Космология

Уравнение Фридмана. Эволюция вселенной.

1. Уравнения Фридмана

1.1. Введение

Мы будем рассматривать главным образом эволюцию вселенной и то, как меняются в следствии её расширения некоторые космологические и физические параметры, описывающие её.

При этом важно понимать характер расширения вселенной. Не объекты улетают все друг от друга, а растягивается само пространство. Например, представьте, что вы посадили несколько муравьёв на воздушный шарик и начали его надувать. Муравьи никуда не ползут, но при этом все удаляются друг от друга, потому что их пространство (поверхность шарика) растягивается. Важно заметить, что сами муравьи не увеличиваются. Примерно такой же характер и носит расширение вселенной, только оно происходит не в двумерном пространстве, а в трёхмерном. При этом силы притяжения внутри объекта также препятствуют его расширению (как и с муравьями).

Для начала введём некоторые понятия:

1) **Масштабный фактор** – величина, характеризующая относительный масштаб нашей вселенной в некоторый момент. Например, допустим, что в момент t_1 некоторая область пространства имела длину r_1, а масштабный фактор составлял a_1. В другой момент t_2 та же область имела длину уже r_2, а масштабный фактор составлял уже a_2. Тогда, верно:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

Как можно заметить, такое определение не даёт однозначного сопоставления момента времени и соответствующего масштабного фактора. Для этого нужен какой-то нормировочный момент времени. Чаще всего (но не всегда) за $a_0 = 1$ принимают нынешний момент. Тогда в прошлом масштабный фактор меньше 1, потому что вселенная тогда была меньше, а в будущем больше 1.

Если в какой-то момент масштабный фактор составлял, например, 0.5 это значит, что вселенная была в 2 раза меньше. Масштабный фактор (и другие величины) в нынешний момент (если не сказано иного) будем обозначать a_0.

2) **Красное смещение** – эффект увеличения длин волн (уменьшения частот) фотонов (голубым смещением называют обратный эффект). Механизм его возникновения в случае космологии достаточно прост: пока фотон летит вселенная расширяется, и вместе с ней растягивается и длина волны фотона.

Для количественного описания данного эффекта введём величину красного смещения (или просто красное смещение) z, равное отношению изменения длины волны к изначальной длине волны:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0}$$

Здесь λ_1 – длина волны принимаемого фотона, λ_0 – длина волны фотона в момент излучения. Вспомним, что $c = \nu\lambda$, где c – скорость света, ν – частота фотона, λ – его длина волны. Подставляя это, получим z через ν_0, ν_1:

$$z = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\frac{c}{\nu_1} - \frac{c}{\nu_0}}{\frac{c}{\nu_0}} = \frac{\nu_0 - \nu_1}{\nu_1}$$

Здесь ν_1 – частота принимаемого фотона, ν_0 – частота фотона в момент излучения. Отметим, что в знаменателе стоит частота уже для пришедших фотонов, в отличие от выражения через длины волн.

Также найдём связь между масштабным фактором вселенной в момент излучения фотона (a_1), масштабным фактором сейчас (a_0) и красным смещением фотона (z). Зная, что длина волны фотона растягивается как раз из-за расширения вселенной по определению масштабного фактора получим:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{a_0}{a_1}$$

Приняв $a_0 = 1$, переобозначив $a = a_1$ и немного преобразовав, получим:

$$z = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1 = \frac{1}{a} - 1$$

$$a = \frac{1}{1+z}$$

3) **Постоянная Хаббла** – относительное изменение масштабного фактора в единицу времени. Заметим, что это то же самое, что и относительное изменение расстояния (длины) в единицу времени.

$$H = \frac{da}{a \cdot dt} = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{r}}{r} = \frac{v}{r}\left[\frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}} \approx 3.1 \cdot 10^{19}\frac{1}{c}\right]$$

Здесь v стоит понимать как скорость расширения какой-то области пространства. Оказывается, что H одинакова во всей вселенной для фиксированного момента времени, но при этом меняется с течением времени (в масштабах нашей жизни мы считаем её неизменной). Значение постоянной Хаббла для данного момента H_0 мы знаем лишь с некоторой точностью (разные оценки отличаются на $5 - 10$ %). Мы будем считать её равной:

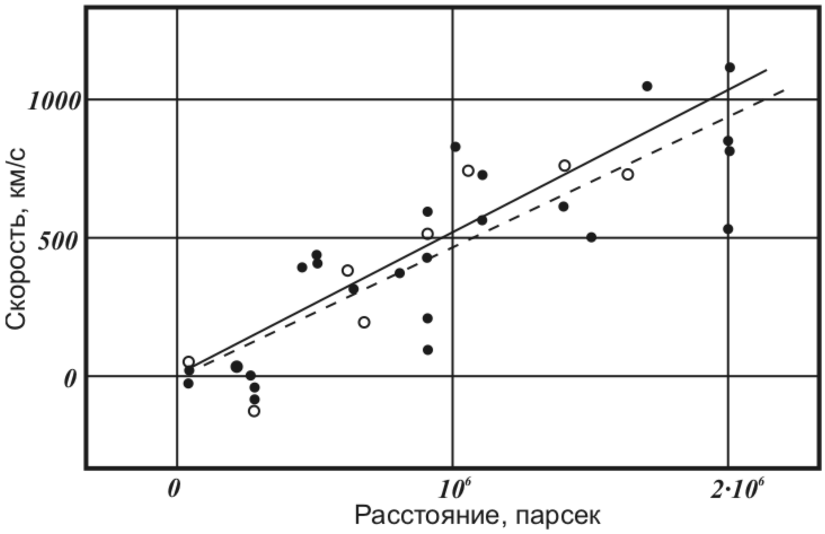
$$H_0 \approx 68\left[\frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}\right] \approx 2.2 \cdot 10^{-18}\left[\frac{1}{\text{с}}\right]$$

1.2. Закон Хаббла - Леметра

В 1927 Леметром, а потом и в 1929 году Хабблом (независимо друг от друга) был открыт **закон Хаббла - Леметра**, который по сути представлял собой линейную зависимость скорости удаления галактик от расстояния до них:

$$v = H_0 \cdot r$$

В формулировке Хаббла v – скорость удаления галактик от Земли, r – расстояние до этих галактик, H_0 – постоянная. Закон был открыт как эмпирический факт. Большую роль в открытии сыграли «стандартные свечи», объекты с известной светимостью, или со светимостью, которую можно определить, например, цефеиды. Скорость галактик измеряли при помощи эффекта Доплера. На графике представлены данные, предоставленные Хабблом в его работе.



Как видно из графика, первоначальное значение постоянной Хаббла оценивалось примерно в $500\frac{\text{км}}{c\cdot\text{ Мпк}}$, что отличается на порядок от общепринятого сейчас значения. Также виден достаточно большой разброс точек относительно прямой. Это произошло в основном по двум причинам.

1) Все (или почти все) взятые в работе галактики принадлежат местной группе галактик, и их собственные скорости вносят достаточно большой вклад.

2) При подсчёте расстояния до галактик не было учтено (или учтено неверно) поглощение света.

Отсюда сразу понятно, что закон Хаббла плохо выполняется для расстояний, соответствующим местной группе галактик. Его стоит применять для расстояний, больших 5 Мпк.

На самом деле, закон Хаббла напрямую следует из того определения, которое мы дали постоянной Хаббла (если принять на веру, что постоянная Хаббла – действительно одинакова везде в некоторый момент времени). По сути закон Хаббла доказывает, что условие равенства постоянной Хаббла во всей вселенной в некоторый момент времени выполняется (по крайней мере для всех областей пространства, на границе которых мы находимся). Таким образом, постоянная, найденная Хабблом (H_0) и постоянная Хаббла в нынешний момент из нашего определения – одна и та же величина.

Также важно отметить, что судя по всему, Хаббл получал скорости галактик исходя из их красного смещения и использовал для этого эффект Доплера. Однако эффект изменения длины волны происходит из-за расширения вселенной, а не процессов, на которых построен эффект Доплера, поэтому его использование в данном контексте было некорректно. Со временем оказалось, что для небольших расстояний формула зависимости скорости расширения и красного смещения совпадает с Доплеровской (мы это покажем позже), однако это скорее совпадение.

1.3 Уравнения Фридмана

В 1920-х годах Александр Фридман получил уравнения, которыми мы и будем задавать эволюцию нашей вселенной. В целом именно в такой модели вселенной мы и будем работать. Запишем **уравнения Фридмана**:

1) Уравнение энергии:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

2) Уравнение движения:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \cdot \left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

3) Уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H \cdot \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = -3 \cdot \frac{\dot{a}}{a} \cdot \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)$$

Здесь H – постоянная Хаббла, a – масштабный фактор, ρ – средняя плотность вселенной, P – давление, Λ – космологическая постоянная. k – гауссова кривизна пространства нашей вселенной:

Отметим, что мы считаем вселенную однородной на достаточно больших расстояниях. Для нас (по крайней мере пока) наибольшую важность представляет уравнение энергии, именно с ним мы буде в основном работать. Сначала немного его преобразуем:

$$1 = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} - \frac{kc^2}{a^2H^2} + \frac{\Lambda c^2}{3H^2}$$

Введём величину критической плотности (её физический смысл станет ясен чуть позже):

$$\rho_{\text{cr}} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Также разобьём ρ на компоненты, из которых она состоит – плотность материи (тёмной и барионной) ρ_m и плотность энергии излучения ρ_r. Тогда уравнение энергии приобразовывается следующим образом:

$$1 = \frac{\rho_m}{\rho_{\text{cr}}} + \frac{\rho_r}{\rho_{\text{cr}}} + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho_{\text{cr}}} - \frac{kc^2}{a^2H^2}$$

$$1 + \frac{kc^2}{a^2H^2} = \frac{\rho_m + \rho_r + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}}{\rho_{\text{cr}}}$$

Здесь видим, что в левой части по сути отношение плотностей разных составляющих нашей вселенной к критической плотности. Тогда сделаем ещё одну замену $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$, где ρ_Λ по сути является плотностью тёмной энергии. На самом деле уже на этом этапе виден смысл критической плотности. Действительно, для плоской вселенной получается, что:

$$\rho_{\text{cr}} = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda = \rho_\Sigma$$

Здесь ρ_Σ – полная плотность вселенной. А значит критическая плотность представляет собой плотность плоской вселенной (вселенной с нулевой кривизной). Тогда сразу видно, что $\frac{kc^2}{a^2H^2}$ по сути является поправкой к плотности вселенной на то, что вселенная не является плоской:

$$\rho_\Sigma = \rho_{\text{cr}} \cdot \left(1 + \frac{kc^2}{a^2H^2}\right)$$

Сделаем ещё несколько замен в уравнении энергии:

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_{\text{cr}}}\ , \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_{\text{cr}}}\ , \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\text{cr}}}\ , \quad \Omega_k = -\frac{kc^2}{a^2 \cdot H^2}$$

Сразу можем заметить:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$$

Тогда понятно, что по сути $\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda, \Omega_k$ представляют собой «вклады» материи, излучения, тёмной энергии и кривизны в плотность вселенной соответственно. Запишем уравнение для энергии в таком виде:

$$\rho_{\text{cr}} = \frac{3H^2}{8\pi G} = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + \Omega_k \cdot \rho_{\text{cr}}$$

Выберем произвольно некоторый момент времени t_0. Будем обозначать все величины, характеризующие вселенную в этот момент с индексом 0. Также зафиксируем масштабный фактор в этот момент $a_0 = 1$. Величины без индекса 0 будут характеризовать вселенную в другой произволно выбранный момент времени. Тогда получим:

$$\frac{\rho_{\text{cr}}}{\rho_{\text{cr}0}} = \frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + \Omega_k \cdot \rho_{\text{cr}}}{\rho_{\text{cr}0}}$$

$$\frac{H^2}{H_0^2}=\frac{\rho_m}{\rho_{0\mathrm{m}}}\cdot\frac{\rho_{0\mathrm{m}}}{\rho_{\mathrm{cr}0}}+\frac{\rho_r}{\rho_{0\mathrm{r}}}\cdot\frac{\rho_{0\mathrm{r}}}{\rho_{\mathrm{cr}0}}+\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{0\Lambda}}\cdot\frac{\rho_{0\Lambda}}{\rho_{\mathrm{cr}0}}+\Omega_k\cdot\frac{\rho_{\mathrm{cr}}}{\rho_{\mathrm{cr}0}}$$

Знаем, что по определению $\frac{\rho_{0\mathrm{m}}}{\rho_{\mathrm{cr}0}}=\Omega_{0\mathrm{m}}$, где $\Omega_{0\mathrm{m}}$ – «вклад» материи во вселенную в момент t_0. Функцию $\frac{\rho_m}{\rho_{0\mathrm{m}}}$ обозначим как f_m. Аналогично и с излучением, и с тёмной энергией. Итого:

$$\frac{H^2}{H_0^2}=\Omega_{0\mathrm{m}}\cdot f_m+\Omega_{0\mathrm{r}}\cdot f_r+\Omega_{0\Lambda}\cdot f_\Lambda-\frac{kc^2}{a^2\cdot H^2}\cdot\frac{H^2}{H_0^2}$$

$$\frac{H^2}{H_0^2}=\Omega_{0\mathrm{m}}\cdot f_m+\Omega_{0\mathrm{r}}\cdot f_r+\Omega_{0\Lambda}\cdot f_\Lambda+\Omega_{0\mathrm{k}}\cdot\frac{a_0^2}{a^2}$$

Осталось только найти функции f_m, f_r, f_Λ.

1) Случай f_m. Так как во вселенной материя имеет постоянную массу M изменение плотности материи определяется только изменением размера вселенной (масштабного фактора). Обозначив объём некоторой достаточно большой области вселенной за V, а её размер за R:

$$\frac{\rho_m}{\rho_{0\mathrm{m}}}=\frac{M\cdot V_0}{M_0\cdot V}\sim\frac{R_0^3}{R^3}\sim\frac{a_0^3}{a^3}$$

2) Случай f_r. Здесь ситуация аналогичная материи, за исключением того, что помимо увеличения объёма растягивается также и длина волны частиц, переносящих излучение. А для них мы знаем, что их энергия $\varepsilon=h\nu=h\frac{c}{\lambda}$. То есть энергия обратно пропорциональна длине волны. При этом число частиц мы считаем постоянным. Сохраняя обозначения из предыдущего пункта:

$$\frac{\rho_r}{\rho_{0\mathrm{r}}}=\frac{\varepsilon\cdot V_0}{\varepsilon_0\cdot V}\sim\frac{R_0^4}{R^4}\sim\frac{a_0^4}{a^4}$$

3) Случай f_Λ. По нашему определению: $\rho_\Lambda=8\pi G\Lambda c^2$. Тогда сразу видим, что она является постоянной, а значит $f_\Lambda=1$.

Теперь вернёмся к уравнению энергии. Вспомним, что $a_0=1$. Тогда уравнение принимает вид:

$$H^2=H_0^2\cdot\left(\Omega_{0\mathrm{m}}\cdot a^{-3}+\Omega_{0\mathrm{r}}\cdot a^{-4}+\Omega_{0\Lambda}+\Omega_{0\mathrm{k}}\cdot a^{-2}\right)$$

Именно это уравнение (в такой форме) мы и будем в основном использовать. Будем подразумевать его под уравнением Фридмана, если не сказано иное. Также можем записать его для плоской вселенной:

$$H^2 = H_0^2 \cdot \left(\Omega_{0\mathrm{m}} \cdot a^{-3} + \Omega_{0\mathrm{r}} \cdot a^{-4} + \Omega_{0\Lambda}\right)$$

2. Эволюция вселенной и Λ-CDM модель

2.1 Параметры модели и эпохи доминирования

Далее мы будем работать в модели Λ-CDM (Λ Cold Dark Matter), с добавлением излучения. Модель Λ-CDM подразумевает, что наша вселенная плоская (имеет кривизну 0) и состоит из барионной (обычной) материи, тёмной материи и тёмной энергии. Важно заметить, но нашу вселенную можно считать плоской лишь с какой-то точностью, однако современные измерения показывают, что модель с плоской вселенной даёт очень близкие к реальным результаты.

Уравнение Фридмана мы писали для произвольно выбранного момента, однако для рассмотрения эволюции вселенной удобней будет выбрать определённый момент (по крайней мере пока). Возьмём в качестве t_0 нынешний момент в жизни вселенной. В этом случае значения всех Ω_0 и H_0 были с некоторой точностью измерены. Мы будем полагать их значения такими:

$$H_0 \approx 68 \left[\frac{\text{км}}{\text{с}} \cdot \text{Мпк}\right]$$

$$\Omega_{0\mathrm{m}} \approx 0.31$$

$$\Omega_{0\mathrm{r}} \approx 0.9 \cdot 10^{-4}$$

$$\Omega_{0\Lambda} \approx 0.69$$

2.2 Эпохи доминирования

Для упрощения модели нам удобно разделить жизнь вселенной на эпохи доминирования различных её составляющих. Под этим мы будем подразумевать, что соответствующая Ω больше остальных. Уравнение Фридмана позволяет нам вычислить значения красного смещения, при которых сменялись эпохи доминирования.

Выразим значения Ω через Ω_0 и масштабный фактор a:

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_{\mathrm{cr}}} = \frac{\rho_m}{\rho_{\mathrm{cr0}}} \cdot \frac{\rho_{\mathrm{cr0}}}{\rho_{\mathrm{cr}}} = \Omega_{\mathrm{0m}} \cdot a^{-3} \cdot \frac{\rho_{\mathrm{cr0}}}{\rho_{\mathrm{cr}}}$$

Аналогично для остальных:

$$\Omega_r = \Omega_{\mathrm{0r}} \cdot a^{-4} \cdot \frac{\rho_{\mathrm{cr0}}}{\rho_{\mathrm{cr}}}$$

$$\Omega_\Lambda = \Omega_{0\Lambda} \cdot \frac{\rho_{\mathrm{cr0}}}{\rho_{\mathrm{cr}}}$$

Видим, что относительно друг друга при уменьшении масштабного фактора (удалении в прошлое) доля тёмной энергии уменьшается, доля материи и излучения увеличивается (по крайней мере в окрестности нынешнего момента времени). Из значений Ω_0 видим, что сейчас доминирует тёмная энергия. При этом очевидно, что отношения $\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}$ и $\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_r}$ монотонно уменьшаются и стремятся к 0 при устремлении масштабного фактора к 0. Это значит что до эпохи доминирования тёмной энергии была хотя бы одна другая эпоха доминирования (материи и излучения), а других быть не могло. В то же время отношения $\frac{\Omega_r}{\Omega_m}$ и $\frac{\Omega_r}{\Omega_\Lambda}$ монотонно увеличиваются и стремятся к бесконечности при устремлении масштабного фактора к 0, а значит в начале жизни нашей вселенной доминировало именно излучение.

Для начала найдём масштабные факторы (и красные смещения), на которых вклад излучения был равен вкладу остальных составляющих (каждой по отдельности):

$$\Omega_r = \Omega_m$$

$$\Omega_{\mathrm{0r}} \cdot a^{-4} \cdot \frac{\rho_{\mathrm{cr0}}}{\rho_{\mathrm{cr}}} = \Omega_{\mathrm{0m}} \cdot a^{-3} \cdot \frac{\rho_{\mathrm{cr0}}}{\rho_{\mathrm{cr}}}$$

$$\Omega_{\mathrm{0r}} \cdot a^{-1} = \Omega_{\mathrm{0m}}$$

$$a_{\mathrm{m\,=\,r}} = \frac{\Omega_{\mathrm{0r}}}{\Omega_{\mathrm{0m}}} \approx 0.0003$$

$$z_{\mathrm{m=r}} = \frac{1}{a_{\mathrm{m=r}}} - 1 \approx 3400$$

Аналогично с тёмной энергией:

$$\Omega_{0\mathrm{r}} \cdot a^{-4} = \Omega_{0\Lambda}$$

$$a_{\Lambda=\mathrm{r}} = \left(\frac{\Omega_{0\mathrm{r}}}{\Omega_{0\Lambda}}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0.11$$

$$z_{\Lambda=\mathrm{r}} = \frac{1}{a_{\Lambda=\mathrm{r}}} - 1 \approx 8.4$$

Видим, что равенство вкладов для излучения был гораздо раньше с материей, поэтому ввиду монотонности функции роста вкладов друг относительно друга можем сделать вывод о том, что после эпохи доминирования излучения настала эпоха доминирования материи ($z_{\mathrm{m=r}} \approx 3400$), а после неё эпоха доминирования тёмной энергии. Теперь найдём на каком масштабном факторе (красном смещении) произошёл переход от доминирования материи к доминированию тёмной энергии. Аналогично с предыдущими решениями:

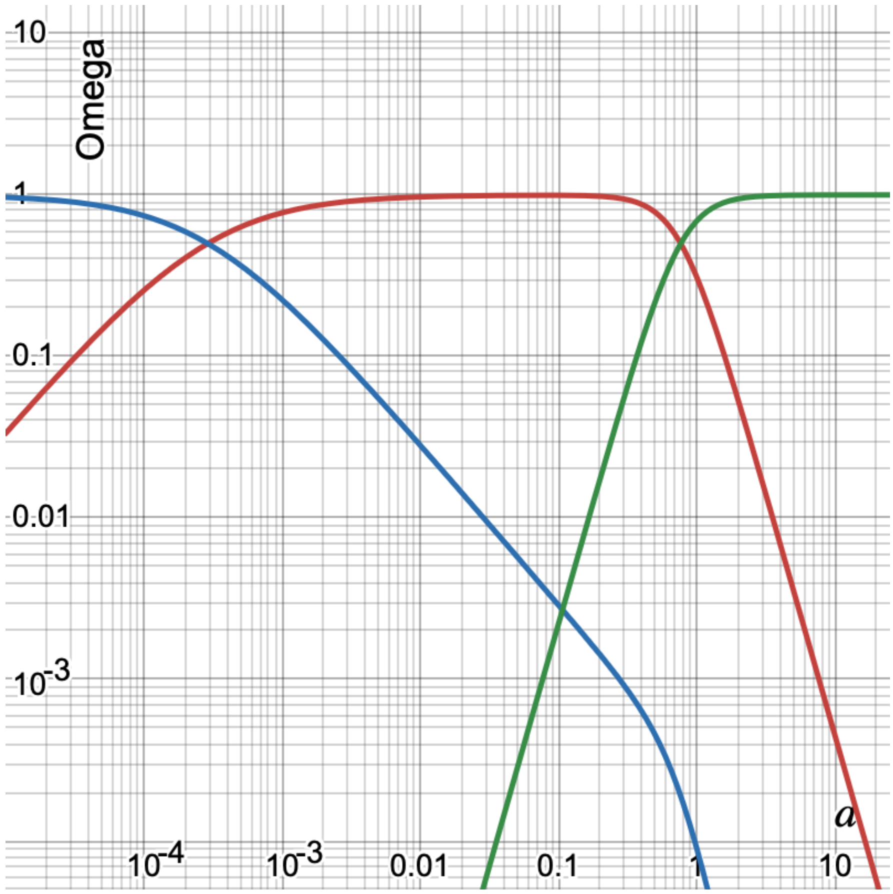
$$\Omega_{0\mathrm{m}} \cdot a^{-3} = \Omega_{0\Lambda}$$

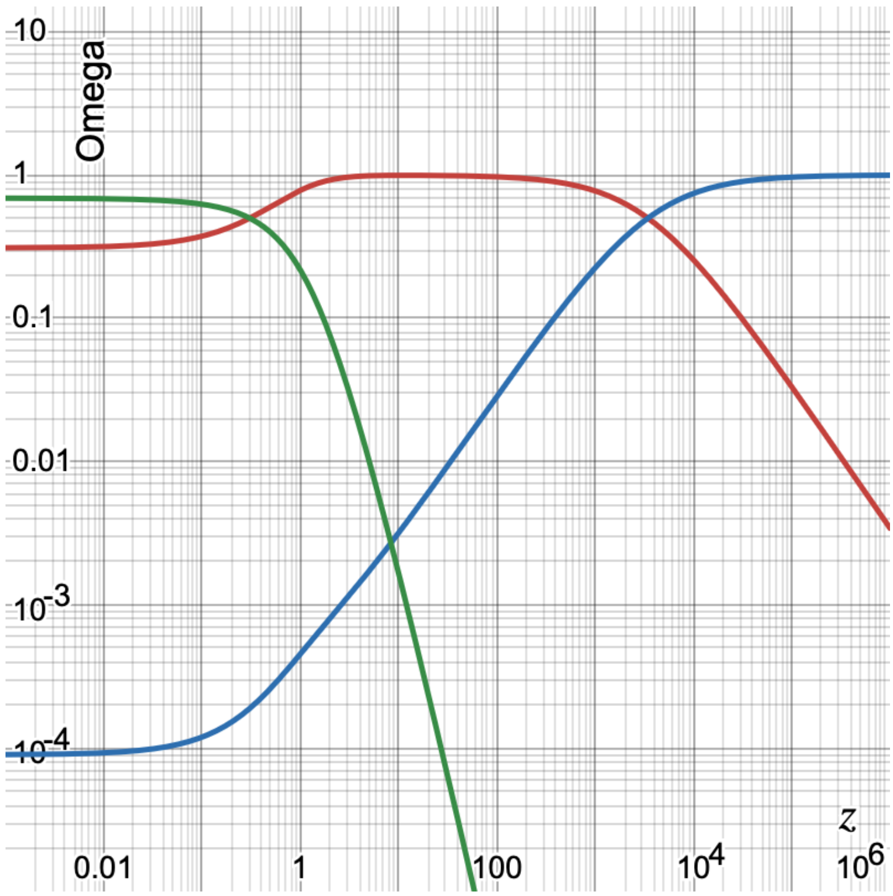
$$a_{\Lambda=\mathrm{m}} = \left(\frac{\Omega_{0\mathrm{m}}}{\Omega_{0\Lambda}}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.77$$

$$z_{\Lambda=\mathrm{m}} = \frac{1}{a_{\Lambda=\mathrm{m}}} - 1 \approx 0.31$$

Видно, что переход произошёл, когда вселенная была не сильно меньше, чем сейчас. Посмотрим также, что будет в будущем. Отношения $\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}$ и $\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_r}$ монотонно увеличиваются, при увеличении масштабного фактора, а значит вся оставшаяся жизнь вселенной пройдёт при доминировании тёмной энергии.

На графиках изображены зависимости разных вкладов от масштабного фактора (первый график) и красного смещения (второй график), оси на обоих графиках – логарифмические. Красным обозначается вклад материи, синим – вклад излучения, а зелёным – вклад тёмной энергии.


Omega
10
1
0.1
0.01
10-3
a
10-4
10-3
0.01
0.1
1
10


Omega
10
1
0.1
0.01
10-3
10-4
z
0.01
1
100
104
106

2.3 Эволюция вселенной

Для описания эволюции вселенной необходимо найти зависимость масштабного фактора от времени. Однако в общем виде это сделать очень сложно. Поэтому будем выводить эти зависимости в модели, где одна из составляющих нашей вселенной доминирует. Здесь везде, как и раньше под индексом 0 понимается момент, когда масштабный фактор равен 1.

Начнём с доминирования **тёмной энергии**. Для этого необходимо просто расписать уравнения Фридмана, написанного для доминирования одного из составляющих. Под этим мы будем подразумевать, что можно писать только одну из Ω_0, при этом Ω_0 будет брать равной 1, так как считаем что вселенная по большей части состоит именно из этого компонента.

$$H^2 = H_0^2 \cdot (\Omega_{0\Lambda})$$

$$\left(\frac{da}{a \cdot dt}\right) = H_0 \cdot (1)$$

$$\int_{a_1}^{a(t)} \frac{da}{a} = \int_{t_1}^{t} H_0(dt)$$

Здесь под индексам 1 подразумеваются некоторый момент, который происходил (произойдёт) во время соответствующего доминирования. Зачастую удобно взять в качестве момента 1 начало доминирования. Заметим, также, что в такой модели постоянная Хаббла действительно не меняется. Поэтому в качестве H_0 можно взять значение постоянной Хаббла в любой момент нашей эпохи доминирования тёмной энергии.

$$\ln\left(\frac{a(t)}{a_1}\right) = H_0 \cdot (t - t_1)$$

$$a(t) = a_1 \cdot e^{H_0 \cdot (t - t_1)} \sim e^t$$

Мы получили, что вселенная при доминировании тёмной энергии расширяется экспоненциально. Теперь рассмотрим вселенную с доминированием **материи**.

$$H^2 = H_0^2 \cdot (\Omega_{0\mathrm{m}} \cdot a^{-3})$$

$$\left(\frac{da}{a\cdot dt}\right) = H_0 \cdot \left(1 \cdot a^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\int_{a_1}^{a(t)} \sqrt{a} da = \int_{t_1}^{t} H_0 \cdot dt$$

Отсюда несложно получить:

$$\frac{2}{3} a(t)^{\frac{3}{2}} - a_1^{\frac{3}{2}} = H_0 \cdot (t - t_1)$$

$$a(t) = \left(a_1^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \cdot H_0 \cdot (t - t_1)\right)^{\frac{2}{3}} \sim t^{\frac{2}{3}}$$

Рассмотрим также вселенную с доминированием **излучения**.

$$H^2 = H_0^2 \cdot \left(\Omega_{0\mathrm{r}} \cdot a^{-4}\right)$$

$$\left(\frac{da}{a\cdot dt}\right) = H_0 \cdot \left(1 \cdot a^2\right)$$

$$\int_{a_1}^{a(t)} a da = \int_{t_1}^{t} H_0 \cdot dt$$

Отсюда несложно получить:

$$\frac{1}{2}\left(a(t)^2 - a_1^2\right) = H_0 \cdot (t - t_1)$$

$$a(t) = \left(a_1^2 + 2 \cdot H_0 \cdot (t - t_1)\right)^{\frac{1}{2}} \sim t^{\frac{1}{2}}$$

Для вселенной с доминированием материи и излучения получили, что вселенная расширяется по степенному закону.

3. Расстояния в космологии

3.1 Виды расстояний

1) **Сопутствующее расстояние** – величина, соответствующая реальному расстоянию от одного объекта до другого (измеренному, например очень большой линейкой) в некоторый фиксированный момент времени t_0, равный для обоих объектов. При этом сопутствующее расстояние не изменяется при

расширении вселенной, координатная сетка этого расстояния ''растягивается'' как бы вместе с вселенной. Как правило за t_0 удобно взять нынешний момент времени. Обозначим это расстояние как r_c.

Рассмотрим путь, который проходит свет от объекта A до объекта B (считаем, что свет «вышел» от объекта A в момент t_1 и «пришёл» к объекту B в момент t_0). Именно по этой траектории мы и будем измерять расстояние, так как она является кратчайшей. Однако некорректно взять за сопутсвующее расстояние длину пути который прошёл свет ($c \cdot (t_0 - t_1)$), потому что в процессе пути вселенная расширялась, а нам нужно расстояние именно для момента t_0.

Тогда, чтобы получить сопутствующее расстояние нам нужно просто в каждый момент времени, когда двигался свет отнормировать расстояние, которое он прошёл на масштаб, который у вселенной в момент t_0. Так как в каждый момент времени масштабный фактор во вселенной отличается разобьём путь света на отрезки длиной $c \cdot dt$, который свет проходил, соответственно, за dt, и каждый отрезок отдельно отнормируем на момент t_0, а потом просто просуммируем.

Из определения масштабного фактора:

$$dr_{\text{c}} = \frac{c \cdot dt}{a(t)} a(t_0)$$

Здесь dr – расстояние, которое прошёл свет в момент t за dt, отнормированное на момент времени t_0. Теперь нам осталось просто сложить все эти отрезки. Получаем:

$$r_c = \int_{t_1}^{t_0} dr_{\text{c}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c \cdot dt}{a(t)} a(t_0) = a(t_0) \int_{t_1}^{t_0} \frac{c \cdot dt}{a(t)}$$

2) **Собственное расстояние** – величина, соответствующая реальному расстоянию от одного объекта до другого (измеренному, например очень большой линейкой) в некоторый момент времени, равный для обоих объектов. Собственное расстояние, в отличии от сопутствующего изменяется при расширении вселенной, так как оно учитывает расширение вселенной. Обозначим это расстояние как r_p.

При этом несложно заметить, что в момент времени t_0 (и только тогда) сопутствующее и собственное расстояния совпадают.

Собственное расстояние вычисляется аналогично сопутствующему, с той лишь разницей, что оно измеряется не для фиксированного момента t_0, а вообще для любого момента t_p. Проводя аналогичные рассуждения получим:

$$r_p = \int_{t_1}^{t_p} dr_p = \int_{t_1}^{t_p} \frac{c \cdot dt}{a(t)} a(t_p) = a(t_p) \int_{t_1}^{t_p} \frac{c \cdot dt}{a(t)}$$

3) **Угловое расстояние** – это такое расстояние, при наблюдении с которого объект с линейным размером D имел бы угловой размер θ (в Евклидовой геометрии, если бы вселенная не расширялась). Обозначим это расстояние как r_a. Для малых углов (что почти всегда справедливо в космологии):

$$r_a = \frac{D}{\theta}$$

4) **Фотометрическое расстояние** – это такое расстояние, при наблюдении с которого объект со светимостью L имел бы освещённость E (в Евклидовой геометрии, если бы вселенная не расширялась). Обозначим это расстояние как r_f.

$$r_f = \sqrt{\frac{L}{4\pi E}}$$

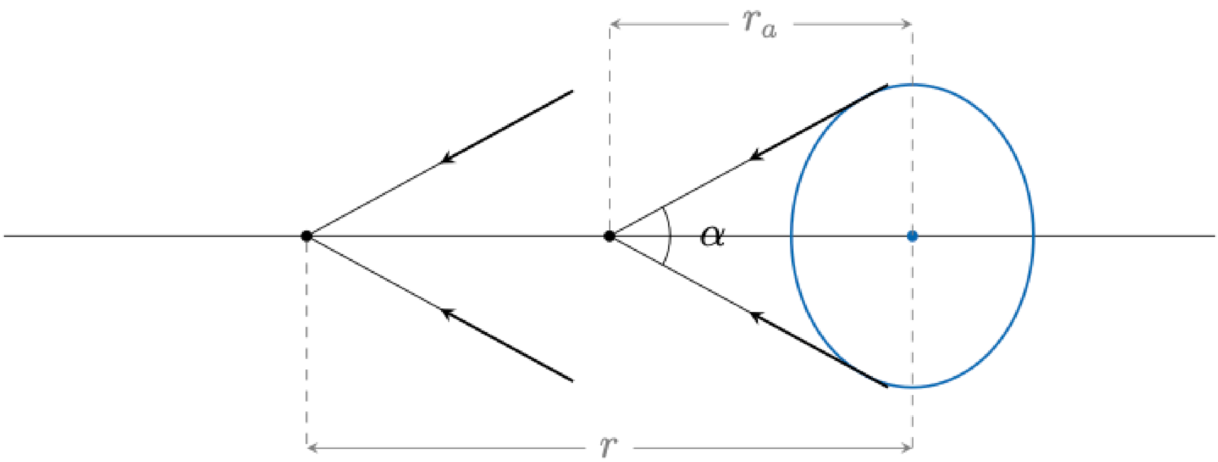
3.2 Связь разных расстояний между собой

Проще всего записать связь сопутствующего и собственного расстояний. Действительно, в момент t_0 они равны, а потом сопутствующее остаётся таким же, а собственное увеличивается вместе с расширением вселенной. Значит их отношение будет просто равно отношению масштабных факторов:

$$\frac{r_c}{r_p} = \frac{a(t_0)}{a(t_p)}$$

Здесь t_p – момент, когда мы измеряем собственное расстояние. Теперь свяжем угловое и фотометрическое расстояния с собственным. Начнём с углового.

Пусть мы наблюдаем некоторый объект. Рассмотрим принятые нами фотоны, которые были излучены краями объекта. Угол между их траекториями α должен и будет равен угловому размеру объекта. При этом этот угол должен оставаться постоянным при расширении вселенной, так как она расширяется во все стороны одинаково.



Значит этот угол будет равен истинному (если бы свет доходил мгновенно) угловому размеру галактики в момент, когда фотоны были излучены. Получается, что угловое расстояние в точности равно собственному расстоянию в момент, когда фотоны были излучены. Тогда, считая, что сейчас $a_0 = 1$ получаем:

$$r_a = r_p \cdot a(t) = \frac{r_p}{1+z}$$

Теперь перейдём к фотометрическому расстоянию. Сначала выразим его через собственное расстояние в момент, когда приходящие к нам фотоны были излучены. Освещённость пропорциональна плотности энергии, а она в свою очередь, как мы знаем, пропорциональна a^{-4}.

Тогда можем сравнить приходящую освещённость от объекта E и то, какая бы приходила от него освещённость E_e, если бы вселенная не расширялась и расстояние между наблюдателем и объектом было равно собственному расстоянию между нами в момент, когда фотоны были излучены. Получаем, с учётом того, что сейчас $a_0 = 1$:

$$\frac{E_e}{E} = a(t)^{-4} = \sqrt{\frac{r_f}{r_e}}$$

Здесь r_e – как раз собственное расстояние в момент, когда фотоны были излучены. Тогда получаем:

$$\frac{r_f}{r_e} = a(t)^{-2}$$

Осталось только выразить r_e через собственное расстояние в данный момент r_p. Зная, что $r_e = a \cdot r_p$ получаем:

$$r_f = r_p \cdot a(t)^{-1} = r_p \cdot (1 + z)$$

3.3 Зависимость расстояния от красного смещения

Найдём зависимость собственного расстояния от красного смещения объекта (или масштабных факторов во вселенной, когда был излучен пришедший к нам фотон и когда мы его приняли). Однако в общем виде это сделать сложно, так как зависимость масштабного фактора от времени достаточно сложно выражается. Поэтому будет получать зависимость в модели, что во вселенной доминирует одна из составляющих, для этих случаев у нас уже получены зависимости $a(t)$. Здесь, опять же, индекс 0 соответствует такому моменту, что масштабный фактор равен единице.

Начнём с вселенной, где доминирует **тёмная энергия**. Как мы уже знаем:

$$r_p = a(t_p) \int_{t_1}^{t_p} \frac{c \cdot dt}{a(t)} = a(t_p) \int_{t_1}^{t_p} \frac{c \cdot dt}{a(t_1) \cdot e^{H_0 \cdot (t - t_1)}} = \frac{\mathrm{c} \cdot a(t_p)}{a(t_1)} \int_{t_1}^{t_p} \frac{dt}{e^{H_0 \cdot (t - t_1)}}$$

Здесь t_1 – момент, когда фотон был излучен, а t_p – момент, когда мы его принимаем. Интегрируя, получим:

$$r_p = \frac{\mathrm{c} \cdot a(t_p)}{a(t_1)} \int_{t_1}^{t_p} \frac{dt}{e^{H_0 \cdot (t - t_1)}} = -\frac{\mathrm{c} \cdot a(t_p)}{a(t_1) \cdot H_0} e^{-H_0 \cdot (t - t_1)} \Big|_{t_1}^{t_p} = \frac{\mathrm{c} \cdot a(t_p)}{a(t_1) \cdot H_0} \left(1 - e^{-H_0 \cdot (t_p - t_1)}\right)$$

Теперь сделаем обратный переход, заметив, что $\frac{a(t_1)}{a(t_p)} = e^{-H_0 \cdot (t_p - t_1)}$. Тогда:

$$r_p = \frac{\mathrm{c} \cdot a(t_p)}{a_1 \cdot H_0} \left(1 - \frac{a(t_1)}{a(t_p)}\right) = \frac{c}{H_0} \left(\frac{a(t_p)}{a(t_1)} - 1\right)$$

Заметим, что $\frac{a(t_p)}{a(t_1)} = z + 1$. Покажем это. Рассмотрим фотон, вылетевший в момент t_1 и прилетевший в момент t_p. Для его длины волны будет справедливо:

$$\frac{\lambda(t_p)}{\lambda(t_1)} = \frac{a(t_p)}{a(t_1)}$$

При этом по определению красного смещения:

$$z=\frac{\lambda(t_p)-\lambda(t_1)}{\lambda(t_1)}=\frac{\lambda(t_p)}{\lambda(t_1)}-1=\frac{a(t_p)}{a(t_1)}-1$$

Перенеся единицу вправо получим то, что и было нужно. Теперь подставим это:

$$r_p=\frac{c}{H_0}\cdot((z-1)-1)=\frac{c\cdot z}{H_0}$$

Мы получили выражение для $r_p(z)$. Интересно, что из определения постоянной Хаббла $v=H\cdot r$. Тогда можем получить:

$$v=H_0\cdot r=c\cdot z$$

Отсюда получается, что $v=c\cdot z$, что совпадает с тем, что получается из эффекта Доплера. Однако важно понимать, что это только совпадение, в реальности мы видим, что это получается из совсем других причин. Далее мы увидим, что это оказывается справедливо только при доминировании тёмной энергии.

Теперь найдём зависимость $r_p(z)$ для вселенной, в которой доминирует **материя**. Проводя рассуждения, аналогичные случаю с тёмной энергии, получим:

$$r_p=a(t_p)\int_{t_1}^{t_p}\frac{c\cdot dt}{a(t)}=a(t_p)\cdot\int_{t_1}^{t_p}\frac{c\cdot dt}{\left(a(t_1)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\cdot H_0\cdot(t-t_1)\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$r_p=\frac{3\cdot a(t_p)\cdot c}{\left(\frac{3H_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\frac{2}{3H_0}a(t_1)^{\frac{3}{2}}+(t-t_1)\right)^{\frac{1}{3}}\Bigg|_{t_1}^{t_p}$$

$$r_p=\frac{3\cdot a(t_p)\cdot c}{\left(\frac{3H_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\left(\frac{2}{3H_0}a(t_1)^{\frac{3}{2}}+(t_p-t_1)\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{2}{3H_0}\right)^{\frac{1}{3}}a(t_1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Теперь вернёмся к записи через масштабный фактор:

$$r_p=(3\cdot a(t_p)\cdot c)\cdot\left(\left(\frac{2}{3H_0}\right)\left(a(t_1)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{3H_0}{2}\right)(t_p-t_1)\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{2}{3H_0}\right)a(t_1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$r_p = \left(\frac{2 \cdot a(t_p) \cdot c}{H_0}\right) \cdot \left(\left(a(t_1)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \cdot H_0 \cdot (t_p - t_1)\right)^{\frac{1}{3}} - a(t_1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$r_p = \left(\frac{2 \cdot a(t_p) \cdot c}{H_0}\right) \cdot \left(a(t_p)^{\frac{1}{2}} - a(t_1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Вспоминаем, что $\frac{a(t_p)}{a(t_1)} = z + 1$. Тогда:

$$r_p = a(t_p)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2c}{H_0} \cdot \left(1 - \frac{a(t_1)^{\frac{1}{2}}}{a(t_p)^{\frac{1}{2}}}\right) = a(t_p)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2c}{H_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)$$

Как правило удобно взять t_p как нынешний момент, причём $a(t_p)$ принять равным 1. Тогда получаем:

$$r_p = \frac{2c}{H_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)$$

Осталось сделать это для вселенной, в которой доминирует **излучение**:

$$r_p = a(t_p) \int_{t_1}^{t_p} \frac{c \cdot dt}{a(t)} = a(t_p) \cdot \int_{t_1}^{t_p} \frac{c \cdot dt}{\left(a(t_1)^2 + 2 \cdot H_0 \cdot (t - t_1)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$r_p = \frac{2 \cdot a(t_p) \cdot c}{(2H_0)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{1}{2H_0} a(t_1)^2 + (t - t_1)\right)^{\frac{1}{2}} \Bigg|_{t_1}^{t_p}$$

$$r_p = (2 \cdot a(t_p) \cdot c) \cdot \left(\left(\left(\frac{1}{2H_0}\right)^2 a(t_1)^2 + \left(\frac{1}{2H_0}\right)(t_p - t_1)\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2H_0} a(t_1)\right)$$

Возвращаемся к записи через масштабный фактор:

$$r_p = \frac{a(t_p) \cdot c}{H_0} \cdot \left(\left(a(t_1)^2 + 2 \cdot H_0 \cdot (t_p - t_1)\right)^{\frac{1}{2}} - a(t_1)\right)$$

$$r_p = \frac{a(t_p) \cdot c}{H_0} \cdot (a(t_p) - a(t_1))$$

Опять же $\frac{a(t_p)}{a(t_1)} = z + 1$. Итого, получаем:

$$r_p = \frac{a\left(t_p\right)^2 \cdot c}{H_0} \cdot \left(1 - \frac{a\left(t_1\right)}{a\left(t_p\right)}\right) = \frac{a\left(t_p\right)^2 \cdot c}{H_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+z}\right)$$

Считая, что t_p – нынешний момент, взяв $a\left(t_p\right)$ имеем:

$$r_p = \frac{c}{H_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+z}\right)$$

Интересно, что при малых z все формулы вырождаются в одну:

Для доминирования материи:

$$r_p = \lim_{z\to 0} \frac{2c}{H_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{2c}{H_0} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{z}{2}\right)\right) = \frac{c \cdot z}{H_0}$$

Для доминирования излучения:

$$r_p = \lim_{z\to 0} \frac{c}{H_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+z}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{2c}{H_0} \cdot (1 - (1 - z)) = \frac{c \cdot z}{H_0}$$

Для доминирования тёмной энергии:

$$r_p = \lim_{z\to 0} \frac{cz}{H_0} = \frac{c \cdot z}{H_0}$$