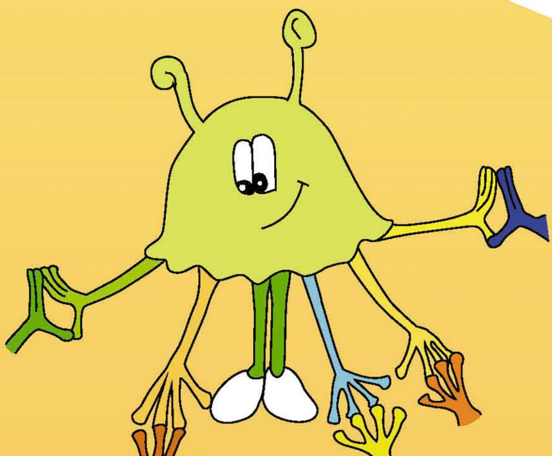
Л. Э. МЕДНИКОВ

ЧЁТНОСТЬ



Школьные
Математические
Кружки

Л. Э. Медников

Чётность

Издание пятое, стереотипное

Издательство МЦНМО
Москва, 2015

УДК 51(07)
ББК 22.1
М42

Медников Л. Э.

М42 Чётность.— 5-е изд., стереотип.— М.: МЦНМО, 2015.— 60 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-0334-7

Книжка посвящена задачам, связанным с понятием чётности. В неё вошли разработки четырёх занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности и методическими указаниями для учителя. Приведён большой список дополнительных задач с решениями. Большинство задач, рассмотренных в книжке, являются «классическими» для этого раздела математики. Для удобства использования заключительная часть книжки сделана в виде раздаточных материалов. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, а также всем любителям математики.

Предыдущее издание книги вышло в 2013 г.

Леонид Эммануилович Медников

Чётность

Серия «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

Технический редактор *Е. С. Горская* Рисунки *Д. М. Смирнова*

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 6.10.2014 г.
Формат 60 × 88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 3 $^3/_4$ печ. л.
Тираж 2000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано в ОАО «Щербинская типография»
117623, Москва, Типографская ул., 10. Тел. (495)-659-23-27.

ISBN 978-5-4439-0334-7

От редколлегии

«Мастеръ Гамбсъ этимъ полукресломъ начинаетъ новую партію мебелі ...»
И. Ильф, Е. Петров «Двенадцать стульев»

Вы держите в руках первую книжку из новой серии ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ. По нашему замыслу брошюры этой серии будут отличаться от многих популярных математических книг тем, что наш главный адресат — *школьный учитель математики*. Учитель, который понимает, что для пробуждения интереса к математике и для развития школьников часто не хватает времени школьных уроков. Учитель, который готов вести в своей школе математические кружки или факультативы. Надеемся, что книги этой серии позволят любому учителю сэкономить силы и время на подготовку занятий, и окажутся особенно полезны тем, у кого не хватает опыта.

Мы планируем издать книжки, содержание которых будет по возможности полно охватывать традиционную тематику математических кружков. Авторы книг серии — учителя и руководители кружков, которые поделятся своим богатым опытом. Ещё раз подчеркнём, что брошюры будут составлены таким образом, что с их помощью сможет вести занятия с *обычными* школьниками *учитель* (или студент-математик), даже не обладающий подобным опытом. Надеемся также, что книжки нашей серии будут интересны школьникам и их родителям и окажутся полезными для самообразования.

В брошюру по каждой теме войдут разработки нескольких занятий с изложением необходимой теории, разобранными примерами, задачами, которые автор рекомендует решить на данном занятии (к ним приводятся подробные решения), и *методическими указаниями для учителя*. Помимо этого, каждая брошюра будет содержать список дополнительных задач по теме и различные приложения (исторические сведения, дополнительный теоретический материал и пр.). При желании её можно использовать как дидактический материал (копируя то или иное занятие), либо делать выборки для проведения конкретного занятия или для составления *массовой* математической олимпиады.

Важно, что изложение каждой темы будет начинаться практически «с нуля» или во всяком случае там, где заканчиваются стандартные школьные учебники. Кроме того, авторы постараются дать *конкретные методические рекомендации*: для какого возраста целесообразно проводить то или иное занятие и какими предварительными знаниями должны владеть школьники, с которыми планируется изучить ту или иную тему.

Мы будем благодарны за любые замечания и пожелания, которые просим направлять координатору проекта по электронной почте по адресу `blinkov@mccme.ru`.

Предисловие

Понятие чётности очень важно для развития математической культуры школьника. Идейно это понятие простое и обычно не вызывает трудностей. Задачи же, связанные с чётностью, могут варьироваться от очень простых до очень сложных. Эти задачи позволяют на простом материале ввести школьника в разнообразный круг математических идей. Прежде всего, тема «Чётность» является как бы введением в более общую тему «Делимость и остатки», которая близко примыкает к школьной программе. Но, несмотря на простоту ряда задач, их решение требует каких-то логических умозаключений, что тоже позволяет развить математическую культуру. С другой стороны, в предлагаемых задачах в зачаточной или более серьёзной форме встречаются более далёкие от школьной программы, но часто встречающиеся на олимпиадах идеи, такие как *инвариант*, *периодичность*, *раскраски*, *математическая индукция* и др. Чётность часто используется как инструмент при решении задач на *процессы*, *игры*, *графы* и т. д.

Основной материал разбит на четыре занятия. Информация для учителя набрана более мелким шрифтом. Задачи, которые (при недостатке времени) можно опустить, помечены звёздочкой (их можно включить в домашнее задание). В приложении собраны задачи, которые можно использовать для домашних заданий, самостоятельной работы учащихся, школьных олимпиад и т. п.

Для понимания материала и решения большинства задач не требуется знаний, выходящих за рамки начальной школы: понятие натурального и простого числа, признак делимости на 2, начала алгебры.

На своих занятиях автор предпочитает обходиться без раздаточного материала. Тем не менее, по просьбе редакции такой материал включён (см. Приложение). Он имеется в двух вариантах. Желательно использовать второй, куда включены только задачи с «длинными» условиями.

Конечно, автор не сам придумывал задачи. Многие из них известны уже давно, часть появилась в последние годы. Авторы некоторых задач нам известны, но поскольку нет никакой возможности установить авторство *всех* задач, нам пришлось вообще отказаться от указания авторства. Надеемся, что авторы задач нас простят.

Вводная задача.

Николай с сыном и Пётр с сыном пошли на рыбалку. Николай поймал столько же рыб, сколько его сын, а Пётр — столько же, сколько его сын. Все вместе поймали 27 рыб. Сколько рыб поймал Николай?

Сначала кажется, что в задаче не хватает данных: два неизвестных и одно уравнение. Затем кто-то должен сообразить, что условия задачи противоречивы. Действительно, отцы поймали столько же рыб, сколько и сыновья. Но тогда общее число рыб должно быть чётным, а по условию оно нечётно. (Вариант рассуждения: Николай с сыном вместе поймали *чётное* число рыб. То же верно и для Петра с сыном. Значит, и сумма этих чисел чётна. Если школьники сами не догадаются до одного из этих соображений, следует им немного подсказать).

Но никакого противоречия нет! К противоречию привело *неявное* предположение о том, что на рыбалке было четыре человека. Но их могло быть и три (Николай — сын или отец Петра). Из условия теперь следует, что все поймали рыб поровну, то есть по 9 штук.

С этой задачей (но не с её решением) желательно ознакомить школьников за несколько дней до начала первого занятия.

Занятие 1

Чётность суммы и произведения

Стоит начать с разбора и обсуждения вводной задачи. Она позволяет начать разговор об определении и свойствах чётности, а также вспомнить признак чётности.

Чтобы каждый раз не повторяться, договоримся, что все числа, о которых пойдет речь на этом занятии, — целые.

Прежде всего, мы использовали тот факт, что число вида $n+n$ чётно (отцы поймали столько же рыб, сколько сыновья, поэтому вместе они поймали *чётное* число рыб). Вот ещё одна задача, иллюстрирующая ту же идею.

Задача 1. Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку. Все прыжки имеют одинаковую длину. Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

Решение. Сколько раз он прыгнул вправо, столько же прыгнул и влево (так как вернулся в исходную точку).

Далее следует довольно много формальных рассуждений. Они предназначены для въедливых школьников, которые требуют всё доказывать. Если есть уверенность в том, что школьники хорошо понимают *содержательный* смысл приводимых утверждений, то большую часть формальных рассуждений можно (на усмотрение учителя) опустить.

Откуда следует, что число вида $n + n = 2n$ чётно? А это просто определение — чётным называется число, которое делится на 2. Таким образом, «общий вид» чётного числа $2n$, где n — произвольное целое число.

Речь идёт именно о целых, а не только о натуральных (то есть целых положительных) числах. В частности, важно понимать, что 0 — тоже чётное число.

Каков же «общий вид» *нечётного* числа? $2n+1$. Действительно, если от нечётного числа отнять 1, то оно станет чётным, то есть нечётное число равно сумме чётного числа $2n$ и единицы.

Часто используется запись нечётного числа и в виде $2n-1$.

Из определения чётного числа сразу следует, что *произведение любого (целого) числа на чётное число чётно.*

Формальное доказательство: $m \cdot 2n = 2(mn)$.

Несколько более сложно проверить, что *произведение двух нечётных чисел нечётно.*

Формальное доказательство: $(2m+1)(2n+1) = 2(2mn+m+n)+1$.

Мы говорим, что два числа имеют *разную* чётность, если одно из них чётно, а другое нечётно. В противном случае числа имеют *одинаковую* чётность.

Как определить чётность суммы?

- *Сумма двух чисел разной чётности нечётна.*
- *Сумма двух чисел одной чётности чётна.*

Доказательство: $2m + (2n+1) = 2(m+n)+1$; $2m+2n = 2(m+n)$, $(2m+1)+(2n+1) = 2(m+n+1)$.

Задача 2. Сформулируйте и докажите обратные утверждения.

Решение. *Если сумма двух чисел нечётна, то слагаемые имеют разную чётность.* Действительно, если бы они имели одинаковую чётность, то сумма была бы чётной.

Если сумма двух чисел чётна, то слагаемые имеют одинаковую чётность. Доказательство аналогично.

Задача 3. Числа m и n целые. Докажите, что число $mn(m+n)$ чётно.

Решение. Если числа m и n одинаковой чётности, то чётна их сумма $m+n$. Если же они разной чётности, то чётно их произведение mn. В любом случае произведение чисел mn и $m+n$ чётно.

Задача 4. Что можно сказать о чётности разности двух чисел?

Ответ: то же, что и о сумме.

Тут важно объяснить, что доказывать это отдельно *не требуется*: $m - n = m + (-n)$, то есть разность и сумма — одно и то же. Следует, правда, отметить, что *при смене знака числа его чётность не меняется.*

Заметим, что *чётность суммы двух чисел равна чётности их разности.*

При решении вводной задачи мы пользовались также признаком делимости на 2:

- *число чётно тогда и только тогда, когда чётна его последняя цифра*,

применив его для того, чтобы выяснить нечётность числа 27.

Доказательство: любое натуральное число n можно записать в виде $n = 10a + b$, где b — его последняя цифра. Первое слагаемое $10a = 2 \cdot 5a$ чётно. Следовательно, чётность суммы $10a + b$ совпадает с чётностью слагаемого b. Доказательство для отрицательных чисел сводится к замене знака и переходу к разобранному случаю натуральных чисел.

Задача 5. Сумма трех чисел нечётна. Сколько слагаемых нечётно?

Ответ: одно или три.

Решение. Нетрудно привести примеры, показывающие, что оба случая возможны. Остальные два случая (нечётных слагаемых два или их нет совсем) легко приводятся к противоречию.

Теперь можно перейти к наиболее общей формулировке.

- *Чётность суммы совпадает с чётностью количества* ***нечётных*** *слагаемых.*

Желательно, чтобы школьники сами сформулировали это правило (не обязательно этими же словами). Доказательство лучше оставить в качестве домашнего задания (в этом случае его следует разобрать на одном из следующих занятий) или опустить. Мы приведём его в занятии 4.

Задача 6. Не вычисляя суммы $1 + 2 + \ldots + 1999$, определите ее чётность.

Решение. В этой сумме 1000 нечётных слагаемых. Следовательно, она чётна.

Задача 7. На доске написаны 613 целых чисел. Докажите, что можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет чётной. Верно ли это для 612 чисел?

Решение. Если сумма всех написанных чисел *чётна*, то количество *нечётных* слагаемых *чётно*. Следовательно, есть чётное слагаемое; его и надо стереть. Если же сумма всех написанных чисел *нечётна*, то количество *нечётных* слагаемых *нечётно*. Значит, оно больше нуля (0 — чётное число), и можно стереть нечётное слагаемое.

Для 612 чисел утверждение неверно. Если все слагаемые нечётны, то ни одно нельзя стереть, не «испортив» сумму.

Задача 8. В ряд выписаны все числа от 1 до 1998. Требуется расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы полученное выражение равнялось нулю. Удастся ли это сделать?

Ответ: не удастся.

Решение. Чётность числа не зависит от поставленного перед ним знака, поэтому при любой расстановке знаков будет 999 нечётных слагаемых. Поэтому в любом случае сумма будет нечётна.

Задача 9*. Можно ли числа 1, …, 21 разбить на несколько групп так, чтобы в каждой из них максимальное число равнялось сумме всех остальных?

Ответ: нельзя.

Решение. При таком разбиении сумма чисел в каждой группе была бы чётна. А сумма всех чисел нечётна.

Домашнее задание. Учитель может оценить, насколько хорошо усвоили материал учащиеся, и выбрать один из двух рекомендованных вариантов домашнего задания: «простой» или «сложный» (или составить свой вариант). В вариантах указаны номера из раздела «Дополнительные задачи».

Решения задач из домашнего задания желательно обсуждать. Но не следует это делать в начале следующего занятия — тогда на само занятие времени не останется. Например, можно после двух занятий устроить промежуточное занятие, посвящённое только разбору домашних заданий.

Простой вариант: 1а – б), 2, 3, 5 – 10.
Сложный вариант: 1а – в), 4 – 6, 9, 11 – 16.

Занятие 2

Прибавление чётного

Следующие задачи основаны на следующей идее: если на каждом шаге некоторого *процесса* к некоторой *величине* прибавляется (возможно, отрицательное) чётное число, то *чётность* этой величины *не меняется.* Выбор момента, когда эта идея должна быть сформулирована в явном виде, предоставляется учителю.

Задача 1. На столе стоят шесть столбиков монет. В первом столбике одна монета, во втором — две, в третьем — три, ..., в шестом — шесть. Разрешается на любые два столбика положить по монете. Можно ли за несколько таких операций сделать все столбики одинаковыми?

Ответ: нельзя.

Решение. Общее число монет (21) нечётно. Каждый раз прибавляется по две монеты, поэтому число монет всегда будет *нечётным.* А в шести одинаковых столбиках количество монет *чётно.*

Задача 2. Изменится ли ответ в предыдущей задаче, если в последнем столбике было не шесть, а семь монет?

Ответ: изменится.

Решение. Теперь столбики можно выровнять. Например, так: сначала прибавим по монете к первому и пятому столбикам, а потом — к третьему и пятому. В первом и втором столбиках станет по две монеты, в третьем и четвёртом — по четыре, в пятом и шестом — по семь. Теперь можно (за восемь операций) добавить по три монеты к третьему и четвёртому столбикам и по пять монет к первому и второму.

Неправильное решение. Конечно, изменится. Теперь общее число монет (22) чётно, и ничего не препятствует выравниванию столбиков.

Если такое «решение» возникнет в процессе обсуждения, надо особо подчеркнуть его неправильность. В условиях задачи 2 нечётность исходного количества монет является как бы *препятствием* к выравниванию столбиков. Отсутствие этого препятствия только «даёт нам надежду», но ещё не означает возможность выровнять столбики, так как могут существовать *другие* препятствия, о которых мы пока не знаем (см. далее задачи 5, 6). Чтобы убедиться в том, что столбики выровнять можно, проще всего показать, как это сделать.

Задача 3. Числа 1, 2, ..., 714 записаны по порядку. Разрешается менять местами числа, стоящие «через одно» (например, можно поменять 3 и 5). Можно ли с помощью таких перестановок расположить все числа в обратном порядке?

Ответ: нельзя.

Решение. *Чётные* числа всегда остаются на *чётных* местах, а *нечётные* — на *нечётных*. Поэтому число 714 не может встать на первое место.

Задача 4. На доске написаны числа 1, 2, ..., 101. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них их разность. Так продолжается до тех пор, пока на доске не останется одно число. Может ли это быть 0?

Ответ: не может.

Решение. Будем следить за суммой всех чисел на доске. Вначале она *нечётна* (51 нечётное слагаемое). При наших операциях вместо слагаемых m и n появляется слагаемое $m - n$, то есть сумма изменяется на *чётное* число $2n$. Значит, эта сумма всегда будет *нечётна* и не может обратиться в нуль.

Задача 5. Круг разбит на шесть секторов. В секторах стоят фишки (сначала в каждом по одной). За один ход разрешается передвинуть две фишки на один сектор в противоположных направлениях. Можно ли за несколько ходов собрать все фишки в одном секторе?

Ответ: нельзя.

Решение. Занумеруем все секторы цифрами от 1 до 6 (если школьники не догадаются это сделать, можно им подсказать). Будем считать номером фишки номер сектора, в котором она стоит. Таким образом, при перемещении фишки в соседний сектор её номер изменяется. При этом меняется его чётность. Однако за ход перемещаются две фишки, и чётность суммы номеров всех фишек не изменится. Вначале эта сумма была *нечётна* (21), значит, она всегда будет *нечётной.* А если бы все фишки собрались в одном секторе, мы получили бы *чётную* сумму номеров (шесть одинаковых слагаемых).

Задача 6. Изменится ли ответ в предыдущей задаче, если секторов не шесть, а двенадцать?

Ответ: не изменится.

Решение. Казалось бы, идея решения задачи 5 не проходит: при нумерации секторов числами от 1 до 12 сумма исходных номеров фишек будет чётной. Однако проследим за изменением суммы более внимательно: в большинстве случаев сумма вообще не меняется (у одной фишки номер уменьшается на единицу, а у другой увеличивается на единицу, или меняются местами фишки из 1-го и 12-го секторов). Исключением являются два случая:

1) фишка из 12-го сектора перемещается в первый (ее номер уменьшился на 11), а другая фишка *уменьшает* свой номер на 1;

2) фишка из первого сектора перемещается в 12-й (увеличение на 11), другая фишка *увеличивает* свой номер на 1.

В любом из этих случаев сумма номеров фишек изменяется на 12, то есть на число, кратное 4. Но исходная сумма $1+2+\ldots+12 = 13 \cdot 6$ не делится на 4. Значит, она никогда не будет кратна 4. А если бы все фишки собрались в одном секторе, то сумма их номеров (12 одинаковых чисел) разделилась бы на 4.

При решении задачи 5 мы не пользовались тем, что фишки передвигаются в противоположных направлениях. Там это действительно было несущественно (лучше до разбора задачи 6 не обращать внимания школьников на это обстоятельство). А в задаче 6 это условие важно. Если его из условия убрать (разрешить передвигать фишки и в одном направлении), то их *можно* будет собрать в одном секторе.

Знак произведения

Задача 7. Произведение 22 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.

Решение. Ясно, что все эти числа равны ± 1. Сумма может равняться нулю только, если единиц и минус единиц поровну — по 11. Но тогда их произведение равнялось бы -1.

Разбор этой задачи дает повод поговорить о том, что

- ***знак*** *при умножении ведет себя так же, как* **чётность** *при сложении: произведение двух чисел одного знака положительно, разных знаков — отрицательно.*

А как должен выглядеть аналог утверждения о чётности суммы нескольких слагаемых? Рекомендуется подвести школьников к такой формулировке:

- ***знак*** *произведения* (отличных от нуля чисел) *определяется чётностью количества* ***отрицательных*** *сомножителей* (если это количество чётно, произведение положительно, если нечётно — отрицательно).

Задача 8. Имеется таблица размером 17×17. В каждой клетке написано какое-то число. Произведение чисел в каждой строке отрицательно. Докажите, что найдется столбец, произведение чисел в котором тоже отрицательно.

Решение. По условию в каждой строке находится *нечётное* количество отрицательных чисел (и нет нулей). Так как количество строк нечётно, всего в таблице нечётное число отрицательных чисел. Значит, по крайней мере в одном из столбцов (точнее, в нечётном числе столбцов) их тоже нечётное число. Произведение чисел этого столбца отрицательно.

Задача 9*. В некоторых клетках таблицы размером 25×25 расставили единицы, в остальных — минус единицы. Затем вычислили все произведения этих чисел по строкам и по столбцам. Докажите, что сумма этих произведений не равна нулю.

Решение. Задача сводится к аналогу задачи 7. Произведение этих 50 произведений равно квадрату произведения всех чисел таблицы, то есть положительно. Поэтому среди этих произведений не может быть 25 положительных и 25 отрицательных.

Домашнее задание.
Простой вариант: 22, 23а), 24 – 26, 28, 31, 32.
Сложный вариант: 23б), 25, 27, 29 – 31, 33, 34.

Занятие 3

Чередование

Задача 1. Голодный удав разлёгся вокруг камня и с голодухи прикусил свой хвост. В это время кролик, пользуясь беспомощностью удава, начал издеваться над ним, перепрыгивая через лежащего удава на камень и обратно. Но через полчаса ему это надоело, и он пошёл домой, где с гордостью заявил, что ровно 357 раз перепрыгнул через бедное животное. Докажите, что он заблуждается.

Решение. После первого прыжка кролик оказался на камне, после второго — на земле, после третьего — на камне и т. д. Его положения на камне и на земле чередуются: после нечётного числа прыжков он оказывается на камне, после чётного — на земле. Так как кролик пришёл домой, он чётное число раз прыгал через удава.

Основная идея этого раздела:

- *если нечто может находиться в двух* ***состояниях****, причём на каждом шаге эти состояния* ***чередуются****, то после* ***чётного*** *числа шагов оно будет находиться в исходном состоянии, а после* ***нечётного*** *— в противоположном.*

Например, в задаче 1 состояния — положения кролика.

Задача 2. Девять шестерёнок зацеплены по кругу: первая со второй, вторая — с третьей, ... , восьмая — с девятой, девятая — с первой. Могут ли они вращаться?

Ответ: не могут.

Решение. Если бы вращение было возможно, то каждая следующая шестерёнка вращалась бы в направлении, *противоположном* предыдущей. Если, например, первая вращается *против часовой стрелки*, то вторая — по часовой стрелке, третья — против, ..., девятая — против, первая — *по часовой стрелке.* Противоречие!

Задача 2 иллюстрирует следствие нашей основной идеи:

- *если* ***нечётное*** *число объектов стоит по кругу, то их чередование* ***невозможно****.*

Задача 3. По окружности стоят 237 точек двух цветов. Докажите, что найдутся две точки одного цвета а) стоящие рядом; б) разделённые ровно двумя точками.

Решение. а) Если бы любые стоящие рядом точки был разного цвета, то цвета бы *чередовались.* Но в силу нечётности количества точек это невозможно.

б) Оставим на окружности только каждую третью точку, остальные сотрём (это можно сделать, так как 237 делится на 3). Согласно аналогу задачи а) для 79 точек, теперь найдутся две точки одного цвета, которые стоят рядом. Но раньше они были разделены двумя точками.

Задача 4. Решите задачу 3б) для 239 точек.

Решение. Занумеруем все точки в том порядке, в котором они стоят по окружности. Представим себе кузнечика, который прыгает через две точки на третью: с первой на четвёртую, с четвёртой — на седьмую и т. д. После 79 прыжков он окажется на 238-й точке, с неё прыгнет на вторую, с нее — на пятую и т. д. После 239 прыжков он вернётся на первую точку (побывав на каждой точке ровно один раз). Поскольку чередование невозможно, какой-то его прыжок должен соединять точки одного цвета.

Задача 5. Три кузнечика на прямой играют в чехарду: каждую секунду один из них прыгает через какого-то другого (но не через двух). Могут ли они через 111 секунд вернуться на свои места?

Ответ: не могут.

Решение. В каждый момент два кузнечика меняют свое «взаимное положение» (если до хода один из них был левее другого, то после хода — наоборот). Чтобы вернуться на свои места, *каждые* два должны поменять взаимное положение *чётное* число раз. Но сумма трёх чётных слагаемых не может равняться 111.

Задача 6. Кузнечик прыгает по прямой. За один раз он прыгает на 15 или 17 см вправо или влево. Может ли он за 20 прыжков продвинуться на 101 см (от исходного положения)?

Ответ: не может.

Решение. Чётность его координаты (расстояние от исходного положения) при каждом прыжке меняется. Поэтому через 20 прыжков он окажется в точке с чётной координатой (на чётном расстоянии от начала).

Как мы видим, частным случаем основной идеи является следующее:

- *если к какой-то величине на каждом шаге прибавляется* ***нечётное*** *число, то* ***чётность*** *этой величины на каждом* ***чётном*** *шаге совпадает с исходной, а на каждом* ***нечётном*** *отличается от исходной.*

Задача 7. Вдоль забора растут восемь кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на единицу. Может ли на всех кустах быть вместе 225 ягод?

Ответ: не может.

Решение. Чётности количества ягод на кустах чередуются. Значит, есть четыре куста с чётным числом ягод и четыре — с нечётным. Следовательно, общее число ягод чётно.

Эта совсем простая задача иллюстрирует дальнейшее развитие нашей идеи:

- *если какое-то количество объектов* ***чётно****, а их* ***состояния чередуются****, то половина из этих объектов находится в одном состоянии, а вторая половина — в другом.*

Задача 8. По кругу расставлены несколько чисел, причем сумма любых двух соседних нечётна. Докажите, что количество чисел чётно.

Решение. Так как сумма соседних чисел нечётна, их чётности чередуются. Но чередование по кругу возможно только при чётном количестве объектов.

Задача 9. Катя и её друзья встали по кругу. Оказалось, что оба соседа каждого ребенка — одного пола. Мальчиков среди Катиных друзей — пять. А сколько девочек?

Ответ: четыре.

Решение. Если где-то рядом стоят две девочки, то рядом с ними — снова девочки, рядом с ними снова девочки и т. д. В этом случае мальчиков вообще нет, что противоречит условию. Аналогично придем к противоречию, предположив, что где-то рядом стоят два мальчика. Таким образом, мальчики и девочки чередуются. Отсюда следует, что их равное количество, то есть всего девочек пять.

Задача 10*. За круглым столом сидят 517 представителей четырёх племён: люди, гномы, эльфы и гоблины. Люди никогда не сидят рядом с гоблинами, а эльфы — рядом с гномами. Докажите, что какие-то два представителя одного племени сидят рядом.

Решение. Предположим, что это не так, то есть рядом сидят только представители разных племён. Наденем на людей и гоблинов красные шапки, а на эльфов и гномов — синие. Из условия задачи и нашего предположения следует, что цвета шапок чередуются по кругу. Но из-за нечётности их количества это невозможно. Мы пришли к противоречию!

Задача 11*. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью и каждые 15 минут поворачивает на 90° (в любую сторону). Докажите, что она сможет вернуться в исходную точку только через целое число часов.

Решение. Назовем путь, который улитка проделывает за 15 минут, *шагом*. Можно считать, что эти шаги она делает по горизонтали (вправо и влево) и по вертикали (вверх и вниз). Как и в задаче 1 занятия 1, число шагов вправо равно числу шагов влево. Следовательно, число горизонтальных шагов чётно. Аналогично число вертикальных шагов чётно. Но после каждого горизонтального шага следует вертикальный и наоборот. Поэтому число вертикальных шагов равно числу горизонтальных (общее число шагов чётно). Но *сумма двух равных чётных чисел делится на* 4. Следовательно, улитка вернется в исходную точку через целое число часов.

Домашнее задание.
Простой вариант: 36, 37, 39, 40, 42а), 43.
Сложный вариант: 36, 38, 41, 42, 44, 45 – 48.

Занятие 4

Разбиение на пары

В задачах этого раздела с разной целью применяется разбиение на пары. В качестве рабочего инструмента часто применяется следующее соображение:

- *если какие-то объекты удалось разбить на пары, то их количество чётно.*

Действительно, количество объектов *вдвое больше* числа пар, то есть делится на 2.

Задача 1. Можно ли нарисовать замкнутую девятизвенную ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

Ответ: нельзя.

Решение. Если ломаная пересекает каждое своё звено один раз, то её звенья разбиваются на пары (в пару входят звенья, пересекающие друг друга). Значит, их число чётно, что противоречит условию.

Задача 2. Квадрат 9×9 разбит на единичные клетки и раскрашен в девять цветов, причём в каждый цвет окрашено девять клеток и раскраска симметрична относительно одной из диагоналей. Докажите, что все клетки этой диагонали раскрашены в разные цвета.

Решение. Рассмотрим клетки фиксированного цвета. Клетки, не лежащие на диагонали, разбиваются на пары симметричных относительно неё, то есть их — чётное число. Значит, хотя бы одна клетка этого цвета лежит на диагонали.

Так как это рассуждение можно повторить для любого цвета, на диагонали присутствуют клетки всех девяти цветов. Клеток всего девять, следовательно, они раскрашены в разные цвета.

Задача 3. В квадрате поставили 25 точек так, что их расположение симметрично относительно обеих диагоналей. Докажите, что одна точка стоит в центре квадрата.

Решение. Точки, не лежащие на первой диагонали, разбиваются на пары симметричных относительно неё, то есть их — чётное число. Точки, лежащие на первой диагонали, но *не в центре* квадрата, разбиваются на пары симметричных относительно второй диагонали, то есть их тоже чётное число. Так как всего точек 25 — нечётное число, одна обязана стоять в центре квадрата.

Задача 4. Можно ли стороны и диагонали правильного тринадцатиугольника раскрасить в 12 цветов так, чтобы в каждой вершине сходились все цвета?

Решение. Предположим, что это сделать удалось. Рассмотрим отрезки (стороны или диагонали) одного цвета. Каждый из них соединяет две вершины, причем из каждой вершины выходит ровно один такой отрезок (всего из вершины выходит 12 отрезков, ведущих в 12 оставшихся вершин, и все они по предположению разного цвета). Таким образом, 13 вершин разбились на пары, что невозможно. Противоречие.

Чтобы продемонстрировать другое применение разбиения на пары, докажем более строго утверждение о чётности суммы нескольких слагаемых (см. занятие 1).

Доказательство: разобьем нечётные слагаемые на пары (если их количество нечётно, одно останется без пары). Сумма чисел внутри каждой пары чётна. Так как прибавление чётного числа не меняет чётность (см. занятие 2), сумма всех чётных слагаемых и нечётных слагаемых, объединенных в пары, чётна. Таким образом, чётность всей суммы зависит только от наличия нечётного слагаемого, не имеющего пары, то есть сумма чётна при чётном количестве нечётных слагаемых и нечётна в противном случае.

Задача 5. За круглым столом сидят 12 человек — рыцари (которые всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Каждый из сидящих за столом произнес: «Напротив меня сидит лжец». Сколько всего лжецов сидит за столом?

Ответ: 6.

Решение. Ясно, что напротив рыцаря сидит лжец, а напротив лжеца — рыцарь. Таким образом, число рыцарей равно числу лжецов.

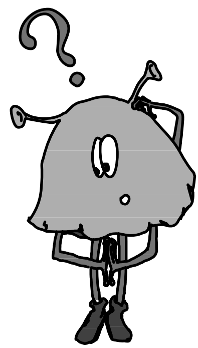
Здесь идея разбиения на пары переходит в идею *взаимно однозначного соответствия*:

- *если есть объекты двух сортов и их удалось разбить на пары так, что в каждую пару входят объекты обоих сортов, то количество объектов первого сорта* ***равно*** *количеству объектов второго сорта.*

Задача 6. Можно ли склеить многогранник из 11 пятиугольников? (Пятиугольники должны быть гранями многогранника, а их стороны — его рёбрами.)

Ответ: нельзя.

Решение. Всего сторон 55 — нечётное число, а при склеивании они разбились бы на пары.



Задача 7. У каждого марсианина три руки. Могут ли семь марсиан взяться за руки?

Ответ: не могут.

Решение. Всего рук 21 — нечётное число. Если бы они взялись за руки, то *руки* разбились бы на пары (в каждую пару входят две пожимающие друг друга руки), а это невозможно.

Задача 8. Резидент одной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

Ответ: не заслуживает.

Первое решение. На каждом документе стоят две подписи представителей договаривающихся сторон, то есть подписи разбиты на пары. Однако согласно донесению подписей должно быть 45 — нечётное число.

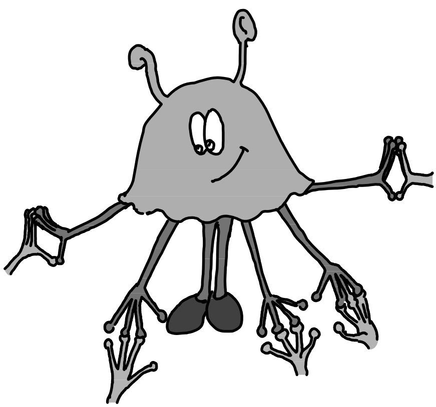
Второе решение. Представим себе, что в каждой стране находится марсианин, который пожал руки трём марсианам, находящимся в договаривающихся с ней странах. Мы получаем аналог задачи 7 (с заменой семи марсиан на 15). Но при её решении уже доказано, что такое рукопожатие невозможно.

Задача 9. На плоскости поместили десять точек, и каждую соединили отрезками с пятью другими. Сколько проведено отрезков?

Ответ: $25 = \frac{10 \cdot 5}{2}$.

Как мы получаем этот ответ?

Первое объяснение. Из каждой точки выходит 5 отрезков. Казалось бы, всего отрезков $5 \cdot 10 = 50$. Но при таком подсчёте каждый отрезок считается *дважды*. Поэтому результат надо разделить пополам.



Второе объяснение. Посадим в каждую точку пятирукого марсианина, и пусть он пожмёт руки марсианам, сидящим в точках, соединённых с ней. Всего рук 50, а число отрезков равно числу *пар* рук.

Ясно, что такие же рассуждения годятся для случая, когда каждая из n точек соединена с k другими. При этом количество отрезков равно $\frac{kn}{2}$.

Но как это может быть, если и n, и k нечётны, ведь число $\frac{kn}{2}$ не целое? Конечно, этого быть не может, значит, такое соединение точек невозможно!

Это общее соображение (задачи 7–9 — его частные случаи) носит уже *комбинаторный* характер. При желании его можно обобщить ещё больше.

На плоскости дано n точек, и i-я точка соединена с k_i другими. Тогда число проведенных отрезков равно $\frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{2}$.

Отсюда следует, что сумма $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ обязана быть *чётной*.

Задача 10*. В прошлом году каждый участник городской олимпиады обнаружил среди участников ровно семь знакомых. В этом году количество участников увеличилось на семнадцать. Может ли каждый иметь среди участников ровно девять знакомых?

Ответ: не может.

Решение. Пусть в прошлом году было n участников. Количество пар знакомых равно $\frac{7n}{2}$. Значит, n — чётное число. В этом году количество участников стало нечётным, и аналогичный подсчёт $\left(\text{число пар } \frac{9(n+17)}{2}\right)$ приводит к противоречию.

Задача 11. 19 рыцарей из двух враждующих стран сидят за круглым столом. Может ли число пар соседей-друзей быть равно числу пар соседей-врагов?

Решение. Всего пар соседей 19, значит, равенства быть не может.

Как покажет следующая задача, здесь дело не только в чётности. Например, и для 18 рыцарей ответ отрицательный.

Задача 12*. n рыцарей из двух враждующих стран сидят за круглым столом. Количество пар соседей-друзей равно количеству пар соседей-врагов. Докажите, что n делится на 4.

Решение. Количество *всех* пар соседей равно n. По условию ровно *половину* от него составляют пары соседей-врагов. Разобьем всех рыцарей на группы рядом сидящих друзей. Эти группы чередуются, поэтому их количество чётно. Но пары соседей-врагов сидят только на «стыках» этих групп. Следовательно, количество пар соседей-врагов тоже *чётно*. Умножив чётное число на 2, получим число, кратное 4.

Задача 13*. В каждой вершине n-угольника поставили 1 или -1. На каждой стороне написали произведение чисел в её концах. Оказалось, что сумма этих произведений равна 0. Докажите, что n делится на 4.

Первое решение. Посадим на место единиц в вершинах рыцарей из одной страны, а на место минус единиц — рыцарей из другой страны. Тогда единица на стороне означает, что в её концах сидит пара соседей-друзей, а минус единица соответствует паре соседей-врагов. Равенство суммы чисел на сторонах нулю означает равенство количеств пар соседей-друзей и пар соседей-врагов. Таким образом, мы свели задачу к предыдущей.

Второе решение. Рассмотрим числа на сторонах. Каждое из них также равно ± 1. Так как их сумма равна нулю, количество единиц (обозначим его k) равно количеству минус единиц, то есть $n = 2k$. Произведение чисел на сторонах равно квадрату произведения чисел в вершинах, то есть положительно. Следовательно, количество отрицательных сомножителей (а оно равно k) чётно. Поэтому $n = 2k$ делится на 4.

Домашнее задание.
Простой вариант: 52 – 54, 57 – 60, 61.
Сложный вариант: 52, 55, 56, 59, 62, 63, 65.

Дополнительные задачи

Чётность суммы и произведения

Задача 1. Закончите следующие утверждения:

а) Произведение нескольких множителей нечётно тогда и только тогда, когда ...

б) Произведение нескольких множителей чётно тогда и только тогда, когда ...

в) Докажите эти утверждения.

Задача 2. Придумайте а) три; б) четыре натуральных числа, сумма и произведение которых нечётны.

Задача 3. Можно ли разменять купюру в 25 рублей на десять купюр по 1, 3 и 5 рублей?

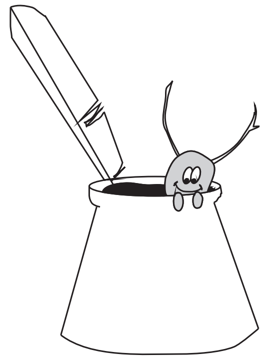
Задача 4. Можно ли расставить в клетках таблицы размером 4×4 натуральные числа так, чтобы суммы чисел, стоящих в каждой строке, и произведения чисел, стоящих в каждом столбце, были нечётны?

Задача 5. В конференции принимало участие 19 учёных. После конференции каждый из них отправил четыре или два письма другим ученым, бывшим на конференции. Каждый из участников получил по три письма. Докажите, что некоторые письма затерялись.

Задача 6. Парламент некоторой страны состоит из двух палат, имеющих равное число депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причем воздержавшихся не было. Когда председатель сообщил, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования сфальсифицированы. Как он это понял?

Задача 7. Можно ли доску размером 5×5 разрезать на прямоугольники размера 1×2?

Задача 8. У Пети есть четыре палочки длины 1 см, две палочки длины 2 см, семь палочек длины 3 см и пять палочек длины 4 см. Он хочет сложить из них прямоугольник, использовав все палочки. Удастся ли ему это? (Ломать палочки нельзя).



Задача 9. Жук попал в чернильницу, стоявшую в узле листа клетчатой бумаги (со стороной клетки 1). Когда он вылез оттуда, он начал гулять по листу по сторонам клеток, оставляя за собой след, и в итоге приполз обратно в чернильницу. Поворачивал он только в узлах и ни по одной стороне не прополз дважды. Докажите, что длина нарисованной жуком линии чётна.

Задача 10. Кузнечик прыгает по прямой: первый раз — на 1 см, второй — на 2 см и т. д. Может ли он через 25 прыжков вернуться на старое место?

Задача 11. *Магический квадрат* — это квадратная таблица, в клетки которой вписаны числа так, что их суммы по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям равны. Можно ли составить магический квадрат из первых 36 простых чисел?

Задача 12. Можно ли выписать по разу цифры от 1 до 9 в таком порядке, чтобы между единицей и двойкой, двойкой и тройкой, …, восьмёркой и девяткой стояло по нечётному количеству цифр?

Задача 13. Муравей выползает из точки O и движется по числовой прямой, проходя за каждую секунду единицу длины. В конце каждой секунды он может сменить направление (но может и не менять). Сколько есть точек, в которые он может попасть *через* 1 мин?

Задача 14. Можно ли числа 1, 2, 3, ..., 20 так расставить в вершинах и серединах рёбер куба, чтобы каждое число, стоящее в середине ребра, равнялось полусумме чисел на концах этого ребра?

Задача 15. В выражении $0 * 1 * 2 * \cdots * 29$ звёздочки заменяют на плюсы или минусы. Какие значения может принимать полученное выражение?

Задача 16. Квадрат 1000×1000 несколькими прямыми, параллельными его сторонам, разбит на прямоугольные части. Каждая из этих частей состоит из клеточек 1×1. Образовавшиеся прямоугольники раскрашены в шахматном порядке (левый нижний — в чёрный цвет, два соседних с ним — в белый, их соседи — в чёрный и т. д.). Докажите, что количество чёрных клеточек 1×1 чётно.

Задача 17. На шахматной доске стоит восемь ладей, которые не бьют друг друга. Докажите, что число ладей, стоящих на чёрных клетках, чётно.

Задача 18. Из книги выпал кусок и потерялся. Номер последней страницы перед выпавшим куском — 238, номер первой страницы после выпавшего куска записывается теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько листов выпало?

Задача 19. Можно ли представить 1 в виде суммы 1000 дробей, числители которых равны 1, а знаменатели — нечётные числа?

Задача 20. В начале времен в Ачухонии жили 100 рыцарей, 99 принцесс и 101 дракон. Рыцари убивают драконов, драконы едят принцесс, а принцессы изводят до смерти рыцарей. Древнее заклятие запрещает убивать того, кто сам погубил нечётное число других жителей. Сейчас в Ачухонии остался всего один житель. Кто это?

Задача 21. 2000 кнопок расположены в виде таблицы 40×50. В каждую кнопку вставлена маленькая лампочка. Изначально все лампочки не горят. При нажатии на кнопку меняется на противоположное (горит — не горит) состояние вставленной в нее лампочки, а также состояние всех лампочек, вставленных в кнопки, находящиеся в одних с ней строке и столбце. Определить наименьшее число нажатий кнопок, необходимых для того, чтобы все лампочки зажглись.

Прибавление чётного

Задача 22. В стоэтажном небоскрёбе испортился лифт. Теперь в нём работают только две кнопки. При нажатии на первую лифт поднимается на 8 этажей, при нажатии на вторую — опускается на 6 этажей. Можно ли попасть с первого этажа а) на 98-й; б) на 95-й.

Задача 23. а) На столе стоят 7 стаканов вверх дном. За ход разрешается одновременно перевернуть любые 2 стакана. Можно ли за несколько ходов все стаканы поставить правильно?

б) На столе стоят 11 стаканов вверх дном. За ход разрешается одновременно перевернуть любые 6 стаканов. Можно ли за несколько ходов все стаканы поставить правильно?

Задача 24. Трое ребят играют в слова. Каждый записывает по сто слов. После этого записи сравнивают. Если слово встретилось у всех троих, за него дают 0 очков, если у двоих — каждый получает 1 очко, если у одного — он получает 4 очка. Может ли в результате один набрать 161, второй — 180, а третий 286 очков?

Задача 25. На доске написано несколько плюсов и минусов. Разрешается стереть любые два одинаковых знака и написать вместо них плюс или стереть два разных знака и написать минус. Эта операция повторяется, пока на доске не останется один знак. Докажите, что этот последний знак не зависит от порядка операций.

Задача 26. В таблице 4×4 стоят 15 плюсов и один минус. За ход разрешается изменить на противоположные четыре знака, расположенные вдоль строки или столбца. Можно ли сделать так, чтобы все знаки стали плюсами?

Задача 27. В таблице 3×3 стоят 8 плюсов и один минус в центре. За ход разрешается изменить на противоположные три знака, расположенные вдоль строки или столбца. Можно ли сделать так, чтобы все знаки стали плюсами?

Задача 28. С набором из пяти чисел, каждое из которых равно 1 или -1, разрешено производить следующую операцию: менять знаки у каких-нибудь двух чисел. Можно ли из набора $\{1, -1, -1, 1, 1\}$ получить набор $\{-1, 1, 1, 1, 1\}$?

Задача 29. В некоторых вершинах куба расставили единицы, в остальных — минус единицы. Затем на каждой грани написали произведение чисел, стоящих в её вершинах. Может ли сумма всех четырнадцати написанных чисел равняться нулю?

Задача 30. По кругу расположено двенадцать лампочек, каждая из которых может находиться в двух состояниях: гореть или не гореть. За один ход можно изменить состояние любых трёх соседних лампочек. Вначале горит ровно одна лампочка. Можно ли добиться того, чтобы горели все лампочки?

Задача 31. В отделении полиции служат сто человек. На дежурства они ходят по трое. Может ли в некоторый момент оказаться, что каждый дежурил с каждым ровно один раз?

Задача 32. Саша купил тетрадь из 96 листов и пронумеровал страницы числами от 1 до 192 по порядку. Боря выбрал из этих листов 25 (не обязательно по порядку) и сложил 50 написанных на них чисел. У него получилось 2000. Докажите, что он ошибся. А могло ли у него получиться 2001?

Задача 33. Можно ли расставить числа от 1 до 16 в клетках таблицы 4×4 так, чтобы суммы чисел по строкам и столбцам представляли собой восемь последовательных чисел?

Задача 34. На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка AB. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до A не равна сумме расстояний от этих точек до B.

Задача 35. Три кузнечика на плоскости сидели в трёх вершинах квадрата. Они начали играть в чехарду: каждую секунду один из них прыгает через какого-то другого. При этом если кузнечик из точки A прыгает через кузнечика, сидящего в точке B, то он оказывается в точке, симметричной A относительно B. Может ли когда-нибудь один из кузнечиков оказаться в той вершине исходного квадрата, которая вначале была свободна?

Задача 36. Конь вышел с поля $a1$ (левое нижнее поле шахматной доски) и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

Задача 37. Может ли конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$ (правое верхнее), побывав по дороге на всех полях ровно по одному разу?

Задача 38. Может ли конь обойти шахматную доску, из которой вырезаны поля $a1$ и $h8$, побывав на всех оставшихся полях ровно по одному разу?

Задача 39. Король обошел всю шахматную доску, побывав на каждом поле по одному разу и вернувшись последним ходом на исходное поле. Докажите, что среди ходов, сделанных королем, чётное число ходов по диагонали.

Задача 40. Докажите, что нельзя провести прямую так, чтобы она пересекала все стороны (невыпуклого) 425-угольника и не проходила через его вершины.

Задача 41. Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой одиннадцатизвенной ломаной, пересекать все её звенья?

Задача 42. В интернате десять жилых комнат. Жители этих комнат просыпаются по очереди. Если дверь их комнаты на месте, то они снимают дверь какой-то другой комнаты и уносят её в подвал. Если же дверь их комнаты унесена, то они забирают из подвала любую дверь и вешают её на место своей.

а) Могло ли в подвале оказаться ровно 5 дверей после того, как все проснулись?

б) Какое наибольшее количество дверей могло оказаться в подвале после того, как все проснулись?

Задача 43. Саша, Боря и Игорь участвовали в забеге. Игорь задержался на старте и выбежал последним, а Боря — вторым. Во время бега Игорь шесть раз менялся местами с другими участниками, а Саша — пять раз. Боря финишировал раньше Саши. В каком порядке финишировали спортсмены?

Задача 44. Саша, Боря и Игорь играли в настольный теннис «на вылет» (игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней). В итоге оказалось, что Саша сыграл 10 партий, а Боря — 21. Сколько партий сыграл Игорь?

Задача 45. По кругу написаны четыре нуля и пять единиц. За ход между двумя одинаковыми цифрами пишется нуль, а между двумя разными — единица. Затем старые цифры стираются. Могут ли через несколько ходов все цифры стать одинаковыми?

Задача 46. По кругу стоят 13 чисел — нули и единицы (и те и другие имеются). С ними несколько раз проделывают такую операцию: все числа, у которых оба соседа одинаковы, заменяют на нуль, а остальные — на единицу. Могут ли все числа стать нулями?

Задача 47. По кругу стоят 14 чисел — нули и единицы (и те и другие имеются). С ними несколько раз проделывают такую же операцию, как в задаче 46. Могут ли все числа стать единицами?

Задача 48. 25 мальчиков и 25 девочек сидят за круглым столом. Докажите, что у кого-то оба соседа — мальчики.

Задача 49. Решите систему:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = a_3, \\ a_2 + a_3 = a_4, \\ \dots, \\ a_{n-1} + a_n = a_1, \\ a_n + a_1 = a_2, \end{cases}$$

Задача 50. В парламент прошли 99 представителей двух партий: «красные» и «синие». На первом заседании парламента каждый депутат сделал следующее заявление: «В парламенте представители моей партии составляют большинство». Известно, что каждый красный говорит правду, если перед ним выступает синий, и обманывает, если перед ним выступает однопартиец. А каждый синий, наоборот, говорит правду после однопартийца и обманывает после человека из чужой партии. К какой партии принадлежал первый выступавший?

Задача 51. На кольцевой дороге 625 светофоров. Каждую минуту они меняют свои сигналы по следующему правилу: если в предыдущий момент у светофоров, соседних с данным, горят сигналы разных цветов, то на нем загорается сигнал третьего цвета, а если эти сигналы были одного цвета, то на нем загорается сигнал того же цвета. В некоторый момент у всех светофоров горели только красные или зелёные сигналы. Может ли получиться, что через некоторое время все сигналы будут жёлтыми?

Разбиение на пары

Задача 52. Докажите, что любая ось симметрии 45-угольника проходит через его вершину.

Задача 53. Все кости домино выложены в цепочку по правилам игры. На одном конце оказалась пятёрка. Что может быть на другом конце?

Задача 54. Из набора домино выбросили все кости с «пустышками». Можно ли оставшиеся кости выложить в цепочку по правилам?

Задача 55. Можно ли выложить набор домино в цепочку так, чтобы каждые две соседние клетки разных домино в сумме давали нечётное число?

Задача 56. 26 доминошек выложены в ряд по правилам игры так, что ни одну из оставшихся приложить к этому ряду нельзя. Докажите, что обе оставшиеся доминошки — дубли.

Задача 57. На столе лежит стопка пятаков друг на друге. Сверху — орёл, а стола касается решка. Докажите, что число пар монет, лежащих орлом на орле, равно числу пар монет, лежащих решкой на решке.

Задача 58. После бала, где участвовали пять юношей и пять девушек, каждый участник назвал количество танцев, в которых он участвовал (все танцы парные). Ответы были такие: 7, 7, 5, 8, 6, 6, 9, 8, 9, 10. Докажите, что кто-то ошибся.

Задача 59. В классе 30 человек. Девять из них имеют по три друга, одиннадцать — по четыре друга, а десять — по пять друзей. Может ли такое быть?

Задача 60. Можно ли нарисовать на плоскости девять отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно а) с тремя; б) с четырьмя другими?

Задача 61. В однокруговом турнире по матбоям участвовали 16 команд из 16 разных школ. Каждый бой проходил в одной из школ-участниц. Могло ли случиться так, что каждая команда сыграла во всех школах, кроме своей?

Задача 62. 15 команд играют турнир в один круг. Расписание турнира несовершенно, поэтому в каждый данный момент могут быть команды, сыгравшие разное количество матчей. Докажите, что в некотором матче встретятся команды, сыгравшие перед этим в сумме нечётное число матчей.

Задача 63. В школе учится 450 школьников, которые сидят за 225 партами. Известно, что ровно половина девочек сидит за одной партой с мальчиками. Докажите, что нельзя так пересадить школьников, чтобы ровно половина мальчиков сидела за одной партой с девочками.

Задача 64. На турнир приехал 101 человек. Известно, что среди любых ста из них есть человек, знакомый со всеми остальными (из этих ста). Докажите, что найдется человек, который знаком со всеми остальными.

Задача 65. Чётно или нечётно количество решений уравнения а) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{100}$; б) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1$ в натуральных числах?

Задача 66. Квадратный материк разделен на 19 стран в форме выпуклых многоугольников, причем нет точек, в которых сходились бы границы четырёх или более стран. Из всяких же трёх границ, сходящихся в одной точке, одна закрыта, а две открыты для проезда. Докажите, что невозможно объехать все эти страны, побывав в каждой по одному разу, и вернуться в исходную страну.

Чётность плюс...

делимость на 4

Задача 67. Задачи на математической олимпиаде оценивались по такой системе: за правильно решённую задачу давали 20 очков, за неправильно решённую — снимали 8 очков; если задача вообще не решалась — 0 очков. После объявления результатов Саша сказал своему учителю математики, что он получил 99 очков, Боря — что он получил 78 очков, а Игорь — что он получил 56 очков. Учитель сразу сказал, что кто-то из них что-то напутал. Кто напутал, и как учитель это узнал?

Задача 68. Можно ли число 101010 представить в виде разности квадратов целых чисел?

Задача 69. Знайка задумал несколько целых чисел и сообщил их Незнайке. В интервью газете «Жёлтый листок» Незнайка сказал: «Знайка дал мне три числа. Их сумма равна 201, а произведение равно 30030». Докажите, что Незнайка соврал.

...сумма цифр

Задача 70. Шестизначный номер называется *почти счастливым*, если сумма трёх каких-то его цифр равна сумме трёх остальных. Рома взял в троллейбусе два билета подряд. Их номера оказались почти счастливыми. Докажите, что один из этих номеров заканчивается на 9.

Задача 71. Докажите, что среди любых 22 последовательных натуральных чисел найдется число, не делящееся на свою сумму цифр.

Задача 72. В клетках прямоугольной таблицы расставлены целые числа так, что в каждой строчке и в каждом столбце сумма чисел чётна. Клетки раскрасили в шахматном порядке. Докажите, что сумма чисел в чёрных клетках чётна.

Задача 73. В клетки таблицы 9×9 вписали в порядке возрастания (сначала заполнили первую строку, потом вторую и так далее) числа от 460 до 540. Можно ли наложить на четыре клетки таблицы составленную из четырёх клеточек букву «Г» (возможно, повёрнутую или перевёрнутую) так, чтобы сумма покрытых ею чисел равнялась 2005?

...оценки

Задача 74. Клетчатый квадрат 16×16 разрезан на фигурки вида «Т» из четырёх клеток. Докажите, что найдется прямая, идущая по линиям сетки и рассекающая не менее восьми фигурок.

Задача 75. 15 жителей Изумрудного города стоят по кругу. Каждый из них надел цветные очки — всего в этих очках по 10 зелёных, розовых и голубых стекол (левое и правое стекло могут быть и разного цвета). Каждый из стоящих в круге заметил, что ни одно из стёкол в его очках не совпадает по цвету ни с одним из стёкол в очках его правого соседа. Какое максимальное число из этих 15 очков может иметь разноцветные стёкла?

Ответы и решения

Задача 1. а) ... все множители нечётны.

б) ... хотя бы один из множителей чётен.

в) Докажем эти утверждения одновременно. Возможны только два случая.

1) Хотя бы один из множителей чётен. Тогда, умножив его на произведение всех остальных, получим чётное число.

2) Все множители нечётны. Умножив первый на второй, получим нечётное число. Умножив результат на третий множитель, снова получим нечётное число. И так далее, пока не дойдем до всего произведения.

Задача 2. а) Например, 1, 3, 5 (годятся любые три нечётных числа).

б) Таких чисел нет. Так как произведение нечётно, то нечётны все четыре числа. Но тогда их сумма чётна.

Задача 3. Нельзя. Сумма десяти нечётных слагаемых должна быть чётной.

Задача 4. Нельзя. Если произведения в каждом столбце нечётны, то все числа в таблице нечётные. Тогда суммы в каждой строке чётные.

Задача 5. Общее число полученных писем (57) нечётно, а число отправленных писем чётно.

Задача 6. Количества голосов, поданных «за» и «против», имеют одну чётность (их сумма равна числу всех депутатов). Значит, их разность не может быть нечётным числом 23.

Задача 7. Нельзя. Площадь каждого прямоугольника равна 2, а площадь доски (25) на 2 не делится.

Задача 8. Не удастся. Все стороны прямоугольника должны иметь целую длину, так как они сложены из палочек целой длины. Тогда его периметр чётен (противоположные стороны равны). А сумма длин всех палочек — нечётна.

Задача 9. Вправо жук прополз столько же сантиметров, столько и влево, а вверх — столько же, сколько вниз. Поэтому сумма чётна.

Задача 10. Не может. Как бы мы ни расставляли знаки в сумме $\pm1\pm2\pm\ldots\pm25$ (плюс соответствует прыжку вправо, а минус — влево), эта сумма будет нечётна (13 нечётных слагаемых) и, следовательно, не может равняться нулю.

Задача 11. Нет. Этот квадрат должен иметь размеры 6×6. Среди простых чисел только одно чётное — число 2. Значит, сумма в строке, где стоит 2, будет нечётна, а во всех остальных строках — чётна.

Задача 12. Нет. Занумеруем места, на которых стоят цифры в ряду. Так как между единицей и двойкой стоит нечётное число цифр, то они находятся на местах, номера которых имеют одну чётность. Аналогично, номера мест двойки и тройки имеют одну чётность, и т. д. То есть все цифры стоят только на чётных или только на нечётных местах, что невозможно.

Задача 13. Если муравей m секунд полз вправо, а n — влево, то он оказался в точке с координатой $m - n$. Так как сумма $m + n = 60$ чётна, то числа m и n одной чётности и их разность также чётна. Поэтому через минуту муравей окажется в точке, координата которой чётна. Ясно, что он не мог отползти дальше, чем на 60 от точки O. В любую точку с чётной координатой $2k$, заключенной в пределах от -60 до 60, он попасть может (например, дойдя до этой точки за первые $2k$ секунд, а потом меняя направление через каждую секунду). Всего таких точек 61.

Идея второго решения. То, что муравей окажется в точке с чётной координатой, можно доказать и по-другому, использовав идею чередования: каждую секунду чётность его координаты *меняется* на противоположную; значит, через 60 секунд он окажется в точке с координатой *той же* чётности, что и вначале.

Задача 14. Нет. Предположим, что такая расстановка возможна. Числа на концах одного ребра должны быть одинаковой чётности (так как их сумма делится на 2). Значит, все числа в вершинах — одной чётности. Но ни число 1, ни число 20 не могут стоять на ребрах (1 не может быть полусуммой двух больших чисел, а 20 — двух меньших). Значит, они стоят в вершинах, что противоречит предыдущему заключению. Полученное противоречие доказывает, что предположение о возможности расстановки было неверным.

Задача 15. Может получиться любое *нечётное* число от -435 до 435. Чётное число получиться не может, так как количество *нечётных* слагаемых (их 15) *нечётно*. Для получения числа 435 надо все звездочки заменить на плюсы (в этом можно убедиться непосредственным сложением или разбив слагаемые на 15 пар, сумма в каждой из которых равна 29), а для получения числа -435 — на минусы.

Далее достаточно доказать, что если мы смогли получить число $n < 435$, то можно так изменить расстановку знаков, что получится $n + 2$ (фактически это — индукция).

Если перед единицей стоит минус, то, изменив его на плюс, мы увеличим сумму на 2. Если же перед единицей стоит плюс, то где-то в выражении за плюсом идёт минус (иначе все знаки были бы плюсами, и сумма равнялась бы 435). Изменив оба этих знака, мы снова увеличим число на 2 (вместо $+k-(k+1)$ появится $-k + (k + 1)$).

Задача 16. Если в каком-то горизонтальном ряду n чёрных клеточек, то в соседнем ряду либо n, либо $1000 - n$ клеточек (в зависимости от того, проходит ли между ними разделительная прямая). В любом случае эти числа имеют одну чётность. Поэтому *во всех* горизонталях количества чёрных клеток имеют одну и ту же чётность. Сумма же 1000 чисел одной чётности чётна.

Задача 17. Первое решение. Введем на доске «систему координат»: левое нижнее поле (оно чёрное) будет иметь координаты $(1,1)$, правое верхнее — $(8,8)$. Заметим, что цвет поля определяется *чётностью* суммы его координат: у чёрных полей эта сумма чётная, у белых — нечётная.

Сложим все координаты всех ладей. Так как на каждой горизонтали и на каждой вертикали стоит ровно по одной ладье, то получится $(1+2+\ldots+8)+(1+2+\ldots+8)$ — чётное число. Поэтому количество нечётных слагаемых (им соответствуют ладьи на белых полях) чётно. Но всего ладей восемь, значит, и оставшихся (стоящих на чёрных полях) тоже чётно.

Второе решение. На чётных горизонталях стоят 4 ладьи. На нечётных вертикалях — тоже 4. Сложив, получим 8. В этом подсчёте каждая «чёрнопольная» ладья участвует один раз, а каждая «белопольная» — чётное число раз (дважды, если она стоит на пересечении указанных рядов, или ни разу — в противном случае). Поэтому число «чёрнопольных» ладей чётно.

Задача 18. 22 или 292. Номер первой страницы после выпавшего куска должен иметь чётность, противоположную чётности числа 238, и быть больше этого числа. Значит, этот номер — 283 или 823. В первом случае выпало $(282-238):2=22$, во втором — $(822-238):2=292$ листа.

Задача 19. Нельзя. При приведении к общему знаменателю мы в числителе получим чётное число (сумму 1000 нечётных слагаемых), а в знаменателе — нечётное.

Задача 20. Дракон. Пусть остался рыцарь. Тогда принцессы извели 99 рыцарей, причем каждая (к моменту своей смерти) извела чётное число. Противоречие.

Пусть осталась принцесса. Тогда рыцари убили 101 дракона, причем каждый убил чётное число. Противоречие.

Задача 21. 2000. Двойное нажатие на кнопку ничего не меняет, поэтому можно считать, что каждую кнопку нажимали не более одного раза. Назовем ряд (строку или столбец) *чётным* (нечётным), если в нем *чётное* (нечётное) число нажатых кнопок. Лампочка горит, если на объединении проходящих через соответствующую ей кнопку рядов нажато *нечётное* число кнопок. Пусть все лампочки загорелись. Это значит, что нажаты были кнопки на пересечении рядов *одинаковой чётности* и только они.

Пусть одна из кнопок (например левая верхняя) не была нажата. Следовательно, первая строка и первый столбец — *разной чётности* (например, первая строка *нечётная*, а первый столбец *чётный*). Тогда столбцы, соответствующие нажатым кнопкам первой строки, *нечётны*, а остальные — чётны. Следовательно, количество *нечётных* столбцов *нечётно*, поэтому общее число нажатых кнопок в таблице *нечётно*.

Наоборот, строки, соответствующие нажатым кнопкам первого столбца, чётны, а остальные — *нечётны*. Следовательно, количество чётных, (а значит, и *нечётных*) строк *чётно*, поэтому общее число нажатых кнопок в таблице *чётно*.

Мы пришли к противоречию, предположив, что одна из кнопок не была нажата. Следовательно, нажаты были все кнопки.

Нажав все кнопки по одному разу, мы действительно зажжём все лампочки: в рядах, проходящих через каждую кнопку, было сделано всего 89 нажатий.

Задача 22. а) Нельзя. Чётность этажа при нажатии на кнопку не изменяется. б) Можно. Например, нажимая попеременно на первую и вторую кнопки, мы будем каждый раз подниматься на два этажа вверх. Так мы доберемся до 87 этажа. Затем нажмём первую кнопку.

Важно понимать, что лифт не может подняться выше 100-го этажа. Поэтому последние две фразы должны в решении присутствовать. Этого можно избежать, если то же самое сказать чуть по-другому: сначала нажмем первую кнопку, а потом будем нажимать попеременно вторую и первую (спускаться нам уже ничего не помешает).

Конечно, предложен не самый быстрый способ. Быстрее нажать 11 раз первую кнопку (89-й этаж), потом три раза вторую и три раза первую.

Задача 23. а) Нет. При переворачивании двух стаканов количество стаканов, стоящих вверх дном, либо не меняется, либо меняется на 2. Поэтому оно всегда будет нечётным (и, значит, не равно нулю).

б) Нет. При переворачивании шести стаканов количество стаканов, стоящих вверх дном, меняется на чётное число. Действительно, если среди шести переворачиваемых стаканов n стояли вверх дном, то после переворачивания вверх дном встанут $6-n$ стаканов; а числа n и $6-n$ — одной чётности. Поэтому количество стоящих вверх дном стаканов всегда будет *нечётным*.

Задача 24. Нет. Общая сумма очков должна быть чётной (каждое слово вносит в общую сумму чётное число очков — 0, 2 или 4).

Задача 25. Первое решение. При каждой операции количество минусов либо не изменяется, либо уменьшается на 2. Поэтому чётность количества минусов не меняется. Если в начале число минусов было нечётно, то последний знак — минус, если чётно — плюс.

Второе решение. Заменим плюсы на единицы, а минусы на минус единицы. Тогда произведение написанных чисел не меняется. Если оно изначально было отрицательным, то на доске останется минус единица (бывший минус), если положительным — единица (бывший плюс).

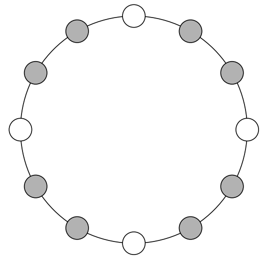
Задача 26. Нет. За ход число минусов или не меняется, или меняется на 2 или 4. Значит, оно всегда останется нечётным.

Можно дать и решение, аналогичное второму решению задачи 25.

Задача 27. Нет. Выделим в таблице квадрат 2×2. При каждом ходе количество минусов *в этом квадрате* не меняется или меняется на 2. Поэтому оно всегда будет нечётным.

Задача 28. Нет. При смене знака у двух из пяти чисел знак произведения всех пяти не изменится. Но произведение чисел первого набора положительно, а второго — отрицательно.

Задача 29. Нет. Произведение этих 14 чисел равно *четвёртой* степени произведения чисел в вершинах (так как каждое из чисел в вершинах входит в качестве множителя в числа на трёх гранях). Значит, оно *положительно.* Следовательно, среди наших 14 чисел количество минус единиц чётно и не может равняться 7.



Задача 30. Нельзя. Покрасим восемь лампочек в красный цвет (см. рис.) так, чтобы среди них была та, которая горела изначально. При изменении состояния трёх соседних ровно две красные лампочки меняют состояние. Поэтому всегда горит нечётное число этих лампочек, и все восемь красных лампочек гореть не могут.

Задача 31. Не может. Рассмотрим одного из полицейских. Он должен отдежурить с 99 другими. Но каждый раз он дежурит с двумя, а 99 на 2 не делится.

Можно подумать, что решение требует знания комбинаторики. Однако это не так.

Задача 32. Сумма чисел на двух сторонах одного листа нечётна. Сумма 25 нечётных чисел не может быть чётной. Таким образом, 2000 получиться не могло.

2001 получиться тоже не может. Добавим по 1 к номерам всех нечётных страниц. При этом сумма чисел на 25 листах увеличится на 25. Но сумма чисел на каждом листе станет кратна 4 (сумма двух одинаковых чётных чисел), а 2026 на 4 не делится.

Задача 33. Нельзя. Сумма всех чисел в таблице (она равна $17 \cdot 8$) делится на 8. Тем более делится на 8 сумма восьми сумм по строкам и столбцам (она равна удвоенной сумме чисел таблицы). А сумма восьми последовательных чисел на 8 не делится:

$$n + (n+1) + \ldots + (n+7) = 8n + (1 + \ldots + 7) = 8n + 28.$$

Задача 34. Примем длину отрезка AB за 1. Для каждой точки разность между расстоянием от неё до A и расстоянием от неё до B равна ± 1. Разность между указанными суммами расстояний равна сумме этих 45 разностей. Но сумма *нечётного* количества чисел ± 1 нечётна, то есть не равна нулю.

Задача 35. Нет. Введём на плоскости систему координат так, чтобы вершины исходного квадрата получили координаты $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, причём кузнечики сидели в первых трёх вершинах. Легко заметить, что кузнечики все время прыгают по целочисленной решётке, причем каждым прыжком меняют как свою абсциссу, так и ординату на *чётное* число. Поэтому *чётность* их координат не меняется. В частности, они не могут попасть в точку $(1, 1)$.

Задача 36. При каждом ходе конь меняет цвет поля, то есть происходит чередование цвета полей. Поэтому на исходное поле он может вернуться только через *чётное* число ходов.

Задача 37. Нет. Если конь побывал на всех 64 полях по одному разу, то он сделал 63 хода и, следовательно, не мог встать на поле *того же цвета*, что $a1$.

Задача 38. Нет. На доске осталось 32 белых поля и только 30 чёрных. Их нельзя расставить в чередующемся порядке.

Задача 39. При каждом вертикальном или горизонтальном ходе король меняет цвет поля, а при диагональном — не меняет. Король вернулся на поле того же цвета, на котором стоял вначале. Значит, он менял цвет поля *чётное* число раз. Таким образом, он сделал *чётное* число недиагональных ходов. Но и общее число ходов короля (их было 64) *чётно*, поэтому количество диагональных ходов тоже *чётно*.

Задача 40. Будем двигаться вдоль прямой в одном направлении. При каждом пересечении границы многоугольника мы переходит снаружи многоугольника внутрь или изнутри наружу. Поскольку оба «конца» прямой находятся снаружи многоугольника, мы пересечем границу *чётное* число раз. Значит, мы не можем пересечь все стороны (их нечётное число, а дважды одну сторону пересечь нельзя).

Задача 41. Нет. Прямая делит плоскость на две полуплоскости. Будем двигаться по ломаной. При каждом пересечении звена ломаной с прямой мы переходим из одной полуплоскости в другую. Но после обхода по всем звеньям мы вернулись в исходную точку, то есть в *ту же* полуплоскость. Значит, прямая пересеклась с *чётным* числом звеньев.

Подобное решение, конечно, можно дать и для задачи 40. А вот решение задачи 40 для задачи 41 не годится: если ломаная имеет самопересечения, то понятия «внутри» и «снаружи» для неё не имеют смысла.

Задача 42. а) Нет. После каждой «операции» число дверей в подвале меняет чётность. В начале в подвале было 0 дверей, поэтому после 10 операций количество дверей в подвале также чётно.

б) 8. Десять дверей там оказаться не может: комната, которая проснулась последней, осталась с дверью. *Реализация*: комнаты просыпаются по порядку, первая уносит дверь десятой, вторая — первой, третья — второй, ..., девятая — восьмой, десятая приносит свою дверь назад.

Задача 43. Первым был Боря, вторым — Саша, третьим — Игорь. На старте Саша был впереди Бори, а на финише — позади него. Значит, он менялся местами с Борей *нечётное* число раз. Поэтому с Игорем он менялся местами *чётное* число раз (так как всего менялся 5 раз). Таким образом, Саша на финише был впереди Игоря, как и на старте.

Условие о том, что Игорь менялся местами с другими бегунами шесть раз, для решения *не нужно*.

Задача 44. 11. Он не мог сыграть *меньше*, так как Боря сыграл не менее $21 - 10 = 11$ партий не с Сашей. Но он не мог сыграть и *больше*, так как Саша не мог пропустить более 11 партий (после каждой пропущенной партии, кроме, может быть, последней, он играет, а играл он только 10 раз).

Задача 45. Нет. Предположим противное и рассмотрим *первый* момент, когда все цифры стали одинаковыми. Это значит, что в предыдущий момент либо все цифры были одинаковые (тогда будут написаны одни нули), либо в каждом месте рядом стоят только разные цифры (будут написаны одни единицы). Но оба случая невозможны. Одинаковыми все цифры быть не могли, так как *первый* момент, когда они стали одинаковыми, наступил *после* этого. А чередование невозможно из-за нечётности их количества.

Задача 46. Нет. Назовем *дружественными* числа, стоящие «через одно». Рассмотрим *первый* момент, когда все числа стали нулями. Тогда перед этим каждые два дружественных числа были равны. Но тогда все числа равны: прыгая через одно, мы пройдём по всем числам из-за нечётности числа 13. Равняться нулю они не могут, так как *впервые* они превратились в нули после этого. Значит, все они равны единице. Тогда за ход перед этим все дружественные пары состоят из различных чисел. Но это невозможно из-за той же нечётности: прыгая через одно, мы вернемся к исходному числу через тринадцать «прыжков».

Задача 47. Нет. Как и в предыдущей задаче назовем *дружественными* числа, стоящие «через одно». Предположим, что в какой-то момент все числа стали единицами. Тогда за ход перед этим все дружественные пары состоят из различных чисел. Это опять невозможно из-за нечётности: прыгая через одно, мы вернемся к исходному числу через 7 «прыжков».

Задача 48. Первое решение. Уберём из-за стола каждого второго и посадим их за другой стол в том же порядке. За каждым столом теперь по 25 человек, поэтому мальчиков и девочек не поровну — есть стол, где мальчиков *больше*, чем девочек. За этим столом два мальчика должны сидеть рядом (если рядом с каждым мальчиком сидит две девочки, то девочек *не меньше*, чем мальчиков). Но за исходным столом между этими мальчиками кто-то сидел.

Второе решение. Предположим, что это не так. Тогда нигде рядом не сидят больше двух мальчиков и рядом с девочкой всегда сидит хотя бы одна девочка. Разобьём всех сидящих за столом на группы рядом сидящих мальчиков и группы рядом сидящих девочек. Эти группы чередуются, поэтому количество групп мальчиков и групп девочек одинаково. Как мы только что заметили, в каждой группе мальчиков находится *не более двух* ребят, а в каждой группе девочек — *не менее* двух. Поэтому все эти группы состоят *ровно* из двух человек (иначе мальчиков меньше, чем девочек). Но тогда этих групп 25 — нечётное число. Противоречие.

Задача 49. $(0, \ldots, 0)$. Предположим, что не все числа равны нулю. Расположим их (с сохранением порядка) по окружности. Если два положительных числа идут подряд, то, очевидно, все числа положительны и каждое больше предыдущего, что невозможно. По этой же причине два отрицательных числа не могут стоять подряд. После положительного числа не может стоять 0 (в противном случае два следующих числа положительны). Таким образом, положительные и отрицательные числа должны чередоваться (а количество неизвестных должно быть чётным). Но и такой вариант приводит к противоречию. Пусть, например, a_1 и a_3 отрицательны. Тогда $a_3 - a_1 = a_2 > 0$. Следовательно, каждое следующее отрицательное число больше предыдущего, что также невозможно.

Задача 50. К красной. Поскольку 99 нечётно, представители какой-то партии составляют в парламенте большинство. Все они сказали правду. Допустим, это синие. Тогда все они (кроме, может быть, первого) выступали после однопартийцев, то есть сначала выступили все синие, а потом — все красные. Однако тогда первый красный должен был сказать правду. Противоречие. Значит, правду говорят красные. Стало быть, они *чередуются* с синими и их больше. Но это возможно только в случае, когда первый оратор — красный.

Задача 51. Нет. Докажем, что если в какой-то момент не все светофоры — жёлтые, то и через минуту не все жёлтые. Действительно, пусть это не так. Рассмотрим три случая.

1) В данный момент жёлтых светофоров нет вообще. Через минуту все стать жёлтыми могут только в случае, когда у каждого светофора соседи — красный и зелёный. Это значит, что светофоры идут по кругу парами: ККЗЗКК... Но число 625 нечётно. Значит, такой случай невозможен.

2) Есть только одиночные жёлтые светофоры. Если через минуту все светофоры станут жёлтыми, тогда «сейчас» соседи каждого жёлтого — красный и зелёный, а у каждого не жёлтого светофора оба соседа — жёлтые. Это значит, что «не жёлтые» светофоры чередуются с жёлтыми, что невозможно по той же причине.

3) Есть жёлтая цепочка (несколько жёлтых светофоров подряд). Но её крайние светофоры поменяют цвет, и снова не все светофоры будут жёлтыми.

Задача 52. Вершины многоугольника симметричны относительно его оси симметрии. Значит, все вершины, не лежащие на оси, разбиваются на пары, то есть их *чётное* число. А 45 — число нечётное.

Задача 53. Только пятёрка. Пятёрка на половинках доминошек встречается 8 раз. Внутри цепочки все пятерки разбиты на пары. Без пары осталась пятёрка на конце. Значит, оставшаяся пятёрка находится на другом конце.

Задача 54. Нет. Предположим, что нам это удалось. Теперь пятёрка встречается 7 раз. Внутри цепочки она встречается чётное число раз (см. решение задачи 53). Значит, на одном из концов — пятёрка.

Аналогично можно доказать, что на концах находятся и все остальные «знаки» домино. Но знаков шесть, а концов всего два. Противоречие!

Задача 55. Нельзя. Рассмотрим пары соседних клеток приложенных друг к другу домино. Таких пар 27. Но в наборе домино только 24 «нечётные» клетки (1, 3, 5 встречаются по 8 раз), и они не могут попасть во все пары. Значит, в какой-то паре обе клетки чётные, и их сумма тоже чётна.

Задача 56. Для каждого знака на клетках оставшихся костяшек домино в наборе имеется ещё семь таких же. На стыках выложенных доминошек этот знак встречается чётное число раз, а на краю выложенной цепочки он по условию стоять не может. Поэтому ещё хотя бы один такой знак должен быть на оставшихся доминошках, то есть на них есть два знака, каждый из которых встречается дважды (четыре раза один знак там встретиться не может). Тогда либо эти доминошки одинаковы (но таких в наборе нет), либо обе — дубли.

Задача 57. Если две соседние монеты расположены одинаково (например, обе орлами вверх), выбросим одну из них. При этом ни количество монет, лежащих орлом на орле, ни количество монет, лежащих решкой на решке, не изменится.

Будем так продолжать, пока не останется пар соседних и одинаково расположенных монет. Оставшиеся монеты чередуются (первая лежит вверх орлом, вторая — решкой, третья — орлом и так далее). Ситуация на стыках тоже чередуется: на первом монеты лежат решкой на решке, на втором — орлом на орле, …, на последнем (по условию) — орлом на орле. Таким образом, число стыков чётно, и половину из них занимают стыки орёл-орёл.

Монеты можно было не выбрасывать, а вместо этого рассмотреть *группы* одинаково расположенных монет, лежащих подряд. На стыках между этими группами происходит чередование.

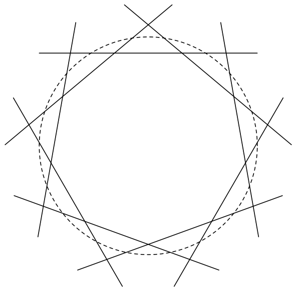
Задача 58. В каждом танце участвуют юноша и девушка, поэтому число танцев, названных юношами, должно равняться числу танцев, названных девушками, то есть указанные числа должны разбиваться на две группы по пять с равной суммой. Однако это невозможно, так как общая сумма нечётна.

Задача 59. Может, если кто-то имеет друзей не из числа одноклассников.

Это — ловушка. В задаче не сказано, что друзья только внутри класса. Внутри класса такого, конечно, быть не может: возникает противоречие с чётностью.

Задача 60. а) Нельзя. Предположим, что это возможно. Посадим на каждый отрезок марсианина, и пусть каждый пожмет руки марсианам, сидящим на отрезках, пересекающихся с тем, на котором он сидит. Мы пришли к противоречию с аналогом задачи 7 из занятия 4.

б) Можно. Например, так:



Противоречия с чётностью здесь нет (степени всех вершин чётны). Однако это само по себе не означает, что подобная система отрезков на плоскости действительно существует. Пока мы не построили пример, задача не решена.

Идея построения примера: провести «малые» диагонали в выпуклом девятиугольнике, а затем немного продолжить их.

Задача 61. Нет. Каждая команда сыграла 15 боёв. Чтобы «посетить» все школы, она должна была сыграть в каждой ровно по одному разу. Значит, в каждой школе играли 15 команд. Но 15 — нечётное число.

Задача 62. Допустим противное. Тогда если одна из двух встречающихся в матче команд сыграла до матча чётное число игр, то другая — тоже (назовем такие матчи *чётными*). Каждая команда к концу турнира сыграла по 7 чётных матчей (всего она сыграла 14 матчей, а чётные и нечётные матчи чередуются). Следовательно, количество чётных матчей равно $\frac{15 \cdot 7}{2}$. Противоречие.

Задача 63. Пусть мальчиков, сидящих с мальчиками, $2k$, а девочек, сидящих с девочками, — $2n$. Тогда всего в школе $4n$ девочек и $2n + 2k$ мальчиков. Значит, $6n + 2k = 450$, то есть $3n + k = 225$. Следовательно, n и k — числа разной чётности, поэтому общее количество мальчиков $2n + 2k$ не делится на 4. Если половина из них будет сидеть с девочками, то другая половина не разобьётся на пары.

Задача 64. Будем называть участников турнира *игроками*. Пусть нет игрока, знакомого со всеми остальными. Возьмём любого игрока А. По условию, есть игрок Б, знакомый со всеми игроками, кроме А. Уберём игрока Б. Со всеми оставшимися может быть знаком только игрок А: иначе игрок С, отличный от А и знакомый со всеми оставшимися, будет знаком и с Б, что противоречит нашему предположению. Назовём таких игроков А и Б *антиподами*. Из проведённого рассуждения следует, что у каждого игрока А есть единственный антипод, для которого А в свою очередь является антиподом. Но это значит, что все игроки должны разбиться на пары антиподов. А это невозможно, ибо число игроков нечётно. Противоречие.

Задача 65. а) Нечётно. Решений, в которых $a \neq b$, чётное число: они разбиваются на пары, отличающиеся перестановкой a и b. Решений, в которых $a = b$ и $c \neq d$, также чётное число. И решений, в которых $a = b$, $c = d$, но $a \neq c$, чётное число. Последнее решение: $a = b = c = d = 400$.

б) Нечётно. Начало аналогично пункту а). Остаются решения, в которых $a = b = c = d$. Приводя исходное уравнение к виду $ae - a - 4e = 0$, а затем к виду $(a-4)(e-1) = 4$, получаем ещё три решения: $(8, 2)$, $(6, 3)$, $(5, 5)$.

Задача 66. Назовём *вершиной* точку, где сходятся границы трёх стран. Из каждой вершины выходит ровно одна закрытая граница. Допустим, объехать страны можно. Соответствующий замкнутый маршрут не пересекает закрытых границ, значит, каждая из них либо целиком лежит внутри него, либо целиком снаружи. Поэтому все вершины, находящиеся внутри маршрута, разбиваются на пары вершин, связанных закрытыми границами, то есть этих «внутренних» вершин — *чётное число* k. Заменим участки границ, соединяющие вершины, нитями и разрежем каждую пополам. Из «внутренних» вершин выходит чётное число ($3k$) половинок нитей. Маршрут пересекает 19 границ, поэтому 19 из этих половинок принадлежат нитям, пересекающим маршрут. Значит, от разрезания нитей, целиком лежащих внутри маршрута, получилось $3k - 19$ половинок. Но это число — нечётное! Противоречие.

Задача 67. Количество полученных очков должно быть чётным, более того, оно делится на 4. Поэтому *не только Саша, но и Боря* назвали неправильные результаты.

Результат 56 возможен: 4 правильно решённые задачи и 3 неправильно решённые. Поэтому нет оснований утверждать, что Игорь ошибся. *Но нет и оснований утверждать, что он не напутал.*

Задача 68. Нет. $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$. Числа $m - n$ и $m + n$ имеют одинаковую чётность, поэтому их произведение либо нечётно (когда оба множителя нечётны), либо делится на 4 (в противном случае). А число 101010 чётно, но на 4 не делится.

Задача 69. Сумма трёх чисел нечётна, значит, нечётны либо все три числа, либо только одно из них. В первом случае произведение нечётно, во втором — делится на 4. А 30030 чётно, но на 4 не делится.

Задача 70. Сумма всех цифр почти счастливого номера чётна. Если номер не оканчивается на 9, то сумма цифр следующего за ним номера больше суммы его цифр на 1, то есть другой чётности.

Задача 71. Рассмотрим 10-е и 11-е из этих чисел. Одно из них нечётно. Если его сумма цифр чётна, то искомое число найдено. Если же его сумма цифр нечётна и его цифра десятков — не 9, прибавим к нему 10. Если цифра десятков — 9, вычтем из него 10. Полученное число входит в наш набор и нечётно, а его сумма цифр чётна.

Для 21 числа утверждение неверно. Попробуйте построить контрпример.

Задача 72. Занумеруем столбцы слева направо, а строчки сверху вниз. Можно считать, что у чёрных клеток сумма номеров строки и столбца нечётна. Сложим все числа, стоящие в столбцах с чётными номерами, и все числа, стоящие в строках с чётными номерами. По условию мы получим *чётное* число. С другой стороны, оно равно сумме всех чисел в чёрных клетках (мы их сосчитали по одному разу) и *удвоенной* сумме всех чисел в белых клетках, стоящих на пересечениях столбцов и строк с чётными номерами (их мы сосчитали дважды). Следовательно, сумма чисел в чёрных клетках чётна.

Полезно сравнить эту задачу (и её решение) с задачей 17: ладьи можно заменить единицами.

Задача 73. Нет. Раскрасим таблицу в шахматном порядке. Нетрудно видеть, что все чётные числа будет стоять в клетках одного цвета, а все нечётные — в клетках другого цвета. Буква «Г» в любом положении накрывает две клетки одного цвета и две — другого. Поэтому сумма всех накрытых ею чисел чётна.

Задача 74. Всего имеется 64 фигурки. Каждая содержит внутри себя три отрезка сетки. Эти 192 отрезка располагаются на 30 прямых, значит, на одной из прямых не меньше $192 : 30 = 6,4$ таких отрезков, то есть она пересекает не менее семи фигурок (прямая пересекает фигурку только по одному отрезку).

Но каждая прямая пересекает чётное число фигурок: над горизонтальной прямой находится чётное число клеток, фигурки, находящиеся выше неё также дают чётное число клеток, а каждая пересечённая фигурка вносит нечётное число клеток (1 или 3).

Задача 75. 6. Будем обозначать цвета стёкол буквами З, Р, Г, типы очков — парами букв. Рядом с разноцветными очками могут быть только одноцветные очки, поэтому разноцветных очков не больше половины, то есть не больше 7. Если их ровно 7, то у нас где-то есть двое людей в одноцветных очках, а далее разноцветные и одноцветные очки чередуются. Но при таком чередовании типы разноцветных и одноцветных очков не меняются, так как, например, ЗР-очки могут чередоваться только с ГГ-очками. Значит, стёкла у соседей в одноцветных очках одинаковы. Противоречие.

Пример на 6 разноцветных очков:

ЗЗ-**РГ**-ЗЗ-**РГ**-ЗЗ-РР-**ЗГ**-РР-**ЗГ**-РР-ГГ-**ЗР**-ГГ-**ЗР**-ГГ.

Приложение

Раздаточный материал

Занятие 1

Задача 1. Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку. Все прыжки имеют одинаковую длину. Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

Задача 3. Числа m и n — целые. Докажите, что число $mn(m+n)$ чётно.

Задача 4. Что можно сказать о чётности разности двух чисел?

Задача 5. Сумма трех чисел нечётна. Сколько слагаемых нечётно?

Задача 6. Не вычисляя суммы $1+2+\ldots+1999$, определите ее чётность.

Задача 7. На доске написаны 613 целых чисел. Докажите, что можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет чётной. Верно ли это для 612 чисел?

Задача 8. В ряд выписаны все числа от 1 до 1998. Требуется расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы полученное выражение равнялось нулю. Удастся ли это сделать?

Задача 9. Можно ли числа 1, ..., 21 разбить на несколько групп так, чтобы в каждой из них максимальное число равнялось сумме всех остальных?

Занятие 2

Задача 1. На столе стоят шесть столбиков монет. В первом столбике одна монета, во втором — две, в третьем — три, ..., в шестом — шесть. Разрешается на любые два столбика положить по монете. Можно ли за несколько таких операций сделать все столбики одинаковыми?

Задача 2. Изменится ли ответ в предыдущей задаче, если в последнем столбике было не шесть, а семь монет?

Задача 3. Числа 1, 2, ..., 714 записаны по порядку. Разрешается менять местами числа, стоящие «через одно» (например, можно поменять 3 и 5). Можно ли с помощью таких перестановок расположить все числа в обратном порядке?

Задача 4. На доске написаны числа 1, 2, ..., 101. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них их разность. Так продолжается до тех пор, пока на доске не останется одно число. Может ли это быть 0?

Задача 5. Круг разбит на шесть секторов. В секторах стоят фишки (сначала в каждом по одной). За один ход разрешается передвинуть две фишки на один сектор в противоположных направлениях. Можно ли за несколько ходов собрать все фишки в одном секторе?

Задача 6. Изменится ли ответ в предыдущей задаче, если секторов не шесть, а двенадцать?

Задача 7. Произведение 22 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.

Задача 8. Имеется таблица размером 17×17. В каждой клетке написано какое-то число. Произведение чисел в каждой строке отрицательно. Докажите, что найдется столбец, произведение чисел в котором тоже отрицательно.

Задача 9. В некоторых клетках таблицы размером 25×25 расставили единицы, в остальных — минус единицы. Затем вычислили все произведения этих чисел по строкам и по столбцам. Докажите, что сумма этих произведений не равна нулю.

Занятие 3

Задача 1. Голодный удав разлёгся вокруг камня и с голодухи прикусил свой хвост. В это время кролик, пользуясь беспомощностью удава, начал издеваться над ним, перепрыгивая через лежащего удава на камень и обратно. Но через полчаса ему это надоело, и он пошёл домой, где с гордостью заявил, что ровно 357 раз перепрыгнул через бедное животное. Докажите, что он заблуждается.

Задача 2. Девять шестерёнок зацеплены по кругу: первая со второй, вторая — с третьей, ..., восьмая — с девятой, девятая — с первой. Могут ли они вращаться?

Задача 3. По окружности стоят 237 точек двух цветов. Докажите, что найдутся две точки одного цвета а) стоящие рядом; б) разделённые ровно двумя точками.

Задача 4. Решите задачу 3б) для 239 точек.

Задача 5. Три кузнечика на прямой играют в чехарду: каждую секунду один из них прыгает через какого-то другого (но не через двух). Могут ли они через 111 секунд вернуться на свои места?

Задача 6. Кузнечик прыгает по прямой. За один раз он прыгает на 15 или 17 см вправо или влево. Может ли он за 20 прыжков продвинуться на 101 см (от исходного положения)?

Задача 7. Вдоль забора растут восемь кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на единицу. Может ли на всех кустах быть вместе 225 ягод?

Задача 8. По кругу расставлены несколько чисел, причем сумма любых двух соседних нечётна. Докажите, что количество чисел чётно.

Задача 9. Катя и её друзья встали по кругу. Оказалось, что оба соседа каждого ребенка — одного пола. Мальчиков среди Катиных друзей — пять. А сколько девочек?

Задача 10. За круглым столом сидят 517 представителей четырёх племён: люди, гномы, эльфы и гоблины. Люди никогда не сидят рядом с гоблинами, а эльфы — рядом с гномами. Докажите, что какие-то два представителя одного племени сидят рядом.

Задача 11. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью и каждые 15 минут поворачивает на 90° (в любую сторону). Докажите, что она сможет вернуться в исходную точку только через целое число часов.

Занятие 4

Задача 1. Можно ли нарисовать замкнутую девятизвенную ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

Задача 2. Квадрат 9×9 разбит на единичные клетки и раскрашен в девять цветов, причем в каждый цвет окрашено девять клеток и раскраска симметрична относительно одной из диагоналей. Докажите, что все клетки этой диагонали раскрашены в разные цвета.

Задача 3. В квадрате поставили 25 точек так, что их расположение симметрично относительно обеих диагоналей. Докажите, что одна точка стоит в центре квадрата.

Задача 4. Можно ли стороны и диагонали правильного тринадцатиугольника раскрасить в 12 цветов так, чтобы в каждой вершине сходились все цвета?

Задача 5. За круглым столом сидят 12 человек — рыцари (которые всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Каждый из сидящих за столом произнес: «Напротив меня сидит лжец». Сколько всего лжецов сидит за столом?

Задача 6. Можно ли склеить многогранник из 11 пятиугольников?

Задача 7. У каждого марсианина три руки. Могут ли семь марсиан взяться за руки?

Задача 8. Резидент одной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

Задача 9. На плоскости поместили десять точек и каждую соединили отрезками с пятью другими. Сколько проведено отрезков?

Задача 10. В прошлом году каждый участник городской олимпиады обнаружил среди участников ровно семь знакомых. В этом году количество участников увеличилось на 17. Может ли каждый иметь среди участников ровно девять знакомых?

Задача 11. 19 рыцарей из двух враждующих стран сидят за круглым столом. Может ли число пар соседей-друзей быть равно числу пар соседей-врагов?

Задача 12. n рыцарей из двух враждующих стран сидят за круглым столом. Количество пар соседей-друзей равно количеству пар соседей-врагов. Докажите, что n делится на 4.

Задача 13. В каждой вершине n-угольника поставили 1 или -1. На каждой стороне написали произведение чисел в ее концах. Оказалось, что сумма этих произведений равна 0. Докажите, что n делится на 4.

Раздаточный материал: краткий вариант

Занятие 1

Задача 1. Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку. Все прыжки имеют одинаковую длину. Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

Задача 7. На доске написаны 613 целых чисел. Докажите, что можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет чётной. Верно ли это для 612 чисел?

Задача 8. В ряд выписаны все числа от 1 до 1998. Требуется расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы полученное выражение равнялось нулю. Удастся ли это сделать?

Задача 9. Можно ли числа 1, …, 21 разбить на несколько групп так, чтобы в каждой из них максимальное число равнялось сумме всех остальных?

Занятие 2

Задача 1. На столе стоят шесть столбиков монет. В первом столбике одна монета, во втором — две, в третьем — три, …, в шестом — шесть. Разрешается на любые два столбика положить по монете. Можно ли за несколько таких операций сделать все столбики одинаковыми?

Задача 3. Числа 1, 2, …, 714 записаны по порядку. Разрешается менять местами числа, стоящие «через одно» (например, можно поменять 3 и 5). Можно ли с помощью таких перестановок расположить все числа в обратном порядке?

Задача 4. На доске написаны числа 1, 2, …, 101. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них их разность. Так продолжается до тех пор, пока на доске не останется одно число. Может ли это быть 0?

Задача 5. Круг разбит на шесть секторов. В секторах стоят фишки (сначала в каждом по одной). За один ход разрешается передвинуть две фишки на один сектор в противоположных направлениях. Можно ли за несколько ходов собрать все фишки в одном секторе?

Задача 8. Имеется таблица размером 17×17. В каждой клетке написано какое-то число. Произведение чисел в каждой строке отрицательно. Докажите, что найдется столбец, произведение чисел в котором тоже отрицательно.

Задача 9. В некоторых клетках таблицы размером 25×25 расставили единицы, в остальных — минус единицы. Затем вычислили все произведения этих чисел по строкам и по столбцам. Докажите, что сумма этих произведений не равна нулю.

Занятие 3

Задача 1. Голодный удав разлёгся вокруг камня и с голодухи прикусил свой хвост. В это время кролик, пользуясь беспомощностью удава, начал издеваться над ним, перепрыгивая через лежащего удава на камень и обратно. Но через полчаса ему это надоело, и он пошёл домой, где с гордостью заявил, что ровно 357 раз перепрыгнул через бедное животное. Докажите, что он заблуждается.

Задача 5. Три кузнечика на прямой играют в чехарду: каждую секунду один из них прыгает через какого-то другого (но не через двух). Могут ли они через 111 секунд вернуться на свои места?

Задача 6. Кузнечик прыгает по прямой. За один раз он прыгает на 15 или 17 см вправо или влево. Может ли он за 20 прыжков продвинуться на 101 см (от исходного положения)?

Задача 10. За круглым столом сидят 517 представителей четырёх племён: люди, гномы, эльфы и гоблины. Люди никогда не сидят рядом с гоблинами, а эльфы — рядом с гномами. Докажите, что какие-то два представителя одного племени сидят рядом.

Задача 11. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью и каждые 15 минут поворачивает на 90° (в любую сторону). Докажите, что она сможет вернуться в исходную точку только через целое число часов.

Занятие 4

Задача 2. Квадрат 9×9 разбит на единичные клетки и раскрашен в девять цветов, причем в каждый цвет окрашено девять клеток и раскраска симметрична относительно одной из диагоналей. Докажите, что все клетки этой диагонали раскрашены в разные цвета.

Задача 5. За круглым столом сидят 12 человек — рыцари (которые всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Каждый из сидящих за столом произнес: «Напротив меня сидит лжец». Сколько всего лжецов сидит за столом?

Задача 8. Резидент одной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

Задача 10. В прошлом году каждый участник городской олимпиады обнаружил среди участников ровно семь знакомых. В этом году количество участников увеличилось на 17. Может ли каждый иметь среди участников ровно девять знакомых?

Задача 13. В каждой вершине n-угольника поставили 1 или -1. На каждой стороне написали произведение чисел в ее концах. Оказалось, что сумма этих произведений равна 0. Докажите, что n делится на 4.

Оглавление