А. В. Шаповалов

Математические конструкции: от хижин к дворцам

Школьные
Математические
Кружки

А. В. Шаповалов

Математические конструкции: от хижин к дворцам

Электронное издание

Издательство МЦНМО
Москва, 2016

УДК 51(07)
ББК 22.1
Ш24

Шаповалов А. В.
Математические конструкции: от хижин к дворцам
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2016
176 с.
ISBN 978-5-4439-2426-7

Тринадцатая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена методам придумывания, построения и исследования математических конструкций. Она предназначена в основном для занятий со школьниками 6–8 классов, но может быть использована и для старших школьников. Продолжая книжку «Как построить пример», здесь рассмотрены более мощные приёмы работы с конструкциями, показывающие в том числе, как придумать и сконструировать *доказательство*. В книжку вошли разработки семи занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для учителя. Для удобства использования заключительная часть книжки, как всегда, сделана в виде раздаточных материалов.

Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков.

Подготовлено на основе книги: *А. В. Шаповалов*. Математические конструкции: от хижин к дворцам. — М.: МЦНМО, 2015. — ISBN 978-5-4439-0358-3.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2426-7

Предисловие

Задачи на придумывание конструкций часто ставят в тупик школьников, привыкших, что в математике «всё задаётся однозначно». Но фантазия — такая же неотъемлемая часть математики, как строгость и логичность. И задачи на конструкцию учат применять фантазию в соединении со строгостью и логичностью. В предыдущей книге автора «Как построить пример?» (см. [2]) разобраны наиболее простые приёмы решения задач на конструкцию: «Как такое может быть?!», «Ищи там, где легче», «Высматривай знакомое», «Используй повторяемость», «Используй симметрию». Данная книга расширяет этот список, вводя приёмы посложнее и помощнее.

Для решения большинства задач этой книги (и понимания приведённых в книге решений) не требуется знаний, выходящих за рамки школьных программ 6 класса. Тем не менее, значительная часть решений требует определённой математической культуры, которую вряд ли можно ожидать на первом году занятий математического кружка. Поэтому автор считает, что книга будет полезна для школьников 6–8 и более старших классов, уже имеющих опыт обучения в математических кружках.

Книга содержит семь тематических занятий математического кружка. В материалы каждого занятия входят: вступительный текст учителя, подробный разбор нескольких задач по теме занятия (включающий решения и комментарии), задачи для самостоятельного решения, решения этих задач с комментариями — всего примерно 10 задач на занятие. В конце некоторых занятий добавлен текст, озаглавленный «Идеология»: мысли и советы, позволяющие расширить и углубить контекст занятия. Первые три занятия ориентированы на учеников 6–7 класса, следующие три — для 7–8 класса, последнее — для 8–9 класса. Есть ещё раздел «Дополнительные задачи», и там, среди прочего, есть задачи и для школьников постарше: сотня задач на конструкции сгруппированы по классам: 6–7, 7–8, 8–9 и 9–11; наиболее сложные отмечены звёздочкой *. Такая подборка даёт руководителю кружка возможность адаптировать занятие к возрасту и уровню подготовки школьников за счёт замены некоторых основных задач дополнительными. С этой целью в конце каждого занятия приводятся списки задач из дополнительного раздела, а также из других занятий; задачи списка могут быть решены с использованием методов текущего занятия. Впрочем, большинство задач можно решить разными методами, поэтому одна и та же задача может фигурировать в нескольких списках.

В конце книги приведён раздаточный материал.

Текст брошюры рассчитан более на учителя, чем на школьника. Нормальный школьник предпочитает решать без подробной записи и обсуждать решения устно. Готовность читать рассуждения на тему «Как можно найти решение» приходит только с накоплением опыта. Чтобы комментарии и общие идеи книги всё же доходили до ученика, учителю стоит включать почерпнутые в этой брошюре идеи в обсуждения.

Решения задач и *пути к решению* тщательно разделены. Этим автор хотел подчеркнуть, что в задачах на конструкцию готовое решение (то, что школьник в идеале должен написать) и путь к решению (пояснение, как такое придумать) обычно имеют мало общего[1]. Соответ-

[1]Собственно, и в задачах на доказательство мало общего между решением и поиском решения. Но там элементы пути к решению оставляют в тексте решения или вкрапляют в него из педагогических соображений: без них понять текст будет намного труднее. В результате,

ственно, и школьников полезно учить разделять эти моменты. Тем более, что такое разделение может пригодиться и при решении математических задач других типов.

Первые пять задач каждого занятия — это примеры для коллективного обсуждения. Сложность их различна: первые обычно — одноходовки, а последние одну–две задачи редко кто из школьников успевает решить. Но даже если школьникам самим не удаётся быстро найти *нужное* решение, стоит его подсказать, в любом случае — разобрать на доске и показать на его примере работу *приёмов*.

Задачи для самостоятельного решения учителю стоит обсуждать индивидуально со школьниками, так или иначе продвинувшимися в их решении.

Соглашение о формулировках. Если в условии требуется *построить*, *разрезать*, *расставить*, то поиск *всех возможных вариантов не требуется* (а если он нужен, это специально оговаривается).

Автор благодарен К. А. Кнопу за содержательные обсуждения и предложенные задачи, позволившие существенно улучшить данную книгу.

увы, затушёвывается характерное для всякой математической деятельности различие между строгой логикой готового результата и креативной логикой восхождения к решению.

Введение

Автор убеждён, что построение и исследование конструкций составляет существенную часть *математики*, а значит, это должно составлять существенную часть *обучения математике*. Такое обучение позволяет решить две задачи: поддерживать достаточно долго интерес к математике и повысить эффективность обучения.

Проблема интереса упирается в абстрактный характер математики. Именно абстрактность со временем начинает вызывать отторжение даже у очень сильных и успешных учеников. Традиционное «академичное» преподавание создаёт несоответствие между богатством математических формул, теорем и методов и бедностью их приложений за пределами математики. Неудивительно, что многим ученикам и студентам математика начинает казаться чем-то вроде «игры в бисер», и относиться к ней они начинают соответственно.

Не надо забывать, что вся математика возникла из практического опыта, как его развитие. Да, связи «житейского» и «математического» далеко не так просты, но они никуда не делись. А главное: знаний об окружающем мире у школьников в миллиарды раз больше, чем математических! И отказываться от этих знаний — всё равно что отказываться дышать воздухом атмосферы и переходить на дыхание из кислородного баллона.

Но хотя, на взгляд автора, и окружающая действительность и смежные дисциплины пронизаны математикой, он понимает, что в рамках урока даже межпредметные связи навести весьма непросто. И тут на помощь приходят задачи на конструкции. Их тематика весьма разнообразна и может быть легко привязана к интересам учащихся, а постановки задач «построить», «возможно ли», «какое наименьшее количество нужно, чтобы» и т. п. выглядят куда более мотивированными. В то же время инструментарием для исследования конструкций служат всё те же «абстрактные и теоретические» теоремы и методы, которые мы и хотим преподать учащимся.

Проблема эффективности обучения — это проблема применения полученных знаний и навыков. Рядовой учитель посвящает основное время обучению математическим формулам, понятиям и теоремам и отработке навыков работы с ними. О применении этих теорем за пределами ограниченного списка задач речь обычно не идёт. Но ведь это как если бы строителей учили бы обработке кирпичей и досок, но не учили бы строить дома!

В результате навыки и понятия зачастую оказываются усвоенными поверхностно. Они оторваны от здравого смысла и редко применяются за пределами профессиональной деятельности, да и в такой деятельности применение сведено к нескольким стандартным схемам. Стоит ли после этого удивляться феномену кандидатов физико-математических и технических наук, не способных решить задачу С6 ЕГЭ только потому, что конструкция этой задачи им раньше не встречалась.

Между тем в практической деятельности задача сконструировать что-то, сварить обед, составить маршрут или план и т. п. встречается гораздо чаще, чем что-то пересчитать, решить уравнение или доказать. Сплошь и рядом нам приходится сталкиваться с какими-то практическими ситуациями впервые в жизни, и ничего — справляемся. Вот это-то умение можно и нужно использовать и при обучении математике. И хорошим средством служат именно задачи на конструкцию.

Кроме того, в процессе придумывания действует не столько математическая логика, сколько фантазия. И ограничивать её «пятачком» математического опыта неразумно. Черпать идеи можно и нужно не только из слов учителя или книг, но и непосредственно из окружающего мира. В конце концов, лишь сотые доли процента школьников станут профессиональными «чистыми» математиками. Остальным если уж придётся применять свои знания и навыки, то в прикладной математике, программировании, других науках и вне науки. Так давайте учить их так, чтобы им эти навыки пригодились в любом случае.

В частности, будем учить их придумывать примеры так, чтобы изобретательность как минимум сохранялась, а строгость ей не только не мешала, но чем дальше, тем больше помогала. Автор старался классифицировать приёмы придумывания конструкций и показать, что они коренятся в житейском опыте. В решениях продемонстрировано, что классические кружковые темы «Чётность», «Принцип Дирихле», «От противного», «Решение с конца», «Делимость», «Остатки», «Инвариант» и «Полуинвариант» работают при построении явных примеров с тем же успехом, что и при доказательстве невозможности или неконструктивном доказательстве существования.

Простейшие приёмы придумывания конструкций были разобраны в книге автора «Как построить пример?». О них полезно помнить и при решении задач данной книги. Коротко напомним их.

Как такое может быть? Спросите себя: «Какими свойствами должна обладать конструкция?» Дополнительное знание может сильно сузить круг поисков или осветить дорогу.

Ищи, где удобнее. Если хватает одного примера, ищи сначала там, где удобнее. Используй здравый смысл, естественные соображения. Это ограничивает число вариантов, зато ускоряет поиск.

Высматривай знакомое. Ответом может оказаться хорошо знакомый объект, просто надо посмотреть на него под нужным углом.

Повторяемость. Если конструкция должна состоять из большого числа деталей, проще использовать одинаковые детали. Разные детали можно объединять в одинаковые блоки и строить из блоков.

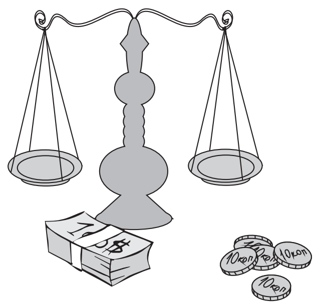
Симметрии, сдвиги и повороты. Равные части удобнее получать симметрией, сдвигом или поворотом. При работе с симметричными фигурами и позициями стоит сначала поискать симметричное решение. Даже и вне геометрии может сработать расстановка объектов по кругу так, чтобы поворот переводил конструкцию в себя.

В путях к решению эти приёмы будут упоминаться наряду с теми, которые рассмотрены в занятиях данной книги.

Занятие 1

Много не мало, или Мнимые противоречия

На одну чашку весов кладётся пять десятикопеечных монет,
а на другую — равная по массе пачка стодолларовых купюр.
Будут ли весы в равновесии?



Цель занятия — приучить школьников отличать кажущиеся противоречия от действительных. При этом вырабатывается навык внимательного прочтения задачи и анализа её условий, школьники рассматривают неожиданные примеры, что расширяет их кругозор.

Первые задачи лучше решать путём совместного обсуждения. Попросите проголосовать: можно или нельзя. Тех, кто за «нельзя», попросите обосновать свою позицию. Обычно говорят что-нибудь вроде «чем больше периметр, тем больше площадь — посмотрите хоть на квадрат». Как только будут упомянуты две мнимо согласованные величины (скажем, периметр и площадь), подтолкните обсуждение к вопросу «для каких примеров они согласованы», а затем — «может ли одна меняться, а другая оставаться неизменной».

В обсуждениях будут использоваться слова «много», «мало», «сильно». Помогите учащимся понять, что без количественных критериев их использовать ненадёжно.

В нескольких задачах используется парадокс «игрока и казино»: как могут оба быть довольны, если оба хотят выиграть. Ответ: для казино важно выиграть в сумме, для игрока — выигрывать чаще, и это обеспечить легко. Основной приём казино: несколько раз проиграть понемногу, и один раз выиграть по-крупному. Обсудите этот парадокс при решении одной из задач, подчеркните приём.

Задача 1.1. Можно ли числа 1, 2, 3, ..., 100 разбить на пары (чётное, нечётное) так, чтобы во всех парах, кроме одной, нечётное число было больше чётного?

Ответ: можно.

Решение. (2, 3), (4, 5), ..., (98, 99), (1, 100). Как видим, нечётное число меньше чётного только в последней паре.

Замечание. Проблему, казалось бы, создаёт то, что сумма чётных чисел *больше* суммы нечётных. Обратите внимание на то, как мы решили эту проблему: в 49 парах нечётное число больше чётного всего на 1, зато в оставшейся паре чётное больше нечётного сразу на 99. Это похоже на игрока и казино.

Задача 1.2. Площадь прямоугольника — 1 кв. дм. Может ли его периметр быть больше 1 км?

Ответ: может.

Решение. Например, прямоугольник со сторонами 500 м и 0,02 мм. Его периметр 1000 м + 0,04 мм, а площадь равна $500 \times 0{,}02 \times 0{,}001 = 0{,}01$ м$^2 = 1$ дм^2.

Путь к решению. Будем менять прямоугольник: одновременно увеличиваем длину и уменьшаем ширину, но площадь сохраняем. Заметим, что при этом нет ограничений на увеличение длины (а значит, и на увеличение периметра)! Конкретный пример построим, спросив: «Как такое может быть?» Задав одну сторону и зная площадь, мы вычислим вторую сторону. Ничто не мешает сделать сторону достаточно длинной, чтобы уже сумма двух таких сторон была не менее 1 км. Конечно, в тетради такой прямоугольник не нарисуешь, но это же не препятствие...

Запомните приём. Начните построение примера с элемента нужного *вам* размера.

Задача 1.3. Числитель дроби увеличили на 1, а знаменатель — на 100. Могла ли дробь увеличиться?

Ответ: могла.

Решение. Например, $\frac{2}{206} > \frac{3}{306}$, так как левая дробь после сокращения равна $\frac{1}{103}$, а правая — $\frac{1}{102}$.

Путь к решению. Кажется, что такое невозможно: ведь к числителю прибавили «мало», а к знаменателю — «много». Но «много» и «мало» — понятия относительные, зависят от того, с чем сравнивать. Добавление 1 к малому числителю может увеличить его заметно, а добавление 100 к большому знаменателю может быть малозаметным.

Замечание. Можно проверить, что увеличится любая дробь, меньшая $\frac{1}{100}$, а вот дробь, большая $\frac{1}{100}$, уменьшится.

Задача 1.4. Сумма положительных чисел больше десяти. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,1?

Ответ: может.

Решение. Например, 2001 слагаемое по $\frac{1}{200}$. Их сумма равна $2001 \cdot \frac{1}{200} > \frac{2000}{200} = 10$. А сумма квадратов $2001 \times \times \frac{1}{200^2} < \frac{4000}{40000} = 0{,}1$.

Путь к решению. Как такое может быть, что сумма квадратов меньше суммы чисел? Ведь квадрат положительного числа должен быть больше самого числа... Впрочем, это верно только для чисел, больших 1, а для меньших — наоборот. Скажем, $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ в n раз меньше $\frac{1}{n}$. Нам нужно, чтобы при переходе к квадратам сумма чисел уменьшилась более чем в 100 раз — ну так давайте наберём её слагаемыми, меньшими $\frac{1}{100}$. Правда, их придется взять много, но *на это ограничений* нет. Удобнее всего брать одинаковые слагаемые.

Задача 1.5. Ася, Бася и Вася участвовали в нескольких шахматных турнирах. Могло ли случиться так, что Ася заняла место выше Баси более чем в половине турниров, Бася занял место выше Васи более чем в половине турниров, а Вася занял место выше Аси тоже более чем в половине турниров?

Ответ: могло.

Решение. Пусть, например, было 3 турнира. В первом они заняли места в порядке (сверху вниз) Вася, Ася, Бася; во втором — Ася, Бася, Вася; в третьем — Бася, Вася, Ася. Видим, что Ася обошла Басю в двух первых турнирах, Бася — Васю в двух последних, наконец, Вася — Асю в первом и третьем.

Путь к решению. Как же может Вася обойти Асю, если Ася обошла Басю (обозначим это А $>$ Б), а Бася — Васю (Б $>$ В)? Никак, если А $>$ Б и Б $>$ В случились в одном и том же турнире. Такое совпадение может случиться, и даже случится обязательно: ведь турниров с А $>$ Б и турниров с Б $>$ В в сумме больше 100%, значит, некоторые турниры сосчитаны дважды. Но пусть таких совпадений меньше половины! Тогда ничего не мешает потребовать, чтобы в остальных турнирах Вася обошёл Асю (В $>$ А). Устроим теперь три турнира: I, II и III. Потребуем, чтобы выполнялись условия А > Б в турнирах I и II, Б > В в турнирах II и III, В > А в турнирах I и III. Порядок для Аси, Баси и Васи везде определится однозначно, и мы получим пример из решения.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.6. Могут ли и сумма, и произведение нескольких натуральных чисел быть равными 99?

Задача 1.7. В цирке 10 силачей вынесли на арену на руках по циркачке, каждая легче того, кто её нёс. Потом эти циркачки унесли с арены каждая по силачу. Могло ли случиться, что

а) каждая циркачка несла силача легче себя;

б) девять из этих циркачек несли силачей легче себя?

Задача 1.8. Можно ли в квадрат со стороной 1 поместить несколько неперекрывающихся квадратов

а) с суммой периметров 100; б) с суммой площадей 100?

Задача 1.9. Некоторой фирмой руководят директор и три заместителя. Каждый месяц директор собирает заместителей на совещание и предлагает новый список зарплат для себя и заместителей. При этом заместители голосуют за или против списка (а директор не голосует). Известно, что заместитель голосует за, если лично его зарплата увеличивается и ничья зарплата не увеличивается в большее число раз, иначе он голосует против. Решение принимается большинством голосов. Может ли директор добиться, чтобы его зарплата стала в 10 раз больше, чем была, а все зарплаты заместителей уменьшились не менее чем в 10 раз?

Задача 1.10. а) В припортовой таверне пираты Боб и Иван состязались в изготовлении и употреблении крепких напитков. Боб изготовил коктейль из рома и джина, а Иван смешал водку с портвейном. Известно, что ром крепче водки, а джин крепче портвейна. Наутро Ивану было много хуже. Он подозревает, что его смесь оказалась крепче коктейля Боба. Могло ли такое случиться? (*Примечание*: *крепость — это процент спирта в смеси*.)

б) Имеется два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак, причём доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома.

Обязательно ли доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?

Ответы и решения

Задача 1.6. Ответ: может. Например, числа 9, 11 и 1, 1, ..., 1 (79 единиц).

Путь к решению. Кажется, что произведение натуральных чисел всегда больше суммы. Исключение только $2 + 2 = 2 \times 2$, но это нам не подходит?! Ах да, ещё произведение меньше суммы, когда один из двух сомножителей — единица. Но тогда, добавляя по единице, мы увеличиваем сумму и не меняем произведения. Так давайте как-нибудь разложим 99 на множители (сумма множителей будет меньше 99), а затем добавим столько единиц, сколько надо!

Задача 1.7. Ответ: а) нет; б) да.

а) Ясно, что общий вес силачей больше веса циркачек. А если бы каждая циркачка унесла силача легче себя, то общий вес силачей был бы меньше веса циркачек.

б) Выстроим всех артистов по убыванию веса. Пусть в строю строго чередуются силач — циркачка — силач — циркачка... Дадим каждому силачу нести следующую за ним циркачку. А затем пусть самая легкая циркачка унесёт самого тяжёлого силача, а каждая из остальных несёт следующего за ней силача. Тогда пара, где силач тяжелее циркачки, только одна.

Путь к решению. Кого труднее всего унести? Ясно, что самого тяжёлого силача (обозначим его С1). Он тяжелее всех, потому что он не легче обоих участников любой старой пары. Это ещё один способ доказать, что в пункте (а) ответ «нет». Хорошо, а второй по весу силач С2? Он тяжелее всех циркачек, кроме, быть может, Ц1, которую принёс С1. Чтобы условие пункта (б) выполнялось, придётся ей унести С2.

Точно также третьего по весу силача С3 придётся унести циркачке Ц2, которую принёс С2. Продолжая такие рассуждения, мы придём к примеру из решения как к единственно возможному.

Задача 1.8. Ответ: а) да; б) нет.

а) Разобьём квадрат на квадратные клетки со стороной 0,04. Сторона квадрата в 25 раз больше стороны клетки, поэтому клеток 25^2. Периметр клетки равен $4 \times 0{,}04 = 0{,}16$, а сумма периметров равна $25^2 \cdot 0,16 = 100$.

б) Сумма площадей неперекрывающихся частей должна быть не больше площади большого квадрата, то есть не больше 1.

Путь к решению. б) При уменьшении длины квадратика вдвое его периметр тоже уменьшится вдвое, а площадь — вчетверо. Значит, можно будет уложить в исходном квадрате вчетверо больше таких квадратиков, и сумма периметров увеличится в $4 : 2 = 2$ раза. Поскольку нам надо увеличить сумму периметров с 4 до 100, то есть в 25 раз, надо брать квадратики в 25 раз меньшего размера.

Задача 1.9. Ответ: может.

Обозначим заместителей А, Б и В. В первый месяц директор повышает себе зарплату в 2 раза, А и Б — в 3 раза, а В — уменьшает в 100 раз. А и Б за, В — против, но предложение проходит. Во второй месяц директор снова повышает себе зарплату в 2 раза, А и В — в 3 раза, Б — уменьшает в 100 раз. В третий месяц директор повышает себе зарплату в 2,5 раза, Б и В — в 3 раза, а А — уменьшает в 100 раз. В итоге зарплата директора увеличилась в $2 \cdot 2 \cdot 2{,}5 = 10$ раз, а зарплаты заместителей составили $3 \cdot 3 \cdot 0{,}01 = 0{,}09$ от исходной.

Путь к решению. Хотя повышать придётся двоим из трёх, можно это делать по очереди и один раз скомпенсировать два повышения одним большим понижением (опять игрок и казино).

Задача 1.10. Ответ: а) могло; б) не обязательно.

а) Пусть был ром $55°$, водка $40°$, джин $35°$ и портвейн $20°$. Если смешать девять частей водки с одной частью портвейна, то крепость смеси разделит отрезок $[20°, 40°]$ в отношении $9 : 1$, то есть будет составлять $38°$. Аналогично, смешав девять частей джина с одной частью рома, получим коктейль крепостью 37°.

б) Пусть в первом подъезде первого дома (в Д1п1) было 11 кошек и 9 собак, тогда доля кошек там $11 : 20 = 55\%$; в Д1п2 — 63 кошки из 180 животных, доля $63 : 180 = 7 : 20 = 35\%$; в Д2п1 — 18 кошек из 45 животных, доля $\frac{18}{45} = \frac{2}{5} = 40\%$; в Д2п2 – одна кошка из пяти животных, доля 20%. Нужные неравенства долей между подъездами выполнены. Однако всего в Д1 74 кошки из 200 животных, доля 37%; а в Д2 19 кошек из 50 животных, доля 38%, что больше, чем в Д1.

Путь к решению. а) Заметим, что про неравенство между крепостями джина и водки ничего не сказано. Мы можем выбрать водку крепче джина и сделать смесь Ивана почти такой же крепкой, как водка, а коктейль Боба почти таким же крепким, как джин. Это нам даст нужное неравенство между крепостями смесей. Нужные цифры для крепостей и пропорций легко подбираются.

б) При решении пункта а) интуиция у нас работала, поскольку некоторое представление о том, как при смешивании меняется крепость (сладость, температура и т. п.), у нас есть из жизненного опыта. Увы, про доли животных опыт ничего не говорит. Так переведём непонятные «доли кошек» в уже разобранную «крепость». Поставим в соответствие подъездам первого дома ром и джин, а второго — водку и портвейн. Сделаем в каждом подъезде долю кошек равной крепости соответствующих напитков. Не меняя долей, изменим общее число животных, чтобы пропорции между подъездами были такими, как при смешивании в пункте (а). И смотрите: пример готов!

Идеология

Задачи с конструкциями на «много-мало» очень популярны в кружках для младших школьников. Их и придумывать легко. Берётся ситуация, где есть две несовпадающие величины (например, площадь и периметр фигуры). Обычно эти величины меняются согласованно: если растёт одна, то растёт и другая. К этому привыкают, и рассогласование начинают считать невозможным, а требование рассогласования — противоречием. Только противоречие это на самом деле мнимое. Научиться выявлять такие противоречия и преодолевать их важно не только в математике, но и в технике. Именно так и появились парусная яхта, идущая против ветра, или аппарат тяжелее воздуха, умеющий летать.

Итак, чтобы решить задачу на «много-мало», надо сначала выявить *мнимое противоречие* (типичный пример — «противоречие» между игроком и казино). Отсюда и вытекают советы, которые можно дать ученикам.

1. Прежде всего выявите «*согласованные*» величины.

2. Поверьте, что рассогласованность бывает, и задайте себе вопрос: «Как такая несогласованность может быть?»

3. Найти рассогласованность обычно мешает *инерция мышления*: пока вы остаётесь в кругу *привычных примеров*, согласование сохраняется. Постарайтесь понять, *где вы сами на себя накладываете ограничения*.

4. Если всё ещё не получается, приступайте к планомерной осаде. Попробуйте придумать, как величины могут вести себя «*не очень согласованно*». Первое, что важно понять: можно ли сохранять одну из величин неизменной, а другую при этом менять? Если же и такое сразу не получается, начните ещё раз издалека: выясните, можно ли менять конструкцию так, чтобы одна величина менялась *быстрее* другой. Если удалось, попробуйте понять, от чего зависит бóльшая или меньшая согласованность.

Можно также использовать задачи 6.4, 7.5, A2, A7, A8, A11, A12, A18, B4, B9, B11, B17, B19, B32, C2, C4, C10, C15, C24, D6, D10.

Занятие 2

Поиск перебором

— Алё, Вася, у меня машина заглохла!
— Ты дверцей хлопнуть пробовала?
— Да.
— А дворниками пошевелила?
— Да.
— А шины попинала?
— Да.
— Ну тогда я не знаю...

Цель занятия — научить школьников применять перебор правильно. Во-первых, школьник должен научиться определять, где перебор нужен, а где нет (важно и то, и другое: избыточный перебор одной половины учащихся заметно досаждает учителю; недостаточный или не проведённый перебор другой половины учащихся тормозит их развитие). Во-вторых — надо учить перебирать эффективно и излагать перебор компактно и понятно.

Занятие лучше вести как обсуждение представленных школьниками решений. Прежде всего научите их понимать, где в решении надо *излагать* перебор, а где — не надо. Если достаточно одного примера (скажем, при вопросе «Можно ли»), излагаем только пример без перебора. При задании «Найдите всё...» или ответе «Нет» на вопрос «Можно ли» придётся излагать полный перебор. Попросите школьника выписать краткий ответ на доске, а затем спросите класс — нужно излагать перебор или нет?

Перебор, который излагается, должен быть полным. Попросите начать изложение со списка всех случаев. Подскажите компактные обозначения: при длинном переборе без них не обойтись. Стоит обсудить, почему в списке представлены *все* возможные случаи. Если есть пропущенные случаи, надо об этом сказать и попросить школьников обнаружить их самостоятельно. Важно подчеркнуть, что надо включать в список даже те случаи, которые не дают вклада в ответ: полное решение должно включать в себя их разбор и отсев. Важно отметить те свойства, которые помогли сократить перебор. Полезно спросить учеников, нет ли у них решений, где перебор существенно короче. Полезно показать и своё короткое решение, обратив внимание на способы сокращения перебора. Важный приём: перебор не отдельных случаев, а групп (схем, картинок со взаимным расположением и т. п.).

О переборе, который *не* включается в решение, полезно поговорить после того, как решение (*пример*) изложено и одобрено. Его надо предварить словами: «Вот Вася рассказал нам свое решение, оно верно, на олимпиаде больше ничего писать не надо. Но нам с вами интересно узнать, каким путём Вася *нашёл* это решение». Здесь уже важна не полнота, а эффективность, умение рассматривать случаи, ведущие к примеру, в первую очередь. Обращайте внимание на полезные нестрогие соображения, позволяющие быстрее добраться до примера.

Задача 2.1. Существует ли трёхзначное число, которое в 20 раз больше своей суммы цифр?

Ответ: да, например 180.

Решение. $180 = 20 \cdot (1 + 8)$.

Путь к решению. Заметим, что искомое число делится на 20. Среди чисел от 1 до 999 таких всего 49, а среди трёхзначных — всего 45. Перебрать их можно за 10 минут — в условиях олимпиады время пренебрежимо малое. Поехали:

$$100 \neq (1 + 0 + 0) \cdot 20,$$
$$120 \neq (1 + 2 + 0) \cdot 20,$$
$$140 \neq (1 + 4 + 0) \cdot 20,$$
$$160 \neq (1 + 6 + 0) \cdot 20,$$
$$180 = (1 + 8 + 0) \cdot 20.$$

Нам повезло: мы нашли пример уже на пятом числе.

Задача 2.2. На границе квадрата отметили три точки, соединили их отрезками и по ним разрезали. В результате квадрат распался на четыре треугольника. Какое наибольшее число из этих треугольников могут оказаться равными?

Ответ: два треугольника.

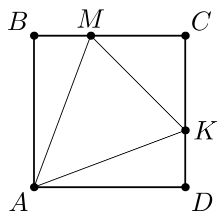


Рис. 1

Решение. Обоснуем *картинку*. Если бы на какой-то стороне квадрата $ABCD$ или в её концах не было отмеченных точек, то эта сторона вошла бы в четырёхугольную или пятиугольную часть. Значит, *три* отмеченные точки лежат на четырёх сторонах, то есть какая-то из точек попала в вершину квадрата. Пусть это точка A (см. рис. 1). Тогда две остальные точки могли попасть только на стороны BC и CD.

Пример. Если картинка симметрична относительно диагонали AC, то есть два равных треугольника — ABM и ADK.

Оценка. Докажем, что более двух равных треугольников быть не может. Средний треугольник AMK не может быть равен крайнему, так как в нём хотя бы две стороны (AM и AK) больше стороны квадрата, а у крайнего такая сторона максимум одна – гипотенуза. Кроме того, крайний треугольник MCK не равен двум другим крайним треугольникам, поскольку у них есть катет, равный стороне квадрата, а у MCK оба катета меньше стороны квадрата.

Путь к решению. Перебор возможных картинок был сведён к единственному случаю за счёт замеченного *свойства*: отмеченные точки должны быть на каждой стороне квадрата. Отсечение возможных случаев равенства треугольников было сокращено за счёт сравнения *самых длинных сторон* треугольников. Фактически был применён *принцип узких мест* (см. занятие 5).

Задача 2.3. Расставьте числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 в таблицу 3×3 так, чтобы суммы чисел в любом ряду из трёх клеток (по вертикали, горизонтали или диагонали) были одинаковы.

Ответ: (единственный с точностью до поворотов и симметрии):

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Решение. Сумма всех чисел равна 45, значит, сумма чисел в каждой из трёх строк — по 15, но тогда в столбцах и на диагоналях — тоже. Сложив четыре ряда, проходящие через центр, — вертикаль, горизонталь и две диагонали, — получим 60. Но в эту сумму все числа таблицы вошли по разу плюс ещё три раза центральное число.

Значит, в центре стоит 5. Число 9 может быть: 1) в углу; 2) в середине стороны.

Случай 1. Есть только *две* клетки не в одном ряду с 9: соседи противоположного угла. Значит, из *трёх* чисел 6, 7, 8 какое-то стоит в одном ряду с 9. Вместе с третьим числом этого ряда сумма выйдет больше 15. Противоречие.

Случай 2. Пусть 9 стоит слева от 5 (остальные случаи получаются из этого поворотами). Тогда 1 — напротив 9. Сумма остальных двух чисел на левом краю равна шести. Это могут быть только 2 или 4. Случаи «2 над 9» и «2 под 9» симметричны относительно средней горизонтали. Напротив 2 стоит 8, напротив 4 стоит 6, тогда положения цифр 3 и 7 определены однозначно.

Комментарий. Такая таблица с равными суммами по всем рядам (но не обязательно с последовательными или даже целыми числами) называется *магическим квадратом*. Существуют магические квадраты всех размеров начиная с трёх, заполненные последовательными числами.

Задача 2.4. В ряд слева направо лежат карточки с надписями «Один», «Два», «Три», «Четыре», «Пять», «Шесть», «Семь», «Восемь», «Девять». Петя подчеркнул девять разных букв, по одной в каждой надписи. Затем он поменял местами две карточки. Могли ли в результате все подчёркнутые буквы расположиться так, что каждая следующая справа будет стоять в алфавите дальше предыдущей?

Ответ: нет.

Решение. В слове «Один» самая близкая буква (к началу алфавита) — *Д*, а самая далекая в «Два» — тоже *Д*. Значит, первые две карточки должны изменить взаимное расположение. Это можно сделать либо поменяв их друг с другом, либо поменяв «Один» с карточкой, где есть буква ближе *Д*: с «Восемь» или «Девять». В любом случае в карточке на втором месте будет отмечена минимум буква *Д*, тогда в «Три» — минимум *И*, в «Четыре» — минимум *Р*, в «Пять» — минимум *Т*, в «Шесть» — минимум

$Ш$, в «Семь» — минимум $Ь$. На восьмом месте лежит либо «Восемь», либо поменявшаяся с ней карточка «Один». Но ни в одной из этих карточек нет букв дальше $Ь$.

Задача 2.5. Дан шестизначный номер: 123556. Не меняя порядка цифр, расставьте знаки действий и скобки так, чтобы в результате получилось 100.

Ответ: $(-1+2+3)(-5+5\cdot 6) = 1\cdot 2 : 3\cdot 5\cdot 5\cdot 6 = 100$.

Путь к решению. Проще всего получить 100 как произведение. С этого и надо начать. С точностью до перестановки множителей есть 4 способа разложить 100 на два меньших сомножителя: $2\cdot 50 = 4\cdot 25 = 5\cdot 20 = 10\cdot 10$. Попробуем получить какой-то сомножитель из нескольких начальных цифр. Если использовать не более трёх цифр, то есть такие варианты: $1\cdot 2 = 1-2+3 = 2$, $-1+2+3 = 12 : 3 = 4$, $-1+2\cdot 3 = 5$. Теперь достаточно из трёх последних цифр получить 50, 25 или 20 (впрочем, 50 можно получать и из четырёх последних цифр). Зная, что искать, нетрудно получить $-5+5\cdot 6 = 25$. Психологически сложнее найти второе решение: надо догадаться, что можно получить множитель 2, разделив 6 на 3 (и при этом **не меняя порядка цифр**)!

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.6. Найдите все решения ребуса

$$\text{ПЕ} \times \text{РЕ} = \text{БОР}.$$

Задача 2.7. Петя на несколько лет младше Васи, но в 2012 году каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. В каком году родился Петя, а в каком — Вася?

Задача 2.8. Из четырёх монет одна фальшивая — отличается по весу (но неизвестно, в какую сторону), а остальные весят одинаково. Как найти фальшивку за два взвешивания на весах с двумя чашками без гирь?

Задача 2.9. Можно ли на клетчатую доску 4×4 поставить ферзя, двух коней и двух ладей так, чтобы каждая фигура побила ровно одну другую и была побита ровно одной другой?

Задача 2.10. Существует ли десятизначное число, у которого первая слева цифра равна числу единиц в записи этого числа, вторая — числу двоек, третья — числу троек, четвёртая — числу четвёрок, ..., девятая — числу девяток, десятая — числу нулей?

Можно также использовать задачи 6.10, 7.2, 7.3, 7.7, 7.9, A3, A9, A10, A14, A15, A17, A24, A26, B5, B12, B16, B20, B21, B23, B24, B29, C7, C12, C14, C19, C21, C26, C27, D4, D11.

Ответы и решения

Задача 2.6. Ответ: $12 \times 42 = 504$, $14 \times 64 = 896$, $39 \times 19 = 741$.

Число Е $\times$ Е оканчивается на Р $\neq$ Е, поэтому Е $= 2$, 3, 4, 7, 8 или 9, а Р $= 4$, 9, 6, 9, 4 или 1 соответственно. Переберём эти 6 случаев.

Случай 1. П2$\times$42 $=$ БО4. Но П2 $< \dfrac{1000}{42} < 30$ и П $\neq 2$, значит, П $= 1$. Получаем $12 \times 42 = 504$ — подходит.

Случай 2. П3$\times$93 $=$ БО9. Но П3 $\geqslant 13$, поэтому П3$\times$93 $\geqslant 13 \cdot 93 > 1000 >$ БО9. Решений нет.

Случай 3. П4 $\times$ 64 $=$ БО6. Но П4 $< \dfrac{1000}{64} < 20$, значит, П $= 1$. Получаем $14 \times 64 = 896$ — подходит.

Случай 4. П7$\times$97 $=$ БО9. Но П7 $\geqslant 17$, поэтому П7$\times$97 $\geqslant 17 \cdot 97 > 1000 >$БО9. Решений нет.

Случай 5. П8 $\times$ 48 $=$ БО4. Но П8 $< \dfrac{1000}{48} < 28$, значит, П $= 1$. Но $18 \times 48 = 864$ — не подходит, так как Б $\neq$ Е $= 8$.

Случай 6. П9 $\times$ 19 $=$ БО1. Но П9 $< \dfrac{1000}{19} < 59$ и П $\neq 1$. Проверим случаи П $= 2$, 3 и 4:

6–1) $29 \times 19 = 551$ — не подходит, так как Б $\neq$ О;

6–2) $39 \times 19 = 741$ — подходит;

6–3) $49 \times 19 = 901$ — не подходит, так как Б $\neq$ Е $= 9$.

Путь к решению. Повторение букв Е и Р создаёт *узкое место*, поэтому разумно перебирать именно значения Е. Перебор сокращается за счёт того, что произведение трёхзначно. Обратите внимание на то, как мы заранее предъявляли список случаев или подслучаев.

Задача 2.7. Ответ: Вася родился в 1987 году, Петя — в 2005 году.

Поскольку самая большая сумма цифр за последние 2000 лет случилась в 1999 году, Васе исполнилось не более 28 лет, то есть он родился не позднее $2012-(1+9+9+9) = 1984$ года. Будем проверять десятилетиями, обозначая через x последнюю цифру года рождения.

1. Если год рождения $198x$, то $1980+x+(1+9+8+x) = 2012$, откуда $x = 7$. Вася мог родиться в 1987 году.

2. Если год рождения $199x$, то $1990+x+(1+9+9+x) = 2012$, а значит, $2x = 3$, что невозможно.

3. Если год рождения $200x$, то $2000 + x + (2 + 0 + 0 + x) = 2012$, откуда $x = 5$. Вася или Петя могли родиться в 2005 году.

4. Если год рождения $201x$, то $2010+x+(2+0+1+x) = 2012$, а значит, $2x = -1$, что невозможно.

Замечание. Узнав, что год рождения — от 1984 до 2011, мы могли и просто перебрать эти 28 вариантов.

Задача 2.8. Положим на чаши весов по одной монете. Возможны два случая.

1. Равновесие. Значит, обе монеты на весах хорошие. Заменим монету на левой чаше на одну из отложенных. Если равновесие, то все монеты на весах хорошие, и фальшивой является единственная не взвешенная монета. При неравновесии фальшива монета, положенная на весы.

2. Неравновесие. Значит, обе не взвешенные монеты хорошие. Заменим одну из монет на весах на отложенную. При равновесии обе монеты на весах хорошие, значит, фальшива снятая монета. При неравновесии фальшива та монета, что оба раза была на весах.

Путь к решению. Мы можем первым взвешиванием положить на чаши весов по одной монете или по две. Результат взвешивания по две заранее понятен: будет неравновесие. При этом, поскольку мы не знаем, тяжелее фальшивка или легче, мы мало что узнаем. Поэтому лучше начать перебор со взвешивания по одной монете. Возможны два случая.

1. Равновесие. Значит, обе монеты на весах хорошие, а фальшивка находится среди отложенных. Поэтому при втором взвешивании отложенные монеты не надо класть на одну чашу, иначе мы их не различим. Но и между собой их сравнивать нет смысла: мы узнаем, которая легче, но это ничего не даст. Остаётся сравнить одну из отложенных монет с одной из взвешенных. Это срабатывает (см. выше).

2. Неравновесие. И в этом случае есть пара монет, среди которых фальшивка, и пара хороших монет. Находим фальшивку, как и в предыдущем случае.

Замечание. Полным перебором можно доказать, что если в первый раз взвесить по две монеты, то вторым взвешиванием уже нельзя будет найти фальшивку наверняка.

Задача 2.9. Можно, например так (см. рис. 2).

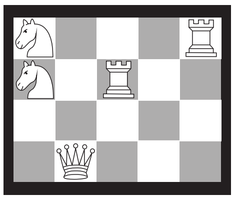


Рис. 2

Путь к решению. Разберёмся прежде всего, кто кого бьёт. Заметим, что либо (1) две фигуры бьют друг друга, а остальные три бьют друг друга по кругу, либо (2) пять фигур бьют друг друга по кругу. В случае (1) тройка не может состоять из трёх разных фигур, иначе двойка состояла бы из коня и ладьи, а они не могут бить друг друга. Но тогда в тройку входят две одинаковые фигуры. Они бьют друг друга, и третья фигура их бить не может. Противоречие показывает, что случай (1) невозможен.

В случае (2) все побития не симметричны: если фигура А побита фигурой Б, то фигура Б не побита фигурой А. Значит, одинаковые фигуры друг друга не бьют. Кроме того, ладья не бьёт ферзя (иначе ферзь бы её тоже побил). Значит, ферзя бьёт конь. Теперь круг однозначно восстанавливается (стрелка указывает, кто кого бьёт):

$$\text{ферзь} \Rightarrow \text{ладья1} \Rightarrow \text{конь1} \Rightarrow \text{ладья2} \Rightarrow \text{конь2} \Rightarrow \text{ферзь}.$$

Ясно, что ферзь бьёт ладью по диагонали. Теперь уже нужная расстановка находится несложным перебором. Например, так.

Ослабим условия: вместо того чтобы *вписывать фигуры в рамку* будем расставлять их на большой доске, но так, чтобы можно было потом *описать рамку*. Это позволит лучше использовать симметрию.

Начнем с *узкого места*: ферзя и побитой им ладьи1. Между ними по диагонали может быть 0, 1 или 2 клетки.

Случай 0. Ферзь и ладья1 рядом. С точностью до симметрии относительно диагонали, поле для коня2 единственное (см. рис. 3а). Конь1 побит ладьёй1. Есть всего два таких поля, где он не бьёт ферзя, не побит ферзём и другим конём и вместе с остальными фигурами помещается в рамку. Но поле 1 задаёт рамку, где кони стоят в противоположных углах, и тогда побитая конём1 ладья не побьёт коня2. А выставив коня1 на поле 2, получим, что побитая им ладья2 может побить коня2 только с поля, побитого ферзём.

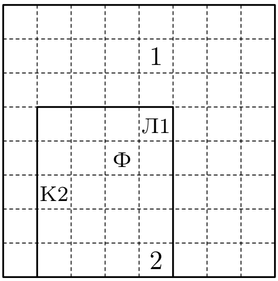


Рис. 3а

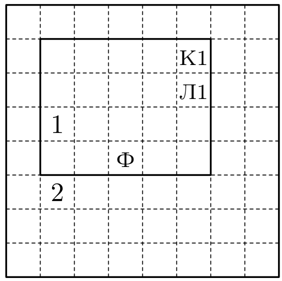


Рис. 3б

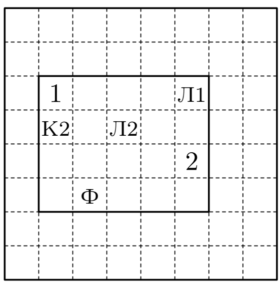


Рис. 3в

Случай 1. Между ферзём и ладьёй1 одно поле по диагонали. С точностью до симметрии относительно диагонали, для коня2 есть всего два подходящих поля, они отмечены цифрами 1 и 2 на рис. 3б. Тогда для коня1 есть единственное подходящее поле (для обеспечения рамки и побитий). Теперь рамка задана однозначно, и конь2 должен встать на поле 1, после чего в рамке не останется подходящих полей для ладьи2.

Случай 2. Между ферзём и ладьёй1 два поля по диагонали. С точностью до симметрии относительно диагонали, для коня2 есть всего одно поле, после чего рамка задана (см. рис. 3в). Теперь подходящее поле для ладьи2 только одно, а вот для коня1 есть два таких поля — 1 и 2, что даёт *два решения* задачи.

Задача 2.10. Да, например число 2100010006.

Путь к решению. Достаточно заметить, что а) число полностью задаётся своим набором цифр и б) сумма цифр числа (и набора) равна 10 (поскольку количество цифр 0 + количество цифр 1 + ... + количество цифр 9 равно общему количеству цифр). Давайте *наборы* цифр писать так, чтобы каждая следующая цифра была не больше предыдущей. Выпишем наборы как десятизначные числа по убыванию:

$$9100000000, 8200000000, 8110000000, 7300000000,$$
$$7210000000, 7111000000, 6400000000, 6310000000,$$
$$6220000000, 6211000000, 6111100000, \ldots$$

Для каждого набора выпишем соответствующее число: на первом месте число единиц, на втором — число двоек и т. д. Например, для 7111000000 выпишем 3000001006 (впрочем, выписывание можно было прервать после первой цифры, поскольку троек в наборе нет). Первый подходящий набор — это 6211000000, он даст число 2100010006.

Замечание. Это решение единственно. Мы перебрали все случаи с шестью и более нулями. Покажем, что менее шести нулей быть не может. Иначе есть не менее пяти ненулевых цифр. Среди них как минимум четыре стоят не на последнем месте, значит, в числе есть как минимум четыре *различные* ненулевые цифры. Их сумма не больше 10, значит, это 1, 2, 3 и 4, но вместе с пятой ненулевой цифрой их сумма больше 10 — противоречие.

Занятие 3

Преодолеть инерцию мышления

— Вот не везёт: под Новый год
полдня ходил по лесу с топором,
но так и не нашёл наряженную ёлку...

Помешать решить задачу может не только отсутствие знаний и навыков. Часто мешают и невидимые барьеры, созданные самими решающими. Цель занятия — научить осознавать такие барьеры и, преодолев их, все-таки решить задачу.

Форма занятия аналогична занятию 1: первые задачи обсуждаются совместно. Следующие задачи ученики решают самостоятельно, а учитель выслушивает решения индивидуально. Если на какой-то задаче многие застряли, её тоже стоит обсудить совместно.

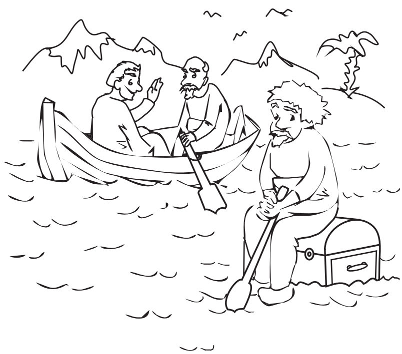
При обсуждении прежде всего заставьте учеников поверить, что пример существует. Далее, как и на занятии 1, помогает анализ. При поиске *какого-нибудь* примера начинают перебор с «удобных мест». С таких мест надо начать и тут, и убедиться, что в них решения нет. Вот теперь показывайте, что делать дальше: надо расширять список вариантов, по возможности до полного. Инерция мышления проявляется в том, что ключевой вариант пропускают либо не подозревают, что вариантов более одного. Покажите, как избежать таких пропусков. Объясните «метод Шерлока Холмса»: надо отбросить все невозможные случаи, тогда *последний вариант* окажется возможным, каким бы невероятным он ни казался.

Задача 3.1. В двух кошельках лежат две монеты, причём в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Как такое может быть?

Решение. В одном кошельке лежит монета и другой кошелёк с монетой.

Путь к решению. Если в одном кошельке одна монета, то в другом две. Всего получается три, следовательно, какая-то монета сосчитана дважды. Значит, она лежит сразу в двух кошельках. Такой вариант кажется невероятным, пока не поймёшь, что один кошелек должен лежать в другом.

Задача 3.2. Три человека с сундуком хотят переправиться через реку. Лодка вмещает трёх человек или двух человек и сундук. Беда в том, что сундук тяжелый, погрузить его в лодку или вытащить из нее можно только втроём. Как им всё-таки всем переправиться, не оставив и сундук?



Решение. Трое грузят в лодку сундук, затем двое с сундуком плывут на другой берег, один с сундуком возвращается, сажает в лодку оставшегося, они плывут на другой берег и втроём выгружают сундук.

Путь к решению. *Как такое может быть?* Чтобы переправить сундук, надо его сразу погрузить в лодку. Если с сундуком поплывёт один человек, то выгрузить его он не сможет и ему придётся бесславно вернуться... Трое с сундуком плыть не могут — не хватит места. Остаётся только послать двоих. Но ведь они выгрузить не смогут! — Да, придётся везти сундук назад. Но ведь возвращаться не обязательно вдвоём, один может остаться на другом берегу...

Задача 3.3. В ряд выписаны четыре числа, первое равно 100. При делении первого числа на второе, второго — на третье, третьего — на четвёртое в частном получаются простые числа. Могут ли все эти три простых числа быть различными?

Решение. Могут, например для ряда 100, 50, 10, $\frac{10}{7}$. $100 : 50 = 2$, $50 : 10 = 5$, $10 : \frac{10}{7} = 7$.

Путь к решению. Кажется, что все частные должны быть делителями числа 100, а значит, быть равными 2 или 5. Действительно, ведь если ряд состоит из 100, a, b, c, то $100 = \frac{100}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot c$. И это действительно было бы разложение на множители, если бы мы точно знали, что c целое. Но этого в условии не написано. А делением на нецелое получить третье простое не проблема...

В этой задаче намеренно поставлена *ловушка*: нарочно упомянуты несколько целых чисел, да и простые числа наводят на мысль о разложении целых чисел на множители. Но чаще такие ловушки возникают случайно, когда читатели массово интерпретируют задачу не так, как хотел составитель. Приучайте учеников тщательно перечитывать условие!

Задача 3.4. Прорежьте в тетрадном листке дыру, в которую смогли бы пролезть вы сами.

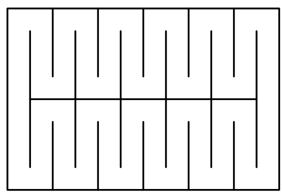


Рис. 4

Решение. Сделаем разрезы и надрезы как на рис. 4 (удобно резать от краёв, предварительно сложив лист вдвое по длине. Прорези как бы образуют стенки лабиринта, и по нему идёт замкнутый путь, в 12 раз превышающий длину меньшей стороны листа, то есть не менее $15 \cdot 12 = 180$ см. Аккуратно, чтобы не порвать, растянем этот путь в «кольцо». Диаметр кольца будет около 60 см, что вполне достаточно даже для взрослого.

Путь к решению. Сначала кажется, что если натянуть верёвку вдоль края листа, то придётся пролезть и сквозь это слишком узкое кольцо. Но что мешает удлинить верёвку, разрешив ей заходить внутрь листа? Так ведь тогда придётся делать разрезы и от края?! Именно так и сделаем...

Задача 3.5. Нарисуйте шестиугольник и, проведя прямую через две его вершины, отрежьте от него семиугольник.

Решение. См., например, рис. 5.

Путь к решению. Сначала это кажется невозможным: у отсечённой части будет меньшее или равное число сторон, так как отрезок между вершинами пройдёт внутри или по границе многоугольника. А почему, собственно? Это ведь мы себе представили выпуклый многоугольник. А у невыпуклого прямая может пройти и снаружи (скажем, между концами лучей звёздочки). М-да, не очень помогает, так ничего не отсечёшь... Стоп, а не может ли отрезок пройти *частью* внутри, а *частью* снаружи? Тогда в пересечении может получиться ещё одна сторона, и если сохранить, хотя бы частично, все остальные стороны, то как раз образуется многоугольник с семью сторонами...

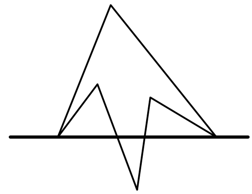


Рис. 5

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.6. Учитель положил перед учеником развёрнутый листок и спросил, сколько кружков на нем видно. «Три», — ответил ученик. Учитель положил тот же листок перед другим учеником и задал тот же вопрос. «Семь» — ответил ученик. Оба ответили верно. Так сколько всего кружков нарисовано на этом листке?

Задача 3.7. Как можно из шести спичек сложить четыре треугольника со стороной в одну спичку каждый?

Задача 3.8. Как завязать на верёвке вот такой узел (см. рис. 6), если, взявшись двумя руками за концы верёвки, мы не можем их отпускать?

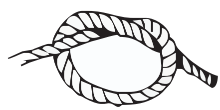


Рис. 6

Задача 3.9. Частное двух чисел равно их сумме. Может ли оно быть равно ещё и их произведению?

Задача 3.10*. Придумайте шестиугольник, который нельзя разрезать на два четырёхугольника.

Задача 3.11*. а) Как можно разместить четыре плоские буквы Т (см. рис. 7) в один слой в квадратной коробке со стороной 6?

б) А как можно разместить эти же четыре буквы в квадратной коробке меньшего размера?

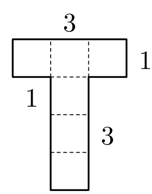


Рис. 7

Предупреждение.

О составе задач. К этому занятию невозможно составить *универсальную* подборку задач. Дело в том, что задачи на *инерцию мышления* выстреливают только раз. Они хорошо запоминаются и второй раз впечатления на школьников уже не производят. Данная подборка рассчитана на не самых опытных школьников. Если какие-то из этих задач вы уже давали своим школьникам или подозреваете, что школьники их знают, — обязательно замените их какими-то из *дополнительных* задач на эту тему. Вот список: 1.7, 1.10б, 5.6, 7.3, 7.5, A2, A6, A7, A13, A19, A20, A21, A25, A27, B3, B22, B25, B26, B27, B29, B31, B34, B35, C2, C10, C20, C25, C27, D5, D8, D12, D13, D14.

Ответы и решения

Задача 3.6. Ответ: 10.

На одной стороне листка нарисовано 3 кружка, на обратной — 7.

Задача 3.7. Ответ: да.

Сложим из спичек остов треугольной пирамиды (см. рис. 8).

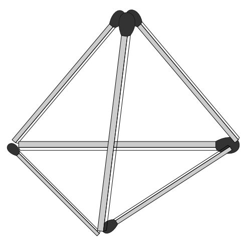


Рис. 8

Путь к решению. На плоскости это, конечно, не получится. Но кто нам запрещает выйти в пространство? А для устойчивости спички можно чуть склеить пластилином в точках соприкосновения...

Задача 3.8. Скрестим руки на груди, как бы завязав их узлом, и только после этого возьмёмся за концы веревки. Если теперь вернуть руки в нормальное положение, верёвка завяжется узлом.

Путь к решению. Интуитивно понятно (и математики-топологи умеют строго это доказывать), что если на кольце, образованном верёвкой, руками и телом человека, изначально не было узла, то он там и не появится. Поэтому *единственный вариант* — это создать узел на своем теле прежде чем взяться за верёвку. Невероятно, но для этого даже не надо быть акробатом!

Задача 3.9. Ответ: может, например $\frac{1}{2}$ и -1.

$$\frac{1}{2} : (-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{2}.$$

Путь к решению. Рассмотрим числа без знаков. Пусть при умножении результат увеличился, тогда при делении он уменьшится, и наоборот. Но результаты совпали, значит, делили и умножали на 1. Однако при прибавлении единицы результат точно увеличится. Значит, такая пара чисел невозможна? Постойте, мы забыли вернуть знаки. Тогда ещё есть *вариант*, что мы умножали и делили на -1. Остается понять, что умножение на -1 и прибавление -1 даёт одинаковый результат для числа $\frac{1}{2}$.

Комментарий. Казалось бы, для ученика, знающего алгебру, проблем быть не должно: написал систему и решил. Опыт показывает, однако, что большинство и детей, и взрослых с первого раза эту задачу решают неправильно!

Задача 3.10. Докажем, что шестиугольник на рис. 9а так разрезать нельзя. Узким местом является общее число сторон частей. Их должно стать 8. Они образуются из шести сторон шестиугольника (или их частей) и звеньев линии разреза. Каждое звено, не лежащее на пунктирных линиях, даёт две новые стороны (по одной в каждой из частей). Звено на пунктирной линии может продолжить одну из старых сторон, и тогда оно будет новой стороной только в одной из частей.

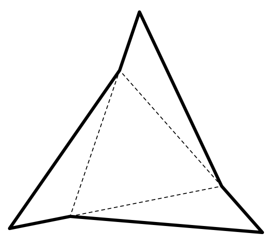


Рис. 9а

Так как должно быть добавлено две стороны, на линии разреза не более двух звеньев. Если их два, то оба они должны быть на пунктирных линиях, но тогда оба звена выходят из одной вершины шестиугольника, что невозможно. Значит, линия разреза — отрезок. Пунктирные отрезки не годятся — они отсекают треугольник. Значит, проведённый отрезок добавляет две новые стороны. Поэтому не должно появиться новых сторон за счёт деления старых сторон. Это значит, что концы отрезка лежат *в вершинах* шестиугольника. Части будут четырёхугольниками, только если концы отрезка — это противоположные вершины шестиугольника. Но все три таких отрезка включают в себя пунктирный отрезок, поэтому не годятся.

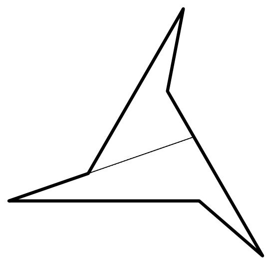


Рис. 9б

Путь к решению. Вначале кажется, что разбить на два четырёхугольника всегда можно, проведя диагональ между противоположными вершинами. Потом понимаешь, что в невыпуклом четырёхугольнике такая диагональ может пересечь другие стороны. Поскольку сторон шесть, а пар противоположных вершин — три, разумно поискать пример, переходящий в себя при повороте на треть оборота. Такой пример можно построить, он аналогичен решению задачи В26 (см. рис. 9б). Однако нас ждет неприятность: продолжение одной из сторон все-таки разбивает фигуру на два четырёхугольника. Разбираясь далее с возможной линией разреза, понимаем, что кроме диагонали подходит ещё продолжение стороны, упирающееся в другую сторону. Опять кажется, что разбить всегда можно! Но и такой разрез можно «убить»: не дадим ему упираться в сторону — пусть продолжение упрётся в вершину!

Задача 3.11[*]. а) На рис. 10а–в представлены три варианта.

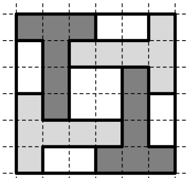


Рис. 10а

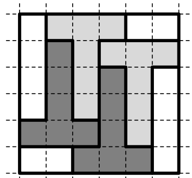


Рис. 10б

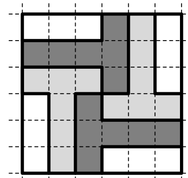


Рис. 10в

б) Можно. См. рис. 10г. То, что сторона квадрата меньше шести, легко проверить, сравнив площади двух квадратов. Заключим все четыре буквы во вспомогательный квадрат 6×6 по линиям сетки. Вне нарисованного квадрата, но внутри вспомогательного лежат четыре прямоугольных треугольника с катетами 1 и 3, а вне вспомогательного но внутри нарисованного — четыре меньших подобных им треугольника с гипотенузой 2. Значит, нарисованный квадрат меньше вспомогательного.

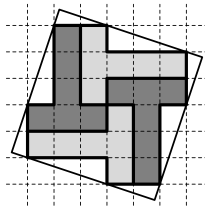


Рис. 10г

Путь к решению. Сначала кажется очевидным, что ответ «Нет». Действительно, должны быть накрыты 24 клетки, значит, размер квадрата не менее 5×5. В таком квадрате не накрыта всего одна клетка, значит, накрыты как минимум 3 угловые клетки, и две из них прилегают к одной стороне. Буква Т накрывает угловую клетку концом верхней перекладины, поэтому соответствующие буквы Т пересекутся.

Недостаток этого «доказательства» в неявном предположении, что мы накрываем квадрат *с целыми сторонами* и «*по клеткам*». Но действовать так нас побуждает инерция мышления, в условии такого не требуется. Поняв это, попытаемся заключить одну из конструкций в меньший квадрат, стороны которого не параллельны линиям сетки. И для третьей конструкции это удаётся!

Занятие 4

Редукция и разминка

Имею желание купить дом, но не имею возможности.
Имею возможность купить козу, но не имею желания.
Так пусть же наши возможности совпадут с нашими желаниями!

На этом занятии будем учить школьников сводить сложную задачу к более лёгкой вспомогательной задаче. Такое сведéние и называется *редукцией*. Если сложную задачу решить сразу не удаётся, можно сначала *размяться* на задаче попроще, а потом с накопленным опытом вернуться к сложной. Цель занятия: научить школьников правильно упрощать задачу. Для этого сначала учим их видеть связь между упрощённой и сложной задачами, а затем — самостоятельно формулировать упрощённую задачу.

В первых задачах более лёгкие пункты служат разминкой к более сложным. Тут лучше дать учащимся порешать самим, а при обсуждении решений обсудить связи между пунктами.

В задачах с целочисленным параметром универсальный совет: начать со случаев с *малыми* значениями параметра. При этом конструкция обычно строится и исследуется «руками» (например, недлинным перебором). Разминаться можно и на *удобных* значениях параметра. Пусть, например, надо доказать некоторый факт для произвольного треугольника. Посоветуйте для начала рассмотреть случаи, когда треугольник прямоугольный, равнобедренный или с углом в 60°.

Задача 4.1. а) Клетчатая доска 7×7 раскрашена в шахматном порядке так, что угловые клетки белые. Расставьте на ней 3 ладьи так, чтобы они побили все незанятые чёрные клетки.

б) Клетчатая доска 19×19 раскрашена в шахматном порядке так, что угловые клетки белые. Расставьте на ней

9 ладей так, чтобы они побили все незанятые чёрные клетки.

в) Клетчатая доска 19×19 раскрашена в шахматном порядке так, что угловые клетки белые. Расставьте на ней 10 ладей так, чтобы они побили все незанятые *белые* клетки.

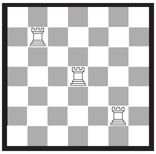


Рис. 11а

Решение. См. рис. 11а–в. Легко проверить, что на тех вертикалях, где нет ладей, клетки нужного цвета стоят как раз на тех горизонталях, где есть ладьи.

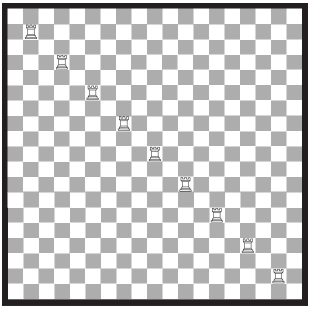


Рис. 11б

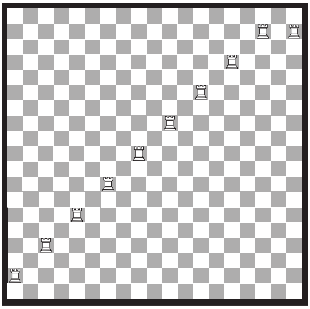


Рис. 11в

Путь к решению. а) Выгоднее ставить ладьи на те ряды, где чёрных клеток больше. На трёх вертикалях и на трёх горизонталях есть по четыре чёрные клетки. Присмотревшись, заметим, что эти шесть рядов покрывают все чёрные клетки. Значит, достаточно поставить три ладьи на пересечения этих рядов.

б) Задача (а) служит *разминкой* к (б), подсказывая идею ставить ладьи через одну по главной белой диагонали. Нетрудно доказать, что такая расстановка работает для любой доски нечётного размера. Мы располагаем ладей на всех чётных горизонталях и вертикалях. Каждая чёрная клетка будет побита, так как стоит на пересечении вертикали и горизонтали разной чётности.

в) Задача (б) служит *разминкой* к (в), подсказывая идею ставить ладьи через одну по диагонали противоположного цвета.

— Но у нас ведь нет главной диагонали чёрного цвета!

— Ничего, расставим по самой длинной из чёрных диагоналей. Через одну удастся расставить лишь девять ладей. Теперь посмотрим, какие белые клетки остались не побитыми. Они все лежат на одной вертикали, ладью можно поставить туда на любую клетку.

Задача 4.2. Разрежьте равносторонний треугольник а) на 4; б) на 16; в) на 25; г) на 1000 меньших равносторонних треугольников (не обязательно одинаковых).

Решение. а), б), в) См. рис 12а–в.

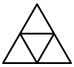


Рис. 12а

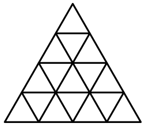


Рис. 12б

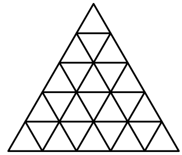


Рис. 12в

г) *Первый способ.* Пусть у нас есть разбиение на n равносторонних треугольников. Разрежем один из треугольников разбиения на 4 части. Тогда общее количество частей станет равным $n+3$. Начав с одного равностороннего треугольника и повторив операцию 333 раза, получим разбиение на 1000 треугольников.

Второй способ. Аналогично п. (в) разобьём треугольник на 100 одинаковых треугольных частей. Задача упростилась: теперь достаточно разбить каждую из частей на десять меньших треугольников. Пример такого разбиения можно получить, например, так: в разбиении на 16 частей дважды объединить 4 треугольника в один.

Комментарий. Первый способ опирается на то, что разность $1000-1$ кратна трём. Но не обязательно начинать с 1. Аналогично п. (в) мы для любого натурального n умеем разрезать на n^2 одинаковых треугольников. Поэтому 1000 можно получить и так: разрежем сначала на $31^2 = 961$ треугольник, а затем возьмём любые 13 частей и разрежем каждую из них на 4 треугольника.

Путь к решению. б) Разрежем на четыре равных треугольника, как в п. (а), а затем каждую из частей точно так же разрежем на 4.

в) Используем п. (а) и (б) как разминку: заметим, что фактически проведены прямые, параллельные сторонам и делящие другие стороны пополам (в п. (а)) или на 4 равные части (в п. (б)). А ведь это *метод*. Давайте такими прямыми разделим каждую сторону на 5 равных частей!

г) Применить приём из п. (в) не удастся: так может получиться лишь разбиение на n^2 одинаковых треугольников (если сторона малого треугольника в n раз меньше, то его площадь меньше в n^2 раз). Но ведь малые треугольники не обязаны быть одинаковыми... В п. (б) мы применяли разбиение частей на части, но сразу для всех частей. А что произойдёт с числом частей, если разрезать на 4 части только одну часть? А если *повторить* такую *операцию* несколько раз?

Комментарий. б) Применены два вида редукции: использован как *результат* (взято за основу разбиение на 4 треугольника), так и *метод* (увеличение числа частей в 4 раза) из п. (а).

в) Использована *разминка*: конструкции из п. (а) и п. (б) подсказали *метод* — разбивать равноотстоящими прямыми, параллельными сторонам.

г) *Метод* из п. (а) использован по-другому: для отдельного треугольника он даёт увеличение числа частей на 3.

Задача 4.3. Четырёхлетний Сёма умеет писать только цифры 4 и 7. Докажите, что он может написать число с любой суммой цифр, большей 17.

Решение. Нетрудно написать числа с суммами цифр от 18 до 21: 774, 7444, 44444, 777. Для больших сумм цифр делаем так: выписываем четвёрки, пока в первый раз не останется дописать цифры с суммой меньше 22. Оставшаяся сумма будет составлять 18, 19, 20 или 21 (если меньше, то у нас оставалось меньше 22 уже на предыдущем ходу). Выбираем нужное число из написанных выше и дописываем «в хвост». Например, чтобы получить сумму цифр 30, пишем 444..., осталось дописать сумму $(30-4-4-4)=18$, приписываем 774, получаем 444774.

Путь к решению. Начнём с *разминки*: подберём числа с маленькими суммами цифр: 18, 19, 20, 21, 22... Заметим, что из суммы 18 можно, дописав четвёрку, получить сумму 22, а из суммы 19 — сумму 23, и т. д. Поскольку у нас уже есть четыре суммы подряд, из них так можно получить любую бóльшую. Часто так и доказывают — идя «снизу вверх». Однако практически удобнее идти «сверху вниз» как в решении: тогда не надо размышлять, с какой из четырёх сумм начинать, — мы сами спустимся на нужную нам, не промахнувшись.

Комментарий. Мы осуществили *индуктивное построение*. Часто естественный путь к нему — это *цепочка редукций*. А разминка естественно дала нам *базу индукции*.

Задача 4.4. а) Найдите такой набор из пяти гирь, чтобы для каждой целой массы от 1 до 31 г можно было выбрать одну или несколько гирь набора с такой суммарной массой.

б) Найдите такой набор из шести гирь общей массой 60 г, чтобы для каждой целой массы от 1 до 60 г можно было выбрать одну или несколько гирь набора с такой суммарной массой.

Решение. а) Гири 1, 2, 4, 8 и 16 г.

Будем все массы указывать в граммах. Выпишем явно, как получить массы от 1 до 7:

$$1,\ 2,\ 2+1,\ 4,\ 4+1,\ 4+2,\ 4+2+1.$$

Для массы 8 есть гиря, а массы от 9 до 15 получаются прибавлением к гире массы 8 масс от 1 до 7. Для массы 16 есть гиря, а массы от 17 до 31 получаются прибавлением к гире массы 16 масс от 1 до 15.

б) Например, гири 1, 2, 4, 8, 16 и 29 г.

Массы от 1 до 31 получим, как в п. (а). Массы от 33 до 60 получаются прибавлением масс от 4 до 31 к гире массы 29.

Путь к решению. а) Прежде всего обратим внимание на то, что из пяти гирь можно выбрать ровно 31 непустое подмножество. Значит, массы всех этих подмножеств должны быть различны, и давать как раз указанные числа. В частности, массы всех гирь целые.

Рассмотрим все 15 подмножеств без самой тяжёлой гири Г. Выпишем их массы. Прибавляя к каждой массе массу Г, получим ещё один список. К этим двум спискам надо ещё добавить массу Г. Как должны быть устроены списки, чтобы при склеивании они дали последовательные числа? Ага, если гири без Г уже давали последовательные числа, то гири с Г тоже дадут последовательные числа. Выбрав массу Г следующим числом за первым списком, мы склеим списки в один последовательный список. Тем самым мы свели задачу к получению списка от 1 до 15 набором из 4 гирь. Её в свою очередь, сведём к трём гирям, затем — к двум, а потом — к одной. Останется только раскрутить процесс обратно!

б) Проанализируем процесс добавления гирь в задаче (а). Начиная с гири массы 1 мы на каждом шаге добавляли наименьшую целую массу, которую нельзя было получить уже имеющимися гирями. Попробуем и здесь действовать так же, но будем ещё следить за общим весом. К набору 1, 2, 4, 8, 16 можно добавить гирю не тяжелее 29 (иначе общий вес превысит 60). Именно гирю массы 29 и добавим, и всё сойдётся.

Комментарий. а) Сработала *редукция* к меньшему числу гирь. Можно ещё, заметив соответствие между списком масс и числом гирь, сделать *разминку* для 2 и 3 гирь и увидеть закономерность.

Степени двойки появились не случайно. Известно, что каждое число единственным образом представляется как сумма степеней двойки, и мы это фактически доказали.

б) *Редукция* к п. (а).

Задача 4.5. а) Сложите из доминошек 2×1 квадрат 8×8 так, чтобы не было точек, где уголками соприкасались бы четыре доминошки.

б) То же для прямоугольника 8×16.

в) Можно ли так сложить прямоугольник 8×60?

Решение. а), б) См. рис. 13а–б.

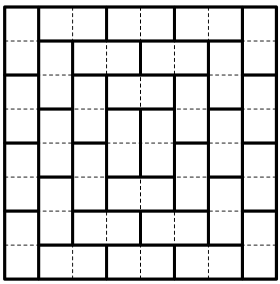


Рис. 13а

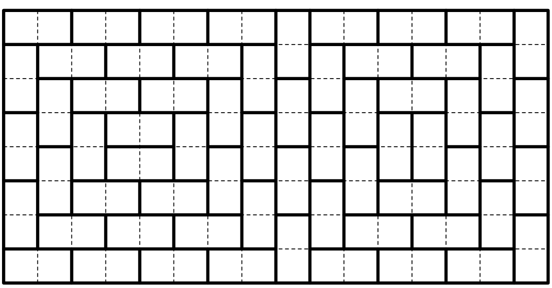


Рис. 13б

в) Можно. У прямоугольника 8×16 на рис. 13б есть три вертикальных разреза от края до края. Один из них делит наш прямоугольник на два таких блока-прямоугольника: 8×9 слева и 8×7 справа. Заметим, что если поменять блоки местами (не поворачивая), то линия стыка будет устроена точно так же, и соприкосновения четырёх доминошек уголками не возникнет. Значит, добавляя справа такие блоки в любом порядке (они всегда заканчиваются столбцом доминошек справа), можно строить более длинные прямоугольники высоты 8. Добавив ещё один блок длины 9 и ещё пять блоков длины 7, составим искомый прямоугольник длины 60.

Путь к решению. а) Разомнёмся на квадратах поменьше. Ясно, что их размер чётный. Несложный перебор даёт для квадрата 4×4 единственный вариант. Видим, что квадрат 2×2 в центре. Попробуем из квадрата 4×4 сделать квадрат 6×6, добавив каёмку. Получилось. Точно так же из квадрата 6×6 делаем квадрат 8×8.

б) Просто так два квадрата 8×8 друг к другу не приложишь: на стыке возникнут четвёрки доминошек с общей вершиной. Но, комбинируя блоки, дóлжно проявлять изобретательность. В нашем случае один из квадратных блоков можно сначала повернуть на 90°!

в) Из квадратов 8×8, чередуя обычные и повёрнутые, можно сложить длинные прямоугольники $8 \times 8k$. Но 60 на 8 не делится. Разминка на задаче (б) подсказывает искать более хитрую комбинацию блоков. Например, обратим внимание на то, что прямоугольник 8×16 состоит из прямоугольников 8×8 и 8×6, перемежаемых вертикальными полосками 8×1. Блоки 8×8 и 8×6 взаимозаменяемы. Выбирая часть блоков покороче, можем снизить длину 64 до длины 60.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.6. Докажите, что для любого $n > 5$ равносторонний треугольник можно разрезать на n меньших равносторонних треугольников.

Задача 4.7. а) Отметьте на плоскости 6 точек, которые нельзя зачеркнуть двумя прямыми, но любые 5 из этих точек так зачеркнуть можно.

б) Отметьте на плоскости 10 точек, которые нельзя зачеркнуть тремя прямыми, но любые 9 из них — можно.

в) Отметьте на плоскости 55 точек, которые нельзя зачеркнуть девятью прямыми, но любые 54 из них — можно.

Задача 4.8. Есть двухчашечные весы. При взвешивании груза гири можно класть на одну или на обе чаши весов.

а) Найдите набор из четырёх гирь, которыми можно уравновесить любой груз целого веса от 1 до 40 г.

б) Найдите набор из пяти гирь общим весом 100 г, которыми можно уравновесить любой груз целого веса от 1 до 100 г.

Задача 4.9. а) Путешественник приехал в гостиницу. Денег у него нет, но есть золотая цепочка из 7 звеньев. Он договорился платить хозяину по одному звену каждый день — ни больше, ни меньше. Какое наименьшее число звеньев надо раскрыть, чтобы такие платежи были возможны все 7 дней? (Хозяин может давать сдачу ранее полученными звеньями.)

б) Та же ситуация для цепочки с 23 звеньями и днями. Достаточно ли раскрыть два звена?

в) Та же ситуация для цепочки с 24 звеньями и днями. Достаточно ли раскрыть два звена? (*При раскрывании звена цепочка распадается на три куска*: *до звена*, *после звена и само звено*.)

Задача 4.10. Есть 64 монеты двух различных весов, монет каждого веса поровну. Как на чашечных весах без гирь гарантированно найти две монеты *разного* веса не более чем за шесть взвешиваний?

Можно также использовать задачи 1.10б, 2.10, 7.2, 7.4,7.7, 7.8, A1, A8, A18, A21, B6, B8, B9, B10, B14, B15, B17, B22, C3, C5, C6, C7, C9, C11, C12, C13, C15, C20, C26, D3, D5, D7, D9 , D10, D12, D14.

Ответы и решения

Задача 4.6. Примеры для $n = 6$, 7, 8 см. на рис. 14а–в.

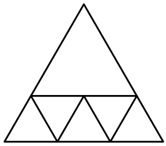


Рис. 14а

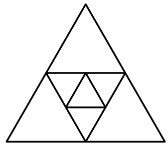


Рис. 14б

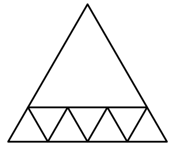


Рис. 14в

Далее заметим, что если мы умеем строить разбиение на k треугольников, то, разбив одну из частей на четыре треугольника, получим разбиение на $k + 3$ треугольника. Тем самым задача о разбиении на n треугольников сводится к задаче о разбиении на $n-3$ треугольника. Отнимая по три от любого натурального числа, большего 8, мы обязательно сведём задачу к уже решённой для $n = 6$, 7 или 8.

Путь к решению. Пример для $n = 6$ можно получить из разбиения на девять одинаковых треугольников, объединив четыре верхних треугольника в один. Аналогично пример для $n = 8$ получается объединением девяти треугольников.

Задача 4.7. а) Расположим точки в вершинах и серединах сторон равностороннего треугольника (см. рис. 15а). Если нижняя сторона не лежит на проведённой прямой, то три точки на этой стороне двумя прямыми не зачеркнёшь. Если же нижняя сторона лежит на проведённой прямой, то остальные три точки одной прямой не зачеркнёшь. Любые пять точек зачеркнуть двумя прямыми легко.

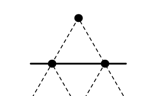


Рис. 15а

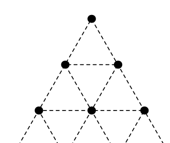


Рис. 15б

б) Расположим точки в вершинах сетки из правильных треугольников (см. рис. 15б). Есть три прямые с четырьмя точками каждая. Если какая-то из них не проведена, то точки на ней тремя прямыми не зачеркнуть. Если проведены все три прямые, то центральная точка останется не зачёркнутой. Значит, тремя прямыми зачеркнуть все 10 точек нельзя. Выбрать 9 точек для зачёркивания — всё равно что стереть одну точку, а остальные зачеркнуть. Ввиду симметрии есть три разных способа стереть точку: в центре, на стороне или в углу. На рис. 15в–д показано, как зачеркнуть оставшиеся точки в каждом из случаев.

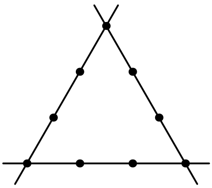


Рис. 15в

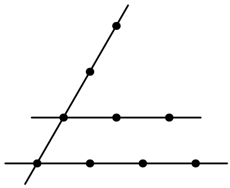


Рис. 15г

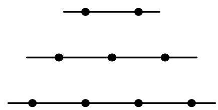


Рис. 15д

в) Пример аналогичен изображённому на рис. 15б, только на каждой стороне большого треугольника лежит по 10 точек. Всего в нем $10 + 9 + 8 + \ldots + 1 = 55$ точек. Допустим, все точки зачёркнуты девятью прямыми. Тогда на какой-то из них лежит не менее двух из десяти точек нижнего основания (принцип Дирихле). Значит, эта прямая зачёркивает все точки основания. Выбросим эту прямую и точки основания. Остальные точки образуют треугольник с девятью точками на основании и зачёркнуты остальными восемью прямыми. Аналогично какая-то из этих прямых проходит через две точки нового основания, и т. д. Итого мы получим 9 горизонтальных прямых снизу, а самая верхняя точка останется не зачёркнутой. Противоречие.

Выберем из точек произвольную точку A. Покажем, как зачеркнуть девятью прямыми все точки, кроме A. Какая-то из трёх сторон треугольника через A не проходит — её и зачеркнём. Останется треугольник со сторонами по 9 точек. Какой-то из его сторон A не принадлежит — её и зачеркнём. Останется треугольник со сторонами по 8 точек, и т. д. После восьми вычёркиваний останется треугольник, у которого на каждой стороне 2 точки, а всего 3. Зачеркнув сторону без точки A, мы зачеркнём все точки, кроме A.

Путь к решению. а) Никакие 4 точки не лежат на одной прямой, иначе оставшиеся две точки можно зачеркнуть второй прямой. Зачеркивая пять точек двумя прямыми, мы обязаны одной из прямых зачеркнуть три. Итак, есть прямая a с тремя точками. Убрав одну из точек с прямой a, найдём другую прямую b с тремя точками. Понятно, что у этих двух троек должна быть общая точка, иначе все 6 точек зачёркнуты двумя прямыми a и b. Выкинув общую точку прямых a и b, найдём третью прямую c с тремя точками. Теперь очевидно, что точки лежат по три на трёх попарно пересекающихся прямых.

б) *Размявшись* на п. (а), постараемся нарисовать красивую симметричную картинку: вершины и середины сторон равностороннего треугольника. Эту картинку легко обобщить на задачи (б) и (в).

в) Сообразив, что $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, а $55 = 1 + 2 + \ldots + 10$, догадаемся и здесь расположить точки «треугольником». Поймём, что одну из сторон треугольника надо вычеркнуть и что останется треугольник размером на 1 меньше. Но тогда доказательство обоих условий (невозможность вычеркнуть всё и возможность вычеркнуть почти всё) *сводится* к такому же утверждению для меньшего треугольника.

Задача 4.8. Ответ: а) 1 г, 3 г, 9 г и 27 г; б) 1 г, 3 г, 9 г, 27 г и 60 г.

Заметим, что вес груза равен сумме весов гирь на противоположной чаше минус сумма весов гирь на той же чаше. Если раскрыть скобки, то получится алгебраическая сумма использованных гирь. И наоборот, если некоторый вес P представляется как алгебраическая сумма гирь, то, помещая гири «с плюсом» на одну чашу, а «с минусом» — на другую, взвесим груз P. Покажем, как представить все целые веса в виде алгебраических сумм гирь из ответа (граммы везде опускаем).

а) Веса от 1 до 4 дают гири 1 и 3: 1, $3 - 1$, 3, $3 + 1$. Веса от 5 до 8 получаются вычитанием предыдущих весов из 9: $9-3-1$, $9-3$, $9-3+1$, $9-1$, а веса от 10 до 13 — их прибавлением к 9. Так гири 1, 3, 9 дают все веса от 1 до 13. Вычитая их из 27, получим все веса от 14 до 26, а прибавляя их — все веса от 28 до 40.

б) Веса от 28 до 59 получаются вычитанием из 60 весов от 1 до 32 (их можно получить четырьмя легкими гирями), а веса от 61 до 100 — прибавлением к 60 весов от 1 до 40.

Путь к решению. Одной из разминок к данной задаче служит задача 4.4.

Уберём самую тяжёлую гирю Т и посмотрим на список С весов, которые получаются из остальных гирь. Добавив Т к каждому весу из списка С, получим список С+. Рассмотрев разности Т с весами из С, получим список С−. Если список С состоял из последовательных чисел, то С+ и С− — тоже. Подбором Т можно добиться, чтобы и объединение списков (с добавлением веса Т) тоже дало набор последовательных чисел.

а) Рассмотрев случаи двух и трёх гирь, замечаем, что получаются степени числа 3. Это подсказывает ответ для четырёх гирь.

б) Решив задачу (а) для пяти гирь, можно изменить вес самой тяжёлой гири так, чтобы общий вес был такой, какой нам нужно.

Комментарий. Гири 1, 3, 3^2, ..., 3^{n-1} позволяют получить наибольшее число последовательных весов n гирями. Действительно, есть 3^n алгебраических сумм: для каждой из гирь есть три возможности: войти в сумму со знаком $+$, со знаком $-$ или не входить. Не считая случая, когда не входят все, остальные суммы делятся поровну на положительные и отрицательные.

Задача 4.9. а) Раскроем третье звено. Получим куски из 1, 2 и 4 звеньев. Выпишем, какие куски окажутся у хозяина после первого, второго и т. д. дня: 1, 2, $1+2$, 4, $4+1$, $4+2$, $4+2+1$. Теперь нетрудно установить, что в соответствующий день оставалось у гостя, что он отдавал и что получал на сдачу.

б) Достаточно. Раскроем четвёртое и одиннадцатое звенья. Получим куски размера 1, 1, 3, 6, 12. Достаточно проверить, что ими можно набрать любое число от 1 до 23 (проблемы сдачи нет: пусть гость каждый раз отдаёт *все* куски, хозяин набирает сколько нужно, а лишнее возвращает). Понятно, что тремя наименьшими можно набрать числа от 1 до 5. Добавляя к ним 6, получим ещё числа от 6 до 11. Добавляя к ним 12, получим ещё числа от 12 до 23.

в) Недостаточно. У нас получится пять кусков из $1 \leqslant 1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$ звеньев. После очередного дня у хозяина должно было быть 1, 2, 3, ..., 24 звена, значит, каждое из этих чисел мы должны уметь получить как суммы некоторых из выписанных слагаемых. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Чтобы набрать 3, нам понадобится ещё кусок кроме двух единиц, поэтому $a \leqslant 3$. Чтобы набрать 6, нам понадобится ещё кусок кроме двух единиц и a, поэтому $b \leqslant 6$. Чтобы набрать 12, нам понадобится ещё кусок кроме двух единиц, a и b, поэтому $c \leqslant 12$. Но тогда общее число звеньев в цепочке $1+1+a+b+c \leqslant 1+1+3+6+12 \leqslant \leqslant 23$ — противоречие.

Второй способ. Сколько всего натуральных чисел может быть представлено в виде суммы некоторого подмножества этих пяти слагаемых? Не более семи, если не брать единиц (пустое множество взять нельзя, иначе в сумме получим 0), ещё не более 8, если взять одну единицу, и ещё столько же, если брать обе единицы. Итого не более 23 чисел — противоречие.

Комментарий. Аналогично оценивается, что при трёх раскрытых звеньях платить можно будет не более $4 \cdot 16 - 1 = 63$ дней.

Путь к решению. *Разминка* на задаче 4.4, вычисление размера кусков, как в первом способе решения п. (в).

Задача 4.10. Положим на каждую чашу по 32 монеты. Далее на каждом следующем шаге кладём на весы вдвое меньшее число монет. Тут возможны два случая.

Первый случай. При всех предыдущих взвешиваниях было равновесие. Тогда у нас каждый раз на каждой чаше лежало поровну лёгких и тяжелых монет. При следующем взвешивании мы убираем монеты с одной чаши, а оставшиеся делим пополам и снова взвешиваем. Если случилось 5 равновесий подряд, то на чашах лежат по две монеты: одна тяжёлая и одна лёгкая. Предъявим пару с одной из чаш.

Второй случай. Первое неравновесие случилось не позднее пятого взвешивания. Тем самым мы выявили две группы монет, равные по численности, но разные по весу. Так как число монет в группах чётно, за одно взвешивание мы сможем найти пару вдвое меньших групп разного веса. Действительно, положим на весы по половинке каждой группы. Если равновесия нет, то нужные группы находятся на чашах. Если получилось равновесие, то *не равны* оставшиеся половинки. В результате «уполовинивания» после шестого взвешивания группы разного веса будут состоять из одной монеты.

Путь к решению. Степени двойки подсказывают идею *уполовинивания*, то есть *редукции ко вдвое меньшему числу. Разминаемся*, находя пару разного веса из двух тяжёлых и двух лёгких монет. Здесь хватает даже одного взвешивания. Пробуем для восьми монет и видим, что редукция к четырём монетам так просто не проходит: при неравенстве мы не знаем, сколько монет в группах. Впрочем, и тут вариантов мало, удаётся выкрутится. Но вот переход от 16 монет к восьми требует умения разобраться с общей ситуацией: мы не знаем, сколько среди монет тех и других, а на весах — неравенство двух четвёрок. Это кажется тупиком, пока не вспомнишь, что неравенство двух монет — как раз то, что нужно. Возникает идея: *уполовинивание неравенства*.

Идеология

У школьников обычно достаточно много верных идей, но не хватает опыта довести идеи до решения. Учитель может хвалить одни идеи, и браковать другие. Продуктивнее, однако, учить школьников самих оценивать работоспособность идей, давая возможность довести их до решения хотя бы упрощённой задачи.

Выбор упрощённой задачи для *разминки* — это искусство: надо упростить достаточно, чтобы задача решилась, и в то же время не слишком сильно, чтобы сохранить *аналогию* между задачами и результатами.

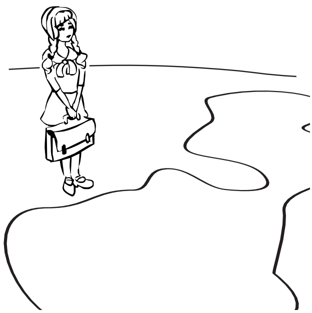
Важно разъяснить, что из решения упрощённой задачи можно взять и *результат*, и *метод*. Результат — простая конструкция — может стать частью конструкции сложной задачи, послужить её основой или строительным блоком. Так, первый этаж многоэтажного дома — важнейшая часть его конструкции. Но и двухэтажный дом может стать частью многоэтажного. Можно сказать, что, научившись надстраивать этаж, мы *свели* постройку трёхэтажного дома к постройке двухэтажного. Такое сведéние называют ещё *редукцией*. Цепочка таких редукций сведёт постройку могоэтажного дома к постройке одноэтажного: такой приём называют *индукцией*.

Метод получения простой конструкции может стать вспомогательным средством («строительными лесами»). Конструкция из упрощённой задачи послужит подсказкой к конструкции сложной задачи. Грубо говоря, прежде чем строить большой дом, полезно *размяться*: потренироваться на строительстве сараев и хижин. Одного простого примера обычно недостаточно, общая структура начинает просматриваться после двух-трёх примеров.

Занятие 5

Узкие места

Кто нам мешает, тот нам поможет.



Что такое «узкое место», школьники интуитивно понимают и без объяснений учителя. Они сами догадываются использовать узкие места при построении конструкций. Цель занятия: научить их пользоваться этим приёмом сознательно, видеть узкие места в сложных случаях, использовать подсчёт узких мест для неравенств и оценок. Средством служит обсуждение решений и явное указание использованных в них узких мест.

Начните с вопроса, почему построение или исследование конструкции началось именно с данного места, чем это место замечательно. Сравните его с каким-нибудь другим местом. Быстро выяснится, что там пришлось бы перебирать варианты, а тут всё однозначно. А если нет такого места, где однозначно, — откуда начинать? Ага, оттуда, где меньше вариантов.

Как искать узкие места? Посоветуйте присмотреться: эти места служат препятствиями к построению конструкции или кажутся таковыми.

Ну хорошо, нашли узкое место — а дальше что? Надо пытаться строить конструкцию вокруг этого места. Либо получится противоречие, либо построится большой кусок. Во втором случае ищем следующее узкое место. Так, место за местом, глядишь — и конструкция будет построена целиком с минимальным перебором. Обратите внимание на то, что последовательное применение принципа узких мест позволяет построить компактное описание перебора.

Задача 5.1. Сколькими способами можно фигуру, изображённую на рис. 16а разрезать по границам клеточек на а) прямоугольники 1×5; б) прямоугольники 1×7?

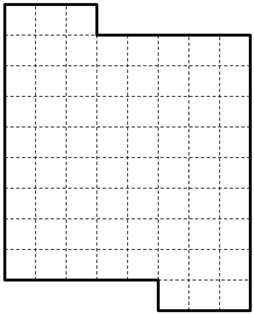


Рис. 16а

Решение. а) Одним способом (см. рис. 16б). Ясно, что три самые верхние клетки и три самые нижние должны войти в вертикальные прямоугольники. После этого на правом и левом краях остаются по 4 непокрытые клетки. Каждая из них должна войти в горизонтальный прямоугольник.

б) 0 способами (то есть так разрезать нельзя). Клетка 1 должна быть покрыта вертикальным прямоугольником (см. рис. 16в). После этого клетка 2 должна быть покрыта горизонтальным прямоугольником. Но теперь клетку 3 нельзя покрыть прямоугольником, не пересекая уже отмеченных прямоугольников.

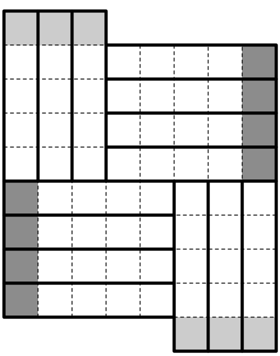


Рис. 16б

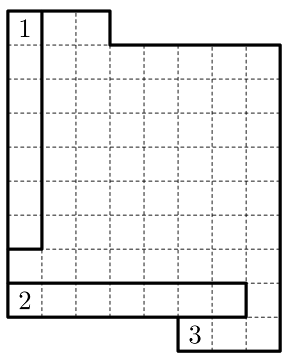


Рис.16в

Путь к решению. Отмеченные клетки образуют *узкие места*: когда мы их рассматриваем, то положение покрывающего их прямоугольника определяется однозначно или уже невозможно. Обратите внимание на то, что по мере использования одних узких мест возникают другие.

Задача 5.2. а) Два пятизначных числа зашифровали словами УЗКИЕ и МЕСТА (как обычно, одинаковые цифры заменили на одинаковые, разные — на разные). Пара цифр (не обязательно соседних) образует *беспорядок*, если левая цифра больше правой. Могло ли в исходных числах не быть беспорядков?

б) То же, если получились слова УЗКОЕ и МЕСТО.

Решение. а) Могло, например числа 12346 и 56789.

б) Нет, беспорядок наверняка есть. Буквы Е и О в этих словах расположены по-разному друг относительно друга: в УЗКОЕ левее О, в МЕСТО левее Е. Ровно в одном из слов они образуют беспорядок.

Путь к решению. Ясно, что узкие места создаются общими буквами и, возможно, их взаимным расположением. В п. (а) Е — единственная общая буква. Слева от неё встречаются буквы У, З, К, И, М. Все они больше 0, поэтому Е $\geqslant 6$. Справа от Е встречаются буквы С, Т, А, значит, Е $\leqslant 6$. Поэтому Е $= 6$, СТА $= 789$, М — любое от 1 до 5 (например 5), тогда УЗКИ $= 1234$ (оставшиеся цифры по возрастанию).

Задача 5.3. У Васи есть два кубика, на каждую грань которых он хочет написать одну из цифр от 0 до 9. Может ли Вася так нарисовать цифры на гранях, чтобы получился «календарь»:

а) выбирая один кубик или выбирая два кубика и приставляя их друг к другу, на верхних гранях можно было бы получить любое число от 1 до 31;

б) выбирая два кубика и приставляя их друг к другу, на верхних гранях можно было бы получить любую комбинацию от 01 до 31?

(*Перевёрнутую цифру* 6 *нельзя использовать как* 9, *а цифру* 9 — *как* 6.)

Решение. а) Может, например, на одном кубике написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, а на другом 0, 1, 2, 7, 8, 9. Числа 30 и 31, очевидно, составляются. При составлении любого другого числа Вася сначала выбирает кубик с цифрами единиц, а потом, если надо, кубик с цифрами десятков. Возможные цифры десятков — 1 или 2 — есть на обоих кубиках.

б) Не может. Допустим, что может. Чтобы Вася мог составить 11 и 22, цифры 1 и 2 должны быть на обоих кубиках. Остается восемь незаполненных граней и восемь цифр, значит, эти цифры встречаются ровно по разу. Пусть цифра $a > 2$ написана на одном кубике с цифрой 0. Тогда комбинацию $0a$ составить нельзя.

Путь к решению. Числа 11 и 22 создают *узкое место*: необходимость повторить цифры 1 и 2. *Подсчёт* оставшихся чисел и граней выявляет следующее *узкое место*: неповторение остальных цифр.

а) Число 30 создает ещё одно узкое место: цифры 3 и 0 должны быть на разных кубиках.

б) Комбинации 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09 создают *узкое место*: цифры 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 должны быть не на одном кубике с цифрой 0. Но это невозможно, так как на другом кубике всего 6 цифр.

Задача 5.4. Можно ли разрезать квадрат а) на тридцатиугольник и пять пятиугольников; б) на тридцатитрёхугольник и три десятиугольника?

Решение. а) Нельзя. Каждая вершина тридцатиугольника должна одновременно быть либо вершиной пятиугольника, либо вершиной квадрата. Но у квадрата и пятиугольников вместе всего 29 вершин.

б) Можно, см. рис. 17.

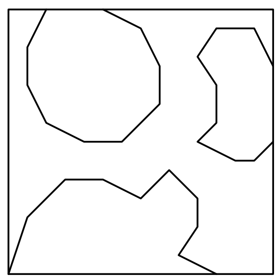


Рис. 17

Путь к решению. Задача облегчается, если её переформулировать: Можно ли, а) отрезая от квадрата пять пятиугольников, получить тридцатиугольник; б) отрезая от квадрата три десятиугольника, получить тридцатитрёхугольник? Повозившись, быстро обнаружим, что у остающихся частей получается недостаточно много сторон. Однако *узкие места* из сторон делать неудобно, поскольку, скажем, к одной стороне пятиугольника может примыкать несколько сторон тридцатиугольника. А вот вершины так «размножать» нельзя. Поэтому вершины тридцатиугольника и тридцатитрёхугольника — узкие места, и *подсчёт узких мест* помогает решить задачи.

Задача 5.5. Как посадить девять деревьев так, чтобы получилось 10 прямых рядов по три дерева в каждом?

Решение. См. рис. 18а.

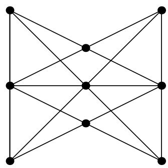


Рис. 18а

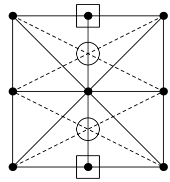


Рис. 18б

Путь к решению. Легко приходит в голову посадить деревья в вершинах квадратиков сетки 2×2 (см. рис. 18б). Увы, получается только 8 рядов. Нельзя ли этот пример улучшить, передвинув несколько деревьев? Изучим узкие места двух родов.

1. Деревья, которые участвуют в наименьшем числе рядов. К таким относятся, в частности, деревья, обведённые квадратом.

2. Те места, где дерево участвовало бы как минимум в трёх рядах. Два таких места отмечены кругами, а возможные новые ряды — пунктирными линиями.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.6. Решите ребус

$$Я + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН = МЫ$$

(как обычно, разные буквы означают разные цифры, одинаковые — одинаковые).

Задача 5.7. а) Можно ли обойти конём все клетки доски 4×4, кроме одной угловой, побывав на каждой клетке ровно один раз? б) Можно ли так обойти все клетки доски 4×4?

Задача 5.8. а) Можно ли представить 2012 как сумму пяти натуральных слагаемых так, чтобы все использованные цифры были различны? б) А как сумму шести таких слагаемых?

Задача 5.9. Петя взял десять последовательных натуральных чисел, записал их друг за другом в некотором порядке и получил число P. Вася взял одиннадцать последовательных натуральных чисел, записал их друг за другом в некотором порядке и получил число V. Могло ли случиться, что $P = V$?

Задача 5.10. а) Можно ли всю поверхность куба оклеить тремя бумажными треугольниками без наложений? б) А четырьмя треугольниками?

Можно также использовать задачи 2.2, 2.4, 2.6, 2.9, 3.2, 3.10, 6.3, 6.10, 7.5, A3, A4, A7, A12, A15, A18, A23, A24, A26, B1, B7, B11, B14, B16, B20, B25, B30, C1, C5, C6, C13, C14, C19, C21, C23, C26, D8, D9.

Ответы и решения

Задача 5.6. $0+12+12+12+12+12+12+12+12 = 96$.

8·ОН $\leqslant$ МЫ $\leqslant$ 98 (число МЫ двузначно, и цифры в нём не равны, поэтому МЫ $\leqslant$ 98). Тогда и 8·ОН $\leqslant$ МЫ $\leqslant$ 98, поэтому ОН $\leqslant$ 12. Значит, О $=$ 1, а Н $=$ 0 или Н $=$ 2. Но если Н $=$ 0, то число МЫ $=$ Я $+$8·ОН заканчивалось бы на Я — противоречие. Значит, Н $=$ 2, а Я $=$ МЫ $-$ $8 \cdot 12 \leqslant 98 - 96 = 2$. Поскольку цифры 1 и 2 уже заняты, Я $= 0$.

Путь к решению. Узким местом оказалось слово ОН, зажатое между 10 и 12, затем слово Я. Здесь пришлось преодолеть *инерцию мышления* — мы нашли единственное целое число, запись которого начинается на 0.

Задача 5.7. а) Можно, см. рис. 19а.

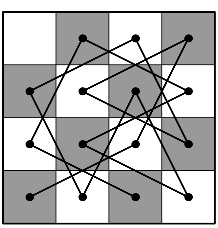


Рис. 19а

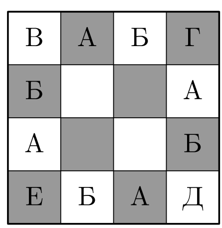


Рис. 19б

б) Нельзя. Разделим крайние клетки на шесть групп (обозначены разными буквами на рис. 19б). Конь может перейти с одной группы на другую только через одну из центральных клеток. Для шести групп надо не менее пяти переходов, а центральных клеток только четыре.

Путь к решению. б) Первоначально *узким местом* кажутся угловые клетки: из каждой можно пойти лишь на два поля, а из остальных — на три или на четыре. Но особых ограничений это не даёт. Присмотревшись, заметим, что любой ход из угла ведёт в одну из центральных клеток. А из других крайних клеток? Стартовав из одной и не заходя в центр, можно обойти четыре клетки из восьми. Тогда, разделив все крайние клетки на шесть групп, находим, что *узким местом* служат четыре центральные клетки.

а) Эти же соображения плюс чередование цветов помогают строить пример. Ввиду чередования цветов надо начать с того цвета, которого больше (здесь тот цвет, что в меньшинстве, служит *узким местом*). Ещё чередуются группы и центральные клетки, при этом групп больше, чем центральных клеток. Поэтому надо начать с какой-то группы и проходить каждую группу полностью. Но тогда угловые клетки соседствуют с центральными клетками одинакового цвета, а четырёхклеточные группы — с клетками разного цвета. Поэтому, если выписать только цвета центральных клеток в порядке прохождения, то цвет сменится не более двух раз. Пример на рисунке соответствует порядку цветов ББЧЧ. Ещё один пример можно построить, если цвета следуют в порядке БЧЧБ.

Задача 5.8. а) Можно, например $1970 + 23 + 5 + 6 + 8$.

б) Нельзя. Заметим, что если использовать по разу все цифры, то сумма цифр делится на 9, поэтому и сумма чисел делится на 9 и, значит, не равна 2012. Итак, использовано не более девяти цифр. Но тогда среди слагаемых нет двух больших (трёхзначных или четырёхзначных), иначе на шесть слагаемых не хватит цифр. Значит, есть ровно одно большое слагаемое N, и оно, очевидно, четырёхзначно (иначе сумма меньше 2012). Остальные пять слагаемых однозначны. Число N начинается на 1, иначе оно не меньше 2013. Сумма в разряде единиц не более $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39$, значит, $N \geqslant 1973$. Но тогда сумма цифр в разрядах тысяч, сотен и десятков не менее $1 + 9 + 7 = 17$. При сложении сумма в разрядах единиц добавляется к 1970 или к 1980, то есть она не менее 32. Тем самым, сумма всех использованных цифр не менее $17 + 32 = 49 > 0 + 1 + \ldots + 9$.

Путь к решению. В п. (б) *узкое место* — количество цифр в слагаемых, что даёт оценку на сумму использованных цифр. Совпадение остатка от деления на 9 у числа и его суммы цифр позволяет не только ограничить число цифр, но и узнать выкинутую цифру — это 4. В п. (а) после этого вычисляются не только цифры тысяч и сотен в большом слагаемом, но также сумма цифр d в разряде десятков и сумма цифр e в разряде единиц. Действительно, они удовлетворяют уравнениям $d + e = 31$, $10d + e = 112$.

Задача 5.9. Ответ: могло. Например, Вася выписал числа от 1 до 11 в таком порядке: 3, 4, ..., 11, 1, 2, а Петя выписал 3, 4, ..., 12.

Путь к решению. Пример можно найти из такого наблюдения: Вася может увеличить количество чисел, не меняя количества цифр, заменой нескольких «длинных» чисел в конце ряда Пети на столько же плюс одно «короткое» в начале. Конкретно: заменим k чисел из $k+1$ знака на $k+1$ число из k знаков. Уже для $k = 1$ это срабатывает, при этом удалённое число начинается на цифру 1 или 2, значит, добавится число 2 или 3.

Задача 5.10. а) Нельзя. Сумма углов при каждой вершине куба равна 270°. Поэтому вершина куба не может быть накрыта внутренней точкой треугольника: угол «вокруг точки» равен 360°. Вершина может попасть в точку на стороне треугольника. Тогда эту точку можно считать вершиной развёрнутого угла, поэтому прилегающая к точке часть треугольника накрывает в сумме 180° углов с вершинами в вершине куба. Ещё одна сторона не может пройти через ту же вершину, так как тогда накрыто было бы $180^\circ + 180^\circ > 270^\circ$. Остальные углы при вершине куба в сумме дают не менее 90° и должны быть покрыты только углами треугольников. Однако при восьми вершинах надо покрыть как минимум $8 \times 90^\circ = 720^\circ$, а сумма углов трёх треугольников равна $3 \times 180^\circ = 540^\circ$. Значит, трёх треугольников не хватит.

б) Можно. Поверхность куба можно покрыть двумя прямоугольниками 3×1 — каждый покроет по три грани. Разрезав каждый из прямоугольников диагональю на два треугольника, получим 4 покрывающих треугольника.

Путь к решению. Углы при вершинах куба — напрашивающиеся кандидаты на *узкие места.*

Идеология

При построении, как ни странно, приходится бороться с избытком свободы. Когда вариантов много, трудно угадать, какой приведёт к успеху, а какой заведёт в тупик. Места, где свободы меньше всего, и называются *узкими местами*[2]. Удобно то, что от узкого места быстрее дойти до противоречия или легче построить заметный кусок возможной конструкции.

Узкие места могут быть расположены с краю. Но главная их связь с *принципом крайнего* — это минимум свободы.

Если узкие места не бросаются в глаза, попробуйте найти какое-нибудь свойство конструкции в целом. Это уменьшит степень свободы и поможет узким местам проявиться.

В задачах на неравенство и на оценку+пример узким местом может быть и группа из нескольких элементов конструкции, иногда «отдалённых» друг от друга (скажем, все двери вагона). Выявление таких групп и подсчёт числа элементов в них позволяет получить оценку, которая решает задачу или даёт продвижение в решении.

---

[2] См. [3]

Занятие 6

Ослабление условий

Лучше синица в руках, чем журавль в небе.

Здесь мы опять будем учить школьников сводить сложную задачу к более лёгкой вспомогательной задаче. На этот раз учим строить сложную конструкцию в несколько шагов, проходя через одну или несколько промежуточных конструкций. Ещё учим использовать два языка параллельно: житейский и математический.

Занятие лучше построить как серию обсуждений. Для простых задач это будет совместное обсуждение найденных школьниками решений. Для сложных — совместное с учителем решение, где обсуждается, как выбирать следующий шаг. В процессе обсуждений надо показать, как переводить с житейского языка на математический и обратно.

Вот примерные темы для обсуждений.

Дом, пригодный для жилья, строят не сразу: сначала возводят коробку, а окна, двери, отделку добавляют потом. Этот приём называется *постепенное конструирование*: сложный пример строят за несколько шагов, получая цепочку вспомогательных конструкций (*заготовок*). На каждом шаге очередная конструкция *улучшается* до следующей. А как правильнее выбирать заготовки? Какими свойствами они должны обладать?

Искомую конструкцию сложно найти из-за слишком жёстких требований. Удобнее строить заготовку, где требования удовлетворены лишь частично. Оставляем *принципиальные* условия, отказываемся или ослабляем *технические*. Попросите определить, какие именно условия в том или ином решении оказались принципиальными, а какие — техническими. Как можно было догадаться именно так разделить условия?

Задача 6.1. а) Придумайте три различных натуральных числа так, чтобы каждое делилось на разность двух других и все разности были различны; б) то же, но все числа больше 100; в) то же, что в п. (б), но все разности меньше самого маленького из чисел.

Ответ: а) 1, 3, 4; б) 1000, 3000, 4000; в) 121, 123, 124.

Путь к решению. а) «Как такое может быть?» Самые маленькие разности — это 1, 2, 3. Самые маленькие числа с разностью 3 — это 1 и 4. Между ними надо вставить 2 или 3. Второй вариант подходит.

б) Интуиция должна подсказать, что условие «все числа больше ста» техническое, от него можно *временно* отказаться. Заметим, что если все числа умножить на одно и то же число, то и разности умножатся на то же число. При этом они останутся разными и делимость сохранится. Ответ получен умножением на 1000.

в) Умножать запретили... Как ещё можно увеличить все числа? — Прибавить одно и то же число. Тогда ведь разности не изменятся...

Запомните приём: *неполноценный* пример можно использовать как заготовку для построения *полноценного*.

Задача 6.2. Разложите 999 орехов на четыре кучки разного размера, но так, чтобы любые две кучки отличались не больше чем на четыре ореха.

Ответ: 248, 249, 250 и 252 ореха.

Путь к решению. Если пытаться делить поровну, то выйдет по 249,75 ореха — увы, не целое. Попробуем округлить: три кучки по 250 и одна из 249 орехов. Но одинаковые кучки запрещены... Ладно, перебросив 2 ореха из одной из них в другую, получим вместо них кучки с 248 и 252 орехами!

Комментарий. Как видим, техническими оказались условия о целом числе орехов в кучках и о разной численности кучек.

Задача 6.3. Можно ли, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя линий дважды, нарисовать изображённую на рис. 20а фигуру, если пересекать уже нарисованные линии нельзя? (Касаться можно.)

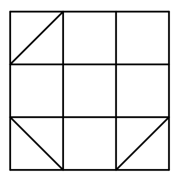


Рис. 20а

Ответ: можно. Например, см. рис. 20б.

Путь к решению. Внешний квадрат можно обойти с любого места, ничего не пересекая. Поэтому от его обхода можно *временно* отказаться. Обесцветим квадрат (см. рис. 20в) и пока забудем про него. Научимся обходить оставшуюся фигуру. Откажемся ещё от запрета на самопересечения. Тогда фигуру нетрудно обойти по маршруту *GDEBCHAF*. При этом возникнут самопересечения в вершинах центрального квадрата. От них нетрудно избавиться, изменив направление обхода угловых треугольников, а также поменяв порядок обхода отрезков GK и KF. К полученному обходу без самопересечений добавим обход внешнего квадрата по часовой стрелке начиная с точки F.

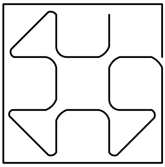


Рис. 20б

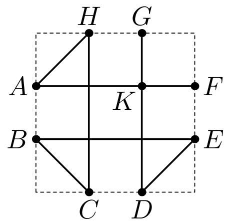


Рис. 20в

Задача 6.4. Можно ли разрезать квадрат на два меньших многоугольника так, чтобы отношение их площадей было не меньше двух, а отношение периметров — не больше 1/2? (Граница многоугольника должна быть *одной* замкнутой ломаной.)

Ответ: можно, см. рис. 21.

Решение. Удобно резать и вести подсчёты для клетчатого квадрата. Достаточно взять квадрат 11×11. Площадь серой части 39, белой 82, $2 \cdot 39 < 82$. Периметр серой части 80, белой 38, $2 \cdot 38 < 80$.

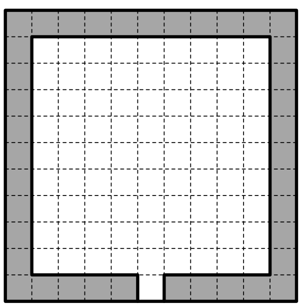


Рис. 21

Путь к решению. Малая площадь не обязательно означает малый периметр: фигуру можно сделать длинной, но узкой (ср., например, с задачей 1.2). Ослабим условия: не будем требовать, чтобы части были многоугольниками. Тогда вырежем центральный квадрат с площадью, близкой к площади исходного. Останется узкая квадратная каёмка, её периметр явно больше удвоенного периметра вырезанного квадрата. Чтобы превратить каёмку в многоугольник, «разорвём» её в одном месте, прибавив оторванный кусочек к центральному квадрату. Если кусочек мал, то площади и периметры тоже изменятся мало и нужные неравенства отношений сохранятся.

Задача 6.5. Подставьте в знаменатели вместо звёздочек различные натуральные числа, чтобы равенства были верными:

а) $\frac{1}{*}+\frac{1}{*}=\frac{1}{*}+\frac{1}{*}$;

б) $\frac{1}{*}+\frac{1}{*}+\frac{1}{*}+\frac{1}{*}=\frac{1}{*}+\frac{1}{*}+\frac{1}{*}$.

Ответ: например, а) $\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$;

б)

$$\frac{1}{210}+\frac{1}{140}+\frac{1}{105}+\frac{1}{84}=\frac{1}{420}+\frac{1}{70}+\frac{1}{60}$$

или

$$\frac{1}{360}+\frac{1}{180}+\frac{1}{90}+\frac{1}{40}=\frac{1}{120}+\frac{1}{72}+\frac{1}{45}.$$

Путь к решению. Представим, что дроби уже найдены и мы их складываем, приведя к общему знаменателю. Тогда суммы числителей должны быть равны! Заметим ещё, что все числители делят общий знаменатель.

а) Выберем число, у которого много делителей, и найдём среди них две пары с одинаковой суммой. Запишем число в знаменатели, а делители — в числители. Наш пример получился из равенства $\frac{1}{12}+\frac{4}{12}=$ $=\frac{2}{12}+\frac{3}{12}$.

б) Можно поступить, как в п. (а), но есть и более общий подход. Найдём семь разных натуральных чисел, разбитых на две равные суммы, например $1+6+7=2+3+4+5$. Их поставим в числители. Но где же взять такой общий знаменатель, чтобы все они сократились? Не проблема, возьмём их НОК! Получим $\frac{1}{420}+\frac{6}{420}+\frac{7}{420}=$ $=\frac{2}{420}+\frac{3}{420}+\frac{4}{420}+\frac{5}{420}$, откуда первый пример. Второй пример получается из равенства $1+2+4+9=3+5+8$ (эти числа дают наименьший НОК).

Запомните приём: домножение на подходящее число часто сводит работу с дробями к работе с целыми числами. Такой приём — пропорциональное изменение размеров — часто используется и в геометрии. Там его называют *метод подобия*.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.6. Сложите из четырёхклеточных фигурок, как на рисунке 22, такую же фигуру, но с клетками большего размера.

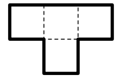


Рис. 22

Задача 6.7. $2^8 = 256 = 128+64+32+16+8+4+2+1+1$ (здесь все делители числа 256 встречаются ровно по разу, повторяется только 1). Аналогично 2^n представляется в виде суммы $n+1$ своего делителя с повтором слагаемого 1. Используя такое представление, придумайте число, которое можно представить в виде суммы

а) десяти его различных делителей;

б) ста его различных делителей.

Задача 6.8. Отметьте на плоскости шесть точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой находились ровно три отмеченные точки.

Задача 6.9. а) Даны 16 одинаковых по виду монет. Известно, что среди них есть ровно две фальшивые, которые отличаются от остальных по весу (настоящие монеты равны по весу друг другу, и фальшивые монеты также равны по весу друг другу). Как разделить все монеты на две равные по весу кучки, сделав не более трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь?

б) Та же задача для 14 монет.

Задача 6.10. Разбейте квадрат на треугольники так, чтобы каждый треугольник граничил ровно с тремя другими треугольниками по отрезку ненулевой длины.

Можно также использовать задачи A4, A5, A6,A10, A16, A22, B4, B13, B15, B23, B28, B32, B33, C4, C8, C17, C22, C24, D4, D6, D13.

Ответы и решения

Задача 6.6. См. рис. 23.

Путь к решению. Фактически нам надо фигурку большего размера разрезать на равные меньшие. На такие замысловатые части мы резать пока не умеем. Ослабим условия: на какие фигурки мы резать умеем?

— Да на квадратики. А не получится ли разрезать какой-нибудь квадрат на указанные фигурки?! Это ведь всё равно что из фигурок составить квадрат. — Ну да, квадрат 4×4 составить удаётся...

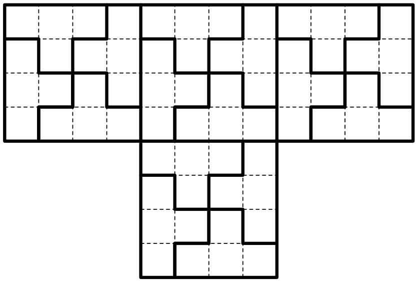


Рис. 23

Задача 6.7. а) $768 = 376 + 192 + 96 + 48 + 24 + 12 + 6 + 3 + 2 + 1$. Это равенство получено из такого $768 = 3 \cdot 256 = 3 \cdot 128 + 3 \cdot 64 + 3 \cdot 32 + 3 \cdot 16 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 + 1$.

б) Умножим равенство для 2^{98} почленно на 3. Получим представление числа $3 \cdot 2^{98}$ в виде суммы его 99 делителей, где слагаемое 3 встретится дважды. Заменив последнюю тройку на $2 + 1$, получим сумму ста делителей.

Путь к решению. Нам явно дано «неполноценное решение». Умножив равенство на любое число, мы снова получим неполноценное решение. Но у умноженного числа делителей стало больше, значит, появился шанс заменить повторившийся делитель на сумму двух меньших делителей. Если, например, мы умножали на нечётное число, то теперь среди слагаемых нет делителей 1, 2, 4. Отлично, мы достигнем цели, если используем в качестве множителя $1 + 2$ или $1 + 4$. Так можно «улучшить» и полноценное решение: за счёт замены увеличим число слагаемых на 1. А поскольку «улучшение» можно делать много раз, из трёх слагаемых можно сделать сколько угодно.

Задача 6.8. См. рис. 24. Треугольники на сторонах единичного квадрата — равносторонние. Расстояние между верхними вершинами треугольников равно 1, поскольку нижний получается сдвигом верхнего вниз на расстояние 1. Из каждой точки выходит по три единичных отрезка к другим точкам. Для пар

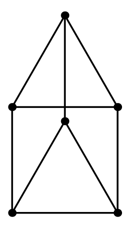


Рис. 24

точек, не соединённых отрезками, расстояние явно больше или явно меньше 1.

Путь к решению. Легко построить шесть точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой находились ровно *две* отмеченные точки: достаточно взять два равносторонних треугольника далеко друг от друга. А как добиться, чтобы от каждой точки на расстоянии 1 была ещё одна точка другого треугольника? Надо один треугольник получить из другого сдвигом *на расстояние* 1. Правда, надо проследить, чтобы не случилось совпадения вершин или лишних расстояний 1. Убедитесь сами, что для сдвига подойдёт любое направление, кроме параллельных сторонам треугольника.

Задача 6.9. а) При каждом взвешивании будем класть на весы все 16 монет. Изначально у нас есть одна куча, в которой есть две фальшивые монеты. Сделаем из неё пару куч по восемь монет и разложим их на разные чаши весов. Если фальшивки попали в разные кучи, то будет равновесие (и задача решена), а при неравновесии мы знаем, что обе фальшивки оказались в одной и той же куче. Снимем кучи с весов и разобьём каждую на две четвёрки. Положим снова все монеты на весы, помещая половинки каждой восьмёрки на разные чаши. Если равновесие, то всё хорошо, а при неравновесии мы знаем, что фальшивки оказались в одной четвёрке. Разобьём четвёрки на пары, и снова кладём половинки каждой четвёрки на разные чаши. Если получили равновесие, то всё хорошо, а при неравновесии мы знаем, что фальшивки оказались в одной паре. По тому же принципу разложим монеты на чаши для четвёртого взвешивания, только проводить его не надо: на этот раз фальшивки наверняка на разных чашах, значит, должно наступить равновесие.

б) Как и в п. (а), будем взвешивать каждый раз все монеты и перед каждым взвешиванием удваивать число куч, деля каждую старую на пару новых. Метод потребует лишь небольшого уточнения. А именно, если в старой куче число монет нечётно (например, 7), то делим её «почти пополам»: так, чтобы число монет в «половинках» отличалось на единицу ($7 = 3 + 4$). При этом из первой нечётной кучи положим меньшую половинку на левую чашу, а бóльшую — на правую, со второй нечётной кучей поступим наоборот и т. д. Поскольку число нечётных куч *чётно*, на чашах окажется поровну монет.

В результате при первом взвешивании у нас будут на каждой чаше кучи по семь монет, при втором $3+4$, при третьем $1+2+2+2$. В случае трёх неравновесий обе фальшивки по-прежнему оказываются в одной куче, и после последнего взвешивания их можно будет гарантированно разложить по разным чашам.

Путь к решению. а) Идея «деления куч пополам» легко усматривается, если сначала решить задачу для четырёх монет за одно взвешивание, а затем для восьми монет за два взвешивания.

б) При меньшем числе монет не получится делить каждую кучу на две *равные* части. Но это и не принципиально. Важно, чтобы размер куч уменьшался: был не меньше восьми, затем не меньше четырёх и т. д. А равное число монет на чашах можно обеспечить и сложением *неравных* куч.

Задача 6.10. Примеров много, два приведены на рис. 25а–б.

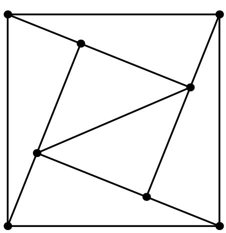


Рис. 25а

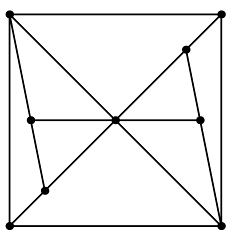


Рис. 25б

Путь к решению. При попытке построить пример обычно возникает проблема: какой-то треугольник Т граничит менее чем с тремя другими. Такой треугольник Т обязательно крайний, то есть примыкает к стороне квадрата, иначе у него точно есть соседи с трёх сторон. Можно ли ему помочь? Да, разобьём соседний треугольник на два или три треугольника так, чтобы общий отрезок тоже разбился на две или три части. Если сосед был не крайний, то и полученные части будут не крайними и будут иметь по три соседа. Итак, можно ослабить условие: достаточно *разбить квадрат на треугольники так, чтобы у каждого было не более трёх соседей и каждый граничил с не крайним*. На рис.

25в видим пример такого разбиения. У каждого из крайних треугольников ровно по одному соседу. Проведя отрезки AB и AC, обеспечим тремя соседями правый нижний треугольник. Проведя затем отрезки BF, BG, CD и CE, обеспечим тремя соседями два остальных крайних треугольника.

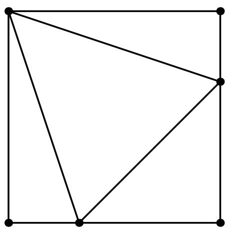


Рис. 25в

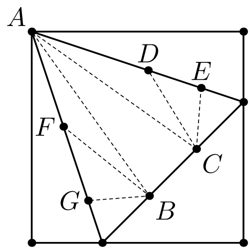


Рис. 25г

Идеология

Способные и активные школьники так и сыплют попытками решений, 80% из которых содержат интересные идеи, но в целом неверны или не закончены. Преподаватель должен научить учеников такие *частичные* решения распознавать и доводить до *полных*. «Ослабление условий» — один из приёмов, помогающий такой доводке. Этот приём универсальный, он работает не только в комбинаторных задачах, но и в геометрии (см. [1], глава «Методы подобия и гомотетии»). Предпосылкой к применению служит необходимость построения сложной конструкции. Однако нет формальных признаков, которые указали бы, когда приём сработает, а когда нет. Помогают аналогии с житейскими ситуациями. Поэтому и надо показать, что между житейской и математической логикой есть тесная связь. Именно этот момент и вызывает наибольшую трудность. Ученикам кажется, что приёмы, изложенные на житейском языке, не надёжны, не точны, не универсальны. На самом деле им просто трудно переводить с житейского языка на математический. Преодолеть эту трудность поможет серия хорошо выстроенных обсуждений. Навык такого перевода даже более важен, чем усвоение приёма «Ослабление условий». Конечно, на обучение переводу требуется время. Часто у учителя возникает искушение *ускорить процесс* обучения, формулируя задачи на рафинировано-математическом языке. Но выигрыш будет мнимым: мы получим, скажем, школьника, умеющего решить квадратное уравнение, но не способного решить геометрическую или комбинаторную задачу, легко сводящуюся к такому уравнению.

Занятие 7

Конструкции в классической геометрии

Меня научили строить циркулем и линейкой —
отлично, пойду в строители!

На этом занятии школьники должны увидеть, что изученные ранее методы работают и в классической геометрии, которая тоже пронизана конструкциями. Это поможет развеять заблуждение о делении математики на «школьную» и «кружковую» и глубже понять геометрию.

Как и предыдущее, это занятие лучше построить как серию обсуждений. Простые задачи школьники решают самостоятельно, а потом кто-нибудь из них рассказывает решение у доски, и оно обсуждается. Сложные задачи надо будет решать коллективно, учитель должен подводить учеников к следующему шагу решения. Среди прочего надо обсудить, где в задаче есть конструкция и как решение связано с ранее изученными методами.

Если в геометрической задаче спрашивается: «Верно ли утверждение...», это уже непривычно. И уж совсем сбивает с толку, если ответ «Нет». Школьники не понимают, как должно выглядеть решение такой задачи. Даже найдя контрпример, они не знают, как с ним быть.

Учитель должен объяснить им, что достаточно просто *предъявить* контрпример. Объяснять, как контрпример придуман, не требуется. С другой стороны, не всегда очевидно, почему предъявленная конструкция служит контрпримером к данному утверждению. Вот это пояснить необходимо.

Ещё для школьников непривычен перебор в геометрических задачах. Даже хорошо умея делать перебор в ребусах, школьники могут не решиться выполнить его в геометрической задаче. Между тем, случаев взаимного расположения элементов чертежа (точек, прямых, окружностей и т. п.) может быть несколько, и решения в разных случаях не обязательно аналогичны. Объясните, что бояться такого перебора не надо. Более того, важно не пропустить случаи.

Умение заметить и безошибочно выполнить перебор очень помогает в задачах на *неочевидное расположение*. Трудность их в том, что учащиеся не замечают, что случаев больше одного, либо пропускают самый главный случай.

Обязательно обратите внимание учащихся на то, что некоторые известные им приёмы решения геометрических задач являются частными случаями общих методов. Скажем, *метод подобия* в задачах на построение есть частный случай *ослабления условий*: ведь вспомогательная подобная фигура удовлетворяет лишь части условий задачи. А *дополнительное построение* — это применение *редукции*. В частности, применяя *метод спрямления*, мы сводим трудную задачу сравнения суммы длин с длиной отрезка к более лёгкой задаче сравнения двух отрезков.

Задача 7.1. В четырёхугольнике есть не менее трёх равных сторон и две пары равных углов. Обязательно ли это ромб?

Решение. Не обязательно. Подойдёт и любая трапеция, у которой одно из оснований равно обеим боковым сторонам. Она будет равнобокой, поэтому равны пары углов при основаниях.

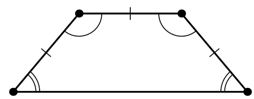


Рис. 26

Путь к решению. Заметим, что, сложив по углу из каждой пары, мы получим в сумме 180°. Где-то два таких угла примыкают к одной стороне, поэтому есть пара параллельных сторон. Если равны противоположные углы, то параллельны обе пары противоположных сторон, и тогда, ввиду равенства сторон, это действительно ромб. Если равны пары соседних углов, то это может быть и трапеция. В ней основания не равны, значит, равны боковые стороны и одно из оснований. Вот и контрпример.

Задача 7.2. Точку T внутри треугольника ABC назовём *рациональной*, если все углы треугольников ABT, BCT и ACT измеряются рациональным числом градусов. Докажите, что если в остроугольном треугольнике есть рациональная точка, то таких точек в нём не менее трёх.

Решение. Назовём *рациональным* угол, измеряемый рациональным числом градусов. Пусть в треугольнике

ABC есть рациональная точка T. Тогда углы треугольника ABC складываются из углов треугольников ABT, BCT и ACT и поэтому тоже рациональны.

Рассмотрим замечательные точки треугольника ABC: центр описанной окружности O, точку пересечения биссектрис I и точку пересечения высот H. Нетрудно выразить углы соответствующих этим точкам треугольников через углы исходного треугольника: $\angle BOC = 2\angle A$, $\angle OBC = 90^\circ - \angle A$, $\angle IBC = \frac{1}{2}\angle B$, $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$, $\angle BHC = 180^\circ - \angle A$, $\angle HBC = 90^\circ - \angle C$. Подставляя рациональные значения для $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, получим рациональные значения и для этих углов. Во всех треугольниках, кроме равностороннего, точки H, I и O различны. В случае равностороннего треугольника все эти точки совпадают, но можно ещё выбрать точки пересечения биссектрис треугольников AOB и BOC (убедитесь сами, что они будут рациональными точками и в треугольнике ABC).

Путь к решению. Понятно, что, складывая, вычитая и деля на целые числа рациональные углы, мы тоже будем получать рациональные углы. А для каких точек T треугольника ABC можно хорошо выразить углы треугольника ABT через углы ABC? Вышеупомянутые замечательные точки сразу приходят на ум... Та же идея срабатывает как дополнительный шаг для равностороннего треугольника.

Задача 7.3. Прямая разбила треугольник на меньший треугольник, подобный исходному, и четырёхугольник, симметричный относительно своей диагонали. Докажите, что исходный треугольник прямоугольный.

Решение. Обозначим исходный треугольник ABC. Без ограничения общности можно считать, что прямая пересекает его в точках K и L на сторонах AC и BC соответственно, а четырёхугольник $AKLB$ симметричен относительно диагонали AL.

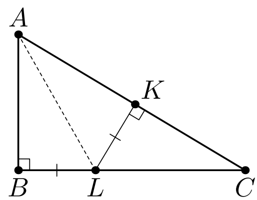


Рис. 27

В силу подобия $\angle CKL$ равен одному из углов A или B. Допустим, что $\angle CKL = \angle A$. Тогда $KL \parallel AB$ и $\angle KLA =$

$= \angle LAB$. Но в силу симметрии $\angle KAL = \angle LAB$. Тогда треугольник AKL равнобедренный, а четырёхугольник $AKLB$ ввиду симметрии является ромбом. Но это невозможно: стороны AK и BL лежат на пересекающихся прямых, поэтому они не параллельны.

Остается случай $\angle CKL = \angle B$. Но ввиду симметрии и смежный к CKL угол AKL равен углу B. Поэтому $\angle CKL = \angle AKL = 90^\circ$, а значит, и $\angle B = 90^\circ$.

Путь к решению. Некоторые ученики ошибочно считают, что подобный треугольник отсекается только прямой, параллельной основанию. Сведя этот случай к противоречию, они попадут в тупик. На самом деле они всего лишь сделали неполный перебор. Как только осознаешь это и найдёшь второй случай, доказательство прямоугольности легко получается.

Задача 7.4. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$ не превосходит $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC)$.

Решение. Разрежем четырёхугольник $ABCD$ диагональю AC. Если симметрично отразить треугольник ABC относительно серединного перпендикуляра к AC, то получится равный ему треугольник $AB'C$ (при этом $AB' = BC$, $CB' = AB$). Площади четырёхугольников $ABCD$ и $AB'CD$ равны.

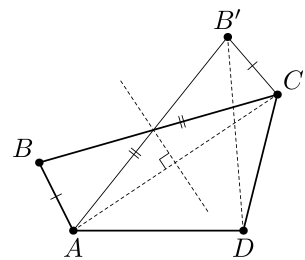


Рис. 28

Проведём в новом четырёхугольнике диагональ $B'D$. Она лежит внутри либо снаружи четырёхугольника. Соответственно, площадь $AB'CD$ равна сумме либо разности площадей треугольников $AB'D$ и $CB'D$. В обоих случаях она не превосходит суммы площадей этих треугольников, а они, в свою очередь, не превосходят соответственно $\frac{1}{2}AB' \cdot AD$ и $\frac{1}{2}CB' \cdot CD$. Заменяя AB' на BC, а CB' на AB, получаем требуемое неравенство.

Путь к решению. Половины произведений сторон оценивают площадь когда они являются сторонами одного треугольника. Соответственно, нетрудно доказать, что площадь четырёхугольника $ABCD$

не превосходит $\frac{1}{2}(AB \cdot AD + CD \cdot BC)$. Но как можно свести *противоположные* стороны в один треугольник? Идея: *перекроим* четырёхугольник (то есть разрежем его на части и соединим их по-новому). Такая перекройка — важный инструмент при работе с площадями. При этом можно и нужно при перекройке менять части на равновеликие.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.5. Узника высадили на плато в виде буквы Т (см. рис. 29), окружённое пропастью постоянной ширины 5 м. У него нашлись две лёгкие доски длиной 4,8 м каждая. Как ему устроить устойчивый мостик через пропасть, если закрепить или придавить концы досок нечем?

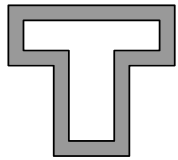


Рис. 29

Задача 7.6. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он циркулем и линейкой разбил прямоугольный треугольник с углом 30° на два меньших и провёл в одном из них медиану, а в другом — параллельную ей биссектрису. Могут ли слова барона быть правдой?

Задача 7.7. Каждая из диагоналей разбивает четырёхугольник на два равнобедренных треугольника. Обязательно ли диагонали перпендикулярны?

Задача 7.8. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AC и BC взяты точки P и Q соответственно так, что $\angle PBC = \frac{1}{3}\angle ABC$ и $\angle QAC = \frac{1}{3}\angle BAC$. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке T. Докажите, что $TP = TQ$.

Задача 7.9*. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A = 85^\circ$, $\angle B = 115^\circ$, $AD = BC$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке M. Найдите $\angle MAB$.

Можно также использовать задачи 2.2, 3.7, 3.10, 3.11, 5.4, 5.10, 6.8, 6.10, A5, A6, A8, A10, A16, A22, A24, B1, B2, B3, B6, B8, B12, B15, B18, B27, B30, B33, B34, C1, C2, C4, C5, C15, C21, C23, C25, C26, C27, C28, D2, D3, D6, D7, D8, D9, D11, D12.

Задача 7.5. Ответ: см. рис. 30.

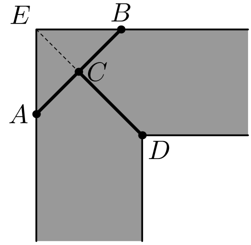


Рис. 30

Выберем такой угол, чтобы точка E была на плато, а D — по другую сторону рва. Доска AB опирается на края рва, доска CD — на середину C доски AB и угол D противоположного берега. Если $AB = 4{,}8$ м, то $EC = \frac{AB}{2} = 2{,}4$ м, поэтому $CD = ED - 2{,}4 = 5\sqrt{2} - 2{,}4 < 5 \cdot 1{,}42 - 2{,}4 = 4{,}7$. Остаётся ещё небольшой запас, и можно чуть сдвинуть концы досок от края рва и упереть их попрочнее. Запас этот, конечно, всё равно слишком мал, чтобы пользоваться конструкцией в нормальной ситуации, но положение отчаянное, а других вариантов не видно...

Путь к решению. Понятно, что одну доску надо опереть на другую. При этом точка опоры должна быть над пропастью, а концы другой доски — нет. Так можно положить доску только в углу. К сожалению, именно здесь расстояние до другого берега измеряется не прямо, а по диагонали. Но аккуратные подсчёты (счёт *узких мест*) показывают, что длины досок хватает даже с небольшим запасом.

Задача 7.6. Ответ: могут.

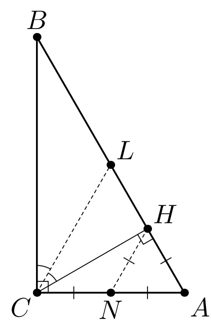


Рис. 31

Пусть $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Проведём высоту CH. Так как $\angle A = 60^\circ$, то $AC = 2AH$. Медиана HN прямоугольного треугольника CHA равна половине гипотенузы, а значит, $HA = HN$. Поскольку $\angle A = 60^\circ$, треугольник HNA равносторонний. Значит, и $\angle HNA = 60^\circ$. В треугольнике CHB проведём биссектрису CL. Тогда и $\angle LCA = 60^\circ$, поэтому биссектриса CL и медиана HN параллельны.

Путь к решению. В данном треугольнике есть углы в 30° и 60°. Эти же углы возникают при проведении многих замечательных линий: высот, биссектрис, медиан. Остаётся подобрать разбиение и линии так, чтобы они образовали с одной и той же прямой равные углы 30° или 60°.

Замечание. У этой задачи есть и другие решения. В частности, есть решение, пригодное для любого треугольника, кроме правильного.

Задача 7.7. Ответ: не обязательно.

Рассмотрим равнобокую трапецию $ABCD$, где боковая сторона AB равна меньшему основанию BC, а диагональ AC — большему основанию AD. Её углы легко считаются: если $\angle BAC = \angle BCA = \angle CAD = x$, то $\angle ACD = \angle CDA = \angle BAD = 2x$, сумма углов треугольника ACD равна $5x$, значит, $x = 36^\circ$, а угол между диагоналями 72°.

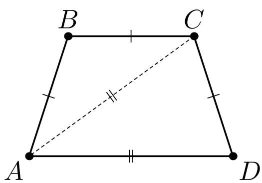


Рис. 32

Путь к решению. Сразу приходит в голову ромб, но там диагонали перпендикулярны. А вот как догадаться до трапеции из решения? Переформулируем задачу: мы рассматриваем всевозможные тройки точек и хотим, чтобы среди попарных расстояний всегда нашлись равные. В ромбе таких расстояний три, но зато четыре из них равны. А нельзя ли так выбрать вершины, чтобы было всего два попарных расстояния? За расстояниями легче следить, когда точки лежат на окружности: ведь тогда расстояния соответствуют дугам. Меньше всего разных дуг возникает для правильных многоугольников. Скажем, у квадрата и правильного пятиугольника разных попарных расстояний всего два. Квадрат мы уже отвергли, а вот четыре точки в вершинах правильного пятиугольника — как раз то, что нам надо!

Разумеется, этот пример можно найти и разумным перебором, выписывая случаи, какие именно стороны или диагонали при разбиении оказываются равными.

Задача 7.8. Соединим точку пересечения K биссектрис треугольника ABT с его вершинами (см. рис. 33). В результате угол CAB разобьётся на три равных. Поскольку $\angle ATB = 180^\circ - \frac{2}{3}(\angle CAB + \angle CBA) = 180^\circ - \frac{2}{3} \cdot 90^\circ = 120^\circ$, получаем, что $\angle ATP = 60^\circ$ и $\angle ATK = \angle KTB = 60^\circ$. Значит, треугольники ATP и ATK равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, а тогда $TP = TK$. Аналогично $TQ = TK$.

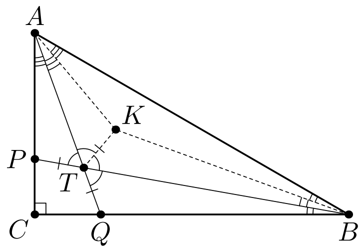


Рис. 33

Путь к решению. Трудно *непосредственно* использовать угол, равный трети или половине другого угла. Удобнее *разбить* больший угол на части, равные меньшему, и воспользоваться *равенством* углов. Это подсказывает провести биссектрисы углов TAB и TBA, что, в свою очередь, обращает внимание на треугольник ABT. Найдя $\angle ATB = 120^\circ$, мы захотим и в нём провести биссектрису и рассмотреть точку пересечения биссектрис. Теперь задача свелась к доказательству равенства треугольников.

Задача 7.9*. Ответ: 80°.

По свойству серединного перпендикуляра $MA = MB$, $MC = MD$, поэтому треугольники AMD и BMC равны по трём сторонам и $\angle MAD = \angle MBC$. Обозначим $\angle MAB = \angle MBA = \alpha$ (заметим, что угол α острый как угол при основании равнобедренного треугольника). Заметим ещё, что точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Для расположения точки M есть два случая.

Случай 1: точки M, C и D лежат по одну сторону от прямой AB.

Поскольку $\alpha < 90^\circ < 115^\circ$, точка M лежит в углу ABC. Значит, тогда $\angle MBC = 115^\circ - \alpha > 0$.

Треугольники MBC и MAD равны по трём сторонам, поэтому и $\angle MAD > 0$. Для угла α тоже есть три случая.

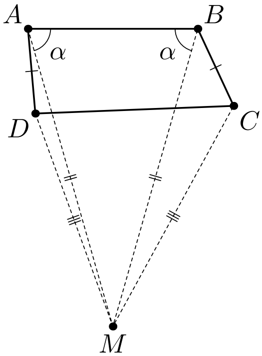


Рис. 34а

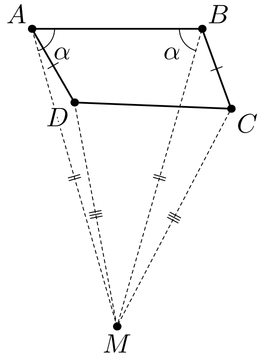


Рис. 34б

Случай 1.1: $\alpha < 85^\circ$. Тогда точка M лежит в углу DAB (см. рис. 34а) и $\angle MAD = 85^\circ - \alpha$. Из равенства $\angle MBC = \angle MAD$ получаем $85^\circ - \alpha = 115^\circ - \alpha$, что невозможно.

Случай 1.2: $\alpha > 85^\circ$. Тогда точка M лежит вне угла DAB (см. рис. 34б) и $\angle MAD = \alpha - 85^\circ$. Из равенства $\angle MBC = \angle MAD$ получаем $\alpha - 85^\circ = 115^\circ - \alpha$, а значит, $\alpha = 100^\circ$. Но и это невозможно, поскольку угол α острый.

Случай 1.3: $\alpha = 85^\circ$. Но тогда $\angle MAD = 0 \neq \angle MBC$. Противоречие.

Случай 2: точки M и C лежат по разные стороны от прямой AB.

Тогда $\angle MAD = \alpha + 85^\circ$. Угол MBC не может равняться $\alpha + 115^\circ$, так как тогда он не будет равен углу MAD. Значит, объединение углов MBA и ABC дополняет угол MBC до 360°, то есть $\angle MBC = 360^\circ - (\alpha + 115^\circ) = 245^\circ - \alpha$. Из равенства $85^\circ + \alpha = 245^\circ - \alpha$ получим $\alpha = 80^\circ$. Этот единственно возможный случай изображён на рис. 34в.

Замечание. Случай $\angle MAD = 360^\circ - (\alpha + 85^\circ)$ рассматривать не надо, так как $\alpha + 85^\circ < 180^\circ$.

Путь к решению. Не сразу понятно, что это задача на поиск возможной конструкции. Попытка нарисовать какой-нибудь «естественный» чертёж приводит к равенству вида $85^\circ + \alpha = 115^\circ + \alpha$. Хочется сказать, что условия задачи противоречивы. Но что, собственно, мешает построить четырёхугольник $ABCD$, задав произвольно длину AD? Предположение, что перпендикуляры не пересекутся, тоже не проходит: тогда бы четырёхугольник был параллелограммом или равнобокой трапецией, но в них не может быть пары углов 85° и 115°. Осознав всё это, приходим к необходимости *полного перебора случаев*. Как только удалось найти нужный случай и обосновать чертёж, ответ можно без труда найти многими способами.

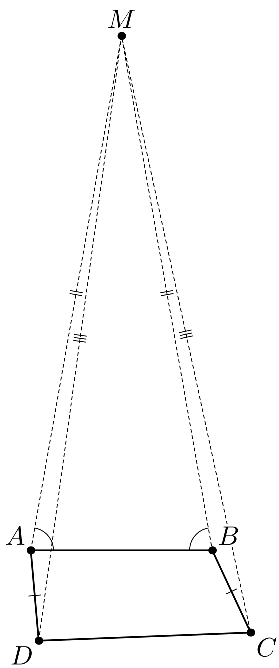


Рис. 34в

Приложение

Дополнительные задачи

А: 6–7 класс

А1. В мешке 24 кг гвоздей. Как, имея только чашечные весы без гирь, отмерить 9 кг гвоздей?

А2. Числитель и знаменатель положительной дроби увеличили на 10. Могла ли дробь при этом уменьшиться?

А3. Найдите все решения ребуса П $\times$ ЕРЕ = БОР.

А4. Можно ли разложить 99 орехов на 10 кучек так, чтобы любые кучки отличались, но не более чем в три раза?

А5. Можно ли нарисовать на плоскости 7 прямых так, чтобы никакие три не проходили через одну точку, а всего было а) ровно 22 точки пересечения; б) ровно 20 точек пересечения?

А6. В круге отметили точку. Разрежьте круг на две части и сложите из них новый круг так, чтобы отмеченная точка попала в его центр.

А7. В клетках клетчатого прямоугольника 3×5 лежат 15 разных монет. Они образуют восемь рядов: три горизонтальных и пять вертикальных. Известно, что семь рядов имеют одну и ту же массу, а восьмой — другую. Как определить этот ряд с помощью одного взвешивания на чашечных весах без гирь?

А8. На острове Гдетотам 20 городов, расстояние между любыми городами не менее 100 км. Местность, от которой до ближайшего города больше 30 км, считается провинцией. Раньше более 90% территории Гдетотама было провинцией, пока ещё одна деревня не стала городом. Может ли теперь провинция составлять менее 10% территории Гдетотама?

А9. На нижней ступеньке лестницы из 130 ступенек лежит 130 камней, остальные ступеньки пусты. За одну ходку Сизиф может взять с любой ступеньки группу из одного или нескольких камней (не обязательно всех), лежащих на этой ступеньке, и переложить всю группу вверх или вниз на число ступенек, равное числу камней в группе (группу из одного камня на соседнюю ступеньку, группу из двух камней — через одну ступеньку вверх или вниз и т. д.). Помогите Сизифу переложить все камни на соседнюю ступеньку, сделав не более 15 ходок.

А10. а) Поросёнок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы. б) А может ли Наф-Наф добиться, чтобы при этом каждые два квадрата граничили друг с другом?

А11. В школьном кружке мальчиков больше, чем девочек, но у каждого участника больше подруг, чем друзей-мальчиков. Каково наименьшее число участников кружка?

А12. Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составили разное число слов: больше всех — Аня, меньше всех — Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова. За слово даётся 1 очко, если оно есть у двух игроков, 2 очка — если у одного; слова, общие у всех трёх игроков, вычёркиваются. Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех — Аня?

А13. Четыре кузнеца должны подковать пять лошадей. У каждой лошади надо подковать все четыре ноги, каждый кузнец тратит на одну подкову пять минут. Можно ли закончить работу быстрее чем за полчаса? (*Лошадь не может стоять на двух ногах.*)

А14. Петя на несколько лет младше Васи. Могло ли в 2014 году каждому из них исполниться столько лет, какова сумма цифр его года рождения?

А15. Записав числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{10}$ в некотором порядке, соедините их знаками четырёх арифметических действий так, чтобы полученное выражение равнялось 0. (*Скобки использовать нельзя.*)

А16. Многоугольником (см. рис. 35), перегибая его по границам клеток, можно *обернуть* квадрат 2×2, то есть покрыть все клетки квадрата в один слой с двух сторон. Можно ли каким-нибудь многоугольником из 200 клеток с периметром 400 обернуть квадрат 10×10?

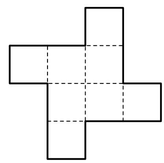


Рис. 35

А17. У Пети есть 10 карточек с числами $1, 2, \ldots, 10$ и пять палочек для дробных черт. Может ли Петя из всего этого составить пять обыкновенных дробей так, чтобы никакая дробь не равнялась целому числу, а сумма всех пяти дробей была целым числом?

А18. а) Можно ли в таблице 13×13 отметить менее половины клеток так, чтобы любая не отмеченная клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной?

б)* Можно ли в таблице 13×13 отметить часть клеток так, чтобы любая клетка (как отмеченная, так и не отмеченная) граничила по стороне ровно с одной отмеченной?

А19. а) Шли с работы два маляра и встретили ещё двоих маляров. У каждого из маляров руки испачканы краской своего цвета. Каждый хочет пожать руку каждому из встречных, но не хочет испачкаться новой краской. Удастся ли им обменяться рукопожатиями, если есть две чистые резиновые перчатки? б) Тот же вопрос, но один маляр встретил троих.

А20. Даны два бикфордовые шнура, каждый из которых горит ровно минуту, если его поджечь с одного конца (но сгорать может неравномерно). Как с помощью этих шнуров отмерить 45 секунд? (*Поджигать шнур можно с любого из двух концов.*)

А21. Есть одна золотая, три серебряные и пять бронзовых медалей. Известно, что одна из них фальшивая: легче настоящей. Настоящие медали из одного металла весят одинаково (а из разных — не одинаково). Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую медаль?

А22. Пусть на плоскости отмечено несколько точек. Назовём прямую *нечестной*, если она проходит ровно через три отмеченные точки и по разные стороны от неё отмеченных точек *не поровну*. Можно ли отметить 7 точек и провести для них 5 нечестных прямых?

А23. Три футбольные команды сыграли по разу каждая с каждой. Узнав про каждую команду общее число забитых и общее число пропущенных мячей, барон Мюнхгаузен сказал: «Могу доказать, что ни один матч не закончился вничью». Могут ли его слова быть правдой? (*Гол, забитый себе, засчитывается как забитый противником.*)

А24. Малый и Большой острова имеют прямоугольную форму и разделены на прямоугольные графства. В каждом графстве проложена дорога по одной из диагоналей. На каждом острове эти дороги образуют замкнутый путь, который ни через какую точку не проходит дважды. Вот как устроен Малый остров, где всего 6 графств (см. рис. 36). Нарисуйте, как может быть устроен Большой остров, если в нем нечётное число графств. Сколько графств у вас получилось?

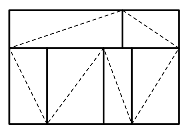


Рис. 36

А25. Я задумал целое число от 1 до 3. Вы можете задать мне один вопрос, на который я честно должен ответить «Да», «Нет» или «Не знаю», после чего вы должны наверняка отгадать задуманное число. Придумайте такой вопрос.

А26. а) Во время матча «„Реал“ — ЦСКА» Вася задумался: можно ли на шахматную доску поставить 11 коней, 11 королей и 1 мяч (бить не умеет) так, чтобы не было фигуры, стоящей под боем другой фигуры? б) Тот же вопрос про 12 коней, 12 королей и мяч.

А27. Не отрывая карандаша от бумаги и не проводя линии дважды, зачеркните четырьмя отрезками все 9 точек на рис. 37.

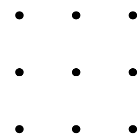


Рис. 37

В: 7–8 класс

В1. Существует ли десятиугольник, все стороны которого лежат на пяти прямых?

В2. У двух треугольников равны по две стороны, а также равны высоты, проведенные к третьей стороне. Обязательно ли эти треугольники равны?

В3. На карте есть четыре треугольные страны. Может ли каждая иметь с каждой из остальных участок границы ненулевой длины?

В4. Существуют ли такие натуральные числа $a_1 > a_2 > > a_3 > \ldots > a_{10}$, что

$$\text{НОД}(a_1, a_2) < \text{НОД}(a_2, a_3) < \ldots < \text{НОД}(a_9, a_{10})?$$

В5. Докажите, что между натуральными числами A и $10A$ найдётся число с суммой цифр на 5 больше, чем у A.

В6. Дана длинная односторонняя линейка с двумя метками. Она позволяет проводить прямые через пару отмеченных точек; ещё можно приложить линейку к прямой, совместить одну метку с отмеченной точкой и отметить точку на прямой у второй метки. Постройте какой-нибудь квадрат.

В7. Натуральное число не оканчивается нулём. Обязательно ли найдётся кратное ему натуральное число, в записи которого (читая слева направо) каждая следующая цифра не меньше предыдущей?

В8. На плоскости отмечены несколько (больше трёх) точек. Известно, что если выкинуть любую точку, то оставшиеся будут симметричны относительно какой-нибудь прямой. Верно ли, что всё множество точек тоже симметрично относительно какой-нибудь прямой?

В9. На шахматной доске расставлено несколько чёрных и белых коней так, что каждый конь (как белый, так и чёрный) бьёт больше белых коней, чем чёрных. Может ли чёрных коней быть больше, чем белых?

В10. Можно ли из произведения

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100!$$

вычеркнуть один из 100 факториалов так, чтобы оставшееся произведение было квадратом целого числа?

В11. Восемь шахматистов сыграли турнир в один круг. Давали 1 очко за победу, 0,5 очка за ничью, 0 за поражение. После этого те же шахматисты разыграли кубок по олимпийской системе: разбились на пары, проигравшие выбыли, оставшиеся снова разбились на пары и т. д. Все кубковые встречи закончились так же, как встречи тех же игроков в турнире, ничьих в кубковых встречах не было. Могло ли случиться, что кубок выиграл шахматист, набравший в турнире меньше всех очков?

В12. Барон Мюнхгаузен утверждает, что смог разрезать некоторый равнобедренный треугольник на три треугольника так, что из любых двух можно сложить равнобедренный треугольник. Могут ли слова барона быть правдой?

В13. Петя написал восемь попарно различных чисел. Вася их не видел, но утверждает, что их можно так расставить в вершинах куба, чтобы суммы на гранях тоже были все различны. Прав ли Вася?

В14. а) Можно ли клетчатую доску 99×99 раскрасить в два цвета так, чтобы каждая клетка граничила по стороне ровно с двумя клетками другого цвета?

б) Тот же вопрос для доски 100×100.

В15. а) Приведите пример треугольника, все стороны и высоты которого измеряются целым числом сантиметров.

б) Могут ли в остроугольном треугольнике все стороны и высоты измеряться целым числом сантиметров?

В16. а) Можно ли расставить девять королей на *белых* полях шахматной доски так, чтобы они побили *все* свободные поля (как чёрные, так и белые)?

б) Можно ли так расставить десять королей?

В17. а) В поселке два избирательных участка. На каждом из них два года подряд подсчитывали, какой процент от всех пришедших избирателей голосует за партию серых. В этом году этот показатель на обоих участках оказался ровно на 20% больше, чем в прошлом[3], а в целом по поселку — ровно на 20% меньше, чем в прошлом. Мог ли подсчёт голосов оказаться верным?

б) Тот же вопрос, но участков — три.

В18. Замкнутая ломаная пересекает каждое свое звено ровно один раз. Может ли каждая точка самопересечения делить оба пересекающихся звена в отношении $2:1$?

В19. а) Совет директоров фирмы «Распил» в составе 100 человек возглавляет президент Навроде. Подошел срок перевыборов. Их проводят так: совет делят на несколько равных по численности комитетов, в каждом большинством голосов выбирают председателя, а председатели большинством голосов выбирают президента. Распределение по комитетам определяет сам Навроде. Может ли он обеспечить себе переизбрание, если его сторонников в совете (вместе с ним) всего 36 человек?

б) То же, но сторонников всего 33?

---

[3] То есть если в прошлом году было $n\%$, то в этом $(n+20)\%$.

в) Сторонников всего 27, но выборы в комитетах двухступенчатые: комитет делится на равные подкомитеты, каждый подкомитет большинством голосов выбирает выборщика, а выборщики большинством голосов выбирают председателя комитета. А затем председатели комитетов выбирают президента. Деление на подкомитеты тоже задает Навроде. (*Во всех голосованиях при равенстве голосов побеждает оппозиция.*)

В20. «В этой фразе $\frac{1}{\dots}$ всех цифр — цифры $*$, доли цифр $*$ и $*$ одинаковы и равны $\frac{1}{\dots}$, а на долю всех остальных цифр приходится $\frac{1}{\dots}$». Вставьте вместо звёздочек три разные цифры, а вместо многоточий — три разных числа так, чтобы фраза была верной.

В21. В вершинах шестиугольника $ABCDEF$ лежали шесть одинаковых на вид шариков: в A — массой 1 г, в B — 2 г, в C — 3 г, в D — 4 г, в E — 5 г, в F — 6 г. Шутник поменял местами два шарика в противоположных вершинах. Как за одно взвешивание на двухчашечных весах без гирь определить, какие именно шарики переставлены?

В22. Существует ли такой набор из десяти натуральных чисел, что все они друг на друга не делятся, а их квадраты делятся на каждое из чисел набора?

В23. Дракон запер в пещере 20 гномов и сказал: «У меня много синих и красных колпаков. Из них завтра утром я надену на каждого из вас по колпаку, цвет для каждого выберу сам. Вы сможете увидеть цвета колпаков на каждом, кроме себя. После этого каждый из вас втайне от других назовёт мне цвет. Если у десятерых или больше названный цвет совпадёт с цветом его колпака, всех 20 отпущу. Если меньше — всех съем на обед». Как гномам договориться действовать, чтобы спастись? (*Во время показа нет возможности подать сигнал.*)

B24. Рёбра деревянного непрозрачного куба раскрасили в четыре цвета Б, К, О и С так, что на каждой грани встречаются все цвета. Докажите, что можно так поставить куб, чтобы на верхней грани цвета шли по часовой стрелке в порядке Б, О, К, С.

B25. На какое наименьшее число прямоугольников можно разрезать клетчатую фигуру на рис. 38, если а) резать можно только по сторонам клеток; б) резать можно как угодно, не только по сторонам клеток?

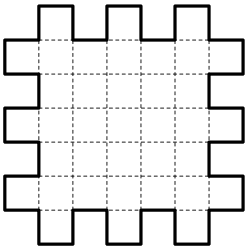


Рис. 38

B26. Может ли свеча внутри пустой многоугольной комнаты не освещать полностью ни одну из стен?

B27. Есть три одинаковых кирпича и линейка. Как можно без вычислений непосредственно измерить длину большой диагонали кирпича?

B28. Докажите, что существует палиндром, делящийся на 5^{100}. (Напомним, что *палиндром* — это число, которое не меняется при записи его цифр в обратном порядке.)

B29*. Есть кран с водой, раковина и три сосуда объёмом 3 л, 4 л и 5 л без делений, где в самом маленьком сосуде — 3 л сиропа. Как с помощью переливаний получить 6 л смеси воды с сиропом в пропорции 1 : 1?

B30. Может ли прямая разбить какой-нибудь шестиугольник на четыре равных треугольника?

B31*. В ряд слева направо лежит 33 кошелька, в каждом по 100 монет. Из одного кошелька часть монет переложили: по одной монете в каждый из кошельков справа от него. За один вопрос можно узнать суммарное число монет в любом наборе кошельков. За какое наименьшее число вопросов можно гарантированно вычислить «облегчённый» кошелёк?

B32*. Найдётся ли строка из десяти натуральных чисел, в которой каждое следующее число делится на предыдущее, но имеет меньшую сумму цифр?

B33*. От старой крепости на равнине остались только высокие стены. На плане крепость выглядит как многоугольник. Федя стоит снаружи и видит крепость. Может ли Федя не видеть полностью ни одну из стен крепости, в какую бы сторону он не повернулся?

B34*. На плоскости расположен квадрат и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой). Нужно определить, лежит ли точка P внутри квадрата. Можно ли это наверняка узнать менее чем за четыре вопроса?

B35*. Бабе-яге подарили большие песочные часы на 5 минут и маленькие — на 2 минуты. Зелье должно непрерывно кипеть ровно 8 минут. Когда оно закипело, весь песок в больших часах находился в нижней половине, а в маленьких какая-то (неизвестная) часть песка находилась в верхней половине, а остальная часть — в нижней половине. Помогите Бабе-яге отмерить ровно 8 минут.

(*Песок всё время сыплется с постоянной скоростью. На переворачивание часов время не тратится.*)

С: 8–9 класс

С1. Две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого. Треугольники подобны. Обязательно ли они равны?

С2. В городе Строгино в метро строго запрещено провозить предметы, у которых длина, ширина или высота больше 1 м. Тем не менее школьнику Васе удалось провезти лыжи длиной 1,5 м. Как?

С3. Функция $ax^2 + bx + c$ при всех целых x принимает целые значения. Обязательно ли все коэффициенты a, b, c целые?

С4. Может ли сумма расстояний от точки внутри выпуклого четырёхугольника до всех его вершин быть больше периметра?

С5. Верно ли, что у любого треугольника можно записать в вершинах по неотрицательному числу так, чтобы сумма чисел в концах каждой стороны равнялась её длине?

С6. Все виды растений России были занумерованы подряд числами от 2 до 20 000 (числа идут без пропусков и повторений). Для каждой пары видов растений запомнили наибольший общий делитель их номеров, а сами номера были забыты (в результате сбоя компьютера). Можно ли для каждого вида растений восстановить его номер?

С7. а) Прямоугольная доска разбита прямыми, параллельными сторонам, на 99 строк и 99 столбцов, то есть на 99^2 клеток-прямоугольников. Некоторые прямоугольники отметили. Среди отмеченных прямоугольников нет равных, а каждый неотмеченный равен какому-нибудь отмеченному. Может ли быть отмечено ровно 2000 прямоугольников?

б) А ровно 1999 прямоугольников?

в) А 800 прямоугольников для доски, разбитой на 30 строк и 30 столбцов?

С8. Докажите, что можно выбрать стозначное составное число, которое при одной замене любой цифры на любую другую останется составным.

С9. Можно ли числа от 1, 2, ..., 100 расставить в другом порядке так, чтобы среднее арифметическое любой группы из двух или более подряд стоящих чисел не было целым?

С10. На каждой грани трёх кубиков стоит по натуральному числу. Для пары кубиков А и Б составим 36 упорядоченных пар вида (грань А, грань Б). Заменим теперь каждую пару граней на пару чисел, стоящих на этих гранях. Скажем, что кубик А *выигрывает* у кубика Б, если более чем в половине пар первое число больше второго. Может ли случиться, что первый кубик выигрывает у второго, второй — у третьего, а третий — у первого?

С11. По круглому треку в одну сторону ездят три гонщика. Скорости постоянны, но все различны. У одного из гонщиков находится фляжка с питьём. Если при обгоне у кого-то из двоих есть фляжка, тот всегда передаёт её другому. Может ли фляжка никогда не попадать к одному из гонщиков? (*Известно, что тройных обгонов не бывает*.)

С12*. Барон Мюнхгаузен говорит, что у него есть многозначное число-палиндром (оно читается одинаково слева направо и справа налево). Написав его на бумажной ленте, барон сделал несколько разрезов между цифрами. Лента распалась на N кусков. Переложив куски в другом порядке, барон увидел, что на кусках по разу записаны числа 1, 2, ..., N. Могут ли слова барона быть правдой?

С13*. Через $S(n)$ обозначим сумму цифр числа n (в десятичной записи). Существуют ли три таких различных натуральных числа p, q и r, что $p+S(p) = q+S(q) = r+S(r)$?

С14*. Правильный треугольник прямыми, параллельными сторонам, разбит на 100 равных треугольников-клеток (см. рис. 39). Треугольники, расположенные между двумя соседними параллельными прямыми, образуют *полоску*.

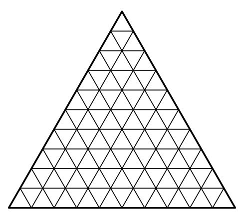


Рис. 39

а) Можно ли отметить восемь клеток так, чтобы никакие две отмеченные клетки не принадлежали одной полоске ни по одному из трёх направлений?

б) Можно ли так отметить семь клеток?

С15*. Четыре деревни расположены в вершинах квадрата со стороной 10 км. Можно ли их связать системой дорог, длина которых будет меньше 28 км?

С16*. В прямоугольной таблице клетки нумеруются по порядку: сначала первая строка слева направо, затем вторая строка слева направо и т. д. Барон Мюнхгаузен готов для каждого n предъявить такую таблицу, разрезанную на n многоугольных частей с равными суммами номеров в каждой части. Могут ли слова барона быть правдой?

С17*. Есть 10 двузначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два непересекающихся набора с одинаковыми суммами.

С18*. Существует ли выпуклый многоугольник без равных сторон, который можно разрезать на два равных многоугольника?

С19*. В кружке у любых двоих участников есть ровно два общих друга. Может ли у каждого участника быть в кружке ровно по а) 6 друзей; б) 5 друзей?

С20*. а) К двум верхним углам прямоугольной картины привязана тесёмка. В стену на одной горизонтали вбиты два гвоздя. Можно ли обмотать тесёмку вокруг гвоздей так, чтобы картина висела, но при вынимании любого из гвоздиков падала?

б) Тот же вопрос для трёх гвоздей.

С21*. а) Существуют ли два равных семиугольника, все вершины которых совпадают, но никакие стороны не совпадают?

б) А три таких семиугольника?

(*Напоминание*: *многоугольник на плоскости ограничен несамопересекающейся замкнутой ломаной*.)

С22*. Приведите пример таблицы 3×3, заполненной девятью различными натуральными числами так, чтобы произведения в столбцах были равны и суммы в строках тоже были равны (но суммы могут отличаться от произведений).

C23*. Разрежьте круг на несколько равных частей так, чтобы граница хотя бы одной из частей не проходила через центр круга.

C24*. Юра и Яша имеют по экземпляру одной и той же клетчатой таблицы 5×5, заполненной 25 различными числами. Юра выбирает наибольшее число в таблице, затем вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее из оставшихся чисел, вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, и т. д. Яша производит аналогичные действия, но выбирает наименьшие числа. Может ли случиться, что сумма чисел, выбранных Яшей,

а) больше суммы чисел, выбранных Юрой;

б) больше суммы любых других пяти чисел исходной таблицы, удовлетворяющих условию: никакие два из них не лежат в одной строке или в одном столбце?

C25*. Есть шесть одинаковых непрозрачных кирпичей. Можно ли так расположить их в пространстве так, чтобы из некоторой точки вне кирпичей не было видно ни одной из вершин кирпичей?

C26*. На плоскости нарисованы прямые с соблюдением следующих двух условий:

1) на каждой прямой есть хотя бы две точки пересечения с другими прямыми, причём расстояние между любыми точками пересечения на одной прямой не меньше 1;

2) прямые, проходящие через любую точку пересечения, делят плоскость на равные углы.

Для каждой точки пересечения Саша выписывает, сколько прямых в этой точке пересекается (не повторяя уже выписанные числа). Какие наборы чисел могут получиться у Саши?

C27*. Существует ли такой выпуклый пятиугольник, от которого некоторая прямая отрезает подобный ему пятиугольник?

C28*. В треугольнике ABC $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. Внутри треугольника выбрана точка M так, что $\angle MBC = 20^\circ$, $\angle MCB = 10^\circ$. Докажите, что $AM \perp BC$.

D: 9–11 класс

D1. Существуют ли две такие всюду определенные непостоянные функции $f(x)$ и $g(x)$, что функция $f(g(x))$ чётна, а $g(f(x))$ нечётна?

D2. Существует ли такая сфера, на которой имеется ровно одна рациональная точка? (*Рациональная точка — точка, у которой все три декартовы координаты — рациональные числа*.)

D3. Верно ли, что у любого тетраэдра можно на каждом ребре записать по неотрицательному числу так, чтобы для каждой грани сумма чисел на её сторонах равнялась площади грани?

D4. Существуют ли такие иррациональные числа a и b, что a^b рационально?

D5. Существует ли квадратный трёхчлен, при подстановке в который чисел вида $11\ldots1$ в результате получаются числа такого же вида?

D6. В море плавает айсберг в форме выпуклого многогранника. Может ли случиться, что 90% его объема находится ниже уровня воды и при этом больше половины его поверхности находится выше уровня воды?

D7. От балки в форме треугольной призмы с двух сторон отпилили (плоской пилой) по куску. Спилы не задели ни оснований, ни друг друга.

а) Могут ли спилы быть не равными треугольниками с отношением сторон $5 : 6 : 7$?

б) Может ли один спил быть равносторонним треугольником со стороной 1, а другой — равносторонним треугольником со стороной 2?

D8*. Даны 10 бумажных треугольников. Вася может разрезать не более одного из них на два меньших треугольника. После этого он делит треугольники на две группы. Всегда ли он может добиться, чтобы суммы периметров в группах были одинаковы?

D9*. Вася купил четыре куска пиццы, каждый кусок — четверть круга радиуса 1. Может ли он их упаковать в какую-нибудь квадратную коробку со стороной меньше 2?

D10*. Несколько одинаковых кирпичей сложены в стопку со сдвигом друг относительно друга. Стопка устойчиво стоит на горизонтальном столе. Может ли оказаться, что

а) проекции на стол верхнего и нижнего кирпичей не имеют общих точек;

б) расстояние между проекциями на стол верхнего и нижнего кирпичей больше удвоенной длины кирпича?

D11*. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны. Найдите его углы, если известно, что три из них равны, а все стороны четырёхугольника различны.

D12*. Дан непрозрачный многогранник и точка снаружи. Возможно ли, что из этой точки не видно ни одной вершины многогранника?

D13*. В бесконечной возрастающей геометрической прогрессии все члены положительны. Каждое число заменили на его дробную часть. Могла ли получиться бесконечная убывающая геометрическая прогрессия?

D14*. Среди значений многочлена от двух переменных встречаются все положительные числа. Обязательно ли среди его значений есть и нуль?

Решения дополнительных задач

А: 6–7 класс

А1. Разложим все гвозди на две чаши и будем перекладывать по гвоздику с тяжёлой чаши на лёгкую, пока не наступит равновесие. Значит, на чашах по 12 кг. Отложив гвозди с одной чаши, точно так же разделим 12 кг на две кучи по 6 кг. Отложив отдельно 6 кг, разделим другие 6 кг на две кучи по 3 кг. Сложив 6 кг и 3 кг, получим 9 кг.

Путь к решению. Придумав, как разбить кучку на две равные, далее смотрим, чего мы можем достичь, *повторяя* операцию.

А2. Ответ: могла. Например, $\frac{5}{2} = 2{,}5 > \frac{15}{12} = 1{,}25$.

Путь к решению. Обычно берут дроби, где числитель меньше знаменателя. Такая дробь увеличится при указанной операции. Но ведь дроби используют и для записи чисел, больших 1. *Расширяйте кругозор*!

А3. Ответ: $2 \times 484 = 968$, $3 \times 262 = 786$.

П $\times$ Е < 10, иначе уже П $\times$ Е00 было бы четырёхзначно. Но ни П, ни Е не равно 1, иначе БОР оканчивалось бы на П или на Е. Значит, для равенства П $\times$ Е $=$ Р есть только четыре варианта: $2 \times 3 = 6$, $2 \times 4 = 8$, $3 \times 2 = 6$ и $4 \times 2 = 8$. Случай $2 \times 3 = 6$ не подходит, так как в произведении $2 \times 363 = 726$ совпали П и О. Случай $4 \times 2 = 8$ не подходит, так как произведение $4 \times 282 = 1128$ четырёхзначно. Остальные два случая дают ответ.

Путь к решению. Повторение букв Е и Р создаёт *узкое место*, поэтому разумно перебирать именно значения Е и Р. Перебор сильно сокращается за счёт доказанного свойства П $\times$ Е $=$ Р. Обратите внимание на то, как мы заранее предъявляли список случаев.

А4. Ответ: можно, например 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14 и 15 орехов.

Путь к решению. *Узким местом* будет число орехов в наименьшей кучке. Если там не более четырёх орехов, то в наибольшей кучке — не более 12 и допустимых размеров от 4 до 12 всего 9. Если же в наименьшей кучке не менее шести орехов, то в следующей — не менее семи, потом — не менее восьми и т. д. Всего получится не менее $6+7+8+9+10+11+12+13+14+15 = 105 > 99$ орехов. Значит, в кучках от пяти до пятнадцати орехов, и варианты нетрудно перебрать. Но можно и «схитрить»: у нас есть 11 значений, надо отбросить ровно одно из них. Сделаем заготовку из 11 кучек, затратив $5+6+\ldots+15 = 110$ орехов. У нас $110-99 = 11$ лишних орехов, значит, именно кучку в 11 орехов и надо отбросить. Так что найденный пример — единственный!

А5. а) Нельзя. На каждой прямой есть не более шести точек пересечения с остальными прямыми. Хочется сказать, что всего точек не более $7 \cdot 6 = 42$. Но ведь каждая точка лежит на двух прямых, то есть учтена дважды, поэтому всего точек не более $42 : 2 = 21$.

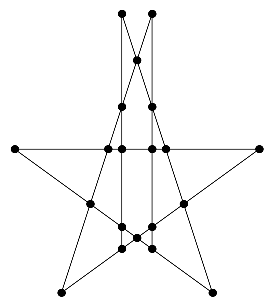


Рис. 40

б) Можно, см. рис. 40. На нём две вертикальные прямые параллелельны.

Путь к решению. б) Задача а) служит *разминкой*. Понятно, что ровно 21 точку пересечения получить можно: достаточно добавлять прямые по одной так, чтобы они не были параллельны предыдущим и не проходили через точки пересечения. Используем полученный пример как *заготовку*. Как избавиться от лишней точки пересечения? Да очень просто: сделаем две прямые параллельными!

А6. Например, можно заключить центр и отмеченную точку в прямоугольник так, чтобы эти точки были *симметричны* относительно центра прямоугольника (см. рис. 41). Теперь вырежем прямоугольник и, повернув его на 180°, вставим на то же место.

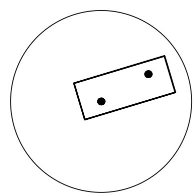


Рис. 41

Путь к решению. Надо поменять местами две точки. Если бы можно было резать на три части, то было бы просто: вырезали вокруг точек по одинаковому кусочку и поменяли куски местами. Но частей должно быть только две... — А если соединить вырезанные кусочки в одну часть?! — А менять тогда как? — Развернём часть. — Но ведь она не встанет на то же место. — Встанет, если сделать её *симметричной*.

А7. Если все три горизонтальных ряда имеют одинаковую массу m, то масса всех монет $3m$. Тогда масса четырёх одинаковых вертикальных рядов $4m$, что уже больше $3m$. Противоречие. Значит, одинаковую массу (пусть она равна m) имеют пять вертикальных рядов и два горизонтальных. Третий горизонтальный ряд весит $5m - 2m = 3m$, то есть *тяжелее обычного*. Для его нахождения надо сравнить массы двух горизонтальных рядов.

Путь к решению. *Инерция мышления* побуждает нас считать, что ряды равноправны. Догадавшись, что это не так, подумаем, с каких рядов можно снять подозрения ещё *до взвешивания*. *Узким местом* служит совпадение суммарной массы трёх горизонтальных и пяти вертикальных рядов. Отсюда мы не только выясняем, какие ряды надо проверять, но и узнаем, *в какую сторону* отклоняется масса.

А8. Ответ: может.

Пусть остров состоит из квадрата со стороной 30 км и идущей от него узкой полосы шириной 50 м и длиной 2000 км. На полосе в 100 км от квадрата и далее через каждые 100 км стоит город. Площадь квадрата 900 км^2, площадь полосы — 100 км^2, а всего острова — 1000 км^2. Вначале вся территория квадрата — провинция, её доля не менее 90%. Если новый город возник в центре квадрата, то квадрат перестал быть провинцией, кусочки провинции остались только на полосе, поэтому её доля — менее 10%.

Путь к решению. Фактически задача сводится к построению фигуры малой площади, но большой длины. Решение аналогично задаче 1.2.

А9. Будем нумеровать ступеньки снизу вверх, считая ступеньку, на которой лежат камни, нулевой. Вначале Сизиф должен пять раз поднять по 26 камней с № 0 на № 26. Затем — пять раз опустить по 25 камней с № 26 на № 1. После этого нужно за пять ходок последовательно переместить оставшиеся пять камней по маршруту № 26 — № 21 — № 16 — № 11 — № 6 — № 1.

Путь к решению. Сначала кажется, что вообще не получится быстрее, чем за 130 ходок. Если прыгать на соседнюю ступеньку, то как раз 130 и получится. А если прыгнуть всеми камнями далеко, а потом почти всеми назад, то на дальней ступеньке останется один камень и им придётся прыгать почти те же 130 ходок. Вот если бы он там был не один... Стоп, а кто мешает нам использовать в качестве промежуточной ступеньку поближе и сделать на неё два прыжка туда-обратно?! Тогда на ней останется два камня и ими можно допрыгать вдвое быстрее. Попробуем: на № 65 и затем на № 1 два раза, затем парой с № 65 на № 1 — за 32 прыжка. Отлично, уже не 130, а всего 36. А если туда-обратно не два, а три раза? Дальше начинается перебор, который удобнее сделать по делителям числа 130.

A10. а) Параллелепипед $4 \times 1 \times 1$ оклеивается квадратом 4×4 (боковая поверхность) и двумя квадратами 1×1 (верхняя и нижняя грани).

б) Да. Параллелепипед $1 \times 4 \times 6$ оклеивается двумя квадратами 4×4 (две грани 1×4 и одна грань 4×6) и одним квадратом 6×6 (остальные три грани).

Путь к решению. Ослабим условие: оклеим параллелепипед тремя прямоугольниками. Для этого даже не надо знать размеры параллелепипеда, их подберём потом, чтобы получились квадраты. Есть три способа:

1) объединить в прямоугольники три пары соседних граней;

2) объединить в прямоугольник четыре грани одинаковой ширины, а два других прямоугольника взять так, чтобы они совпадали с гранями;

3) объединить в прямоугольники две тройки граней одинаковой ширины, а затем разрезать один из прямоугольников на два.

При первом способе получаются прямоугольники размерами $x \times (y + z)$, $y \times (x + z)$, $z \times (x + y)$. Если x — не наибольший из размеров, то $x < y + z$, и поэтому $x \times (y + z)$ не является квадратом. При втором способе получим два прямоугольника размером $x \times y$ и один — $z \times (2x + 2y)$. Чтобы это были квадраты, необходимо, чтобы выполнялись равенства $x = y$, $z = 2x + 2y = 4x$. При $x = 1$ получаем пример из п. а). При третьем способе получим два прямоугольника размерами $x \times (2y + z)$ и $z \times (2y + x)$. Один из них (пусть для определённости первый) — квадрат, тогда $x = 2y + z$, а размер второго $z \times (4y + z)$. Прямоугольник разбивается на два квадрата, только если у него одна сторона вдвое больше другой, значит, $4y + z = 2z$, откуда следует, что $z = 4y$. При $y = 1$ получим пример из пункта б).

А11. Ответ: девять человек.

Пример. Мальчики изображены чёрными точками, девочки — белыми, дружба — отрезками (см. рис. 42).

Оценка. У каждого мальчика должна быть подруга. У неё, в свою очередь, должно быть не менее двух подруг. Но мальчиков больше, значит, у каких-то двоих из них есть общая подруга. У неё не менее двух друзей, значит, не менее трёх подруг. Итого, девочек как минимум четверо, значит, мальчиков как минимум пятеро, а всего — не менее девяти человек.

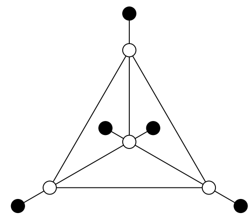


Рис. 42

Путь к решению. Вначале условие кажется противоречивым. Потом понимаешь: девочки дружат друг с другом, а мальчики — нет. Пусть, например, четыре девочки дружат все друг с другом и каждая дружит со своими двумя мальчиками. Тогда у нас мальчиков вдвое больше, но условие «подруг больше» выполнено. Минимальный пример получается из этого удалением части мальчиков.

А12. Ответ: могло.

Например, всего составлено 15 слов, из них два есть только у Бори, четыре — только у Васи, шесть — у Ани и Бори и три — у Ани и Васи. Всего Аня составила девять слов и набрала 9 очков, у Бори — восемь слов и 10 очков, а у Васи — семь слов и 11 очков.

Путь к решению. Вычеркнем все общие слова: неравенство между числом слов и между очками сохранится. Назовём слова, дающие 1 очко, *дешёвыми*, а 2 очка — *дорогими*. У Ани хотя бы на одно слово больше, чем у Бори. Выпишем их слова в две колонки, ставя по возможности в одну строку слова одной цены. Лишнее слово даёт Ане хотя бы одно лишнее очко. Значит, чтобы обойти Аню по очкам, у Бори рядом с Аниными дешёвыми словами должны стоять хотя бы два дорогих. Итак, у Ани слов больше, чем у Бори, при этом дорогих хотя бы на два меньше. Значит, у неё хотя бы на три дешёвых слова больше, чем у Бори. Аналогично у Бори дешёвых слов хотя бы на три больше, чем у Васи. С другой стороны, каждое дешёвое Анино слово совпадает либо с Бориным, либо с Васиным, поэтому у мальчиков вместе не меньше дешёвых слов, чем у Ани (вот и *узкое место*). Минимально возможное число дешёвых слов с этими условиями: девять у Ани, шесть у Бори, три у Васи.

А13. Ответ: можно за 25 минут.

Пусть каждый кузнец подковывает свою лошадь и по очереди отвлекается на 5 минут, чтобы прибить одну подкову пятой лошади: первый — в первую пятиминутку, второй — во вторую и т. д. Тогда каждый прибьёт по пять подков и затратит на всё 25 минут.

Путь к другому решению. Инерция мышления побуждает переходить к следующей лошади, только закончив с предыдущей. Поняв, что так не получается, можно поступить просто: поставить лошадей в ряд и пронумеровать их копыта от 1 до 20: у первой от 1 до 4, у второй — от 5 до 8 и т. д. Теперь можно разделить копыта поровну между кузнецами: первому от 1 до 5, второму — от 6 до 10 и т. д. Так как разница номеров у соседних кузнецов равна пяти, они всегда работают одновременно с разными лошадьми.

А14. Ответ: может. Например, Вася родился в 1988 году, Петя — в 2006 году.

Путь к решению. Поскольку самая большая сумма цифр за последние 2000 лет случилась в 1999 году, Васе исполнилось не более 28 лет, то есть он родился не раньше $2014 - (1 + 9 + 9 + 9) = 1986$ года. Будем проверять десятилетиями, обозначая через x последнюю цифру года рождения.

1. Если год рождения имеет вид $198x$, то $1980 + x + (1 + 9 + 8 + x) = 2014$, откуда $x = 8$. Вася мог родиться в 1988 году.

2. Если год рождения $199x$, то $1990 + x + (1 + 9 + 9 + x) = 2014$, откуда $2x = 5$, что невозможно.

3. Если год рождения $200x$, то $2000 + x + (2 + 0 + 0 + x) = 2014$, откуда $x = 6$. Вася или Петя могли родиться в 2006 году. Но этого уже достаточно для примера.

А15. Например, $\frac{1}{5} : \frac{1}{10} : \frac{1}{7} - \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{2} - 1 : \frac{1}{6} - \frac{1}{4} : \frac{1}{8}$.

Путь к решению. Узким местом является дробь $\frac{1}{7}$. На неё надо обязательно разделить, иначе она и, возможно, её сомножители образуют единственную дробь со знаменателем, кратным семи. В результате алгебраическая сумма будет нецелой.

А16. Ответ: можно, см. рис. 43. Многоугольник склеен из десяти вертикальных полосок размера 1×20, поочерёдно торчащих вверх или вниз. Последняя полоска сдвинута на одну клетку вверх. Пунктиром обозначена линия перегиба через верхний край квадрата 10×10. Суммарный периметр полосок равен 420, но из него надо вычесть удвоенную сумму внутренних границ.

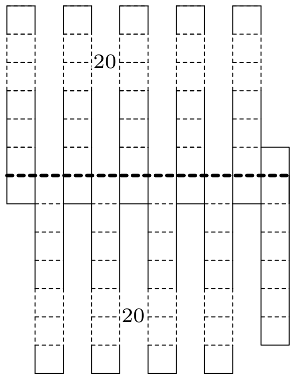


Рис. 43

Путь к решению. *Ослабим условия*: поищем фигуры *любого* периметра, которыми можно обернуть квадрат 10×10. Самый простой пример обёртки — прямоугольник 20×10. Кстати, чтобы обернуть им квадрат, не обязательно складывать прямоугольник строго посередине: можно перегнуть по любым двум горизонтальным границам, отстоящим друг от друга на 10 клеток. В любом случае каждая вертикальная полоска 20×1 накроет соответствующие вертикальные полоски квадрата на обеих сторонах. Но раз уж полоски обёртки можно сдвигать туда-сюда по вертикали, почему бы не сдвигать их *независимо* друг от друга?! Такими сдвигами мы сможем довольно сильно увеличить периметр. А условие на периметр оказывается *техническим.*

А17. Ответ: может. Вот, например, пять вариантов:

1) $\frac{4}{8} + \frac{5}{10} + \frac{7}{2} + \frac{1}{6} + \frac{3}{9}$;

2) $\frac{7}{3} + \frac{6}{9} + \frac{5}{10} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8}$;

3) $\frac{5}{10} + \frac{3}{9} + \frac{1}{6} + \frac{2}{8} + \frac{7}{4}$;

4) $\frac{8}{5} + \frac{4}{10} + \frac{1}{6} + \frac{7}{3} + \frac{9}{2}$;

5) $\frac{1}{10}+\frac{7}{5}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+\frac{9}{2}$.

Путь к решению. Пусть пример есть. Сократим все дроби и отбросим целые части. Сумма всё равно должна остаться целой. Попробуем представить целое число как сумму дробей со знаменателями не больше 10. Легче всего сделать две суммы, равные 1. Подходят, например,

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$$

и

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{10}+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}.$$

Теперь можно комбинировать пару с тройкой. Заметим только, что не может быть слишком много дробей, где все знаменатели делятся на одно и то же простое число. Скажем, не может быть трёх дробей со знаменателем 3, так как придётся использовать знаменатели 3, 6 и 9, но тогда в числителе над 9 должно тоже быть число, кратное трём. Тем более, нет трёх дробей, у которых знаменатели делятся на 5. Аналогично не может быть пяти чётных знаменателей вида 2 или 4. Почти для всех остальных комбинаций соответствующая расстановка карточек подбирается.

Подберём, скажем, расстановку карточек для суммы $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+$ $+\frac{1}{6}$. Вместо $\frac{1}{6}$ можно поставить ещё $\frac{7}{6}$, вместо $\frac{1}{3}$ — $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{10}{3}$, вместо $\frac{1}{2}$ — $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{10}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$. Места для карточек «3», «6», «8» определились однозначно, но тогда и для «4». Для остальных карточек вариантов много. Например, сохранив $\frac{1}{6}$ и поставив вместо $\frac{1}{3}$ дробь $\frac{3}{9}$, получим первый вариант в ответе. Для данной суммы он далеко не единственный. Другие варианты из ответа соответствуют следующим суммам:

2) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$;

3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$;

4) $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$;

5) $\frac{1}{10}+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$.

А18. а) Можно. Отметим клетки первого, четвёртого, седьмого, десятого и тринадцатого столбцов.

б) Нельзя. Выберем одну из главных диагоналей таблицы. Если клетка диагонали граничит с отмеченной клеткой K, то с K граничит ещё одна клетка диагонали. Таким образом, клетки выбранной диагонали разбиваются на пары. Но на этой диагонали 13 клеток — нечётное число.

Путь к решению. а) Кажется, что так отметить нельзя: ведь клетки разбиваются на пары, где отмеченная клетка граничит с неотмеченной, поэтому отмеченных клеток должно быть не менее половины. Затем понимаем, что с отмеченной клеткой могут граничить несколько неотмеченных. *Разминка* на прямоугольниках $1 \times n$ при $n = 3$, 4, 5 подскажет нам пример для таблицы 1×13 с пятью отмеченными клетками. Таблица 13×13 легко *сводится* к таблице 1×13: достаточно одинаково отметить клетки в каждой из строк.

б) *Узким местом* является диагональ квадрата: у её клеток мало свободы, они вынуждены граничить с соседями парами.

А19. Ответ: удастся.

а) Пусть маляры А и Б встретили маляров В и Г. Сначала А наденет на правую руку *обе перчатки* и пожмёт руку В. Затем, стянув верхнюю перчатку, В наденет её на руку Б (перчатка изнутри чистая) и пожмёт руку Б. На А осталась чистая снаружи нижняя перчатка, и он тоже пожмёт руку Г. Теперь Г стягивает с него эту перчатку и надевает её на руку Б поверх уже надетой перчатки. Перчатки пачкают друг друга, но не Б и Г. Наружная сторона верхней перчатки цвета краски Г, поэтому Б смело пожимает руку Г.

б) Пусть маляр Е встретил маляров К, Л и М. Надев по перчатке, Е и К обмениваются рукопожатием. Перчатки остаются снаружи чистыми. Е жмёт руку Л. Перчатка у Е испачкана снаружи. Но М снимает перчатку с К, выворачивает наизнанку и надевает себе (видимо, на левую руку, если К надевал на правую). Теперь Е и М жмут руки друг другу.

Путь к решению. Преодолев *инерцию мышления*, догадаемся жать руки через две перчатки. Поняв, что у перчатки две стороны, представим рукопожатия как прикосновения через двусторонний листок — это позволит использовать *симметрию*.

А20. У двух шнуров четыре конца, подожжём одновременно три из них. Шнур, подожжённый с обоих концов, сгорит за 30 секунд. К этому моменту от второго шнура останется 30-секундный кусок с одним горящим концом. Подожжём и второй конец. Шнур догорит за 15 секунд, то есть он горел всего 45 секунд.

А21. Первым ходом кладём на чашки по две бронзовые и одной серебряной медали. Если получили равновесие, то все эти медали настоящие. Кладём из оставшихся медалей на одну чашу весов серебряную, на другую — бронзовую, к серебряной добавляем настоящую бронзовую, к бронзовой — настоящую серебряную. Если при первом взвешивании равновесия нет, то сравниваем две бронзовые с более лёгкой чаши.

Путь к решению. Несложно доказать, что после первого взвешивания в одном из вариантов останутся три «подозрительные» медали из трёх *разных* металлов. Найти из них фальшивую было бы невозможно, если бы не были уже известны несколько *заведомо настоящих* медалей.

А22. Ответ: можно, см. рис. 44а.

Путь к решению. Забудем на время про нечестность и поищем пример, где при семи точках есть много прямых, проходящих через три точки. Легко подбирается пример с шестью прямыми (см. рис. 44б). Из них нечестные только три. Нельзя ли улучшить пример, передвинув одну точку в другое место? Выгодно оказывается перенести точку A (пропадёт лишь одна нечестная прямая), поместив её по другую сторону от двух честных прямых.

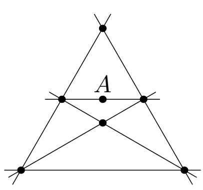


Рис. 44а

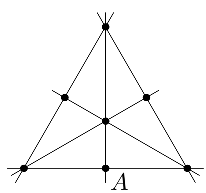


Рис. 44б

А23. Ответ: могут.

Пусть у команд А, Б и В соотношение забитых и пропущенных мячей равно 2 : 0, 2 : 1 и 0 : 3 соответственно. Команда Б могла пропустить мяч только от команды А. Поскольку команда А мячей не пропускала, она выиграла у Б со счётом 1 : 0. Второй свой мяч она, очевидно, забила команде В и тоже выиграла у нее со счётом 1 : 0. Ну а команда Б оба своих мяча могла забить только команде В и победила ее со счётом 2 : 0.

Путь к решению. Узкое место создаётся за счёт команды, которая мячей не забивала, и команды, которая мячей не пропускала. Тогда и про мячи третьей команды становится всё ясно.

А24. Ответ: например, так (см. рис. 45).

Путь к решению. Диагонали могут идти принципиально в двух направлениях: вправо-вверх или вправо-вниз. В рисунке из условия задачи направления строго чередуются. При нечётном числе графств строгое чередование невозможно. Значит, на маршруте есть *узкое место*: пара диагоналей подряд в одном направлении. Ясно, что в общей вершине этой пары сходятся уголками четыре графства. Соответствующая пара прямоугольников не должна касаться двух сторон острова, иначе остров разобьётся на части, отгороженные парой диагоналей друг от друга. Дальнейшее построение несложно, надо только следить, чтобы очередная диагональ не попала в угол квадрата. Этого несложно избежать, разбив при необходимости прямоугольник на два и заменив одну «плохую» диагональ двумя «хорошими».

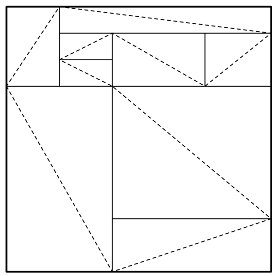


Рис. 45

А25. *Первый способ.* «Я тоже задумал одно из чисел 1,5 или 2,5. Твое число меньше моего?» Если «Да», то задумано 1, если «Нет», то 3, если «Не знаю», то 2.

Второй способ. «Я тоже задумал число: оно натуральное, и все его цифры — единицы. Моё число делится на твоё?» Если «Да», то задумано 1, если «Нет», то 2, если «Не знаю», то 3.

Третий способ. «Пусть k — твое число. Верно ли утверждение: в середине $(18 + k)$-го века столица России — Москва?» Если «Да», то задумано 2, если «Нет», то 1, если «Не знаю», то 3.

Путь к решению. Кажется невозможным придумать вопрос с возможным ответом «Не знаю», ибо в математике «всё жёстко определено». Но ведь в жизни-то мы сплошь и рядом отвечаем «Не знаю». Так что вовсе не обязательно мучительно вспоминать нерешённую математическую проблему, чтобы привязать вопрос к ней. Достаточно спросить о неизвестном будущем или о секрете у вас в голове.

А26. а) Можно, см. рис. 46а.

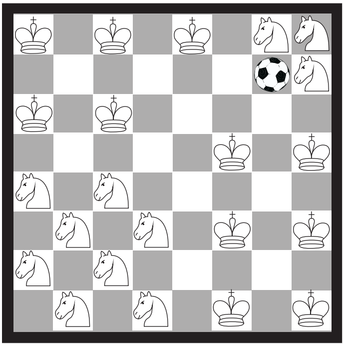


Рис. 46а

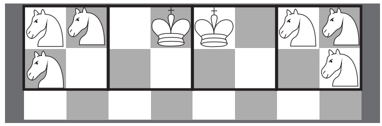


Рис. 46б

б) Нельзя. Предположим, что поставить удалось. Разобьём доску на 16 клеток 2×2. В одной клетке может стоять не более одного короля. Значит, в двенадцати клетках стоят по королю, а кони и мяч (13 фигур) стоят в оставшихся четырёх клетках. Так как в трёх клетках помещаются не более двенадцати фигур, пустых клеток нет. Рассмотрим две соседние клетки (с общей границей). Допустим, в какой-то из них стоит четыре коня. Тогда они бьют все поля другой клетки и того, кто в ней стоит. Противоречие. Значит, в каждой клетке не более трёх коней. Но и не менее, так как клеток с конями четыре, а коней — 12. Итак, кони стоят по три в четырёх клетках. В соседней клетке кони бьют три поля, значит, на единственном непобитом поле там стоит король. Этот король стоит не у границы клетки с конями, иначе он бы побил одного из них. Но тогда у коней свободно поле у границы, откуда конь мог бы побить короля. Так как в этой клетке свободно лишь одно поле, у неё лишь две границы с другими клетками. Но тогда эта клетка угловая. Итак, все кони стоят в четырёх угловых клетках на крайних полях доски. Рассмотрим четыре клетки у верхнего края доски. Расстановка коней в крайних клетка однозначна, значит, и расстановка королей в средних клетках — тоже. Но тогда эти короли бьют друг друга. Противоречие.

Путь к решению. а) Перебор сильно сокращается, если воспользоваться разбиением на клетки из решения пункта б). Как и там, легко свести к противоречию предположение, что есть клетка с четырьмя конями или четыре клетки с тремя конями. Поэтому пустых клеток тоже нет. Но тогда есть клетка с тремя конями, и она стоит в углу. Кони стоят не более чем в пяти клетках, поэтому есть клетка не менее чем с тремя конями. Несложно показать, что клеток с четырьмя конями нет. Тогда разумно разместить в одной угловой клетке трёх коней, а ещё в четырёх клетках — по два коня.

А27. Ответ: см. рис. 47.

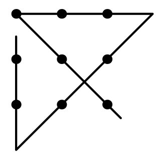


Рис. 47

Путь к решению. Хочется делать повороты в отмеченных точках, но не получается. Хочется зачеркнуть точки тремя параллельными отрезками, но на переходы между ними потребуется ещё два отрезка. Попробуем зачеркнуть точки четырьмя *попарно непараллельными* прямыми — они-то точно пересекаются. Но не все точки пересечения подходят: плохо, например, если отмеченные точки лежат по разные стороны от точки пересечения. Определившись с требованиями, найдём четыре подходящие прямые. Точки поворота после этого определятся сами. И конечно же, часть из них не являются отмеченными точками и даже вылезают за пределы квадрата, «образованного» точками!

В: 7–8 класс

В1. Ответ: да, см. рис. 48.

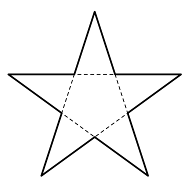


Рис. 48

Путь к решению. У десятиугольника 10 вершин, а у пяти прямых 10 точек пересечения. Вот и узкое место. Значит, все эти точки пересечения будут вершинами, и на каждой прямой должно лежать по две стороны десятиугольника. Четыре точки пересечения делят каждую прямую на три отрезка и два луча. Сторонами должны стать два крайних отрезка. Но как расположить прямые, чтобы указанные отрезки образовали десятиугольник? А в виде хорошо нам знакомой пятиконечной звёздочки!

В2. Ответ: не обязательно.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ACD и точку B на продолжении основания DC. У треугольников ABC

и ABD сторона AB и высота AH общие, стороны AC и AD равны. Однако эти треугольники не равны: один — часть другого.

Путь к решению. Попробуем *построить* треугольник по двум сторонам b, c и высоте h, проведённой к третьей стороне. Для этого проведём прямую l (на ней будет лежать третья сторона) и построим вершину A на расстоянии h от l. Две другие вершины треугольника должны лежать на этой прямой на расстояниях b и c от точки A. Проведя окружности указанных радиусов с центром в точке A, получим (при $b > h$ и $c > h$) по две точки пересечения каждой из окружностей с l. Видим, что с точностью до симметрии есть два принципиально разных треугольника: когда вершины выбираются по одну сторону от ближайшей к A точки прямой и когда — по разные стороны.

В3. Ответ: может. См. рис. 49.

В4. Существуют, например $2^{10}-1$, $2^{10}-2$, $2^{10}-4$, ..., $2^{10}-2^9$. НОД$(a_i,\ a_{i+1}) = (2^{i-1}, 2^i) = 2^{i-1}$ тем больше, чем больше номер i.

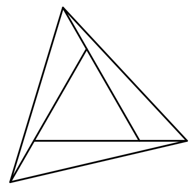


Рис. 49

Путь к решению. Если бы в условии цепочки неравенств шли *в одну и ту же сторону*, то это вообще «не задача»: годится, скажем, последовательность степеней двойки. *Ослабим условие*: разрешим числам быть отрицательными. Тогда можно получить пример из предыдущего, просто сменив все знаки. Ну и наконец, избавимся от отрицательных чисел, просто прибавив ко всем числам их достаточно большое общее кратное, — НОД от этого не изменятся!

В5. Разберём два случая.

Первый случай. Последняя цифра числа A меньше пяти. Увеличив эту цифру на 5, получим число с нужной суммой цифр. Это число равно $A + 5$ и, очевидно, меньше чем $10A$.

Второй случай. Последняя цифра числа A не менее пяти. Уменьшим её на 1 (сумма цифр уменьшится на 1) и припишем в конце 6 (сумма цифр станет нужной). Получится число $10(A-1)+6$. Оно, очевидно, меньше $10A$. Кроме того, оно больше A, так как в нём на один десятичный знак больше.

Путь к решению. Искомая сумма цифр близка к сумме цифр числа A, поэтому разумно искать числа с нужной суммой цифр вблизи исходного числа. Для каких-то случаев это удаётся, но дальше мешает переход через десяток. И тут полезно вспомнить, что сумму цифр можно увеличить не только добавлением, но и вычитанием (с переходом через десяток). Самое время вспомнить, что есть ещё одно число с такой же суммой цифр, как у A, а именно $10A$. Нужное число находится вблизи него.

B6. Проведём две пересекающиеся прямые. От их точки пересечения M отложим на трёх лучах равные отрезки MA, MB, MC (см. рис. 50а). В треугольнике ABC медиана CM равна половине стороны AB, поэтому угол C прямой. На прямых AC и BC в четыре стороны отложим равные отрезки CK, CL, CM, CN (см. рис. 50б). Получим четыре равных равнобедренных прямоугольных треугольника CKL, CLM, CMN и CNK. Их гипотенузы равны, а каждый из углов $\angle K$, $\angle L$, $\angle M$, $\angle N$ складывается из двух углов по $45°$, поэтому $KLMN$ — квадрат.

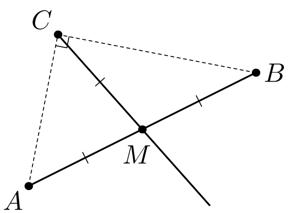


Рис. 50а

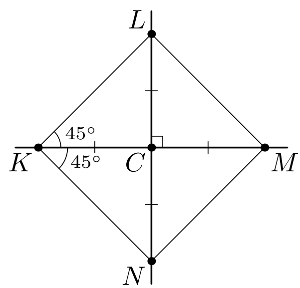


Рис. 50б

Путь к решению. Чтобы построить квадрат, неплохо бы для начала построить прямой угол. А умеем мы строить много равных отрезков. То и другое сходится в такой теореме: если медиана равна половине стороны, то угол прямой. Ну а с прямым углом квадрат построить просто.

Комментарий. Ещё легче восьмиклассникам: много равных отрезков наводят на мысль о радиусах окружности, а в окружности угол, опирающийся на диаметр, прямой.

B7. Ответ: не обязательно.

Рассмотрим число M, кратное 625. Допустим, цифры в нём идут по неубыванию. Тогда последняя цифра в M не 0. Но M кратно пяти, поэтому эта цифра — 5. M кратно 25, поэтому M оканчивается на 25 или 75. Из-за неубывания подходит только 25. M кратно 125, поэтому число, образованное тремя его последними цифрами, тоже кратно 125. Но третья цифра с конца не больше двух, значит, M оканчивается на 125. Поскольку число, оканчивающееся на четыре нуля, тоже кратно 625, число, образованное четырьмя последними цифрами числа M, должно делиться на 625. Однако четвёртая с конца цифра может быть равна только 0 или 1. Ни 0125, ни 1125 на 625 не делятся. Противоречие.

Путь к решению. У каких чисел можно предсказать хоть какие-то цифры для кратных? — У чётных и кратных пяти кое-что известно про последнюю цифру. — А про две цифры? — У кратных четырём и кратных 25. — А что общего между ними? — И то и другое — делитель ста. Это наводит мысль о степенях двойки и степенях пятёрки. Взяв n-ю степень, мы получаем контроль над n последними цифрами кратного. Для степеней пятёрки контроль больше, поскольку вариантов для последних цифр меньше. «Контролируемые» цифры и создают то узкое место, которое позволяет построить контрпример.

В8. Ответ: не обязательно.

Контрпример 1. В равнобедренном треугольнике ABC с углами A, B и C, равными соответственно 72°, 36° и 72°, проведём биссектрису AD (см. рис. 51). Четвёрка точек A, B, C и D даёт искомый контрпример: она несимметрична, но любые три из этих точек лежат либо в вершинах равнобедренного треугольника, либо на одной прямой.

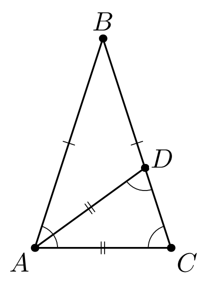


Рис. 51

Контрпример 2. Треугольник с углами 36°, 36° и 108°, разбитый на треугольник с углами 72°, 36° и 72° и треугольник с углами 36°, 36° и 108°.

Путь к решению. Легче искать пример из четырёх точек. Три точки симметричны, если они лежат в вершинах равнобедренного треугольника или на одной прямой. Сведём задачу к такой: разбить равнобедренный треугольник на два меньших не равных треугольника. Нарисовав разбиение и отметив равные углы, легко найдём эти углы.

В9. Ответ: может.

На рис. 52 изображён фрагмент доски с расставленными нужным образом конями. Остальная часть доски пуста.

Путь к решению. Рассуждая, как в задаче А11, видим, что каждый чёрный конь бьёт белого, а этот белый — двух чёрных. Кроме того, есть белый конь, бьющий не менее двух чёрных и не менее трёх белых. Однако структуру из решения задачи А11 на доске реализовать нельзя: все белые кони, побитые центральным, будут одного цвета и не будут бить друг друга. Но можно добавить ещё коней, которые бы били побитых центральным, и нужно, чтобы они били сразу по два таких коня. Далее останется добавить не бьющих друг друга черных коней, бьющих по одному белому: двух для центрального и по одному для каждого из остальных.

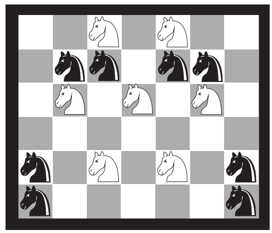


Рис. 52

В10. Ответ: можно, достаточно вычеркнуть 50!. Ведь произведение равно

$$\begin{gathered}(1!\cdot 2!)\cdot(3!\cdot 4!)\cdot\ldots\cdot(99!\cdot 100!) = \\ = (1!^2\cdot 2)\cdot(3!^2\cdot 4)\cdot\ldots\cdot(99!^2\cdot 100) = \\ = (1!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 99!)^2\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 100 = \\ = (1!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 99!)^2\cdot 2^{50}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 50 = \\ = (1!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 99!\cdot 2^{25})^2\cdot 50!\end{gathered}$$

Путь к решению. Отщепляя полные квадраты (за счёт похожести соседних сомножителей), сведём задачу к более простой.

В11. Ответ: могло.

Обозначим игроков А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И. Пусть в следующих 12 партиях первый игрок победил второго: А–Б, А–В, А–Г, Б–Д, Б–Е, В–Ж, Г–Д, Д–А, Д–И, Е–А, Ж–А, И–А, а остальные партии закончились вничью. Тогда Б набрал 4 очка, А — 3 очка, остальные — по 3,5. Пусть в четвертьфинале кубка игрались партии А–Г, Б–Е, В–Ж и Д–И, в полуфинале А–В и Б–Д, в финале А–Б.

Путь к решению. Узким местом здесь будет число очков, набранных в турнире. Пусть кубок завоевал игрок А. В турнире он набрал меньше всех очков, значит, меньше среднего, то есть меньше 3,5. С другой стороны, в кубке он выиграл три партии, значит, и в турнире не менее трёх, то есть набрал не менее трёх очков. Поэтому в турнире A набрал ровно три очка. Это значит, что он три партии выиграл и четыре проиграл. В круговом турнире очков тем больше, чем больше разность между числом побед и числом поражений. У игрока A эта разность равна -1, значит, у других 0 или больше. Партии кубка однозначны с точностью до имен игроков. Начнём строить турнир с них.

Добавим ещё четыре партии, которые A проиграл. Посчитаем разности: у А и Г по -1, у Б и Д по 1, у остальных по 0. Надо увеличить разность у Г. При этом надо будет кому-нибудь её уменьшить. Тем, у кого 0, уменьшать не стоит. Уменьшим, например, разность у Д, добавив победу Г над Д. Теперь уже нужные неравенства между разностями обеспечены, поэтому остальные партии можно объявлять ничьими.

B12. На рис. 53 изображён пример такого разрезания: ABC — равнобедренный треугольник ($AB = BC$) с углом 45° при вершине B, AE — высота, $DE = CE$. Треугольники ABD и ADE вместе составляют равнобедренный прямоугольный треугольник ABE.

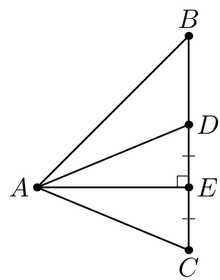


Рис. 53

Путь к решению. Понятно, что надо *перебрать картинки* с разбиениями треугольника на три меньших и варианты равенства сторон. *Удобнее* искать пример, где соседние части вместе уже составляют треугольник. Такое получается только при разрезании по отрезкам, выходящим из одной вершины исходного треугольника (см. рис. 53). Но как сложить треугольник их двух несоседних частей? Проблем не будет, если средняя часть будет равна одной из крайних. Такое равенство необязательно, но *удобно* нам, поэтому начнём перебор именно с этого случая.

Осталось обеспечить равнобедренность. Из равенства треугольников ADE и AEC сразу следует, что $AD = AC$ и $AE \perp BC$. Теперь ясно, что в равнобедренном треугольнике ABE должны быть равны AE и BE, а в равнобедренном треугольнике ABC равны AB и BC. Все углы легко считаются.

В13. Ответ: Вася прав.

Пусть $a < b < c < d < e < f < g < h$. Расставим числа, как показано на рис. 54. Тогда на гранях образуются суммы $a+b+c+e < a+b+d+f < a+c+d+g <$ $< b+e+f+h < c+e+g+h < d+g+f+h$.

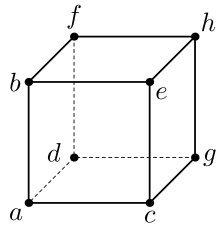


Рис. 54

Путь к решению. Различные числа можно упорядочить по возрастанию. Задача будет решена, если и суммы на гранях удастся упорядочить по возрастанию. Легче сравнивать суммы, где большое число складывается с большим, а маленькое с маленьким. Попробуем поставить самое большое число M и самое маленькое число m в противоположные вершины. *Ослабим условия*: расставим числа, обеспечив только, чтобы все суммы с M были больше сумм с m. Для этого достаточно на рёбра с m поставить три меньших числа b, b', b'', а на рёбра с M — три бóльших числа d, d', d''. Теперь понятно, что, например, $m + b' + b'' + d'' < b + d + d' + M$. Мы можем переставлять между собой числа в тройке d, d', d''. Попробуем за счёт этого обеспечить неравенство между суммами одинакового типа, скажем, между содержащими m. Пусть $b < b' < b''$, $d < d' < d''$. Эти числа входят парами в три грани с m, и суммы пар уже упорядочены: $b + b' < b + b'' < b' + b''$. Добавляя к наименьшей сумме наименьшее число, а к наибольшей — наибольшее, упорядочим и суммы граней: $m + b + b' + d < m + b + b'' + d' < m + b' + b'' + d''$. Расстановка определилась полностью. Осталось только убедиться, что волшебным образом и на гранях с M — полный порядок!

В14. а) Нельзя. Пусть есть b белых и c чёрных клеток. Подсчитаем число чёрно-белых доминошек. Каждая белая клетка входит ровно в две такие доминошки, значит, всего таких домино $2b$. Аналогично их $2c$. Значит, $b = c$, то есть общее число клеток чётно.

б) Можно. Рассмотрим клетчатую доску, раскрашенную в шахматном порядке, где чёрные и белые квадраты имеют размер 2×2 и к каждой стороне прилегает по 51 квадрату. Разобьём каждый такой квадрат на четыре одноцветные клетки размера 1×1. Каждая клетка, кроме крайних, соседствует по стороне ровно с двумя клетками противоположного цвета. Заметим, что оба этих соседа не лежат на краю. Поэтому, отрезав крайние клетки доски, мы получим раскрашенную требуемым образом доску 100×100.

B15. а) Например, прямоугольный треугольник с катетами 15 и 20 см. Его гипотенуза равна $\sqrt{15^2+20^2} = \sqrt{625} = 25$ см. Две высоты совпадают с катетами, а длина третьей, опущенной на гипотенузу, легко находится через площадь треугольника и равна $\frac{15 \cdot 20}{25} = 12$ см.

б) Могут. Составим, например, равнобедренный треугольник из двух прямоугольных треугольников с катетами 15 и 20 см, приложив их друг к другу катетами 20 см. Угол против катета 15 см меньше 45°, поэтому угол при вершине равнобедренного треугольника острый. Его основание равно 30 см, на него опущена высота 20 см, поэтому площадь $S = 300$ см^2. По теореме Пифагора каждая боковая сторона равна $a = \sqrt{15^2+20^2} = \sqrt{625} = 25$ см, поэтому опущенная на неё высота равна $\frac{2S}{a} = \frac{600}{25} = 24$ см.

Путь к решению. а) Будем искать пример среди прямоугольных треугольников, так как там две высоты совпадают со сторонами. Среди прямоугольных треугольников с целыми сторонами наиболее известен *египетский* — с катетами 3 и 4 и гипотенузой 5. Однако третья высота в нем не целая, она равна $\frac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4$. Используем этот пример как *заготовку* (см. *Ослабление условий*). Если все стороны увеличить пропорционально (*метод подобия*) в 5 раз, то не только стороны останутся целыми, но и высота станет целой.

б) Воспользуемся пунктом а) как *разминкой*. Существенным в *заготовке* пункта а) было то, что и стороны, и площадь целые. Но тогда остроугольную заготовку нетрудно составить из двух равнобедренных.

B16. а) Нельзя. На рис. 55 отмечены кружочками 10 полей. Никакие два из них нельзя побить одним королем с белого поля. Поэтому девять королей не смогут побить даже все отмеченные поля.

б) Можно, см. рис. 55.

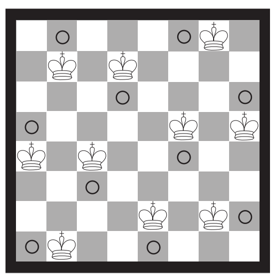


Рис. 55

Путь к решению. а) Достаточно выделить *набор узких мест*: подмножество полей, которое не смогут побить девять королей. Полезно заметить, что два чёрных поля, расположенные через одно поле по диагонали, не могут быть побиты одним королём. Это позволяет размещать отмеченные поля достаточно плотно, чтобы поместилось десять из них.

б) Набор отмеченных полей облегчает поиск примера, создавая *узкое место*: ведь каждое из отмеченных полей должно быть побито королем. Повернув набор на 180°, получим второй набор. Теперь каждый король должен побить два отмеченных поля из разных наборов.

В17. а) Мог. Пусть, например, в первый год на участки пришли 10 и 50 избирателей, а за серых проголосовали 1 и 35 человек соответственно. Тогда проценты на участках были $1 : 10 = 10\%$ и $35 : 50 = 70\%$, а в целом по посёлку $(1 + 35) : (10 + 50) = 60\%$. Пусть во второй год на участки пришли 50 и 10 избирателей, а за серых проголосовали 15 и 9 человек соответственно. Тогда проценты на участках стали $15 : 50 = 30\%$ и $9 : 10 = 90\%$, а в целом по посёлку $(15 + 9) : (50 + 10) = 40\%$.

б) Мог. Пусть, например, в первый год на участки пришли 10, 10 и 100 избирателей, а за серых проголосовали 1, 1 и 70 человек соответственно. Тогда проценты на участках были $1 : 10 = 10\%$, 10% и $70 : 100 = 70\%$, а в целом по посёлку $(1 + 1 + 70) : (10 + 10 + 100) = 60\%$. Пусть во второй год на участки пришли 100, 100 и 40 избирателей, а за серых проголосовали 30, 30 и 36 человек соответственно. Тогда проценты на участках стали $30 : 100 = 30\%$, 30% и $36 : 40 = 90\%$, а в целом по посёлку $(30 + 30 + 36) : (100 + 100 + 40) = 40\%$.

Путь к решению. а) Поймём сначала, как вообще процент по участкам мог повыситься, а в целом — понизиться. Это напоминает задачу 1.10 про смешение напитков и про кошек. Теперь уже понятно, что, меняя число пришедших, можно обеспечить в целом по поселку любой процент между минимальным и максимальным процентами по участкам. Надо только обеспечить достаточно большой зазор между процентами на участках, чтобы число, меньшее исходного процента на одном участке, можно было понизить на 20 и при этом результат остался бы больше повысившегося процента на другом участке. Подойдут, например, такие проценты: $10\% < 60\% < 70\%$ в первый год и $30\% < 40\% < 90\%$ во второй год.

б) При трёх участках не обойтись без алгебры. Но до этого надо облегчить себе жизнь: сделать для простоты всё одинаковым на первом и втором участках, а проценты на третьем — больше, чем на первом. Теперь эти проценты надо подобрать так, чтобы выполнялись условия и неравенства «процент в целом лежит между процентами по участкам». Итак, пусть сначала процент на первом участке был x, на третьем y, в целом z, а потом соответственно $x+20$, $y+20$, $z-20$. Должны быть выполнены неравенства $0 \leqslant x < z < y \leqslant 100$, $0 \leqslant x+20 < z-20 < y+20 \leqslant 100$. Отсюда получаем $x < z-40$ и $x < 40 < z < y \leqslant 80$. Возьмём, например, $x = 10$, $z = 60$, $y = 70$. Теперь составим уравнения. Пусть в первый год на первый (и второй) участки явились по a избирателей, а на третий — b избирателей. Тогда по условию $2 \cdot 10\% \cdot a + 70\% \cdot b = 60\%(2a+b)$, откуда находим $b = 10a$. Чтобы 10% от a и 70% от b были целыми, достаточно взять $a = 10$. Аналогично если во второй год на первый и второй участки явились по A избирателей, а на третий — B избирателей, то получаем $5B = 2A$ и можно взять $A = 20$.

B18. Ответ: может, см. ломаную $ALCKBM$ на рис. 56.

Точки K, L и M — середины отрезков OA, OB и OC соответственно. Тогда пересекающиеся отрезки — это медианы одного треугольника (например, AL и BK — медианы треугольника AOB), поэтому они делятся точкой пересечения в отношении $1:2$.

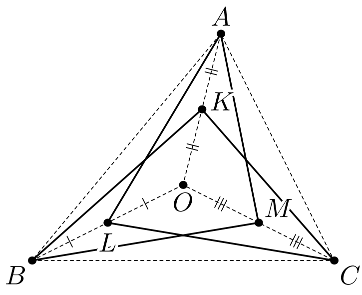


Рис. 56

Путь к решению. Полезно вспомнить, что в отношении $2:1$ делятся пересекающиеся медианы. Попробуем составить ломаную из пар медиан. Чтобы концы ломаной соединялись, треугольники должны соприкасаться равными «боковыми» сторонами. Естественно приходит в голову набор треугольников с общей вершиной. При нечётном числе треугольников получаем искомый пример.

B19. Ответ: да, может.

а) Навроде делит совет на 10 комитетов по 10 человек, распределив в шесть комитетов по шесть своих сторонников. Они выбирают в этих комитетах шесть таких председателей, которые голосуют за Навроде.

б) Навроде делит совет на пять комитетов по 20 человек, распределив по 11 своих сторонников в три из этих комитетов. Одинадцать из двадцати и три из пяти — большинство.

в) Навроде делит совет на пять комитетов по 20 человек, распределив в три из комитетов по девять своих сторонников. Каждый комитет он делит на пять подкомитетов по четыре человека. Если в комитете есть его сторонники, то они делятся по три человека в три подкомитета. Этого хватит, чтобы три из пяти выборщиков в комитете были сторонниками Навроде и выбрали сторонника Навроде председателем. Получив так трёх лояльных председателей из пяти, Навроде «демократически» переизберётся.

Путь к решению. Применим «приём казино»: проигрывать будем по-крупному, а выигрывать — понемногу. Конкретно: в тех комитетах, где мы выигрываем, добиваемся этого за счёт небольшого преимущества, а где проигрываем — туда вообще своих сторонников не посылаем.

В20. Ответ: «В этой фразе $\frac{1}{2}$ всех цифр — цифры 1, доли цифр 2 и 5 одинаковы и равны $\frac{1}{5}$, а на долю всех остальных цифр приходится $\frac{1}{10}$». Вместо слов «2 и 5» можно также вписать «0 и 5» или «0 и 2».

Путь к решению. Если хотя бы одно из вставленных чисел состоит из трёх или более цифр, то какая-то доля не более $\frac{1}{100}$ и не равна 0, поэтому всего цифр не меньше ста. Тогда в многоточиях не менее 94 цифр, значит, в каком-то из вставленных чисел не менее 32 цифр, поэтому всего цифр не менее 10^{31} и т. д. Ясно, что так не бывает. Поэтому все вставленные числа не более чем двузначны.

Пусть во фразе всего n цифр. Ясно, что $n \geqslant 9$: три единицы, три на месте звёздочек и не менее трёх на месте многоточий. А так как все числа не более чем двузначны, $n \leqslant 12$. Все знаменатели — делители числа цифр. Четыре слагаемых вида $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$ в сумме не дадут 1, поэтому $n \neq 9$, то есть $n \geqslant 10$. Тогда есть хотя бы одно двузначное число, и оно начинается с единицы. Значит, цифр 1 не менее четырёх, их доля не менее $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, поэтому знаменатель первой дроби однозначный и больше 1, то есть $n < 12$. У $n = 11$ нет однозначных делителей больше 1, поэтому $n = 10$. Значит, доля цифр 1 равна $\frac{1}{2}$. Остальные дроби могут быть равны $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$. В знаменателях по разу встретились цифры 0, 2 и 5, любые две из них можно упомянуть явно, тогда их доля будет составлять $\frac{1}{5}$, а на долю единственной оставшейся цифры придётся $\frac{1}{10}$.

B21. Положим на левую чашу весов шарики из вершин B и F, а на правую — из вершин C и E. Если поменяли A с D, то будет равенство: $2 + 6 = 3 + 5$. Если поменяли C с F, то левая чаша легче: $2 + 3 < 5 + 6$. Наконец, если поменяли B с E, то левая чаша тяжелее: $5 + 6 > 2 + 3$. Соответственно, по результату взвешивания переставленная пара однозначно определяется.

Путь к решению. Чтобы различить три варианта обмена, надо обеспечить три возможных результата взвешивания. Пусть согласно нашей раскладке разность масс (в граммах) между левой и правой чашами должна быть d. Как меняется d при перестановке шариков из пары? Так как в паре один шарик на 3 тяжелее другого, разность может измениться на 3 (при перестановке шарика с чаши с шариком вне чаш), на 6 (при перестановке шариков с разных чаш) либо не измениться (при перестановке двух шариков на одной чаше либо двух шариков вне чаш). Итак, возможные разности $d - 6$, $d - 3$, d, $d + 3$, $d + 6$ (из них при конкретной раскладке реализуются только три). Три разных результата взвешивания означают положительную, отрицательную и нулевую разности.

Проще всего поискать *симметричную* раскладку, где реализуется d и при этом $d = 0$, тогда больше шансов получить также отрицательную и положительную разности. Чтобы какая-то перестановка не меняла разность, можно оставить одну из пар вне чаш, например пару 1 и 4. Никакую из оставшихся пар нельзя целиком класть на одну чашу (иначе есть ещё одна перестановка, сохраняющая d). Раскидаем пары по разным чашам, обеспечив равновесие: $2 + 6 = 3 + 5$. Получим решение из ответа. Реализуются $d - 6$, d и $d + 6$.

Кажется, что нам повезло, но нет: мы получаем аналогичное решение, выкидывая любую из пар. Ещё одно решение можно получить, если положить одну пару целиком на левую чашу. Правда тут, чтобы перестановками можно было и уменьшить, и увеличить разность, подойдёт только пара $2 + 5$, а на правую чашу для равновесия кладём $1 + 6$.

В22. Ответ: существует.

Пример 1. Подходят числа $p_i \cdot (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{10})$ ($i = 1, \ldots, 10$), где $p_1, \ldots, p_{10}$ — *различные* простые числа.

Пример 2. Подходят числа $2^9 \cdot 3^{18}$, $2^{10} \cdot 3^{17}$, ..., $2^{18} \cdot 3^9$.

Путь к решению. Пусть a и b — два числа такого набора. Так как a^2 делится на b, а b^2 делится на a, наборы простых делителей чисел a и b совпадают. Пусть p — простой делитель, который входит в разложение числа a в степени m, а в разложение числа b — в степени n. Ввиду делимости квадратов $2m \geqslant n$, $2n \geqslant m$, то есть показатели отличаются не больше чем вдвое. Чтобы числа не делились друг на друга, достаточно обеспечить, чтоб по разным простым делителям неравенства между показателями шли в разную сторону. Проще всего зафиксировать сумму показателей.

Запомните приём. Разложение на простые множители позволяет свести задачу на делимость к задаче на равенство или неравенство показателей степени у простых множителей.

В23. Пусть 10 гномов договорятся думать, что всего будет надето чётное число красных колпаков, а 10 — что нечётное. Далее гном сравнивает чётность *видимого* им числа красных колпаков с задуманной чётностью. Если чётности совпали, то он говорит, что у него синий колпак, а если не совпали — что красный. Понятно, что, как бы дракон ни выбрал колпаки, ровно одна из десяток задумает чётность правильно. Именно эта десятка гномов и назовёт цвет своего колпака верно.

Путь к решению. Сначала решим *упрощённую* задачу: пусть каждый гном дополнительно знает чётность общего числа красных колпаков. Тогда *все они* могут *вычислить* цвет своего колпака. Но ведь взять *дополнительную информацию* неоткуда?! Так ведь зато и не надо, чтобы угадали *все*! Вариантов дополнительной информации — чётность — всего два, поэтому можно разделить гномов на две половины и каждой половине сообщить свою версию информации. Этого как раз хватит, чтобы ровно 10 гномов угадали цвет своего колпака.

В24. Зафиксировав один цвет и обходя от него грань по часовой стрелке, видим, что всего есть $3! = 6$ вариантов круговой раскраски грани. Докажем перебором, что раскраска любой грани продолжается на весь куб двумя способами. На рис. 57 рёбра куба пронумерованы, а грань будем задавать тремя рёбрами (тремя цифрами). Раскрасим рёбра грани 123 в цвета X, Y, Z, T, как на рисунке. На гранях 156 и 458 цвета не должны повториться, поэтому ребро 5 можно покрасить только в цвета X или Y. Покрасим его в цвет X. Дальше цвета определяются однозначно. Цвет ребра 8 — не X и не Z (из-за грани 458), а также не Y (из-за грани 378), значит, это T. Тогда цвет ребра 7 — не T и не Y (из-за грани 378), а также не X (из-за грани 267), значит это Z. У ребра 6 исключаются цвета X, Z, T, значит, ребро 6 цвета Y. Теперь цвета рёбер 9, 10, 11, 12 однозначно определяются.

Выписывая цвета по часовой стрелке (если глядеть снаружи) начиная с X, получим варианты $123 = XTZY$, $156 = XTYZ$, $267 = XZTY$, $378 = XZYT$, $458 = XYTZ$, передняя грань $XYZT$. Как видим, реализованы все круговые порядки цветов. Поэтому, в каком бы порядке мы не заменили буквы X, Y, Z, T на Б, К, О и С, вариант Б, О, К, С обязательно встретится. Случай, когда ребро 5 покрашено в цвет Y, аналогичен (и даже симметричен) разобранному.

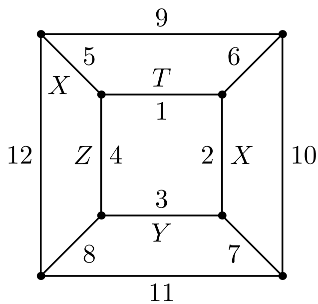


Рис. 57

В25. Ответ: на 11.

Пример. Разрезав по вертикальным границам клеток, получим 11 прямоугольников.

Оценка. а) Раскрасим фигуру в шахматном порядке (см. рис. 58). Как видим, есть 24 белые и 13 чёрных клеток, то есть белых клеток на 11 больше, чем чёрных. Если в прямоугольнике чётное число клеток, то он разбивается на двуклеточные домино, поэтому в нём белых и чёрных клеток поровну. А если число клеток нечётное, то прямоугольник разбивается на домино и одну клетку, поэтому белых клеток может быть больше чёрных не более, чем на одну. Если бы удалось разрезать фигуру на 10 прямоугольников, то всего белых клеток было бы не более чем на 10 больше, чем чёрных. Противоречие.

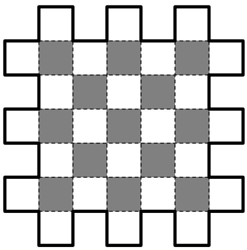


Рис. 58

б) У данного многоугольника 44 вершины. Каждая вершина должна быть вершиной одного из прямоугольников. Поэтому получится не менее чем $\frac{44}{4} = 11$ прямоугольников.

Путь к решению. а) Шахматная раскраска напрашивается. Подсчёт показывает, что разница между числом белых и чёрных клеток равна 11. А в прямоугольнике такая разность составляет не более 1. Это и создаёт узкое место.

б) Психологически непросто «забыть» о клетчатости фигуры и увидеть её просто как многоугольник. А в многоугольнике можно считать вершины, а можно — сумму углов: и то и другое годится для подсчёта узких мест. Впрочем, заметив, что стороны прямоугольников должны быть параллельны сторонам фигуры, можно применить и разность «белой» и «чёрной» площади при шахматной раскраске. Надо только доказать лемму, что в прямоугольнике такая разность не больше 1 (даже если его границы не проходят по сторонам клеток!)

В26. Ответ: может.

На рис. 59 свеча стоит в центре комнаты, и её лучи не достигают четырёх «укромных уголков» (они затенены), к которым примыкают все стены.

Путь к решению. Стена не освещена, если хотя бы частично закрыта от свечи другой стеной. Эта другая может быть закрыта третьей, третья — четвёртой. Но нельзя же прикрывать стены одну другой до бесконечности?! До бесконечности — нет, а вот по кругу — можно!

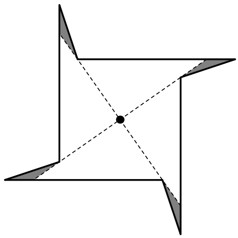


Рис. 59

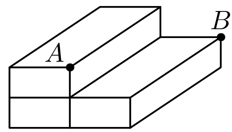


Рис. 60

B27. Приложим три кирпича друг к другу так, как показано на рис. 60, и измерим линейкой расстояние между точками A и B.

B28. Пусть A — число, полученное записью цифр числа 5^{100} в обратном порядке. Запишем цифры числа A, затем 100 нулей справа и, наконец, припишем справа 5^{100}. Получится палиндром. Результат не изменится, если вместо приписывания 5^{100} мы сделаем две операции: сначала припишем столько нулей, сколько их в числе 5^{100}, а затем к результату прибавим 5^{100}. Тогда первое слагаемое оканчивается больше чем на 100 нулей, и поэтому делится на 10^{100}, а значит, и на 5^{100}. Поэтому и сумма, то есть построенный палиндром, делится на 5^{100}.

Путь к решению. Откажемся временно от требования палиндромности. Какие вообще числа делятся на 5^{100}? Первое, что приходит в голову, — само 5^{100} и 10^{100}, а также кратные им. Кроме того, сумма чисел, кратных 5^{100}, тоже делится на 5^{100}. А как обеспечить палиндром? Надо число зеркально отразить и приписать к самому себе — справа или слева. А какое число лучше отражать и в какую сторону? Подумав, понимаем, что делимость на 5^{100} определяется «хвостом» из ста цифр, поэтому можно взять подходящий хвост и отразить влево. Надо только, чтобы он оканчивался не на 0, так как тогда палиндром и начнётся на 0, что не разрешается. В качестве «хвоста» подойдёт число 5^{100}, дополненное слева нужным числом нулей.

В29*. Обозначим сосуды соответственно C_3, C_4 и C_5. Наполним C_5, перельём в C_4, выльем из C_4 воду в раковину и перельём 1 л воды из C_5 в C_4. Наполним C_5 и отольём недостающие 3 л в C_4. Выльем из C_4 воду в раковину и перельём оставшиеся 2 л воды из C_5 в C_4. Теперь дольём 2 л сиропа из C_3 в C_4 и перемешаем. Мы получили 4 л «правильной» смеси, то есть смеси в пропорции 1 : 1. Перельём оставшийся 1 л сиропа из C_3 в C_5 и отольём 3 л смеси из C_4 в C_3. Перельём 1 л сиропа в C_4. Перельём 3 л «правильной» смеси из C_3 в C_5, а 2 л «неправильной смеси» — из C_4 в C_3. Дольём в C_3 из крана 1 л воды. Теперь смесь в C_3 состоит из 1 л сиропа, 1 л воды и 1 л «правильной» смеси, то есть пропорция в ней тоже правильная.

Путь к решению. Инерция мышления запрещает получать «неправильную» смесь на промежуточных шагах.

В30. Ответ: может, см. рис. 61а. Прямая разбивает шестиугольник на четыре треугольника с катетами m и n.

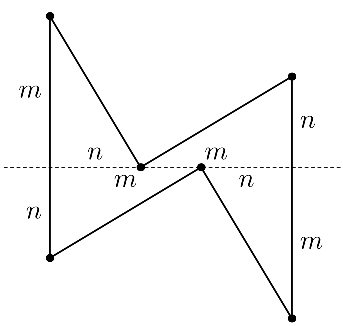


Рис. 61а

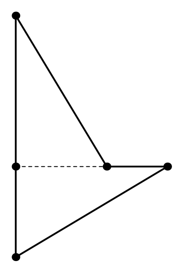


Рис. 61б

Путь к решению. Для начала хорошо бы понять, как вообще *одна* прямая может разбить шестиугольник на *четыре* треугольника. Это явное *узкое место*. У треугольников одна сторона принадлежит разрезу, но остальные должны быть сторонами шестиугольника. Это уже восемь сторон! Впрочем, стороны треугольников могут быть и *частями* сторон шестиугольника. Значит, разрез пересекает не менее двух сторон шестиугольника.

При этом образуются пары углов с суммой 180°. Используем теперь равенство треугольников. Если углы в паре не равны, то в равных треугольниках находится пара углов с суммой 180°, что невозможно. Значит, углы равны, то есть разрез пересекает стороны под прямым углом. Итак, четыре прямоугольных треугольника примыкают катетами к разрезу попарно, и в парах совпадают вершины прямых углов. Остаётся понять, что примыкающие катеты треугольников не равны, иначе бы пара образовала равнобедренный треугольник, который с остальной частью шестиугольника был бы соединён одной вершиной. Значит, каждая пара треугольников образует такой четырёхугольник, как на рис. 61б, и, склеив два таких четырёхугольника по продолжающей разрез стороне, получим нужный четырёхугольник.

В31*. Ответ: за один вопрос.

Достаточно спросить про кошельки с нечётными номерами. Действительно, изначально в семнадцати нечётных кошельках было 1700 монет. Если облегчен был нечётный кошелек, то часть монет из него ушла в лежащие справа от него чётные кошельки. Недостача до 1700 монет будет равен как раз числу таких чётных кошельков. Для разных нечётных кошельков это количество различно: от 16 до нуля. По этой недостаче место облегчённого кошелька однозначно определяется. Если же облегчен чётный кошелек, то часть монет из него ушла в лежащие справа от него нечётные кошельки. Избыток сверх 1700 монет будет равен как раз числу таких нечётных кошельков. Для разных чётных кошельков это количество различно: от 16 до одного. Но тогда и по этому избытку облегчённый кошелек однозначно определяется.

В32*. Ответ: найдётся.

Например, 2048, 256000, 1280000, 6400000, 800000000, 1600000000, 3200000000, 40000000000, 200000000000, 1000000000000.

Путь к решению. Откажемся временно от делимости. Тогда нетрудно записать десять чисел так, чтобы сумма цифр убывала. Только вот и числа будут убывать. А если делимость есть, то они должны возрастать!

Попробуем обеспечить хотя бы возрастание. Как увеличить число, не меняя сумму цифр? Легче всего приписать к нему нули. Их можно приписывать сколько угодно. При этом число умножится на степень числа 10. Ага, если наши числа — делители степени числа 10, то ведь так и делимость появится! Если в делителе зачеркнуть все последние нули (они на сумму цифр не влияют), то останутся только степени двойки и степени пятёрки. Набрав десять таких чисел с разными суммами цифр, расставим их по убыванию сумм цифр, а затем обеспечим делимость приписыванием нулей.

В33*. **Ответ:** может, см. рис. 62 (точка — это Федя).

Путь к решению. Решение получается из решения задачи В26. Заменим свечу на Федю. Не видя затенённого куска стены, он не может исключить, что там не стена, а проход наружу. А концы прохода могут соединяться невидимой для Феди стеной, идущей вокруг.

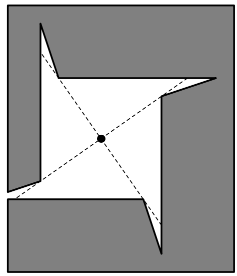


Рис. 62

В34*. **Ответ:** можно.

Сначала спросим про две прямые, на которых лежат диагонали квадрата. В каком бы из углов ни оказалась точка, пересечение угла с квадратом образует треугольник, у которого одна сторона совпадает со стороной квадрата. Спросив про эту прямую, мы узнаем, вне или внутри треугольника лежит точка, а значит, узнаем, лежит ли точка вне или внутри квадрата.

Путь к решению. Инерция мышления подталкивает спрашивать только про прямые, на которых лежат стороны квадрата, поскольку нас «не интересует» расположение точки относительно других прямых. Однако, как видим, *любой* из ответов на вопрос о диагонали сильно уменьшает неопределённость.

В35*. **Ответ:** можно.

В начале кипения перевернем большие часы. Когда весь песок в малых часах будет внизу, перевернём и большие, и малые часы. Когда весь песок в больших часах будет внизу, перевернём их. Когда весь песок в малых часах будет внизу, перевернём большие часы. Когда и в них весь песок будет внизу, с начала кипения пройдёт ровно 8 минут. Поясним это (см. рис. 62).

Пусть вначале в верхней половине маленьких часов было песка на x минут. С начала процесса прошло $x + x + (2 - x) + (2 - x) = 4$ минуты, а песок в обоих часах весь в нижней половине. Остаётся отмерить 4 минуты — это легко сделать при помощи 2-минутных часов.

Рис. 62

Комментарий. Решение не единственно. Но можно показать, что в любом решении необходимо сразу запустить большие часы.

8–9 класс

С1. Ответ: не обязательно.

Возьмём, например, треугольник со сторонами 4, 6 и 9 см. В треугольнике, подобном ему с коэффициентом $\frac{3}{2}$, длины соответствующих сторон будут 6, 9 и 13,5 см.

Путь к решению. Так как мы хотим избежать равенства, больше шансов найти контрпример, когда в треугольнике все стороны разные. Пусть треугольники подобны с коэффициентом $k > 1$ и стороны первого $a < b < c$, тогда стороны второго $ka < kb < kc$. Ясно, что a меньше всех сторон второго, а kc больше всех сторон первого. Если есть два равенства сторон, то это $ka = b$, $kb = c$. Иначе говоря, в первом треугольнике стороны a, ka, k^2a, во втором — ka, k^2a, k^3a. Осталось проверить, что может быть выполнено неравенство треугольника, то есть $a + ka > k^2a$. Это равносильно неравенству $1 + k > k^2$, которое выполнено, например, при $k = \frac{3}{2}$.

С2. Вася положил лыжи в кубический ящик со стороной 1 м. Длина диагонали такого куба равна $\sqrt{3} > 1{,}7 > 1{,}5$ м.

Путь к решению. *Инерция мышления* говорит нам, что *длина* предмета — это что-то вроде наибольшего расстояния между его точками. Для палки это так, а для ящика — не обязательно. А раз так, почему бы не воспользоваться *диагональю* ящика?!

Комментарий. Наибольшее из расстояний между точками фигуры называется её *диаметром*. Так, диаметр треугольника равен его наибольшей стороне, а диаметр квадрата — его диагонали.

С3. Ответ: не обязательно.

Нужным свойством обладает, например, многочлен $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{x(x+1)}{2}$. Действительно, при целом x один из двух сомножителей в числителе чётный, поэтому произведение разделится на 2 нацело.

Путь к решению. Обозначим $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ослабим задачу: обеспечим только, чтобы целыми были $f(-1)$, $f(0)$ и $f(1)$, то есть $a-b$, c и $a+b$. Отсюда следует, что целыми должны быть и $2a = f(-1) + f(1)$, и $2b = f(1) - f(-1)$. А вот a и b могут быть и полуцелыми, но только одновременно. Подставим первые попавшиеся полуцелые значения $a = b = \frac{1}{2}$ и целое $c = 0$. Смотрите-ка, проверка для других малых целых значений x тоже даёт целый результат. Остаётся доказать, что так будет для всех целых x.

С4. Ответ: может.

В четырёхугольнике на рис. 63 $AB = AD < AO + OD = 5$, поэтому его периметр меньше $5 + 5 + 1 + 1 = 12$. В то же время сумма расстояний от точки O до вершин равна $OA + OB + OC + OD = 1 + 4 + 4 + 4 = 13 > 12$.

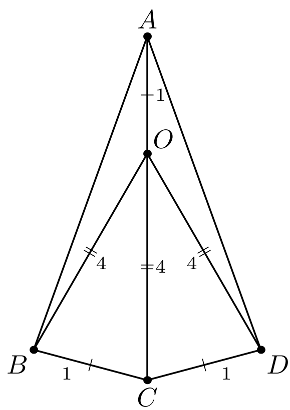


Рис. 63

С5. Ответ: верно.

Первый способ. Впишем окружность в треугольник. Из каждой вершины к окружности проведено два равных отрезка касательных. Длину такого отрезка и запишем в вершину. Так как каждая сторона складывается из двух таких отрезков, суммы в её концах и будут равны её длине.

Второй способ. Запишем неизвестные x, y, z в вершины, лежащие против сторон a, b, c соответственно. По условию числа должны удовлетворять системе уравнений $x + y = c$, $x + z = b$, $y + z = a$. Решение находится однозначно: $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{a+c-b}{2}$, $z = \frac{a+b-c}{2}$. Эти числа положительны, так как числители положительны по неравенству треугольника.

Пути к решению. 1. Для геометра естественно искать не просто числа, а длины отрезков. Он *сведёт* задачу к такой: разбить каждую сторону на два меньших отрезка так, чтобы к каждой вершине примыкали два равных отрезка. Пары равных отрезков в геометрии не редкость, но решение для трёх пар равных отрезков напрашивается — это, конечно, отрезки касательных.

2. Для алгебраиста более привычно заметить *узкое место*: три неизвестных числа связаны тремя соотношениями. Сразу хочется составить систему уравнений и её решить. Кстати, в ответе как раз и получатся длины отрезков касательных, выраженные через стороны.

С6. Ответ: нельзя.

Невозможно различить номера $2^{13} = 8192$ и $2^{14} = 16\,384$, поскольку они с любым номером N дадут одинаковый НОД. Действительно, если $N \leqslant 20000$ и N не равно указанным степеням, то в его разложение на простые множители двойка входит в некоторой степени k, где $0 \leqslant k \leqslant 12$. Значит, НОД $(N, 2^{13}) =$ НОД $(N, 2^{14}) = 2^k$.

Путь к решению. Решимся искать контрпример. *Принцип узких мест* подсказывает ограничить степень свободы: взять такие числа, у которых НОДы будут принимать мало значений и поэтому всегда будут совпадать. Но НОД — это делитель, а меньше всего делителей у простых чисел. Идея: взять два простых числа. Но ведь кратное одному из простых позволит их различить: с одним оно даст НОД $= 1$, а с другим — не 1. А давайте избежим этого: возьмём такие простые числа, чтобы их кратные в список номеров не входили. Достаточно взять простые числа от 10 000 до 20 000. Увы, без компьютера такие числа не найдёшь! А если взять не простые, а степени простых — у них ведь тоже мало делителей?! Их тоже надо брать из интервала от 10 000 до 20 000. Разные основания брать нельзя: тогда НОД с основанием их различит. Давайте мы возьмём соседние степени *одного* простого числа так, чтобы у бо́льшей степени вообще не было кратных среди других номеров. Как видим из решения, подойдут уже степени самого маленького простого числа — двойки. Есть и другие контрпримеры: ещё одну неразличимую пару дадут числа 101 и 101^2.

С7. а) Может. Пусть высоты пятидесяти первых строк равны $1, 2, \ldots, 50$, а все остальные высоты равны 50. Пусть ширина первого столбца равна 51, далее 52, 53, 54, $\ldots$, 90, а у всех остальных столбцов ширина тоже 90. Строки с высотой 50 можно вычеркнуть все, кроме одной, — новых прямоугольников они не дают. Аналогично столбцы ширины 90 можно вычеркнуть все, кроме одного. Осталось 50 строк и 40 столбцов, на пересечении у них 2000 прямоугольников. Их и отметим.

б) Может. Исправим в предыдущем примере ширину первого столбца на 1, а второго — на 2. Тогда все ранее отмеченные прямоугольники различны, кроме двух равных прямоугольников 1×2 и 2×1. Снимем с одного из них отметку, останутся отмеченными 1999 прямоугольников.

в) Может. Сделаем ровно 27 различных высот строк и 30 различных ширин столбцов. Тогда если все эти числа различны, то различных прямоугольников ровно $27 \times 30 = 810$. Сделаем теперь пять различных ширин равными пяти высотам. На пересечении соответствующих строк и столбцов возникнет $\dfrac{5^2-5}{2} = 10$ пар равных прямоугольников. Тогда различных прямоугольников останется $810 - 10 = 800$.

Путь к решению. а) Заметим, что если сделать два столбца одинаковой ширины, то и соответствующие прямоугольники в них будут равны. Поэтому один из столбцов можно мысленно вычеркнуть. Аналогично можно вычеркивать и строки. Если останется m строк, n столбцов и все их размеры (ширины и высоты) различны, то будет mn различных прямоугольников. Представив 2000 как $40 \cdot 50$, получим нужный результат.

б) Хочется обеспечить и 1999 прямоугольников подбором m и n. Увы, число 1999 простое. Подумаем о других методах «убивать» равные прямоугольники. Можно ведь приравнивать высоты не между собой, а к ширинам. Если приравнять одну ширину к одной высоте, то равных прямоугольников не получится. А вот если две ширины — к двум высотам, то возникнут два равных прямоугольника размера $a \times b$ и $b \times a$, то есть различных станет на 1 меньше. Осталось скомбинировать два метода и отнять эту единичку от 2000.

в) Попытка разложить 800 на два множителя не больше 30 не приводит к успеху. И 801 так тоже не раскладывается. Попробуем углубиться во второй приём. Пусть k высот равны k ширинам. Тогда на пересечении соответствующих строк и столбцов возникнет $\dfrac{k^2-k}{2}$ пар равных прямоугольников, то есть будет убито $\dfrac{k^2-k}{2}$ прямоугольников. Нам надо «убить» $900-800=100$ прямоугольников, но это число, к сожалению, в таком виде тоже не представишь. Попробуем, скомбинировав методы, отнимать не от 900. Нам достаточно заменить число 800 на такое число вида $T = 800 + \dfrac{k^2-k}{2}$, которое можно будет представить как произведение сомножителей, не превосходящих 30. Проще всего это сделать перебором: вычислить возможные значения для T (это будут 800, 801, 803, 806, 810, 815, 821, ...) и разложить эти числа на множители. Впрочем, те, кто предпочитает алгебру, могут попробовать решить уравнение $mn-\dfrac{k^2-k}{2} = 800$ при указанных ограничениях на m и n.

С8. *Первый способ.* Подойдёт число $210\ldots0$. Ясно, что надо менять последнюю цифру на нечётную, иначе число кратно двум. При замене цифры на 5 число кратно пяти, а при замене её на 3 или 9 сумма цифр числа, а значит, и само число кратны трём. При замене на 7 число, очевидно, кратно семи, а при замене на 1 число кратно 11, так как суммы цифр на чётных и нечётных местах равны 2.

Второй способ. Вычислив $11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 46\,189$, рассмотрим число $471890\ldots010$. Ясно, что надо менять последнюю цифру на нечётную, иначе число кратно двум. При замене цифры на 5 число кратно пяти. А при замене последней цифры на 1, 3, 7 или 9 число разделится на двузначное число, образованное его двумя последними цифрами.

Путь к решению. Стозначность не принципиальна. Достаточно придумать какое-нибудь подходящее число и нарастить его до стозначного, используя группы цифр, кратные любому из возникающих при замене последней цифры делителей.

С9. Ответ: можно. Например, так: 2, 1, 4, 3, 6, 5, ..., 100, 99.

Действительно, при такой расстановке каждую группу из $2k$ подряд стоящих чисел можно разбить на пары расположенных симметрично относительно середины группы (например, группа 1, 4, 3, 6, 5, 8 разбивается на пары (1, 8), (4, 5), (3, 6)). В каждой паре среднее арифметическое — одно и то же *полуцелое* число (в пару входят числа разной чётности). Значит, и среднее арифметическое всей группы — то же самое нецелое число.

Группа из $2k+1$ подряд стоящих чисел состоит из $2k$ последовательных чисел и одного числа с краю. Если это число поменять с его соседом в расстановке, не входящим в группу, получим $2k+1$ последовательных чисел, их среднее арифметическое целое. Значит, среднее арифметическое чисел выбранной группы *отличается от* этого *целого* на $\frac{1}{2m+1}$, и поэтому *не целое*.

Путь к решению. Сразу понятно, что решений должно быть много. Условие «не целые» оставляет много свободы. Но для несистематического порядка нецелость средних придётся проверять на компьютере. Поэтому хочется придумать такую расстановку, чтобы нужные средние было *легко контролировать*. Вот например, про исходное расположение 1, 2, ..., 100 мы легко можем сказать, какие средние целые (у групп нечётного размера, короче, *нечётных групп*), а какие — нет (у *чётных групп*). Попробуем использовать эту расстановку как *заготовку* и улучшить её так, чтобы суммы групп изменились мало. Скажем, нас устроит, если у нечётных групп все суммы изменятся на 1, а у чётных — не изменятся. Этого можно достичь, заменив в нечётной группе одно слагаемое на соседнее в исходном ряду. Так как групп много, возникает идея перестановки в пятидесяти парах.

Запомните приём. Отрицательное условие (*не*чётное, *не* целое, *ир*рациональное, *бес*конечное) часто можно обеспечить, оттолкнувшись от противоположного положительного условия (чётное, целое, рациональное, конечное).

С10. Ответ: может.

Пусть, например, у кубика I на всех гранях стоит 3, у кубика II — 2, 2, 2, 2, 5, 5, у кубика III — 1, 1, 4, 4, 4, 4. При сравнении I с II 24 раза возникнут пары (3, 2) и 12 раз — пары (3, 5). При сравнении II с III победными для II будут пары (2, 1) — 8 раз, (5, 1) — 4 раза и (5, 4) — 8 раз, итого 20 пар, что больше половины. Наконец, при сравнении III с I победными для III будут пары (4, 3) 24 раза.

Путь к решению. Преодолеть *инерцию мышления* и поверить, что такое возможно, помогает задача 1.5. Понятно, что бо́льшая сумма очков может дать преимущество, поэтому *удобнее* искать пример, где суммы на всех кубиках одинаковы. Наконец, при построении примера помогает принцип «если важно число побед, выигрывай понемногу, а проигрывай помногу».

С11. Ответ: может.

Будем измерять скорость в кругах в минуту. Пусть скорости гонщиков Б, А и В равны соответственно 1, 2 и 3. Пусть в момент, когда В в первый раз обогнал Б, он передал фляжку Б, а от В до А оставалась четверть круга. Перейдём в систему отсчёта, связанную с А. В ней А неподвижен, а скорости Б и В равны -1 и 1 соответственно. Тогда Б и В встречаются через каждые полкруга, то есть в двух точках на расстоянии четверти круга от А (см. рис. 64). При этом каждый проезжает полукруг без А с фляжкой, затем передаёт её другому, проезжает мимо А без фляжки и т. д.

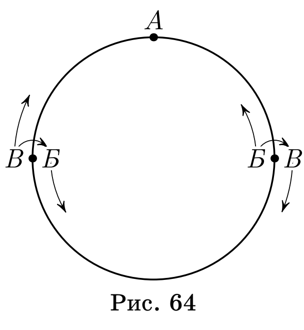


Рис. 64

Путь к решению. Сильно упрощает задачу переход в систему отсчёта, где изжаждавшийся гонщик неподвижен. Развитие идеи: сделать точки встречи двух других тоже неподвижными, а картинку — симметричной.

С12*. Ответ: могут.

Вот пример для $N = 19$ (точками отмечены места разреза): 9.18.7.16.5.14.3.12.1.10.11.2.13.4.15.6.17.8.19.

Путь к решению. В палиндроме все цифры (кроме, быть может, средней) можно разбить на пары одинаковых. Поэтому только одна цифра может встретиться нечётное число раз, а все остальные должны встретиться чётное число раз. Будем искать минимальное N, чтобы для набора цифр в записи чисел 1, 2, ..., N это *условие на чётность* было выполнено. Однако если $N = 2, \ldots, 9$, то цифры 1 и 2 встречаются в наборе по одному разу, а если $N = 10, \ldots, 18$, то по одному разу встречаются цифры 0 и 9. Итак, наименьшее N, для которого условие на чётность выполнено, — это $N = 19$: в записи 1, 2, ..., 19 цифра 0 встречается один раз, цифра 1 — 12 раз, остальные цифры — по два раза каждая. Покажем, как при данном N прийти к примеру. Ясно, что в середине палиндрома должен быть 0. Он входит в число 10, поэтому центральная группа палиндрома — это 101. Вообще, слева и справа от нуля должно быть по шесть единиц и по одному экземпляру каждой из остальных цифр. Из двух симметричных не единиц одна цифра входит в двузначное число, поэтому каждая не единица стоит рядом с единицей. Значит, в палиндроме встречается не более двух не единиц подряд. Должна быть группа из двух единиц подряд — чтобы образовать число 11. А вот трёх единиц подряд быть не может: таких групп должно быть две, и, как ни разбивай, получим либо два числа 1, либо два числа 11. После числа 11 не могут идти две не единицы, иначе и цифра после 11, и симметричная ей должны образовать однозначное число. Теперь уже можно попробовать выписать палиндром с выполнением всех найденных условий. Проверьте, что почти любой такой палиндром однозначно разбивается на числа от 1 до 19.

С13*. Ответ: существуют, например 9 999 999 999 992, 10 000 000 000 091 и 10 000 000 000 100. Сложив любое из этих чисел с его суммой цифр, получим 10 000 000 000 102.

Путь к решению. У искомых чисел сумма цифр тем меньше, чем больше число. Узкое место бросается в глаза: без перехода через десяток не обойтись. Решим сначала более простую задачу: найдём *два* таких числа. С двузначными не получается, но к числу 100 пара легко подбирается: $100+S(100) = 91+S(91)$. Заметим, что числа отличаются на 9 и даже дают одинаковые остатки при делении при делении на 9. Это не случайность: число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки на 9. Но тогда остаток у числа $p + S(p)$ равен $2p = 2q$ по модулю 9, значит, сравнимы и p с q.

Используя этот результат, получим ещё пары. А именно, приписывая спереди одинаковые группы цифр, получим другие подходящие пары, например пару 5091 и 5100 или 2 013 091 и 2 013 100. Используя делимость и соображения о переходе через десяток, превратим пару в тройку. А именно, задача будет решена, если, вычитая из меньшего числа пары кратное девяти, мы сможем увеличить его сумму цифр на столько же, на сколько уменьшилось число. Есть шанс добиться этого, если у числа спереди стоит много нулей. Скачок суммы цифр произойдёт, когда при вычитании мы перейдём от числа, оканчивающегося на нули, к числу, оканчивающемуся на девятки. Итак, пусть есть число вида $10\ldots091$, где между 1 и 9 вставлено k нулей. Вычтя 99, получим $9\ldots92$ ($k+1$ девятка). Сумма цифр увеличилась с $1+9+1=11$ до $9(k+1)+2$. Нам надо, чтобы она увеличилась именно на 99, то есть выполнялось равенство $9(k+1)+2-11 = 99$. Это достигается при $k=11$, что и даёт пример.

C14*. а) Нельзя. Разрежем треугольник средними линиями на четыре равных треугольника (см. рис. 65а). Пусть отмечены 8 клеток. Тогда в каком-то из треугольников AEF, BDF, CDE отмечено не более двух клеток (скажем, в BDF). Значит, в остальной части — трапеции $AFDC$ — отмечено не менее шести клеток. Но эта трапеция разбивается на пять полосок, параллельных AC. По *принципу Дирихле* какие-то две отмеченные клетки попадут в одну полоску.

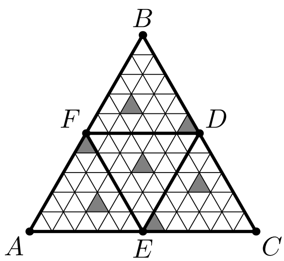


Рис. 65а

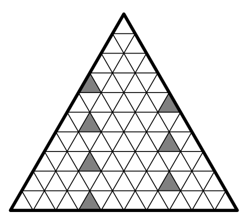


Рис. 65б

б) Можно. См. примеры на рис. 65а и рис. 65б.

Путь к решению. а) Разбиение на треугольники и выбор треугольника с *наименьшим* числом отмеченных клеток позволяют выделить *узкое место*: трапецию, где клеток слишком много.

б) Предыдущее разбиение и рассуждение показывают, что в угловых треугольниках должны быть отмечены по две клетки, а в центральном — одна. Это *сокращает перебор*. Дополнительно можно поискать решение, которое переходит в себя при повороте на 120°.

С15*. Ответ: можно, см. рис. 66а.

Длина каждого косого отрезка равна $\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34} < < \sqrt{36} = 6$ км. Поэтому общая длина дорог меньше, чем $4 \cdot 6 + 4 = 28$ км.

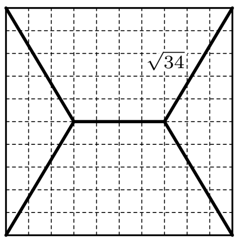


Рис. 66а

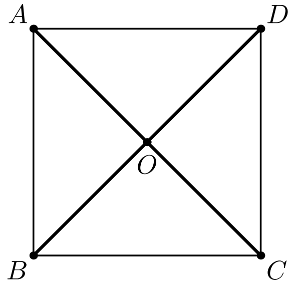


Рис. 66б

Путь к решению. Кажется, что кратчайшей системой будут дороги, идущие по двум диагоналям квадрата (см. рис. 66б). Однако их длина $2 \cdot 10\sqrt{2} > 2 \cdot 10 \cdot 1{,}4 = 28$ км. Объявим этот пример *заготовкой* и подумаем, как его можно улучшить. Добавим ещё деревню O в центре квадрата. Теперь у нас есть два треугольника ABO и CDO. Система дорог $AO + BO$ уже не кажется кратчайшей в треугольнике ABO. Хочется взять какую-нибудь точку T внутри треугольника и соединить её дорогами с вершинами. Подсчёты показывают, что для некоторых положений T такая система действительно оказывается короче. Изменив аналогично систему в треугольнике COD, получим решение задачи.

Комментарий. *Кратчайшая сеть* дорог (*сеть Штейнера*) для треугольника с углами меньше 120° получается, когда T — *точка Торричелли* (из неё все стороны видны по углом 120°). Оказывается, взяв точки Торричелли в треугольниках ABO и CDO, получим кратчайшую сеть для квадрата.

С16*. Ответ: могут.

Так можно разрезать таблицу $(n-1)\times(n+1)$. Выделим из неё $n-1$ «зигзаг», как показано на рис. 67. Оставшийся правый столбец таблицы — отдельная часть. Мысленно добавим к нему сверху клетку с числом 0.

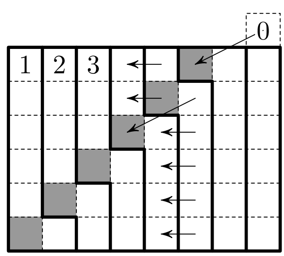


Рис. 67

Заметим что для каждой клетки номер соседа слева на 1 меньше, а соседа снизу — на $n+1$ больше. При переходе от любого зигзага к соседнему слева $n-1$ клетка переходит в соседа слева (что даёт уменьшение суммы на $n-1$), и только одна клетка (в последнем столбце — добавленная клетка) сдвигается «ходом коня» на клетку, номер которой как раз на $n-1$ больше (на рисунке эти дающие прибавку клетки закрашены). В итоге сумма не меняется.

Путь к решению. Ясно, что в частях должны быть и большие, и малые числа, поэтому разумно искать многоугольники, вытянутые по вертикали. Пусть в таблице r строк и c столбцов. Если просто разбить на столбцы, то сумма в каждом столбце будет на r больше суммы правого соседа. Эта разница невелика, её можно скомпенсировать одним-двумя лишними числами. Сделаем, например, самый правый столбец отдельной частью. Нам надо, чтобы сумма всех элементов таблицы $\frac{rc(rc+1)}{2}$ делилась на сумму этого столбца $\frac{cr(r+1)}{2}$, то есть чтобы $rc+1$ делилось на $r+1$. Последнее равносильно делимости $c-1$ на $r+1$. Это выполнено, например, при $c=r+2$. Кстати, тогда общее число частей должно быть равно $\frac{rc+1}{r+1}=r+1$, и в каждой части, кроме последнего столбца, должно быть в среднем по $r+1$ клетке. Посмотрим, что можно добавить к предпоследнему столбцу, чтобы уравнять его сумму с последним. Ура, можно добавить число r из первой строки — оно стоит как раз рядом с предпоследним столбцом! От третьего с краю столбца осталась $r-1$ клетка, сумма в них на $3r$ меньше нужной. Но сумма двух верхних клеток в предыдущем столбце как раз равна $3r$. Продолжая такие рассуждения, мы разобьём таблицу нужным образом.

C17*. Рассмотрим всевозможные непустые наборы. Так как каждое из чисел может независимо войти или не войти в набор, всего наборов $2^{10}=1024$, из них непустых — 1023. Сумма чисел в наборе меньше $10\cdot 100=1000$, поэтому по принципу Дирихле найдутся два набора с одинаковой суммой. Один набор не может быть подмножеством другого, иначе суммы не равны. Если эти наборы пересекаются, то выбросим из них общую часть — равенство сумм не нарушится.

Путь к решению. Подсчёт количества наборов и сумм сразу даёт существование наборов с одинаковой суммой. Но как обеспечить условие, что наборы не пересекаются? Да просто заметив, что это условие *не принципиально*!

C18*. Ответ: существует.

Проведём, например, через центр квадрата прямую, не параллельную его сторонам и диагоналям. Она разобьёт квадрат на две равные прямоугольные трапеции, у которых все стороны различны. Проведём через центр квадрата вторую прямую перпендикулярно первой. Теперь квадрат разбился на четыре равных четырёхугольника (они переходят друг в друга при повороте на 90°), тем самым каждая из трапеций разбилась на два равных многоугольника.

Путь к решению. Если разрез не прямой, то у частей образуются сверхтупые углы (больше развёрнутого). Ввиду равенства частей такие углы есть с обеих сторон разреза. Все звенья ломаной разреза прилегают к сверхтупым углам, поэтому при наложении равных частей эта ломаная центрально симметрично переходит в себя. Но тогда и разрезаемый многоугольник центрально симметричен, и у него есть равные стороны. Пусть разрез прямой. Если части — пятиугольники или при наложении частей разрез наложен сам на себя или на не смежную сторону, то в исходном многоугольнике какие-то две стороны накладываются друг на друга, то есть равны. Противоречие. Если эти смежные стороны лежат на равных сторонах исходного многоугольника, то равны примыкающие к разрезу накрест лежащие углы, то есть разрез соединяет параллельные стороны исходного многоугольника. Но тогда накладываются и равны какие-то стороны исходного многоугольника, отличающиеся от параллельных. Значит, разрез перпендикулярен одной из исходных сторон и вдвое короче неё, а наложение осуществляется поворотом на 90° вокруг середины этой стороны. Такая картинка восстанавливается однозначно.

C19*. а) Может. Рассадим 16 кружковцев прямоугольником в четыре ряда по четыре человека в каждом ряду. Кроме рядов, образуются ещё перпендикулярные им шеренги по четыре человека. Пусть каждый дружит со всеми из своего ряда и из своей шеренги. Тогда у каждого шесть друзей — три в ряду, три в шеренге. У двоих друзей из одного ряда — двое общих друзей из того же ряда; то же верно для шеренг. Если двое не дружат, то сидят в разных рядах и шеренгах. На пересечении этих рядов и шеренг есть ещё два человека, они и являются общими друзьями.

б) Не может. Предположим, что нужный кружок нашёлся. Из пяти друзей кружковца А можно составить 10 пар. У каждой такой пары (Б, В) в число их общих друзей входит А и ещё какой-нибудь кружковец Г. Сопоставим его паре. Докажем, что получится взаимно однозначное соответствие между парами и остальными (кроме А) кружковцами. Во-первых, пара (Б, В) однозначно восстанавливается как пара общих друзей А и Г. Во-вторых, так можно подобрать пару для любого кружковца. Значит, в кружке кроме А есть ещё 10 человек, а всего — 11. Если у каждого по 5 друзей, то всего есть $\frac{11 \cdot 5}{2} = 27{,}5$ пар, что невозможно.

Комментарий. б) Доказательство невозможности можно было закончить и ссылкой на лемму о рукопожатиях.

Путь к решению. а) Естественно рассматривать четвёрки: «пара» + «пара их общих друзей». Если совпали две такие четвёрки, то в такой *дружной* четвёрке каждый дружит с каждым. *Удобно*, если кто-то вошёл в две дружные четвёрки, — тогда у него как раз шесть друзей. Рассуждение, как в решении пункта б), показывает, что в кружке 16 человек. Это сильно сокращает возможный перебор. Поскольку $16 = 4^2$, возникает желание построить их квадратом и двумя способами разбить на дружные четвёрки.

б) Естественно рассматривать четвёрки: «пара» + «пара их общих друзей». Такая четвёрка однозначно строится как по паре любых человек, так и по паре друзей одного человека. Эта однозначность и создаёт узкое место конструкции.

С20*. а) Можно, см. рис. 68. При вынимании любого гвоздя образуется двойная петля, которая соскальзывает с оставшегося гвоздика.

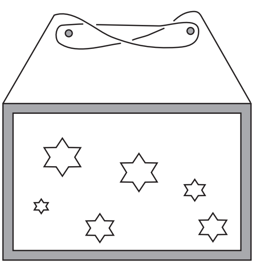


Рис. 68

б) Можно. Пусть мы как-то обмотали тесёмку вокруг гвоздей. Заметим, что перегнув её, и пройдя весь путь в обратном порядке, мы эту обмотку как бы отменим: потянув за один конец скользкой тесёмки, мы постепенно вытащим всю обмотку. Покажем, как обмотать тесёмку вокруг трёх гвоздей, используя полученную в решении п. а) обмотку U вокруг двух гвоздей. А именно, сделаем обмотку U вокруг двух левых гвоздей, пропустим тесёмку слева направо над третьим гвоздём, сделаем обратную U обмотку вокруг левых гвоздей и пропустим тесёмку справа налево над третьим гвоздём. Теперь если вынуть третий гвоздь, то прямая и обратная U обмотки «отменят» друг друга и картина упадёт. Вынимание любого из гвоздей отменит как обмотку U, так и ей обратную. Останутся проходы над третьим гвоздём туда-сюда, которые тоже отменят друг друга, и картина упадёт.

C21*. б) Существуют. На рис. 69 чёрный семиугольник $OCBC'AA'B'$, тонкий $OACA'BB'C'$ и пунктирный $OBAB'CC'A'$ получаются друг из друга поворотами вокруг точки O.

Путь к решению. б) В этой конструкции много узких мест. В трёх семиугольниках 21 сторона. Между семью точками есть $C_7^2 = 21$ отрезок. Значит, каждый отрезок должен стать стороной семиугольника. Покрасим каждый семиугольник в свой цвет. Пусть есть вершины A и B. Оставшиеся вершины могут оказаться по разные стороны от прямой AB, но если ломаная замкнулась без самопересечений, то какие-то две из вершин соединились отрезком, не пересекающим AB. Значит, на границе выпуклой оболочки вершин нет четырёх вершин, иначе диагональ оболочки разделила бы вершины в многоугольнике того же цвета, что и эта диагональ. Итак, выпуклая оболочка — треугольник.

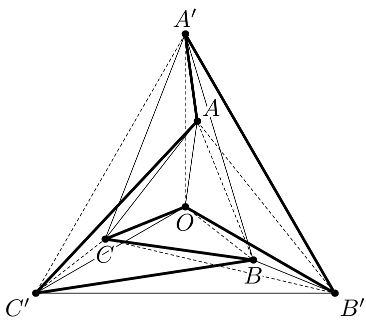


Рис. 69

Повторение тройки (три вершины, три семиугольника) наводит на мысль поискать пример, где семиугольники переходят друг в друга при повороте на треть оборота. Расположим три вершины в вершинах правильного треугольника, одну — в его центре, а ещё три — в вершинах меньшего правильного треугольника с тем же центром. Далее остается перебором раскрасить рёбра в три цвета так, чтобы каждый цвет дал семиугольник. Удобнее заранее установить, как цвета переходят друг в друга при повороте по часовой стрелке, и красить переходящие друг в друга рёбра тройками.

С22*. См. таблицу. В ней суммы в строках — по 90, а произведения в столбцах — по 10 800.

15	45	30
10	20	60
72	12	6

Путь к решению. *Ослабим условия*: откажемся временно от равенства сумм и потребуем только различных чисел в строках (а не во всей таблице). Разложим число 12 на множители тремя способами: $12 = 1 \cdot 1 \cdot 12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 6 \cdot 1$ и запишем тройки сомножителей в столбцы таблицы:

1	3	2
1	2	6
12	2	1

Осталось добиться, чтобы суммы по строкам были равны. Заметим, что если умножить все элементы строки на одно и то же число, то произведения в столбцах тоже умножатся на это число и останутся равными. Суммы в строках равны соответственно 6, 9 и 15, их НОК равен 90. Домножив строки на 15, 10 и 6 соответственно, мы уравняем суммы. Получим таблицу из решения. Обратите внимание на то, что числа перестали быть равными как бы «сами собой».

С23*. Ответ: см. рис. 70. Сначала делим окружность на шесть равных дуг, потом такими дугами соединяем точки деления с центром круга. Получится шесть равных симметричных частей. Делим отрезком каждую часть на две равные меньшие части.

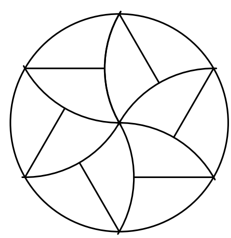


Рис. 70

Путь к решению. *Узким местом* являются куски границы частей, равные дугам исходного круга. Понятно, что такие куски есть у всех частей. Если все они будут частями исходной окружности, то, скорее всего, все части получаются друг из друга поворотом относительно центра. Хотя бы одна из частей содержит центр, поэтому и все будут содержать центр. Значит, должны быть такие дуги, не лежащие на исходной окружности. Соединяя такими дугами равноотстоящие точки окружности с центром, мы получим разбиение круга на n равных частей для любого n. Каждую часть ограничивают, среди прочего, две выпуклые дуги: идущая в центр составляет $\frac{1}{6}$ окружности, а другая — $\frac{1}{n}$. Если мы хотим резать дальше, то стоило бы сделать эти дуги равными. И точно: при делении на шесть частей фигура оказывается симметричной, и её можно разбить отрезком на две равные части.

С24*. а) Нет. Юрины числа $M_1 > M_2 > M_3 > M_4 > M_5$, Яшины — $m_5 < m_4 < m_3 < m_2 < m_1$. Ясно, что $M_1 \geqslant m_1$. Докажем, что $M_2 \geqslant m_2$. При выборе M_2 уже были вычеркнуты одна строка и один столбец, а при выборе m_2 — по три строки и столбца (число выбиралось на четвёртом шаге). В сумме вычеркнуто не более чем по четыре строки и столбца, значит, хотя бы одно число a осталось невычеркнутым в обоих случаях, откуда следует, что $M_2 \geqslant a \geqslant m_2$. Аналогично доказывается, что $M_i \geqslant m_i$ при любом i, и поэтому Юрина сумма не меньше Яшиной.

б) Да. Рассмотрим, например, следующую таблицу:

1	100	200	300	400
10	111	210	310	410
20	120	221	320	420
30	130	230	331	430
40	140	240	340	441

Будем складывать числа любой разрешённой пятёрки. В разряде единиц сумма будет равна количеству чисел пятёрки, стоящих на диагонали. В разряде десятков сумма всегда будет равна 10 ($0 + 1 + 2 + 3 + 4$: цифра десятков зависит только от строки, а у нас есть представитель каждой строки). И в разряде сотен сумма равна 10 (цифра сотен зависит только от столбца). Значит, наибольшей будет сумма, где все пять чисел взяты с диагонали. Именно их Яша и выберет.

Путь к решению б). *Ослабим условие*: построим таблицу, где Яша должен в сумме выбрать не меньше любой разрешенной пятёрки. Это обеспечить проще, так как можно сделать просто, чтобы суммы во всех разрешённых пятёрках были одинаковы. Таким свойством обладает, например, таблица, где цифра сотен зависит только от столбца, а цифра десятков — только от строки. (В общем случае можно приписать численный вес каждой строке и каждому столбцу и в клетку на пересечении писать сумму весов строки и столбца. Тогда сумма любой разрешённой пятёрки будет равна сумме всех десяти весов.)

Несложно подобрать веса так, чтобы все 25 чисел получились различными. Отметим пять чисел, выбранных Яшей. Каждое из них можно немного увеличить так, чтобы оно осталось меньше следующего по величине числа в таблице. Такое увеличение не повлияет на Яшин выбор. Любая другая пятёрка отличается от Яшиной хотя бы одним числом, поэтому её увеличение будет меньше.

С25*. Ответ: можно.

Пусть $a < b < c$ — длины рёбер кирпича. Возьмём вспомогательный куб с ребром b. Закроем этот куб плотно со всех сторон, прикладывая к граням куба грань кирпича $a \times b$ так, чтобы стороны этих граней были параллельны, а центры граней совпадали. При этом левую и правую грани закроем кирпичами так, чтобы они высовывались вверх и вниз; переднюю и заднюю грани — чтобы кирпичи высовывались вперёд и назад; верхнюю и нижнюю грани — чтобы кирпичи высовывались вправо и влево. Теперь куб можно убрать. Огороженное кубическое пространство внутри осталось, и из его центра ни одной вершины не видно.

Путь к решению. Идея аналогична применённой в задаче В26.

С26*. Ответ: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{2, 4\}$ или $\{2, 3, 6\}$. *Примеры* соответствующих картинок см. на рис. 71.

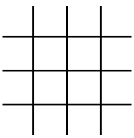


Рис. 71а

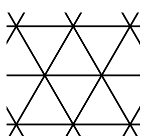


Рис. 71б

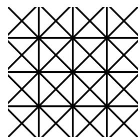


Рис. 71в

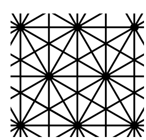


Рис. 71г

Пусть есть точка A, в которой пересекаются не менее трёх прямых. Рассмотрим одну из них и найдём на ней ближайшую к A точку пересечения B. Среди прямых, проходящих через A, выберем ближайшую к прямой AB *по часовой стрелке* прямую l. Среди прямых, проходящих через B, выберем ближайшую к прямой AB *против часовой стрелки* прямую p. Угол между AB и l не более 60°, между AB и p — не более 90°, поэтому l и p пересекутся в некоторой точке C. Другие прямые, проходящие через точку C, не разрезают треугольник ABC, иначе между A и B были бы другие точки пересечения. Значит, каждый угол в треугольнике ABC равен $\frac{180^\circ}{n}$, где n — количество прямых, проходящих через вершину.

Если через A проходит n прямых, через B — m прямых и через C — k прямых, то из формулы суммы углов треугольника получим $\frac{180^\circ}{n}+\frac{180^\circ}{m}+\frac{180^\circ}{k}$, то есть $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}=1$.

Решим это уравнение в натуральных числах, больших единицы. Если все три знаменателя больше тройки, то равенство невозможно. Не ограничивая общности, можно считать, что $n=3$ или $n=2$. В первом случае $\frac{1}{m}+\frac{1}{k}=\frac{2}{3}$, что снова означает, что один из знаменателей не больше тройки. Отсюда легко получить, что $m=n=k=3$. Во втором случае $\frac{1}{m}+\frac{1}{k}=\frac{1}{2}$, то есть хотя бы один из знаменателей не больше четвёрки. Перебором находим ещё два решения: $(2,4,4)$ и $(2,3,6)$.

Итак, в Сашином наборе могут встречаться числа 2, 3, 4 и 6, что соответствует минимальным углам 90°, 60°, 45° и 30° между прямыми в соответствующих точках. При этом если встречаются два разных минимальных угла α и β ($\alpha>\beta$), то должен встретиться и угол, не меньший их разности. Действительно, если проходящие через разные точки прямые образуют угол γ, то, повернув одну из прямых на α, а другую в другую сторону на β, мы получим две новые прямые, пересекающиеся под углом $\gamma-(\alpha-\beta)$.

Такими операциями мы сможем получить угол не больше $\alpha - \beta$. Из этого следует, что Саша не мог увидеть одновременно минимальный угол 45° вместе с углом 60° или 90°, то есть получить в наборе число 4 вместе с 3 или 6. Кроме того, если встретились 2 и 3, то должно встретиться и 6. Таким образом, у Саши могли теоретически получиться только такие наборы: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 3, 6\}$. Осталось построить примеры.

Набору $\{2\}$ должны соответствовать прямые, пересекающиеся под углом 90°. Подойдут две пары взаимно перпендикулярных прямых. Для набора $\{3\}$ нужны углы по 60° и правильные треугольники. Здесь придётся взять бесконечную решётку, разбивающую плоскость на правильные треугольники. Набор $\{2, 4\}$ требует углов в 45° и 90° и равнобедренных прямоугольных треугольников. Такая решётка тоже легко строится. Для набора $\{2, 3, 6\}$ требуются треугольники с углами 30°, 60° и 90°. Тут помогает соображение, что три высоты делят правильный треугольник на шесть требуемых треугольников. Проведя такие высоты в сетке из правильных треугольников, получим требуемую сетку.

Путь к решению. Предварительному исследованию существенно помогло *узкое место*: углы минимального треугольника. Сведя поиск углов к решению уравнения в целых числах, мы получили конечное число случаев. Отсеять невозможные случаи помогло следующее *узкое место*: поиск минимального угла между прямыми, проходящими через две фиксированные точки. Построение примеров опиралось на *воспоминание о знакомых* картинках и на *редукцию*.

C27*. Ответ: да, существует даже такой пятиугольник с целыми сторонами. Например, от пятиугольника $ABHKD$ прямая EF отрезает пятиугольник $FEBHK$, подобный исходному с коэффициентом $\frac{2}{3}$ (см. рис. 72а). На рисунке все отмеченные углы равны 120°, поэтому нетрудно убедиться, что в пятиугольниках соответствующие углы равны, а соответствующие стороны в меньшем пятиугольнике в полтора раза короче.

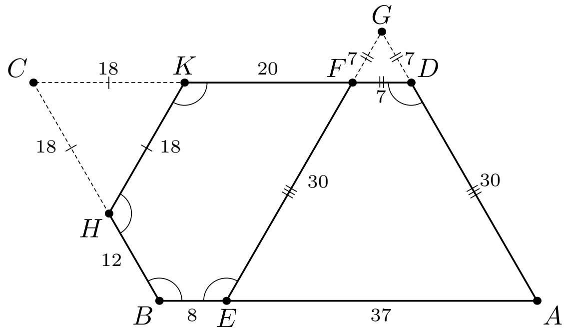


Рис. 72а

Путь к решению. Пусть прямая $A'E'$ отрезала от пятиугольника $ABCDE$ подобный ему с пятиугольник $A'BCDE'$ с коэффициентом подобия $k < 1$. В принципе возможно 10 вариантов соответствия между вершинами этих пятиугольников: вариант однозначно определяется тем, в какую сторону малого пятиугольника перешла сторона AE и в какой из концов стороны перешла вершина A. Начнём перебирать случаи.

1. $AE \to A'E'$. Тогда $ABCDE \to A'BCDE'$ (соответствующие вершины перечисляются в том же порядке), поэтому $CD \to CD$. Но если сторона перешла в равную ей, то $k = 1$ — противоречие.

2. $AE \to E'A'$. Тогда $ABCDE \to E'DCBA'$, поэтому $BC \to CD$, $CD \to$ $\to BC$. Но тогда сумма длин $BC + CD$ не изменилась, значит, $k = 1$ — противоречие.

3. $AE \to A'B$. Тогда $ABCDE \to A'E'DCB$, поэтому $CD \to CD$. Значит, $k = 1$ — противоречие.

4. $AE \to BA'$. Тогда $ABCDE \to BCDE'A'$, поэтому $\angle A \to \angle B$, значит, $\angle A = \angle B$. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем равенства $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E'$, $\angle E = \angle A'$. Значит, в пятиугольнике есть 4 равных угла. Кроме того, $AB \to BC$, $BC \to CD$, $CD \to DE'$. Обозначим $AB = m$, тогда $BC = km$, $CD = k^2m$, $DE' = k^3m$. Попробуем построить картинку по полученным данным. Выберем значения для $\angle A$, m и k. Тогда ломаная $ABCDE'$ строится однозначно, однозначно построятся и лучи AE и $E'A'$, а также точки A' и E (они лежат на пересечении лучей с прямыми DE' и AB соответственно). Если нам удастся подобрать значения угла и коэффициента k так, что ломаная окажется несамопересекающейся, точка A' попадёт на отрезок AB, а E' окажется на DE, то задача решена. Действительно, ломаной $ABCD$ и углами A и D пятиугольник $ABCDE$ задаётся жёстко. Если же его уменьшить в k раз, то ломаная $ABCD$ станет равной ломаной $BCDE'$. Совместив их, мы совместим и уменьшенный пятиугольник $ABCDE$ с пятиугольником $BCDE'A'$.

Пример в решении получен при значениях $\angle A = 120^\circ$, $k = \frac{2}{3}$, $m = 30^\circ$. Ясно, что эти значения далеко не единственные. Скажем, мало меняя указанные значения, мы не получим самопересечения ломаной и не нарушим неравенств $A'B < AB$ и $DE' < DE$, значит, тоже получим примеры. Перебор не закончен, но требовался лишь один пример, продолжать перебор нет необходимости.

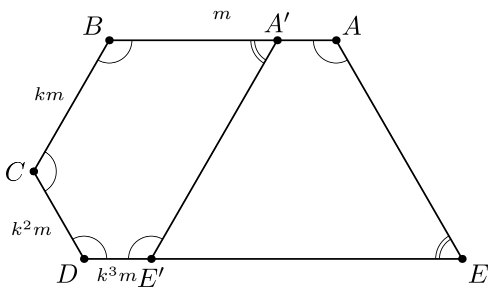


Рис. 72б

С28*. *Первый способ.* Опишем окружность вокруг треугольника ABC, пусть O — её центр (см. рис. 73а). По соотношению между центральным и вписанным углами $\angle AOB = 2\angle ACB = 60^\circ$, поэтому треугольник AOB равносторонний. Так как $\angle ABM = 30^\circ$, получаем, что BM — биссектриса угла ABO, поэтому BM — серединный перпендикуляр к отрезку AO. В равнобедренном треугольнике OBC $\angle OCB = \angle OBC = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$. Но тогда CM — биссектриса угла ACO. И эта биссектриса, и серединный перпендикуляр к AO проходят через середину дуги AO описанной окружности треугольника ACO, то есть M — середина дуги. Тогда равны вписанные углы $\angle OAM = \angle OCM = 20^\circ$, откуда следует, что $\angle MAB = 60^\circ - \angle OAM = 40^\circ$, а угол между прямыми AM и BO равен $180^\circ - \angle MAB - \angle ABO = 90^\circ$, ч. т. д.

Второй способ. Пусть A' — точка, симметричная A относительно прямой BC (см. рис. 73б). В равнобедренном треугольнике $A'AC$ $\angle ACA' = 60^\circ$, поэтому треугольник $A'AC$ равносторонний. Отметим на отрезке AA' такую точку M' внутри треугольника ABC, что $\angle M'BC = 20^\circ$. Отметим на продолжении AB за точку B такую точку D, для которой $A'D = A'A = A'C$. Нетрудно вычислить, что $\angle A'BM' = 70^\circ$ и $\angle A'M'B = 70^\circ$. Значит, $\triangle A'BM'$ равнобедренный, $A'B = A'M'$. Также нетрудно посчитать углы в равнобедренных треугольниках ABA' и ADA': $\angle ABA' = 100^\circ$, $\angle AA'B = \angle BAA' = \angle ADA' = 40^\circ$, $\angle AA'D = 100^\circ$. Отсюда находим $\angle BA'D = 100^\circ - 40^\circ = 60^\circ = \angle M'A'C$, что влечёт равенство треугольников $A'BD$ и $A'CM'$. А это уже значит, что $\angle M'CB = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ$, следовательно, $M' = M$.

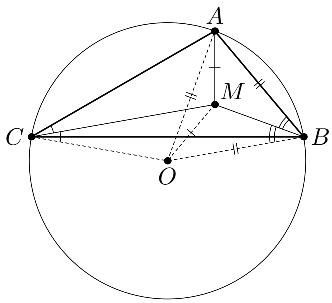


Рис. 73а

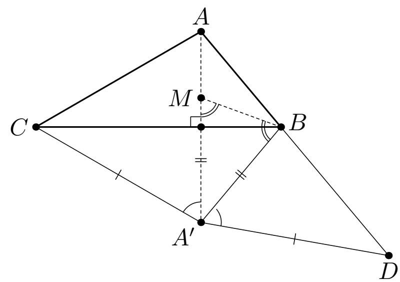


Рис. 73б

Путь к решению. Как и в задаче 7.8, мы хотим, чтобы возникло как можно больше равных углов и отрезков. Тут почти всегда помогает дополнительное построение, при котором возникает равносторонний треугольник.

1. Если в треугольнике есть угол 30°, то, построив центр описанной окружности, получим равносторонний треугольник. В данном случае он хорош тем, что «странные» прямые BM и CM стали биссектрисами вновь возникших углов и тем самым точка M приобрела дополнительные свойства.

2. Помогает сильный приём *подмена объекта*: вместо точки M мы строим точку M' с удобными для нас свойствами, а уже потом доказываем, что M совпадает с M'. Вспомогательная точка A' хороша втройне: лежит на продолжении высоты, помогает образовать равносторонний треугольник и вместе с M' создаёт два равных угла по 70°.

9–11 класс

D1. Ответ: существуют.

Например, $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$, $g(x) = \cos x$. Тогда $f(g(x)) = \cos x - \frac{\pi}{2}$ чётна, $g(f(x)) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ нечётна.

Путь к решению. Ясно, что если $g(x)$ чётна, то и $f(g(x))$ чётна. Действительно, тогда $g(-x) = g(x)$, поэтому и $f(g(-x)) = f(g(x))$. Но как с помощью композиции можно чётную функцию превратить в нечётную? Давайте вспомним, что происходит с графиком функции при *линейной замене переменной*: отражения, растяжения, сдвиги. Растяжения и отражения чётную функцию оставят чётной, попробуем сдвиг. Итак, допустим, функция $h(x) = g(x+a)$ — нечётна. Тогда $g(a) = h(0) = 0$. Поэтому и $g(-a) = g(a) = 0$, то есть $h(-2a) = g(-a) = 0$. Тогда и $h(2a) = 0$. Так, отражая аргумент то относительно 0, то относительно a, получим $g(ka) = 0$ для всех нечётных k. Обозначив $g(0) = t$, аналогично докажем, что $g(2a) = g(-2a) = -t$, $g(4a) = g(-4a) = t$ и т. д. Тут уже естественно приходят на ум периодические функции, а из них в первую очередь — тригонометрические.

D2. Ответ: да, например сфера $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 + z = 2$. На ней лежит рациональная точка $(0, 0, 0)$.

Если же (x, y, z) — рациональная точка, но $x \neq 0$, то равенство равносильно такому: $x^2 + y^2 + z^2 = 2\sqrt{2}x$, откуда следует, что

$$\sqrt{2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2x}.$$

Но это невозможно, так как левая часть иррациональна, а правая рациональна. Значит, других рациональных точек на сфере нет.

Путь к решению. Будем искать пример попроще. Сфера с центром в начале координат не подойдёт: если точка рациональна и лежит на сфере, то ввиду симметрии точка с противоположными координатами тоже рациональна и лежит на сфере. С другой стороны, если сдвинуть сферу на вектор с рациональными координатами, то все рациональные точки останутся рациональными и новых не появится. Сдвинем сферу так, чтобы единственной рациональной точкой оказалась точка $(0, 0, 0)$. Самое простое уравнение сферы, проходящей через такую точку, — это $(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Какие ещё точки лежат на сфере при $y = z = 0$? Решив уравнение $(x - R)^2 = R^2$, найдём ещё точку $(2R, 0, 0)$.

Она не рациональна, значит, R иррационально. Взяв самое известное иррациональное число $R = \sqrt{2}$, получим пример.

D3. Ответ: верно.

Впишем сферу с центром O в тетраэдр $ABCD$. Соединим отрезками точки касания сферы с вершинами соответствующей грани. Каждая грань разобьётся на три треугольника. Как известно, равны площади треугольников, примыкающих к одному ребру. Эти площади и запишем на рёбра.

Для тех, кому равенство площадей неизвестно, докажем это. Действительно, пусть O_D и O_C — точки касания граней ABC и ABD соответственно, O — центр сферы. Поскольку OO_D и OO_C перпендикулярны AB, плоскость OO_DO_C тоже перпендикулярна AB. Пусть она пересекает прямую AB в точке F. Тогда O_DF и O_CF тоже перпендикулярны AB. В прямоугольных треугольниках OFO_C и OFO_D катеты OO_C и OO_D равны как радиусы сферы, гипотенуза OF общая, поэтому равны и другие катеты: $O_DF = O_CF$. В треугольниках ABO_C и ABO_D основание AB общее, опущенные на него высоты O_CF и O_DF равны, значит, равны и площади треугольников.

Путь к решению. Для геометра естественно искать не просто числа, а площади конкретных фигур. Он *сведёт* задачу к такой: разбить каждую грань на три части так, чтобы в соседних гранях были части одинаковой площади. Но как догадаться, что следует использовать точки касания вписанной сферы, если не знаешь факта о равенстве примыкающих площадей? А по аналогии с плоским случаем. Надо поставить и решить плоскую задачу (см. задачу C5) и постараться перенести метод её решения на тетраэдр.

D4. Ответ: существуют.

Первый способ. Если число $c = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ рационально, то $a = b = \sqrt{2}$. А если c иррационально, то $c^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ рационально, поэтому $a = c$, $b = \sqrt{2}$.

Второй способ. Рассмотрим число $c = \log_2 3$. Если c рационально, то $c = \dfrac{p}{q}$, где p и q натуральные. Из равенства

$2^{\frac{p}{q}} = 3$ следует, что $2^p = 3^q$. Это невозможно, так как число в левой части чётно, а в правой — нет. Значит, c иррационально. Тогда и $b = 2c$ иррационально. А $\sqrt{2}^b = (\sqrt{2})^{2c} = 2^c = 3$. Итак, подходят $a = \sqrt{2}$, $b = 2\log_2 3$.

Путь к решению. Запас известных иррациональных чисел довольно мал, и в показателе их видеть довольно непривычно. Ради обеспечения иррационального числа в показателе стоит ослабить условие и временно отказаться от иррациональности в основании.

Комментарий. Даже сильные школьники редко могут объяснить, что такое $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Эта задача — удачный повод обсудить иррациональные показатели.

D5. Ответ: существует.

Например, $\dfrac{(9x+1)^2 - 1}{9}$. Для x вида $11\ldots1$ оба числа $9x+1$ и $(9x+1)^2$ будут иметь вид $10\ldots0$, после чего вычитанием единицы и делением на 9 мы снова получим число вида $11\ldots1$.

Путь к решению. Квадратный трёхчлен намекает на возведение в квадрат. Поставим вопрос: число какого вида сохраняет свой вид при возведении в квадрат? Очевидно, это $10\ldots0$. Осталось придумать, как из числа вида $11\ldots1$ получить число вида $10\ldots0$ и обратно.

D6. Ответ: может.

Рассмотрим правильную пирамиду, плавающую вниз вершиной. Пусть площадь её боковой поверхности равна S. Тогда площадь основания равна $S\cdot\cos\alpha$, где α — угол наклона боковых граней к основанию. По условию под водой находится часть пирамиды, подобная исходной с коэффициентом подобия $k = \sqrt[3]{0{,}9}$. Площадь боковой поверхности этой части равна k^2S. Поскольку $2k^2 - 1 < 1$, мы можем так выбрать угол α так, чтобы выполнялось неравенство $\cos\alpha > 2k^2 - 1$. Но тогда $2k^2S < S + S\cdot\cos\alpha$, то есть под водой находится меньше половины поверхности пирамиды.

Путь к решению. Сначала хочется сказать, что такое невозможно: ведь у шарообразного айсберга над водой будет лишь маленькая шапочка. Впрочем, у куба площадка будет побольше: ведь он к середине не расширяется, как шар. Стоп, а почему айсберг вообще должен вниз *расширяться* или идти ровно, почему бы ему вниз не *сужаться*?! Рассмотрим перевёрнутую пирамиду. Но и у неё над водой будет торчать лишь плоский кусок вблизи основания, а бо́льшая часть боковой поверхности окажется под водой. Почему же бо́льшая? Ну как, ведь боковая поверхность больше площади основания, и намного, да ещё 90% (или около того) от неё — под водой. А почему, собственно, намного? Действительно, если пирамиду сплющить, то и боковая поверхность будет близка к площади основания, а ведь часть её всё же над водой! А ну-ка, посчитаем аккуратно...

D7. а) Могут. Более того, спилы могут быть подобны любому неравностороннему треугольнику T. Построим пример. Выберем в треугольнике T две различные стороны a и b. Возьмём также треугольник U, подобный T с коэффициентом $\frac{a}{b}$. Приставим T и U друг к другу сторонами длины a так, чтобы треугольники не лежали в одной плоскости. Через две свободные вершины этих треугольников проведём прямую и параллельно ей — ещё две прямые через концы общей стороны треугольников. На этих трёх прямых будут лежать боковые рёбра балки. Сечение (спил) такой балки плоскостью, параллельной T, даст треугольник, равный T; аналогично для U. Сделав балку достаточно длинной, обеспечим, чтобы два таких спила не пересекались.

б) Не может. Предположим, что такие спилы получились. Расстояния между боковыми рёбрами призмы не больше 1 (они не больше соответствующей стороны треугольника на спиле). Будем считать, что боковые рёбра идут вертикально. Проведём через вершины большего спила три горизонтальные плоскости. Пусть вторая плоскость лежит между первой и третьей и расстояния от неё до двух других равны a и b. Тогда стороны большого треугольника станут диагоналями трёх прямоугольников. Ширина такого прямоугольника равна расстоянию между соответствующими боковыми рёбрами, а высоты равны a, b и $a+b$. Но если ширина прямоугольника с высотой a не больше 1, а длина диагонали равна 2, то $a \geqslant \sqrt{3}$. Аналогично $b \geqslant \sqrt{3}$. Но тогда высота третьего прямоугольника $a+b \geqslant 2\sqrt{3} > 2$, и тем более его диагональ больше 2. Получили противоречие.

Путь к решению а) Задача фактически сводится к такой: можно ли расположить в пространстве два неравных подобных треугольника ABC и DEF так, чтобы прямые AD, BE и CF были параллельны? Если такое возможно, то, двигая треугольники вдоль прямых, их можно совместить хотя бы одной вершиной. Это выгодно вот с какой точки зрения: если, наоборот, сначала размещать треугольники, а потом проводить прямые, то через общую вершину можно проводить прямую в любом направлении. А нельзя ли совместить две вершины? Но тогда стороны окажутся равными, а ведь треугольники должны быть не равны... Да, но равные стороны не обязаны быть соответствующими, так что такое совмещение не запрещено, см. задачу С1.

D8*. Ответ: не всегда.

Пусть все треугольники равносторонние, из них 8 *малых* со стороной 1, а также *средний* и *большой* со сторонами 30 и 60 соответственно. Заметим, что периметр большого на $180 - 90 - 24 = 66$ больше суммы периметров остальных, так что без разреза не удастся получить равные суммы периметров. Если разрезать малый или средний треугольник, то общая сумма периметров увеличится на две длины разреза. Но резать надо по прямой (иначе не выйдет два треугольника), поэтому даже в среднем треугольнике максимальный разрез не длиннее 30. Этого не хватит, чтобы покрыть разницу 66. Если же резать большой треугольник, то его части надо поместить в разные группы. Разность d периметров частей равна разности кусков разрезанной стороны, то есть $d < 60$. Значит, надо суметь разбить набор из среднего и всех малых треугольников на две группы с разностью периметров d. Но разность между периметром среднего и суммой периметров малых уже $90-24 = 66$, и при перекладывании она может только увеличиться. Значит, и при таком разрезании Вася не сможет разложить треугольники требуемым образом.

Путь к решению. На первый взгляд кажется, что разрезать всегда можно: расположим треугольники в ряд и будем двигать прямую параллельно себе самой. Тогда слева и справа от неё сумма периметров частей меняется непрерывно и монотонно, слева растёт от нуля, справа убывает до нуля, значит, где-то периметры сравняются. И всё бы хорошо, но вот разрезы делят не на треугольники. Кажется, что это требование чисто техническое, но выполнить его и сохранить при этом непрерывность не удаётся.

При внимательном рассмотрении ясно, что периметр отрезанного треугольника не может быть близок к нулю. Это значит, что переход между ситуациям «нет разреза» и «есть разрез» происходит скачком. И перекладывание треугольника из одной группы в другую даёт скачок суммы периметров. Значит, непрерывности нет, и можно на этом сыграть. Равносторонние треугольники удобны тем, что дают меньший диапазон изменения разности периметров частей.

D9*. Ответ: может, см. рис. 74.

На рисунке $AL = AC = MB = MF = 1$, а отмеченные углы равны. Выберем отмеченный угол α таким, что $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и, следовательно, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. Тогда $CE = AL\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $BC = AC\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $DN = MF = 1$, $BN = MB\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Поэтому сторона центрального квадратика $AM = AB - MB = \frac{AC}{\cos\alpha} - 1 = \frac{1}{12}$ (продолжив стороны такого квадратика, нетрудно разложить куски), а сторона описанного квадрата $DE = DN - BN + BC + CE = \frac{20}{13} + \frac{5}{12} < \frac{20}{13} + \frac{6}{13} = 2$. Нетрудно и разложить куски указанным образом: достаточно нарисовать квадратик со стороной $\frac{1}{12}$, продлить его стороны и поместить куски пиццы в нужные углы.

Путь к решению. Кажется разумным, чтобы четыре куска касались четырёх сторон квадрата. Но радиусы, проведённые из точек касания, перпендикулярны сторонам. Противоположные куски друг на друга не налезают, значит, радиусы сложатся?! Стоп, а почему нельзя придвинуть куски поближе друг к другу так, чтобы они не налезли?! Эти соображения и помогают получить конструкцию на картинке. Непонятно только, почему квадрат при этом уменьшится. Любители алгебры могут выразить сторону квадрата через угол α в общем виде: $DE = 1 + \operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha + \cos\alpha$ и свести её к исследованию поведения функции. Знатоки математического анализа сразу же заметят, что DE при малых α близко к 2, но меньше 2: ведь $\cos\alpha$ меньше 1 на член порядка α^2, и это уменьшение не может быть скомпенсировано разностью $\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha$, так как она имеет порядок α^3. Любители неравенств докажут больше: $\operatorname{tg}\alpha < 1$ при $\alpha < 45^\circ$, поэтому $1+\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha+\cos\alpha = 1+\operatorname{tg}\alpha(1-\cos\alpha)+\cos\alpha < 1+(1-\cos\alpha)+\cos\alpha = 2$. Наконец, геометр проведёт радиусы верхнего и нижнего кусков в точки касания, спроектирует их на правую сторону и заметит, что проекции перекрываются. Действительно, центр нижнего куска — это левая вершина центрального квадратика, а верхнего — правая, и при $\alpha < 45^\circ$ левая вершина выше правой.

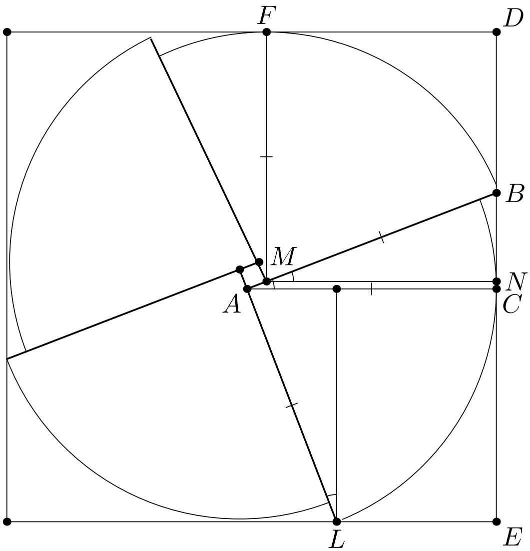


Рис. 74

D10*. Ответ: может.

а) Пусть длина кирпича равна 100. Рассмотрим стопку из пяти кирпичей на рис. 75. Сумма сдвигов $12 + 16 + 24 + 49 = 101 > 100$.

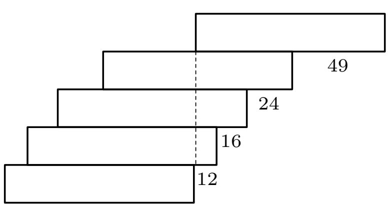


Рис. 75

Осталось проверить, что стопка устойчива. Для этого надо убедиться, что центр масс любой группы верхних кирпичей проектируется на следующий кирпич, то есть что этот центр сдвинут относительно кирпича менее чем на 50. Сдвиг центра масс группы равен среднему арифметическому сдвигов входящих в неё кирпичей. Для верхнего кирпича это очевидно. Центры двух верхних сдвинуты по горизонтали относительно центра третьего кирпича на 24 и $24 + 49 = 73$, поэтому их центр масс сдвинут на $\frac{24+73}{2} < 50$. Аналогично для трёх верхних кирпичей получаем $\frac{16+16+24+16+24+49}{3} = \frac{145}{3} < 50$, а для верхних четырёх $\frac{4\cdot 12 + 3\cdot 16 + 2\cdot 24 + 49}{4} < 50$.

б) Покажем большее: можно сделать стопку, где верхний кирпич будет сдвинут относительно нижнего на любое расстояние! Для этого убедимся, что сумма гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ с ростом n станет больше любого наперёд заданного числа. Действительно, разобьём эту сумму на группы

$$(1) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{(2^k+1)} + \frac{1}{(2^k+2)} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

Начиная с $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$ пронумеруем группы по порядку. В i-й группе 2^i слагаемых, не меньших 2^{i+1}, поэтому сумма группы не меньше $\frac{1}{2}$, а количество групп растет с ростом n. Аналогично неограниченно растут и суммы вида $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Сдвинем теперь кирпичи в стопке на $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, ..., $\frac{1}{2n}$ (сдвиги перечислены сверху вниз). Проверим устойчивость. Центр масс k верхних кирпичей сдвинут относительно следующего кирпича на среднее арифметическое суммы их сдвигов, то есть на

$$\frac{\left(k\cdot\frac{1}{2k}+(k-1)\cdot\frac{1}{2(k-1)}+\ldots+1\cdot\frac{1}{2}\right)}{k}=\frac{1}{2}.$$

Он как раз проектируется на край следующего кирпича. Если уменьшить *все* сдвиги, то и сдвиг центра уменьшится, и конструкция станет устойчивой. Выберем теперь n таким, чтобы суммарный сдвиг был больше, чем нам надо. Уменьшим все сдвиги так, чтобы суммарный сдвиг всё ещё был больше, чем заданное число. Получим искомую конструкцию. В частности, чтобы сделать расстояние между проекциями на стол верхнего и нижнего кирпичей больше удвоенной длины кирпича, достаточно взять $n = 1024$.

Путь к решению. Разбираясь с устойчивостью стопки, обнаруживаем, что *минимально возможные* сдвиги (*на границе* устойчивости) образуют гармонический ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Далее надо понять, что суммы этого ряда могут принимать достаточные для нас большие значения, хотя число слагаемых может оказаться неожиданно большим.

D11*. Ответ: 45°, 45°, 45°, 225°.

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ углы A, C, D равны α. Вершины A и C принадлежат ГМТ, из которых отрезок BD виден под углом α, а это ГМТ, как известно, состоит из двух равных дуг окружностей. Если бы A и C лежали по одну сторону от прямой BD, то они принадлежали бы одной дуге, и тогда бы ломаная $ABCD$ самопересекалась. Значит, A и C находятся по разные стороны от прямой BD. (Это нужно доказывать, поскольку четырёхугольник может быть невыпуклым.) Поскольку $AC \perp BD$, расстояния от C и A до прямой BD различны (иначе стороны AD и CD были бы равны). Без ограничения общности считаем, что A ближе к BD, чем C.

Обозначим через A' точку, симметричную точке A относительно прямой BD. Поскольку $AA' \perp BD$, прямые AA'

и AC совпадают, и, кроме того, из точки A' отрезок BD тоже виден под углом α. Однако A' не совпадает с C. Следовательно, A' — вторая точка пересечения прямой AC с дугой ГМТ, на которой лежит C. Такое возможно, только когда каждая из дуг больше 180°, а отрезки AC и BD не пересекаются. Значит, четырёхугольник $ABCD$ невыпуклый, $\alpha < 90^\circ$, $\angle B > 180^\circ$ (см. рис. 76).

Заметим, что $\angle A'CB = \angle A'DB = \angle ADB$. Это значит, что углы $A'CB$ и BDA равны и *одинаково ориентированы*. Поэтому из перпендикулярности $A'C$ и BD следует перпендикулярность CB и DA, то есть треугольник CKD равнобедренный прямоугольный (здесь K — точка пересечения прямых AD и BC). Значит, $\alpha = 45^\circ$.

Значение $\alpha = 45^\circ$ действительно реализуется. Достаточно взять остроугольный треугольник ACD с углом D, равным 45°, и рассмотреть его ортоцентр B. Четырёхугольник $ABCD$ имеет три угла по 45°.

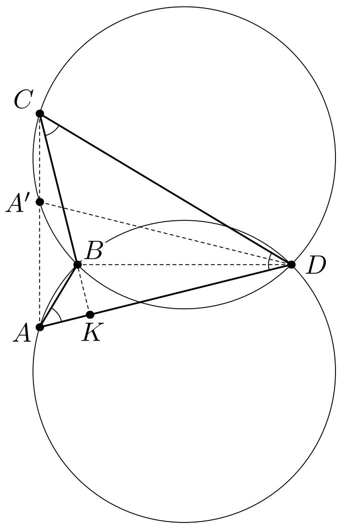


Рис. 76

Путь к решению. Суть задачи в вопросе «Как такое может быть?» Как только поймёшь и обоснуешь чертёж, ответ можно будет найти многими способами.

D12*. Ответ: может.

Рассмотрим пример из задачи C25. Мы не видим вершин из точки O — центра конструкции. Чуть-чуть отодвинем все кирпичи от O так, чтобы они перестали касаться друг друга, но вершины по-прежнему не были видны. Если выпустить луч из невидимой вершины одного кирпича к точке O, то он упрётся в невидимую заднюю стенку другого кирпича. Значит, эти кирпичи можно соединить вдоль луча многоугольной перемычкой, невидимой из O. Теперь нетрудно построить 5 перемычек так, чтобы 6 кирпичей соединились в один многоугольник (он, разумеется, будет невыпуклым).

Путь к решению. Идея аналогична применённой в задаче B33.

D13*. Ответ: могла.

Например, из прогрессии

$$1+\sqrt{2},\quad (1+\sqrt{2})^3,\quad (1+\sqrt{2})^5,\quad \ldots$$

при такой замене получится прогрессия

$$\sqrt{2}-1,\quad (\sqrt{2}-1)^3,\quad (\sqrt{2}-1)^5,\quad \ldots$$

Действительно, $0 < \sqrt{2}-1 < 1$, поэтому все члены второй прогрессии тоже лежат в интервале от 0 до 1. С другой стороны, вычитая соответствующие члены прогрессий $(1+\sqrt{2})^n-(\sqrt{2}-1)^n$ (где n нечётно), видим, что после раскрытия скобок по биному Ньютона взаимно уничтожатся как раз те слагаемые, в которые $\sqrt{2}$ входит в нечётной степени. А те слагаемые, в которые $\sqrt{2}$ входит в чётной степени, целые, поэтому и записанная выше разность — целое число. Это и означает, что $(\sqrt{2}-1)^n$ — дробная часть числа $(1+\sqrt{2})^n$.

Путь к решению. Если искать пример, то удобнее искать две последовательности степеней. Заметим, что разности соответствующих членов должны быть целыми! Тут можно вспомнить примеры таких чисел a, что $a^n+\dfrac{1}{a^n}$ целое при всех n. Подходят сопряжённые квадратичные иррациональности. Превратить две такие последовательности в пример — дело техники!

D14*. Ответ: не обязательно.

Рассмотрим многочлен $x^2 + (xy - 1)^2$. Все его значения неотрицательны, но нуля среди них нет, так как обе скобки не могут одновременно быть равны 0. С другой стороны, любое положительное значение a можно получить, взяв $x = \sqrt{a}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Путь к решению. Если наш многочлен принимает отрицательные значения, то ввиду непрерывности обязан принять и нулевое. Значит, если пример есть, то область значений должна быть $(0, +\infty)$. Положительность обеспечим, просуммировав квадраты. Но как избежать нуля? Только запретив квадратам одновременно обращаться в 0. Поскольку сумма принимает сколь угодно малые значения, квадраты тоже. Значит, каждый из них может обращаться в 0 (иначе пример не минимальный). Множество нулей квадрата — это кривая на плоскости. Если квадратов два, то кривые не должны пересекаться. Рассматривая точки со стремящимися к 0 значениями многочлена, видим, что и кривые подходят к точкам все ближе и ближе, а значит, неограниченно приближаются друг к другу. Примеры таких кривых: график и его асимптота, скажем $y = \dfrac{1}{x}$ и $x = 0$. Реализовав эти два равенства как равенство нулю многочленов, получим пример.

Раздаточный материал

Занятие 1. Много не мало, или Мнимые противоречия

На одну чашку весов кладётся пять десятикопеечных монет,
а на другую — равная по массе пачка стодолларовых купюр.
Будут ли весы в равновесии?

Задача 1.1. Можно ли числа 1, 2, 3, ..., 100 разбить на пары (чётное, нечётное) так, чтобы во всех парах, кроме одной, нечётное число было больше чётного?

Задача 1.2. Площадь прямоугольника — 1 кв. дм. Может ли его периметр быть больше 1 км?

Задача 1.3. Числитель дроби увеличили на 1, а знаменатель — на 100. Могла ли дробь увеличиться?

Задача 1.4. Сумма положительных чисел больше десяти. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,1?

Задача 1.5. Ася, Бася и Вася участвовали в нескольких шахматных турнирах. Могло ли случиться так, что Ася заняла место выше Баси более чем в половине турниров, Бася занял место выше Васи более чем в половине турниров, а Вася занял место выше Аси тоже более чем в половине турниров?

Задача 1.6. Могут ли и сумма, и произведение нескольких натуральных чисел быть равными 99?

Задача 1.7. В цирке 10 силачей вынесли на арену на руках по циркачке, каждая легче того, кто её нёс. Потом эти циркачки унесли с арены каждая по силачу. Могло ли случиться, что

а) каждая циркачка несла силача легче себя;

б) девять из этих циркачек несли силачей легче себя?

Задача 1.8. Можно ли в квадрат со стороной 1 поместить несколько неперекрывающихся квадратов

а) с суммой периметров 100; б) с суммой площадей 100?

Задача 1.9. Некоторой фирмой руководят директор и три заместителя. Каждый месяц директор собирает заместителей на совещание и предлагает новый список зарплат для себя и заместителей. При этом заместители голосуют за или против списка (а директор не голосует). Известно, что заместитель голосует за, если лично его зарплата увеличивается и ничья зарплата не увеличивается в большее число раз, иначе он голосует против. Решение принимается большинством голосов. Может ли директор добиться, чтобы его зарплата стала в 10 раз больше, чем была, а все зарплаты заместителей уменьшились не менее чем в 10 раз?

Задача 1.10. а) В припортовой таверне пираты Боб и Иван состязались в изготовлении и употреблении крепких напитков. Боб изготовил коктейль из рома и джина, а Иван смешал водку с портвейном. Известно, что ром крепче водки, а джин крепче портвейна. Наутро Ивану было много хуже. Он подозревает, что его смесь оказалась крепче коктейля Боба. Могло ли такое случиться? (*Примечание*: *крепость — это процент спирта в смеси*.)

б) Имеется два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак, причём доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома. Обязательно ли доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?

Занятие 2. Поиск перебором

— Алё, Вася, у меня машина заглохла!
— Ты дверцей хлопнуть пробовала?
— Да.
— А дворниками пошевелила?
— Да.
— А шины попинала?
— Да.
— Ну тогда я не знаю...

Задача 2.1. Существует ли трёхзначное число, которое в 20 раз больше своей суммы цифр?

Задача 2.2. На границе квадрата отметили три точки, соединили их отрезками и по ним разрезали. В результате квадрат распался на четыре треугольника. Какое наибольшее число из этих треугольников могут оказаться равными?

Задача 2.3. Расставьте числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 в таблицу 3×3 так, чтобы суммы чисел в любом ряду из трёх клеток (по вертикали, горизонтали или диагонали) были одинаковы.

Задача 2.4. В ряд слева направо лежат карточки с надписями «Один», «Два», «Три», «Четыре», «Пять», «Шесть», «Семь», «Восемь», «Девять». Петя подчеркнул девять разных букв, по одной в каждой надписи. Затем он поменял местами две карточки. Могли ли в результате все подчёркнутые буквы расположиться так, что каждая следующая справа будет стоять в алфавите дальше предыдущей?

Задача 2.5. Дан шестизначный номер: 123556. Не меняя порядка цифр, расставьте знаки действий и скобки так, чтобы в результате получилось 100.

Задача 2.6. Найдите все решения ребуса $\text{ПЕ} \times \text{РЕ} = \text{БОР}$.

Задача 2.7. Петя на несколько лет младше Васи, но в 2012 году каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. В каком году родился Петя, а в каком — Вася?

Задача 2.8. Из четырёх монет одна фальшивая — отличается по весу (но неизвестно, в какую сторону), а остальные весят одинаково. Как найти фальшивку за два взвешивания на весах с двумя чашками без гирь?

Задача 2.9. Можно ли на клетчатую доску 4×4 поставить ферзя, двух коней и двух ладей так, чтобы каждая фигура побила ровно одну другую и была побита ровно одной другой?

Задача 2.10. Существует ли десятизначное число, у которого первая слева цифра равна числу единиц в записи этого числа, вторая — числу двоек, третья — числу троек, четвёртая — числу четвёрок, ..., девятая — числу девяток, десятая — числу нулей?

Занятие 3. Преодолеть инерцию мышления

— Вот не везёт: под Новый год
полдня ходил по лесу с топором,
но так и не нашёл наряженную ёлку...

Задача 3.1. В двух кошельках лежат две монеты, причём в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Как такое может быть?

Задача 3.2. Три человека с сундуком хотят переправиться через реку. Лодка вмещает трёх человек или двух человек и сундук. Беда в том, что сундук тяжелый, погрузить его в лодку или вытащить из нее можно только втроём. Как им всё-таки всем переправиться, не оставив и сундук?

Задача 3.3. В ряд выписаны четыре числа, первое равно 100. При делении первого числа на второе, второго — на третье, третьего — на четвёртое в частном получаются простые числа. Могут ли все эти три простых числа быть различными?

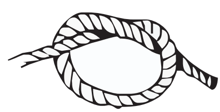
Задача 3.4. Прорежьте в тетрадном листке дыру, в которую смогли бы пролезть вы сами.

Задача 3.5. Нарисуйте шестиугольник и, проведя прямую через две его вершины, отрежьте от него семиугольник.

Задача 3.6. Учитель положил перед учеником развёрнутый листок и спросил, сколько кружков на нем видно. «Три», — ответил ученик. Учитель положил тот же листок перед другим учеником и задал тот же вопрос. «Семь» — ответил ученик. Оба ответили верно. Так сколько всего кружков нарисовано на этом листке?

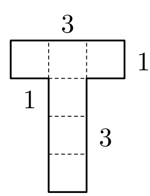
Задача 3.7. Как можно из шести спичек сложить четыре треугольника со стороной в одну спичку каждый?

Задача 3.8. Как завязать на верёвке вот такой узел (см. рис.), если, взявшись двумя руками за концы верёвки, мы не можем их отпускать?



Задача 3.9. Частное двух чисел равно их сумме. Может ли оно быть равно ещё и их произведению?

Задача 3.10*. Придумайте шестиугольник, который нельзя разрезать на два четырёхугольника.



Задача 3.11*. а) Как можно разместить четыре плоские буквы Т (см. рис.) в один слой в квадратной коробке со стороной 6?

б) А как можно разместить эти же четыре буквы в квадратной коробке меньшего размера?

Занятие 4. Редукция и разминка

Имею желание купить дом, но не имею возможности.
Имею возможность купить козу, но не имею желания.
Так пусть же наши возможности совпадут с нашими желаниями!

Задача 4.1. а) Клетчатая доска 7×7 раскрашена в шахматном порядке так, что угловые клетки белые. Расставьте на ней 3 ладьи так, чтобы они побили все незанятые чёрные клетки.

б) Клетчатая доска 19×19 раскрашена в шахматном порядке так, что угловые клетки белые. Расставьте на ней 9 ладей так, чтобы они побили все незанятые чёрные клетки.

в) Клетчатая доска 19×19 раскрашена в шахматном порядке так, что угловые клетки белые. Расставьте на ней 10 ладей так, чтобы они побили все незанятые *белые* клетки.

Задача 4.2. Разрежьте равносторонний треугольник а) на 4; б) на 16; в) на 25; г) на 1000 меньших равносторонних треугольников (не обязательно одинаковых).

Задача 4.3. Четырёхлетний Сёма умеет писать только цифры 4 и 7. Докажите, что он может написать число с любой суммой цифр, большей 17.

Задача 4.4. а) Найдите такой набор из пяти гирь, чтобы для каждой целой массы от 1 до 31 г можно было выбрать одну или несколько гирь набора с такой суммарной массой.

б) Найдите такой набор из шести гирь общей массой 60 г, чтобы для каждой целой массы от 1 до 60 г можно было выбрать одну или несколько гирь набора с такой суммарной массой.

Задача 4.5. а) Сложите из доминошек 2×1 квадрат 8×8 так, чтобы не было точек, где уголками соприкасались бы четыре доминошки.

б) То же для прямоугольника 8×16.

в) Можно ли так сложить прямоугольник 8×60?

Задача 4.6. Докажите, что для любого $n > 5$ равносторонний треугольник можно разрезать на n меньших равносторонних треугольников.

Задача 4.7. а) Отметьте на плоскости 6 точек, которые нельзя зачеркнуть двумя прямыми, но любые 5 из этих точек так зачеркнуть можно.

б) Отметьте на плоскости 10 точек, которые нельзя зачеркнуть тремя прямыми, но любые 9 из них — можно.

в) Отметьте на плоскости 55 точек, которые нельзя зачеркнуть девятью прямыми, но любые 54 из них — можно.

Задача 4.8. Есть двухчашечные весы. При взвешивании груза гири можно класть на одну или на обе чаши весов.

а) Найдите набор из четырёх гирь, которыми можно уравновесить любой груз целого веса от 1 до 40 г.

б) Найдите набор из пяти гирь общим весом 100 г, которыми можно уравновесить любой груз целого веса от 1 до 100 г.

Задача 4.9. а) Путешественник приехал в гостиницу. Денег у него нет, но есть золотая цепочка из 7 звеньев. Он договорился платить хозяину по одному звену каждый день — ни больше, ни меньше. Какое наименьшее число звеньев надо раскрыть, чтобы такие платежи были возможны все 7 дней? (Хозяин может давать сдачу ранее полученными звеньями.)

б) Та же ситуация для цепочки с 23 звеньями и днями. Достаточно ли раскрыть два звена?

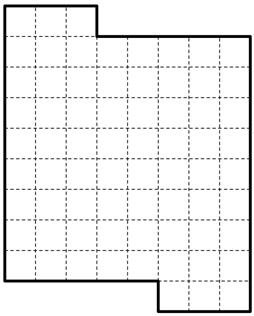
в) Та же ситуация для цепочки с 24 звеньями и днями. Достаточно ли раскрыть два звена? (*При раскрывании звена цепочка распадается на три куска*: *до звена*, *после звена и само звено*.)

Задача 4.10. Есть 64 монеты двух различных весов, монет каждого веса поровну. Как на чашечных весах без гирь гарантированно найти две монеты *разного* веса не более чем за шесть взвешиваний?

Занятие 5. Узкие места

Кто нам мешает, тот нам поможет.

Задача 5.1. Сколькими способами можно фигуру на рис. разрезать по границам клеточек на а) прямоугольники 1×5; б) прямоугольники 1×7?



Задача 5.2. а) Два пятизначных числа зашифровали словами УЗКИЕ и МЕСТА (как обычно, одинаковые цифры заменили на одинаковые, разные — на разные). Пара цифр (не обязательно соседних) образует *беспорядок*, если левая цифра больше правой. Могло ли в исходных числах не быть беспорядков?

б) То же, если получились слова УЗКОЕ и МЕСТО.

Задача 5.3. У Васи есть два кубика, на каждую грань которых он хочет написать одну из цифр от 0 до 9. Может ли Вася так нарисовать цифры на гранях, чтобы получился «календарь»:

а) выбирая один кубик или выбирая два кубика и приставляя их друг к другу, на верхних гранях можно было бы получить любое число от 1 до 31;

б) выбирая два кубика и приставляя их друг к другу, на верхних гранях можно было бы получить любую комбинацию от 01 до 31?

(*Перевёрнутую цифру* 6 *нельзя использовать как* 9, *а цифру* 9 — *как* 6.)

Задача 5.4. Можно ли разрезать квадрат а) на тридцатиугольник и пять пятиугольников; б) на тридцатитрёхугольник и три десятиугольника?

Задача 5.5. Как посадить девять деревьев так, чтобы получилось 10 прямых рядов по три дерева в каждом?

Задача 5.6. Решите ребус

$$\text{Я} + \text{ОН} + \text{ОН} + \text{ОН} + \text{ОН} + \text{ОН} + \text{ОН} + \text{ОН} + \text{ОН} = \text{МЫ}$$

(как обычно, разные буквы означают разные цифры, одинаковые — одинаковые).

Задача 5.7. а) Можно ли обойти конём все клетки доски 4×4, кроме одной угловой, побывав на каждой клетке ровно один раз? б) Можно ли так обойти все клетки доски 4×4?

Задача 5.8. а) Можно ли представить 2012 как сумму пяти натуральных слагаемых так, чтобы все использованные цифры были различны? б) А как сумму шести таких слагаемых?

Задача 5.9. Петя взял десять последовательных натуральных чисел, записал их друг за другом в некотором порядке и получил число P. Вася взял одиннадцать последовательных натуральных чисел, записал их друг за другом в некотором порядке и получил число V. Могло ли случиться, что $P = V$?

Задача 5.10. а) Можно ли всю поверхность куба оклеить тремя бумажными треугольниками без наложений? б) А четырьмя треугольниками?

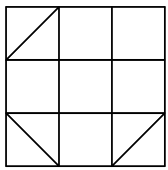
Занятие 6. Ослабление условий

Лучше синица в руках, чем журавль в небе.

Задача 6.1. а) Придумайте три различных натуральных числа так, чтобы каждое делилось на разность двух других и все разности были различны; б) то же, но все числа больше 100; в) то же, что в п. (б), но все разности меньше самого маленького из чисел.

Задача 6.2. Разложите 999 орехов на четыре кучки разного размера, но так, чтобы любые две кучки отличались не больше чем на четыре ореха.

Задача 6.3. Можно ли, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя линий дважды, нарисовать изображённую на рисунке фигуру, если пересекать уже нарисованные линии нельзя? (Касаться можно.)

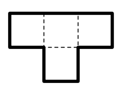


Задача 6.4. Можноли разрезать квадрат на два меньших многоугольника так, чтобы отношение их площадей было не меньше двух, а отношение периметров — не больше 1/2? (Граница многоугольника должна быть *одной* замкнутой ломаной.)

Задача 6.5. Подставьте в знаменатели вместо звёздочек различные натуральные числа, чтобы равенства были верными:

а) $\frac{1}{*} + \frac{1}{*} = \frac{1}{*} + \frac{1}{*}$;

б) $\frac{1}{*} + \frac{1}{*} + \frac{1}{*} + \frac{1}{*} = \frac{1}{*} + \frac{1}{*} + \frac{1}{*}$.



Задача 6.6. Сложите из четырёхклеточных фигурок, как на рисунке, такую же фигуру, но с клетками большего размера.

Задача 6.7. $2^8 = 256 = 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1$ (здесь все делители числа 256 встречаются ровно по разу, повторяется только 1). Аналогично 2^n представляется в виде суммы $n + 1$ своего делителя с повтором слагаемого 1. Используя такое представление, придумайте число, которое можно представить в виде суммы

а) десяти его различных делителей;

б) ста его различных делителей.

Задача 6.8. Отметьте на плоскости шесть точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой находились ровно три отмеченные точки.

Задача 6.9. а) Даны 16 одинаковых по виду монет. Известно, что среди них есть ровно две фальшивые, которые отличаются от остальных по весу (настоящие монеты равны по весу друг другу, и фальшивые монеты также равны по весу друг другу). Как разделить все монеты на две равные по весу кучки, сделав не более трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь? б) Та же задача для 14 монет.

Задача 6.10. Разбейте квадрат на треугольники так, чтобы каждый треугольник граничил ровно с тремя другими треугольниками по отрезку ненулевой длины.

Занятие 7. Конструкции в классической геометрии

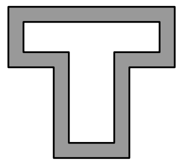
Меня научили строить циркулем и линейкой —
отлично, пойду в строители!

Задача 7.1. В четырёхугольнике есть не менее трёх равных сторон и две пары равных углов. Обязательно ли это ромб?

Задача 7.2. Точку T внутри треугольника ABC назовём *рациональной*, если все углы треугольников ABT, BCT и ACT измеряются рациональным числом градусов. Докажите, что если в остроугольном треугольнике есть рациональная точка, то таких точек в нём не менее трёх.

Задача 7.3. Прямая разбила треугольник на меньший треугольник, подобный исходному, и четырёхугольник, симметричный относительно своей диагонали. Докажите, что исходный треугольник прямоугольный.

Задача 7.4. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$ не превосходит $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC)$.



Задача 7.5. Узника высадили на плато в виде буквы Т (см. рис.), окружённое пропастью постоянной ширины 5 м. У него нашлись две лёгкие доски длиной 4,8 м каждая. Как ему устроить устойчивый мостик через пропасть, если закрепить или придавить концы досок нечем?

Задача 7.6. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он циркулем и линейкой разбил прямоугольный треугольник с углом 30° на два меньших и провёл в одном из них медиану, а в другом — параллельную ей биссектрису. Могут ли слова барона быть правдой?

Задача 7.7. Каждая из диагоналей разбивает четырёхугольник на два равнобедренных треугольника. Обязательно ли диагонали перпендикулярны?

Задача 7.8. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AC и BC взяты точки P и Q соответственно так, что $\angle PBC = \frac{1}{3}\angle ABC$ и $\angle QAC = \frac{1}{3}\angle BAC$. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке T. Докажите, что $TP = TQ$.

Задача 7.9*. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A = 85^\circ$, $\angle B = 115^\circ$, $AD = BC$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке M. Найдите $\angle MAB$.

Рубрикатор

1. *Много не мало*

6.4, 7.5, A2, A7, A8, A11, A12, A18, B4, B9, B11, B17, B19, B32, C2, C4, C10, C15, C24, D6, D10.

2. *Поиск перебором*

6.10, 7.2, 7.3, 7.7, 7.9, A3, A9, A10, A14, A15, A17, A24, A26, B5, B12, B16, B20, B21, B23, B24, B29, C7, C12, C14, C19, C21, C26, C27, D4, D11.

3. *Преодолеть инерцию мышления*

1.7, 1.10б, 5.6, 7.3, 7.5, A2, A6, A7, A13, A19, A20, A21, A25, B3, B22, B25, B26, B27, B29, B31, B34, B35, C2, C10, C20, C25, C27, D5, D8, D12, D13, D14.

4. *Редукция и разминка*

1.10б, 2.10, 7.2, 7.4,7.7, 7.8, A1, A8, A18, A21, B6, B8, B9, B10, B14, B15, B17, B22, C3, C5, C6, C7, C9, C11, C12, C13, C15, C20, C26, D3, D5, D7, D9 , D10, D12, D14.

5. *Узкие места*

2.2, 2.4, 2.6, 2.9, 3.2, 3.10, 6.3, 6.10, 7.5, A3, A4, A7, A12, A15, A18, A23, A24, A26, B1, B7, B11, B14, B16, B20, B25, B30, C1, C5, C6, C13, C14, C19, C21, C23, C26, D8, D9.

6. *Ослабление условий*

2.9, A4, A5, A6,A10, A16, A22, B4, B13, B15, B23, B28, B32, B33, C4, C8, C17, C22, C24, D4, D6, D13.

7. *Геометрия*

2.2, 3.7, 3.10, 3.11, 5.4, 5.10, 6.8, 6.10, A5, A6, A8, A10, A16, A22, A24, B1, B2, B3, B6, B8, B12, B15, B18, B27, B30, B33, B34, C1, C2, C4, C5, C15, C21, C23, C25, C26, C27, C28, D2, D3, D6, D7, D8, D9, D11, D12.

8. *Как такое может быть*?

1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.10а, 3.1, 3.4, 3.5, 3.8, 3.9, 7.1, A4, A27, B2, B19, B21, B30, D11, D14.

9. *Ищи, где удобнее*

1.4, 2.1, 2.5, 6.5, A9, A17, B5, B7, B8, B12, B21, B32, C10, C16, C19, D2, D13, D14.

10. *Высматривай знакомое*

1.10а, 4.4, 4.7, 4.8, 7.1, 7.2, 7.6, 7.7, B1, B18, C6, C24, C26, C28, D1, D6, D13.

11. *Повторяемость*

2.7, 4.1в, 4.2, 4.3, 4.5бв, 4.6, 4.9, 4.10, 6.2, A1, B6, B14, B16, B17б.

12. *Симметрии, сдвиги и повороты*

1.1, 2.3, 2.9, 4.1аб, 4.5а, 6.8, A5, A11, A13, A19, A22, B3, B16, B24, B26, B34, C11, C18, C23, D1.

Авторы задач

Задачи нескольких авторов отмечены *курсивом*. Большинство использованных в книге задач давно и заслуженно стали математическим фольклором или восходят к нему. Их обычно публикуют без указания авторов. Это, однако, не повод умалчивать об авторах, когда они известны. Проще всего узнать свои собственные задачи: 1.7, 1.10а, 2.2, 2.4, 2.6, 2.9, 3.3, 4.3, 4.5, 4.7, 4.10, 5.1, 5.2, 5.4, 5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.4, 6.5, 6.6, 6.9, 6.10, 7.2, 7.3, 7.6, 7.7, 7.9, A2, A7, A8, A9, A10, A12, A15, A16, A17, A21, A22, A23, A24, B4, B5, B7, B8, B9, B11, B12, B13, B14, *B15*, B16, B18, B20, B21, B24, B25, B28, B29, B31, B32, C6, C7, C8, C9, C11, C12, C16, C18, C26, D3, D6, D7a, D8, D13. Других задач с известным автором не так много, но зато почти все — жемчужины:

А.Д. Блинков: *D1*;

М. Гарднер: C10;

М.Л. Гервер: C13;

В.М. Гуровиц: 3.5, *D1*;

Р.Г. Женодаров: 4.1, C14;

А.А. Заславский: D11;

А.Я. Канель-Белов: B22, B34, *C25*, *D12*;

Т.В. Караваева: B35;

К.А. Кноп: 3.11, A3, A4, *B15б*;

А.К. Ковальджи: 1.10б;

Д.Ю. Кузнецов: A26;

С.В. Маркелов: C23, *C25*, D12;

В.В. Произволов: C21, *C25*;

А. Перлин: D5;

А. Рубин: D2;

Н.П. Стрелкова: B30;

С.И. Токарев: 3.9, A18, B10, C19, C22, *C24*, C27;

В.А. Уфнаровский: A25;

Э. Фридман: D9;

А.В. Хачатурян: 5.6;

Д.А. Шаповалов: 3.2;

А.Ю. Эвнин: *C24*.

Спасибо этим авторам, а также тем неизвестным, кто сочинил фольклорные жемчужины!

Список литературы и веб-ресурсов

1. Блинков А. Д., Блинков Ю. А. *Геометрические задачи на построение*. М.: МЦНМО, 2012.

2. Шаповалов А. В. *Как построить пример?* М.: МЦНМО, 2013.

3. Шаповалов А. В. *Принцип узких мест*. М.: МЦНМО, 2012.

4. Шаповалов А. В., Медников Л. Э. XVII *Турнир математических боев им. А. П. Савина*. М.: МЦНМО, 2012.

5. Шаповалов А. В., Медников Л. Э. *Как готовиться к математическим боям*. 400 *задач турниров им. А. П. Савина*. М.: МЦНМО, 2014.

Список веб-ресурсов

1. `www.problems.ru` — база задач по математике.

2. `www.ashap.info` — сайт автора.

Оглавление

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (495) 745-80-31; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: biblio.mccme.ru/shop/order

Книги в электронном виде: www.litres.ru/mcnmo

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru