны два числа: 1 и 2. За один ход разрешается увеличить любое число на доске на сумму цифр любого из выписанных (в том числе на сумму цифр его самого). Можно ли добиться, чтобы оба числа превратились в 1999?

Задача Д36. а) Можно ли клетчатый квадрат 10×10 разрезать по границам клеток на 10 частей и сложить из них квадратную рамку толщиной в одну клетку?

б) Можно ли клетчатую квадратную рамку 17×17 (с дыркой 15×15) разрезать по границам клеток на 7 частей и сложить из них квадрат 8×8?

Задача Д37. На шахматную доску по одной выставляются ладьи так, чтобы каждая выставленная ладья побила (на момент выставления) чётное число пустых полей. Какое наибольшее число ладей можно выставить?

Задача Д38. В банк можно положить за один раз 120 рублей или снять 300 рублей. На счету есть 1000 рублей, а других денег нет. Можно ли за несколько таких операций снять со счета

а) более 950 рублей;

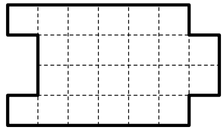
б) более 970 рублей?

Задача Д39. а) Прямоугольный параллелепипед $1 \times 1 \times 2$ перекатывают (через рёбра) по клетчатой доске 25×25. Можно ли прокатить его так, чтобы каждую клетку параллелепипед покрыл ровно один раз?

б) То же для доски 30×30?

Задача Д40*. На конференции было три секции: химики, алхимики и лекари. По кругу выстроились 112 участников, среди которых химиков и лекарей поровну. На вопрос «Верно ли, что оба твоих соседа из одной секции» каждый ответил «Да». Химик всегда говорит правду, алхимик всегда лжёт, а лекарь лжёт, если стоит рядом с алхимиком (а иначе говорит правду). Могло ли в этом круге быть 66 алхимиков?

Задача Д41. Разрежьте по границам клеток фигуру на рисунке на 3 равные части.



Задача Д42. Расставьте на шахматной доске несколько коней так, чтобы каждый бил ровно четырёх других.

Задача Д43. Запишите 20-значное число, в котором каждая цифра встречалась бы два раза и количество цифр между одинаковыми цифрами было бы разным для всех пар.

Задача Д44. Расставьте на шахматной доске 5×5 пять ферзей так, чтобы они не били друг друга и ни один ферзь не стоял в углу.

Задача Д45. Можно ли вырезать из квадратного листа жести со стороной 1 м

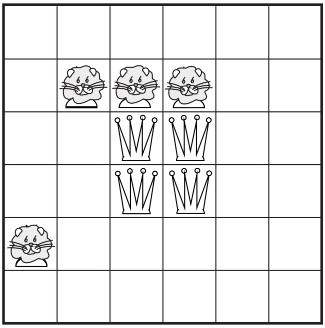
а) 16 прямоугольников со сторонами 1 дм и 6 дм;

б) 17 таких прямоугольников?

Задача Д46. Три бизнесмена купили большой треугольный остров со сторонами 300 м, вокруг которого вдоль берега проложена узкая асфальтовая дорожка. Они хотят вырыть треугольный бассейн (не ломая дорожку), а всю остальную территорию (включая дорожку) разделить на 3 одинаковых треугольных участка для строительства коттеджей. Как это можно сделать?

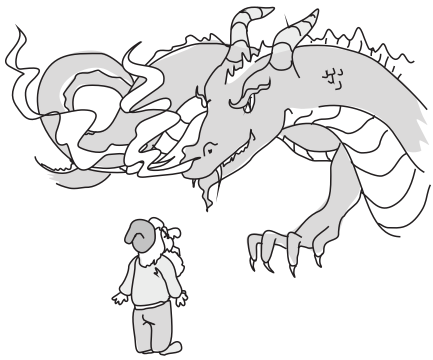
Задача Д47. На столе лежат три кучки по 7, 10 и 10 спичек. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять любое число спичек из одной кучки. Проигрывает тот, кто заберёт последнюю спичку из какой-нибудь кучки. Кто из игроков может выигрывать, как бы ни играл соперник?

Задача Д48. Разрежьте по линиям сетки флаг на рисунке на 4 одинаковых вымпела так, чтобы в каждой из частей оказалось по льву и по короне.



Задача Д49*. Шахматную доску разрезали по границам клеток на несколько частей так, что для каждой клетки разрез прошёл хотя бы по одной её стороне. Могло ли получиться **а)** 4 части; **б)** 3 части?

Задача Д50*. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я надену на каждого из вас по колпаку, а один колпак спрячу. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше — съем на обед». Как гномам договориться действовать, чтобы спастись?



Задача Д51*. Можно ли прямоугольник 10×30 разрезать на домино так, чтобы ни в какой точке не сошлись вершинами 4 домино?

Указания к решениям задач и краткие решения

Д1. См. рис.

Указание. Нельзя чтобы одноимённые фигуры били друг друга.

Д2. Перелейте жидкость из среднего полного стакана в средний пустой.

Д3. Переплывают двое лёгких, один возвращается. Переплывает тяжёлый, лёгкий возвращается и забирает оставшегося лёгкого.

Указание. Тяжёлый может плыть только один. В это время на каждом берегу должно быть по лёгкому: один дал тяжёлому лодку, другой сможет на ней вернуться за тем, кто дал лодку.

Д4. Поставим в углы комнаты по стулу, оставшиеся восемь распределим по два вдоль каждой стены.

Указание. Так как в сумме «у стен» стульев больше двенадцати, то некоторые сосчитаны дважды. Очевидно, это стулья в углу.

Д5. $1 + 3 + 6 + 18 + 72$.

Путь к решению. Все делятся на самое маленькое. Давайте сделаем его равным 1. Тогда сумма остальных 99. Все остальные числа делятся на самое маленькое из них, значит, и 99 на него делится. Возьмём самый маленький (отличный от единицы) делитель числа 99 — это 3. Поделим все остальные слагаемые на 3, тогда их сумма будет $\frac{99-3}{3} = 32$. Это можно записать так: $100 = 1 + 3(1 + 32)$.

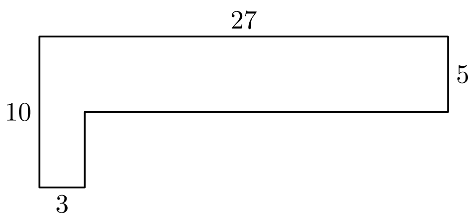
Снова возьмём самый маленький делитель числа 32, и снова поделим: $100 = 1 + 3(1 + 2(1 + 15))$. Самый маленький делитель у числа 15 — это 3. Получим $100 = 1 + 3(1 + 2(1 + 3(1 + 4)))$. Теперь просто раскроем скобки.

Д6. Может. Например, у Коли 2 двери и 7 окон, у Пети — 1 дверь и 5 окон, а Саша — женщина.

Путь к решению. Если возможно, то разность между числом окон и дверей у братьев Лёни должна быть в 3 раза больше суммарного количества дверей, то есть разность делится на 3. Однако эта разность складывается из $2 + 4 + 5 = 11$, что на 3 не делится. К противоречию привело неявное предположение, что Саша — брат Лёни. Конечно, Лёня — брат Саши, но почему бы Саше не быть *сестрою* Лёни?!

Тогда противоречия не возникает, и нетрудно вычислить, что у Коли с Петей вместе 3 двери. После этого пример легко строится.

Д7. Мог. Пусть пятиклассник разрезал квадрат со стороной 30 на пять прямоугольников 6×30, а шестиклассник разрезал этот квадрат сначала на три прямоугольника 10×30, а затем каждый прямоугольник — на две буквы Г (см. рис.). Тогда периметр фигуры пятиклассника 72, а шестиклассника — 74.



Указание. Периметр Г-образной фигуры равен периметру охватывающего её прямоугольника (в данном случае прямоугольника 10×27).

Д8. $1 + (2 + 3 + 4) \times (5 + 6) = 100$.

Путь к решению. Надо умножать либо на 6, либо на $6 + 5$. Умножение на 11 сразу наводит на мысль о 99, откуда пример.

Д9. а) Могла. Например, Незнайка отдал $50 + 1$, а получил на сдачу три монеты по 15 фертингов.

б) Не могла. Заменим каждую монету на монету в 1 фертинг. Тогда получится, что Незнайка получил 1 фертинг. С другой стороны, для каждой монеты её достоинство уменьшилось на число, кратное семи. Значит, и выплата Незнайки, и сдача, и стоимость покупки изменились на число, кратное семи. Но если раньше стоимость покупки делилась на 7, то и теперь делится. Однако 1 фертинг на 7 не делится.

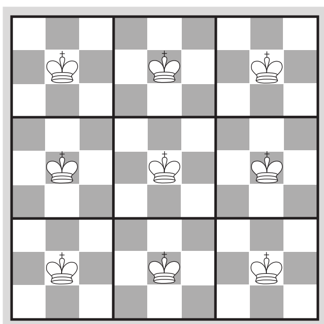
Д10. Можно, см. рис.

23	24	**25**	26	27	28
22	5	**4**	3	30	23
21	6	**1**	2	31	32
20	7	**36**	35	34	33
19	8	**9**	10	11	12
18	17	**16**	15	14	13

Путь к решению. Заметим, что, двигаясь по порядку номеров, мы пересекаем вертикаль квадратов по очереди справа налево и слева направо. Группа чисел между очередными квадратами оказывается вся справа или вся слева. Эти группы состоят из 2, 4, 6, 8 и 10 чисел, при этом 2, 6, 10 попадут в одну сторону, а 4 и 8 — в другую. Значит, вертикаль квадратов делит доску на части из двух и трёх столбцов. Далее осталось расположить группы так, чтобы они друг другу не мешали.

Замечание. Последовательные чётные числа появились в решении не случайно, а потому, что разности между соседними квадратами — последовательные нечётные числа (см. решение задачи 2.12).

Д11. См. рис.



Указание. Вместе с клеткой, на которой он стоит, король бьёт квадрат из девяти клеток. Разумно покрыть доску такими квадратами.

Д12. Ответ: а) нет; **б)** да; **в)** нет.

Решение. а) Нет. Уже сумма шестнадцати самых маленьких нечётных чисел равна $16^2 = 256 > 200$.

б) Да, например, $1 + 3 + 5 + \ldots + 21 + 23 + 25 + 31$.

в) Нет, сумма нечётного числа нечётных слагаемых будет нечётным числом.

Указание для знатоков. Сумма первых N нечётных чисел равна N^2 (см. решение задачи 2.12).

Д13. Можно. Самое простое — класть в кучку самую большую гирю, пока не наберётся 35 г. Например, $20+15$, $19+16$, $18+17$, $14+13+8$, $12+11+10+2$, $9+7+6+5+4+3+1$.

Д14. Вершины квадрата и его центр.

Указание. Равнобедренный прямоугольный треугольник — это половинка квадрата. Отсюда идея взять квадрат.

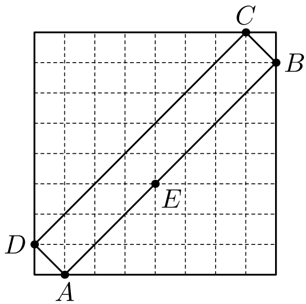
Д15. Например, $125 \cdot 8 = 1000$ или $375 \cdot 8 = 3000$. Есть решение и с двойками вместо нулей: $358 \cdot 9 = 3222$.

Путь к решению. Естественно попробовать Х $= 0$. При У $= 1$ разложением на множители числа 1000 находим вышеприведённое решение. Ещё одно решение получается при У $= 3$. Вообще, поскольку Р < 10, а первая цифра не изменилась, то цифра Х должна быть меньше, чем Д. Пробуя Х $= 2$, найдём ещё решение.

Д16. Могут. Пусть они сидели вокруг стола в указанном порядке, тогда вдвоём могут быть Атос с Арамисом, а Портос с Д'Артаньяном. Сначала переправляются Атос с Арамисом, Атос возвращается, переправляются Портос с Д'Артаньяном, Арамис возвращается, и снова переправляются Атос с Арамисом.

Указание. Первую пару не поссорившихся выбираем как угодно, возвращаем любого из двух, а все дальнейшие действия получаются однозначно (если не хотим возвращаться к уже встречавшемуся расположению).

Д17. Можно считать, что наш квадрат — клетчатый, размером 8×8 (иначе нарисуем клетки, многократно деля пополам стороны и отрезки сторон). Соединив ближайшие к двум противоположным вершинам точки деления, получим искомый прямоугольник (см. рис.). Вне построенного четырёхугольника остаются равнобедренные прямоугольные треугольники, поэтому каждый угол четырёхугольника равен $180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$. Меньшая сторона равна диагонали клетки, а бо́льшая — семи таким диагоналям.



Д18. Три куска по 120 г, два куска по 80 г и два куска по 40 г.

Путь к решению. Гости должны получить по 200 либо по 120 г. Разрежем сначала пирог на 3 порции по 200 г. Отрежем от двух частей по куску в 120 г. Образуются ещё два куска по 80 г. Чтобы дополнить их до 120 г, отрежем от целой порции два куска по 40 г. Образуется как раз кусок в 120 г.

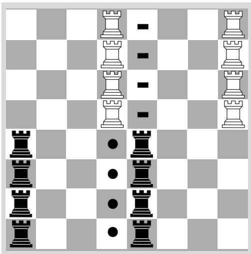
Другой способ. Представим пирог как ленту длиной 600 мм. Сделаем на ленте два разреза, делящие её на 3 равные части, и, независимо, ещё 4 разреза, делящие её на 5 равных частей. Шесть разрезов разобьют ленту на 7 частей. Посчитайте сами размеры частей.

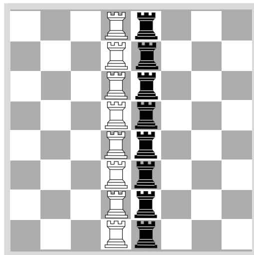
Д19. Да, например, 12301245678**9**. Числа 3, 13, 23 получаются из первой тройки цифр, во всех остальных цифра десятков берётся из первой тройки цифр, цифра единиц — из последних девяти цифр.

Путь к решению. Чтобы получить 11 и 22, цифры 1 и 2 придётся взять по 2 раза, остальные по одному разу. Цифры десятков 1, 2 и 3 надо поставить в начало. Но тройка нужна нам ещё как цифра единиц в числах 13 и 23, значит, 1 и 2 должны стоять перед тройкой. Чтобы получить числа 30, 31 и 32, должны быть 0, 1 и 2 после тройки.

Д20. Ответ: все клетки.

Расставим сначала по 8 ладей каждого цвета, как на рис. слева. Следующими 8 ходами выставляем белые ладьи на клетки, отмеченные точкой, снимая при этом по одной из чёрных ладей с края доски; аналогично выставляем чёрных ладей на клетки с минусом, снимая белых с края доски. В результате образуется позиция на рис. справа. Теперь чёрные и белые ладьи отгородились друг от друга «стеной», и можно выставлять белые ладьи на левую половину доски, а чёрные — на правую, никого не снимая.



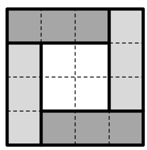


Путь к решению.

Чтобы продать что-нибудь ненужное,
надо сначала купить что-нибудь ненужное.
кот Матроскин

Если разгородить доску «чёрно-белой стеной» на равные половинки, то её удастся заполнить всю. Но как построить стену: ведь ладьи в ней бьют друг друга, их придётся снимать? Впрочем, почему обязательно их: можно снимать другие ладьи, ненужные для стены! А если таких не будет? Заготовим заранее!

Д21. Ответ: а) можно; **б)** нельзя.



Краткие решения. а) См. рисунок. Размер клетки $0{,}25 \times 0{,}25$.

б) Сумма периметров частей должна быть не меньше периметра квадрата.

Д22. Ответ: а) мог; **б)** не мог.

Краткие решения. а) Возраст может повыситься не только за счёт прихода старого, но и за счёт ухода молодого. Достаточно, чтобы возраст перешедшего игрока был *ниже среднего* в команде А и *выше среднего* в команде Б.

б) Если сумма возрастов в команде А выросла, то в Б она снизилась. Но число игроков не изменилось, значит, средний возраст в Б уменьшился.

Д23. Ответ: а) да; **б)** нет.

Краткие решения. а) Например, числа 13, 2, остальные — единицы (11 штук).

б) Если может, то произведение тоже равно 13. Но это число — простое, поэтому при разложении на множители один из множителей будет 13. В сумме с ещё одним выйдет больше тринадцати.

Д24. Ответ: такое возможно.

Указание. Гиря, про которую всё понятно, не обязательно должна быть на весах.

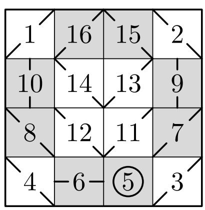
Барон на одну чашу весов положит пять гирь, а на другую только две гири так, что получит равновесие. Такое возможно только для гирь $1+2+3+4+5=7+8$. Значит, оставшаяся гиря весит 6 г.

Д25. а) Можно. Есть 5 троек решек. В каждой перевернём две крайние монеты.

б) Нельзя. В круге чередуются группы подряд лежащих решек и подряд лежащих орлов. Нельзя перевернуть последнюю монету группы, поэтому нельзя слить две группы решек в одну. Вначале было пять групп решек, значит, в любой момент — тоже. Итак, меньше пяти решек стать не может, значит, и 26 орлов не получится.

Д26. Ответ: а) да; **б)** нет.

а) Пример с 15 отмеченными числами — на рисунке (чёрточками в клетках показано направление ряда, в котором данное число максимально).

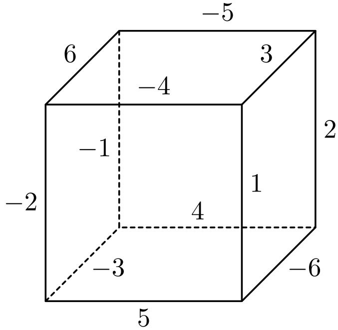


б) Покажем, что хотя бы одно число не отмечено. Рассмотрим числа в восьми серых клетках и возьмём наименьшее из них (в нашем примере это число 5 — оно обведено кружком). Это число не может быть отмечено, так как в каждом проходящем через него ряду: вертикали, горизонтали и обеих диагоналях — есть ещё одно число из этой восьмёрки, *большее* него.

Путь к решению. а) Удобно строить симметричный пример (относительно вертикальной оси). Разбиваем числа на пары последовательных, и помещаем пару в симметричные клетки. «Направления» клеток тоже выбираем симметрично, избегая, насколько возможно, горизонтальных.

Д27. а) Нет. Предположим, что можно. Тогда, сложив суммы в вершинах, получим число, кратное восьми. С другой стороны, в этой сумме каждое ребро учтено по два раза, значит, она равна $2(1 + 2 + 3 + \ldots + 12) = 156$. А это число на 8 не делится.

б) Да, см. рис.

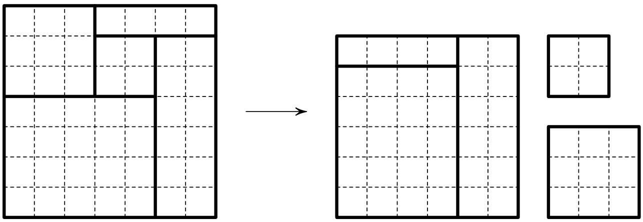


Путь к решению. б) Подсчёт, как в решении пункта а) даёт сумму 0 при каждой вершине. Концы рёбер с противоположными числами не совпадают, иначе сумма в таком конце не 0. Кроме того, концы рёбер с числами 6 и -6 не могут быть связаны одним ребром, иначе в одном из этих концов сумма не 0. Отсюда идея: искать *симметричное* решение, помещая противоположные числа на противоположные рёбра.

Д28. а) Нет. Предположим, что можно. Тогда площадь исходного квадрата будет суммой площадей трёх разных меньших квадратов. Если среди слагаемых нет 25, то даже наибольшая возможная сумма $16 + 9 + 4 = 29$ меньше 36.

Значит, среди слагаемых есть 25, но нет 16 (так как $25 + 16 > 36$). Если среди слагаемых нет 9, то остаётся только сумма $25+4+1 = 30 < 36$. Если 9 есть, то третье слагаемое 2, и это — не квадрат.

б) Можно, см. рис.



Путь к решению. б) Аналогично решению пункта а) вычислим, что размеры квадратов должны быть 2×2, 3×3 и 6×6. Ясно, что хотя бы одна часть должна быть квадратной. Естественно попытаться вырезать две части, равные меньшим квадратам, а квадрат 6×6 сложить из трёх частей.

Д29. а) Можно. Заметим, что 11 маленьких свечей горят в общей сложности 121 минуту, а две большие — 120 минут. Купим те и другие — это нам обойдется в $11 \cdot 11 + 2 \cdot 60 = 241$ рубль. Будем жечь маленькие свечи по очереди одну за другой, большие — тоже, начав одновременно. Когда догорит вторая большая, от последней маленькой свечи останется «одноминутный» огарок.

б) Можно. Купим 2 большие свечи и 6 маленьких — это нам обойдётся в $60 \cdot 2 + 6 \cdot 11 = 186$ рублей. Зажжём одновременно обе большие и маленькую свечи, и будем жечь маленькие свечи по очереди одну за другой. При этом, когда догорит пятая маленькая, погасим одну большую, оставив пятиминутный огарок. Зажжём его, когда догорит вторая большая свеча. Он догорит на минуту раньше, чем догорит шестая маленькая свеча.

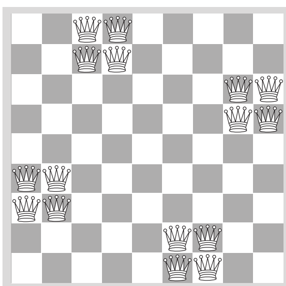
в) Можно. Купим одну большую свечу и 8 маленьких — это нам обойдётся в $60 + 8 \cdot 11 = 148$ рублей. Зажжём одновременно большую и маленькую свечи, и будем жечь маленькие свечи по очереди одну за другой, пока не догорит пятая. Зажжём тогда одновременно шестую и седьмую свечи. Когда догорит большая, погасим шестую (от неё останется шестиминутный огарок) и зажжём восьмую. Когда догорит седьмая, от восьмой останется пятиминутный огарок. Зажжём огарок шестой — он догорит на минуту позже восьмой свечи.

Путь к решению. б, в) Пять малых и одна большая свеча позволяют получить пятиминутный огарок большой, а 6 малых и одна большая свеча позволяют получить шестиминутный огарок малой. Два таких огарка решили бы задачу. Хочется запустить два процесса одновременно: это сэкономит время, но не сэкономит деньги. Но ведь удвоить число огарков можно проще: достаточно в нужный момент зажечь не одну, а две свечи!

Д30. Да. Разрежем сначала квадрат на 1006 равных прямоугольников, а затем каждый прямоугольник разрежем диагональю на два равных треугольника.

Д31. Пусть три парохода идут влево, а три — вправо. Повторим три раза такую группу действий: один из пароходов, плывущих вправо, заходит в залив; все остальные пароходы плывут влево, пока залив не окажется правее их; после этого пароход из залива уплывает вправо насовсем, а оставшиеся пароходы плывут все вправо, пока один из тех, кому нужно вправо, не поравняется с заливом.

Д32. См. рис.



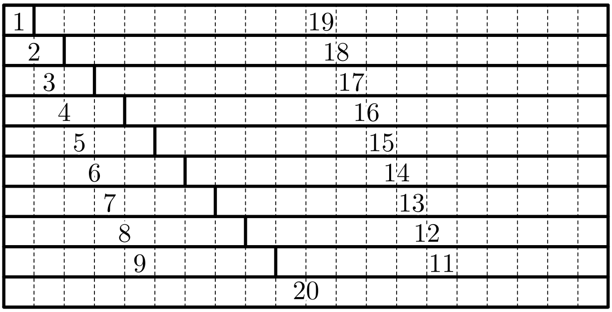
Путь к решению. Если расположить четырёх ферзей в квадрате 2×2, то каждый побьёт трёх других. Осталось найти место для четырёх таких квадратов, чтобы ферзи из разных квадратов друг друга не били.

Д33. Может. Пример:

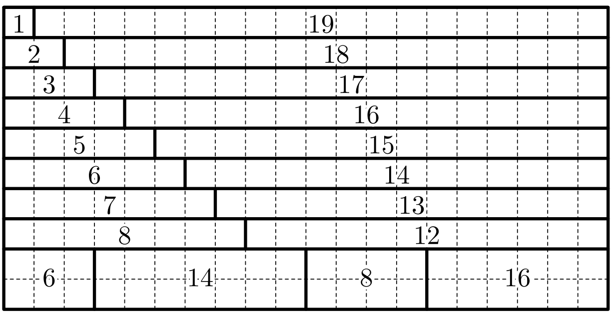
$$5050\ldots50 - 2525\ldots25 = 2525\ldots25.$$

Указание. Задача равносильна такой «Может ли сумма двух 100-значных зебр быть зеброй?» Достаточно придумать пример для двузначных чисел, а затем повторять цифры. В примере для двузначных обязателен переход через десяток (почему?).

Д34. а) Можно, см. рис.



б) Можно, см. рис.



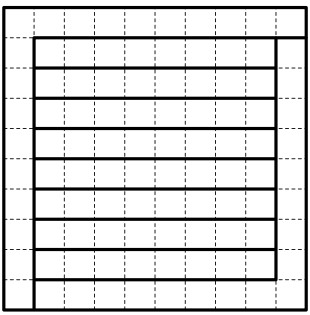
Путь к решению. а) Заметим, что $1 + 2 + 3 + \ldots + 19 < 10 \cdot 20$. Поэтому можно попытаться разрезать на различные прямоугольники толщины 1. Разрежем сначала прямоугольник на 10 полосок 1×20, а затем разобьём 9 полосок на два прямоугольника каждую.

б) Поскольку $1 + 2 + 3 + \ldots + 20 > 10 \cdot 20$, то разрезать на 20 прямоугольников разной площади не удастся. Попытаемся разбивать на прямоугольники толщины 1 и 2. Для этого вначале разобьём наш прямоугольник на 8 полосок 1×20 и одну полоску 2×20. Толстую полоску нетрудно разбить на 4 прямоугольника.

Д35. Можно. Например, превратим 2 в 11, прибавляя по 1. Затем превратим 1 в 1999, прибавляя по 2. Наконец, превратим 11 в 1999, прибавляя по сумме цифр числа 1999, то есть по 28.

Путь к решению. Посмотрим на ситуацию в конце, когда у нас уже есть одно число 1999. Удобнее следить, когда прибавляется именно его сумма цифр — ведь у другого числа сумма цифр постоянно меняется. Вообще, если не прибавлять к числу сумму цифр его самого, то можно идти «задом наперёд». Отнимая от 1999 по 28, спустимся до 11 (конечно, удобнее это сделать, поделив 1999 на 28 с остатком). Число 11 удобно тем, что у него маленькая сумма цифр — всего два. В частности, шагая по 2, можно спуститься от 1999 до 1. Ну, а пару 1, 11 из пары 1, 2 получить нетрудно.

Д36. а) Можно. Сначала режем квадрат на рамку толщины 1 и меньший квадрат со стороной 8. Рамку режем на 2 уголка: один с плечами длины 10, другой — с плечами длины 8 (см. рис.), а меньший квадрат режем на 8 полосок длины 8. Из полосок составляем 4 полоски длины 16, наращиваем каждое из плеч уголков своей полоской (длины плеч по-прежнему отличаются на 1) и составляем рамку из удлинённых уголков.



б) Нельзя. Мысленно разделим рамку на четыре полоски 17×1 (они будут накладываться по углам). В какой-то из этих полосок будет всего один разрез или ни одного. Значит, у нас будет часть, один из размеров которой больше восьми. Доску 8×8 сложить не получится.

Д37. Ответ: Все 64.

Первый способ. Выставляем ладей на главную чёрную диагональ, потом на параллельные ей соседние белые диагонали, потом на параллельные соседние с предыдущими белые диагонали, и т. д. В конце выставляются ладьи на чёрные поля в произвольном порядке.

Второй способ. Нужно заполнять доску квадратиками 2×2, а каждый квадратик нужно заполнять по диагоналям. Тогда каждая новая ладья будет пробивать чётное число пустых клеток, что видно из следующих замечаний.

А. Каждая ладья пробивает 14 клеток.

Б. При заполнении квадратика 2×2 по диагоналям каждая новая ладья бьёт в этом квадратике либо 0, либо 2 клетки.

В. Квадратик 2×2 имеет со строкой (столбцом) либо 0, либо 2 общие клетки.

Д38. а) Можно. Повторим шесть раз такую группу действий: снимаем 300, затем два раза кладём по 120. В результате каждый раз сумма на счету будет уменьшаться на 60 руб, и там останется 640 руб. При этом нетрудно проверить, что на счету всё время оставалось больше 300 руб. Далее дважды снимаем по 300 руб, на счету останется 40 руб, значит, на руках — 960 руб.

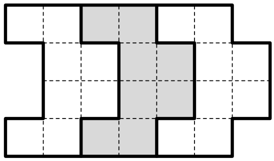
б) Нельзя. И 120, и 300 делятся на 60, поэтому и сумма денег «на руках» должна делиться на 60. Но между 970 и 1000 нет сумм, кратных 60.

Д39. Можно. В случае пункта а) ставим параллелепипед на грань 1×1 в левый нижний угол. В случае пункта б) кладём параллелепипед на две нижние клетки левой вертикали. Далее катим вверх до упора, шаг вправо, вниз до упора, шаг вправо, вверх до упора и т. д.

Д40. Да. Например, круг состоит из семи десятков вида ААХААХААЛЛ, затем три группы по 14 человек вида ААХААХААХААЛЛЛ.

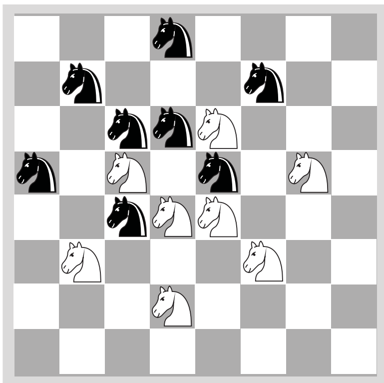
Путь к решению. Мы искали группы, среди которых химиков и лекарей поровну. В группе из 10 человек доля алхимиков наибольшая, но 112 на 10 не делится. Из групп с численностью, не кратной десяти, достаточно высока доля алхимиков в группе из 14 человек.

Д41. См. рис.



Путь к решению. Заметим, что фигура состоит из горизонтальных шестиклеточных полосок. Разрезав каждую полоску на три домино, получим три равные фигуры, полученные друг из друга сдвигом по горизонтали.

Д42. См. рис.

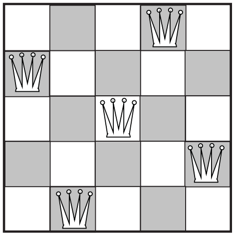


Путь к решению. Достаточно добавить к восьми коням из ответа к задаче 5.5 (белые кони на рисунке) ещё 8, полученных сдвигом на ход коня (чёрные кони на рисунке).

Д43. Например, 98765432100123456789. Каждая следующая пара внутри предыдущей, поэтому цифр между цифрами внутренней — меньше.

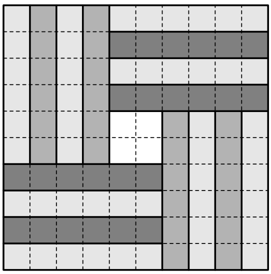
Указание. Чтобы пары располагались одна внутри другой, достаточно одинаковые цифры расположить симметрично относительно середины числа.

Д44. См. рис.



Путь к решению. Если поставить одного ферзя в центр, то остальные должны быть расположены по окружности на расстоянии хода коня от центра. Ферзи на соседних полях «окружности» бьют друг друга, поэтому надо брать поля через одно. Получается картинка, переходящая в себя при повороте на 90°.

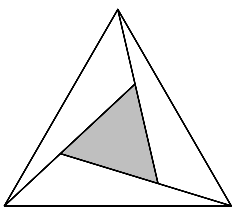
Д45. а) Можно, см. рис.



б) Нельзя. У семнадцати таких прямоугольников общая площадь больше 100 кв. дм.

Путь к решению. Попробуем заполнить все крайние клетки. Положив один прямоугольник от угла вдоль края, придётся оставшуюся часть края заполнить перпендикулярными прямоугольниками. Так, идя вдоль края, получим указанную картинку, переходящую в себя при повороте на 90°.

Д46. См. рисунок. Картинка переходит в себя при повороте на 120°, поэтому участки одинаковы.

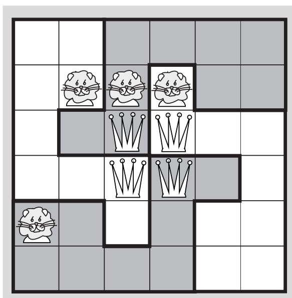


Д47. Выигрывает Петя. Ему достаточно взять 6 спичек из меньшей кучки. Чтобы не проиграть, Вася должен взять списки из кучки с 10 спичками. В ответ Петя ходит *симметрично*: берёт столько же спичек из другой кучки с 10 спичками, восстанавливая равенство кучек. Так, повторяя ходы Васи, Петя добьётся, что Вася *первым* заберёт последнюю спичку либо из одной равной кучки, либо из третьей кучки.

Путь к решению. Две равные кучки наводят на мысль о *симметрии*: сделав кучки как бы зеркальными отражениями друг друга, можно будет повторять ход *зеркально*. Это выгодно: если ход соперника не проигрышный, то зеркальный ход — тоже не проигрышный. Однако, возможность «зеркального» хода надо обеспечить. Здесь достаточно помешать сопернику делать ход в «незеркальной» кучке. Достаточно оставить в ней всего одну спичку: если уж соперник не даст поддержать симметрию, то проиграет.

Комментарий. Стратегия, основанная на «повторении» ходов соперника и восстановлении симметрии позиции, называется *симметричной*.

Д48. См. рисунок.

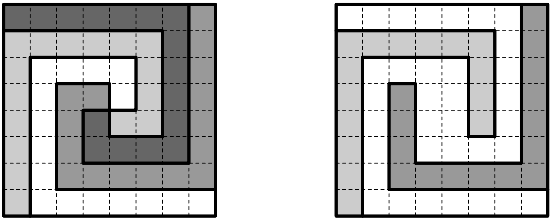


Путь к решению. Вымпелы явно должны иметь замысловатую форму, поэтому сделать их равными проще всего за счёт поворота картинки на 90°.

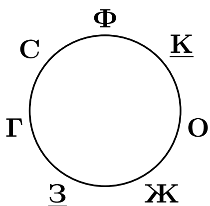
Д49. Могло. **а)** См. рис. слева; **б)** см. рис. справа.

Путь к решению. а) Естественно поискать разбиение на части толщины 1 (тогда каждая клетка примыкает к границе разреза), переходящее в себя при повороте на 90°. Можно начать из четырёх клеток в центре и идти по спирали.

б) В предыдущем решении две противоположные части можно объединить за счёт клеток центра. Разрезание получается центрально-симметричным.

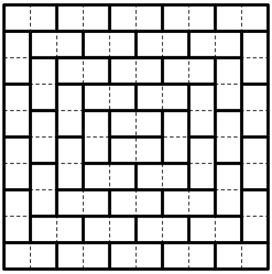


Д50. Каждый гном видит все колпаки, кроме двух: своего и спрятанного. Надо договориться, какой из двух цветов назвать. Это можно сделать, например, так. Обозначим цвета их первыми буквами: **К**расный, **О**ранжевый, **Ж**ёлтый, **З**елёный, **Г**олубой, **С**иний, **Ф**иолетовый. Расположим их заранее по кругу (например, в том же порядке, как и цвета радуги, — см. рис.). Каждый гном не видит колпаки двух цветов. Он должен назвать тот из них, от которого до другого ближе идти по часовой стрелке, чем против часовой. Например, если гном не видит колпаков красного и зелёного цветов (на рисунке цвета подчеркнуты), то он назовёт красный. Тогда три гнома угадают, а три других ошибутся. Например, если спрятан колпак цвета **З**, то угадают гномы, на которых надеты колпаки цветов **Г**, **С** и **Ф**.



Комментарий. Можно доказать, что никакая договорённость не позволит наверняка угадать цвет спрятанного колпака более чем половине гномов.

Д51. Можно. Разобьём прямоугольник на 3 квадрата 10×10. Разобьём крайние квадраты на домино, как на рисунке, а средний квадрат — так же, но с поворотом на 90°. Внутри квадрата нигде не сходятся вершинами 4 домино. При склейке квадратов вершины домино одного квадрата придутся на середины длинных сторон домино другого квадрата.



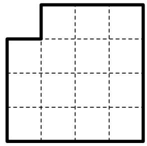
Авторы задач

Большинство использованных в книге задач давно и заслуженно стали математическим фольклором или восходят к нему. Их обычно публикуют без указания авторов. Это, однако, не повод умалчивать об авторах, когда они известны. Проще всего узнать свои собственные задачи: 1.9, 1.10, 2.9, 2.10, 2.12, 2.13, 2.14, 4.1, 4.2, 4.7, 4.12, 5.2, 5.3, 5.5, 5.7, 5.8, 5.10, Д1, Д5, Д7, Д9, Д10, Д14, Д15, Д17, Д20, Д21, Д24, Д25, Д26, Д29, Д30, Д32, Д33, Д35, Д37, Д39, Д40, Д41, Д42, Д46, Д49, Д50, Д51. Других задач с известным автором немного, но зато почти все — жемчужины: Д. Ботин: 1.8; С. Г. Волченков: 4.11; Р. Г. Женодаров: Д36; А. Я. Канель-Белов: 3.4, 5.4, Д22; О. Ф. Крижановский: Д36; Л. Э. Медников: Д29; И. С. Рубанов: 5.11; С. И. Токарев: 3.10; А. К. Толпыго: Д38. Спасибо этим авторам, а также тем неизвестным, кто сочинил фольклорные жемчужины!

Раздаточный материал

Занятие 1. Как такое может быть?

Хороший вопрос — это половина ответа.



Задача 1.1. Можно ли квадрат 4×4 без угловой клетки (см. рис.) разрезать на 3 равные части?

Задача 1.2. Расшифруйте ребус (одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные — разные):

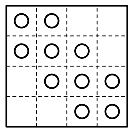
Б + БЕЕЕ = МУУУ.

Задача 1.3. Арбуз разрезали на 4 части и съели. Осталось 5 корок. Как такое может быть, если корок никто не грыз?

Задача 1.4. Найдутся ли три натуральных числа, которые друг на друга не делятся, но каждое делит произведение двух других?

Задача 1.5. Мюнхгаузен говорит: «Позавчера мне было 40 лет, а в следующем году мне исполнится 43». Могут ли его слова быть правдой?

Задача 1.6. Расставьте шашки на клетчатой доске 6×6 так, чтобы на всех горизонталях стояло разное число шашек, а на всех вертикалях — одинаковое.



Задача 1.7. В квадрате 4×4 отметили 10 клеток (см. рис.). Разрежьте квадрат на четыре одинаковые по форме части так, чтобы они содержали соответственно 1, 2, 3 и 4 отмеченные клетки.

Задача 1.8. Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или отчество, или фамилия. Может ли так быть?

Задача 1.9. Дата 21.02.2012 читается одинаково слева направо и справа налево. А будут ли после неё ещё такие даты в нашем столетии?

Задача 1.10. Придумайте способ разрезать квадрат на семиугольник и восьмиугольник так, чтобы для каждой стороны восьмиугольника нашлась равная ей сторона семиугольника.

Задача 1.11. В однокруговом турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. «Спартак» одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?

Задача 1.12. Барон Мюнхгаузен каждый день ходил на охоту, а возвратившись, говорил: «Сегодня я добыл уток больше, чем позавчера, но меньше, чем неделю назад».

а) Могли ли его слова 7 дней подряд быть правдой?

б) Какое наибольшее число дней подряд эти слова могли быть правдой?

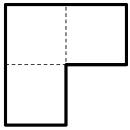
Занятие 2. Ищи там, где легче. Высматривай знакомое

— Обронили там, а ищете здесь?!
— Так там темно, а здесь хоть фонарь горит...

Задача 2.1. Можно ли выписать несколько различных чисел по кругу так, чтобы каждое было равно сумме двух своих соседей?

Задача 2.2. Можно ли расставить на шахматной доске более 30 коней так, чтобы они не били друг друга?

Задача 2.3. Разрежьте уголок из трёх клеток (см. рис.) на четыре равные части.



Задача 2.4. Можно ли выписать больше ста натуральных чисел (не обязательно различных) так, чтобы их сумма была равна их произведению?

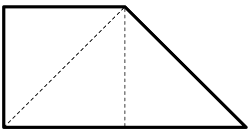
Задача 2.5. Найдите хотя бы одно решение уравнения

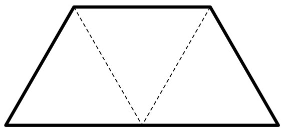
$$28x + 30y + 31z = 365$$

в натуральных числах.

Задача 2.6. Раскрасьте точки плоскости в три цвета так, чтобы на любой прямой были точки не более чем двух цветов и все цвета были использованы.

Задача 2.7. Трапеция на рисунке слева составлена из трёх равных равнобедренных прямоугольных треугольников, а трапеция на рисунке справа — из трёх равных равносторонних треугольников. Разрежьте каждую из трапеций на 4 равные части.





Задача 2.8. Расставьте на шахматной доске 14 слонов так, чтобы они не били друг друга.

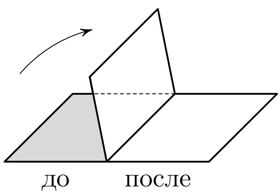
Задача 2.9. Петя задумал однозначное число. Вася может назвать своё число и спросить, чему равен наибольший общий делитель двух этих чисел. Может ли он подобрать такое число, чтобы по ответу наверняка узнать Петино число?

Задача 2.10. Разрежьте квадрат на равные треугольники и сложите из них два меньших неравных квадрата.

Задача 2.11. Перед вами три человека: двое нормальных, один — идиот. На вопрос, требующий ответа «Да» или «Нет», нормальные отвечают честно. Идиот же в смысл вопроса не вникает, а отвечает наугад. Каждый из них знает, кто есть кто. Как и вам за два вопроса определить про всех, кто есть кто?

Задача 2.12*. Разложите 100 орехов на 10 кучек так, чтобы в каждой кучке было разное число орехов, но никакую из них нельзя было бы разбить на две так, чтобы число орехов во всех 11 кучках оставалось различным.

Задача 2.13. На квадратной доске со стороной 1 м лежат, не перекрывая друг друга, два плоских картонных квадратика — квадратный дециметр и квадратный сантиметр. Дима и Сима ходят по очереди. За ход игрок перекатывает свой квадрат через сторону (то есть выбирает сторону квадрата и переворачивает квадрат как листок в книге, так, чтобы именно эта сторона осталась на месте, см. рис.). После хода квадрат не должен выйти за пределы доски, даже частично. Дима катает дециметровый квадрат, а Сима — сантиметровый. Всегда ли Дима может действовать так, чтобы не позднее 100-го хода квадраты перекрылись по куску ненулевой площади?



Задача 2.14*. В записи точного квадрата миллион цифр. Может ли количество чётных и нечётных цифр быть одинаковым?

Занятие 3. Можно или нельзя?

Кто хочет сделать, ищет способ,
кто не хочет, ищет причину.

Задача 3.1. Может ли произведение цифр трёхзначного числа быть равно **а)** 22; **б)** 28?

Задача 3.2. У шахматной доски выпилены

а) одна угловая клетка;

б) две угловые клетки на одной стороне;

в) две противоположные угловые клетки.

Можно ли такую испорченную доску распилить на двуклеточные прямоугольники?

Задача 3.3. Петя и Вася часто играют между собой и записывают все результаты. Оказалось, что за каждые два месяца подряд в 2011 году Петя в сумме чаще выигрывал, чем проигрывал.

а) Может ли случиться, что в сумме за весь год чаще выигрывал Вася?

б) Может ли случиться, что в сумме за первые 11 месяцев года чаще выигрывал Вася?

Задача 3.4. а) В коробке есть карандаши разной длины и есть карандаши разного цвета. Всегда ли среди них найдутся два карандаша, отличающиеся и по цвету, и по длине?

б) В магазин привезли платья трёх цветов и трёх фасонов. Всегда ли можно выбрать для витрины 3 платья, чтобы были представлены все цвета и все фасоны?

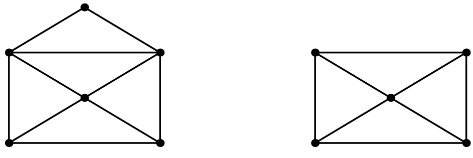
Задача 3.5. Может ли в месяце быть **а)** 5; **б)** 6 воскресений?

Задача 3.6. Может ли сумма цифр трёхзначного числа быть равна **а)** 22; **б)** 28?

Задача 3.7. Можно ли, не оторвав карандаш от бумаги и не проведя никакой линии более одного раза, нарисовать

а) открытый конверт (рис. слева);

б) закрытый конверт (рис. справа)?



Задача 3.8. Можно ли в прямоугольную таблицу поставить числа так, чтобы

а) в каждом столбце сумма была положительна, а в каждой строке — отрицательна;

б) в каждом столбце сумма была больше 10, а в каждой строке — меньше 10?

Задача 3.9. Можно ли на шахматной доске расставить

а) 9 ладей;

б) 15 слонов

так, чтобы они не били друг друга?

Задача 3.10. а) Может ли наименьшее общее кратное двух натуральных чисел равняться их сумме? **б)** А четырёх?

Задача 3.11. Можно ли в квадрат со стороной 1 поместить несколько неперекрывающихся квадратов

а) с суммой периметров 100;

б) с суммой площадей 100?

Занятие 4. Повторяемость

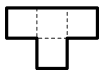
Эх раз, ещё раз, ещё много-много раз,
Лучше 40 раз по разу, чем ни разу 40 раз.

Задача 4.1. Представьте число 111 как сумму 51 натурального слагаемого так, чтобы у всех слагаемых была одинаковая сумма цифр.

Задача 4.2. Разрежьте шахматную доску по границам клеток на 20 частей одинакового периметра.

Задача 4.3. Есть 30 гирек, которые весят 1 г, 2 г, 3 г, ..., 30 г. Можно ли разложить их на три кучки одинакового веса по 10 гирь в каждой?

Задача 4.4. Как составить квадрат из 100 тетрамино в виде буквы «Т» (см. рис.)?

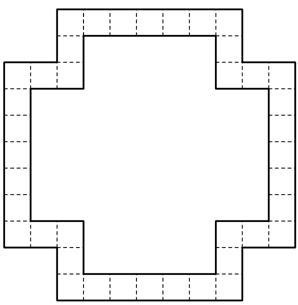


Задача 4.5. Есть кран, раковина и два бидона ёмкостью 15 и 16 литров без делений. Как отмерить 8 литров воды?

Задача 4.6. а) На крайней клетке доски 1×101 сидит кузнечик. Одним прыжком он может перепрыгнуть через одну или две клетки и приземлиться в следующей. Сможет ли он побывать на всех клетках ровно по одному разу?

б) То же на доске 1×99?

Задача 4.7. Разрежьте рамку (см. рис.) на 16 равных частей.



Задача 4.8. Полк солдат подошёл к реке. По реке катались на лодке два мальчика. Лодка выдерживает одного солдата или двух мальчиков. Как всем солдатам переправиться на другой берег и вернуть лодку мальчикам?

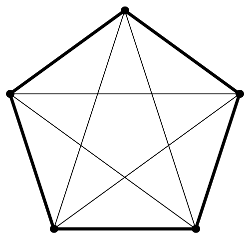
Задача 4.9. Можно ли поверхность куба оклеить без перекрытий

а) 16 одинаковыми прямоугольниками;

б) 15 одинаковыми прямоугольниками?

Задача 4.10. Есть 30 яблок, одно из них — явно червивое. Петя и Вася едят по очереди от одного до трёх яблок за раз. Тот, кому достанется червивое, — проиграл. Петя начинает. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

Задача 4.11. Пятиугольник на рисунке разбит диагоналями на 11 частей: десять треугольных и одну пятиугольную. В каждую часть вписали положительное число. Могли ли оказаться равными все суммы в треугольниках с отмеченными вершинами?



Задача 4.12*. Расставьте 48 ладей на клетчатой доске 10×10 так, чтобы каждая била 2 или 4 пустые клетки.

Занятие 5. Симметрии, сдвиги и повороты

— У тебя один ботинок чёрный, другой — белый.
Сбегай домой, переобуйся.
— Я уже бегал, но дома тоже один чёрный,
другой — белый.

Задача 5.1. Разрежьте прямоугольник на
а) два равных шестиугольника;
б) два равных семиугольника.

Задача 5.2. а) Могут ли 8 слонов побить все клетки доски 4×10?
б) То же про 7 слонов.

Задача 5.3. Восемь бизнесменов купили большой квадратный остров со стороной 300 м, вокруг которого вдоль берега проложена узкая асфальтовая дорожка. Они хотят вырыть квадратный бассейн со стороной 20 м, а всю остальную территорию разделить на 8 одинаковых треугольных участков для строительства коттеджей. Как это можно сделать?

Задача 5.4. На балу было по 10 юношей и девушек, и за 10 танцев каждый станцевал с каждой. Как могло получиться, что каждый юноша каждый следующий танец танцевал с более красивой или с более умной девушкой?

Задача 5.5. Расставьте на шахматной доске несколько коней так, чтобы каждый бил ровно трёх других.

Задача 5.6. В лодке, вмещающей только двух человек, через реку должны переправиться три миссионера и три каннибала. Миссионеры боятся оставаться на каком-нибудь берегу в меньшинстве. Как им переправиться?

Задача 5.7. Могут ли 8 коней на клетчатой доске 4×12 побить все свободные клетки доски?

Задача 5.8. Можно ли расставить в ряд числа от 1 до 19 в таком порядке, чтобы у каждых двух соседей суммы цифр отличались на 2 или на 3?

Задача 5.9. а) В ряд сидят 30 девочек и мальчиков. Известно, что среди любых десяти подряд сидящих детей мальчиков больше, чем девочек. Может ли в целом девочек быть больше, чем мальчиков?

б) В ряд сидят 15 девочек и мальчиков. Известно, что среди любых десяти подряд сидящих детей мальчиков больше, чем девочек. Может ли в целом девочек быть больше, чем мальчиков?

Задача 5.10. Можно ли отметить на плоскости 6 точек и провести 6 прямых так, чтобы на каждой прямой было две отмеченные точки и по обе стороны от неё лежало по две отмеченные точки?

Задача 5.11. Можно ли в 16 клетках квадрата 5×5 провести по диагонали так, чтобы никакие две нарисованные диагонали не имели общей точки (даже общего конца)?

Задача 5.12. В футбольном турнире 2 очка давали за победу, 1 — за ничью, 0 — за поражение. Каждая команда сыграла с каждой, и команда «Госдеп» набрала больше всех очков. Организаторам это не понравилось, они постановили за победу давать не 2, а 3 очка, и пересчитали очки. Мог ли «Госдеп» после пересчёта набрать меньше всех очков?

Оглавление

Предисловие 3

Введение 5

Занятие 1. Как такое может быть? 7

Занятие 2. Ищи там, где легче. Высматривай знакомое 14

Занятие 3. Можно или нельзя? 22

Занятие 4. Повторяемость 28

Занятие 5. Симметрии, сдвиги и повороты 37

Задачи для самостоятельного решения 45

Указания к решениям задач и краткие решения 53

Раздаточный материал 71

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (495) 745-80-31; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: biblio.mccme.ru/shop/order

Книги в электронном виде: www.litres.ru/mcnmo

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru