Апории Зенона и матан

lex-kravetski
24 июня 2016

1 Вступление

Начнём, пожалуй, с самой известной апории.

> *Допустим, Ахиллес бежит в десять раз быстрее, чем черепаха, и находится позади неё на расстоянии в тысячу шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха в ту же сторону проползёт сто шагов. Когда Ахиллес пробежит сто шагов, черепаха проползёт ещё десять шагов, и так далее. Процесс будет продолжаться до бесконечности, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху.*

Внимание, спойлер: в описанном процессе Ахиллес действительно не догонит черепаху. Это совершенно точно, и скоро у вас не останется в этом ни малейших сомнений. Единственное неправильное слово в выводе: «никогда». На самом деле Ахиллес совершенно точно догонит и перегонит черепаху. Причём, довольно быстро.

Надеюсь, я уже достаточно заинтриговал, чтобы придать вам заряд бодрости для нескольких абзацев рассказа об элементах матанализа, благодаря которым только что изложенное станет очевидным.

Знаете, в большинстве попыток «опровергнуть» данную апорию люди используют фразы вида «но ведь ряд же сойдётся». При этом практически никто не уточняет, какой именно ряд куда именно сойдётся. Однако «в главном они правы»: всё дело действительно в том, что сойдётся кое-какой ряд. Кое-куда. Точнее, даже два ряда.

Я понимаю, что матан изучали не все, а среди изучавших не все поняли, про что там шла речь. Поэтому сейчас я кратко объясню все основы матана. Простыми, человеческими, понятными словами.

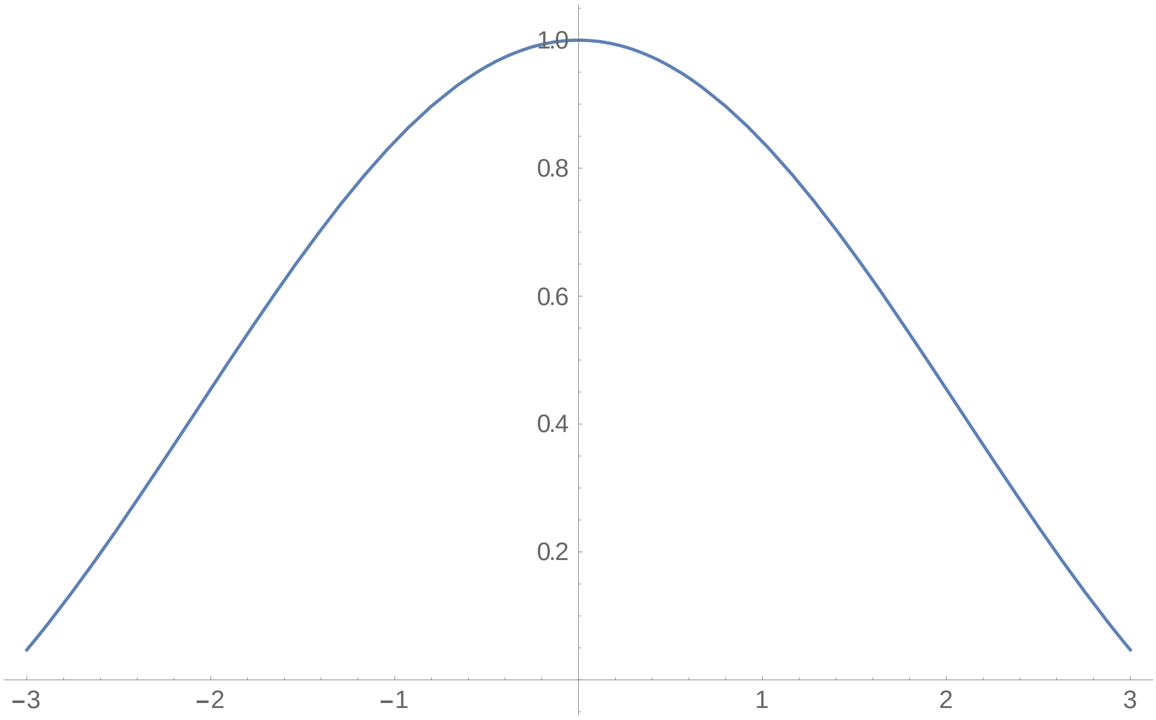
> *Если вы уже и так хорошо понимаете данные темы, то можете промотать статью до раздела «Апория про Ахиллеса в свете матанализа».*

2 Понятие предела

Ключевым понятием матанализа, без которого вообще никак, является понятие «предела».

Есть у нас какая-то зависимость, например, вот такая функция:

$$y = \frac{sin(x)}{x}$$



Вроде бы не особо сложная функция, однако есть одна проблема: в точке x = 0 значение этой функции не определено — поскольку не определено деление на ноль.

Тут мы делаем ловкий финт ушами: смотрим на область значений вблизи нуля, подбираясь к нему всё ближе и ближе. И видим, что чем ближе мы к нулю, тем ближе значение этой функции к единице.

Да, в самом нуле функция не определена, но всё-таки мы можем описать её поведение при приближении к нулю. В этом и смысл понятия предела: сколь бы малое число мы ни назвали, мы всегда сможем указать такой промежуток иксов вокруг нуля, что значение игрека при любом иксе из этого промежутка будет отличаться от единицы на меньшую величину, чем это наперёд заданное число.

Более кратко про это говорится: «при икс стремящемся к нулю предел функции игрек — единица».

Или

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

Предел неправильно отождествлять со значением функции в точке, к которой стремится икс. Речь всегда идёт только об окрестности этой точки и поведении функции в этой окрестности. Окрестности, сколь угодно малой, но при этом такой, из которой сама эта точка исключена.

Поэтому совершенно не обязательно, что существует хотя бы одна точка, в которой функция имеет значение, равное вычисленному пределу.

Более того, даже если функция определена в точке, в которой мы считаем предел функции, значение функции в этой точке может отличаться от предела функции в этой точке. Но может, конечно, и совпадать.

Например, определим такую функцию:

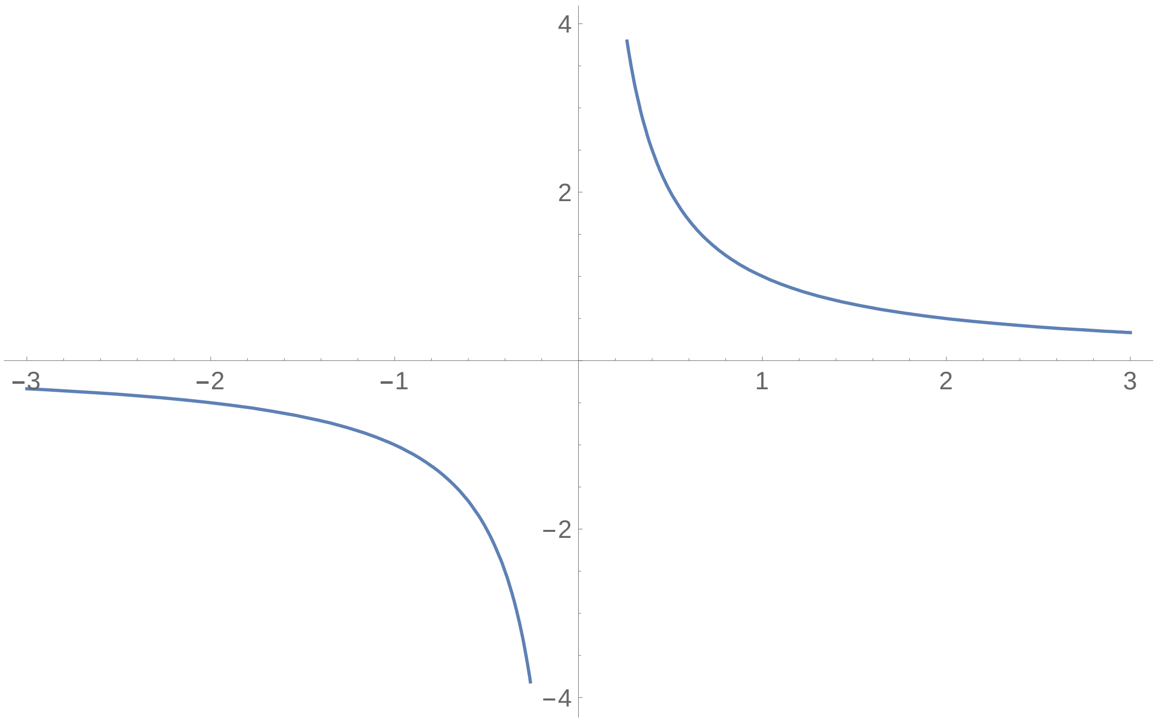
$$y = \begin{cases} x, \text{если } x \neq 0 \\ 100, \text{если } x = 0 \end{cases}$$

У такой функции предел при стремящемся к нулю иксе — ноль, однако само значение при равном нулю иксе — 100.

Похожим образом определяется понятие «бесконечность»: сколь большое число мы бы ни назвали, мы всегда можем найти окрестность вокруг точки, к которой стремится икс, где для всех иксов значение функции будет больше названного нами числа.

Например,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$



Обратите внимание, «бесконечность» — это не число. Это — специальный случай предела. Имеющий смысл, изложенный в предыдущем абзаце.

Поэтому неверно считать, будто «значение 1/x в точке ноль равно бесконечности». Нет, значение в этой точке не определено. А вот предел функции, он да, определён. И его смысл: есть такая область вблизи нуля, в которой все значения функции больше любого названного нами числа.

В данном случае, кстати, ещё играет роль, с какой стороны мы приближаемся к нулю. Если мы приближаемся слева, то, наоборот, какое бы отрицательное число мы ни назвали, есть область вблизи нуля и слева от него, такая, что все значения функции будут меньше этого числа.

Записывается это так:

$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$$

> *Отсюда, кстати, ещё проще понять, почему предел в точке и значение в этой точке — не одно и то же: в данном случае при стремлении к одной и той же точке с разных сторон мы получаем разные пределы. Но ведь у функции не может быть двух значений в одной точке.*

Теперь возникает вопрос: а какая связь с апориями Зенона? Скоро расскажу.

Но сначала расскажу о ещё одном понятии матанализа — «ряд».

3 Ряды или полные суммы последовательностей

«Рядом» называется бесконечная сумма слагаемых.

Однако, увы, на русском языке этот термин довольно неинтуитивен: кажется, будто бы «ряд» — это сами слагаемые (что, впрочем, было бы логичнее), а не их сумма. Поэтому, во избежание путаницы, я буду использовать несколько другие термины.

Сами слагаемые, которые, как правило, закономерно связанны со своим порядковым номером, я буду называть «последовательностью». Сумму некоторой конечной порции первых из них — «частичной суммой последовательности», а сумму всех до бесконечности — «полной суммой последовательности» или, для краткости, просто «суммой последовательности». Но надо иметь в виду, что в других источниках может фигурировать именно понятие «ряд».

Сумму последовательности обычно можно записать относительно коротким способом.

Например, вот такая сумма

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$$

может быть записана как

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

Большая греческая буква «сигма» означает «сумму». Под ней указано, что наш «счётчик порядковых номеров» будет называться «n» и начинаться с единицы. А сверху говорится, что закончится он на бесконечности. После же буквы «сигма» написано, каким образом слагаемое зависит от счётчика.

Вот ещё один пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Но в чём смысл всего этого? Как мы вообще можем что-то до бесконечности суммировать? Не будет ли результат суммы бесконечного количества слагаемых бесконечно большим?

Фокус в том, что иногда будет, а иногда — нет. И да, мы действительно не можем просуммировать бесконечное количество слагаемых. Но мы можем найти предел суммы конечного их количества.

В том же самом смысле, в котором он фигурировал выше для функций: если что-то является пределом суммы, то сколь малое число мы бы ни назвали, мы всегда можем указать количество слагаемых, после которого их сумма будет отстоять от предела меньше, чем на это число.

У суммы из первого примера предел — бесконечность. У второй — единица.

Возьмём, например, число 0.001. Сколько нам надо взять слагаемых второго ряда, чтобы их сумма отличалась от единицы меньше, чем на 0.001? Десять.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

$$\approx 0.9990234375$$

Все дальнейшие слагаемые будут приближать сумму к единице, хотя никакое конечное их количество не сделает её равной единице.

Для любого другого числа мы точно так же можем определить минимальное количество слагаемых, нужное, чтобы сумма отличалась от предела меньше, чем на это число.

По сути дела, именно это мы и подразумеваем под рядом: закономерное приближение суммы конечного количества слагаемых к какому-то числу с ростом количества этих слагаемых.

Или, если проще, — то, к чему стремится сумма, при увеличении количества слагаемых.

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

Теперь вернёмся к апории про Ахиллеса.

4 Апория про Ахиллеса в свете матанализа

> *Допустим, Ахиллес бежит в десять раз быстрее, чем черепаха, и находится позади неё на расстоянии в тысячу шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха в ту же сторону проползёт сто шагов. Когда Ахиллес пробежит сто шагов, черепаха проползёт ещё десять шагов, и так далее. Процесс будет продолжаться до бесконечности, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху.*

Процесс здесь описан так, будто движение протекает как бы итерациями. Сначала ставится метка там, где стояла черепаха. Потом Ахиллес бежит к этой метке. В это время черепаха ползёт. После этого метка ставится на новом месте и процесс повторяется.

Ну, пусть так, почему бы и нет? Распишем эти итерации в формулах.

Назовём S_0 — то расстояние, которое изначально отделяло черепаху от Ахиллеса. $V_А$ — скорость Ахиллеса, а $V_ч$ — скорость черепахи.

На первую итерацию у Ахиллеса уйдёт время

$$t_0=\frac{S_0}{V_А}$$

В это время черепаха успеет проползти

$$S_1=V_ч\ t_0=\frac{V_ч\ S_0}{V_А}$$

Чтобы пробежать это расстояние, Ахиллесу понадобится время

$$t_1=\frac{S_1}{V_А}=\frac{V_ч\ S_0}{V_А^2}$$

Черепаха проползёт

$$S_2=V_ч\ t_1=\frac{V_ч^2\ S_0}{V_А^2}$$

Ахиллес пробежит это расстояние за

$$t_2 = \frac{S_2}{V_\text{А}} = \frac{V_\text{ч}^2 \, S_0}{V_\text{А}^3}$$

И так далее.

Сколько же Ахиллес пробежит в сумме в рамках такого процесса?

Кажется, что сколько угодно, но нет. Его суммарный путь — это вот такая сумма последовательности.

$$S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{V_\text{ч}}{V_\text{А}}\right)^n S_0$$

В апории говорится, что Ахиллес бежит в десять раз быстрее черепахи, а в начале их разделяет тысяча шагов. Подставим эти сведения в получившуюся формулу.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n 1000 = \frac{10000}{9}$$

Внезапно оказывается, что процесс описывает совсем даже не бесконечное расстояние.

А что там со временем?

$$t_0 + t_1 + t_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{V_\text{А}} \left(\frac{V_\text{ч}}{V_\text{А}}\right)^n S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{V_\text{А}} \left(\frac{1}{10}\right)^n 1000 = \frac{1}{V_\text{А}} \frac{10000}{9}$$

Да, время, которое у Ахиллеса уйдёт на то, чтобы догнать черепаху, зависит от скорости Ахиллеса, которую мы не знаем (знаем только, что он бегает в десять раз быстрее черепахи), но и эта величина тоже оказывается конечной при любой ненулевой скорости Ахиллеса.

5 Алгебраическое решение

Попробуем из чисто физических соображений найти то расстояние, на котором Ахиллес догонит черепаху.

Это можно сделать из простого соотношения, выражающего совпадение координат Ахиллеса и черепахи в некоторый момент времени t.

$$V_\text{А} t = S_0 + V_\text{ч} t$$

Встреча, таким образом произойдёт в момент времени

$$t = \frac{S_0}{V_\text{А} - V_\text{ч}}$$

За это время Ахиллес пробежит расстояние

$$S = V_А t = \frac{S_0 V_А}{V_А - V_ч} = \frac{S_0}{1 - \frac{V_ч}{V_А}}$$

Теперь, если мы подставим заданные Зеноном соотношения, то получим

$$S = \frac{S_0}{1 - \frac{V_ч}{V_А}} = \frac{1000}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10000}{9}$$

А временем встречи, таким образом, будет

$$t = \frac{1}{V_А} \frac{10000}{9}$$

Где-то мы это всё уже видели… А, ну да, именно это у нас получилось, когда мы считали те же величины при помощи заданных Зеноном итераций.

6 Конечность бесконечного

Древние греки не успели изобрести матанализ, однако по апориям видно, что осмысливать подобные вопросы пытались уже тогда. Правда, попытки оказались не совсем удачными, что привело не к концепции и алгоритму обработки подобных случаев, а к утверждению в мысли об их парадоксальности.

Сумма бесконечного количества слагаемых, оказывается, иногда может быть конечной. И, как говорилось выше, под «суммой бесконечного количества слагаемых» подразумевается предел суммы конечного их количества при стремлении этого количества к бесконечности.

Интуитивное представление о том, что если мы будем «добавлять и добавлять», то наберём сколько угодно, верно лишь в части случаев. В других же случаях мы наберём «не больше, чем…». Или «не меньше, чем…».

И вот это «не больше, чем столько-то», отличающееся от «равно стольки-то», — тоже ключевой момент.

Полная сумма последовательности — это предельный переход. И рассуждать про неё мы должны исключительно так, как рассуждаем про пределы. То есть, сумма бесконечного количества слагаемых конечна не в том смысле, что она может быть *равна* конкретному числу, а в том смысле, что *её пределом может является* конкретное число.

Рассмотренная нами сумма не столько «конечна», сколько «ограничена некоторым числом». В большинстве случаев мы можем отождествить одно с другим, но в апории с Ахиллесом неполное совпадение смыслов одного и другого оказывается решающим.

7 Так что же с парадоксом?

Как мы видели, построенные из «зеноновских» итераций ряды сходятся к конечным величинам, совпадающим с рассчитанными алгебраическим способом.

Но в «алгебраическом решении» ответ — это момент и точка встречи. А в «решении через сумму последовательности» — это предел рассматриваемого процесса: то значение, к которому рассматриваемый процесс приближается сколь угодно близко, но никогда не достигает.

В описанном Зеноном построении любая сумма конечного количества слагаемых отрезков времени меньше времени встречи с черепахой. А любая сумма конечного количества слагаемых пройденных отрезков пути — ближе к старту, чем место встречи.

Поэтому действительно, на каждой конечной «зеноновской» итерации Ахиллес не догоняет черепаху. Просто потому, что все эти итерации происходят раньше момента встречи.

«Бесконечная же итерация» действительно невозможна: бесконечность существует только в контексте пределов, но не самих чисел. Мы в принципе не можем реализовать такой процесс — только вычислить, к чему оно идёт.

То есть, к чему мы движемся, наращивая количество итераций — добавляя и добавляя всё новые отрезки времени в рассмотрение процесса.

Как выше говорилось, интуитивно кажется, что бесконечная сумма отрезков времени должна охватить бесконечное же время. Поэтому складывается ощущение, что мы пришли к противоречию: за бесконечное время Ахиллес, вполне очевидно, догонит черепаху, но мы так ловко разбили это время на части, что вышло, будто он её никогда не догонит.

Однако все рассматриваемые итерации процесса простираются вовсе даже не до бесконечности — они ограничены временем встречи. Но именно что ограничены: они никогда не достигают этого времени, хотя и приближаются к нему сколь угодно близко.

Апория утрачивает свой основной парадоксальный смысл, если рассматриваемым в ней способом достижим не любой момент времени, а только лишь те моменты, которые происходят раньше, чем Ахиллес догонит черепаху.

Ведь что тут в этом случае, по сути, сказано? «Вам нужно десять минут, чтобы дойти до магазина. За девять минут вы не дошли до магазина, значит, вы никогда до него не дойдёте».

Но такой вывод, совершенно очевидно, не следует из предпосылки. Да, вы не дойдёте до магазина за время, недостаточное для того, чтобы дойти до магазина, но из этого никак не вытекает, что вы ни за какое время до него не дойдёте.

Можно даже сказать: «хрен с ними с девятью минутами — возьмём девять минут и пятьдесят девять секунд. Вы всё равно не дойдёте. И за девять минут, пятьдесят девять секунд и ещё девяносто девять сотых секунды тоже!». Это действительно так, но оно всё равно не доказывает, что вы не дойдёте никогда.

В своей апории Зенон пытается проиллюстрировать мысль, что рассмотрение пространства и времени как бесконечно делимых сущностей приводит к противоречию.

Но противоречия на самом деле нет: мы действительно можем ввести сколько угодно отрезков расстояния и времени, расположенных до момента встречи. Однако в том, что все они лежат до момента встречи, нет ничего парадоксального, — мы ж ведь специально их так выбирали.

Парадокс появляется только тогда, когда мы начинаем ошибочно считать, будто некоторые из них обязательно лежат по другую сторону от этого момента.

Подчеркну: безо всех этих итеративных делений на любом отрезке непрерывного пространства и так расположено бесконечное количество отрезков меньшего размера. Если бы в этом заключалась «парадоксальность», то у Зенона не было бы нужды прибегать к «зеноновскому делению». Но он к нему прибегает, поэтому лично у меня складывается впечатление, что основная парадоксальность ему виделась именно в интуитивном представлении, будто бесконечное количество следующих друг за другом фрагментов может располагаться только на бесконечном отрезке.

А это, как мы только что видели, вовсе не обязательно так. В данном случае отрезок ограничен, хотя количество отрезков, его составляющих, бесконечно, как и на любом другом отрезке.

При этом правый конец рассматриваемого отрезка лежит ровно там, где Ахиллес догонит черепаху, но не включает в себя ту точку, где он с ней поравняется.

В этом и фокус: мы не можем понять, как Ахиллес в этом процессе догонит черепаху, исключительно по той причине, что он её действительно в этом процессе не догонит — процесс простирается до сколь угодно близкого к точке встречи расстояния, но всё равно не до неё самой.

И это действительно непросто заметить: ведь точка имеет нулевую длину, поэтому длина отрезка, из которого исключили последнюю точку, будет в точности равна длине аналогичного отрезка, в который эта точка включена. И в большинстве случаев нас это устраивает.

Однако тут нам встретился случай, где мы стали разглядывать именно эту самую, на самом деле исключённую точку.

Вся «парадоксальность», таким образом, сводится к тому, что усложнённой постановкой задачи мы сами для себя замаскировали тот факт, что мы рассматриваем только то время, когда Ахиллес ещё не догнал черепаху.

8 ОЧЕВИДНАЯ НЕДОСТИЖИМОСТЬ ТОЧКИ ВСТРЕЧИ

Сделаем некоторое упрощение — будем смотреть не на пройденное Ахиллесом расстояние, а на то расстояние, которое на каждой итерации отделяет его от черепахи. Это расстояние, как следует из раздела «Апория про Ахиллеса в свете матанализа», задаётся последовательностью

$$S_1 = \frac{V_ч}{V_А} S_0$$

$$S_2 = \left(\frac{V_ч}{V_А}\right)^2 S_0 = \frac{V_ч}{V_А} S_1$$

$$S_n = \frac{V_ч}{V_А} S_{n-1}$$

Когда мы выводили сумму последовательности пройденных Ахиллесом расстояний, нас ещё могли терзать сомнения: «а что, если правда, в бесконечности сумма не просто стремится к некоторому пределу, а именно равна ему?». «Что, если мы просто не можем представить себе такую сумму, ввиду несовершенства нашего разума?».

Однако при переходе к расстоянию между Ахиллесом и черепахой эти сомнения исчезают. Ведь тут вполне ясно, что на каждой итерации мы делим предыдущее расстояние на десять (во столько раз Ахиллес бегает быстрее черепахи). Какое бы число, большее нуля, мы ни поделили на десять, результат никогда не будет равен нулю. Мы начинаем с числа, которое больше нуля (1000 шагов), поэтому все следующие итерации тоже дадут нам ненулевое число.

Но ведь, когда Ахиллес догонит черепаху, между ними будет как раз нулевое расстояние. Нам же вполне понятно, что ни на какой итерации мы его не достигнем.

Ровно то же самое можно рассмотреть и для времени, отделяющего Ахиллеса от момента встречи: оно тоже ни на какой итерации не станет нулевым.

То есть, теперь совсем очевидно, что точка встречи просто исключена из рассмотрения, и наша неспособность представить «завершимость незавершимого» тут не при чём. Мы сколь угодно близко подойдём к нулю, но никогда не попадём в него. Эта точка — вырезана.

Поскольку же пройденный Ахиллесом путь отстоит от точки встречи с черепахой именно на это расстояние, то и он тоже никогда не станет равен пути, который нужно преодолеть, чтобы догнать черепаху. То есть, и из него тоже, как теперь совершенно очевидно, вырезана точка встречи.

9 УНИВЕРСАЛИЗАЦИЯ АПОРИИ

Представим, что мы сели на черепаху и смотрим на процесс с этой точки зрения. Черепаха в этом случае покоится, хотя под ней чудесным образом движется земля. Ахиллес всё так же бежит к ней, хотя и с несколько меньшей скоростью, чем раньше.

$$V_А - V_ч = \frac{9}{10} V_А$$

На каждой итерации он оказывается в десять раз ближе к черепахе, чем был на предыдущей.

С этой точки зрения апория про Ахиллеса становится подобной апории про стрелу, которой «чтобы долететь до цели, надо сначала преодолеть половину расстояния, а для этого — половину от половины…».

Ну да, для Ахиллеса мы делим предыдущий результат на десять, а для стрелы — на два, но закономерность сохраняется: на что бы мы ни делили следующие друг за другом части, их полная сумма всё равно будет сходиться к моменту встречи с черепахой (или с мишенью), а любая частичная сумма будет заканчиваться до этого момента — мы его просто не включили в своё разбиение. И ни в одну из сумм не войдёт точка встречи, что в предыдущем разделе стало совсем очевидно.

Таким образом, никакое переформулирование не спасает основной парадокс: он всё равно сводится к сознательной или невольной ошибке в рассуждениях: отождествлению бесконечного количества слагаемых с бесконечно большим результатом их суммирования (а точнее, с бесконечным пределом их суммы). Или, как минимум, к ошибочному предположению, что, хотя бы, точка встречи не исключена из данного процесса.

Но раз она исключена, то и такого парадокса в этих апориях нет. Остаются только парадоксы иного рода.

10 Парадокс непредставимости

Честно говоря, для меня попытки настаивать на данном «вспомогательном» парадоксе всегда выглядели «последним шансом на спасение». То есть, понятно, что основной парадокс апорий развалился, но столь чарующа мистика, заключённая в рассуждениях Зенона, столько веков она поражала умы людей, что прямо-таки до дрожи хочется её спасти. И подобно тому, как все нестыковки в «священных книгах» превращаются в «метафоры, которые не надо понимать буквально», так и в апориях Зенона вдруг выясняется, что «он хотел сказать совсем иное».

Гильберт и Бернайс формулируют «парадокс непредставимости» следующим образом.

> *Обычно этот парадокс пытаются обойти рассуждением о том, что сумма бесконечного числа этих временных интервалов все-таки сходится и, таким образом, даёт конечный промежуток времени. Однако это рассуждение абсолютно не затрагивает один существенно парадоксальный момент, а именно парадокс, заключающийся в том, что некая бесконечная последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершаемость которой мы не можем себе даже представить (не только физически, но хотя бы в принципе), на самом деле все-таки должна завершиться*

Есть ещё некоторое количество формулировок, но все они сводятся к тому же: «мы не можем себе представить завершаемость бесконечного.

Даже если отвлечься от того, что нам в данном случае как раз не надо представлять описанный Зеноном процесс обгона черепахи, ввиду наличия ошибки в рассуждениях Зенона, всё равно не может не вызывать удивления сама претензия. «Мы не можем себе представить». А что, разве всё остальное в математике мы можем себе представить? Ну, представить «в полной мере», как это иногда говорится в других формулировках данного парадокса?

Нет, напротив, в математике работает с абстракциями, подавляющее большинство которых мы не в состоянии себе представить, как что-то реальное.

Прямая имеет нулевую толщину и в обе стороны простирается до бесконечности. На любом её отрезке находится бесконечное количество точек, которые являются нольмерными объектами. Кто-то на Земле способен представить себе это «в полной мере»?

Рациональные числа — те числа, которые можно представить в виде простой дроби. Но между любой парой этих чисел расположено бесконечное количество иррациональных — таких, которые нельзя представить в виде простой дроби. Вы можете «в полной мере» это себе представить?

Длина окружности иррациональна по отношению к её радиусу: если радиус является рациональным числом, то длина окружности — иррациональное число, поскольку иррационально число π. Вы наверно видели в жизни много окружностей, но можете ли вы себе представить «в полной мере», что их длина — иррациональное число?

Чего там, даже натуральные числа — то есть, целые числа больше нуля, — никто не способен себе представить в «полной мере»: вы можете представить себе три яблока или символ «3», но просто «три» представить не удастся.

Ну и чтобы совсем уж добить. Вы можете представить себе «стул»? Не какой-то конкретный, а «стул» вообще — без привязки к конкретному стулу? Всего-то «стул». Не значения слов «ходить», «вчера» или «наверно», а значение слова, которое обозначает простой и понятный реально существующий предмет?

Если в апориях Зенона даже при исправлении основного парадокса видится какая-то парадоксальность, то её следует усмотреть вообще во всём. В любом слове. В любом понятии. Они все — абстракции.

Однако абстрактность и «непредставимость в полной мере» не делает всё это «парадоксальным» или, тем более, «ущербным». Все эти «непреодолимые для ума трудности» (это тоже цитата из реального текста по данному вопросу) чудесным образом преодолеваются даже в детском возрасте.

Никто никогда не видел всех стульев планеты, но уже двухлетние дети способны понять, что слово «стул» означает не данный конкретный предмет, а любой предмет с определёнными свойствами. Они понимают и используют это слово. Года в четыре-пять ребёнок способен понять идею чисел и операций с ними. И не только понять, но и использовать. Мало того, и символы, означающие действия или предметы, и идею чисел и операций над ними способны понять не только люди, но и обезьяны. И даже некоторые птицы (да, реальные эксперименты уже проводились).

Причём, многие из этих «непредставимых» и «непреодолимых для ума» понятий оказываются вполне интуитивными. Вы не можете себе представить в полной мере нулевую толщину, идеально прямой угол, точку, прямую, но многие из вас ещё в школе сумели научиться решать геометрические задачи не «формально», а на основании воображения и интуиции.

Вы не можете представить себе массу отдельно от конкретного предмета, но интуитивно понимаете, что чем больше масса, тем труднее будет толкать предмет.

Возможно, по кратким объяснениям из этой статьи вы сумели осознать идею пределов, даже если раньше о ней не слышали. Эта идея тоже весьма интуитивна, поскольку человек постоянно имеет дело с приближением к чему-то. Когда вы идёте к дому, вы всё ближе к нему. Если вы не меняете своего пути, то для любого расстояния можно указать то время, после которого вы были ближе к дому, чем это расстояние. Это — абстракция, но она же вполне понятна и «осязаема».

Абстракции — это наши идеализированные представления о мире. И нет ничего страшного в том, что те прямые, которые мы рисуем, имеют ненулевую толщину и не идут от бесконечно удалённой точки до другой бесконечно удалённой, а заканчиваются обычно, не дойдя даже края страницы. Это не мешает нам отлично понимать идею этой абстракции и на чисто интуитивном уровне ей оперировать.

Дело в том, что в «парадоксе непредставимости» представимость подменяется возможностью идеальной визуализации. Да, действительно, многие вещи нельзя идеально визуализировать, а если бы это было и возможно, то мы бы всё равно не смогли этого увидеть. Но вот представить и понять их вполне можно. В ряде случае не просто можно, а даже легко.

Поэтому то, что цепляются именно за апории Зенона, а всё остальное подобное игнорируют (а ведь всё остальное — это в буквальном смысле практически вообще всё), наводит на подозрения, что за всем этим стоит просто желание «спасти» именно апории Зенона. В том числе, с целью — их примером иллюстрировать тезис «а вот наука не всё может объяснить, она даже на вопросы очень древнего грека ответить не может».

Наука-то, как раз, может. А вот кто ещё может, кроме неё?

11 Представимость движения и парадоксы

Теперь самое время перейти к абстракции движения с целью убедиться, что она не менее «представима», чем треугольники или масса тел.

Заодно, во время рассуждений по этому поводу можно будет осмыслить ещё два «мини-парадокса».

Первый из них такой: если Ахиллес в модели на каждой итерации лишь догоняет черепаху, то как же он её тогда вообще перегоняет?

Второй, который (что не сразу очевидно) связан с первым: стрела в каждой точке своего полёта покоится (имеет нулевую скорость). Но как же она тогда движется на всей совокупности точек?

12 Дискретное пространство

Начнём мы с того, что представим пространство не бесконечно делимым. То есть, таким, у которого есть минимально возможный «шаг» между точками, дальше которого поделить пространство уже невозможно.

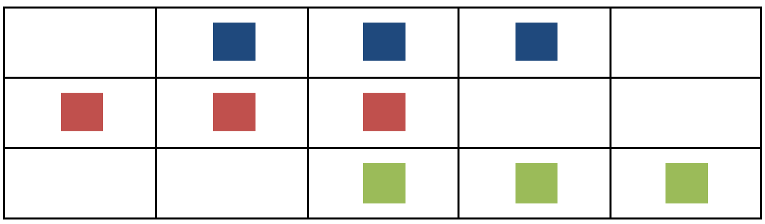
Это можно, например, представляя пространство как следующих вплотную друг за другом «ячеек» одинакового размера. Причём, эти ячейки поделить уже нельзя.

Что интересно, в одной из своих апорий Зенон пытается показать, что таким наше пространство быть не может, поскольку это привело бы к неустранимому парадоксу.

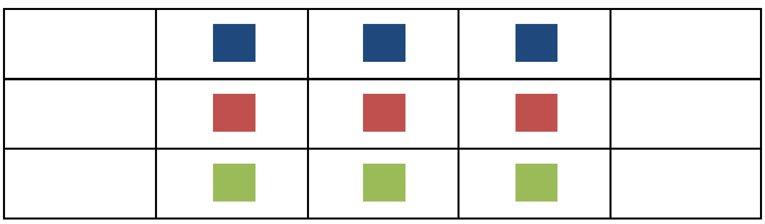
Сразу оговорюсь: на данный момент неизвестно, есть ли «минимальная ячейка» нашего пространства или нет, — но данную апорию всё равно стоит рассмотреть.

13 Апория Стадий

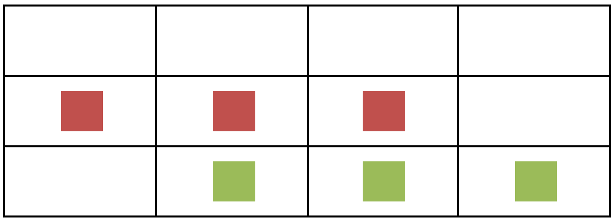
В этой апории рассматриваются три ряда, например, камушков, лежащих в минимальных ячейках пространства.



Предположим теперь, что первый ряд неподвижен, а второй и третий движутся навстречу друг другу. С точки зрения Зенона процесс, в котором образовался бы вот такой результат,



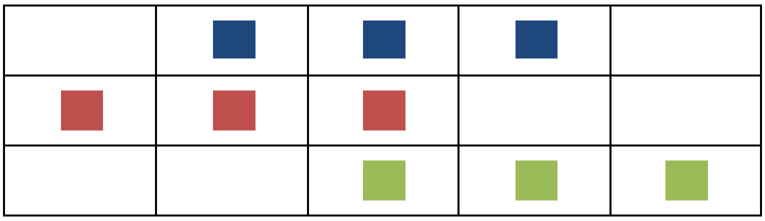
был бы невозможен. Поскольку в какой-то момент мы должны были бы наблюдать во втором и третьем рядах следующую конфигурацию.



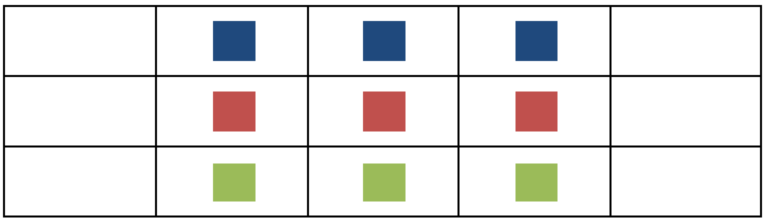
Но где тогда будет находиться первый ряд? — спрашивает Зенон, намекая на отсутствие ответа на этот вопрос. Из чего далее и делает вывод, что «таким пространство быть не может».

Однако тут налицо нарушение Зеноном им же установленных правил. Если движение возможно только из ячейки в ячейку, то совершенно не обязательно, что приведённая им ситуация вообще возникнет, и что, если она всё-таки возникнет, то для первого ряда в ней не будет места.

Если второй и третий ряд начинают двигаться с совершенно одинаковой скоростью и в ровно в одно и то же время, то в какой-то момент из изначальной конфигурации



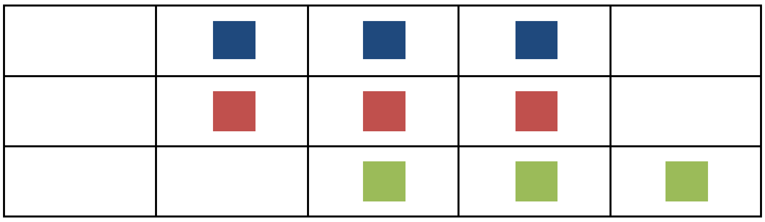
будет совершён переход прямо сразу в конечную: все камни сменят свою ячейку одновременно, без каких-либо промежуточных состояний.



Если представить себе, что не только пространство, но и время имеет минимально возможный шаг, то процесс можно представить себе в виде простой аналогии.

Представьте, что это вы сами двигаете камни и фотографируете состояние на каждом минимальном шаге времени. Перед тем шагом, на котором ряды должны сдвинутся, вы фотографируете изначальную картинку, потом сдвигаете все камни и снова фотографируете — теперь уже финальную ситуацию. Вы не фотографируете после сдвига каждого камня — это противоречит заданным «правилам игры»: все камни движутся одновременно.

С другой стороны, если один из рядов движется быстрее или начинает раньше (например, второй), то промежуточной конфигурацией будет вот такая:



Место первого ряда в ней очевидно — там, где он был с самого начала.

То есть, вообще говоря, конечная делимость пространства заявленного Зеноном парадокса не содержит.

Поэтому на неё вполне можно опереться в предварительных рассуждениях о движении.

14 Обгон черепахи в дискретном пространстве

Так вот, на время представим, что пространство можно делить только до какой-то определённой длины, после чего оно уже перестаёт делиться.

Движение тогда представляет собой последовательный переход из одной ячейки пространства в другую. Однако скорость Ахиллеса в десять раз больше, чем скорость черепахи. Поэтому за то время, пока черепаха переходит из одной ячейки в соседнюю, Ахиллес преодолевает десять ячеек.

И, соответственно, пока Ахиллес преодолевает девять ячеек, черепаха торчит всё в той же. Только на десятой ячейке Ахиллеса черепаха тоже перемещается в соседнюю.

Конечно, это лишь один из частных случаев — может быть и вариант, когда переход черепахи и Ахиллеса по ячейкам не так хорошо синхронизирован. Возможно, например, черепаха уже переходит в соседнюю ячейку, а Ахиллес ещё некоторое время проводит в своей «девятой». А потом, когда черепаха уже переместилась, и он тоже через некоторое время перемещается.

Как бы то ни было, рано или поздно Ахиллес окажется отстающим от черепахи на одну ячейку.

Потом он попадёт в ячейку черепахи. При некоторых соотношениях их скоростей и моментов их старта возможно, что даже если Ахиллес только что попал в ту ячейку, что и черепаха, она один раз успеет перескочить в соседнюю ячейку раньше Ахиллеса. Но даже в этом случае, он потом её снова догонит (попадёт в ту же ячейку), а дальше уже будет только перегонять.

Как бы мы ни пытались вслед за Зеноном делить пройдённый Ахиллесом путь, мы с неизбежностью доделимся до вот этой самой минимальной ячейки (или минимально возможного расстояния). Дальше делить путь станет уже нельзя и вышеописанный процесс обгона состоится.

Как это выглядит в виде суммы последовательности? Ну, положим, что ячейки пространства очень крупные и доделиваемся до их размера мы довольно быстро. Тогда мы увидим что-то типа суммы нескольких слагаемых того ряда, с которым имели дело в разделе «Апория про Ахиллеса в свете матанализа».

$$S_0 + \left(\frac{V_ч}{V_А}\right) S_0 + \left(\frac{V_ч}{V_А}\right)^2 S_0 + \left(\frac{V_ч}{V_А}\right)^3 S_0 + \left(\frac{V_ч}{V_А}\right)^3 S_0$$

Или, если мы вынесем S_0, а потом подставим конкретные числа

$$1000 * \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^3}\right)$$

Два последних слагаемых, равные между собой, как раз отражают тот факт, что мы на этой итерации уже «доделились до предела делимости», и вот тут-то Ахиллес догнал и перегнал черепаху — такая сумма действительно лежит от старта дальше, чем рассчитанная алгебраически точка встречи.

Можем ли мы представить себе такой процесс? Да легко. «Невозможная ли для ума» эта задача? Не думаю так.

15 Бесконечно малые

Рассмотрев, каким образом обгон совершается в дискретном пространстве перейдём теперь к бесконечно делимому.

Вообще говоря, вариант Зенона несколько более «мягкий», чем непрерывность вещественных чисел. Ведь методом многократного деления отрезка можно получить лишь рациональные (представимые в виде простых дробей) его доли. А кроме рациональных чисел на числовой прямой есть ещё и иррациональные числа.

Однако мы воспользуемся методом, который одновременно подходит и для варианта Зенона, и для более полного варианта.

Пусть у нас есть промежуток времени Δt. За это время Ахиллес пробегает расстояние Δx. Скорость Ахиллеса в таком случае будет связана с этими величинами как

$$V_А = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

По условиям задачи эта скорость постоянна. Поэтому мы можем без проблем поделить пополам одновременно Δx и Δt — и их отношение не изменится. Поделим теперь их ещё раз пополам. Потом ещё раз. Поскольку мы считаем пространство и время бесконечно делимым (непрерывным), сколько бы раз мы ни уменьшали отрезки, их отношение останется константой.

Сколь бы малый промежуток времени или пространства у нас не попросили, мы всегда сможем поделить достаточное количество раз, чтобы получить меньший промежуток. И каждый раз отношение пройденного расстояния ко времени, которое понадобилось, чтобы его пройти, будет тем же самым.

> *На всякий случай, ещё раз повторю: это верно, только если скорость Ахиллеса не меняется во время всего соревнования.*

Что нам это напоминает? Очевидно, ранее рассмотренное понятие предела.

Введём теперь новое обозначение: dx будет обозначать бесконечно малый отрезок, а dt — соответствующее ему бесконечно малое время.

Что это такое? Не более чем условное обозначение для величин из предельного перехода. Ведь мы можем делить сколько угодно раз и нет тому границы.

Формально выражаясь,

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = V$$

Это — всё тот же переход к пределу. Сколь малый промежуток времени мы бы ни назвали, dt будет меньше этого промежутка. И сколь малое расстояние мы бы ни выбрали, dx будет меньше него.

Но при этом они оба всегда будут больше нуля.

И вот в этом пункте сокрыта ошибка апории про стрелу. Зенон полагает, что можно доделить пространство и время до такой величины, что их отношение обратится в ноль: «в каждой точке стрела покоится».

Но нет. На каждом бесконечно малом отрезке стрела таки движется. Поскольку в пределе мы получаем не нулевые величины, а бесконечно малые.

Ещё раз: это не точки, это — отрезки. До точек мы не доделимся никогда. Точка имеет нулевую длину, а при делении отрезка ненулевой длины всегда получается отрезок ненулевой длины.

Хотя длины отрезков могут быть равны нулю (например, таковым может быть dx лежащей на земле стрелы), они совершенно не обязательно равны нулю. И потому совершенно не обязательно равно нулю их отношение.

Кстати, отношение

$$\frac{dx}{dt}$$

называется «производной координаты по времени» или «производной x по t». Когда говорят: «мгновенная скорость равна производной координаты по времени», — имеют в виду именно вышеописанное.

Мгновенные скорости — это предельный случай «средних» скоростей — то есть, скоростей прохождения конечного расстояния за конечное время. Мгновенная скорость может отличаться от средней по величине, если скорость на данном отрезке была переменной.

16 «Техническая» дискретность реального пространства

Повторюсь, пока ещё неизвестно, непрерывно ли реальное пространство или дискретно.

Однако на практике, тот реальный мир, с которым мы имеем дело, действительно имеет что-то вроде «минимального расстояния».

Во-первых, на уровне частиц уже заметен принцип квантовой неопределённости, гласящий, что произведение неопределённости импульса на неопределённость координаты больше некоторой конкретной величины (половины постоянной Дирака).

То есть, на какой-то итерации «зеноновского деления» измерение расстояния между объектами будет технически невозможно — неопределённость положений Ахиллеса и черепахи окажется больше расстояния между ними, либо же мы напрочь утратим уверенность в том, что они всё ещё движутся с более-менее заявленными скоростями.

Во-вторых, даже без этой квантовой неопределённости измерение расстояния между Ахиллесом и черепахой не особо осмысленно, если это расстояние меньше, например, линейных размеров атома. Просто потому, что и в Ахиллесе, и в черепахе очень много атомов, которые постоянно движутся друг относительно друга, не говоря уже о том, что соревнующиеся ещё ведь и конечностями двигают. Между какими их частями в этом случае столь точно измеряется расстояние?

17 Представимость бесконечно малых

Как мы можем представить себе бесконечно малую величину? Напрямую — никак. Но представить сам процесс: назвали какое-то расстояние — dx всё равно меньше него, уменьшили расстояние — всё равно dx меньше, — вполне возможно.

Если кажется, что тут «что-то непредставимое», то задумайтесь, а не так же ли вы представляете себе, например, прямые? Вот идёт прямая по странице, страница кончается, а прямая продолжает идти, вы движетесь по заданному прямой направлению, а она всё не кончается. Где бы вам ни указали точку в этом направлении, вы можете до неё «долететь» и посмотреть, что прямая идёт дальше. Вполне понятно, что технически невозможно долететь до бесконечности, но вы ведь вполне понимаете, про что тут речь?

Или возьмём, например, отрезок. Вам предложили рассмотреть точки на вот такой-то его части. Вы взяли лупу и посмотрели — там всё ещё есть точки. Предложили ещё более малую часть — вы взяли лупу побольше. Там тоже всё ещё есть. И так для любой, сколь угодно малой части.

Или, вот, стулья. Вы не видели всех стульев Земли, но вы вполне способны осознать, что чисто теоретически можно посмотреть на каждый из них. А потом сделать ещё один стул. А потом ещё один. И так сколько угодно раз. Поэтому слово «стул» относится к потенциально бесконечному множеству объектов.

Да, вы не можете всё это проделать в реальности, но нет никаких проблем, чтобы это представить.

Так же и с бесконечно малыми: вы можете сколько угодно раз уточнять наблюдения, рассматривая всё более малые отрезки. И даже в ряде случаев можете вычислить, к чему стремится отношение этих отрезков — вычислив предел этого отношения.

Важно лишь отдавать себе отчёт, что даже в пределе это — всё ещё отрезки. Они никогда не превращаются в точки — то есть, во что-то с нулевой длиной. Тогда парадокс «покоящейся, но движущейся стрелы» у вас в голове не возникнет.

18 Сравнение бесконечно малых и обгон в непрерывности

Итак, бесконечно малые больше нуля, но меньше любого числа. При этом они ещё и сравнимы между собой.

Ведь, например, в случае Ахиллеса и черепахи.

$$V_{\text{А}} = \frac{dx_{\text{А}}}{dt}$$

$$V_{\text{ч}} = \frac{dx_{\text{ч}}}{dt}$$

Мы знаем, что скорость Ахиллеса больше скорости черепахи. Из чего следует, что

$$dx_{\text{А}} = V_{\text{А}}\, dt$$

$$dx_{\text{ч}} = V_{\text{ч}}\, dt$$

$$dx_{\text{А}} > dx_{\text{ч}}$$

Это проясняет ещё один вопрос из апорий — как именно Ахиллес обгоняет черепаху на бесконечно малых отрезках: не только за конечный, но и за бесконечно малый промежуток времени (dt) Ахиллес пробегает расстояние ($dx_{\text{А}}$), большее, чем за тот же промежуток времени проползает черепаха ($dx_{\text{ч}}$).

Ранее мы рассмотрели, как Ахиллес обгоняет черепаху в дискретном пространстве. Однако в рассуждениях нигде не фигурировал размер ячейки. Какого бы размера ни были ячейки, процесс останется всё тем же.

В непрерывном в смысле бесконечной делимости пространстве мы можем делить ячейки сколько угодно раз. При этом не будет такого этапа деления ячеек, когда в процессе что-то изменится.

Это позволяет нам совершить предельный переход, подобный совершаемым ранее: назовите нам сколь угодно малый размер ячейки, и мы гарантируем, что Ахиллес обгонит черепаху — ведь процесс обгона останется всё тем же. Нам достаточно лишь того, что размер ячейки никогда не станет нулевым. Мы никогда не рассматриваем точку во времени — мы всегда рассматриваем его отрезок. Пусть даже у этого отрезка бесконечно малая длина.

Таким образом, эта модель справедлива и для дискретного пространства, и для непрерывного, если под непрерывностью понимать бесконечную делимость. Более того, она справедлива даже для «более непрерывного», чем рассматривал Зенон — для пространства, в котором есть иррациональные числа.

И мы по-прежнему в состоянии себе всё это представить не хуже, чем представляем треугольники или окружности.

19 Парадокс последнего шага

Когда мы рассматривали процесс обгона черепахи в дискретном пространстве, нам встретилось последнее слагаемое, которое как раз и завершило последовательность.

$$S_0 + \left(\frac{V_ч}{V_А}\right) S_0 + \left(\frac{V_ч}{V_А}\right)^2 S_0 + \left(\frac{V_ч}{V_А}\right)^3 S_0 + \left(\frac{V_ч}{V_А}\right)^3 S_0$$

Отличие этого слагаемого от всех предыдущих вот в чём: каждое из предыдущих было меньше того, которое идёт перед ним. Но последнее слагаемое, благодаря которому как раз и свершился обгон, было равно своему предшественнику.

Возникает вопрос, а в непрерывном пространстве что было этим последним решающим слагаемым зеноновского процесса? Благодаря чему Ахиллес таки догнал черепаху?

На самом деле, это не две формы одного вопроса, а два разных.

Поскольку, как говорилось выше, в «зеноновском процессе» Ахиллес не догнал черепаху. Мы каждый раз говорили «стоп» до того момента, когда он её догонит. Каждый раз оставалось уже чуть-чуть, и этот чуть-чуть был всё меньше, но никогда он бы не стал нулевым. Мы принципиально не давали Ахиллесу поравняться с черепахой — только лишь подойти к ней сколь угодно близко.

Однако, если не выбрасывать точку встречи, то даже бесконечная малость последнего отрезка не будет преградой. Вообще говоря, не будет преградой даже бесконечная малость всех отрезков.

Предположим, что мы разбили весь путь до точки встречи с черепахой (но в этот раз уже включая её в путь, а не выкидывая, подобно Зенону) на равные по времени отрезки. Пусть их 10 штук. Скорость Ахиллеса на каждом из них нам известна. Поэтому весь путь Ахиллеса будет.

$$S = \sum_{i=1}^{10} V_{\mathrm{A}} \frac{t}{10}$$

Здесь t — полное время пути Ахиллеса до момента встречи с черепахой включительно.

Но что нам мешает поделить путь на сто равных отрезков? Да ничего не мешает.

$$S = \sum_{i=1}^{100} V_{\mathrm{A}} \frac{t}{100}$$

Эта сумма в точности равна предыдущей.

Но продолжим процесс. Возьмём теперь тысячу отрезков. Потом — десять тысяч. И так далее. Но не будем повторяться в записи: просто скажем, что количество отрезков — n штук.

$$S = \sum_{i=1}^{n} V_{\mathrm{A}} \frac{t}{n}$$

Это — наша универсальная формула. Верная для любого n. И для любого же n дающая один и тот же результат. А раз для любого, то возможен предельный переход к бесконечно большому n.

Теперь снова совершим предельный переход — ведь мы можем увеличивать n до бесконечности, никак не меняя процесса.

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_{\mathrm{A}} \frac{t}{n}$$

Напомню: здесь точка встречи Ахиллеса с черепахой уже не исключена, поскольку в наших построениях t — это каждый раз точное время встречи, а не что-то к нему приближающееся.

В этом предельном переходе у нас растёт количество слагаемых, но каждое слагаемое зависит от количества слагаемых и убывает с ростом их количества. При этом ряд сходится — по построению.

Что же тут записано? Тут говорится, что мы можем рассмотреть движение Ахиллеса как последовательность прохождения им отрезков. В том числе, отрезков бесконечно малой длины. На последнем из них он догонит черепаху, сколь бы малыми мы не решили считать эти отрезки.

Для этой операции есть даже специальное обозначение.

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_\text{А} \frac{t}{n} = \lim_{\Delta t\to 0} \sum_{0}^{t} V_\text{А} \Delta t = \int_0^t V_\text{А}\, dt$$

Во второй сумме подразумевается, что отрезки длинной Δt идут точно друг за другом, причём первый из них начинается в нуле, а последний кончается в точке t.

Знак «интеграл» означает оно самое: взяли отрезок (в данном случае, от нуля до t), поделили его на более мелкие отрезки (dt) на каждом из них взяли значение некоторой функции ($V_А$) и просуммировали пройденные на каждом отрезке пути ($V_А\, dt$), чтобы найти полный путь.

Мы могли бы сделать это, как было показано выше, и с отрезками конечной длины, но с целью повышения точности мы всё уменьшали и уменьшали длину отрезка. Сколь угодно долго. И в пределе получили отрезок бесконечно малой длины — dt.

В данном случае, конечно, это не повлияло на результат. Однако, если бы скорость Ахиллеса не была бы постоянной, то результат суммирования действительно бы уточнялся по мере уменьшения отрезков. И стал бы идеально точным в идеальном случае — в предельном. На бесконечно малых отрезках.

Тут надо отметить, что, хотя вроде бы интеграл тоже определяется через предел, как и полная сумма последовательности, на данном примере можно понять ключевую разницу: интеграл описывает процесс нахождения полного пути, а сумма последовательности — процесс приближения к полному пути.

Интеграл в точности равен полному пути — и по результату, и по смыслу, а посредством предельного перехода он только лишь вычисляется.

Бесконечная же сумма убывающих отрезков равна полному пути только в смысле того, что полный путь является пределом частичных сумм последовательности отрезков.

Собственно, всё отличие исходного алгоритма Зенона от «интегрального» состоит не столько в самой идее разбиения на бесконечное количество отрезков, сколько в том, какой отрезок мы таким образом разбиваем. Отличие — на одну точку. В исправленном варианте она включена в отрезок, а в исходном — исключена из него.

Оба варианта позволяют продолжать дробление на отрезки до бесконечности, отрезков бесконечно много, но исключение вот этой одной точки как раз и обуславливает мнимый парадокс. Именно эта точка, исключение которой замаскированно в апории про Ахиллеса, оказывается критической.

Мы не можем себе представить, как Ахиллес догонит черепаху, вовсе не потому, что деление бесконечно, где-то там фигурирует бесконечно малый шаг и т.п. А потому что исключена точка, в которой они поравняются. Потому что при исключении этой единственной точки Ахиллес действительно не догонит черепаху.

Стоит её вернуть в процесс, и его можно будет без проблем представить даже при бесконечном делении на отрезки — вплоть до бесконечно малых.

20 Итеративное деление отрезков

В прошлом разделе мы делили полный путь на заданное количество равных отрезков, устремляя их количество к бесконечности.

Теперь попробуем — в подражание Зенону, — вместо этого, делить каждый из получившихся в прошлый раз отрезков.

Для этого нам придётся несколько подкорректировать его рассуждения.

Например, вместо того, чтобы сказать: «чтобы пролететь всё расстояние, стреле надо сначала пролететь его половину», — мы скажем «чтобы пролететь всё расстояние, стреле надо пролететь его половину *и ещё одну его половину*».

Ну и так далее: «чтобы пролететь половину расстояния, надо пролететь сначала половину от половины, *а потом ещё одну половину от половины*».

Что это нам даёт?

Дело в том, что частичные суммы последовательности

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

стремятся к единице (то есть, к полному расстоянию), как к пределу. Мы пишем «сумма равна единице» только для краткости, поскольку на самом деле она равна ей только в смысле предельного перехода. Сама же единица из данной последовательности сумм конечного количества слагаемых исключена.

Однако любая из сумм

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

и так далее

уже не просто «стремится к пределу», а «в точности равна единице». При делении пополам всех отрезков — все результаты в точности равны между собой на каждом этапе.

В пределе это разбиение снова приведёт нас к понятию «интеграла» с тождественными предыдущему варианту результатом. И снова получится, что в данном случае перед нами уже не стоит «проблема последнего отрезка». С последним отрезком тут всё в порядке — он присутствует на каждой итерации, хотя с каждой же итерацией уменьшается вплоть до бесконечно малой величины.

Но каким образом в этой модели Ахиллес догоняет черепаху, а стрела долетает до мишени, мы уже знаем.

Подобным же образом мы осознаём процесс начала движения — просто вместо последнего шага рассматриваем первый. Но в остальном всё ровно так же: мы делим получившиеся отрезки сколь угодно долго и в пределе получаем бесконечно малый отрезок. Именно его в первый бесконечно малый промежуток времени преодолеет стрела.

21 И снова о соотношении с реальным миром

Можно было бы возразить, что в реальном мире невозможен подобный предельный переход, бесконечное суммирование и так далее. И что поэтому парадоксы всё равно никуда не делись.

Однако такой аргумент попросту некорректен. Сама задача поставлена в терминах идеализированного абстрактного мира — в реальном не бывает абсолютно постоянных скоростей и абсолютно прямых путей. В нём невозможно абсолютно точно измерить расстояние и время. В нём не определено, в каких конкретных точках пространства находятся Ахиллес и черепаха.

Абстрактный мир является идеализацией закономерностей реального. Абстрагируясь, мы «очищаем» реальный мир от неизбежных шумов, с целью изучить и понять отдельные его закономерности. Если результаты абстрагирования совпадают с экспериментами над реальным миром с достаточной для нас точностью, мы считаем построенные абстракции хорошей моделью реального мира. Хорошо понятой его закономерностью.

Поэтому мы вполне допускаем в свои рассуждения абстрактное. Более того, в ряде случаев мы допускаем его даже с большей охотой, чем конкретное, — по этой причине у нас, в частности, есть наши человеческие языки, в которых подавляющее большинство слов означает не конкретный экземпляр предмета, а предмет вообще. Любой стул, а не только те, которые мы видим сейчас или видели раньше.

Но если задачу, описанную в терминах абстрактного мира, предлагается решать исключительно для мира реального, то это — мошеннический трюк. И ровно такой же трюк — критика иллюстраций к понятиям за их неидеальность.

Нельзя сначала поставить задачу про прямоугольный треугольник, а потом настаивать на парадоксальности решения на том основании, что в мире не бывает идеальных углов, абсолютно точно равных девяноста градусам.

Да, мы знаем, что в реальном мире всегда есть шум. Но мы имеем возможность решить задачу без шума, а потом учесть шум, как статистическое искажение результата.

Наилучшая абстракция — это наше наилучшее представление о явлении, очищенном от влияния других явлений. И таки да, реальные измерения будут равномерно распределены вокруг прогнозов по идеализированной модели, построенной на основе годной абстракции. И чем лучше мы сможем избавиться от шума, чем лучше сумеем измерить значения, тем сильнее реальные измерения «прижмутся» к идеальному прогнозу.

Кроме того, нельзя отвергать решение задачи на том основании, что у нарисованных нами сторон треугольника ненулевая толщина, а у «идеальных отрезков» — нулевая.

Да, мы знаем, что это так. И про то, что любой нарисованный угол не в точности прямой, мы тоже знаем. Однако нарисованное — это иллюстрация абстрактных понятий, а не они сами. Мы нарисовали что-то близкое к прямому углу и отрезку с нулевой толщиной, чтобы лучше представить себе положение вещей. Глядя на рисунок, мы не видим, а «держим в уме», что вот этот угол — совсем прямой, а вот эти отрезки не имеют толщины.

22 Итог

Как можно было видеть, апории Зенона, не смотря на неполноту представлений древних греков в сравнении с современным уровнем развития науки, хорошо подходят для иллюстрации концепций математического анализа. В том числе, и с точки зрения философии науки.

Если пристально посмотреть на апории Зенона через призму матанализа, то парадоксальность из них исчезает, а «представимость» описанных процессов оказывается не хуже, чем у множества других абстракций, включая те, которыми мы пользуемся каждый день.

Построенный Зеноном итеративный процесс при корректном анализе даёт те же результаты, что и алгебраический расчёт, при этом заявленные Зеноном выводы не следуют из описанного им процесса. Если же нам хочется представить процесс обгона, то модель Зенона нам не подходит — в ней-то как раз Ахиллес не догоняет черепаху.

В рассуждениях Зенона были ошибки, которые сейчас уже странно не замечать. Да, древние греки не успели изобрести матанализ, поэтому Зенон ошибочно полагал, что стрела покоится в точке, и, видимо, что рассмотренный им фрагмент бега Ахиллеса простирается до бесконечности. Кроме того, в апории Стадий он ошибся в рассуждениях даже без учёта матанализа.

То, что уже тогда пытались думать на эти темы, — отлично. Но это не означает, что и сейчас нам следует думать точно так же, как думали тогда.

doc-файл
Публикация на сайте «XX2 Век»