В. М. Гуровиц, В. В. Ховрина

Графы

Издательство МЦНМО
Москва, 2009

УДК 519.17
ББК 22.176
Г95

*Поддержано Департаментом образования г. Москвы
в рамках программы «Одарённые дети»*

Гуровиц В. М., Ховрина В. В.
Графы.— М.: МЦНМО, 2008.— 32 с.: ил.
ISBN 978-5-94057-468-2

Вторая брошюра серии ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ посвящена графам. В ней приведены четыре занятия по этой теме, в которых подобран материал для начального знакомства с графами, адресованный школьникам 6–8 классов и руководителям кружков. Несмотря на то, что в школьном курсе математики термин «граф» отсутствует, авторам представляется важным познакомить школьников с этими объектами, научить оперировать соответствующими терминами и использовать их при решении задач.

В дальнейшем предполагается выпустить еще несколько брошюр, в которых эта тема будет развиваться для старших школьников.

Надеемся, что книжка будет интересна также учителям математики, студентам педагогических вузов и всем, кто занимается со школьниками.

Владимир Михайлович Гуровиц, Вера Владимировна Ховрина

Графы

Серия «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

Технический редактор *Е. С. Горская*

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 22.12.2008 г.
Формат 60 × 88 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 2 печ. л.
Тираж 2000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Типография ”САРМА”»

ISBN 978-5-94057-468-2

Предисловие

В школьной программе по математике термин «граф» отсутствует. При этом в различных областях математики, а также в компьютерных науках, в электронике и других дисциплинах (в том числе в экономике) графы используются повсеместно. Поэтому так важно познакомить школьников с этими математическими объектами и их свойствами, научить оперировать соответствующими терминами и использовать их при решении задач.

Теория графов — относительно молодая область математики (первая работа Леонарда Эйлера о Кёнигсбергских мостах, с которой началось развитие теории графов, была опубликована в 1736 году, а сам термин *граф* появился лишь спустя 200 лет: его впервые использовал в 1936 году венгерский математик Денеш Кёниг). Но, несмотря на это, изложить все результаты, полученные математиками в этой области, невозможно даже в очень толстой книге. Поэтому знакомство школьников с теорией графов придётся разбить на несколько частей. Отдельные занятия можно проводить подряд, в рамках одного курса (например, в летней школе) либо на отдельных кружках, возможно, со значительными перерывами между ними.

Нам кажется целесообразным знакомить школьников с графами постепенно, начиная в 6 – 7 классе (а может быть и раньше!) и продолжая в старших классах, постепенно переходя к более сложным понятиям и результатам.

Приведём список занятий, которые мы предлагаем в данной (первой) брошюре.

Занятие первое. *Знакомство с графами. Степень вершины.*

Рассчитано на учащихся 6 – 7 классов. Дополнительных знаний не требуется.

Занятия второе. *Двудольные графы. Лемма о рукопожатиях.*

Рассчитано на учащихся 6 – 7 классов. Школьники должны быть знакомы с понятием чётности.

Занятие третье. *Основные понятия. Обходы.*

Рассчитано на учащихся 6 – 7 классов. Школьники должны быть знакомы с понятием чётности, азами комбинаторики, методом доказательства «от противного».

Занятие четвертое. *Деревья.*

Рассчитано на учащихся 7 – 8 классов. Школьники должны владеть техникой (неформальных) индуктивных рассуждений (явно применять метод математической индукции не потребуется).

Материалы каждого занятия разбиты на 3 части:

— теоретический материал для обсуждения на занятии: определения, утверждения с доказательствами и комментариями, примеры;

— задачи, предлагаемые на занятии;

— решения задач и методические комментарии.

Кроме того, в конце книги приводится список задач, расширяющих и дополняющих темы занятий, а также список литературы и web-сайтов, где можно пополнить запас задач и почерпнуть дополнительные теоретические сведения.

В отдельном приложении приводятся формальные определения тех понятий, которые используются в материалах занятий.

Авторы выражают благодарность А.В. Шаповалову за подробное обсуждение текста и предложенные задачи.

Занятие 1

Знакомство с графами. Степень вершины

Цель данного занятия познавательная: дать ребятам представление о графах, показать на примерах, в каких типах задач они используются, и продемонстрировать, как правильно записать решение с их помощью.

Занятие состоит из двух частей: в первой части предлагаются задачи, в которых требуется лишь изобразить описанную в условии ситуацию в виде графа и сделать вывод на основании рисунка. Решение подобных задач демонстрируется на примерах.

Вторая часть посвящена понятию *степень вершины* и простейшим утверждениям о степенях вершин. Здесь разбираются соответствующие определения, демонстрируются примеры и приводятся задачи на подсчёт рёбер.

Изображения графов

Пример 1. В деревне 9 домов. Известно, что у Петра соседи Иван и Антон, Максим сосед Ивану и Сергею, Виктор — Диме и Никите, Евгений — сосед Никиты, а больше соседей в этой деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Пётр огородами пробраться к Никите за яблоками?

Ответ: нет, не может.

Решение. Выпишем имена мальчиков и соединим соседей линиями:

Сергей — Максим — Иван — Пётр — Антон
Дима — Виктор — Никита — Евгений

Основная идея, которую нужно продемонстрировать при обсуждении данной задачи: рисунок помогает решению.

Пример 2. В трёх вершинах пятиугольника расположили по фишке (см. рис. 1а). Разрешается двигать их по диагонали в свободную вершину. Можно ли такими действиями добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами (см. рис. 1б)?

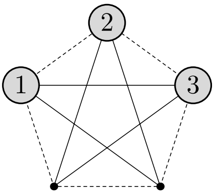

Рис. 1а

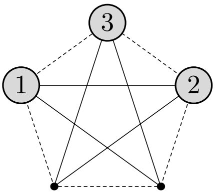

Рис. 1б

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Заметим, что диагонали пятиугольника образуют один замкнутый *цикл*. Представим себе, что фишки — это пуговицы, нанизанные на нитку (см. рис. 1в). Ясно, что если двигать пуговицы по нитке, то поменять местами две пуговицы нельзя.

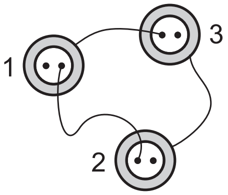

Рис. 1в

Этот пример повторяет ту же идею: изобразить ситуацию из условия задачи на рисунке, но демонстрирует более изощренные рассуждения.

Определение 1. *Графом* называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются вершинами графа, а соединяющие линии — рёбрами. (Каждое ребро соединяет ровно две вершины.)

Примерами графов могут служить: любая карта дорог, схема метро, электросхема, чертёж прямоугольника и т. д.

Здесь стоит нарисовать несколько примеров графов, обратить внимание на то, что граф может быть несвязным (состоять из нескольких «частей»), которые называют *компонентами связности*, и даже могут присутствовать вершины, из которых не исходит ни одного ребра (*изолированные вершины*).

Как правило, графы, у которых вершина соединена ребром сама с собой и графы, в которых пара вершин соединена несколькими рёбрами, не рассматриваются, хотя иногда такие графы также бывают нужны.

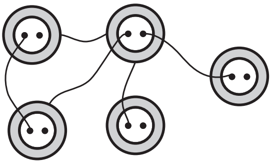

Рис. 2а

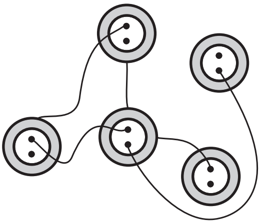

Рис. 2б

Полезно также представить граф как набор пуговиц, некоторые из которых соединены нитями. При этом, где именно расположены пуговицы, и как проходят нити — не важно: граф от этого не меняется, важно лишь то, какие пары пуговиц соединены нитями (см. рис. 2а, б).

Степень вершины

Определение 2. *Степенью* (или *порядком*) вершины называется количество рёбер, исходящих из этой вершины. Вершина называется *чётной*, если из нее выходит чётное число рёбер, и *нечётной*, если из неё выходит нечётное число рёбер.

Так, например, в графе, изображенном на рисунке 3, вершина A имеет степень 3, вершина B — степень 2, вершина C — степень 1.

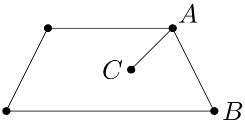

Рис. 3

Задачи

Задача 1. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля — Меркурий, Плутон — Венера, Земля — Плутон, Плутон — Меркурий, Меркурий — Венера, Уран — Нептун, Нептун — Сатурн, Сатурн — Юпитер, Юпитер — Марс и Марс — Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

Задача 2. Четыре шахматных коня — два чёрных и два белых — расположены в угловых клетках доски 3×3, как показано на рисунке 4. Кони могут передвигаться на свободные клетки по обычным правилам. Можно ли сделать так, чтобы в верхних углах стояли белые кони, а в нижних — чёрные?

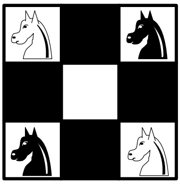

Рис. 4

Прежде чем школьники перейдут к решению данной задачи, стоит напомнить, как ходит шахматный конь.

Задача 3. Можно ли выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих цифр делилась либо на 5, либо на 7, либо на 13?

Задача 4. а) В фирме 50 компьютеров, некоторые пары компьютеров должны быть соединены кабелями. От каждого компьютера должно отходить по 8 кабелей. Сколько всего понадобится кабелей?

б) В графе 40 вершин, каждая степени 7. Сколько рёбер в графе?

в) На концерте каждую песню исполняли двое артистов, и никакая пара не выступала вместе более одного раза. Всего было 12 артистов, каждый выступил по 5 раз. Сколько было песен?

Задача 5. В стране 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно добраться в любой другой (возможно, проезжая через другие города).

Задача 6. На дискотеке каждый мальчик танцевал ровно с десятью девочками, а каждая девочка — ровно с девятью мальчиками. Кого было больше: мальчиков или девочек?

Решения и методические комментарии

Изображения графов

Задача 1. Ответ: нет, нельзя.

Нарисуем схему (построим граф, см. рис. 5): планетам будут соответствовать точки, а соединяющим их маршрутам — отрезки.

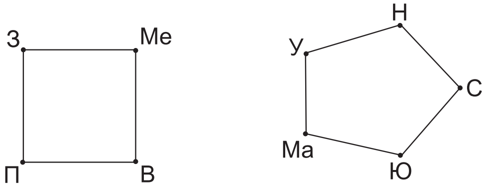

Рис. 5

Что же получили в итоге? По нарисованной схеме понятно, что долететь от Земли до Марса нельзя.

Задача 2. Ответ: нет, нельзя.

Занумеруем клетки доски числами, как показано на рисунке 6а. Построим граф (см. рис. 6б), вершины которого будут соответствовать клеткам доски, а ребра соединять клетки, находящиеся на расстоянии одного хода коня (то есть такие клетки, что из одной в другую можно попасть за один ход коня).

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Рис. 6а

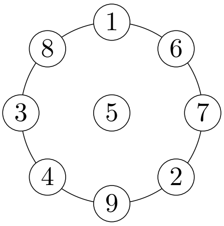

Рис. 6б

Изначально кони расположены так: на клетках 1 и 9 — чёрные, а на 3 и 7 — белые. Чтобы выполнить требуемые по условию задачи перестановки коней, нужно, чтобы, двигаясь по вершинам графа, какие-то два разноцветных коня «перешагнули» друг через друга. Однако по условию это не разрешается, следовательно, требуемое перемещение невозможно.

Задача 3. Ответ: нет, нельзя.

За вершины примем цифры 0, 1, 2, ..., 9. Если сумма двух рядом стоящих цифр делится на 5, либо на 7, либо на 13, то соединим соответствующие вершины ребром. Получим граф:

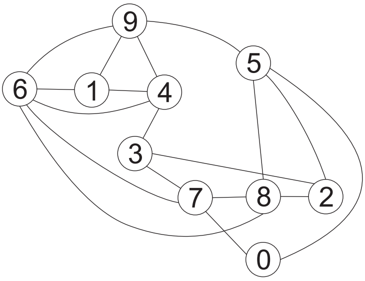

Рис. 7

Теперь несложно получить одно из возможных нужных расположений цифр: 0 – 7 – 3 – 4 – 6 – 1 – 9 – 5 – 2 – 8.

Эта задача — представитель ещё одного класса задач, в которых можно использовать графы: задачи на расстановки чисел или каких-то других элементов в определенном порядке.

Степень вершины

Задача 4. Ответ: а) 200 кабелей; б) 140 рёбер; в) 30 песен.

а) У кабеля два конца, а от каждого компьютера отходит по 8 концов. Значит, всего есть $50 \cdot 8 = 400$ концов и $\frac{400}{2} = 200$ кабелей.

б) Мысленно представив рёбра графа в виде кабелей, и подсчитав концы рёбер, получим, что всего рёбер $\frac{40 \cdot 7}{2} = 140$.

в) Соединим пару артистов ребром, если они вместе пели. Получим граф с 12 вершинами степени 5, каждой песне соответствует ребро. Аналогично предыдущему, в графе $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$ рёбер, то есть было 30 песен.

Здесь следует пояснить школьникам, что рёбра считать легче, чем песни: их можно рисовать, резать на части (концы) и т. п. Именно это свойство — наглядность — и обусловило столь широкое распространение языка графов.

Задача 5. Рассмотрим города A и B, не соединенные дорогой. Рассмотрим 7 городов, в которые можно добраться из A, и 7 городов, в которые можно добраться из B. Эти 14 городов не могут быть все различны, так как тогда вместе с A и B получилось бы 16 городов. Значит, есть город C, в который можно добраться как из A, так и из B. Значит, из A в B можно добраться через C.

Задача 6. Ответ: девочек было больше, чем мальчиков.

Решение. Пусть мальчиков было m, а девочек d. Построим граф, в котором вершины будут двух цветов: синие будут обозначать мальчиков, а красные — девочек. Рёбра будут соединять только вершины разных цветов, причём в том и только в том случае, если соответствующие мальчик и девочка танцевали на дискотеке. Так как из каждой синей вершины выходит ровно 10 рёбер, а у каждого ребра есть ровно один синий конец, то количество рёбер в нашем графе равно $10m$. Из аналогичных соображений можно получить, что оно также равно $9d$. Значит, $10m = 9d$ или $m = 0{,}9d$. Следовательно, девочек было больше.

Впрочем, если задачу переформулировать в равносильную, но с другим сюжетом, то решение становится очевидным.

К празднику было куплено несколько тортов, и каждый разрезан на 9 *кусков. Каждому пришедшему досталось по* 10 *кусков. Чего было меньше: пришедших или тортов?*

Здесь сразу ясно, что поскольку каждому досталось по $\frac{10}{9}$ торта, то тортов было меньше.

Занятие 2

Двудольные графы. Лемма о рукопожатиях

Цель данного занятия — показать, как используется понятие чётности при работе с графами. Первая часть занятия — по сути, продолжение предыдущего занятия: на новом материале отрабатывается навык счёта рёбер. Во второй половине доказывается и используется в задачах «лемма о рукопожатиях».

Двудольные графы

> **Определение 3.** Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы рёбра соединяли только пары вершин разного цвета.

Например, квадрат является примером двудольного графа: его вершины можно покрасить в два цвета через одну. А вот как ни крась вершины пятиугольника, обязательно найдутся две соседние вершины одного цвета.

Пример 1. На 8 марта каждый из 10 мальчиков класса подарил по цветку 8 одноклассницам. Известно, что каждая девочка получила по 5 цветков. Сколько всего девочек в классе?

Ответ: 16.

Решение. Подсчитаем количество «рёбер»: каждый из 10 мальчиков подарил по 8 цветков, поэтому всего было подарено 80 цветков. Поскольку каждая девочка получила по 5 цветков, то всего было 16 девочек.

Теорема о числе рёбер двудольного графа.

а) *Если в двудольном графе n белых вершин, и все они имеют степень s, то всего в графе ns рёбер.*

б) *Число рёбер равно сумме степеней всех белых вершин (а также равно сумме степеней всех чёрных вершин).*

Лемма о рукопожатиях

Докажем следующую **теорему** (её часто называют леммой о рукопожатиях).

Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству рёбер.

Доказательство. Подсчитаем количество концов всех рёбер. Оно равно сумме степеней всех вершин (см. рис. 8). Поскольку у каждого ребра два конца, то количество рёбер вдвое меньше, чем количество их концов.

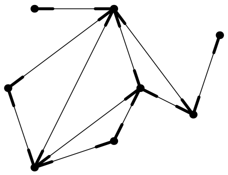

Рис. 8

Название этой теоремы произошло от такой задачи.

В компании некоторые люди пожали руки друг другу. Докажите, что количество людей, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

Лемма о рукопожатиях остается верной, даже если мы разрешаем рёбра, соединяющие вершину с самой собой, или рёбра, соединяющие уже соединённые ребром вершины. Да ведь и пара знакомых совершает обычно много рукопожатий!

Этот результат является основной идеей при решении многих задач.

Следствие. *Число нечётных вершин графа всегда чётно.*

Доказательство. Сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству рёбер, то есть должна быть чётной. Следовательно, в ней должно быть чётное число нечётных слагаемых.

Задачи

Задача 1. Нарисуйте двудольный граф, где чёрные и белые вершины — это соответственно чёрные и белые клетки доски 3×3, а рёбра соответствуют ходам коня.

Задача 2. Каждый граф можно превратить в двудольный, покрасив все его вершины в белый цвет и добавив чёрную вершину в середину каждого ребра (см. пример на рисунке 9). Сколько вершин каждого цвета и сколько рёбер у полученного графа, если у исходного было v вершин и r рёбер?

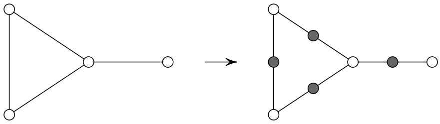

Рис. 9

Задача 3. В классе 20 человек. На праздник каждый мальчик подарил каждой девочке по цветку.

а) Какое наибольшее число цветков могло быть подарено?

б) Тот же вопрос, если в классе 21 человек.

в) Сформулируйте теорему о максимальном количестве рёбер в двудольном графе с $2n$ вершинами; с $2n+1$ вершинами.

Задача 4. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Задача 5. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?

Задача 6. Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там, на заколдованном озере имеются 7 островов, с каждого из которых ведет 1, 3 или 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

Задача 7. Докажите, что связный граф, в котором степень каждой вершины чётна, при удалении любого ребра остаётся связным.

Решения и методические комментарии

Задача 1. Ответ: см. рис. 10.

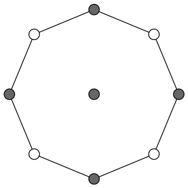

Рис. 10

Задача 2. Ответ: $2r$ рёбер, v белых вершин, r чёрных вершин.

Задача 3. Ответ: а) 100; б) 110; в) в двудольном графе с $2n$ вершинами не более n^2 рёбер, а в двудольном графе с $2n+1$ вершиной — не более $n(n+1)$ рёбер.

Пункты а) и б) можно решить перебором возможных вариантов. Теорема в пункте в) формулируется на основе полученных результатов.

Результат этой задачи очень важен, его можно трактовать самыми разными способами. Например, приведём геометрическую трактовку.

Из всех прямоугольников периметра P с целыми сторонами какой имеет наибольшую площадь?

Задача 4. Ответ: нет, нельзя.

Предположим, что это возможно. Рассмотрим граф, вершины которого — данные отрезки, а ребро соединяет 2 вершины, когда два отрезка пересекаются. В этом графе 9 вершин, степень каждой из которых равна 3. Число ребер этого графа равно $\frac{9 \cdot 3}{2}$. Но это число — нецелое. Значит, такого графа не существует и нарисовать такие отрезки невозможно.

Можно не проводить рассуждение повторно, а сослаться на лемму о рукопожатиях.

Задача 5. Ответ: нет, нельзя.

Если бы это было возможно, то можно было бы нарисовать граф с 30 вершинами, 9 из которых имели бы степень 3, 11 — степень 4, 10 — степень 5. Однако у такого графа 19 нечётных вершин, что противоречит лемме о рукопожатиях.

Задача 6. Ответ: да, верно.

Рассмотрим граф, вершины которого — острова, а рёбра — мосты. Если бы все мосты связывали только острова, то в нашем графе было бы нечётное количество нечётных вершин. Это противоречит теореме. Следовательно, один из мостов не является ребром графа и выходит на берег озера.

Задача 7. Пусть это не так, и граф при удалении ребра распадется на две компоненты связности. Тогда две вершины, которые раньше соединяло удаленное ребро, окажутся в разных компонентах связности. Степени этих вершин стали нечётными, а степени остальных вершин остались чётными, то есть в каждой компоненте связности оказалось по одной нечётной вершине, что невозможно.

Занятие 3

Основные понятия. Обходы

Цель данного занятия — расширить знания ребят по теории графов, показать, какими простейшими свойствами обладают графы, и рассмотреть новые типы задач, при решении которых также можно использовать графы.

Определение 4. *Путём* в графе от вершины A до вершины B назовем такую последовательность рёбер графа, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину, и никакое ребро не встречается более одного раза, A — начало пути, B — конец.

Определение 5. *Циклом* называется путь, у которого начало и конец совпадают (см. рис. 11).

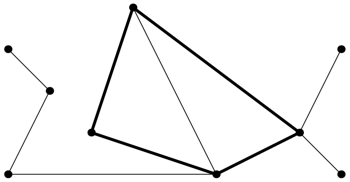

Рис. 11

Определение 6. Граф, у которого каждая вершина соединена ребром с любой другой вершиной, называется *полным* графом.

Пример 1. Сколько рёбер в полном графе: а) с пятью вершинами; б) с шестью вершинами; в) с n вершинами?

Решение. а), б) Любая из пяти (из шести) вершин связана со всеми остальными, то есть с четырьмя (или пятью). Каждое ребро считается дважды, так как у него есть начало и конец. Получаем общее число рёбер $\dfrac{4(4-1)}{2} = 6$ $\left(\dfrac{5(5-1)}{2} = 10\right)$.

в) В общем случае: $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Определение 7. Граф называется *связным*, если для любой его вершины найдется путь, связывающий её с любой другой вершиной этого графа.

Рассмотрим примеры:

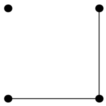

Рис. 12а

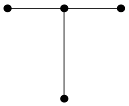

Рис. 12б

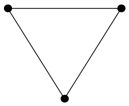

Рис. 12в

На первом рисунке мы видим, что граф несвязен, на втором — связный граф без циклов, на третьем у графа есть цикл.

Возникает вопрос: а как выглядит несвязный граф? Он состоит из нескольких «кусков». Так, например, граф, изображённый на рисунке 13, состоит из трёх «кусков», а на рисунке 14 — из двух «кусков». Эти куски называются *компонентами связности* графа. Связный граф имеет одну компоненту связности.

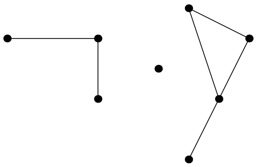

Рис. 13

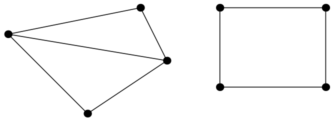

Рис. 14

Пример 2. В тридевятом царстве лишь один вид транспорта — ковёр-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний — одна, а из всех остальных — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно с пересадками).

Решение. Рассмотрим компоненту связности графа ковролиний, содержащую столицу. Нужно доказать, что она содержит и город Дальний. Докажем от противного. Пусть в компоненте связности города Дальнего нет. Тогда в ней из одной вершины (столицы) выходит 21 ребро, а их всех остальных вершин — по 20 рёбер. Таким образом, в этом графе ровно одна нечётная вершина, что противоречит теореме о количестве нечётных вершин графа.

Определение 8. Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро один раз, называется **эйлеровым**.

Пример 3. Можно ли нарисовать граф, изображённый а) на рисунке 15а; б) на рисунке 15б, не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?

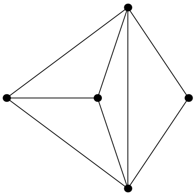

Рис. 15а

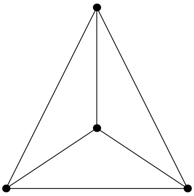

Рис. 15б

Ответ: а) да, б) нет.

Решение. Разделим все вершины на три типа: начальная, конечная и промежуточные.

Поскольку из каждой промежуточной вершины мы выходим столько же раз, сколько входим, степень промежуточной вершины должна быть чётной. В графе на рисунке 15б) все вершины имеют нечётную степень 3, поэтому его нельзя нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги.

В графе на рисунке 15а) есть две вершины нечётной степени. Несложно придумать, как нарисовать его, не отрывая карандаша от бумаги, если начинать и заканчивать в нечётной вершине.

Из решения задачи следует, что ***эйлеров граф должен иметь не более двух нечётных вершин***. Впервые это было установлено в связи со знаменитой задачей о кёнигсбергских мостах (см. задачу 5).

Вспомним, что граф не может иметь ровно одну нечётную вершину, поскольку количество нечётных вершин должно быть чётным. Следовательно, эйлеров граф может иметь либо две нечётные вершины, либо не иметь их вовсе.

Верно и обратное утверждение: *любой такой связный граф является эйлеровым.*

Доказательство этой теоремы можно перенести на следующий год, так как в нём есть некоторые тонкости, которые непросто понять при первом знакомстве с графами.

Задачи

Задача 1. Петя нарисовал несколько точек на плоскости так, что никакие три из них не лежат на одной прямой, и соединил каждые две точки отрезком. Мог ли он нарисовать ровно семь отрезков?

Задача 2. В графе с восемью вершинами степень каждой вершины равна 2. Нарисуйте все такие графы (не забывайте, что графы могут быть несвязными).

Задача 3. В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трёх однофамильцев. Докажите, что все семеро имеют одну и ту же фамилию.

Задача 4. а) Какой может быть степень вершины в графе, в котором всего N вершин? б) Докажите, что в любом графе (у которого не менее двух вершин) найдутся две вершины одинаковой степени.

Задача 5. Схема мостов города Кёнигсберга изображена на рисунке 16. Можно ли совершить прогулку, пройдя по каждому мосту ровно один раз?

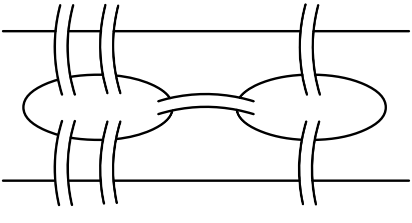

Рис. 16

Задача 6. Любой ли связный граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, если по каждому ребру разрешается проводить ровно два раза?

Решения и методические комментарии

Задача 1. Ответ: нет, не мог.

Петя нарисовал полный граф. Общее число рёбер полного графа выражается формулой $\frac{n(n-1)}{2}$, но ни при каком n оно не равно 7. Следовательно, такого графа не существует.

Задача 2. Связный граф, степень каждой вершины которого равна 2, представляет собой цикл (см. рис. 17а). Несвязный граф — объединение нескольких отдельных циклов, причём в каждой компоненте связности должно быть не меньше 3 вершин. Для 8 вершин таких графов два: у них по две компоненты связности: цикл из трех вершин и цикл из пяти вершин либо два цикла из четырех вершин (см. рис. 17б,в).

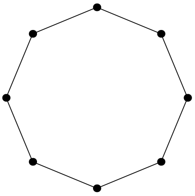

Рис. 17а

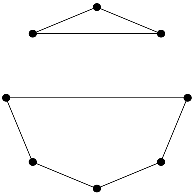

Рис. 17б

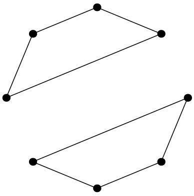

Рис. 17в

Задача 3. Возьмём любых двух мальчиков из этой компании. Предположим, что они не однофамильцы. Тогда каждый из них имеет среди оставшихся по три однофамильца. По принципу Дирихле, у них есть общий однофамилец, а значит, они имеют одну и ту же фамилию. Итак, любые два мальчика из этой компании носят одну и ту же фамилию, что и требовалось доказать.

Задача 4. Ответ: а) от 0 до $n-1$.

б) Предположим, что все вершины имеют различные степени, то есть $0, 1, 2, \dots, n-1$. Но тогда одновременно есть две вершины, одна из которых не связана ни с одной другой, а вторая —

связана со всеми, что невозможно. Следовательно, найдутся две вершины, имеющие одинаковые степени.

Задача 5. Ответ: нет, нельзя.

Обозначим участки суши, которые связаны с мостами, латинскими буквами A, B, C и D (см. рис. 16а). Рассмотрим граф, вершинами которого будут четыре участка суши, изображённые на схеме, а рёбрами — соединяющие их мосты (см. рис. 16б). Поскольку степени всех четырёх вершин нечётны, совершить требуемую прогулку невозможно.

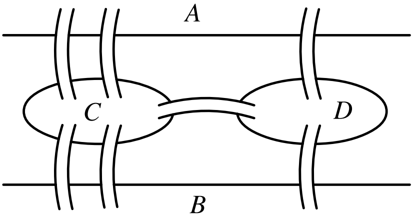

Рис. 16а

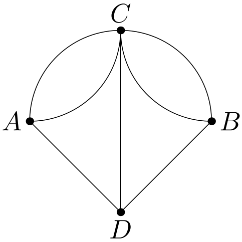

Рис. 16б

Задача 6. Ответ: да, любой.

Заменим каждое ребро двумя параллельными. Тогда степень каждой вершины удвоится и станет чётным числом. Кроме того, в середину одного из двух параллельных рёбер поместим новую вершину. Мы получим граф, у которого все вершины чётные: такой граф можно нарисовать, проводя по каждому ребру ровно один раз.

Занятие 4

Деревья

Деревья — это в некотором смысле самые простые графы. Они часто возникают как самостоятельно (в частности, при построении эффективных структур данных в Computer Science), так и в качестве вспомогательных конструкций в других задачах на графы.

Цель данного занятия — сформулировать определения и доказать основные свойства деревьев.

Определение 9. Связный граф без циклов называется *деревом.*

Пример дерева приведён на рис. 17.

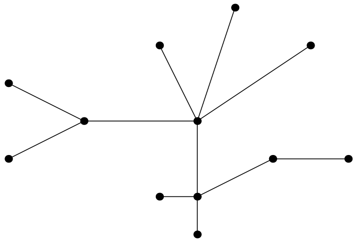

Рис. 17

Таким образом, в дереве невозможно, передвигаясь по рёбрам и не проходя по одному ребру два или более раз, вернуться в исходную вершину. Этот факт часто используется при доказательстве других свойств деревьев и при решении задач.

Теорема 1. *В любом дереве (в котором более одной вершины) есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро.*

Такую вершину называют *висячей.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную вершину и пойдем по любому выходящему из нее ребру в другую вершину.

Если из новой вершины больше рёбер не выходит, то остаемся в ней, в противном случае идем по любому другому ребру дальше. В этом путешествии мы никогда не сможем попасть в вершину, в которой уже были, так как это бы означало наличие цикла. Поскольку у графа конечное число вершин, то наше путешествие обязательно закончится. И закончиться оно может только в висячей вершине.

Далее будем использовать следующие обозначения: V — количество вершин графа, E — количество рёбер.

Теорема 2. *В дереве количество вершин на* 1 *больше количества рёбер*: $V = E + 1$.

Доказательство. Первый способ. Рассмотрим дерево, содержащее E рёбер. По теореме 1 в нём есть висячая вершина. Удалим её вместе с выходящим из нее ребром. Оставшийся граф — тоже дерево (почему?) и у него тоже есть висячая вершина. Удалим и её вместе с исходящим ребром. Повторим эту операцию E раз и получим граф, состоящий из одной вершины (ведь полученый граф уже не содержит рёбер и при этом является связным). Следовательно, количество вершин изначально было равно $E + 1$.

Второй способ. «Подвесим» дерево за любую вершину (см. рис. 18).

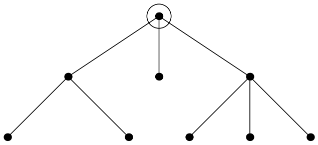

Рис. 18

Тогда в каждую вершину, кроме той, за которую дерево подвешено, будет сверху входить ровно одно ребро. Следовательно, количество вершин на 1 больше количества рёбер.

Теорема 3. *Из любого связного графа можно удалить часть рёбер* (*не удаляя вершин*) *так, чтобы осталось дерево.*

Его называют *остовным деревом графа* или *каркасом графа.*

Доказательство. Рассмотрим связный граф, не являющийся деревом. Тогда в нём есть цикл. Если удалить из цикла любое ребро, то граф останется связным (почему?). Будем удалять рёбра из циклов, пока циклы есть. В итоге получим связный граф без циклов — дерево.

Выделение каркаса или «максимального» дерева является ключевой идеей решения многих задач.

Задачи

Задача 1. Нарисуйте все деревья с пятью вершинами. Объясните, почему других деревьев нет.

Задача 2. В графе все вершины имеют степень три. Докажите, что в нём есть цикл.

Задача 3. Докажите, что в дереве (в котором больше одной вершины) найдутся *хотя бы две* висячие вершины.

Задача 4. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число раз можно разрезать составляющие сетку верёвочки так, чтобы сетка не распалась на куски?

Задача 5. В стране из любого города в любой можно попасть, двигаясь по дорогам (возможно, через другие города). Докажите, что можно превратить один из городов в военную базу (закрыв проезд через него) так, что из любого из оставшихся городов по-прежнему можно будет проехать в любой другой.

Задача 6. Докажите, что связный граф, в котором вершин на одну больше, чем ребер, является деревом (то есть не содержит циклов).

Решения и методические комментарии

Задача 1. Ответ: см. рис. 19.

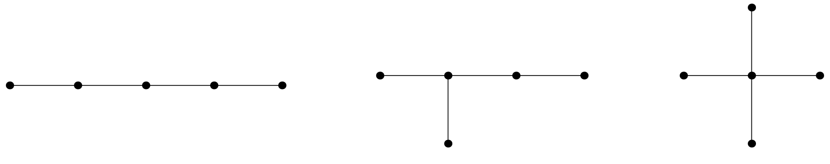

Рис. 19

Эта задача учит правильной организации перебора. Чтобы не пропустить ни одного графа, их нужно упорядочить по какому-либо признаку. Например, можно упорядочить графы по самому длинному содержащемуся в них пути. Тогда дальнейший перебор не представляет трудностей.

Задача 2. Рассмотрим одну из компонент связности данного графа. В ней нет висячей вершины (вершины степени 1), поэтому она не является деревом и в ней есть цикл.

Обратите внимание, что поскольку мы ранее доказали наличие висячей вершины лишь в дереве, а не в произвольном графе без циклов, то при решении задачи требуются дополнительные действия (выбор одной компоненты связности).

Задача 3. Мы уже знаем, что в дереве есть хотя бы одна висячая вершина. Встанем в неё и пойдём по рёбрам дерева, не проходя по одному ребру дважды. Поскольку граф конечный, то в некоторый момент мы окажемся в вершине, из которой нет выхода. Поскольку граф не содержит циклов, то в этой вершине мы оказались в первый раз. Следовательно, её степень равна 1.

Другой способ доказательства: подвесить дерево за первую висячую вершину, тогда внизу обязательно найдётся вторая.

Задача 4. Рассмотрим волейбольную сетку как граф, вершинами которого являются узлы сетки, а ребрами — верёвочки. Нам необходимо удалить как можно больше рёбер так, чтобы он остался связным. Будем убирать рёбра по очереди до тех пор, пока это возможно. Заметим, что если в графе есть цикл, то возможно удаление любого ребра этого цикла. Связный граф, не имеющий циклов, является деревом. Поэтому, только получив дерево, мы не сможем убрать ни одного ребра. Количество вершин осталось тем же — $51 \times 601 = 30651$. Число рёбер в дереве на 1 меньше числа вершин и, следовательно, в нашем дереве будет 30650 ребер. Сначала же их было $601 \times 50 + 600 \times 51 = 60650$. Таким образом, можно удалить 30000 рёбер, то есть у волейбольной сетки можно прорезать 30000 верёвочек (но не более!)

В этой задаче правильные вычисления столь же важны, сколь и полное обоснование.

Задача 5. Переформулируем задачу на языке графов.

Докажите, что в любом связном графе можно удалить одну вершину и все выходящие из неё рёбра так, что оставшийся граф будет связным.

Рассмотрим какое-нибудь остовное дерево данного графа. У него есть висячая вершина. Удалим её и все выходящие из нее рёбра. Тогда в остовном дереве удалится только одно ребро и оставшаяся часть остовного дерева будет связной, следовательно, и оставшийся граф — связный.

Можно провести более сложное доказательство, которое не использует понятие остовного дерева. Выберем произвольную вершину (начальную) и посчитаем расстояние (количество ребер в кратчайшем пути) от данной вершины до каждой из остальных. Рассмотрим вершину, наиболее удалённую от начальной. Из любой другой вершины есть путь в начальную, не проходящий через наиболее удалённую (иначе этот путь был бы длиннее, чем путь из наиболее удалённой вершины). Следовательно, из любой вершины в любую можно пройти через начальную, минуя наиболее удалённую. Поэтому наиболее удалённую вершину и все выходящие из нее рёбра можно удалить, и при этом граф останется связным.

Задача 6. Пусть в таком графе есть циклы. Тогда, удалив часть рёбер, мы можем получить дерево. При этом количество вершин не изменится, а количество рёбер уменьшится. Но по теореме 2 в полученном дереве вершин будет на одну больше, чем рёбер. Противоречие.

Эта задача вместе с теоремой 2 позволяют сформулировать равносильное определение дерева.

Определение 10. *Деревом* называется связный граф, у которого вершин на 1 больше, чем рёбер.

Разные задачи

Задача 1. В двадцатиэтажном доме испорчен лифт: он может либо подниматься на 8 этажей вверх, либо спускаться на 13 этажей вниз. Можно ли с помощью лифта попасть с 20-го этажа на первый?

Задача 2. В стране Цифра есть девять городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Два города соединены авиалинией только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

Задача 3. В поселке 27 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 6 телефонов, каждый из которых соединён с тремя другими, 10 телефонов, каждый из которых соединён с шестью, и 11 телефонов, каждый из которых соединён с пятью другими?

Задача 4. В шахматном турнире в один круг участвуют 17 человек. Верно ли, что в любой момент турнира найдётся шахматист, сыгравший к этому моменту чётное число партий (может быть, ни одной)?

Задача 5. В городе X с любой станции метро можно проехать на любую другую. Доказать, что одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через нее так, чтобы с любой из оставшихся станций можно было проехать на любую другую.

Задача 6. Можно ли 2007 телефонов соединить между собой так, чтобы каждый был соединен ровно с 2005?

Задача 7. В городе N от каждой площади отходит ровно 5 улиц, соединяющих площади. Докажите, что число площадей чётно, а число улиц делится на пять.

Задача 8. В турнире принимают участие 15 шахматистов. Может ли быть, чтобы в некоторый момент каждый из них сыграл ровно 7 партий?

Задача 9. В графе каждая вершина покрашена в зелёный или синий цвет. Известно, что каждая синяя вершина соединена с пятью синими и десятью зелёными, а каждая зелёная — с девятью синими и шестью зелеными. Каких вершин больше: синих или зелёных?

Задача 10. В школе 953 ученика. Одни из них знакомы, другие не знакомы друг с другом. Доказать, что хотя бы у одного из них число знакомых среди учеников этой школы чётно.

Задача 11. Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки (см. рис. 20). Можно ли обойти её ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

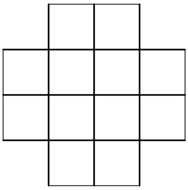

Рис. 20

Задача 12. В стране Древляндия 101 город, некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один маршрут. Сколько в этой стране дорог?

Задача 13. Имеется группа островов, соединённых мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошел все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист а) не с него начал и не на нём закончил? б) с него начал, но не на нём закончил? в) с него начал и на нём закончил?

Задача 14. Дан кусок проволоки длиной 120 см. а) Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см? б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы все же изготовить каркас?

Задача 15. На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную фигуру. Доказать, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, и не проводя дважды одну и ту же линию.

Задача 16. В некоторой области 30 населенных пунктов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого пункта можно было проехать в каждый?

Задача 17. Из спичек выложили клетчатый квадрат 8×8 со стороной клетки в одну спичку. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы с любой клетки на любую другую можно было пройти, не перепрыгивая через спички?

Задача 18. Можно ли раскрасить ребра куба в красный и чёрный цвета так, чтобы муравей мог пройти из любой вершины в любую, гуляя только по красным ребрам, а жук — только по чёрным?

Ответы и указания

Задача 1. Нет. Можно ехать единственным способом: 20 – 7 – 15 – 2 – 10 – 18 – 5 – 13, а с 13 этажа уехать нельзя.

Задача 2. Нет.

Задача 3. Нельзя. Примените теорему о числе нечётных вершин.

Задача 4. Верно.

Задача 5. Пусть A — любая станция метро. Тогда достаточно закрыть станцию, до которой от A больше всего остановок.

Задача 6. Нельзя.

Задача 7. Поскольку все вершины — нечётной степени, то число вершин (площадей) чётно, то есть равно $2n$. Число улиц (рёбер) — $\frac{2n \cdot 5}{2} = 5n$.

Задача 8. Нет. Не существует графа с 15 нечётными (степени 7) вершинами.

Задача 9. Часть данных в условии этой задачи — лишние. Для решения достаточно подсчитать двумя способами ребра, соединяющие зелёные вершины с синими.

Задача 11. Да, можно. Искомый путь можно найти и просто подбором, но если нарисовать соответствующий граф, то сделать это гораздо проще.

Задача 12. 100 дорог.

Задача 13. а) 6, б) 5, в) 4.

Задача 14. а) Если это возможно, мы как бы нарисовали каркас куба, не отрывая карандаша от бумаги, но это невозможно, так как у куба восемь нечётных вершин. б) Так как нечётных вершин 8, то таких кусков нужно не менее четырёх.

Задача 15. Граф связен, степени вершин чётны.

Задача 16. $\frac{30 \cdot 29}{2} - 29 = 406$.

Задача 17. 63.

Задача 18. Нет.

Приложение

Формальные определения

Поскольку изучение теории графов начинается в достаточно раннем возрасте, многие определения школьникам вводятся неформально. Но мы считаем, что учителю полезно знать и формальные математические определения — их мы и формулируем в данном приложении.

Граф — это пара (V, E), где V — некоторое множество, называемое множеством вершин графа, а E — множество пар (u, v), где u, $v \in V$.

В этой книге мы рассматривали только графы с конечным числом вершин.

Для школьников достаточно сформулировать примерно такое (нестрогое) определение: граф состоит из вершин (которые мы будем изображать точками на плоскости), некоторые из которых соединены рёбрами (которые на плоскости мы будем изображать линиями).

Два графа (V_1, E_1) и (V_2, E_2) называются *изоморфными*, если существует биекция $f\colon V_1 \to V_2$, такая что $(u, v) \in E_1$, тогда и только тогда, когда $(f(u), f(v)) \in E_2$.

Для школьников это определение можно сформулировать так: будем считать *одинаковыми* (изоморфными) графы, если можно так занумеровать их вершины, что ребра в обоих графах соединяли пары вершин с одними и теми же номерами. Далее полезно привести пример.

Путь — это последовательность вершин и рёбер v_1, e_1, v_2, e_2, $\dots$, e_{n-1}, v_n, где $e_i = (v_i, v_{i+1})$. Вообще говоря, вершины и рёбра в пути могут повторяться, а пути, в которых каждая вершина встречается лишь один раз, называют *простыми*. Но часто, используя термин *путь*, подразумевают простой путь.

Цикл — это путь, в котором последняя вершина совпадает с первой. Аналогично простому пути можно ввести понятие *простого цикла.*

Список литературы

1. Горбачев Н. В. *Сборник олимпиадных задач по математике.* — М: МЦНМО, 2004.

2. *Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике.* — СПб: Невский диалект, 2006.

3. *Ленинградские математические кружки*: *пособие для внеклассной работы.* — Киров: АСА, 1994.

4. Мерзляков А. С. *Факультативный курс по математике.* — Ижевск: Удмуртский университет, 2002.

5. Спивак А. В. *Математический праздник.* — М: Бюро Квантум, 2004.

Список веб-ресурсов

1. `www.problems.ru` — база задач по математике.

2. `mmmf.math.msu.su` — сайт Малого мехмата МГУ.

Оглавление