И.В.Раскина, Д.Э.Шноль

Логические задачи

Школьные Математические Кружки

И. В. Раскина, Д. Э. Шноль

Логические задачи

Электронное издание

Издательство МЦНМО
Москва, 2016

УДК 51(07)
ББК 22.1
Р24

Раскина И. В., Шноль Д. Э.
Логические задачи
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2016
120 с.
ISBN 978-5-4439-2425-0

Одиннадцатая книжка из серии «Школьные математические кружки» посвящена логическим задачам для начинающих: о знаменитом острове рыцарей и лжецов, о ситуациях с запутанными показаниями свидетелей, поиске виновника и выяснении, кто есть кто. Разработки шести занятий ориентированы на кружок в 5–7 классах. Их дополняют ещё 50 оригинальных задач со свежими и яркими формулировками. Все задачи снабжены подсказками, ответами и решениями.

Для учителей математики, руководителей математических кружков.

Подготовлено на основе книги: *И. В. Раскина, Д. Э. Шноль.* Логические задачи. — 3-е изд., исправл. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-0651-5.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2425-0

Предисловие

Серия «Школьные математические кружки» предполагает посвятить несколько выпусков решению логических задач. Вы держите в руках один из них.

Вам предлагаются шесть тематических занятий математического кружка первого-второго года обучения. Первые пять занятий разработаны в традиционной для данной серии форме. В начале каждого занятия мелким шрифтом напечатаны методические рекомендации. Затем, после краткого вступления, подробно разбираются несколько ключевых задач. Учитель может поступить с ними поразному. Не обязательно обсуждать их все подряд в начале занятия. Какие-то можно сначала предложить порешать самостоятельно (возможно, дома). Имеет смысл также после разбора одной-двух задач дать каждому ученику возможность поработать в своем темпе над аналогичными и лишь после этого разобрать следующую ключевую задачу (над которой к этому моменту наиболее быстрые успеют поломать голову).

Далее следуют задачи для самостоятельного решения. Их количество, как правило, избыточно для одного занятия кружка. Это сделано сознательно: подобрать универсальный набор задач для кружка произвольного уровня невозможно. Учитель может рекомендовать ребятам решать определённые задачи, исходя из их подготовки. Задачи расположены в порядке усложнения. Можно решать их подряд, тогда большинство кружковцев успеют потренироваться на более простых задачах, но до самых сложных задач не дойдут.

Шестое занятие — игровое, методика его проведения подробно описана в соответствующей главе.

Решение многих задач школьнику 5–6 класса трудно записать и гораздо легче рассказать. Чтобы каждый успел высказаться, учитель может проверить устные решения у первых 2–3 учеников, назначить их экспертами по данной задаче, а затем остальных отправлять рассказывать своё решение экспертам. Обычно более сильные ученики с удовольствием выступают в роли экспертов, а подчас и более дотошно слушают решение.

В конце книги имеется список дополнительных задач, не вошедших в занятия, но идейно близких к ним.

Почти ко всем задачам приведены ответы и решения, а к некоторым ещё и подсказки и комментарии. Подсказки, ответы и решения отнесены в конец книги и отделены друг от друга для удобства школьников, работающих с книгой самостоятельно. Если решить задачу никак не удаётся, посмотрите подсказку. Когда ответ получен, проверьте его и при необходимости найдите ошибку. Если ответ верен, не поленитесь прочитать решение и сравнить его со своим.

* * *

Задачи первого и шестого занятий большей частью основаны на комбинации верных и неверных утверждений. К ним близок распространённый сюжет про остров рыцарей и лжецов, развёрнутый на четвёртом и пятом занятиях. На втором и третьем занятиях подробно рассматривается решение задач на установление соответствия между двумя множествами (такие задачи иногда называют сюжетными). Наибольшее внимание уделено методу полного перебора и использованию графов и таблиц.

Разумеется, за шесть занятий невозможно даже вкратце познакомиться с основными типами логических задач. В вышедших ранее книжках нашей серии представлены задачи на графы и на поиск алгоритма (в частности, на взвешивания, переливания и переправы). Работу с высказываниями, содержащими слова «и», «или», «если..., то...», «все», «некоторые» и т. п., мы отложили до следующих выпусков.

Что же объединяет столь различные задачи? Пожалуй, прежде всего то, что для их решения не требуется ни вычислений, ни специальных математических знаний, ни знакомства с хитроумными олимпиадными методами. Отсутствие препятствий технического характера позволяет сконцентрироваться на способе рассуждений как таковом. Поэтому логические задачи являются идеальным материалом для развития математического мышления. В этом состоит краткий ответ на вопрос, зачем вообще учить школьников решать логические задачи. Поясним сказанное подробнее.

Для школьника сама постановка вопроса о необходимости доказательства в логических задачах более естественна, чем в геометрии, на которую традиционно взваливается ноша логического ликбеза. Попытка начать с простейших утверждений, но при этом рассуждать строго приводит семиклассников в недоумение: зачем доказывать, что треугольники равны, если это и так видно по чертежу? А логические задачи благодаря опоре на жизненный опыт и воображение достаточно нетривиальны с самого начала, поэтому этап специальных упражнений, в которых ответ очевиден и его подробное обоснование ученику представляется искусственным, не требуется.

Отсутствие технических сложностей имеет и то преимущество, что борьба с ними не может в сознании ученика подменить собой доказательство. При решении, скажем, уравнений ученик тратит на тождественные преобразования столько сил и бумаги, что не сомневается в исполнении долга. Тем более что письменного обоснования равносильности преобразований не требуется.

При решении логических задач, напротив, не требуется ничего, кроме обоснования ответа. Школьники привыкли, что в математических задачах перед сообщением ответа надо хоть что-то сказать или написать. Поскольку никаких арифметических или других формальных действий логические задачи не предполагают, дети при записи решений и устных ответах постепенно приучаются ко всё более внятным доказательствам.

Выяснив зачем, вы начинаете понимать, когда и как лучше всего использовать логические задачи. Самое главное: навыки решения не должны превращаться в самоцель. Результатом обучения является математическая культура, а не умение выяснять, кто из богатырей убил Змея Горыныча, или узнавать за один вопрос, где деревня рыцарей. Отсюда вытекают рекомендации по использованию логических задач вообще и данной книги в частности.

1. Логические задачи особенно уместны на занятиях кружка в 5, 6 и отчасти в 7 классе. Они служат хорошей подготовкой к осознанному изучению геометрии. Кроме того, пяти- и шестиклассники ценят занимательность сюжета и охотно обсуждают самое сложное и интересное с родителями.

2. При решении логических (как, впрочем, и других) задач не стоит ограничивать учеников в выборе метода. Если целью занятия является именно отработка метода, то надо стараться предлагать такие задачи, где этот метод наиболее удобен. Но если ученик всё же решает посвоему — дайте ему возможность довести дело до конца, а потом познакомьте с другим подходом.

3. Полезнее всего не изучать методично всё новые типы логических задач, а решать разнообразные задачи понемногу в течение всего года. Конечно, каждую новую идею (скажем, необходимость доводить перебор до конца, даже если случай, удовлетворяющий условию, уже найден) вскоре после первого знакомства полезно применить несколько раз. Но если школьники решили на занятии не все задачи (а такое всегда будет происходить!), вовсе не обязательно немедленно «ликвидировать пробелы». Лучше оставить что-то «на потом». Тем более не стоит посвящать логическим задачам много занятий кружка под-

ряд. Авторы весьма приветствуют растаскивание тщательно скомпонованных нами занятий на фрагменты, сочетающиеся с задачами на другие темы. Логические задачи хорошо предлагать и по одной, вне тематических занятий.

4. Необходимость доказательства лучше всего демонстрируют задачи с неполными данными, имеющие неоднозначный ответ. Обращайте внимание детей на такие задачи.

5. Некоторые задачи хорошо решать в парах и в группах. Часто получается сыграть маленькую ролевую игру по сюжету задачи (об этом подробно написано в методических указаниях к занятиям). Эти формы работы нравятся школьникам 5–7 класса и стимулируют их интерес к математике.

6. Советуйте детям обсуждать наиболее интересные задачи с членами семьи. Взрослые люди, далекие от математики, порой интересуются головоломками не меньше, а решают их нисколько не лучше, чем дети. Именно логические задачи могут стать поводом для равноправного, а следовательно, радостного и плодотворного семейного общения.

7. Поощряйте детей сочинять собственные задачи. Для детей (а также их родителей, см. предыдущий пункт) с гуманитарным складом ума эта деятельность может оказаться наиболее привлекательной и эффективной. Разумеется, придумывание задач не должно становиться обязательным заданием для не склонных к литературному творчеству детей.

Мы надеемся, что в этой книжке вы найдёте немало задач, решение которых доставит вам настоящее удовольствие.

Авторы благодарны А. В. Шаповалову за подробные обсуждения и предложенные задачи.

Занятие 1

Перебор в логических задачах

> Перебери мешок фасоли, белую отдели от коричневой, посади под окнами семь розовых кустов. А главное — познай самое себя...
>
> *Евгений Шварц*

Это занятие предназначено для начинающих математиков любого возраста, включая учеников начальной школы с хорошо развитым навыком чтения. Почти во всех задачах персонажи делают верные и неверные утверждения. К подобным задачам школьники обычно без труда подбирают правильный ответ и могут проверить, что он соответствует условию. Основная цель занятия — продемонстрировать, что в математической задаче важно *не только найти ответ, но и доказать его единственность*. Необходимость такого доказательства подчеркивается в задаче 1.2 (где логическая неаккуратность связывается с судебной ошибкой) и задаче 1.11 (в которой обычно угадывают только один из двух возможных ответов).

Доказать отсутствие других ответов можно с помощью *полного перебора*. В задаче 1.3 обсуждается, как удачная организация перебора укорачивает решение.

Полный перебор позволяет верно решить задачу, не вникая в тонкости, и этим удобен. Но, как и всякий метод, он не универсален. Внимательное чтение условия задачи позволяет порой найти другое, более изящное решение (см. решение 3 задачи 1.1 и задачу 1.12). Подробнее об этом речь пойдёт на двух следующих занятиях.

Побочный сюжет, который учитель может при желании затронуть, — изоморфизм задач. К задаче 1.8 в задачнике в конце книги предлагается «двойник» — задача Д14. Её можно предложить решить дома или на следующем занятии, а потом сравнить эти две задачи и убедиться, что с литературной точки зрения они не похожи, но математически абсолютно идентичны. Работу с изоморфными задачами на следующем занятии предлагается развить в самостоятельное придумывание задач.

Подбор или полный перебор?

Задача 1.1. До царя дошла весть, что кто-то из трёх богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь им всем явиться ко двору. Молвили богатыри:

Илья Муромец: «Змея убил Добрыня Никитич».

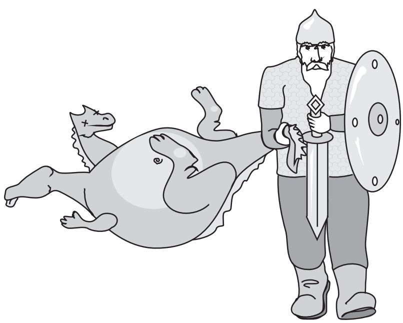
Добрыня Никитич: «Змея убил Алёша Попович».

Алёша Попович: «Я убил змея».

Известно, что только один богатырь сказал правду, а двое слукавили. Кто убил змея?

Первое «решение». Змея убил Добрыня. Тогда Илья сказал правду, а Добрыня и Алёша слукавили. Всё сходится.

Комментарий. Задача «решена» подбором: приведён ответ и доказано, что он удовлетворяет условию. Но этого недостаточно: надо ещё проверить, единственный ли он! Поэтому пока задачу нельзя считать решённой.



Второе решение. Рассмотрим по очереди, кто мог убить змея. Если Илья Муромец, то все трое сказали неправду, что противоречит условию. Если Добрыня Никитич, то правду сказал Илья, а Алёша и Добрыня слукавили. Если Алёша, то и Добрыня, и Алёша сказали правду, а это тоже противоречит условию. Итак, убить змея мог только Добрыня.

Комментарий. Вот теперь задача решена не подбором, а *полным перебором*: проверены все возможности и доказано, что только одна из них удовлетворяет условию. Это верное решение. Правда, оно стало длинным. Нельзя ли покороче? Можно! Для этого надо «всего лишь» найти ту самую ниточку, потянув за которую легко размотать весь клубок. В данном случае надо сравнить два последних высказывания.

Третье решение. Добрыня и Алёша утверждают одно и то же. Но правду сказал лишь один богатырь. Это мог быть только Илья. Значит, змея убил Добрыня.

Комментарий. Эта задача в итоге решена коротко и верно. Что же делать, если «заветную ниточку» найти не удаётся? Тогда приходится решать задачу перебором. При этом важно *честно перебрать все случаи, а не останавливаться, как только угадан ответ*.

Задача 1.2. Из сейфа похищены важные документы. Полиция уверена, что в краже участвовали двое из семерых подозреваемых: А, Б, В, Г, Д, Е, Ж. По показаниям консьержки дома напротив один из похитителей был высокого роста. Шерлок Холмс, осмотрев место происшествия, обнаружил пепел сигары и несколько волосков собаки. По характерным царапинам на сейфе он определил, что взломщик — левша.

А, Б, В и Г высокие; все, кроме А, курят сигары; Д и Ж держат дома собак, а А и Е — левши. На основании всех улик инспектор Лестрейд арестовал А и Д. Правильно ли он поступил?

Решение. Если документы похитили А и Д, то всё действительно сходится, так как А высокий левша, а Д курит и держит дома собаку. Но прежде чем арестовывать подозреваемых, необходимо проверить все версии. Это можно сделать по-разному. Разберём короткий способ.

При первом чтении условия выделяем признаки похитителей: рост, сигара, собака, левша. С каких удобнее начать? С двух последних: каждому из них соответствуют лишь по два подозреваемых. Один из похитителей —

А или Е (только они левши). Другой — Д или Ж (только у них есть собаки). Из этих четверых высок только А, поэтому он — один из сообщников, а Е — невиновен. А вот точно определить второго невозможно — как пара А и Д, так и пара А и Ж удовлетворяет всем условиям. Поэтому инспектор Лестрейд неправ: вина Д не доказана, следствие необходимо продолжать.

Комментарий. Как видно из этого примера, следователь, пренебрегающий полнотой перебора, рискует упрятать за решётку невиновного. Последствия подобных ошибок для участника математической олимпиады не столь трагичны: ему всего лишь не засчитают задачу.

Как сделать перебор короче?

Задача 1.3. Из каюты капитана пиратского корабля исчезла бутылка ямайского рома. Подозрение пало на Гарри, Тома и Одноглазого Чарли. Подозреваемые заявили:

Гарри: «Не трогал я вашего рома. Том тоже ни при чём».

Том: «Ручаюсь головой, сэр, Гарри невиновен. Ром стянул Одноглазый».

Чарли: «Бутылочку вашу взял Гарри. А я в этом не замешан».

Капитану удалось выяснить, кто взял ром. Оказалось, что один из подозреваемых дважды солгал, другой — дважды сказал правду, а третий один раз солгал, а другой раз сказал правду. Кроме того, вор действовал в одиночку. Кто же он?

Обсуждение. Будем решать задачу перебором. Организовать его можно по-разному. Можно, например, для начала предположить, что Гарри солгал дважды. Тогда солгать один раз мог либо Том, либо Чарли. Причём либо в первом высказывании, либо во втором. Потом точно так же разобрать случаи, когда дважды лгали другие пираты. Не многовато ли случаев? Правда, каждый разбирается совсем просто, но в многочисленных развилках недолго и запутаться.

В этой задаче лучше смотреть не на то, кто лжёт, а на то, кто украл ром. Тогда получаются всего три случая.

Решение. Если ром украл Гарри, то он один раз сказал правду, а другой раз солгал. Том в этом случае дважды солгал, а Чарли дважды сказал правду. Всё сходится. Для полноты решения необходимо проверить и остальные случаи. Если ром украл Том, то и Гарри, и Том один раз сказали правду, а второй раз солгали — противоречие с условием. Если же вор — Чарли, то и Гарри, и Том дважды сказали правду, что также противоречит условию.

Ответ: ром украл Гарри.

Задача 1.4. Команды А, Б, В, Г и Д участвовали в эстафете. До соревнований пять болельщиков высказали следующие прогнозы:

1) команда Д займёт 1-е место, команда В — 2-е;
2) команда А займёт 2-е место, Г — 4-е;
3) В — 3-е место, Д — 5-е;
4) В — 1-е место, Г — 4-е;
5) А — 2-е место, В — 3-е.

В каждом прогнозе одна часть подтвердилась, а другая — нет. Какое место заняла каждая из команд?

Решение. Рассмотрим два случая.

I. В первом прогнозе верна первая часть: команда Д заняла 1-е место. Тогда в третьем прогнозе верна первая часть, поэтому команда В на 3-м месте. В пятом прогнозе верна вторая часть, поэтому команда А заняла не 2-е место. Тогда и во втором прогнозе верна вторая часть, то есть у команды Г — 4-е место. Для А и Б остались 2-е и 5-е места, следовательно, у А — 5-е место.

II. В первом прогнозе верна вторая часть, то есть 2-е место заняла команда В. Тогда в пятом прогнозе нет верных предположений: команда А не может занять 2-е место, так как оно уже занято. Противоречие.

Ответ: команды заняли по порядку следующие места: Д, Б, В, Г, А.

Подведём итоги. В задачах, где часть утверждений верны, а часть неверны, можно организовать перебор двумя способами:

- по тому, какие из высказываний правдивы;

• по тому, кто совершил действие (убил змея, украл ром, занял первое место и т. д.).

Выбирать надо стараться тот способ, где перебор короче. Но в любом случае важно проводить перебор до конца, а не останавливаться, как только найден ответ, удовлетворяющий условию.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.5. На Олину парту упал бумажный самолёт с нарисованными красными сердечками. Оля развернула его и прочитала: «Ты — лучшая девочка в классе!» Она повернулась к сидящим за ней ребятам: Ване, Серёже и Алёше. Все три мальчика покраснели.

— Кто из вас делает мне такие комплименты? — спросила Оля.

— Это Сергей! — сказал Ваня.

— Нет, это не я! — сказал Серёжа.

— Я ничего такого не делал! — сказал Алёша.

Подруга Оли Маша ухмыльнулась: «Двое из них лгут!» Однако она не хотела больше ничего говорить. Кто является тайным поклонником Оли?

Задача 1.6. Богини Гера, Афина и Афродита пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее. Представ перед Парисом, богини высказали следующие утверждения.

Афродита: «Я самая прекрасная».

Афина: «Афродита не самая прекрасная».

Гера: «Я самая прекрасная».

Афродита: «Гера не самая прекрасная».

Афина: «Я самая прекрасная».

Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения двух других богинь ложны. Мог ли Парис вынести решение, кто из богинь прекраснее?

Задача 1.7. Алёша, Вася и Серёжа занимаются в разных кружках: танцевальном, хоровом и драматическом.

На вопрос, кто в каком кружке занимается, они ответили:

Алёша: «Я — в танцевальном».

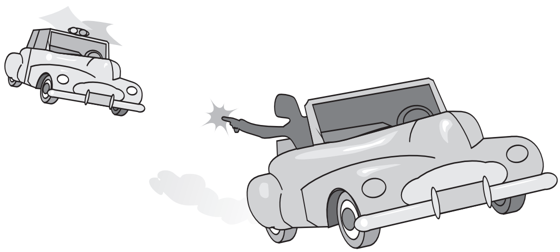
Вася: «Я — не в танцевальном».

Серёжа: «Я — не в хоровом».

Засмеявшись, добавили:

— Вы ведь из математического кружка, вот и определите, в каком кружке каждый из нас занимается, учитывая, что из трёх ответов один верный, а два — нет.

Задача 1.8. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники скрылись на синем «Бьюике»; Джонс сказал, что это был чёрный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только её цвет. Какого цвета и какой марки был автомобиль?



Задача 1.9. Четверо друзей соревновались в метании сосновых шишек. На вопрос, какое каждый из них занял место, они ответили:

Андрей: «Я был вторым, Боря — третьим».

Вася: «Я был вторым, Андрей — первым».

Гриша: «Я был вторым, Боря — четвёртым».

При этом известно, что каждый мальчик один раз говорил правду, а один раз — неправду. Кто какое место занял?

Задача 1.10. Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

1) ничьей не будет;

2) в ворота «Юга» забьют;

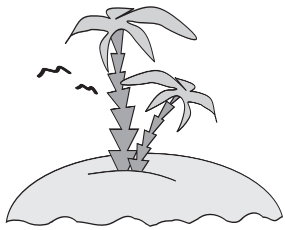
3) «Север» выиграет;

4) «Север» не проиграет;

5) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что ровно три прогноза оказались верными. С каким счетом закончился матч?

Задача 1.11. Три путешественника увидели вдали зелёный остров.



— На этом острове больше ста пальм! — воскликнул первый.

— Нет, пальм на острове меньше ста, — возразил второй.

— Одна-то пальма на острове наверняка есть, — сказал третий.

Когда они высадились на остров, только одно из этих утверждений оказалось истинным. Сколько пальм было на острове?

Задача 1.12. Три мальчика после рыбалки сказали:

Петя: «Я поймал 22 рыбы; Гриша на две больше меня, а Вася на одну меньше меня».

Гриша: «Я поймал не меньше всех; Вася поймал 25 рыб; разница между моим и Васиным уловом составляет три рыбы».

Вася: «Я поймал меньше, чем Петя; Петя поймал 23 рыбы, а Гриша на три рыбы больше, чем Петя».

Оказалось, что каждый из ребят сделал два истинных утверждения и одно ложное. Сколько рыб поймал каждый из них?

Занятие 2

Ищем «заветную ниточку»

Дерни за верёвочку, дитя мое, дверь и откроется.

Шарль Перро. «Красная шапочка»

Во всех задачах этого занятия предлагается установить соответствие между двумя множествами. В своё время подобные задачи были популярны не только на математических олимпиадах, но и в разделах головоломок для массового читателя. Это связано с тем, что их решение требует не математической подготовки, а лишь внимательности и умения из множества условий выбирать то, которым в данный момент стоит воспользоваться.

В задачах на установление соответствия часто используют таблицы, постепенно заполняя их плюсами и минусами. В ходе занятия ученики потренируются составлять такие таблицы. Но это не единственная и, пожалуй, даже не главная цель занятия. Сформулируем несколько вопросов, на которые советуем обратить внимание.

1. С чего начать, какое из условий является ключом к решению? Иногда помогает принцип узких мест: начинай с условия, которое труднее всего выполнить.

2. В какой форме записать условие, чтобы ключ было легче увидеть? Наибольшее внимание уделяется таблицам с плюсами и минусами. Но в задачах 2.2 и 2.12 удобнее другая форма записи, напоминающая двудольный граф (более подробное знакомство с двудольными графами предстоит на третьем занятии).

3. Как разглядеть одинаковую математическую суть в задачах с литературно различными сюжетами? Всякая ли задача корректна (то есть имеет ответ, причём единственный)? Как самому придумать коррект-

ную задачу? Все эти вопросы решаются с помощью таблиц и других схематических форм записи условия.

Первая задача простая. Её можно дать на дом, а на занятии разобрать. Кто-то из детей может привести только ответ с проверкой, но такое «решение» не годится. А вот доведённый до конца перебор — решение верное, хотя и не самое короткое, требующее от пятиклассника заметных усилий. Ребёнок, который честно выполнил такой перебор, оценит изящное применение принципа узких мест.

Сочинение новых задач (задания 2.5 и 2.6) увлекает детей, но требует много времени. При его нехватке можно эти задания пропустить вовсе или перенести на другое занятие. Можно, напротив, построить занятие в первую очередь на решении несложных и похожих друг на друга задач, придуманных самими кружковцами.

Литературно-математическое творчество — интересное для многих необязательное домашнее задание. Его итогом в случае удачи через некоторое время станет занятие на повторение, составленное из наиболее интересных и разнообразных задач, придуманных самими детьми. Решить их после перерыва полезнее, чем обсуждать несколько подряд задач-близнецов.

Где искать «заветную ниточку»?

Задача 2.1. В семейном ансамбле «Ласковый лай» участвуют Тит Фомич, Фома Титович, Фома Фролович, Фрол Фомич и Фрол Фролович Собакины. Один из них поёт, его отец играет на шарманке, брат держит микрофон, а дети бьют в барабан. Как зовут певца?

Обсуждение. Задачу вполне можно решить перебором: каждого из пяти участников, начиная с Тита Фомича и заканчивая Фролом Фроловичем, поочередно «пробовать» на роль певца. В одном из случаев все условия соблюдаются, а в остальных четырёх удаётся найти противоречие. Например, если певца зовут Тит Фомич, то его отцом может быть Фома Титович или Фома Фролович, братом — только Фрол Фомич, детьми — ...стоп, противоречие найдено! В ансамбле есть только один Титович, Фома, а второго нет.

Первый случай разобран. Впереди ещё четыре. Нельзя ли покороче? Можно.

Решение. Заметим, что в ансамбле есть две пары братьев: одна — это певец с держателем микрофона, а вторая — дети-барабанщики. У братьев одинаковые отчества. Отчества Фомич и Фролович встречаются дважды, а вот у Фомы Титовича братьев в ансамбле нет. Значит, он — отец певца. Тогда певец и его брат — Фомичи, а Фроловичи — это дети. Итак, певец — Фрол Фомич.

Задача 2.2. Четыре подруги пришли на каток, каждая со своим братом. Они разбились на пары и начали кататься. Оказалось, что в каждой паре «кавалер» выше «дамы» и никто не катается со своей сестрой. Самым высоким в компании был Юра Воробьёв, следующим по росту — Андрей Егоров, потом Люся Егорова, Серёжа Петров, Оля Петрова, Дима Крымов, Инна Крымова и Аня Воробьёва. Определите, кто с кем катался.

Обсуждение. Здесь персонажей больше, чем в предыдущей задаче. Чтобы не запутаться, хотелось бы записать их всех так, чтобы сразу было видно всё: кто выше, а кто ниже, где мальчик и где девочка, кто чей брат или сестра. И при этом не хочется писать слишком много.

Решение. Перепишем детей по росту, сверху вниз, в два столбика: мальчиков слева, девочек справа (см. рис. 1).

Юра В.	
Андрей Е.	
	Люся Е.
Сережа П.	
	Оля П.
Дима К.	
	Инна К.
	Аня В.

Рис. 1

Какой девочке труднее всего подобрать пару? Самой высокой. С неё и начнём. Это Люся Егорова. По условию она катается с мальчиком, который выше её. Таких мальчиков двое, но один из них её брат. Значит, Люся Егорова катается с Юрой Воробьёвым. Соединим их сплошной линией и исключим из дальнейших рассуждений. Дальше поочередно подберём единственно возможные пары для Оли, Инны и Ани (см. рис. 2).

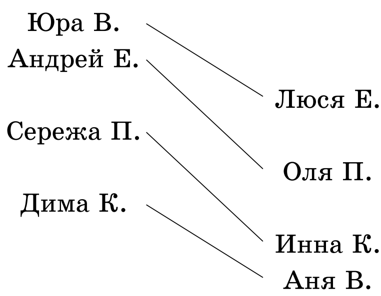


Рис. 2

Ответ: Люся Егорова катается с Юрой Воробьёвым, Оля Петрова — с Андреем Егоровым, Инна Крымова — с Серёжей Петровым, а Аня Воробьёва — с Димой Крымовым.

Комментарий. Точно так же можно было начать распутывать клубок не с самой высокой девочки, а с самого низкого мальчика. В любом случае «заветная ниточка», за которую вытягивается решение, спрятана в самом проблемном, или, как говорят, узком месте условия. Таким узким местом в предыдущей задаче оказалась необходимость наличия двух пар одинаковых отчеств.

В таблице сразу видно, где копать

Найти узкие места и «заветные ниточки» обычно удается не сразу; если бы они сразу бросались в глаза, задачи не были бы задачами. Сделать их гораздо заметнее помогают таблицы. Начнём с совсем простого примера.

Задача 2.3. Беседуют трое: Белов, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белову: «Любопытно, что один из нас русый, другой — брюнет, а третий — рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из беседующих?

Решение. При первом чтении условия обратим внимание только на то, что в задаче описываются три человека и указаны их фамилии и цвет волос. Подготовим таблицу 3×3, каждому столбцу которой соответствует цвет волос, а строке — фамилия (см. таблицу 1). В результате решения задачи в тех трёх клетках, где указаны цвет волос и фамилия одного и того же человека, должны будут появиться плюсы, а в остальных – минусы. Ясно, что *в каждой строке и в каждом столбце должно быть ровно по одному плюсу*.

	русый	брюнет	рыжий
Белов			
Чернов			
Рыжов			

Таблица 1

При втором чтении условия определяем клетки, в которые можно смело поставить минус. Так как ни у кого цвет волос не соответствует фамилии, таковы три клетки главной диагонали. Поскольку брюнет разговаривал с Беловым, это два разных человека; ставим минус на пересечении строки Белова и столбца брюнета. Получаем таблицу 2.

	русый	брюнет	рыжий
Белов	–	–	
Чернов		–	
Рыжов			–

Таблица 2

Обратим внимание на первую строку: в двух её клетках стоят минусы, значит, в третьей непременно должен быть плюс. Это формальное рассуждение легко переводится на бытовой язык: Белов по условию не может быть ни русым, ни брюнетом. Следовательно, он рыжий. Поставив плюс в первой клетке третьего столбца, заполняем пустую клетку этого столбца минусом: если Белов рыжий, то у Чернова волосы другого цвета (а про Рыжова мы это давно знаем, минус в его клетке уже стоит). Получилась таблица 3.

	русый	брюнет	рыжий
Белов	–	–	+
Чернов		–	–
Рыжов			–

Таблица 3

Теперь и во второй строке есть два минуса: Чернов не брюнет и не рыжий. Значит, он русый, ставим плюс в пока не заполненную клетку строки. Осталось посмотреть на второй столбец и сделать вывод, что Рыжов — брюнет.

Ответ: Белов — рыжий, Чернов — русый, а Рыжов — брюнет.

Комментарий 1. С тем же успехом можно было начать рассуждение со второго столбца. Вообще, узкому месту условия соответствует в таблице строка (столбец), во всех клетках которой, кроме одной, стоят минусы.

Комментарий 2. Будет ли задача по-прежнему иметь единственный ответ, если один из минусов убрать? Если это так, то в задаче есть лишние данные. Ответ зависит от того, какой минус убирать. Проверьте, что единственность ответа сохранится, только если убрать минус «Рыжов — не рыжий».

Комментарий 3. Эту задачу можно решить без всякой таблицы, коротко и ясно:

«Белов не может быть ни брюнетом, ни русым. Поэтому он рыжий. Тогда Чернов не рыжий и не брюнет. Следовательно, Чернов русый. А Рыжов — брюнет».

Таблицы уместнее в более сложных задачах, где персонажей больше и условие понять сложнее.

Задача 2.4. Петя, Гена, Дима и Вова занимаются в спортивных секциях: гимнастической, баскетбольной, волейбольной и легкой атлетики. Волейболист старше Пети и Димы, но учится с ними в одном классе. Петя и Гена на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с баскетболистом, ни с волейболистом. Кто в какой секции занимается?

Решение. Составим таблицу соответствия имен и секций. Из первого условия следует, что ни Петя, ни Дима не волейболисты. Ставим два минуса. Из второго условия следует, что Петя и Гена не гимнасты. Ставим еще два минуса. Получаем таблицу 4. Где ставить плюсы, пока непонятно. Читаем дальше.

	г	б	в	л/а
Петя	–		–	
Гена	–			
Дима			–	
Вова				

Таблица 4

Из того, что легкоатлет не знаком с волейболистом, следует, что ни Петя, ни Дима не легкоатлеты. Теперь с Петей все ясно: он баскетболист. Ставим плюс, из которого сразу следуют три минуса: ни Гена, ни Дима, ни Вова баскетболом не занимаются. Получаем таблицу 5. Из неё видно, что Дима может заниматься только гимнастикой, поэтому Вова не гимнаст. Распределить Гену и Вову однозначно по секциям волейбола и легкой атлетики пока не удалось.

	г	б	в	л/а
Петя	–	+	–	–
Гена	–	–		
Дима		–	–	–
Вова		–		

Таблица 5

Но это не значит, что задача имеет два решения. Читая задачу ещё раз, замечаем, какое условие пока не использовано: легкоатлет не знаком не только с волейболистом, но ещё и с баскетболистом. То есть он не знаком ни с кем, кроме, быть может, гимнаста. Поэтому ни Петя (это было и так ясно), ни Гена (а это важно!) не легкоатлеты. Следовательно, Вова — лекоатлет, а Гена — волейболист.

Ответ: Петя занимается баскетболом, Гена — волейболом, Дима — гимнастикой, а Вова — легкой атлетикой.

Как придумывают задачи

Мы только что рассмотрели, как наглядное представление условия задачи в виде таблицы помогает решать задачи на сответствие. Но не только решать. С помощью таблицы при наличии фантазии каждый человек может придумать свою собственную задачу. Делается это так.

Вернёмся к таблице, получившейся в задаче 2.3 после внесения данных условия, и уберём из неё фамилии и цвет волос (см. таблицу 6).

	?	?	?
?	–	–	
?		–	
?			–

Таблица 6

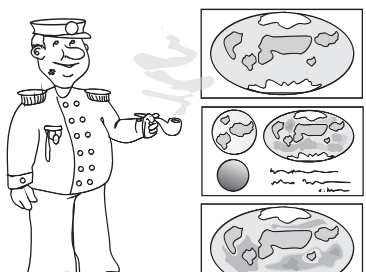
	И	Т	С–Л
Муостах	–	–	
Ихавандиффулу		–	
Арораэ			–

Таблица 7

Вместо вопросов придумаем новых персонажей и их характеристики. Для разнообразия можно описывать не людей, а животных или неодушевленные предметы. Например, вместо фамилий пусть будут названия островов, а вместо цвета волос — океаны. Чтобы ответ не был общеизвестен, найдём в Википедии не самые знаменитые острова: Арораэ, Муостах и Ихавандиффулу. Поместим в таблицу названия островов и океанов, в которых они расположены (см. таблицу 7).

Теперь самое интересное: надо придумать, откуда взялись минусы. Начнем с диагональных: пусть кто-то говорит, что там плюсы, и при этом трижды лжёт. Кому полагается врать про острова и океаны? Капитану Врунгелю. Осталось сообщить, что остров Муостах расположен не в Тихом океане. Можно так прямо и сказать, но с помощью той же Википедии сделаем поинтереснее. Итак, внимание, «новая» задача!

Капитан Врунгель заявил, что побывал на острове Муостах в Индийском океане, на острове Ихавандиффулу в Тихом океане и на острове Арораэ в Северном Ледовитом океане. Эти острова существуют на самом деле и находятся в трёх названных океанах, но Врунгель все острова разместил в «чужих» океанах. Верните острова в правильные океаны, если известно, что тихоокеанский остров принадлежит республике Кирибати, а Муостах — России.



Почему же слово «новая» взято в кавычки? Потому что это скорее новая литературная вариация старой задачи про Белова, Чернова и Рыжова. А математическая суть её полностью отражена в той же таблице и нисколько не изменилась.

Задача 2.5. Уберите в задаче про Белова, Чернова и Рыжова условие «Рыжов — не рыжий». Придумайте, чем ещё можно заменить фамилии и цвет волос. Затем сочините подходящие причины для появления минусов в трёх клетках. Запишите получившуюся задачу. Решите её сами и предложите решить друзьям.

Задача 2.6. а) Петя занимается английским языком. Он решил сочинить новую задачу про себя и трёх мальчиков, каждый из которых занимается футболом, плаванием или шахматами. Петя составил таблицу и разместил в ней один плюс и несколько минусов (см. таблицу 8). Будет ли Петина задача иметь решение? Если да, то единственное ли?

	а	ф	ш	п
Петя	+			–
Гена	–	–		–
Дима			–	
Вова		–		–

Таблица 8

Решение. Гена может заниматься только шахматами. Но в таком случае подходящего занятия для Вовы нет. Поэтому задача не имеет решения.

б) Петя понял свою ошибку и решил её исправить. Он составил новую таблицу (см. таблицу 9). Будет ли теперь задача иметь решение? Если да, то единственное ли?

	а	ф	ш	п
Петя		–	–	–
Гена		–		–
Дима				
Вова			–	

Таблица 9

Решение. Петя может заниматься только английским языком, а Гена — только шахматами. А вот футболом и плаванием могут заниматься как Дима, так и Вова. Поэтому задача имеет два решения.

в) Расставьте в таблице 4×4 минусы так, чтобы соответствующая задача имела единственное решение. Чтобы получилось интереснее, плюсы лучше не использовать. Затем придумайте сюжет. Начать можно, например, так: «Белое, Жёлтое, Красное и Чёрное моря расположены в четырёх различных океанах...» А можно и по-другому. Запишите получившуюся задачу. Решите её сами и предложите решить друзьям.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.7. Три гнома — Пили, Ели и Спали — нашли в пещере алмаз, топаз и медный таз (каждый нашёл что-то одно). У Ели капюшон красный, а борода длиннее, чем у Пили. У того, кто нашёл таз, самая длинная борода, а капюшон синий. Гном с самой короткой бородой нашёл алмаз. Кто что нашёл?

Задача 2.8. Ворона, Павлин и Попугай принесли на выставку по одной своей картине: портрет Орла, натюрморт с сыром и абстрактную композицию. Известно, что ни Ворона, ни Павлин никогда не пишут портретов, а Попугай — натюрмортов. Можно ли определить автора каждой картины?

Задача 2.9. Перед началом чемпионата школы по шахматам каждый из участников сказал, какое место он рассчитывает занять. Шестиклассник Ваня сказал, что займёт последнее. По итогам чемпионата все заняли разные места, и оказалось, что все, кроме, разумеется, Вани, заняли места хуже, чем ожидали. Какое место занял Ваня?

Задача 2.10. Три подруги пришли на праздник в красном, белом и голубом платьях. Их туфли были тех же трёх цветов. Только у Тамары цвета платья и туфель совпадали. Валя была в белых туфлях. Ни платье, ни туфли Лиды не были красными. Определите цвет платья и туфель каждой из подруг.

Задача 2.11. В международном студенческом лагере встретились четыре студента: физик, биолог, историк и математик. Каждый владеет двумя языками из четырёх: русский, английский, французский и итальянский. Никто из студентов не владеет французским и итальянским языками одновременно. Хотя физик не может говорить по-английски, он стал переводчиком в разговоре биолога и историка. Историк знает итальянский, а математик — нет, поэтому они общаются по-русски. Физик, биолог и математик не могут беседовать втроём на одном языке. Как общался с каждым из соседей математик?

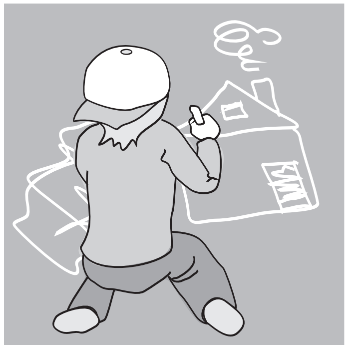
Задача 2.12. Четырёх жителей Непалонезии зовут Пей, Чай, Жуй и Джем. Фамилии у них те же, что и имена, но ни у кого из четверых имя и фамилия не совпадают. Фамилия Чая не Пей. Определите имя и фамилию каждого, если имя непалонезийца с фамилией Жуй совпадает с фамилией того, имя которого совпадает с фамилией Джема.

Занятие 3

Изобразительное искусство

— Боцман!
— Я!
— Ты будешь капитан!

Юрий Аделунг



Главная цель этого занятия — развивать потребность и умение переходить от словесной записи условия задачи к его наглядному изображению. Для этого применяются различные способы.

Один из них, таблица с плюсами и минусами, был подробно рассмотрен на предыдущем занятии. На этом будет показано, как можно устанавливать соответствие с помощью двудольного графа (задачи 3.1, 3.2, 3.3, 3.8, 3.9, 3.12). В задачах 3.4 и 3.7 используются другие виды графов: деревья, ориентированные графы. Никакого знакомства с теорией графов при этом не требуется (так же как не требуется понимания слова «проза» для того, чтобы говорить прозой). Но если школьники уже знакомы с графами, можно использовать соответствующую терминологию.

На этом занятии появляется новый тип задач: составление расписаний. От задач на установление соответствий они отличаются тем, что элементы каждого множества встречаются в расписании не один, а несколько раз. Решать их удобнее всего с помощью латинских квадратов. Сюжет такой задачи может быть основан на составлении расписания, подобного школьному, как в задаче 3.5, — отсюда и название. А может быть и внешне совсем другим, как в задачах 3.10 и 3.11.

Новые идеи работают не вместо знакомых, а вместе с ними. Например, задача 3.5 демонстрирует, что таблицы и перебор не исключают друг друга: перебор — это способ доказательства, а таблица — лишь наглядная форма представления информации. А в задаче 3.6 интересна не столько техника изображения детей в очереди, сколько применение принципа узких мест.

Как и на других занятиях, не все задачи сводятся к нахождению единственного ответа. Иногда требуется исследовать задачу и ответить на более глубокие вопросы: что можно и чего нельзя узнать исходя из условия? Сколько решений имеет задача? Продолжается и обучение придумыванию задач.

Вместо минусов — штриховые линии

Задача 3.1. Собираясь в школу, Миша нашёл под подушкой, под диваном, на столе и под столом всё необходимое: тетрадь, шпаргалку, плеер и кроссовки. Под столом он нашёл не тетрадь и даже не плеер. Миша не клал кроссовки ни на стол, ни под подушку, а его шпаргалки не валяются на полу. Плеера не оказалось ни на столе, ни под диваном. Что где лежало?

Обсуждение. Задачу можно решить с помощью привычной таблицы с плюсами и минусами. Единственный недостаток метода — трудоемкость: прежде чем расставлять минусы, приходится чертить саму таблицу. Покажем более простой способ обнаружить узкое место, а потом, шаг за шагом, распутать и всю задачу.

Решение. Запишем сверху названия предметов, а снизу названия мест. Наша цель — соединить сплошной линией каждый предмет с местом, где он находится. Если из условия ясно, что какой-то предмет не может находиться в данном месте, будем соединять их названия штриховой линией.

Начинаем читать условие. «Под столом он нашёл не тетрадь и даже не плеер» — проводим штриховые линии от «под столом» к тетради и плееру, получается картина, показанная на рис. 3.

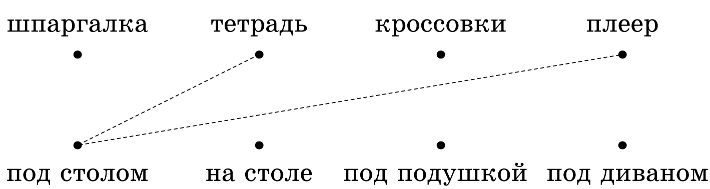


Рис. 3

«Миша не клал кроссовки ни на стол, ни под подушку» — проводим штриховые линии от кроссовок к «на столе» и «под подушкой». Затем от шпаргалки «под диван» и «под стол». И, наконец, от плеера к «на столе» и «под диваном». На рис. 4 условие задачи изображено полностью.

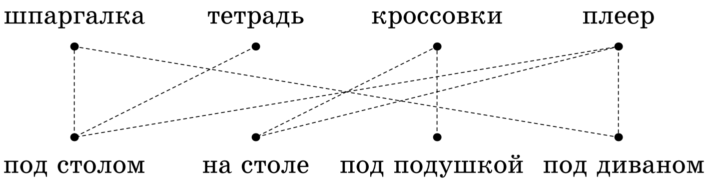


Рис. 4

Теперь хорошо видны целых два узких места: раз плеера нет ни на столе, ни под столом, ни под диваном, он может лежать только под подушкой. А под столом не может быть ничего, кроме кроссовок. Проводим сплошные линии от плеера «под подушку», а от кроссовок «под стол», см. рис. 5.

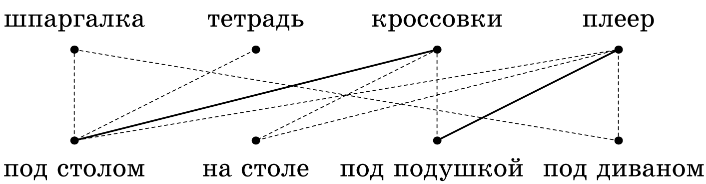


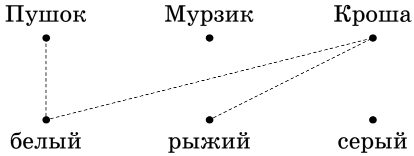
Рис. 5

Становится видно, что под диваном может найтись только тетрадь, а на столе аккуратно лежит шпаргалка.

Ответ: тетрадь под диваном, шпаргалка на столе, плеер под подушкой, а кроссовки под столом.

Предложенная графическая схема работает по тому же принципу, что и таблица, только вместо минусов в ней проводят штриховые линии, а вместо плюсов — сплошные. А от узкого места проведены штриховые линии ко всем объектам напротив, кроме одного.

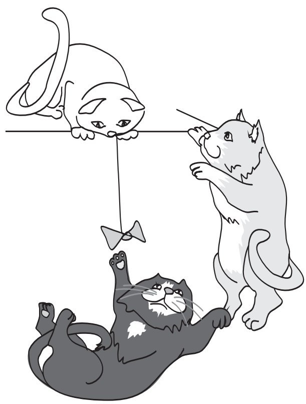
Для придумывания новых задач такой метод изображения условия тоже ничем не хуже табличного. Сначала в любом случае нужно выбрать героев задачи и какие-либо их свойства. Пусть, например, это будут котята с разной окраской шерсти. Назовём их, как нам захочется. Скажем, Пушок, Мурзик и Кроша. Пусть один из них белый, другой — рыжий, третий — серый. Теперь пора нарисовать схему условий. Нам нужно провести несколько пунктирных линий так, чтобы по этой схеме можно было однозначно получить ответ (пунктирные линии, как и в задаче 3.1, соединяют невозможные пары). Вот одна из возможностей:



Из такой схемы мы получаем, что Кроша непременно серый, тогда Пушок рыжий, а Мурзик белый.

Теперь осталось перевести схему в условие задачи. Например, так: Кроша любит играть с белым и рыжим котятами, а белый котёнок и Пушок однажды вместе удрали за калитку.

Осталось все условия собрать вместе.



У тети Дуни живут три котенка: Пушок, Мурзик и Кроша. Один из них белый, другой — рыжий, третий — серый. Кроша любит играть с белым и рыжим котятами, а белый котёнок и Пушок однажды вместе удрали за калитку. Как зовут рыжего котёнка?

Задача 3.2. Придумайте сами задачу, математически похожую на задачу про котят, но с другим литературным содержанием. Для этого нарисуйте ту же схему, но вместо кличек и окраса котят напишите что-то своё. А потом сочините причины для проведения штриховых линий.

Задача 3.3. Семь подружек решили принести на вечеринку по одному блюду. Наташа умеет готовить салаты «цезарь» и греческий, Валя — греческий и оливье, Таня — курицу и пирожки, Даша — торт и жюльен, Саша — «цезарь» и оливье, Ира — курицу и жюльен, Марина — пирожки и торт. Как им договориться, чтобы каждая приготовила то, что умеет, и все блюда были разными? Сколько решений имеет задача?

Обсуждение. Рисование таблицы в 7 строк и 7 столбцов малопривлекательно. Попробуем изобразить данные условия так же, как и в предыдущей задаче. В один ряд запишем имена подружек, а в другой — названия блюд. От каждой девочки проведём линии к тем блюдам, которые она умеет готовить. А затем с помощью полученной схемы выберем, кто что принесёт.

Но тут возникает проблема. Если читать условие подряд и рисовать все нужные линии не слишком аккуратно, легко запутаться: слишком много девочек и блюд. Чтобы избежать этого, будем читать условие в более удобном порядке. В каком именно, нам будет подсказывать постепенно появляющаяся схема.

Решение. Сначала проведём линии от Наташи к «цезарю» и греческому салату (см. рис. 6). Греческий салат умеет готовить ещё и Валя — проведём линию от него к Вале, а от Вали ещё и к оливье. Кто ещё умеет готовить оливье? Саша. Добавим её к чертежу, а от Саши проведём линию ещё и к «цезарю». Первый круг замкнулся.

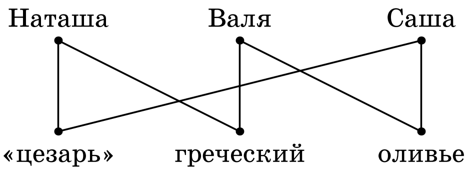


Рис. 6

Аналогично нарисуем и второй круг, начав его, например, с Тани (см. рис. 7).

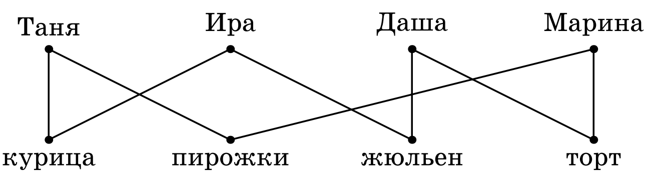


Рис. 7

Поскольку условие читалось и изображалось не по порядку, полезно убедиться, что никого из девочек не забыли и от каждой ведут линии ровно к двум блюдам.

Теперь нетрудно распределить обязанности: если Наташа готовит «цезарь», то Валя — греческий салат, а Саша — оливье. Если же Наташа готовит греческий салат, то Валя — оливье, а Саша — «цезарь». В любом из этих двух случаев есть два способа договориться, что готовят Таня, Ира, Даша и Марина. Поэтому всего способов четыре.

Как ещё можно изобразить условие?

Девочки из предыдущей задачи могли распределить блюда и без графической схемы условия. Но тогда было бы трудно найти все возможные решения. И ещё труднее — убедиться, что других решений нет. Удачное изображение условия помогает не просто подобрать ответ, а полностью разобраться в задаче. А возможности изображения довольно разнообразны. Рассмотрим ещё два примера.

Задача 3.4. В семье Орловых пятеро сыновей. Саша старше Миши, Миша старше Димы и Коли, Коля старше Васи.

а) Кто самый старший?

б) Известно ли, кто старше: Дима или Коля?

в) Можно ли узнать, кто самый младший?

г) Пусть дополнительно известно, что среди братьев есть два близнеца. Можно ли узнать, кто они?

д) Можно ли узнать имя одного из братьев-близнецов?

Решение. Изобразим каждого мальчика в виде точки, названной первой буквой его имени: Сашу — точкой С, Мишу — точкой М и т. д. Естественно располагать младшего брата ниже старшего (см. рис. 8). На такой схеме ответ на первый вопрос виден сразу: самый старший — Саша.

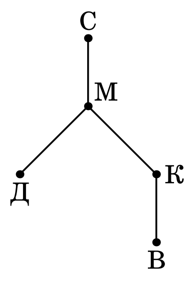
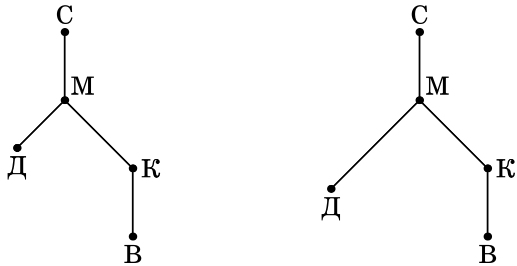


Рис. 8

Со вторым вопросом сложнее: в условии ничего не говорится о сравнении возрастов Димы и Коли. Хотя на схеме они расположены на одной высоте, это вовсе не значит, что Дима и Коля одного возраста. Условие задачи можно изобразить и по-другому (см., например, рис. 9а,б).

Всё прояснится, если при чтении условия каждый раз проводить стрелку от старшего брата к младшему, как на



а) б)

Рис. 9

рис. 10. Теперь для сравнения возрастов высота не играет роли. Важно другое: от старшего брата к младшему ведёт путь из одной или нескольких стрелок, направленных в соответствующую сторону.

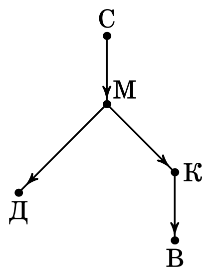


Рис. 10

По-прежнему хорошо видно, что Саша — самый старший: от него можно добраться по стрелочкам до любого из братьев. Но теперь видны ответы и на остальные вопросы.

Диму и Колю не соединяет никакой путь из одинаково направленных стрелок, поэтому определить, кто из них младше, нельзя. По той же причине нельзя сравнить возраста Васи и Димы и узнать, кто из братьев самый младший.

Однозначно определить близнецов тоже нельзя: ими могут оказаться как Коля с Димой, так и Дима с Васей. Другие пары близнецов невозможны. Действительно, Саша старше всех, Миша старше всех остальных. Из трёх младших братьев Коля и Вася не могут быть близнецами. Значит, одним из братьев-близнецов является Дима.

Ответ: а) Саша; б) неизвестно; в) нельзя; г) нельзя; д) Дима.

Задача 3.5. Карлсон открыл школу. Первого сентября во всех трёх первых классах было по три урока: курощение, низведение и дуракаваляние. Один и тот же предмет в двух классах одновременно идти не может. Курощение в 1 «Б» было первым уроком. Учитель дуракаваляния похвалил учеников 1 «Б»: «У вас получается ещё лучше, чем у 1 „А“». Низведение на втором уроке было не в 1 «А». Можно ли по этим данным узнать, в каком классе валяли дурака на первом уроке? А на последнем?

Обсуждение. В этой задаче впервые приходится работать одновременно с тремя множествами: классами, предметами и номерами уроков. Их не расположишь друг напротив друга. Таблица с плюсами и минусами тоже не поможет. Если, например, столбцы будут соответствовать классам, а строки — номерам уроков, как изобразить предметы? Ответ подсказывает обычное школьное расписание: в клетках надо не расставлять плюсы и минусы, а указывать названия предметов (для краткости ограничимся их первыми буквами). При этом *в каждом столбце и в каждой строке каждая буква должна встречаться ровно один раз*. Таблицы с таким свойством имеют специальное название: *латинский квадрат*[1].

Первое решение. Нарисуем описанную в обсуждении таблицу и отметим, что курощение в 1 «Б» было первым уроком (см. таблицу 10). Из высказывания учителя дуракаваляния следует, что его урок прошёл сначала в 1 «А», а потом в 1 «Б». Это приводит к рассмотрению трёх случаев (см. таблицы 11а,б,в).

	1 «А»	**1 «Б»**	**1 «В»**
1		К	
2			
3			

Таблица 10

Попробуем закончить заполнение каждого из латинских квадратов, учитывая, что низведение на втором уроке было не в 1 «А».

[1]Название «латинский квадрат» берёт начало от Леонарда Эйлера, который заполнял квадрат латинскими буквами.

а)

	1 «А»	1 «Б»	1 «В»
1	Д	К	
2		Д	
3			

б)

	1 «А»	1 «Б»	1 «В»
1	Д	К	
2			
3		Д	

в)

	1 «А»	1 «Б»	1 «В»
1		К	
2	Д		
3		Д	

Таблица 11

Первый вариант быстро приводит в тупик: первым уроком низведение может быть только в 1 «В», а в 1 «Б» — только третьим уроком. Тогда вторым уроком низведение было в 1 «А» (таблица 12а), что противоречит условию. Зато два других варианта завершаются однозначно (таблицы 12б,в).

а)

	1 «А»	1 «Б»	1 «В»
1	Д	К	Н
2	Н?!	Д	
3		Н	

б)

	1 «А»	1 «Б»	1 «В»
1	Д	К	Н
2	К	Н	Д
3	Н	Д	К

в)

	1 «А»	1 «Б»	1 «В»
1	Н	К	Д
2	Д	Н	К
3	К	Д	Н

Таблица 12

В обоих вариантах расписания валять дурака на последнем уроке полагается 1 «Б» классу. А вот на первом уроке этот предмет могли изучать либо в 1 «А», либо в 1 «В».

Ответ: про первый урок узнать нельзя. Про последний можно: в 1 «Б» классе.

Второе решение (набросок). Мы пытались составить расписание для детей. Но в учительской настоящей школы обычно висит и другая таблица, удобная для учителей: в строках указаны фамилии учителей (в нашем случае достаточно первой буквы предмета), в столбцах — номера уроков, а в клетки вписываются классы (и здесь мы ограничимся буквой). При составлении учительского расписания для школы Карлсона тоже получаются три варианта, один из которых противоречив (таблицы 13а,б,в).

а)

	1	2	3
К	Б		
Н	В	?	
Д	А	Б	

б)

	1	2	3
К	Б	А	В
Н	В	Б	А
Д	А	В	Б

в)

	1	2	3
К	Б	В	А
Н	А	Б	В
Д	В	А	Б

Таблица 13

Ответ задачи, конечно же, не зависит от способа решения.

Комментарий. Эта задача ещё раз показывает, что угаданный ответ имеет мало общего с полным решением. Методом проб и ошибок сообразительный торопыжка и без всяких таблиц найдёт пример, соответствующий, скажем, второму случаю, и даст «ответ»: на первом уроке валяли дурака в 1 «А», а на последнем — в 1 «Б». И даже «обоснует» его: «Курощение на первом уроке было в 1 „Б“, на втором — в 1 „А“, на третьем — в 1 „В“. Низведение на первом — в 1 „В“, на втором — в 1 „Б“, на третьем — в 1 „А“. А дуракаваляние сначала в 1 „А“, затем в 1 „В“, а затем в 1 „Б“. Всё сходится!»

Однако мы уже знаем, что есть и другая возможность, и определить, где валяли дурака на первом уроке, нельзя. Допустим, что наш торопыжка найдёт оба верных примера. Как же он проверит, могло ли дуракаваляние на последнем уроке быть не в 1 «Б»? Без рассуждений никак не обойтись. А уж рассуждать с помощью таблиц или как-то ещё — пусть каждый выбирает сам.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.6. В очереди в школьный буфет стоят Вика, Соня, Боря, Денис и Алла. Вика стоит впереди Сони, но после Аллы; Боря и Алла не стоят рядом; Денис не находится рядом ни с Аллой, ни с Викой, ни с Борей. В каком порядке стоят ребята?

Задача 3.7. Сашиного папу зовут Иван Петрович, маму — Светлана Аркадьевна, а сестру — Маша. У мамы Ивана Петровича, Ирины Владимировны, есть еще два сына — Николай и Василий.

а) Можно ли узнать имена обоих дедушек Саши?

б) А Маши?

в) Можно ли узнать, как зовут маму Машиной мамы?

г) Можно ли узнать имя хотя бы одного из дедушек дяди Васи?

д) А второго?

Задача 3.8. Сочините задачу. На рис. 11 изображена часть её условия. Проведите ещё одну штриховую линию так, чтобы задача имела единственный ответ. Придумайте сюжет.

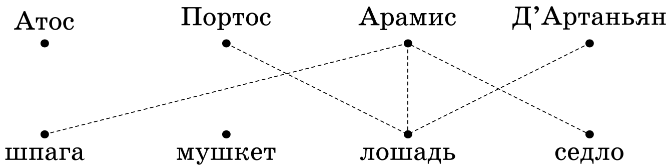
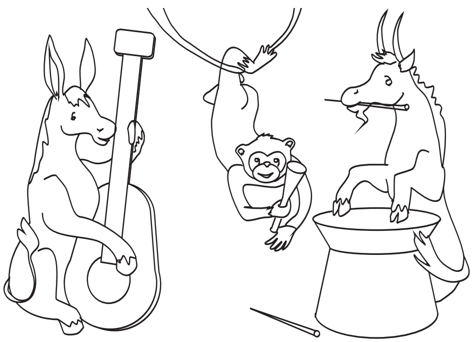


Рис. 11

Задача 3.9. На улице, став в кружок, разговаривают четыре девочки: Аня, Валя, Галя и Нина. Девочка в зелёном платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Ниной. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье на каждой из девочек?

Задача 3.10. Мартышка, Осёл и Козёл затеяли сыграть трио. Уселись чинно в ряд, Мартышка справа. Ударили в смычки, дерут, а толку нет. Поменялись местами, при этом Осёл оказался в центре. А трио всё нейдёт на лад. Пересели ещё раз. При этом оказалось, что каждый из трёх «музыкантов» успел посидеть и слева, и справа, и в центре. Кто где сидел в третий раз?



Задача 3.11. Алёша, Боря и Вася соревновались в беге на 100 м, 400 м и 1000 м. Каждый мальчик на какой-то дистанции занял первое место, на какой-то второе и на какой-то третье. Боря пробежал стометровку быстрее всех. Можно ли полностью восстановить итоги соревнований,

если известно также, что на дистанции 1000 м последним финишировал: а) Алёша; б) Боря?

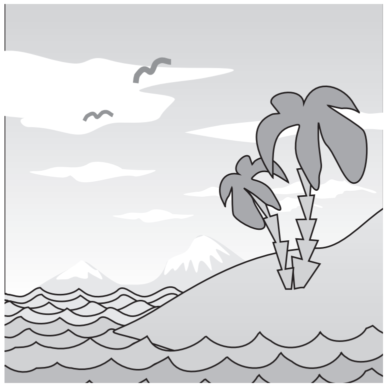
Задача 3.12. В корабельной команде необходимы капитан, боцман, штурман, парусный мастер, канонир и кок. Поэтому когда Джек, Гектор и Уилл втроём захватили корабль, каждому пришлось работать за двоих. Вахту все трое — Гектор, парусный мастер и кок — несли по очереди. Парусный мастер храбрее капитана. Джек — самый трусливый из троих. Джек и канонир утаили от капитана бочонок рома. Кок обозвал штурмана картоведом. Можно ли по этим данным узнать, кто стал капитаном? А кто штурманом?

Занятие 4

Таинственный остров

Старик постоянно говорил, что всё вокруг — неправда. Правда, потом оказалось, что он лгал.

Дуглас Адамс. «Автостопом по галактике»



Задачи про рыцарей и лжецов — классическая и широко разработанная в учебной литературе тема. На наш взгляд, знакомство с задачами такого типа является непременным условием хорошего математического образования. Если ученик закончит школу, никогда не решая подобные логические задачи, то это будет немалым упущением. Одно из достоинств этих задач в том, что они могут стать темой семейного общения: дети и взрослые решают их одинаково успешно. Кроме того, такие задачи часто не требуют никаких записей, их можно решать в дороге, на пляже или в походе.

Это занятие составлено в основном из несложных заданий, уместных для первого знакомства с темой. В некоторых случаях (задачи 4.1, 4.2, 4.4, 4.11) ученикам предлагается придумать подходящий вопрос. Здесь не предполагается единственного верного ответа, при обсуждении каждый член кружка может предложить свою версию, а остальные — проверить её правильность. После того как кто-то предложит подходящий вопрос, другим будет проще придумать свои варианты. В крайнем случае первый вопрос может подсказать учитель.

В прочих задачах важно, как всегда, не только найти верный ответ, но и доказать его единственность. Для этого часто используется полный перебор. В простых случаях требуется рассмотреть всего две возможности: говорящий может быть либо рыцарем, либо лжецом. Таковы, в частности, задачи 4.3 и 4.5. Если перебор более сложный, с ветвящимися случаями, то имеет смысл кратко записывать эти случаи на доске даже при устном рассказе. Иначе и сам рассказчик рискует запутаться, и остальным участникам кружка будет трудно уследить за ходом его мысли. Пример такой записи рассмотрен в задаче 4.7.

Задача 4.3 широко известна, её различные вариации входят в более сложные сюжеты.

Занятие про рыцарей и лжецов пройдёт оживлённее, если включить в него элементы ролевой игры. Например, при обсуждении задачи 4.2 можно предложить каждому члену кружка задумать, рыцарь он или лжец, а придумавшие вопрос могут задавать его товарищам и определять, кто есть кто. При обсуждении задачи 4.7 можно выбрать трёх учеников и раздавать им разными способами роли рыцарей и лжецов, разыгрывая ситуацию, описанную в задаче. В результате ответ будет, скорее всего, угадан. После этого надо не забыть обсудить, почему других возможностей нет. Соответствующие сценарии могут быть разыграны и по условиям других задач.

Во всех задачах этой главы дело происходит на острове рыцарей и лжецов. Там есть всего две деревни. Жители одной из них — рыцари — всегда говорят правду. В другой деревне живёт племя лжецов, которые всегда лгут.

Задача 4.1. Путешественник дважды задал рыцарю один и тот же вопрос и получил на него разные ответы. Какой это мог быть вопрос?

Ответ: «Который час?», «Я тебе только что задавал вопрос?». Возможны и другие варианты вопросов, правильный ответ на которые меняется со временем.

Задача 4.2. Какой вопрос нужно задать жителю острова, чтобы узнать, лжец он или рыцарь?

Ответ: любой вопрос, на который известен правильный ответ. Например, «Сейчас идёт снег?».

Задача 4.3. Человек говорит: «Я лжец». Является ли он жителем острова рыцарей и лжецов?

Ответ: нет.

Решение. Конечно, рыцарь не может так сказать, ведь для него это было бы ложью. Но и лжец не может так сказать, ведь для него это было бы правдой. Значит, никакой островитянин не может назвать себя лжецом.

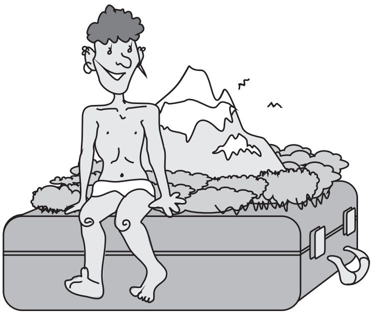
Задача 4.4. Придумайте вопрос, на который все жители острова ответят одинаково.

Ответ: «Ты рыцарь?».

Решение. Рыцарь ответит «Да», так как для него это верно, лжец ответит «Да», так как для него это неверно.

Комментарий. Можно задать аналогичный вопрос: «Ты лжец?». Любой житель острова ответит отрицательно.

Другой тип подходящих вопросов использует вопрос, на который заранее известен правильный ответ. Например, на вопрос «Если бы я спросил тебя, имеет ли Земля форму чемодана, ты бы ответил утвердительно?» любой житель острова ответит «Нет».



Задача 4.5. Собрались вместе два рыцаря и два лжеца. Мог ли кто-либо из них сказать следующую фразу:

а) «Среди *нас* все рыцари»;

б) «Среди *вас* есть ровно один рыцарь»;

в) «Среди *вас* рыцарей больше, чем лжецов»?

Если кто-либо мог, то укажите всех, кто мог, и объясните, почему он мог так сказать. Если никто не мог сказать такую фразу, то также объясните почему.

Решение. а) Рыцарь не мог, так как это неправда. Лжец мог по той же причине.

б) Мог сказать рыцарь, так как для него это верно. Мог сказать лжец, так как для него это неправда.

в) Никто не мог. Для рыцаря это высказывание неверно, а для лжеца верно.

Задача 4.6. Каждый из собравшихся на площади сказал: «Вы все лжецы!». Сколько среди них было рыцарей?

Ответ: один.

Подсказка: могло ли быть среди собравшихся больше одного рыцаря?

Решение. Все лжецами быть не могли, так как тогда для всех высказывание было бы верным. Если на площади было бы два или больше рыцарей, то тогда они не могли сказать «Вы все лжецы!», так как для них это было бы неверно. Если же на площади был один рыцарь, то он сказал «Вы все лжецы!», потому что для него это верно, а лжецы сказали так же, потому что для них это неверно.

Задача 4.7. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

Ответ: «Один».

Решение. Если первый — рыцарь, то в силу его слов второй и третий — лжецы, что невозможно из-за высказывания второго островитянина. Значит, первый — лжец. Если второй — лжец, то в силу его слов третий тоже лжец, но тогда первый сказал правду, а он должен был соврать. Значит, второй — рыцарь. В силу его слов третий тоже рыцарь. Третий честно ответит: «Один».

Комментарий 1. Приведённые рассуждения ведут к ответу кратчайшим путем. Но в процессе решения задачи редко удаётся сразу найти такой путь. Как, например, угадать, что про первого удобнее сначала проверить, не рыцарь ли он, а про второго — не лжец ли он? На практике удобно для начала организовать полный перебор в произвольном удобном порядке. Чтобы не упустить никакой случай, одновременно с устными рассуждениями желательно вести краткую запись. Например, такую:

1) **I — Р** $\Rightarrow$ **II — Л, III — Л.** (−)
2) **I — Л.**
   2а) **II — Р** $\Rightarrow$ **III — Р.** (+) $\boxed{\textbf{Один}}$
   2б) **II — Л** $\Rightarrow$ **III — Л** (−).

Здесь (−) означает наличие противоречия, (+) означает, что случай возможен, ответ обведён в рамку в момент появления, после чего перебор продолжается до победного конца. Теперь, когда решение известно, можно его «отполировать»: сначала объяснить невозможность случая 2б, а потом получить ответ из случая 2а.

Комментарий 2. Перебор может быть организован и по-другому. Поскольку каждый из трёх островитян может быть либо рыцарем, либо лжецом, без учета их ответов возможны 8 случаев: РРР, РРЛ, РЛР, РЛЛ, ЛРР, ЛРЛ, ЛЛР, ЛЛЛ. Здесь запись «ЛРР», например, означает, что первый островитянин лжец, а второй и третий — рыцари и т. п.

Из ответа первого следует невозможность случаев РРР, РРЛ, РЛР и ЛЛЛ. Из оставшихся случаев РЛЛ, ЛРЛ и ЛЛР противоречат ответу второго. Значит, реализуется случай ЛРР. Третий островитянин — рыцарь, он честно ответит: «Один».

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.8. Встретились рыцарь и два лжеца. Кто из них мог сказать такую фразу:

а) «Вы оба — лжецы!»;

б) «Вы оба — рыцари!»?

Задача 4.9. Путешественник нанял туземца-островитянина в проводники. По дороге они встретили другого туземца. Путешественник попросил проводника узнать, к какому племени принадлежит этот человек. Проводник вернулся и сообщил, что человек назвался рыцарем. Кем был проводник — рыцарем или лжецом?

Задача 4.10. За круглым столом сидят 6 островитян.

а) Каждый из них говорит: «Мой сосед справа — это рыцарь». Сколько рыцарей за столом?

б) Каждый из них говорит: «Мой сосед справа — это лжец». Сколько рыцарей за столом?

в) Что изменится, если в пунктах а) и б) за столом сидят 5 островитян?

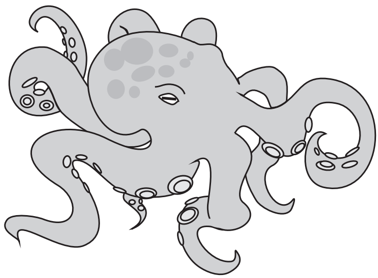
г) За круглым столом сидят 6 островитян. Каждый из них говорит: «Оба моих соседа — это лжецы». Сколько рыцарей за столом?

д) А если в пункте г) за столом сидят пятнадцать островитян?

Задача 4.11. Путешественник встретил пятерых островитян. На его вопрос «Сколько среди вас рыцарей?» первый ответил: «Ни одного!», а два других: «Один». Что ответили остальные?

Задача 4.12. Жители острова рыцарей и лжецов часто ходят друг другу в гости. Какой вопрос может задать путешественник первому встречному, чтобы узнать, в какой деревне он находится?

Задача 4.13. У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а те, у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зелёный: «Вместе у нас 27 ног», жёлтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног?



Задача 4.14. В конференции участвовало 100 человек — химики и алхимики. Каждому был задан вопрос: «Если не считать Вас, то кого больше среди остальных участников — химиков или алхимиков?» Когда опросили 51 участника и все ответили, что алхимиков больше, опрос прервался. Алхимики всегда лгут, а химики всегда говорят правду. Сколько химиков среди участников?

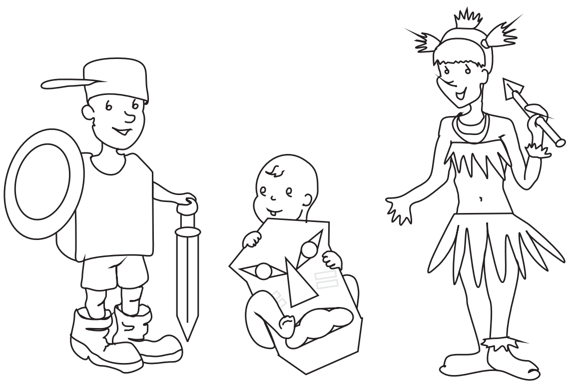
Занятие 5

Рыцари, лжецы и хитрецы

Пустился мой хитрец в переговоры...

И.А. Крылов. «Волк на псарне»

Задачи этого занятия несколько более сложные, чем задачи предыдущего, хотя и построены на тех же идеях. Здесь также уместно введение элементов ролевой игры. В самом начале занятия для знакомства с хитрецами стоит попросить каждого участника выбрать, кто он (рыцарь, лжец или хитрец), чтобы один из учеников, задавая вопросы, постарался узнать, кто есть кто. Не стоит жалеть на такое вступление 5–7 минут занятия.



После этого первая задача окажется продолжением игры. Если кто-то из участников кружка уже назывался лжецом, то она уже решена. Если нет, то учитель может предложить задать вопрос ему и назваться лжецом.

Если какой-то из пунктов второй задачи вызывает затруднения, можно разбить школьников на тройки и предложить в каждой группе распределить роли рыцаря, лжеца и хитреца, а потом придумать, как ответить на вопрос в соответствии с условием. Когда некоторые тройки это сделают, надо всем вместе объяснить, почему никак по-другому ответить было нельзя.

Ролевую игру можно использовать не только в процессе решения, но и при разборе задач в конце занятия. Ученик, решивший задачу, может объяснить решение товарищам, поручив нескольким из них говорить нужные слова, а затем рассуждая на получившемся «живом примере». Тогда вместо абстрактного «Пусть первый островитянин — хитрец...» получится смешное и запоминающееся «Пусть Петя — хитрец...».

Особенно помогает ролевая игра в задачах на придумывание подходящих вопросов. По нашему опыту без неё решение задач 5.11 и 5.12 (особенно последней) могут понять лишь очень сильные школьники. Только проиграв несколько раз эту ситуацию в разных ролях, ученики до конца понимают суть решения. Организовать игру можно так. Сначала разбиваем участников на группы по 4 человека и проигрываем задачу 5.11. Трое загадывают вместе, кто из них рыцарь, кто лжец, а кто хитрец. А четвёртый член команды пытается понять, кто есть кто, задавая различные вопросы. Если ему это удалось, то все меняются ролями. Группа, в которой все научились узнавать роли остальных, получает задачу 5.12 на коллективное обсуждение. После того как во всех командах научились решать задачу 5.11, можно заново разбить участников на группы по 5 человек и «разыграть» задачу 5.12. На этот раз четверо должны не только договориться, кто есть кто, но и выработать стратегию ответов для хитрецов. Обычно правильная стратегия возникает далеко не сразу, и при нескольких первых попытках пятому участнику команды удаётся понять, кто есть кто.

Кроме того, можно сделать и отдельное игровое занятие на основе задач из занятий 4 и 5, разбивая участников на группы, соответствующие условиям различных задач.

На остров рыцарей и лжецов поселилось ещё одно племя — хитрецы. Рыцари по-прежнему всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, хитрецы могут лгать или говорить правду по своему усмотрению.

Задача 5.1. Островитянин назвался лжецом. Кто он на самом деле?

Ответ: хитрец.

Решение. Ни лжец, ни рыцарь назвать себя лжецом не могут. Значит, он хитрец (и в данном случае солгал).

Задача 5.2. Путешественник встретил трёх островитян: рыцаря, хитреца и лжеца. На вопрос путешественника «Кто ты?» все трое ответили одинаково. Что именно?

Ответ: «Рыцарь».

Решение. Так как все трое ответили одинаково, а рыцарь сказал про себя «Рыцарь», то и остальные сказали то же самое.

Задача 5.3. Путешественник встретил трёх островитян: рыцаря, хитреца и лжеца. На вопрос путешественника «Кто ты?» было получено три разных ответа: «Рыцарь», «Лжец» и «Хитрец». Что можно узнать по этим ответам?

Ответ: можно узнать, кто есть кто.

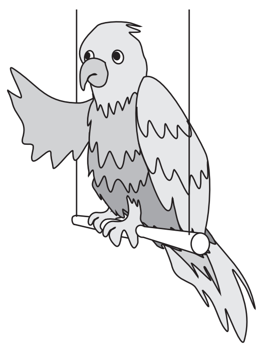
Решение. Рыцарь назвался рыцарем, лжец не мог назваться лжецом и поэтому назвался хитрецом, следовательно, хитрец солгал и назвался лжецом.

Задача 5.4. Путешественник встретил трёх островитян: рыцаря, хитреца и лжеца. На вопрос путешественника «Кто ты?» первый ответил: «Я не рыцарь», второй: «Я не хитрец», третий: «Я не лжец». Кто есть кто?

Ответ: первый — хитрец, второй — рыцарь, третий — лжец.

Решение. «Я не рыцарь» мог сказать только хитрец, так как это высказывание для рыцаря ложь, а для лжеца — правда. Лжец не мог сказать: «Я не хитрец», так как для него это правда, значит, он сказал: «Я не лжец», а рыцарь сказал: «Я не хитрец».

Задача 5.5. Собрались три попугая — Гоша, Кеша и Рома. Один из них всегда говорит правду, другой всегда лжёт, а третий — хитрец, он иногда говорит правду, иногда лжёт. На вопрос «Кто Кеша?» попугаи ответили так:



Гоша: «Кеша — лжец».

Кеша: «Я хитрец!»

Рома: «Кеша — абсолютно честный попугай».

Кто же из попугаев честный, кто лжец, а кто хитрец?

Ответ: Гоша — честный, Кеша — лжец, а Рома — хитрец.

Первое решение. Посмотрим, кто из попугаев честный. Это явно не Кеша, называющий себя хитрецом. Если это Рома, то и Кеша честный, что невозможно. Поэтому честным может быть только Гоша. Из его слов следует, что Кеша — лжец. Тогда Рома — хитрец.

Второе решение. Рома не может быть честным, так как тогда и Кеша честный, что невозможно. Значит, Рома либо лжец, либо хитрец.

Пусть Рома — лжец. Тогда Кеша — хитрец (он не может быть лжецом, ибо лжец Рома, и не может быть честным, поскольку тогда его высказывание ложно). Тогда честным должен быть Гоша, но этому противоречит его высказывание.

Следовательно, Рома — хитрец. Тогда Кеша, судя по его высказыванию, лжец, а для Гоши остаётся только возможность быть честным. Его высказывание действительно истинно. А из Роминого высказывания следует, что в данном случае он (Рома) солгал. Итак, честный — Гоша, хитрец — Рома, лжец — Кеша.

Комментарий. Заметим, что оба приведённых решения используют полный перебор. Но первое оказалось короче за счёт более удачного выбора параметра перебора. Подобная ситуация обсуждалась на первом занятии.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.6. Путешественник встретил трёх островитян. На вопрос «Есть ли среди вас лжецы?» все трое ответили «Да». Что можно узнать по этому ответу? А если бы их было четверо?

Задача 5.7. Двое островитян сказали друг о друге:

А: «Б — рыцарь».

Б: «А — не рыцарь».

Докажите, что хотя бы один из них — хитрец.

Задача 5.8. Среди трёх человек, А, В и С, есть рыцарь, лжец и хитрец. Они сказали:

А: «Я хитрец».

В: «Это правда».

С: «Я не хитрец».

Кем в действительности являются А, В и С?

Задача 5.9. Путешественник встретил трёх островитян, сидящих за круглым столом: рыцаря, хитреца и лжеца. На вопрос «Кто твой сосед справа?» все трое ответили по-разному. Может ли путешественник узнать, кто есть кто?

Задача 5.10. В Пустоземье живут три племени: эльфы, гоблины и хоббиты. Эльф всегда говорит только правду, гоблин всегда лжёт, а хоббит через раз говорит то правду, то ложь. Однажды за круглым столом пировало несколько пустоземцев, и один из них сказал, указав на своего левого соседа: «Он — хоббит». Сосед сказал: «Мой правый сосед солгал». В точности ту же фразу затем повторил его левый сосед, потом её же произнёс следующий по кругу, и так они говорили «Мой правый сосед солгал» много-много кругов, да и сейчас ещё, возможно, говорят. Определите, из каких племён были пирующие, если известно, что за столом сидело: а) девять; б) десять жителей Пустоземья.

Задача 5.11. Перед вами трое — лжец, рыцарь и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать? Вопросы можно задавать в любом количестве любому из троих.

Задача 5.12*. Перед вами четверо — лжец, рыцарь и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он.

Задача 5.13*. Среди четырёх островитян три рыцаря и один хитрец (все четверо знают, кто из них кто). Как найти хитреца, задав три вопроса, на которые можно ответить только «Да» или «Нет»?

Занятие 6

Африканские игры

В Африке жирафы, в Африке шакалы,
Львы и попугаи бродят как попало.
Приходите, ёжики, в Африку гулять!

Последнее занятие нашей книжки отличается от предыдущих. Во-первых, оно игровое. Во-вторых, всё занятие посвящено решению всего лишь одной сложной, но увлекательной задачи. На Математическом празднике 2012 года эту задачу решило только три человека из более чем полутора тысяч пятиклассников и шестиклассников. Даже по-настоящему понять написанное авторское решение могут немногие школьники. Тем не менее наш опыт показывает, что при правильной организации групповой работы на кружке эту задачу могут понять, а затем и решить практически все участники. Приведём подробный сценарий такого занятия.

Задача 6.1. Известно, что Шакал всегда лжёт, Лев говорит правду, Попугай просто повторяет последний услышанный ответ (а если его спросить первым, ответит как попало), а Жираф даёт честный ответ, но на предыдущий заданный ему вопрос (а на первый вопрос отвечает как попало). Мудрый Ёжик в тумане наткнулся на Шакала, Льва, Попугая и Жирафа и решил выяснить, в каком порядке они стоят. Спросив всех по очереди: «Ты Шакал?», он понял только лишь, где Жираф. Спросив всех в том же порядке: «Ты Жираф?», он смог ещё понять, где Шакал, но полной ясности так и не наступило. И лишь после того как на вопрос «Ты Попугай?» первый ответил «Да», Ежу, наконец, стало ясно, в каком порядке стояли животные. Так в каком же?

(«Как попало» означает, что один из ответов «Да» или «Нет» выбирается произвольно.)

Ответ: Попугай, Лев, Жираф, Шакал.

Авторское решение. На первый вопрос «Ты Шакал?» Лев и Шакал заведомо скажут «Нет». Поэтому узнать Жирафа и не узнать Попугая Ёж может только в одном случае: если Жираф ответит «Да», а Попугай «Нет».

То же можно сказать и о втором вопросе «Ты Жираф?» — на него Лев и Жираф скажут «Нет» (Жираф думает, что его спрашивают, Шакал ли он), стало быть, Шакал распознается по тому, что только он один и сказал «Да».

Поскольку ответа первого животного на третий вопрос хватило Ежу для определения всех (а до этого ответа информации не хватало), первым не стоял ни Жираф, ни Шакал (их ответы Ёжик мог предсказать заранее, и они ему ничего нового бы не сказали). Первым не мог стоять и Лев (он на третий вопрос ответил бы «Нет»), то есть первым был Попугай, который повторил ответ четвёртого на предыдущий вопрос. Теперь понятно, что четвёртый — Шакал.

У нас осталось две возможности расстановки:

(1): *Попугай*, *Жираф*, *Лев*, *Шакал* и

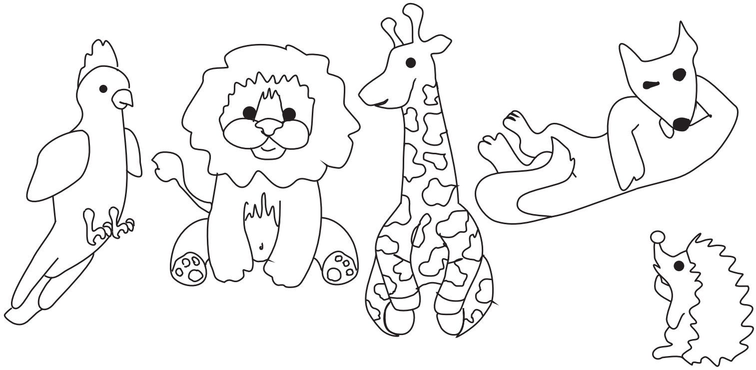
(2): *Попугай*, *Лев*, *Жираф*, *Шакал*.

Рассмотрим их.

Если бы имел место порядок (1), то Ёжик уже после первого опроса понял бы, что третий не Попугай, ведь он не повторил ответ второго.

А тогда после второго опроса все бы однозначно определились, и последний вопрос не понадобился бы. А вот в случае порядка (2) варианты *Попугай*, *Лев*, *Жираф*, *Шакал* и *Лев*, *Попугай*, *Жираф*, *Шакал* действительно не различались бы до последнего вопроса.

Реквизит. Очень хорошо иметь на занятии маски зверей, лучше самодельные. Можно использовать просто картинки, которые легко с помощью булавки прицеплять на одежду. Это оживляет начало работы, но вскоре захватывает сама задача. Если нет картинок, стоит для начала использовать просто листочки с первыми буквами: Л, Ш, Ж и П.



Этап 1. Уяснение условия. Начало поиска решения. Ученики разбиваются на группы по 5–7 человек. Четыре участника играют роли Льва, Шакала, Попугая и Жирафа, остальные — это Ёжики (или Ёжик и его помощники). Четверо героев становятся в разном порядке и отвечают на вопросы Ёжика. Сначала Ёжик задаёт первый вопрос («Ты Шакал?») всем четверым участникам. При разной расстановке и разных ответах Жирафа и Попугая получаются разные наборы ответов: все четыре «Нет»; два «Нет» и два «Да»; одно «Да» и три «Нет». После привыкания к условию задачи стоит поменять роли, чтобы все могли лучше почувствовать, как отвечают Жираф и Попугай, а также побыть в роли мудрого Ёжика. Во время этого разыгрывания обычно идёт активное обсуждение того, при каких же ответах Ёжик мог что-то понять после первой серии из четырех вопросов. Как правило, довольно быстро команды понимают, что Ёжик мог узнать, кто Жираф, только в том случае, когда Жираф сказал «Да», а остальные «Нет», и при этом Жираф был не первым (иначе его нельзя отличить от Попугая).

Руководитель кружка во время этой работы ходит между группами, следит, как идут дела, задает уточняющие вопросы, при необходимости чуть-чуть подталкивает группу в нужном направлении.

После того как группа разобралась с первой серией вопросов (четыре вопроса «Ты Шакал?»), идет прогонка следующей серии вопросов «Ты Жираф?», заданных поочередно всем персонажам. Здесь, наконец, все участники понимают тонкость условия, которая не сразу схватывается при чтении: каким образом во второй раз отвечает Попугай, если он стоит на первом месте. В этом случае Попугай повторяет ответ того, кто стоит последним. Чтобы это уяснить, командам, возможно, придётся несколько раз прогнать первые 2 серии вопросов.

Из разбора возможных вариантов ответов на первый вопрос «Ты Жираф?» участники делают следующий вывод: так как Ёжик смог понять, кто Шакал, то только Шакал должен был ответить «Да», а остальные «Нет». (Возможно добавление: Попугай не стоит после Шакала.)

Команды подходят к финальному вопросу. Теперь участники могут обсудить, что можно узнать из следующего предложения условия задачи: «И лишь после того как на вопрос „Ты Попугай?“ первый ответил „Да“, Ежу, наконец, стало ясно, в каком порядке стояли животные». Важно выделить здесь два сообщения:

1) ответ принес Ёжику новую информацию, то есть первый не Шакал и не Жираф;

2) первый не Лев, так как он ответил «Да». Значит, первый Попугай.

Этап 2. Построение правильного порядка, соответствующего условию задачи. Догадавшись, что первым стоит Попугай, команда, скорее всего, быстро сделает вывод, что последним стоит Шакал (так как именно его ответ «Да» повторил Попугай). Теперь остался последний шаг: понять, кто второй — Лев или Жираф. Это один из самых тонких моментов решения. Если бы вторым был Жираф, то Ёжик смог бы по первым четырём ответам понять, что третий не Попугай (так как он не повторил ответ «Да» Жирафа), и, значит, последний, девятый ответ мудрому Ёжику был бы не нужен. Если решение найдено, команда зовет руководителя и демонстрирует порядок расстановки и правильные ответы всех зверей. Учителю стоит попросить всех поменяться ролями, чтобы убедиться, что все в группе понимают, кто как отвечает.

Если команда предлагает вместо правильной расстановки (или вместе с ней) ещё такую: *Попугай*, *Жираф*, *Лев*, *Шакал* и не может самостоятельно найти в ней противоречие, можно помочь детям наводящими вопросами «Кого определил Ёж третьим вопросом?» (Льва и Попугая), «Как по-другому могли бы стоять Лев и Попугай при неизменном положении Жирафа и Шакала?» (*Лев*, *Жираф*, *Попугай*, *Шакал*). Попробуйте-ка так встать и отвечать на вопросы в соответствии с условием задачи!

Этап 3. Обсуждение единственности приведённого примера, коллективное сочинение полного решения.

После того как группа покажет правильную расстановку зверей, надо спросить о возможности других расстановок. Основываясь на проведённой ими игре, дети, скорее всего, скажут, что расстановка единственная. А учитель предложит им доказать это. Когда группа выработает доказательство, руководитель выслушивает сначала любого (обычно самого активного) члена группы и делает замечания, если решение неполное или очень запутанное. После этого стоит попросить рассказать решение кого-нибудь другого из группы.

Если в разных группах решения получились непохожими друг на друга, можно попросить каждую группу рассказать свое решение другим.

Приведём пример довольно короткого решения, сочинённого шестиклассниками при такой работе.

1) Первым не мог быть ни Жираф, ни Шакал, так как их ответы на последний вопрос не дали бы Ёжику ника-

кой дополнительной информации. Лев на последний вопрос ответил бы «Нет», значит, первым был Попугай.

2) Раз Попугай сказал «Да», то последний из стоящих на предыдущий вопрос ответил «Да». Это не мог быть ни Лев, ни Жираф. Значит, последний — Шакал.

3) На первый вопрос Лев и Шакал ответили «Нет». А так как Ёжик смог найти Жирафа, то Жираф ответил «Да», а Попугай «Нет». Лев не мог быть третьим, так как тогда по первым восьми ответам Ёжик мог бы определить, кто есть кто, — он бы точно знал, что на третьем месте не Попугай (он на первом круге не повторил ответ второго). Значит, Лев второй, а Жираф третий.

Обычно разные команды решают задачу за разное время. Пока остальные группы додумывают решение, самые быстрые могут начать играть в две игры на основе разобранной задачи.

Если группа недостаточно сильная, первый и второй этапы работы заняли много времени, группа устала и уже не готова обсуждать такие тонкости, как доказательство единственности найденного решения, то можно оставить вопрос единственности на домашнее обдумывание и сразу перейти к играм.

Игра № 1. Четверо тайно тянут бумажки, на которых написаны четыре персонажа — не Ёжика, — и становятся в произвольном порядке, не показывая друг другу бумажки. Ёжик с помощниками старается отгадать, кто есть кто, задавая любые вопросы.

Игра № 2. Командная игра. В неё лучше играть после того, как несколько раз сыграли в игру № 1. Четверо «не Ёжиков» уходят и договариваются, как лучше встать и как отвечать, чтобы Ёжики не могли быстро отгадать, кто есть кто. Ёжики стараются отгадать за меньшее число вопросов, «не Ёжики» — максимально увеличить необходимое число вопросов. Затем команды меняются ролями.

По нашему опыту закончить такое занятие бывает трудно: дети хотят играть всё дальше и дальше. Если у вас так и получилось, значит, главное достигнуто: математика и удовольствие стали синонимами. Примите наши поздравления!

Дополнительные задачи

Все утверждения верны

Фадеев, Калдеев и Пепермалдеев
однажды гуляли в дремучем лесу.
Фадеев в цилиндре, Калдеев в перчатках,
а Пепермалдеев с ключом на носу.

Даниил Хармс

Задача Д1. Саша сидит на скамейке. Все братья Саши — Петя, Коля и Лёня — тоже сидят на этой скамейке. При этом Лёня и Петя сидят рядом, а из братьев Коли левее него сидят ровно двое. Может ли Саша сидеть не с краю?

Задача Д2. Васиного папу зовут Дмитрий Сергеевич, а дедушку Иван Петрович. Бабушка Валя зовёт Васину маму Ирочкой. Васина мама работает учительницей. Как её называют ученики (по имени и отчеству)?

Задача Д3. Каждый из четырёх инопланетян умеет писать только две буквы. *Кра* умеет писать буквы ◯ и △; *Кре* — буквы ◊ и ◯; *Кру* — буквы ◊ и □, *Крю* — буквы △ и □. Они оставили землянам послание △◊□◯△△, причём никто не написал ни две соседние буквы, ни две стоящие через одну буквы. Какую из букв кто написал? Ответ обоснуйте.

Задача Д4. За круглым столом сидели четверо. Почтальон сидел против Козлевича, рядом с академиком. Водитель сидел рядом со Степановым. Соседи Печкина — Иванов и дворник. Какая профессия у Козлевича?

Задача Д5. В забеге шести спортсменов Андрей отстал от Бориса и ещё от двух спортсменов. Виктор финишировал после Дмитрия, но ранее Геннадия. Дмитрий опередил

Бориса, но всё же пришёл после Евгения. Какое место занял каждый спортсмен?

Задача Д6. Фадеев, Калдеев и Пепермалдеев живут на нашей улице. Один из них — столяр, другой — маляр, третий — гусляр. Недавно маляр хотел попросить своего знакомого столяра сделать кое-что для своей квартиры, но ему сказали, что того сейчас пригласил поработать гусляр. Известно также, что Фадеев никогда не слышал о Калдееве. Кто чем занимается?

Задача Д7. Четыре мальчика — Антон, Коля, Володя и Сергей (все из разных классов) — и их одноклассницы ходят на кружок бальных танцев, причём каждый мальчик танцует не в паре со своей одноклассницей. Лена танцует с Антоном, Аня — с одноклассником Наташи, Коля — с Володиной одноклассницей, а Володя — с Олей. Кто с кем танцует? Кто с кем учится в одном классе?

Задача Д8. В пяти корзинах — А, Б, В, Г и Д — лежат яблоки пяти разных сортов. В каждой из корзин А и Б находятся яблоки 3-го и 4-го сорта, в корзине В — 2-го и 3-го, в корзине Г — 4-го и 5-го, в корзине Д — 1-го и 5-го. Садовник занумеровал корзины так, чтобы в первой корзине имелись яблоки первого сорта (как минимум одно), во второй корзине — яблоки второго сорта и т. д. Можете ли вы назвать номер корзины Г? А корзины А?

Задача Д9. Исполняя четырёхчастный квартет, проказница Мартышка, Осёл, Козёл и косолапый Мишка решили меняться не местами, а инструментами. Каждый «музыкант» попробовал по очереди все четыре партии: баса, альта, примы и вторы. В первой части Козёл выступил в роли примы, во второй — вторы. Медведь во второй части исполнял партию баса, Мартышка в третий раз — альта, а Осёл в четвёртый раз — примы. Определите, кто на каком инструменте исполнял каждую часть квартета.

Задача Д10*. Смит, Джонсон и Робинсон работают в одном поезде машинистом, кондуктором и кочегаром. В поезде едут три пассажира с теми же фамилиями. (Пассажира будем называть «Мистер».) Мистер Робинсон живет в Лос-Анджелесе, кондуктор — в Омахе. Мистер Джонсон давно позабыл всю алгебру, которой его учили в колледже. Однофамилец кондуктора живет в Чикаго. Кондуктор и один из пассажиров, известный специалист по математической физике, ходят в одну церковь. Смит всегда выигрывает у кочегара партию в бильярд. Какова фамилия машиниста?

Задача Д11. На рисунке изображено родословное дерево одной семьи, родоначальником которой был Иван Фёдорович. Вот все его потомки: Иван Петрович, Иван Сергеевич, Василий Иванович, Василий Петрович, Сергей Николаевич, Николай Иванович, Илья Николаевич, Пётр Иванович. Установите, как звали каждого из потомков Ивана Фёдоровича, изображённых на рисунке.

Верные и неверные утверждения

А ты смеёшься надо мной, ты ешь варение из вишен
И мне не веришь ни на грош, и я не верю сам себе.

Михаил Щербаков

Задача Д12. В трёх непрозрачных банках хранится малиновое варенье, вишнёвое варенье и сгущённое молоко. На первой написано «Сгущённое молоко», на второй — «Варенье», на третьей — «Малиновое варенье». Все надписи неверны. Что находится в какой банке?

Задача Д13. Имеются три шкатулки. В одной лежат бриллианты, а две другие при попытке открыть взрываются. На каждой написаны два утверждения. На одной оба утверждения истинны, на другой— оба ложны, а на третьей шкатулке одно утверждение истинно, а другое — ложно.

Вот эти утверждения:

Шкатулка 1

1.1. Эта шкатулка взрывоопасна!

1.2. Бриллианты во второй шкатулке.

Шкатулка 2

2.1. Первая шкатулка взрывоопасна!

2.2. Бриллианты в третьей шкатулке.

Шкатулка 3

3.1. Эта шкатулка взрывоопасна!

3.2. Бриллианты в первой шкатулке.

Какую шкатулку вы бы открыли?

Задача Д14. Три мальчика нашли в море старинную амфору. Один сказал, что её изготовили финикийцы в V веке до н. э., второй — что она сделана греками в III веке до н. э., а третий сказал, что амфора не греческая, а изготовлена в IV веке до н. э. В музее ребятам объяснили, что каждый из них прав ровно наполовину. В каком веке и каким народом изготовлена амфора?

Задача Д15. На новогоднем карнавале Мальвина получила подарок. Буратино считает, что ей подарили красный бантик, Пьеро уверен, что это голубой бантик, а Артемон говорит, что в подарке белый медвежонок. Оказалось, что каждый из них верно указал либо вид подарка, либо его цвет. Какой подарок получила Мальвина?

Задача Д16. Семья весёлых гномов состоит из папы, мамы и ребёнка. Имена членов семьи: Саша, Женя и Валя. За обеденным столом два гнома сделали по два заявления.

Валя: «Женя и Саша — разного пола. Женя и Саша — мои родители».

Саша: «Я — отец Вали. Я — дочь Жени».

Восстановите имя и отчество гнома-ребёнка, если известно, что каждый гном один раз сказал правду и один раз пошутил.

Задача Д17. В комнате общежития живут 4 девушки: Аня, Валя, Света и Дина. Однажды их однокурсник поинтересовался, сколько каждой из девушек лет. На его вопрос были даны следующие ответы:

Аня: «Свете 19 лет, а Вале 20 лет».

Валя: «Дине 18 лет, а мне 19 лет».

Света: «Дине 17 лет, а Ане 19 лет».

Дина: «Одногодок среди нас нет, причем самой старшей из нас 20 лет, а самой младшей 17 лет».

Он удивился столь противоречивым ответам. Тогда девушки сказали, что только Дина полностью сказала правду, а в каждом из ответов других девушек одна часть верна, а другая неверна. Парень улыбнулся, подумал и по этим ответам правильно определил, сколько лет каждой из девушек. Попробуйте и вы определить их возраст.

Задача Д18. В велогонках приняли участие пять школьников. После гонок пять болельщиков заявили:

1) Коля занял первое место, а Ваня — четвёртое;

2) Серёжа занял второе место, а Ваня — четвёртое;

3) Серёжа занял второе место, а Коля — третье;

4) Толя занял первое место, а Надя — второе;

5) Надя заняла третье место, а Толя — пятое.

Зная, что одно из показаний каждого болельщика верное, а другое неверное, найдите правильное распределение мест.

Задача Д19. Перед забегом Джон, Никита и Шарль дали по два прогноза.

Джон: «Я приду первым, а Шарль — предпоследним».

Никита: «Я приду первым, а Шарль — предпоследним».

Шарль: «Я приду первым, а Джон — последним».

Больше в забеге никто не участвовал, и из всех прогнозов сбылись три. В каком порядке финишировали участники?

Задача Д20. Учительница математики написала на доске четырёхзначное число, в котором все цифры различны и не равны нулю, и вызвала к доске семиклассников Петрова и Васечкина. Один из них отличник и всегда прав, а другой двоечник и всегда ошибается. Каждый сделал по два утверждения. Петров сказал: «Одна из цифр этого числа равна сумме всех остальных. Вторая цифра самая большая». Васечкин сказал «Вторая цифра не меньше трёх. Первая цифра делится на все остальные». Какое число написала учительница? (Найдите все возможные варианты ответа.)

Задача Д21. Мальчик по четвергам и пятницам всегда говорит правду, а по вторникам всегда лжёт. Семь дней подряд мальчика спрашивали, как его зовут. Шесть первых дней он давал такие ответы: Андрей, Борис, Андрей, Борис, Виктор, Борис. Как он ответил на седьмой день?

Задача Д22*. У пиратов Гарри, Тома и Чарли состоялся такой разговор:

Гарри: «У Тома два глаза».

Том: «У Чарли два глаза».

Чарли: «У Гарри два глаза».

Гарри: «У нас два глаза на троих».

Том: «У нас три глаза на троих».

Чарли: «У нас четыре глаза на троих».

Оказалось, что каждый соврал столько раз, сколько у него глаз. Сколько глаз у каждого из пиратов?

Задача Д23. В школе колдовства 13 учеников. Перед экзаменом по ясновидению преподаватель посадил их за круглый стол и попросил угадать, кто получит диплом ясновидящего. Про себя и двух своих соседей все скромно умолчали, а про всех остальных написали: «Никто из этих десяти не получит!» Конечно же, все сдавшие экзамен оказались правы, а все остальные ошиблись. Сколько колдунов получило диплом?

Задача Д24*. а) Было 12 карточек с надписями «Слева от меня — ровно 1 ложное утверждение», «Слева от меня — ровно 2 ложных утверждения», ..., «Слева от меня — ровно 12 ложных утверждений». Петя разложил карточки в ряд слева направо в каком-то порядке. Какое наибольшее число утверждений могло оказаться истинными?

б) Было 33 карточки с надписями «Слева от меня — ровно 1 карточка, где написана ____», «Слева от меня — ровно 2 карточки, где написана ____», ..., «Слева от меня — ровно 33 карточки, где написана ____». Вместо подчёркивания Петя вписал «ложь» или «правда» (не обязательно везде одно и то же) и разложил карточки в ряд слева направо в каком-то порядке. Какое наибольшее число надписей могло стать правдой?

Рыцари и лжецы

Пред испанкой благородной
Двое рыцарей стоят.
Оба смело и свободно
В очи прямо ей глядят.

А. Пушкин

Тля ест траву, ржа — железо, а лжа — душу...

А. Чехов

Задача Д25. Путешественник встретил трёх жителей острова рыцарей, лжецов и хитрецов. На вопрос «Есть ли среди вас рыцари?» все трое ответили «Нет». Что можно узнать по этому ответу?

Задача Д26*. Перед вами трое: два рыцаря и хитрец. Как за два вопроса, на которые можно ответить «Да» или «Нет», определить, кто хитрец?

Задача Д27. В пятом классе учатся три девочки: Ира, Галя и Наташа. Одна из них самая умная, и она всегда говорит правду. Другая самая красивая, и она всегда лжёт. А третья девочка самая хитрая: она иногда лжёт, а иногда говорит правду. Ира сказала: «Я красивее Гали». Галя сказала: «Я умнее Наташи». Наташа сказала: «Я хитрее Иры». Какая из девочек самая красивая?

Задача Д28. На острове живут только рыцари и лжецы. Три брата-островитянина (старший, средний и младший) получили в наследство кота, осла и мельницу. После этого каждый из братьев сделал два заявления: «Тот, кто получил мельницу, старше меня» и «Тот, кто получил кота, младше меня». Сколько среди братьев лжецов?

Задача Д29. Некоторые жители Острова Разноцветных Лягушек говорят только правду, а остальные всегда лгут. Трое островитян сказали следующее.

Бре: «На нашем острове нет синих лягушек».

Ке: «Бре лгун. Он же сам синяя лягушка!»

Кекс: «Конечно, Бре лгун. Но он красная лягушка».

Водятся ли на этом острове синие лягушки?

Задача Д30. В городе живут только рыцари и лжецы. Однажды в автобусе ехало несколько человек. «Сейчас остановка А. Следующая остановка — Б», — произнес первый пассажир. «Сейчас остановка Б, — сказал второй. — Предыдущая была В». «Предыдущая была В, — вступил в спор третий пассажир. — А сейчас остановка А!» Определите, сколько из этих троих пассажиров — рыцари.

Задача Д31. Все гномики делятся на лжецов и рыцарей. На каждой клетке доски 4×4 стоит по гномику. Известно, что среди них есть и лжецы, и рыцари. Гномики являются соседями, если их клетки имеют общую сторону. Каждый гномик заявил: «Среди моих соседей лжецов и рыцарей поровну». Сколько всего лжецов?

Задача Д32*. Шесть незнакомых между собой жителей острова лжецов и рыцарей поужинали за круглым столом при свечах, так что каждый из них разглядел и запомнил только двух своих соседей по столу. Назавтра одному из них — Артуру — захотелось узнать, кто сидел напротив него. Он может за один вопрос узнать у любого про любого другого (кроме себя), спросив: «Сидел ли тот рядом с тобой за ужином?» Хватит ли Артуру четырёх вопросов?

Задача Д33. В классе учатся рыцари и лжецы, всего 25 учеников. Первый сказал: «Среди моих друзей-одноклассников рыцарей на одного больше, чем лжецов». Второй сказал: «Среди моих друзей-одноклассников рыцарей на два больше, чем лжецов». И так далее, вплоть до двадцать пятого ученика, который сказал: «Среди моих друзей-одноклассников рыцарей на 25 больше, чем лжецов». Сколько лжецов учится в этом классе?

Задача Д34*. На острове рыцарей и лжецов живет 100 человек. Каждого из них спросили: «Сколько рыцарей среди твоих друзей на этом острове?» Среди ответов каждое число от 0 до 99 встретилось ровно по одному разу. Сколько на этом острове рыцарей?

Задача Д35. На некотором острове женщины всегда лгут, а мужчины говорят правду. Часть выпускников школы острова пригласили на выпускной бал. Когда опросили всех выпускников, получали ли они приглашения, количество ответов «Да» совпало с числом приглашённых. Какая часть выпускниц получила приглашения на бал?

Задача Д36. На Острове Контрастов живут рыцари и лжецы (есть и те, и другие). Некоторые жители заявили, что на острове чётное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечётное число лжецов. Может ли число жителей острова быть нечётным?

Задача Д37*. На острове рыцарей и лжецов проживают 1234 жителя. Однажды все жители острова разбились на пары, и каждый про своего соседа по паре сказал: «Он — рыцарь!» либо «Он — лжец!» Могло ли в итоге оказаться, что тех и других фраз произнесено поровну?

Задача Д38. В отряде богатырей все весят по-разному и делятся на наивных (всегда говорят правду) и тёртых (хану правды не говорят). Несколько богатырей стали в круг. На вопрос хана «У тебя есть тёртый сосед легче тебя?» все ответили «Нет». После разминки они стали в круг в другом порядке. Докажите, что на вопрос хана «У тебя есть наивный сосед легче тебя?» кто-нибудь ответит «Нет».

Задача Д39. В отряде богатырей все весят по-разному и делятся на наивных (всегда говорят правду) и тёртых (хану правды не говорят). 33 богатыря стали в круг. На вопрос хана «У тебя есть тёртый сосед легче тебя?» все ответили «Да». После разминки они стали в круг в другом порядке. Докажите, что на вопрос хана «У тебя есть наивный сосед легче тебя?» как минимум двое ответят «Да».

Задача Д40. а) По кругу стоят лжецы и рыцари. В первый раз каждого спросили: «Верно ли, что твой сосед справа — лжец?» Во второй раз каждого спросили: «Верно ли, что твой сосед слева — лжец?» Докажите, что число ответов «Нет» одинаково в обоих случаях.

б*) По кругу стоят лжецы и рыцари, всего 100 человек. В первый раз каждого спросили: «Верно ли, что твой сосед справа — лжец?» Двое ответили «Да», остальные — «Нет». Во второй раз каждого спросили: «Верно ли, что твой сосед слева через одного — лжец?» И снова двое ответили «Да», остальные — «Нет». В третий раз спросили: «Верно ли, что стоящий напротив тебя — лжец?» Сколько человек на этот раз ответят «Да»?

Задача Д41. По кругу стоят 2014 островитян, рыцари и лжецы (есть и те, и другие). Каждого из них спросили: «Верно ли, что среди твоих соседей чётное количество лжецов?» Могло ли так случиться, что каждый из них ответил «Да»?

Задача Д42*. На острове рыцарей и лжецов каждый болеет ровно за одну футбольную команду. В опросе приняли участие все жители острова. На вопрос «Болеете ли вы за „Спартак“?» ответили «Да» 40% жителей. На аналогичный вопрос про «Зенит» утвердительно ответили 30%, про «Локомотив» — 50%, а про ЦСКА — 0%. Какой процент жителей острова действительно болеет за «Спартак»?

Необычные персонажи

Один Осьминог подошел к Осьминогу
и в знак уваженья пожал ему ногу.

Рената Муха

Задача Д43. В стране три города: Правдин, Лгунов и Переменск. Жители Правдина всегда говорят правду, Лгунова — лгут, а жители Переменска строго попеременно лгут и говорят правду. Пожарным позвонили: «У нас в городе пожар!» — «Где горит?» — «В Переменске». Пожарные уверены, что пожар есть. Куда им ехать?

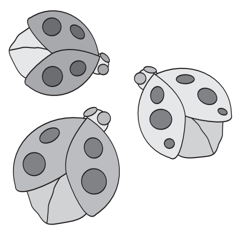
Задача Д44. В Лесогории живут только эльфы и гномы. Гномы лгут, говоря про своё золото, а в остальных случаях говорят правду. Эльфы лгут, говоря про гномов, а в остальных случаях говорят правду. Однажды два лесогорца сказали следующее.

А: «Всё моё золото я украл у Дракона».

Б: «Ты лжёшь».

Определите, эльфом или гномом является каждый из них.

Задача Д45. На острове божьих коровок бывают коровки с четырьмя и шестью точками на спине. Те, у кого шесть точек, всегда говорят правду, а те, у кого четыре точки, всегда обманывают. Встретились как-то три божьи коровки, и между ними состоялся такой разговор.



Красная божья коровка: «У всех нас одинаковое количество точек на спине».

Жёлтая божья коровка: «А в сумме их 12».

Оранжевая божья коровка: «Ничего подобного, в сумме их 14».

Сколько точек было у каждой божьей коровки на спине?

Задача Д46. Если у осьминога чётное число ног, он всегда говорит правду. Если нечётное, то он всегда лжет. Однажды зелёный осьминог сказал тёмно-синему:

— У меня 8 ног. А у тебя только 6.

— Это у меня 8 ног, — обиделся тёмно-синий. — А у тебя всего 7.

— У темно-синего действительно 8 ног, — поддержал фиолетовый и похвастался: — А вот у меня целых 9!

— Ни у кого из вас не 8 ног, — вступил в разговор полосатый осьминог. — Только у меня 8 ног!

У кого из осьминогов было ровно 8 ног?

Задача Д47. На острове живут рыцари орденов Алой и Белой розы. Рыцари ордена Алой розы никогда не говорят правду два раза подряд, а рыцари ордена Белой розы никогда не обманывают два раза подряд. Два островитянина встретились и сделали по 2 заявления. Первый: «Я из ордена Алой розы» и «Мы оба из одного ордена». Второй: «Мы оба из одного ордена» и «Среди произнесённых нами утверждений ложных больше, чем правдивых». Кто из какого ордена?

Задача Д48. В стране Непедагогии дети врут только родителям, а родители — только детям (но уж врут всегда). В семье, кроме папы и мамы, трое детей. Боря сказал Даше, показав на Галю: «Но я же старше неё!», а потом Инне, показав на Ваню: «Но я же старше него!» Как зовут папу и маму?

Задача Д49. Ирокезы всегда говорят правду ирокезам и нагло врут делаварам, а делавары всегда говорят правду своим соплеменникам и предусмотрительно лгут ирокезам. Как-то раз 12 индейцев сели в круг, и каждый из них сказал своему соседу справа: «Ты — ирокез» или «Ты — делавар». Этих фраз оказалось поровну. Сколько ирокезов и сколько делаваров сидели в кругу, если представителей других племен там не было?

Задача Д50. В городе Глупове живут только полицейские, воры и обыватели. Полицейские всегда врут обывателям, воры — полицейским, а обыватели — ворам. Во всех остальных случаях жители Глупова говорят правду. Однажды несколько глуповцев водили хоровод и каждый сказал своему правому соседу: «Я — полицейский». Сколько обывателей было в этом хороводе?

Задача Д51. На острове Правландия все жители могут ошибаться, но младшие никогда не противоречат старшим, а когда старшие противоречат младшим, они (старшие) не ошибаются. Между жителями А, Б и В произошёл такой диалог.

А: «Б — самый высокий».

Б: «А — самый высокий».

В: «Я выше Б».

Верно ли, что среди трёх говоривших людей чем моложе человек, тем он выше?

Задача Д52*. В кофейне встретились 55 индийцев и турок, каждый из которых пил либо чай, либо кофе. Все индийцы говорят правду, когда пьют чай, и обманывают, когда пьют кофе, а все турки — наоборот. На вопрос «Вы пьёте кофе?» ответили «Да» 44 человека, а на вопрос «Вы турок?» — 33 человека. С утверждением «На улице идёт дождь» согласились 22 человека. Сколько индийцев в кофейне пьют чай?

Задача Д53*. У разбойника три монеты достоинством в 1, 1 и 2 динара: по монете в каждой руке и одна в кошельке. Разбойник поймал Али-Бабу и обещает отпустить его, если Али-Баба угадает, какая монета у него в левой руке. Али-Баба может задать всего один вопрос, причём разбойник ответит честно, если у него в правой руке 1 динар, и солжёт, если там 2 динара. Помогите Али-Бабе придумать какой-нибудь вопрос, который позволит ему угадать монету в левой руке разбойника. Не забудьте объяснить, почему вы считаете придуманный вами вопрос подходящим.

Подсказки

1.7. Проверьте по очереди про каждого мальчика, мог ли именно он сказать правду.

1.8. Выберите любого преступника. Он мог верно указать либо цвет, либо марку машины. Рассмотрите оба случая.

1.10. Не хотите перебирать все возможные исходы матча с точностью до счёта? И не надо, их бесконечно много! Зато ответов на вопрос «Кто выиграл?» всего три.

1.12. Эта задача сложнее всех предыдущих. Полный перебор по количеству пойманных рыб невозможен. Перебор по тому, какое из трёх утверждений каждого мальчика истинно, приводит к рассмотрению «всего лишь» 27 случаев. Рассматривать их по очереди и искать 26 противоречий — занятие не из приятных. Вспомним первую задачу этого занятия: чтобы найти короткое решение, мы заметили, что Добрыня и Алёша утверждают одно и то же. Похожий приём применён и в первом решении задачи про самолётик, упавший на Олину парту: там, напротив, высказывания Вани и Серёжи противоречат друг другу. Попробуем и на этот раз поискать либо одинаковые, либо взаимоисключающие высказывания. Это и есть та «заветная ниточка», потянув за которую легко распутать клубок.

2.9. Угадать ответ просто. Нетрудно даже привести пример, как такое могло быть: все, кроме Вани, заняли ровно на одно место ниже, чем рассчитывали, а Ваня — первое. Но как доказать, что никакого другого места Ваня занять не мог? Для этого полезно поискать узкое место: на какое место в чемпионате труднее всего подобрать кандидата?

3.6. Начните «раскручивать» задачу с последнего условия.

3.10. Используйте латинский квадрат.

3.11. Используйте латинский квадрат.

4.9. Подумайте, что мог сказать другой туземец проводнику?

4.10. г) Какие соседи могут быть у лжеца, если он сказал: «Оба моих соседа — это лжецы»?

4.11. Может ли первый островитянин быть рыцарем?

4.12. Как заставить рыцаря и лжеца отвечать одинаково? Спросить о том, что для одного из них правда, а для другого — нет. При этом ещё и деревню упомянуть, иначе узнать про неё ничего не удастся.

4.13. Сколько осьминогов могли сказать правду?

4.14. Если среди опрошенных был алхимик, какой вывод можно сделать из его ответа?

5.9. Рассмотрите два случая: 1) справа от рыцаря лжец; 2) справа от него хитрец. Найдите, что общего в обоих случаях.

5.10. Сидящий за столом сказал фразу «Мой правый сосед солгал» на первом круге и повторил на втором. Он при этом подтвердил свое мнение или спорит сам с собой?

5.13. Разбейте островитян на две пары и задайте некий вопрос каждому из одной пары про другую пару.

Дополнительные задачи

Д1. Есть подвох. Подумайте, почему в условии не сказано явно о четырёх сидящих на скамейке братьях.

Д3. Кто мог написать две последние буквы?

Д4. Почтальона Печкина вы наверняка узнали! Впрочем, остальные персонажи тоже задолго до этой задачи придуманы. Но, конечно, решение должно опираться не на знание стихов, песен и мультфильмов, а на логические рассуждения.

Д9. Составьте латинский квадрат.

Д17. Может ли Свете быть 19 лет?

Д20. Может ли самая большая цифра быть меньше 3?

Д21. Мог ли первый день оказаться четвергом?

Д22. Может ли у кого-то из пиратов вообще не быть глаз?

Д25. Решение аналогично решению задачи 5.6.

Д26. В каких случаях один из героев задачи может назвать другого рыцарем, а в каких — хитрецом?

Д30. Обратите внимание на одинаковые высказывания.

Д31. Может ли говорить правду гномик, у которого нечётное число соседей?

Д32. Артуру незачем узнавать, кто рыцарь, а кто лжец.

Д33. Начните с 25-го ученика.

Д36. Что можно сказать про жителей, сделавших одно и то же утверждение?

Д37. Подумайте, одинаково ли говорили друг о друге островитяне из одной пары?

Д38. Как могло случиться, что все тёртые богатыри ответили на первый вопрос «Нет»?

Д45. Могла ли жёлтая божья коровка сказать правду?

Д48. Правду ли сказал Боря Инне?

Д49. Что скажет ирокез ирокезу? А ирокез делавару?

Ответы

Занятие 1

1.5. Алёша.

1.6. Афродита.

1.7. Алёша в хоровом, Вася в танцевальном, Серёжа в драматическом.

1.8. Чёрный «Бьюик».

1.9. Андрей первый, Гриша второй, Боря третий, Вася четвёртый.

1.10. «Юг» выиграл со счетом 2:1.

1.11. Либо ровно 100 пальм, либо ни одной пальмы.

1.12. Петя поймал 23 рыбы, Гриша — 25, а Вася — 22 рыбы.

Занятие 2

2.7. Алмаз нашёл Пили, топаз — Ели, а медный таз — Спали.

2.8. Портрет Орла написал Попугай, авторов других картин определить нельзя.

2.9. Первое.

2.10. У Вали белые туфли и голубое платье, у Лиды голубые туфли и белое платье, у Тамары — красные туфли и красное платье.

2.11. С физиком и историком математик говорил по-русски, а с биологом — по-английски.

2.12. Жуй Джем, Джем Пей, Пей Чай и Чай Жуй (имя предшествует фамилии).

Занятие 3

3.6. Алла, Вика, Боря, Соня, Денис.

3.7. а, б) Да: Пётр и Аркадий; в) нельзя; г) да: Владимир; д) нельзя.

3.9. Аня в белом платье, Валя в голубом, Галя в зелёном, а Нина в розовом.

3.10. Слева Козёл, в центре Мартышка, справа Осёл.

3.11. а) Да; б) нет.

3.12. Можно. И капитаном, и шурманом стал Гектор.

Занятие 4

4.8. а) Любой из встретившихся; б) лжецы.

4.9. Рыцарем.

4.10. а) 0 или 6; б) 3; г) 2 или 3; д) 5, 6 или 7.

4.11. «Два».

4.12. «Вы живёте в этой деревне?» Или так: «Вы здесь гость?» Есть и другие варианты.

4.13. У зелёного осьминога шесть ног, а у остальных по семь ног.

4.14. 50.

Занятие 5

5.6. Все были хитрецами.

5.8. А — лжец, В — хитрец, С — рыцарь.

5.9. Может.

5.10. а) Все были хоббитами; б) пять гоблинов и пять эльфов.

Дополнительные задачи

Д1. Может.

Д2. Ирина Ивановна.

Д3.

△	◊	□	◯	△	△
Кра	Кру	Крю	Кре	Кра	Крю

Д4. Водитель.

Д5. Первым финишировал Евгений, вторым — Дмитрий, третьим — Борис, четвертым — Андрей, пятым — Виктор, шестым — Геннадий.

Д6. Пепермалдеев — столяр, Калдеев — маляр, а гусляр — Фадеев.

Д7. Танцуют Лена с Антоном, Аня с Колей, Оля с Володей, Наташа с Сергеем. Учатся вместе Лена с Сергеем, Аня с Володей, Оля с Антоном, а Наташа с Колей.

Д8. Корзина Г имеет номер 5, а номер корзины А либо 3, либо 4.

Д10. Смит.

Д11. 1 — Пётр Иванович, 2 — Василий Иванович, 3 — Василий Петрович, 4 — Иван Петрович, 5 — Николай Иванович, 6 — Сергей Николаевич, 7 — Илья Николаевич, 8 — Иван Сергеевич.

Д12. В первой — малиновое варенье, во второй — сгущённое молоко, в третьей — вишнёвое варенье.

Д13. Третью шкатулку.

Д14. Амфора финикийская, изготовлена в III веке до н. э.

Д15. Белый бантик.

Д16. Александра Евгеньевна.

Д17. Свете 17 лет, Дине 18 лет, Ане 19 лет, а Вале 20 лет.

Д18. Первое место занял Серёжа, второе — Надя, третье — Коля, четвёртое — Ваня, пятое — Толя.

Д19. Джон, Шарль, Никита.

Д20. 8421, 8412.

Д21. Андрей.

Д22. У Гарри и Чарли по одному глазу, у Тома два глаза.

Д23. Двое.

Д24. 1) 6; 2) 16.

Д25. Все трое хитрецы, и они сказали правду.

Д27. Наташа.

Д28. Все трое.

Д29. Не водятся.

Д30. Ни одного.

Д31. 12.

Д32. Хватит.

Д33. 25 лжецов.

Д34. Один рыцарь.

Д35. Половина.

Д36. Нет, не может.

Д37. Нет.

Д40. б) Двое.

Д41. Не могло.

Д42. 30%.

Д43. В Правдин.

Д44. Оба — гномы.

Д45. У жёлтой и красной — по 4 точки, у оранжевой — 6 точек.

Д46. 8 ног было только у полосатого осьминога.

Д47. Оба из ордена Белой розы.

Д48. Папа — Ваня, а мама — Инна.

Д49. 6 ирокезов и 6 делаваров.

Д50. Ни одного.

Д51. Не обязательно.

Д52. Ни одного.

Д53. Например, «У тебя в кошельке 2 динара?».

Решения задач

Занятие 1

1.5. Первое решение. Ваня и Серёжа противоречат друг другу. Поэтому один из них лжёт, а другой говорит правду. Значит, Алёша лжёт, и именно он бросил самолётик.

Второе решение. Если самолётик бросил Ваня, то солгал только он. Если Серёжа, то снова лжёт он один. Оба предположения противоречат условию. А вот если тайный поклонник Оли Алёша, то лгут двое, Алёша и Ваня, что согласуется с условием.

1.6. Кто самая прекрасная? Рассмотрим три случая.

1) Пусть это Афродита. Тогда все её утверждения действительно истинны, а утверждения Геры и Афины ложны.

2) Пусть это Афина. Тогда второе утверждение Афродиты «Гера не самая прекрасная» оказывается истинным — противоречие.

3) Пусть это Гера. Тогда первое утверждение Афины «Афродита не самая прекрасная» оказывается истинным — снова противоречие.

Итак, самая прекрасная — Афродита.

1.7. Посмотрим, кто мог сказать правду.

Если Алёша, то он занимается в танцевальном кружке, а Вася — в каком-то другом. Но тогда и Вася сказал правду — противоречие.

Если Вася, то Серёжа солгал и занимается в хоровом кружке. Вася не в танцевальном и не в хоровом кружке — значит, в драматическом. Алёше остаётся танцевальный кружок, но тогда он тоже сказал правду — снова противоречие.

Остаётся последняя возможность — правду сказал Серёжа. Вася солгал и занимается в танцевальном кружке.

Серёжа не в хоровом и не в танцевальном — значит, в драматическом. Алёше остаётся хоровой кружок, и он действительно солгал.

1.8. Требуется рассмотреть всего два случая: Браун мог верно указать либо цвет, либо марку машины.

1) Если верен цвет, то машина была синей. Тогда Джонс верно указал на марку «Крайслер», а Смит солгал дважды — противоречие.

2) Если же Браун верно указал марку, то преступники скрылись на «Бьюике» и его цвет не синий. Джонс указал марку неверно, поэтому он верно назвал цвет — чёрный. Смит верно указал, что цвет не синий, — всё сходится.

1.9. Предположим, что у Андрея верно первое высказывание. Значит, он занял второе место. Тогда Вася солгал дважды. Пришли к противоречию. Значит, Андрей сказал правду во втором высказывании, и Боря был третьим. Тогда Гриша мог сказать правду только в первом высказывании, и именно он был вторым. Поэтому Вася мог сказать правду только во втором высказывании, и первым был Андрей. Васе остается четвёртое место.

1.10. У матча возможны три исхода. Разберём возможные случаи.

1) «Север» выиграл. Тогда первые четыре прогноза будут верными, что противоречит условию.

2) Была ничья. Тогда заведомо неверны первый, третий и четвёртый прогнозы (так как при ничьей количество забитых голов чётно). Таким образом, верными оказались не более двух прогнозов, что тоже противоречит условию.

3) «Север» проиграл. Тогда третий и четвёртый прогнозы оказались неверными. Значит, все оставшиеся три прогноза верны. Так как в ворота «Юга» забили, всего было забито три гола и «Юг» выиграл, то матч закончился со счётом 2 : 1.

1.11. Если верно первое утверждение, то верно и третье. Поэтому больше ста пальм на острове быть не может. Если верно второе утверждение, то первое заведомо ложно. А вот чтобы ложным оказалось и третье утверждение, на острове должно быть 0 пальм (что, конечно же, меньше 100). Наконец, чтобы верным оказалось только третье утверждение, пальмы на острове должны быть, но их должно быть не больше 100 и не меньше 100, то есть ровно 100.

1.12. Выделим важную часть условия:

Петя: Петя поймал 22 рыбы; Гриша поймал на 2 рыбы больше, чем Петя.

Вася: Петя поймал 23 рыбы, Гриша поймал на 3 рыбы больше, чем Петя.

Петя и Вася противоречат друг другу в двух утверждениях. Поскольку ни Петя, ни Вася не лгали дважды, один из них верно указал Петин улов, а другой — разницу между Петиным и Гришиным уловом. Итак, надо рассмотреть всего два случая:

1) Петя поймал 22 рыбы, а Гриша на три больше, то есть 25 рыб. Тогда Вася по словам Пети (который больше не лгал) поймал 21 рыбу. Поэтому Гриша солгал дважды. Противоречие.

2) Петя поймал 23 рыбы, а Гриша на две больше, то есть 25 рыб. Тогда Вася по словам Пети (который больше не лгал) поймал 22 рыбы. Здесь противоречия нет: из Петиных высказываний ложно только первое, из Гришиных — второе, а из Васиных — третье.

Занятие 2

2.7. Рассуждать можно как с помощью таблицы (см. таблицу 14), так и без неё. Судя по цвету капюшона, медный таз нашёл не Ели, а по длине бороды — не Пили. Значит, это сделал Спали. Судя по длине бороды, алмаз нашёл не Ели. Значит, Ели нашёл топаз, а Пили — алмаз.

2.8. Внесём все данные задачи в таблицу. Сразу ясно, что портрет Орла написал Попугай, поэтому он не является автором абстрактной композиции (см. таблицу 15).

	А	Т	МТ
Пили			–
Ели	–		–
Спали			

Таблица 14

	ПО	НС	АК
Ворона	–		
Павлин	–		
Попугай	+	–	–

Таблица 15

В таблице хорошо видно также, что больше ничего определить нельзя: и Ворона, и Павлин могли с одинаковым успехом изобразить и сыр, и композицию.

2.9. Кто мог занять первое место? Никто, кроме Вани: ведь все остальные собирались занять место лучше, чем заняли в итоге, а лучше первого не бывает.

2.10. Начнём с туфель. Валя была в белых. Лида — не в белых и не в красных, значит, в голубых. Красные туфли достались Тамаре. Платье у неё по условию тоже красное. У Вали и Лиды цвета платья и туфель не должны совпадать. Поэтому Валя была в голубом платье, а Лида — в белом.

Комментарий. Задачу можно решить и с помощью двух таблиц. Первая таблица устанавливает соответствие между именами и туфлями, вторая — между именами и платьями.

2.11. Внесём сначала в таблицу наиболее простые сведения: физик не может говорить по-английски; историк знает итальянский, а математик — нет, зато они оба знают русский. Отсюда сразу следует, что историк не знает ни английского, ни французского:

	русский	английский	французский	итальянский
физик		–		
биолог				
историк	+	–	–	+
математик	+			–

Подумаем теперь, почему физику пришлось быть переводчиком в разговоре биолога и историка? Потому что ни на каком языке биолог и историк не говорят одновременно. Раз историк знает русский и итальянский, то биолог не знает этих языков, зато знает английский и французский. Физик не мог говорить с биологом по-английски —

значит, говорил по-французски. Следовательно, он не знал итальянского и с историком говорил по-русски:

	русский	английский	французский	итальянский
физик	+	−	+	−
биолог	−	+	+	−
историк	+	−	−	+
математик	+			−

Осталось разобраться с математиком. Поскольку физик, биолог и математик не могут беседовать втроём на одном языке, математик не знает французского. Следовательно, его второй язык — английский. Заполнив таблицу до конца, получаем ответ.

2.12. Похоже, ключ к решению спрятан в последнем предложении. Но как раз его-то довольно трудно понять. Попробуем записать его поудобнее. Речь идёт о трёх жителях. У первого фамилия Жуй, у третьего имя Джем, второй совсем загадочный. Запишем это так:

имя	фамилия
	Жуй
Джем	

Имя первого совпадает с фамилией загадочного непалонезийца. Обозначим его буквой А. Имя загадочного непалонезийца совпадает с фамилией Джема. Обозначим его буквой В. Вот как это выглядит:

имя	фамилия
А	Жуй
В	А
Джем	В

Теперь обратим внимание на более простые условия. Из первого ясно, что ни А, ни В не может быть ни словом «Жуй», ни словом «Джем». Значит, имя и фамилия загадочного непалонезийца — Чай и Пей. Из второго следует, что Пей — его имя, а Чай — фамилия, то есть А —

это Чай, а В — Пей. Итак, три жителя Непалонезии — это Чай Жуй, Пей Чай и Джем Пей. Значит, четвёртый — Жуй Джем.

Занятие 3

3.6. Из последнего условия следует, что рядом с Денисом стоит только Соня. Поэтому либо Денис первый, а Соня вторая (см. рис. 12а), либо Денис последний, а Соня предпоследняя (см. рис. 12б).

Д С ● ● ●	● ● ● С Д	● В ● С Д	А В Б С Д
а)	б)	в)	г)

Рис. 12

Первая возможность отпадает, потому что впереди Сони стоит Вика. Поэтому пятым стоит Денис, а четвёртой Соня. Раз Алла и Боря не стоят рядом, они стоят на первом и третьем местах, а Вика — на втором (см. рис. 12в). Так как Вика стоит после Аллы, Алла первая, а Боря — третий (см. рис. 12г).

3.7. На рис. 13 изображена часть родословного дерева семьи, которая описана в условии задачи. Стрелки указывают на имена, которые можно восстановить по отчествам.

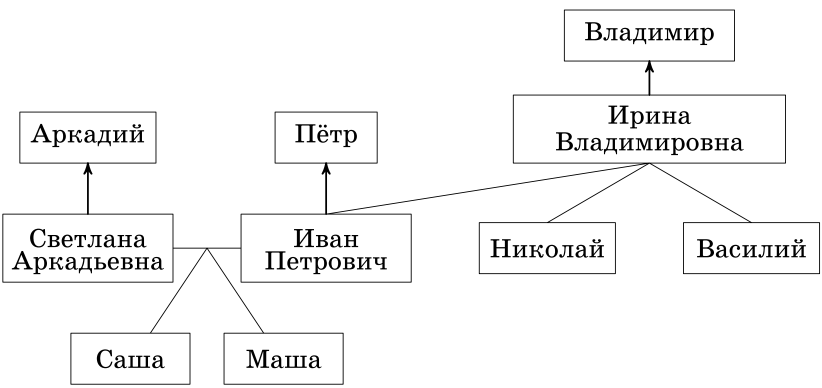


Рис. 13

3.9. Нарисуем схему и проведём в соответствии с условием штриховые линии (см. рис. 14). Видно, что девочка в зелёном платье не может быть ни Аней, ни Валей, ни Ниной. Значит, её зовут Галя. А Валино платье не зелёное, не белое и не розовое. Значит, голубое.

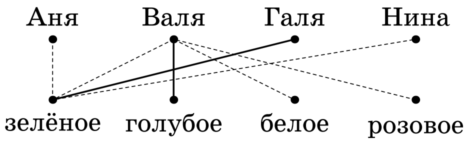


Рис. 14

Из нарисованной схемы определить цвета Аниного и Нининого платьев не удаётся. Зато теперь мы можем изобразить, в каком порядке девочки стоят в кругу: Галя в зелёном платье между Валей в голубом платье и Ниной. Напротив Гали может быть только Аня. И только она и может быть девочкой в белом платье, стоящей между девочкой в розовом платье (это Нина) и Валей (см. рис. 15).

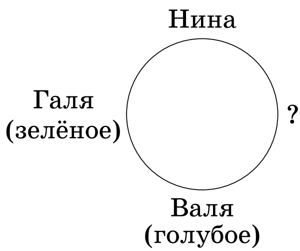


Рис. 15

3.10. Составим таблицу, показывающую, кто где сидел в первый, во второй и в третий раз. Поскольку каждый из трёх «музыкантов» успел посидеть и слева, и справа, и в центре, она является латинским квадратом. Посадив Мартышку справа в первый раз, а Осла в центр во второй раз, мы вынуждены в клетки 1-центр и 2-справа помещать Козла. Дальнейшее заполнение просто, результат изображён в таблице 16.

	слева	в центре	справа
1	О	К	М
2	М	О	К
3	К	М	О

Таблица 16

3.11. а) Итоги соревнования можно изобразить в виде латинского квадрата. В каждой строке поместим результаты одного из мальчиков, а столбцы будут соответствовать дистанциям. Цифра в клетке указывает занятое место. В условии сказано, как заполнены две клетки, выделенные серым (см. таблицу 17). Это позволяет единственным образом заполнить оставшиеся клетки (сначала ставим 2 в клетки А-100 и Б-1000, затем 1 в А-400 и т. д.).

	100	400	1000
А			3
Б	1		
В			

Таблица 17

б) При заполнении латинского квадрата однозначно восстанавливается только Борина строчка. Это неудивительно, ведь Алёша и Вася абсолютно равноправны, и условие не препятствует им «обменяться» результатами.

3.12. Составим графическую схему и проведём штриховые линии: от Гектора к парусному мастеру и коку и от Джека к парусному мастеру, канониру и капитану (см. рис. 16). При этом несколько условий на схеме пока не отражены (кок — не парусный мастер и не штурман, а капитан — не парусный мастер и не канонир).

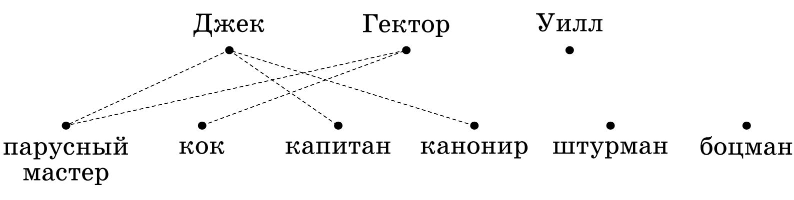
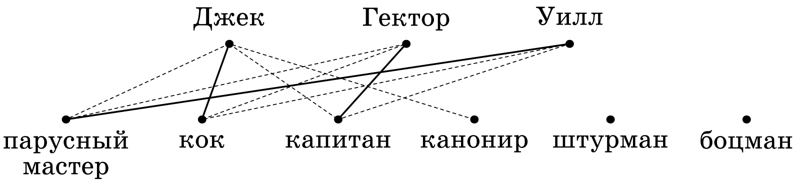
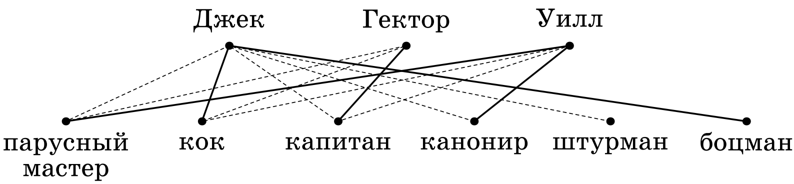


Рис. 16

Парусным мастером стал не Гектор и не Джек. Значит, это Уилл. Поэтому можно добавить штриховые линии, соединяющие Уилла с коком и капитаном. Выясняется, что капитаном может быть только Гектор, а коком — только Джек:



Теперь можно добавить штриховую линию от кока Джека к штурману. Следовательно, Джек кроме должности кока может претендовать только на роль боцмана. Из последнего условия (про бочонок рома) видим, что Джек, канонир и капитан Гектор — разные люди, поэтому канониром стал Уилл:



А роль штурмана осталась Гектору.

Занятие 4

4.8. а) Для рыцаря это правда, а для лжецов — ложь. Мог сказать любой.

4.9. Другой туземец ответил: «Рыцарь». (Если он рыцарь, то он сказал правду, если лжец, то солгал.) Так как проводник верно передал слова туземца, то проводник — рыцарь.

4.10. а) Очевидно, что могут быть все лжецами, так как в этом случае все солгали. Если за столом есть хотя бы один рыцарь, то его сосед справа тоже рыцарь, его сосед справа тоже рыцарь и т. д., то есть все рыцари.

Комментарий. Угадать один из вариантов легко. Чуть подумав, можно угадать и второй вариант. Но верное решение должно содержать доказательство отсутствия других вариантов.

б) Все лжецами быть не могут, так как тогда бы они все сказали правду. Значит, есть хотя бы один рыцарь. Он сказал правду, значит, его сосед справа — это лжец. Лжец солгал, значит, его сосед справа — рыцарь и т. д., то есть рыцари и лжецы сидят через одного.

в) В задаче а) ответ будет тот же: все или ни одного, задача б) станет некорректной: 5 (и вообще нечётное число) островитян не могли бы так ответить.

г) Три лжеца подряд сидеть не могут, иначе средний сказал бы правду. Значит, есть рыцари. Два рыцаря подряд сидеть не могут, иначе бы они солгали. Итак, по кругу чередуются рыцари и группы из одного или двух лжецов. Шесть человек может получиться, если три рыцаря перемежаются тремя одинокими лжецами или два рыцаря перемежаются парами лжецов.

д) Согласно решению пункта г) соседи сидят группами по два (РЛ) либо по три (РЛЛ). Так как в группе не менее двух человек, то групп не более $15 : 2$, то есть не более семи. А так как в группе не более троих, то групп не менее $15 : 3 = 5$. Число рыцарей равно числу групп. Все варианты от 5 до 7 возможны. Если все сидят тройками: РЛЛ — РЛЛ — РЛЛ — РЛЛ — РЛЛ, то рыцарей пять. Если две тройки (не обязательно соседние) заменить на три пары РЛ, то рыцарей будет шесть. А если четыре тройки заменить на шесть пар, то рыцарей будет семь.

4.11. Первый не может быть рыцарем, так как для рыцаря его высказывание ложно. Следовательно, первый — лжец, его высказывание неверно, и хотя бы один рыцарь среди пятерых островитян есть. Если среди них один рыцарь и четыре лжеца, то только один из них может сказать «Среди нас один рыцарь», но по условию задачи так сказали двое. Значит, рыцарей не меньше двух. Так как первые трое — лжецы, то оставшиеся двое — рыцари и сказали честно: «Два».

4.12. На вопрос «Вы местный?» в деревне рыцарей все жители острова ответят «Да», а в деревне лжецов «Нет».

4.13. Так как осьминоги противоречат друг другу, то возможны два случая: либо все осьминоги лгут, либо ровно один из них говорит правду.

Если все осьминоги лгут, то у каждого из них по 7 ног. Значит, вместе у них 28 ног. Но тогда синий осьминог сказал правду — противоречие.

Если же три осьминога солгали, а четвёртый сказал правду, то у солгавших осьминогов должно быть по 7 ног, а у сказавшего правду — либо 6, либо 8. Поэтому вместе у них либо 27, либо 29 ног, то есть правду сказал зелёный осьминог. Таким образом, у зелёного осьминога 6 ног, а у остальных по 7 ног.

4.14. Если бы опрашивали только химиков, то это означало бы, что на конференции нашёлся 51 химик. Тогда слова опрошенных химиков были бы ложью. Из слов произвольного опрошенного алхимика следует, что всего алхимиков не более 50 (иначе и без него их было бы больше, чем химиков, и его слова оказались правдой).

А это, в свою очередь, означает, что среди 51 опрошенного участника был и хотя бы один химик. Он сказал правду, значит, алхимиков не менее 50.

Занятие 5

5.6. Если бы среди островитян были лжецы, то они не могли бы ответить «Да», так как тогда высказывание было бы истинным. Но если среди них нет лжецов, то нет и рыцарей, так как рыцари не могли бы ответить «Да». Значит, все они — хитрецы (и они солгали). От количества жителей решение задачи не зависит.

5.7. Пусть А сказал правду. Тогда Б — рыцарь, поэтому он тоже сказал правду, и А — не рыцарь. Значит, А — сказавший правду хитрец.

Если же А солгал, то Б — не рыцарь. Но и солгавший А тоже не рыцарь, поэтому Б сказал правду. Следовательно, он хитрец.

5.8. Предположим, что А сказал правду. Тогда А — хитрец, а В и С тоже сказали правду. Это невозможно, так как среди них троих есть лжец. Значит, А солгал, и он лжец. Тогда В тоже солгал, и, следовательно, он хитрец. С — рыцарь и сказал правду.

5.9. Три человека могут сидеть за круглым столом поразному. Но так как в данной задаче важно только, кто от кого сидит слева, а кто справа, достаточно рассмотреть два случая.

1) Пусть справа от рыцаря лжец, а слева хитрец (см. рис. 17). Тогда рыцарь называет лжеца лжецом, а лжец обязательно называет хитреца рыцарем.

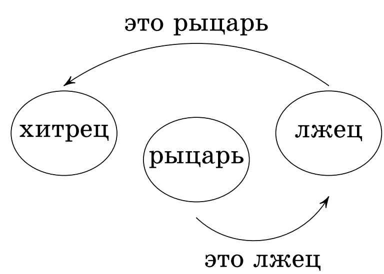


Рис. 17

2) Пусть теперь справа от рыцаря хитрец (см. рис. 18). Рыцарь его так и называет. Тогда лжец, для которого рыцарь — правый сосед, называет рыцаря лжецом, а значит, хитрец может назвать лжеца только рыцарем.

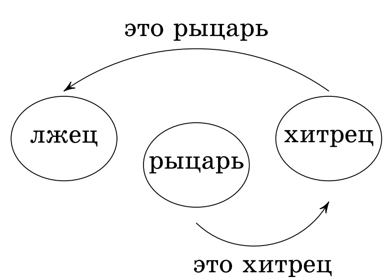


Рис. 18

Итак, в обоих случаях получилось, что левый сосед рыцаря назван рыцарем. Значит, мы можем точно узнать, кто есть кто: справа от того, кого назвали рыцарем, сидит настоящий рыцарь. Он говорит правду о своем соседе справа.

5.10. Рассмотрим того, про кого сказали, что он хоббит, и для удобства назовём его Боб. Боб не согласился с тем, что он хоббит, следующий не согласился с ним, а значит, подтвердил, что Боб — хоббит, и так далее: все говорящие через раз подтверждали или отрицали, что Боб — хоббит. Если пирующих было девять (нечётное число), то на следующем круге каждый говорил противоположное к тому, что сказал на предыдущем, так что все они хоббиты, а первый хоббит про Боба сказал сначала правду, что вполне возможно. Мы решили пункт а) задачи. Для решения пункта б) заметим, что, поскольку 10 — чётное число, то говорящие на каждом круге говорят одно и то же, поэтому хоббитов среди них нет. Тогда и Боб — не хоббит, а сказавший так про него его правый сосед солгал, то есть он гоблин. Сам же Боб уличил гоблина во лжи, так что он эльф. Его сосед слева снова гоблин, и так далее: за столом сидят, чередуясь, пять гоблинов и пять эльфов.

5.11. Зададим каждому вопрос: «Сколько среди вас рыцарей?» Рыцарь ответит: «Один», а лжец — что-то другое. Если хитрец тоже солжёт, то мы узнаем, кто рыцарь, и дальше его спросим про каждого, кем тот является. Если хитрец скажет правду («Один»), мы услышим два ответа «Один» и узнаем, кто лжец. Тогда мы спросим лжеца про двух остальных: «Он рыцарь?» Если лжец скажет «Да», то это хитрец, если «Нет» — то рыцарь.

Комментарий. В качестве первого вопроса годится любой, на который всем известен правильный ответ. Например, «Сейчас зима?» или «Ты человек?».

5.12. Хитрецы могут договориться, что один будет «псевдорыцарем», а другой — «псевдолжецом». Псевдорыцарь будет на все вопросы отвечать так, будто он является рыцарем, псевдолжец — лжецом, а истинные рыцарь и лжец — хитрецами. А псевдолжец так, будто он — лжец, псевдорыцарь — рыцарь, а истинные рыцарь и лжец — хитрецы. Тогда псевдорыцаря нельзя будет отличить от рыцаря, а псевдолжеца — от лжеца.

5.13. Назовём островитян A, B, C и D.

Зададим A и B вопрос: «Имеется ли среди C и D хитрец?»

Если оба ответят «Да», то они рыцари, и среди C и D есть хитрец. Тогда надо спросить у A, является ли C хитрецом.

Если оба ответят «Нет», то среди C и D нет хитреца, тогда надо спросить у C, является ли A хитрецом.

Если же A и B дают разные ответы, то опять среди C и D нет хитреца, и надо действовать как во втором случае.

Дополнительные задачи

Д1. Если Саша — один из братьев, то не может. А если Саша — девочка, то они могут сидеть, например, так: Лёня, Петя, Саша, Коля.

Д2. Иван Петрович не отец Дмитрия Сергеевича. Значит, он отец мамы, и её зовут Ирина Ивановна.

Д3. Последние две буквы были написаны Кра и Крю, тогда единственную букву ◯ писал не Кра, а значит, Кре. Буква ◊ была написана Кру, и, значит, он не писал □. Следовательно, буква □ была написана Крю, и предпоследняя буква была написана не им. Последнюю букву написал Крю, предпоследнюю — Кра. Тогда первая буква была написана Кра.

Д4. Козлевич не может быть ни почтальоном (так как сидел напротив), ни академиком (с которым сидел рядом). Значит, он либо дворник, либо водитель. Если Козлевич — дворник, то Печкин сидел между дворником Козлевичем и почтальоном Ивановым. Но тогда водитель не может сидеть рядом со Степановым — противоречие. Значит, Козлевич — водитель.

Можно убедиться, что в этом случае всё сходится. Действительно, дворник не Печкин, не Иванов и не Козлевич — значит, Степанов. А сидят персонажи в таком порядке: водитель Козлевич, дворник Степанов, почтальон Печкин и академик Иванов.

Д5. Будем проводить стрелки от спортсменов, финишировавших раньше, к отставшим от них. Получится такая схема:

$$\begin{tikzcd}
\text{Евгений} \arrow[r] & \text{Дмитрий} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{Борис} \arrow[r] & \text{Андрей} \\
& & \text{Виктор} \arrow[r] & \text{Геннадий}
\end{tikzcd}$$

Андрей отстал от трёх спортсменов, это могут быть только Евгений, Дмитрий и Борис. А Виктор и Геннадий, таким образом, финишировали после Андрея.

Д6. Столяр знаком и с маляром, и с гусляром. Поэтому он не может быть ни Фадеевым, ни Калдеевым, а может только Пепермалдеевым. Маляр о гусляре слышал, поэтому маляр может быть только Калдеевым, а гусляр — Фадеевым.

Д7. Разберёмся прежде всего, кто с кем танцует. Про Лену и Олю все ясно. С кем же танцуют Аня и Наташа? Володя и Антон заняты — значит, с Сергеем и Колей. При этом Коля танцует с Володиной одноклассницей. Если это Наташа, то Аня должна танцевать с Володей, который уже занят. Значит, Коля танцует с Володиной одноклассницей Аней, а с Наташей танцует Сергей.

Осталось понять, кто с кем вместе учится. Танцующий с Аней Коля — одноклассник Наташи. Одноклассник Лены — не Антон (она с ним танцует), не Володя (его одноклассница Аня) и не Коля (одноклассник Наташи). Значит, это Сергей. Тогда одноклассник Оли — Антон.

Д8. Отметим в таблице плюсами, яблоки каких сортов есть в каждой корзине:

	1	2	3	4	5
А			+	+	
Б			+	+	
В		+	+		
Г				+	+
Д	+				+

Видно, что первый номер можно присвоить лишь корзине Д, а второй — В. Закрасим выбранные строки:

	1	2	3	4	5
А			+	+	
Б			+	+	
В		+	+		
Г				+	+
Д	+				+

Теперь видно, что пятый номер можно присвоить только корзине Г, а третий и четвёртый номера можно присвоить корзинам А и Б в произвольном порядке. Итак, возможны две нумерации: 1 — Д, 2 — В, 3 — А, 4 — Б, 5 — Г или 1 — Д, 2 — В, 3 — Б, 4 — А, 5 — Г.

Д9. Составим таблицу, указав в строках музыкантов, а в столбцах — части квартета. В каждую клетку будем вписывать инструмент, на котором музыкант исполнял соответствующую часть. Так как каждый успел поиграть по разу на каждом из четырёх инструментов, после заполнения таблицы должен получиться латинский квадрат.

Внесём данные задачи (см. таблицу 18). Далее таблица дополняется до латинского квадрата однозначно. Порядок заполнения может быть, например, таким. Вторую часть Осёл мог играть только на альте, поэтому Мартышка была примой. Козёл в третьей части мог быть только с басом, поэтому в четвёртой — с альтом. В четвёртой части Медведь мог быть только второй, поэтому Мартышка — басом.

	1	2	3	4
Медведь		бас		
Осёл				прима
Козёл	прима	втора		
Мартышка			альт	

Таблица 18

	1	2	3	4
Медведь	альт	бас	прима	втора
Осёл	бас	альт	втора	прима
Козёл	прима	втора	бас	альт
Мартышка	втора	прима	альт	бас

Таблица 19

Рассуждая аналогично, приходим к ответу, показанному в таблице 19.

Д10. Для изображения разнообразных сведений, приведённых в этой задаче, потребуются 2 таблицы. Первая для установления соответствия фамилий членов поездной бригады и их профессий (см. таблицу 20), вторая — соответствия фамилии мистера и его города (см. таблицу 21).

	машинист	кондуктор	кочегар
Смит			
Джонсон			
Робинсон			

Таблица 20

	Лос-Анджелес	Омаха	Чикаго
мистер Смит			
мистер Джонсон			
мистер Робинсон			

Таблица 21

Правда, в условии явно не сказано, что все пассажиры живут в разных городах. Но это нетрудно доказать: мистер Робинсон живёт в Лос-Анджелесе, специалист по математической физике в Омахе (поскольку там живёт кондуктор, с которым он ходит в одну церковь), а однофамилец кондуктора — в Чикаго. Нужна ли третья таблица для установления соответствия фамилии члена поездной бригады и его города? Нет! Они вовсе не должны жить в разных городах. Более того, Смит и кочегар живут в одном городе, раз часто играют вместе в бильярд.

Читая условие ещё раз, начинаем вносить его данные в две таблицы. Начнём со второй.

1) Мистер Робинсон живёт в Лос-Анджелесе — ставим в нужную клетку плюс. А затем — четыре минуса в оставшиеся клетки соответствующих строки и столбца.

2) Для кондуктора из Омахи готовой клетки нет. Но, как уже отмечалось, в Омахе живёт и специалист по математической физике. Значит, это не мистер Джонсон, давно позабывший алгебру. Итак, мистер Джонсон не живёт в Омахе, ставим минус.

3) Теперь ясно, что в Омахе живёт мистер Смит, а в Чикаго — мистер Джонсон:

	Лос-Анджелес	Омаха	Чикаго
мистер Смит	−	+	
мистер Джонсон	−	−	+
мистер Робинсон	+	−	−

Пора заняться первой таблицей.

1) По условию однофамилец кондуктора живёт в Чикаго, теперь мы знаем, что это Джонсон. Ставим плюс (и, как обычно, четыре минуса).

2) Смит выигрывает в бильярд у кочегара — значит, Смит не кочегар. Ставим минус:

	машинист	кондуктор	кочегар
Смит		−	−
Джонсон	−	+	−
Робинсон		−	

3) Делаем вывод, что Смит — машинист, а Робинсон — кочегар.

Д11. Посмотрим, кем может быть человек номер 1. Вариантов три: его зовут Василий Иванович, Николай Иванович или Пётр Иванович. Людей с отчеством Васильевич в нашем списке нет, а у первого — два сына. Значит, первый — не Василий Иванович.

Выясним, может ли он быть Николаем Ивановичем. Если бы это было так, то третий и четвёртый — это Сергей Николаевич и Илья Николаевич. Как зовут четвёртого? Конечно, Сергей, потому что людей с отчеством Ильич нет, а у четвёртого есть сын.

Итак, четвёртый — Сергей Николаевич, а поэтому пятый — Иван Сергеевич (единственный с таким отчеством). Значит, шестой и седьмой должны быть Ивановичами. А это невозможно, поскольку по условию есть только три Ивановича, а у нас их получается четыре — первый, второй, шестой и седьмой. Таким образом, первый не может быть Николаем Ивановичем.

Стало быть, *первый — Пётр Иванович*. Петровичей у нас два — Василий Петрович и Иван Петрович. Так как Васильевичей в списке нет, а у четвёртого есть сын, то *четвёртый — Иван Петрович*, а *третий — Василий Петрович*. Пятый должен быть Ивановичем. А Ивановичей осталось два — Николай и Василий. Но пятый не может быть Василием, так как у него есть сыновья. Значит, *пятый — Николай Иванович*, а *Василий Иванович — второй*. Оставшаяся часть дерева легко восстанавливается из тех же соображений: *седьмой — Илья Николаевич*, *шестой — Сергей Николаевич*, *восьмой — Илья Сергеевич*.

Д12. Во второй банке лежит не варенье, значит, там сгущённое молоко, в третьей банке не сгущённое молоко и не малиновое варенье, значит, там вишнёвое варенье, а в первой банке — малиновое варенье.

Д13. Первое решение. По условию из шести утверждений верны ровно три, а из утверждений 1.2, 2.2 и 3.2 верно ровно одно. Значит, из утверждений 1.1, 2.1, 3.1 верны ровно два. Поскольку 1.1 и 2.1 утверждают одно и то же, верны именно они, а 3.1 неверно. Значит, третья шкатулка невзрывоопасна, нужно открывать её. Легко проверить, что обе надписи на ней ложны, на второй — обе верны, а на первой 1.1 верна, 1.2 — нет.

Второе решение. Рассмотрим три случая.

1) Пусть бриллианты лежат в первой шкатулке. Тогда и на ней, и на второй шкатулке написано по два ложных утверждения, что противоречит условию задачи.

2) Пусть бриллианты во второй шкатулке. Тогда и на второй, и на третьей шкатулках написано по одному истинному и одному ложному утверждению — снова противоречие.

3) Пусть бриллианты в третьей шкатулке. Тогда первое утверждение на первой шкатулке истинно, а второе ложно; оба утверждения на второй шкатулке истинны, а на третьей — ложны, то есть всё сходится.

Комментарий. Богатая подборка подобных задач различной сложности с общим сказочным сюжетом содержится в книге Смаллиана «Принцесса или тигр?».

Д14. С математической точки зрения эта задача ничем не отличается от задачи 1.8. Просто она записана на «другом языке»[1]. Составим словарь, устанавливающий соответствие между задачами:

машина	**амфора**
чёрная	финикийская
синяя	греческая
«Бьюик»	III век до н. э.
«Крайслер»	V век до н. э.
«Форд Мустанг»	IV век до н. э.
Браун	второй мальчик
Джонс	первый мальчик
Смит	третий мальчик

Читателю предлагается самостоятельно перевести приведённое решение задачи 1.8 с «машинного» языка на «амфорный».

[1]Задачи, отличающиеся литературным содержанием, но имеющие одинаковую математическую основу, называются *изоморфными*.

Д15. Пьеро и Буратино назвали разные цвета, поэтому хотя бы один из них с цветом ошибся. Значит, он правильно угадал вид подарка: бантик. Тогда Артемон ошибся с видом подарка, но верно угадал цвет: белый.

Комментарий. Заметим, что эта задача хоть и напоминает задачи про амфору и про Брауна, Джонса и Смита, всё же не изоморфна им.

Д16. Если Женя и Саша — родители Вали, то они разного пола и оба заявления Вали правдивы, что невозможно. Поэтому Женя и Саша разного пола, но кто-то из них не родитель. Значит, Валя — родитель. В таком случае Саша не может быть отцом Вали, и из Сашиных высказываний правдиво второе: она — дочь Жени. Так как Саша и Женя разного пола, то Женя — отец Саши. А Валя — её мама.

Д17. Валя и Света не могли одновременно говорить правду про возраст Дины. Поэтому одна из них сказала правду во второй половине высказывания, и либо Вале, либо Ане 19 лет. Тогда Свете не 19 лет, и Аня сказала правду во второй части высказывания: Вале 20 лет. Следовательно, Валя сказала правду в первой части: Дине 18 лет. В таком случае Света сказала правду во второй части высказывания: Ане 19 лет. Методом исключения получаем, что Свете 17 лет.

Д18. Первый болельщик мог сказать правду либо в первой части высказывания, либо во второй. Если в первой, то Коля занял первое место, а Ваня — не четвёртое. Тогда второй болельщик верно указал, что Серёжа занял второе место. Но тогда четвёртый болельщик ошибся оба раза, чего не может быть.

Итак, Ваня занял четвёртое место. Из показания второго болельщика заключаем, что Серёжа не мог занять второе место, а из слов третьего — что Коля занял третье место. Обратим внимание на пятого болельщика — Надя не могла занять третье место, поэтому Толя — на пятом месте. А теперь на четвёртого — он ошибся в отношении То-ли, зато верно указал, что Надя заняла второе место. Остались Серёжа и первое место — его он и занял.

Д19. Каждый из участников прогнозировал, что придёт первым. Из этих трёх прогнозов сбылся ровно один. Из оставшихся трёх прогнозов сбылись два. Поскольку среди них два прогноза одинаковых — Шарль придёт предпоследним, — то именно они и сбылись. Итак, вторым прибежал Шарль, Джон — не последним, значит, первым. Никите досталось почётное третье место.

Комментарий. В придумывании решения может помочь таблица, в которую внесены все прогнозы:

	1	2	3
Джон	|		|
Никита	|		
Шарль	|	||	

Д20. Если Петров всегда прав, то вторая цифра четырёхзначного числа действительно самая большая. Так как все цифры различны и не равны нулю, то она не меньше 4. Но тогда будет верно и первое высказывание Васечкина, что невозможно. Следовательно, Петров ошибается, а прав Васечкин. В таком случае первая цифра числа делится на все остальные, то есть у неё существует не менее трёх различных делителей, меньших её самой, включая 1. Возможны только два варианта: либо первая цифра 6, а остальные 1, 2 и 3, либо первая 8, а остальные 1, 2 и 4. Но в первом случае было бы верно также утверждение Петрова о сумме, это не подходит. Во втором случае вторая цифра должна быть равна 4 (из первого высказывания Васечкина). Очевидно, что оба варианта 8412 и 8421 удовлетворяют условию.

Д21. Заметим, что в четверг и в пятницу мальчик говорит одно и то же. Поэтому четверг не мог быть ни в первый, ни во второй, ни в третий, ни в четвертый, ни в пятый день. Если бы четверг был в шестой день, то за два до него, во вторник, мальчик не назвался бы Борисом.

Итак, четверг мог быть только на седьмой день. Тогда в первый день была пятница, и мальчик сказал правду, назвавшись Андреем. Во вторник он солгал и назвался Виктором. А в седьмой день — четверг — снова скажет правду и назовется Андреем.

Д22. Мысленно расположим пиратов по кругу и будем считать, что Том следует за Гарри, Чарли за Томом, а Гарри за Чарли.

Предположим, что у какого-то пирата вообще нет глаз. Тогда он дважды сказал правду, и у следующего пирата два глаза, поэтому он дважды солгал. Следовательно, у третьего пирата не два глаза. Но и не ноль (иначе следующий за ним первый пират имел бы два глаза). Значит, у третьего пирата один глаз, а всего у пиратов три глаза. Но неверных утверждений в этом случае не три, а четыре.

Итак, у каждого пирата либо два глаза, либо один. Если у всех по одному глазу, то неверных утверждений ровно три. С другой стороны, неверны все утверждения, кроме пятого. Значит, у кого-то из пиратов два глаза. Тогда он дважды лгал, и у следующего за ним один глаз. А предыдущий сказал про него правду, и у предыдущего тоже один глаз. Всего глаз четыре, и ложных утверждений тоже четыре: два из первых трех и два из вторых трех. Чарли сказал во второй раз правду, а Том и Гарри солгали. Значит, в первый раз Чарли лгал, и у него и у Гарри по одному глазу. А у Тома два.

Д23. Все ошибиться не могли, ведь тогда каждый сделал бы верное утверждение! Рассмотрим одного из тех, кто получил диплом. Он был прав, поэтому никто, кроме него самого и его соседей, диплома точно не получил. Если бы оба соседа получили диплом, то высказывание каждого из них оказалось бы ложным — противоречие. Если бы оба не получили, то высказывание каждого оказалось бы истинным — снова противоречие. И только если один из соседей получил диплом, а другой — нет, условие выполняется.

Д24. а) Приведём пример расположения карточек, при котором шесть утверждений окажутся истинными. Пусть числа на карточках идут в таком порядке: 7, 1, 8, 2, 9, 3, 10, 4, 11, 5, 12, 6. Тогда все утверждения с числами больше шести — ложны, так как даже общее число карточек слева меньше заявленного на карточке. Тогда утверждение с числом 1 истинно, поэтому истинно и утверждение с числом 2, и т. д. — истинны утверждения с числами не больше шести.

Докажем теперь от противного, что улучшить этот результат нельзя. Если истинных утверждений больше шести, то ложных — меньше шести. Но тогда все карточки с числами от 6 до 12 лгут, поэтому ложных — больше шести. Противоречие.

б) Пусть правдивы $k \geqslant 17$ карточек, тогда лгут не больше 16 карточек. Все числа на правдивых карточках разные, значит, на одной из них есть число, не меньшее k. Но если правдивая карточка говорит о правде, то на ней написано число не больше $k - 1$, а если о лжи — то не более 16. Противоречие. Пример с 16 карточками: все говорят о лжи, числа идут в таком порядке: 17, 1, 18, 2, 19, 3, ..., 16, 33.

Д25. Рыцарей среди них быть не могло, так как рыцарь не мог бы ответить «Нет». Следовательно, и лжецов среди них не могло быть, так как, ответив «Нет», лжец сказал бы правду. Значит, все трое хитрецы, и они сказали правду.

Д26. Назовём людей А, Б и В. Спросим у А: «Б — хитрец?» В случае ответа «Да» либо А, либо Б — хитрец, значит, В наверняка рыцарь. Спросив у В, рыцарь ли А, узнаем, кто А и кто Б.

Если же А на первый вопрос ответит «Нет», то Б наверняка рыцарь. Спросив у Б, рыцарь ли А, узнаем, кто А и кто В.

Д27. Ира не может быть самой красивой, потому что тогда она обязана лгать, а сказала правду. Значит, возможны два варианта: Ира самая умная или самая хитрая. Если Ира самая умная, то она сказала правду, и Галя не может быть самой красивой. Тогда самая красивая — Наташа. Если же Ира самая хитрая, то высказывание Наташи ложно, и Наташа может быть только самой красивой. Итак, в любом случае Наташа самая красивая. А вот узнать, кто самая умная, а кто самая хитрая, мы не можем.

Д28. Первое утверждение, сделанное старшим братом, ложно, поскольку старше его никого нет. Следовательно, он лжец, и второе его утверждение тоже ложно. Это значит, что никто из его братьев (они оба младше) кота не получил, то есть кота получил он сам.

Второе утверждение, сделанное младшим братом, тоже ложно, поскольку младше его никого нет. Значит, он тоже лжец, и первое его утверждение тоже ложно. Это значит, что никто из его братьев (они оба старше) мельницу не получил, то есть мельницу получил он сам. Средний же брат утверждает, что младший получил кота, а старший мельницу. Но на самом деле всё обстоит как раз наоборот, поэтому он тоже лжец.

Д29. Ке и Кекс, говоря о цвете Бре, противоречат друг другу, значит, по крайней мере один из них лжец. Следовательно, высказывание «Бре — лгун» — неверно. Значит, Бре всегда говорит правду, и на острове нет синих лягушек.

Д30. Заметим, что второй и третий высказались о текущей остановке по-разному, значит, хотя бы один из них — лжец. Но они высказались одинаково о предыдущей остановке, значит, они одного типа, то есть оба лжецы. Но третий и первый говорят одинаково о текущей остановке, значит, первый тоже лжец.

Д31. Ясно, что все клетки с тремя соседями заняты лжецами. Оба соседа гномика, стоящего в угловой клетке, лжецы, значит, сам он тоже лжец. Известно, что хотя бы один рыцарь на доске есть, значит, стоит он в какой-то клетке оставшегося квадратика 2×2 (см. рис. 19). Но тогда оба его соседа в этом квадратике также рыцари, и, следовательно, оставшаяся клетка этого квадратика также занята рыцарем.

л	л	л	л
л			л
л	р		л
л	л	л	л

Рис. 19

Д32. Пусть рядом с Артуром не сидели жители А, Б и В — назовём их *несоседями*, а сидевшего напротив Артура назовём *оппонентом*.

Первое решение. Заметим, что оппонент сидел рядом с каждым из двух других несоседей, а каждый из остальных — только рядом с одним несоседом. Это означает, что если каждого из них спросить про каждого, то сидевший напротив Артура ответит оба раза «Да», если он рыцарь, и оба раза «Нет», если он лжец. Двое других несоседей дадут один раз ответ «Да» и один раз ответ «Нет» (независимо от того, рыцари они или лжецы).

Таким образом, пусть Артур спросит А про Б и про В, а затем Б — про А и про В. Если кто-то из них на оба вопроса ответит одинаково, то он оппонент, а иначе оппонент — В.

Второе решение. Обозначим соседей Артура через Д и Е. Заметим, что оппонент не сидел рядом ни с Д, ни с Е, а каждый из остальных незнакомцев сидел рядом с кем-то одним из соседей. Это означает, что на вопросы «Сидел ли рядом с тобой Д?» и «Сидел ли рядом с тобой Е?» оппонент оба раза ответит одинаково («Да», если он рыцарь; «Нет», если он лжец). Двое других в этом случае дадут один раз ответ «Да» и один раз ответ «Нет» (независимо от того, рыцари они или лжецы).

Таким образом, пусть Артур спросит А про Д и про Е, а затем Б — про Д и про Е. Если кто-то из них на оба вопроса ответит одинаково, то он оппонент, а иначе оппонент — В.

Д33. У каждого рыцаря количество друзей-рыцарей не меньше заявленной им разности. У каждого ученика не более 24 друзей, значит, 25-й — лжец. Поэтому у каждого из остальных не более 23 друзей-рыцарей, значит, 24-й — лжец. Аналогично 23-й — лжец. Продолжая таким образом, получим, что все ученики этого класса — лжецы.

Д34. Пусть на острове n рыцарей. У каждого из них может быть от 0 до $n - 1$ друга-рыцаря, всего n возможностей. Ни один из ответов не повторился, следовательно, все эти возможности были реализованы. В частности, один из рыцарей дружит с каждым рыцарем из оставшихся $n - 1$, а другой — ни с кем. Дружат ли они между собой? Возникающее противоречие разрешается лишь в случае, если эти «два» рыцаря — один и тот же человек. Он единственный рыцарь на острове и на вопрос ответил «0». Ни с кем из лжецов он не дружит, поэтому, называя числа от 1 до 99, все лжецы действительно лгали.

Приведённые рассуждения неприменимы к случаю $n = 0$. Его несложно рассмотреть отдельно: если все лжецы, то никто не должен был сказать, что у него 0 рыцарей-друзей.

Д35. Все выпускники разбились на 4 категории: приглашённые юноши (ПЮ), приглашённые девушки (ПД), неприглашённые юноши (НЮ) и неприглашённые девушки (НД). Ответили «Да» приглашённые юноши и неприглашённые девушки.

По условию ПЮ + ПД = ПЮ + НД. Значит, ПД = НД, то есть количества приглашённых и неприглашённых девушек-выпускниц совпадают.

Д36. Если два человека сделали одно и то же утверждение, то они либо оба лжецы, либо оба рыцари. Поскольку на острове есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь, то либо все рыцари сделали первое утверждение, а все лжецы второе, либо наоборот. В первом случае и рыцарей, и лжецов чётное число, а во втором и тех, и других — нечётное число. Значит, число людей на острове обязательно чётно.

Д37. Предположим, что описанная ситуация возможна. Тогда каждая из фраз произнесена по $1234 : 2 = 617$ раз. При любом разбиении жителей на пары существует только три возможных вида пар: 1) два рыцаря; 2) два лжеца; 3) рыцарь и лжец. В парах первого и второго вида каждый произнёс: «Он — рыцарь!», а в парах третьего вида каждый произнёс: «Он — лжец!». Таким образом, каждая из фраз произнесена чётное количество раз, что противоречит тому, что их должно быть по 617.

Д38. В кругу есть только наивные, иначе самый лёгкий из тёртых ответил бы «Да» на первый вопрос. Тогда самый лёгкий из богатырей на второй вопрос ответит «Нет».

Д39. 1) Сказав «Да» в первый раз, самый лёгкий из богатырей солгал, поэтому он — тёртый. Но тогда он солжёт и во второй раз, сказав «Да».

2) Если бы два тёртых богатыря до разминки стояли рядом, то более тяжёлый из них ответил бы «Нет» на первый вопрос. Поэтому между любыми тёртыми богатырями стояли один или несколько наивных. Значит, наивных богатырей в отряде не меньше, чем тёртых. Так как общее количество богатырей нечётно, наивных больше, чем тёртых. Следовательно, после разминки между какими-то двумя тёртыми богатырями стоят не менее двух наивных. Самый тяжёлый из такой группы стоящих подряд наивных ответит «Да» на второй вопрос.

Д40. а) Первый раз отвечают «Да» лжецы, от которых справа рыцари, и рыцари, от которых справа лжецы. То есть количество ответов «Да» совпадает с количеством пар разноплеменных соседей. Та же ситуация и во второй раз.

б) Из решения пункта а) следует, что в кругу есть всего 2 пары разноплеменных соседей, поэтому есть лишь одна группа стоящих подряд рыцарей и одна группа стоящих подряд лжецов. Если в каждой из групп не менее двух человек, то на второй вопрос ответят «Да» два рыцаря, стоящие справа от лжецов, и два лжеца, стоящие справа от рыцарей, то есть ответов «Да» не менее 4. Следовательно, возможны только два случая: либо в кругу один рыцарь, а все остальные — лжецы, либо один лжец, а все остальные — рыцари. И в том, и в другом случае ответов «Да» на второй вопрос будет ровно два: от «одиночки» и стоящего напротив него.

Д41. Среди островитян есть хотя бы один лжец, и его соседями могут являться только лжец и рыцарь. Тогда следующим за рыцарем должен опять стоять лжец, следующим — опять лжец, затем — рыцарь, и так далее. Таким образом, возникает последовательность:

ЛЛРЛЛРЛЛР...ЛЛР.

Следовательно, количество островитян должно делиться на 3, а число 2014 на 3 не делится.

Д42. Пусть $x\%$ жителей острова составляют лжецы. Тогда $(100 - x)\%$ составляют рыцари. Так как каждый рыцарь утвердительно ответил ровно на один из вопросов, а каждый лжец — на три, то $(100-x)+3x = 40+30+50+0$, откуда $x = 10$.

Так как ни один из жителей острова не сказал, что болеет за ЦСКА, то все лжецы болеют за ЦСКА. Каждый из них заявил, что болеет за «Спартак», поэтому на самом деле болеют за «Спартак» $40\% - 10\% = 30\%$ жителей.

Д43. Житель Правдина не мог позвонить пожарным, так как для него высказывания «У нас в городе пожар!» и «Горит в Переменске» взаимно противоречивые. Житель Переменска тоже не мог позвонить, так как для него эти высказывания либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Значит, звонили из Лгунова, и оба утверждения ложны. Пожар в Правдине.

Д44. Предположим, что А — эльф. Тогда он сказал правду, а Б солгал. Но ни гномы, ни эльфы не лгут, говоря про эльфов. Значит, А — гном. Говоря про золото, он солгал. Поэтому Б сказал про А правду. Это мог сделать только гном.

Д45. Жёлтая божья коровка точно сказала неправду. Если бы она сказала правду и в сумме количество точек у трёх коровок было равно 12, то у каждой было бы по четыре точки, и все (включая жёлтую коровку) были бы врунами — получаем противоречие. Значит, жёлтая коровка солгала, и у неё четыре точки, а высказывание «у нас в сумме 12 точек» неверное.

Красная коровка тоже солгала, так как если у всех одинаковое количество точек, а у жёлтой, как мы установили, четыре точки, то и у всех по четыре точки. Тогда жёлтая коровка сказала бы правду — опять получаем противоречие. Значит, у красной божьей коровки тоже четыре точки.

Оранжевая божья коровка солгать не может, так как тогда у неё тоже было бы четыре точки и у всех в сумме 12 точек, чего не может быть. Значит, оранжевая божья коровка сказала правду, и у неё шесть точек (и 14 в сумме у троих).

Д46. Если фиолетовый осьминог говорит правду, то у него чётное число ног. Но в таком случае он не может сказать, что у него девять ног. Значит, фиолетовый осьминог лжёт. Поэтому у тёмно-синего осьминога не восемь ног. Но тёмно-синий говорит, что у него восемь ног, то есть лжёт. Поэтому у него нечётное число ног. Сказав, что у тёмно-синего осьминога шесть ног, зелёный солгал. Поэтому он солгал и в первый раз, и у него не восемь ног. Итак, первое утверждение полосатого осьминога верно. Значит, верно и второе, и у него действительно восемь ног. А у остальных осьминогов нечётное число ног.

Д47. Если первый рыцарь принадлежит ордену Алой розы, то первое его заявление правдиво, а второе — ложно. Значит, второй рыцарь принадлежит ордену Белой розы. Тогда первый раз он солгал, а второй раз сказал правду. Выходит, что правдивых и лживых утверждений сказано поровну. Это противоречит «правдивому» утверждению второго рыцаря. Значит, первый рыцарь принадлежит ордену Белой розы. При этом первое его заявление ложно, а второе — правдиво, и второй рыцарь тоже принадлежит ордену Белой розы. Здесь противоречия нет: первое утверждение второго рыцаря правдиво, поэтому и он два раза подряд не обманывал.

Д48. В семье только двое мужчин: отец и сын. Если Боря говорит Инне правду, то он старше Вани, поэтому Боря — отец, Ваня — сын, а Инна — мать. Тогда Даша — дочь, и Боря лжет ей. Значит, Боря младше Гали — своей дочери. Так не бывает. Значит, Боря солгал Инне, и на самом деле он младше Вани. Тогда Ваня — отец, Боря — сын, а Инна, которой Боря солгал, — мать. Здесь противоречия нет, Боря вполне мог сказать правду своей сестре Даше, будучи старше своей сестры Гали.

Д49. Фразу «Ты ирокез» мог сказать либо ирокез ирокезу (потому что это правда), либо ирокез делавару (потому что это неправда). Аналогично, фразу «Ты делавар» мог сказать либо делавар делавару, либо делавар ирокезу. То есть «Ты ирокез» сказали все ирокезы, а «Ты делавар» — все делавары. Раз оказалось поровну этих фраз, то поровну и делаваров и ирокезов.

Д50. Кто может сказать обывателю: «Я — полицейский»? Не полицейский, потому что это правда. Не вор и не обыватель, потому что это ложь. То есть никто. Поэтому обывателей в хороводе нет. Можно дополнительно заметить, что в хороводе чередуются группы полицейских произвольной длины и одинокие воры.

Д51. И Б, и В противоречат А. Значит, они старше А, и А самый младший. Когда старшие противоречат младшему, они не ошибаются, значит, действительно, А самый высокий и В выше Б. Таким образом, мы можем выяснить, что А самый высокий, В — средний по росту, а Б самый низкий. Но кто старше — Б или В, — мы по данному разговору узнать не можем (они не противоречат друг другу). Так что могло быть и так, что самый низкий Б был средним по возрасту.

Д52. Пусть Ич, Ик — число индийцев, пьющих чай и кофе соответственно. Аналогично определим величины Тч и Тк. Тогда из первого вопроса следует, что Тч + Тк = 44, а из второго вопроса следует, что Ик + Тк = 33. Предположим, что «На улице идёт дождь» — ложное утверждение. Тогда Ик+Тч = 22. Складывая первые два равенства и вычитая из их суммы третье, получаем 2Тк = 55, противоречие. Значит, дождь идёт, и имеем третье равенство вида Ич + Тк = 22. Складывая все три уравнения и учитывая, что Ич + Ик + Тч + Тк = 55, получаем 2Тк = 44, значит, Тк = 22, а Ич = 0.

Д53. Пусть Али-Баба спросит: «У тебя в кошельке 2 динара?» Если в левой руке у разбойника 2 динара, то в правой и в кошельке — по 1 динару, и он честно ответит: «Нет». Если у разбойника в левой руке 1 динар, то либо в правой руке 2 динара и в кошельке 1, и разбойник солжёт, сказав «Да», либо в правой руке 1 динар и 2 в кошельке, и разбойник честно ответит «Да». Итак, если разбойник сказал «Да», то у него в левой руке 1 динар, иначе — 2 динара.

Авторы задач

Большинство использованных в книге задач давно и заслуженно стали математическим фольклором или восходят к нему. Их обычно публикуют без указания авторов. Это, однако, не повод умалчивать об авторах, которых удалось установить:

Е. В. Бакаев: Д22

А. А. Заславский: 5.10

Е. В. Корицкая: 5.10

Е. Г. Кукина: Д26

В. В. Произволов: Д36

И. В. Раскина: 2.7, 2.8, 3.1, 3.5, 3.10, 3.11, 3.12, Д29, Д44, Д46

И. С. Рубанов: Д21, Д50

С. И. Токарев: 4.7

С. В. Усов: Д16, Д30, Д52, Д53

Л. Е. Федулкин, В.М. Федулкина: 1.10

А. В. Хачатурян: 5.10, 6.1

А. В. Шаповалов: 2.1, 2.9, Д1, Д19, Д24, Д31, Д32, Д33, Д34, Д38, Д39, Д40, Д48

Д. Э. Шноль: 1.2, 3.4, 3.7, 4.5, 4.8, 4.11, 4.13, 5.3, 5.4, 5.6, Д2, Д25, Д45, Д51

А. С. Штерн: Д20, Д28, Д47

Спасибо этим авторам, а также тем неизвестным, кто сочинил фольклорные жемчужины!

Раздаточный материал

Занятие 1. Перебор в логических задачах

1. До царя дошла весть, что кто-то из трёх богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь им всем явиться ко двору. Молвили богатыри:

Илья Муромец: «Змея убил Добрыня Никитич».

Добрыня Никитич: «Змея убил Алёша Попович».

Алёша Попович: «Я убил змея».

Известно, что только один богатырь сказал правду, а двое слукавили. Кто убил змея?

2. Из сейфа похищены важные документы. Полиция уверена, что в краже участвовали двое из семерых подозреваемых: А, Б, В, Г, Д, Е, Ж. По показаниям консьержки дома напротив один из похитителей был высокого роста. Шерлок Холмс, осмотрев место происшествия, обнаружил пепел сигары и несколько волосков собаки. По характерным царапинам на сейфе он определил, что взломщик — левша.

А, Б, В и Г высокие; все, кроме А, курят сигары; Д и Ж держат дома собак, а А и Е — левши. На основании всех улик инспектор Лестрейд арестовал А и Д. Правильно ли он поступил?

3. Из каюты капитана пиратского корабля исчезла бутылка ямайского рома. Подозрение пало на Гарри, Тома и Одноглазого Чарли. Подозреваемые заявили:

Гарри: «Не трогал я вашего рома. Том тоже ни при чём».

Том: «Ручаюсь головой, сэр, Гарри невиновен. Ром стянул Одноглазый».

Чарли: «Бутылочку вашу взял Гарри. А я в этом не замешан».

Капитану удалось выяснить, кто взял ром. Оказалось, что один из подозреваемых дважды солгал, другой — дважды сказал правду, а третий один раз солгал, а другой раз сказал правду. Кроме того, вор действовал в одиночку. Кто же он?

4. Команды А, Б, В, Г и Д участвовали в эстафете. До соревнований пять болельщиков высказали следующие прогнозы:

1) команда Д займёт 1-е место, команда В — 2-е;

2) команда А займёт 2-е место, Г — 4-е;

3) В — 3-е место, Д — 5-е;

4) В — 1-е место, Г — 4-е;

5) А — 2-е место, В — 3-е.

В каждом прогнозе одна часть подтвердилась, а другая — нет. Какое место заняла каждая из команд?

5. На Олину парту упал бумажный самолёт с нарисованными красными сердечками. Оля развернула его и прочитала: «Ты — лучшая девочка в классе!» Она повернулась к сидящим за ней ребятам: Ване, Серёже и Алёше. Все три мальчика покраснели.

— Кто из вас делает мне такие комплименты? — спросила Оля.

— Это Сергей! — сказал Ваня.

— Нет, это не я! — сказал Серёжа.

— Я ничего такого не делал! — сказал Алёша.

Подруга Оли Маша ухмыльнулась: «Двое из них лгут!» Однако она не хотела больше ничего говорить. Кто является тайным поклонником Оли?

6. Богини Гера, Афина и Афродита пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее. Представ перед Парисом, богини высказали следующие утверждения.

Афродита: «Я самая прекрасная».

Афина: «Афродита не самая прекрасная».

Гера: «Я самая прекрасная».

Афродита: «Гера не самая прекрасная».

Афина: «Я самая прекрасная».

Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения двух других богинь ложны. Мог ли Парис вынести решение, кто из богинь прекраснее?

7. Алёша, Вася и Серёжа занимаются в разных кружках: танцевальном, хоровом и драматическом.

На вопрос, кто в каком кружке занимается, они ответили:

Алёша: «Я — в танцевальном».

Вася: «Я — не в танцевальном».

Серёжа: «Я — не в хоровом».

Засмеявшись, добавили:

— Вы ведь из математического кружка, вот и определите, в каком кружке каждый из нас занимается, учитывая, что из трёх ответов один верный, а два — нет.

8. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники скрылись на синем «Бьюике»; Джонс сказал, что это был чёрный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только её цвет. Какого цвета и какой марки был автомобиль?

9. Четверо друзей соревновались в метании сосновых шишек. На вопрос, какое каждый из них занял место, они ответили:

Андрей: «Я был вторым, Боря — третьим».

Вася: «Я был вторым, Андрей — первым».

Гриша: «Я был вторым, Боря — четвёртым».

При этом известно, что каждый мальчик один раз говорил правду, а один раз — неправду. Кто какое место занял?

10. Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

1) ничьей не будет;

2) в ворота «Юга» забьют;

3) «Север» выиграет;

4) «Север» не проиграет;

5) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что ровно три прогноза оказались верными. С каким счетом закончился матч?

11. Три путешественника увидели вдали зелёный остров.

— На этом острове больше ста пальм! — воскликнул первый.

— Нет, пальм на острове меньше ста, — возразил второй.

— Одна-то пальма на острове наверняка есть, — сказал третий.

Когда они высадились на остров, только одно из этих утверждений оказалось истинным. Сколько пальм было на острове?

12. Три мальчика после рыбалки сказали:

Петя: «Я поймал 22 рыбы; Гриша на две больше меня, а Вася на одну меньше меня».

Гриша: «Я поймал не меньше всех; Вася поймал 25 рыб; разница между моим и Васиным уловом составляет три рыбы».

Вася: «Я поймал меньше, чем Петя; Петя поймал 23 рыбы, а Гриша на три рыбы больше, чем Петя».

Оказалось, что каждый из ребят сделал два истинных утверждения и одно ложное. Сколько рыб поймал каждый из них?

Занятие 2. Ищем «заветную ниточку»

1. В семейном ансамбле «Ласковый лай» участвуют Тит Фомич, Фома Титович, Фома Фролович, Фрол Фомич и Фрол Фролович Собакины. Один из них поёт, его отец играет на шарманке, брат держит микрофон, а дети бьют в барабан. Как зовут певца?

2. Четыре подруги пришли на каток, каждая со своим братом. Они разбились на пары и начали кататься. Оказалось, что в каждой паре «кавалер» выше «дамы» и никто не катается со своей сестрой. Самым высоким в компании был Юра Воробьёв, следующим по росту — Андрей Егоров, потом Люся Егорова, Серёжа Петров, Оля Петрова, Дима Крымов, Инна Крымова и Аня Воробьёва. Определите, кто с кем катался.

3. Беседуют трое: Белов, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белову: «Любопытно, что один из нас русый, другой — брюнет, а третий — рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из беседующих?

4. Петя, Гена, Дима и Вова занимаются в спортивных секциях: гимнастической, баскетбольной, волейбольной и легкой атлетики. Волейболист старше Пети и Димы, но учится с ними в одном классе. Петя и Гена на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с баскетболистом, ни с волейболистом. Кто в какой секции занимается?

5. Уберите в задаче про Белова, Чернова и Рыжова условие «Рыжов — не рыжий». Придумайте, чем ещё можно заменить фамилии и цвет волос. Затем сочините подходящие причины для появления минусов в трёх клетках. Запишите получившуюся задачу. Решите её сами и предложите решить друзьям.

6. а) Петя занимается английским языком. Он решил сочинить новую задачу про себя и трёх мальчиков, каждый из которых занимается футболом, плаванием или шахматами. Петя составил таблицу и разместил в ней один плюс и несколько минусов (см. таблицу слева). Будет ли Петина задача иметь решение? Если да, то единственное ли?

б) Петя понял свою ошибку и решил её исправить. Он составил новую таблицу (см. таблицу справа). Будет ли теперь задача иметь решение? Если да, то единственное ли?

	а	ф	ш	п
Петя	+			–
Гена	–	–		–
Дима			–	
Вова		–		–

	а	ф	ш	п
Петя		–	–	–
Гена		–		–
Дима				
Вова			–	

в) Расставьте в таблице 4×4 минусы так, чтобы соответствующая задача имела единственное решение. Чтобы получилось интереснее, плюсы лучше не использовать. Затем придумайте сюжет. Начать можно, например, так: «Белое, Жёлтое, Красное и Чёрное моря расположены в четырёх различных океанах...» А можно и по-другому. Запишите получившуюся задачу. Решите её сами и предложите решить друзьям.

7. Три гнома — Пили, Ели и Спали — нашли в пещере алмаз, топаз и медный таз (каждый нашёл что-то одно). У Ели капюшон красный, а борода длиннее, чем у Пили. У того, кто нашёл таз, самая длинная борода, а капюшон синий. Гном с самой короткой бородой нашёл алмаз. Кто что нашёл?

8. Ворона, Павлин и Попугай принесли на выставку по одной своей картине: портрет Орла, натюрморт с сыром и абстрактную композицию. Известно, что ни Ворона, ни Павлин никогда не пишут портретов, а Попугай — натюрмортов. Можно ли определить автора каждой картины?

9. Перед началом чемпионата школы по шахматам каждый из участников сказал, какое место он рассчитывает занять. Шестиклассник Ваня сказал, что займёт последнее. По итогам чемпионата все заняли разные места, и оказалось, что все, кроме, разумеется, Вани, заняли места хуже, чем ожидали. Какое место занял Ваня?

10. Три подруги пришли на праздник в красном, белом и голубом платьях. Их туфли были тех же трёх цветов. Только у Тамары цвета платья и туфель совпадали. Валя была в белых туфлях. Ни платье, ни туфли Лиды не были красными. Определите цвет платья и туфель каждой из подруг.

11. В международном студенческом лагере встретились четыре студента: физик, биолог, историк и математик. Каждый владеет двумя языками из четырёх: русский, английский, французский и итальянский. Никто из студентов не владеет французским и итальянским языками одновременно. Хотя физик не может говорить по-английски, он стал переводчиком в разговоре биолога и историка. Историк знает итальянский, а математик — нет, поэтому они общаются по-русски. Физик, биолог и математик не могут беседовать втроём на одном языке. Как общался с каждым из соседей математик?

12. Четырёх жителей Непалонезии зовут Пей, Чай, Жуй и Джем. Фамилии у них те же, что и имена, но ни у кого из четверых имя и фамилия не совпадают. Фамилия Чая не Пей. Определите имя и фамилию каждого, если имя непалонезийца с фамилией Жуй совпадает с фамилией того, имя которого совпадает с фамилией Джема.

Занятие 3. Изобразительное искусство

1. Собираясь в школу, Миша нашёл под подушкой, под диваном, на столе и под столом всё необходимое: тетрадь, шпаргалку, плеер и кроссовки. Под столом он нашёл не тетрадь и даже не плеер. Миша не клал кроссовки ни на стол, ни под подушку, а его шпаргалки не валяются на полу. Плеера не оказалось ни на столе, ни под диваном. Что где лежало?

2. Придумайте сами задачу, математически похожую на задачу про котят, но с другим литературным содержанием. Для этого нарисуйте ту же схему, но вместо кличек и окраса котят напишите что-то своё. А потом сочините причины для проведения штриховых линий.

3. Семь подружек решили принести на вечеринку по одному блюду. Наташа умеет готовить салаты «цезарь» и греческий, Валя — греческий и оливье, Таня — курицу и пирожки, Даша — торт и жюльен, Саша — «цезарь» и оливье, Ира — курицу и жюльен, Марина — пирожки и торт. Как им договориться, чтобы каждая приготовила то, что умеет, и все блюда были разными? Сколько решений имеет задача?

4. В семье Орловых пятеро сыновей. Саша старше Миши, Миша старше Димы и Коли, Коля старше Васи.

а) Кто самый старший?

б) Известно ли, кто старше: Дима или Коля?

в) Можно ли узнать, кто самый младший?

г) Пусть дополнительно известно, что среди братьев есть два близнеца. Можно ли узнать, кто они?

д) Можно ли узнать имя одного из братьев-близнецов?

5. Карлсон открыл школу. Первого сентября во всех трёх первых классах было по три урока: курощение, низведение и дуракаваляние. Один и тот же предмет в двух классах одновременно идти не может. Курощение в 1 «Б» было первым уроком. Учитель дуракаваляния похвалил учеников 1 «Б»: «У вас получается ещё лучше, чем у 1 „А“». Низведение на втором уроке было не в 1 «А». Можно ли по этим данным узнать, в каком классе валяли дурака на первом уроке? А на последнем?

6. В очереди в школьный буфет стоят Вика, Соня, Боря, Денис и Алла. Вика стоит впереди Сони, но после Аллы; Боря и Алла не стоят рядом; Денис не находится рядом ни с Аллой, ни с Викой, ни с Борей. В каком порядке стоят ребята?

7. Сашиного папу зовут Иван Петрович, маму — Светлана Аркадьевна, а сестру — Маша. У мамы Ивана Петровича, Ирины Владимировны, есть еще два сына — Николай и Василий.

а) Можно ли узнать имена обоих дедушек Саши?

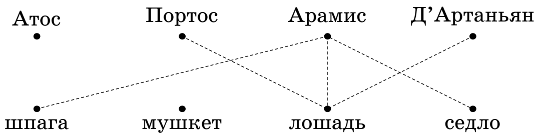
б) А Маши?

в) Можно ли узнать, как зовут маму Машиной мамы?

г) Можно ли узнать имя хотя бы одного из дедушек дяди Васи?

д) А второго?

8. Сочините задачу. На схеме изображена часть её условия. Проведите ещё одну штриховую линию так, чтобы задача имела единственный ответ. Придумайте сюжет.



9. На улице, став в кружок, разговаривают четыре девочки: Аня, Валя, Галя и Нина. Девочка в зелёном платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Ниной. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье на каждой из девочек?

10. Мартышка, Осёл и Козёл затеяли сыграть трио. Уселись чинно в ряд, Мартышка справа. Ударили в смычки, дерут, а толку нет. Поменялись местами, при этом Осёл оказался в центре. А трио всё нейдёт на лад. Пересели ещё раз. При этом оказалось, что каждый из трёх «музыкантов» успел посидеть и слева, и справа, и в центре. Кто где сидел в третий раз?

11. Алёша, Боря и Вася соревновались в беге на 100 м, 400 м и 1000 м. Каждый мальчик на какой-то дистанции занял первое место, на какой-то второе и на какой-то третье. Боря пробежал стометровку быстрее всех. Можно ли полностью восстановить итоги соревнований, если известно также, что на дистанции 1000 м последним финишировал: а) Алёша; б) Боря?

12. В корабельной команде необходимы капитан, боцман, штурман, парусный мастер, канонир и кок. Поэтому когда Джек, Гектор и Уилл втроём захватили корабль, каждому пришлось работать за двоих. Вахту все трое — Гектор, парусный мастер и кок — несли по очереди. Парусный мастер храбрее капитана. Джек — самый трусливый из троих. Джек и канонир утаили от капитана бочонок рома. Кок обозвал штурмана картоведом. Можно ли по этим данным узнать, кто стал капитаном? А кто штурманом?

Занятие 4. Таинственный остров

1. Путешественник дважды задал рыцарю один и тот же вопрос и получил на него разные ответы. Какой это мог быть вопрос?

2. Какой вопрос нужно задать жителю острова, чтобы узнать, лжец он или рыцарь?

3. Человек говорит: «Я лжец». Является ли он жителем острова рыцарей и лжецов?

4. Придумайте вопрос, на который все жители острова ответят одинаково.

5. Собрались вместе два рыцаря и два лжеца. Мог ли кто-либо из них сказать следующую фразу:

а) «Среди *нас* все рыцари»;

б) «Среди *вас* есть ровно один рыцарь»;

в) «Среди *вас* рыцарей больше, чем лжецов»?

Если кто-либо мог, то укажите всех, кто мог, и объясните, почему он мог так сказать. Если никто не мог сказать такую фразу, то также объясните почему.

6. Каждый из собравшихся на площади сказал: «Вы все лжецы!». Сколько среди них было рыцарей?

7. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

8. Встретились рыцарь и два лжеца. Кто из них мог сказать такую фразу:

а) «Вы оба — лжецы!»;

б) «Вы оба — рыцари!»?

9. Путешественник нанял туземца-островитянина в проводники. По дороге они встретили другого туземца. Путешественник попросил проводника узнать, к какому племени принадлежит этот человек. Проводник вернулся и сообщил, что человек назвался рыцарем. Кем был проводник — рыцарем или лжецом?

10. За круглым столом сидят 6 островитян.

а) Каждый из них говорит: «Мой сосед справа — это рыцарь». Сколько рыцарей за столом?

б) Каждый из них говорит: «Мой сосед справа — это лжец». Сколько рыцарей за столом?

в) Что изменится, если в пунктах а) и б) за столом сидят 5 островитян?

г) За круглым столом сидят 6 островитян. Каждый из них говорит: «Оба моих соседа — это лжецы». Сколько рыцарей за столом?

д) А если в пункте г) за столом сидят пятнадцать островитян?

11. Путешественник встретил пятерых островитян. На его вопрос «Сколько среди вас рыцарей?» первый ответил: «Ни одного!», а два других: «Один». Что ответили остальные?

12. Жители острова рыцарей и лжецов часто ходят друг другу в гости. Какой вопрос может задать путешественник первому встречному, чтобы узнать, в какой деревне он находится?

13. У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а те, у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зелёный: «Вместе у нас 27 ног», жёлтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног?

14. В конференции участвовало 100 человек — химики и алхимики. Каждому был задан вопрос: «Если не считать Вас, то кого больше среди остальных участников — химиков или алхимиков?» Когда опросили 51 участника и все ответили, что алхимиков больше, опрос прервался. Алхимики всегда лгут, а химики всегда говорят правду. Сколько химиков среди участников?

Занятие 5. Рыцари, лжецы и хитрецы

1. Островитянин назвался лжецом. Кто он на самом деле?

2. Путешественник встретил трёх островитян: рыцаря, хитреца и лжеца. На вопрос путешественника «Кто ты?» все трое ответили одинаково. Что именно?

3. Путешественник встретил трёх островитян: рыцаря, хитреца и лжеца. На вопрос путешественника «Кто ты?» было получено три разных ответа: «Рыцарь», «Лжец» и «Хитрец». Что можно узнать по этим ответам?

4. Путешественник встретил трёх островитян: рыцаря, хитреца и лжеца. На вопрос путешественника «Кто ты?» первый ответил «Я не рыцарь», второй: «Я не хитрец», третий: «Я не лжец». Кто есть кто?

5. Собрались три попугая — Гоша, Кеша и Рома. Один из них всегда говорит правду, другой всегда лжёт, а третий — хитрец, он иногда говорит правду, иногда лжёт. На вопрос «Кто Кеша?» попугаи ответили так:

Гоша: «Кеша — лжец».

Кеша: «Я хитрец!»

Рома: «Кеша — абсолютно честный попугай».

Кто же из попугаев честный, кто лжец, а кто хитрец?

6. Путешественник встретил трёх островитян. На вопрос «Есть ли среди вас лжецы?» все трое ответили «Да». Что можно узнать по этому ответу? А если бы их было четверо?

7. Двое островитян сказали друг о друге:

А: «Б — рыцарь».

Б: «А — не рыцарь».

Докажите, что хотя бы один из них — хитрец.

8. Среди трёх человек, А, В и С, есть рыцарь, лжец и хитрец. Они сказали:

А: «Я хитрец».

В: «Это правда».

С: «Я не хитрец».

Кем в действительности являются А, В и С?

9. Путешественник встретил трёх островитян, сидящих за круглым столом: рыцаря, хитреца и лжеца. На вопрос «Кто твой сосед справа?» все трое ответили по-разному. Может ли путешественник узнать, кто есть кто?

10. В Пустоземье живут три племени: эльфы, гоблины и хоббиты. Эльф всегда говорит только правду, гоблин всегда лжёт, а хоббит через раз говорит то правду, то ложь. Однажды за круглым столом пировало несколько пустоземцев, и один из них сказал, указав на своего левого соседа: «Он — хоббит». Сосед сказал: «Мой правый сосед солгал». В точности ту же фразу затем повторил его левый сосед, потом её же произнёс следующий по кругу, и так они говорили «Мой правый сосед солгал» много-много кругов, да и сейчас ещё, возможно, говорят. Определите, из каких племён были пирующие, если известно, что за столом сидело: а) девять; б) десять жителей Пустоземья.

11. Перед вами трое — лжец, рыцарь и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать? Вопросы можно задавать в любом количестве любому из троих.

12*. Перед вами четверо — лжец, рыцарь и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он.

13*. Среди четырёх островитян три рыцаря и один хитрец (все четверо знают, кто из них кто). Как найти хитреца, задав три вопроса, на которые можно ответить только «Да» или «Нет»?

Оглавление

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (495) 745-80-31; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: biblio.mccme.ru/shop/order

Книги в электронном виде: www.litres.ru/mcnmo

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru