

И.М.Гельфгат, Л.Э.Генденштейн, Л.А.Кирик
1001 ЗАДАЧА ПО ФИЗИКЕ С РЕШЕНИЯМИ

Центр «Инновации в науке, технике, образовании» 1998, Харьков-Москва

Книга содержит задачи по всему курсу элементарной физики. Они градуированы следующим образом: задачи средней трудности, повышенной трудности и олимпиадные задачи. К большинству задач приведены подробные решения обучающего характера. Для итогового самоконтроля предложены тесты.

Книга предназначена для учащихся средних школ, лицеев и гимназий (в том числе физико-математического профиля), студентов педагогических вузов, преподавателей, а также лиц, занимающихся самообразованием.

СОДЕРЖАНИЕ

Механика

1. Кинематика	6
2. Законы Ньютона	17
3. Закон всемирного тяготения	23
4. Импульс, работа, энергия. Законы сохранения	25
5. Статика	34
6. Гидростатика и аэростатика	42
7. Механические колебания и волны	46
8. Комбинированные задачи по механике	52

Молекулярная физика

9. Молекулярно-кинетическая теория. Свойства газов	62
10. Пары, жидкости и твердые тела	70
11. Законы термодинамики	77

Электричество и магнетизм

12. Электростатика	86
13. Законы постоянного тока	99
14. Электрический ток в различных средах	116
15. Магнитное поле. Сила Лоренца	119
16. Электромагнитная индукция	124
17. Электромагнитные колебания и волны. Переменный ток	131

Оптика

18. Законы геометрической оптики	140
19. Оптические системы и приборы	145
20. Волновая оптика	154

Теория относительности и атомная физика

21. Релятивистская механика	162
22. Кванты, атомы, ядра, частицы	165

Тесты

Ответы, указания, решения	185
----------------------------------	------------

Приложения	588
-------------------	------------

ТЕМ, КТО ХОЧЕТ НАУЧИТЬСЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ

Ньютона писал, что примеры при обучении полезнее правил. В справедливости этих слов убеждается каждый, кому приходится учить или учиться. Поэтому самый эффективный способ научить решать задачи — это просто показывать, как они решаются, а самый эффективный способ научиться решать задачи — это просто их решать!

Но что делать, если «просто решать» не получается? В таком случае советуем начать с изучения решений задач и разобраться на примерах, «как это делается». И пусть вас не смущает, что вы изучаете готовые решения, а не решаете сами: «аппетит придет во время еды», и вам захочется попробовать свои силы. А желание решать задачи — это главное условие для их решения! В первую очередь попробуйте решать задачи без звездочек — это задачи среднего уровня трудности. Одной звездочкой отмечены задачи повышенной трудности, двумя звездочками — олимпиадные. Задачи среднего уровня трудности подобраны так, что они достаточно полно представляют весь курс элементарной физики; поэтому те читатели, которые не ставят себе целью углубленную подготовку по физике, вполне могут ограничиться задачами без звездочек. В то же время задачи со звездочками предоставляют обширный материал для занимающихся в специализированных классах, лицеях и гимназиях, а также для подготовки к олимпиадам по физике.

При изложении решений многих задач мы ставили целью пройти весь путь вместе с читателем: искали, с чего начать решение (часто это — самое трудное), подробно проводили расчеты, анализировали результаты, а также старались предостеречь от типичных ошибок.

После задач приведены тесты, которые помогут вам самостоятельно оценить свой уровень подготовки. (В последние годы тесты все чаще используются при проверке знаний в школах и вузах.)

Величины, указанные на рисунках к условиям задач, считаются заданными.

Для удобства читателей в книге приведен справочный материал, в том числе математическое приложение, содержащее наиболее употребительные приемы приближенных вычислений и часто используемые формулы.

Некоторые задачи по механике были подсказаны нам бароном Мюнхаузеном. Условия этих задач мы честно изложили от его имени и отметили особым значком. (В других разделах физики барон, видимо, еще не разбрался.)

Распределение материала между авторами было следующим:

- И. М. Гельфгат и Л. Э. Генденштейн — задачи и решения;
- И. М. Гельфгат и Л. А. Кирик — тесты.

Равномерное прямолинейное движение $s = vt$

Равноускоренное движение $s = v_0t + \frac{at^2}{2}$

Центростремительное ускорение $a = \frac{v^2}{R}$

I закон Ньютона $F = 0 \leftrightarrow v = \text{const}$

II закон Ньютона $F = ma$

III закон Ньютона $F_{12} = -F_{21}$

Закон всемирного тяготения $F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}$

Импульс $p = mv$

Кинетическая энергия $W_k = \frac{mv^2}{2}$

Потенциальная энергия $W_p = mgh, W_p = \frac{kx^2}{2}$

I условие равновесия $\sum F = 0$

II условие равновесия $\sum M = 0$

Сила Архимеда $F_A = \rho_{\text{ж}} g V$

Гармонические колебания $a = -\omega^2 x, x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

Математический маятник $T = 2\pi\sqrt{l/g}$

Груз на пружине $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

ИМПУЛЬС, РАБОТА, ЭНЕРГИЯ

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

СТАТИКА

ГИДРО- И АЭРОСТАТИКА

МЕХАНИЧЕСКИЕ

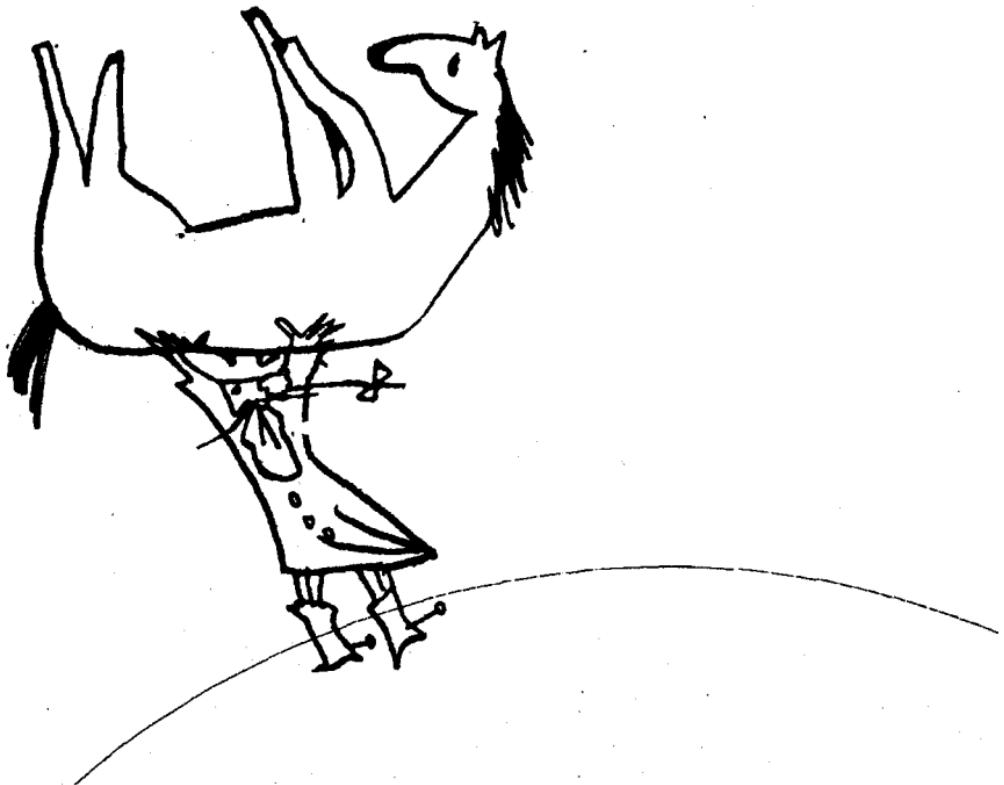
КОЛЕБАНИЯ

И ВОЛНЫ

КОМБИНИРОВАННЫЕ

ЗАДАЧИ

ПО МЕХАНИКЕ



1. КИНЕМАТИКА

Прямолинейное равномерное движение



1.1.

Когда моя любимая лошадь подворачивает ногу, я обычно взваливаю лошадь на себя, и мы продолжаем движение, но медленнее: когда я вверху, наша скорость $v_1 = 120 \text{ км/ч}$, а когда я внизу, $v_2 = 30 \text{ км/ч}$. Чему равна наша средняя скорость, если: а) я еду *полпути*, а потом несу лошадь? б) я еду *половину времени*, а потом несу лошадь?

1.2.

Против течения мы плывем медленнее, чем в стоячей воде; зато по течению — быстрее. Возникает вопрос: где удастся скорее проплыть одно и то же расстояние *туда и обратно* — в реке или в озере?

1.3*.

Автомобиль проехал половину пути со скоростью $v_1 = 60 \text{ км/ч}$. Половину оставшегося времени движения он ехал со скоростью $v_2 = 15 \text{ км/ч}$, а последний участок пути — со скоростью $v_3 = 45 \text{ км/ч}$. Чему равна средняя скорость автомобиля на всем пути?



1.4.

Недавно я разминался, бегая вдоль железной дороги. Навстречу мне промчались два поезда — один через $t = 6 \text{ мин}$ после другого. Я знал, что они оба идут со скоростью $u = 60 \text{ км/ч}$, причем второй поезд отправился со станции через $t = 10 \text{ мин}$ после первого. Я тут же достал блокнот и ручку и прямо на бегу вычислил по этим данным свою скорость v . Если и вы сможете ее определить, то увидите, что бегаю я неплохо!

1.5.

Моторная лодка проходит расстояние между двумя пунктами *A* и *B* по течению реки за время $t_1 = 3 \text{ ч}$, а плот — за время $t = 12 \text{ ч}$. Сколько времени t_2 затратит моторная лодка на обратный путь?

1.6.

Эскалатор поднимает стоящего человека за $t_1 = 1 \text{ мин}$; если эскалатор стоит, а человек идет по нему сам, на тот же подъем уходит $t_2 = 3 \text{ мин}$. Сколько времени понадобится на подъем, если человек будет идти по движущемуся эскалатору?

1.7.

Человек, идущий вниз по опускающемуся эскалатору, затрачивает на спуск 1 мин. Если человек будет идти вдвое быстрее, он затратит на 15 с меньше. Сколько времени он будет спускаться, стоя на эскалаторе?

1.8.

Самолет летит из пункта A в пункт B и обратно со скоростью $v = 390$ км/ч относительно воздуха. Пункты A и B находятся на расстоянии $s = 1080$ км друг от друга. Сколько времени потратит самолет на весь полет, если на трассе полета непрерывно дует ураганный ветер со скоростью $u = 150$ км/ч? Рассмотрите два случая: а) ветер дует вдоль прямой AB ; б) ветер дует под прямым углом к прямой AB .

1.9.

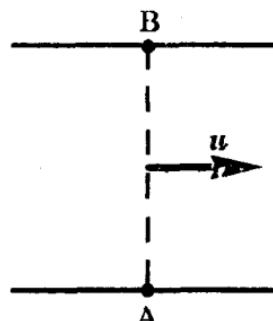

Однажды, стоя под дождем, я задумался: чему равна скорость капель? Прежде всего я взял отвес и убедился, что капли падают строго вертикально. Затем я сел в карету и обнаружил, что во время езды следы капель на стекле кареты наклонены под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Тогда я спросил у лошади, с какой скоростью едет карета, и узнал, что ее скорость $u = 30$ км/ч. Тут же я рассчитал скорость v капель относительно земли. Чему она равна?

1.10.

Идет отвесный дождь. Скорость капель u . По асфальту со скоростью v катится мяч. Другой такой же мяч лежит неподвижно. На какой мяч попадает больше капель? Во сколько раз?

1.11.

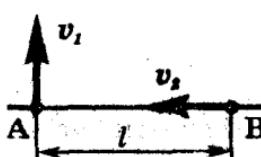
На лодке переплывают реку, отправляясь из пункта A (см. рисунок). Скорость лодки в стоячей воде $v = 5$ м/с, скорость течения реки $u = 3$ м/с, ширина реки $s = 200$ м. В какой точке пристанет лодка к противоположному берегу, если держать курс перпендикулярно берегам? Какой курс следует держать, чтобы попасть в точку B ? Для обоих случаев определите время переправы.

**1.12.**

Рыбак плыл на моторной лодке по реке, зацепил шляпой за мост, и она свалилась в воду. Рыбак поплыл дальше, но через полчаса солнце так нагрело ему голову, что пришлось повернуть обратно за шляпой. Лодка догнала ее на 4 км ниже моста. Чему равна скорость течения реки? В какую сторону плыл вначале рыбак — по течению или против?

1.13*.

Два автомобиля двигались с постоянными скоростями v_1 и v_2 по дорогам, пересекающимся под прямым углом (см. рисунок). Когда



первый из них достиг перекрестка, второму оставалось проехать до этого места расстояние l . Спустя какое время t расстояние между автомобилями будет наименьшим? Чему равно это расстояние s_{\min} ?

1.14**.

Между пунктами A и B , находящимися на противоположных берегах реки, курсирует катер. При этом он все время находится на прямой AB (см. рисунок). Точки A и B находятся на расстоянии $s = 1200$ м друг от друга. Скорость течения реки $u = 1,9$ м/с. Прямая AB составляет с направлением течения реки угол $\alpha = 60^\circ$. С какой скоростью v относительно воды и под какими углами β_1 и β_2 к прямой AB должен двигаться катер в обе стороны, чтобы пройти из A в B и обратно за время $t = 5$ мин?

1.15*.

От пристани A к пристани B по реке плывет лодка со скоростью $v_1 = 3$ км/ч относительно воды. От пристани B по направлению к пристани A одновременно с лодкой отходит катер, скорость которого относительно воды $v_2 = 10$ км/ч. За время движения лодки между пристанями катер успевает пройти это расстояние четыре раза и прибывает к B одновременно с лодкой. Определите направление и скорость течения реки.



1.16*.

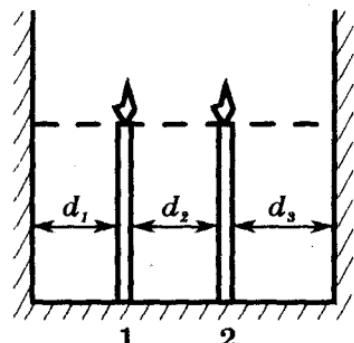
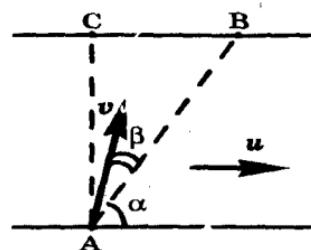
Записывая свои воспоминания, я засиделся до поздней ночи при свечах. Обе свечи одинаковой длины l я зажег одновременно и поставил, как показано на рисунке. Скоро я заметил, что тень первой свечи на левой стене неподвижна, а тень второй свечи на правой стене укорачивается со скоростью v . Я тут же определил, когда я останусь при одной свече и когда — в полной темноте. Попробуйте и вы ответить на эти вопросы.

1.17*.

Каким будет ответ в задаче 1.16, если тень на левой стене поднимается со скоростью v_1 , а на правой — опускается со скоростью v_2 ?

1.18**.

Человек находится на берегу озера в точке A и хочет в кратчайшее время попасть в точку B , находящуюся на озере



(см. рисунок). Скорость движения человека в воде v_1 , а по берегу v_2 . По какой траектории следует двигаться человеку, если $v_2 > v_1$? **1.19**.**

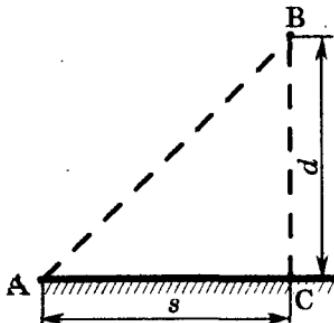
По прямому шоссе со скоростью $v_1 = 16$ м/с движется автобус. На расстоянии $d = 60$ м от шоссе и $s = 400$ м от автобуса находится человек. Человек может бежать со скоростью $v_2 = 4$ м/с. В каком направлении он должен бежать, чтобы успеть «перехватить» автобус, который к нему приближается? При какой наименьшей скорости человека $v_{2\min}$ это вообще возможно? В каком направлении следует при этом бежать?

1.20*.

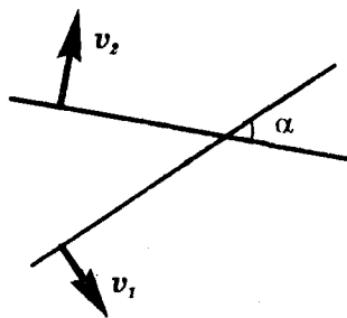
Автобус движется по прямому шоссе со скоростью v_1 . Человек может бежать с меньшей скоростью v_2 . Определите геометрическое место точек, в которых может находиться первоначально человек, чтобы успеть «перехватить» автобус.

1.21*.

Две прямые, пересекающиеся под углом α (см. рисунок), движутся перпендикулярно самим себе со скоростями v_1 и v_2 . Определите скорость v точки пересечения прямых.



К задаче 1.18



К задаче 1.21

1.22.**

Атомное ядро летит со скоростью v и распадается на два одинаковых осколка. Определите максимально возможный угол α между скоростью ядра и скоростью осколка, если известно, что при распаде покоящегося ядра каждый из осколков приобретает скорость v .

1.23.**

В каких пределах может изменяться угол β разлета осколков (см. задачу 1.22)?

Прямолинейное равноускоренное движение

1.24.

Докажите, что при прямолинейном равноускоренном движении без начальной скорости выполняется «закон нечетных чисел»: пути, проходимые телом за последовательные равные промежутки времени, относятся, как последовательные нечетные числа:

$$s_1 : s_2 : \dots : s_n = 1 : 3 : \dots : (2n - 1).$$

1.25.

Свободно падающее тело прошло последние $s = 30$ м за время $t = 0,5$ с. С какой высоты H падало тело?

1.26.

В последнюю секунду свободного падения тело прошло половину своего пути. С какой высоты H и какое время t падало тело?

1.27.

От движущегося поезда отцепляют последний вагон. Поезд продолжает двигаться с той же скоростью. Сравните пути, пройденные поездом и вагоном к моменту остановки вагона. Ускорение вагона можно считать постоянным.

1.28.

На наклонную плоскость после начального толчка снизу вверх вкатывается шарик. На расстоянии $l = 30$ см от начала пути шарик побывал дважды: через $t_1 = 1$ с и $t_2 = 2$ с после начала движения. Считая движение равноускоренным, определите начальную скорость v_0 и ускорение a .

1.29.

Тело падает с высоты 100 м без начальной скорости¹⁾. За какое время тело проходит первый и последний метры своего пути?

Какой путь проходит тело за первую секунду своего движения?

За последнюю?

1.30.

С каким промежутком времени оторвались от карниза крыши две капли, если спустя 2 с после начала падения второй капли расстояние между каплями равно 25 м?

1.31.

Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Когда оно достигло высшей точки траектории, из той же начальной точки с той же начальной скоростью брошено вверх другое тело. На какой высоте h они встретятся?

¹⁾ Здесь и далее в разделе 1 при решении задач можно пренебречь сопротивлением воздуха.

1.32.

Два тела брошены вертикально вверх из одной и той же точки с одинаковой начальной скоростью $v_0 = 19,6$ м/с с промежутком времени $\tau = 0,5$ с. Через какое время t после бросания второго тела и на какой высоте h тела встретятся?

1.33.

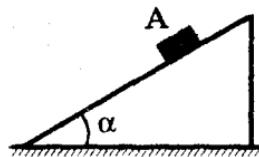
Тело начинает свободно падать с высоты $H = 45$ м. В тот же момент из точки, расположенной на высоте $h = 24$ м, бросают другое тело вертикально вверх. Оба тела падают на землю одновременно. Определите начальную скорость v_0 второго тела, приняв $g = 10$ м/с².

1.34*.

Лифт начинает подниматься с ускорением $a = 2,2$ м/с². Когда его скорость достигла $v = 2,4$ м/с, с потолка кабины лифта начал падать болт. Чему равны время t падения болта и перемещение болта при падении относительно Земли? Высота кабины лифта $H = 2,5$ м.

1.35*.

На клин, плоскость которого составляет угол α с горизонтом (см. рисунок), положили тело A . Какое ускорение a необходимо сообщить клину в горизонтальном направлении, чтобы «выбить» клин из-под тела, т. е. чтобы тело A свободно падало?

**1.36.**

Лыжник скатился с горы длиной $s_1 = 60$ м за $t_1 = 15$ с, а затем проехал по горизонтальному участку еще $s_2 = 30$ м до остановки. Найдите скорость v_1 лыжника в конце спуска и ускорение a_2 на горизонтальном участке. Постройте график зависимости скорости от времени.

1.37*.

Поезд прошел расстояние между двумя станциями $s = 17$ км со средней скоростью $v_{cp} = 60$ км/ч. При этом на разгон в начале движения и торможение перед остановкой он потратил в общей сложности $t_1 = 4$ мин, а остальное время двигался с постоянной скоростью v . Чему равна эта скорость?

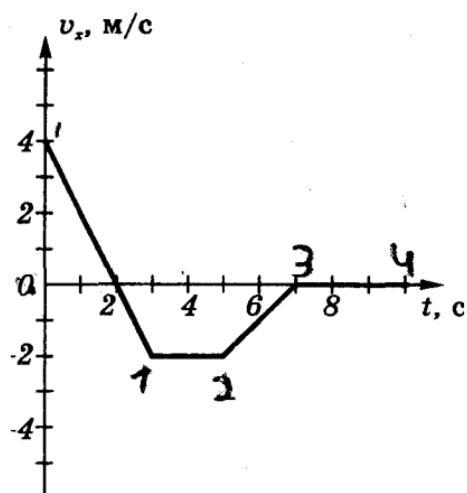
1.38*.

С высоты H на упругую горизонтальную плиту свободно падает стальной шарик. Постройте графики зависимости высоты и скорости шарика от времени. Продолжительностью соударения с плитой можно пренебречь.

1.39*.

На рисунке приведен график зависимости $v_x(t)$ для тела, движу-

щегося вдоль оси x . Постройте графики зависимости от времени ускорения a_x , перемещения s_x и пройденного пути l .



Криволинейное движение

1.40.

Определите скорость v и ускорение a точек земной поверхности в Харькове за счет суточного вращения Земли. Географические координаты Харькова: 50° северной широты, 36° восточной долготы. Радиус Земли $R = 6400$ км.

1.41.

Тело брошено с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Сколько времени длится полет? На каком расстоянии от места бросания упадет тело? При каком значении угла α дальность полета будет наибольшей? Найдите уравнение траектории тела.

1.42.

С отвесного берега высотой h произведен выстрел в горизонтальном направлении. Начальная скорость пули равна v_0 . Определите модуль и направление скорости пули v при вхождении в воду.

1.43.

Под каким углом α к горизонту нужно направить струю воды, чтобы высота ее подъема была равна дальности?

1.44.

Снаряд вылетает из дальнобойной пушки с начальной скоростью $v_0 = 1000$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Сколько времени t снаряд находится в воздухе? На какую высоту H поднимается? На каком расстоянии L от пушки он упадет на землю?

1.45.

Камень бросают горизонтально с вершины горы, склон которой образует угол α с горизонтом. С какой скоростью v_0 нужно бросить

камень, чтобы он упал на склон горы на расстоянии L от вершины?

1.46.

Самолет летит горизонтально на высоте h со скоростью v . Летчик должен сбросить груз в точку A , находящуюся на земле впереди по курсу самолета. На каком расстоянии s (по прямой) от точки A следует произвести сброс?

1.47.

Два тела (1 и 2) падают с одной и той же высоты H . На пути тела 2 находится расположенная под углом 45° к горизонту площадка, от которой это тело упруго отражается. Как различаются времена и конечные скорости падения этих тел? На какой высоте надо разместить площадку, чтобы отскочившее от нее тело упало как можно позже?

1.48.

Под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту брошено тело с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Через какое время t оно будет двигаться под углом $\beta = 45^\circ$ к горизонту?

1.49*.

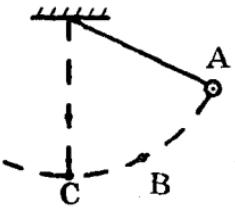
Из шланга, лежащего на земле, бьет под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту вода с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. Площадь сечения отверстия шланга $S = 5$ см². Определите массу m струи, находящейся в воздухе.

1.50.**

Какую наименьшую начальную скорость должен получить при ударе футбольный мяч, чтобы перелететь через стену высотой H , находящуюся на расстоянии s ?

1.51*.

Как направлено ускорение шарика, раскаивающегося на нити (см. рисунок), в точках A , B , C ? Точка A — крайняя точка траектории. Для точки B достаточно дать качественный ответ.



Комбинированные задачи по кинематике

1.52*.

Человек, стоящий на крутом берегу озера, тянет за веревку находящуюся на воде лодку. Скорость, с которой человек выбирает веревку, постоянна и равна v_0 . Какую скорость v будет иметь лодка в момент, когда угол между веревкой и вертикалью равен α ?

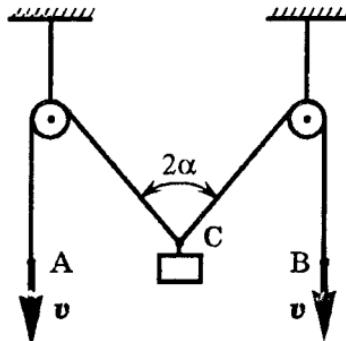
1.53*.

Концы каната A и B (см. рисунок) тянут вниз с одинаковой

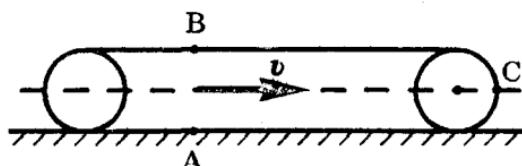
скоростью v . Какую скорость u имеет груз в тот момент, когда угол между канатами в точке его закрепления равен 2α ?

1.54*.

Нижний край опирающейся о стену лестницы скользит по полу со скоростью 2 м/с . Определите скорость верхнего края лестницы, когда она образует со стеной угол $\alpha = 60^\circ$.



К задаче 1.53



К задаче 1.55

1.55.

Трактор движется со скоростью $v = 36 \text{ км/ч}$. С какой скоростью (см. рисунок) движутся относительно Земли: а) точка A на нижней части гусениц; б) точка B на верхней части гусениц; в) точка C ?

1.56.

Сплошной диск радиусом R катится без проскальзывания с постоянной скоростью v по горизонтальной поверхности (см. рисунок). а) Определите модули и направления скоростей и ускорений точек A , B , C , D на ободе диска относительно неподвижного наблюдателя.

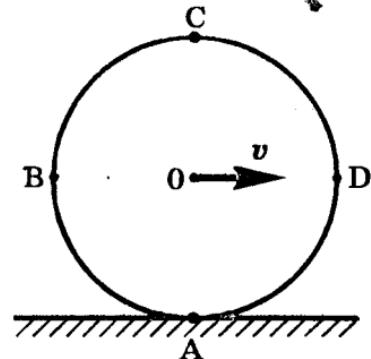
б) Какие точки диска имеют ту же по модулю скорость, что и центр диска O ?

1.57*.

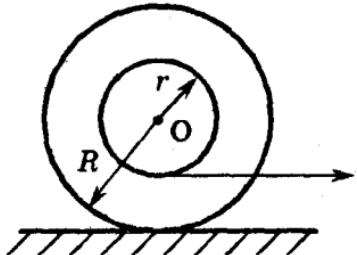
Катушка с намотанной на ней нитью лежит на горизонтальном столе и может катиться по нему без скольжения. Внутренний радиус катушки равен r , внешний R . С какой скоростью u будет перемещаться ось катушки, если конец нити тянуть в горизонтальном направлении со скоростью v ? Рассмотреть два случая (см. рис. а и б).

1.58*.

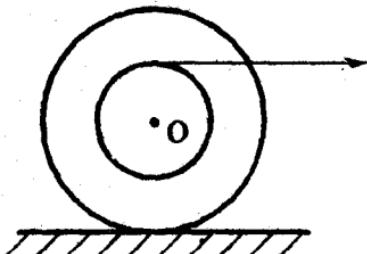
Выпущенный вертикально вверх снаряд в верхней точке траектории разорвался на множество мелких осколков, разлетающихся



с одинаковой по модулю начальной скоростью v_0 в разные стороны. Как будет меняться со временем форма «облака» из осколков?



К задаче 1.57, рис. а



К задаче 1.57, рис. б

1.59*.

С высоты H на наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом, свободно падает мяч и упруго отражается. Определите расстояния между местами 1-го и 2-го, 2-го и 3-го, ..., n -го и $n+1$ -го ударов о плоскость.

1.60*.

Два автомобиля движутся друг за другом по дороге с одинаковой скоростью $v = 72$ км/ч. При каком минимальном расстоянии l между ними камешек, застрявший между сдвоенными шинами переднего грузового автомобиля, не может попасть на задний автомобиль?

1.61*.

На киноэкране демонстрируется движущаяся повозка. Радиус колес $R = 0,4$ м, каждое колесо имеет $N = 6$ спиц. Съемка производилась со скоростью 24 кадра в секунду. При какой минимальной скорости движения повозки колеса на экране будут казаться: а) вращающимися «не в ту» сторону; б) неподвижными относительно повозки?

1.62**.

Четыре черепахи находятся в углах квадрата со стороной a . Черепахи начинают двигаться одновременно с одинаковой и постоянной по модулю скоростью v . При этом первая черепаха все время держит курс на вторую, вторая — на третью, третья — на четвертую, четвертая — на первую. Через какое время t черепахи встретятся? Ответьте на тот же вопрос для трех черепах, находящихся в углах правильного треугольника со стороной a .



1.63**.

Однажды на охоте я наблюдал забавную сцену. Беспечный заяц, ничего вокруг не замечая, бежал с постоянной скоростью по прямой тропинке вдоль поля, а на поле на расстоянии L от тропинки сидела голодная лиса. Она

увидела зайца, когда он находился в ближайшей к ней точке тропинки, и тут же пустилась в погоню. Со свойственной мне наблюдательностью я заметил, что лиса бежала с такой же по величине скоростью, что и заяц, и при этом все время «держала курс» на зайца. Через некоторое время лиса оказалась почти на тропинке и расстояние между ней и зайцем перестало меняться. Каким стало это расстояние?

1.64.**

Через сколько времени t лиса (см. задачу 1.63) догонит зайца, если ее скорость u превышает скорость зайца v ?

1.65*.

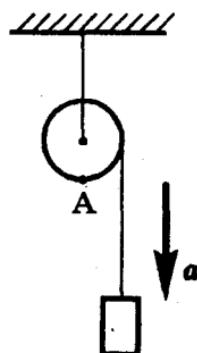
Шкив радиусом $R = 20$ см приводится во вращение грузом, подвешенным на нити, постепенно сматывающейся со шкива (см. рисунок). В начальный момент груз был неподвижен, а затем стал опускаться с ускорением $a = 2 \text{ см}/\text{с}^2$. Какова угловая скорость ω шкива в тот момент, когда груз пройдет путь $s = 1 \text{ м}$? Найдите ускорение a_A точки A в этот момент.

1.66.

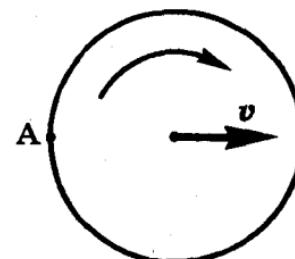
Мальчик бьет ногой по футбольному мячу, лежащему на расстоянии $l = 3 \text{ м}$ от стены. При этом мяч приобретает скорость $v_0 = 10 \text{ м}/\text{с}$ по направлению к стене под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Когда происходит удар мяча о стену — при подъеме или опускании? На какой высоте h ? Чему равна скорость u при ударе? Где упадет мяч? Удар мяча о стену можно считать упругим.

1.67.**

Муха заметила на столе каплю меда, пролетая точно над ней горизонтально со скоростью v_0 на высоте H . Как надо двигаться мухе, чтобы как можно быстрее добраться до меда? Сколько времени t для этого понадобится? Считайте, что муха способна развивать ускорение a в любом направлении.



К задаче 1.65



К задаче 1.68

1.68*.

С какой скоростью v должен ехать автомобиль, чтобы сорвавшийся с его колеса в точке A (см. рисунок) застрявший в шине камешек попал в ту же точку колеса, от которой оторвался? Радиус колеса $R = 20$ см.

2. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА**2.1.**

Я принадлежу к числу тех людей, которые умеют изменять свой вес почти мгновенно. Для этого мне достаточно войти в кабину лифта и нажать кнопку. Каков, по-вашему, мой вес P в тот момент, когда скорость лифта направлена вверх и равна $v = 1$ м/с, а ускорение направлено вниз и равно $a = 1,8$ м/с²? Моя масса $m = 80$ кг.

2.2.

Автомобиль массой $m = 3,3$ т проходит со скоростью $v = 54$ км/ч по выпуклому мосту, имеющему форму дуги окружности радиусом $R = 75$ м. С какой силой автомобиль давит на мост, проходя его середину? С какой силой автомобиль давил бы на середину вогнутого моста с таким же радиусом кривизны?

2.3*.

На подставке лежит груз, прикрепленный легкой пружиной к потолку. В начальный момент пружина не растянута. Подставку начинают опускать вниз с ускорением a . Через какое время t груз оторвется от подставки? Жесткость пружины k , масса груза m .

2.4.

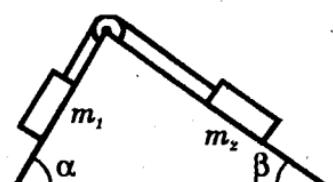
Человек, стоя на платформе весов, быстро приседает и выпрямляется. Как изменяются в ходе этого движения показания весов?

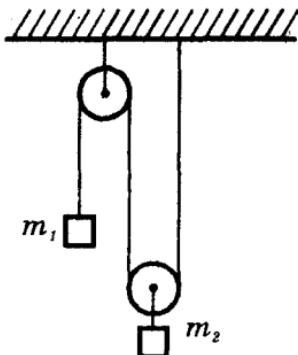
2.5.

К концам шнура, перекинутого через блок, подвешены грузы с массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 150$ г. Определите ускорения грузов, силу натяжения шнура T и показание F динамометра, на котором висит блок. Шнур можно считать невесомым и нерастяжимым; массой блока и трением в оси блока можно пренебречь.

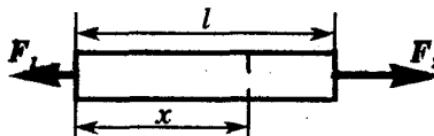
2.6*.

Через невесомый блок, укрепленный на ребре призмы (см. рисунок), перекинута невесомая нить с грузами на концах. Определите ускорение грузов a и силу натяжения нити T . Трением пренебречь.





К задаче 2.7



К задаче 2.8



К задаче 2.11

2.7.

Определите ускорения a_1 и a_2 показанных на рисунке грузов и силу натяжения T нерастяжимой нити. Массой блоков и нити можно пренебречь; трение отсутствует.

2.8.

На однородный стержень длины l действуют две силы F_1 и F_2 , приложенные к его концам и направленные в противоположные стороны (см. рисунок). С какой силой F растянут стержень в сечении, находящемся на расстоянии x от одного из его концов?

2.9.

В вагоне поезда, движущегося со скоростью $v = 72$ км/ч, взвешивают на пружинных весах тело массой $m = 5$ кг. Определите показание P пружинных весов, когда поезд движется по закруглению радиусом $R = 400$ м.

2.10.

С какой силой P давит гонщик на кресло гоночного автомобиля на вираже, если масса гонщика $m = 70$ кг, скорость автомобиля $v = 200$ км/ч, радиус закругления дороги $R = 50$ м? Во сколько раз эта сила превосходит вес неподвижного гонщика?

2.11.

На гладком столе лежат два бруска (см. рисунок) с массами $m_1 = 400$ г и $m_2 = 600$ г. К одному из них приложена горизонтальная сила $F = 2$ Н. Определите силу T натяжения нити, если сила приложена: а) к первому бруски; б) ко второму бруски.

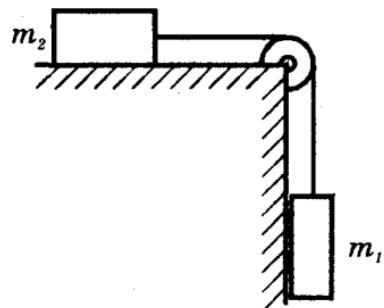
2.12*.

Два груза с массами m_1 и m_2 , связанные легким шнуром, лежат на горизонтальной поверхности. Шнур выдерживает силу натяжения T . Коэффициент трения между каждым из грузов и поверхностью равен μ . С какой силой F можно тянуть первый груз

параллельно шнуру, чтобы шнур не разорвался? В начальный момент шнур не натянут.

2.13*.

Два груза с массами m_1 и m_2 связаны легкой нитью, перекинутой через неподвижный блок (см. рисунок). Груз массы m_1 отпускают без толчка. С каким ускорением a относительно стола движутся грузы, если коэффициент трения второго груза о стол равен μ ? Какова сила T натяжения нити? Как изменится ответ, если вся система находится в лифте, движущемся с ускорением a_0 , направленным вверх?



2.14*.

Чугунное ядро массой m падает в воде с постоянной скоростью v . С какой силой F надо тянуть его вверх, чтобы оно поднималось со скоростью $2v$? Сила сопротивления прямо пропорциональна величине скорости.

2.15.

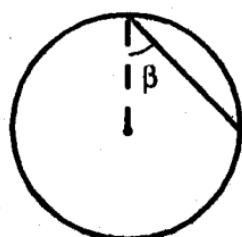
Из верхней точки вертикального диска радиуса R прорезан желоб (см. рисунок). Как зависит от угла β время t скольжения грузика по желобу? Трением пренебречь.

2.16.

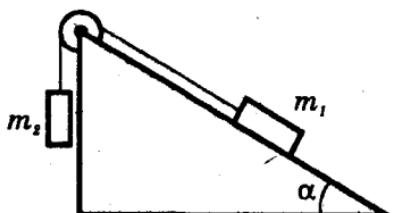
Тело соскальзывает без начальной скорости с наклонной плоскости. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30^\circ$, длина наклонной плоскости $l = 2$ м. Коэффициент трения тела о плоскость $\mu = 0,3$. Каково ускорение тела? Сколько времени длится соскальзывание?

2.17*.

В показанной на рисунке системе $\alpha = 20^\circ$, $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 1$ кг; коэффициент трения между первым грузом и наклонной плоскостью $\mu_1 = 0,1$. Нить и блок можно считать невесомыми, нить —



К задаче 2.15



К задаче 2.17

нерастяжимой, трением в блоке пренебречь. Грузы отпускают без начальной скорости. Определите ускорение a системы грузов и силу натяжения нити T . Как изменится результат, если коэффициент трения увеличится до $\mu_2 = 0,3$?

2.18.**

Определите ускорение системы грузов (см. задачу 2.17) при произвольных значениях m_1 , m_2 и μ . В начальный момент грузы неподвижны.

2.19*.

На горизонтальном участке дороги от равномерно идущего поезда массой $M = 1000$ т оторвался последний вагон массой $m = 40$ т, проехал расстояние $s_v = 200$ м и остановился. Какое расстояние s_u проехал поезд за время торможения вагона? Решить задачу в двух случаях: а) скорость поезда осталась неизменной; б) сила тяги локомотива осталась неизменной. Во всех случаях считать, что сила сопротивления пропорциональна массе.

2.20.

На тележке установлен штатив, на котором подвешен шарик на нити. Тележка движется горизонтально с ускорением a . Найти угол α отклонения нити от вертикали и силу T натяжения нити.

2.21*.

На тележке стоит сосуд с водой. Тележка движется горизонтально с ускорением a . Определите форму поверхности воды в сосуде.

2.22.

По наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, съезжает без трения тележка, на которой установлен штатив. К штативу подвешен на нити шарик массой m . Найти угол β отклонения нити от вертикали и силу T натяжения нити.

2.23*.

По наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, скользит без трения сосуд с водой. Найти форму поверхности воды в сосуде.

2.24.**

Кирпич массой m лежит на горизонтальном столе. Коэффициент трения между кирпичом и столом равен μ . К кирпичу приложена горизонтальная сила F . а) Выразите аналитически и графически зависимость силы трения F_{tr} и ускорения кирпича a от величины силы F . б) Сделайте то же самое для случая, когда сила F направлена под углом α к плоскости стола (учитывая случаи $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$).

2.25*.

Угол α наклонной плоскости с горизонталью постепенно уве-

личивается от 0 до 90° . На плоскости находится ящик массы m . Коэффициент трения равен μ . Постройте график зависимости силы трения F_{tr} от угла α . Чему равно максимальное значение силы трения F_{max} ?

2.26.

Если наклонить доску под углом α к горизонту, кирпич движется по ней практически равномерно. За какое время t кирпич проедет всю доску, если наклонить ее под углом $\beta > \alpha$? Длина доски равна l .

2.27*.

Санки толкнули вверх по ледяной горке, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Санки въехали на некоторую высоту и спустились обратно. Время спуска t_c в $n = 1,2$ раза превышает время подъема t_u . Чему равен коэффициент трения?

2.28**.

На ледяном склоне, составляющем угол α с горизонтом, находится доска массой M . Как должен бежать по этой доске человек массой m , чтобы доска оставалась в покое? При каком коэффициенте трения μ между подошвами и доской это возможно? Трение между доской и льдом пренебрежимо мало.

2.29*.

На диск проигрывателя на расстоянии r от оси положили монету массой m . Диск вращается с частотой n . Коэффициент трения между монетой и диском μ . Найдите зависимость силы трения, действующей на монету, от расстояния r .

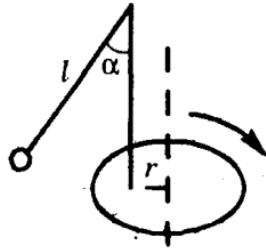
2.30.

Шарик на нити длиной l равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости (см. рисунок). При этом нить все время образует с вертикалью угол α (такую систему называют коническим маятником). Найдите период T вращения шарика.

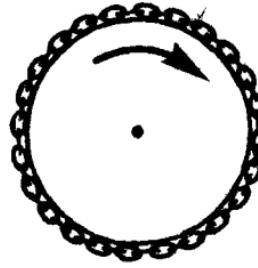


2.31.

К диску проигрывателя прикреплен высокий вертикальный стержень, а к его вершине подвешен шарик на нити длиной $l = 48$ см. Расстояние стержня от оси вращения диска $r = 10$ см (см. рисунок). После включения проигрывателя нить отклоняется от вертикали на угол $\alpha = 45^\circ$. Определите угловую скорость и частоту вращения диска.



К задаче 2.31



К задаче 2.34

2.32.

На вираже летчик поворачивает корпус самолета вокруг направления движения на угол $\alpha = 10^\circ$. Скорость полета $v = 360$ км/ч. Определите радиус поворота R .

2.33.**

На вертикальной оси электродвигателя укреплен отвес — маленький шарик на нити длиной $l = 12,5$ см. При медленном вращении двигателя нить остается вертикальной, а при быстром вращении шарик движется как конический маятник. При какой частоте n_1 вращения двигателя нить начинает отклоняться от вертикали? Чему равен угол ее отклонения ϕ_2 при частоте вращения $n_2 = 3 \text{ с}^{-1}$?

2.34*.

Металлическая замкнутая цепочка длиной $l = 62,8$ см насажена на деревянный диск (см. рисунок). Диск раскручивают с помощью электродвигателя. Когда частота вращения диска достигает $n = 60 \text{ с}^{-1}$, цепочка соскачивает с диска. Она ведет себя как жесткий обруч: может, например, катиться по столу (пока вращение не замедлится). Определите силу T натяжения цепочки в тот момент, когда она соскачивает с диска. Масса цепочки $m = 40$ г.

3. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

3.1.

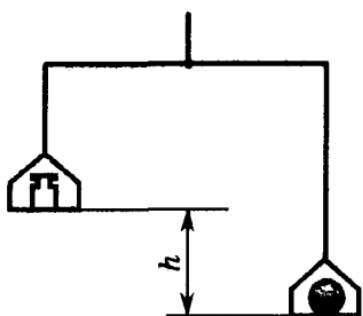
Оцените массу Солнца, считая расстояние R от Земли до Солнца равным $1,5 \cdot 10^8$ км.

3.2.

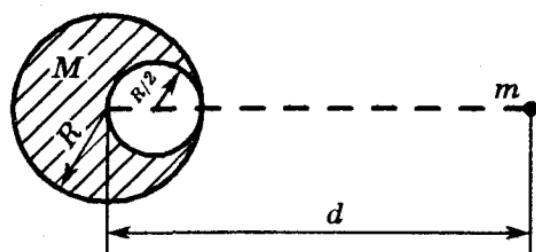
Оцените, во сколько раз отличаются силы притяжения вашего тела к Земле и к Солнцу. Расстояние до Солнца считайте равным $1,5 \cdot 10^8$ км.

3.3.

К равноплечим рычажным весам подвешивают груз и гири с помощью невесомых нитей различной длины (см. рисунок). Оцените, при какой разнице h длин нитей весы будут давать погрешность $\Delta m = 0,01$ г при взвешивании груза массой $m = 10$ кг. Радиус Земли $R = 6400$ км. Вращение Земли не учитывать.



К задаче 3.3



К задаче 3.4

3.4*.

Найдите силу F притяжения маленького шарика массой m и большого однородного шара массой M , в котором имеется сферическая полость (см. рисунок).



3.5**.

Однажды в своих космических странствиях я попал на удивительную планету: внутри она была пуста, т. е. имела форму сферической оболочки постоянной толщины. Обитатели планеты селились на ее внутренней поверхности и, самое удивительное, перелетали из одного места в другое, чуть-чуть подпрыгнув: внутри планеты совершенно не ощущалась сила тяжести! Как это объяснить?

3.6*.

Известно, что при подъеме с поверхности Земли сила притяжения F тела к Земле падает. А как обстоит дело при погружении в

глубокую шахту, доходящую до центра Земли? Постройте график зависимости $F(r)$ для тела массы m , где r — расстояние тела от центра Земли. Считайте, что плотность земного шара всюду одинакова..

3.7.

Спутник движется по круговой орбите на высоте h от поверхности Земли. Выразите скорость спутника v и период его обращения T через h , радиус Земли R и ускорение силы тяжести на поверхности Земли g .

3.8.

Чтобы установить постоянную радиосвязь через искусственный спутник Земли, удобно, чтобы он все время «висел» над одной и той же точкой земной поверхности. Определите радиус орбиты r такого спутника, его скорость v и период обращения T . В какой плоскости должна лежать траектория полета?

3.9.

Определите скорость движения Луны относительно Земли и период ее обращения вокруг Земли. Считайте, что Луна движется по круговой орбите радиуса 384 000 км.

3.10.

В момент солнечного затмения действующие на Луну силы притяжения Земли и Солнца направлены противоположно. Какая из этих сил больше и во сколько раз? Используйте данные, приведенные в задачах 3.1 и 3.9.

3.11.

К какому уменьшению веса тел на экваторе по сравнению с полюсом приводит вращение Земли? В каком направлении вдоль экватора и с какой скоростью v должен лететь самолет, чтобы на нем этот эффект не наблюдался?

3.12.

На экваторе некоторой планеты тела весят втрое меньше, чем на полюсе. Период обращения этой планеты вокруг своей оси равен $T = 55$ мин. Определите среднюю плотность ρ планеты.

3.13.

Мне захотелось увеличить скорость суточного вращения Земли так, чтобы на экваторе ощущалась невесомость. Во сколько раз следует «укоротить» сутки? Не будет ли каких-либо неприятных побочных эффектов от этого?

3.14.

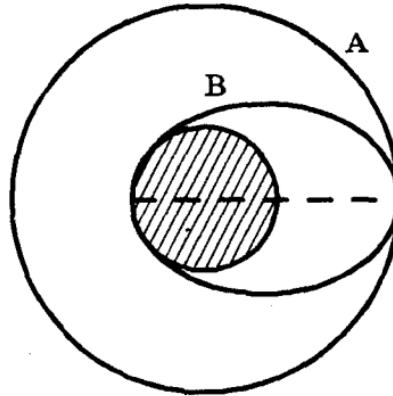
Справедливы ли законы Паскаля и Архимеда в состоянии невесомости?

3.15.

Спутник обращается по круговой орбите на небольшой высоте над планетой. Период его обращения равен T . Достаточно ли этих данных, чтобы определить среднюю плотность планеты ρ ?

**3.16**.**

Летая вокруг Земли в спутнике по круговой орбите A (см. рисунок), я решил приземлиться. Одним могучим ударом в заднюю стенку кабины я уменьшил скорость спутника так, что он перешел на орбиту B , касающуюся поверхности Земли. Через какое время t после этого я приземлился? Радиус круговой орбиты был втрое больше радиуса Земли.



4. ИМПУЛЬС, РАБОТА, ЭНЕРГИЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Закон сохранения импульса

4.1.

Мяч массой $m = 300 \text{ г}$ упал с высоты $H = 1,23 \text{ м}$ на асфальт и подскочил на ту же высоту. Продолжительность удара об асфальт $t = 0,1 \text{ с}$. Определите среднюю силу удара $F_{\text{ср}}$. Как изменится средняя сила удара, если мяч ударится о твердую поверхность, наклоненную под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту? Какой будет $F_{\text{ср}}$, если в обоих случаях мяч заменить пластилиновым шаром той же массы? Продолжительность удара — та же.

4.2*.

Струя сечением $S = 6 \text{ см}^2$ ударяет из брандспойта в стенку под углом $\alpha = 60^\circ$ к нормали и под тем же углом упруго «отражается» от нее. Скорость течения воды в струе $v = 15 \text{ м/с}$. С какой силой F она давит на стену?

**4.3.**

Летя на ядре со скоростью $v = 50 \text{ м/с}$, я так удачно соскочил с него, что моя скорость относительно Земли стала равной нулю. Какова стала скорость ядра после того, как я с него соскочил? Моя масса вдвое превышает массу ядра.

4.4*.

Ракета попала в пылевое облако. Пылинки оказались липкими и соударялись с ракетой неупруго. Чтобы скорость движения v относительно облака не падала, пришлось включить двигатель, развивающий силу тяги F . Как нужно изменить силу тяги двигателя, чтобы: а) двигаться со скоростью $2v$; б) сохранить скорость v неизменной при попадании в область, где концентрация частиц (число частиц в единице объема) в три раза больше?

4.5.

На гладком льду лежит цилиндрическое однородное бревно длиной H . К одному из его концов прикрепили веревку и стали медленно поднимать. Когда угол между бревном и поверхностью льда стал равным α , вертикально натянутая веревка оборвалась. На какое расстояние сместится при падении бревна его нижний конец?

4.6.

На сколько сместится неподвижная лодка массой $M = 280 \text{ кг}$, если человек массой $m = 70 \text{ кг}$ перейдет с ее носа на корму? Расстояние от носа до кормы $l = 5 \text{ м}$, сопротивление воды пренебрежимо мало.

4.7.

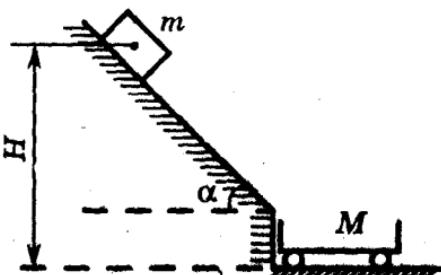
Два рыбака ловят рыбу в озере, сидя в неподвижной лодке. На сколько сместится лодка, если рыбаки поменяются местами? Масса лодки $M = 280 \text{ кг}$, масса одного рыбака $m_1 = 70 \text{ кг}$, масса второго $m_2 = 140 \text{ кг}$, расстояние между рыбаками $l = 5 \text{ м}$. Сопротивлением воды пренебречь.

4.8.

Масса пушки $M = 800 \text{ кг}$. Пушка выстреливает ядро массой $m = 10 \text{ кг}$ с начальной скоростью $v_0 = 200 \text{ м/с}$ относительно Земли под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Какова скорость и откат пушки? Трением пренебречь.

4.9.

Обледеневший склон холма, образующий угол α с горизонтом, заканчивается небольшим обрывом (см. рисунок). Под обрывом на горизонтальной площадке стоит тележка массы M . Какую скорость v приобретет тележка,



если в нее с высоты H соскользнет с холма камень массой m ? Трением пренебречь.

4.10*.

На гладкой горизонтальной поверхности лежит обруч массы M и радиуса R . На обруче сидит жук массы m . По каким траекториям будут двигаться жук и центр обруча, если жук поползет по обручу?

4.11*.

По длинному склону, образующему угол α с горизонтом, съезжает тележка, на которой установлен бак с водой. Через отверстие площадью S в задней стенке бака вытекает вода со скоростью v относительно бака. Поверхность воды установилась параллельно склону. Определите коэффициент сопротивления движению μ . Масса тележки с баком M , за время спуска вытекает лишь небольшая часть воды.



4.12*.

Однажды в открытом космосе на моей ракете закончились запасы топлива, и мне пришлось разгонять ее, выплевывая назад через люк вишневые косточки массой m со скоростью v относительно ракеты. Определите скорость ракеты u , после выплевывания n -й косточки. Первоначальная масса всей ракеты M , начальная скорость равна нулю.

Работа, мощность, энергия

4.13.

Какая работа A совершается при подъеме па крышу веревки длиной $l = 40$ м и массой $m = 6$ кг? Первоначально веревка свешивалась вертикально с края крыши.

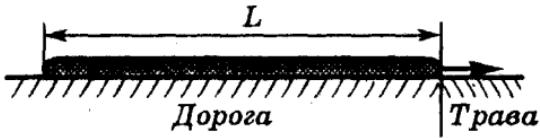


4.14.

Убив гигантскую змею, я вытянул ее поперек дороги (см. рисунок), измерил и взвесил. Длина ее оказалась L , масса M . Чтобы освободить дорогу, мне пришлось перетащить змею на траву. Какую работу я при этом совершил? Коэффициент трения змеи о дорогу μ_1 , о траву — μ_2 .

4.15*.

Поезд движется по прямому участку пути со скоростью v . На крышу



вагона, проезжающего под мостом, опускают ящик массой m . Ящик скользит по крыше и останавливается, пройдя расстояние L относительно вагона. Определите полную работу A силы трения: а) в системе отсчета, связанной с поездом; б) в системе отсчета, связанной с Землей. Коэффициент трения между ящиком и крышей вагона равен μ .

4.16.

Автомобиль массой $M = 2$ т разгоняется с места в гору с уклоном 0,02. Коэффициент сопротивления $\mu = 0,05$. Автомобиль набрал скорость $v = 97,2$ км/ч на отрезке $s = 100$ м. Какую среднюю полезную мощность P_{cp} развивает двигатель?

4.17*.

Перед самой посадкой ракета массой M с работающим двигателем неподвижно «зависла» над землей. Скорость вытекающих из ракеты газов u . Какова мощность N двигателя?

4.18.

Ведро с водой массой $M = 10$ кг поднимают на высоту $h = 10$ м, прикладывая постоянную силу $F = 200$ Н. Какую работу A при этом совершают? Чему равно изменение потенциальной энергии ΔW_p ? Как согласуются эти результаты с законом сохранения энергии?

4.19.

Санки массой $m = 20$ кг поднимают по гладкому склону на высоту $h = 2,5$ м, прикладывая силу $F = 300$ Н, направленную вдоль склона. Санки движутся с ускорением $a = 3 \text{ м/с}^2$. Какая работа A совершается при подъеме? Чему равно изменение потенциальной энергии ΔW_p санок? Чему равна кинетическая энергия W_k санок на вершине?

4.20.

Автомобиль при полностью включенных тормозах (колеса не врачаются) может удержаться на участке горной дороги с наклоном до $\alpha = 30^\circ$. Каков тормозной путь s этого автомобиля на горизонтальном участке той же дороги при скорости $v = 72$ км/ч?

4.21*.

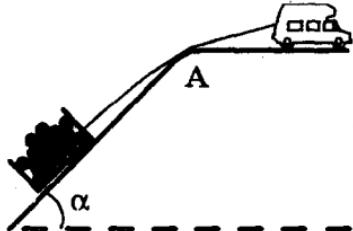
Бассейн, имеющий площадь $S = 100 \text{ м}^2$, разделен пополам подвижной вертикальной перегородкой и заполнен водой до уровня $h = 2$ м. Перегородку медленно передвигают так, что она делит бассейн в отношении 1 : 3. Какую работу A пришлось совершить? Вода не проникала через перегородку и не переливалась через край бассейна.

4.22.

Автомобиль поднимается по склону со скоростью $v = 60$ км/ч. Спускаясь по тому же склону с выключенным мотором, он движется равномерно с той же скоростью. Какую мощность P развивает двигатель на подъеме? Уклон равен 0,05; масса автомобиля $m = 2$ т.

**4.23*.**

Однажды мне понадобилось втащить на холм ящик с пушечными ядрами (см. рисунок). Я прицепил этот ящик тросом к своему автомобилю, который двигался с грузом довольно медленно. К моему удивлению, скорость не изменилась и после того, как ящик прошел край склона (точку A) и стал двигаться горизонтально. Каков коэффициент трения μ между ящиком и землей? Мощность двигателя все время оставалась неизменной. Склон холма образует угол $\alpha = 45^\circ$ с горизонтом. Трением между тросом и дорогой можно пренебречь.

**4.24*.**

Автомобиль движется вверх по пологому подъему со скоростью $v_1 = 6$ м/с и спускается по тому же пути со скоростью $v_2 = 9$ м/с, не меняя мощности двигателя. С какой скоростью v будет ехать этот автомобиль по горизонтальному участку той же дороги, если мощность двигателя неизменна? Сопротивлением воздуха пренебречь.

4.25.

Шлифовальный диск диаметром $d = 30$ см вращается с частотой $n = 120$ об/мин. Металлический брускок прижимают к цилиндрической поверхности диска с силой $F = 100$ Н. Коэффициент трения между бруском и диском $\mu = 0,2$. Какую мощность N развивает двигатель, вращающий диск?

Закон сохранения энергии. Упругие и неупругие столкновения**4.26*.**

Обезьяна раскачивалась на длинной тонкой лиане так, что максимальный угол отклонения лианы от вертикали составлял α . Когда обезьяна находилась в нижней точке траектории, лиана зацепилась серединой за ветку дерева. Каким стал максимальный угол β отклонения лианы от вертикали, если $\alpha < 60^\circ$? Что изменится, если $60^\circ < \alpha < 90^\circ$?

4.27*.

Санки съезжают с горы, длина основания которой $a = 5$ м, а высота $H = 2$ м. После этого они проезжают до остановки еще $s = 35$ м по горизонтальной площадке. Определите коэффициент трения μ , считая его одинаковым на всем пути. Переход склона горы в горизонтальную поверхность считайте достаточно плавным.

4.28.

Легкий теннисный мяч ударили ногой, и он полетел в направлении движения ноги. Скорость движения ноги при ударе $u = 10$ м/с. Какую скорость v приобрел мяч?

4.29.

За счет чего увеличивается потенциальная энергия поднимающегося воздушного шара? Не нарушается ли при этом закон сохранения энергии?

4.30*.

Лежащий на гладком горизонтальном столе клин имеет массу M и высоту h . Угол наклона поверхности клина к горизонту равен α . С клина соскальзывает без трения небольшое тело массой m . Какую скорость u приобретет тело в конце спуска? Определите величину и направление скорости.

4.31.

Деревянный брускок висит на веревке длиной l . В брускок выстрелили, пуля застряла в нем, и веревка отклонилась от вертикали на угол α . Какова скорость пули v_0 ? Масса бруска M , масса пули m . Пуля летела горизонтально.

 **4.32*.**

Однажды во время охоты я увидел летящую головку сыра. Когда она села на ветку, я тут же выстрелил и, конечно, попал. Головка сыра упала на землю, но оказалось, что она — всего лишь ранена. Пришлось еще раз выстрелить в нее — сверху вниз. Когда я разрезал сыр, то обнаружил, что первая пуля вошла в сыр на глубину $s_1 = 10$ см, а вторая — на глубину $s_2 = 10,1$ см (измерения я делал очень тщательно!). Благодаря этому я сразу же определил массу M головки сыра, даже не взвешивая ее! Как я это сделал? (Добавлю, что массу пули я знал: $m = 10$ г; кроме того, я предполагал, что сила сопротивления F , действующая на пулю внутри сыра, постоянна).

4.33.

Человек прыгает в воду со скалы высотой $h = 10$ м. На какую глубину H он бы при этом опустился, если бы можно было пренебречь силами сопротивления воздуха и воды? Масса человека $m = 60$ кг, объем $V = 66$ л.

**4.34*.**

Я загрузил в вагон, стоявший на кольцевом железнодорожном пути в точке A , мешок с порохом. От случайной искры мешок взорвался, да так, что вагон раскололся на две неравные части и они понеслись по рельсам друг от друга.

Обе части столкнулись снова в некоторой точке, и буферные пружины опять «растолкнули» части вагона. При втором же ударе обе части соединились друг с другом намертво, как будто взрыва и не было! Где произошли эти столкновения? Массы частей вагона m_1 и m_2 , длина кольцевого пути L . Сопротивлением движению частей вагона можно пренебречь.

**4.35*.**

Обычно я стараюсь одной пулей убивать хотя бы несколько куропаток: жду, когда они в полете выстроются по прямой линии, и стреляю вдоль нее. Однажды в линию выстроились 20 куропаток. Я выстрелил и обратил внимание, что пуля, прострелив первую куропатку, потеряла 5% начальной скорости. Тут же я предсказал, какова будет моя добыча в этот раз. Попробуйте и вы это сделать.

4.36.

Два одинаковых шара, двигавшихся со скоростями v_1 и v_2 вдоль одной прямой, испытывают лобовой упругий удар. Определите их скорости u_1 и u_2 после удара.

4.37*.

При нецентральном ударе биллиардного шара о такой же, но неподвижный, оба шара разлетаются всегда под одним и тем же углом. Найдите этот угол.

4.38*.

Шар массой m_1 налетает на неподвижный шар массой m_2 . Происходит лобовое упругое соударение. Как зависит доля α переданной при соударении энергии от отношения масс шаров $k = \frac{m_1}{m_2}$?

Постройте график зависимости $\alpha(k)$.

4.39*.

На сортировочной горке сталкиваются два медленно движущихся в одну сторону железнодорожных вагона. Пружины буферов смягчили удар и потом «растолкали» вагоны, так что удар можно считать упругим. Какова была максимальная энергия W упругой деформации пружин? Вагоны имеют массы m_1 и m_2 , их скорости до столкновения равны v_1 и v_2 .

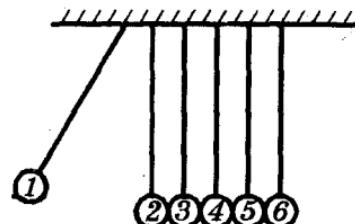
4.40.

Шар массой m , имеющий скорость v , налетел на покоящийся шар

массой $m/2$ и после упругого удара изменил направление своего движения на угол $\alpha = 30^\circ$. С какими скоростями стали двигаться шары после удара?

4.41*.

Однаковые биллиардные шары подвешены на нитях равной длины, как показано на рисунке. Расстояния между соседними шарами малы. Что произойдет, если отклонить крайний шар и отпустить? Если проделать это сразу с двумя шарами?

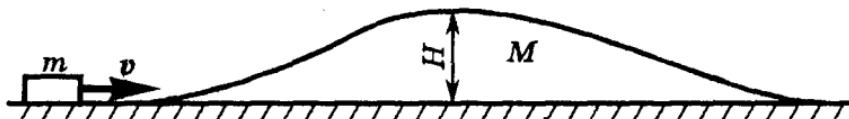


4.42*.

Как вы знаете, мне случалось пересаживаться в полете с одного пушечного ядра на другое, встречное. На сколько изменяется суммарная кинетическая энергия моего тела и ядер при такой пересадке? Какова причина этого изменения? Рассмотрите два случая: 1) остается неизменной скорость оставленного мною ядра; 2) остается неизменной скорость ядра, на которое я пересел. Ядра имеют одинаковую скорость $v_0 = 1000$ м/с и массу $M = 100$ кг; моя масса $m = 80$ кг.

4.43*.

По горизонтальной плоскости может перемещаться без трения гладкая горка высотой H и массой M (см. рисунок).



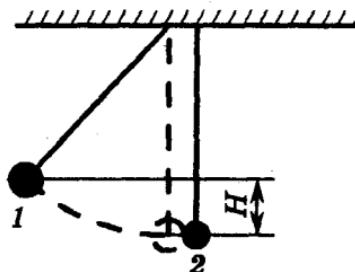
На неподвижную горку налетает скользящее по плоскости небольшое тело массой m . Как зависит результат столкновения от начальной скорости v налетающего тела? При движении по горке тело не отрывается от нее.

4.44*.

Докажите, что при соударении двух тел изменение кинетической энергии системы не зависит от того, в какой системе отсчета рассматривается процесс.

4.45*.

Два упругих стальных шара массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 100$ г подвешены рядом так, что их центры находятся на одном уровне (см. рисунок). Отклонив первый



К задаче 4.45

шар на высоту $H = 18$ см, его отпускают. На какую высоту поднимется каждый из шаров после удара?

4.46.

Железнодорожная платформа массой M и длиной L катится со скоростью v . На передний край платформы ставят ящик массой m . Ящик скользит по платформе и останавливается у противоположного края. Определите коэффициент трения μ между ящиком и платформой.

4.47*.

Докажите, что кинетическую энергию системы движущихся материальных точек можно представить в виде $W = \frac{Mv_c^2}{2} + W_{\text{цм}}$, где

M — суммарная масса всех материальных точек, v_c — скорость центра масс системы точек, $W_{\text{цм}}$ — кинетическая энергия материальных точек в системе отсчета их центра масс.

4.48*.

Как движутся частицы после столкновения, если максимально возможная часть их кинетической энергии перешла во внутреннюю?

4.49*.

Потенциальная энергия взаимодействия двух материальных точек имеет вид $W_p = \frac{C}{r}$, где r — расстояние между точками.

Докажите, что эти материальные точки взаимодействуют с силой F , обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. При каких значениях C взаимодействие является притяжением?

4.50*.

Какую минимальную скорость нужно сообщить телу, чтобы оно покинуло Землю насовсем? Суточное вращение Земли не учитывать. Радиус Земли $R = 6400$ км.

4.51*.

Какова кинетическая энергия W_k обруча массой m , катящегося без проскальзывания со скоростью v по плоской поверхности?

4.52*.

Однородный куб надо переместить вдоль горизонтальной плоскости на расстояние, значительно превышающее длину ребра куба. В каком случае потребуется совершить меньшую работу: при перемещении «волоком» (прикладывая силу горизонтально) или кантованием (опрокидыванием через ребро)? Коэффициент трения равен μ .

5. СТАТИКА

5.1.

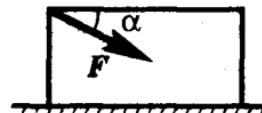
Фонарь массой $m = 10$ кг висит посередине улицы шириной $l = 10$ м. Допустимая сила натяжения каната $T = 500$ Н. На какой высоте H могут быть закреплены концы каната, чтобы точка подвеса фонаря находилась на высоте $h = 5$ м?

5.2.

С какой силой F надо тянуть за веревку, привязанную к ящику массой $m = 40$ кг и образующую угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, чтобы ящик двигался по горизонтальной поверхности равномерно? Коэффициент трения между ящиком и площадкой $\mu = 0,27$.

5.3.

Ящик толкают по горизонтальной плоскости, прикладывая к нему силу, как это показано на рисунке. Масса ящика m , коэффициент трения μ . При каком значении силы F ящик будет двигаться равномерно?



5.4*.

Груз массой m необходимо равномерно перемещать по горизонтальной плоскости. Какую минимальную силу F_{\min} нужно для этого приложить и под каким углом α к плоскости следует ее направить? Коэффициент трения равен μ .

5.5.

Каков должен быть коэффициент трения μ для того, чтобы заключенный в бревно клин не выскакивал из него? Угол при вершине клина $\alpha = 30^\circ$.

5.6.

Каким должен быть коэффициент жесткости пружины, которая может заменить систему из двух пружин с коэффициентами жесткости k_1 и k_2 , соединенных: а) параллельно; б) последовательно?

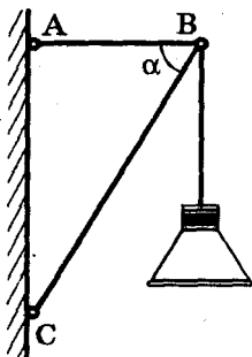
5.7.

Найти равнодействующую n приложенных в одной точке сил, каждая из которых равна по модулю F и образует угол $2\pi/n$ с соседними (ближайшими по направлению) силами.

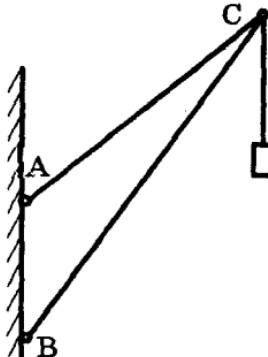
5.8.

Невесомые стержни AB и BC шарнирно закреплены в точках A ,

B, C (см. рисунок). Чему равны действующие на стержни силы, если $\alpha = 60^\circ$, а масса подвешенного в точке *B* фонаря $m = 3$ кг?



К задаче 5.8



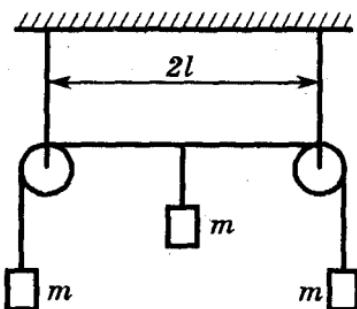
К задаче 5.9

5.9*.

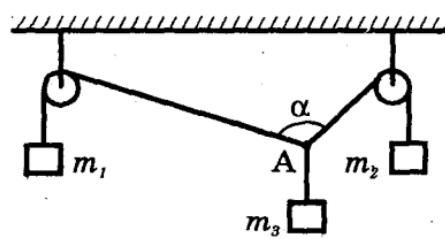
Найти силы, действующие на шарнирно закрепленные стержни *BC* и *AC*, если $AB = 60$ см, $AC = 1,2$ м, $BC = 1,6$ м (см. рисунок). Масса груза 50 кг, массой стержней можно пренебречь.

5.10.

На концах нити, перекинутой через два неподвижных блока, висят два одинаковых груза (см. рисунок). К середине нити прикрепили третий такой же груз. На какое расстояние h опустится этот груз после установления равновесия? Расстояние между осями блоков равно $2l$. Трением в осях блоков пренебречь.



К задаче 5.10



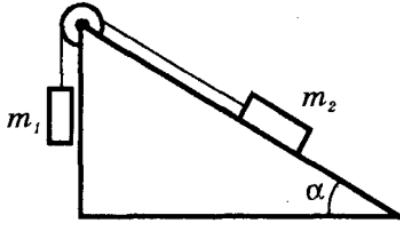
К задаче 5.11

5.11*.

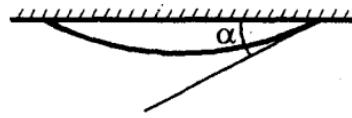
К концам нити, перекинутой через два блока, подвесили два груза m_1 и m_2 (см. рисунок). Какой груз m_3 надо подвесить к нити между блоками, чтобы при равновесии угол α был равен 120° ? Рассмотреть случаи: а) $m_1 = m_2 = 4$ кг; б) $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 5$ кг.

5.12*.

Груз массой m_2 находится на наклонной плоскости (см. рисунок), образующей угол α с горизонтом. Коэффициент трения равен μ . На нити, привязанной к грузу и переброшенной через блок, подвешен груз массой m_1 . При какой величине m_1 система будет находиться в равновесии?



К задаче 5.12



К задаче 5.13

5.13*.

Цепочка массой m подвешена к потолку (см. рисунок). При каком угле α сила натяжения цепочки в ее нижней точке равна весу цепочки? Чему будет равна при этом сила T натяжения в точке подвеса?

**5.14.**

Однажды я подстрелил удивительно большого гуся (ди-кого!) и множество обычных (совершенно одинаковых!) куропаток. Меня заинтересовало, во сколько раз гусь тяжелее куропатки. По моей просьбе слуга вырезал ровную палку и, привязав к ней веревку, сделал рычажные весы. Сначала я подвесил гуся слева; чтобы уравновесить его, справа пришлось подвесить связку из 40 куропаток. Однако когда я подвесил гуся справа, то, к моему удивлению, для уравновешивания хватило всего 10 куропаток! Я, конечно, тут же сообразил, что мой слуга сделал весы неравноплечими. Более того, я сразу определил, во сколько раз гусь *на самом деле* тяжелее куропатки, да к тому же — во сколько раз одно плечо самодельных весов длиннее другого. Попробуйте сделать это и вы (чтобы не затруднять вас слишком, разрешаю массой палки пренебречь).

5.15.

Два муравья толкают кусок древесной коры с силами $F_1 = 2 \text{ мН}$ и $F_2 = 4 \text{ мН}$. Силы направлены в одну сторону, расстояние между линиями действия сил равно 1,8 мм. В каком месте и какую силу должен приложить третий муравей, чтобы кусок коры оставался в покое? Трением можно пренебречь.

5.16.

Каким станет ответ в задаче 5.15, если первый муравей будет не толкать кусок коры, а тянуть его на себя с той же силой?

5.17.

К стержню длиной $l = 120$ см и массой $m = 8$ кг подвешены два груза: к левому концу — весом $P_1 = 30$ Н, а к правому — весом $P_2 = 90$ Н. Стержень подвесили горизонтально на одной нити так, что он находится в равновесии. На каком расстоянии от левого конца стержня находится точка подвеса?

5.18.

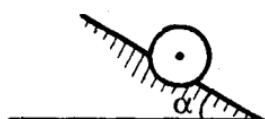
К балке массой $m_1 = 400$ кг и длиной $l = 7$ м подведен груз массой $m_2 = 700$ кг на расстоянии $a = 2$ м от одного из концов. Балка своими концами лежит на опорах. Какова сила давления на каждую из опор?

5.19.

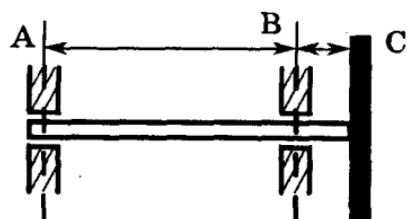
Чтобы узнать массу линейки, на один из ее концов положили груз массой 250 г и начали выдвигать этот конец за край стола. Линейка находилась в равновесии до тех пор, пока ее не выдвинули на четверть длины. Чему равна масса линейки? Насколько можно было бы выдвинуть линейку, если бы масса груза была 125 г?

5.20.

В доске сделали лунку и положили в нее шар (см. рисунок). Глубина лунки в два раза меньше радиуса шара. На какой угол α нужно наклонить доску, чтобы шар выскоцил из лунки?

**5.21.**

На конце вала, проходящего через подшипники A и B (см. рисунок), укреплен массивный диск C . Масса вала — 7 кг, масса диска — 28 кг, $AB = 70$ см, $BC = 10$ см. Чему равны силы давления вала на подшипники A и B ?

**5.22.**

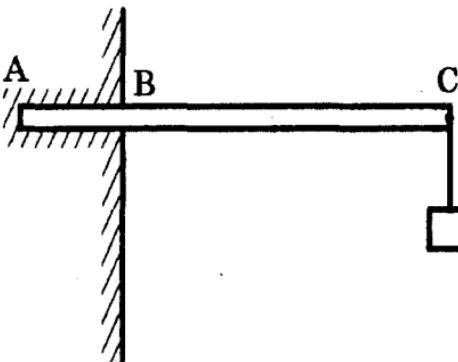
Доска массой $m = 70$ кг имеет длину $l = 1,6$ м. Она лежит на двух опорах, расположенных на расстояниях $a_1 = 40$ см и $a_2 = 20$ см от ее концов. Какую вертикальную силу надо приложить к каждому концу доски, чтобы приподнять этот же конец или противоположный? Считать $g = 10$ м/с².

5.23.

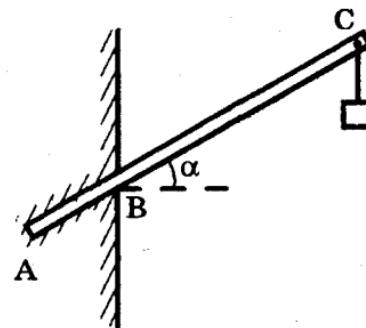
Гладкий невесомый стержень AC длиной 1 м вставлен горизонтально с малым зазором по толщине на глубину $AB = 0,2$ м в вертикальную стену (см. рисунок). К концу C стержня подвешен груз весом $P = 100$ Н. Определите силы реакции стенки в точках A и B .

5.24*.

Гладкий невесомый стержень AC длиной 1 м вставлен под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту в вертикальную стену (см. рисунок). К концу C стержня подвешен груз весом $P = 100$ Н. Определите силы реакции боковых стенок отверстия в точках A и B . С какой силой стержень сжат? Расстояние AB равно 0,2 м.



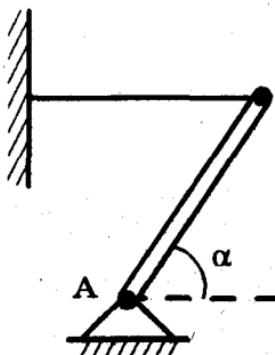
К задаче 5.23



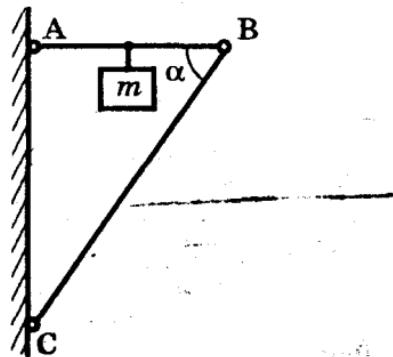
К задаче 5.24

5.25**.

Тонкий однородный стержень укреплен на шарнире в точке A и удерживается в равновесии горизонтальной нитью (см. рисунок). Масса стержня $m = 1$ кг, угол его наклона к горизонту $\alpha = 45^\circ$. Найдите величину и направление силы N реакции шарнира.



К задаче 5.25



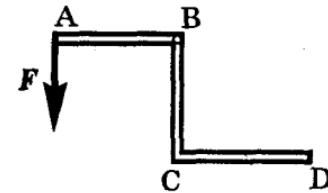
К задаче 5.26

5.26*.

Невесомые стержни AB и BC соединены шарнирно между собой и с вертикальной стеной (см. рисунок); угол между стержнями равен α . К середине стержня AB подвешен груз массой m . Определите силы F_A и F_B давления стержня AB на шарниры A и B .

5.27.

Рычаг изогнут так, что стороны его AB , BC и CD равны между собой и образуют друг с другом прямые углы (см. рисунок). Ось рычага — в точке B . В точке A приложена сила F перпендикулярно плечу рычага AB . Определите минимальное значение силы, которую нужно приложить в точке D , чтобы рычаг находился в равновесии. Изменится ли ответ, если ось рычага переместить в точку C ? Массой рычага пренебречь.

**5.28.**

Колесо радиусом R и массой m стоит перед ступенькой высотой h . Какую горизонтальную силу F надо приложить к оси колеса, чтобы оно въехало на ступеньку?

5.29.

Решите задачу 5.28, если $h < R$ и сила F может быть направлена произвольно. Как именно она должна быть направлена?

5.30*.

На земле лежат вплотную друг к другу два одинаковых бревна цилиндрической формы. Сверху кладут такое же бревно. При каком коэффициенте трения μ между бревнами они не раскатятся? По земле бревна не скользят.

5.31.

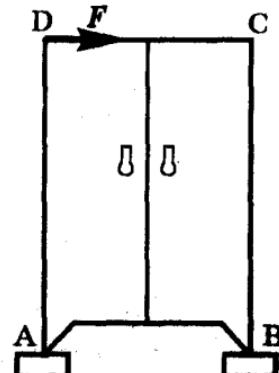
Однородный шар массы m и радиуса R подвешен на нити длиной l к гладкой вертикальной стене. Определите силу T натяжения нити и силу F давления шара на стену.

5.32*.

Тяжелый однородный шар радиуса R подведен на нити длиной l , конец которой закреплен на вертикальной стене. Точка крепления нити к шару находится на одной вертикали с центром шара. Каков должен быть коэффициент трения между шаром и стеной, чтобы шар находился в равновесии?

5.33.

Шкаф массой $m = 30$ кг опирается ножками на платформы двух весов (см. рисунок).



Ширина шкафа $AB = 1,2$ м, высота $AD = 2$ м. Определите показания весов, если в точке D приложена горизонтальная сила $F = 59$ Н. Центр тяжести шкафа совпадает с его геометрическим центром.

5.34*.

Каков должен быть минимальный коэффициент трения μ_{\min} между кубом и горизонтальной плоскостью, чтобы однородный куб можно было опрокинуть через ребро горизонтальной силой, приложенной к верхней грани? Какая минимальная сила F_{\min} для этого потребуется? Масса куба m .

5.35*.

Какой минимальной силой F_{\min} можно опрокинуть через ребро однородный куб, находящийся на горизонтальной плоскости? Каков должен быть при этом минимальный коэффициент трения μ_{\min} между кубом и плоскостью? Масса куба m .

5.36*.

Лестница стоит наклонно, опираясь на гладкую вертикальную стену. Коэффициент трения между ножками лестницы и полом μ . Какой наибольший угол может образовывать лестница со стеной? Центр тяжести лестницы расположен в ее середине.

5.37.

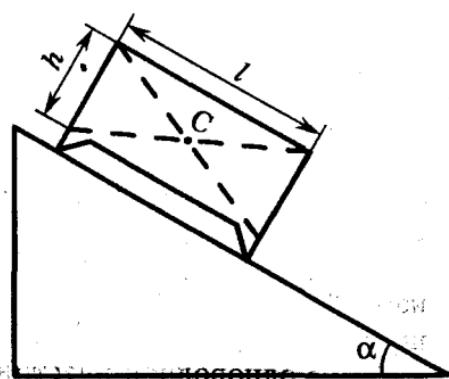
На горизонтальной плоскости стоит однородный цилиндр радиуса R и высоты h . Если медленно наклонять плоскость, то в какой-то момент цилиндр опрокидывается. При каком угле наклона α это происходит? При каком коэффициенте трения μ между цилиндром и плоскостью это возможно?

5.38*.

Высокий прямоугольный однородный бруск с квадратным основанием стоит на горизонтальной поверхности. Как определить коэффициент трения между бруском и поверхностью, располагая только линейкой?

5.39*.

Шкаф с невысокими ножками неподвижно стоит на наклонной плоскости (см. рисунок). Масса шкафа m , центр тяжести совпадает с геометрическим центром. Определите силы нормального давления на наклонную плоскость левых и правых ножек шкафа.

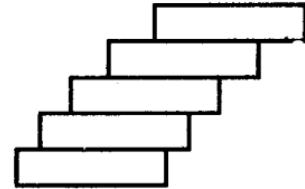


5.40*.

Шкаф с невысокими ножками поставили на наклонную плоскость (см. рисунок к задаче 5.39). Определите силы давления на наклонную плоскость левых и правых ножек шкафа, если коэффициент трения μ меньше $\operatorname{tg} \alpha$.

5.41*.

Пять кирпичей длиной l кладут без раствора один на другой так, что каждый кирпич выступает над нижележащим (см. рисунок). На какое наибольшее расстояние правый край самого верхнего кирпича может выступать над правым краем самого нижнего кирпича?

**5.42**.**

 Решая предыдущую задачу, я задумался: а что, если взять не пять кирпичей, а больше? Можно ли, имея достаточный запас кирпичей, уложить их друг на друга так, чтобы край самого верхнего кирпича выступал над краем самого нижнего кирпича на целую милю? Этот вопрос не давал мне покоя, поэтому я раздобыл побольше кирпичей и взялся за дело. И что вы думаете — я достиг успеха! Как мне это удалось?

5.43.

В вершинах треугольника помещены шарики массы m каждый. Найдите положение центра тяжести системы.

5.44.

В двух вершинах треугольника помещены шарики массы m каждый. В третьей вершине помещен шарик массой $4m$. Найдите положение центра масс системы.

5.45.

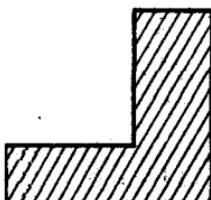
Одна треть цилиндрического стержня изготовлена из меди, а две трети — из алюминия (см. рисунок). В какой из частей стержня расположен его центр тяжести?

5.46*.

Десять шариков с массами 100, 200, 300, ..., 1000 г укреплены на невесомом стержне длиной 90 см так, что расстояние между центрами двух соседних шариков равно 10 см. Найдите положение центра масс системы.

5.47*.

Пользуясь только линейкой без делений и не производя никаких вычислений, найдите построением положение центра тяжести C показанной на рисунке однородной пластинки.



5.48*.

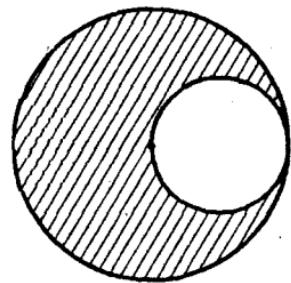
Докажите, что центр тяжести плоской однородной треугольной пластины находится в точке пересечения медиан.

5.49*.

Однородная тонкая пластина имеет форму круга радиуса R , в котором вырезано круглое отверстие радиуса $R/2$ (см. рисунок). Где находится центр тяжести пластины?

5.50.**

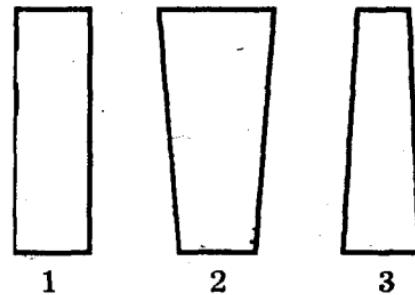
Найдите центр тяжести тонкой однородной проволоки, согнутой в виде полуокружности радиуса r .



6. ГИДРОСТАТИКА И АЭРОСТАТИКА

6.1.

Три сосуда (см. рисунок) имеют одинаковую площадь дна S . Сравните силы давления на дно каждого из сосудов, если в них налито одинаковое количество воды. В каждом из трех случаев сравните силу давления F на дно с весом P налитой воды.

**6.2*.**

В воду опущен сосуд с приставным дном, имеющий форму усеченного конуса. Если в сосуд налить 200 г воды, то дно отпадет. Отпадет ли дно, если: а) в его центр поставить гирю массой 200 г; б) налить 200 г бензина; в) налить 200 г ртути?

6.3.

Аквариум имеет форму куба со стороной a и заполнен доверху водой. Определите силы давления воды на дно и боковые стенки аквариума. Атмосферное давление не учитывать.

6.4.

Аквариум имеет форму куба со стороной $a = 60$ см. До какой высоты h следует налить в него воду, чтобы сила давления на боковую стенку была в 6 раз меньше, чем на дно? Атмосферное давление не учитывать.

6.5*.

В колена U-образной трубки налиты вода и спирт, разделенные ртутью (см. рисунок). Уровень ртути в обоих коленах одинаков. На высоте $h_0 = 24$ см от уровня ртути колена соединены тонкой горизонтальной трубкой с закрытым краном. Высота столба воды

$h_1 = 40$ см. Определите высоту столба спирта h_2 . Какое движение возникнет в жидкости после того, как откроют кран?

6.6**.

Как изменяются уровни всех жидкостей после открывания крана (см. задачу 6.5), если спирт заменить керосином? Керосин имеет ту же плотность, что и спирт, но, в отличие от него, не смешивается с водой. Капиллярные эффекты не учитывать.

6.7*.

В стакане плавает кусок льда. Как изменится уровень воды, когда лед растает? Изменится ли ответ, если во льду находится кусочек пробки?

Стальная гайка?

6.8*.

В небольшом бассейне плавает лодка. Изменится ли (и как) уровень воды в бассейне, если лежащий на дне лодки камень бросить в воду?

6.9*.

В небольшом бассейне плавает полузатопленная лодка. Уровень воды в лодке такой же, как в бассейне. Из лодки зачерпнули ведро воды и вылили в бассейн. Где теперь выше уровень воды — в лодке или в бассейне? Как изменился уровень воды в бассейне?

6.10.

Потонет ли в воде стеклянная бутылка, доверху наполненная водой? Бутылка со ртутью — в ртути?

6.11*.

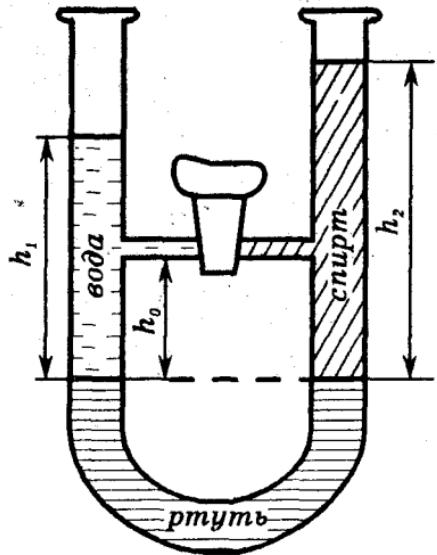
В воде плавает льдина с площадью поперечного сечения $S = 5 \text{ м}^2$ и высотой $H = 0,5 \text{ м}$. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

6.12.

Стеклянный шар уравновешивается на точных рычажных весах латунными гилями массой $m_1 = 170 \text{ г}$. Взвешивание производится на уровне моря при температуре 0°C . Какова масса шара m ? Гири какой массы m_2 потребуются для уравновешивания шара на высоте $h = 5,5 \text{ км}$, где плотность воздуха уменьшается вдвое?

6.13.

Воздушный шар объемом $V = 300 \text{ м}^3$ парит вблизи поверхности

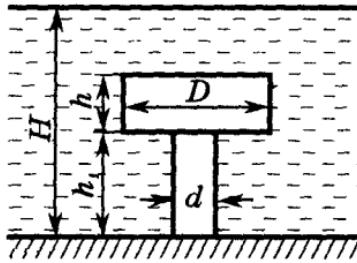


К задаче 6.5

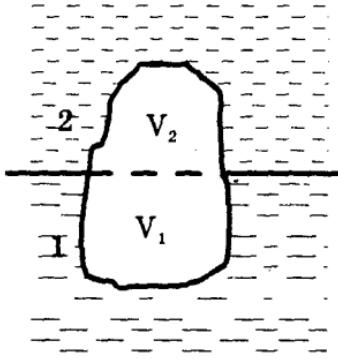
Земли. С шара сбросили балласт, и шар поднялся на высоту, где плотность воздуха вдвое меньше. Какова масса Δm балласта, если объем шара при подъеме увеличился в полтора раза? Температуру воздуха считайте равной 0°C .

6.14*.

На дне реки установлена бетонная конструкция грибовидной формы (см. рисунок). С какой силой давит конструкция на дно реки? Атмосферное давление не учитывать.



К задаче 6.14



К задаче 6.16

6.15.

Пластмассовый бруск плавает в воде. Как изменится глубина погружения бруска в воду, если поверх воды наливать слой масла, полностью покрывающий бруск?

6.16.

Тело находится на границе двух жидкостей (см. рисунок). Вычислите действующую на него силу Архимеда F_A .

6.17*.

Тело плотностью ρ плавает на границе раздела двух жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 , причем $\rho_1 > \rho_2$. Какая часть объема тела погружена в «нижнюю» жидкость?

6.18*.

Доска толщиной 5 см плавает в воде, погрузившись на 70%. Поверх воды разливается слой нефти толщиной 1 см. На сколько будет выступать доска над поверхностью нефти?

6.19*.

Стальной кубик с длиной ребра $a = 10$ см плавает в ртути. Поверх ртути наливают воду вровень с верхней гранью кубика. Какова высота H слоя воды?

6.20.

Однородное тело подвешено к динамометру. Показание динамометра в воздухе $P_1 = 8,4$ Н, а в воде $P_2 = 5$ Н. Чему равна плотность тела ρ ?

6.21*.

В лифте находится ведро с водой, в котором плавает мяч. Как изменится глубина погружения мяча, если лифт будет двигаться с ускорением a , направленным вверх? Вниз?

6.22.

На рычажных весах уравновешен гириями сосуд с водой. Нарушится ли равновесие, если в воду погрузить подвешенный на нитке стальной брускок так, чтобы он не касался дна?

6.23.

На сколько нужно увеличить массу гирь (см. задачу 6.22), чтобы восстановить равновесие весов, если брускок погружается в воду полностью? Размеры стального бруска $5 \text{ см} \times 6 \text{ см} \times 8 \text{ см}$.

6.24.

Как изменится ответ в задаче 6.23, если верхний конец нитки не держать в руках, а привязать к перекладине того же сосуда (см. рисунок)?

6.25.

В озере на некоторой глубине плавает полый шар, полностью погруженный в воду. Можно ли считать, что шар находится в состоянии невесомости, поскольку его вес в воде «полностью исчез»? Будет ли ощущать невесомость человек, находящийся внутри шара?

6.26*.

Вернется ли плавающий шар (см. задачу 6.25) на прежнюю глубину, если его погрузить ниже и отпустить?

6.27.

Сплошные шары — алюминиевый и железный — уравновешены на рычаге. Нарушится ли равновесие, если оба шара погрузить в воду? Рассмотрите два случая, когда шары имеют: а) одинаковую массу; б) одинаковый объем.

6.28*.

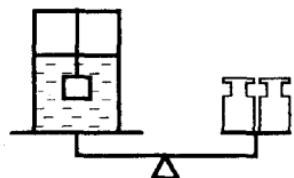
Оцените массу атмосферы Земли (радиус Земли $R = 6400 \text{ км}$).

6.29.

Пробковый поплавок массой m , привязанный нитью к тяжелому «якорю», находится на глубине h под водой. Какое количество теплоты выделится после перерезания нити?

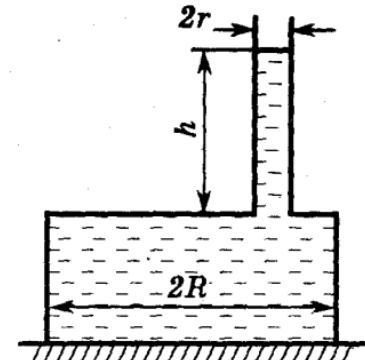
6.30.

Тело массой $m = 3 \text{ кг}$ и объемом $V = 2 \text{ дм}^3$ находится в воде на глубине $h = 3 \text{ м}$. Какую работу необходимо совершить при медленном подъеме тела на высоту $H = 5 \text{ м}$ над поверхностью воды? Равна ли эта работа изменению потенциальной энергии тела?



6.31*.

Перевернутая кастрюля массы m и радиуса R стоит на резиновой прокладке (см. рисунок), плотно прилегая к ней краями. В дне кастрюли — круглое отверстие радиусом r , в которое плотно вставлена легкая вертикальная трубка. В кастрюлю через трубку наливают жидкость. Когда длина столба жидкости в трубке становится равной h , жидкость начинает вытекать из-под кастрюли. Определите плотность жидкости ρ .

**7. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ****Гармонические колебания****7.1.**

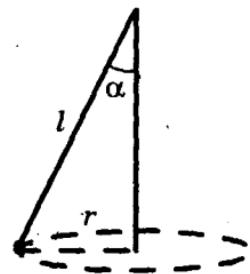
Математический маятник длиной 1 м колеблется с амплитудой 1 см. За какое время он пройдет путь в 1 см, если начнет движение из положения равновесия? За какое время он пройдет: а) первую половину этого пути; б) вторую половину этого пути?

7.2.

Амплитуда гармонических колебаний маятника 6 см. Какую часть периода груз маятника находится не далее 3 см от положения равновесия?

7.3*.

Рассмотрите движение конического маятника (груз на нити движется по окружности в горизонтальной плоскости) и выразите период движения по окружности через длину нити l и угол α отклонения от вертикали (см. рисунок). Докажите, что при малых углах α периоды конического маятника и обычного математического маятника с той же длиной нити равны.

**7.4*.**

Как-то, гуляя, я невзначай забрался в горы. Мне, конечно, захотелось узнать, на какой я высоте. В моей сумке случайно оказались маятниковые часы. Держа их в правой руке, я начал сравнивать их ход с ходом электронных часов на левом запястье. Ровно через час я обнаружил, что маятниковые часы отстали на пять секунд, и сразу понял, на какой высоте



нахожусь. Попробуйте и вы узнать эту высоту. Маятник моих часов сделан из такого сплава, что длина его от температуры не зависит, а мои электронные часы, как известно, самые точные в мире. Радиус Земли $R = 6400$ км.

7.5.

Стоя на вершине горы, барон Мюнхаузен (см. задачу 7.4) решил восстановить точность своих маятниковых часов. На какую часть длины он должен укоротить маятник?

7.6.

При какой скорости поезда v подвешенный в вагоне маятник длиной $l = 1$ м особенно сильно раскачивается, если длина рельсов $L = 25$ м?

7.7*.

Чему равен период T колебаний математического маятника длиной l : а) в лифте, ускорение которого направлено вверх и равно a ; б) в лифте, ускорение которого направлено вниз ($a < g$); в) в поезде, движущемся горизонтально с ускорением a ; г) на тяжелой тележке, съезжающей без трения с наклонной плоскости под углом α к горизонту?

Чему равен во всех этих случаях период колебаний пружинного маятника?

7.8*.

В кабине лифта, находящегося на верхнем этаже небоскреба, раскачивается подвешенный на нити шарик. Нить привязана к гвоздю, вбитому в стену кабины. Трос лифта обрывается, и лифт начинает падать. Опишите движение шарика относительно лифта на протяжении всего движения лифта. Учтите при этом, что сила сопротивления воздуха быстро растет с увеличением скорости.

7.9.

Подвешенный груз растягивает легкую пружину на $\Delta l = 16$ см. Чему равен период колебаний груза на этой пружине?

7.10.

Найдите период T колебаний систем, изображенных на рисунках а, б, в. Коэффициенты жесткости пружин k_1 и k_2 , масса груза m .

Трение отсутствует.

Рис. а



Рис. б

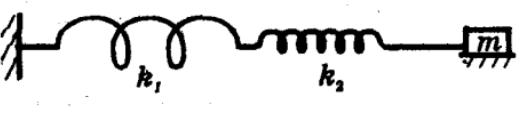
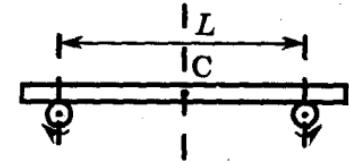


Рис. в



7.11*.

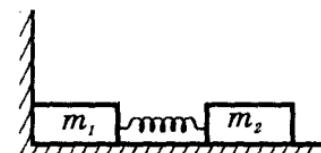
На два быстро вращающихся одинаковых валика положили горизонтально доску с массой m (см. рисунок). Расстояние между осями валиков равно L , коэффициент трения между доской и валиками равен μ . Какое движение будет совершать доска? Как изменится ответ, если оба валика изменят направление вращения?



7.12.** Два грузика массами m_1 и m_2 связаны пружиной. Коэффициент жесткости пружины k . Каков период T свободных колебаний такой системы, если при колебаниях грузики движутся вдоль одной прямой?

7.13.**

На гладком столе лежат два грузика с массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 300$ г, соединенные пружиной жесткостью $k = 50$ Н/м. Один из грузиков касается стенки (см. рисунок). Грузики связаны нитью длиной $l_0 = 6$ см. При этом пружина сжата на $\Delta l = 2$ см. Опишите движение грузиков после того, как нить пережигают. Массой пружины можно пренебречь.

**7.14*.**

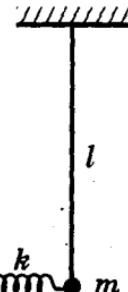
Однажды, путешествуя вблизи Северного полюса, я очутился один на отколовшейся плоской льдине площадью $S = 5$ м². От огорчения я подпрыгнул, и льдина вместе со мной начала колебаться, совершая одно колебание в секунду. Это меня сразу успокоило: зная свою массу ($m = 80$ кг), я тут же определил, что льдина достаточно толстая. Какова ее толщина?

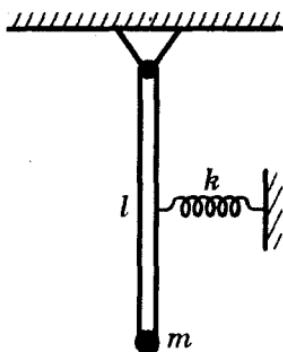
7.15.**

На рисунке показано положение равновесия колебательной системы (математического маятника с пружинной связью). Определите период T малых колебаний системы. Как изменится ответ, если пружину заменить полоской эластичной резины, которая имеет те же длину и жесткость?

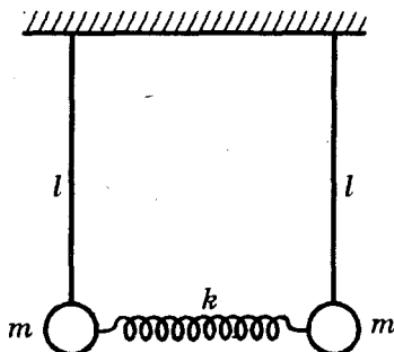
7.16*.

Во сколько раз изменится частота малых колебаний небольшого груза на легком стержне (см. рисунок на следующей стр.), если к середине стержня прикрепить горизонтальную пружину с жесткостью k ? В равновесии стержень занимает вертикальное положение.





К задаче 7.16



К задаче 7.17

7.17*.

Два математических маятника длиной l каждый связаны невесомой пружиной с жесткостью k . На рисунке показано положение равновесия системы. Маятники отклоняют в плоскости рисунка на одинаковые углы и отпускают. Определите период T малых колебаний связанных маятников, если: а) маятники отклонены в одну сторону (колебания в одной фазе); б) маятники отклонены в противоположные стороны (колебания в противофазе).

**7.18*.**

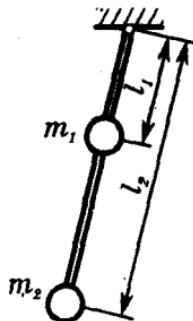
Когда я наконец добрался по льду до самого Северного полюса, меня ожидало открытие: из глубокого колодца торчала земная ось! Я ухватился за нее, как за шест, и быстро заскользил вниз — ось оказалась очень гладкой. К счастью, я не расшибся: колодец оказался без дна, и скоро я вынырнул вверх ногами на Южном полюсе! Жесткий антарктический мороз не помешал мне тут же вычислить время t , которое понадобилось для такого удивительного путешествия с одного полюса на другой, а также скорость v , с которой я пролетал через центр Земли. Определите их и вы, считая Землю однородным шаром и пренебрегая сопротивлением воздуха.

7.19*.

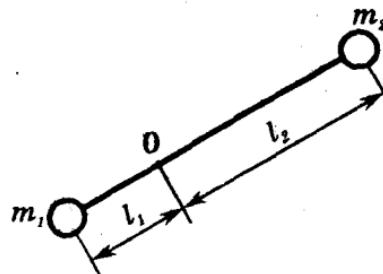
Санки длиной $l = 80$ см скользят горизонтально по снегу и останавливаются, частично выехав на асфальт. Определите время торможения, если трение о снег отсутствует, а коэффициент трения об асфальт $\mu = 0,4$. Масса санок распределена по их длине равномерно.

7.20*.

Найдите период колебаний жидкости в U -образном сосуде постоянного сечения. Длина всего столба жидкости равна $2H$.



К задаче 7.21



К задаче 7.22

7.21.**

Найдите период T малых колебаний изображенного на рисунке маятника. Массой стержня можно пренебречь.

7.22*.

Невесомый стержень с закрепленными на нем грузами (см. рисунок) может вращаться вокруг горизонтальной оси O . Определите период T его малых колебаний.

7.23*.

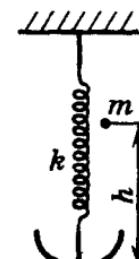
Горизонтальная подставка с лежащим на ней предметом совершают горизонтальные гармонические колебания с периодом $T = 0,5$ с. Коэффициент трения предмета о подставку $\mu = 0,1$. При какой амплитуде A колебаний предмет проскальзывает на подставке при колебаниях?

7.24.

Горизонтальная подставка совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой $A = 5$ мм. При какой частоте колебаний v лежащий на подставке предмет не отрывается от нее?

7.25*.

На пружине, имеющей жесткость k , неподвижно висит очень легкая чашка (см. рисунок). На чашку с высоты h падает без начальной скорости пластилиновый шарик с массой m . Определите амплитуду A возникающих колебаний.



Механические волны

7.26.

По шнурю бежит незатухающая гармоническая волна, так что поперечное смещение точки O шнуря изменяется по закону $y = A \cos \omega t$. По какому закону изменяется смещение y точки X , расположенной на расстоянии x от точки O ? Волна бежит от O к X со скоростью v .

7.27.

Как изменяются частота и длина волны звука при переходе из воздуха в воду?

7.28*.

Найдите собственные частоты колебаний воздушного столба в закрытой с обоих концов трубе длиной $l = 3,4$ м.

7.29*.

Над цилиндрическим сосудом высотой $H = 1$ м звучит камертон, имеющий собственную частоту колебаний $v = 340$ Гц. В сосуд медленно наливают воду. При каких положениях уровня воды в сосуде звучание камертона значительно усиливается?

7.30.

Камертон колеблется с частотой $v = 440$ Гц. Какую минимальную длину может иметь резонаторный ящик («подставка» камертона) для усиления звука? Не противоречит ли закону сохранения энергии тот факт, что из двух одинаковых камертонов, возбужденных одинаковыми по силе ударами, намного громче звучит тот, который установлен на резонаторе?

7.31.

При какой глубине озера в нем могут «раскачаться» физиологически опасные инфразвуковые колебания с частотой 7,5 Гц?

7.32.

Первая резонансная частота открытой с обеих сторон органной трубы равна 300 Гц. Чему равна первая резонансная частота такой же трубы, закрытой с обоих концов? Закрытой с одного конца?

7.33.**

Почему изменяется голос человека в барокамере, заполненной дыхательной смесью из кислорода и гелия? Как изменится в этой атмосфере тон духовых инструментов? Камертона? Камертона на резонаторном ящике?

7.34*.

Какую форму имеет фронт ударной волны, которая возникает в воздухе при полете пули со скоростью u , превышающей скорость звука v ?

7.35*.

Реактивный самолет пролетел со скоростью, в два раза превышающей скорость звука, на высоте $h = 5$ км над наблюдателем. На каком расстоянии от наблюдателя был самолет, когда человек услышал звук?

7.36.**

Гоночный автомобиль, включив сирену, мчится со скоростью $u = 306$ км/ч. Частота колебаний сирены $v_0 = 400$ Гц. Впереди на

обочине лежит другой автомобиль с точно такой же включенной сиреной (водитель, к счастью, остался жив). Каждый из водителей различает звук сирены другого автомобиля, потому что он выше, чем звук его собственной сирены. Кто из них слышит более высокий звук?

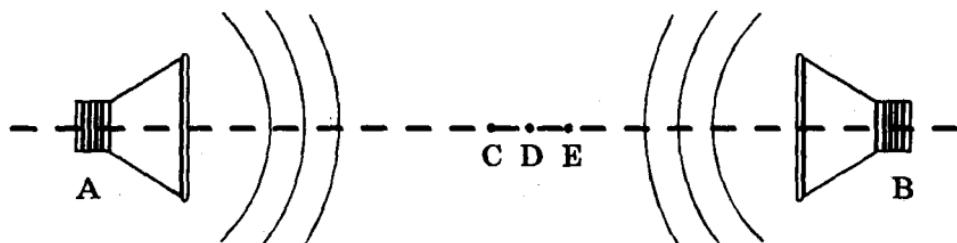
7.37*.

Морские волны движутся со скоростью v и набегают на берег с частотой v_0 . Волновой фронт параллелен береговой линии. С какой частотой v волны ударяются о катер, идущий от берега со скоростью u , направленной под углом α к береговой линии?

Каким станет ответ, если катер изменит направление движения на противоположное?

7.38*.

Два одинаковых динамика (*A* и *B*) подключены к выходу одного генератора электрических колебаний частотой $v = 680$ Гц. Расстояние между динамиками 4 м. Амплитуда звуковых колебаний в точке *C*, находящейся посередине отрезка *AB* (см. рисунок), максимальна и равна a . Какова амплитуда звуковых колебаний в точках *D* и *E*, если $CD = 6,25$ см, $CE = 12,5$ см? Каким будет ответ, если изменить полярность подключения одного из динамиков?



8. КОМБИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО МЕХАНИКЕ

8.1.

Чему равен коэффициент полезного действия η наклонной плоскости длиной $L = 3$ м и высотой $h = 1,8$ м, если коэффициент трения $\mu = 0,17$?

8.2.

Тело массой $m = 1$ кг врашают в вертикальной плоскости на веревке длиной $l = 1$ м. При прохождении нижней точки окружности сила натяжения веревки $T = 80$ Н. Когда скорость тела направлена вертикально вверх, веревку отпускают. На какую высоту h над нижней точкой окружности поднимется тело?

8.3*.

Подвешенный на нити шарик массой m совершает колебания в вертикальной плоскости. Когда шарик проходит положение равновесия, сила натяжения нити $T_1 = 2mg$. На какой максимальный угол α от вертикали отклоняется шарик? Чему равна сила T_2 натяжения нити в момент наибольшего отклонения шарика?

8.4.

Шарик массой m , подвешенный на нити, отклоняют до горизонтального положения нити и отпускают. При каком угле α между нитью и вертикалью сила натяжения нити будет равна mg ? Чему равна максимальная сила T_{\max} натяжения нити?

8.5*.

Какой должна быть минимальная прочность нити, чтобы на ней можно было вращать шарик массой m в вертикальной плоскости?

Каким будет ответ, если нить заменить невесомым стержнем?

8.6.**

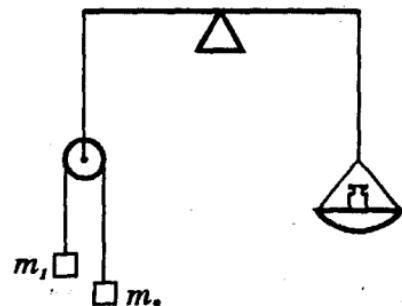
На легкой нерастяжимой нити длиной l подведен маленький шарик массой m . Нить с шариком отводят до горизонтального положения и отпускают. Какой угол α образует нить с вертикалью в тот момент, когда ускорение шарика направлено горизонтально? Каковы в этот момент скорость v шарика и сила T натяжения нити?

8.7*.

Снаряд в верхней точке своей траектории на высоте $H = 2$ км разорвался на два одинаковых осколка. Один из них вернулся точно назад и попал обратно в жерло пушки, второй упал на расстоянии $s = 8$ км от пушки. Какой была начальная скорость v_0 снаряда? Сопротивлением воздуха пренебречь.

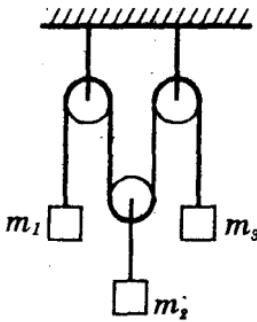
8.8*.

Заторможенный блок, через который перекинута невесомая нерастяжимая нить с грузами m_1 и m_2 на концах, уравновешен на равноплечих рычажных весах (см. рисунок). Как следует изменить массу гирь на правой чашке, чтобы равновесие сохранилось после освобождения блока?

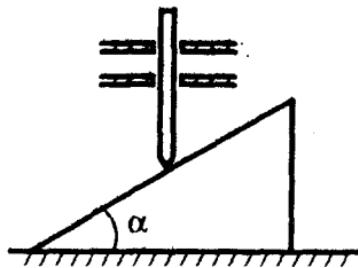


8.9*.

Каковы ускорения грузов показанной на рисунке системы? Трение отсутствует, массой блоков и нити можно пренебречь. Участки нити, не лежащие на блоках, вертикальны. Нить нерастяжима.



К задаче 8.9



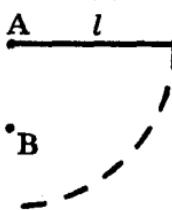
К задаче 8.10

8.10*.

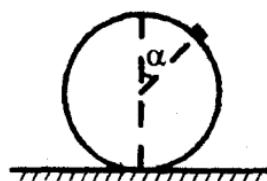
Между двумя неподвижными муфтами может без трения перемещаться вверх и вниз стержень. Нижним концом он касается гладкой поверхности клина (см. рисунок). Массы клина и стержня одинаковы. Клин лежит на гладком горизонтальном столе. Определите ускорения клина и стержня.

8.11*.

Маленький шарик подвешен в точке A на нити длиной l . В точке B на расстоянии $l/2$ ниже точки A в стену вбит гвоздь (см. рисунок). Шарик отводят так, что нить занимает горизонтальное положение, и отпускают. В какой точке траектории исчезает сила натяжения нити? До какой наивысшей точки поднимется шарик?



К задаче 8.11



К задаче 8.12

8.12*.

Небольшое тело массой m соскальзывает с вершины гладкого неподвижного шара (см. рисунок). С какой силой N давит тело на поверхность шара?

8.13*.

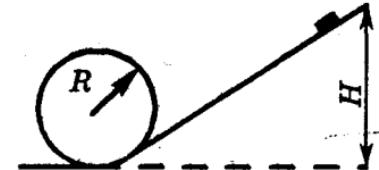
На какой высоте H тело (см. задачу 8.12) отделится от шара?

8.14**.

На каком расстоянии от точки касания шара с плоскостью (см. задачу 8.12) упадет тело?

8.15*.

Небольшое тело соскальзывает без трения с наклонной плоскости, переходящей в «мертвую петлю» радиуса R (см. рисунок). С какой минимальной высоты H должно начинаться движение, чтобы тело прошло «мертвую петлю», не отрываясь от нее?

**8.16**.**

Обруч скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости высотой h и длиной l . Определите его скорость v в нижней точке.

8.17*.

Галилей определял на опыте ускорение свободного падения, скатывая шары с наклонной плоскости. При этом он ошибочно исходил из того, что ускорение шара $a = gsina$, где α — угол наклона плоскости. На самом деле шары скатываются с меньшим ускорением. В результате Галилей получил заниженное значение g' ускорения свободного падения. Какое значение g' получил бы Галилей, скатывая с наклонной плоскости обручи?

8.18.**

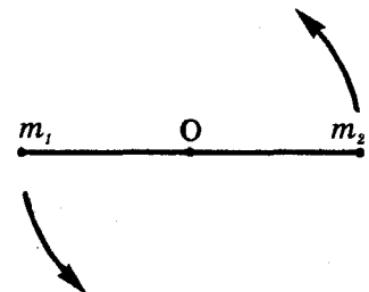
Небольшое тело массой m соскальзывает без трения с наклонной плоскости, переходящей в «мертвую петлю» радиуса R (см. рисунок к задаче 8.15). Начальная высота тела $H = 5R$. С какой силой F давит тело на поверхность в верхней точке «мертвой петли»? Каким будет ответ, если в условии задачи соскальзывающее тело заменить тонкостенным колечком, скатывающимся без проскальзывания?

8.19.**

Легкий стержень длиной l с двумя шариками на концах (их массы m_1 и m_2 ; $m_1 > m_2$) может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину стержня (см. рисунок). Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают. С какой силой F давит стержень на ось в первый момент после освобождения? При прохождении положения равновесия?

8.20.**

Веревка массы m и длины L переброшена через маленький легкий блок и уравновешена. От легкого толчка блок начал вращаться. Какова скорость v веревки в тот момент, когда с одной стороны блока свешивается часть веревки длиной $x > L/2$? С какой силой F веревка давит на блок в этот момент? Трение в блоке отсутствует.



8.21*.

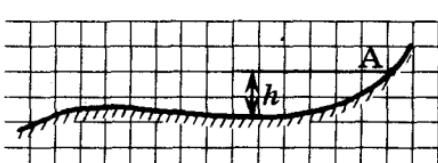
Гладкий шелковый шнур длины L и массы m лежит на столе перпендикулярно его краю. Шнур начинает без начальной скорости соскальзывать с края стола. Определите скорость v и ускорение a шнура в момент, когда он соскользнул со стола наполовину. Определите также силу T натяжения шнура у края стола в этот момент.

8.22.**

Санки скатываются без начальной скорости из точки A (см. рисунок). Наклон изменяется плавно, так что радиус кривизны профиля горы всюду намного превышает высоту h . Коэффициент трения $\mu = 0,2$. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Предложите графический способ определения точки остановки.

**8.23**.**

Санки скатываются без начальной скорости из точки A склона (см. рисунок). Радиус кривизны траектории санок всюду намного превышает высоту h . Сопротивлением воздуха можно пренебречь. При каком коэффициенте трения μ санки преодолеют горку?

**8.24*.**

С какой скоростью v вытекает жидкость из маленького отверстия у дна сосуда, если высота уровня жидкости относительно дна равна H ? Трением в жидкости пренебречь.

8.25*.

Какую форму должен иметь сосуд, чтобы при вытекании через маленькое отверстие в дне уровень жидкости понижался с постоянной скоростью? (Это были бы идеальные водяные часы, если бы трением в жидкости можно было пренебречь.)

8.26*.

Оцените, во сколько раз изменится рекорд по прыжкам в высоту, если спортсмены будут состязаться в зале, расположенном на Луне, где сила тяжести в шесть раз меньше.

8.27*.

Оцените, какого размера должна быть малая планета с плотностью Земли, чтобы человек, оттолкнувшись, мог улететь с нее насовсем.

8.28*.

Лягушка массой m сидит на конце доски массой M и длиной L . Доска плавает на поверхности пруда. Лягушка прыгает под углом

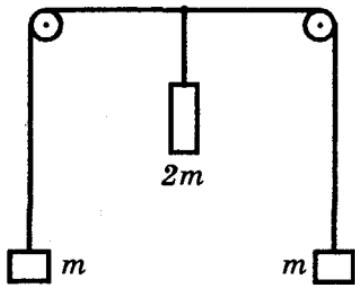
а к горизонту и «приземляется» на другом конце доски. Определите начальную скорость v_0 лягушки относительно Земли.

8.29.**

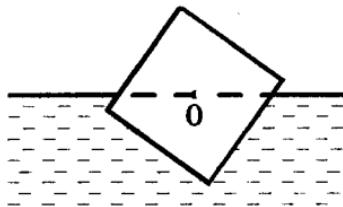
Верхний конец тонкой однородной деревянной палочки шарнирно закреплен. Нижний конец ее погружен в воду. Если сосуд с водой медленно поднимать, то с некоторого момента вертикальное положение палочки уже не соответствует устойчивому равновесию. Почему? Покажите, что при дальнейшем подъеме сосуда палочка будет отклоняться так, что длина погруженной в воду части будет оставаться неизменной. Найдите плотность ρ палочки, если в воду погружена $1/4$ часть ее длины.

8.30.**

На концах очень длинной нити подвешены одинаковые грузы массой m каждый. Нить перекинута через два малых неподвижных блока, расположенных на расстоянии $2l$ друг от друга. К середине нити прикрепляют груз массой $2m$ (см. рисунок). Найти скорости грузов по истечении достаточно большого промежутка времени. Массой блоков и нити, а также трением можно пренебречь.



К задаче 8.30



К задаче 8.32

8.31.**

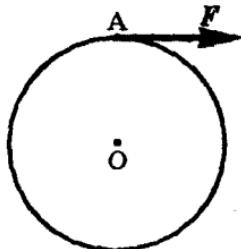
На полу стоит вертикально легкий стержень. На верхнем конце его закреплен массивный шар. Стержень начинает падать без начальной скорости. При этом его нижний конец не проскальзывает. Какой угол α_{\max} стержень образует с вертикалью, когда его нижний конец перестанет давить на пол? При каком значении коэффициента трения μ такое движение возможно? На каком расстоянии от начальной точки опоры упадет шар?

8.32*.

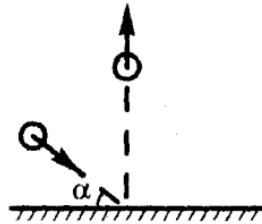
Ось O закреплена горизонтально на уровне поверхности воды. Однородный брускок квадратного сечения (см. рисунок) может вращаться с малым трением вокруг оси O , совпадающей с его осью симметрии. Какое положение займет брускок?

8.33*.

Диск массой m лежит на гладкой горизонтальной поверхности. К точке A на ободе диска (см. рисунок) прикладывают силу F перпендикулярно к радиусу OA . Каково ускорение a центра диска в этот момент?



К задаче 8.33



К задаче 8.34

8.34**.

Быстро вращающийся вокруг горизонтальной оси цилиндр сталкивается (см. рисунок) с горизонтальной поверхностью и отлетает от нее вертикально вверх. Цилиндр и поверхность изготовлены из упругих материалов. В какую сторону вращался цилиндр? Чему равен коэффициент трения μ между цилиндром и поверхностью? В каком направлении отлетел бы цилиндр, если бы он вращался в противоположную сторону?

8.35*.

Из-за торможения в атмосфере высота орбиты спутника уменьшается. Как изменяется при этом скорость спутника? Согласуется ли это изменение с законом сохранения энергии?

8.36**.

 В одном из своих путешествий я открыл неизвестную доселе планету Солнечной системы. Она, как и наша Земля, имеет радиус $r = 6400$ км, а радиус ее круговой орбиты составляет 150 миллионов километров. Но планета движется вокруг Солнца поступательно, у нее отсутствует суточное вращение. Я обошел ее всю и при помощи карманного чувствительного динамометра с удивлением обнаружил, что ускорение свободного падения g не всюду одинаково! Объясните это явление и подсчитайте, на сколько максимальное значение g на этой планете отличается от минимального. Согласно моим точнейшим измерениям планета представляет собой однородный шар.

8.37*.

К проволоке, закрепленной верхним концом, подвешен груз и отпущен без толчка. Под действием груза проволока удлиняется. Сравните изменение потенциальной энергии проволоки ΔW_1 и груза ΔW_2 . Как полученный результат согласуется с законом сохранения энергии?

Основное уравнение МКТ газов $p = \frac{2}{3}n\bar{E}_k = \frac{1}{3}nm_0\bar{v^2} = \frac{1}{3}\rho\bar{v^2}$

Физический смысл абсолютной температуры $\frac{3}{2}kT = \bar{E}_k = \frac{m_0\bar{v^2}}{2}$

Уравнение Клапейрона $\frac{pV}{T} = \text{const}$

Уравнение Менделеева-Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$

Относительная влажность $\varphi = \frac{p}{p_h(T)} \cdot 100\%$

Сила поверхностного натяжения $F = \sigma l$

Избыточное давление под сферической поверхностью жидкости

$$\Delta p = 2\sigma/R$$

Закон Гука $\sigma = E|\epsilon| = E \frac{|\Delta l|}{l_0}$

Линейное тепловое расширение $l = l_0(1 + \alpha t)$

Работа газа при изобарном изменении его объема $A' = p\Delta V$

Первый закон термодинамики $\Delta U = Q + A = Q - A'$

Внутренняя энергия идеального одноатомного газа $U = \frac{3}{2}vRT$

Количество теплоты, необходимое для нагревания тела

$$Q = cm\Delta t = C\Delta t$$

Количество теплоты, необходимое для плавления $Q = \lambda m$

Количество теплоты, необходимое для парообразования при неизменной температуре $Q = Lm$

Количество теплоты, выделяющееся при сгорании топлива $Q = qm$

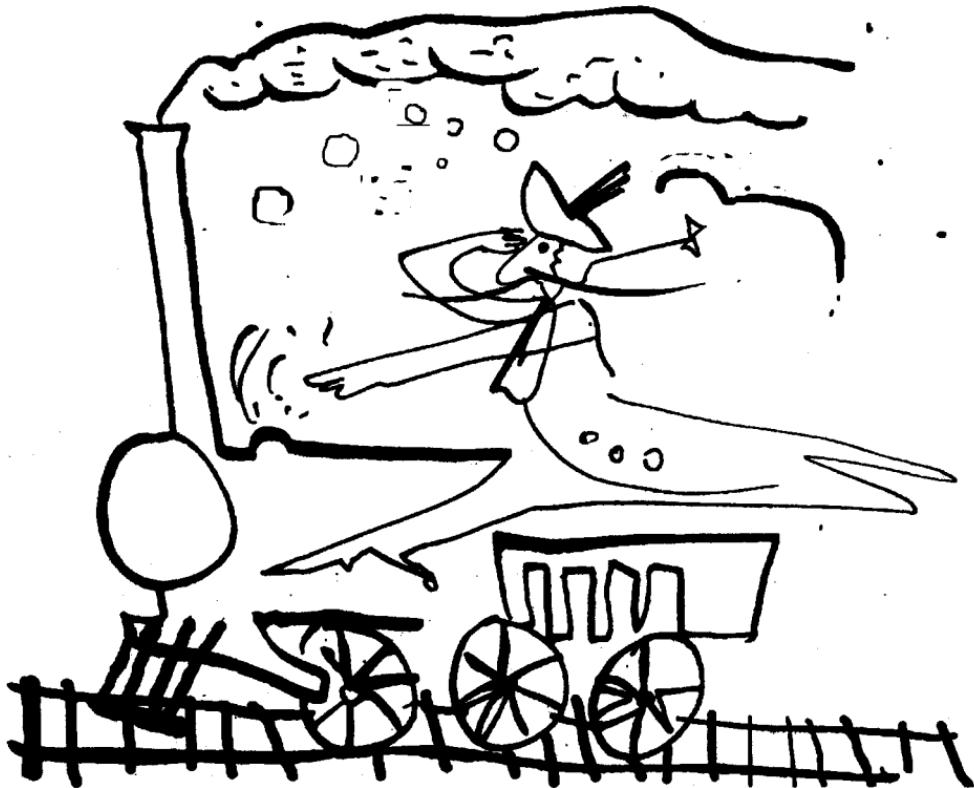
КПД цикла Карно $\eta_{\max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ
ТЕОРИЯ
СВОЙСТВА ГАЗОВ

ПАРЫ, ЖИДКОСТИ
И ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

ЗАКОНЫ ТЕРМОДИНАМИКИ



9. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ. СВОЙСТВА ГАЗОВ

Основные понятия молекулярно-кинетической теории

9.1.

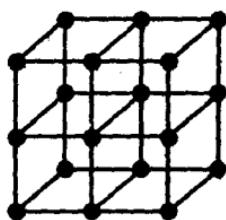
Из открытого стакана за время $t = 20$ сут испарилась вода массой $m = 200$ г. Сколько молекул испарялось за $\tau = 1$ с?

9.2.

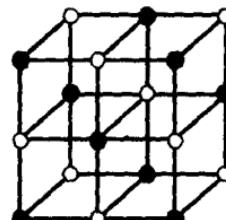
Озеро со средней глубиной $h = 5,0$ м и площадью $S = 4,0$ км² «посолили», бросив кристаллик поваренной соли NaCl массой $m = 10$ мг. Спустя длительное время из озера зачерпнули стакан воды объемом $V = 200$ см³. Сколько ионов натрия оказалось в этом стакане?

9.3.

Рассмотрим кристалл с так называемой простой кубической решеткой (см. рисунок). Определите его плотность ρ , если масса каждого атома равна m_0 , а длина ребра кубической ячейки a .



К задаче 9.3



К задаче 9.4

9.4.

Кристаллы поваренной соли NaCl кубической системы состоят из чередующихся ионов натрия и хлора (см. рисунок). Плотность соли $\rho = 2200$ кг/м³. Определите расстояние a между центрами ближайших ионов.

9.5.

Многие металлы в твердом состоянии образуют так называемую гранецентрированную кубическую решетку: ионы металла расположены в вершинах кубической ячейки и в центрах ее граней. Определите плотность ρ кристалла, если молярная масса металла равна M ; а длина ребра кубической ячейки a .

9.6*.

В сжатом газе взаимодействие между молекулами становится существенным. Как изменилось бы давление в сосуде со сжатым

газом, если бы силы взаимодействия между молекулами внезапно исчезли?

9.7*.

В закрытом сосуде происходит полное сгорание кусочка угля с образованием углекислого газа. После этого сосуд охлаждают до первоначальной температуры. Сравните конечное давление в сосуде с начальным. Объем угля мал по сравнению с объемом сосуда.

9.8.

В закрытом сосуде при давлении p_0 находится смесь из одного моля кислорода и двух молей водорода. Между ними происходит реакция с образованием водяного пара. Какое давление установится в сосуде после охлаждения до первоначальной температуры? Конденсации пара не происходит.

9.9*.

В закрытом баллоне находится смесь из $m_1 = 0,50$ г водорода и $m_2 = 8,0$ г кислорода при давлении $p_1 = 2,35 \cdot 10^5$ Па. Между газами происходит реакция с образованием водяного пара. Какое давление p установится в баллоне после охлаждения до первоначальной температуры? Конденсации пара не происходит.

9.10.

Определите средние кинетические энергии \bar{E} поступательного движения и средние квадратичные скорости молекул кислорода и водорода при температуре $t = 27^\circ\text{C}$.

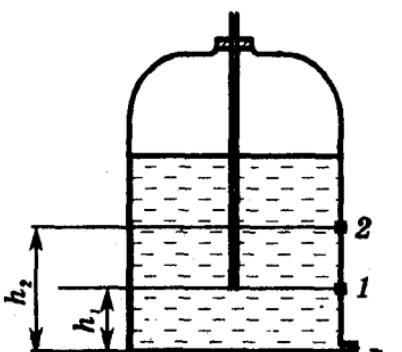
Свойства газов

9.11.

Герметично закрытый сосуд полностью заполнен водой при температуре $t = 27^\circ\text{C}$. Каким стало бы давление p внутри сосуда, если бы силы взаимодействия между молекулами воды внезапно исчезли?

9.12*.

При вытекании жидкости из отверстия, расположенного у дна открытого цилиндрического сосуда, скорость опускания уровня жидкости непостоянна (см. задачи 8.24 и 8.25). Однако Мариотт придумал, как добиться равномерного вытекания жидкости из цилиндрического сосуда. На рисунке изображен «сосуд Мариотта»: через



пробку пропущена узкая, открытая с обоих концов трубка, не доходящая до дна. При этом жидкость из нижнего отверстия вытекает с постоянной скоростью. Объясните действие «сосуда Мариотта». Что изменится, если вынуть пробку из малого отверстия 1, расположенного на уровне нижнего конца трубки? Из отверстия 2, расположенного выше?

9.13.

Под водой на глубине $h = 5,0$ м отломили нижний конец запаянной стеклянной трубы, и в нее вошло $m = 1,95$ г воды. Каким было давление p_0 в запаянной трубке? Объем трубы $V = 2,0$ см³, атмосферное давление $p_a = 10^5$ Па.

9.14.

Открытую с двух сторон стеклянную трубку длиной $l = 1,0$ м наполовину погружают в ртуть. Затем трубку закрывают сверху и вынимают. Какой длины x столбик ртути останется в трубке? Атмосферное давление $H = 750$ мм рт. ст.

9.15.

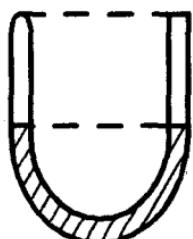
В сосуд со ртутью опускают открытую с двух сторон стеклянную трубку, оставляя над поверхностью ее часть длиной $l = 60$ см. Затем трубку закрывают и погружают еще на $a = 30$ см. Определите высоту h столба воздуха в трубке, если атмосферное давление равно $H = 760$ мм рт. ст.

9.16.

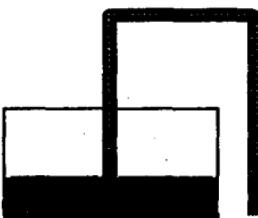
В левом, запаянном колене U-образной трубы (см. рисунок) находится столб воздуха высотой $h_1 = 30$ см. Ртуть в обоих коленах находится на одном уровне. Какой будет высота h_2 столба воздуха в левом колене, если правое долить ртутью доверху? Атмосферное давление $H = 760$ мм рт. ст.

9.17.

Цилиндрический сосуд высотой $h = 60$ см до половины заполнен ртутью и герметично закрыт крышкой с сифонной трубкой, заполненной ртутью (см. рисунок). Сифон имеет равные колена, и его трубка кончается у дна сосуда. При каком давлении p воздуха в



К задаче 9.16



К задаче 9.17

сосуде ртуть перестанет вытекать через сифон? На сколько сантиметров понизится уровень ртути за время истечения? Атмосферное давление $H = 760$ мм рт. ст.

9.18.

В центре откаченной и запаянной с обоих концов горизонтальной трубки длиной $L = 1,0$ м находится столбик ртути длиной $h = 20$ см. Если трубку поставить вертикально, столбик ртути сместится на $l = 10$ см. До какого давления p_0 была откачана трубка?

9.19.

Горизонтальный цилиндрический сосуд разделен на две части тонким металлическим поршнем. Одна часть сосуда содержит кислород, другая — такое же по массе количество водорода. Каково равновесное положение поршня, если длина сосуда $l = 50$ см?

9.20.

Два баллона с объемами V_1 и V_2 соединены трубкой с краном. Они содержат газы при одинаковой температуре T и давлениях p_1 и p_2 соответственно. Какое давление p установится в баллонах, если открыть кран? Температура не изменяется, газы в химическую реакцию не вступают.

9.21.

Компрессор захватывает при каждом качании объем воздуха ΔV и нагнетает его в резервуар емкостью V . Первоначально давление в резервуаре равно атмосферному p_a . Какое давление p_N установится в резервуаре после N качаний компрессора? Считайте, что температура воздуха при сжатии не изменяется.

9.22.

Поршневым воздушным насосом с емкостью ΔV откачивают воздух из сосуда емкостью V . Начальное давление равно атмосферному p_a . Определите давление p_N в сосуде после N качаний насоса. Температуру можно считать неизменной.

9.23*.

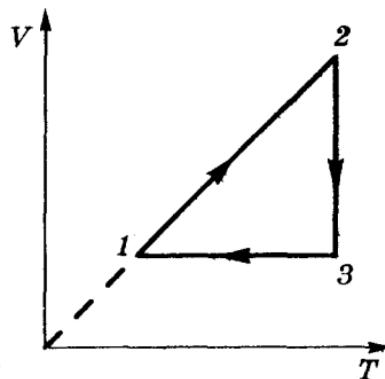
Давление воздуха в шинах автомобиля $p_1 = 500$ кПа при температуре $t_1 = 14^\circ\text{C}$. Во сколько раз уменьшится площадь соприкосновения колес с дорогой, если после поездки температура в шинах повысилась до $t_2 = 57^\circ\text{C}$? Атмосферное давление $p_a = 100$ кПа. Изменением объема шины можно пренебречь.

9.24.

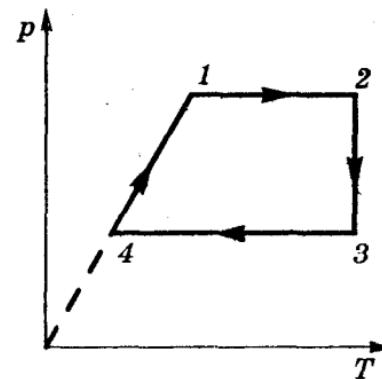
По газопроводу течет метан (CH_4) при давлении $p = 2,0 \cdot 10^6$ Па и температуре $t = 17^\circ\text{C}$. За время $\tau = 1$ ч транспортируется $m = 32$ кг газа. Площадь поперечного сечения трубы газопровода $S = 6,0 \text{ см}^2$. Какова скорость v движения газа в трубе?

9.25.

Постройте графики процесса, происходящего с идеальным газом (см. рисунок) в координатах p , T и p , V . Масса газа постоянна.



К задаче 9.25



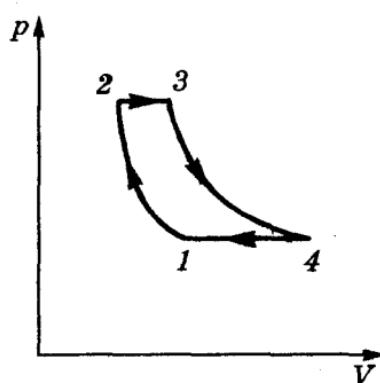
К задаче 9.26

9.26.

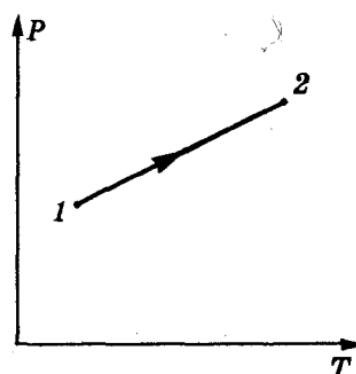
Постройте графики процесса, происходящего с идеальным газом (см. рисунок) в координатах p , V и V , T . Масса газа постоянна.

9.27.

Постройте графики процесса, происходящего с идеальным газом (см. рисунок) в координатах p , T и V , T . Масса газа постоянна. Участки графика 1-2 и 3-4 соответствуют изотермическим процессам.



К задаче 9.27



К задаче 9.28

9.28.

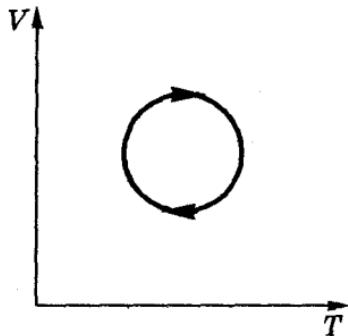
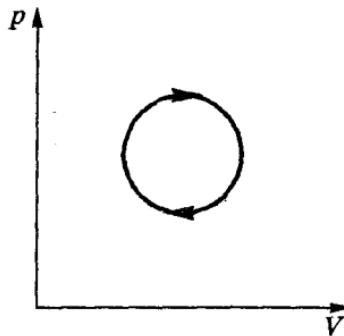
Сравните объем идеального газа в состояниях 1 и 2 (см. рисунок). Масса газа в ходе процесса оставалась неизменной.

9.29*.

Как менялось давление идеального газа в ходе процесса, график которого изображен на рисунке? Укажите точки на графике, соответствующие минимальному и максимальному давлению.

9.30*.

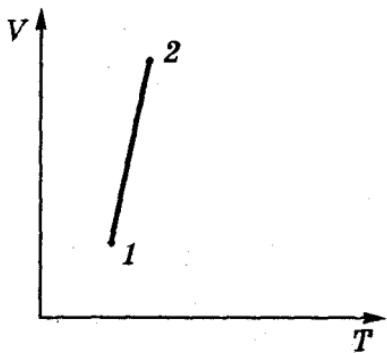
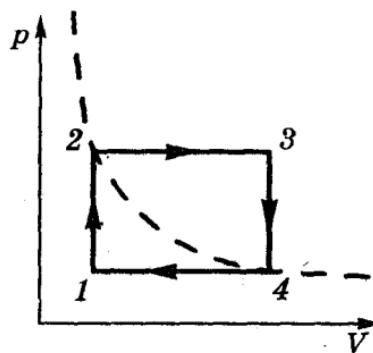
Как менялась температура идеального газа в ходе процесса, график которого изображен на рисунке? Укажите точку, в которой достигалась наибольшая температура (дайте графическое решение).

*К задаче 9.29**К задаче 9.30***9.31*.**

Поршень в цилиндре с газом неплотно прилегает к стенке и пропускает газ наружу. На рисунке показана зависимость объема газа от температуры при изобарном процессе. Укажите направление процесса.

9.32*.

Определите температуру идеального газа в состоянии 2 (см. рисунок), если состояния 2 и 4 лежат на одной изотерме. Температуры T_1 и T_3 в состояниях 1 и 3 известны.

*К задаче 9.31**К задаче 9.32***9.33.**

Нагревается или охлаждается газ, расширяющийся по закону:

- $pV^2 = \text{const}$;
- $p = \text{const}$;
- $p/V = \text{const}$?

9.34*.

Один моль идеального газа переводят из состояния 1 в состояние 2 (см. рисунок). Определите максимальную температуру T_{\max} газа в ходе процесса.

9.35*.

Оболочка аэростата объемом $V = 800 \text{ м}^3$, находящегося на поверхности Земли, наполнена водородом на $\alpha = 7/8$ своего объема при температуре

$t_1 = 17^\circ\text{C}$. Аэростат поднялся на высоту, где давление $p_2 = 80 \text{ кПа}$ и температура $t_2 = -3^\circ\text{C}$. Сколько водорода потерял при подъеме аэростат в результате расширения газа? На поверхности Земли атмосферное давление $p_1 = 100 \text{ кПа}$.

9.36*.

Во сколько раз изменится подъемная сила воздушного шара, если наполняющий его гелий заменить водородом¹⁾? Весом оболочки шара можно пренебречь.

9.37.

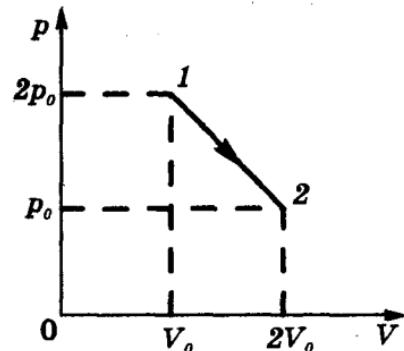
В цилиндре под поршнем площадью $S = 100 \text{ см}^2$ и массой $m_1 = 50 \text{ кг}$ находится воздух при температуре $t_1 = 7^\circ\text{C}$. Поршень находится на высоте $h_1 = 60 \text{ см}$ от дна цилиндра. Воздух в цилиндре нагревают до $t_2 = 47^\circ\text{C}$, а на поршень ставят гирю массой $m_2 = 100 \text{ кг}$. На сколько опустится или поднимется поршень? Атмосферное давление $p_A = 100 \text{ кПа}$, трением поршня о стенки цилиндра можно пренебречь.

9.38.

Сколько молекул воздуха выходит из комнаты объемом $V = 80 \text{ м}^3$ при повышении температуры от $t_1 = 15^\circ\text{C}$ до $t_2 = 27^\circ\text{C}$? Атмосферное давление $p_A = 10^5 \text{ Па}$.

9.39.

На весах установлены два одинаковых сосуда. Один заполнен сухим воздухом, а другой — влажным (содержащим водяные пары). Температуры и давления в обоих сосудах одинаковы. Какой из сосудов легче?



¹⁾ Здесь и далее воздух можно рассматривать как газ с молярной массой равной 0,029 кг/моль. Эта величина соответствует средней массе молекул газов, входящих в состав воздуха (напомним, что воздух состоит примерно на 4/5 из азота и на 1/5 — из кислорода).

9.40.

В сосуде объемом $V = 1,0$ л находится азот массой $m = 0,28$ г. Азот нагрет до температуры $t = 1500^\circ\text{C}$, при которой 30% всех молекул азота диссоциируют на атомы. Определите давление p в сосуде.

9.41*.

В сосуде находится смесь азота и водорода. При начальной температуре T азот полностью диссоциирован на атомы, а диссоциацией водорода можно пренебречь. При нагревании до температуры $2T$ оба газа полностью диссоциируют и давление утраивается по сравнению с начальным. Каково отношение масс азота и водорода в смеси?

9.42*.

Герметически закрытый бак высотой $h = 5,0$ м заполнен водой доверху. На дне его находится пузырек воздуха. Давление на дно бака $p_0 = 0,15$ МПа. Каким станет давление p на дно, если пузырек всплывет? Стенки бака считаются абсолютно жесткими, вода — несжимаемой.

9.43.**

Сжимаемость воды (относительное уменьшение ее объема при увеличении давления на 1 Па) $\beta = 5,0 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$. Какой должна быть площадь S основания цилиндрического бака, чтобы при решении задачи 9.42 воду действительна можно было считать несжимаемой? Начальный объем пузырька $V_0 = 15 \text{ мм}^3$.

9.44.**

Герметически закрытый бак высотой $h = 5,0$ м заполнен водой доверху. На дне его находятся два одинаковых пузырька воздуха. Давление на дно бака $p_0 = 0,15$ МПа. Каким станет это давление, если всплывет один пузырек? Оба пузырька? Стенки бака считаются абсолютно жесткими, вода — несжимаемой.

9.45*.

Какой радиус r должен иметь наполненный гелием воздушный шар, чтобы он мог подняться в воздух, если масса 1 м^2 оболочки шара $m_0 = 50$ г? Температура воздуха $t = 27^\circ\text{C}$, давление $p_a = 100$ кПа.

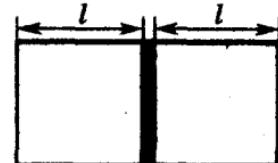
9.46.**

Баллон с газом разделен на две части теплоизолирующей перегородкой с малым отверстием¹⁾. По разные стороны перегородки все время поддерживаются температуры T_1 и T_2 . Определите отношение давлений p_1 и p_2 в различных частях баллона.

¹⁾ Это означает, что молекулы проходят в отверстие только «поодиночке», т. е. макроскопическое движение газа вблизи отверстия не может возникнуть.

9.47*.

Поршень массой m находится в равновесии посередине герметично закрытого цилиндра (см. рисунок). В каждой половине цилиндра находится v молей газа, имеющего абсолютную температуру T . Определите период τ малых колебаний поршня, считая, что температура газа при колебаниях остается неизменной. Трением можно пренебречь.

**10. ПАРЫ, ЖИДКОСТИ И ТВЕРДЫЕ ТЕЛА**

Насыщенные и ненасыщенные пары.

Влажность воздуха

10.1.

При $t_1 = 30^\circ\text{C}$ относительная влажность воздуха $\varphi_1 = 80\%$. Какова будет относительная влажность φ_2 , если этот воздух нагреть при постоянном объеме до $t_2 = 50^\circ\text{C}$?

10.2*.

В помещение нужно подать $V = 10000 \text{ м}^3$ воздуха с температурой $t_1 = 18^\circ\text{C}$ и относительной влажностью $\varphi_1 = 50\%$. Воздух снаружи имеет температуру $t_2 = 10^\circ\text{C}$ и относительную влажность $\varphi_2 = 60\%$. Осушать или увлажнять придется наружный воздух? Сколько воды придется при этом сконденсировать или испарить?

10.3.

В закрытом сосуде объемом $V = 100 \text{ л}$ при $t = 30^\circ\text{C}$ находится воздух с относительной влажностью $\varphi_1 = 30\%$. Какой через некоторое время станет относительная влажность φ_2 , если в сосуд влить $m = 1,0 \text{ г}$ воды? Температура не изменилась.

10.4.

В герметично закрытом сосуде объемом $V = 1,1 \text{ л}$ находятся $m = 100 \text{ г}$ кипящей воды и ее пар при температуре 100°C . Воздуха в сосуде нет. Определите массу пара $m_{\text{п}}$. Зависимость плотности воды от температуры можно пренебречь.

10.5.

На какую высоту h можно поднять кипящую воду поршневым насосом? Считайте, что вода при подъеме не остывает.

10.6.**

В открытом неглубоком сосуде находятся — одна над другой — две несмешивающиеся жидкости. При атмосферном давлении температура кипения нижней жидкости 77°C , верхней 100°C . Что

можно сказать о температуре t , при которой начнется кипение в сосуде? Можно ли ее найти по приведенным в условии данным?

10.7.

Температура воздуха $t_1 = 20^\circ\text{C}$, точка росы $t_2 = 10^\circ\text{C}$. Определите относительную влажность воздуха ϕ .

10.8*.

В цилиндре под поршнем — воздух, имеющий температуру $t_1 = 10^\circ\text{C}$ и относительную влажность $\phi_1 = 60\%$. Какой станет относительная влажность ϕ_2 этого воздуха после нагревания его до температуры $t_2 = 100^\circ\text{C}$ и уменьшения объема втрое?

10.9.

Воздух подвергается изотермическому сжатию, при этом его объем уменьшается в четыре раза. При каком объеме V воздуха начинается конденсация водяного пара? Какая масса m росы выпадает? Начальный объем $V_0 = 2,0 \text{ м}^3$, температура $t = 18^\circ\text{C}$, относительная влажность воздуха до сжатия $\phi_0 = 50\%$.

10.10.

Какова плотность насыщенного водяного пара при температуре 100°C ?

10.11*.

Сосуд объемом $V = 10 \text{ л}$ заполнен сухим воздухом при давлении $p_1 = 100 \text{ кПа}$ и температуре $t_1 = 10^\circ\text{C}$. Каково будет давление p_2 влажного воздуха, если в сосуд налить воду массой $m = 10 \text{ г}$ и нагреть до температуры $t_2 = 100^\circ\text{C}$?

10.12.

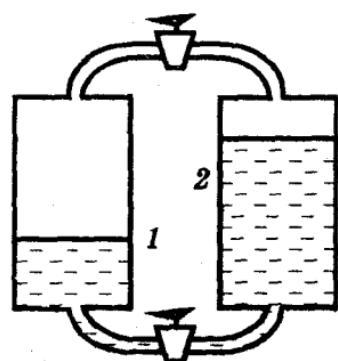
В кухне развесили много выстиранного белья. На улице моросит холодный осенний дождь. Быстрее ли высокнет белье, если открыть форточку?

10.13*.

Два сосуда наполнены водой до разных уровней и соединены трубками с кранами (см. рисунок). Воздух из сосудов откачен. Что произойдет, если открыть нижний кран? Верхний?

10.14*.

В теплоизолированном цилиндре под не-весомым поршнем находится вода массой $m = 30 \text{ г}$ при температуре $t_1 = 0^\circ\text{C}$. Площадь поршня $S = 500 \text{ см}^2$, внешнее давление $p = 10^5 \text{ Па}$. На какую высоту h поднимется поршень, если находящийся в цилиндре электронагреватель выделит энергию $Q = 25 \text{ кДж}$?



К задаче 10.13

10.15.

Известно, что если воду подсолить, то температура ее кипения повысится. Как при этом изменится плотность паров в пузырьках кипящей жидкости?

10.16*.

В запаянной с одного конца горизонтально лежащей трубке находится воздух с относительной влажностью $\phi_0 = 80\%$, отделенный от атмосферы столбиком ртути длиной $l = 76$ мм. Какой станет относительная влажность ϕ , если трубку поставить вертикально открытым концом вниз? Температура при этом не меняется, атмосферное давление $p_a = 760$ мм рт. ст. Ртуть из трубы при переворачивании не выливается.

10.17*.

При какой длине l столбика ртути (см. задачу 10.16) в трубке, поставленной вертикально открытым концом вверх, выпадет роса?

10.18*.

Трубку длиной $l = 60$ см, запаянную с одного конца, погружают в ртуть вертикально открытым концом вниз. При какой глубине погружения h в трубке выпадет роса? Температура в трубке не меняется. Атмосферное давление $p_a = 76$ см рт. ст., относительная влажность воздуха $\phi = 80\%$.

10.19*.

Паровой котел частично заполнен водой, а частично — смесью воздуха и насыщенного пара при температуре $t_1 = 100^\circ\text{C}$. Начальное давление в кotle $p_1 = 3p_a = 300$ кПа. Найдите давление p_2 в кotle после понижения температуры до $t_2 = 10^\circ\text{C}$.

10.20.**

В закрытом баллоне объемом $V = 5,0$ л находится смесь из $m_1 = 0,50$ г водорода и $m_2 = 8,0$ г кислорода при давлении $p_1 = 2,35 \cdot 10^5$ Па. Между газами происходит реакция с образованием воды. Какое давление p установится в баллоне после охлаждения до первоначальной температуры?

10.21.**

При сжатии некоторой порции влажного воздуха его объем уменьшился в четыре раза, а давление возросло в три раза. Когда воздух сжали еще в два раза, давление стало в пять раз больше первоначального. Температура при сжатии оставалась постоянной. Какова была относительная влажность воздуха ϕ в самом начале?

Свойства жидкостей

10.22.

Будет ли кипеть вода в кастрюле, которая плавает в другой кастрюле с кипящей водой?

10.23.

Как заставить воду кипеть без нагревания? Как заставить воду замерзнуть кипением?

10.24*.

Можно ли расплавить свинец в воде?

10.25*.

Вода в стакане замерзает при охлаждении до 0°C . Почему же в некоторых облаках, представляющих собой скопление маленьких капелек воды, вода не замерзает и при более низких температурах (например, при -5°C)?

10.26.

Капиллярная трубка с очень тонкими стенками подвешена вертикально к чашке рычажных весов. Весы уравновешены. К трубке подносят снизу сосуд с водой, так что поверхность воды касается капилляра. Чтобы восстановить равновесие, пришлось увеличить груз на другой чашке весов на $m = 0,14$ г. Определите радиус r капилляра¹⁾.

10.27.

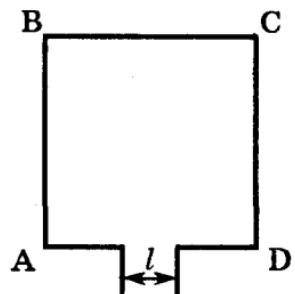
Легкая незамкнутая жесткая рамка (см. рисунок) плавает на поверхности воды. Какая сила F и в каком направлении будет действовать на рамку, если капнуть внутрь рамки мыльным раствором? Коэффициент поверхностного натяжения чистой воды σ_1 , мыльного раствора σ_2 , причем $\sigma_2 < \sigma_1$.

10.28*.

Действительно ли нельзя носить воду в решете? Пусть тонкие нити решета протянуты на расстоянии $d = 1,0$ мм друг от друга. Сколько воды можно унести в таком круглом решете радиуса $r = 10$ см?

10.29.

Прямоугольная проволочная рамка с массой m , стороны которой равны a и b , касается поверхности воды всеми своими сторонами. Какую вертикальную силу F необходимо приложить, чтобы оторвать рамку от поверхности воды? Рамка смачивается водой.



¹⁾ В задачах 10.26 — 10.47 смачивание и несмачивание считается полным. Поверхность стекла считается чистой, т. е. смачиваемой водой.

10.30.

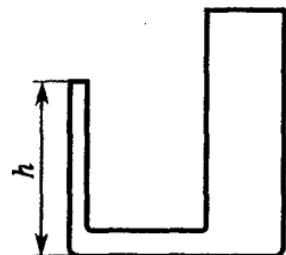
Для удаления жирных пятен материю проглаживают горячим утюгом, подложив под нее лист бумаги. Почему жир при этом впитывается в бумагу, а не расходится по материю?

10.31*.

При смазывании лыжных ботинок их нагревают, чтобы мазь лучше впитывалась. Как нужно нагревать ботинки — снаружи или изнутри?

10.32.**

Капиллярная стеклянная трубка радиуса r и высоты h соединена с широкой и более высокой трубкой (см. рисунок). Широкая трубка постепенно заполняется каплями воды, падающими через равные промежутки времени. Постройте графики изменения уровня воды в обеих трубках с течением времени и график изменения разности этих уровней.

**10.33.**

Длинная, открытая с обоих концов тонкостенная капиллярная трубка радиусом $r = 1,0$ мм расположена вертикально. Какова максимально возможная высота h столба воды, находящейся в трубке?

10.34.

Смачиваемый водой кубик массы $m = 20$ г плавает на поверхности воды. Длина ребра кубика $a = 3,0$ см. На каком расстоянии h от поверхности воды находится нижняя грань кубика?

10.35.

На поверхности воды плавают два одинаковых кубика с длиной ребра $a = 1,0$ см, изготовленные из смачиваемого водой материала. Один из кубиков натерли парафином. На сколько один из кубиков плавает теперь выше? Какой это кубик?

10.36*.

Какой радиус должен иметь алюминиевый шарик, натертый парафином, чтобы он «плавал» в воде, погрузившись ровно наполовину?

10.37.

Оцените максимальный размер капель воды, которые могут висеть на потолке.

10.38*.

Докажите, что избыточное давление в жидкости под ее цилиндрической поверхностью радиуса R равно σ/R , а под сферической поверхностью $2\sigma/R$.

10.39*.

Радиус одного колена U -образной стеклянной капиллярной трубы $r_1 = 1,0$ мм, радиус другого колена $r_2 = 2,0$ мм. В трубку налита ртуть. К какому колену трубы следует присоединить вакуумный насос и какую разность давлений воздуха Δp в коленах трубы должен он создать, чтобы уровни ртути в обоих коленах оказались одинаковыми? Ртуть не смачивает стекло.

10.40*.

Куда будет двигаться в горизонтальном коническом капилляре капля смачивающей жидкости? Капля несмачивающей жидкости?

10.41*.

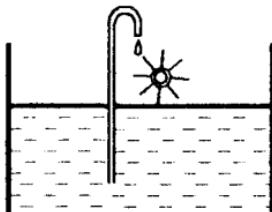
В двух длинных открытых с обеих сторон вертикальных капиллярах находятся столбики воды длиной 2,0 и 4,0 см. Найдите радиус r кривизны нижнего мениска в каждом из капилляров, если их внутренний диаметр $d = 1,0$ мм.

10.42*.

Конец стеклянной капиллярной трубы радиуса $r = 0,50$ мм опущен в воду на глубину $h = 2,0$ см. Какое избыточное давление Δp необходимо создать в трубке, чтобы выдуть пузырек воздуха через ее нижний конец?

10.43.

Предлагается проект вечного двигателя (см. рисунок): тонкая смачиваемая водой изогнутая трубка вставлена в широкий сосуд с водой. Вода поднимается по трубке и стекает обратно в сосуд. Вытекающая из трубы вода может совершать полезную работу. В чем дефект этого проекта?

**10.44*.**

Стеклянная капиллярная трубка, внутренний диаметр которой $d = 0,50$ мм, вертикально погружена в воду. Верхний конец трубы выступает на $h = 2,0$ см над поверхностью воды. Какую форму имеет мениск?

10.45.

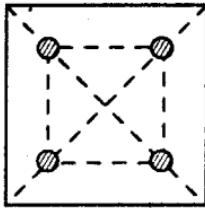
Радиус мыльного пузыря равен R . Найдите давление воздуха p внутри пузыря. Давление воздуха вне пузыря p_0 , поверхностное натяжение мыльной пленки σ .

10.46*.

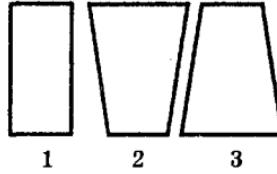
Оцените силу, необходимую для разъединения двух «слипшихся» зеркальных стекол размером $1 \text{ м} \times 1 \text{ м}$, между которыми попала вода. Среднее расстояние между стеклами $d = 0,2$ мм. Как можно облегчить разъединение стекол?

10.47.**

На четыре ртутных шарика, лежащих на горизонтальной плоскости, осторожно кладут квадратную пластинку (на рисунке показан вид сверху). Радиус шариков $r_0 = 1$ мм, масса пластины $m = 80$ г. Смачивания нет. Определите зазор d между плоскостью и пластинкой.



К задаче 10.47



К задаче 10.48

10.48*.

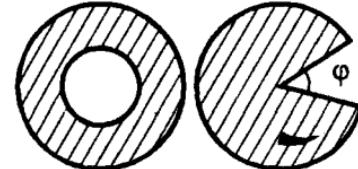
В три сосуда (см. рисунок) налита до одинакового уровня горячая вода. Как изменится давление на дно сосудов после остывания воды?

Свойства твердых тел**10.49.**

При изготовлении некоторых точных приборов необходимо обеспечить постоянство *разности* длин двух стержней при изменении температуры. Какие длины должны иметь железный и медный стержни при 0°C , чтобы разность Δl их длин не зависела от температуры и оставалась равной 10 см^2 ?

10.50.

Металлическое кольцо и диск с вырезанным сектором (см. рисунок) нагревают. Изменится ли (и как) внутренний диаметр кольца? Изменится ли угол раствора сектора ϕ ?

**10.51.**

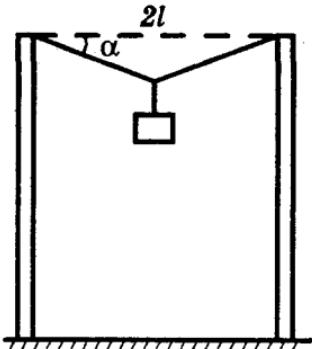
Концы стального стержня сечением $S = 2,0 \text{ см}^2$ прочно закреплены при температуре $t_1 = 15^\circ\text{C}$. С какой силой F стержень будет действовать на опоры, если его нагреть до $t_2 = 150^\circ\text{C}$?

10.52.

Стальная проволока натянута горизонтально с небольшим усилием между двумя стенками при температуре $t_1 = 0^\circ\text{C}$. При охлаждении до какой температуры t_2 она может лопнуть?

10.53.**

Между двумя столбами натянута с небольшим усилием легкая проволока длиной $2l$. К проволоке посередине подвешивают фонарь массой m . Площадь поперечного сечения проволоки равна S , модуль упругости материала E . Определите угол провисания проволоки α (см. рисунок), считая его малым.

**10.54.**

Железобетонная колонна сжимается силой F . Какая часть нагрузки приходится на железо, если площадь поперечного сечения железа $S_{ж}$ составляет $1/20$ площади поперечного сечения бетона S_b , а модуль упругости бетона E_b составляет $1/10$ модуля упругости железа $E_{ж}$?

10.55.

Из скольких стальных проволок диаметром $d = 2,0$ мм должен состоять трос, рассчитанный на подъем груза массой $m = 16$ т?

11. ЗАКОНЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

Уравнение теплового баланса и фазовые переходы

11.1.

В калориметр помещен лед с начальной температурой $t_1 = -10^\circ\text{C}$ и нагреватель постоянной мощности. Постройте график изменения в зависимости от времени τ температуры t в калориметре (от t_1 до $t_2 = +10^\circ\text{C}$).

11.2.

Для нагревания некоторой массы воды от температуры $t_1 = 20^\circ\text{C}$ до температуры кипения $t_2 = 100^\circ\text{C}$ электронагреватель работал в течение $\tau_1 = 12$ мин. Какое время потребуется после этого, чтобы обратить всю воду в пар? Теплоемкостью сосуда и потерями теплоты пренебречь.

11.3*.

В калориметр¹⁾, содержащий $m_b = 1,5$ кг воды при температуре $t_b = 20^\circ\text{C}$, положили $m_l = 1,0$ кг льда, имеющего температуру $t_l = -10^\circ\text{C}$. Какая температура Θ установится в калориметре?

11.4*.

Решите задачу 11.3 при: а) $m_l = 0,10$ кг; б) $m_l = 8,0$ кг. Остальные числовые значения в условии не изменяются. Определите в каж-

¹⁾ Здесь и далее можно пренебречь теплоемкостью калориметра, если ее значение в условии не приведено.

дом случае суммарный объем вещества в калориметре после установления теплового равновесия.

11.5*.

В калориметре находится вода массой $m_1 = 400$ г при температуре $t_1 = 5^\circ\text{C}$. К ней долили еще $m_2 = 200$ г воды с температурой $t_2 = 10^\circ\text{C}$ и положили $m_3 = 400$ г льда с температурой $t_3 = -60^\circ\text{C}$.

Какая температура Θ установится в калориметре? Как изменится количество льда?

11.6*.

В сосуд с водой при температуре $t = 20^\circ\text{C}$ поместили $m_{\text{л}} = 100$ г льда с температурой $t_{\text{л}} = -8^\circ\text{C}$. Какая установится температура? Теплоемкость сосуда с водой $1,67 \text{ кДж/К}$.

11.7.

Калориметр содержит лед массой $m_{\text{л}} = 100$ г при температуре $t_{\text{л}} = 0^\circ\text{C}$. В калориметр впускают пар с температурой $t_{\text{n}} = 100^\circ\text{C}$. Сколько воды оказалось в калориметре, когда весь лед растаял? Температура образовавшейся воды равна 0°C .

11.8.

Смесь, состоящую из $m_{\text{л}} = 5,0$ кг льда и $m_{\text{в}} = 15$ кг воды при общей температуре $t_{\text{1}} = 0^\circ\text{C}$, нужно нагреть до температуры $\Theta = 80^\circ\text{C}$, пропуская водяной пар с температурой $t_2 = 100^\circ\text{C}$. Определите необходимую массу пара m_{n} .

11.9.

Калориметр содержит $m_1 = 250$ г воды при температуре $t_1 = 15^\circ\text{C}$. В воду бросили $m_2 = 20$ г мокрого снега. В результате температура в калориметре понизилась на $\Delta t = 5^\circ\text{C}$. Сколько воды было в снеге?

11.10.

Нагретый алюминиевый куб положили на лед, и куб полностью погрузился в лед. До какой температуры t был нагрет куб? Температура льда 0°C , потерями тепла пренебречь.

11.11*.

При соблюдении некоторых мер предосторожности воду можно переохладить, т. е. охладить ниже 0°C . Пробирку, содержащую $m = 12$ г переохлажденной воды с температурой $t = -5^\circ\text{C}$, встряхивают. При этом часть воды замерзает. Какова масса $m_{\text{л}}$ образовавшегося льда? Теплообменом с окружающей средой и теплоемкостью самой пробирки можно пренебречь.

11.12*.

В колбе находилась вода при 0°C . Выкачивая из колбы воздух, добились того, что в ней остался только лед. Какая часть воды при этом испарилась? Удельная теплота парообразования воды при 0°C равна $2,50 \text{ МДж/кг}$.

11.13.

Два одинаковых кусочка льда летят навстречу друг другу с равными скоростями и при ударе превращаются в воду. Оцените, при какой минимальной скорости v льдинок перед ударом это возможно. Температура льдинок перед ударом $t_1 = -12^\circ\text{C}$.

11.14.

Свинцовая пуля ударяется о броневую плиту и отскакивает от нее. На нагревание пули идет 60% потерянной ею механической энергии. Скорость пули перед ударом о плиту $v_0 = 400 \text{ м/с}$, после удара $v = 100 \text{ м/с}$. Температура пули перед ударом $t_1 = 50^\circ\text{C}$. Какая часть пули расплавилась?

11.15.

Установка, выделяющая тепловую мощность $N = 50 \text{ кВт}$, охлаждается проточной водой, текущей по спиральной трубке диаметром $d = 15 \text{ мм}$. При установившемся режиме проточная вода нагревается на $\Delta t = 25^\circ\text{C}$. Определите скорость v течения воды.

11.16.

С какой высоты h должна падать вода, чтобы при ударе о землю она закипала? На нагрев воды идет 50% расходуемой механической энергии, начальная температура воды $t_1 = 20^\circ\text{C}$.

Газовые процессы**11.17.**

После включения отопления воздух в комнате нагревается от температуры T_0 до температуры T . Во сколько раз изменяется внутренняя энергия воздуха, содержащегося в комнате?

11.18.

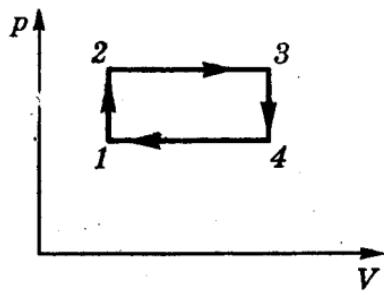
Объем некоторой массы газа увеличивается вдвое. В каком случае газ совершил большую работу — при изобарном расширении или при изотермическом?

11.19*.

На рисунке показан график циклического процесса с некоторой массой идеального газа. На каких этапах процесса газ получал тепло, на каких отдавал? Какое количество теплоты больше: полученное от нагревателя или отданное холодильнику?

11.20.

В цилиндре под поршнем находится воздух. С ним поочередно происходят следующие процессы: изохорное нагревание, изобар-



ное расширение, изотермическое расширение. Затем воздух изобарно возвращается в исходное состояние. Начертите график процесса в координатах p, V . Укажите, на каких этапах процесса воздух получает тепло и на каких отдает.

11.21.

Газ находится в вертикальном цилиндре, герметично закрытом сверху поршнем. Цилиндр помещают в термостат с высокой температурой. Одинаковое ли количество теплоты получает газ, если: 1) поршень закреплен; 2) поршень легко перемещается?

11.22*.

Докажите, что молярные теплоемкости¹⁾ идеального газа при постоянном давлении C_p и при постоянном объеме C_v связаны соотношением $C_p - C_v = R$, где R — универсальная газовая постоянная.

11.23*.

Для нагревания $m = 2,0$ кг неизвестного газа на $\Delta T = 5,0$ К при постоянном давлении требуется количество теплоты $Q_p = 9,1$ кДж, а для нагревания при постоянном объеме требуется $Q_v = 6,5$ кДж. Какой это может быть газ?

11.24*.

Чему равны молярные теплоемкости одноатомного идеального газа при постоянном объеме C_v и при постоянном давлении C_p ?

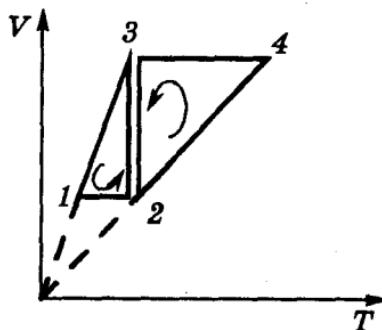
Найдите их отношение $\gamma = C_p/C_v$. Что можно сказать о величине этого отношения для жидкости?

11.25.

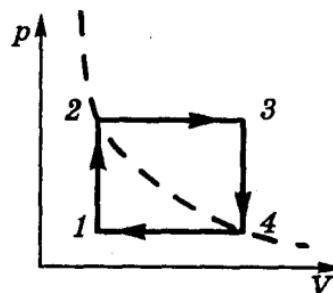
Всегда ли температура газа повышается при получении некоторого количества теплоты?

11.26*.

На рисунке изображены два замкнутых процесса, происходящих



К задаче 11.26



К задаче 11.27

¹⁾ Молярная теплоемкость численно равна количеству теплоты, необходимому для нагревания одного моля вещества на 1 К.

с идеальным газом: 1-2-3-1 и 3-2-4-3. В каком из них газ совершают большую работу?

11.27**.

Определите работу A' , совершенную одним молем идеального газа за цикл (см. рисунок). Известны температуры газа T_1 и T_3 в состояниях 1 и 3. Точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

11.28*.

Газ под поршнем сжимают, помещая на поршень груз. Сравните конечную температуру и необходимую для сжатия работу в двух случаях: а) на поршень одну за другой медленно ставят небольшие гири; б) на поршень сразу ставят одну гирю большой массы. Конечный объем газа в обоих случаях одинаков. Сосуд с газом не теплоизолирован.

11.29.

Кислород нагревают при постоянном давлении от температуры $t_1 = 0^\circ\text{C}$. Какое количество теплоты Q необходимо сообщить газу, чтобы его объем удвоился? Количество вещества $v = 1$ моль.

11.30*.

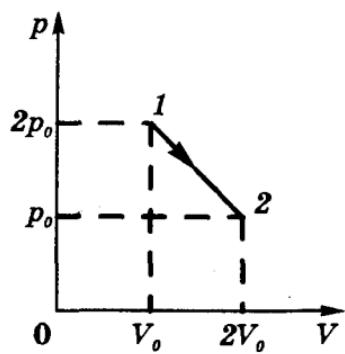
Газ находится в вертикальном цилиндре с площадью дна $S = 10 \text{ см}^2$. Цилиндр закрыт перемещающимся без трения поршнем массой $m = 9,8 \text{ кг}$. Начальный объем газа $V_0 = 5,0 \text{ л}$, температура $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Давление наружного воздуха $p_a = 100 \text{ кПа}$. Какое количество теплоты Q необходимо затратить для нагревания газа при этих условиях на $\Delta T = 10 \text{ К}$? Известно, что повышение температуры газа на ту же величину при закрепленном поршне потребовало бы количества теплоты $Q_1 = 90 \text{ Дж}$.

11.31**.

Какое количество теплоты получает одноатомный газ при *нагревании* в ходе процесса, изображенного на рисунке? Получает или отдает тепло газ при *охлаждении*? Чему равно это количество теплоты?

11.32*.

В длинной, расположенной горизонтально теплоизолированной трубе между двумя одинаковыми поршнями (масса каждого равна m) находится $v = 1$ моль одноатомного газа при температуре T_0 . В начальный момент поршни сближаются, причем скорости поршней направлены в одну сторону и равны $3v$ и v . До какой максимальной температуры T нагреется газ? Массой газа по сравнению с массой поршней можно пренебречь. Поршни тепло не проводят. Трение пренебрежимо мало. Атмосферное давление не учитывать.



Тепловые машины

11.33.

Автомобиль движется со скоростью $v = 72 \text{ км/ч}$. Мощность двигателя $N = 60 \text{ кВт}$, его КПД равен 30%. Определите расход бензина на $s = 1 \text{ км}$ пути.

11.34.

Реактивный самолет имеет четыре двигателя, каждый из которых развивает силу тяги $F = 30 \text{ кН}$. Коэффициент полезного действия двигателей равен 25%. Определите расход керосина на перелет длиной $l = 4000 \text{ км}$.

11.35.

Понизится ли температура в комнате, если открыть дверцу работающего холодильника?

11.36**.

Из-за несовершенства теплоизоляции холодильник получает от воздуха в комнате количество теплоты $Q = 420 \text{ кДж}$ за время $\tau = 1 \text{ ч}$. Температура в комнате $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Какую минимальную мощность P должен потреблять холодильник от сети, чтобы поддерживать внутри холодильного шкафа температуру $t_2 = -5^\circ\text{C}$?

11.37**.

Казалось бы, эффективнее всего отапливать помещение с помощью электронагревательных приборов: при этом вся потребляемая электроэнергия превращается во внутреннюю и передается воздуху в помещении, т. е. КПД = 100%. Однако существует нагреватель и с большим КПД — так называемый «тепловой насос», который отбирает энергию для обогрева комнаты у наружного воздуха¹⁾. Чему равен КПД теплового насоса, работающего по циклу Карно, если температура воздуха в помещении равна T , а на улице T' ?

11.38.

Холодильник, потребляющий мощность P , за время τ превратил воду в лед. Какое количество теплоты Q передал холодильник воздуху в комнате, если масса воды m , а ее начальная температура t ? Теплоемкостью самого холодильника можно пренебречь.

11.39*.

Газовая нагревательная колонка потребляет $V_0 = 1,2 \text{ м}^3$ метана (CH_4) в час. Найти температуру t подогретой воды, если вытекаю-

¹⁾ Наглядной моделью теплового насоса может служить холодильник, поставленный на окно или встроенный в стену здания так, чтобы холодильная камера сообщалась с атмосферой, а полученная из атмосферы и от сети энергия выделялась на задней стенке, обращенной в комнату.

щая струя имеет скорость $v = 0,5$ м/с. Диаметр струи $d = 1,0$ см, начальная температура воды и газа $t_0 = 11^\circ\text{C}$. Газ в трубе находится под давлением $p = 1,2$ атм. КПД нагревателя $\eta = 0,6$.

11.40.**

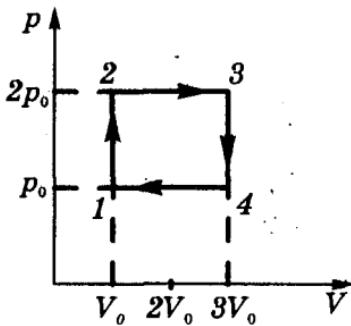
Одноатомный идеальный газ совершает показанный на рисунке цикл из двух изохор и двух изобар. Определите КПД цикла.

11.41.**

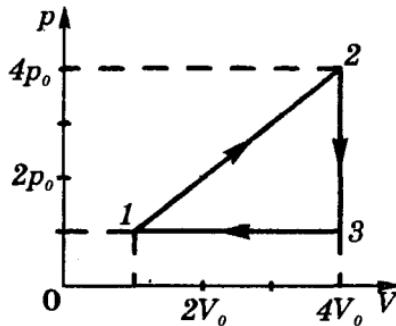
Рабочим телом тепловой машины является одноатомный идеальный газ. Определите КПД тепловой машины, график цикла которой показан на рисунке.

11.42.**

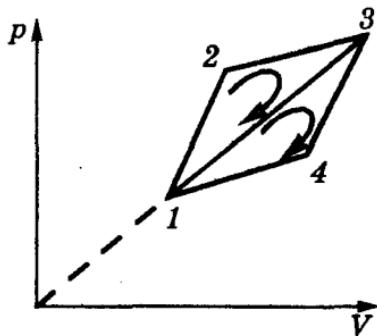
КПД цикла 1-2-3-1 (см. рисунок) равен η_1 , а КПД цикла 1-3-4-1 равен η_2 . Определите КПД η цикла 1-2-3-4-1.



К задаче 11.40



К задаче 11.41



К задаче 11.42

$$\text{Закон Кулона } F = k \frac{|q_1 q_2|}{\epsilon r^2} = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$$

$$\text{Напряженность поля точечного заряда } E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$$

$$\text{Напряженность поля равномерно заряженной бесконечной плоскости } E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0\epsilon}$$

Работа электростатических (кулоновских) сил $A = qU = q(\phi_1 - \phi_2)$

Потенциальная энергия заряда в электрическом поле $W_p = q\phi$

$$\text{Потенциал поля точечного заряда } \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$$

Электроемкость конденсатора $C = q/U$

$$\text{Электроемкость плоского конденсатора } C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}$$

$$\text{Энергия заряженного конденсатора } W_1 = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

Закон Ома для участка цепи $I = U/R$

$$\text{Электрическое сопротивление проводника } R = \rho \frac{l}{S}$$

$$\text{Закон Ома для замкнутой (полной) цепи } I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

Зависимость сопротивления проводника от температуры $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$

Работа электрического тока $A = UIT$

Закон Джоуля-Ленца $Q = I^2Rt$

$$\text{Закон электролиза } m = kIt = \frac{1}{eN_A} \cdot \frac{M}{n} It$$

Закон Ампера $F = I \cdot \Delta l B \sin \alpha = I \cdot \Delta l B_{\perp}$

Сила Лоренца $F = |q|vB \sin \alpha = |q|vB_{\perp}$

Магнитный поток $\Phi = BS \cos \alpha = B_n S$

Закон электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i = -\Delta\Phi/\Delta t$

$$\text{ЭДС самоиндукции } \mathcal{E}_{ii} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Энергия магнитного поля $W_m = LI^2/2$

Формула Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$

$$\text{Емкостное сопротивление в цепи переменного тока } X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Индуктивное сопротивление в цепи переменного тока $X_L = \omega L$

$$\text{Действующие значения силы тока и напряжения } I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ЗАКОНЫ
ПОСТОЯННОГО ТОКА

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

СИЛА ЛОРЕНЦА

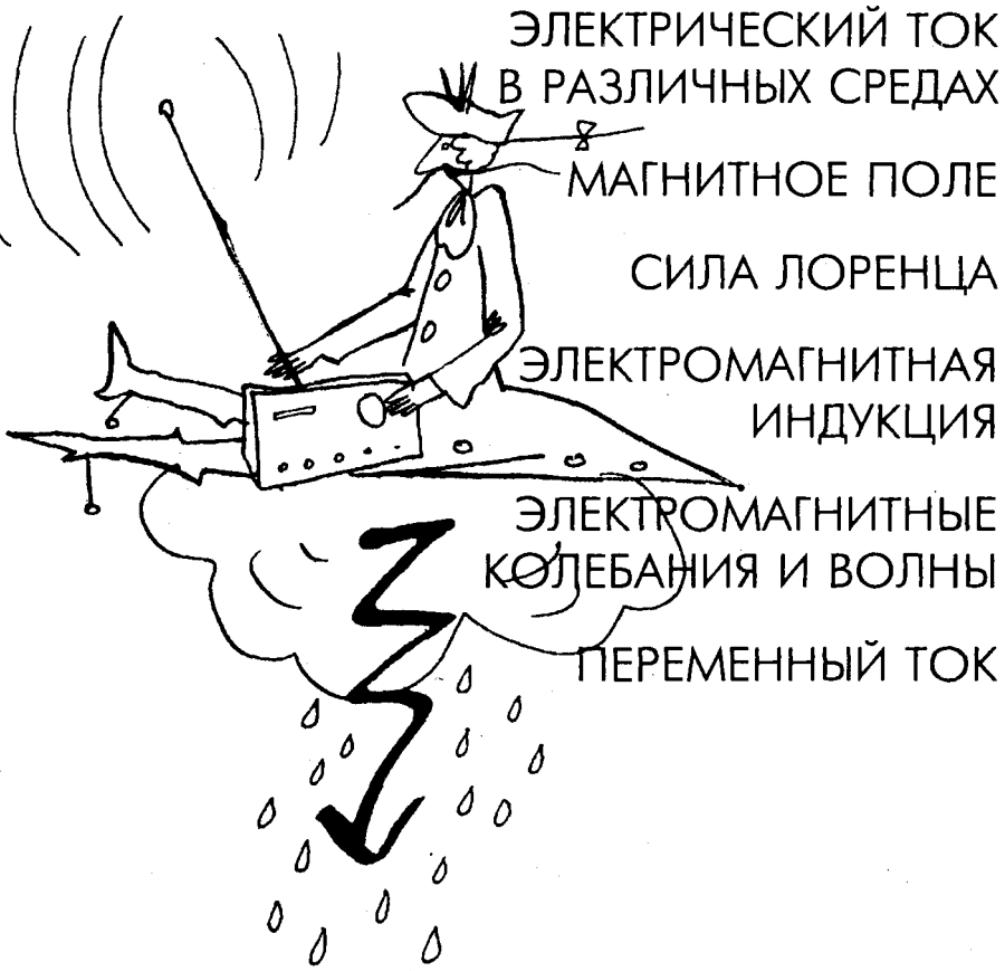
ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ

ИНДУКЦИЯ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК



12. ЭЛЕКТРОСТАТИКА¹⁾

Закон Кулона. Напряженность электрического поля

12.1.

Два металлических шара имеют равные по величине заряды. Зависит ли величина силы их взаимодействия от того, будут эти заряды одноименными или разноименными? Расстояние между центрами шаров в обоих случаях одно и то же.

12.2.

Могут ли два одноименно заряженных тела притягиваться?

12.3.

Два разноименно заряженных шарика находятся на некотором расстоянии друг от друга. Между ними помещают стеклянный стержень. Как изменится сила взаимодействия шариков?

12.4*.

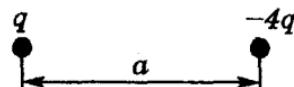
После того, как два маленьких заряженных металлических шарика привели в соприкосновение и раздвинули на прежнее расстояние, сила их кулоновского взаимодействия увеличилась по модулю в $n = 4/3$ раза. Одноименными или разноименными были первоначально заряды q_1 и q_2 на шариках? Во сколько раз они отличались по модулю? Радиусы шариков равны.

12.5**.

Может ли точечный заряд находиться в состоянии устойчивого равновесия под действием только кулоновских сил?

12.6.

Два разноименных точечных заряда q и $-4q$ закреплены на расстоянии a друг от друга (см. рисунок). Каким должен быть заряд q_0 и где следует его расположить, чтобы вся система находилась в равновесии?



12.7.

Решите задачу 12.6, заменив в условии заряд $-4q$ на $4q$.

12.8.

Три одинаковых одноименных заряда q расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд Q нужно поместить в центре треугольника, чтобы система зарядов находилась в равновесии?

12.9.

В вершинах квадрата находятся четыре одинаковых одноименных заряда q . Какой заряд Q нужно поместить в центр квадрата, чтобы

¹⁾ В этом разделе используется обозначение $k=1/(4\pi\epsilon_0)$

система находилась в равновесии? Будет ли это равновесие устойчивым?

12.10.

Совпадают ли силовые линии электростатического поля с траекториями движения точечного положительного заряда, начальная скорость которого равна нулю?

12.11*.

Можно ли создать электростатическое поле, линии напряженности которого имеют вид, показанный на рисунке?

12.12.

На рис. *a*, *b*, *c* показаны картины силовых линий трех электрических полей. Как будет вести себя незаряженный шарик, помещенный в каждое из этих полей?

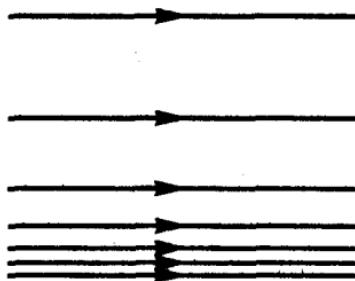


Рис. *a*



Рис. *b*

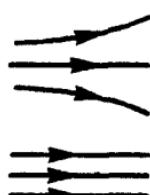


Рис. *c*

К задаче 12.11

К задаче 12.12.

12.13**.

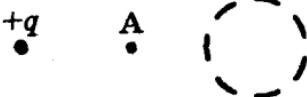
Три одинаковых положительных заряда q расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a . Определите величину напряженности поля E в точке, лежащей на расстоянии a от каждого из зарядов.

12.14.

В однородное электрическое поле вносят металлический незаряженный шар. Где и какие индуцированные заряды появятся на шаре? Нарисуйте линии напряженности поля и эквипотенциальные поверхности.

12.15*.

Электрическое поле создается положительным точечным зарядом (см. рисунок). Как изменяются напряженность E и потенциал ϕ поля в точке *A*, если справа от нее поместить незаряженный шар?



12.16.

Пылинка покоятся в пространстве между горизонтальными пластинами плоского конденсатора. Ее масса $m = 3,0 \cdot 10^{-11}$ г, рас-

стояние между пластинами конденсатора $d = 5,2$ мм. После облучения ультрафиолетовым излучением пылинка теряет часть заряда и начинает опускаться. Чтобы восстановить равновесие, потребовалось увеличить начальное напряжение $U_0 = 480$ В на $\Delta U = 25$ В. Какой заряд Δq потеряла пылинка?

12.17*.

Два одинаковых одноименно заряженных шарика, подвешенных в одной точке на нитях равной длины, опускают в керосин. При этом угол расхождения нитей не изменяется. Какова плотность ρ материала шариков?

12.18*.

На одинаковых нитях, закрепленных в одной точке, висят два одинаковых маленьких шарика, несущих одинаковые заряды. Шарики разошлись на расстояние $a = 9,5$ см, которое намного меньше длины нитей. Один из шариков разрядили. Что произойдет с шариками после этого? При каком расстоянии b между шариками снова установится равновесие?

12.19*.

Три маленьких одинаково заряженных шарика массой $m = 4,0$ г каждый подвешены на шелковых нитях длиной $l = 1,0$ м. Верхние концы нитей закреплены в одной точке. Расстояние от каждого шарика до двух других одинаково: $a = 5,0$ см. Каков заряд q каждого шарика?

Работа электростатического поля. Потенциал.**Проводники и диэлектрики в электростатическом поле****12.20.**

Два электрона, находящиеся очень далеко друг от друга, движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой с одинаковыми по величине скоростями $v_0 = 1000$ км/с. На какое наименьшее расстояние они сблизятся?

12.21*.

Два электрона находятся на большом расстоянии друг от друга. Вначале один электрон неподвижен, а другой приближается к нему с начальной скоростью v_0 , направленной вдоль соединяющей электроны прямой. На какое наименьшее расстояние они сблизятся? С какими скоростями разлетятся?

12.22*.

Два одноименных точечных заряда q_1 и q_2 с массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу. Когда расстояние между ними равно r , их скорости v_1 и v_2 . До какого минимального расстояния r_{\min} сблизятся заряды?

12.23*.

Четыре шарика, имеющие одинаковые заряды q , расположены вдоль одной прямой с интервалом a . Какую работу A нужно совершить, чтобы разместить шарики: а) в вершинах квадрата со стороной a ; б) в вершинах тетраэдра с ребром a ?

12.24.**

Два одинаковых металлических шарика радиуса $R = 1$ мм соединены длинным тонким проводом. Один из них размещен в разреженном воздухе, а другой — посередине большой вакуумной камеры. На расположенный в вакууме шарик падает с большого расстояния поток электронов с начальной скоростью $v_0 = 3000$ км/с. Какой заряд Q можно накопить таким способом на шариках? Каким будет ответ, если увеличить начальную скорость электронов до $v_0' = 10\ 000$ км/с? Электрический пробой разреженного воздуха происходит при напряженности электрического поля $E_0 = 3 \cdot 10^4$ В/м.

12.25*.

По тонкому металлическому кольцу радиуса R равномерно распределен заряд q . Определите напряженность поля E и потенциал ϕ в точке A , расположенной на оси кольца на расстоянии h от его центра.

12.26*.

Электрон находится на оси тонкого кольца радиуса R на расстоянии h от его центра. Кольцо получает положительный заряд q и начинает притягивать электрон. С какой скоростью v пролетит электрон через центр кольца? Обязательно ли это произойдет?

12.27*.

Тонкое проволочное кольцо радиуса R несет на себе электрический заряд q . В центре кольца расположен одноименный с q заряд Q , причем $|Q| > |q|$. Определите силу T , с которой растянуто кольцо.

12.28.**

Тонкое проволочное кольцо радиуса R имеет электрический заряд $+Q$. Маленький шарик массой m , имеющий заряд $-q$, может двигаться без трения по тонкой диэлектрической спице, проходящей вдоль оси кольца. Как будет двигаться шарик, если его отвести от центра кольца на расстояние $x_0 \ll R$ и отпустить без начальной скорости? Запишите уравнение движения шарика $x(t)$. Как изменится движение, если убрать спицу?

12.29*.

Тонкое неподвижное проволочное кольцо радиуса R имеет заряд $+Q$. В центре кольца — маленький шарик массы m с зарядом $-q$.

Шарику толчком придают начальную скорость v_0 , направленную вдоль оси кольца. Как зависит характер движения шарика от величины v_0 ?

12.30.**

На расстоянии h от большой плоской проводящей пластины находится точечный заряд $+q$. С какой силой F действует пластина на заряд?

12.31*.

Заряд Q равномерно распределен по объему шара радиусом R из непроводящего материала. Чему равна напряженность поля E на расстоянии r от центра шара? Постройте график $E(r)$.

12.32.**

Вернувшись к условию задачи 12.31, определите потенциал поля ϕ на расстоянии r от центра шара. Постройте график $\phi(r)$.

12.33.

Металлический шар радиуса R имеет заряд Q . Чему равны напряженность поля E и потенциал ϕ на расстоянии r от центра шара? Постройте графики зависимостей $E(r)$ и $\phi(r)$.

12.34.

Металлический заряженный шар окружен толстым сферическим слоем диэлектрика ($\epsilon = 2$). Нарисуйте картину силовых линий поля. Почему поле скачкообразно изменяется при переходе через границу диэлектрика?

12.35.**

На расстоянии r от центра изолированной металлической незаряженной сферы радиуса R находится точечный заряд q . Определите потенциал сферы ϕ при $r > R$.

12.36*.

Проводящий шар радиуса R соединен тонкой длинной проволокой с землей. На расстоянии r от его центра размещают точечный заряд $+q$. Какой заряд Q приобретает шар? Влиянием проволоки на поле пренебречь.

12.37.

Два металлических шара, расположенные далеко друг от друга, имеют радиусы $R_1 = 5$ см, $R_2 = 15$ см и заряды $q_1 = 12$ нКл, $q_2 = -40$ нКл. Шары соединяют тонкой проволокой. Какой заряд Δq пройдет по проволоке?

12.38*.

Внутри полой проводящей незаряженной сферы радиуса R помещен (не обязательно в центре) маленький шарик с зарядом $+Q$.
1) Какие заряды индуцируются на сфере? Как они распределяются

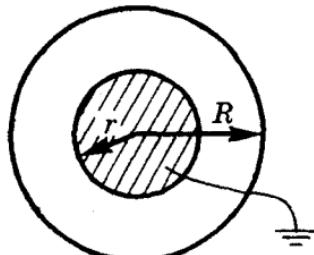
по ней? 2) Как выглядят силовые линии электрического поля? Чему равен потенциал ϕ сферы? 3) Будет ли поле действовать на другой точечный заряд $+q$ вне сферы, на расстоянии r от ее центра? Если будет, то с какой силой? 4) Как изменятся распределение зарядов и поле, если сферу заземлить? (Считайте $q \ll Q$.)

12.39*.

Внутрь полой проводящей незаряженной сферы помещен шарик с зарядом q , после чего сферу на короткое время заземляют, а затем шарик осторожно удаляют из сферы через небольшое отверстие так, что со сферой он не соприкасается. Какой заряд имеет сфера после этого? Как он распределен? Что представляет собой электрическое поле сферы?

12.40*.

Внутри тонкой металлической сферы радиуса $R = 20$ см (см. рисунок) находится металлический шар радиуса $r = R/2$ (центры шара и сферы совпадают). Через маленькое отверстие в сфере проходит длинный провод, с помощью которого шар заземлен. На сферу помещают заряд $Q = -20$ нКл. Определите ее потенциал ϕ .



12.41*.

Три концентрические тонкие металлические сферы имеют радиусы R_1 , R_2 , R_3 , причем $R_1 < R_2 < R_3$. Первая и третья сферы заземлены, вторая имеет заряд $Q > 0$. Найдите напряженность электрического поля E во всех точках пространства.

12.42*.

Два одинаковых металлических шарика, имеющие радиусы r и заряды q , расположены на расстоянии $R \gg r$ друг от друга и очень далеко от Земли. Шары поочередно заземляют на короткое время. Какими станут заряды шаров после N заземлений каждого из них?

12.43.

Металлический шар радиуса R_1 , заряженный до потенциала ϕ_1 , окружает концентрической с ним тонкой проводящей сферической оболочкой радиуса R_2 . Каким станет потенциал шара, если его соединить проводником с оболочкой? Если соединить оболочку с Землей?

12.44**.

Два одинаковых металлических шара радиуса R , находящиеся далеко друг от друга, соединены тонким проводом. Каждый из шаров имеет заряд Q и окружен концентрической с ним тонкой

незаряженной проводящей сферической оболочкой. Радиус одной оболочки равен $R + a$, радиус другой оболочки равен $R + b$, причем $a \ll R$, $b \ll R$. Какой заряд q пройдет по проводу, если обе оболочки заземлить?

12.45.**

По сферической оболочке радиуса R равномерно распределен заряд Q . Какая растягивающая сила f действует на единицу площади оболочки?

12.46.**

Капле ртути радиуса $R = 1$ мм, находящейся в вакууме, сообщили заряд $Q = 1$ нКл. Найдите давление p внутри капли.

Электрическая емкость

12.47.

Во сколько раз изменится емкость плоского конденсатора, если в него ввести две тонкие металлические пластины (рис. а)? Если соединить их между собой проводом (рис. б)?

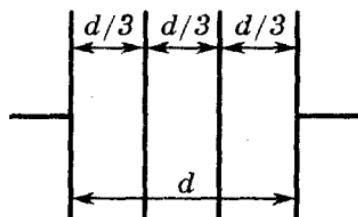


Рис. а

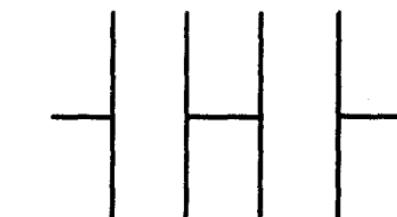
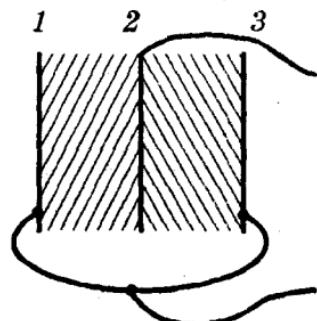


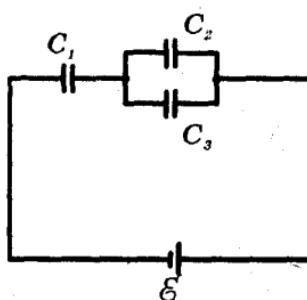
Рис. б

12.48.

Конденсатор состоит из трех полосок фольги площадью $S = 4$ см² каждая, разделенных слоями слюды толщиной $d = 0,2$ мм. Крайние полоски фольги соединены между собой (см. рисунок). Какова емкость C такого конденсатора?



К задаче 12.48



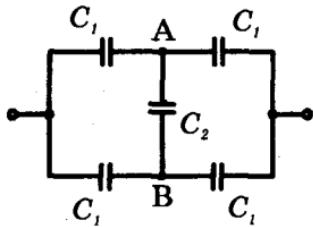
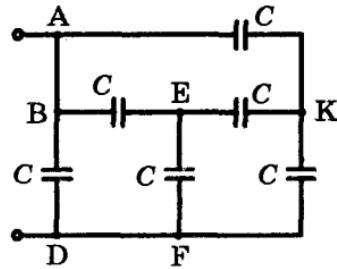
К задаче 12.49

12.49.

Определите заряды на каждом из конденсаторов в цепи, изображенной на рисунке, если $C_1 = 2 \text{ мкФ}$, $C_2 = 4 \text{ мкФ}$, $C_3 = 6 \text{ мкФ}$, $\mathcal{E} = 18 \text{ В}$.

12.50*.

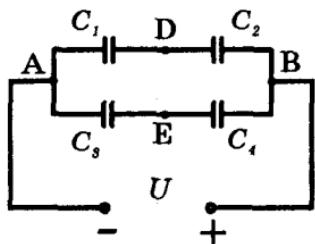
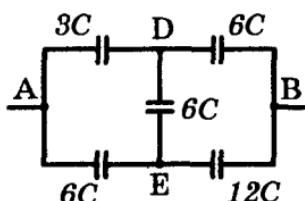
Определите емкость C_0 батареи конденсаторов, изображенной на рисунке.

*К задаче 12.50**К задаче 12.51***12.51*.**

Определите емкость C_0 представленной на рисунке батареи одинаковых конденсаторов.

12.52*.

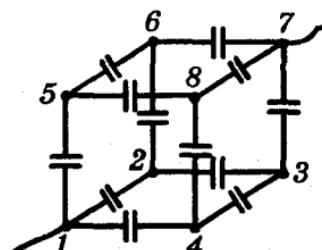
Определите заряд каждого из конденсаторов и разность потенциалов между точками D и E (см. рисунок), если $C_1 = C_2 = C_3 = C$, а $C_4 = 4C$. К точкам A и B подведено постоянное напряжение U .

*К задаче 12.52**К задаче 12.53***12.53*.**

Определите емкость C_0 показанной на рисунке батареи конденсаторов.

12.54*.

Из проволоки сделан куб, в каждое ребро которого вставлен конденсатор с емкостью C . Куб подключен к цепи противоположными вершинами, как показано на рисунке. Определите емкость C_0 получившейся батареи конденсаторов.



12.55.

Два одинаковых плоских конденсатора соединены параллельно и заряжены до напряжения $U_0 = 240$ В. После отключения от источника тока расстояние между пластинами одного из конденсаторов уменьшили в три раза. Каким станет напряжение U на конденсаторах?

12.56.

Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно, и к ним подведено постоянное напряжение U . Первый конденсатор заполняют диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . Во сколько раз изменится напряженность электрического поля в каждом из конденсаторов?

12.57*.

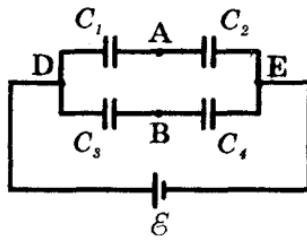
Два конденсатора, имеющие емкости $C_1 = 10 \text{ мкФ}$ и $C_2 = 50 \text{ мкФ}$, соединены последовательно. Каждый из них способен выдержать напряжение соответственно U_1 и U_2 . Какое наибольшее напряжение U_{\max} может выдержать батарея из этих конденсаторов? Решите задачу при: а) $U_1 = U_2 = 120$ В; б) $U_1 = 120$ В, $U_2 = 6$ В.

12.58.

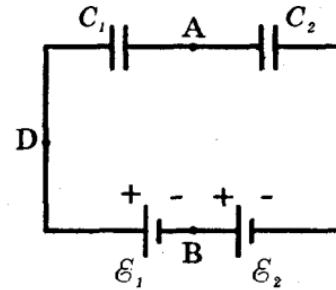
Пять точек попарно соединены через конденсаторы с емкостью C . Какова емкость C_0 между любыми двумя из этих точек?

12.59*.

Определите разность потенциалов между точками A и B в схеме, представленной на рисунке. Какой станет эта разность потенциалов и полная емкость C системы конденсаторов, если между точками A и B включить резистор с сопротивлением R ?



К задаче 12.59



К задаче 12.60

12.60.

Определите разность потенциалов между точками A и B в схеме на рисунке.

12.61.

Определите емкости показанных на рис. а-е систем. Все конденсаторы имеют емкость C .

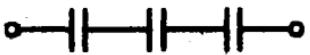


Рис. а

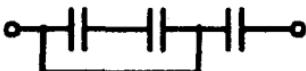


Рис. б

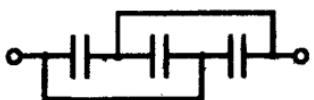


Рис. в

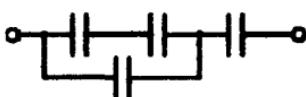


Рис. г

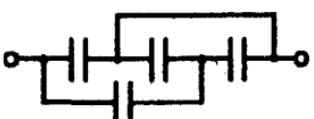


Рис. д

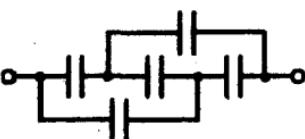
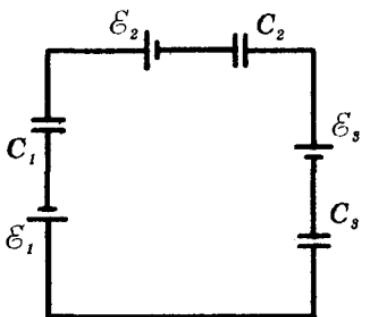


Рис. е

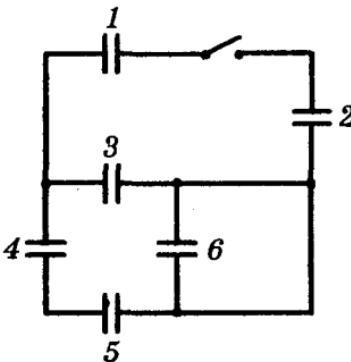
К задаче 12.61

12.62*.

Три источника ЭДС и три конденсатора соединены так, как показано на рисунке. Найдите напряжение U на каждом из конденсаторов, если $\mathcal{E}_1 = 300 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 150 \text{ В}$, $\mathcal{E}_3 = 100 \text{ В}$; $C_1 = 15 \text{ мкФ}$, $C_2 = 10 \text{ мкФ}$, $C_3 = 5 \text{ мкФ}$.



К задаче 12.62



К задаче 12.63

12.63*.

В схеме, изображенной на рисунке, емкость каждого конденсатора равна C . Вначале ключ разомкнут, конденсатор 1 заряжен до напряжения U_0 , остальные конденсаторы не заряжены. Определите напряжение на каждом из конденсаторов после замыкания ключа.

12.64*.

Две одинаковые металлические квадратные пластины размерами $a \times a$ находятся на расстоянии $d \ll a$ друг от друга. Одна из пластин имеет заряд $+3Q$, а другая — заряд $+Q$. Определите напряжение U между пластинами. Как разместятся заряды на каждой из пластин?

12.65*.

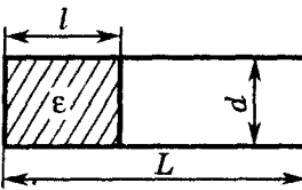
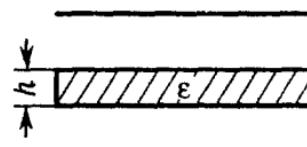
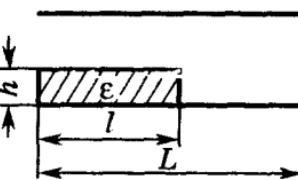
Найдите разность потенциалов U на выходе цепи (см. рисунок), если на вход подано напряжение $U_0 = 80$ В.

Емкости конденсаторов:

$$C_1 = 1 \text{ мкФ}, C_2 = 2 \text{ мкФ}.$$

12.66*.

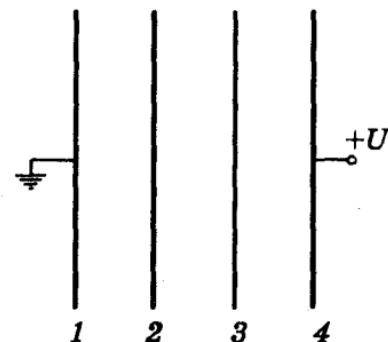
Пространство между обкладками плоского конденсатора частично заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . Площадь пластин конденсатора равна S . Спределите емкость конденсатора C в каждом из случаев, показанных на рисунках *а*, *б*, *в*.

Рис. *а*Рис. *б*Рис. *в***12.67*.**

Решите задачу 12.66 для случаев *б*, *в*, заменив диэлектрик на проводник.

12.68*.

В плоский конденсатор помещают две параллельные тонкие металлические пластины на одинаковом расстоянии друг от друга и от обкладок конденсатора (см. рисунок). На обкладки конденсатора подано напряжение U , обкладка 1 заземлена. 1) Каковы потенциалы пластин 2 и 3? 2) Как изменяются потенциалы пластин и напряженность поля во всех трех промежутках, если пластины 2 и 3 на короткое время замкнуть проволокой? 3) Во сколько раз изменяется емкость конденсатора при замыкании пластин 2 и 3? Изменяются ли при этом заряды на обкладках 1 и 4?



Энергия электрического поля.

Движение заряженных частиц в электрическом поле

12.69*.

Конденсатор подключен к аккумулятору. Как изменится энергия конденсатора при раздвигании его пластин? Как согласуется это изменение с законом сохранения энергии? Каким будет ответ в случае, если заряженный конденсатор отключен от аккумулятора перед раздвиганием пластин?

12.70*.

Заряженный конденсатор заполняют диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . Как изменяется его заряд q , напряжение на конденсаторе U , напряженность поля в конденсаторе E , запасенная энергия W , если: а) конденсатор отключен от батареи; б) конденсатор подключен к батарее?

12.71*.

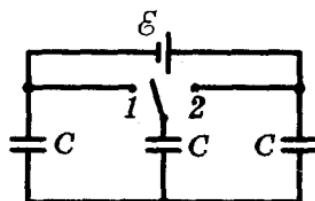
Плоский конденсатор, заряженный и отключенный от источника ЭДС, помещен в сосуд с жидким диэлектриком. Если открыть кран у дна сосуда, диэлектрик вытечет и энергия конденсатора увеличится (ср. с задачей 12.70). Откуда возьмется при этом добавочная энергия?

12.72.

Пластины плоского конденсатора раздвигают. В каком случае придется совершить большую работу: а) конденсатор все время подключен к источнику напряжения; б) конденсатор отключен от источника после зарядки?

12.73.**

Какое количество теплоты Q выделится в цепи при переводе ключа из положения 1 в положение 2 (см. рисунок)? Энергией электромагнитного излучения можно пренебречь.



12.74*.

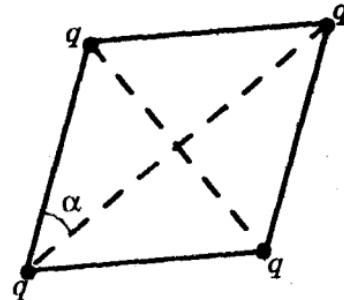
Капля ртути, заряженная до потенциала ϕ_0 , распадается на N одинаковых капель с одинаковыми зарядами. Капли разлетаются на большое расстояние друг от друга. Определите потенциал ϕ каждой из образовавшихся капель.

12.75*.

Во сколько раз изменяется энергия электрического поля при распаде заряженной капли ртути на N одинаковых капель, разлетающихся на большое расстояние друг от друга?

12.76*.

Четыре одинаковых шарика с одинаковыми одноименными зарядами q (см. рисунок) связаны одинаковыми нерастяжимыми нитями. Докажите, что равновесие достигается, когда шарики располагаются в вершинах квадрата. На шарики действуют только кулоновские силы и силы натяжения нитей.

**12.77**.**

Внутри гладкой диэлектрической сферы радиуса R находится маленький шарик массы m с зарядом $+q$. Какой заряд Q нужно поместить в нижней точке сферы, чтобы шарик удерживался в верхней точке? Поляризацией сферы можно пренебречь.

12.78.

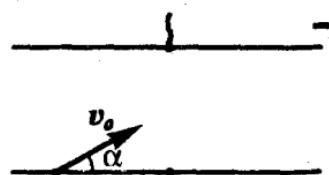
Управляющие пластины в электронно-лучевой трубке образуют плоский конденсатор. Расстояние между пластинаами $d = 10$ мм, длина пластин $l = 50$ мм. Электроны влетают в конденсатор посередине параллельно пластинам со скоростью $v = 2,0 \cdot 10^7$ м/с. На пластины подают разность потенциалов $U = 50$ В. Какова форма траектории электронов внутри конденсатора? На какое расстояние h от первоначального направления сместится электроны к моменту вылета из конденсатора?

12.79*.

На какое расстояние H от первоначального положения сместится светлая точка на экране электронно-лучевой трубы (см. задачу 12.78) после подачи напряжения на управляющие пластины? Расстояние от края конденсатора до экрана $L = 20$ см.

12.80.

Электрон влетает со скоростью v_0 в пространство между пластинаами плоского конденсатора под углом α к плоскости пластин через отверстие в нижней пластине (см. рисунок). Расстояние между пластинаами равно d , напряжение U . По какой траектории будет двигаться электрон? Каково минимальное расстояние s между электроном и верхней пластиной?

**12.81*.**

В плоский конденсатор длиной $l_1 = 50$ мм влетает электрон под углом $\alpha = 15^\circ$ к пластинам. Энергия электрона $W = 1500$ эВ, расстояние между пластинаами $d = 10$ мм. При каком напряжении U_1 на конденсаторе электрон вылетит параллельно пластинам

конденсатора? Каким будет ответ, если длину конденсатора увеличить до $l_2 = 10$ см?

12.82.

Электрон влетает в плоский конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v_0 = 2,0 \cdot 10^7$ м/с. Напряженность поля в конденсаторе $E = 2,5 \cdot 10^4$ В/м, длина конденсатора $l = 80$ мм. Определите величину v и направление скорости электрона в момент вылета из конденсатора.

12.83.

Пучок электронов, разогнанных напряжением $U_1 = 5,0$ кВ, влетает в плоский конденсатор посередине между пластинами и параллельно им. Длина конденсатора $l = 10$ см, расстояние между пластинами $d = 10$ мм. При каком наименьшем напряжении U_2 на конденсаторе электроны не будут вылетать из него?

12.84**.

Плоский воздушный конденсатор представляет собой две квадратные металлические пластины размерами $a \times a$, расположенные на расстоянии d друг от друга, причем $d \ll a$. Заряженный конденсатор помещают в широкий сосуд с непроводящей жидкостью так, что пластины вертикальны и их нижние края находятся на уровне поверхности жидкости. Жидкость поднимается между пластинами и устанавливается на высоте $h < a$. Почему это происходит? Каким станет напряжение U между пластинами? Поверхностным натяжением можно пренебречь. Плотность жидкости ρ , диэлектрическая проницаемость ϵ .

13. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Закон Ома для участка цепи

13.1.

Моток медной проволоки имеет массу $m = 300$ г и электрическое сопротивление $R = 57$ Ом. Определите длину проволоки l и площадь ее поперечного сечения S .

13.2.

Плотностью тока j называют отношение силы тока в проводнике к площади сечения этого проводника: $j = \frac{I}{S}$. Выразите плотность тока в проводнике через напряженность E электрического поля в проводнике и удельное сопротивление ρ проводника.

13.3.

Для нахождения сопротивления проводника R_x используют одну из двух схем (рис. а, б). Сопротивление проводника определяют по формуле $R_x = U/I$, где U — показание вольтметра, I — показание амперметра. Какая из схем дает меньшую погрешность при измерении больших сопротивлений? Малых сопротивлений? Выведите формулы, позволяющие с помощью этих схем измерить R_x как можно более точно, зная сопротивление амперметра R_A и вольтметра R_V .

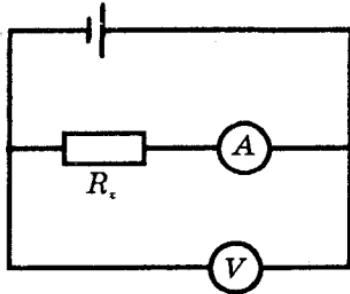


Рис. а

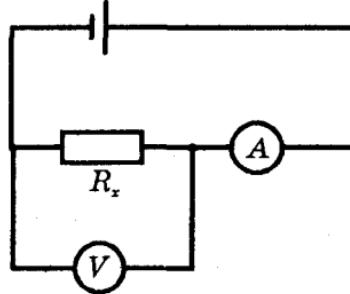


Рис. б

13.4.

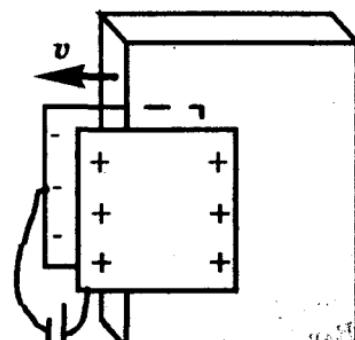
Для измерения сопротивления резистора R_x составлена схема, показанная на рис. б к задаче 13.3. Амперметр показал ток $I = 2,0 \text{ А}$, вольтметр — напряжение $U = 120 \text{ В}$. Определите R_x , если сопротивление вольтметра $R_V = 3,0 \text{ кОм}$. К какой ошибке ΔR_x приведет использование приближенной формулы $R_x = U/I$?

13.5*.

Как с помощью вольтметра, микроамперметра и источника ЭДС с неизвестным внутренним сопротивлением измерить величину неизвестного сопротивления R_x , сравнимого с сопротивлением вольтметра R_V ?

13.6*.

Плоский конденсатор с квадратными пластинами $10 \text{ см} \times 10 \text{ см}$, находящимися на расстоянии $d = 2,0 \text{ мм}$ друг от друга, подключен к источнику постоянного напряжения $U = 750 \text{ В}$. В пространство между пластинами вдвигают (см. рисунок) стеклянную пластину толщиной $2,0 \text{ мм}$ с постоянной скоростью $v = 40 \text{ см/с}$. Какой ток i идет при этом по цепи?



Последовательное и параллельное соединения.

Вычисление сопротивления цепи

13.7.

Из куска проволоки, имеющей сопротивление $R_0 = 32 \text{ Ом}$, сделано кольцо. В каких точках кольца следует подключить провода, чтобы получить сопротивление $R = 6 \text{ Ом}$?

13.8.

Какова максимально возможная величина сопротивления между двумя точками проволочного кольца (см. задачу 13.7)?

13.9.

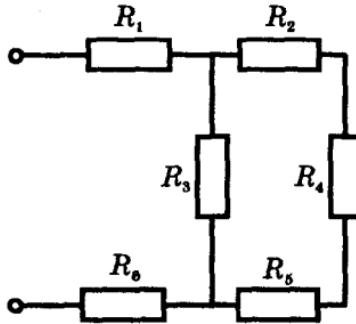
Имеются четыре одинаковых резистора с сопротивлением $R_0 = 6 \text{ Ом}$. Какие сопротивления R можно получить с их помощью? Начертите соответствующие схемы соединений.

13.10.

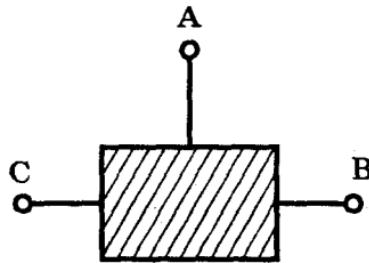
Из одинаковых резисторов по 10 Ом требуется составить цепь сопротивлением 6 Ом . Какое наименьшее количество резисторов для этого потребуется? Начертите схему цепи.

13.11.

Определите полное сопротивление показанной на рисунке цепи, если $R_1 = R_2 = R_5 = R_6 = 3 \text{ Ом}$; $R_3 = 20 \text{ Ом}$; $R_4 = 24 \text{ Ом}$. Определите силу тока, идущего через каждый резистор, если к цепи приложено напряжение $U = 36 \text{ В}$.



К задаче 13.11



К задаче 13.12

13.12*.

«Черный ящик» имеет три клеммы: A , B , C (см. рисунок). Известно, что он содержит только резисторы. Сопротивления «черного ящика» при подключении к различным парам клемм: $R_{AB} = 5 \text{ Ом}$, $R_{BC} = 8 \text{ Ом}$, $R_{AC} = 9 \text{ Ом}$. Предложите схему «черного ящика», содержащую минимально возможное число резисторов.

13.13*.

Обмотка реостата имеет сопротивление R_0 . Для каждой из трех схем включения реостата (рис. а, б, в) постройте график зависимости сопротивления цепи R от сопротивления r правой части реостата.

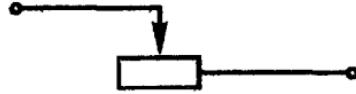


Рис. а

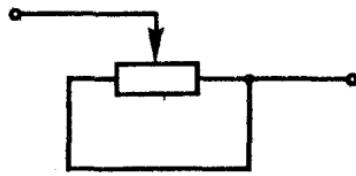


Рис. б

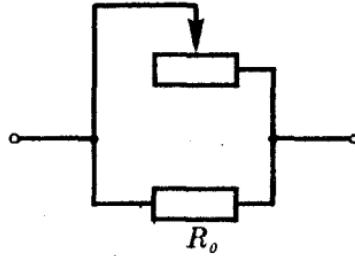


Рис. в

13.14.

Если на вход электрической цепи (см. рисунок) подано напряжение $U_1 = 100$ В, то напряжение на выходе $U_3 = 40$ В; при этом через резистор R_2 идет ток $I_2 = 1$ А. Если на выход цепи подать напряжение $U_3' = 60$ В, то напряжение на входе будет $U_1' = 15$ В. Определите величины сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 .

13.15*.

Определите сопротивление R каждой из показанных на рис. а, б, в цепей. Сопротивление каждого из резисторов R_0 ; сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

13.16*.

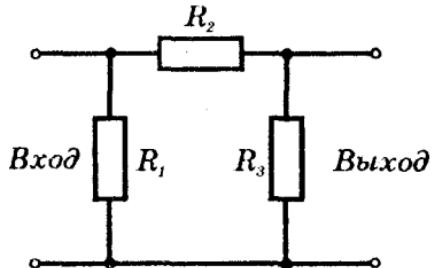
Определите сопротивление R тетраэдра, изготовленного из шести одинаковых проволочек с сопротивлением R_0 каждая. Тетраэдр включен в цепь двумя вершинами.

13.17*.

Имеется n точек. Все точки соединены попарно резисторами с сопротивлением R_0 . Каково сопротивление R между любыми двумя из этих точек?

13.18*.

Определите сопротивление R между точками A и B показанной на рисунке цепи. Сопротивление каждого из резисторов R_0 .



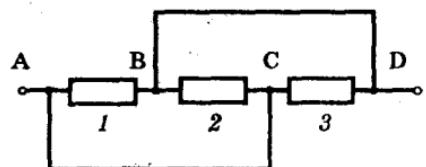
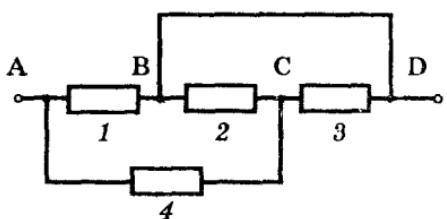


Рис. а



К задаче 13.18

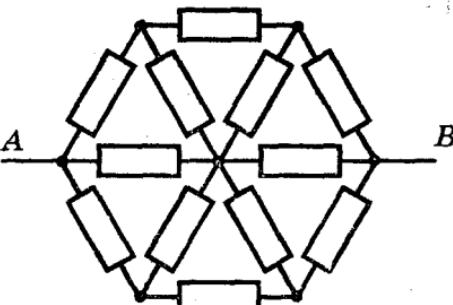


Рис. б

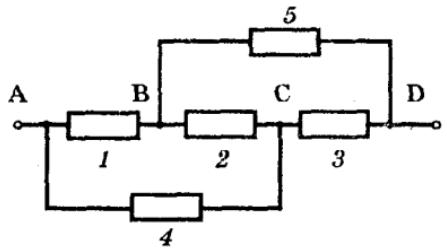
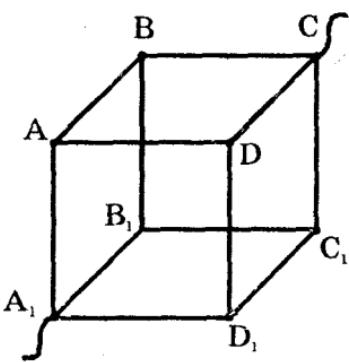


Рис. в

К задаче 13.15



К задаче 13.19

13.19*.

Определите сопротивление R проволочного куба (см. рисунок) при включении его в цепь точками A_1 и C . Сопротивление каждого ребра R_0 .

13.20*.

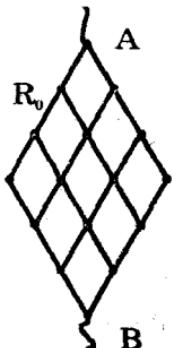
Определите сопротивление R проволочного куба (см. задачу 13.19) при включении его в цепь точками A_1 и D .

13.21*.

Определите сопротивление R проволочного куба (см. задачу 13.19) при включении его в цепь точками A и A_1 .

13.22*.

Определите сопротивление R цепи (см. рисунок) между точками A и B , если сопротивление каждого звена R_0 .



13.23*.

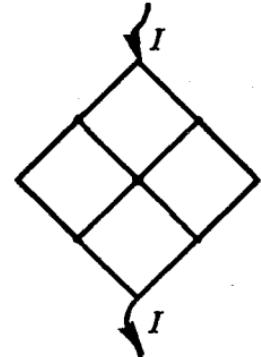
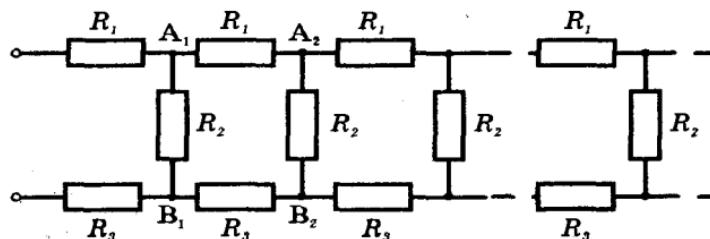
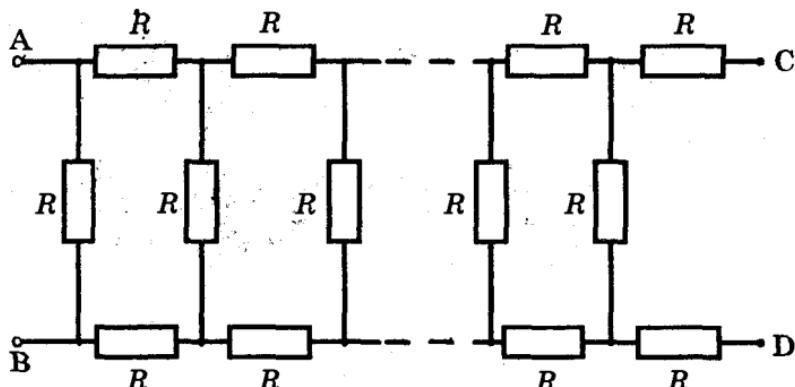
Определите сопротивление R показанной на рисунке цепи, если сопротивление каждого звена R_0 .

13.24.**

Определите сопротивление R бесконечной цепи, показанной на рисунке.

13.25*.

Сопротивление показанной на схеме (см. рисунок) цепи измеряется между точками A и B . Какое сопротивление R_x необходимо включить между точками C и D , чтобы сопротивление всей цепи не зависело от числа ячеек в ней?

*К задаче 13.23**К задаче 13.24**К задаче 13.25***13.26*.**

Цепь (см. задачу 13.25) содержит N ячеек (схема одной из ячеек показана на рисунке). Между точками C и D включено сопротивление $R_x = (\sqrt{3} - 1)R$. Во сколько раз напряжение на выходе цепи (между точками C и D) меньше напряжения на входе (между точками A и B)?

13.27.

К гальванометру, сопротивление которого $R_g = 330 \Omega$, присоединили шунт, понижающий чувствительность гальванометра в $n = 10$ раз. Какое сопротивление R надо подключить теперь последовательно, чтобы общее сопротивление цепи не изменилось?

13.28.

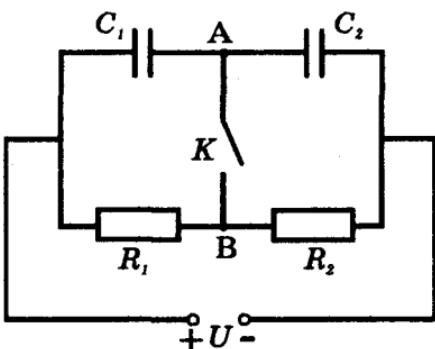
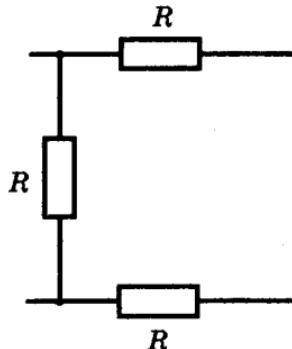
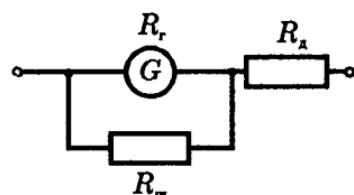
К миллиамперметру, рассчитанному на максимальный ток $I = 100 \text{ mA}$, присоединяют добавочное сопротивление, чтобы получить вольтметр, которым можно измерять напряжение до $U = 220 \text{ V}$. Какой должна быть величина R_d этого сопротивления, если известно, что при шунтировании миллиамперметра сопротивлением $R_{sh} = 0,2 \Omega$ цена его деления возрастает в $n = 10$ раз?

13.29.

Гальванометр с шунтом соединен последовательно с резистором, сопротивление которого R_d (см. рисунок), и используется как вольтметр. Как нужно изменить R_d , чтобы увеличить цену деления вольтметра в n раз? Сопротивление гальванометра R_g , шунта R_{sh} .

13.30*.

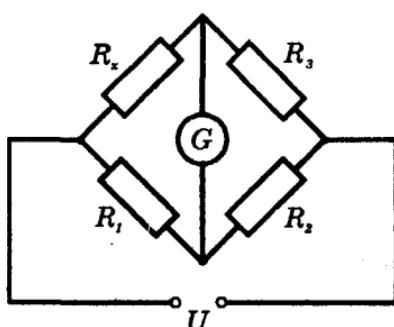
Какой заряд пройдет через ключ K (см. рисунок) после его замыкания?

*К задаче 13.30**К задаче 13.26***13.31.**

Определите разность потенциалов между точками A и B (см. задачу 13.30) до замыкания ключа K .

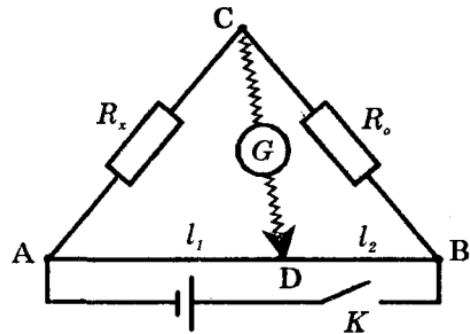
13.32*.

В цепи, представленной на рисунке, гальванометр показывает отсутствие тока. Выразите сопротивление R_x через R_1 , R_2 , R_3 .

*К задаче 13.32*

13.33*.

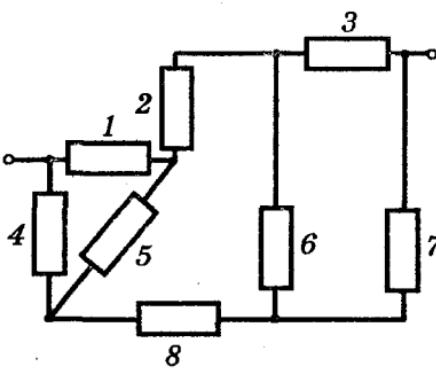
На рисунке показана схема мостика Уитстона для измерения сопротивлений. Здесь R_0 — эталонное сопротивление, R_x — неизвестное сопротивление. Скользящий контакт D , соединенный с гальванометром G , перемещается по проводу AB , имеющему большое сопротивление. Докажите, что ток через гальванометр не проходит, если выполнено условие $\frac{R_x}{R_0} = \frac{l_1}{l_2}$. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

**13.34*.**

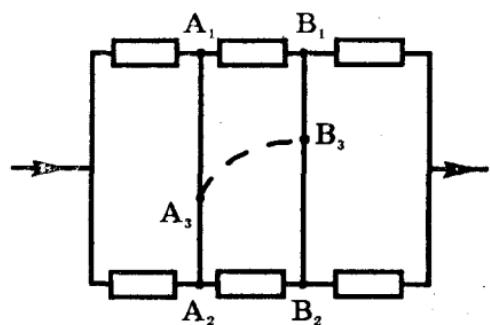
При сборке мостика Уитстона (см. задачу 13.33) ошиблись и поменяли местами гальванометр G и ключ K . Как можно измерить неизвестное сопротивление R_x с помощью такой схемы?

13.35*.

Определите силу тока через каждый из резисторов (см. рисунок), если к цепи приложено напряжение $U = 84$ В. Сопротивления резисторов: $R_1 = R_5 = R_8 = 12$ Ом; $R_2 = R_6 = R_7 = 6$ Ом; $R_4 = 24$ Ом; $R_3 = 3$ Ом.



К задаче 13.35



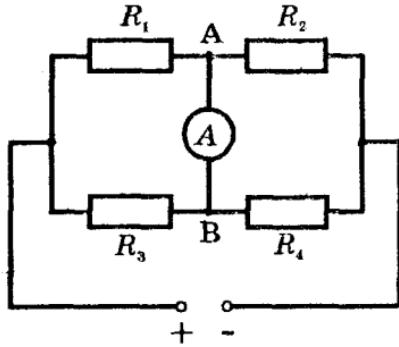
К задаче 13.36

13.36*.

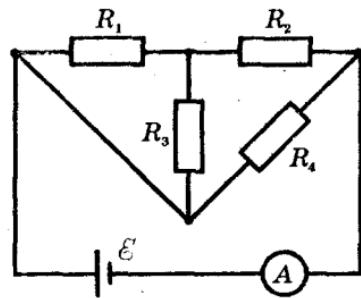
В цепи (см. рисунок) сопротивления резисторов подобраны так, что токи через проводники A_1A_2 и B_1B_2 не идут. Возникнут ли токи в этих участках цепи, если соединить проводником точки A_3 и B_3 ? Как изменятся при этом потенциалы точек A_1 , A_2 , B_1 , B_2 ?

13.37*.

Какой ток идет через амперметр (см. рисунок), если $R_1 = R_4 = R$, а $R_2 = R_3 = 3R$? К цепи приложено напряжение U . Сопротивление амперметра можно считать пренебрежимо малым.



К задаче 13.37



К задаче 13.38

13.38.

Какую силу тока I покажет амперметр в изображенной на рисунке цепи? Сопротивления резисторов: $R_1 = 6 \text{ Ом}$; $R_2 = 8 \text{ Ом}$; $R_3 = 12 \text{ Ом}$; $R_4 = 24 \text{ Ом}$. ЭДС источника $\mathcal{E} = 36 \text{ В}$, его внутреннее сопротивление $r = 1 \text{ Ом}$.

13.39.

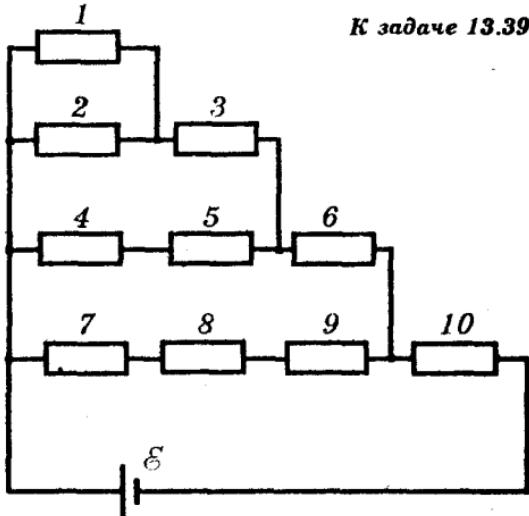
Найдите силу тока I через источник и напряжение U на источнике (см. рисунок), если его ЭДС $\mathcal{E} = 15 \text{ В}$, а внутреннее сопротивление $r = 4 \text{ Ом}$. Сопротивления всех резисторов одинаковы: $R = 68 \text{ Ом}$.

13.40*.

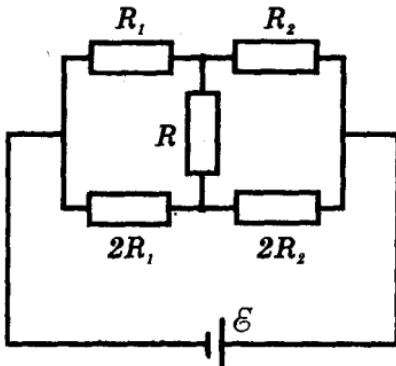
Определите силу тока I_1 через резистор с сопротивлением R_1 (см. рисунок). Сопротивления резисторов: $R_1 = 5 \text{ Ом}$; $R_2 = 7 \text{ Ом}$; $R = 2 \text{ Ом}$. ЭДС источника $\mathcal{E} = 30 \text{ В}$, его внутреннее сопротивление $r = 2 \text{ Ом}$.

13.41*.

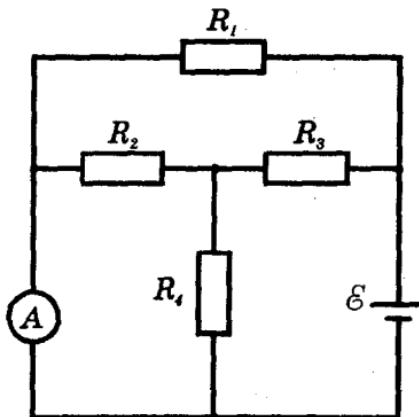
Определите силу тока I_A через амперметр (см. рисунок), если сопротивления резисторов: $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $R_2 = R_4 = 8 \text{ Ом}$; $R_3 = 1 \text{ Ом}$. ЭДС источника $\mathcal{E} = 50 \text{ В}$, его внутреннее сопротивление $r = 1 \text{ Ом}$. Сопротивление амперметра можно считать пренебрежимо малым.



К задаче 13.39



К задаче 13.40



К задаче 13.41

13.42.

Батарея аккумуляторов замкнута на лампу. При этом напряжение на зажимах батареи $U_1 = 20$ В. При параллельном подключении еще одной же лампы напряжение падает до $U_2 = 15$ В. Определите сопротивление R каждой лампы. Считайте, что сопротивление лампы не зависит от ее накала. Внутреннее сопротивление батареи $r = 1$ Ом.

13.43*.

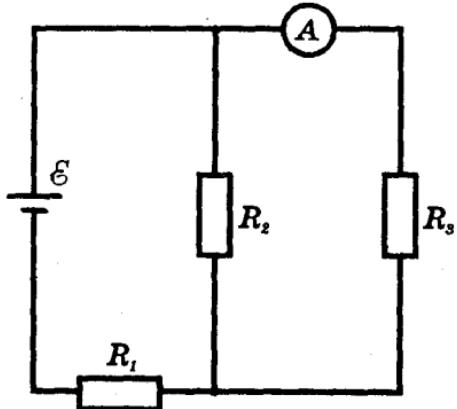
Два вольтметра, подключенные последовательно к ненагруженной батарее, показывают соответственно $U_1 = 5$ В и $U_2 = 15$ В. Если подключить к батарее только первый вольтметр, он покажет $U'_1 = 19$ В. Определите ЭДС батареи.

13.44*.

Определите показание амперметра в схеме (см. рисунок), если $\mathcal{E} = 15$ В, $R_1 = 4,2$ Ом; $R_2 = 8$ Ом; $R_3 = 12$ Ом. Каким станет это показание, если поменять местами амперметр и источник ЭДС? Внутренние сопротивления источника и амперметра малы по сравнению с сопротивлениями резисторов.

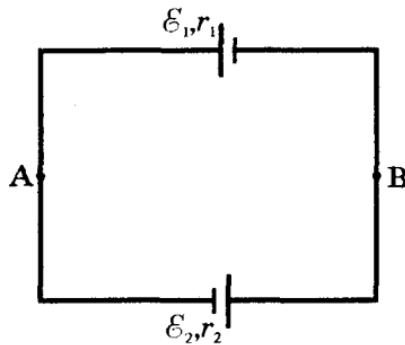
13.45.

К аккумулятору с внутренним сопротивлением $r = 0,01$ Ом подключен резистор с сопротивлением $R = 10$ Ом. Вольтметр дает одинаковые показания при последовательном и параллельном подключении к резистору. Определите сопротивление вольтметра R_V .

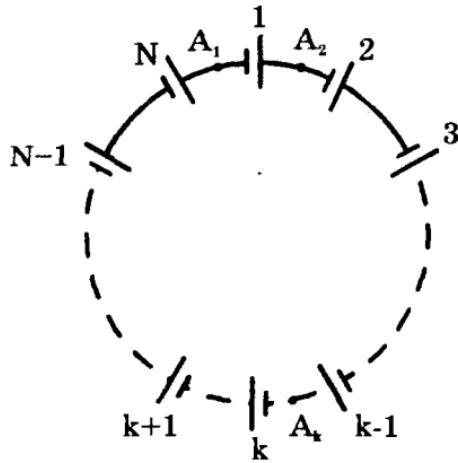


13.46*.

Два источника ЭДС соединены, как показано на рисунке. Определите разность потенциалов между точками A и B . Какой станет разность потенциалов, если изменить полярность включения второго источника?



К задаче 13.46



К задаче 13.47

13.47*.

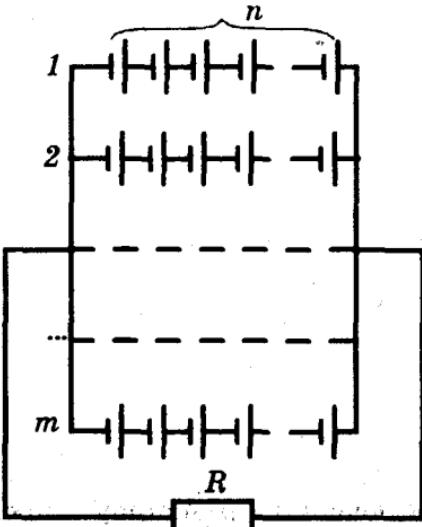
В цепи, показанной на рисунке, ЭДС каждого элемента \mathcal{E} , внутреннее сопротивление r . Какова разность потенциалов между точками A_1 и A_2 ? Между точками A_1 и A_k ? Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

13.48*.

Как изменится ответ в задаче 13.47, если все элементы будут обращены друг к другу одноименными полюсами (разумеется, полное число элементов N должно быть четным)?

13.49.**

N одинаковых элементов соединены в батарею. Внутреннее сопротивление каждого элемента r . При каких значениях m и n (см. рисунок) сила тока через резистор с сопротивлением R , подключенный к батарее, будет наибольшей? Решите задачу при $N = 100$, $r = 1 \text{ Ом}$, $R = 2 \text{ Ом}$.



13.50*.

В цепи с внешним сопротивлением $R = 2$ Ом необходимо обеспечить силу тока $I = 2$ А. Какое наименьшее число N элементов потребуется для этого, и как они должны быть соединены в батарею? ЭДС каждого элемента $\mathcal{E} = 2$ В, внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом.

13.51*.

В конце зарядки аккумулятора сила тока $I_1 = 3,0$ А, а напряжение на клеммах $U_1 = 8,85$ В. В начале разрядки того же аккумулятора сила тока $I_2 = 4,0$ А, а напряжение $U_2 = 8,5$ В. Определите ЭДС \mathcal{E} и внутреннее сопротивление r аккумулятора.

13.52*.

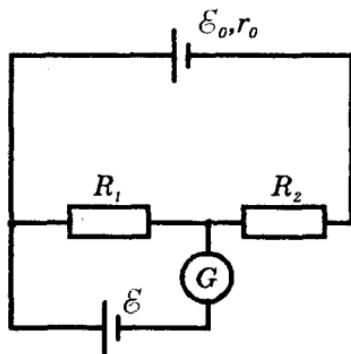
Генератор с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 24$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 0,10$ Ом заряжает батарею аккумуляторов с ЭДС $\mathcal{E}_2 = 20$ В и внутренним сопротивлением $r_2 = 0,30$ Ом. Параллельно батарее включена лампа с сопротивлением $R = 1,5$ Ом. Какие токи I_1, I_2, I_3 протекают через генератор, батарею и лампу?

13.53.

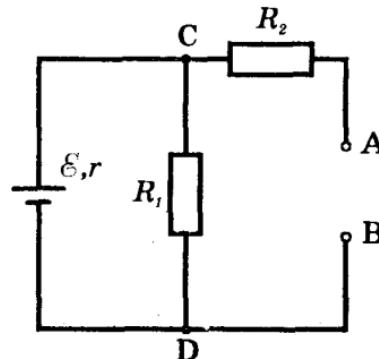
Имеются два последовательно соединенных элемента с ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2 . При каком внешнем сопротивлении R напряжение на зажимах одного из элементов равно нулю? На зажимах какого именно элемента это возможно?

13.54*.

В цепи (см. рисунок) гальванометр показывает отсутствие тока. Эталонный элемент имеет ЭДС $\mathcal{E}_0 = 1,5$ В, внутреннее сопротивление $r_0 = 1,5$ Ом. Сопротивления резисторов: $R_1 = 4$ Ом; $R_2 = 4,5$ Ом. Определите ЭДС \mathcal{E} аккумулятора.



К задаче 13.54



К задаче 13.56

13.55.

Реостат подключен к источнику тока. При изменении сопротивления реостата от $R_1 = 4,0$ Ом до $R_2 = 9,5$ Ом сила тока в

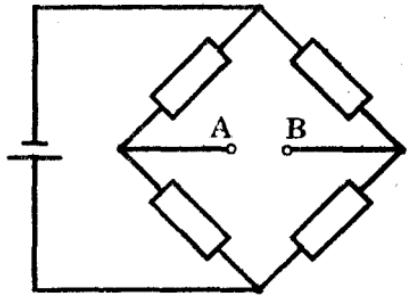
цепи изменяется от $I_1 = 8,0 \text{ А}$ до $I_2 = 3,6 \text{ А}$. Определите ЭДС \mathcal{E} источника тока и его внутреннее сопротивление r .

13.56.

Резистор с сопротивлением R подключают к клеммам A и B (см. рисунок). Определите силу тока I через этот резистор.

13.57**.

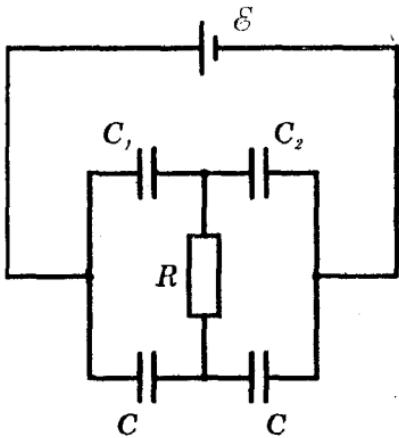
Если к точкам A и B показанной на рисунке цепи подключить идеальный вольтметр (имеющий бесконечно большое сопротивление), он покажет напряжение U_0 . Если к тем же точкам подключить идеальный амперметр (имеющий нулевое сопротивление), он покажет силу тока I_0 . Определите силу тока I , текущего по включенному между точками A и B резистору с сопротивлением R .



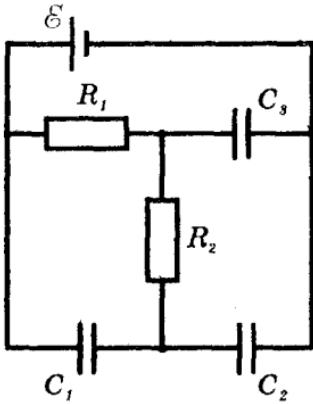
Цепи с резисторами и конденсаторами

13.58.

Определите напряжения U_1 и U_2 на конденсаторах с емкостями C_1 и C_2 (см. рисунок).



К задаче 13.58



К задаче 13.59

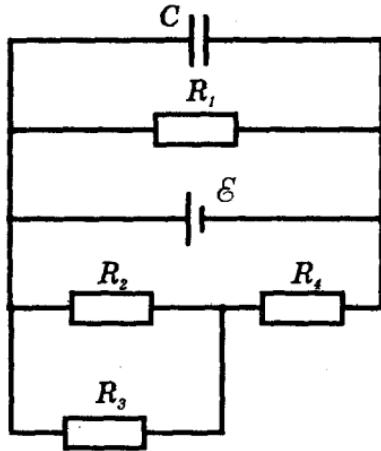
13.59.

Определите напряжения U_1 , U_2 , U_3 на каждом из конденсаторов (см. рисунок).

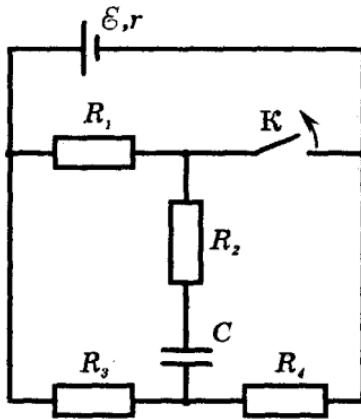
13.60.

Определите ЭДС источника (см. рисунок), если заряд конденсатора

$q = 1,08 \text{ мКл}$. Сопротивления резисторов: $R_1 = 90 \Omega$; $R_2 = 30 \Omega$; $R_3 = 60 \Omega$; $R_4 = 40 \Omega$. Внутреннее сопротивление источника $r = 1 \Omega$. Емкость конденсатора $C = 5 \mu\text{Ф}$.



К задаче 13.60



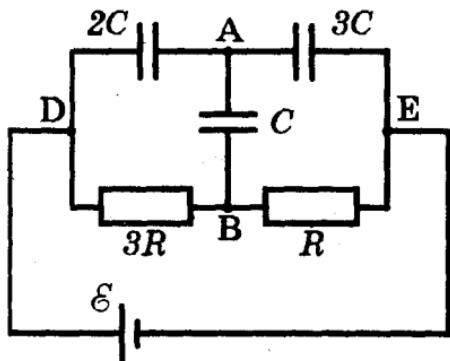
К задаче 13.61

13.61*.

Какой заряд q пройдет через резистор R_2 после размыкания ключа K (см. рисунок)? Сопротивления резисторов одинаковы: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$.

13.62*.

Определите заряд q на конденсаторе емкости C (см. рисунок). Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

**Работа и мощность тока****13.63*.**

В комнате горит электрическая лампа мощностью $P_1 = 100 \text{ Вт}$, подключенная к сети с напряжением $U = 220 \text{ В}$. Сопротивление проводов, подводящих к квартире электроэнергию, составляет $R_0 = 4 \Omega$. Как изменится напряжение на лампе, если включить электрокамин мощностью $P_2 = 500 \text{ Вт}$?

13.64.

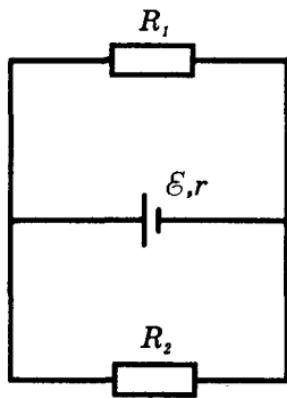
Электрический нагреватель питается от N одинаковых аккумуляторов, каждый из которых имеет внутреннее сопротивление r . Нагреватель потребляет одинаковую мощность при последовательном и параллельном соединении аккумуляторов. Определите сопротивление нагревателя R .

13.65.

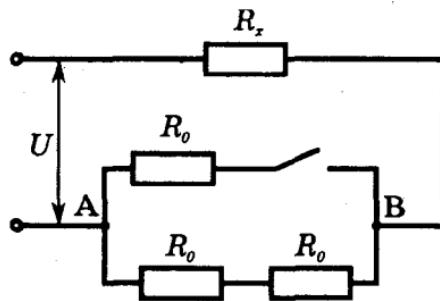
Аккумуляторная батарея имеет ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В и внутреннее сопротивление $r = 0,10$ Ом. Сколько лампочек мощностью $P_0 = 25$ Вт каждая, рассчитанных на напряжение $U = 10$ В, можно подключить к этому источнику ЭДС, чтобы они горели нормальным накалом?

13.66.

Определите напряжение U на полюсах источника ЭДС (см. рисунок) и общую мощность P , потребляемую резисторами. Какие токи I_1 и I_2 текут через резисторы? Сопротивления резисторов $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 24$ Ом; ЭДС источника $\mathcal{E} = 40$ В, его внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом.



К задаче 13.66



К задаче 13.67

13.67.

На участке AB в цепи (см. рисунок) выделяется одинаковая мощность при разомкнутом и замкнутом ключе. Определите сопротивление R_x , если $R_0 = 20$ Ом. Напряжение U считайте неизменным.

13.68.

К источнику ЭДС подключаются поочередно резисторы с сопротивлениями R_1 и R_2 . В обоих случаях на резисторах выделяется одинаковая мощность. Определите внутреннее сопротивление r источника.

13.69.

Имеются два резистора с сопротивлениями $R_1 = 2,0 \text{ Ом}$ и $R_2 = 4,5 \text{ Ом}$. Их подключают к источнику тока сначала параллельно, а потом последовательно. При какой величине внутреннего сопротивления r источника тока в обоих случаях во внешней цепи выделяется одинаковая мощность?

13.70*.

При поочередном подключении к источнику ЭДС двух электрических нагревателей с сопротивлениями $R_1 = 3 \text{ Ом}$ и $R_2 = 48 \text{ Ом}$ в них выделяется одинаковая мощность $P = 1,2 \text{ кВт}$. Определите силу тока $I_{\text{кз}}$ при коротком замыкании источника.

13.71.

На одной лампочке написано «220 В, 60 Вт»; на другой «220 В, 40 Вт». Лампочки соединяют последовательно и включают в сеть с напряжением 220 В. Определите полную потребляемую мощность и мощность каждой из лампочек при таком включении. Считайте сопротивление лами не зависящим от температуры.

13.72.

Имеется пять электрических лампочек, рассчитанных на напряжение 9 В каждая. Три из них имеют расчетную мощность по 4 Вт, две — по 6 Вт. Как следует включить их в сеть с напряжением 18 В, чтобы все они горели нормальным накалом?

13.73*.

Определите ток короткого замыкания $I_{\text{кз}}$ аккумуляторной батареи, если при токе $I_1 = 5 \text{ А}$ нагрузка потребляет мощность $P_1 = 30 \text{ Вт}$, а при токе $I_2 = 10 \text{ А}$ — мощность $P_2 = 40 \text{ Вт}$.

13.74.

Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них вода закипает через $t_1 = 12 \text{ мин}$, при включении другой — через $t_2 = 24 \text{ мин}$. Через сколько времени закипит вода в чайнике, если включить обе обмотки параллельно? Последовательно? Теплообменом с воздухом пренебречь.

13.75*.

Поселок, потребляющий электрическую мощность $P = 1200 \text{ кВт}$, находится на расстоянии $l = 5 \text{ км}$ от электростанции. Передача электроэнергии производится при напряжении $U = 60 \text{ кВ}$. Допустимая относительная потеря напряжения (и мощности) в проводах $k = 1\%$. Какой минимальный диаметр d могут иметь медные провода линии электропередачи?

13.76.

Во сколько раз следует повысить напряжение U на линии электропередачи, чтобы при передаче той же мощности потери в линии

уменьшились в 400 раз? Потери во всех случаях считать малыми по сравнению с передаваемой мощностью.

13.77*.

Электропоезд метро идет по горизонтальному пути со скоростью v_1 , а затем со скоростью v_2 преодолевает подъем с уклоном $k = 0,04$. Потребляемая сила тока на горизонтальном участке $I_1 = 240$ А, а на подъеме $I_2 = 450$ А. Коеффициент сопротивления движению $\mu = 0,02$. Определите отношение скоростей v_1/v_2 .

13.78.

Какую силу тока I надо пропустить через железную проволоку диаметром $D = 0,5$ мм, чтобы через $\tau = 1$ с проволока начала плавиться? Начальная температура проволоки $t_0 = 0^\circ\text{C}$; теплопередачу в окружающую среду и зависимость сопротивления от температуры не учитывать.

13.79*.

Три тонких проволоки одинакового диаметра — железная, медная и алюминиевая — соединены последовательно. Их подключают к источнику высокого напряжения, и одна из проволок перегорает. Какая? Начальная температура $t_0 = 0^\circ\text{C}$.

13.80*.

Три тонких проволоки одинаковых размеров — железная, медная и алюминиевая — соединены параллельно. Какая из них перегорит первой после подключения к источнику высокого напряжения? Начальная температура $t_0 = 0^\circ\text{C}$.

13.81*.

Предохранитель изготовлен из свинцовой проволоки сечением $S_1 = 0,2$ мм². При коротком замыкании сила тока достигла величины $I = 20$ А. Через какое время τ после короткого замыкания начнет плавиться предохранитель? На сколько за это время нагреются подводящие медные провода сечением $S_2 = 2,0$ мм²? Начальная температура предохранителя $t_0 = 27^\circ\text{C}$. Считайте, что сопротивление свинцовой проволоки не зависит от температуры.

13.82*.

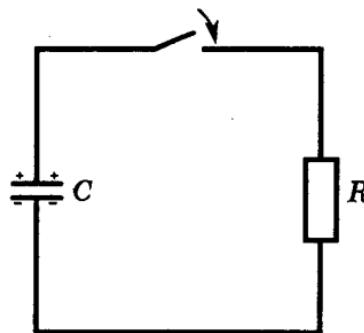
Источник тока с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r замкнут на реостат. Постройте графики зависимости от сопротивления R реостата следующих величин: силы тока I , напряжения U , мощности P во внешней цепи, полной мощности P_0 и КПД цепи η . При каком R достигается максимальная мощность во внешней цепи? Каков при этом КПД цепи?

13.83.**

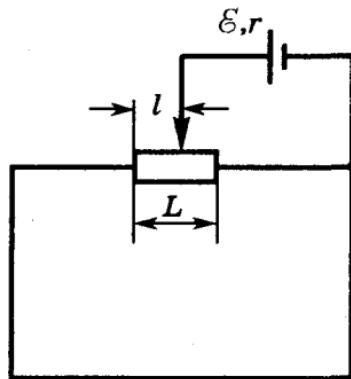
Оцените время τ разрядки конденсатора (см. рисунок) после замыкания ключа. Емкость конденсатора C , сопротивление цепи R . Какой вид имеет график зависимости напряжения U на конденсаторе от времени?

13.84.**

Сопротивление реостата (см. рисунок) $R = 16 \text{ Ом}$. ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$, его внутреннее сопротивление $r = 2 \text{ Ом}$. Выразите через отношение $x = \frac{l}{L}$ следующие величины: силу тока I через источник; напряжение U на полюсах источника тока; мощность P , выделяющуюся в реостате. Постройте соответствующие графики.



К задаче 13.83



К задаче 13.84

14. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ

14.1.

По медному проводнику течет ток. Плотность тока $j = 6 \text{ А/мм}^2$. Определите среднюю скорость v упорядоченного движения электронов. Можно считать, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

14.2*.

На цоколе электрической лампы накаливания с вольфрамовой нитью написано: 120 В, 500 Вт. Если пропускать через эту лампу ток $I_1 = 8 \text{ мА}$, то падение напряжения на ней составляет $U_1 = 20 \text{ мВ}$; при этом нить накала практически не нагревается (температура $t_1 = 20^\circ\text{C}$). Какова температура t нити накала в рабочем состоянии?

14.3.

Подключенная к сети спираль электроплитки раскалилась. Как изменится накал, если на часть спирали попадет вода?

14.4.

Угольный стержень соединен последовательно с железным такого же сечения. При каком отношении длин стержней сопротивление системы не будет зависеть от температуры?

14.5.

Почему при включении в квартире мощного электронагревателя горящие лампочки заметно меркнут, но затем их яркость опять возрастает (хотя и не достигает первоначальной)?

14.6*.

Какую длину l имеет вольфрамовая нить накала лампочки, рассчитанной на напряжение $U = 220$ В и мощность $P = 200$ Вт? Температура накаленной нити $T = 2700$ К, диаметр нити $d = 0,03$ мм. Считайте, что удельное сопротивление вольфрама прямо пропорционально абсолютной температуре.

14.7.

Какое количество теплоты q выделяется в единице объема проводника за единицу времени при плотности тока j ? Удельное сопротивление проводника равно ρ .

14.8*.

Вольфрамовая нить диаметром $d_1 = 0,10$ мм и длиной $l = 1,0$ м натянута в вакууме. К концам нити подводят напряжение и медленно его повышают. При каком напряжении U_1 нить перегорит? Считайте, что сопротивление вольфрама прямо пропорционально абсолютной температуре T . Мощность теплового излучения с единицы площади поверхности нити можно считать равной σT^4 (здесь $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² · К⁴) — постоянная Стефана-Больцмана). Каким будет ответ, если диаметр нити $d_2 = 1,6$ мм?

14.9.

Никелирование металлической пластинки с площадью поверхности $S = 48$ см² продолжалось $t = 4,0$ ч при силе тока $I = 0,15$ А. Определите толщину h слоя никеля. Валентность никеля $n = 2$.

14.10.

Каков расход электроэнергии W на получение $m = 1,0$ кг алюминия, если электролиз ведется при напряжении $U = 10$ В, а КПД установки $\eta = 0,80$?

14.11.

При электролизе подкисленной воды через ванну прошел заряд $q = 2500$ Кл. Выделившийся кислород находится в объеме $V = 0,50$ л под давлением $p = 101$ кПа. Какова его абсолютная температура T ?

14.12.

Две одинаковые электролитические ванны заполнены раствором медного купороса; в первой ванне концентрация раствора выше. Сравните количество выделившейся на их катодах меди, если ванны соединены: а) последовательно; б) параллельно.

14.13.

Две одинаковые электролитические ванны соединены между собой последовательно. В одной из них — раствор CuCl , в другой — CuCl_2 . В какой из ванн на катоде выделится больше меди?

14.14*.

При нанесении металлических покрытий с помощью электролиза иногда в конце процесса изменяют направление тока на противоположное. В результате поверхность становится более гладкой. Почему?

14.15*.

Конденсатор емкостью $C = 10 \text{ пФ}$ соединен последовательно с резистором, имеющим сопротивление $R = 1,0 \text{ кОм}$. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 3,0 \text{ мм}$. Воздух между пластинами конденсатора ионизируется рентгеновским излучением: каждую секунду в 1 см^3 воздуха образуется $n = 5 \cdot 10^4$ пар ионов с зарядом e , равным элементарному. Определите силу тока I в цепи и падение напряжения U на резисторе, если к цепи подключен источник высокого напряжения.

14.16.

Что произойдет с горящей электрической дугой, если сильно охладить отрицательный электрод? Положительный?

14.17.

Какой наименьшей скоростью v должен обладать электрон, чтобы он мог ионизировать неподвижный атом неона? Потенциал ионизации атомов неона $\phi = 21,5 \text{ В}$.

14.18*.

Какой наименьшей кинетической энергией W_k и скоростью v должен обладать ион неона, чтобы при столкновении его с неподвижным нейтральным атомом неона могла произойти ионизация атома? Потенциал ионизации атомов неона $\phi = 21,5 \text{ В}$.

14.19

При какой абсолютной температуре T средняя кинетическая энергия движения атомов неона равна энергии, необходимой для ионизации этих атомов? Потенциал ионизации атомов неона $\phi = 21,5 \text{ В}$.

14.20.**

Электрическое поле действует на свободные электроны в газе и на однозарядные ионы с одинаковой по величине силой. Казалось бы,

вследствие этого электроны и ионы должны одинаково часто приобретать кинетические энергии, достаточные для ударной ионизации молекул газа. Однако в действительности главную роль в этом процессе играют электроны. Почему?

14.21*.

Легирование германия акцепторной примесью (например, индием) намного увеличивает концентрацию дырок. Как при этом изменяется концентрация свободных электронов?

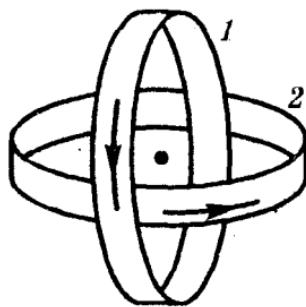
14.22*.

Один из концов полупроводника нагревают. Почему при этом возникает разность потенциалов между нагретым и холодным концами? Потенциал какого из них выше?

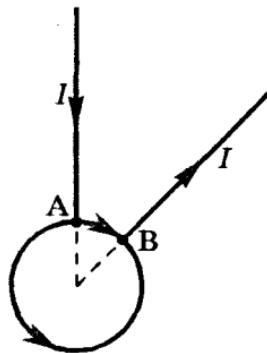
15. МАГНИТОЕ ПОЛЕ. СИЛА ЛОРЕНЦА

15.1.

По двум одинаковым круглым металлическим обручам идут одинаковые токи. Один из обручей расположен вертикально, другой — горизонтально (см. рисунок). Определите направление вектора магнитной индукции \mathbf{B} в общем центре обручей.



К задаче 15.1



К задаче 15.2

15.2.

К двум точкам проволочного кольца подведен ток (см. рисунок). Протекающие по кольцу токи создают магнитное поле. Куда направлен вектор магнитной индукции \mathbf{B} этого поля в центре кольца?

15.3.

Из одинаковых кусков проволоки спаян куб. Источник тока подключен к противоположным (лежащим на одной прямой) грани

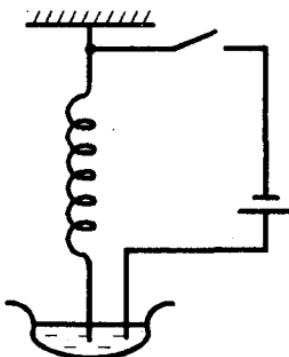
венной диагонали) вершинам куба. Докажите, что магнитное поле в центре куба отсутствует.

15.4.

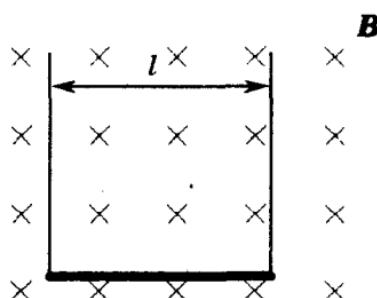
Объясните поведение прямоугольной проволочной рамки с током в магнитном поле. Имеет ли значение, чем создается поле — Землей или стальным магнитом?

15.5.

Мягкая спиральная пружина висит, погрузившись нижним концом на небольшую глубину в ртуть (см. рисунок). Что произойдет после замыкания ключа?



К задаче 15.5



К задаче 15.6

15.6.

Между полюсами электромагнита в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,05 \text{ Тл}$ находится прямолинейный проводник массой $m = 5,0 \text{ г}$ и длиной $l = 50 \text{ см}$, подвешенный горизонтально на гибких проводах под прямым углом к магнитному полю (см. рисунок). Через проводник пропускают ток. При какой силе тока I исчезает натяжение проводов, поддерживающих проводник? В какую сторону должен при этом идти ток?

15.7.

Горизонтальные рельсы находятся в вертикальном однородном магнитном поле на расстоянии $l = 15 \text{ см}$ друг от друга. На них лежит стальной стержень массой $m = 300 \text{ г}$, перпендикулярный рельсам. Коэффициент трения между стержнем и рельсами $\mu = 0,20$. Чтобы стержень сдвинулся с места, по нему необходимо пропустить ток силой $I = 40 \text{ А}$. Какова индукция B магнитного поля?

15.8*.

Проволока лежит в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю. По проволоке идет ток. Докажите, что величина действующей на проволоку силы Ампера определяется только силой тока и расстоянием между концами проволоки, но не зависит от ее формы и длины.

15.9*.

По жесткому кольцу из медной проволоки течет ток силой $I = 5,0 \text{ А}$. Кольцо находится в перпендикулярном к его плоскости магнитном поле с индукцией $B = 0,50 \text{ Тл}$. Сила Ампера стремится растянуть кольцо. Определите механическое напряжение σ в проволоке, если радиус кольца $R = 5,0 \text{ см}$, а площадь сечения проволоки $S = 3,0 \text{ мм}^2$.

15.10.

В вертикальном однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,50 \text{ Тл}$ подвешен на двух тонких проволочках горизонтальный проводник массой $m = 30 \text{ г}$ и длиной $l = 49 \text{ см}$. По проводнику пропускают ток силой $I = 1,2 \text{ А}$. На какой угол α от вертикали отклоняются проволочки?

15.11.

Почему два параллельных проводника, по которым текут токи в одном направлении, притягиваются, а два параллельных электронных пучка отталкиваются?

15.12.

Электрон влетает со скоростью v в однородное магнитное поле с индукцией B . Скорость электрона направлена перпендикулярно вектору B . По какой траектории будет двигаться электрон?

15.13.

Как зависит период T обращения электрона по окружности (см. задачу 15.12) от скорости электрона?

15.14*.

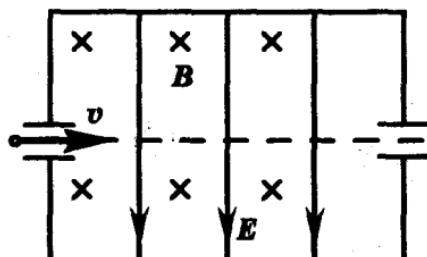
Электрон влетает в однородное магнитное поле под углом α к направлению поля. По какой траектории будет двигаться электрон, если его скорость v , а магнитная индукция поля B ?

15.15*.

Опишите движение электрона в однородных параллельных электрическом и магнитном полях. Начальная скорость электрона v направлена под углом α к векторам E и B .

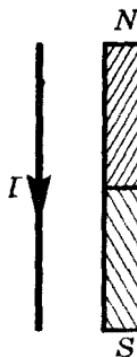
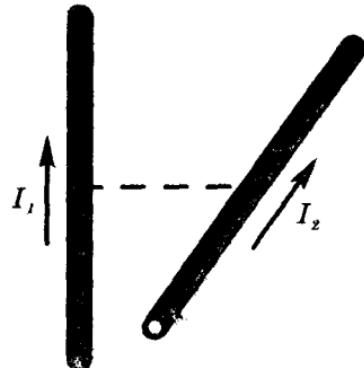
15.16.

Объясните действие «фильтра скоростей», показанного на рисунке. Внутри прибора созданы однородные поля: магнитное с индукцией B и электрическое с напряженностью E . Поля направлены перпендикулярно друг к другу и к начальной скорости частиц.



15.17.

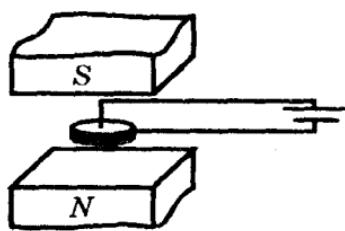
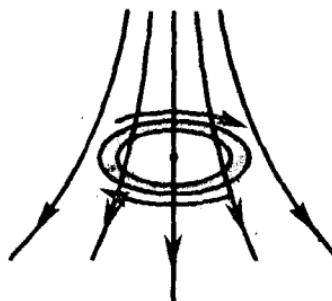
Около сильного длинного полосового магнита расположен гибкий свободный провод (см. рисунок). Как расположится провод, если по нему пропустить ток?

*К задаче 15.17**К задаче 15.18***15.18.**

По двум жестким незакрепленным прямолинейным проводникам, скрещивающимся под прямым углом, проходят токи I_1 и I_2 (см. рисунок). Как будет меняться взаимное расположение проводников вследствие магнитного взаимодействия между ними?

15.19.

Кювета с раствором медного купороса находится между полюсами сильного электромагнита (см. рисунок). Медный электрод в центре кюветы соединен с положительным полюсом источника тока, а медное кольцо, лежащее в жидкости по периметру кюветы, — с отрицательным. Что произойдет при замыкании цепи?

*К задаче 15.19**К задаче 15.20***15.20.**

Горизонтальное сверхпроводящее кольцо, по которому течет ток силой $I = 2,0 \text{ A}$, «парит» в неоднородном магнитном поле (см. рисунок). Вектор магнитной индукции в точках, где находится

кольцо, образует угол $\alpha = 30^\circ$ с осью кольца и равен по модулю $B = 0,10$ Тл. Определите массу m кольца, если его радиус $R = 5,0$ см.

15.21*.

По металлической ленте течет ток силой I . Лента помещена в однородное магнитное поле с индукцией B (см. рисунок). При этом между точками A и C возникает разность потенциалов (эффект Холла). Объясните это явление. Определите разность потенциалов U_{AC} , если $AC = a$, $AD = b$; концентрация свободных электронов равна n .

15.22*.

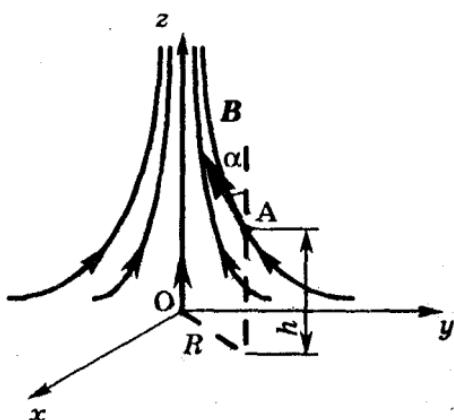
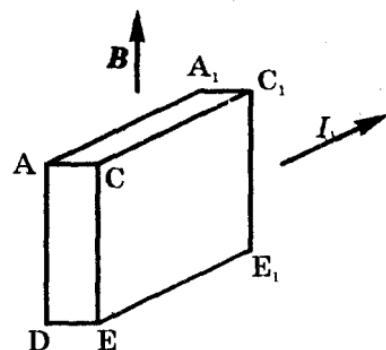
Сплошной металлический цилиндр радиуса $R = 20$ см вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10^3$ рад/с. Чему равна напряженность E электрического поля внутри цилиндра на расстоянии r от оси? Какова разность потенциалов U между поверхностью цилиндра и осью вращения? Какова должна быть индукция B магнитного поля, направленного вдоль оси цилиндра, чтобы электрическое поле не возникало?

15.23*.

Пучок однозарядных ионов проходит «фильтр скоростей» (см. задачу 15.16), в котором $E = 500$ В/м и $B = 0,10$ Тл, и попадает затем в область однородного магнитного поля с индукцией $B_1 = 60$ мТл. Ионы движутся под прямым углом к направлению вектора B_1 . На каком расстоянии x друг от друга окажутся ионы двух различных изотопов неона с относительной атомной массой 20 и 22, пройдя половину окружности?

15.24.**

Магнитное поле (см. рисунок) симметрично относительно оси z , причем проекция вектора магнитной индукции B на ось z составляет $B_z = B_0(1 + \frac{z}{h_0})$. Определите угол α между вектором B и осью z в точке A , лежащей на расстоянии R от оси z и на расстоянии h от плоскости xOy .



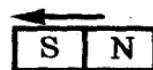
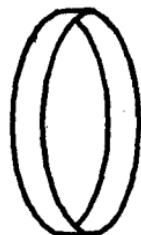
16. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

16.1.

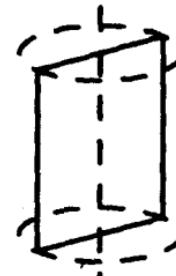
Какие явления происходят в кольце, когда в него вдвигают магнит? Рассмотрите случаи, когда кольцо сделано из: а) диэлектрика, б) проводника.

16.2.

Определите направление индукционного тока в металлическом кольце, к которому приближают южный полюс магнита (см. рисунок).



К задаче 16.2



К задаче 16.3

16.3.

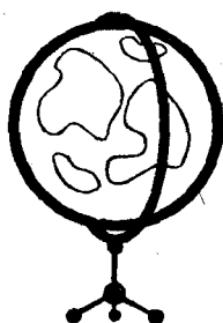
Прямоугольная проволочная рамка равномерно вращается вокруг неподвижной оси. Параллельно этой оси расположен провод, по которому течет ток I (см. рисунок). Обозначим плоскость, в которой лежат провод и ось вращения рамки, буквой α . При каких положениях рамки в ней возникает наименьшая ЭДС индукции? Наибольшая?

16.4.

Каркас для глобуса сделан из двух тонких изолированных друг от друга стальных обрущей, расположенных во взаимно перпендикулярных плоскостях (см. рисунок). В одном из них течет изменяющийся электрический ток. Возникает ли во втором обруче ЭДС индукции?

16.5*.

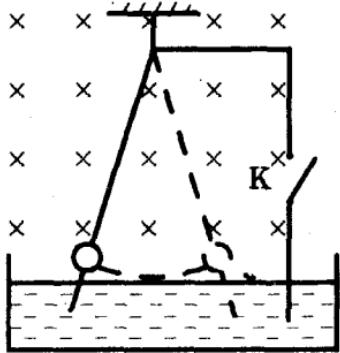
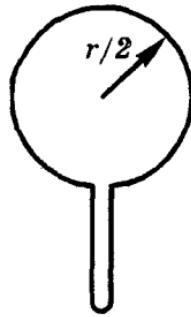
Магнит падает в длинной вертикальной медной трубе, воздух из которой откачен. Опишите характер падения. Магнит с трубой не соприкасается.



К задаче 16.4

16.6.

Маятник, состоящий из металлических нити, шарика и острия, погруженного в ртуть (см. рисунок), совершает малые колебания в однородном магнитном поле. Как изменится характер колебаний после замыкания ключа K ?

*K задаче 16.6**K задаче 16.11***16.7*.**

Плоская проволочная рамка может свободно вращаться вокруг оси, перпендикулярной магнитной индукции однородного магнитного поля. Укажите положение устойчивого равновесия рамки, если магнитное поле убывает; если магнитное поле возрастает.

16.8*.

Свинцовое кольцо радиуса r расположено перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Магнитная индукция поля равна B . Охлаждая кольцо, его переводят в сверхпроводящее состояние, а затем магнитное поле выключают. Какой магнитный поток Φ будет пронизывать после этого плоскость кольца?

16.9.

Какие явления возникают в сверхпроводящем кольце, когда в него вдвигают магнит?

16.10*.

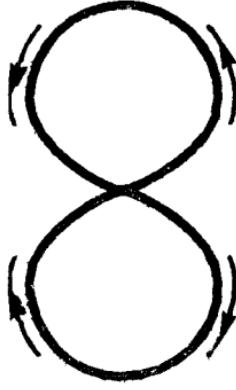
Сверхпроводящая катушка радиуса r состоит из N витков и имеет индуктивность L . Определите силу тока I , возникающего в катушке при включении внешнего однородного магнитного поля с индукцией B , направленной вдоль оси катушки.

16.11*.

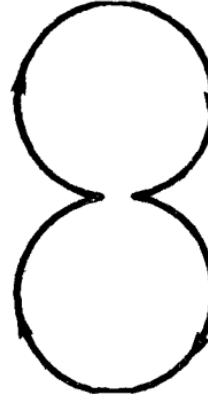
По сверхпроводящему проводу, имеющему форму кольца радиуса r , идет ток. Индукция магнитного поля в центре кольца равна B_0 . Проводу придают другую форму (см. рисунок). Какова теперь индукция B магнитного поля в центре кольца?

16.12*.

Сверхпроводящее изолированное кольцо, по которому идет ток, деформируют, превращая его в «восьмерку» из двух одинаковых колец (см. рисунок). Затем «восьмерку» складывают вдвое так, что получается меньшее кольцо. Как изменится индукция магнитного поля в центре кольца?



К задаче 16.12



К задаче 16.13

16.13.**

Как изменится ответ в задаче 16.12, если перед складыванием «восьмерки» не перекручивать ее (см. рисунок)?

16.14*.

Катушку радиуса $r = 3,0$ см с числом витков $n = 1000$ помещают в однородное магнитное поле (ось катушки направлена вдоль линий поля). Индукция поля изменяется с постоянной скоростью

$\frac{\Delta B}{\Delta t} = 10$ мТл/с. Какой заряд q будет на конденсаторе, подключенным к концам катушки? Емкость конденсатора $C = 20$ мкФ.

16.15*.

Катушка (см. задачу 16.14) замыкается накоротко. Определите выделяющуюся в ней тепловую мощность P , если сопротивление катушки $R = 16$ Ом.

16.16*.

В замкнутую накоротко катушку вводят магнит: один раз быстро, а другой — медленно. Одинаковый ли заряд проходит по цепи в обоих случаях? Однаковое ли количество теплоты выделяется?

16.17*.

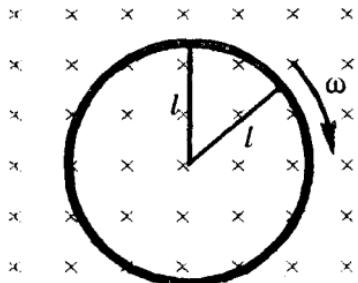
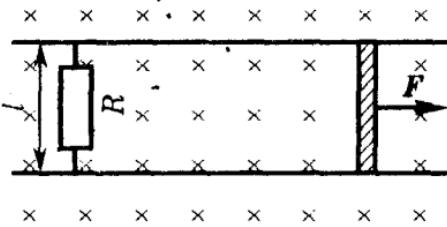
Катушка радиуса r с числом витков n и сопротивлением R находится в однородном магнитном поле с индукцией B . Ось катушки направлена вдоль линий поля. Концы катушки замкнуты. Какой заряд q пройдет через катушку, если повернуть ее ось на угол α ?

16.18*.

Кусок провода длиной $l = 4,0$ м складывают вдвое и его концы замыкают. Затем провод растягивают по периметру горизонтальной площадки. Какой максимальный заряд q_{\max} может при этом пройти через провод, если его сопротивление $R = 2,0$ Ом? Вертикальная составляющая магнитного поля Земли $B_z = 50$ мкТл.

16.19.

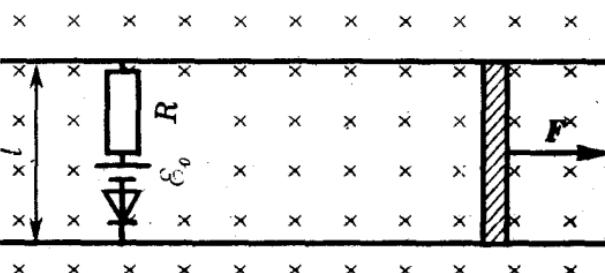
Металлическое кольцо радиуса l имеет пренебрежимо малое сопротивление. Кольцо находится в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярной плоскости кольца. Две металлические «стрелки» сопротивлением R каждая имеют контакт между собой и с кольцом (см. рисунок). Одна из них неподвижна, другая равномерно вращается с угловой скоростью ω . Определите силу тока I через стержни.

*К задаче 16.19**К задаче 16.20***16.20*.**

Металлический стержень может скользить без трения по параллельным длинным «рельсам», находящимся на расстоянии l друг от друга и соединенным перемычкой с электрическим сопротивлением R (см. рисунок). Система находится в перпендикулярном ее плоскости однородном магнитном поле с индукцией B . Как будет двигаться стержень, если к нему приложить постоянную силу F ? Электрическим сопротивлением стержня и «рельсов» можно пренебречь.

16.21.**

Как изменится ответ в задаче 16.20, если в цепь включить источник тока и идеальный диод, как показано на рисунке?



16.22*.

На цилиндрический железный сердечник радиуса r надето изолированное проволочное кольцо того же радиуса, имеющее электрическое сопротивление R . В сердечнике создано однородное магнитное поле, индукция которого меняется по закону $B = aB_0t$. Как меняется со временем сила тока i в кольце? Разность потенциалов между диаметрально противоположными точками кольца?

16.23.**

Виток провода изогнут в виде восьмерки (см. рисунок), так что $r_1 = 20$ мм и $r_2 = 60$ мм. В течение времени $\Delta t = 0,50$ мс однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости витка, равномерно возрастает. Начальное значение индукции магнитного поля равно нулю, конечное $B = 50$ Тл. На какое напряжение U должна быть рассчитана изоляция между проводами, чтобы не произошел пробой?

16.24.**

Катушка с индуктивностью L и электрическим сопротивлением R подключена через ключ к источнику тока с ЭДС \mathcal{E} . В момент $t = 0$ ключ замыкают. Как изменяется со временем сила тока I в цепи сразу же после замыкания ключа? Через длительное время после замыкания? Оцените характерное время τ возрастания тока в такой цепи. Внутренним сопротивлением источника тока можно пренебречь.

16.25.**

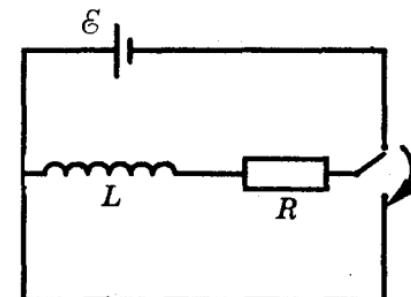
Через катушку (см. задачу 16.24) течет постоянный ток. В момент t_0 источник тока отключают и катушку замыкают накоротко (см. рисунок). Какой вид имеет график зависимости силы тока от времени? Каково характерное время τ убывания тока в цепи?

16.26*.

На замкнутый ферромагнитный сердечник намотана катушка. Как зависит ее индуктивность L от числа витков N ? Магнитную проницаемость сердечника считать неизменной.

16.27*.

Два одинаковых сверхпроводящих кольца могут перемещаться поступательно вдоль одной прямой (см. рисунок). Плоскости колец параллельны друг другу и перпендикулярны этой



прямой. В начальный момент расстояние между кольцами намного превышает их размеры; по кольцам текут в одном направлении токи I_0 . Какие токи I установятся в кольцах после того, как они сблизятся вплотную? Как при этом изменится энергия магнитного поля?

16.28**.

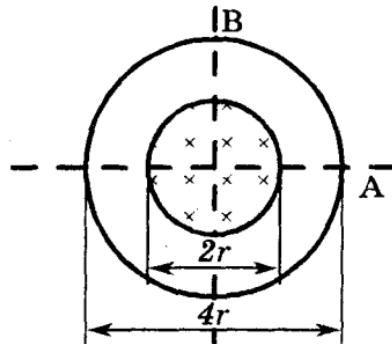
Опишите движение сверхпроводящих колец (см. задачу 16.27), если в начальный момент токи в кольцах различны по величине.

16.29*.

В цилиндрическом сердечнике радиуса R создано однородное магнитное поле, направленное вдоль оси цилиндра. Индукция магнитного поля изменяется со временем по закону $B = kt$. Определите напряженность E вихревого электрического поля на расстоянии r от оси цилиндра.

16.30**.

Индукция однородного магнитного поля в цилиндрическом сердечнике радиуса r (см. рисунок) возрастает со временем по закону $B = kt$. Проволочное кольцо радиуса $2r$ имеет общую с сердечником ось. Какова разность потенциалов между точками A и B ? Какое напряжение покажет подключенный между точками A и B вольтметр? Сопротивление вольтметра велико по сравнению с сопротивлением кольца.



16.31**.

Половина проволочного кольца изготовлена из меди, а другая половина — из латуни. Сечение проволоки всюду одинаково, радиус кольца $r = 30$ мм. Кольцо надето на цилиндрический сердечник того же радиуса. В сердечнике создано однородное магнитное поле, индукция которого возрастает с постоянной скостьюю

$\frac{\Delta B}{\Delta t} = 500$ Тл/с. Определите напряженность электрического

поля в различных частях кольца.

16.32**.

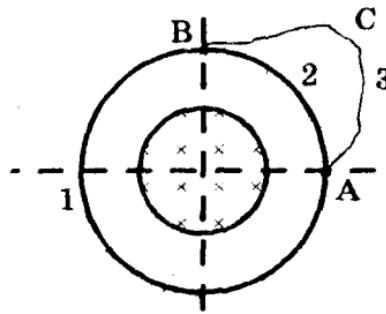
В проволочном кольце (см. задачу 16.30) разность потенциалов между точками A и B равна нулю. Значит ли это, что в проводнике, включенном между точками A и B , не возникнет электрический ток? Может ли включение такого проводника изменить разность потенциалов между точками A и B ?

16.33**.

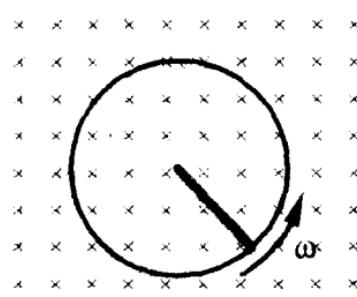
Определите разность потенциалов U между двумя точками соединения медного и латунного полуколец (см. задачу 16.31).

16.34.**

Между точками A и B (см. задачу 16.30) включен сверхпроводник ACB (см. рисунок). Определите силу тока на различных участках цепи и разность потенциалов U между точками A и B . Сопротивление проволоки, из которой сделано кольцо, равно R .



К задаче 16.34



К задаче 16.37

16.35.

При торможении поезда метро электродвигатели постоянного тока отключают от сети и подключают к специальным реостатам. Зачем это делают?

16.36*.

Металлический диск радиуса $r = 10$ см расположен в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости диска. Диск вращается с угловой скоростью $\omega = 500$ рад/с. Два скользящих контакта (один на оси диска, другой на его окружности) соединены с резистором сопротивлением $R = 10$ Ом. Какая мощность P выделяется в резисторе, если индукция магнитного поля $B = 0,50$ Тл? **16.37**.**

Сверхпроводящее кольцо радиуса l помещено в однородное горизонтальное магнитное поле с индукцией B . Ось кольца параллельна линиям магнитной индукции поля (см. рисунок). Стержень массой m и длиной l , имеющий сопротивление R , закреплен одним концом в центре кольца и может без трения поворачиваться вокруг этой точки, сохраняя электрический контакт с кольцом. По какому закону должно изменяться напряжение U , приложенное между кольцом и его центром, чтобы стержень вращался с постоянной угловой скоростью ω ?

16.38*.

Сопротивление в цепи нагрузки генератора переменного тока увеличилось. Как должна измениться мощность двигателя, врачающего генератор, чтобы частота переменного тока не изменилась?

16.39*.

В каком случае обмотка электромотора сильнее нагревается проходящим по ней током — когда мотор работает вхолостую или совершает некоторую работу? Напряжение в сети считать постоянным.

16.40*.

Электродвигатель включен в сеть постоянного тока напряжением $U = 120$ В. Сопротивление обмотки двигателя $R = 12$ Ом. Какую максимальную мощность N_{\max} может развить этот двигатель? При какой силе тока I_0 достигается эта мощность? Напряжение в сети считать постоянным.

16.41.**

Магнитное поле имеет вертикальную ось симметрии (ось z). Проекция вектора магнитной индукции \mathbf{B} на эту ось $B_z = B_0 \left(1 + \frac{z}{h_0}\right)$.

С большой высоты падает медное кольцо диаметра d , имеющее электрическое сопротивление R ; плоскость кольца все время горизонтальна, а центр движется вдоль оси z . Определите установившуюся скорость падения v , если масса кольца равна m .

17. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

Электромагнитные колебания и волны

17.1.

Батарею из двух одинаковых конденсаторов емкостью $C = 10$ нФ каждый, заряженную от источника постоянного напряжения, подключают к катушке индуктивностью $L = 8,0$ мкГн. Определите период T и частоту v возникающих в контуре электромагнитных колебаний, если конденсаторы в батарее соединены: а) последовательно; б) параллельно.

17.2.

Какова максимальная сила тока I_m в контуре (см. задачу 17.1), если напряжение источника $U_m = 200$ В?

17.3.

Определите силу тока в колебательном контуре (см. задачу 17.2): а) через $t_1 = 0,31$ мкс после подключения батареи конденсаторов к катушке; б) в момент, когда напряжение на батарее конденсаторов $u = 100$ В. Конденсаторы соединены параллельно.

17.4.

Что нужно делать для приема более коротких волн — сближать или раздвигать пластины конденсатора, включенного в колебательный контур приемника? Увеличивать или уменьшать площадь перекрытия пластин в конденсаторе переменной емкости?

17.5.**

Конденсатор переменной емкости колебательного контура радиоприемника может изменять емкость от C_1 до $C_2 > C_1$. Какой комплект из N сменных катушек следует использовать, чтобы диапазон длин волн, на которые можно настраивать приемник, был как можно более широким и не содержал «просветов»?

Какова верхняя граница λ_{\max} этого диапазона, если нижняя граница равна λ_{\min} ?

17.6.**

Конденсатор переменной емкости может изменять свою емкость от $C_1 = 56 \text{ пФ}$ до $C_2 = 670 \text{ пФ}$. Сколько катушек надо иметь, чтобы колебательный контур радиоприемника можно было настраивать на любые радиостанции, работающие в диапазоне длин волн от $\lambda_1 = 40 \text{ м}$ до $\lambda_2 = 2600 \text{ м}$?

17.7.

Сколько электромагнитных колебаний, соответствующих длине волны $\lambda = 300 \text{ м}$, происходит в течение одного периода звуковых колебаний с частотой $v = 500 \text{ Гц}$?

17.8.

Колебательный контур радиоприемника настроен на частоту $v = 6 \text{ МГц}$. Во сколько раз нужно изменить емкость конденсатора контура, чтобы настроиться на длину волны $\lambda = 150 \text{ м}$?

17.9.**

Электрический контур состоит из конденсатора постоянной емкости и катушки, в которую можно вдвигать сердечник. Один сердечник — ферритовый¹⁾, другой изготовлен из меди. Как изменится частота собственных колебаний контура, если ввинтить в катушку ферритовый сердечник? Медный?

17.10.

Воздушная линия электропередачи переменного тока промышленной частоты $v = 50 \text{ Гц}$ имеет длину $l = 600 \text{ км}$. Определите сдвиг

¹⁾ Феррит — магнитное соединение железа, являющееся изолятором.

по фазе $\Delta\phi$ напряжений в начале и в конце этой линии. Скорость распространения сигналов по проводам равна скорости света в вакууме c .

17.11.

Антенна корабельного радиолокатора находится на высоте $h = 25$ м над уровнем моря. На каком максимальном расстоянии s_{\max} радиолокатор может обнаружить спасательный плот? С какой частотой n могут при этом испускаться импульсы?

17.12.

Радиолокатор работает на волне $\lambda = 5,0$ см и испускает импульсы длительностью $\tau = 1,5$ мкс. Сколько колебаний содержится в каждом импульсе? Какова минимальная дальность s_{\min} обнаружения цели?

17.13*.

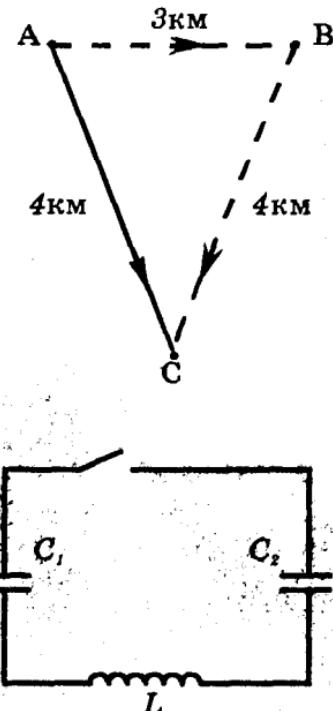
Почему увеличение дальности радиосвязи с космическими кораблями в три раза требует увеличения мощности передатчика в 9 раз? Во сколько раз следует увеличить мощность передатчика для увеличения в три раза дальности радиолокации? В обоих случаях излучатель радиоволн можно считать точечным. Поглощением энергии при распространении радиоволн пренебречь.

17.14*.

Антенна телевизора (точка C на рисунке) принимает, наряду с волной от телецентра (точка A), волну, отраженную от железной крыши (точка B). В результате изображение на экране двойится. На сколько сдвинуты получаемые изображения друг относительно друга? Ширина экрана телевизора $l = 50$ см; кадры на экране сменяются с частотой $n = 25 \text{ c}^{-1}$, изображение разлагается на $N = 625$ строк.

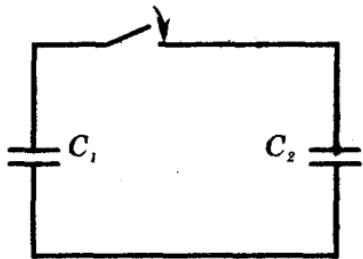
17.15**

Конденсатор емкостью C_1 заряжен до напряжения U_0 , и конденсатор емкостью C_2 не заряжен (см. рисунок). Каким будет максимальное значение I_m силы тока в катушке индуктивностью L после замыкания ключа? Конденсаторы и катушку считайте идеальными.

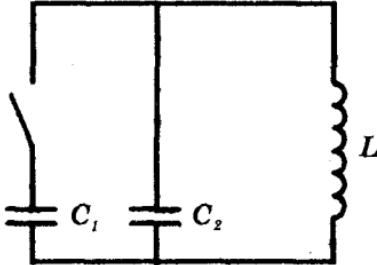


17.16**.

Один из двух одинаковых конденсаторов (см. рисунок) заряжен до напряжения U_0 , другой — не заряжен. Какое напряжение U установится на конденсаторах после замыкания ключа? Как согласуется этот результат с законом сохранения энергии? Рассмотрите, в частности, случай, когда соединительные провода являются сверхпроводящими.



К задаче 17.16



К задаче 17.17

17.17**.

В цепи (см. рисунок) $C_1 = C_2 = C$. До замыкания ключа напряжение на первом конденсаторе равно U_1 , второй конденсатор не заряжен. Определите максимальное значение I_m силы тока через катушку с индуктивностью L после замыкания ключа. Сопротивлением катушки можно пренебречь.

Переменный ток

17.18.

Определите частоту n вращения прямоугольной рамки в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,50$ Тл, если в рамке индуцируется ЭДС с амплитудой $\mathcal{E}_m = 20$ В. Площадь рамки $S = 200 \text{ см}^2$, число витков $N = 40$. Ось вращения перпендикулярна вектору индукции магнитного поля.

17.19*.

В цепь последовательно включены резистор с сопротивлением R , конденсатор с емкостью C и катушка с индуктивностью L . По цепи протекает переменный ток $i = I_m \cos \omega t$. Определите амплитуды напряжения на каждом из элементов цепи и во всей цепи. По какому закону изменяется приложенное к цепи напряжение?

17.20*.

В цепь последовательно включены резистор с сопротивлением R , конденсатор с емкостью C и катушка с индуктивностью L . К цепи прикладывают переменное напряжение $u = U_m \cos \omega t$, где

U_m — заданная постоянная величина, а ω можно изменять в широких пределах произвольным образом. Какой вид имеют зависимости амплитуды силы тока I_m и амплитуды напряжения на резисторе U_{MR} от циклической частоты ω ?

17.21.

В цепь последовательно включены резистор с сопротивлением $R = 1,0 \text{ кОм}$, конденсатор с емкостью $C = 1,0 \text{ мкФ}$ и катушка с индуктивностью $L = 0,50 \text{ Гн}$. Найдите емкостное сопротивление X_C , индуктивное сопротивление X_L и полное сопротивление Z цепи при частотах $v_1 = 50 \text{ Гц}$ и $v_2 = 10 \text{ кГц}$. При какой частоте v_0 в цепи наблюдается резонанс?

17.22.

В цепь переменного тока включены последовательно резистор с сопротивлением R , конденсатор с емкостью C и катушка с индуктивностью L . Амплитуда силы тока в цепи равна I_m . Определите среднюю мощность P , потребляемую за период каждым из элементов цепи. Конденсатор и катушку считайте идеальными.

17.23*.

В цепь переменного тока включены последовательно резистор, конденсатор и катушка. Выразите среднюю мощность P , потребляемую всей цепью, через действующие значения силы тока I и напряжения U . Сдвиг фаз между колебаниями силы тока и напряжения равен ϕ .

17.24*.

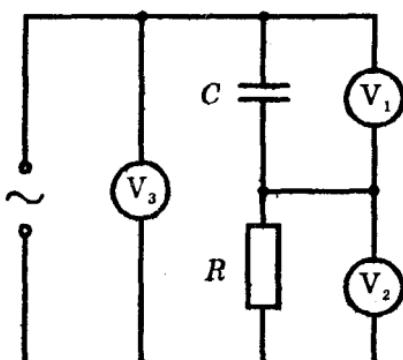
В цепи переменного тока (см. рисунок) показания первого и второго вольтметров $U_1 = 12 \text{ В}$ и $U_2 = 9 \text{ В}$. Каково показание U_3 третьего вольтметра?

17.25.

Проводник имеет активное сопротивление $R = 30 \Omega$ и индуктивность $L = 0,127 \text{ Гн}$. Каковы полное сопротивление Z проводника и сдвиг фаз ϕ между током и напряжением, если проводник включен в сеть переменного тока с частотой $v_1 = 50 \text{ Гц}$? С частотой $v_2 = 400 \text{ Гц}$?

17.26.

При подаче на катушку постоянного напряжения 30 В сила тока равнялась 1,0 А. При подаче переменного напряжения 30 В сила тока составила 0,60 А. Какова индуктивность L катушки? Какая мощность P выделялась в катушке при прохождении постоянного и переменного тока? Частота переменного тока равна 50 Гц.



17.27*.

В сеть переменного тока частоты $v = 50$ Гц включены последовательно лампочка, конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ и катушка. Индуктивность катушки без сердечника равна $L_1 = 50$ мГн, а при полностью введенном сердечнике $L_2 = 1,5$ Гн. Как изменяется накал лампы по мере введения в катушку сердечника?

17.28*.

В сеть переменного напряжения промышленной частоты $v = 50$ Гц включены последовательно лампочка, катушка с индуктивностью $L = 0,50$ Гн и конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Как изменится накал лампы, если к конденсатору подключить параллельно второй такой же конденсатор? Третий?

17.29*.

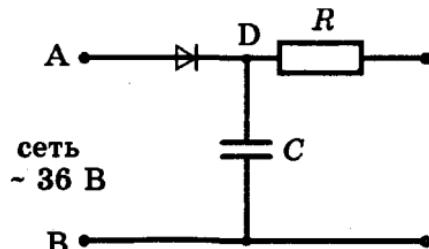
Неоновая лампа с напряжением зажигания $U_z = 156$ В включена в сеть 220 В, 50 Гц. Определите частоту n вспышек лампы. В течение какой части периода лампа горит? Напряжение гашения лампы считайте равным напряжению зажигания.

17.30*.

Найдите действующие значения I переменных токов (см. рисунки *a*, *b*, *c*).

17.31.**

На рисунке показана схема простейшего выпрямителя, используемого в школьных экспериментах. Емкость конденсатора $C = 500$ мкФ, сопротивление резистора $R = 1,0$ кОм. Каково максимально возможное значение напряжения $U_{\text{вых}}$ на выходе выпрямителя? Какое обратное напряжение должен выдерживать диод?



К задаче 17.31

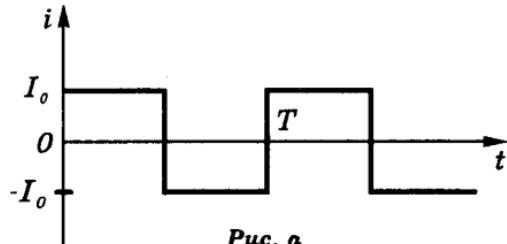


Рис. а

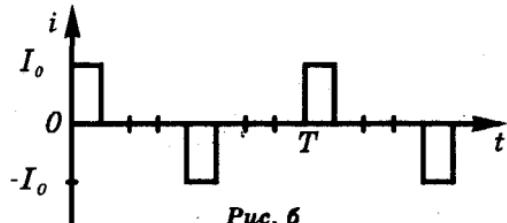


Рис. б

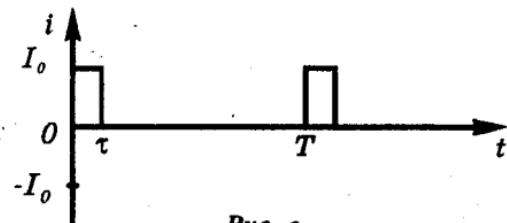
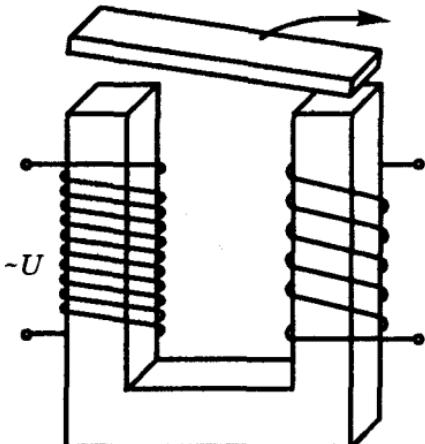


Рис. в

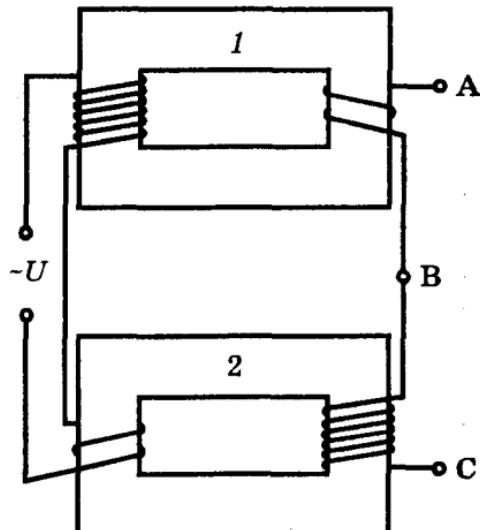
К задаче 17.30

17.32*.

Разборный школьный трансформатор включен в сеть. Ко вторичной обмотке подключена нагрузка. Как изменится сила тока в первичной и вторичной обмотках при удалении верхней части сердечника (см. рисунок)?



К задаче 17.32



К задаче 17.36

17.33.

Почему для реостата замыкание одного-двух витков не опасно, а трансформатор может выйти из строя, если хотя бы один виток обмотки замкнется накоротко?

17.34.

Через замкнутый кольцевой сердечник трансформатора, понижающего напряжение с $U_1 = 220$ В до $U_2 = 42$ В, пропущен провод, концы которого присоединены к вольтметру. Вольтметр показывает $U = 0,50$ В. Сколько витков имеют обмотки трансформатора?

17.35.

Трансформатор понижает напряжение с 220 В до 42 В. а) В какой из обмоток провод должен быть толще? б) Можно ли подключить трансформатор к сети постоянного напряжения 100 В? в) Можно ли включить в сеть переменного тока с напряжением 220 В первичную катушку трансформатора, снятую с сердечника?

17.36.**

Два одинаковых идеальных трансформатора имеют обмотки из $N_1 = 200$ и $N_2 = 600$ витков. Они соединены последовательно различными обмотками (см. рисунок) и подключены к источнику переменного напряжения $U = 200$ В. Определите напряжение U_{AC} между точками А и С.

Закон преломления света $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$

Оптическая сила линзы $D = \frac{1}{F}$

Формула тонкой линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$

Увеличение тонкой линзы $\Gamma = \frac{H}{h} = \left| \frac{f}{d} \right|$

Связь показателя преломления среды со скоростью света

$$n = \frac{c}{v}$$

Условие максимума при интерференции

$$\Delta d = k\lambda, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Условие минимума при интерференции

$$\Delta d = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Формула дифракционной решетки $d \sin\phi = k\lambda, k = 0, 1, 2, \dots$

ОПТИКА

ЗАКОНЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ПРИБОРЫ



ВОЛНОВАЯ ОПТИКА



18. ЗАКОНЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Световые лучи. Отражение света

18.1.

Вертикальный шест высотой $h = 1,0$ м, поставленный недалеко от уличного фонаря, отбрасывает тень длиной $l_1 = 80$ см. Если расстояние между фонарным столбом и шестом увеличить на $s = 1,5$ м, то длина тени возрастет до $l_2 = 1,3$ м. На какой высоте H находится фонарь?

18.2*.

Оцените размер области поверхности Земли, где одновременно наблюдается солнечное затмение (полное или частичное). Радиус Солнца $r_c = 7 \cdot 10^5$ км, радиус Луны $r_l = 1700$ км; расстояние от Земли до Солнца $R_c = 1,5 \cdot 10^8$ км, от Земли до Луны $R_l = 3,8 \cdot 10^5$ км.

18.3*.

В ясный безоблачный вечер лучи заходящего солнца попадают в затемненную комнату через узкую горизонтальную щель в ставне. Длина щели $a = 6$ см, расстояние от окна до противоположной стены $l = 3$ м. Какова форма светового пятна на стене, если солнечные лучи падают на нее под прямым углом? Оцените размеры светового пятна. Что произойдет с пятном, если уменьшать ширину щели? Длину?

18.4*.

Солнечные лучи, проходя сквозь маленькие отверстия в листве дерева, дают на земле светлые пятна в форме эллипсов одинаковой формы, но разных размеров. Большая ось самых крупных эллипсов $a = 16$ см, а малая ось $b = 12$ см. Какова высота H дерева? Под каким углом α к горизонту падают солнечные лучи? Угловой размер солнечного диска $\beta = 9,3 \cdot 10^{-3}$ рад.

18.5.

Теплоход проходит мимо стоящей на якоре шхуны. В момент наибольшего сближения боцман шхуны вытягивает руку вперед и, глядя только правым глазом, заслоняет большим пальцем вытянутой руки нос теплохода. Открыв левый глаз и закрыв правый, он видит, что теперь его палец закрывает корму теплохода. Боцман мгновенно и довольно точно называет расстояние L до теплохода. Попробуйте и вы это сделать, если известно, что длина теплохода $a = 100$ м, длина вытянутой руки боцмана $l = 60$ см, расстояние между зрачками $b = 65$ мм.

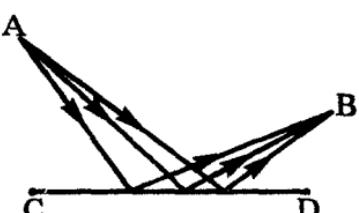
18.6.

Высота солнца над горизонтом (угол между солнечными лучами и горизонтальной плоскостью) составляет $\alpha = 48^\circ$. Под каким

углом β к горизонту следует расположить зеркало, чтобы осветить солнечными лучами дно глубокого вертикального колодца?

18.7*.

Луч света, идущий из точки A , приходит в точку B , отразившись от плоской пластины CD (см. рисунок). Докажите, что, «подчиняясь» закону отражения, луч «выбирает» кратчайший путь.



18.8.

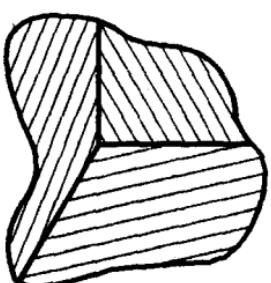
Два зеркала образуют двугранный прямой угол. На эту систему зеркал падает луч, перпендикулярный ребру угла. Как изменится направление распространения света после отражения от двух зеркал?

18.9.

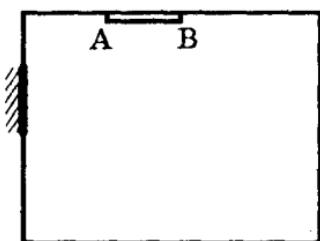
Два зеркала образуют двугранный угол ϕ . На одно из них падает под углом α луч, перпендикулярный ребру угла. На какой угол отклонится этот луч после двух отражений?

18.10*.

Три зеркала образуют между собой двугранные прямые углы (см. рисунок). Докажите, что после трех отражений от этой системы зеркал направление любого луча света изменяется на противоположное.



К задаче 18.10



К задаче 18.11

18.11.

В каких точках комнаты должен находиться человек, чтобы видеть в зеркале экран телевизора AB (см. рисунок) целиком?

18.12.

Какова должна быть минимальная высота вертикального зеркала, чтобы человек ростом H мог видеть в нем свое изображение во весь рост? На какой высоте должно висеть зеркало?

18.13*.

Ранним утром изображение Солнца в спокойной воде слепит глаза, а в полдень на это же изображение можно смотреть даже без темных очков. Почему?

18.14*.

Толченое стекло теряет свою прозрачность, но в воде оно вновь становится прозрачным. Объясните эти явления.

18.15.

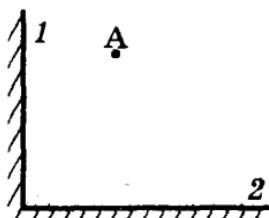
Почему ночью лужа на неосвещенной дороге кажется водителю темным пятном на светлом фоне?

18.16.

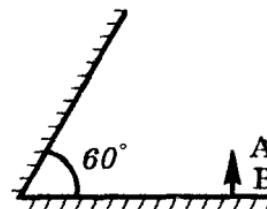
Свеча *A* находится между двумя зеркалами, образующими двугранный прямой угол (см. рисунок). Сколько изображений свечи дают зеркала и где эти изображения расположены?

18.17*.

Сколько изображений предмета *AB* дают зеркала (см. рисунок)? Где расположены эти изображения? Угол между зеркалами 60° .



К задаче 18.16



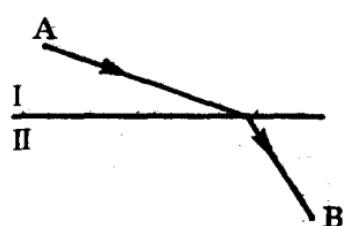
К задаче 18.17

Преломление света**18.18.**

Луч света идет из стекла в воду и преломляется на плоской границе стекло-вода. При каком угле падения α отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу?

18.19.**

Принцип Ферма. Свет идет из точки *A* в точку *B*, преломляясь на плоской границе раздела двух сред (см. рисунок). Докажите, что время прохождения света из точки *A* в точку *B* минимально как раз в том случае, когда свет «подчиняется» закону преломления.



18.20.

Свая вбита в дно реки и возвышается над водой на $h_1 = 1,0$ м. Глубина реки $h_2 = 2,0$ м. Определите длину тени сваи на поверхности воды и на дне реки, когда высота солнца над горизонтом $\alpha = 30^\circ$.

18.21.

Угол падения луча света на стеклянную плоскопараллельную пластинку $\alpha = 60^\circ$. Выйдя из пластинки, луч смешился на $a = 15$ мм. Какова толщина h пластинки?

18.22.

Луч света направлен так, что испытывает полное отражение на границе воды и воздуха. Сможет ли он выйти в воздух, если на поверхность воды налить подсолнечное масло? Масло с водой не смешивается.

18.23*.

Показатель преломления жидкости плавно увеличивается от n_a у поверхности до n_b у дна сосуда. Луч падает на поверхность жидкости под углом α . Определите угол β падения луча на дно сосуда.

18.24*.

В жарких пустынях иногда наблюдается мираж: вдалеке «возникает» поверхность водоема. Какими физическими явлениями обусловлен такой мираж?

18.25*.

В ясный солнечный день стоящий на дне озера водолаз видит в водном «зеркале» у себя над головой отражение всех участков дна, находящихся от него на расстоянии $s = 10$ м и более. Какова глубина H озера? Рост водолаза $h = 1,7$ м.

18.26.

Прямоугольный плот длиной $a = 5$ м и шириной $b = 2,5$ м плавает в открытом бассейне глубиной $h = 1$ м. Каковы размеры тени на дне бассейна в солнечный день? А когда все небо затянуто тучами?

18.27*.

Могут ли солнечные лучи испытать полное отражение внутри дождевой капли? Каплю считайте шарообразной.

18.28.**

Почему асфальт под дождем темнеет, а полированный гранит — нет?

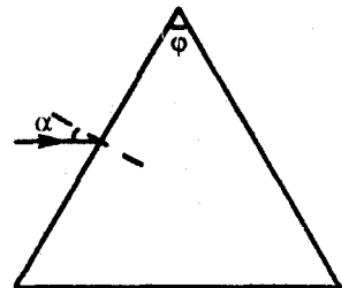
18.29*.

Преломляющий угол призмы $\phi = 45^\circ$. Луч света выходит из призмы под тем же углом, под каким он в нее входит; при этом луч

отклоняется от первоначального направления на угол $\delta = 25^\circ$. Определите показатель преломления n материала призмы.

18.30.

Преломляющий угол ϕ призмы (см. рисунок) равен 60° . Угол падения луча на грань призмы $\alpha = 30^\circ$. Определите угол δ отклонения луча от первоначального направления после прохождения через призму. Показатель преломления материала призмы $n = 1,5$.



18.31.

Луч падает на боковую грань стеклянной призмы под прямым углом. Определите угол δ отклонения луча от первоначального направления, если преломляющий угол ϕ призмы равен: а) 30° ; б) 60° .

18.32*.

На боковую грань равнобедренной призмы падает луч, идущий параллельно основанию призмы. При каком условии луч, пройдя призму, не изменит своего направления?

18.33.

Угол падения луча на боковую грань призмы равен α . Преломляющий угол призмы ϕ , показатель преломления материала призмы n . Определите угол δ отклонения луча от первоначального направления, если углы α и ϕ малы.

18.34.

Нижняя поверхность плоскопараллельной стеклянной пластинки посеребрена. На пластинку сверху падает луч света; в результате от нее отражаются два параллельных луча, идущих на расстоянии $a = 20$ мм друг от друга. Определите толщину h пластинки, если угол падения луча $\alpha = 60^\circ$.

18.35*.

Если смотреть сверху на неглубокий водоем с чистой водой, то дно хорошо видно, однако глубина водоема кажется меньшей, чем она есть в действительности. Во сколько раз?

18.36.

Рыба, находящаяся на глубине $h_1 = 1,0$ м, смотрит вертикально вверх в глаза рыболову. Голова рыболова находится на высоте $h_2 = 1,5$ м над водой. Каким покажется рыбе расстояние l до головы рыболова?

18.37*.

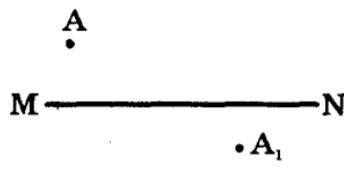
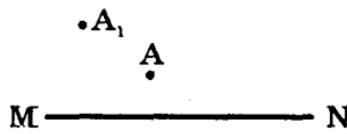
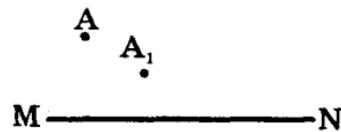
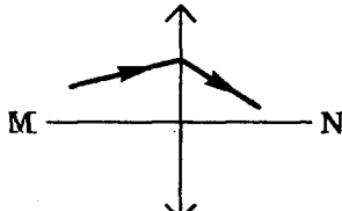
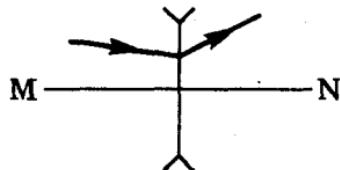
Над водой на высоте $h_1 = 1,0$ м поместили горизонтально плоское зеркало. На какой высоте h над водой увидит свое отражение рыба, находящаяся на глубине $h_2 = 0,50$ м?

18.38.**

На сферическую каплю воды падает луч света. Определите угол δ отклонения луча от первоначального направления в результате двух преломлений и одного отражения на поверхности капли. Угол падения луча из воздуха на поверхность капли равен α .

19. ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ПРИБОРЫ**Линзы****19.1.**

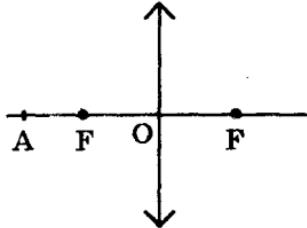
Определите построением (см. рис. *a*, *b*, *c*), где находится оптический центр *O* тонкой линзы и ее фокусы *F*, если *MN* — главная оптическая ось линзы, *A* — светящаяся точка, *A₁* — ее изображение. Определите также тип линзы (собирающая или рассеивающая) и тип изображения (действительное или мнимое).

Рис. *a*Рис. *b*Рис. *c**К задаче 19.1*Рис. *a*Рис. *b**К задаче 19.2***19.2.**

Определите построением положение фокусов линзы (см. рис. *a*, *b*), если задана главная оптическая ось *MN* и ход произвольного луча.

19.3*.

Постройте изображение точки A (см. рисунок), лежащей на главной оптической оси линзы.

*К задаче 19.3**К задаче 19.5***19.4.**

Как изменится изображение, полученное на экране при помощи собирающей линзы, если закрыть рукой верхнюю половину линзы?

19.5.

Из стекла двух сортов с различными показателями преломления изготовлена слоистая линза (см. рисунок). Какое изображение точечного источника света даст эта линза? Считайте, что на границах между слоями свет полностью поглощается.

19.6.

Всегда ли двояковыпуклая линза является собирающей?

19.7.

Предмет находится на расстоянии $a_1 = 8,0$ см от переднего фокуса линзы, а его изображение — на экране на расстоянии $a_2 = 18$ см от заднего фокуса линзы. Определите фокусное расстояние F линзы.

19.8*.

Каково минимально возможное расстояние l_{\min} между предметом и его действительным изображением, полученным с помощью собирающей линзы? Какое увеличение Γ дает линза в этом случае? Фокусное расстояние линзы равно F .

19.9*.

Собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 40$ мм используется в качестве зажигательного стекла. Определите минимальный диаметр d полученного с ее помощью светового пятна. Угловой диаметр солнечного диска при наблюдении с Земли $\beta = 9,3 \cdot 10^{-8}$ рад.

19.10.

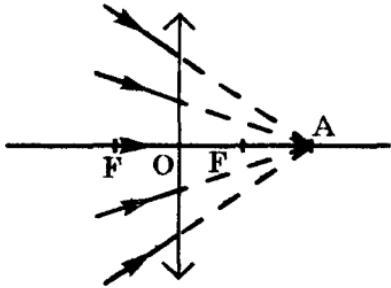
Постройте изображение предмета в собирающей линзе при $d < F$, т. е. когда предмет находится между линзой и ее фокусом. Докажите, что формула тонкой линзы применима и в этом случае, если считать $f < 0$.

19.11.

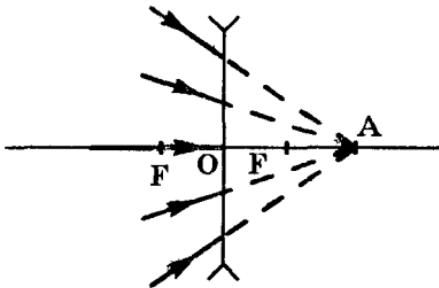
Постройте изображение предмета в рассеивающей линзе. Докажите, что формула тонкой линзы применима и в этом случае, если считать $f < 0$ и $F < 0$.

19.12*.

На собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 20$ см падает сходящийся пучок лучей (см. рисунок). Расстояние a от оптического центра линзы до точки A равно 30 см. На каком расстоянии f от линзы возникает изображение A_1 ? Действительное или мнимое это изображение?



К задаче 19.12



К задаче 19.13

19.13*.

Решите предыдущую задачу, если линза является рассеивающей с фокусным расстоянием $F = -20$ см (см. рисунок).

19.14.

Рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F = -10$ см дает мнимое изображение предмета, уменьшенное в 2 раза. На каком расстоянии d от линзы находится предмет? Постройте ход лучей и изображение.

19.15*.

Определите оптическую силу D рассеивающей линзы, если она дает изображение предмета на расстоянии $l = 6,0$ см от самого предмета. Высота предмета $h = 8,0$ см, высота изображения $H = 4,0$ см.

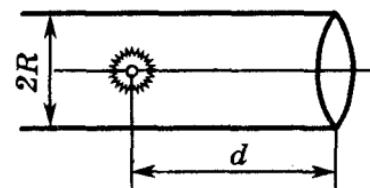
19.16*.

Фокусное расстояние собирающей линзы $F = 50$ мм. Точечный источник света находится на расстоянии $d = 60$ мм от линзы на

ее главной оптической оси MN . Линзу разрезали по диаметру на две равные части, которые раздвинули на расстояние $s = 10$ мм симметрично относительно оси MN . Определите расстояние H между двумя изображениями источника света.

19.17*.

Самодельный осветитель представляет собой цилиндрическую трубку радиуса $R = 10$ мм с черной внутренней поверхностью. В трубку (см. рисунок) вставлена собирающая линза, а на оси трубы на расстоянии $d = 20$ см от линзы



находится точечный источник света. На экране, расположенному перпендикулярно оси трубы на расстоянии $a = 30$ см от линзы, осветитель дает круглое светлое пятно радиуса $r = 5,0$ мм. Определите фокусное расстояние F линзы.

19.18*.

Экран помещают перед осветителем (см. задачу 19.17) на таком расстоянии, что на экране получается четкое изображение точечного источника света. Фокусное расстояние линзы $F = 15$ см. Каков будет радиус r светлого круга на экране, если вынуть из трубы линзу?

19.19.

Какое фокусное расстояние F должен иметь объектив: а) для получения уменьшенной фотокопии текста в масштабе $1 : 10$ (фотографирование производится с расстояния $d = 1$ м); б) для получения снимков местности в масштабе $1 : 5000$ при топографической съемке с самолета, летящего на высоте $h = 1$ км?

19.20.

Фотограф находится на расстоянии $d = 10$ м от дороги. Он фотографирует проезжающий со скоростью $v = 54$ км/ч автомобиль, когда тот находится в ближайшей точке дороги. Размытость контуров изображения на пленке не должна превышать величины $a = 50$ мкм. Каково должно быть время экспозиции Δt ? Фокусное расстояние объектива $F = 40$ мм.

19.21*.

Со спутника, летящего на высоте $H = 150$ км, фотографируют ночной город. Разрешающая способность пленки (наименьшее расстояние между изображениями двух точек, когда изображения не сливаются), равна $\Delta l = 0,01$ мм. Фокусное расстояние объектива $F = 10$ см. Каким должно быть расстояние L между уличными фонарями, чтобы их изображения на снимке получились раздельными? Оцените время t экспозиции, при котором движение спутника не приводит к заметному размыванию изображения.

19.22*.

При съемке с расстояния $d_1 = 4,25$ м изображение предмета имеет высоту $H_1 = 2,7$ мм; при съемке с расстояния $d_2 = 1,0$ м — высоту $H_2 = 12$ мм. Определите фокусное расстояние F объектива.

19.23*.

Объектив с фокусным расстоянием $F = 50$ мм дает на пленке изображения точек, расположенныхных на расстоянии $d_0 = 2,0$ м от объектива. Будем считать изображение на пленке достаточно резким, если его размытость (размер «изображения» каждой точки предмета) не превышает $a = 0,10$ мм. При каком расстоянии d предмета от фотоаппарата на пленке получается достаточно резкое изображение предмета? Диаметр объектива $D = 30$ мм.

19.24*.

Каким должно быть фокусное расстояние F объектива (см. задачу 19.23), чтобы изображение оставалось достаточно резким при $d \rightarrow \infty$?

19.25*.

Краб ползет по дну на глубине $H_1 = 2,0$ м. Его фотографируют сверху. Объектив с фокусным расстоянием $F = 50$ мм находится на высоте $H_2 = 1,0$ м над поверхностью воды. Какое расстояние d должно быть установлено на шкале дальности объектива? Какова длина L изображения клешни, если длина самой клешни $l = 10$ см?

19.26.

Лампа находится на расстоянии $l = 90$ см от стены. На каком расстоянии f от стены следует разместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 20$ см, чтобы получить на стене четкое изображение нити накала лампы? Главная оптическая ось линзы должна быть перпендикулярна стене.

19.27.

Собирающая линза дает на экране четкое изображение предмета. Высота предмета h , высота изображения $h_1 > h$. Линзу передвигают ближе к экрану и опять получают на экране четкое изображение. Какова его высота h_2 ?

19.28*.

Предмет находится на расстоянии $l = 45$ см от экрана. С помощью линзы получают на экране уменьшенное изображение предмета. Перемещая линзу, получают на экране другое изображение, в $n = 4$ раза больше первого. Каково фокусное расстояние F линзы?

19.29.

Свеча находится на расстоянии $l = 2,5$ м от экрана. Собирающая линза дает на экране четкое изображение свечи при двух положениях, находящихся на расстоянии $a = 50$ см друг от друга. Определите оптическую силу D линзы.

19.30*.

Расстояние между двумя точечными источниками света $l = 32$ см. Где следует поместить между ними собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 12$ см, чтобы изображения обоих источников оказались в одной точке?

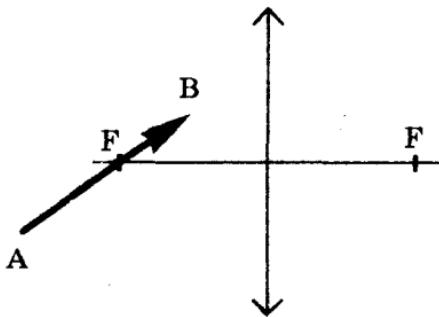
19.31.**

Постройте изображение наклонной стрелки AB (см. рисунок), проходящей через фокус собирающей линзы.

19.32*.

Середина стержня, имеющего длину $l = 10$ мм, находится на расстоянии $d = 18$ см от собирающей

линзы на ее главной оптической оси. Определите длину L изображения стержня в двух случаях: а) стержень расположен параллельно плоскости линзы; б) стержень расположен вдоль главной оптической оси линзы. Фокусное расстояние линзы $F = 12$ см.

**Оптические системы****19.33*.**

Систему линз называют телескопической, если падающие на нее параллельные лучи выходят из системы, по-прежнему оставаясь параллельными. Как надо расположить две линзы, чтобы они образовали телескопическую систему?

19.34*.

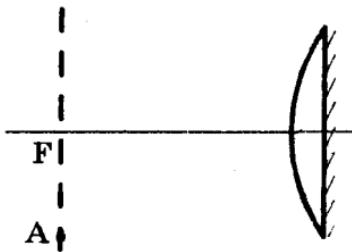
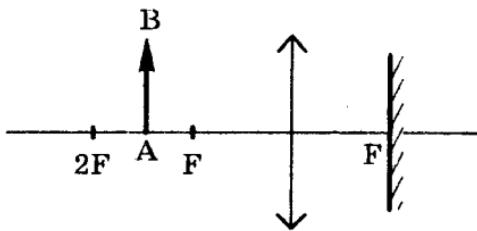
Две тонкие линзы с оптическими силами D_1 и D_2 имеют общую главную оптическую ось и расположены вплотную друг к другу. Докажите, что их можно заменить одной линзой с оптической силой $D = D_1 + D_2$.

19.35*.

За собирающей линзой с фокусным расстоянием $F = 30$ см расположено на расстоянии $a = 15$ см плоское зеркало, перпендикулярное главной оптической оси линзы. Где находится изображение предмета, расположенного перед линзой на расстоянии $d = 15$ см? Каким будет это изображение — действительным или мнимым?

19.36*.

Плоскую поверхность плосковыпуклой линзы (см. рисунок) с фокусным расстоянием F посеребрили. Где получится изображение A_1 точечного источника A , расположенного в фокальной плоскости линзы?

*К задаче 19.36**К задаче 19.37***19.37*.**

Постройте ход лучей и определите положение изображения предмета AB (см. рисунок) в оптической системе, состоящей из собирающей линзы и плоского зеркала.

19.38*.

Точечный источник света расположен на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии $1,5 F$ от нее. На каком расстоянии нужно разместить за линзой перпендикулярное ее главной оптической оси плоское зеркало, чтобы отразившиеся от него и вторично прошедшие через линзу лучи образовали параллельный пучок?

19.39*.

Система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 30$ см и рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_2 = -15$ см. Линзы расположены на расстоянии $a = 30$ см друг от друга, их главные оптические оси совпадают. Где следует разместить точечный источник света, чтобы эта система давала пучок параллельных лучей?

19.40*.

Две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 12$ см и $F_2 = 15$ см расположены друг за другом на расстоянии $a = 36$ см. Предмет находится на расстоянии $d = 48$ см от первой линзы. На каком расстоянии f от второй линзы находится изображение предмета?

19.41*.

В трубку вставлены две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 80$ мм и $F_2 = 50$ мм. Главные оптические оси линз совпадают, расстояние между линзами $l = 16$ см. Предмет высотой

$h = 20$ мм помещен на расстоянии $d = 40$ см перед первой линзой. Где находится изображение? Какова его высота H ?

19.42*.

Объектив состоит из двух тонких линз: собирающей с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см и рассеивающей с фокусным расстоянием $F_2 = -10$ см. Расстояние между линзами $l = 15$ см. С помощью объектива получают на экране изображение Солнца. Какую одну линзу надо взять, чтобы получить изображение Солнца такого же размера?

19.43*.

Система состоит из двух линз (собирающей и рассеивающей) с одинаковыми по модулю фокусными расстояниями. Главные оптические оси линз совпадают. С помощью этой системы на экране получено изображение Солнца. Когда линзы поменяли местами, экран пришлось передвинуть на $s = 30$ см. Каково фокусное расстояние F собирающей линзы?

19.44*.

Объектив фотоаппарата состоит из двух линз. Рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F_1 = -50$ мм расположена на расстоянии $l = 45$ см от пленки. Где должна находиться собирающая линза с фокусным расстоянием $F_2 = 80$ мм, чтобы на пленке получались резкие изображения удаленных предметов?

Зрение. Оптические приборы

19.45.

Почему, ныряя с открытыми глазами, мы видим размытые очертания предметов? Почему маска для ныряния позволяет отчетливо видеть под водой?

19.46.

В известном романе английского писателя-фантаста Герберта Уэллса описаны приключения человека-невидимки. Если верить писателю, такой человек может безнаказанно совершать дерзкие преступления. В чем состоит главная физическая ошибка фантаста?

19.47*.

Близорукий человек читает без очков, держа книгу на расстоянии $d = 10$ см от глаз. Какова оптическая сила D необходимых ему очков для чтения¹⁾?

¹⁾ В этой и последующих задачах расстояние между линзой очков и глазом считать малым.

19.48.

Как изменится оптическая сила хрусталика глаза при переводе взгляда со страницы учебника на облака за окном?

19.49.

Человек с нормальным зрением надел очки с оптической силой $D = +3$ дптр. На каком расстоянии d можно расположить предмет, чтобы человек рассматривал его без ощутимого напряжения?

19.50.

Фотоаппарат дает достаточно четкие снимки предметов, расположенных не ближе $a = 1,0$ м от объектива. На каком расстоянии d от объектива может находиться фотографируемый предмет, если использовать насадочную линзу с оптической силой $D = 3,0$ дптр?

19.51*.

Ближний и дальний пределы аккомодации глаза близорукого человека $d_1 = 10$ см и $d_2 = 30$ см. Человек носит очки, в которых хорошо видит удаленные предметы. На каком наименьшем расстоянии a он может держать книгу, читая в этих очках?

19.52*.

Ближний и дальний пределы аккомодации глаза близорукого человека $d_1 = 8$ см и $d_2 = 17$ см. Каковы будут эти пределы d'_1 и d'_2 , если человек наденет очки с оптической силой $D = -4$ дптр?

19.53.**

Ближний и дальний пределы аккомодации глаза близорукого человека $d_1 = 9$ см и $d_2 = 14$ см. Какие очки потребуются этому человеку, чтобы он мог хорошо видеть все предметы на любом расстоянии, превышающем $a = 15$ см? Удастся ли обойтись одной парой очков?

19.54*.

Часто говорят, что лупа «приближает» к глазу рассматриваемый предмет. Правильно ли это утверждение? Как связано фокусное расстояние лупы с величиной, которую указывают на оправе (например, « $\times 4$ »)?

19.55.

Самодельный «мелкоскоп». Чтобы разглядеть очень мелкий предмет, можно поднести его близко к глазу и разглядывать через маленькое (диаметром 0,5 мм — 1 мм) отверстие в листе картона или черной бумаги. Объясните принцип действия такого простого оптического прибора.

19.56*.

Правильно ли утверждение: «телескоп дает увеличенные изображения удаленных звезд»?

19.57.**

Зрительная труба, объектив которой имеет фокусное расстояние $F = 30$ см, «настроена» для наблюдения Луны. В какую сторону и на сколько следует передвинуть окуляр, чтобы рассматривать предмет, находящийся на расстоянии $d = 10$ м от объектива?

19.58*.

Человек с нормальным зрением настраивает микроскоп так, чтобы глаз уставал как можно меньше. Определите увеличение Γ микроскопа, если фокусное расстояние его объектива $F_1 = 3,0$ мм, а окуляра $F_2 = 50$ мм. Рассматриваемый предмет находится на расстоянии $d = 3,1$ мм от объектива.

19.59.**

Фокусное расстояние объектива микроскопа $F_1 = 3,5$ мм, а увеличение микроскопа $\Gamma = 100$. Определите фокусное расстояние F_2 окуляра, если он расположен на расстоянии $l = 12,4$ см от объектива.

20. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

20.1.

Опыт Физо по определению скорости света состоял в следующем. Световой пучок проходил через узкую прорезь между зубцами врачающегося колеса, отражался от зеркала, расположенного на расстоянии $l = 8,7$ км от колеса, и возвращался, опять проходя между зубцами колеса. При какой минимальной частоте v вращения колеса отраженный свет исчезал? Количество зубцов на колесе $N = 720$.

20.2.

При отражении от крыши, покрытой листовым железом, свет сильно рассеивается, а радиоволны от той же крыши отражаются зеркально. Почему?

Свет и цвет. Дисперсия света

20.3.

Как будет выглядеть белая надпись на красном фоне, если осветить ее зеленым светом?

20.4.

Вода освещена красным светом с длиной волны $\lambda = 728$ нм. Какова длина волны λ' этого света в воде? Какой цвет увидит человек, открывший глаза под водой? Какой цвет зафиксирует положенная в воду цветная позитивная фотопленка?

20.5*.

Английский физик лорд Рэлей установил, что на мелких неоднородностях среды короткие волны рассеиваются значительно сильнее, чем длинные. Объясните, исходя из этого, голубой цвет неба.

20.6*.

Почему когда Солнце или Луна находятся низко над горизонтом, они приобретают красный оттенок?

20.7*.

Почему освещенный столб дыма на темном фоне кажется синеватым, а на фоне светлого неба — желтым или красноватым?

20.8.

Почему зимой в ясную погоду тени деревьев на снегу имеют голубоватый оттенок?

20.9*.

Правильно ли часто встречающееся утверждение: «смешивая красные, синие и зеленые лучи в разных пропорциях, можно получить любой цвет»?

20.10*.

Луч белого света падает под углом $\alpha = 30^\circ$ на призму с преломляющим углом $\phi = 45^\circ$. Показатель преломления стекла призмы для красного света $n_k = 1,62$, а для фиолетового $n_f = 1,67$. На каком расстоянии L от призмы следует разместить экран шириной $s = 10$ см, чтобы получить на нем изображение всего видимого спектра?

Интерференция света**20.11*.**

Две когерентные световые волны в результате интерференции взаимно погашаются в некоторой области. Куда девается их энергия?

20.12.**

Лучи белого света падают под углом $\alpha = 60^\circ$ на очень тонкую прозрачную пластинку. При этом пластинка в отраженном свете кажется зеленою. Как изменится цвет пластиинки при небольшом уменьшении угла падения лучей? При его увеличении?

20.13*.

Цвета тонких пленок (например, пленки бензина на воде) заметно отличаются оттенками от цветов радуги. Почему?

20.14*.

Когда монохроматический свет падает нормально на поверхность мыльной пленки, интенсивность отраженного света зависит от длины волны: она имеет максимум при $\lambda_1 = 630$ нм и ближайший

к нему минимум при $\lambda_2 = 525$ нм. Какова толщина пленки d ?

Показатель преломления пленки $n = 1,33$.

20.15.**

Почему интерференционная окраска наблюдается только у достаточно тонких пленок?

20.16*.

Два когерентных источника монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм находятся на расстоянии $A_1A_2 = 1,0$ мм друг от друга и на одинаковом расстоянии $L = 3,0$ м от экрана (см. рисунок). Каково расстояние x между ближайшими максимумами освещенности (серединами светлых полос) на экране? Будет ли наблюдаться в точке O максимум освещенности?

20.17*.

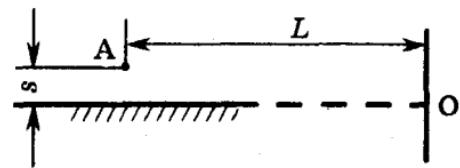
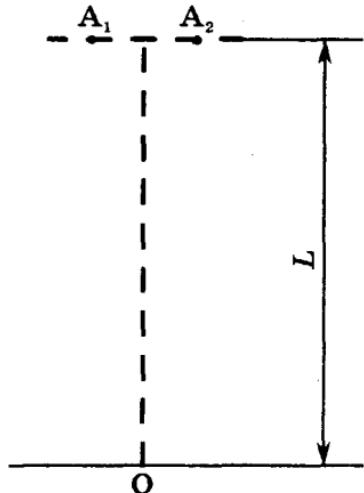
Точечный источник монохроматического света находится на расстоянии $s = 1,0$ мм от большого плоского зеркала и на расстоянии $L = 4,0$ м от экрана, перпендикулярного зеркалу (см. рисунок). Каково расстояние x между соседними максимумами освещенности? Длина волны света $\lambda = 600$ нм.

20.18*.

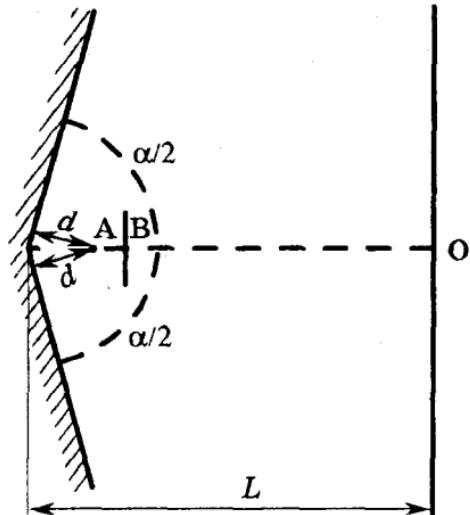
Два плоских зеркала образуют двугранный угол $\alpha = 179,5^\circ$ (см. рисунок). На одинаковых расстояниях $d = 10$ см от каждого из зеркал расположен точечный источник A монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определите расстояние x между серединами соседних светлых интерференционных полос на экране, расположенному на расстоянии $L = 3,0$ м от линии пересечения зеркал. Ширма B не позволяет попадать на экран свету непосредственно от источника A .

20.19*.

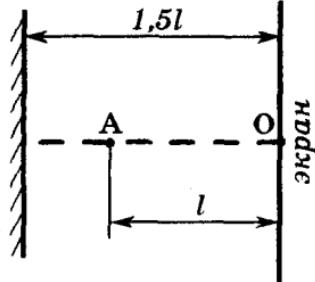
Точечный источник A монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм расположен на расстоянии $l = 50$ см от экрана. На расстоянии $1,5 l$ от экрана находится параллельное ему плоское



зеркало. Какой вид имеет интерференционная картина на экране? Темная или светлая интерференционная полоса проходит на расстоянии $r = 2,0$ мм от точки О (см. рисунок)?



К задаче 20.18



К задаче 20.19

20.20*.

Чтобы уменьшить коэффициент отражения света от поверхности стекла, на нее наносят тонкую прозрачную пленку с показателем преломления n_p меньшим, чем у стекла (так называемое «просветление оптики»). Считая $n_p = \sqrt{n}$, где n — показатель преломления стекла, определите необходимую толщину пленки h . Длина волны света $\lambda = 500$ нм, свет падает на поверхность нормально.

20.21*.

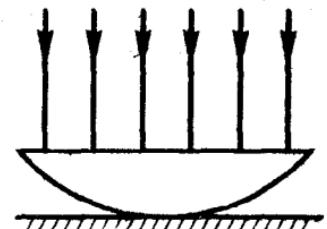
На поверхность объектива нанесена «просветляющая» пленка толщиной $h = 300$ нм (см. задачу 20.20). На объектив падает нормально пучок белого света. Какой оттенок будет иметь свет, прошедший через объектив? Отразившийся от объектива?

20.22.**

Собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 10$ см разрезана пополам по диаметру, и половинки раздвинуты на расстояние $h = 0,50$ мм. Перед линзой на расстоянии $d = 15$ см находится точечный источник монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Оцените число N светлых интерференционных полос на экране, расположеннном за линзой на расстоянии $L = 60$ см. Промежуток между половинками линзы закрыт непрозрачным экраном.

20.23.**

«Кольца Ньютона». Плоско-выпуклая линза с большим радиусом кривизны выпуклой стороны ($R = 1$ м) лежит на плоской стеклянной пластине (см. рисунок). Систему освещают сверху монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм. При наблюдении сверху (в отраженном свете) видно круглое темное пятно, окруженное концентрическими светлыми и темными кольцами. Объясните явление. Определите радиус r_3 третьего темного кольца.

**Дифракция света****20.24.**

На дифракционную решетку с периодом $d = 14$ мкм падает нормально монохроматическая световая волна. На экране, удаленном от решетки на $L = 2,0$ м, расстояние между спектрами второго и третьего порядка $s = 8,7$ см. Какова длина волны λ падающего света?

20.25.

Монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 520$ нм падает нормально на дифракционную решетку, имеющую 500 штрихов на миллиметр. Определите наибольший порядок наблюдаемого спектра k_{\max} .

20.26.

Почему при получении дисперсионного спектра с помощью прizмы наименьшее отклонение испытывают красные лучи, а в дифракционном спектре — фиолетовые лучи?

20.27*.

На дифракционную решетку с периодом $d = 2,0$ мкм падает нормально свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. За решеткой расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 50$ см. Где нужно разместить экран, чтобы получить на нем четкий дифракционный спектр? Каково расстояние s на экране между спектром третьего порядка и центральным максимумом?

20.28*.

Как изменится вид дифракционного спектра, если источник белого света, дифракционную решетку и экран переместить из воздуха в воду, не меняя расстояний между ними? Рассмотрите также случай, когда для получения дифракционного спектра используется стоящая за дифракционной решеткой собирающая линза.

20.29*.

На дифракционную решетку с периодом $d = 4,0$ мкм падает нормально свет, пропущенный через светофильтр. Полоса пропускания светофильтра — от $\lambda_1 = 500$ нм до $\lambda_2 = 550$ нм. Будут ли спектры разных порядков перекрываться друг с другом?

20.30*.

Свет с длиной волны λ падает наклонно на дифракционную решетку с периодом d . Угол падения равен α . Выведите формулу, определяющую значения угла ϕ между дифракционными максимумами и нормалью к плоскости дифракционной решетки.

Релятивистское «сокращение длины» $l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$

Релятивистское «замедление времени» $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Релятивистский закон сложения скоростей $v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2}$

Релятивистский импульс $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Основной закон релятивистской динамики $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$

Энергия релятивистской частицы $E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Квант энергии электромагнитного излучения $E = h\nu$

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта $h\nu = \frac{mv_{max}^2}{2} + A$

Де-бройлевская длина волны $\lambda = \frac{h}{p}$

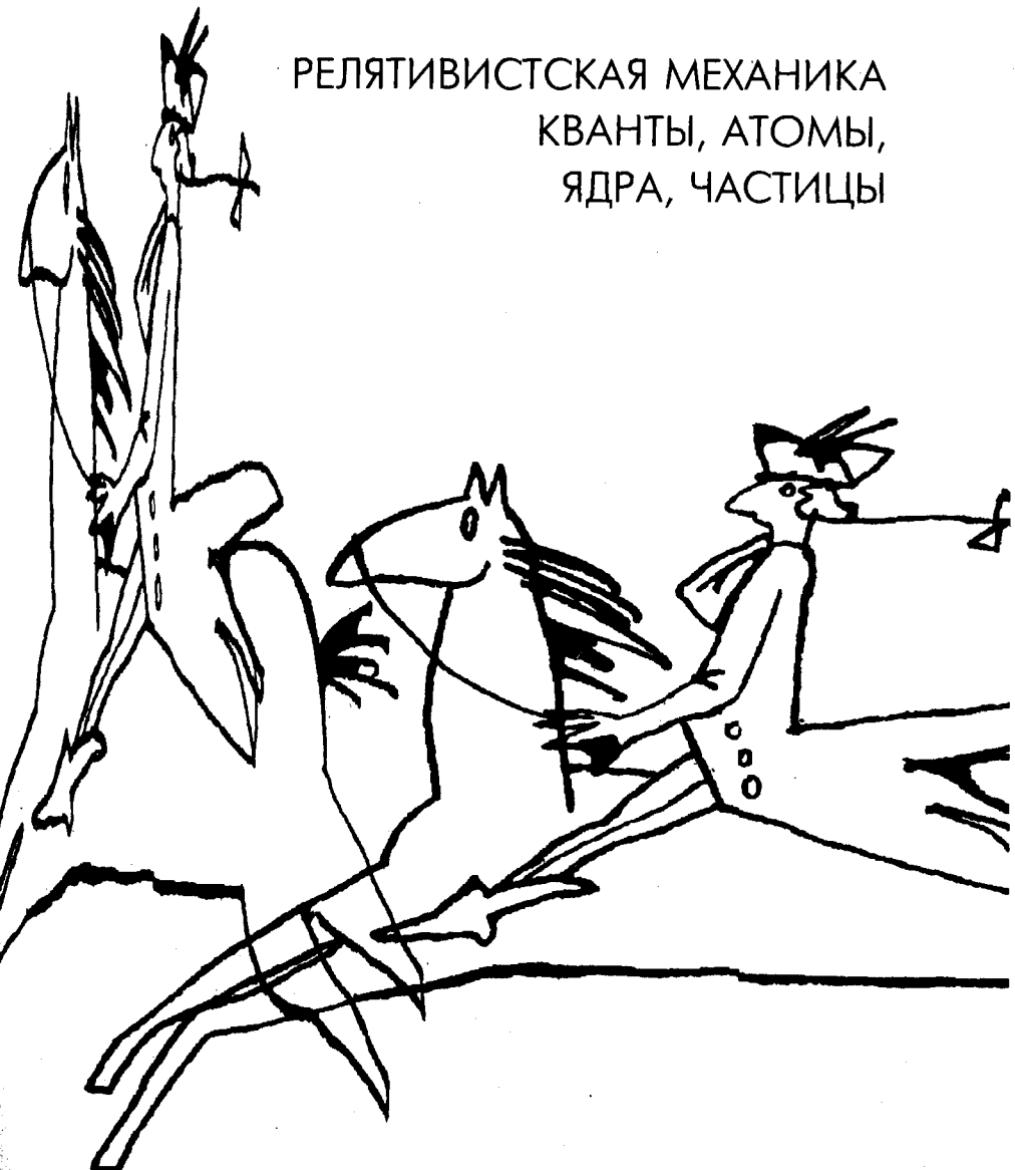
Дефект масс ядра $\Delta m = Zm_p + Nm_n - M_a$

Энергия связи ядра $E_{cs} = \Delta m c^2$

Закон радиоактивного распада $N = N_0 \cdot 2^{-t/\tau}$

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И АТОМНАЯ ФИЗИКА

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА
КВАНТЫ, АТОМЫ,
ЯДРА, ЧАСТИЦЫ



21. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

21.1.

При какой скорости v движения тела релятивистское сокращение длины тела составляло бы 1% ? 50% ?

21.2.

Среднее время жизни мюона (неустойчивой элементарной частицы) согласно справочнику $\tau_0 = 2,2 \text{ мкс}$. Пучок мюонов движется со скоростью $v = 0,95c$. Какова средняя длина l их пробега в отсутствие столкновений?

21.3*.

Космическая ракета удаляется от наблюдателя со скоростью $v = 0,80 c$. На ракете установлена пушка, которая может сообщать снаряду скорость u относительно ракеты. а) Какую скорость V относительно наблюдателя имеет снаряд, выпущенный вперед со скоростью $u = v$? б) При какой величине u спаряд, выпущенный назад, будет приближаться к наблюдателю со скоростью $V = v$?

21.4*.

Релятивистская частица распадается на два одинаковых «осколка». Скорость одного из них равна нулю. Определите скорость v частицы до распада и скорость v_2 второго «осколка». Известно, что при распаде неподвижной частицы оба «осколка» имеют скорость u .

21.5*.

Одна из двух одинаковых частиц неподвижна, другая движется с релятивистской скоростью v . Пользуясь релятивистской формулой сложения скоростей, определите скорость u центра масс частиц.

21.6*.

В системе отсчета K расстояние между точками, в которых произошли два события, равно l , а промежуток времени между этими событиями равен τ . Обозначим $S = c^2\tau^2 - l^2$. В системе отсчета K' соответствующая величина $S' = c^2\tau'^2 - l'^2$. Исходя из постулатов теории относительности, докажите, что величины S и S' всегда имеют одинаковый знак и могут обращаться в нуль только одновременно.

21.7*.

Как известно, одновременность событий относительна. Существует ли такая система отсчета K' , в которой попадание мяча в окно происходит одновременно с ударом по этому мячу?

21.8**.

Атомы водорода могут излучать характерные радиоволны с дли-

ной волны $\lambda_0 = 21$ см (в системе отсчета, связанной с излучающим атомом). Какую длину волны λ имеет принимаемое на Земле излучение, если атомы водорода движутся со скоростью $v = 0,60$ с перпендикулярно направлению на Землю?

21.9*.

Космический корабль летит со скоростью $v = 0,60$ с относительно Земли. В кабине корабля растет стебель лука со скоростью $u_0 = 5,0$ см/сут. Какова скорость u роста стебля с точки зрения земного наблюдателя? Стебель расположен под прямым углом к направлению движения корабля.

21.10.

Лазер установлен на космической станции, вращающейся вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Лазер дает световой пучок, перпендикулярный оси вращения. Светлое пятно от этого пучка перемещается по экрану, установленному нормально к пучку света на расстоянии l от космической станции, со скоростью $v = \omega l$. При $l > c/\omega$ скорость движения светлого пятна на экране превысит скорость света. Не противоречит ли это постулатам теории относительности?

21.11.**

Тело с массой покоя m движется прямолинейно с ускорением a . Какая сила F действует на него в момент, когда скорость тела равна v ?

21.12*.

Электрон разгоняется в однородном электрическом поле с напряженностью E до релятивистской скорости. Запишите формулу зависимости скорости v электрона от времени и постройте график этой зависимости. Через какое время τ скорость v достигнет половины скорости света? Начальную скорость электрона считайте равной нулю.

21.13.**

Какое расстояние s должен пройти электрон (см. задачу 21.12), чтобы приобрести скорость v ? Запишите формулу зависимости $s(t)$.

21.14.

Тело с массой покоя m движется криволинейно с постоянной по величине скоростью v . Какая сила F действует на него в тот момент, когда ускорение тела равно a ?

21.15*.

Как зависит период T обращения релятивистского протона в циклотроне от скорости протона v ? Величина индукции магнитного поля равна B .

21.16.

Выразите полную энергию W релятивистской частицы и ее кинетическую энергию W_k через массу покоя m и импульс p .

21.17*.

На сколько меньше скорости света должна быть скорость электрона, чтобы его энергия была равна энергии покоя протона?

21.18.

Масса покоящегося поезда $m = 3000$ т. На какую величину Δm увеличивается масса поезда при движении со скоростью $v = 72$ км/ч?

21.19.

На сколько уменьшается масса $m = 10$ кг воды при замерзании?

21.20.

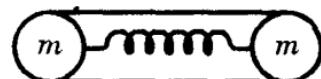
При какой скорости v движения частицы ее кинетическая энергия равна энергии покоя?

21.21*.

Какую скорость v_p приобретет протон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 700$ кВ? Какую скорость v_e приобретет электрон, пройдя такую же разность потенциалов? Начальная скорость частиц равна нулю.

21.22.**

На концах трубки со сжатой пружиной удерживаются нитью одинаковые шарики с массой m (см. рисунок). При разрыве нити шарики разлетаются со скоростью u . Определите скорости v_1 и v_2 разлетающихся шариков, если в момент «выстрела» трубка поступательно движется в направлении своей оси со скоростью $v > u$. Определите также суммарный импульс p разлетающихся шариков. Не противоречит ли полученный результат закону сохранения импульса? Скорости v , u считать релятивистскими.

**21.23*.**

Масса покоя каждого из «осколков» (см. задачу 21.4) равна m . Какова была масса покоя M частицы? Определите импульс p_1 частицы до распада и суммарный импульс p_2 «осколков». Согласуется ли полученный результат с законом сохранения импульса?

21.24*.

Релятивистская частица распадается на два одинаковых «осколка», каждый из которых имеет массу покоя m . Один из «осколков» неподвижен относительно лабораторной системы отсчета, а другой движется со скоростью $v = 0,80$ с. Какую скорость u и массу покоя M имела частица до распада?

21.25.**

Какую энергию W нужно сообщить протону, чтобы при бомбардировке неподвижных водородных мишеней стали возможны те же процессы, что и в случае столкновения двух протонов, движущихся навстречу друг другу с энергией $W_1 = 70$ ГэВ каждый?

21.26.**

До какой энергии W потребуется разогнать встречные электроны, чтобы при их столкновении могли происходить те же процессы, что при электрон-электронных столкновениях в «обычном» ускорителе, где пучок электронов с энергией $W_1 = 150$ ГэВ падает на неподвижную мишень?

22. КВАНТЫ, АТОМЫ, ЯДРА, ЧАСТИЦЫ**22.1.**

Гелий-неоновый лазер работает в непрерывном режиме, развивая мощность $P = 2,0$ мВт. Излучение лазера имеет длину волны $\lambda = 630$ нм. Сколько фотонов излучает лазер за одну секунду?

22.2.

Энергия каждого фотона в пучке монохроматического излучения $W_0 = 4,4 \cdot 10^{-19}$ Дж. Какова длина волны λ этого излучения в воде?

22.3.

Под каким напряжением U работает рентгеновская трубка, если самое «жесткое» излучение в спектре этой трубки имеет длину волны $\lambda_{\min} = 3,0 \cdot 10^{-11}$ м?

22.4.

Для калия красная граница фотоэффекта $\lambda_{\max} = 0,62$ мкм. Какую максимальную скорость v могут иметь фотоэлектроны, вылетающие при облучении калия фиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 0,42$ мкм?

22.5.

Минимальная частота света, вырывающего электроны с поверхности металлического катода, $v_0 = 6,0 \cdot 10^{14}$ Гц. При какой частоте v света вылетевшие электроны полностью задерживаются разностью потенциалов $U = 3,0$ В?

22.6.

При освещении поверхности некоторого металла фиолетовым светом с длиной волны $\lambda_1 = 0,40$ мкм выбитые светом электроны полностью задерживаются разностью потенциалов (запирающим напряжением) $U_1 = 2,0$ В. Чему равно запирающее напряжение U_2 при освещении того же металла красным светом с длиной волны $\lambda_2 = 0,77$ мкм?

22.7*.

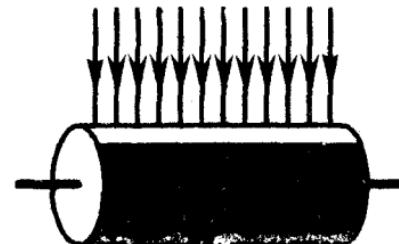
На поверхность падает нормально электромагнитное излучение с интенсивностью I . Определите давление p излучения на поверхность в двух случаях: когда поверхность черная (абсолютно поглощающая) и когда она зеркальная.

22.8*.

Свет падает на зеркальную поверхность. Определите давление p света на эту поверхность, если интенсивность излучения равна I , а угол падения α .

22.9*.

Находящийся в вакууме легкий цилиндр может с малым трением вращаться вокруг своей оси (см. рисунок). Половина поверхности цилиндра окрашена в черный цвет, другая половина — зеркальная. Как повернется цилиндр под действием солнечного излучения, если солнечные лучи направлены перпендикулярно оси цилиндра?

**22.10.**

Определите длину волны λ электромагнитного излучения, если энергия одного кванта этого излучения равна энергии покоя электрона. С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы его импульс сравнялся с импульсом такого фотона? Определите отношение энергии W движущегося электрона к энергии W_0 фотона.

22.11.

Может ли один гамма-квант в вакууме превратиться в пару электрон-позитрон?

22.12.

При какой частоте v излучение способно при взаимодействии с веществом вызвать рождение пары электрон-позитрон?

22.13*.

Может ли свободный электрон поглотить фотон?

22.14.**

Рентгеновское излучение с длиной волны λ , взаимодействуя с веществом, отклоняется от первоначального направления распространения на угол Θ . При этом длина волны рассеянного излучения увеличивается на $\Delta\lambda$ (эффект Комptonа). Выразите величину $\Delta\lambda$ через угол Θ , рассматривая рассеяние как результат столкновений

рентгеновских фотонов с неподвижными свободными электронами. Учтите, что при этом взаимодействии электроны приобретают релятивистские скорости.

22.15.**

Длина волны рентгеновского излучения после комптоновского рассеяния (см. задачу 22.14) увеличилась с $\lambda_1 = 2,0$ пм до $\lambda_2 = 2,4$ пм. Определите кинетическую энергию W_k вылетающих электронов (выразите ее в МэВ) и их скорость v . Определите также угол рассеяния Θ рентгеновского излучения и угол α между направлением вылета электронов и направлением падающего излучения.

22.16.**

Биметаллическая пластина изготовлена из двух тщательно отполированных плоских пластин: серебряной и литиевой. Пластина размещена в вакууме, и на поверхность серебра падает нормально пучок монохроматического фиолетового света с длиной волны $\lambda = 0,40$ мкм. Пластины развернули на 180° . Во сколько раз изменится действующая на нее сила? Считайте, что фотоэффект вызывается одним из 100 падающих на поверхность лития фотонов и что фотоэлектроны вылетают нормально к поверхности с максимально возможной скоростью.

22.17.

Движущаяся частица распадается на два фотона, которые летят в противоположных направлениях. Определите скорость v распавшегося мезона, если энергии фотонов равны W_1 и W_2 .

22.18*.

Нейтральная частица распалась на два фотона, летящие под углами Θ_1 и Θ_2 к направлению движения частицы. Определите скорость v распавшейся частицы.

22.19*.

Нейтральная частица, движущаяся со скоростью v , распадается на два фотона. Определите минимальный угол Θ_{\min} разлета этих фотонов.

22.20*.

Покоящийся π -мезон распадается на мюон и нейтрино. Определите скорость v образовавшегося мюона. Считайте, что нейтрино имеет нулевую массу покоя. Масса покоя π -мезона $m_1 = 273 m_e$, а масса покоя мюона $m_2 = 207 m_e$, где m_e — масса покоя электрона.

22.21.

Определите де-бройлевскую длину волны λ_1 протона, прошедшего разность потенциалов $U = 3,0$ МВ; де-бройлевскую длину волны λ_2 электрона, прошедшего ту же разность потенциалов.

22.22.

Пучок электронов, пройдя через узкую щель, дал на фотопластинке такую же дифракционную картину, как монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Чему равна скорость v электронов?

22.23.

Рассматривая электрон как классическую частицу, движущуюся в атоме водорода по круговой орбите вокруг неподвижного протона, выразите скорость v электрона и его механическую энергию W через радиус r орбиты.

22.24.

Пользуясь полученными в задаче 22.23 результатами, определите радиус r орбиты электрона, при котором де-бройлевская длина волны электрона совпадает с длиной его траектории. Какую энергию W_i необходимо сообщить электрону в этом состоянии, чтобы ионизировать атом? Величину W_i выразите в электронвольтах.

22.25.

Чему равен период T полураспада изотопа, если за сутки распадается в среднем 750 атомов из 1000? 900 атомов из 1000? 1 атом из 1000?

22.26.

Период полураспада радиоактивного йода-131 равен восьми суткам. За какое время t количество атомов йода-131 уменьшится в 1000 раз?

22.27.**

В образцах урановой руды всегда содержится некоторое количество атомов тория-234, образовавшихся в результате α -распада урана-238 (период полураспада $T_U = 4,5 \cdot 10^9$ лет). Торий также радиоактивен (период полураспада $T_{Th} = 24$ сут). Сколько атомов тория содержится в образце урановой руды, в котором находится $m = 0,5$ г урана-238?

22.28.

Определите энергию связи E_{cb} и удельную энергию связи E_{cb}/A для ядер 7Li и ^{27}Al .

22.29.

Радиоактивный атом $^{232}_{90}Th$ превратился в атом $^{212}_{83}Bi$. Сколько при этом произошло α - и β -распадов?

22.30.

Какая энергия выделяется при реакции синтеза между дейтерием и тритием? Реакция сопровождается вылетом одного нейтрона.

22.31.

Какую массу m , воды, взятой при $0^\circ C$, можно вскипятить, используя

зая энергию термоядерного синтеза гелия из дейтерия и трития (см. задачу 22.30), если КПД преобразования энергии равен 10%? Масса гелия $m = 1$ г.

22.32.

При бомбардировке с помощью α -частиц бора $^{11}_5\text{B}$ наблюдается вылет нейтронов. Напишите уравнение ядерной реакции, приводящей к вылету одного нейтрона. Определите ее энергетический выход W .

22.33.

При бомбардировке нейtronами изотопа бора $^{10}_5\text{B}$ образуются α -частицы. Напишите уравнение этой ядерной реакции и определите ее энергетический выход W .

22.34.

Найдите минимальную энергию W и частоту v гамма-кванта, способного «разбить» ядро дейтерия на протон и нейтрон.

22.35**.

Найдите минимальную кинетическую энергию W_k протона, способного «разбить» ядро дейтерия на протон и нейтрон.

22.36**.

Какую минимальную кинетическую энергию W_0 должна иметь α -частица для осуществления ядерной реакции $^{7}\text{Li} + ^4\text{He} \rightarrow ^{10}_6\text{B} + ^1_0\text{n}$?

22.37**.

Ионы дейтерия (дейтроны), ускоренные до энергии $W_1 = 2,0$ МэВ, направляют на тритиевую мишень. В результате реакции синтеза (см. задачу 22.30) из мишени вылетают нейтроны. Определите кинетическую энергию W_2 нейтронов, вылетающих перпендикулярно пучку дейтронов.

22.38**.

Мишень из ^{3}Li подвергают бомбардировке нейtronами. В направлении движения нейтронов вылетают α -частицы с кинетической энергией $W_\alpha = 3,0$ МэВ. Какова кинетическая энергия W_n нейтронов?

22.39*.

Ядро ^{7}Li , захватывая протон с кинетической энергией $W_1 = 5,0$ МэВ, распадается на две α -частицы с одинаковыми энергиями. Определите кинетическую энергию W_2 каждой из α -частиц и угол Θ разлета α -частиц.

22.40.

Атомная электростанция мощностью $P = 1000$ МВт имеет КПД 20%. Определите массу m расходуемого за сутки урана-235. Считайте, что при каждом делении ядра урана выделяется энергия $W_0 = 200$ МэВ.

22.41.

Сколько железнодорожных вагонов массой $M = 60$ т каждый можно было бы поднять на высоту $h = 1$ км за счет энергии, вырабатываемой АЭС (см. задачу 22.40) за сутки? На какую величину Δt уменьшается при этом масса ядерного горючего?

22.42*.

Препарат $^{210}_{84}\text{Po}$ массой $m = 1,0$ мг помещен в калориметр с теплоемкостью $C = 8,0$ Дж/К. В результате α -распада полоний превращается в свинец $^{206}_{82}\text{Pb}$. На сколько поднимется температура в калориметре за время $t = 1$ ч? Масса атома $^{210}_{84}\text{Po}$ равна 209,98287 а. е. м., масса атома $^{206}_{82}\text{Pb}$ равна 205,97447 а. е. м. Период полураспада полония $T = 138$ сут.

ТЕСТЫ



ТЕСТЫ

С помощью предлагаемых ниже тестов вы сможете сами определить уровень своей подготовки.

Выполняя тесты, можно набрать до 90 баллов. Мы заранее поздравляем тех, кому удастся набрать не менее трех четвертей этого количества: такой уровень соответствует, на наш взгляд, оценке «отлично». Тот, кто не сможет достичь этого уровня, но наберет более половины (45 баллов), заслуживает оценки «хорошо». Например, такой оценки заслуживает тот, кто ответил на вопросы всех тестов первого и второго уровня и хотя бы нескольких тестов третьего уровня. Наконец, для того чтобы получить оценку «удовлетворительно», надо набрать не менее трети максимального количества баллов (для этого достаточно, например, выполнить все тесты первого уровня и половину тестов второго уровня).

Сравнивая полученные вами ответы с приведенными вариантами ответов (стр. 187), учтите, что мы часто приводим округленные значения. В частности, чтобы не усложнять расчетов, мы принимаем $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Предлагаемые тесты должны быть выполнены примерно за 6 часов. Если результат вас не удовлетворит, подумайте, к каким разделам курса физики вам стоит вернуться.

Желаем успеха!

Первый уровень

(каждое задание оценивается в 1 балл)

Т 1.1.

Материальная точка движется вдоль оси x . Координата точки задается формулой $x = 7 - 3t + t^2$. Какой вид имеет зависимость скорости точки от времени?

A. $v_x = -3t + t^2$.

B. $v_x = -3 + 2t$.

B. $v_x = 7 - 3t$.

Г. $v_x = -3 + t^2$.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 1.2.

Как изменится ускорение свободного падения при подъеме на высоту, равную диаметру Земли? Вращение Земли не учитывайте.

A. Уменьшится в 2 раза.

B. Уменьшится в 3 раза.

B. Уменьшится в 9 раз.

Г. Уменьшится в 4 раза.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 1.3.

Мяч массой 400 г плавает в воде, погрузившись в нее наполовину. Какая архимедова сила будет действовать на этот же мяч, если он будет плавать в керосине?

А. 2 Н.

Б. 3,2 Н.

В. 4 Н.

Г. 1,6 Н.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 1.4.

Определите ускорение, с которым движутся грузы (см. рисунок). Массы грузов $m = 500$ г и $M = 1,0$ кг. Трением в блоке, массой блока и нити можно пренебречь.

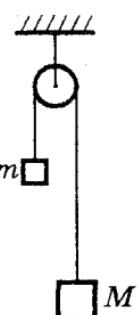
А. 10 м/с^2 .

Б. $6,7 \text{ м/с}^2$.

В. 5 м/с^2 .

Г. $3,3 \text{ м/с}^2$.

Д. Правильного ответа здесь нет.



Т 1.5.

Велосипедист массой 60 кг проезжает со скоростью 36 км/ч середину подвесного мостика. Мостик под велосипедистом прогнулся по дуге радиуса 20 м. Определите силу давления велосипедиста на мостик.

А. 1200 Н.

Б. 300 Н.

В. 4,5 кН.

Г. 600 Н.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 1.6.

Человек массой 80 кг бежит со скоростью 9 км/ч. Навстречу ему катится тележка массой 120 кг со скоростью 5 м/с. С какой скоростью будет двигаться тележка, если человек прыгнет в нее?

А. 6,6 м/с.

Б. 2 м/с.

В. 0,6 м/с.

Г. 4 м/с.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 1.7.

Какое количество теплоты необходимо, чтобы превратить 1 кг

льда, взятого при температуре -10°C , в воду с температурой 10°C ?

- А. 63 кДж.
- Б. 390 кДж.
- В. 42 кДж.
- Г. 370 кДж.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 1.8.

При изохорном нагревании на 6 K давление газа возросло на 2% . Какова была начальная температура газа?

- А. 200 К.
- Б. 250 К.
- В. 27°C .
- Г. 227°C .

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 1.9.

Тепловая машина получила от нагревателя количество теплоты, равное 500 кДж, и передала холодильнику количество теплоты, равное 300 кДж. Каков КПД тепловой машины?

- А. 40%.
- Б. 67%.
- В. 25%.
- Г. 60%.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 1.10.

Металлической сфере радиусом 10 см сообщили заряд 2 нКл . Чему равна напряженность электрического поля на расстоянии 5 см от центра сферы?

- А. 1,8 кВ/м.
- Б. 3,6 кВ/м.
- В. 0.
- Г. 7,2 кВ/м.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 1.11.

На лампочке написано: 12 В, 0,3 А. Ее включают в сеть с напряжением 36 В последовательно с резистором. При каком сопротивлении резистора лампочка будет гореть нормальным на-калом?

- А. 40 Ом.
- Б. 120 Ом.
- В. 60 Ом.
- Г. 80 Ом.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 1.12.

Электрон влетает в однородное магнитное поле, двигаясь параллельно линиям магнитной индукции. Как будет двигаться электрон?

А. Прямолинейно, с положительным ускорением, скорость увеличивается.

Б. Равномерно прямолинейно.

В. Прямолинейно, скорость уменьшается.

Г. По окружности.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 1.13.

В колебательном контуре радиоприемника индуктивность катушки 40 мкГн, а емкость конденсатора может изменяться от 25 до 300 пФ. На какую наименьшую длину волны можно настроить приемник?

А. 600 м.

Б. 300 м.

В. 180 м.

Г. 20 м.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 1.14.

Когда фотоны с энергией 4,0 эВ падают на поверхность металла, максимальная кинетическая энергия выбитых ими электронов равна 1,5 эВ. При какой минимальной энергии фотона возможен фотоэффект для этого металла?

А. 1,5 эВ.

Б. 2,5 эВ.

В. 4,0 эВ.

Г. 5,5 эВ.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 1.15.

Приadioактивном распаде ядра $^{238}_{92}\text{U}$ испускаются три α - и две β -частицы. Какое ядро образуется в результате распада?

А. $^{232}_{90}\text{Th}$.

Б. $^{226}_{88}\text{Ra}$.

В. $^{224}_{87}\text{Fr}$.

Г. $^{233}_{92}\text{U}$.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Второй уровень.

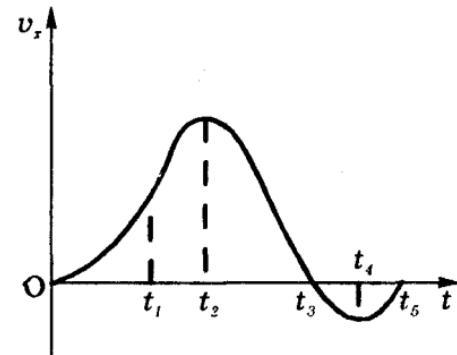
(каждое задание оценивается в 2 балла)

Т 2.1.

На рисунке приведен график скорости прямолинейного неравномерного движения. В какой момент времени тело имеет максимальное ускорение? Максимальную скорость? Максимальную координату?

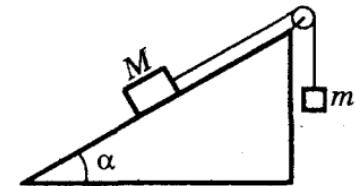
- A. t_1, t_2, t_3 .
- Б. t_3, t_2, t_1 .
- В. t_1, t_2, t_5 .
- Г. t_2, t_3, t_4 .

Д. Правильного ответа здесь нет.

**Т 2.2.**

Массы показанных на рисунке грузов $m = 1$ кг и $M = 2$ кг. Угол наклона плоскости $\alpha = 30^\circ$, коэффициент трения между плоскостью и находящимся на ней грузом $\mu = 0,1$. Какова сила натяжения нити?

- A. 10 Н.
 - Б. 3,3 Н.
 - В. 5 Н.
 - Г. 13 Н.
- Д. Правильного ответа здесь нет.

**Т 2.3.**

Для растяжения пружины на 1 см потребовалось совершить работу 0,2 Дж. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину еще на 1 см?

- А. 0,2 Дж.
- Б. 0,4 Дж.
- В. 0,6 Дж.
- Г. 0,8 Дж.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 2.4.

Как изменяется потенциальная энергия системы «шар-вода» при:
1) всплытии пробкового шара; 2) погружении стального шара?

- А. Уменьшается в обоих случаях.
- Б. Увеличивается в первом случае, уменьшается во втором.

В. Остается неизменной в обоих случаях.

Г. Увеличивается в обоих случаях.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 2.5.

По шннуру бежит вправо поперечная гармоническая волна (см. рисунок). Как направлены скорости точек шнуря *A*, *B*, *C*, *D*?

А. Скорости всех точек направлены вправо.

Б. Скорости точек *A* и *B* направлены вниз, скорости точек *C* и *D* — вверх.

В. Скорости точек *B* и *D* равны нулю, скорость точки *A* направлена вниз, скорость точки *C* — вверх.

Г. Скорости точек *A* и *C* равны нулю, скорость точки *B* направлена вверх, скорость точки *D* — вниз.

Д. Правильного ответа здесь нет.



Т 2.6.

Плотность газа при нормальных условиях (0°C , давление 101 кПа) равна 1,96 кг/м³. Какой это может быть газ?

А. Воздух.

Б. Углекислый газ.

В. Кислород.

Г. Гелий.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 2.7.

Как изменились бы абсолютная температура *T* и давление *p* газа в герметично закрытом баллоне, если скорость каждой молекулы увеличилась бы вдвое?

А. *T* и *p* увеличатся вдвое.

Б. *T* увеличится в два раза, *p* — в четыре.

В. *T* увеличится в четыре раза, *p* — в два.

Г. *T* и *p* увеличатся в четыре раза.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 2.8.

Какое расстояние проедет автомобиль массой 4 т, израсходовав 5 л бензина? КПД двигателя 30%, коэффициент сопротивления движению 0,05.

А. 34,5 км.

Б. 270 км.

В. 42 км.

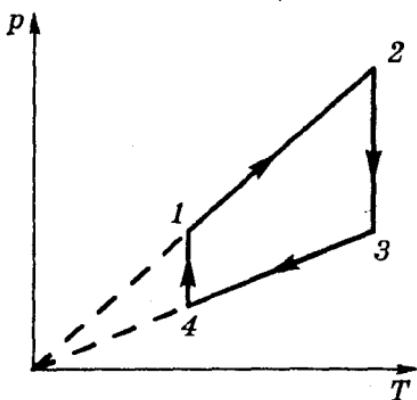
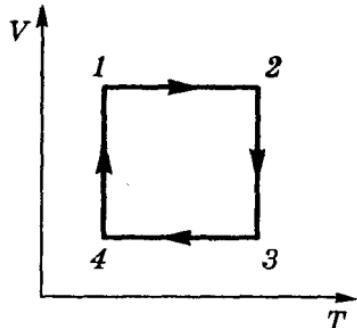
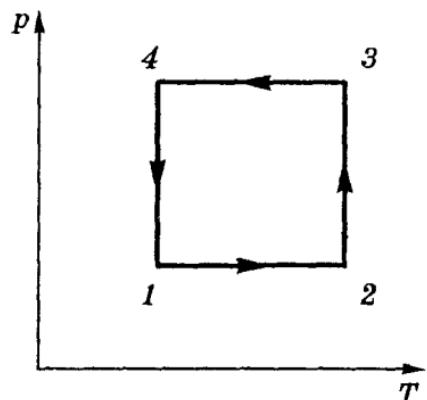
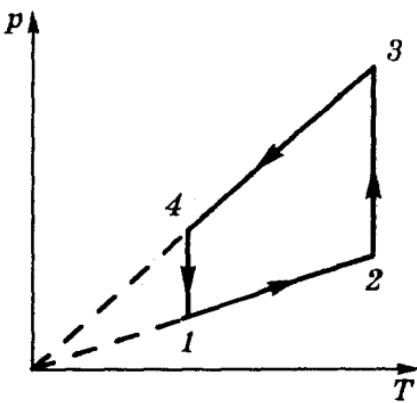
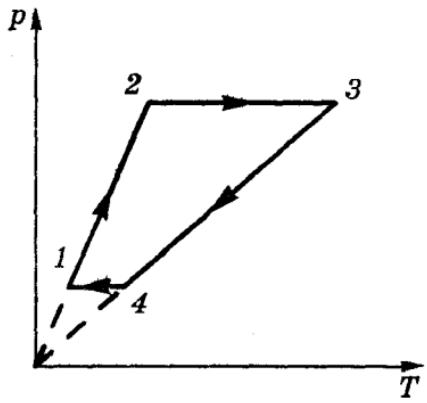
Г. 80 км.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 2.9.

Как выглядит график данного процесса (см. рисунок) в координатах p , T ?

- А. рис. *a*
- Б. рис. *b*
- В. рис. *в*
- Г. рис. *г*
- Д. Правильного ответа здесь нет.

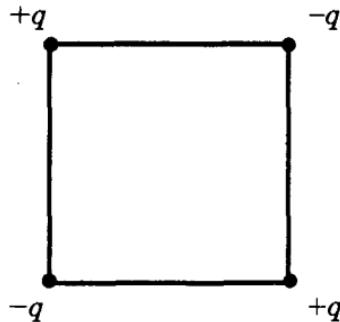
рис. *a*рис. *б*рис. *в*рис. *г***Т 2.10.**

Четыре заряда расположены в вершинах квадрата со стороной 10 см (см. рисунок). Какова равнодействующая приложенных к каждому из зарядов кулоновских сил, если $q = 5 \text{ нКл}$?

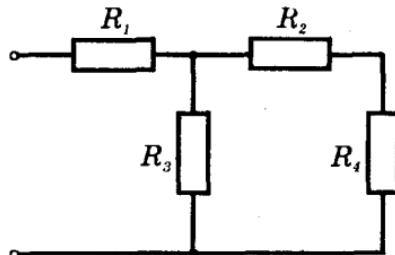
- А. 34 мкН.
- Б. 21 мкН.
- В. 43 мкН.

Г. 56 мкН.

Д. Правильного ответа здесь нет.



К тесту 2.10



К тесту 2.12

Т 2.11.

На одной лампе написано 120 В, 60 Вт; на другой 36 В, 40 Вт. Какую общую мощность будут потреблять эти лампы, если их соединить последовательно и подключить к сети с напряжением 36 В? Зависимостью сопротивления ламп от их накала пренебречь.

- A. 4,8 Вт.**
- Б. 100 Вт.**
- В. 24 Вт.**
- Г. 45 Вт.**

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 2.12.

К показанной на рисунке цепи приложено напряжение 30 В. Чему равна сила тока через резистор R_3 , если сопротивление каждого из резисторов 12 Ом?

- А. 0,5 А.**
- Б. 1 А.**
- В. 1,5 А.**
- Г. 2,5 А.**

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 2.13.

На экране с помощью собирающей линзы получено увеличенное в 2 раза изображение предмета. Оптическая сила линзы 5 дптр. Каково расстояние от предмета до экрана?

- А. 20 см.**
- Б. 40 см.**
- В. 60 см.**
- Г. 90 см.**

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 2.14.

Угол падения луча на поверхность плоскопараллельной пластинки равен 60° . Толщина пластинки 1,73 см, показатель преломления 1,73. На сколько смещается вышедший из пластинки луч?

- А. На 3 см.
- Б. На 1,2 см.
- В. На 1 см.
- Г. На 0,87 см.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 2.15.

Период полураспада радиоактивного изотопа равен 4 ч. Какая часть атомов распадется за 12 ч?

- А. $\frac{1}{8}$.
- Б. $\frac{1}{4}$.
- В. $\frac{3}{4}$.
- Г. $\frac{7}{8}$.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Третий уровень

(каждое задание оценивается в 3 балла)

Т 3.1.

Две звезды, имеющие одинаковые массы M , врачаются вокруг общего центра, находясь на постоянном расстоянии R друг от друга. Каков период их обращения?

- А. $\frac{R}{\sqrt{GM}}$.
- Б. $4\pi R \sqrt{\frac{R}{GM}}$.
- В. $\frac{R^{3/2}}{\sqrt{GM}}$.
- Г. $\pi R \sqrt{\frac{2R}{GM}}$.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 3.2.

Протон после упругого лобового соударения с неподвижным ядром отлетел назад со скоростью, составляющей 60% от начальной. С каким ядром он столкнулся?

- А. ${}^2\text{H}$.
 Б. ${}^3\text{He}$.
 В. ${}^7\text{Li}$.
 Г. ${}^4\text{He}$.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 3.3.

Тело, брошенное вертикально вверх, побывало на высоте 50 м дважды с интервалом в 3 с. Каково полное время полета тела?

- А. 6 с.
 Б. 6,2 с.
 В. 7 с.
 Г. 9,3 с.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 3.4.

Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы перевернуть на другую грань однородный куб массой 3 т с длиной ребра 1 м?

- А. 30 кДж.
 Б. 6,2 кДж.
 В. 42 кДж.
 Г. 15 кДж.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 3.5.

В стоящий на столе цилиндрический сосуд налиты вода до высоты H . На какой высоте h следует сделать маленькое отверстие в стенке сосуда, чтобы струя воды попадала на стол как можно дальше от сосуда? Каково при этом расстояние l от сосуда до точки попадания струи на стол?

А. $h = \frac{H}{2}$, $l = \sqrt{2} H$.

Б. $h = \frac{H}{\sqrt{2}}$, $l = \sqrt{2} H$.

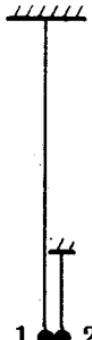
В. $h = 0$, $l = H$.

Г. $h = \frac{H}{2}$, $l = H$.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 3.6.

Два одинаковых маленьких шарика подвешены вплотную друг к другу на нитях длиной 1 м и 25 см (см. рисунок). Первый шарик отводят немного в сторону и отпускают без начальной скорости. Сколько столкновений шариков произойдет за 3,3 с? Все столкновения — лобовые и упругие.



- А. 2.
Б. 3.
В. 4.
Г. 5.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 3.7.

С помощью кипятильника мощностью 300 Вт не удается довести до кипения воду массой 1,2 кг из-за теплообмена с окружающей средой. Когда температура воды перестает увеличиваться, кипятильник выключают. На сколько понизится температура воды за следующую минуту?

- А. На 7°C.
Б. На 5°C.
В. На 2°C.
Г. На 1°C.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 3.8.

На рисунке показано положение столбика ртути длиной 10 см в вертикально расположенной трубке длиной 90 см. Трубка герметично закрыта с обоих концов. Если ее расположить горизонтально, столбик ртути переместится в середину трубки. Каким станет при этом давление в трубке? Температуру считайте постоянной.

- А. 23 см рт. ст.
Б. 38 см рт. ст.
В. 10 см рт. ст.
Г. 19 см рт. ст.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 3.9.

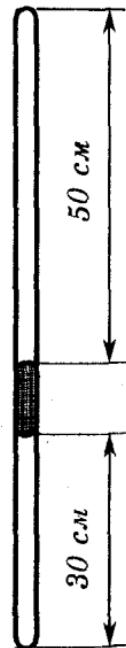
В калориметр, содержащий 300 г кипятка, бросили 100 г льда, имеющего температуру -20°C . Определите уставновившуюся в калориметре температуру, если теплоемкостью калориметра можно пренебречь.

- А. 0°C.
Б. 33°C.
В. -2°C .
Г. 72,5°C.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 3.10.

Какое максимальное напряжение можно приложить к показанной на рисунке батарее из одинаковых конденсаторов, если каждый конденсатор выдерживает напряжение 500 В?



- А. 1500 В.
 Б. 1000 В.
 В. 750 В.
 Г. 500 В.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 3.11.

Чему равна сила тока через резистор R_1 (см. рисунок)? Сопротивления всех резисторов одинаковы и равны 16 Ом. ЭДС источника тока 3,6 В, внутреннее сопротивление 2 Ом.

- А. 0,19 А.
 Б. 0,225 А.
 В. 0,50 А.
 Г. 0,30 А.

Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 3.12.

Внутреннее сопротивление источника тока 3 Ом, его ЭДС равна 9 В. Как нужно соединить между собой четыре одинаковых резистора сопротивлениями по 5 Ом, чтобы при их подключении к этому источнику во внешней цепи выделялась максимальная мощность?

- А. рис. а
 Б. рис. б
 В. рис. в
 Г. рис. г

Д. Правильного ответа здесь нет.

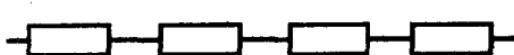
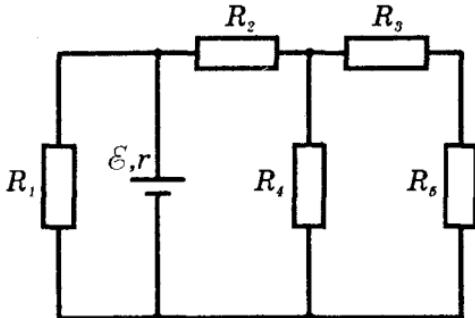
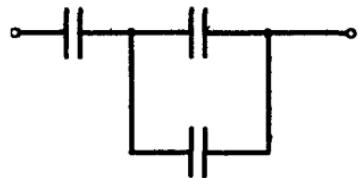


рис. а

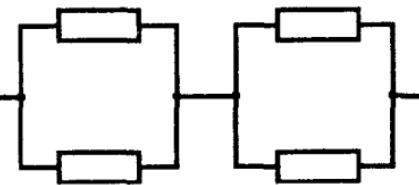


рис. б

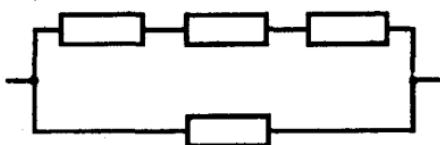


рис. в

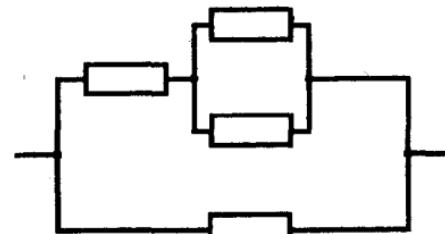


рис. г

Т 3.13.

Колебательный контур с периодом колебаний 1 мкс имеет индуктивность 0,2 мГн и активное сопротивление 2 Ом. На сколько процентов уменьшается энергия этого контура за время одного колебания? В течение этого времени ток можно считать синусоидальным, потерями энергии на излучение пренебречь.

- А. На 0,001%.
- Б. На 0,01%.
- В. На 0,1%.
- Г. На 1%.
- Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 3.14.

Дальнозоркий человек читает без очков, держа книгу на расстоянии 50 см от глаз. Какова оптическая сила необходимых ему очков для чтения?

- А. +2 дптр.
- Б. +6 дптр.
- В. +4 дптр.
- Г. -2 дптр.
- Д. Правильного ответа здесь нет.

Т 3.15.

Сколько энергии выделяется (или поглощается) при ядерной реакции $^4\text{He} + ^9\text{Be} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^1\text{n}$?

- А. Поглощается 5,7 МэВ.
- Б. Выделяется 5,7 МэВ.
- В. Выделяется 14 МэВ.
- Г. Поглощается 14 МэВ.
- Д. Правильного ответа здесь нет.

ОТВЕТЫ УКАЗАНИЯ РЕШЕНИЯ



ИНТОР

*Научно-практический центр
«Иновации в науке, технике, образовании».*

●
Издаёт

учебно-методическую литературу

●
Осуществляет

*подготовку учителей развивающего обучения
(система Эльконина-Давыдова)*

●
Проводит

*тематические семинары по психологическим проблемам
обучения в системе Эльконина-Давыдова*

Адрес центра

121069, г.Москва, ул.Поварская, 14

■ (095) 290-51-84, (095) 290-35-58

ОТВЕТЫ НА ТЕСТЫ

Т 1. 1. Б.

Т 2. 1. А.

Т 3. 1. Г.

Т 1. 2. В.

Т 2. 2. А.

Т 3. 2. Б.

Т 1. 3. В.

Т 2. 3. В.

Т 3. 3. В.

Т 1. 4. Г.

Т 2. 4. А.

Т 3. 4. Б.

Т 1. 5. Д.

Т 2. 5. Г.

Т 3. 5. Г.

Т 1. 6. Б.

Т 2. 6. Б.

Т 3. 6. В.

Т 1. 7. Б.

Т 2. 7. Г.

Т 3. 7. Д.

Т 1. 8. В.

Т 2. 8. Д.

Т 3. 8. Г.

Т 1. 9. А.

Т 2. 9. В.

Т 3. 9. Д.

Т 1.10. В.

Т 2.10. Б.

Т 3.10. В.

Т 1.11. Г.

Т 2.11. А.

Т 3.11. А.

Т 1.12. Б.

Т 2.12. Б.

Т 3.12. Г.

Т 1.13. Д.

Т 2.13. Г.

Т 3.13. Г.

Т 1.14. Б.

Т 2.14. В.

Т 3.14. А.

Т 1.15. Б.

Т 2.15. Г.

Т 3.15. Б.

1.1. Ответ: а) 48 км/ч; б) 75 км/ч.

Решение. а) По определению, средняя скорость $v_{\text{ср}} = \frac{s}{t}$, где s — весь путь, а t — время всего движения. Время прохождения первой половины пути $t_1 = \frac{s}{2v_1}$, второй половины $t_2 = \frac{s}{2v_2}$. Значит, $t = t_1 + t_2 = \frac{s(v_1 + v_2)}{2v_1 v_2}$, и $v_{\text{ср}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 48$ км/ч.

б) В этом случае $t_1 = t_2 = \frac{t}{2}$. На лошади барон проехал расстояние $s_1 = \frac{v_1 t}{2}$, а с лошадью на плечах он прошел $s_2 = \frac{v_2 t}{2}$. Весь путь $s = s_1 + s_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} t$, значит, $v_{\text{ср}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 75$ км/ч.

Почему же в случае а средняя скорость оказалась существенно меньше? Причина проста: в этом случае барон нес лошадь на себе большую часть времени ($\frac{t_2}{t_1} = \frac{v_1}{v_2} = 4$), а в случае б — лишь половину времени.

1.2. Ответ: в озере.

Решение. Пусть расстояние s в стоячей воде мы проплываем со скоростью v , а скорость течения реки равна u . Тогда, чтобы проплыть туда и обратно по озеру, потребуется время $t_1 = \frac{2s}{v}$. По течению реки мы движемся со скоростью $v + u$, против течения со скоростью $v - u$. Поэтому, проплав туда и обратно по реке, мы затратим время $t_2 = \frac{s}{v+u} + \frac{s}{v-u} = \frac{2sv}{v^2 - u^2}$.

Очевидно, отношение $\frac{t_2}{t_1} = \frac{v^2}{v^2 - u^2}$ превышает единицу, т. е. $t_2 > t_1$.

Итак, для движения по реке времени потребуется больше. Значит, выигрыш во времени при движении по течению меньше, чем потеря времени при движении против течения. Так и должно быть: ведь против течения мы движемся большую часть времени (сравните с задачей 1.1). Полученный вывод особенно нагляден, когда v лишь ненамного превышает u : в этом случае движение против течения будет очень медленным и займет много времени.

1.3. Ответ: 40 км/ч.

Решение. Средняя скорость автомобиля на второй половине пути составляет $\frac{v_2 + v_3}{2}$. Полное время t прохождения пути s :

$$t = \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2 \frac{(v_2 + v_3)}{2}} = s \frac{2v_1 + v_2 + v_3}{2v_1(v_2 + v_3)}.$$

Тогда средняя скорость на всем пути $v_{cp} = \frac{s}{t} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3} = 40$ км/ч.

1.4. Ответ: $v = 40$ км/ч.

Решение. Представим себя на месте пассажира одного из поездов (т. е. перейдем в его систему отсчета). С точки зрения этого пассажира оба поезда стоят на месте на расстоянии $s = ut$ друг от друга, а барон бежит со скоростью $u + v$, преодолевая расстояние s за время t .

Значит, $ut = (u + v)t$, откуда $v = u \frac{t-t}{t} = 40$ км/ч. Это ненамного

больше мировых рекордов в спринте, но ведь барон всего лишь разминался!

1.5. Ответ: $t_2 = 6$ ч.

Решение. Обозначим расстояние между пунктами A и B через s , скорость моторной лодки относительно воды v , скорость течения реки (т. е. скорость плота) u . Тогда $t = \frac{s}{u}$, $t_1 = \frac{s}{v+u}$. Отсюда

$v = u \left(\frac{t}{t_1} - 1 \right)$, $s = ut$. Обратный путь займет время:

$$t_2 = \frac{s}{v-u} = \frac{ut}{u \left(\frac{t}{t_1} - 1 \right) - u} = \frac{tt_1}{t-2t_1} = 6 \text{ ч.}$$

Заметим, что величины v , u , s остались неизвестными. Для решения задачи оказалось достаточным установить связи между этими величинами. Полученное решение имеет смысл лишь при $t > 2t_1$. Советуем проверить, что это просто означает $v > u$.

1.6. Ответ: 45 с.

Решение. Обозначим длину эскалатора s , его скорость v , скорость идущего человека относительно эскалатора u . Получим:

$$v = \frac{s}{t_1}, u = \frac{s}{t_2}.$$

На движение по поднимающемуся эскалатору потребуется время

$$t_3 = \frac{s}{v+u} = \frac{s}{\frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2}} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{3}{4} \text{ мин} = 45 \text{ с.}$$

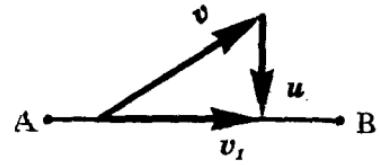
Таким образом, можно сэкономить целых 15 с!

1.7. Ответ: 1,5 мин.

1.8. Ответ: а) $t_1 = 6,5$ ч; б) $t_2 = 6$ ч.

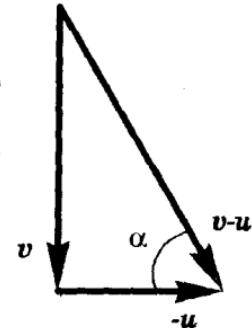
Решение. б) Скорость самолета v_1 относительно Земли — это векторная сумма скоростей v и u . Согласно условию, скорость v_1 должна быть направлена вдоль отрезка AB , u — под прямым углом к этому отрезку. Поэтому v должна быть направлена под углом к AB , чтобы компенсировать боковой снос (см. рисунок). Скорость $v_1 = \sqrt{v^2 - u^2}$, она одинакова при движении туда и обратно. Полное время полета составит:

$$t_2 = \frac{2s}{v_1} = \frac{2s}{\sqrt{v^2 - u^2}} = 6 \text{ ч.}$$



1.9. Ответ: $v = 14$ м/с.

Решение. Перейдем в систему отсчета, связанную с движущейся каретой. В ней скорость капель, равная $v - u$, наклонена под углом α к горизонту (см. рисунок). Из треугольника скоростей получаем: $v = u \cdot \operatorname{tg} \alpha = 52 \text{ км/ч} = 14 \text{ м/с.}$



1.10. Ответ: в $\sqrt{1 + \frac{v^2}{u^2}}$ раз.

1.11. Решение. Если лодка будет держать курс перпендикулярно берегам, то ее скорость относительно берега $v + u$ будет направлена под углом к отрезку AB (см. рис. а). Лодку снесет от точки B вниз по течению на расстояние l . Это расстояние легко определить из подобия треугольника скоростей и треугольника ABC : $\frac{l}{s} = \frac{u}{v}$,

откуда $l = \frac{su}{v} = 120$ м. Течение реки в этом случае вообще не

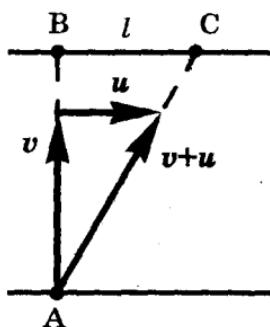


Рис. а

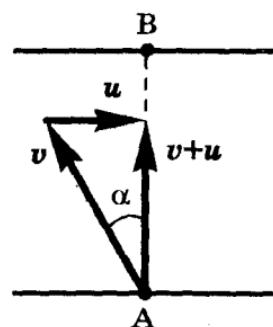


Рис. б

влияет на время переправы: $t_1 = \frac{s}{v} = 40$ с.

Чтобы попасть в точку B , следует держать курс под углом $\alpha = \arcsin \frac{u}{v} = 37^\circ$ к отрезку AB (вверх по течению, см. рис. б).

Время переправы в этом случае $t_2 = \frac{s}{\sqrt{v^2 - u^2}} = 50$ с (см. решение задачи 1.8). Переправа во втором случае занимает больше времени, хотя и происходит по более короткому пути!

1.12. Ответ: 4 км/ч; на второй вопрос ответить нельзя.

Решение. Наиболее простое решение получим, если перейдем в систему отсчета, связанную с плывущей шляпой. В этой системе отсчета вода неподвижна; лодка же сначала удаляется от шляпы, а затем с той же скоростью приближается к ней. Значит, с момента поворота до момента «поимки» шляпы лодка двигалась тоже полчаса. Всего же шляпа плыла по течению час. За это время она проплыла 4 км; следовательно, скорость течения реки 4 км/ч. Заметим, что скорость лодки нам неизвестна, но для ответа на поставленный вопрос знания этой скорости и не требуется. То же самое можно сказать о первоначальном направлении движения лодки.

1.13. Ответ: $t = \frac{v_2}{v_1^2 + v_2^2} l$; $s_{\min} = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} l$.

Решение 1. Определим расстояние между автомобилями через время t после прохождения первым автомобилем перекрестка. Это расстояние (см. рис. а) составит $s = \sqrt{(v_1 t)^2 + (l - v_2 t)^2}$. Остается определить минимальное значение функции $s(t)$ при $t \geq 0$. Это можно сделать, например, вычислив производную $s'(t)$. Приведем и другой способ — выделение полного квадрата в подкоренном выражении:

$$s = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2lv_2t + l^2} = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2) \left(t - \frac{lv_2}{v_1^2 + v_2^2} \right)^2 + l^2 \frac{v_1^2}{v_1^2 + v_2^2}}$$

Минимум этого выражения достигается, очевидно, при $t = \frac{lv_2}{v_1^2 + v_2^2}$

и равен $s_{\min} = \frac{lv_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

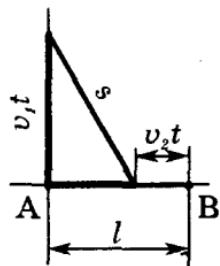


Рис. а

Решение 2. Заметим, что задачу усложняет одновременное движение обоих автомобилей. Поэтому решение намного упростится,

если связать систему отсчета с одним из них. Свяжем систему отсчета с первым автомобилем. В ней $V_1 = 0$, $V_2 = v_2 - v_1$ (см. рис. 6). Очевидно, траектория движения второго автомобиля в этой системе отсчета представляет собой прямую BC , а минимальное расстояние s_{\min} — длину перпендикуляра AD к этой прямой. Из подобия треугольника скоростей и треугольника

ABD следует: $\frac{s_{\min}}{l} = \frac{v_1}{V_2}; \frac{BD}{l} = \frac{v_2}{V_2}$. Отсюда

$$s_{\min} = \frac{lv_1}{V_2} = \frac{lv_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}; t = \frac{BD}{V_2} = \frac{lv_2}{V_2^2} = \frac{lv_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

1.14. Ответ: $v = 8,3$ м/с; $\beta_1 = \beta_2 = 11,5^\circ$.

Решение. Скорость катера относительно берега равна $V = v + u$. Она направлена вдоль отрезка AB . Проектируя равенство $V = v + u$ на отрезок AB и перпендикулярное ему направление, получаем: $V_1 = v \cos \beta_1 + u \cos \alpha$; $us \sin \alpha = v \sin \beta_1$, где V_1 — скорость катера при движении от A к B . При движении катера обратно от B к A : $V_2 = v \cos \beta_2 - u \cos \alpha$; $us \sin \alpha = v \sin \beta_2$. Отсюда видно, что $\beta_1 = \beta_2 = \beta$.

Полное время движения $t = \frac{s}{V_1} + \frac{s}{V_2} = \frac{s \cdot 2v \cos \beta}{v^2 \cos^2 \beta - u^2 \cos^2 \alpha}$. Отсюда

$$(v \cos \beta)^2 - \frac{2s}{t} \cdot v \cos \beta - u^2 \cos^2 \alpha = 0; v \cos \beta = \frac{s}{t} + \sqrt{\frac{s^2}{t^2} + u^2 \cos^2 \alpha}. \text{ Из системы двух уравнений}$$

$$\begin{cases} v \sin \beta = u \sin \alpha, \\ v \cos \beta = \frac{s + \sqrt{s^2 + u^2 t^2 \cos^2 \alpha}}{t} \end{cases}$$

находим $\operatorname{tg} \beta = \frac{ut \sin \alpha}{s + \sqrt{s^2 + u^2 t^2 \cos^2 \alpha}}$, откуда $\beta = 11,5^\circ$. Следователь-

$$\text{но, } v = \frac{u \sin \alpha}{\sin \beta} = 8,3 \text{ м/с.}$$

1.15. Ответ: река течет со скоростью 0,51 км/ч по направлению от B к A .

Решение. Предположим, река течет со скоростью u от A к B . Учитывая, что время движения катера равно времени движения лодки, получаем

$$\frac{s}{v_1 + u} = 2 \left(\frac{s}{v_2 + u} + \frac{s}{v_2 - u} \right), \text{ где } s = AB.$$

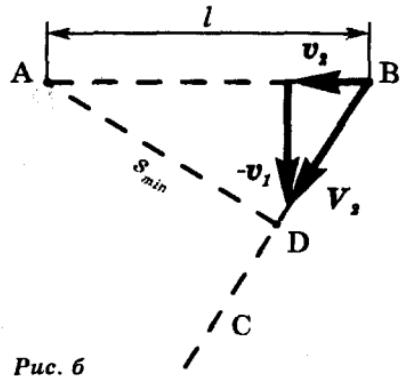


Рис. 6

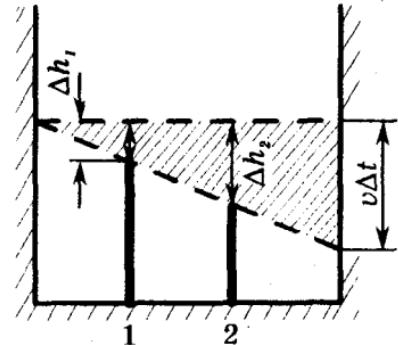
Отсюда $v_2^2 - u^2 = 4v_1v_2 + 4uv_2$, т. е. $u^2 + 4uv_2 + 4v_1v_2 - v_2^2 = 0$. Следовательно, $u = -2v_2 \pm \sqrt{5v_2^2 - 4v_1v_2} = -20 \pm 19,49$ (км/ч).

Решение $u = -39,5$ км/ч следует отбросить (тогда катер не смог бы подняться против течения); остается единственное решение: $u = -0,51$ км/ч (река течет от B к A со скоростью 0,51 км/ч).

1.16. Ответ: спустя время $\frac{l(d_1 + d_2 + d_3)}{v(d_1 + d_2)}$ догорит вторая свеча, а

спустя время $\frac{l(d_1 + d_2 + d_3)}{vd_1}$ — и первая.

Решение. Пусть за время Δt длина первой свечи уменьшилась на Δh_1 , а второй — на Δh_2 (см. рисунок). Тень на правой стене опустилась за это время на $v\Delta t$. Заштрихованная на рисунке фигура содержит три подобных треугольника. Из их подобия следует:



$$\frac{\Delta h_1}{d_1} = \frac{\Delta h_2}{d_1 + d_2} = \frac{v \cdot \Delta t}{d_1 + d_2 + d_3}.$$

Отсюда находим скорость укорачивания каждой из свечей:

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta t} = v \cdot \frac{d_1}{d_1 + d_2 + d_3}, \quad \frac{\Delta h_2}{\Delta t} = v \cdot \frac{d_1 + d_2}{d_1 + d_2 + d_3}.$$

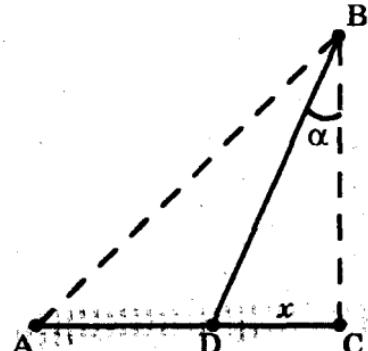
Время полного сгорания каждой из свечей:

$$t_1 = \frac{l \cdot \Delta t}{\Delta h_1} = \frac{l(d_1 + d_2 + d_3)}{vd_1}; \quad t_2 = \frac{l \cdot \Delta t}{\Delta h_2} = \frac{l(d_1 + d_2 + d_3)}{v(d_1 + d_2)}.$$

Естественно, $t_2 < t_1$ — первой сгорит правая свеча.

1.17. Ответ: $t_1 = \frac{l(d_1 + d_2 + d_3)}{v_2 d_1 - v_1(d_2 + d_3)}$; $t_2 = \frac{l(d_1 + d_2 + d_3)}{v_2(d_1 + d_2) - v_1 d_3}$.

1.18. Решение. Очевидно, движение по пути AB (кратчайшему) может потребовать далеко не кратчайшего времени из-за медленного движения в воде. Выгоднее может оказаться войти в воду в точке D (см. рисунок), сократив путь в воде даже за счет удлинения пути по берегу. Определим, при каком значении $DC = x$ время движения будет минимальным. Это время:



$$t = \frac{s - x}{v_2} + \frac{\sqrt{d^2 + x^2}}{v_1} = \frac{sv_1 - xv_1 + v_2\sqrt{d^2 + x^2}}{v_1v_2}.$$

Очевидно, величина $y = v_2\sqrt{d^2 + x^2} - v_1x$ должна быть минимальной (заметим, что эта величина уже не содержит s). Далее можно пойти различными путями.

1. Для умеющих дифференцировать:

$$y' = \frac{xv_2}{\sqrt{d^2 + x^2}} - v_1 = 0, \text{ откуда } x = \frac{dv_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}.$$

2. Более длинный путь, но не требующий дифференцирования — выразим x через y :

$$v_2\sqrt{d^2 + x^2} = y + xv_1; v_2^2(d^2 + x^2) = y^2 + 2xyv_1 + x^2v_1^2; x^2(v_2^2 - v_1^2) - 2xyv_1 + v_2^2d^2 - y^2 = 0. \text{ Отсюда } x = \frac{yv_1 \pm v_2 \sqrt{y^2 - (v_2^2 - v_1^2)d^2}}{v_2^2 - v_1^2}.$$

Минимальное значение y , при котором подкоренное выражение неотрицательно:

$$y_{\min} = d\sqrt{v_2^2 - v_1^2}; \text{ при этом } x = \frac{dv_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}.$$

При $s > \frac{dv_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}$ следует двигаться по берегу до точки D , а

потом плыть к B . При $s < \frac{dv_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}$ следует сразу плыть по прямой к точке B . Читатель, знающий оптику, может воспользоваться аналогией с «движением» светового луча (принцип Ферма). Тогда угол α на рисунке определяется как предельный угол полного отражения: $\sin \alpha = \frac{v_1}{v_2}$, а $x = dtg \alpha = \frac{dv_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}$.

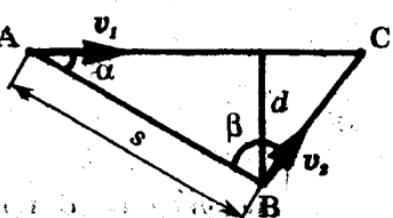
1.19. Ответ: $37^\circ < \beta < 143^\circ$ (см. рисунок); $v_{2\min} = \frac{v_1 d}{s} = 2,4 \text{ м/с.}$

Следует бежать перпендикулярно направлению на автобус.

Решение 1. Пусть автобус находится в точке A , человек — в точке B . Определим, под каким углом β к линии AB может бежать человек (он должен попасть в точку C одновременно с автобусом или раньше его); время движения автобуса $t_1 = \frac{AC}{v_1}$, время дви-

жения человека $t_2 = \frac{BC}{v_2} < t_1$. Отсюда $\frac{AC}{BC} > \frac{v_1}{v_2}$. Применяя теорему синусов к

треугольнику ABC ($\frac{AC}{BC} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$) и учи-



тывая, что $\sin \alpha = \frac{d}{s}$, получаем: $\sin \beta > \frac{v_1 d}{v_2 s}$. Тогда

$$\arcsin\left(\frac{v_1 d}{v_2 s}\right) < \beta < 180^\circ - \arcsin\left(\frac{v_1 d}{v_2 s}\right); 37^\circ < \beta < 143^\circ.$$

Хотелось бы обратить внимание на то, что в этой задаче самым трудным является удачный выбор неизвестной величины β .

Поскольку $\sin \beta > \frac{v_1 d}{v_2 s}$, условием разрешимости задачи является $\frac{v_1 d}{v_2 s} < 1$ или $v_2 > \frac{v_1 d}{s}$. Значит, $v_{2\min} = \frac{v_1 d}{s} = 2,4$ м/с. При такой скорости $\sin \beta = 1$, $\beta = 90^\circ$ — т. е. бежать следует под прямым углом к направлению на автобус (а не к дороге!).

Решение 2. Решение задачи становится проще и нагляднее, если перейти в систему отсчета, связанную с автобусом. В этой системе отсчета скорость человека $V = v_2 - v_1$. Величина скорости v роли не играет, а ее направление должно быть таким, чтобы человек пересек шоссе правее «стоящего» автобуса или вышел точно на автобус (см. рис. а). Конец вектора V лежит на окружности радиуса v_2 (см. рис. б). Очевидно, угол β между отрезком AB и направлением v_2 должен лежать в пределах $\beta_1 < \beta < \beta_2$, где β_1 и β_2 — два решения уравнения $\sin \beta = \sin \alpha \cdot \frac{v_1}{v_2}$, удовлетворяющие условию $0 < \beta < \pi$.

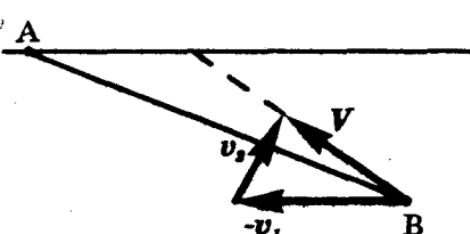


Рис. а

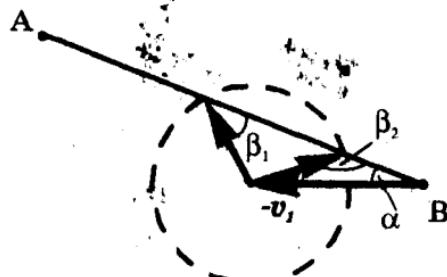


Рис. б

1.20. Решение. Пусть автобус находится в точке A . Выберем произвольную точку B на шоссе впереди автобуса. Пусть $AB = l$. Автобус доедет до точки B за время $t = \frac{l}{v_1}$. Чтобы человек мог встретить автобус в этой точке, он должен находиться от нее на расстоянии, не превышающем $R = v_2 t = \frac{v_2 l}{v_1}$ (т. е. в пределах, показанных на рисунке а круга). Чтобы определить искомое гео-

метрическое место точек, построим аналогичные круги для всех точек шоссе впереди точки A и найдем их объединение, т. е. множество точек, каждая из которых принадлежит хотя бы одному кругу. Это совсем не так сложно, как кажется на первый взгляд. Рассмотрим угол α между линией шоссе и касательной, проведенной из точки A к построенной окружности. Очевидно,

$\sin \alpha = \frac{R}{l} = \frac{v_2}{v_1}$, причем этот угол одинаков для всех построенных окружностей! Следовательно, все они вписаны в один и тот же угол 2α . Объединение всех построенных кругов представляет собой внутреннюю область угла 2α (рис. б).

1.21. Ответ: $v = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha}$.

Решение. Сравним положения прямых в начале и в конце промежутка времени Δt . Штриховой линией на рис. а показаны начальные положения, сплошной — конечные. За это время точка пересечения прямых переместилась из A в B . Перемещение s этой точки представляет собой диагональ изображенного на рис. а параллелограмма. Как видно из рис. б, перемещение можно определить, воспользовавшись теоремой косинусов:

$$s = \frac{\Delta t}{\sin \alpha} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha}.$$

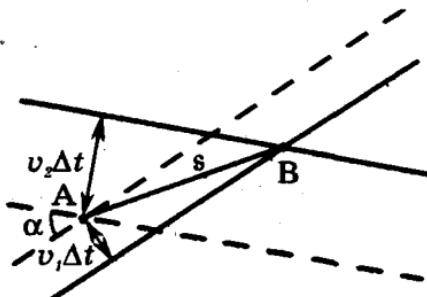


Рис. а

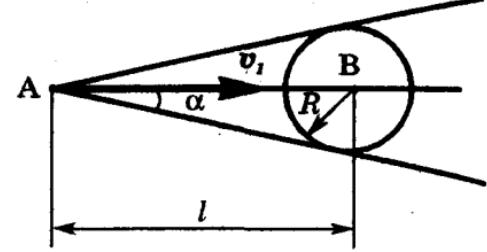


Рис. а

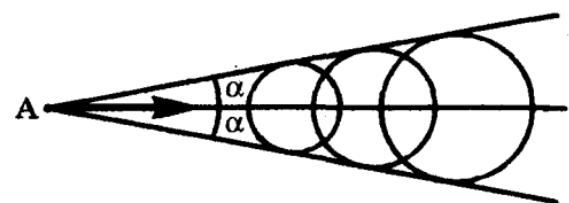


Рис. б

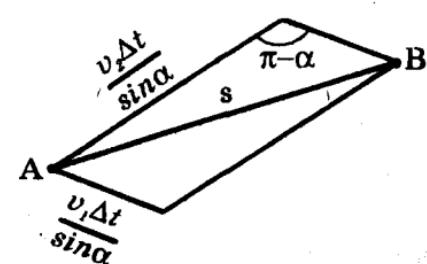


Рис. б

Скорость точки пересечения прямых

$$v = \frac{s}{\Delta t} = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha}}{\sin \alpha}.$$

Заметим, что эту скорость можно неограниченно увеличивать за счет уменьшения угла α .

1.22. Ответ: $\alpha = 180^\circ$ при $v \leq u$; $\alpha = \arcsin \frac{u}{v}$ при $v > u$.

Решение. При $v < u$ угол α , очевидно, равен 180° : один из осколков может полететь назад со скоростью $u - v$. При $v > u$ найти α сложнее. Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью v (так называемую систему центра масс). В ней осколки имеют одинаковую скорость, по модулю равную u . Направление же этой скорости может быть произвольным. На рис. а показаны возможные положения конца вектора u . В «неподвижной» системе отсчета скорость осколка $V = v + u$. Множество возможных положений конца вектора V заполняет окружность радиусом u , причем вектор v заканчивается в центре этой окружности (см. рис. б). Начало

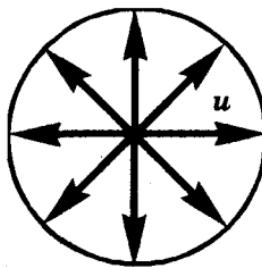


Рис. а

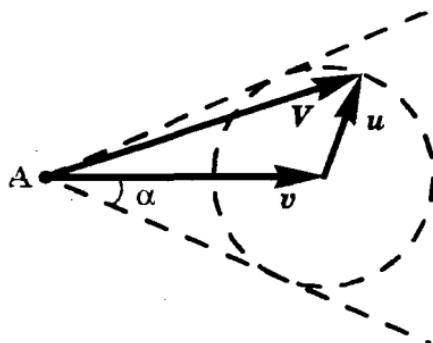


Рис. б

вектора v окажется *вне* окружности при $v > u$. Какой же отрезок, соединяющий точку A с точкой окружности, образует наибольший угол с вектором v ? Очевидно, *касательная* к окружности. Значит, $\alpha = \arcsin \frac{u}{v}$.

1.23. Ответ: $0 < \beta < \arccos \frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2}$ при $u < v$; $\beta = 90^\circ$ при $u = v$;

$\arccos \frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2} < \beta < 180^\circ$ при $u > v$.

Решение. Если в системе центра масс скорости осколков u и $-u$, то в неподвижной системе отсчета их скорости $v + u$ и $v - u$ (см. рис. а). Угол β между векторами $v + u$ и $v - u$ можно определить

из соотношения $\cos\beta = \frac{(v + u) \cdot (v - u)}{|v + u| \cdot |v - u|}$. Воспользуемся тем, что для любого вектора a его модуль $|a| = \sqrt{a \cdot a}$. Тогда

$$\cos\beta = \frac{v^2 - u^2}{\sqrt{(v^2 + u^2 + 2u \cdot v)(v^2 + u^2 - 2u \cdot v)}} = \frac{v^2 - u^2}{\sqrt{(v^2 + u^2)^2 - 4(u \cdot v)^2}}.$$

Посмотрим теперь, в каких пределах может изменяться величина $\cos\beta$. Удобно рассмотреть отдельно случаи: 1) $v > u$, 2) $v = u$ и 3) $v < u$.

1. Если $v > u$, то $\cos\beta > 0$, т. е. угол β меньше 90° (как раз такому случаю соответствует рис. а). Поскольку $\cos\beta$ является убывающей функцией β , наименьшему значению β соответствует наибольшее значение $\cos\beta$, а наибольшему значению β — наименьшее значение $\cos\beta$. Единственной величиной в выражении для $\cos\beta$, зависящей от направления u , является $(u \cdot v)$, и благодаря этому легко найти наибольшее и наименьшее значения $\cos\beta$: наибольшее ($\cos\beta = 1$) достигается при $u \parallel v$, когда $(u \cdot v) = uv$, а наименьшее ($\cos\beta = \frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2}$) при $u \perp v$, когда $(u \cdot v) = 0$. Следовательно, угол β изменяется в пределах от 0 до $\arccos\left(\frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2}\right)$. На рис. б показан случай, когда достигается наибольшее значение угла разлета осколков.

2. Если $v = u$, то $\cos\beta = 0$, т. е. $\beta = 90^\circ$ независимо от направления u . Отметим только частный случай $u \parallel v$: при этом один из осколков останавливается, и поэтому вопрос об угле разлета осколков лишается смысла.

3. Если $v < u$, то $\cos\beta < 0$, т. е. угол β больше 90° (см. рис. в). Однако $\cos\beta$ является убывающей функцией β и при $90^\circ < \beta < 180^\circ$, поэтому мы можем воспользоваться теми же соображениями, что при разборе случая 1. Результат, однако, получится совсем другим:

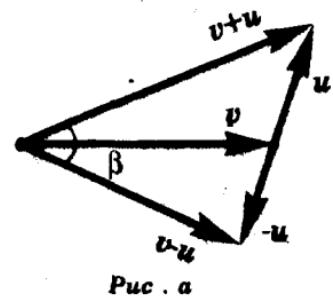


Рис. а

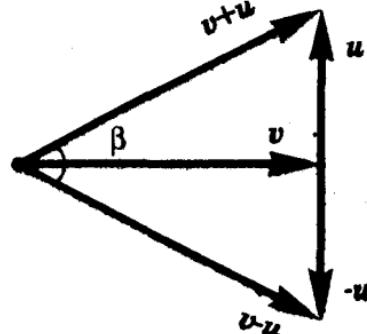


Рис. б



Рис. в

наибольшее значение $\cos\beta = \frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2}$ (оно отрицательно!) достигается при $u \perp v$, а наименьшее ($\cos\beta = -1$) при $u \parallel v$ (один осколок летит вперед, а другой — назад). Следовательно, угол β изменяется в пределах от $\arccos\left(\frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2}\right)$ до 180° .

Интересно заметить, что «симметричный» случай ($u \perp v$) при $v > u$ соответствует максимальному углу разлета, а при $v < u$ — минимальному.

1.24. Решение 1. Обозначим ускорение a , длительность каждого из промежутков времени t . Совместим начало координат с начальной точкой движения и ось x с направлением движения.

Тогда координата тела в конце n -го промежутка времени

$x_n = \frac{a(n\tau)^2}{2}$ ($n = 1, 2, 3\dots$). Из рисунка *a* видно:

$$s_1 = \frac{at^2}{2}, s_n = x_n + x_{n-1} = \frac{at^2}{2}(n^2 - (n-1)^2) = \frac{at^2}{2}(2n-1).$$

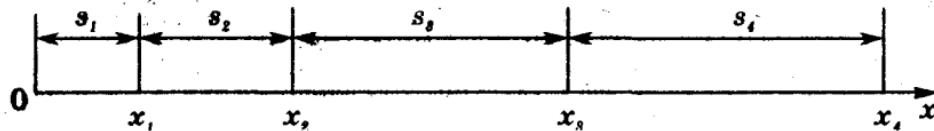


Рис. а

Отсюда $s_1 : s_2 : \dots : s_n = 1 : 3 : \dots : (2n - 1)$.

Решение 2. График зависимости скорости от времени $v(t)$ для рассматриваемого движения показан на рисунке б. Воспользуемся тем, что перемещение тела за очередной промежуток времени τ численно равно площади фигуры под соответствующим участком

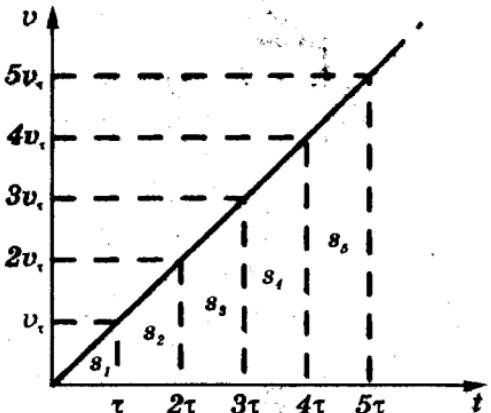
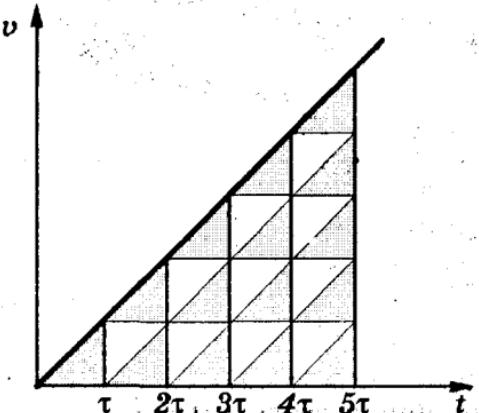


Рис. 5



MANUFACTURER - **STYLING** - **DECORATION** - **INTERIOR DESIGN**

графика. Эти фигуры (см. рис. в) можно разбить на треугольники с площадью s_i , причем каждая следующая фигура содержит на два треугольника больше предыдущей. Поэтому получаем:

$$s_1 : s_2 : s_3 : s_4 : \dots = 1 : 3 : 5 : 7 : \dots$$

1.25. Ответ: $H = 200$ м.

Решение. Пусть полное время падения тела t . Тогда

$$H = \frac{gt^2}{2}, H - s = \frac{g(t - \tau)^2}{2}. \text{ Отсюда}$$

$$s = \frac{g}{2}(t^2 - (t - \tau)^2) = \frac{g}{2}(2t \cdot \tau - \tau^2), t = \frac{s}{g\tau} + \frac{\tau}{2}.$$

$$\text{Отсюда } H = \frac{g}{2}\left(\frac{s}{g\tau} + \frac{\tau}{2}\right)^2 = 200 \text{ м.}$$

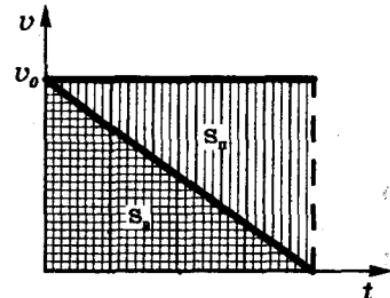
1.26. Ответ: $H = 57$ м, $t = 3,4$ с.

1.27. Ответ: поезд пройдет вдвое большее расстояние.

Решение. Пусть скорость поезда в момент отцепления вагона v_0 , время движения вагона t . Тогда поезд за это время пройдет путь $s_{\text{п}} = v_0 t$. Средняя скорость движения вагона за это время¹⁾ $v_{\text{ср}} = \frac{v_0 + 0}{2} = \frac{v_0}{2}$, поэтому пройденный вагоном путь

$$s_{\text{в}} = v_{\text{ср}} \cdot t = \frac{v_0 t}{2}.$$

Отсюда $s_{\text{п}} = 2s_{\text{в}}$. Поезд пройдет путь вдвое больший, чем вагон. Этот результат становится совершенно очевидным, если построить зависимость скорости от времени для поезда и вагона (см. рисунок) и вспомнить, что перемещение численно равно площади под графиком $v(t)$.



1.28. Ответ: $v_0 = 45$ см/с; $a = 30$ см/с².

Решение 1. Используем формулу зависимости перемещения от времени при равноускоренном движении:

$$l = v_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2}; l = v_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2}.$$

Приравнивая правые части обоих выражений, получим

$$v_0 = \frac{a(t_2 + t_1)}{2}.$$

¹⁾ Средняя скорость прямолинейного равноускоренного движения равна среднему арифметическому начальной и конечной скоростей, то есть $\frac{v_0 + v}{2}$.

Подставляем это выражение для v_0 в первое уравнение системы:

$$l = \frac{at_1(t_2 + t_1)}{2} - \frac{at_1^2}{2} = \frac{at_1t_2}{2}.$$

Отсюда $a = \frac{2l}{t_1t_2} = 30 \text{ см/с}^2$; $v_0 = \frac{l(t_1 + t_2)}{t_1t_2} = 45 \text{ см/с}$.

Решение 2. Зависимость координаты тела от времени выражается формулой $x = v_0t - \frac{at^2}{2}$. Отсюда $t^2 - \frac{2v_0}{a}t + \frac{2x}{a} = 0$. Так как t_1 и t_2 — корни этого уравнения при $x = l$, то, согласно теореме Виета,

$$t_1 + t_2 = \frac{2v_0}{a} \quad \text{и} \quad t_1t_2 = \frac{2l}{a}.$$

Из полученной системы уравнений находим v_0 и a :

$$a = \frac{2l}{t_1t_2} = 30 \text{ см/с}^2, \quad v_0 = \frac{(t_1 + t_2)a}{2} = 45 \text{ см/с}.$$

1.29. Ответ: первый метр тело проходит за 0,45 с, последний — за 0,023 с; за первую секунду тело проходит 4,9 м, за последнюю — 39 м.

1.30. Ответ: 1,0 с.

1.31. Ответ: $h = \frac{3v_0^2}{8g}$.

Решение. Используя известную формулу равноускоренного движения $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ и учитывая, что в верхней точке $v = 0$, получаем $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$. Если отсчитывать время от момента бросания второго тела, то уравнения движения тел следует записать в виде:

$$h_1 = h_{\max} - \frac{gt^2}{2}; \quad h_2 = v_0t - \frac{gt^2}{2}.$$

Приравнивая $h_1 = h_2 = h$ (в момент встречи), получаем

$$t = \frac{h_{\max}}{v_0} = \frac{v_0}{2g}; \quad h = \frac{3}{8} \cdot \frac{v_0^2}{g} = \frac{3}{4}h_{\max}.$$

1.32. Ответ: $t = \frac{v_0}{g} - \frac{\tau}{2} = 1,75 \text{ с}, \quad h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g\tau^2}{8} = 19,3 \text{ м}$.

1.33. Ответ: $v_0 = \sqrt{\frac{g}{2H}} (H - h) = 7,0 \text{ м/с}$.

1.34. Ответ: $t = 0,645 \text{ с}$; болт перемещается относительно Земли на 0,49 м вниз.

Решение. Болт падает с ускорением $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ относительно Земли и с ускорением $g + a$ относительно лифта. Его начальная

скорость относительно лифта равна нулю. Поэтому время падения определяется из уравнения $H = \frac{(g+a) \cdot t^2}{2}$ и составляет

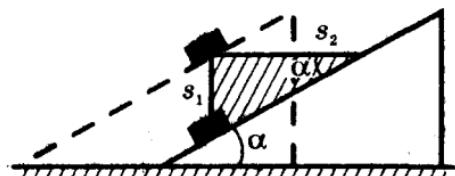
$$t = \sqrt{\frac{2H}{g+a}} = 0,645 \text{ с.}$$

Чтобы определить перемещение болта относительно Земли, надо просто учесть, что в начальный момент падения болта его скорость направлена вверх и равна v . Поэтому за время падения болт переместится относительно Земли на $s = vt - \frac{gt^2}{2} = -0,49 \text{ м.}$

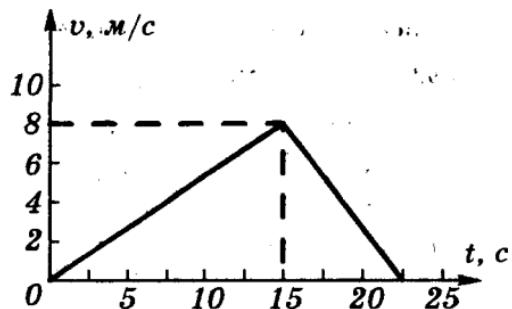
Поскольку $s < 0$, перемещение направлено вниз.

1.35. Ответ: $a \geq g \operatorname{ctg} \alpha$.

Решение. Начав свободно падать, тело A за время t сместится по вертикали на $s_1 = \frac{gt^2}{2}$. За это же время клин должен сместиться в горизонтальном направлении, как минимум, на $s_2 = s_1 \operatorname{ctg} \alpha$ (см. заштрихованный треугольник на рисунке). Учитывая, что $s_2 = \frac{a_{\min} t^2}{2}$, получаем $a_{\min} = g \operatorname{ctg} \alpha$.



1.36. Решение. На каждом из участков движение будем считать равноускоренным. Воспользуемся тем, что средняя скорость равноускоренного движения равна полу- сумме начальной и конечной скоростей. Средняя скорость на первом участке пути (на склоне горы) равна $\frac{0 + v_1}{2}$; на



горизонтальном участке средняя скорость та же: $\frac{v_1 + 0}{2}$.

Итак, $\frac{s_1}{t_1} = \frac{v_1}{2}$; $\frac{s_2}{t_2} = \frac{v_1}{2}$, где t_2 — время прохождения горизонтального участка. Отсюда $v_1 = \frac{2s_1}{t_1} = 8 \text{ м/с}$, $t_2 = \frac{2s_2}{v_1} = 7,5 \text{ с}$. График $v(t)$ приведен на рисунке. Ускорение на горизонтальном участке

$$a_2 = \frac{0 - v_1}{t_2} = -\frac{16}{15} \text{ м/с}^2 \approx -1,1 \text{ м/с}^2.$$

1.37. Ответ: $v = 68 \text{ км/ч}$.

Решение 1. Решение задачи затрудняется из-за того, что нам неизвестно время разгона поезда t_p (а, значит, и время торможения t_1). Остается надеяться, что ответ не зависит от величины t_p . Удобно воспользоваться тем, что средняя скорость на этапах разгона и торможения одинакова и равна $0,5v$ (при равноускоренном движении средняя скорость равна полусумме начальной и конечной скоростей). Поэтому пройденный за время разгона и торможения путь равен $\frac{v}{2} \cdot t_p + \frac{v}{2} \cdot t_1 = \frac{vt_1}{2}$.

Он действительно не зависит от t_p ! Значит, при равномерном движении поезд прошел расстояние $s = \frac{vt_1}{2}$, затратив на это время

$\frac{s}{v} = \frac{t_1}{2}$. Поскольку полное время движения равно $\frac{s}{v_{cp}}$, получаем

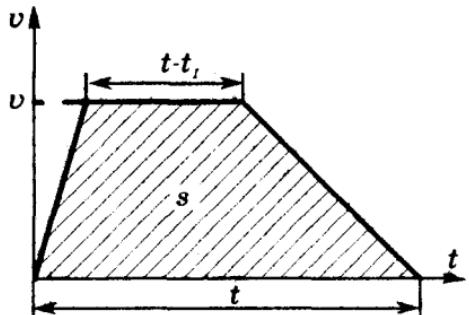
$\left(\frac{s}{v} - \frac{t_1}{2}\right) + t_1 = \frac{s}{v_{cp}}$. Отсюда $v = \frac{2sv_{cp}}{2s - v_{cp} \cdot t_1} = 68 \text{ км/ч}$. Однако реше-

ние этой задачи может быть более коротким и красивым.

Решение 2. График $v(t)$ для движения поезда имеет вид, показанный на рисунке. Пройденное расстояние s численно равно площади трапеции, т. е.

$$s = \frac{t + (t - t_1)}{2} \cdot v. \text{ Учитывая, что}$$

$t = \frac{s}{v_{cp}}$, получаем ответ, приведенный в решении 1.



1.38. Ответ: см. рис. а, б.

Ось y направлена вертикально вверх; $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$.

График на рис. б состоит из участков парабол.

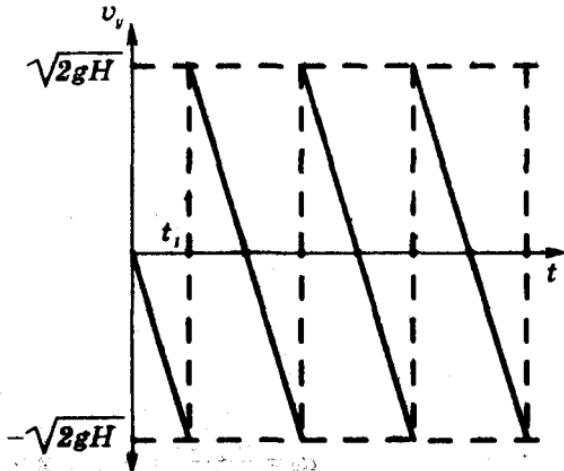


Рис. а

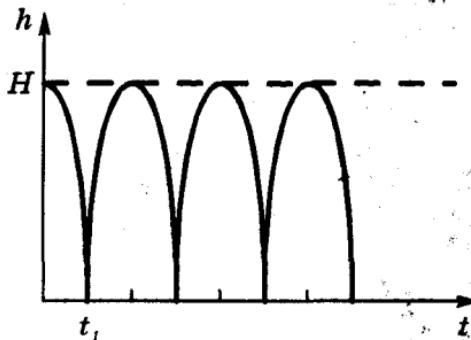


Рис. б к задаче 1.38

1.39. Ответ: см. рис. а, б, в.

Решение. Первые 3 с движение происходило с постоянным ускорением $a_{1x} = -2 \text{ м/с}^2$, следующие 2 с — без ускорения и последние 2 с — с ускорением $a_{2x} = 1 \text{ м/с}^2$. После этого тело остается неподвижным. График $a_x(t)$ показан на рис. а.

$$s_x = v_{0x}t + \frac{a_{1x}t^2}{2} = 4t - t^2 \quad (\text{здесь и}$$

далее численные значения, входящие в формулы, приводятся без указания единиц измерения; все величины измеряются в единицах СИ). График $s_x(t)$ в этом интервале (см. рис. б) представляет собой параболу с вершиной при $t = 2 \text{ с}$ (в этот момент скорость тела обращается в нуль). Поскольку $s_x = 3 \text{ м}$ при $t = 3 \text{ с}$, в течение следующих двух секунд $s_x = 3 - 2(t - 3)$. Величина $t - 3$ представляет собой время равномерного движения. Отсюда $s_x = 9 - 2t$; при $t = 5 \text{ с}$ (к моменту, когда равномерное движение заканчивается) находим $s_x = -1 \text{ м}$.

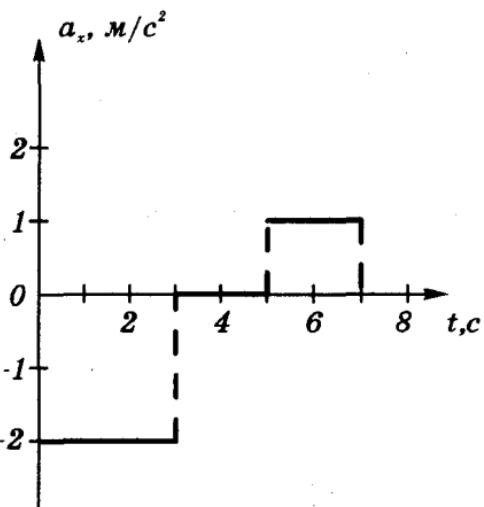


Рис. а

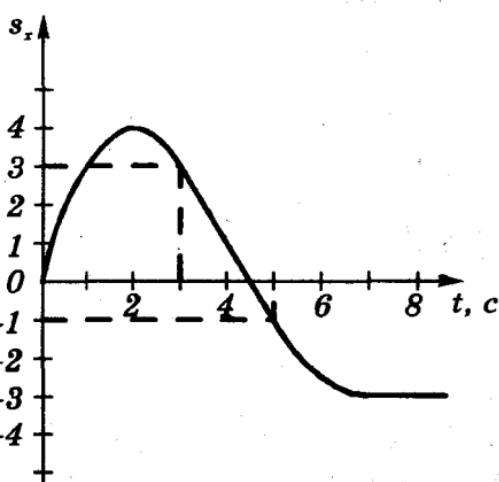


Рис. б

Аналогично для третьего этапа движения

$$s_x = -1 - 2(t - 5) + \frac{(t - 5)^2}{2}.$$

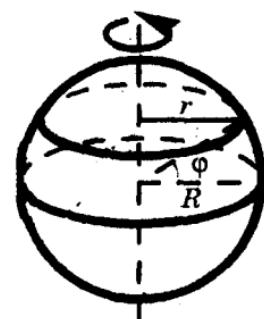
Отметим, что при $t = 3$ с и $t = 5$ с график $s_x(t)$ не испытывает изломов; различные его участки плавно переходят один в другой. Это обусловлено непрерывностью графика $v_x(t)$: мгновенных изменений v_x ,

т. е. изменений угла на-

клона касательной к графику $s_x(t)$, не происходит. Для получения графика $l(t)$ достаточно заметить, что путь увеличивается при любом изменении s_x . Поэтому убывающие участки графика $s_x(t)$ необходимо симметрично «отразить» вверх, сохраняя непрерывность графика (см. рис. 6).

1.40. Ответ: $v = 300$ м/с; $a = 2,2$ см/с².

Решение. Разумеется, нам потребуется только одна координата Харькова — широта $\phi = 50^\circ$. Точка земной поверхности на этой широте (см. рисунок) описывает относительно центра Земли окружность радиуса $r = R \cos \phi$. Период обращения $T = 1$ сут = 86400 с. Линейная скорость вращения

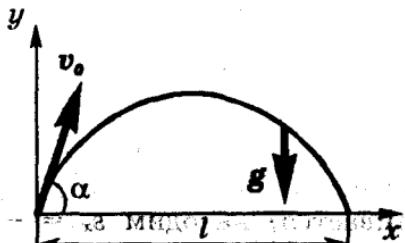


$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi R \cos \phi}{T} = 300 \text{ м/с},$$

а центростремительное ускорение

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 R \cos^2 \phi}{T^2} = 2,2 \text{ см/с}^2.$$

1.41. Решение. В отсутствие сопротивления воздуха тело движется с постоянным ускорением g (хотя движение и криволинейное). Выберем систему координат с началом в точке броска, как показано на рисунке. Поскольку $g_x = 0$, проекция тела на ось x совершает равномерное дви-



жение. Тело как бы участвует одновременно в двух движениях — в равномерном вдоль оси x и в равноускоренном вдоль оси y .

Координаты тела изменяются по закону $x = v_{0x}t$; $y = v_{0y} \cdot t - \frac{gt^2}{2}$,

где $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ и $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$.

Время полета определим из условия $y = 0$, откуда

$$t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Дальность полета l — это координата x в момент падения:

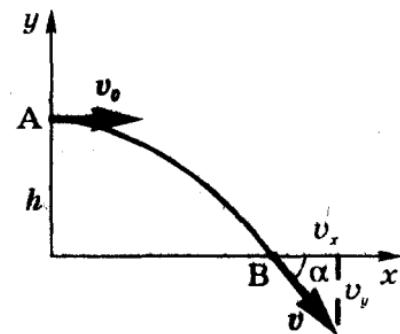
$$l = v_{0x} \cdot t = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Очевидно, максимальная дальность достигается при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. $\alpha = 45^\circ$. Найти уравнение траектории тела — значит связать непосредственно x и y , исключив t . Выразив t через x с помощью соотношения $t = \frac{x}{v_{0x}}$ и подставив значение t в формулу для y , получим:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x - \frac{gx^2}{2v_{0x}^2} = xt \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2.$$

Это уравнение параболы.

1.42. Решение. Время движения пули такое же, как у свободно падающего тела: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ (t не зависит от v_0 , поскольку проекция v_0 на ось y равна 0). Проекции скорости пули на оси координат: $v_x = v_{0x} = v_0$, $v_y = v_{0y} + gyt = -gt$. Поэтому (см. рисунок):



$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{gt}{v_0} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}.$$

1.43. Ответ: $\alpha = 76^\circ$.

Решение. Дальность «полета» $L = \frac{2v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}$ (см. задачу 1.41).

Высоту подъема можно определить из формулы:

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Приравнивая H и L , получаем $\operatorname{tg} \alpha = 4$, т. е. $\alpha = \arctg 4 = 76^\circ$.

1.44. Ответ: $t = 102$ с; $H = 12,7$ км; $L = 88,4$ км.

1.45. Ответ: $v_0 = \cos\alpha \sqrt{\frac{gL}{2\sin\alpha}}$.

Указание. Удобно выбрать начало координат на вершине горы, ось x направить горизонтально, а ось y — вертикально вниз. Тогда координаты точки падения $x = L\cos\alpha$, $y = L\sin\alpha$ должны удовлетворять уравнению траектории горизонтально брошенного тела.

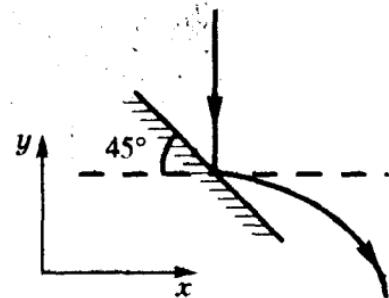
1.46. Ответ: $s = \sqrt{h^2 + \frac{2hv^2}{g}} = h \sqrt{1 + \frac{2v^2}{gh}}$.

Указание. s выражается через горизонтальную дальность s_x полета груза: $s = \sqrt{h^2 + s_x^2}$. В свою очередь, $s_x = vt$, где t — время полета.

1.47. Ответ: тело 2 упадет позже, чем тело 1; конечные скорости одинаковы. Время движения тела 2 будет максимальным, если площадку разместить на высоте $0,5H$.

Решение. После отражения (см. рисунок) скорость тела 2 направлена горизонтально (модуль ее не изменился), т. е. $v_y = 0$. Очевидно, в результате соударения время падения увеличится (гасится вертикальная скорость v_y). Насколько же оно увеличится? Пусть площадка расположена на высоте $h < H$. Тогда для первого тела время и конечная скорость падения составят:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \quad v_1 = \sqrt{2gH}.$$



Для второго тела к моменту удара о площадку

$$t_2' = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}, \quad v_2' = \sqrt{2g(H-h)}.$$

Время падения после удара о площадку — это просто время свободного падения без начальной скорости с той же высоты: $t_2'' = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Полное время падения второго тела

$$t_2 = t_2' + t_2'' = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Тогда $\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{1 - \frac{h}{H}} + \sqrt{\frac{h}{H}}$; покажем, что это отношение больше единицы. Возведем его в квадрат:

$$\frac{t_2^2}{t_1^2} = 1 + 2\sqrt{\frac{h}{H}\left(1 - \frac{h}{H}\right)} > 1.$$

При $h \rightarrow 0$ или $h \rightarrow H$ получаем $t_2 \rightarrow t_1$. Наибольшая «задержка» падения происходит при $h = 0,5 H$, когда $t_2 = t_1\sqrt{2}$ (см. математическое приложение). Вернемся к вопросу о конечной скорости

падения. Для второго тела этот вопрос теперь звучит так: с какой скоростью v_2 упадет тело, если оно брошено с высоты h горизонтально со скоростью v_2 ? Ответ (см. задачу 1.42):

$$v_2 = \sqrt{v_2'^2 + 2gh} = \sqrt{2gH}.$$

Итак, $v_2 = v_1$, то есть оба тела упадут с одинаковой по модулю скоростью. В начале изучения механики этот результат не может не удивлять! Но мы советуем вернуться к этой задаче после изучения закона сохранения энергии в механике.

1.48. Ответ: $t_1 = 0,75$ с; $t_2 = 2,8$ с.

Решение. Начертим примерный вид траектории тела (см. рисунок) и сразу же увидим, что таких моментов будет два. Они определяются из условия $|v_y| = v_0 \cdot \operatorname{tg}\beta$; учитывая, что $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$ и $v_x = v_0 \cos\alpha$ (горизонтальная составляющая скорости неизменна), получаем:

$$v_0 \sin\alpha - gt = \pm v_0 \cos\alpha \operatorname{tg}\beta, \text{ откуда } t = \frac{v_0}{g} (\sin\alpha \pm \operatorname{tg}\beta \cdot \cos\alpha).$$

1.49. Ответ: $m = 7,2$ кг.

Решение. Определим сначала время полета каждой из капель воды. Это время (см. решение задачи 1.41) $t = \frac{2v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$. В воздухе находится вода, вытекающая из шланга именно за время t . Массу этой воды определить нетрудно: это масса воды в цилиндре высотой $v_0 t$ и площадью основания S .

$$m = \rho S v_0 t = \rho S \frac{2v_0^2 \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{2\rho v_0^2 S \cdot \sin\alpha}{g} = 7,2 \text{ кг.}$$

1.50. Ответ: $\sqrt{g(H + \sqrt{H^2 + s^2})}$.

Решение. Нужно рассматривать только траектории движения мяча, почти касающиеся вершины стены, т. е. проходящие через точку с координатами s и H (см. рис. а). Следовательно, значения $x = s$ и $y = H$ удовлетворяют уравнению траектории (см. задачу 1.41):

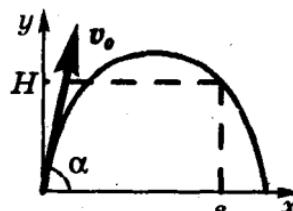


Рис. а

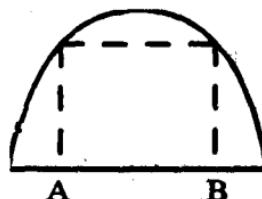


Рис. б

$$H = s \operatorname{tg} \alpha - \frac{gs^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}. \quad (1)$$

Остается выяснить, какое минимальное значение v_0 удовлетворяет этому соотношению. Перепишем формулу (1) в виде

$$\frac{gs^2}{2v_0^2} = s \sin \alpha \cos \alpha - H \cos^2 \alpha = -\frac{H}{2} + \frac{1}{2}(s \sin 2\alpha - H \cos 2\alpha).$$

Максимально возможное значение выражения, стоящего в скобках, равно $\sqrt{H^2 + s^2}$ (см. математическое приложение). Следовательно, $\frac{gs^2}{2v_0^2} < \frac{\sqrt{H^2 + s^2} - H}{2}$ и $\frac{gs^2}{v_{0\min}^2} = \sqrt{H^2 + s^2} - H$.

Отсюда $v_{0\min}^2 = \frac{gs^2}{\sqrt{H^2 + s^2} - H} = g(H + \sqrt{H^2 + s^2})$. Итак,

$$v_{0\min} = \sqrt{g(H + \sqrt{H^2 + s^2})}.$$

Советуем проверить справедливость этого ответа в предельных случаях ($H \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$); обратите также внимание, что траектория мяча касается вершины стены отнюдь не в вершине параболы (как могло бы показаться), а на нисходящей ветви траектории. Почему именно на нисходящей, а не на восходящей? Предположим обратное: стена расположена в точке A , а оптимальная траектория имеет вид, показанный на рис. б. Тогда стену можно «перевинуть» в любую точку отрезка AB , и мяч все равно перелетит через нее! Но ведь с увеличением s необходимое значение $v_{0\min}$ должно возрастать — это следует из полученной нами формулы (да и без формулы достаточно очевидно). Таким образом, наше предположение привело к противоречию, а, значит, траектория мяча касается вершины стены действительно на нисходящей ветви траектории.

1.51. Решение. Траектория шарика — дуга окружности. Но это еще не означает, что ускорение шарика обязательно направлено к центру окружности: так будет только при *равномерном движении по окружности!* В таком случае центростремительное (или нормальное) ускорение a_n действительно направлено по радиусу и равно по величине v^2/R . Но в данном случае движение отнюдь не

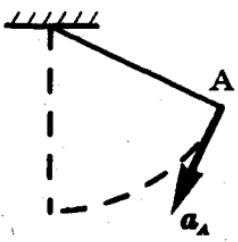


Рис. а

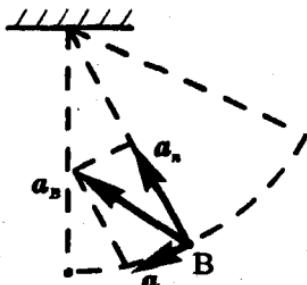


Рис. б

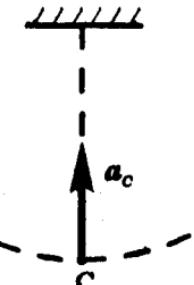


Рис. в

равномерное! Значит, должна быть и составляющая ускорения, параллельная скорости, т. е. направленная по касательной к окружности. Эту составляющую называют тангенциальным ускорением (a_t). Если a_n «отвечает» за искривление траектории, то есть изменение направления скорости, то a_t — за изменение ее модуля (разгон или торможение). Полное ускорение $a = a_n + a_t$. Рассмотрим ускорение шарика в каждой из точек.

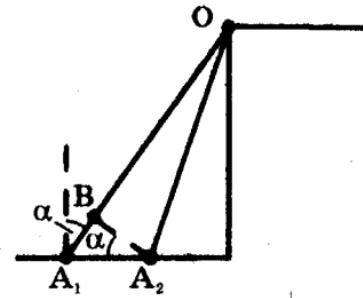
Точка A (см. рис. а). В этой точке шарик на мгновение останавливается, $v = 0$. Значит, $a_n = 0$, и остается только a_t , направленное по касательной вниз.

Точка B (см. рис. б). Здесь $a_n \neq 0$, $a_t \neq 0$. Примерное направление полного ускорения a показано на рисунке.

Точка C (см. рис. в). В этой точке скорость максимальна (уже не растет, еще не убывает). Поэтому $a_t = 0$, остается лишь a_n , направленное по радиусу к центру окружности.

$$1.52. \text{Ответ: } v = \frac{v_0}{\sin \alpha}.$$

Решение. Рассмотрим два положения лодки, разделенные малым промежутком времени Δt (см. рисунок). Очевидно, $A_1A_2 = v\Delta t$. За время Δt человек выбирает отрезок веревки, равный $v_0\Delta t$. Значит, $OA_1 - OA_2 = v_0\Delta t$. Отложим на отрезке OA_1 отрезок $OB = OA_2$. Тогда $A_1B = v_0\Delta t$. При малых Δt отрезок A_2B можно считать перпендикулярным A_1O . Поэтому из треугольника A_1A_2B получаем $A_1B = A_1A_2 \sin \alpha$ и $v = \frac{v_0}{\sin \alpha}$.



Стоит обратить внимание на то, что $v > v_0$, и скорость лодки растет по мере приближения к берегу. Типичной ошибкой является попытка «направить» вектор v_0 вдоль веревки и приравнять его горизонтальную проекцию скорости v . На самом деле все обстоит наоборот: скорость вытягивания веревки равна проекции скорости лодки на направление веревки.

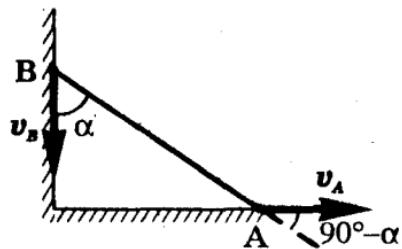
$$1.53. \text{Ответ: } u = \frac{v}{\cos \alpha}.$$

Указание. См. задачу 1.52.

$$1.54. \text{Ответ: } 3,5 \text{ м/с.}$$

Решение. Скорость нижнего края лестницы относительно верхне-

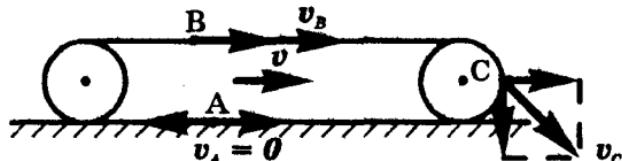
го края $v_{\text{отн}} = v_A - v_B$. Если бы точки A и B (см. рисунок) не были жестко связаны между собой, скорость $v_{\text{отн}}$ могла бы быть направлена как угодно. Однако жесткая связь приводит к тому, что отрезок AB (точки A и B связаны с лестницей) может лишь поворачиваться и сдвигаться как целое, а не укорачиваться или удлиняться (в системе отсчета, связанной с B , точка A описывает окружность). Значит, $v_{\text{отн}}$ перпендикулярна AB и проекция $v_{\text{отн}}$ на AB равна нулю: $(v_A - v_B)_{AB} = 0$, т. е. $(v_A)_{AB} = (v_B)_{AB}$.



Проекции скоростей обеих точек на соединяющий их отрезок одинаковы! Разумеется, этот вывод справедлив для любых двух точек недеформируемого твердого тела. В данном случае это приводит к уравнению $v_A \sin \alpha = v_B \cos \alpha$, откуда $v_B = v_A \tan \alpha = 3,5 \text{ м/с}$.

1.55. Ответ: а) 0; б) 20 м/с; в) 14 м/с.

Решение. Перейдем в систему отсчета, связанную с трактором. В этой системе отсчета скорости всех точек гусениц имеют одинаковый модуль $v_{\text{гус}}$ и различаются лишь направлением. Как связаны скорости v и $v_{\text{гус}}$? Учтем, что скорость точек нижней части гусениц относительно Земли равна нулю (нижние звенья гусениц некоторое время просто лежат на земле). Эту скорость можно пред-



ставить как сумму скоростей $v + v_{\text{гус},A}$ (скорость $v_{\text{гус},A}$ направлена назад). Значит, $v_{\text{гус}} = v$. Тогда для точки B на верхней части гусеницы $v_B = 2v = 20 \text{ м/с}$, а $v_C = \sqrt{v^2 + v^2} = v\sqrt{2} = 14 \text{ м/с}$.

1.56. Решение. а) Слова «катится без проскальзывания» означают, что точка диска, соприкасающаяся в данный момент с дорогой, имеет нулевую скорость (не случайно мокрое колесо оставляет на асфальте столь четкий след). Эта ситуация очень похожа на описанную в задаче 1.55. В системе отсчета, связанной с центром диска, все точки обода

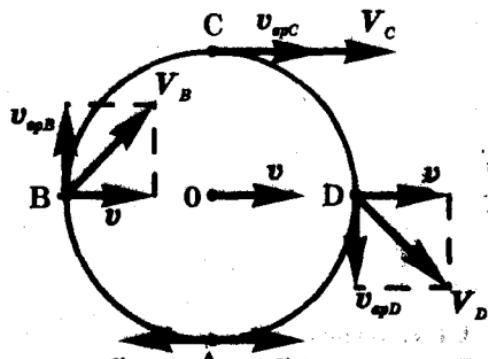


Рис. а

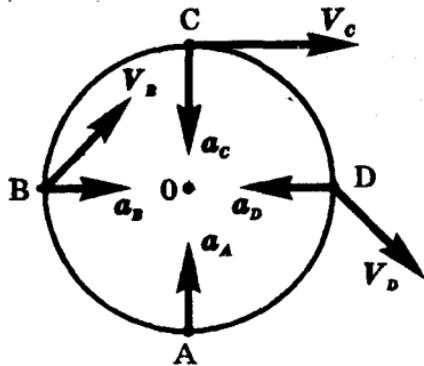


Рис. 6

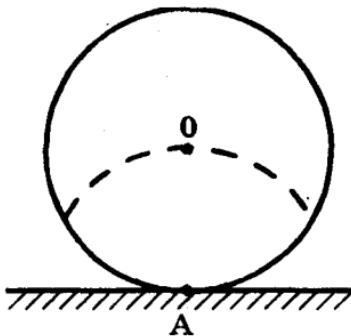


Рис. в

движутся по окружности с одинаковой по модулю скоростью $v_{\text{вр}}$. Скорость V точки диска относительно неподвижного наблюдателя является суммой скоростей: $V = v + v_{\text{вр}}$. На рис. а показаны направления $v_{\text{вр}}$ для различных точек обода. Очевидно, $V_A = 0$ только при $v_{\text{вр}} = v$. Тогда $V_B = V_D = v\sqrt{2}$; $V_C = 2v$.

Для определения ускорений точек тоже удобно «разбиение» движения на поступательное и вращательное. Однако поступательное движение с *постоянной* скоростью v не дает вклада в ускорение точек. Значит, надо учитывать только вращательное движение с *постоянной* линейной скоростью v по окружности радиусом R . Таким образом, все точки обода имеют одинаковое по модулю ускорение $a = \frac{v^2}{R}$, направленное к центру диска. Скорости и ускорения точек A, B, C, D показаны на рис. б ($V_A = 0$).

б) Поскольку $V_A = 0$, движение диска можно представить как вращение вокруг так называемой мгновенной оси вращения, проходящей через точку A . Тогда модуль скорости любой точки прямо пропорционален расстоянию от точки A . Интересующие нас точки лежат на окружности радиусом R с центром в точке A (рис. в). Однако попытка воспользоваться мгновенной осью вращения для определения ускорений точек диска привела бы к ошибке (можете убедиться в этом сами!). Дело в том, что эта ось не связана «жестко» с какой-либо из точек диска.

$$1.57. \text{ Ответ: а)} u = \frac{Rv}{R - r}; \text{ б)} u = \frac{Rv}{R + r}.$$

Решение 1. В обоих случаях скорость v совпадает со скоростью той точки катушки, где начинается прямолинейный участок нити. Для определения скорости u оси катушки удобно воспользоваться понятием *мгновенной оси вращения* (см. решение задачи 1.56).

Очевидно, для случая *a*

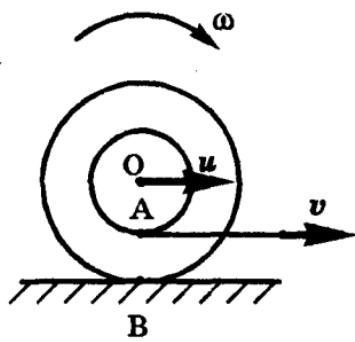
$$\frac{u}{v} = \frac{R}{R-r}; u = \frac{Rv}{R-r}.$$

Для случая *b*

$$\frac{u}{v} = \frac{R}{R+r}; u = \frac{Rv}{R+r}.$$

В обоих случаях катушка движется в ту же сторону, в которую тянут нить. В случае *a* нить наматывается на катушку ($u > v$); в случае *b* нить сматывается с катушки ($u < v$). В случае *a* очень часто предсказывают движение катушки в противоположном направлении, ссылаясь при этом на собственный опыт. Как ни странно, сделанный при решении задачи вывод действительно может не подтвердиться при проведении опыта. Дело в том, что если конец нити потянуть достаточно «резко», то проскальзывания катушки избежать трудно.

Решение 2. а) Скорость любой точки катушки складывается (векторно) из скорости поступательного движения катушки u и скорости вращения, равной произведению угловой скорости ω катушки на расстояние точки от оси катушки (см. рисунок). Воспользуемся тем, что нам известны скорости точек *A* и *B*:



$$v_A = u - \omega r = v, v_B = u - \omega R = 0. \text{ Отсюда } u = \frac{Rv}{R-r}.$$

Аналогично можно рассмотреть и случай *b*.

1.58. Решение. Осколки разлетаются по различным параболическим траекториям. Важно, что все они движутся с одинаковым и постоянным ускорением g . При отсутствии тяготения они, очевидно, двигались бы равномерно и прямолинейно и заполняли бы расширяющуюся сферу радиуса $v_0 t$ с центром в точке взрыва. Но ведь тяготение легко «убрать» — именно потому, что ускорения у всех осколков одинаковы! Переходим в систему отсчета, связанную с телом, которое начало бы свободно падать в момент разрыва снаряда (так двигался бы сам снаряд, остался он целым). В этой системе отсчета ускорения у всех осколков отсутствуют, т. е. «тяготения нет». Значит, «облако осколков» — сфера радиуса $v_0 t$, центр которой опускается с ускорением g без начальной скорости от места разрыва снаряда (вспомните праздничные фейерверки).

1.59. Решение. К моменту первого удара скорость мяча $v_1 = \sqrt{2gH}$. Выберем систему координат, как показано на рисунке. При каждом ударе v_x не изменяется, а v_y меняет знак, сохраняя величину; поэтому к моменту следующего удара о наклонную плоскость v_y принимает то же значение, т. е. после каждого из

ударов $v_y = v_{1y} = \sqrt{2gH} \cdot \cos\alpha$. Поэтому время полета τ после каждого отскока одно и то же:

$$\tau = \frac{2v_{1y}}{g \cos\alpha} = 2\sqrt{\frac{2H}{g}} = 2\tau_0,$$

где τ_0 — время падения шарика из начальной точки.

Таким образом, координата n -го соударения шарика с плоскостью

$$x_n = \frac{g \cdot t_n^2}{2} = \frac{g \sin\alpha (2n - 1)^2 \tau_0^2}{2}$$

Здесь $t_n = (2n - 1)\tau_0$ — время от начала движения до n -го удара. Расстояние между ближайшими точками соударений

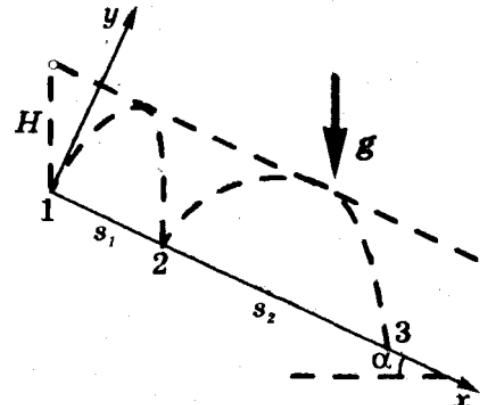
$$s_n = x_{n+1} - x_n = 4hg \sin\alpha \cdot \tau_0^2 = 8nH \sin\alpha.$$

Поскольку s_n прямо пропорционально n , получаем:

$$s_1 : s_2 : s_3 : \dots = 1 : 2 : 3 : \dots$$

1.60. Ответ: $l = 41$ м.

Решение. Эту задачу удобнее всего решать в системе отсчета, связанной с движущимися автомобилями. Тогда можно считать, что сами автомобили неподвижны, а колеса равномерно врачаются. Наиболее удаленные от оси колеса точки имеют скорость v (см. решение задачи 1.56). Такую же начальную скорость имеет в момент отрыва от колеса и камешек. Наибольшее расстояние он пролетит, если его начальная скорость образует с горизонтальной плоскостью угол $\alpha = 45^\circ$ (см. решение задачи 1.41). Это расстояние составит $\frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v^2}{g}$. Итак, $l = \frac{v^2}{g}$. При скорости движения $v = 72$ км/ч = 20 м/с получаем $l = 41$ м. При решении задачи мы не учитывали, что «точка броска» расположена несколько выше уровня земли. Для грузового автомобиля с большими колесами это может оказаться весьма существенным.



1.61. Ответ: а) 5,0 м/с; б) 10 м/с.

Решение. Два соседних кадра разделены промежутком времени $\Delta t = 1/24$ с.

Угол между соседними спицами $\phi = \frac{2\pi}{N}$.

Почему может возникнуть иллюзия «неправильного» вращения колеса? Пусть, например, на двух соседних кадрах спицы расположены, как показано на рисунке: 1, 2, ... 6 — начальные положения спиц, 1', 2', ... 6' — конечные. Но спицы на экране не пронумерованы

и неотличимы! Поэтому мы неосознанно воспринимаем спицу 1' как новое положение ближайшей к ней «старой» спицы 2, а 2' — как новое положение спицы 3, и т. д. Так возникает кажущееся обратное вращение. Это возможно, если угол поворота колеса за время Δt не менее $0,5\phi$. Тогда угловая скорость вращения колеса $\omega > \frac{\phi}{2\Delta t}$; скорость вращения крайних точек колеса (совпадающая со скоростью движения повозки, если нет проскальзывания)

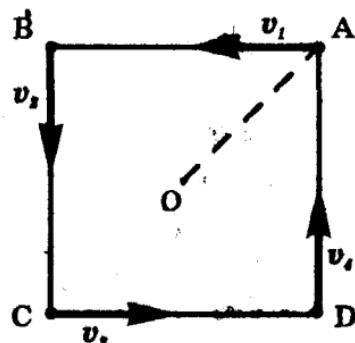
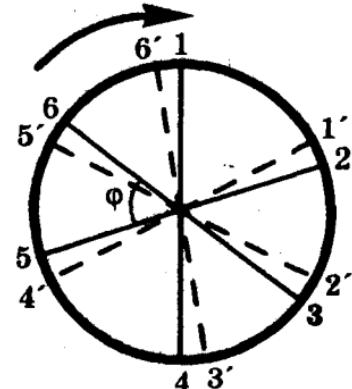
$$v > v_{\min} = \omega R = \frac{\pi R}{N \cdot \Delta t} = 5,0 \text{ м/с.}$$

Минимальная скорость, при которой колесо покажется невращающимся, будет соответствовать углу поворота ϕ за время Δt и составит $2v_{\min} = 10 \text{ м/с.}$

1.62. Ответ: для четырех черепах $t = \frac{a}{v}$; для трех $t = \frac{2a}{3v}$.

Решение. Из соображений симметрии очевидно, что в любой момент черепахи будут находиться в вершинах квадрата. Этот квадрат поворачивается и «съезжается». Встреча всех черепах произойдет в центре исходного квадрата. Скорость приближения к этой точке можно определить, спроектировав скорость v_1 на отрезок OA (см. рисунок): это

$$v \cdot \cos 45^\circ = \frac{v}{\sqrt{2}} = \text{const.}$$



Поскольку начальное значение отрезка OA равно $\frac{a}{\sqrt{2}}$, то

$$t = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{v} = \frac{a}{v \sqrt{2}}.$$

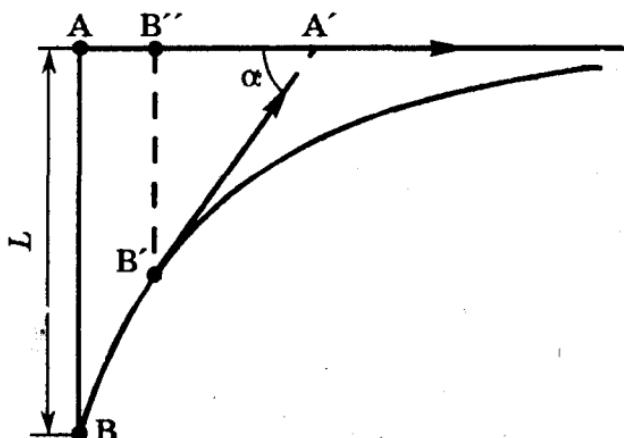
Такой результат можно получить и иначе, определив скорость уменьшения стороны квадрата. Эта скорость определяется проекциями на нее скоростей черепах:

$$\frac{\Delta(AB)}{\Delta t} = v_{2AB} - v_{1AB} = -v; t = \frac{a}{v}.$$

Аналогично (любым из приведенных способов) получаем, что для трех черепах $t = \frac{2a}{3v}$.

1.63. Ответ: $l = \frac{L}{2}$.

Решение. Пусть в начальный момент заяц был в точке A , а лиса — в точке B . Лиса бежит по дс. достаточно сложной кривой (см. рисунок), однако ч, подобно барону, не будем теряться и попробуем для начала определить, с какой скоростью лиса приближается к зайцу.



Пусть в некоторый момент лиса находится в точке B' и ее скорость направлена под углом α к скорости зайца. Проецируя обе скорости на направление скорости лисы, получаем, что скорость сближения лисы и зайца $v_1 = v - v \cos \alpha$. К сожалению, в эту формулу входит угол α , меняющийся со временем. Попробуем найти еще величину, куда входит угол α . Спроектируем положение лисы на линию тропинки (точка B''). В рассматриваемый момент точка B'' движется как раз со скоростью $v \cos \alpha$ и, значит, заяц удаляется от точки B'' со скоростью $v_2 = v - v \cos \alpha$. Скорости v_1 и v_2 совпали! Это означает, что расстояние $B''A'$ растет точно с такой же скоростью, с какой уменьшается расстояние $B'A'$, т. е. сумма этих расстояний остается *неизменной*! Мы нашли в нашей задаче своеобразный *закон сохранения*: $B''A' + B'A' = \text{const}$. Поскольку

в начальный момент $B''A' = 0$, а $B'A' = L$, получаем:

$$B''A' + B'A' = L. \quad (1)$$

Через достаточно большой промежуток времени (что нас и интересует) лиса будет бежать практически по самой тропинке, т. е. точки B' и B'' совпадут. Тогда $B''A' = B'A'$. Из формулы (1) следует, что $B''A' = B'A' = L/2$. Итак, через достаточно большое время ($t \gg L/v$) расстояние между лисой и зайцем будет вдвое меньше начального. Стоит, наверно, обратить внимание на то, что мы не можем найти вид траектории движения лисы в этой задаче: ее движение является слишком сложным. Но это не помешало нам ответить на поставленные вопросы, потому что из переменных величин удалось составить постоянную величину, имеющую важный смысл.

1.64. Ответ: $t = \frac{uL}{u^2 - v^2}$.

Решение. Повторив рассуждения, приведенные в решении задачи 1.63, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} v_1 = u - v \cos \alpha, \\ v_2 = v - u \cos \alpha. \end{cases} \quad (1)$$

(заметим, что v_2 вначале положительна, но через некоторое время становится отрицательной, когда точка B'' начнет приближаться к точке A'). Исключая $\cos \alpha$ из уравнений (1), получим: $vv_2 - uv_1 = v^2 - u^2$, или (учитывая, что $v_1 = -\frac{\Delta A'B'}{\Delta t}$; $v_2 = \frac{\Delta A'B''}{\Delta t}$, а величины v и u постоянны):

$$\frac{\Delta(v \cdot A'B'' + u \cdot A'B')}{\Delta t} = v^2 - u^2 < 0.$$

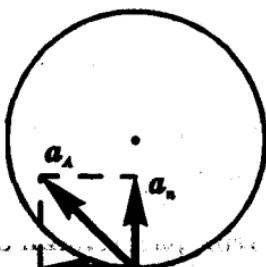
Итак, величина $v \cdot A'B'' + u \cdot A'B'$ убывает с постоянной скоростью $u^2 - v^2$. Начальное значение этой величины uL , конечное (в трагический для зайца момент) равно нулю. Промежуток времени между этими моментами $t = \frac{u \cdot L}{u^2 - v^2}$.

1.65. Ответ: $\omega = 1$ рад/с, $a_A = 0,20$ м/с².

Решение. Груз опускается равноускоренно.

Поэтому $v = \sqrt{2as}$. Скорость v груза совпадает с линейной скоростью точек на ободе шкива, значит, $\omega = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{2as}}{R} = 1$ рад/с.

Ускорение точки на ободе шкива складывается из нормального (центростремительного)



го) a_n и тангенциального a_t (см. рисунок). Ускорение a_t приводит к увеличению линейной скорости вращения точек обода шкива. Ускорение a_n одинаково по модулю для всех этих точек:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2as}{R},$$

поэтому $a_A = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = a \sqrt{\frac{4s^2}{R^2} + 1} = 0,20 \text{ м/с}^2$.

1.66. Ответ: удар происходит при подъеме мяча; $h = 2,1 \text{ м}$;

$v = 7,7 \text{ м/с}$; мяч упадет на расстоянии $7,2 \text{ м}$ от стены.

Решение. Определим дальность L полета мяча в отсутствие стены (см. решение задачи 1.41):

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 10,2 \text{ м.}$$

Поскольку $l < 0,5L$, удар происходит при подъеме мяча. Для определения высоты h проще всего воспользоваться уравнением траектории полета (см. решение задачи 1.41), заменив x на l , y на h :

$$h = lt \operatorname{tg} \alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 2,1 \text{ м.}$$

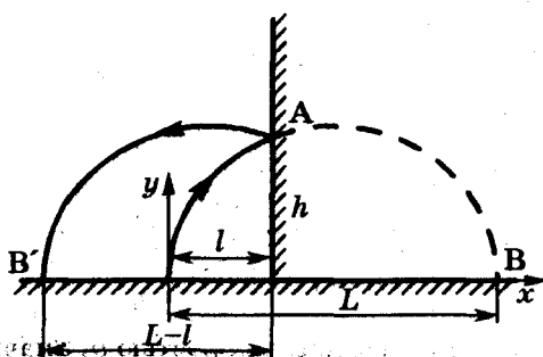
Скорость в точке A можно выразить через ее горизонтальную и вертикальную проекции: $v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2}$.

Если учесть, что $v_{Ax} = v_{0x}$, а $v_{Ay}^2 - v_{0y}^2 = -2gh$, получим:

$$v_A = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2 - 2gh} = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 7,7 \text{ м/с.}$$

(Эта формула может быть получена сразу из закона сохранения механической энергии.)

При упругом ударе о стену проекция скорости v_y не изменяется, а v_x просто меняет знак. Значит, участок траектории AB' симметричен продолжению первоначальной параболической траектории AB относительно плоскости стены (см. рисунок). Если стену «убрать», мяч ударится о землю на таком же расстоянии от



основания стены, но по другую сторону. Очевидно, это расстояние равно $L - l = 7,2$ м.

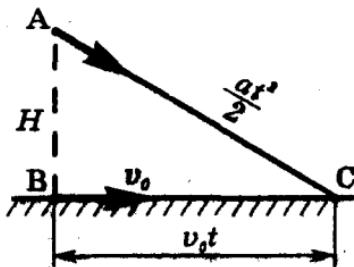
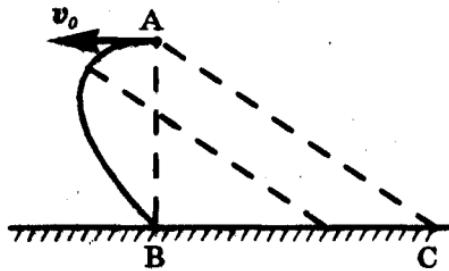
$$1.67. \text{Ответ: } t = \frac{v_0}{a} \cdot \sqrt{2 \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{aH}{v_0^2} \right)^2} \right)}.$$

Решение. Муха не может двигаться к капле меда по кратчайшему пути — сначала придется «погасить» начальную скорость v_0 , а на это нужно время. Траектория явно будет криволинейной. Однако легко указать систему отсчета, в которой траектория мухи прямолинейна, — это система отсчета, движущаяся со скоростью v_0 относительно стола. В этой системе отсчета муха A вначале неподвижна и может начинать движение в любом направлении, а капля меда B убегает от нее по столу со скоростью, по модулю равной v_0 . Теперь даже муха сообразит: двигаться нужно по прямой на некую «упрежденную» точку C , и двигаться нужно с максимальным возможным ускорением a (см. рис. *а*) Тогда

$$AC = \frac{at^2}{2}, BC = v_0 t.$$

Из прямоугольного треугольника ABC : $\left(\frac{at^2}{2} \right)^2 = (v_0 t)^2 + H^2$, откуда

$$t = \frac{v_0}{a} \cdot \sqrt{2 \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{aH}{v_0^2} \right)^2} \right)}.$$

Рис. *а*Рис. *б*

В неподвижной системе отсчета ускорение мухи то же (так как $v_0 = \text{const}$); значит, движение будет равноускоренным. Однако за счет начальной скорости траектория превращается в параболу, ось которой параллельна a (т. е. отрезку AC). Примерный вид траектории показан на рис. *б*.

1.68. Решение. Эту задачу естественно решать в системе отсчета, связанной с автомобилем. В этой системе отсчета точки обода колеса движутся по окружности со скоростью v . Значит, камешек начнет двигаться вертикально вверх именно с такой скоростью.

Полное время его полета (до падения на колесо) $t = \frac{2v}{g}$. Согласно условию, за это время колесо должно совершить целое число k оборотов:

$$t = k \cdot \frac{2\pi R}{v},$$

откуда $v = \sqrt{k \cdot \pi g R} = 2,5 \text{ м/с} \cdot \sqrt{k}$.

Итак, подходящих значений скорости достаточно много. Даже при $k = 100$ получаем вполне реальное значение скорости (около 90 км/ч).

2.1. Ответ: $P = 640 \text{ Н}$.

Решение. Прежде всего заметим, что само по себе движение лифта в любом направлении и с любой (но постоянной!) скоростью не может влиять на вес находящихся в нем тел: это противоречило бы первому закону Ньютона. Чтобы определить, как влияет на вес тела в лифте ускорение лифта a , запишем для этого тела второй закон Ньютона:

$$ma = mg + N.$$

Здесь N — сила реакции со стороны пола лифта (см. рисунок). Проецируя это векторное равенство на ось y , получаем:

$$-ma = -mg + N,$$

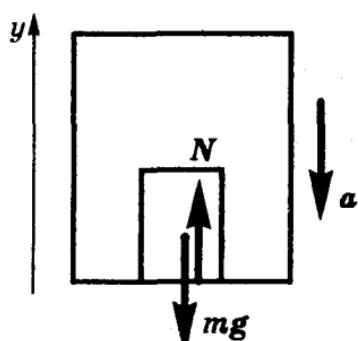
откуда $N = m(g - a)$. Остается лишь заметить, что найденная величина равна как раз весу тела: ведь согласно третьему закону Ньютона сила, с которой тело давит на пол (вес тела P), равна по модулю и противоположна по направлению силе, с которой пол действует на тело (силе реакции опоры N): $P = -N$.

Итак, $P = N = m(g - a) = 640 \text{ Н}$.

Вес тела уменьшается, когда ускорение тела направлено вниз (совсем не обязательно, чтобы само тело при этом двигалось вниз!). Аналогично, когда ускорение направлено вверх, $P = m(g + a) > mg$, т. е. вес увеличивается. В заключение хочется пожелать барону найти столь же простое решение проблемы лишней массы тела.

2.2. Ответ: 22 кН, 42 кН.

Решение. Фактически речь идет об определении веса P движущегося автомобиля. Вес автомобиля при движении по криволинейной траектории не совпадает с весом $mg = 32 \text{ кН}$ неподвижного автомобиля, поскольку автомобиль движется с ускорением. В



середине выпуклого моста это ускорение равно $\frac{v^2}{R}$ и направлено вертикально вниз. Следовательно (см. задачу 2.1), $P = m(g - \frac{v^2}{R}) = 22$ кН. В середине вогнутого моста центробежное ускорение автомобиля направлено вверх, поэтому $P = m(g + \frac{v^2}{R}) = 42$ кН.

2.3. Ответ: $t = \sqrt{\frac{2m(g-a)}{ak}}$ при $a < g$, $t = 0$ при $a > g$.

Решение. До момента отрыва предмет движется вниз с ускорением a под действием силы тяжести mg , силы упругости пружины $F_{\text{упр}}$ и силы реакции опоры N (см. рисунок). В момент отрыва сила N обращается в нуль. Проектируем уравнение второго закона Ньютона на вертикальную ось: $ma = mg - F_{\text{упр}}$. Используя закон Гука $F_{\text{упр}} = kx$ и соотношение $x = \frac{at^2}{2}$ для удлинения пружины x , получаем

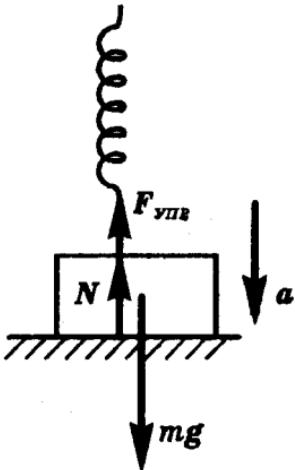
$$t = \sqrt{\frac{2m(g-a)}{ak}}.$$

Время t уменьшается при увеличении a , при $a = g$ оно обращается в нуль. Очевидно, при $a > g$ предмет не успевает за подставкой и сразу отрывается от нее, т. е. $t = 0$.

2.4. Решение. На этот вопрос часто дают неверный ответ: когда туловище движется вниз, показание весов уменьшается, при движении вверх — увеличивается. Напомним, что на самом деле вес тела зависит не от скорости его движения, а от ускорения (см. задачу 2.1). На начальной стадии приседания ускорение туловища направлено вниз, и вес тела (показания весов) уменьшается. В конце приседания движение вниз замедляется; ускорение направлено вверх, и вес увеличивается. При выпрямлении вес человека сначала увеличивается, а затем уменьшается.

2.5. Ответ: $a = 2,0 \text{ м/с}^2$, $T = 1,2 \text{ Н}$, $F = 2,4 \text{ Н}$.

Решение. Благодаря нерастяжимости шнура величины перемещения обоих грузов (a , значит, и их ускорения a_1 и a_2) всегда одинаковы: $a_1 = a_2 = a$. Пренебрегая массами шнура и блока, а также трением в блоке, мы можем считать силу T натяжения шнура всюду одинаковой. На рис. a показаны действующие на



грузы силы. Запишем уравнения второго закона Ньютона для каждого из грузов:

$$m_1a_1 = m_1g + T, \quad m_2a_2 = m_2g + T.$$

В проекции на ось y уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} m_1a_1 = -m_1g + T, \\ -m_2a_2 = -m_2g + T. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение системы из первого, получаем $a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g = 2,0 \text{ м/с}^2$.

Тогда $T = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2} = 1,2 \text{ Н}$. Для нахождения силы F упругости пружины динамометра достаточно рассмотреть силы, действующие на блок (см. рис. б). Условие равновесия блока имеет вид $F + 2T = 0$, откуда $F = 2T = 2,4 \text{ Н}$.

Как правило, обязательной после решения задачи считается проверка размерности полученного результата и правдоподобности (реальности) полученного численного значения. Однако такие проверки не всегда обнаруживают допущенную ошибку. На примере данной задачи покажем еще два эффективных метода проверки. Первый из них — проверка на симметрию. Очевидно, что если поменять грузы местами, то натяжение шнура и величина ускорения грузов не должны измениться. Полученные для a и T выражения удовлетворяют этому требованию (при замене $m_1 \leftrightarrow m_2$ значение T не изменяется, а ускорение a лишь меняет знак). Второй метод — проверка на частные и предельные случаи. Ведь даже до решения задачи ясно, что при $m_1 = m_2 = m$ ускорение равно нулю, а $T = mg$; при $m_1 \rightarrow 0$ должно быть $a \rightarrow g$, $T \rightarrow 0$ (груз m_2 при свободном падении находится в состоянии невесомости). Полученные для a и T формулы удовлетворяют этому требованию.

Обратим внимание на то, что вес обоих грузов одинаков, как бы сильно ни отличались их массы: ведь оба груза действуют на нить с одинаковыми силами. Вес большего груза меньше m_2g , поскольку ускорение этого груза направлено вниз; меньший груз, ускорение которого направлено вверх, испытывает «перегрузку».

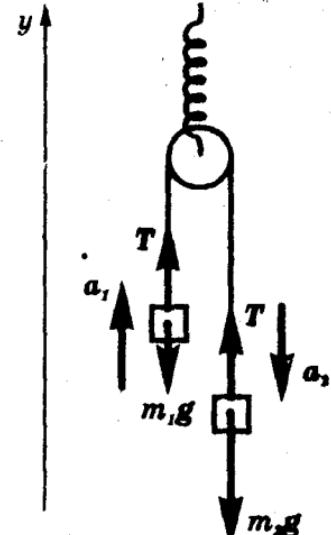


Рис. а



Рис. б

2.6. Ответ: $a = \frac{m_2 \sin \beta - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2} g$, $T = \frac{m_1 m_2 g (\sin \alpha + \sin \beta)}{m_1 + m_2}$.

Решение. На рисунке показаны силы, действующие на каждый из грузов. Напомним, что $T_1 = T_2 = T$ (см. задачу 2.5). Считая, как обычно, нить нерастяжимой, получаем $a_1 = a_2 = a$ (направления ускорений выбраны предположительно, они могут оказаться и противоположными истинным направлениям). Уравнения второго закона Ньютона в векторной форме для каждого из грузов имеют вид:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g + N_1 + T_1, \\ m_2 a_2 = m_2 g + N_2 - T_2. \end{cases}$$

Спроектируем каждое из этих уравнений на «свою» ось, параллельную соответствующей наклонной плоскости:

x_1	$m_1 a = -m_1 g \sin \alpha + T,$	(1)
x_2	$m_2 a = m_2 g \sin \beta - T.$	

Складывая оба уравнения, получаем

$$a = \frac{m_2 \sin \beta - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2} g$$

(при $m_1 \sin \alpha > m_2 \sin \beta$ векторы a_1 и a_2 направлены противоположно направлениям осей x_1 и x_2 соответственно). Подстановка этого выражения в любое из уравнений системы (1) приводит к результату:

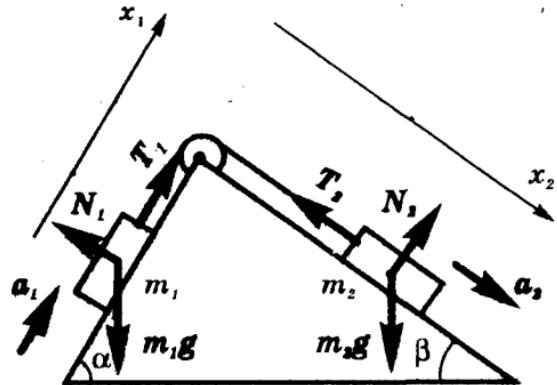
$$T = \frac{m_1 m_2 g (\sin \alpha + \sin \beta)}{m_1 + m_2}.$$

2.7. Ответ: $a_1 = \frac{2(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2} g$, $a_2 = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} g$, $T = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}$.

Указание. Из нерастяжимости нити следует, что перемещения грузов связаны соотношением $s_1 = 2s_2$, поэтому $a_1 = 2a_2$. Уравнения движения грузов имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - T, \\ m_2 a_2 &= 2T - m_2 g \end{aligned}$$

($a_1 > 0$, $a_2 > 0$ соответствует направлению a_1 вниз, a_2 — вверх).



2.8. Ответ: $F = F_1 \frac{l-x}{l} + F_2 \frac{x}{l}$.

Решение. Левая часть стержня имеет массу $\frac{mx}{l}$, а правая — $\frac{m(l-x)}{l}$. Обе части движутся с одинаковым ускорением a под действием приложенных к ним сил. Значит,

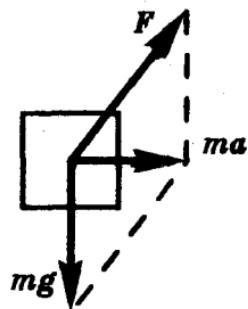
$$\frac{mx}{l}a = F_1 - F, \quad \frac{m(l-x)}{l}a = F - F_2.$$

Отсюда $a = \frac{F_1 - F_2}{m}$ (как и следовало ожидать), $F = F_1 \frac{l-x}{l} + F_2 \frac{x}{l}$.

Если $x \rightarrow 0$, то $F \rightarrow F_1$; если $x \rightarrow l$, то $F \rightarrow F_2$.

2.9. Ответ: $P = 49,25$ Н.

Решение. Груз вместе с вагоном движется на повороте с ускорением $a = \frac{v^2}{R}$, направленным горизонтально (к центру поворота). Это ускорение сообщает грузу равнодействующая силы тяжести mg и силы F упругости пружины (см. рисунок): $ma = mg + F$. Из рисунка видно, что $F = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2}$.



Согласно третьему закону Ньютона, $P = F$,

откуда $P = m \sqrt{g^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} = 49,25$ Н, что на 0,25 Н превышает вес груза при движении без ускорения.

2.10. Ответ: $P = m \sqrt{g^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} = 4,4$ кН; в 6,4 раза.

Указание. См. задачу 2.9.

2.11. Ответ: а) $T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F = 1,2$ Н. б) $T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F = 0,8$ Н.

Указание. Обратите внимание на то, что сила T сообщает в случаях 1 и 2 одно и то же ускорение телам разной массы.

2.12. Ответ: $F < T + \mu M_1 g$ при $T < \mu M_2 g$;

$F < T \left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right)$ при $T > \mu M_2 g$.

Решение. Если сила F совсем мала, шнур даже не натягивается: для того, чтобы он натянулся, надо сначала сдвинуть с места первый груз. Минимальная сила, необходимая для этого, равна $\mu M_1 g$. Если $F > \mu M_1 g$, шнур натягивается; при дальнейшем увеличении F

натяжение будет увеличиваться до тех пор, пока либо шнур порвется, либо сдвинется второй груз. Если шнур непрочный, то $T < \mu M_2 g$, а $F_{\max} = \mu M_1 g + T$. Если шнур достаточно прочный, $T > \mu M_2 g$, и тогда силу F можно увеличивать до тех пор, пока второй груз не начнет двигаться с ускорением a_{\max} , определяемым из условия:

$$M_2 a_{\max} = T - \mu M_2 g, \text{ т. е. } a_{\max} = \frac{T - \mu M_2 g}{M_2}$$

(большее ускорение второму грузу придать уже невозможно — шнур разорвется). С таким же ускорением будет двигаться и первый груз, значит, $(M_1 + M_2)a_{\max} = F_{\max} - \mu(M_1 + M_2)g$. Подставляя сюда выражение для a_{\max} , получаем:

$$F_{\max} = (M_1 + M_2)(a_{\max} + \mu g) = T(1 + \frac{M_1}{M_2}).$$

2.13. Ответ: $a = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} g$, $T = \frac{m_1 m_2 g (1 + \mu)}{m_1 + m_2}$ при $m_1 > \mu m_2$; $a = 0$,

$T = m_1 g$ при $m_1 < \mu m_2$.

При подъеме лифта следует во всех формулах заменить g на $g' = g + a_0$.

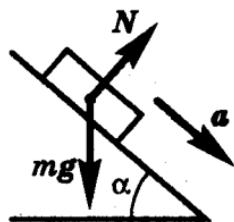
Указание. Пока масса m_1 невелика, второй груз покоятся относительно стола и на него действует со стороны стола сила трения покоя. Для нее выполняется соотношение $F_{\text{тр}} \leq \mu N$, где N — сила нормального давления на поверхность. Когда сила натяжения нити превышает максимальную силу трения покоя, система приходит в движение. При этом силу трения покоя сменяет сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$. См. также задачу 2.1.

2.14. Ответ: $F = 3mg\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho}\right)$, где ρ_v — плотность воды, ρ — плотность чугуна; ответ не зависит от v .

Указание. В обоих случаях (движение вниз и вверх) ядро движется равномерно, т. е. равнодействующая всех сил, действующих на него, равна нулю.

2.15. Ответ: время не зависит от угла наклона желоба.

Решение. Пусть желоб образует угол α с горизонтом. Грузик соскальзывает под действием силы тяжести mg и силы реакции опоры N (см. рисунок). Проецируя уравнение второго закона Ньютона $ma = mg + N$ на наклонную плоскость, получаем $ma = mgsin\alpha$. Итак, на гладкой



наклонной плоскости $a = gsina$ (этот результат полезно запомнить). Длина желоба $l = 2R\cos\beta = 2Rsina$. Таким образом, при изменении угла α отношение пути к ускорению остается неизменным. А это значит, что и время t , определяемое из условия $l = \frac{at^2}{2}$, тоже не зависит от угла α : $t = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$. Эта красивая задача принадлежит Галилео.

2.16. Ответ: $a = 2,4 \text{ м/с}^2$, $t = 1,3 \text{ с}$.

Решение. На рисунке показаны действующие на тело силы. Согласно второму закону Ньютона, $ma = mg + N + F_{tp}$.

В проекциях на оси координат получаем

$$ma = mg \sin \alpha - F_{tp}, \quad (1)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N. \quad (2)$$

Сила трения скольжения $F_{tp} =$

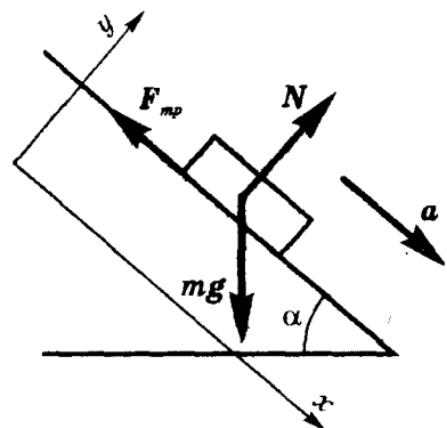
$= \mu N$. Из уравнения (2) $N =$
 $= mg \cos \alpha$, так что $F_{tp} = \mu mg \cos \alpha$.

Подставляя это выражение в уравнение (1), получаем $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$. Из этой формулы следует, что соскальзывание может происходить при $\mu \leq \operatorname{tg} \alpha$ (в данном случае это условие выполнено, и $a = 2,4 \text{ м/с}^2 > 0$). При $\mu > \operatorname{tg} \alpha$ получаем $a < 0$. Это означает, что если бы тело двигалось

вниз по наклонной плоскости с некоторой начальной скоростью,

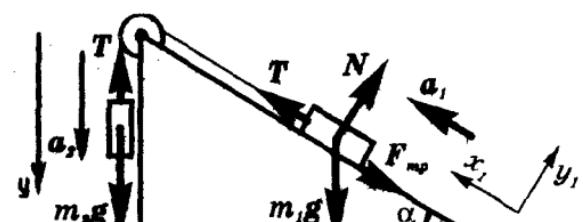
его движение замедлялось бы. Из соотношения $l = \frac{at^2}{2}$ получаем

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}} = 1,3 \text{ с.}$$



2.17. Ответ: $a = 0,42 \text{ м/с}^2$, $T = 9,4 \text{ Н}$. При увеличении коэффициента трения $a = 0$, $T = 9,8 \text{ Н}$.

Решение. Прежде чем расставлять действующие на грузы силы, следует определить возможное направление движения (иначе куда же направить силу трения F_{tp} ?).



В этом состоит типичная сложность задач с учетом трения. Про-

ведем предварительный анализ условия. Проекция силы mg на направление прикрепленной к грузу m_1 нити равна m_1gsina ; для силы m_2g эта проекция равна m_2g . Очевидно, $m_2g > m_1gsina$. Значит, если система вообще движется, то груз m_2 опускается, а груз m_1 поднимается. Теперь можно расставить силы и ускорения (см. рисунок). Напомним, что $a_1 = a_2 = a$. Спроецируем уравнения второго закона Ньютона: для груза m_2 — на ось y , для груза m_1 — на оси x_1, y_1 . Получаем:

$$\begin{cases} m_2a = m_2g - T, \\ m_1a = T - F_{tp} - m_1gsina, \\ N - m_1gcosa = 0. \end{cases}$$

Добавим к этой системе уравнение для силы трения скольжения $F_{tp} = \mu N$. Тогда $F_{tp} = \mu m_1gcosa$, и из первых двух уравнений системы получаем:

$$a = \frac{m_2 - m_1(sina + \mu cosa)}{m_1 + m_2} g, \quad T = \frac{m_1m_2g}{m_1 + m_2} (1 + sina + \mu cosa).$$

Если $\mu = \mu_1$, то $a = 0,42 \text{ м/с}^2$, $T = 9,4 \text{ Н}$.

Если $\mu = \mu_2$, то $a < 0$; однако мы уже выяснили, что двигаться в обратную сторону при данных m_1, m_2 и α система не может. Поэтому результат $a < 0$ смысла не имеет. Почему же он возник? Из-за незаконного использования формулы $F_{tp} = \mu N$: ведь при столь большом трении грузы будут неподвижны, и F_{tp} представляет собой силу трения покоя. Пронее же можно сказать лишь то, что $F_{tp} \leq \mu N$. Итак, если $\mu = \mu_2 = 0,3$ (и вообще если $\mu > \frac{m_2}{m_1cosa} - \operatorname{tg}\alpha$), то $a = 0$. При этом $T = m_2g = 9,8 \text{ Н}$.

2.18. Ответ: $|a| = g \frac{m_2 - m_1(sina + \mu cosa)}{m_1 + m_2}$ при $\frac{m_2}{m_1} > \operatorname{sin}\alpha + \mu \operatorname{cos}\alpha$;

$|a| = \frac{m_1(sina - \mu cosa) - m_2}{m_1 + m_2}$ при $\frac{m_2}{m_1} < \operatorname{sin}\alpha - \mu \operatorname{cos}\alpha$;

$a = 0$ при $\operatorname{sin}\alpha - \mu \operatorname{cos}\alpha \leq \frac{m_2}{m_1} \leq \operatorname{sin}\alpha + \mu \operatorname{cos}\alpha$.

Решение. Будем считать положительным такое направление движения, когда груз m_2 опускается, и запишем уравнения второго закона Ньютона для обоих грузов:

$$\begin{cases} m_1a = T - m_1gsina + F_{tp}, \\ m_2a = m_2g - T. \end{cases} \quad (1)$$

В этой системе двух уравнений есть три неизвестных: ускорение грузов a , сила T натяжения нити и сила трения F_{tp} . Это обычная

ситуация в задачах, где надо учитывать силу трения, и сейчас мы покажем, как она разрешается. Сложим уравнения (1) и получим одно уравнение:

$$(m_1 + m_2)a = m_2g - m_1gs \sin \alpha + F_{\text{тр}}. \quad (2)$$

Формальное решение этого уравнения

$$a = \frac{m_2g - m_1gs \sin \alpha + F_{\text{тр}}}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

является на самом деле только *началом* решения нашей задачи! Какие могут быть виды движения грузов? Их три: первый — грузы движутся в «положительном» направлении, $a > 0$ (висящий груз опускается); второй — грузы движутся в «отрицательном» направлении, $a < 0$ (висящий груз поднимается); третий — грузы покоятся, $a = 0$. Заранее мы не знаем, каким будет вид движения: это зависит от соотношения между величинами, входящими в условие. Значит, наша задача состоит в том, чтобы не только определить ускорение грузов, но и найти условия, при которых это ускорение будет иметь место.

Начнем с первого вида движения. В этом случае $F_{\text{тр}} = -\mu m_1 g \cos \alpha$ и

$$a = \frac{m_2g - m_1g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2}, \quad (4)$$

но для того, чтобы это решение было правильным, необходимо выполнение условия $a > 0$, то есть

$$\frac{m_2}{m_1} > \sin \alpha + \mu \cos \alpha. \quad (5)$$

Если реализуется второй вид движения, $F_{\text{тр}} = \mu m_1 g \cos \alpha$ и

$$a = \frac{m_2g - m_1g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2}. \quad (6)$$

Такое движение возможно при условии $a < 0$, то есть

$$\frac{m_2}{m_1} < \sin \alpha - \mu \cos \alpha. \quad (7)$$

Интересно заметить здесь, что если правая часть уравнения (7) отрицательна, то такой вид движения вообще невозможен! Этого и следовало ожидать: при $\tan \alpha < \mu$ второй груз не поедет вниз, даже если первого груза нет вообще.

Наконец, в третьем случае $a = 0$, и уравнение (3) позволяет определить силу трения покоя:

$$F_{\text{тр}} = m_1 g \sin \alpha - m_2 g. \quad (8)$$

Эта сила трения должна удовлетворять условию

$$|F_{\text{тр}}| \leq \mu m_1 g \cos \alpha,$$

то есть $-\mu m_1 g \cos \alpha < m_1 g \sin \alpha - m_2 g < \mu m_1 g \cos \alpha$, или для отношения масс:

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha < \frac{m_2}{m_1} < \sin \alpha + \mu \cos \alpha . \quad (9)$$

Итак, решение имеет вид:

1) если $\frac{m_2}{m_1} > \sin \alpha + \mu \cos \alpha$, то первый груз опускается с уско-

$$\text{рением } a = \frac{m_2 g - m_1 g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2};$$

2) если $\frac{m_2}{m_1} < \sin \alpha - \mu \cos \alpha$, то первый груз поднимается с уско-

$$\text{рением } |a| = \frac{m_1 g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - m_2 g}{m_1 + m_2};$$

3) Если $\sin \alpha - \mu \cos \alpha \leq \frac{m_2}{m_1} \leq \sin \alpha + \mu \cos \alpha$, то грузы остаются в покое.

2.19. Ответ: а) 400 м; б) 408 м.

Решение. Случай *a* уже рассмотрен в задаче 1.27. Случай *b* намного сложнее. Он отличается от случая *a* тем, что после отрыва вагона поезд движется с ускорением, поскольку сила тяги осталась неизменной, а масса укороченного поезда уменьшилась; следовательно, уменьшилась и сила сопротивления. Ускорение поезда a_n определяется из второго закона Ньютона для «остатка» поезда:

$$(M - m)a_n = F_t - \mu(M - m)g, \quad (1)$$

где F_t — сила тяги, а μ — коэффициент сопротивления. Заметим теперь, что при равномерном движении целого поезда сила тяги как раз уравновешивалась силой сопротивления всего поезда, то есть $F_t = \mu Mg$. Подставляя это выражение в уравнение (1), получаем $a_n = \mu g \frac{m}{M - m}$.

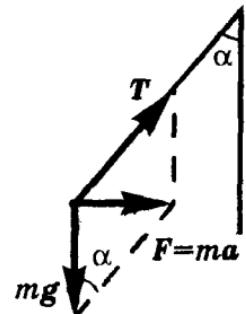
В то же время отцепленный вагон движется с отрицательным ускорением $a_v = -\mu g$. Поезд проедет за время t торможения вагона расстояние $s_n = v_0 t + \frac{a_n t^2}{2}$. Для его определения воспользуемся тем, что $s_n = \frac{v_0 t}{2} = \frac{|a_n| t^2}{2}$. Из этих соотношений следует, что первое слагаемое в формуле для s_n равно $2s_v$, а второе $s_n = \frac{a_n}{|a_n|} s_v$.

Поэтому $s_n = s_n \left(2 + \frac{a_n}{|a_n|}\right) = s_n \left(2 + \frac{m}{M - m}\right) = 408$ м.

2.20. Ответ: $\alpha = \arctg \frac{a}{g}$; $T = m\sqrt{g^2 + a^2}$.

Решение. На шарик действуют две силы: сила тяжести mg и натяжение T нити (см. рисунок). Их равнодействующая F сообщает шарику такое же ускорение, какое имеет тележка, т. е. $F = ma$.

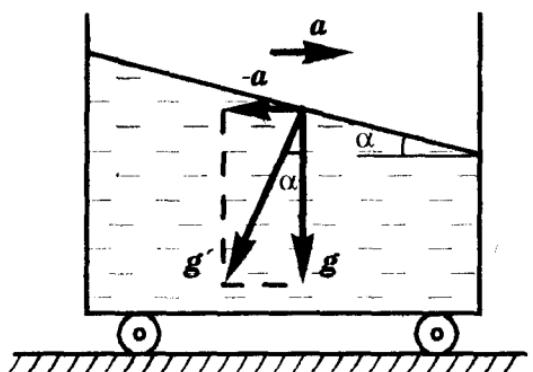
Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}$. Величину силы T находим из теоремы Пифагора: $T = m\sqrt{g^2 + a^2}$.



2.21. Ответ: поверхность воды плоская, образует угол $\alpha = \arctg \frac{a}{g}$

с горизонтальной плоскостью.

Решение. Пусть ускорение тележки направлено вправо (см. рисунок). Перейдем в неинерциальную систему отсчета, связанную с тележкой. В этой системе к «обычным» силам взаимодействия добавляется сила инерции $F_{ин} = ma$ (см. задачу 2.20), которую можно рассматривать как «дополнительную» силу тяжести.



Жидкость, таким образом, находится в однородном поле «сил тяготения» с новым ускорением свободного падения $g' = g - a$. Поверхность жидкости будет плоской, причем плоскость поверхности перпендикулярна к g' . С горизонтальной плоскостью она образует (см. рисунок) угол $\alpha = \arctg \frac{a}{g}$.

2.22. Ответ: $\beta = \alpha$; $T = mg \cos \alpha$.

Решение. На шарик действуют две силы: сила тяжести и сила T натяжения нити (см. рисунок). Их равнодействующая F сообщает шарику такое же ускорение a , какое имеет тележка, т. е. $F = ma$. Заметим теперь, что тележка движется по наклонной плоскости без трения с ускорением, равным по величине $gs \sin \alpha$. Значит, $ma = mg s \sin \alpha$; это как раз проекция силы тяжести mg на направление движения тележки. Следовательно, проекция силы T на это же

направление равна нулю, т. е. T направлена перпендикулярно наклонной плоскости. Поскольку сила T направлена вдоль нити, получаем, что нить перпендикулярна наклонной плоскости, т. е. $\beta = \alpha$. Отсюда $T = mg \cos \alpha$.

2.23. Ответ: поверхность воды будет плоской, параллельной наклонной плоскости.

Указание. См. задачи 2.21, 2.22.

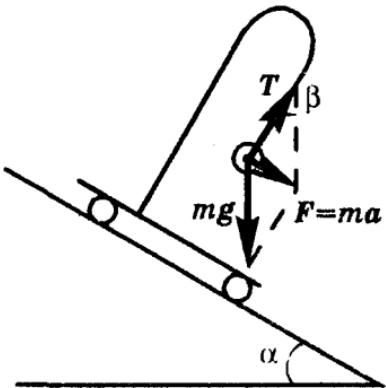


Рис. к задаче 2.22

Замечание к задачам 2.22, 2.23. Если бы мы жили в вагоне без окон, скатывающемся без трения с наклонной плоскости, нам казалось бы, что наш вагон покойится относительно Земли: поверхность воды в любом сосуде была бы «горизонтальной», а все отвесы — «вертикальными». Правда, все предметы стали бы легче: «сила тяжести» в нашем вагоне стала бы равной $mg \cos \alpha$. Это можно представлять себе так, будто уменьшилось ускорение свободного падения: g заменяется на $g \cos \alpha$.

2.24. Решение. а) Кирпич остается неподвижным ($a = 0$), пока F не превысит максимальной величины силы трения покоя, равной μmg . При этом сила трения покоя в точности уравновешивает силу F , т. е. $F_{\text{тр}} = -F$.

При дальнейшем увеличении F кирпич сдвинется, и мы будем иметь дело с силой трения скольжения, равной μmg и не зависящей от F . При этом $ma = F - \mu mg$.

Итак,

$$\begin{cases} F_{\text{тр}} = F, & F \leq \mu mg; \\ F_{\text{тр}} = \mu mg, & F > \mu mg, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0, & F \leq \mu mg; \\ a = \frac{F}{m} - \mu g, & F > \mu mg. \end{cases}$$

Графики приведены на рис. а и б.

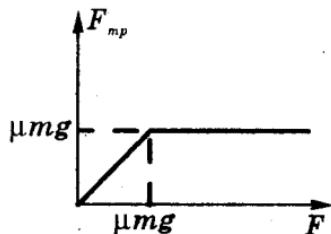


Рис. а

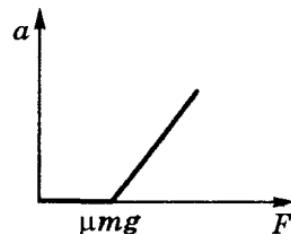


Рис. б

б) Поскольку в этом случае сила F направлена под углом к горизонту, величина силы нормального давления изменяется; это, в свою очередь, сказывается на силе трения. Проецируя уравнение второго закона Ньютона на оси координат (см. рис. в), получаем

$$\begin{array}{l} \boxed{x} \quad ma = F \cos \alpha - F_{\text{тр}}, \\ \boxed{y} \quad 0 = F \sin \alpha + N - mg. \end{array}$$

Отсюда $N = mg - F \sin \alpha$ (очевидно, кирпич не отрывается от стола при условии $F \sin \alpha \leq mg$). Пока кирпич неподвижен (при небольших F): $a = 0$, $F_{\text{тр}} = F \cos \alpha$. Это возможно, если $F_{\text{тр}} \leq \mu N$, т. е. $F \cos \alpha \leq \mu(mg - F \sin \alpha)$. Последнее неравенство можно записать в виде

$$F \leq \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

Обозначим правую часть этого неравенства F_0 .

При $F > F_0$ начинается скольжение и $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu(mg - F \sin \alpha)$;

$$\begin{aligned} a &= \frac{F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha)}{m} = \frac{F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu mg}{m} = \\ &= \frac{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)(F - F_0)}{m}. \end{aligned}$$

Таким образом, $a = 0$, $F_{\text{тр}} = F \cos \alpha$ при $F \leq F_0$;

$$a = \frac{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)(F - F_0)}{m}, \quad F_{\text{тр}} = \mu(mg - F \sin \alpha) \quad \text{при } F_0 < F \leq \frac{mg}{\sin \alpha}.$$

Соответствующие графики приведены на рис. г, д. Этот результат

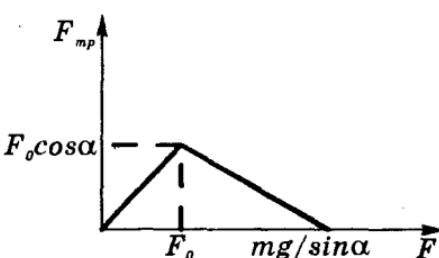


Рис. г

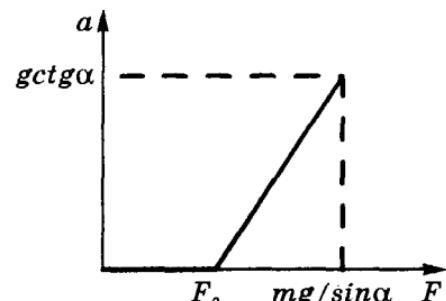


Рис. д

нельзя распространить на случай $\alpha < 0$ (сила наклонена вниз, прижимая тело к поверхности). Во-первых, при этом отсутствует ограничение $F < \frac{mg}{\sin \alpha}$ (тело не может оторваться от стола); во-вто-

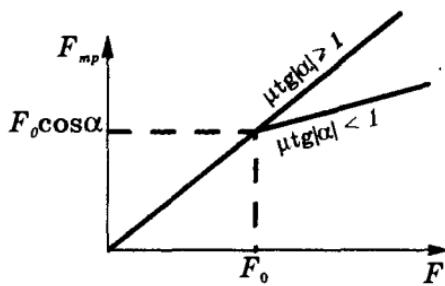


Рис. е

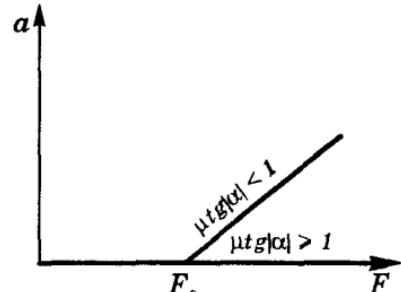


Рис. ж

рых, при $\cos|\alpha| - \mu \sin|\alpha| \leq 0$ ($\mu \operatorname{tg}|\alpha| \geq 1$) кирпич не сдвигается с места вообще, при сколь угодно большой F (его «заклинивает»). Графики см. на рис. е, ж.

2.25. Ответ: $F_{\max} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2}}$ (см. рис. б).

Решение. Следует иметь в виду, что при малых углах α ящик будет неподвижен, а при больших станет соскальзывать. В первом случае действует сила трения покоя, во втором — сила трения скольжения. Запишем второй закон Ньютона (см. рис. а):

$$ma = mg + N + F_{\text{тр}}.$$

В проекциях на выбранные оси координат:

<input checked="" type="checkbox"/>	$ma = mgsina - F_{\text{тр}},$
<input type="checkbox"/>	$0 = N - mgcosa.$

Пока тело неподвижно, $a = 0$, $F_{\text{тр}} = mgsina$. Этот случай реализуется, если $\frac{F_{\text{тр}}}{N} \leq \mu$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha \leq \mu$ (при $\operatorname{tg}\alpha = \mu$ возможно

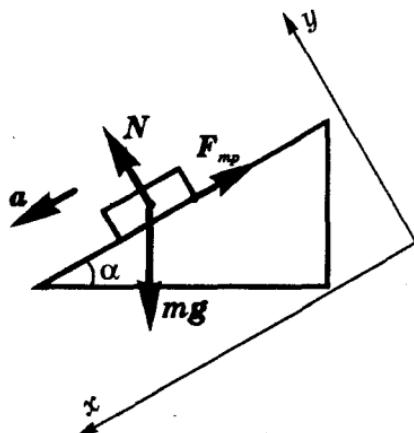


Рис. а

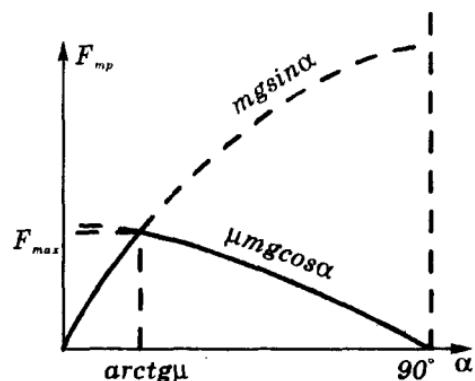


Рис. б

движение с постоянной скоростью, т. к. $a = 0$). При $\operatorname{tg}\alpha > \mu$ сила трения скольжения задается формулой $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ (при этом $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) > 0$).

Таким образом, $F_{\text{тр}} = mgs \sin \alpha$ при $\alpha \leq \operatorname{arctg} \mu$ и $F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha$ при $\alpha > \operatorname{arctg} \mu$.

Заметим, что при $\alpha = \operatorname{arctg} \mu$ оба выражения для $F_{\text{тр}}$ дают одно и то же значение: функция $F_{\text{тр}}(\alpha)$ получилась непрерывной.

График ее приведен на рис. б. Из соотношения $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$

следует, что максимальное значение силы трения $F_{\text{max}} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2}}$.

$$2.26. \text{ Ответ: } t = \sqrt{\frac{2l \cos \alpha}{g \sin(\beta - \alpha)}}.$$

Указание. Воспользуйтесь тем, что в первом случае сила трения как раз уравновешивает равнодействующую силы тяжести и силы нормальной реакции опоры, — это позволяет найти коэффициент трения μ .

$$2.27. \text{ Ответ: } \mu = 0,10.$$

Решение. При подъеме и спуске санки движутся с разными ускорениями, поскольку сила трения скольжения направлена противоположно скорости:

$$\begin{cases} a_u = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha), \\ a_c = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha). \end{cases} \quad (1)$$

При движении вверх равна нулю конечная скорость, а при движении вниз — начальная; поэтому в обоих случаях применима формула $s = \frac{at^2}{2}$. Следовательно, $a_u t_u^2 = a_c t_c^2$, то есть $\frac{a_u}{a_c} = \frac{t_c^2}{t_u^2} = n^2$.

Подставляя в это соотношение выражения для ускорений, получаем линейное уравнение для μ . Его решение имеет вид:

$$\mu = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \operatorname{tg} \alpha. \text{ В данном случае } \mu = 0,10.$$

2.28. Ответ: человек должен бежать по доске с ускорением $a = g(1 + \frac{M}{m}) \sin \alpha$, направленным вниз вдоль склона; направление его скорости не имеет значения; $\mu \geq \frac{M}{m} \operatorname{tg} \alpha$.

Решение. Поскольку доска находится в покое, сумма сил, действующих на нее, равна нулю. На доску действуют четыре силы (см.

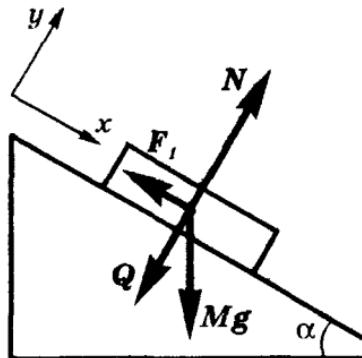


Рис. а

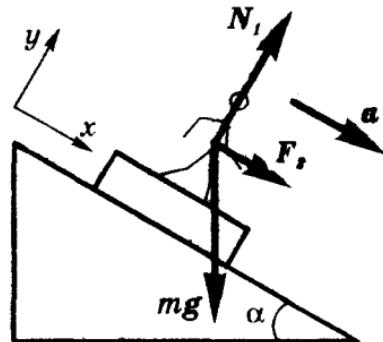


Рис. б

рис. а): сила тяжести Mg , сила нормальной реакции со стороны склона N , сила нормального давления человека Q и сила трения со стороны человека F_1 . На человека действуют три силы (см. рис. б): сила тяжести mg , сила нормальной реакции со стороны доски $N_1 = -Q$ и сила трения со стороны доски $F_2 = -F_1$ (мы дважды воспользовались третьим законом Ньютона). Запишем уравнения второго закона Ньютона для движения доски и человека в проекциях:

$$\begin{array}{ll} \boxed{x} & -F_1 + Mg \sin \alpha = 0, \\ \boxed{y} & N - Q - Mg \cos \alpha = 0; \\ \boxed{x} & ma = m g \sin \alpha + F_2, \\ \boxed{y} & N_1 - mg \cos \alpha = 0 \end{array} \quad (1)$$

(здесь a — величина ускорения человека). Складывая первое и третье уравнения, получаем (с учетом того, что $F_1 = F_2$)

$$a = g \left(1 + \frac{M}{m} \right) \sin \alpha.$$

С таким ускорением должен бежать человек по доске, чтобы она оставалась в покое; заметим, что это ускорение больше, чем $g \sin \alpha$, т. е. больше того ускорения, с каким любое тело соскальзывало бы со склона без трения: человек отталкивается от доски, толкая ее вверх, и поэтому сам приобретает дополнительное ускорение, направленное вниз. Кроме того, отметим, что человек не обязательно должен бежать вниз: важно только, чтобы его ускорение было направлено вниз; значит, человек может либо ускоренно бежать вниз, либо замедленно — вверх! Второй вариант не очевиден и часто упускается из виду. Найдем теперь, при каком коэффициенте трения возможно такое движение. Между подошвами человека и доской действует сила трения покоя — это еще один не очевидный факт: подошвы, отталкиваясь от доски, покоятся относительно нее! Значит, сила трения $F_{tp} = F_1 = F_2$ связана

с силой нормального давления $N_1 = Q$ соотношением $\frac{F_{tp}}{N_1} \leq \mu$. Левая

часть этого неравенства, как следует из первого и четвертого уравнений системы (1), равна $\frac{M}{m} \operatorname{tga}$. Следовательно, для коэффициента трения μ получаем условие: $\mu > \frac{M}{m} \operatorname{tga}$.

2.29. Ответ: $F_{\text{тр}} = 4\pi^2 m r n^2$ при $r < \frac{\mu g}{4\pi^2 n^2}$, $F_{\text{тр}} = \mu mg$ при $r > \frac{\mu g}{4\pi^2 n^2}$.

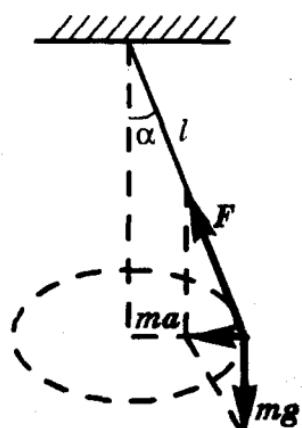
Решение. Прежде всего надо выяснить, будет ли монета покойться относительно диска или будет скользить по нему. В первом случае сила трения — это сила трения покоя, она сообщает монете центростремительное ускорение $a = 4\pi^2 r n^2$ и равна по величине $ma = 4\pi^2 m r n^2$. Для силы трения покоя должно выполняться условие $F_{\text{тр}} \leq \mu N$. В данном случае сила нормального давления N равна mg , поэтому получаем неравенство $4\pi^2 m r n^2 \leq \mu mg$, откуда $r < \frac{\mu g}{4\pi^2 n^2}$. При выполнении этого неравенства монета будет покойиться относительно диска и $F_{\text{тр}} = 4\pi^2 m r n^2$ (трение покоя). Если указанное неравенство не выполняется, т. е. $r > \frac{\mu g}{4\pi^2 n^2}$, монета будет скользить по диску; при этом $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Таким образом, $F_{\text{тр}} = 4\pi^2 m r n^2$ при $r < \frac{\mu g}{4\pi^2 n^2}$ (трение покоя), $F_{\text{тр}} = \mu mg$ при $r > \frac{\mu g}{4\pi^2 n^2}$ (трение скольжения).

2.30. Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}$.

Указание. Согласно второму закону Ньютона, $ma = mg + F$. Отсюда (см. рисунок) $a = gt \operatorname{tga}$. С другой стороны, $a = \frac{v^2}{ls \operatorname{sina}}$. Отсюда $v = s \operatorname{sina} \sqrt{\frac{gl}{\cos \alpha}}$ и

$$T = \frac{2\pi l s \operatorname{sina}}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}$$
.

При малых α величина T совпадает с периодом малых колебаний математического маятника: ведь движение по окружности можно представить как результат одновременных гармонических колебаний маятника в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.



2.31. Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{gtg\alpha}{r + lsina}} = 4,7 \text{ рад/с}, n = \frac{\omega}{2\pi} = 0,75 \text{ с}^{-1} = 45 \text{ об/мин.}$

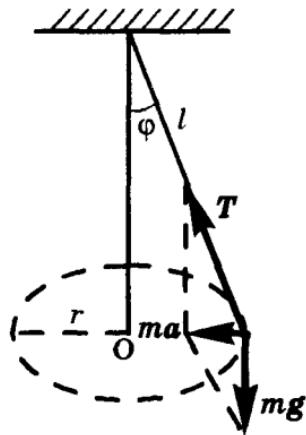
Указание. Шарик движется по окружности радиусом $R = r + lsina$; его центростремительное ускорение $a = \omega^2 R$. Согласно второму закону Ньютона $ma = mg + T$, откуда $a = gtg\alpha$ (см. задачу 2.30).

2.32. Ответ: $R = \frac{v^2 ctg\alpha}{g} = 5800 \text{ м.}$

Указание. Подъемная сила, действующая на крыло со стороны воздуха, перпендикулярна плоскости крыла; центростремительное ускорение создается равнодействующей подъемной силы и силы тяжести.

2.33. Ответ: $n_1 = 1,4 \text{ с}^{-1}$, $\phi_2 = \arccos\left(\frac{g}{4\pi^2 ln_2^2}\right) = 77^\circ$.

Решение. Рассмотрим движение конического маятника (см. рисунок). Центростремительное ускорение $a = \frac{v^2}{r}$ ему придает равнодействующая сил натяжения нити T и тяжести mg : $ma = mg + T$. Из параллелограмма сил получаем $ma = mg \operatorname{tg}\phi$. Если равнодействующая сил mg и T недостаточно велика, чтобы сообщить шарику необходимое центростремительное ускорение, он будет двигаться по расширяющейся спирали (это произойдет, например, при увеличении частоты вращения). Если же равнодействующая «чрезмерно» велика, шарик будет двигаться по сужающейся спирали (например, при уменьшении частоты вращения).



Учитывая, что $r = lsin\phi$ и $v = 2\pi rn$, приходим к уравнению относительно ϕ :

$$\sin\phi(4\pi^2 ln^2 - \frac{g}{\cos\phi}) = 0 .$$

По крайней мере одно решение ($\phi_1 = 0$) это уравнение имеет при всех n . Второе решение $\phi_2 = \arccos\left(\frac{g}{4\pi^2 ln^2}\right)$ появляется при $\frac{g}{4\pi^2 ln^2} < 1$, т. е. при $n \geq n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = 1,4 \text{ с}^{-1}$.

Какой смысл следует приписать наличию двух решений при

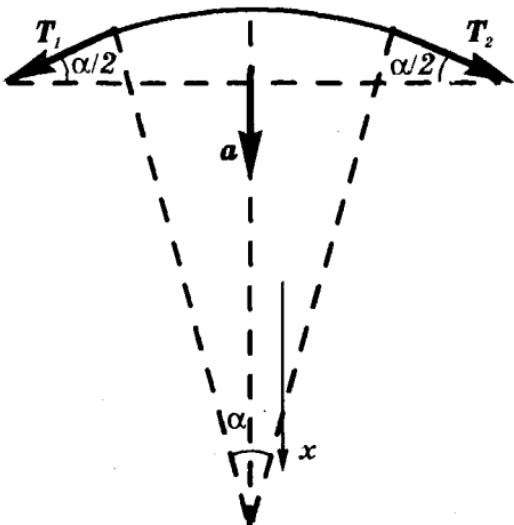
достаточно быстром вращении ($n > n_1$)? Оба они соответствуют состояниям равновесия (в том смысле, что значения ϕ остаются неизменными). Что же произойдет, если нить случайно отклонится от вертикали на малый угол α ? Для ответа на этот вопрос удобнее всего перейти во вращающуюся (неинерциальную) систему отсчета. В ней при отклонении возникает сила инерции $F_{\text{ин}} = ma = m\omega^2 l \sin\alpha$, направленная от оси вращения, и «возвращающая» сила F_v (равнодействующая сил T и mg), равная по величине $mgtg\alpha$. Поскольку при малых углах $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$, отношение этих сил

$$\frac{F_{\text{ин}}}{F_v} = \frac{\omega^2 l}{g} = \frac{4\pi^2 n^2 l}{g}.$$

При $n > n_1$ это отношение больше 1, т. е. $F_{\text{ин}} > F_v$. Это означает, что случайно возникшее малое отклонение будет нарастать и угол α увеличится до φ_2 . Таким образом, равновесие при $\varphi_1 = 0$ является неустойчивым. При желании можно проверить, что второе положение равновесия будет устойчивым. Итак, при $n \leq n_1$ угол $\varphi_1 = 0$. При $n > n_1$ угол $\varphi_2 = \arccos \frac{g}{4\pi^2 l n^2}$ (реальная система не будет сколько-нибудь долго находиться в состоянии неустойчивого равновесия). Если $n = n_2 = 3 \text{ с}^{-1}$, то получаем $\varphi_2 = 77^\circ$.

2.34. Ответ: $T = 90 \text{ Н.}$

Решение. Цепочку удерживает на ободе диска сила трения. В момент соскачивания эта сила, очевидно, практически исчезает. Это может произойти только тогда, когда уменьшится до нуля сила давления цепочки на диск (и, соответственно, сила реакции со стороны обода диска). На рисунке показаны силы, действующие в этом случае на малый элемент цепочки (занимающий дугу



окружности диска с центральным углом α). Проецируя уравнения движения этого элемента массой Δm на ось x , получаем:

$$\Delta m \cdot a = 2T \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ где } T = T_1 = T_2.$$

Учтем теперь, что $\Delta m = \frac{\alpha}{2}m$, $a = 4\pi^2 n^2 R$ — центростремительное ускорение, $R = \frac{l}{2\pi}$, $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$. Тогда

$$\frac{\alpha m}{2\pi} \cdot \frac{4\pi^2 n^2 l}{2\pi} = 2T \frac{\alpha}{2},$$

откуда $T = ml n^2 = 90$ Н.

Тонкая цепочка при таком натяжении может порваться.

3.1. Ответ: $2,0 \cdot 10^{30}$ кг.

Указание. Центростремительное ускорение Земли при ее движении вокруг Солнца $a = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 6 \cdot 10^{-3}$ м/с², где $T = 1$ год.

3.2. Ответ: в 1600 раз.

3.3. Ответ: $h = 3,2$ м.

Решение. Равноплечие весы находятся в равновесии, когда груз и гири притягиваются к Земле с одинаковой силой. Поскольку гири находятся дальше от центра Земли, их масса должна быть на Δm больше, чем у груза. Условие равновесия имеет вид

$$G \frac{Mm}{R^2} = G \frac{M(m + \Delta m)}{(R + h)^2}. \quad (1)$$

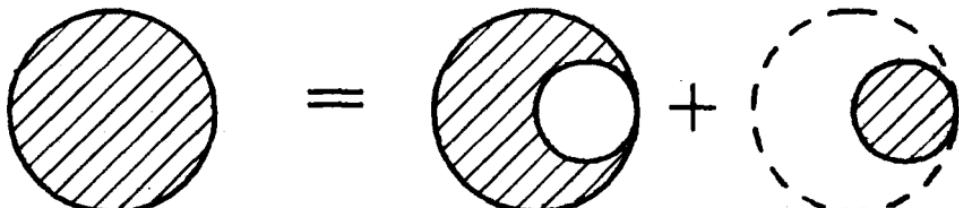
Здесь M — масса Земли; R — расстояние от груза до центра Земли, практически совпадающее с радиусом Земли. Из уравнения (1) следует, что $\Delta m = m \frac{h(2R + h)}{R^2}$. Поскольку $h \ll R$, получаем

$\Delta m = m \frac{2h}{R}$. Отсюда $h = \frac{R \cdot \Delta m}{2m} = 3,2$ м.

3.4. Ответ: $F = \frac{GMm}{7} \left(\frac{8}{d^2} - \frac{1}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} \right)$.

Указание. См. рисунок.

Решение. Закон всемирного тяготения можно применить для



вычисления силы притяжения между материальной точкой и сферически симметричным телом, считая его также материальной точкой, расположенной в центре тела. Попробуем именно к этому случаю и свести нашу задачу. Выясним, на сколько увеличится сила притяжения, если заполнить полость в большом шаре (сделать шар сплошным и однородным). Поскольку объем шара пропорционален кубу его радиуса, объем полости составляет $1/8$ всего объема шара. Значит, для заполнения полости потребуется шар массы $\frac{M}{7}$, центр которого расположен на расстоянии $d - \frac{R}{2}$ от шарика массы m . Сила притяжения в результате увеличится на $F_1 = G \frac{Mm}{7(d - \frac{R}{2})^2}$.

После заполнения полости притяжение, однако, снова описывается формулой закона всемирного тяготения для материальных точек! Следует только учесть, что масса большого шара равна $\frac{8M}{7}$. Итак, $F + F_1 = G \frac{8Mm}{7d^2}$.

Отсюда

$$F = G \frac{Mm}{7} \left(\frac{8}{d^2} - \frac{1}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} \right).$$

3.5. Решение. Если мысленно разбить поверхность сферы на множество малых элементов (см. рис. а), то каждый из них «тянет» материальную точку массы m «к себе». Если барон прав, все эти силы должны компенсировать друг друга. Для точки в центре сферы это достаточно очевидно. Для произвольного положения A внутри сферы нужно удачно выбрать способ разбиения сферы на участки. Проведем через точку A произвольную прямую B_1B_2 .

Малые элементы сферы в окрестностях B_1 и B_2 вырежем узкими конусами с вершинами в точке A , полученным вращением обра-

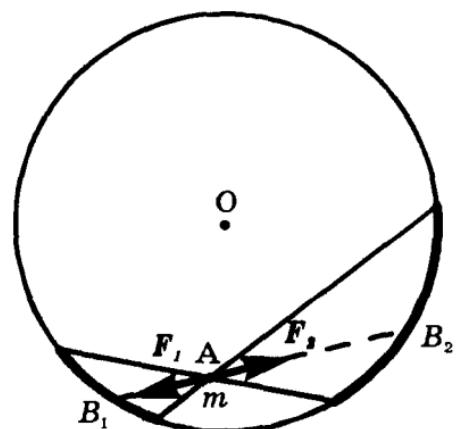


Рис. а

зующей DE вокруг оси B_1B_2 (см. рис. 6). Полученные малые элементы сферы можно считать плоскими. Они образуют одинаковые углы с осью конусов OB_1B_2 (в равнобедренном треугольнике OB_1B_2 углы OB_1B_2 и OB_2B_1 равны), и потому их линейные размеры пропорциональны соответственно отрезкам AB_1 и AB_2 , а площади — квадратам этих отрезков:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AB_1^2}{AB_2^2}. \text{ Так же относятся и}$$

их массы: $\frac{\Delta m_1}{\Delta m_2} = \frac{AB_1^2}{AB_2^2}$. Эти участки сферы притягивают точку массы m в противоположные стороны с силами F_1 и F_2 :

$$F_1 = G \frac{m \Delta m_1}{AB_1^2}, F_2 = G \frac{m \Delta m_2}{AB_2^2}.$$

Учитывая полученную выше пропорцию, находим $F_1 = F_2$.

Эти силы компенсируют друг друга. Но ведь на такие пары элементов можно разбить всю поверхность сферы! Поэтому полная сила тяготения, действующая со стороны сферы на помещенное внутри нее тело, действительно равна нулю. Обратите внимание, что этот результат непосредственно связан с видом закона всемирного тяготения, согласно которому $F \sim r^{-2}$. Поэтому были поставлены опыты, в которых закон всемирного тяготения проверялся как раз по отсутствию тяготения внутри сферы. Отклонений от закона пока не обнаружено...

3.6. Ответ: см. рис. 6.

Решение. Пусть M — масса Земли, R — радиус Земли. Тогда при $r > R$ согласно закону всемирного тяготения $F = G \frac{Mm}{r^2}$.

Однако при $r < R$ эта формула уже неверна. Проведем мысленно сферу радиусом r с центром в центре Земли и рассмотрим отдельно силу притяжения к части Земли, ограниченной этой сферой (пусть масса этой части M'), и к сферическому слою, заштрихованному на рис. а. Однако этот слой можно разбить на множество тонких сферических оболочек. Согласно результату, полученному при решении задачи 3.5, сила притяжения к этим оболочкам (а,

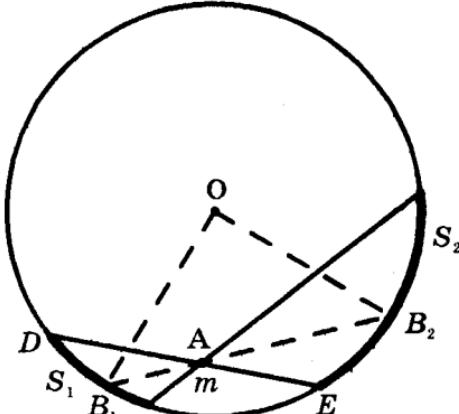


Рис. 6

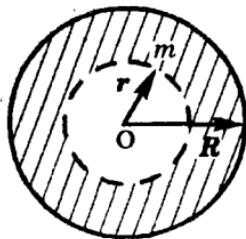


Рис. а

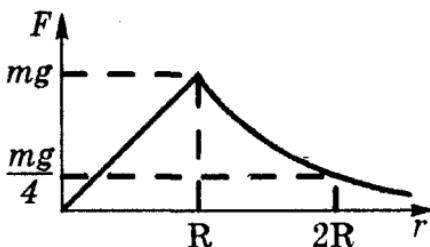


Рис. б

значит, и ко всему слою) равна нулю. Тело в шахте испытывает притяжение «не всей» Земли, а только слоев, лежащих глубже него. Объем сферы пропорционален кубу ее радиуса, поэтому $\frac{M'}{M} = \frac{r^3}{R^3}$. Применяя закон всемирного тяготения, получаем

$$F = G \frac{M'm}{r^2} = G \frac{Mm}{R^3} r \quad \text{при } r < R.$$

Учитывая, что $G \frac{M}{R^2} = g$, запишем результат в виде: $F = mg \frac{r}{R}$

при $r < R$; $F = mg \frac{R^2}{r^2}$ при $r > R$.

График зависимости $F(r)$ показан на рис. б. Таким образом, наибольшая сила тяготения — на поверхности планеты! Следует, правда, сделать одну оговорку: на самом деле плотность Земли не всюду одинакова, и поэтому приведенный результат для $r < R$ не вполне точен.

3.7. Ответ: $v = R \sqrt{\frac{g}{R+h}}$, $T = \frac{2\pi(R+h)}{R} \sqrt{\frac{R+h}{g}}$.

3.8. Ответ: $r = R \left(\frac{g T^2}{4\pi^2 R} \right)^{\frac{1}{3}} = 6,6R = 42 \cdot 10^3$ км, $T = 24$ ч, $v = \frac{2\pi r}{T} = R \sqrt{\frac{g}{r}} = 3,1$ км/с.

Траектория полета должна лежать в экваториальной плоскости.

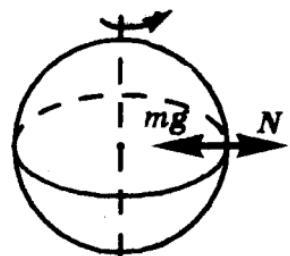
Указание. Спутник должен делать один оборот за то же самое время, что и Земля при суточном вращении, т. е. за 24 ч. Направление его вращения должно совпадать с направлением суточного вращения Земли. Значения r , v определяются из соотношений, полученных при решении задачи 3.7.

3.9. Ответ: 1000 м/с, 27,3 сут.

3.10. Ответ: сила притяжения к Солнцу больше в 2,2 раза.

3.11. Ответ: вес должен уменьшаться на 0,35%; на запад, $v = 460$ м/с.

Решение. Легче всего ответить на второй вопрос. Чтобы вращение Земли не влияло на вес тел в самолете, самолет не должен участвовать в суточном вращении Земли. Для этого он должен лететь в направлении, обратном суточному вращению (т. е. с востока на запад). Его скорость относительно Земли должна совпадать со скоростью суточного



вращения точек земного экватора: $v = \frac{2\pi R}{T} = 460$ м/с, где R — радиус Земли, T — продолжительность суток. Определим теперь относительное уменьшение веса тел на экваторе, считая Землю однородным шаром. Обозначим через g ускорение свободно падающего тела относительно центра Земли. На тело, покоящееся на экваторе Земли, действует сила тяготения mg и сила N опоры (см. рисунок). Их равнодействующая $mg - N$ придает телу центростремительное ускорение

$a = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$, поскольку это тело участвует в суточном вращении Земли. Отсюда

$$N = m(g - a) = mg \left(1 - \frac{4\pi^2 R}{g T^2}\right).$$

Согласно третьему закону Ньютона, вес P (т. е. сила давления тела на опору) равен по модулю силе N реакции опоры. На полюсе он равен просто mg (тело не участвует в суточном вращении Земли). Относительное уменьшение веса на экваторе:

$$\epsilon = \frac{mg - P}{mg} = \frac{4\pi^2 R}{g T^2} = 3,5 \cdot 10^{-3}.$$

Итак, вращение Земли приводит к уменьшению веса тел на экваторе на 0,35% по сравнению с полюсом. На самом деле различие в весе около 0,5%. Это объясняется отклонением формы земной поверхности (или, скорее, формы поверхности Мирового океана) от сферической: поверхность «сплюснута» у полюсов. Однако в конечном счете и этот эффект обусловлен суточным вращением Земли.

3.12. Ответ: $\rho = 19\ 500$ кг/м³.

Указание. Вес тел на полюсе $P_1 = G \frac{Mm}{R^2}$, а на экваторе $P_2 = P_1 - ma$ (здесь a — центростремительное ускорение точек экватора при суточном вращении). По условию, $P_1 = 3P_2$. Учитывая, что

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3, a = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

получаем $\rho = \frac{9\pi}{2GT^2} = 19,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

3.13. Ответ: в 17 раз.

Решение. Невесомость на экваторе будет наблюдаться при $a = g$, где a — центростремительное ускорение точек на экваторе. Именно при таком ускорении тела на экваторе будут фактически находиться в состоянии свободного падения. Поскольку $a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ (здесь R — радиус Земли, T — продолжительность суток), $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$, то есть сутки следует укоротить в $n = \frac{T_0}{T} = \frac{T_0}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}$ раз (здесь $T_0 = 24$ ч). Подстановка дает $T' = 5080 \text{ с} = 1 \text{ ч } 25 \text{ мин}$ (что, конечно, совпадает с периодом обращения спутника по близкой к Земле орбите) и $n = 17$. «Побочные эффекты» будут ужасающие! Молекулы атмосферы из-за трения о Землю будут разгоняться, и даже при гораздо меньшем увеличении скорости вращения Земли значительная их часть получит возможность преодолеть земное тяготение и улететь в окружающее космическое пространство. Земля начнет быстро терять атмосферу. При наступлении на экваторе невесомости этот процесс станет катастрофически быстрым — возникнут могучие воздушные потоки от полярных областей к экватору, а от экватора — в открытый космос. Остается надеяться, что этот подвиг барону не удастся!

3.14. Решение. Сила Архимеда обусловлена увеличением давления с увеличением глубины (за счет веса жидкости или газа), и потому в невесомости сила Архимеда просто отсутствует. Закон Паскаля утверждает, что *внешнее* давление передается в любую точку жидкости или газа. Эта способность к передаче давления обусловлена подвижностью жидкости и газа и не имеет отношения к весу. Следовательно, закон Паскаля остается справедливым и в невесомости.

3.15. Ответ: да, достаточно; $\rho = \frac{3\pi}{GT^2}$ (здесь G — постоянная всемирного тяготения).

3.16. Ответ: $t = 2$ ч.

Решение. Читатель, конечно, догадался: как бы ни был могуч Мюнхаузен, даже он не может изменить скорость спутника, оставаясь внутри него (это противоречило бы закону сохранения

импульса). Однако такое изменение скорости действительно может быть получено за счет кратковременного включения тормозных реактивных двигателей. Очевидно, время t представляет собой половину периода обращения T_B спутника по орбите B :

$$t = \frac{T_B}{2}.$$

Согласно третьему закону Кеплера (он изучается в курсе астрономии), $\frac{T_B^2}{T_A^2} = \frac{b_B^3}{b_A^3}$. Здесь T_A — период обращения по орбите A ; b_B , b_A — большие полуоси соответствующих орбит. Очевидно, $b_A = 3R$; $b_B = 2R$ (здесь R — радиус Земли).

Период T_A движения по круговой орбите можно найти, используя закон всемирного тяготения и второй закон Ньютона:

$$ma = G \frac{mM}{(3R)^2},$$

где m — масса спутника, M — масса Земли, G — гравитационная постоянная. Учитывая, что $a = \frac{4\pi^2 \cdot 3R}{T_A^2}$, $g = G \frac{M}{R^2}$, получим $T_A^2 = \frac{108\pi^2 R}{g}$. Тогда $T_B^2 = \frac{32\pi^2 R}{g}$ и $t = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}} = 2$ ч.

4.1. Ответ: для мяча $F_{cp} = 32$ Н, в случае наклонной поверхности $F_{cp} = 28$ Н; для пластилинового шара $F_{cp} = 18$ Н в обоих случаях.

Решение. Судя по высоте подскока мяча, его удар об асфальт можно считать абсолютно упругим: $v = -v_0$ (v_0 — скорость мяча до удара, v — непосредственно после удара). Эти скорости равны по величине $v = v_0 = \sqrt{2gH}$. Из второго закона Ньютона следует, что

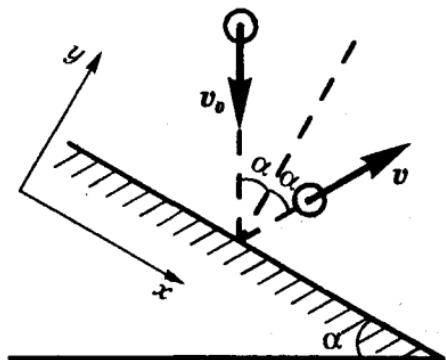
$$(F_{cp} + mg)t = mv - mv_0. \quad (1)$$

Отсюда

$$F_{cp} = \frac{2m\sqrt{2gH}}{t} + mg = 32 \text{ Н.}$$

Удар пластилинового шара неупругий и $v = 0$. Поэтому $F_{cp} = \frac{m\sqrt{2gH}}{t} + mg = 18$ Н.

Этот ответ для пластилинового шара остается в силе и при ударе о наклонную поверхность: ведь конечная скорость шара равна нулю независимо от наклона поверхности. В случае же отскока мяча от наклонной по-



верхности меняется направление скорости v (см. рисунок). При упругом ударе действующая на мяч со стороны площадки сила (сила упругости) направлена нормально к поверхности площадки. Проекция скорости на ось y при ударе меняет знак: $v_y = -v_{0y}$. Проецируя векторное равенство (1) на ось y , получаем ($F_{cp} = -mg \cos \alpha$) $t = 2mv \cos \alpha$, откуда $F_{cp} = m \cos \alpha \left(\frac{2\sqrt{2gH}}{t} + g \right) = 28$ Н.

Заметим, что при $H \gg gt^2$ вторым слагаемым в скобках можно было бы пренебречь (сила упругости намного превышает действующую на мяч силу тяжести).

4.2. Ответ: $F = 2\rho S v^2 \cos \alpha = 135$ Н.

Указание. См. задачу 4.1. За время Δt на стену попадает вода массой $m = \rho S v \Delta t$ (здесь ρ — плотность воды).

4.3. Ответ: 150 м/с (барон неплохо «толкнул» ядро).

Указание. Ядро должно «унести» весь импульс, поскольку импульс барона после соскаска с ядрами равен нулю. Масса ядра без барона втрое меньше, чем масса ядра с бароном; поэтому скорость ядра должна увеличиться втрое, чтобы произведение mv сохранилось.

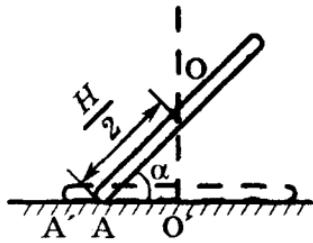
4.4. Ответ: а) увеличить в 4 раза; б) увеличить в 3 раза.

Решение. При неупругом столкновении с ракетой каждая пылинка приобретает ее скорость v (скорость ракеты из-за ее большой массы при одном соударении изменяется пренебрежимо мало). Если бы не работа двигателя, ракета теряла бы импульс, передавая его пылинкам. Импульс силы тяги двигателя должен компенсировать передачу импульса пылинкам за любой промежуток времени Δt : $F \Delta t = Nmv$ (здесь m — масса пылинки; N — число частиц, столкнувшихся с ракетой за время Δt). Очевидно, N зависит от скорости v и «густоты» облака частиц. Обозначим через n концентрацию частиц в облаке. Если площадь поперечного сечения ракеты S , то за время Δt она столкнется со всеми частицами в объеме $Sv\Delta t$. Значит, $N = nSv\Delta t$ и $F = nm v^2 S$. Мы видим, что F пропорциональна концентрации частиц n и квадрату скорости v . Итак: чтобы двигаться вдвое быстрее, силу тяги надо увеличить в 4 раза; в более плотной части облака силу тяги надо увеличить в 3 раза.

4.5. Ответ: на расстояние $H \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

Решение. На бревно при падении действуют только сила тяжести и сила реакции опоры. Обе эти силы направлены вертикально, поэтому они не могут изменить горизонтальной проекции импуль-

са бревна; следовательно, эта проекция равна нулю в любой момент времени. Это, однако, означает, что равна нулю и горизонтальная проекция скорости центра масс бревна O . Поэтому при падении точки O (совпадающая с серединой бревна) движется по вертикальной прямой. Из рисунка видно, что нижний конец бревна сместится на величину



$$AA' = A'O' - AO' = \frac{H}{2}(1 - \cos\alpha) = H\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

4.6. Ответ: лодка сместится на $s = \frac{m}{M+m}l = 1$ м.

Указание. См. задачу 4.5.

4.7. Ответ: лодка сместится на $s = \frac{(m_2 - m_1)l}{M + m_1 + m_2} = 0,71$ м.

Указание. См. задачу 4.5.

4.8. Ответ: $u = \frac{mv_0 \cos\alpha}{M} = 1,25$ м/с.

4.9. Ответ: $v = \frac{m\sqrt{2gH} \cos\alpha}{M + m}$.

4.10. Ответ: по окружностям с радиусами $\frac{MR}{M+m}$ и $\frac{mR}{M+m}$.

Решение. На гладкой горизонтальной поверхности на систему «жук — обруч» не действуют внешние горизонтальные силы. Значит, центр масс всей системы O (см. рис. а) должен оставаться неподвижным, а жук A и центр обруча B будут как-то двигаться «вокруг него». По каким траекториям? Какие бы новые положения A' и B' (см. рис. б) ни занимали жук и центр обруча, $A'B' = A'O + B'O = R$. Отрезки $A'O$ и $B'O$ обратно пропорциональны

массам тел: $\frac{A'O}{B'O} = \frac{M}{m}$. Отсюда $A'O = \frac{MR}{M+m}$, $B'O = \frac{mR}{M+m}$.

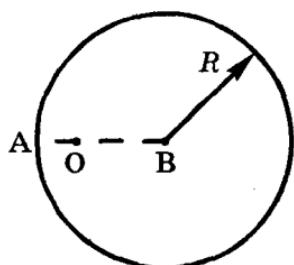


Рис. а

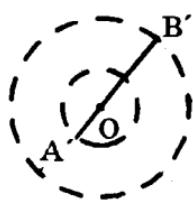


Рис. б

Поскольку длины этих отрезков неизменны, а точка O неподвижна, точки A и B перемещаются по окружностям с общим центром в точке O и с радиусами, равными соответственно

$$\frac{MR}{M+m} \text{ и } \frac{mR}{M+m}.$$

4.11. Ответ: $\mu = \frac{\rho S v^2}{M g \cos \alpha}$.

Решение. Поверхность жидкости устанавливается параллельно склону, если ускорение бака $a = g \sin \alpha$ (см. задачу 2.23). Как раз с таким ускорением соскальзывал бы бак без трения. Значит, «реактивная» сила тяги за счет вытекания струи воды как раз уравновешивает силу трения $F_{tr} = \mu M g \cos \alpha$. Эта сила равна импульсу, уносимому вытекающей водой за единицу времени:

$$F = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{\rho S v \Delta t \cdot v}{\Delta t} = \rho S v^2,$$

где Δm — масса воды, вытекающей за время Δt ; ρ — плотность воды. Отсюда $\mu = \frac{\rho S v^2}{M g \cos \alpha}$.

4.12. Ответ: $u_n = mv \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M-m} + \dots + \frac{1}{M-(n-1)m} \right)$.

Решение. Барон описал типичный случай реактивного движения: тело разгоняется, отбрасывая назад некоторую часть своей первоначальной массы. Полный импульс системы при этом остается неизменным. Важно учесть, что с каждой отброшенной косточкой ракета становится легче и при очередном «толчке» ее скорость увеличивается сильнее. Найдем увеличение скорости Δu_k ракеты при выплевывании бароном k -й косточки. Это удобнее всего сделать в той системе отсчета, в которой *после этого* ракета неподвижна ($u_k = 0$): $(M - (k-1)m)u_{k-1} = -mv$, откуда $\Delta u_k = u_k - u_{k-1} = \frac{mv}{M - (k-1)m}$. Изменение скорости, разумеется, одно и то же во всех системах отсчета. Поэтому

$$u_n = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \dots + \Delta u_n = \sum_{k=1}^n \Delta u_k =$$

$$= mv \sum_{k=1}^n \frac{1}{M - (k-1)m} = mv \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M-m} + \dots + \frac{1}{M-(n-1)m} \right).$$

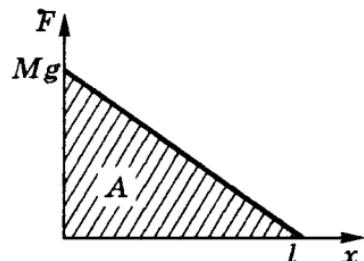
К сожалению, для такой суммы нет простого выражения, но для больших n можно заменить сумму интегралом (если считать, что косточки выплевываются

через равные интервалы времени Δt): $u = \mu \int_0^T \frac{dt}{M - \mu T}$ (здесь $\mu = \frac{m}{\Delta t}$ — секундный расход топлива; T — время разгона). Отсюда $u = v \ln \frac{M}{M - \mu T}$ — знаменитая формула Циолковского. Величина $M - \mu T$ представляет собой массу ракеты к моменту T .

4.13. Ответ: $A = 1,2$ кДж.

Решение. При подъеме приходится преодолевать силу тяжести только той части веревки, которая все еще свешивается вниз. Если длина уже вытянутой части веревки x , то требуется прикладывать силу $F = \frac{mg(l-x)}{l}$. Работа при

изменении x от 0 до l численно равна площади под графиком функции $F(x)$ (см. рисунок). Очевидно, $A = \frac{mgl}{2}$. Иначе (и проще) то же можно получить, вычисляя работу по подъему тела как $A = mg\Delta h$, где Δh — изменение высоты центра тяжести тела. Центр тяжести висящей веревки находится в ее середине, поэтому $\Delta h = \frac{l}{2}$ и $A = \frac{mgl}{2} = 1,2$ кДж.



4.14. Ответ: $A = \frac{Mgl}{2} (\mu_1 + \mu_2)$.

Указание. В ходе движения сила трения изменяется от $\mu_1 mg$ до $\mu_2 mg$, причем ее зависимость от пройденного пути линейная.

4.15. Ответ: в обоих случаях $A = -\mu mgL$.

Решение. В случае *a* ответ получается сразу: $A = -F_{\text{тр}}L = -\mu mgL$ (мы учитываем, что сила трения $F_{\text{тр}}$ направлена противоположно перемещению ящика относительно поезда). Рассмотрим случай *b*: относительно Земли перемещение ящика равно $s - L$, где s — перемещение поезда за время скольжения ящика по крыше. Сила трения совершает над ящиком работу $A_1 = F_{\text{тр}}(s - L)$, но на вагон действует такая же по величине сила трения со стороны ящика, направленная против движения поезда. Она совершает работу $A_2 = -F_{\text{тр}}s$. Полная работа силы трения составит:

$$A = A_1 + A_2 = -F_{\text{тр}}L = -\mu mgL.$$

В любой инерциальной системе отсчета эта работа одинакова, что неудивительно: она показывает, какое количество теплоты выделяется в результате трения ящика о крышу вагона. Эта величина определяется перемещением одного из трущихся тел относительно другого .

4.16. Ответ: $P_{\text{cp}} = 120 \text{ кВт}$.

Решение 1. Напомним, что под уклоном дороги понимают синус угла ее наклона к горизонту. Обычно этот угол невелик, что позволяет считать $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \alpha$; $\cos\alpha = 1$. Работа двигателя A , равная $P_{\text{cp}}t$, сообщает автомобилю кинетическую энергию

$W_k = \frac{Mv^2}{2}$, потенциальную энергию $W_p = Mgh = Mgs \cdot \sin\alpha$ и увеличивает внутреннюю энергию автомобиля, дороги и окружающего воздуха на величину работы против силы трения:

$$Q = F_{\text{тр}}s = \mu Mgs \cdot \cos\alpha \approx \mu Mgs.$$

Итак, $P_{\text{cp}} \cdot t = \frac{Mv^2}{2} + Mgs \cdot \sin\alpha + \mu Mgs$. Учитывая, что $t = \frac{s}{v_{\text{ср}}} = \frac{2s}{v}$, получаем:

$$P_{\text{ср}} = \frac{Mv}{2s} \left(\frac{v^2}{2} + gs \cdot \sin\alpha + \mu gs \right) = 120 \text{ кВт}.$$

Решение 2. Из условия следует, что ускорение автомобиля $a = \frac{v^2}{2s}$:

поскольку $P = Fv$ и $P_{\text{ср}} = Fv_{\text{ср}} = F \frac{v}{2}$, необходимо найти силу тяги F . Согласно второму закону Ньютона $Ma = F + Mg + N + F_{\text{тр}}$ (см. рисунок). В проекциях на оси x и y : $Ma = F - Mgs \sin\alpha - F_{\text{тр}}$; $0 = N - Mgc \cos\alpha$.

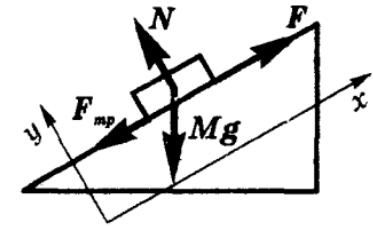
Учитывая, что $F_{\text{тр}} = \mu N$, находим

$$F = M \left(\frac{v^2}{2s} + gs \sin\alpha + \mu g \cos\alpha \right) \approx M \left(\frac{v^2}{2s} + gs \sin\alpha + \mu g \right).$$

Отсюда получаем результат, приведенный в решении 1.

4.17. Ответ: $N = \frac{Mgu}{2}$.

Решение. Совершенная двигателем за время Δt работа A равна кинетической энергии выбрасываемых за это время газов (ведь энергия самой ракеты не изменяется): $A = \frac{\Delta m u^2}{2}$, где Δm — масса выброшенных за время Δt газов. Поэтому мощность двигателя $N = \frac{A}{t} = \frac{\Delta m u^2}{2 \Delta t}$. Остается определить скорость расхода топлива $\frac{\Delta m}{\Delta t}$. Это нетрудно: сила F , с которой газ действует на ракету,



уравновешивает силу тяжести, т. е. $F = Mg$. Такая же по величине сила действует со стороны ракеты на газ, сообщая ему за время Δt импульс $F\Delta t$. Этот импульс уносится струей вытекающего газа: $Mg\Delta t = \Delta m u$. Отсюда $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{Mg}{u}$. Таким образом, $N = \frac{Mgu}{2}$.

4.18. Ответ: $A = 2,0$ кДж; $\Delta W_p = 0,98$ кДж.

Решение. Совершенная работа $A = Fh = 2,0$ кДж. Приобретаемая ведром потенциальная энергия $\Delta W_p = Mgh = 0,98$ кДж. Итак, $A > \Delta W_p$. Казалось бы, на подъем груза израсходовано больше энергии, чем груз приобрел. Обратим, однако, внимание, что $F > Mg$, поэтому груз будет подниматься с ускорением $a = \frac{F - Mg}{M}$.

К концу подъема он приобретет скорость $v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{2h(F - Mg)}{M}}$, а, значит, и кинетическую энергию $W_k = \frac{Mv^2}{2} = h(F - Mg)$. Изменение механической энергии ведра $\Delta W = \Delta W_p + W_k = Fh$ равняется совершенной работе. Возможен, конечно, и случай $\Delta W \neq A$ — если на ведро действует какая-то сила сопротивления. Тогда $A = \Delta W + Q$, где Q — увеличение внутренней энергии взаимодействующих тел.

4.19. Ответ: $A = \frac{Fmgh}{F - ma} = 612,5$ Дж, $\Delta W_p = mgh = 490$ Дж,

$$W_k = \frac{m^2gha}{F - ma} = 122,5 \text{ Дж.}$$

4.20. Ответ: $s = \frac{v^2}{2gtg\alpha} = 35$ м.

4.21. Ответ: $A = 650$ кДж.

Решение. На рис. а показано начальное положение воды в бассейне, на рис. б — конечное. Конечные высоты уровня воды в половинках бассейна определены из условия неизменности объема

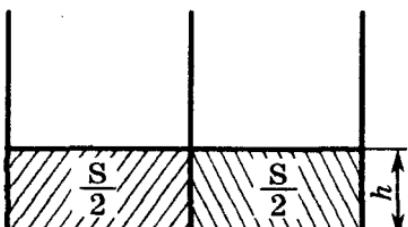


Рис. а

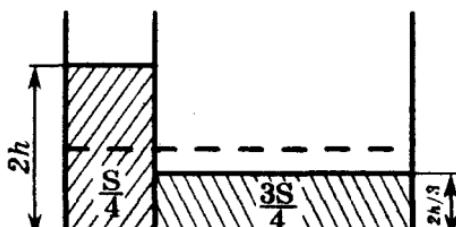


Рис. б

воды в каждой половине $\left(\frac{Sh}{2}\right)$. Поскольку перемещение перегородки было медленным, вода не приобретала при этом кинетической энергии. Значит, совершающаяся работа A идет на увеличение потенциальной энергии системы. Для каждой «половины» бассейна эта энергия равна mgH , где m — масса воды в одной половине бассейна ($m = \rho \frac{Sh}{2}$), H — высота центра тяжести, равная половине высоты уровня воды. Итак, до передвижения перегородки:

$$W_{p1} = 2mg \frac{h}{2} = mgh.$$

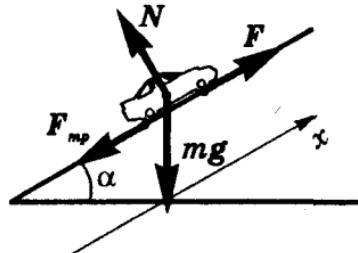
После передвижения:

$$W_{p2} = mg \frac{2h}{2} + mg \frac{\frac{2}{3}h}{2} = \frac{4}{3}mgh.$$

Следовательно, $A = \Delta W_p = W_{p2} - W_{p1} = \frac{n:gh}{3} = \frac{\rho g Sh^2}{6} = 650$ кДж.

4.22. Ответ: $P = 33$ кВт.

Решение. Прежде всего заметим, что при подъеме и спуске на автомобиль действовала одинаковая по величине сила сопротивления $F_{\text{сопр}}$. Найдем $F_{\text{сопр}}$. Так как автомобиль спускался равномерно, $F_{\text{сопр}} = mgsina$. На рисунке показаны силы, действующие на автомобиль при подъеме. F — сила тяги, возникающая благодаря работе двигателя вследствие трения покоя ведущих колес о дорогу. Поскольку ускорение отсутствует, $F + mg + N + F_{\text{сопр}} = 0$. Проектируем это векторное равенство на ось x : $F - mgsina - F_{\text{сопр}} = 0$, откуда $F = 2mgsina$. Тогда развиваемая мотором мощность $P = Fv = 2mgsina = 33$ кВт (по условию, $sina = 0,05$). На самом деле приведенное решение справедливо только в том случае, когда спуск и подъем происходят с одинаковой скоростью. Ведь при такой скорости важную роль играет сила сопротивления воздуха, а ее величина заметно растет с увеличением скорости.



4.23. Ответ: $\mu = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 2,4$.

Решение. Поскольку скорость движения v и мощность двигателя N на обоих этапах движения одинаковы, должна быть одинаковой

и сила тяги F ($F = \frac{N}{v}$). Кажется странным, что на подъеме и горизонтальном участке сила тяги может быть одной и той же, однако такое возможно: на наклонном участке уменьшается сила давления ящика на дорогу, а, значит, и сила трения. На горизонтальной дороге $F_1 = \mu mg$, где m — масса ящика. При равномерном движении на подъеме сила тяги $F_2 = mg(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)$. Поскольку $F_1 = F_2$, получаем $\mu = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 2,4$.

Итак, в принципе описанная бароном ситуация возможна. Однако такое большое значение коэффициента трения полностью на совести рассказчика.

4.24. Ответ: $v = 7,2$ м/с.

Решение. При малом угле α наклона дороги сила трения $F_{tr} = \mu mg \cos\alpha \approx \mu mg$, т. е. практически та же, что и на горизонтальной дороге. Значит, сила тяги на подъеме равна $F_{tr} + mgsina$, на спуске $F_{tr} - mgsina$, а на горизонтальном участке — F_{tr} . Из условия постоянства мощности двигателя получаем

$$N = v_1(\mu mg + mgsina) = v_2(\mu mg - mgsina) = v\mu mg.$$

Отсюда $\frac{N}{v_1} + \frac{N}{v_2} = \frac{2N}{v}$, следовательно, $v = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 7,2$ м/с.

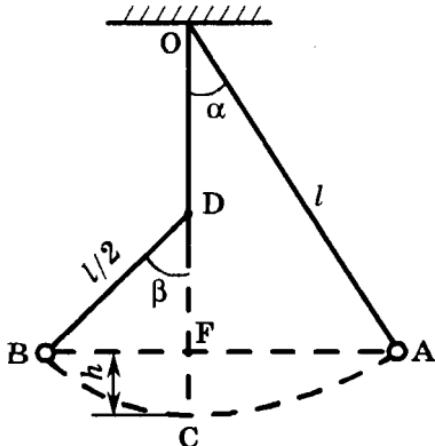
4.25. Ответ: $N = \pi d n \mu F = 38$ Вт.

4.26. Ответ: $\beta = \arccos(2\cos\alpha - 1)$.

Решение. Прежде всего обратим внимание, что в точках A и B (см. рисунок) обезьяна находилась на одинаковой высоте: поскольку скорость (а вместе с ней и кинетическая энергия) в этих точках обращается в нуль, потенциальная энергия обезьяны в них должна быть одинаковой. Если обозначить длину лианы l , то высота h подъема обезьяны в крайних положениях относительно нижнего положения C составит:

$$h = OC - OF = l - l \cos \alpha \text{ или } h = DC - DF = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \beta.$$

Отсюда $\beta = \arccos(2\cos\alpha - 1)$. При $\alpha < 60^\circ$ получаем $\beta < 90^\circ$.



при этом лиана все время остается натянутой. При больших же значениях угла α угол β превысит 90° и в какой-то момент при $\beta = \beta_0 > 90^\circ$ натяжение лианы упадет до нуля, она провиснет, а обезьяна начнет двигаться по параболе.

4.27. Ответ: $\mu = 0,05$.

Решение. Кинетическая энергия санок равна нулю как в начале, так и в конце пути. Значит, начальная потенциальная энергия санок mgH целиком расходуется на работу против силы трения (т. е. потенциальная энергия переходит во внутреннюю). Поскольку сила трения на склоне горы с углом наклона α равна $\mu mg \cos \alpha$, а на горизонтальном участке μmg , получаем: $mgH = \mu mg \cos \alpha \cdot L + \mu mg \cdot s$, или $mgH = \mu mg(a + s)$. Здесь L — длина склона горы. Мы учли, что $L \cos \alpha = a$. Отсюда $\mu = \frac{H}{a + s} = 0,05$.

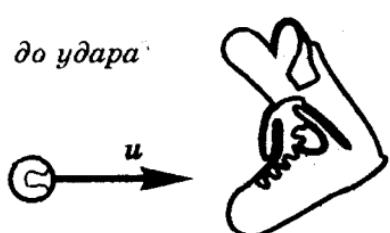
Заметим, что ответ не зависит от того, в какой именно точке заканчивается склон (формула для μ содержит лишь сумму $a + s$). Можно сказать, что полное горизонтальное перемещение санок не зависит от крутизны горы. Оно определяется лишь ее высотой и величиной μ .

Для чего в условии упомянута плавность перехода наклонной поверхности в горизонтальную? Дело в том, что при движении по криволинейной траектории меняется вес тела (см. задачу 2.2), а вследствие этого — и сила трения. Если радиус кривизны траектории равен R , то центростремительное ускорение тела равно $\frac{v^2}{R}$, а изменение веса не превышает величины $\Delta P = \frac{mv^2}{R}$. Поскольку для санок на выезде с горы $v^2 < 2gH$, получаем $\frac{\Delta P}{mg} < \frac{2H}{R}$. При $\frac{H}{R} \ll 1$ изменением веса и силы трения можно пренебречь. Следовательно, полученный результат действительно справедлив при достаточно плавном переходе (при $R \gg H$).

4.28. Ответ: $v = 2u = 20$ м/с.

Решение. Прежде всего заметим, что соударение ноги и мяча можно считать упругим и центральным. Кроме того, масса ноги во много раз превышает массу мяча. Поэтому скорость ноги при ударе практически не меняется. Упругое столкновение легкого и массивного тел удобнее всего рассматривать в системе отсчета массивного тела (в данном случае — ноги). В этой системе отсчета скорость легкого тела при ударе

до удара



меняет направление, оставаясь неизменной по модулю (иначе изменилась бы после удара кинетическая энергия). В нашем случае до удара скорость мяча относительно ноги равна u ; значит, после удара она остается такой же (см. рисунок). Тогда скорость мяча относительно земли после удара $v = 2u$ согласно правилу сложения скоростей при переходе из одной системы отсчета в другую.

после удара



4.29. Решение. С какими телами взаимодействует шар, т. е. откуда он может получать энергию? На шар действует сила тяжести со стороны Земли и сила Архимеда со стороны воздуха. Значит, нужно рассмотреть процессы в замкнутой системе Земля — шар — воздух. При подъеме «освободившееся» место шара заполняется окружающим воздухом. Можно сказать, что шар «меняется местами» с воздухом, объем которого равен полному объему шара: шар поднимается, а воздух опускается. Вес этого воздуха больше веса шара, иначе ведь шар не будет подниматься! Итак, более легкий груз (шар) поднимается, а более тяжелый — воздух — опускается на такое же расстояние. Разумеется, потенциальная энергия шара растет за счет убыли потенциальной энергии воздуха. Полная же потенциальная энергия системы убывает.

4.30. Ответ: $v = \left[2gh \left(1 - \frac{\frac{m}{M}}{\left(1 + \frac{m}{M} \right) + \left(1 + \frac{m}{M} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$, скорость буд-

дет направлена под углом $\beta = \arctg \left[\left(1 + \frac{m}{M} \right) \operatorname{tg} \alpha \right]$ к горизонту.

Решение. При закрепленном клине тело приобрело бы скорость $v_1 = \sqrt{2gh}$. При незакрепленном — скорость наверняка будет меньше: часть начальной потенциальной энергии тела перейдет теперь в кинетическую энергию клина. Обозначим через V (см. рис. а) скорость, приобретенную клином. Мы можем воспользоваться законом сохранения энергии $mgh = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv_x^2}{2}$ и законом сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось (поскольку отсутствует сила трения): $-MV + mv_x = 0$. Учтем также, что скорость тела относительно клина $v - V$ направлена под углом α .

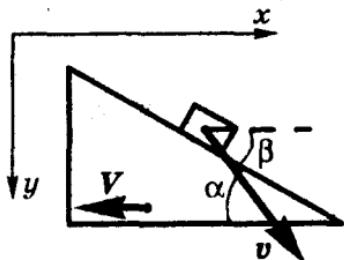


Рис. а

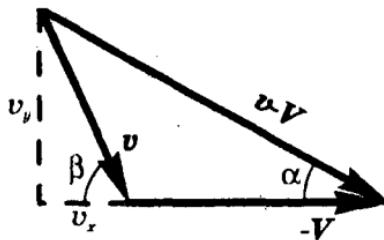


Рис. б

к горизонту (см. рис. б): $(v_x + V)\operatorname{tg}\alpha = v_y$.

Итак, мы получили систему четырех уравнений:

$$\begin{cases} mgh = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2}, \\ -MV + mv_x = 0, \\ v^2 = v_x^2 + v_y^2, \\ (v_x + V)\operatorname{tg}\alpha = v_y. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$v^2 = 2gh \left(1 - \frac{\frac{m}{M}}{\left(1 + \frac{m}{M} \right) + \left(1 + \frac{m}{M} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right), \quad \frac{v_y}{v_x} = \left(1 + \frac{m}{M} \right) \operatorname{tg}\alpha.$$

Угол β наклона скорости v к горизонту определяется из условия

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x} = \left(1 + \frac{m}{M} \right) \operatorname{tg}\alpha.$$

Если $m \ll M$, получаем $v \approx \sqrt{2gh}$, $\beta \approx \alpha$. Если $m \gg M$, то $v \approx \sqrt{2gh}$, $\beta \approx \frac{\pi}{2}$ (тяжелое тело «не чувствует» легкой горки и падает почти отвесно).

4.31. Ответ: $v_0 = 2\frac{M+m}{m}\sqrt{gl} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

Решение. Это знаменитая задача о так называемом баллистическом маятнике. Советуем обратить на нее особое внимание. Наиболее распространенная ошибка здесь — попытка применения закона сохранения механической энергии: «кинетическая энергия W_k пули переходит целиком в потенциальную энергию W_p отклонившегося груза». Это неверно, потому что механическая энергия не сохраняется: при попадании пули в бруск большая часть W_k переходит не в потенциальную энергию, а во внутреннюю: оба тела нагреваются. Для решения задачи весь процесс следует разбить на два этапа: первый, очень короткий — соударение пули с бруском. При этом бруск практически не успевает

сдвинуться с места, но приобретает скорость u . Закон сохранения механической энергии не выполняется, но выполняется (как при всех столкновениях) закон сохранения импульса:¹⁾ $mv_0 = (M + m)u$. На втором этапе бруск с застрявшей пулей за счет полученной скорости u отклоняется на угол α и при этом приподнимается на высоту $h = l(1 - \cos\alpha)$. На этом этапе не происходит перехода механической энергии во внутреннюю, потому механическая энергия сохраняется: $\frac{(M + m)u^2}{2} = (M + m)gh$. Отсюда

$$2gl(1 - \cos\alpha) = \frac{m^2v_0^2}{(M + m)^2},$$

$$v_0 = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = 2 \frac{M + m}{m} \sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

4.32. Ответ: $M = 1$ кг.

Решение. Почему во второй раз пуля вошла в сыр глубже? При втором выстреле кинетическая энергия пули перешла только во внутреннюю энергию, тогда как при первом выстреле часть энергии пули перешла в кинетическую энергию головки сыра (вспомним, что в момент выстрела головка покоилась!), да еще и сама пуля, застрявшая в сыре, тоже сохранила часть кинетической энергии. Таким образом, в первом случае закон сохранения энергии принимает вид $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(M + m)u^2}{2} + Fs_1$. Здесь v_0 — скорость пули; u — скорость головки сыра после удара пули; Fs_1 (работа против силы сопротивления) показывает, сколько механической энергии перешло во внутреннюю. Во втором случае закон сохранения энергии имеет вид $\frac{mv_0^2}{2} = Fs_2$. Согласно закону сохранения импульса $mv_0 = (M + m)u$.

Решая полученную систему уравнений, находим

$$Fs_1 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{m^2v_0^2}{2(M + m)} = \frac{Mmv_0^2}{2(M + m)} = \frac{M}{M + m}Fs_2,$$

откуда $M = \frac{ms_1}{s_2 - s_1} = 1$ кг.

Если бы головка сыра была легче, разность $s_2 - s_1$ оказалась бы большей (попробуйте вбить гвоздь в подвешенный на веревке деревянный бруск!).

¹⁾ Мы считаем нить достаточно длинной, так что небольшое перемещение бруска за время соударения практически не отклоняет ее от вертикального направления, и проекция силы натяжения нити на горизонтальную ось равна нулю.

4.33. Ответ: $H = 100$ м.

Решение 1. При полете в воздухе человек приобретает скорость $v = \sqrt{2gh}$. В воде эта скорость уменьшается до нуля. В отсутствие сил сопротивления на человека действуют только постоянные силы (сила тяжести и сила Архимеда), поэтому движение можно считать равноускоренным; тогда $H = \frac{v^2}{2|a|} = \frac{gh}{|a|}$, где a — ускорение человека при движении в воде. Согласно второму закону Ньютона, $m|a| = F_A - mg$, где $F_A = \rho V g$ — сила Архимеда, а ρ — плотность воды. Отсюда

$$H = \frac{m}{\rho V - m} h = 10h = 100 \text{ м.}$$

Решение 2. В отсутствие сил сопротивления механическая энергия замкнутой системы тел сохраняется. Однако не забудем включить в замкнутую систему воду и Землю! В начале прыжка и в момент наибольшего погружения скорость человека равна нулю, т.е. кинетическая энергия отсутствует. Значит, потенциальная энергия W_p системы в эти моменты одинакова: $\Delta W_p = 0$. Но ведь человек потерял высоту $H + h$, а, значит, $\Delta W_q = -mg(H + h)$. У какой же части системы энергия при этом увеличилась? Ответ прост: у воды! Погружаясь на глубину H , человек вытеснил и заставил подняться на такую же высоту H воду массой ρV , увеличив ее потенциальную энергию на $\rho V g H$.

Итак, $-mg(H + h) + \rho V g H = 0$. Отсюда $H = \frac{m}{\rho V - m} h = 100 \text{ м.}$

Решение 3. Воспользуемся тем, что полная работа всех приложенных к телу сил при перемещении из верхней точки в нижнюю равна изменению его кинетической энергии (в данном случае — нулю). Это приводит к соотношению $mgh - (F_A - mg)H = 0$, откуда

$$H = \frac{mgh}{F_A - mg} = \frac{m}{\rho V - m} h = 100 \text{ м.}$$

Глубина погружения получилась неправдоподобно большой (на самом деле при таком прыжке человек погружается в воду всего на несколько метров). Дело в том, что силы сопротивления (особенно при движении в воде) велики и пренебрегать ими нельзя.

4.34. Решение. Найдем соотношение между скоростями v_1 и v_2 частей вагона после взрыва и их скоростями u_1 и u_2 после первого столкновения. Общий импульс системы после взрыва должен остаться равным нулю, поэтому $m_1 v_1 = m_2 v_2$. При дальнейшем движении импульсы частей вагона изменяются только по направлению (за счет взаимодействия с рельсами). Однако кинетическая

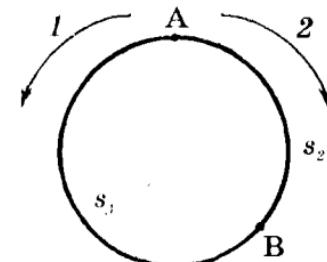
энергия частей вагона в отсутствие трения измениться не может (в силу закона сохранения энергии), поэтому модули скоростей v_1 и v_2 постоянны. Перед первым столкновением импульсы частей вагона опять направлены противоположно, и общий импульс равен нулю. Значит, и $m_1 v_1 = m_2 v_2$, т. е. отношение скоростей двух частей вагона не изменяется в результате их столкновения:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Так же относятся и пройденные ими от взрыва до первого столкновения пути s_1 и s_2 (см. рисунок). Учитывая, что $s_1 + s_2 = L$ и $\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}$, получаем:

$$s_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} L, \quad s_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} L.$$

Но от первого столкновения до второго части вагона пройдут в обратном направлении такие же точно расстояния (ведь отношение скоростей осталось прежним)! Значит, второе столкновение произойдет как раз в точке А. Вагон не только «срастается», но и останавливается на прежнем месте. Никаких следов от взрыва (если не считать, конечно, исчезновения мешка с порохом)! Заметим, что для нас несущественно, было ли первое столкновение упругим или нет. «Сработал» лишь закон сохранения импульса. А вот отсутствие трения при движении очень важно!



4.35. Ответ: 11 куропаток.

Решение. Разумеется, всех куропаток нужно рассматривать как одинаковые препятствия для пули. Ответ, который напрашивается, — «добычей станут все 20 куропаток» — будет опрометчивым. Ведь скорость пули не уменьшается на одну и ту же величину при последовательном пробивании каждого из одинаковых препятствий (просто потому, что каждое следующее препятствие преодолевается за большее время). Какая же «потеря» одинакова в каждом из пробитых препятствий? Пуля преодолевает в каждом из них одинаковую силу сопротивления и проходит одинаковый путь, следовательно, теряет каждый раз одну и ту же энергию ΔW на совершение работы по преодолению силы сопротивления. Если масса пули m , а начальная скорость v_0 , то

$$\Delta W = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{m(0,95v_0)^2}{2} = 0,0975 \frac{mv_0^2}{2}.$$

Начальная энергия пули $\frac{mv_0^2}{2}$ составляет 10,3 таких «порций».

Значит, добыча барона составит 11 куропаток: 10 из них будут пробиты насекомых, а в одиннадцатой пуля застрянет.

4.36. Ответ: $v_1 = v_2$, $v_2 = v_1$ (шары «обмениваются» скоростями).
Указание. При упругом ударе не происходит перехода кинетической энергии в другие формы энергии. Воспользуйтесь законами сохранения импульса и энергии.

4.37. Ответ: прямой угол.

Решение. Пусть скорость налетающего шара v_0 , скорости шаров после удара v_1 и v_2 , масса каждого из шаров m . Запишем законы сохранения энергии и импульса:

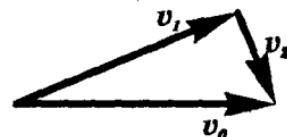
$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}, \quad mv_0 = mv_1 + mv_2.$$

Отсюда

$$v_0 = v_1 + v_2, \quad (1)$$

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2. \quad (2)$$

Возводя первое уравнение в квадрат и вычитая из него второе, получаем $v_1v_2 = 0$, т. е. $v_1v_2 \cos\alpha = 0$, где α — угол разлета шаров. Поскольку при нецентральном ударе $v_1 \neq 0$ и $v_2 \neq 0$, получаем $\cos\alpha = 0$, т. е. $\alpha = 90^\circ$.



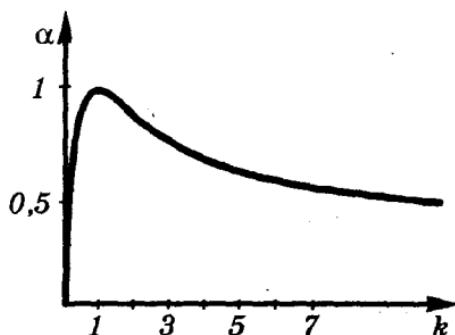
Уравнения (1) и (2) допускают и простую геометрическую интерпретацию. Уравнение (1) означает, что векторы v_0 , v_1 и v_2 образуют треугольник (см. рисунок). А уравнение (2) справедливо только в том случае, когда этот треугольник — прямоугольный.

4.38. Ответ: см. рисунок.

Решение. Пусть до удара скорость первого шара была v_0 , а после удара v_1 . Скорость второго шара после удара обозначим v_2 .¹⁾ Тогда законы сохранения импульса и энергии принимают вид

$$m_1v_0 = m_1v_1 + m_2v_2;$$

$$\frac{m_1v_0^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}.$$



¹⁾ Точнее, v_1 и v_2 — проекции соответствующих скоростей на направление скорости v_0 . Как показано ниже, $v_1 < 0$ при $m_1 < m_2$. Это означает, что налетающий шар отлетает назад при столкновении с более массивным шаром.

Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1(v_0 - v_1) = m_2 v_2, \\ m_1(v_0^2 - v_1^2) = m_2 v_2^2. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение почленно на первое, получим $v_0 + v_1 = v_2$. Подставляя v_2 в первое уравнение системы, получим

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0. \text{ Тогда } v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0.$$

Начальная энергия первого шара $W_0 = \frac{m_1 v_0^2}{2}$, а энергия, переданная второму шару, $W_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2}$. Поэтому доля переданной энергии

$$\alpha = \frac{W_2}{W_0} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4k}{(1 + k)^2}.$$

График зависимости $\alpha(k)$ приведен на рисунке. Обратите внимание, что наиболее эффективная передача энергии происходит при значениях k , близких к единице, а при $k = 1$ вся энергия налетающего шара передается другому шару. Итак, энергия лучше всего передается при упругих столкновениях частиц равной массы. Этот результат очень важен, например, при выборе вещества — замедлителя нейтронов. Приходится его учитывать и физикам-ядерщикам при попытках получить горячую плазму, необходимую для осуществления термоядерных реакций. Плазма (ионизированный газ) состоит из частиц двух типов: легких электронов и тяжелых ионов, причем отношение их масс составляет десятки и сотни тысяч. Разогревая плазму, увеличивают энергию электронов. Однако передача энергии от электронов к ионам при столкновениях ничтожно мала. Переход к тепловому равновесию между электронами и ионами — процесс очень медленный. В результате возникает так называемая двухтемпературная плазма: «горячие» электроны среди «холодных» ионов.

4.39. Ответ: $W = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$.

Решение 1. В какой момент энергия упругой деформации пружины (а, значит, и сама деформация) максимальна? Очевидно, когда вагоны на мгновение оказались неподвижными *один относительно другого*, т. е. в тот момент, когда они движутся с одинаковой скоростью *и* относительно Земли. Тогда законы сохранения импульса и энергии принимают вид:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u,$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + W.$$

Выражая v из первой формулы и подставляя это значение во вторую, получаем

$$W = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2.$$

Если бы вагоны двигались навстречу друг другу, разность величин скоростей, естественно, следовало бы заменить на сумму: ведь это просто начальная скорость одного вагона относительно другого. Интересно, что при абсолютно неупругом ударе тех же вагонов переход кинетической энергии в другие формы измеряется той же величиной W . Это неудивительно: если в момент наибольшего сжатия пружины буфера сработает какая-нибудь защелка и не даст пружине выпрямиться, то удар тем самым превратится в абсолютно неупругий.

Решение 2. Можно решить эту задачу и в системе отсчета, связанной с центром масс системы. Скорость этой системы отсчета относительно Земли $v_{\text{cm}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$, а скорости вагонов в этой системе отсчета

$$v_1' = v_1 - v_{\text{cm}} = \frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad \text{и} \quad v_2' = v_2 - v_{\text{cm}} = \frac{m_1(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}.$$

Суммарный импульс вагонов в системе центра масс равен нулю, а в момент максимального сжатия пружины оба вагона останавливаются. При этом вся их начальная кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию деформированной пружины:

$$W = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

4.40. Ответ: Большой шар будет двигаться со скоростью $\frac{v}{\sqrt{3}}$,

меньший — со скоростью $\frac{2v}{\sqrt{3}}$ под углом 30° к начальной скорости большого шара.

4.41. Решение. Поскольку между биллиардными шарами имеются промежутки, в первый момент соударения происходит взаимодействие только между шарами 1 и 2. В результате (см. задачи 4.36, 4.38) шар 1 останавливается, полностью передав свой импульс и энергию шару 2 (столкновение биллиардных шаров можно считать упругим). В следующий момент происходит аналогичная передача энергии и импульса шару 3 и далее по цепочке. Последний шар 6, получив толчок, отклонится на тот же угол, на который первоначально был отклонен шар 1. Движение «промежуточных» шаров незаметно для глаза, поскольку длится ничтож-

но малые промежутки времени. Когда шар 6 «вернется» после отскока, мы увидим отскок шара 1 и т. д. Если мы отводим первоначально шары 2 и 1, то этот процесс происходит дважды: сначала по цепочке пробежит «толчок» от удара шара 2, а затем, спустя ничтожное время, «толчок» от шара 1. В результате мы увидим, что с другой стороны цепочки откололись шары 5 и 6, потом снова шары 1 и 2 и т. д.

4.42. Ответ: $\Delta W_1 = -89$ МДж, $\Delta W_2 = 290$ МДж.

Решение. В первом случае барон, по существу, неупруго сталкивается с тем ядром, на которое пересаживается; при этом, конечно, часть кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию барона и ядра. Значит, в этом случае изменение кинетической энергии $\Delta W_1 < 0$. Во втором случае барон должен оттолкнуться от ядра, на котором сидел, чтобы приобрести скорость встречного ядра. При этом ядро с бароном можно рассматривать как разрывной снаряд, причем скорость после разрыва одного из «осколков» (барона) известна — она равна скорости встречного ядра (только при таком условии «мягкой» пересадки скорость этого ядра не изменится). Таким образом, во втором случае суммарная кинетическая энергия барона и ядер увеличивается (за счет расхода химической энергии в могучих мышцах барона при его толчке) и $\Delta W_2 > 0$. Произведем подсчеты. В первом случае скорость v_1 ядра, на которое пересаживается барон, определяется из закона сохранения импульса $(m + M)v_1 = Mv_0 - mv_0$, а изменение кинетической энергии системы

$$\Delta W_1 = \frac{(m + M)v_1^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{2Mmv_0^2}{M + m} = -89 \text{ МДж.}$$

Заметим, что при прямом попадании ядра в неподвижно стоящего барона энергии освободилось бы значительно меньше! Во втором случае закон сохранения импульса позволяет найти скорость v_2 оставленного бароном ядра: $Mv_2 - mv_0 = (M + m)v_0$.

Изменение кинетической энергии в этом случае равно

$$\Delta W_2 = \frac{Mv_2^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(M + m)v_0^2}{2} = \frac{2m(M + m)v_0^2}{M} = 290 \text{ МДж.}$$

Такая энергия выделяется при взрыве большого порохового заряда, так что барон и на этот раз неплохо «толкнул» ядро!

4.43. Ответ: при $v < v_0 = \sqrt{2gH\left(1 + \frac{m}{M}\right)}$ тело скользнет с горки, не дойдя до ее вершины и передав горке часть своего импульса и своей энергии; при $v > v_0$ тело преодолеет горку и продолжит движение со скоростью v , а горка сместится вправо от начального

положения и остановится; при $v = v_0$ тело может некоторое время двигаться вместе с горкой, находясь на ее вершине.

Решение. Результат столкновения зависит от того, преодолеет ли тело вершину горки. Определим ту минимальную начальную скорость v_0 тела, при которой это возможно. Она, очевидно, позволяет телу подняться на вершину горки и там остановиться относительно горки, т. е. двигаться вместе с ней с некоторой скоростью u . Применив к этому движению законы сохранения энергии и импульса, получаем

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m+M)u^2}{2} + mgH; mv_0 = (m+M)u.$$

Отсюда $v_0 = \sqrt{2gH\left(1 + \frac{m}{M}\right)}$. Заметим, что чем легче горка, тем

большая требуется скорость для ее преодоления. Когда $v = v_0$, тело может некоторое время находиться в неустойчивом равновесии на вершине горки. Если бы вершина горки была плоской, тело могло бы там остаться, и столкновение можно было бы считать «неупругим» (кинетическая энергия не сохраняется, однако в данном случае она переходит не во внутреннюю, а в потенциальную энергию).

Если $v < v_0$, тело съезжает с горки, не достигнув вершины, а сама горка начинает двигаться вправо. Конечные скорости u_1 тела и u_2 горки можно определить из законов сохранения энергии и импульса (см. задачу 4.38), как и для упругих лобовых столкновений частиц.

Рассмотрим, наконец, случай $v > v_0$. В этом случае тело «переваливает» через вершину и обгоняет горку, т. е. $u_1 > u_2$. Единственное решение, удовлетворяющее одновременно этому условию и законам сохранения энергии и импульса, имеет вид $u_1 = v$, $u_2 = 0$, т. е. в конечном счете скорости тела и горки не изменились! Горка разгонялась, пока тело поднималось по ее левому склону, и уменьшала скорость, когда оно соскальзывало по правому склону. В итоге горка остановилась, сместившись вправо от начального положения и «вернув» налетевшему телу всю его начальную кинетическую энергию.

4.44. Решение. Пусть m_1 и m_2 — массы тел; v_1 и v_2 — их скорости до соударения относительно системы отсчета K ; u_1 и u_2 — скорости после соударения в той же системе отсчета. Тогда изменение кинетической энергии составит:

$$\Delta W_k = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} - \frac{m_1v_1^2}{2} - \frac{m_2v_2^2}{2}.$$

Если система отсчета K движется со скоростью V относительно системы отсчета K' , то в системе K' ко всем скоростям частиц следует добавить V . В этой системе отсчета

$$\begin{aligned}\Delta W_k' &= \frac{m_1(u_1 + V)^2}{2} + \frac{m_2(u_2 + V)^2}{2} - \frac{m_1(v_1 + V)^2}{2} - \frac{m_2(v_2 + V)^2}{2} = \\ &= \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} + V(m_1 u_1 + m_2 u_2 - m_1 v_1 - m_2 v_2) = \\ &= \Delta W_k + V(m_1 u_1 + m_2 u_2 - m_1 v_1 - m_2 v_2).\end{aligned}$$

Согласно закону сохранения импульса $m_1 u_1 + m_2 u_2 - m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$. Значит, действительно $\Delta W_k = \Delta W_k'$. Другой результат был бы странным: ведь чаще всего убыль кинетической энергии при столкновениях связана с изменением температуры Δt , одинаковым во всех системах отсчета: $\Delta W_k + c m \Delta t = 0$.

4.45. Ответ: $h_1 = 2,0$ см; $h_2 = 32$ см.

Решение. Прежде всего необходимо найти скорость v_0 первого шара непосредственно перед ударом. Согласно закону сохранения энергии $m_1 g H = \frac{m_1 v_0^2}{2}$, т. е. $v_0 = \sqrt{2gH}$. Рассматривая упругий лобовой удар (см. задачу 4.38), находим скорости шаров после удара:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0; \quad v_2 = \frac{2m_1 v_0}{m_1 + m_2}.$$

Высота подъема каждого из шаров определяется также из закона сохранения энергии:

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = H \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = 2,0 \text{ см};$$

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = 4H \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = 32 \text{ см}.$$

Полученные формулы показывают, что при любых значениях масс шаров $h_1 < H$, а вот h_2 может превышать H почти вчетверо! Этот случай реализуется при $m_1 \gg m_2$ (ср. с задачей 4.28).

4.46. Ответ: $\mu = \frac{Mv^2}{2gL(M+m)}$.

Указание. Закон сохранения импульса позволяет найти конечную скорость платформы $u = \frac{Mv}{M+m}$. Работа силы трения $A = -F_{\text{тр}}L$ (см. задачу 4.15) совпадает с изменением кинетической энергии системы.

4.47. Решение. Обозначим v_i скорость i -той материальной точки,

а \mathbf{u}_i — скорость той же точки в системе отсчета центра масс. Эти скорости связаны соотношением $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \mathbf{u}_i$. Кинетическая энергия N точек составит:

$$W = \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 / 2 = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_c + \mathbf{u}_i)^2 / 2 = \frac{\mathbf{v}_c^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i + \mathbf{v}_c \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{u}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{u}_i^2.$$

Учтем теперь, что $\sum_{i=1}^N m_i = M$, $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{u}_i^2 = W_{\text{им}}$, а $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ (сум-

марный импульс всех точек в системе отсчета их центра масс равен нулю), — и доказательство завершено.

Укажем на особо важный частный случай: систему материальных точек, составляющих твердое тело. В системе отсчета центра масс твердое тело может только вращаться вокруг этого центра, поэтому кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетической энергии его поступательного движения (со скоростью \mathbf{v}_c) и кинетической энергии вращения относительно центра масс.

4.48. Ответ: частицы должны двигаться с одинаковыми по величине и направлению скоростями.

Решение. Часто встречающийся ответ «все частицы должны остановиться», вообще говоря, неверен: если до столкновения суммарный импульс всех частиц не равнялся нулю, то все частицы никак не могут остановиться — это противоречило бы закону сохранения импульса. Заметим, однако, что скорость центра масс при столкновении частиц, образующих замкнутую систему, не изменяется. Следовательно, связанная с центром масс система отсчета является инерциальной. В этой системе отсчета суммарный импульс частиц равен нулю, поэтому все частицы после столкновения действительно могут остановиться; при этом вся их кинетическая энергия перейдет во внутреннюю. Согласно доказанному при решении задачи 4.44 результату, «потеря» кинетической энергии будет такой же относительно любой другой системы отсчета. Очевидно, что большей потери кинетической энергии быть не может. В системах отсчета, не совпадающих с системой центра масс, частицы после столкновения должны двигаться с одинаковыми по величине и направлению скоростями. Такие столкновения называют абсолютно неупругими (сталкиваются и сливаются два куска пластилина, пуля застревает в движущемся шаре и т. д.).

4.49. Решение. При изменении расстояния между точками на Δr потенциальная энергия изменится на величину

$$\Delta W_p = \frac{C}{r + \Delta r} - \frac{C}{r} = - \frac{C \Delta r}{r(r + \Delta r)}.$$

Если $\Delta r \ll r$, получаем $\Delta W_p = -\frac{C\Delta r}{r^2}$. Поскольку изменение потенциальной энергии равно работе силы, взятой со знаком «минус», можно записать $A = F \cdot \Delta r = C \frac{\Delta r}{r^2}$, откуда $F = \frac{C}{r^2}$, что и требовалось доказать.

Определим теперь, притягиваются тела или отталкиваются. Заметим сначала, что, согласно формуле $W_p = \frac{C}{r}$, нулевому уровню потенциальной энергии соответствует $r \rightarrow \infty$, т. е. бесконечно большое расстояние между телами. При приближении тел друг к другу W_p увеличивается, если $C > 0$, и уменьшается, если $C < 0$. Когда W_p увеличивается при уменьшении r , работа силы взаимодействия отрицательна (напомним еще раз, что работа равна изменению потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком), а это означает, что сила направлена противоположно перемещению; т. е. $C > 0$ соответствует отталкиванию. Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что $C < 0$ соответствует притяжению.

Вспомним теперь о законе всемирного тяготения $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$: это как раз тот вид зависимости силы от расстояния, который мы получили при решении нашей задачи. И, действительно, потенциальная энергия взаимодействия материальных точек, притягивающих друг к другу по закону всемирного тяготения, равна $W_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}$ (знак «минус» указывает на то, что это — притяжение!). Точно такой же вид имеет и потенциальная энергия взаимодействия двух сферически симметричных тел (в таком случае r — расстояние между их центрами).

Рассмотрим, как изменяется потенциальная энергия при подъеме небольшого тела массой m на высоту h над поверхностью Земли ($h \ll R$, где R — радиус Земли). Получаем

$$\Delta W_p = -G \frac{mM}{R+h} + G \frac{mM}{R} = G \frac{mMh}{R(R+h)} \approx G \frac{mM}{R^2} h.$$

Величина $G \frac{mM}{R^2}$ представляет собой силу притяжения тела к Земле, т. е. равна mg , и поэтому $\Delta W_p = mgh$, чего, конечно, и следовало ожидать.

4.50. Ответ: $v = \sqrt{2gR} = 11$ км/с.

Указание. См. задачу 4.49. Вблизи поверхности Земли $W =$

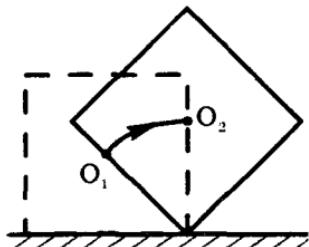
$= W_k + W_p = \frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{R}$, а на очень большом удалении от Земли W_k и W_p обращаются в нуль. Следовательно, $W = 0$ и вблизи поверхности Земли. Заметим, что скорость, о которой идет речь в условии задачи, называется второй космической.

4.51. Ответ: $W_k = mv^2$.

Указание. См. задачу 4.47.

4.52. Ответ: при $\mu < \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ волоком, при $\mu > \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ кантованием.

Указание. При перемещении кантованием на длину ребра куба работа совершается для перевода куба в показанное на рисунке положение (далее он поворачивается сам). Эта работа равна увеличению потенциальной энергии при переходе центра тяжести куба из точки O_1 в точку O_2 .

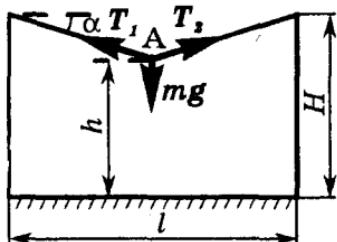


5.1. Ответ: $H \geq 5,5$ м.

Решение. Равнодействующая трех сил, приложенных в точке A (см. рисунок), равна нулю. Это условие приводит к уравнению $2T\sin\alpha - mg = 0$, где $T_1 = T_2 = T$.

Заметим, что при малых α сила натяжения каната может во много раз превышать вес груза. Минимально допустимое значение α определяется максимально допустимой величиной силы натяжения каната. Минимально допустимая величина H определяется из условия $H_{\min} - h = \frac{l}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Выражая $\operatorname{tg}\alpha$ через $\sin\alpha$, получаем:

$$H_{\min} = h + \frac{mgl}{2\sqrt{4T^2 - (mg)^2}} = 5,5 \text{ м.}$$

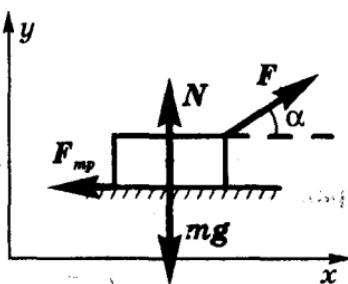


5.2. Ответ: $F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 110$ Н.

Указание. Согласно второму закону Ньютона при движении без ускорения $mg + N + F + F_{tp} = 0$. В проекциях на оси координат (см. рисунок) получаем:

$$F\cos\alpha - F_{tp} = 0, N + Fs\sin\alpha - mg = 0.$$

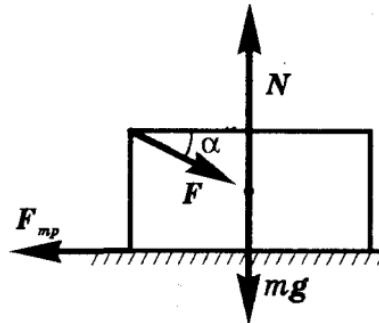
Следует учесть, что $F_{tp} = \mu N$ (а не μmg , как часто ошибочно записывают).



5.3. Ответ: $F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$ при $\mu \tan \alpha < 1$; при $\mu \tan \alpha \geq 1$ сдвинуть ящик невозможно.

Решение. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси и используем формулу $F_{tr} = \mu N$ для силы трения скольжения. Получим (см. рисунок) $F \cos \alpha - F_{tr} = 0$, $N - F \sin \alpha - mg = 0$. Отсюда находим выражение для F :

$$F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}.$$



Анализ этого выражения показывает, что при достаточно больших α и μ (когда $\mu \tan \alpha \geq 1$) сдвинуть ящик с места вообще невозможно, его «заклинивает». Дело в том, что при увеличении F возрастает N , а вследствие этого — и F_{tr} . Сравните полученный результат с ответом задачи 5.2: толкая ящик, мы должны прикладывать большую силу, чем когда тянем его (при одинаковых m , μ , α).

5.4. Ответ: $\alpha = \arctg \mu$; $F_{min} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2}}$.

Решение. Очевидно, выгоднее направить силу под некоторым углом к горизонтальной плоскости, чтобы уменьшить силу давления груза на плоскость, вследствие чего уменьшится и сила трения. Значения F и α связаны соотношением $F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$ (см. задачу 5.2). Остается найти минимальное значение F как функции α . Для этого необходимо исследовать на максимум выражение $f(\alpha) = \cos \alpha + \mu \sin \alpha$.

1-й способ (для умеющих дифференцировать): $f'(\alpha) = 0$. Отсюда $-\sin \alpha + \mu \cos \alpha = 0$; $\tan \alpha = \mu$; $f_{max} = \sqrt{1 + \mu^2}$.

2-й способ изложен в математическом приложении.

Подставляя в формулу для F полученное значение f_{max} , находим:

$$F_{min} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad (\text{при } \alpha = \arctg \mu).$$

5.5. Ответ: $\mu > 0,27$.

Решение. Действующие на клин силы показаны на рисунке (силой тяжести самого клина пренебрегаем). Приравнивая нуль проекцию равнодействующей этих сил на вертикальную ось, получаем

$$N_1 \sin \frac{\alpha}{2} + N_2 \sin \frac{\alpha}{2} - F_{tr1} \cos \frac{\alpha}{2} - F_{tr2} \cos \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Учитывая, что $N_1 = N_2$ (в силу симметрии) и $F_{\text{тр}} \leq \mu N$, имеем $\mu \geq \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,27$.

5.6. Ответ: при параллельном соединении $k = k_1 + k_2$, при последовательном $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

Решение. Коэффициент жесткости упругой системы определяется из соотношения $F = kx$, где F — создаваемая системой сила упругости, а x — модуль общего удлинения системы пружин.

а) При параллельном соединении $x = x_1 = x_2$, $F = F_1 + F_2$.

Здесь x_1 , x_2 — удлинение каждой из пружин, а F_1 , F_2 — создаваемые ими силы упругости. Отсюда

$$k = \frac{F}{x} = \frac{F_1}{x} + \frac{F_2}{x} = k_1 + k_2.$$

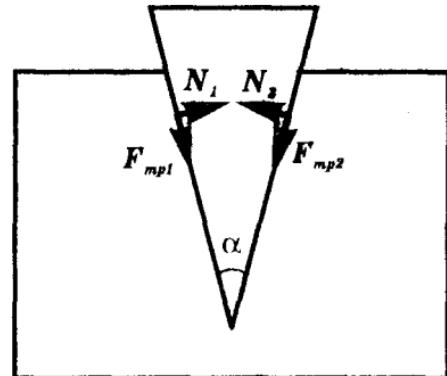
б) При последовательном соединении каждая из пружин растягивается силой, равной F (это следует из третьего закона Ньютона). Поэтому удлинения пружин равны соответственно $x_1 = \frac{F}{k_1}$ и $x_2 = \frac{F}{k_2}$, а полное удлинение составит $x = x_1 + x_2$. Отсюда $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$, т. е. $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$. Таким образом, при параллельном соединении система пружин имеет больший коэффициент жесткости, чем любая из пружин, а при последовательном — меньший.

5.7. Ответ: равнодействующая равна нулю.

Решение. Предположим, что равнодействующая R всех сил отлична от нуля. Как изменится R , если каждую из сил F повернуть на угол $\frac{2\pi}{n}$ (например, по часовой стрелке)? При этом повернется вся система сил, а вместе с ней и равнодействующая. Однако система сил осталась той же: каждый вектор силы просто занял место соседнего вектора. Значит, и R не должна измениться. Однако единственный вектор, не изменяющийся при повороте, — нулевой; так что $R = 0$.

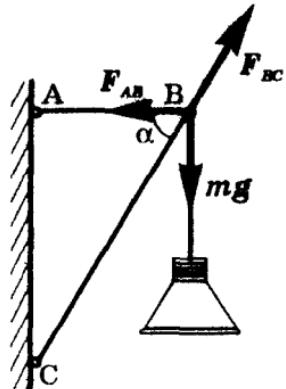
5.8. Ответ: стержень AB растянут силой 17 Н, а стержень BC сжат силой 34 Н.

Решение. Условие шарнирного закрепления означает, что оба



К задаче 5.5

стержня могут быть только растянуты или сжаты, т. е. силы F_{AB} и F_{BC} , действующие на точку B со стороны этих стержней, могут быть направлены только вдоль стержней (см. рисунок). Упоминание о шарнирном закреплении концов стержней весьма существенно¹⁾: если, например, стержень AB жестко закреплен в точке A , то без стержня BC вообще можно обойтись, так как стержень AB и сам удержит фонарь!



Для окончательного выбора направлений сил следует учесть, что под действием подвешенного груза стержень AB растягивается, а стержень BC сжимается. Равнодействующая всех трех сил, приложенных в точке B , равна нулю. Записывая это условие равновесия в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси, получаем $F_{BC}\cos\alpha - F_{AB} = 0$; $F_{BC}\sin\alpha - mg = 0$.

Отсюда $F_{BC} = \frac{mg}{\sin\alpha} = 34$ Н; $F_{AB} = mg\tan\alpha = 17$ Н.

5.9. Ответ: $F_{AC} = 0,98$ кН; $F_{BC} = 1,3$ кН.

Решение. Расставим силы, приложенные к точке C со стороны стержней и подвешенного груза (см. рис. а). Условие равновесия: $mg + F_{BC} + F_{AC} = 0$. В данном случае записывать его в проекциях на какие-либо оси нецелесообразно. Проще изобразить сложение трех данных сил по правилу треугольника и использовать подобие треугольника ABC и треугольника сил (см. рис. б):

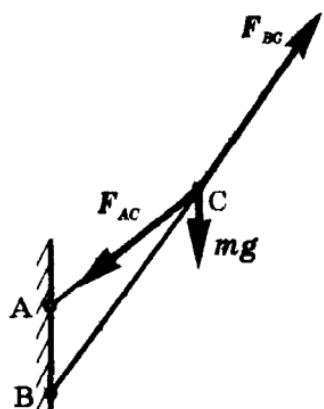


Рис. а

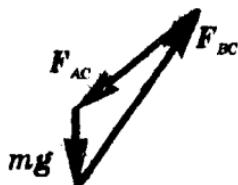


Рис. б

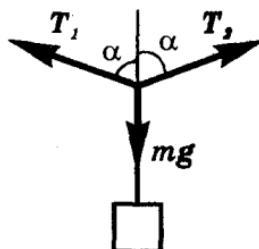
¹⁾ Во многих сборниках задач характер закрепления стержней (и даже их невесомость), к сожалению, не оговаривается. Указанное направление сил упругости стержней считается само собой разумеющимся. Советуем ознакомиться с задачами 5.25 и 5.26, чтобы убедиться, что это не всегда так!

$$\frac{F_{AC}}{mg} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{F_{BC}}{mg} = \frac{BC}{AB}.$$

Из этих соотношений получаем приведенный выше ответ.

5.10. Ответ: $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

Указание. Силы натяжения обеих нитей (см. рисунок) $T_1 = T_2 = mg$, а равнодействующая ($R = T_1 + T_2 + mg$) равна нулю. Отсюда $\alpha = 60^\circ$.



К задаче 5.10

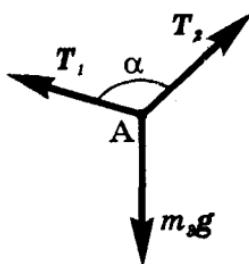


Рис. а к задаче 5.11

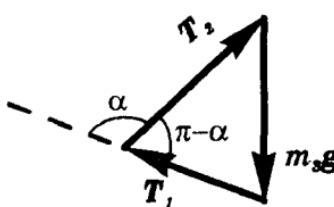


Рис. б к задаче 5.11

5.11. Ответ: а) $m_3 = 4$ кг; б) $m_3 = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\alpha} = 4,4$ кг.

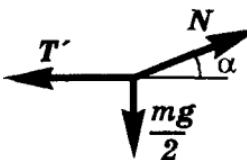
Решение. Сила натяжения каждой нити равна весу неподвижно висящего на ней груза (см. рис. а): $T_1 = m_1g$, $T_2 = m_2g$. Равнодействующая приложенных в точке А сил равна нулю: $T_1 + T_2 + m_3g = 0$. В данном случае проецировать силы на различные оси нецелесообразно. Вместо этого изобразим треугольник сил, выражающий условие равновесия (см. рис. б), и применим к нему теорему косинусов: $(m_3g)^2 = T_1^2 + T_2^2 - 2T_1T_2\cos(\pi - \alpha)$, откуда $m_3 = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\alpha}$. Разумеется, при $m_1 = m_2$ задачу можно решить и проще.

5.12. Ответ: $m_2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) < m_1 < m_2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

Указание. См. задачу 2.18.

5.13. Ответ: $\alpha = \arctg \frac{1}{2} = 27^\circ$; $T = \frac{\sqrt{5}}{2} mg \approx 1,1 mg$.

Решение. Рассмотрим силы, действующие на половину цепочки (например, правую). Этих сил три: сила реакции подвеса N (равная силе натяжения цепочки в точке подвеса), сила натяжения цепочки в нижней точке T' и сила тяжести $mg/2$. Сведем эти силы в одну точку (см. рисунок).



Из условия равновесия следует, что векторная сумма этих сил равна нулю: $T' + N + mg/2 = 0$. Проектируя это равенство на вертикальную и горизонтальную оси, получаем $N \sin \alpha = \frac{mg}{2}$, $N \cos \alpha = T'$.

Отсюда $N = \frac{mg}{2 \sin \alpha}$, $T' = \frac{1}{2} mg \operatorname{ctg} \alpha$. Естественно, сила натяжения T' равна нулю при $\alpha = \pi/2$ и возрастает при уменьшении угла α , т. е. при увеличении расстояния между точками подвеса. Если $T' = mg$ (по условию), то $\operatorname{ctg} \alpha = 2$, откуда $\alpha = \arctg \frac{1}{2} = 27^\circ$. Для силы N получаем:

$$N = \frac{T'}{\cos \alpha} = T' \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = mg \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,1 mg .$$

Согласно третьему закону Ньютона $T = N = \frac{\sqrt{5}}{2} mg \approx 1,1 mg$.

5.14. Ответ: гусь в 20 раз тяжелее одной куропатки, левое плечо весов вдвое длиннее правого.

Решение. Обозначим вес гуся через P_g , вес куропатки — P_k , а длины левого и правого плеча самодельных весов — l_l и l_p . Из условия равновесия в двух взвешиваниях находим: $P_g l_l = 40 P_k l_p$, $P_g l_p = 10 P_k l_l$.

Мы получили два уравнения для четырех неизвестных, но, к счастью, нас интересуют не сами неизвестные, а только их отношения $\frac{P_g}{P_k}$ и $\frac{l_l}{l_p}$. Обозначая эти отношения, соответственно, x и y , получим систему двух уравнений для двух неизвестных:

$$\begin{cases} xy = 40, \\ \frac{x}{y} = 10. \end{cases}$$

Отсюда легко находим $x = 20$, $y = 2$. Это означает, что гусь в 20 раз тяжелее куропатки, а левое плечо весов вдвое длиннее правого. Заметим, что истинный вес гуся (если измерять его «в куропатках») равен не среднему арифметическому результатов

двух взвешиваний ($\frac{40 + 10}{2} = 25$), а их среднему геометрическому ($20 = \sqrt{40 \cdot 10}$).

5.15. Ответ: $F_3 = 6$ мН; сила F_3 направлена противоположно силам F_1 и F_2 ; линия действия силы F_3 должна отстоять на 1,2 мм от линии действия силы F_1 и на 0,6 мм от линии действия силы F_2 .

5.16. Ответ: $F_3 = 2$ мН; сила F_3 направлена в ту же сторону, что сила F_1 ; линия ее действия отстоит на 1,8 мм от линии действия силы F_2 и на 3,6 мм от линии действия силы F_1 .

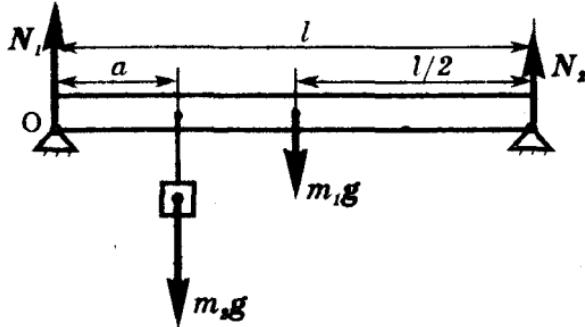
5.17. Ответ: на расстоянии 78 см.

5.18. Ответ: 6,9 кН и 3,9 кН.

Решение. На рисунке показаны действующие на балку силы (N_1 и N_2 — силы реакции опор). Два условия равновесия¹⁾ балки имеют вид:

$$N_1 + N_2 - m_1g - m_2g = 0,$$

$$N_2l - m_1g\frac{l}{2} - m_2ga = 0.$$



Моменты сил вычислены относительно оси, проходящей через точку O (левый конец балки). Из этих двух уравнений получаем

$$N_1 = \frac{1}{2}m_1g + \frac{l-a}{l}m_2g = 6,9 \text{ кН}; N_2 = \frac{1}{2}m_1g + \frac{a}{l}m_2g = 3,9 \text{ кН}.$$

Согласно третьему закону Ньютона, силы F_1 и F_2 давления балки на опоры равны по модулю соответствующим силам реакции: $F_1 = N_1$, $F_2 = N_2$. Как и следовало ожидать, вес самой балки «разделился» между опорами поровну, а вес груза — обратно пропорционально расстояниям до опор.

5.19. Ответ: 250 г, на 1/3 длины линейки.

¹⁾Мы называем первым условием равновесия равенство нулю равнодействующей всех приложенных к телу сил ($\sum F = 0$), а вторым — равенство нулю алгебраической суммы моментов всех сил ($\sum M = 0$).

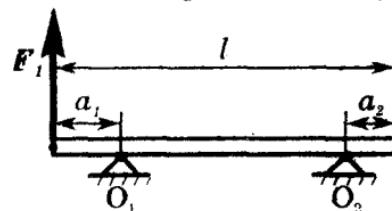
5.20. Ответ: $\alpha > \pi/3$.

5.21. Ответ: $F_A = 9,8 \text{ Н}$ (сила направлена вверх); $F_B = 350 \text{ Н}$ (сила направлена вниз).

5.22. Ответ: $F_1 = 300 \text{ Н}$ или $F_2 = 233 \text{ Н}$ (если сила направлена вверх); $F'_1 = 700 \text{ Н}$ или $F'_2 = 2,1 \text{ кН}$ (если сила направлена вниз).

Решение. Рассмотрим сначала ситуацию, изображенную на рисунке. Если поднимается левый конец, доска поворачивается вокруг оси O_2 (при этом сила реакции опоры O_1 равна нулю).

Момент силы F_1 должен уравнове-



шивать момент силы mg , поэтому $mg\left(\frac{l}{2} - a_2\right) - F_1(l - a_2) = 0$.

$$\text{Отсюда } F_1 = \frac{l - 2a_2}{2(l - a_2)} mg = 300 \text{ Н.}$$

Если сила F_2 приложена вертикально вверх у другого конца, получаем

$$F_2 = \frac{l - 2a_1}{2(l - a_1)} mg = 233 \text{ Н.}$$

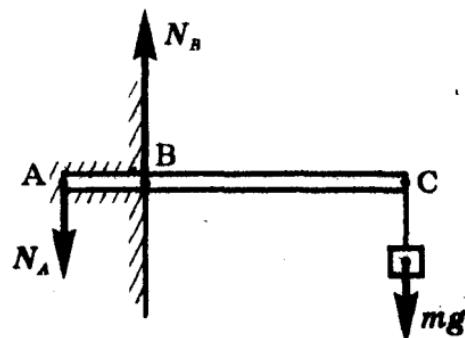
Однако задача имеет не только эти решения. Можно приподнять один конец доски, прилагая к другому ее концу силу, направленную вниз. В этом случае

$$F'_1 = \frac{l - 2a_1}{2a_1} mg = 700 \text{ Н}; F'_2 = \frac{l - 2a_2}{2a_2} mg = 2,1 \text{ кН.}$$

На первый взгляд, прикладывать силу вниз труднее (величина необходимой силы в этом случае больше). Однако надавить на доску вниз нетрудно: в нашем распоряжении собственный вес! Для «получения» силы $F'_1 = 700 \text{ Н}$ взрослому человеку достаточно сесть на край доски.

5.23. Ответ: $N_A = 400 \text{ Н}, N_B = 500 \text{ Н.}$

Решение. Очевидно, стержень давит на стенку в точке A вверх, а в точке B — вниз. Соответствующие силы реакции опоры N_A и N_B согласно третьему закону Ньютона направлены противоположно (см. рисунок). Первое условие равновесия приводит к уравнению $N_B = N_A + mg$, а второе (моменты



берутся относительно точки A) — к уравнению $N_B \cdot AB = mg \cdot AC$. Отсюда

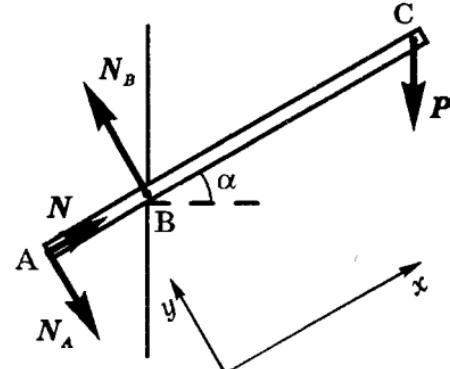
$$N_B = mg \frac{AC}{AB} = P \frac{AC}{AB} = 500 \text{ Н,}$$

$$N_A = mg \frac{AC - AB}{AB} = mg \frac{BC}{AB} = P \frac{BC}{AB} = 400 \text{ Н.}$$

Обратите внимание: обе силы реакции существенно превышают вес груза, так как AB значительно меньше длины стержня.

5.24. Ответ: 350 Н; 430 Н; 50 Н.

Решение. На рисунке показаны действующие на стержень силы: N_A , N_B — силы реакции боковых стенок отверстия; N — сила реакции дна отверстия (ее модуль как раз и показывает, с какой силой стержень сжат). Первое условие равновесия в проекциях на оси x , y имеет вид: $N - Psina = 0$, $N_B - N_A - Pcosa = 0$.



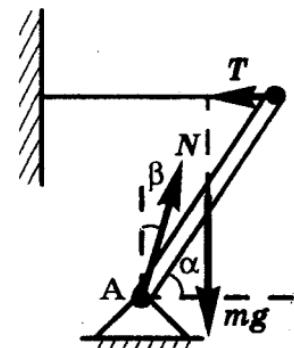
Второе условие равновесия (моменты сил берутся относительно точки A): $N_B \cdot AB - P \cdot AC \cos \alpha = 0$. Отсюда

$$N = Psina = 50 \text{ Н, } N_B = Pcosa \cdot \frac{AC}{AB} = 430 \text{ Н,}$$

$$N_A = Pcosa \cdot \frac{AC - AB}{AB} = Pcosa \cdot \frac{BC}{AB} = 350 \text{ Н.}$$

5.25. Ответ: $N = \frac{mg}{2}\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 11 \text{ Н}$; сила N образует с вертикалью угол $\beta = \arctg\left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{2}\right) = 27^\circ$.

Решение. На рисунке показаны действующие на стержень силы (направление силы N указано пока ориентировочно). Условием равновесия является равенство нулю алгебраической суммы моментов сил относительно точки A : $Tlsina - mg \frac{l}{2} \cos \alpha = 0$, где l — длина стержня. Отсюда сила натяжения нити $T = \frac{1}{2}mg \operatorname{ctg} \alpha$.



Поскольку равнодействующая сил N , T и mg равна нулю, находим проекции N на горизонтальную и вертикальную оси:

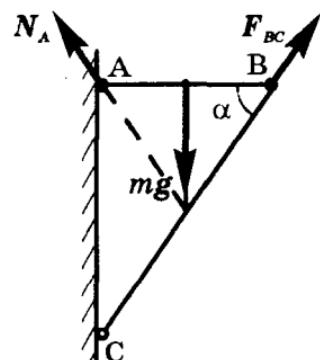
$$N_x = T = \frac{1}{2}mg \operatorname{ctg}\alpha, N_y = mg.$$

$$\text{Тогда } N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \frac{mg}{2} \sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = 11 \text{ Н.}$$

Угол β , образованный силой N с вертикалью, определяется из условия $\operatorname{tg}\beta = \frac{N_x}{N_y} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}$; отсюда $\beta = \arctg\left(\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}\right) = 27^\circ$. Полученный результат показывает, что N (а, значит, и сила упругости стержня в нижней точке) для весомого стержня не обязательно направлена вдоль оси стержня (сравните с задачей 5.8). Обратите внимание, что линии действия сил T , mg и N пересекаются в одной точке: это необходимое условие равновесия твердого тела.

5.26. Ответ: $F_A = F_B = \frac{mg}{2\sin\alpha}$.

Решение. Сила упругости сжатого под действием подвешенного груза стержня BC направлена вдоль отрезка BC (см. рисунок). Аналогичное утверждение относительно силы упругости стержня AB несправедливо, поскольку груз прикреплен к его середине и стержень «работает» на изгиб. На рисунке показаны три силы, действующие на стержень AB (N_A — реакция шарнира A). Применяем второе условие равновесия (моменты сил берутся относительно точки A): $mg \frac{AB}{2} =$



$= F_{BC} AB \sin\alpha$, откуда $F_{BC} = \frac{mg}{2\sin\alpha}$. Записываем первое условие равновесия в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси: $N_{Ax} + F_{BC}\cos\alpha = 0$, $N_{Ay} - mg + F_{BC}\sin\alpha = 0$. Отсюда

$$N_{Ax} = -\frac{mg}{2} \operatorname{ctg}\alpha, N_{Ay} = \frac{mg}{2}; N_A = \sqrt{N_{Ax}^2 + N_{Ay}^2} = \frac{mg}{2\sin\alpha}.$$

Согласно третьему закону Ньютона, $F_A = N_A$, $F_B = F_{BC}$.

Можно предложить и более короткий путь решения этой задачи. Достаточно заметить, что необходимым условием равновесия является пересечение линий действия всех трех сил в одной точке. Очевидно, в данном случае этой точкой является середина стержня BC : здесь пересекаются линии действия сил F_{BC} и mg .

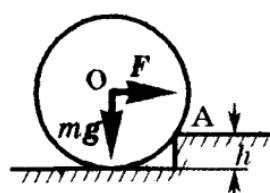
Отсюда следует, что сила N_A наклонена к горизонту под углом α и равна по модулю силе F_{bc} . Для нахождения величины силы N_A надо теперь применить первое условие равновесия (в проекции на вертикальную ось).

5.27. Ответ: $F_{\min} = \frac{F}{\sqrt{2}}$; в случае перемещения оси рычага $F'_{\min} = F$.

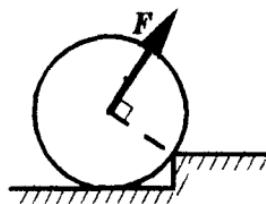
Указание. Сила будет минимальной при максимальной длине плеча силы.

5.28. Ответ: $F \geq mg \frac{\sqrt{h(2R - h)}}{R - h}$ при $h < R$; при $h \geq R$ решения нет.

Указание. Для подъема на ступеньку момент силы mg относительно оси A не должен превышать момент силы F (см. рисунок). Максимальная сила F потребуется именно в начале подъема, когда плечо силы F минимально, а плечо силы mg максимально.



К задаче 5.28



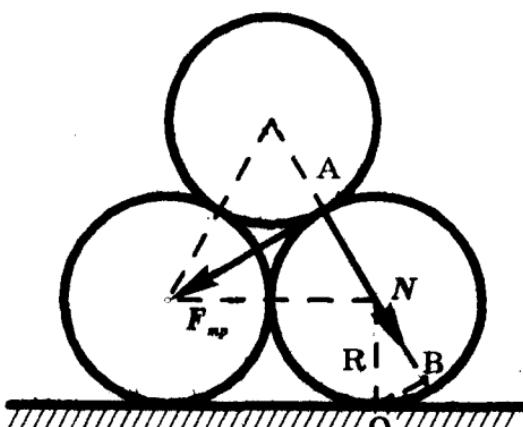
К задаче 5.29

5.29. Ответ: $F = mg \frac{\sqrt{h(2R - h)}}{R}$; направление F указано на рисунке.

Указание. См. задачу 5.27.

5.30. Ответ: $\mu \geq 0,27$.

Решение. На рисунке показаны силы, действующие на одно из нижних бревен (показаны только те силы, которые имеют ненулевой врачающий момент относительно мгновенной оси вращения O). Условием равновесия является равенство величин врачающих моментов сил N и F_{tr} относительно оси O . Учитывая, что N образует с вертикалью угол 30° , а F_{tr} — угол 60° , получаем:

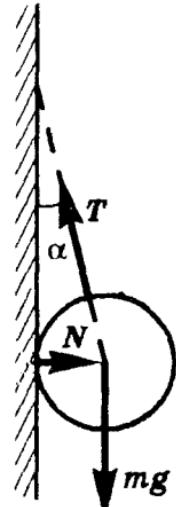


$$N \cdot OB = F_{\text{тр}} \cdot AB; OB = R \sin 30^\circ; AB = R(1 + \cos 30^\circ).$$

Отсюда $\mu_{\min} = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 0,27$.

5.31. Ответ: $T = \frac{mg(l + R)}{\sqrt{l(l + 2R)}}; F = \frac{mgR}{\sqrt{l(l + 2R)}}$.

Решение. Прежде всего необходимо определить, каково взаимное расположение веревки и шара (см. рисунок). Для этого проще всего воспользоваться вторым условием равновесия твердого тела: алгебраическая сумма моментов всех приложенных к телу сил относительно любой точки должна равняться нулю. Выберем в качестве такой точки центр шара. Силы N и mg направлены вдоль радиусов шара, поэтому их моменты равны нулю. Следовательно, сила T также должна быть направлена по радиусу шара. Таким образом, $\sin \alpha = \frac{R}{l + R}$ и $\cos \alpha = \frac{l}{l + R} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{l(l + 2R)}}{l + R}$. Первое условие равновесия



(равенство нулю равнодействующей всех приложенных сил) в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления дает $N - T \sin \alpha = 0$, $T \cos \alpha - mg = 0$. Остается учесть, что, согласно третьему закону Ньютона, $F = -N$ и $F = N$. Интересно отметить, что при таком подвесе $T > mg$, т. е. прочность веревки должна быть больше, чем при обычном вертикальном подвесе.

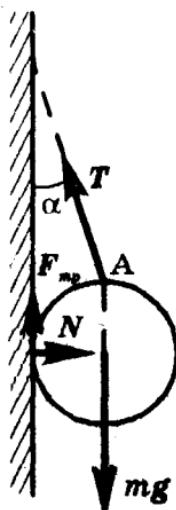
5.32. Ответ: $\mu \geq 1$ независимо от значений R и l .

Решение. Удобнее всего применить правило моментов (см. рисунок). Если вычислять моменты сил относительно оси, проходящей через точку A , получаем уравнение $N \cdot R - F_{\text{тр}} \cdot R = 0$, где R — радиус шара. Так как $F_{\text{тр}} \leq \mu N$, то $\mu \geq \frac{F_{\text{тр}}}{N} = 1$.

Обратите внимание, что ответ не зависит от радиуса шара и длины нити, что совсем не очевидно до решения задачи.

5.33. Ответ: 5,0 кг и 25 кг.

Решение. Запишем условия равновесия шкафа (на рисунке N_A и N_B — силы реакции опоры, действующие на каждую из ножек; F_A и F_B — соответствующие силы трения). При этом ограничимся рассмотрением проекций сил на верти-



кальную ось; моменты сил вычисляем относительно точки B . Получаем $mg = N_A + N_B$; $mg \frac{AB}{2} - N_A \cdot AB - F \cdot AD = 0$.

Отсюда

$$N_A = \frac{mg}{2} - F \frac{AD}{AB}, N_B = \frac{mg}{2} + F \frac{AD}{AB}.$$

Если весы, как обычно, градуированы в килограммах, то они покажут

$$m_A = \frac{N_A}{g} = 5,0 \text{ кг}, m_B = \frac{N_B}{g} = 25 \text{ кг}.$$

Интересно, что перераспределение нагрузки на ножки вызвано действием горизонтальной силы F !

5.34. Ответ: $\mu_{\min} = 0,5$; $F_{\min} = \frac{1}{2}mg$.

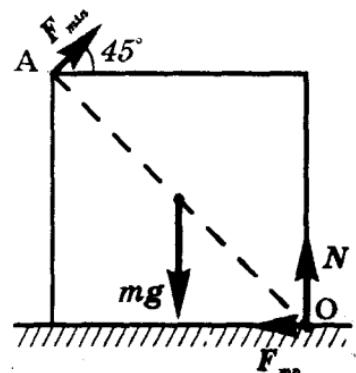
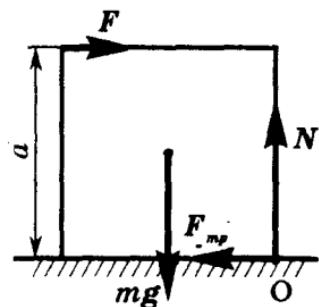
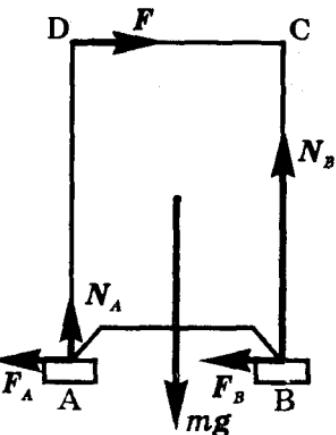
Решение. Чтобы куб начал поворачиваться относительно оси O (см. рисунок), должно выполняться условие $mg \frac{a}{2} - Fa = 0$, поскольку сила N имеет нулевой момент относительно оси O . Проскальзывание в точке O отсутствует, если выполняется первое условие равновесия. В проекциях на оси координат $F - F_{\text{тр}} = 0$; $N - mg = 0$. Отсюда

$$\mu \geq \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{1}{2}.$$

При дальнейшем опрокидывании куба значения F и $F_{\text{тр}}$ могут уменьшаться по сравнению с начальным моментом.

5.35. Ответ: $F_{\min} = \frac{mg}{2\sqrt{2}}$, $\mu_{\min} = \frac{1}{3}$.

Решение. В момент начала опрокидывания куба сила N приложена на оси вращения O и не имеет врачающего момента (см. рисунок). Опрокидывающая сила F будет минимальной, если максимальным будет плечо этой силы. Для этого сила F должна быть приложена в точке A и направлена перпендикулярно диагонали боковой грани куба. Из второго условия равновесия (правила



моментов): $mg \frac{a}{2} - F_{\min} a\sqrt{2} = 0$, $F_{\min} = \frac{mg}{2\sqrt{2}}$.

Чтобы куб не проскальзывал, должно выполняться первое условие равновесия. В проекциях на горизонтальную и вертикальную оси: $F_{\min} \cos 45^\circ - F_{\text{тр}} = 0$; $F_{\min} \sin 45^\circ + N - mg = 0$. Отсюда $F_{\text{тр}} = \frac{mg}{4}$, а $N = \frac{3mg}{4}$. Следовательно, минимальный коэффициент трения $\mu_{\min} = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{1}{3}$.

5.36. Ответ: $\alpha_{\max} = \arctg(2\mu)$.

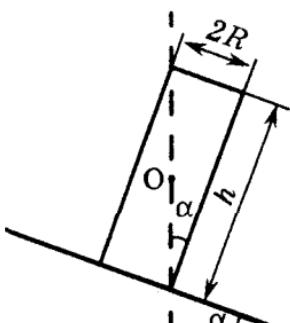
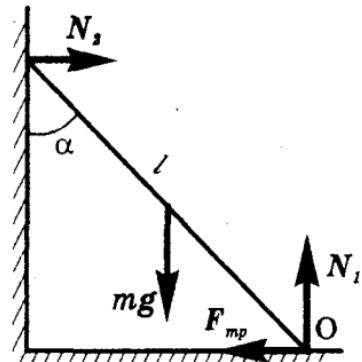
Решение. Пусть масса лестницы m , а длина l (см. рисунок). Запишем условия равновесия, причем моменты сил будем определять относительно оси, проходящей через нижнюю точку лестницы (при этом моменты двух сил обращаются в нуль, что облегчает решение): $F_{\text{тр}} = N_2$, $N_1 = mg$, $mg \frac{l}{2} \sin \alpha - N_2 l \cos \alpha = 0$.

Учитывая, что $F_{\text{тр}} < \mu N_1$, получаем $\operatorname{tg} \alpha < 2\mu$.

5.37. Ответ: $\alpha = \arctg \frac{2R}{h}$, $\mu \geq \frac{2R}{h}$.

Решение. Равновесие нарушается, когда вертикаль, проведенная через центр тяжести O цилиндра, не пересекает площадь опоры, т. е. основание цилиндра (см. рисунок). Поэтому угол α определяется из условия $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2R}{h}$.

Однако равновесие может нарушиться и до опрокидывания цилиндра из-за того, что он начнет скользить по наклонной плоскости. Чтобы этого не произошло, должно выполняться условие $\sin \alpha - \mu \cos \alpha < 0$. Отсюда $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha = \frac{2R}{h}$.



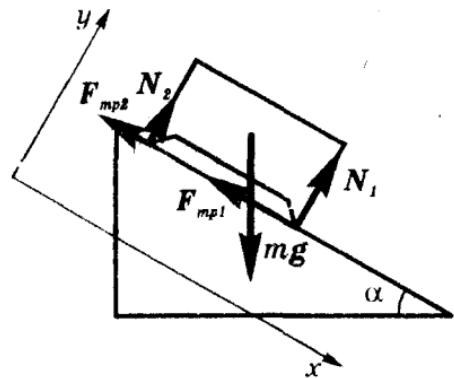
5.38. Решение. Если приложить горизонтальную силу к боковой поверхности бруска вблизи его основания и постепенно эту силу увеличивать, то при достижении ею значения $F = \mu mg$ брусок начнет поступательно перемещаться по поверхности. Увеличивая высоту h точки приложения горизонтальной силы, можно до-

биться того, что опрокидывание бруска начнется раньше его скольжения. Минимальная высота h_{\min} , при которой это происходит, определяется из условия $mg \frac{a}{2} = Fh_{\min}$, где a — сторона основания бруска. Отсюда $\mu = \frac{a}{2h_{\min}}$. Разумеется, такой способ применим, если высота бруска превышает h_{\min} .

5.39. Ответ: правые ножки — с силой $F_1 = \frac{mg}{2}(\cos\alpha + \frac{h}{l}\sin\alpha)$, левые ножки — с силой $F_2 = \frac{mg}{2}(\cos\alpha - \frac{h}{l}\sin\alpha)$ при $\operatorname{tg}\alpha \leq \frac{l}{h}$.

Решение. Запишем условия равновесия — равенство нулю равнодействующей всех сил (в проекциях на оси координат, см. рисунок): $mgs\sin\alpha - F_{\text{тр1}} - F_{\text{тр2}} = 0$, $N_1 + N_2 - mg\cos\alpha = 0$, а также равенство нулю алгебраической суммы моментов сил относительно центра тяжести:

$$N_1 \frac{l}{2} - N_2 \frac{l}{2} - (F_{\text{тр1}} + F_{\text{тр2}}) \frac{h}{2} = 0.$$



Решение полученной системы уравнений приводит к результату

$$N_1 = \frac{1}{2}mg(\cos\alpha + \frac{h}{l}\sin\alpha), \quad N_2 = \frac{1}{2}mg(\cos\alpha - \frac{h}{l}\sin\alpha).$$

Согласно третьему закону Ньютона, силы нормального давления ножек на наклонную плоскость равны по модулю соответствующим силам нормальной реакции опоры: $F_1 = N_1$, $F_2 = N_2$.

При $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{l}$ сила F_2 обращается в нуль, т. к. шкаф опирается только на правые ножки. При этом центр тяжести шкафа находится на одной вертикали с точкой опоры, равновесие неустойчиво. При $\operatorname{tg}\alpha > \frac{l}{h}$ шкаф опрокидывается.

5.40. Ответ: $F_1 = mg\cos\alpha\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu h}{2l}\right)$; $F_2 = mg\cos\alpha\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu h}{2l}\right)$.

Решение. В этом случае шкаф будет скользить с наклонной плоскости с ускорением a . Проецируем уравнение второго закона Ньютона на оси координат (см. рисунок к решению задачи 5.39):

$$mgsina - F_{\text{тр},1} - F_{\text{тр},2} = ma, \quad (1)$$

$$N_1 + N_2 - mg\cos\alpha = 0. \quad (2)$$

Теперь мы можем использовать формулу для силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр},1} = \mu N_1, \quad (3)$$

$$F_{\text{тр},2} = \mu N_2. \quad (4)$$

Поскольку шкаф движется поступательно (без вращения), можно приравнять нулю алгебраическую сумму моментов всех сил относительно центра масс:

$$N_1 \frac{l}{2} - N_2 \frac{l}{2} - (F_{\text{тр},1} + F_{\text{тр},2}) \frac{h}{2} = 0. \quad (5)$$

Полученная система из пяти уравнений легко сводится к системе двух уравнений (заметим, что уравнение (1) мы не используем):

$$N_1 + N_2 = mg\cos\alpha, \quad N_1(l - \mu h) = N_2(l + \mu h).$$

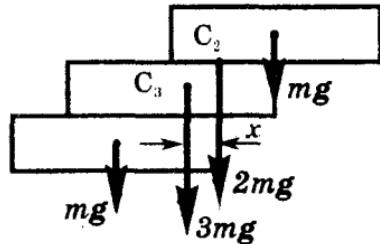
Отсюда (сравните с задачей 5.39):

$$F_1 = N_1 = mg\cos\alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu h}{2l} \right), \quad F_2 = N_2 = mg\cos\alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu h}{2l} \right).$$

Интересно, что при $\mu = 0$, т. е. при соскальзывании без трения, $F_1 = F_2$. Ничего удивительного: в неинерциальной системе отсчета, связанной со шкафом, наклонная плоскость становится как бы горизонтальной (см. задачу 2.23).

5.41. Ответ: $\frac{25l}{24}$.

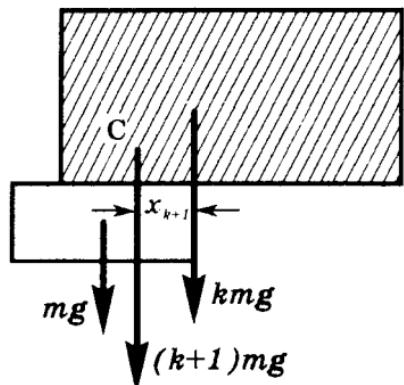
Решение. Условимся считать кирпичи сверху вниз (т. е. верхний — первый). Центр тяжести каждого кирпича отстоит от его края на $l/2$. Поэтому первый кирпич может выступать над краем второго не более, чем на $l/2$. Тогда общий центр тяжести C_2 двух верхних кирпичей расположен (см. рисунок) на расстоянии $l/4$ по горизонтали от края второго кирпича. Именно на это расстояние и может выступать второй кирпич над третьим. Центр тяжести трех верхних кирпичей C_3 определяется из условия $mg\left(\frac{l}{2} - x\right) = 2mgx$, откуда $x = \frac{l}{6}$, т. е. третий кирпич может выступать над четвертым на $\frac{1}{6}$ своей длины. Аналогично доказывается, что четвертый кирпич может выступать над пятым на $\frac{1}{8}$ своей длины. Полное смещение верхнего кирпича относительно



нижнего составит $\frac{l}{2} + \frac{l}{4} + \frac{l}{6} + \frac{l}{8} = \frac{25l}{24}$.

Верхний кирпич, оказывается, может целиком выйти за пределы площади опоры! (См. задачу 5.42).

5.42. Решение. Обозначим через x_n величину максимального смещения n -того сверху кирпича над нижележащим. Согласно полученному в задаче 5.41 результату $x_1 = l/2$, $x_2 = l/4$, $x_3 = l/6$, $x_4 = l/8$. Можно предположить, что общая формула имеет вид $x_n = \frac{l}{2n}$. Доказать это предположение можно методом математической индукции. Пусть оно справедливо для $n = k$, причем k -й кирпич выдвинут относительно нижележащего на максимально возможную величину x . Найдем расстояние по горизонтали от центра тяжести C системы из $(k+1)$ кирпича до правого края нижнего кирпича. На рис. *a* заштриховано условное изображение

Рис. *a*Рис. *b*

системы из k верхних кирпичей. Искомое расстояние, представляющее собой как раз x_{k+1} , легко определить из правила моментов:

$$mg\left(\frac{l}{2} - x_{k+1}\right) = kmg \cdot x_{k+1},$$

т. е. $x_{k+1} = \frac{l}{2(k+1)}$. Таким образом, если формула $x_n = \frac{l}{2n}$ справедлива для $n = k$, то она справедлива и для $n = k + 1$. Тем самым формулу для x_n можно считать доказанной. Максимальное смещение верхнего кирпича относительно нижнего:

$$\frac{l}{2} + \frac{l}{4} + \frac{l}{6} + \frac{l}{8} + \dots = \frac{l}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots).$$

При неограниченном увеличении числа кирпичей эта сумма стремится к бесконечности. Действительно, сумма ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

больше суммы ряда, который явно стремится к бесконечности:

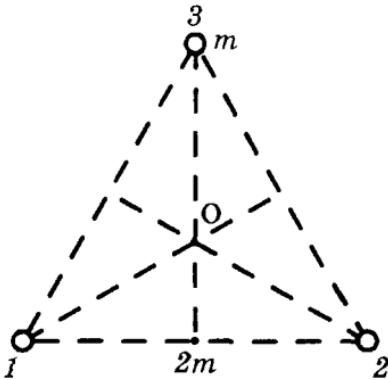
$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots .$$

Со стороны такая стопка кирпичей выглядит как плавно изогнутая колонна, показанная на рис. б.

Таким образом, у нас снова нет оснований сомневаться в исключительной правдивости барона! Если не считать, конечно, того, что, во-первых, равновесие выложенной им стопки кирпичей неустойчиво (центр тяжести всей стопки расположен в точности над краем самого нижнего кирпича), а во-вторых, для того, чтобы край верхнего кирпича выступал над краем самого нижнего на целую милю, барону придется выстроить настолько высокую «гнутую башню», что он должен будет учсть неоднородность поля тяготения Земли.

5.43. Ответ: центр тяжести находится в точке пересечения медиан треугольника.

Решение. Центр тяжести шариков 1 и 2 находится в середине соединяющей их стороны треугольника (см. рисунок). Задача сводится к следующему: нужно найти центр тяжести системы, состоящей из шарика массой m в вершине треугольника и шарика массой $2m$ — в середине противолежащей стороны. Центр тяжести O лежит на отрезке, соединяющем эти шарики (т. е. на медиане), деля его в отношении $2 : 1$, считая от вершины треугольника. Очевидно, точка O должна принадлежать и двум другим медианам треугольника и делить их в таком же отношении (таким образом мы «физически» доказали хорошо известную математическую теорему).

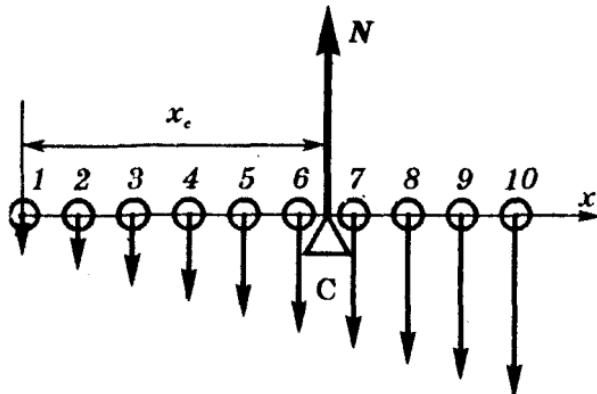


5.44. Ответ: центр масс лежит на медиане, проведенной из третьей вершины, и делит ее в отношении $1 : 2$ (считая от вершины).

5.45. Ответ: в алюминиевой части.

5.46. Ответ: Центр масс системы совпадает с центром шарика массой 700 г.

Решение. Центр масс системы в однородном поле тяготения совпадает с центром тяжести. Поэтому будем искать точку, в которой нужно разместить под стержнем опору для достижения равновесия (см. рисунок).



Будем отсчитывать координаты шариков от левого конца стержня и рассматривать моменты сил относительно этой же точки. Тогда условия равновесия принимают вид:

$$N - \sum_{i=1}^{10} m_i g = 0, Nx_c - \sum_{i=1}^{10} m_i g x_i = 0.$$

Отсюда¹⁾ $x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$.

Подставляя численные значения, получаем $x_c = 60$ см.

5.47. Указание. См. рис. а, б. Разбивая пластинку на два прямоугольника, соединяем их центры отрезком прямой. Очевидно,

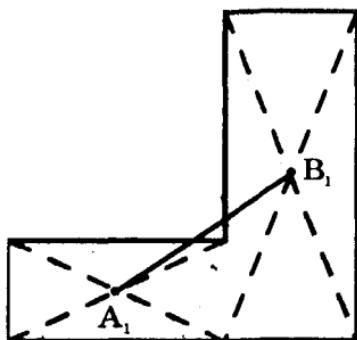


Рис. а

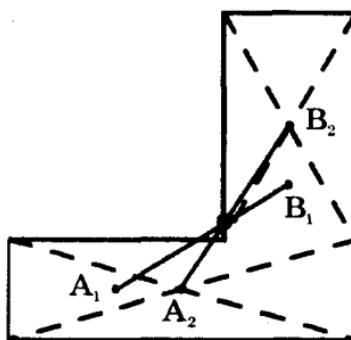


Рис. б

¹⁾ Можно доказать, что эта формула справедлива при любом расположении материальных точек (не обязательно вдоль прямой); разумеется, так же находятся и две другие координаты центра масс. В векторном виде можно записать:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}, \text{ где } \mathbf{r}_i \text{ — радиус-вектор } i\text{-ой точки, а } \mathbf{r}_c \text{ — радиус-вектор центра масс.}$$

У всех радиус-векторов начало общее (это начало координат), а концы совпадают с соответствующими точками.

центр тяжести пластиинки лежит на этом отрезке. Однако указанное разбиение можно проделать двумя способами. Таким образом мы получаем два отрезка, на пересечении которых и находится центр тяжести C пластиинки.

5.48. Решение. Разрежем треугольник на тонкие полоски, параллельные стороне AB (см. рисунок). Центр тяжести каждой из таких полосок лежит в ее середине, т. е. принадлежит медиане, проведенной из вершины C . Значит, и центр тяжести всего треугольника, состоящего из таких полосок, тоже лежит на этой медиане. Совершенно аналогично доказывается, что центр тяжести принадлежит и двум другим медианам, а, следовательно, совпадает с точкой их пересечения. Заметим, что попутно оказалось доказанным и утверждение о пересечении всех медиан треугольника в одной точке (ср. с задачей 5.43).

5.49. Ответ: на расстоянии $R/6$ от центра в сторону, противоположную отверстию.

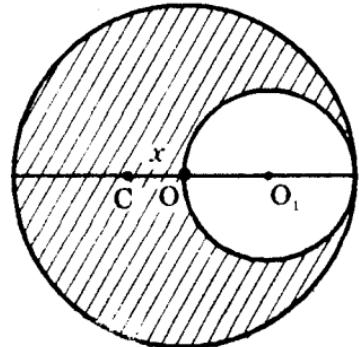
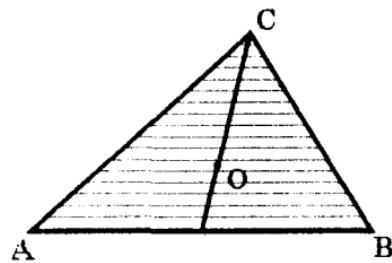
Решение. Расстояние от центра тяжести пластины до центра круга обозначим x (см. рисунок). Из соображений симметрии очевидно, что центр тяжести лежит на диаметре, проходящем через центр отверстия. Если заполнить отверстие, то есть добавить к данному телу круг радиусом $R/2$, то центр тяжести отождествляется в геометрическом центре круга. Точка O делит отрезок CO_1 в отношении, обратном отношению масс пластины с вырезом и «добавленного» круга:

$$\frac{x}{0,5R} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Поскольку пластина однородна, масса фигуры пропорциональна ее площади; поэтому получаем

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\pi(R/2)^2}{\pi R^2 - \pi(R/2)^2} = \frac{1}{3}.$$

Отсюда $x = \frac{R}{6}$.



5.50. Ответ: центр тяжести находится на оси симметрии на расстоянии $2r/\pi$ от центра полуокружности.

Решение. Вследствие симметрии фигуры центр тяжести *С* лежит на прямой *MN* (см. рис. *a*). Обозначим расстояние от центра окружности до центра тяжести через *x*. Разобьем дугу на малые

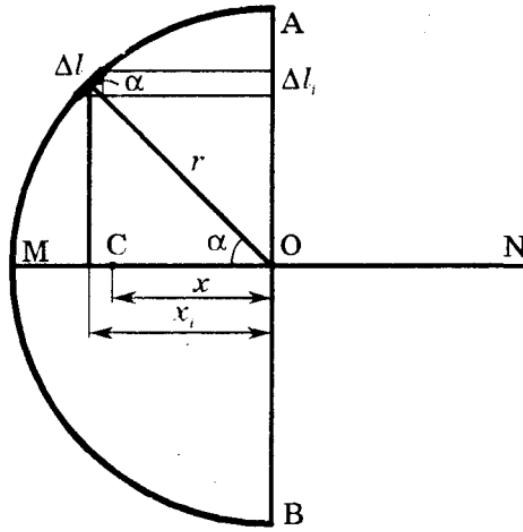


Рис. *a*

элементы длиной Δl . Тогда по общей формуле для положения

центра тяжести (см. задачу 5.46) получим: $x = \frac{\sum \rho \Delta l x_i}{\sum \rho \Delta l}$, где ρ —

линейная плотность (масса единицы длины) полукольца; x_i — расстояние от *i*-го элемента полукольца до диаметра *AB*. Заметим теперь, что треугольник со сторонами x_i , r подобен малому треугольнику со сторонами Δl_i , Δl , где Δl_i — проекция *i*-го элемента на диаметр *AB*. Из этого подобия следует равенство $\Delta l x_i = \Delta l_i r$, и для

положения центра тяжести получаем $x = \frac{\sum \Delta l_i r}{\sum \Delta l} = \frac{r \sum \Delta l_i}{\sum \Delta l}$. Но ведь

$\sum \Delta l$ — длина полукольца, а $\sum \Delta l_i$ — длина его диаметра. Значит,

$$x = \frac{r \cdot 2r}{\pi r} = \frac{2r}{\pi} \approx 0,64r.$$

Другое, очень красивое решение этой задачи принадлежит И. Алепину (Квант, 1991, №10). Рассмотрим целое кольцо, вращающееся вокруг своего центра с угловой скоростью ω . В этом

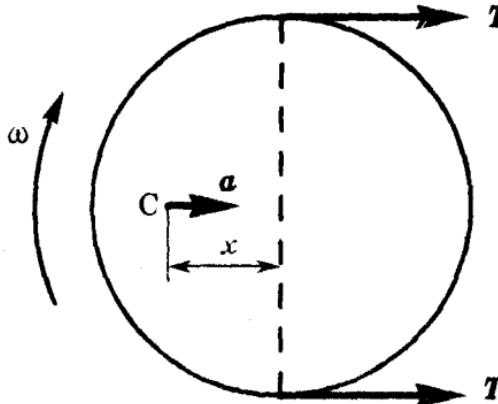


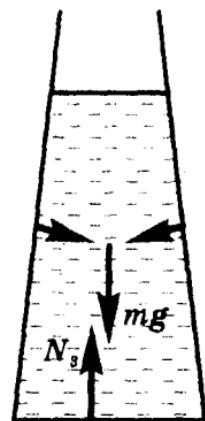
Рис. 6

случае сила упругости в нем $T = \rho\omega^2 r^2$ (см. задачу 2.34; мы учли, что $m = 2\pi r l$, $l = 2\pi r$, $n = \omega/2\pi$). Равнодействующая приложенных к левому полукольцу сил равна $2T$ (см. рис. 6), а ускорение его центра масс $a = \omega^2 x$. Масса левого полукольца $m = \rho\pi r$. Как известно, центр масс любой системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса этой системы и к которой приложены все действующие на систему внешние силы. Поэтому можно записать $ma = 2T$, или $\rho\pi r\omega^2 x = 2\rho\omega^2 r^2$. Отсюда $x = 2r/\pi$.

6.1. Ответ: $F_3 > F_1 > F_2$; $F_1 = P$, $F_2 < P$, $F_3 > P$.

Решение. Сила F давления жидкости на дно сосуда определяется давлением p жидкости у дна сосуда и площадью S дна: $F = pS$. Давление жидкости, в свою очередь, определяется плотностью ρ жидкости и высотой h ее столба: $p = \rho gh$. Мы не учитываем здесь вклада атмосферного давления, одинакового для всех трех сосудов. Очевидно, при одинаковом количестве воды во всех сосудах уровень воды в третьем будет наивысшим, а во втором — самым низким. Соответственно получаем $F_3 > F_1 > F_2$. Сравним величины F_1 , F_2 , F_3 с весом P воды в каждом из сосудов. Начнем с первого сосуда:

$F_1 = \rho gh \cdot S = \rho gV = mg = P$ (здесь $V = hS$ — объем налитой воды). Как и следовало ожидать, $F_1 = P$. Значит, $F_2 < P$, $F_3 > P$. Мы столкнулись с разновидностью знаменитого гидростатического парадокса. Объяснение неравенства $F_2 < P$ просто: наклонные стенки принимают на себя часть веса воды, выполняя в этом смысле функцию дна. В третьем сосуде ситуация обратная: наклонные стенки увеличивают силу давления жидкости на дно. Согласно закону Паскаля вода давит



на стенки, «прогибая» их наружу. Стенки согласно третьему закону Ньютона действуют на воду с силой, направленной внутрь жидкости (см. рисунок). Очевидно, при этом сила реакции дна N_3 больше mg . Согласно третьему закону Ньютона $N_3 = F_3$, так что действительно $F_3 > mg$.

6.2. Решение. Для отрыва дна во всех случаях требуется, чтобы сила давления на него сверху плюс сила тяжести самого дна ненамного превысили силу давления воды снизу. Из решения задачи 6.1 следует, что нужно отдельно рассмотреть два возможных случая.

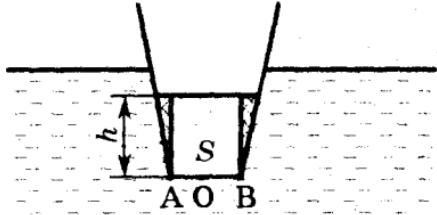


Рис. а

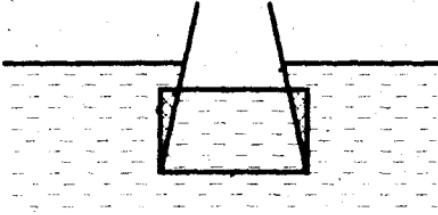


Рис. б

1) Конус расширяется кверху (см. рис. а). Сила давления на дно налитой в сосуд воды $F = \rho ghS$. Эта сила меньше полного веса налитой воды на величину веса Δmg заштрихованной на рисунке части жидкости (можно считать, что вес Δmg принимают на себя наклонные стенки). Поэтому гиря, имеющая тот же вес, что и вся налитая вода, давит на дно сильнее воды и дно отпадет; то же можно сказать о налитой ртути: из-за большей плотности и меньшего объема в заштрихованную боковую область попадет значительно меньшая по сравнению с водой доля ртути. Бензин же имеет плотность меньшую, чем вода; поэтому сила его давления на дно меньше — дно не отпадет.

2) В случае, если конус сужается кверху (см. рис. б), сила давления жидкости на дно превышает ее вес на величину веса жидкости, которая могла бы поместиться в заштрихованном объеме. Поэтому под действием гири или налитой ртути дно не отпадет, а при наливании бензина — отпадет.

6.3. Ответ: сила давления на дно $F_1 = \rho ga^3$ (здесь ρ — плотность воды), на каждую боковую стенку $F_2 = F_1/2$.

Решение. Обозначив плотность воды через ρ , запишем силу давления воды на дно:

$$F_1 = p \cdot a^2 = \rho g a \cdot a^2 = \rho g a^3,$$

где p — давление жидкости у дна аквариума. Давление на боковую

стенку линейно возрастает от 0 до p с увеличением глубины. Поэтому для вычисления полной силы F_2 давления воды на боковую стенку можно воспользоваться средним давлением $p_{ср} = \frac{0 + p}{2} = \frac{\rho g a}{2}$. Получаем $F_2 = p_{ср} \cdot a^2 = \frac{\rho g a^3}{2}$.

6.4. Ответ: $h = a/3 = 20$ см.

Указание. Сила давления на боковую стенку равна $\frac{\rho g h}{2}ah$ (см. задачу 6.3).

6.5. Ответ: $h_2 = 50$ см; жидкость потечет справа налево.

Решение. В состоянии равновесия давление должно быть одинаковым в точках, лежащих на одном уровне в *одной и той же жидкости*. Значит, давление p на границе ртуть-спирт и ртуть-вода одинаково. Оно складывается из атмосферного давления p_A и давления ρgh столба жидкости, находящейся сверху. Поэтому $p = p_A + \rho_1 gh_1 = p_A + \rho_2 gh_2$. Здесь ρ_1 и ρ_2 — плотность воды и спирта соответственно. Отсюда $h_2 = h_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} = 50$ см. Разумеется, закон сообщающихся сосудов здесь неприменим: если в сосуде находятся разные жидкости, следует исходить из равенства давлений в «общей» части сосудов. Рассмотрим теперь, что произойдет, если открыть кран. Это зависит от соотношения давлений p_1 и p_2 слева и справа от открытого крана. Очевидно, $p_1 = p - \rho_1 gh_0$, $p_2 = p - \rho_2 gh_0$; тогда $p_2 - p_1 = gh_0(\rho_1 - \rho_2) > 0$. Значит, давление в спирте на уровне трубки выше, и поэтому после открывания крана жидкость потечет справа налево: спирт будет перетекать в левое колено и смешиваться с водой. В результате часть ртути будет «выдавливаться» из левого колена в правое. Однако в конце концов вода и спирт смешаются и уровни ртути снова сравняются.

6.6. Решение. Вначале керосин будет перетекать из правого колена трубы в левое (см. решение задачи 6.5) и всплывать над водой. Однако в отсутствие капиллярных явлений граница раздела между водой и керосином может быть только горизонтальной. Значит, часть воды перетечет из левого колена в правое. Равновесие будет достигнуто, когда поверхность воды в левом колене установится на уровне нижнего края горизонтальной трубы. Поскольку давление в керосине должно быть одинаковым у обоих концов горизонтальной трубы, уровень керосина будет одинаков

в обоих коленах трубы (см. рисунок; штриховой линией показан уровень ртути до открывания крана). Изменение уровня ртути H мало из-за большой плотности ртути. Поэтому высота столба воды в правом колене приближенно равна $h_1 - h_0$, т. е. 16 см. Для более точного определения уровней жидкостей воспользуемся равенством давлений в обоих коленах *внутри ртути*:

$$\rho_1 g(h_0 + H) = \rho_1 g(h_1 - h_0 - H) + \\ + \rho_2 g(2h_0 - h_1) + \rho_3 g \cdot 2H$$

(здесь ρ_3 — плотность ртути).

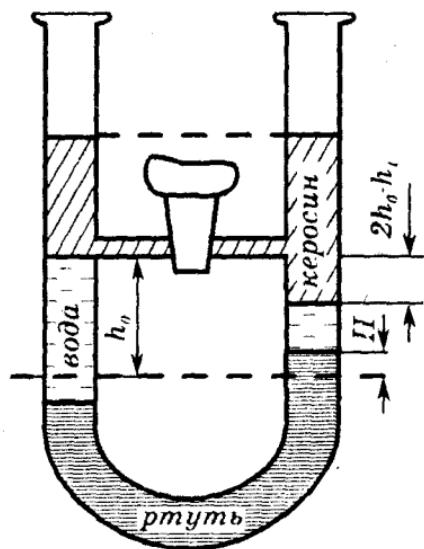
Отсюда

$$H = \frac{(\rho_1 - \rho_2)(2h_0 - h_1)}{2(\rho_3 - \rho_1)} = 0,63 \text{ мм.}$$

Эта величина действительно мала по сравнению с h_0 . Поскольку разница уровней воды справа и слева составляет около 8 см, высота столба керосина в левом колене 21 см, а в правом 29 см.

6.7. Ответ: не изменится; не изменится; понизится.

Решение. Часто утверждают, что уровень воды повысится — ведь часть льда возвышалась над поверхностью воды. При этом забывают, что плотность при превращении льда в воду увеличивается, поэтому объем уменьшается. Лучше подойти к вопросу иначе. Когда лед плавает, на него действует выталкивающая сила, равная весу льда. Согласно закону Архимеда эта сила равна весу вытесненной льдом воды. Когда лед растает, он превратится в воду такого же веса (а, значит, и такого же объема), как и вытесняемая им при плавании вода. Следовательно, уровень воды при таянии льда не изменится. Наличие вмороженной в лед пробки не изменит ответ: ведь пробка, освободившись от льда, будет плавать, вытесняя опять же воду с весом, равным весу пробки. А вот стальная гайка после таяния льда утонет. Вес вытесненной гайкой воды меньше веса самой гайки, а до таяния льда на «долю» гайки приходилась вытесненная вода равного с гайкой веса. Значит, уровень воды понизится. Эту задачу можно решить и другим способом (см. задачу 6.8).



6.8. Ответ: уровень воды понизится.

Решение. По существу этот вопрос уже разобран при решении задачи 6.7 (случай со стальной гайкой). Однако полезно привести и другие решения.

1. Вначале, как вытекает из условия равновесия $F_A = (M + m)g$ и формулы $F_A = \rho_w g V_1$, объем вытесненной воды $V_1 = \frac{M + m}{\rho_w}$, где M и m — массы лодки и камня соответственно. После выбрасывания камня лодка вытесняет объем M/ρ_k , а камень — собственный объем m/ρ_k (здесь ρ_k — плотность камня). Полный вытесненный объем теперь составит $V_2 = \frac{M}{\rho_w} + \frac{m}{\rho_k}$. Поскольку $\rho_k > \rho_w$ (камни тонут!), получаем $V_2 < V_1$, т. е. уровень воды понизится.

2. Полная сила F давления на дно бассейна равна весу всего содержимого бассейна и потому остается неизменной. Однако вначале дна касалась только вода, давившая на него с силой $F = \rho_w g h_1 S$. После падения камня на дно $F = \rho_w g h_2 S + f$, где f — сила давления камня на дно. Из соотношения $\rho_w g h_2 S + f = \rho_w g h_1 S$ следует, что $h_2 < h_1$, то есть конечная глубина воды в бассейне меньше, чем начальная.

6.9. Ответ: в бассейне; не изменился.

Решение. В результате вычерпывания воды осадка лодки уменьшается (она вслышивает). При этом объем вытесненной воды уменьшается на величину, равную объему V ведра, а осадка лодки — на $h_1 = \frac{V}{S_1}$, где S_1 — площадь внешнего поперечного сечения лодки на уровне воды. Уровень воды в лодке (относительно ее дна) уменьшается на $h_2 = \frac{V}{S_2}$ (здесь S_2 — площадь поверхности воды внутри лодки). Итак, сама лодка поднимается на h_1 относительно уровня воды в бассейне, а толщина слоя воды в ней уменьшается на h_2 . Значит, изменение уровня воды в лодке относительно воды в бассейне составит $\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{V}{S_1 S_2} (S_2 - S_1)$. Поскольку $S_1 > S_2$ (за счет толщины стенок лодки), получаем $\Delta h < 0$: уровень воды в лодке становится ниже, чем в бассейне. В бассейне уровень воды, конечно, останется прежним: ведь суммарная сила давления на дно не изменилась (см. задачу 6.8).

6.10. Ответ: потонет; вслышивает.

Решение. Нужно сравнить силу тяжести $(m_{\text{ж}} + m_b)g$, действующую на наполненную бутылку, с силой Архимеда F_A , равной весу

вытесненной жидкости $\rho_{ж}gV$. Здесь $m_{ж} = \rho_{ж}V_{ж}$ — масса жидкости в бутылке объемом $V_{ж}$; $m_b = \rho_c V_b$ — масса самой бутылки; $\rho_{ж}$, ρ_c — плотности соответственно жидкости и стекла; $V_b = V_{ж} + V_b$ — объем стенок и дна бутылки; $V = V_{ж} + V_b$ — внешний объем бутылки. Найдем разность R силы тяжести и силы Архимеда: $R = (m_{ж} + m_b)g - F_A = (\rho_c - \rho_{ж})Vag$. Если бутылка с водой находится в воде, то $\rho_c > \rho_{ж}$, $R > 0$; следовательно, бутылка утонет. Если бутылка с ртутью находится в ртути, $\rho_c < \rho_{ж}$, $R < 0$, и бутылка всплынет. Этот ответ можно получить и гораздо проще: нужно только сообразить, что бутылка, доверху наполненная жидкостью, «поведет себя» так же, как сплошной кусок стекла в этой жидкости.

6.11. Ответ: 61 Дж.

Решение. Определим сначала, на сколько придется опустить льдину. Высота h_0 выступающей над водой части льдины определяется из условия равновесия $F_A = mg$, где $F_A = \rho_b g S(H - h_0)$ — сила Архимеда; $m = \rho_b g SH$ — масса льдины (здесь ρ_b и ρ_a — плотность воды и льда соответственно). Получаем $h_0 = \frac{\rho_a - \rho_b}{\rho_b} H$. В начальный момент силы F_A и mg уравновешивают друг друга. По мере уменьшения высоты h выступающей над водой части льдины (см. рис. а) от h_0 до 0 необходимо прикладывать сверху вниз все

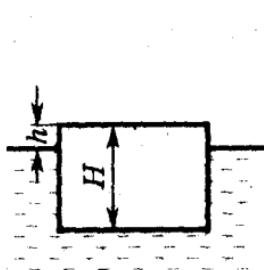


Рис. а

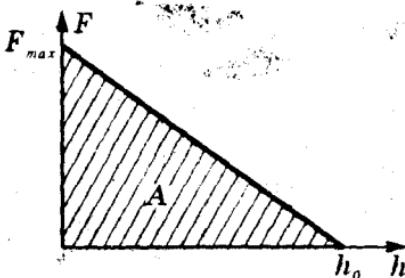


Рис. б

большую силу F . Ее максимальное значение $F_{max} = gSH(\rho_b - \rho_a)$. Работа A при погружении льдины численно равна площади под графиком $F(h)$ (см. рис. б):

$$A = \frac{F_{max} \cdot h_0}{2} = \frac{gSH^2(\rho_a - \rho_b)^2}{2\rho_b} = 61 \text{ Дж.}$$

6.12. Ответ: $m = 170,06 \text{ г}$; $m_2 = 170,03 \text{ г}$.

Указание. Вес гирь в воздухе равен $m_1 g(1 - \rho_a / \rho_c)$, а вес шара $m_2 g(1 - \rho_a / \rho_c)$. Здесь ρ_a , ρ_l , ρ_c — плотность воздуха, латуни и стекла соответственно.

6.13. Ответ: 97 кг.

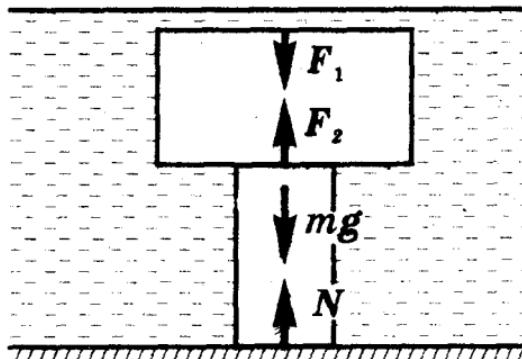
Решение. Обозначив через m начальную массу воздушного шара, а через ρ_a — плотность воздуха у поверхности Земли при 0°C , запишем условия равновесия шара до и после подъема:

$$mg = \rho_a g V; (m - \Delta m)g = \frac{\rho_a}{2} g - 1,5V.$$

Вычтая второе уравнение из первого, получим: $\Delta m = 0,25\rho_a V = 97$ кг.

6.14. Ответ: $N = \frac{\pi g}{4} [\rho(d^2 h_1 + D^2 h) - \rho_a D^2 h + \rho_a d^2 (H - h_1)]$.

Решение. Обозначим плотность бетона через ρ , плотность воды — ρ_a . Обратим внимание: обычного «уменьшения веса» за счет силы Архимеда здесь не происходит, так как вода не давит на нижнюю часть конструкции снизу. Действующие на конструкцию силы указаны на рисунке (N — сила реакции дна; F_1 и F_2 — силы



давления воды соответственно на верхнюю и нижнюю горизонтальные поверхности конструкции). Из условия равновесия следует $N = mg + F_1 - F_2$, причем

$$m = \frac{\pi \rho}{4} (d^2 h_1 + D^2 h);$$

$$F_1 = \frac{\pi D^2}{4} \rho_a g (H - h_1 - h); F_2 = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} \rho_a g (H - h_1).$$

Отсюда $N = \frac{\pi g}{4} [\rho(d^2 h_1 + D^2 h) - \rho_a D^2 h + \rho_a d^2 (H - h_1)]$.

Согласно третьему закону Ньютона эта величина совпадает с величиной силы давления конструкции на дно.

6.15. Ответ: уменьшится.

Решение. На первый взгляд может показаться, что из-за давления масла на верхнюю грань бруска он опустится. Однако заметим, что еще более толстый слой масла давит на поверхность воды. А

согласно закону Паскаля это давление полностью передается на нижнюю грань бруска. Таким образом, разность между силами давления на брускок снизу и сверху возрастает, поэтому брускок будет «всплывать» из воды, т. е. глубина его погружения в воду уменьшится.

6.16. Решение. Представим, что тело исчезло; тогда объем V_1 (см. рисунок к условию задачи) заполнится жидкостью 1, а объем V_2 — жидкостью 2. Выделенные объемы жидкостей будут, конечно, находиться в равновесии. Значит, сумма действующих на них сил тяжести уравновешивается равнодействующей сил давления со стороны окружающих слоев жидкостей. А ведь эта равнодействующая как раз и представляет собой силу Архимеда! Поскольку сила давления не изменяется вследствие замены твердого тела на «жидкое» с той же поверхностью, получаем

$$F_A = \rho_1 V_1 g + \rho_2 V_2 g,$$

т. е. сила Архимеда равна общему весу вытесненной телом жидкости.

6.17. Ответ: $\frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$.

Решение. Из решения задачи 6.16 мы уже знаем, что законом Архимеда можно пользоваться и в этом случае. Обозначим через V_1 и V_2 части объема тела, находящиеся в нижней и верхней жидкостях. Тогда условие равновесия тела имеет вид: $\rho_1 V_1 g + \rho_2 V_2 g = \rho V g$, где V — объем всего тела. Учитывая, что $V_2 = V - V_1$, получаем:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Интересно проследить предельные случаи: если $\rho \rightarrow \rho_2$, то $\frac{V_1}{V} \rightarrow 0$, т. е. тело почти полностью оказывается в верхней, более легкой жидкости; если $\rho \rightarrow \rho_1$, то $\frac{V_1}{V} \rightarrow 1$, т. е. тело почти полностью погружается в нижнюю, более тяжелую жидкость.

6.18. Ответ: на 1,3 см.

Указание. См. задачи 6.16, 6.17.

6.19. Ответ: $H = a \frac{\rho_{\text{ст}} - \rho}{\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}}} = 4,6$ см. Здесь ρ — плотность стали, $\rho_{\text{ст}}$ — плотность ртути, $\rho_{\text{в}}$ — плотность воды.

6.20. Ответ: $\rho = \frac{P_1}{P_1 - P_2} \rho_v = 2500 \text{ кг/м}^3$.

6.21. Ответ: не изменится в обоих случаях.

Решение. При плавании мяча в воде в неподвижном лифте выполняется условие равновесия $mg = \rho_v g V_v$, где m — масса мяча, V_v — объем вытесненной воды, ρ_v — ее плотность. Когда лифт движется с ускорением, удобнее всего перейти в связанную с ним неинерциальную систему отсчета, в которой вес покоящегося тела равен $m(g \pm a)$. Знак «плюс» соответствует ускорению, направленному вверх, знак «минус» — ускорению, направленному вниз. Можно сказать, что просто происходит замена g на $g \pm a$. Однако в связанной с лифтом неинерциальной системе отсчета сила Архимеда $\rho_v g V_v$ изменяется во столько же раз, во сколько раз изменяется вес любого тела! Значит, равновесие сохранится без изменения объема вытесненной воды V_v .

6.22. Ответ: сосуд перевесит гири.

Указание. Из-за повышения уровня воды увеличится ее давление на дно сосуда.

6.23. Ответ: $\Delta m = 240 \text{ г}$.

Решение. Чтобы определить, на сколько «потяжелеет» сосуд, т. е. на сколько увеличится сила его давления на весы, воспользуемся третьим законом Ньютона. На бруск со стороны воды действует сила Архимеда F_A , направленная вертикально вверх. Следовательно, со стороны бруска на воду (а в конечном счете — на чашку весов) действует такая же по величине сила, направленная вертикально вниз. Чтобы уравновесить весы, на другую чашку надо добавить груз Δm , удовлетворяющий условию $\Delta m g = F_A = \rho_v g V$. Отсюда $\Delta m = \rho_v V = 240 \text{ г}$ (масса дополнительного груза должна равняться массе вытесненной бруском воды).

6.24. Решение. Ответ становится очевидным, если рассмотреть действующие на сосуд с грузом *внешние силы*: сила реакции опоры (чашки весов) должна уравновесить силы тяжести, действующие на сосуд и бруск. Значит, сила давления сосуда на чашку весов равна сумме этих сил тяжести. Поскольку вес гирь равен весу только сосуда с водой, весы выйдут из равновесия — левая чашка перевесит. Для восстановления равновесия на другую чашку весов надо добавить груз, масса которого равна массе бруска: $m = \rho V = 1,87 \text{ кг}$ (здесь ρ — плотность стали).

Можно получить этот результат и иначе. Бруск действует на перекладину с силой P_1 , направленной вниз: $P_1 = mg - F_A$. Кроме

того, при погружении бруска в воду сила давления воды на дно увеличивается на $P_2 - F_A$ (см. задачу 6.23). Полное увеличение веса левой чашки весов

$$P = P_1 + P_2 = (mg - F_A) + F_A = mg,$$

как уже получено выше. Распространенная ошибка при решении подобных задач — замена P на P_1 (ведь бруск в воде «легче»). Мы видим, что к этому привычному утверждению следует относиться достаточно осторожно. На наш взгляд, правильнее было бы говорить не об уменьшении веса тела при погружении его в жидкость, а о перераспределении веса тела между двумя «опорами», роль одной из которых играет жидкость.

6.25. Решение. На примере этой задачи хорошо видно, что выражение «тело, погруженное в воду, уменьшает свой вес» неточно (скорее, просто неправильно!): если тело покойится, его вес всегда равен силе тяжести. Напомним, что вес — это сила, действующая со стороны тела на опору или подвес. Опорой для плавающего в воде тела является вода — эта опора мягче перины, но это все-таки самая настоящая опора. Это справедливо, конечно, и для тел, плавающих на поверхности (с чем сразу согласится тот, кто умеет лежать на воде). Вес, что находится *внутри* плавающего тела, никакой невесомости ощущать не будет: представим самих себя внутри батискафа (и даже на обычном корабле — ведь для него вес тоже «полностью исчезает»!). Поэтому гидроневесомость — состояние подводного пловца — только отчасти моделирует настоящую невесомость: например, органы тела пловца по-прежнему давят друг на друга под действием силы тяжести. А вот органы тела космонавта в условиях настоящей невесомости также невесомы.

6.26. Решение. Ответ зависит от того, является ли полый шар более сжимаемым, чем вода, или менее. Если шар более сжимаем, чем вода, его плотность будет увеличиваться при погружении быстрее, чем плотность самой воды (вода с увеличением глубины, хоть и ненамного, но все-таки сжимается: если бы она была абсолютно несжимаемой, уровень мирового океана повысился бы примерно на 30 м!). Поэтому тело станет тяжелее воды и пойдет на дно. Если же, наоборот, шар менее сжимаем, то при погружении в более плотные слои воды выталкивающая сила увеличится и шар вернется на прежнюю глубину. Таким образом, полностью погруженное в жидкость тело устойчиво плавает на определенной глубине только в том случае, если оно менее сжимаемо, чем эта жидкость. Аналогично объясняется устойчивое плавание дирижабля или шара-зонда на определенной высоте.

6.27. Решение. а) В этом случае рычаг, очевидно, равноплечий. Поскольку плотность алюминиевого шара меньше, то его объем больше, и потому на него в воде подействует большая сила Архимеда. Следовательно, при погружении шаров в воду «перетянет» железный шар.

б) При одинаковом объеме шаров масса железного шара больше. Значит, он находится на коротком плече рычага (ведь рычаг уравновешен). В воде на оба шара подействует одинаковая сила Архимеда. Но момент силы Архимеда, действующей на алюминиевый шар, больше (у этой силы больше плечо). Поэтому и в этом случае в воде «перетянет» железный шар. Сопадение обоих ответов не случайно: относительное «уменьшение веса» тела при погружении в жидкость тем больше, чем меньше плотность тела.

6.28. Ответ: примерно $5 \cdot 10^{18}$ кг.

Решение. Поскольку речь идет лишь об оценке, мы вправе не гнаться за слишком большой точностью. Нам не потребуются данные о толщине, плотности, составе атмосферы. Предлагаем ее просто взвесить. Вес атмосферы равен полной силе давления атмосферы на поверхность Земли площадью $S = 4\pi R^2$. Получаем

$$mg = 4\pi R^2 \cdot p_A, \text{ откуда } m = \frac{4\pi R^2 p_A}{g}, \text{ где } p_A — \text{атмосферное давление.}$$

Принимая $R = 6400$ км, а $p_A = 10^5$ Па, получим $m \approx 5 \cdot 10^{18}$ кг. Эта величина составляет менее одной миллионной части полной массы нашей планеты. Такая простая оценка возможна потому, что основная часть земной атмосферы сосредоточена на высотах, весьма малых по сравнению с радиусом Земли. Значит, можно считать, что на атмосферу действует «обычная» сила тяжести mg .

6.29. Ответ: $Q = mgh \left(\frac{\rho_w}{\rho} - 1 \right)$, где ρ_w и ρ — плотность воды и пробки

соответственно.

Решение. Поплавок поднимается вверх под действием равнодействующей R двух сил: силы Архимеда F_A и силы тяжести mg . Поскольку $R = F_A - mg$, то совершенная над поплавком при вскрытии работа $A = Rh = (F_A - mg)h$. Эта работа является мерой перехода механической энергии во внутреннюю: $Q = A$ (ведь поплавок в начале и в конце поконится). Сила Архимеда выражается через объем поплавка $V = \frac{m}{\rho}$:

$$F_A = \rho_w g V = \frac{\rho_w}{\rho} mg.$$

Отсюда $Q = mgH \left(\frac{\rho_b}{\rho} - 1 \right)$, где ρ_b и ρ — плотность воды и пробки соответственно. К этому результату можно прийти и исходя из закона сохранения энергии (см. задачу 6.30).

6.30. Ответ: $A = 180$ Дж; не равна.

Решение. Чтобы поднимать тело в воде с малой скоростью и без ускорения, к нему следует приложить силу $F_1 = mg - F_A = mg - \rho_b g V$, где F_A — сила Архимеда, ρ_b — плотность воды. Для дальнейшего подъема в воздухе необходима сила $F_2 = mg$. Полная работа при подъеме

$$A = F_1 h + F_2 H = mg(h + H) - \rho_b g V h = 180 \text{ Дж.}$$

Изменение потенциальной энергии тела $\Delta W_t = mg(h + H)$. Мы видим, что A меньше ΔW_t на величину $\rho_b g V h$. Что же представляет собой эта величина? Заметим, что $m_b = \rho_b V$ — масса вытесненной телом воды. Именно такая масса воды перемещается с поверхности на «освободившееся» место на глубине h . Тогда величина $\Delta W_b = -m_b gh = -\rho_b g V h$ представляет собой изменение потенциальной энергии воды. Таким образом, работа $A = \Delta W_t + \Delta W_b$ равна изменению потенциальной энергии всей системы (включающей тело и воду).

6.31. Ответ: $\rho = \frac{m}{\pi h (R^2 - r^2)}$.

Решение. Вода начнет вытекать тогда, когда жидкость приподнимет кастрюлю. Для этого необходимо, чтобы сила давления жидкости на дно кастрюли $F = pS = \rho gh (\pi R^2 - \pi r^2)$ уравнялась с действующей на кастрюлю силой тяжести. Здесь S — площадь дна кастрюли (с учетом отверстия); p — давление столба жидкости высотой h . Отсюда $\rho = \frac{m}{\pi h (R^2 - r^2)}$.

7.1. Ответ: 0,50 с; 0,17 с; 0,33 с.

Решение. Прежде всего заметим, что амплитуда A мала по сравнению с длиной l маятника и поэтому колебания можно считать гармоническими. Следовательно, период колебаний $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2,0$ с. За время T маятник совершил одно полное колебание, то есть пройдет путь, в четыре раза превышающий амплитуду его колебаний. Если маятник начинает движение из положения равновесия и проходит путь, равный амплитуде, значит, он как раз доходит до своего крайнего положения, и на это уходит время $t_1 = \frac{T}{4} = 0,50$ с.

Для ответа на два последних вопроса необходимо использовать уравнение гармонических колебаний. В случае, когда $x = 0$ при $t = 0$, это уравнение имеет вид: $x = A \sin \omega t = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$. Если маятник

прошел путь, равный половине амплитуды, то $x = \frac{A}{2}$, значит,

$\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{1}{2}$, то есть $\frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi}{6}$, или $t = \frac{T}{12} = 0,17$ с. На вторую

половину пути маятнику понадобится время $\frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6} = 0,33$ с.

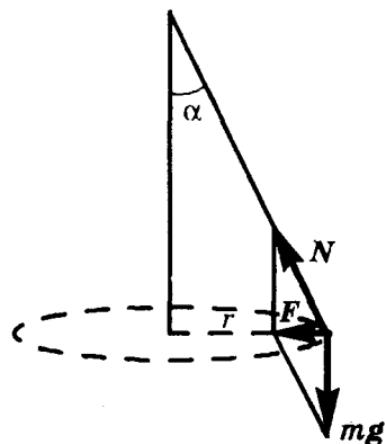
Итак, на вторую половину пути требуется больше времени (это можно было предвидеть заранее: ведь движение маятника при удалении от положения равновесия замедляется).

7.2. Ответ: $\frac{1}{3}$.

7.3. Решение. При движении маятника нить составляет постоянный угол α с вертикалью, а центростремительной силой является равнодействующая силы тяжести mg и силы натяжения нити N . Из рисунка видно, что эта сила $F = mgtg\alpha$. При движении по окружности $F = m\omega^2 r$ (циклическая

частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$). Отсюда получаем:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g \operatorname{tg} \alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \sin \alpha}{g \operatorname{tg} \alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}.$$



При малых углах α можно считать, что $\cos \alpha = 1$, то есть $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, как и для обычного математического маятника. При этом зависимость периода от угла α практически исчезает.

7.4. Ответ: 8,9 км.

Решение. Отставание маятниковых часов на горе связано с тем, что период колебаний маятника $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ зависит от ускорения свободного падения. При подъеме g уменьшается, поэтому T увеличивается, а частота колебаний уменьшается. Значит, за то же самое время маятник часов на горе совершил меньшее число колебаний и поэтому часы покажут, что прошло меньше времени. Показания часов τ прямо пропорциональны числу колебаний

маятника, т. е. частоте колебаний, поэтому $\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{T_0}{T}$, где τ_0 и T_0 — показания часов и период колебаний маятника на уровне моря. Значит, когда маятниковые часы внизу покажут время τ_0 , часы на горе покажут время $\tau = \tau_0 \frac{T_0}{T}$, то есть отстанут на $\Delta\tau = \tau_0 - \tau = \tau_0 \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)$. С другой стороны, из формулы для периода колебаний следует $\frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{g}{g_0}}$, а из закона всемирного тяготения следует $\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$, где R — радиус Земли, а h — высота горы. Подставив это выражение в формулу для $\Delta\tau$, получаем

$$\Delta\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{R}{R+h}\right) = \tau_0 \frac{h}{R+h},$$

что примерно равно $\tau_0 \frac{h}{R}$, поскольку $h \ll R$ (высота даже самой высокой горы намного меньше радиуса Земли). Отсюда получаем $h = R \frac{\Delta\tau}{\tau_0} = 8,9$ км. Это немного больше, чем высота Джомолунгмы (8848 м) — самой высокой горной вершины на Земле. Однако читатели, знакомые с правилами приближенных вычислений, понимают: произведя расчет с точностью до двух значащих цифр, мы не имеем оснований усомниться в правдивости барона.

7.5. Ответ: $\frac{\Delta l}{l} = 1 - \frac{R^2}{(R+h)^2} \approx 2 \frac{h}{R} \approx 0,002$, т. е. маятник надо укоротить на 0,2% его длины.

7.6. Ответ: $v = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = 12,5$ м/с = 45 км/ч.

Указание. Маятник раскачивается от толчков на стыках рельсов; наиболее сильное раскачивание (резонанс) наблюдается при совпадении частоты «стука колес» с собственной частотой маятника.

7.7. Ответ: а) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+a}}$; б) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-a}}$; в) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$;
г) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}$.

Период колебаний пружинного маятника во всех случаях остается равным $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Указание. Во всех случаях удобно перейти в систему отсчета, в которой математический маятник неподвижен. В этой неинер-

циальной системе отсчета ускорение свободного падения отличается от обычного (см. задачи 2.5, 2.20, 2.23), что и приводит к изменению периода T колебаний математического маятника.

7.8. Решение. В начале движения сопротивлением воздуха для падающего лифта можно пренебречь. Рассмотрим движение маятника в начале падения лифта, когда лифт движется с ускорением свободного падения. При этом в лифте возникает состояние невесомости, что равносильно «выключению» силы тяжести. Исчезает, конечно, и сила, возвращающая маятник в положение равновесия. Значит, линейная скорость маятника будет сохраняться, и движение его определяется тем, в каком начальном состоянии «застигло» маятник состояние невесомости. Например, если он в начальный момент находился в крайнем положении (скорость равнялась нулю), он так и «застынет» в этом положении. При дальнейшем падении лифта начнет сказываться сопротивление воздуха. Это приведет к постепенному «включению» силы тяжести: маятник снова начнет совершать колебания, частота которых будет увеличиваться до тех пор, пока ускорение лифта не станет равным нулю, т. е. пока движение лифта не станет равномерным (это вполне возможно, поскольку речь идет о падении лифта в небоскребе!). При равномерном движении на маятник в лифте будет действовать «обычная» сила тяжести и он будет колебаться с той же частотой, что и в покоящемся лифте.

7.9. Ответ: 0,80 с.

Решение. На первый взгляд кажется, что в условии не хватает данных — не известны ни масса груза m , ни коэффициент жесткости пружины k , а период колебаний T как раз от них и зависит: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Однако отношение $\frac{m}{k}$ можно легко узнать, потому что для неподвижно висящего на пружине груза $mg = k\Delta l$, то есть $\frac{m}{k} = \frac{\Delta l}{g}$, и поэтому $T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}$, так что период (и частота) колебаний груза на пружине однозначно определяется величиной удлинения пружины, когда к ней подведен груз. В данном случае период колебаний равен 0,80 с.

$$\text{7.10. Ответ: а) } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}; \text{ б) } T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}};$$

$$\text{в) } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

Указание. В случае *в* независимо от расстояния между стенками существует положение равновесия, в котором действующие на

груз силы упругости со стороны обеих пружин взаимно компенсируются. При отклонении от этого положения возникают «добавки» ΔF_1 и ΔF_2 к обеим силам упругости, направленные всегда в одну сторону (когда одна пружина растягивается, другая на столько же сжимается). Значит, в случае *b* мы фактически имеем дело с таким же параллельным соединением пружин, как и в случае *a*. Вычисление коэффициента жесткости системы пружин см. в задаче 5.6.

7.11. Ответ: доска будет совершать гармонические колебания с периодом $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2\mu g}}$; доска соскочит с валиков.

Решение. Очевидно, если центр доски расположен на равных расстояниях от обоих валиков, то доска будет оставаться в равновесии. В любом другом случае доска придет в движение. Поскольку в условии говорится о *быстром* вращении валиков, между ними и доской происходит проскальзывание, и сила трения скольжения, действующая на доску со стороны каждого из валиков, направлена внутрь (см. рисунок). Из второго закона Ньютона и формулы для силы трения скольжения следует, что $ma_x = F_{\text{тр},1} - F_{\text{тр},2} = \mu(N_1 - N_2)$. Здесь N_1 и N_2 — силы давления доски на первый и второй валики соответственно.

Если доска сместилась от положения равновесия на расстояние x , то из правила моментов следует:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{L}{2} - x}{\frac{L}{2} + x}.$$

Учитывая, что $N_1 + N_2 = mg$, получаем:

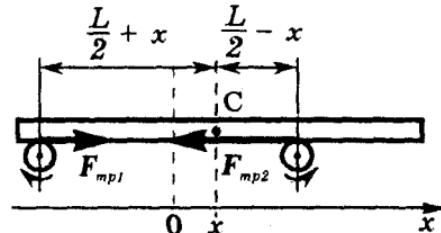
$$N_1 = mg\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right), \quad N_2 = mg\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L}\right).$$

Тогда уравнение движения имеет вид:

$$a_x = -\frac{2\mu g}{L}x.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{L}}$ и периодом $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2\mu g}}$.

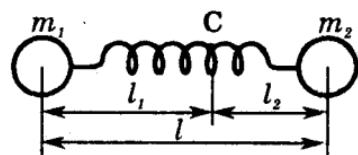
Если каждый валик станет вращаться в обратную сторону, то обе силы трения будут направлены «наружу». Смещение доски от



положения равновесия увеличит (за счет перераспределения нагрузки на валики) как раз ту силу трения, которая действует в сторону смещения (и уменьшит силу трения о другой валик). Поэтому вместо возвращающей силы возникает сила, уводящая доску еще дальше от положения равновесия. Равновесие в этом случае неустойчиво, колебаний вокруг него не возникает. Доска будет сброшена с валиков.

7.12. Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$.

Решение. Для определения периода колебаний пружинного маятника очень заманчиво было бы воспользоваться «готовой» формулой $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, одна-



ко она относится к случаю, когда один конец пружины закреплен. Может быть, у нашей пружины тоже есть неподвижная точка, которая может сыграть роль закрепленного конца? В той инерциальной системе отсчета, в которой полный импульс обоих тел равен нулю, такая точка действительно существует — это центр масс грузов C (см. рисунок). Если полная длина пружины l , то расстояние от центра масс до каждого из грузов задается соотно-

шениями $\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}$; $l_1 + l_2 = l$. Отсюда $l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}l$; $l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}l$. По-

скольку при колебаниях все витки пружины деформируются одинаково (т. е. l_1 и l_2 изменяются в одинаковое число раз), неподвижный центр масс C как бы «привязан» к одной и той же точке пружины, то есть исходную систему можно рассматривать как два отдельных пружинных маятника.

Поскольку коэффициент жесткости пружины обратно пропорционален ее длине, мы можем найти коэффициенты жесткости

частей пружины с длинами l_1 и l_2 из соотношений $\frac{k_1}{k} = \frac{l}{l_1}$; $\frac{k_2}{k} = \frac{l}{l_2}$,

следовательно, $k_1 = k \frac{m_1 + m_2}{m_2}$, $k_2 = k \frac{m_1 + m_2}{m_1}$.

Тогда период колебаний каждого из маятников составит

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

Естественно, периоды колебаний обеих «половинок» оказались одинаковыми (иначе центр масс не мог бы покояться). Грузики колеблются в *противофазе*: направления их скоростей в любой момент противоположны друг другу.

7.13. Решение. Правый грузик начнет двигаться вправо, а левый грузик будет прижат к стене до тех пор, пока пружина будет сжата. В тот момент, когда деформация пружины исчезнет, левый грузик перестанет давить на стену и оторвется от нее. После этого оба грузика будут двигаться по столу, совершая колебания друг относительно друга. Однако центр тяжести системы будет двигаться равномерно и прямолинейно: на систему грузов не действуют внешние горизонтальные силы. Колебания грузов происходят в противофазе.

Таким образом, качественное решение задачи мы нашли. Чтобы получить количественный ответ, необходимо ответить на три вопроса: а) чему равен период T колебаний грузиков, б) с какой скоростью v_{cm} движется центр масс системы, в) в каких пределах изменяется длина пружины при колебаниях.

Ответ на первый вопрос уже дан в решении задачи 7.12:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} = 0,24 \text{ с.}$$

Для ответа на второй вопрос найдем скорость центра масс. Отметим, что эта скорость меняется только до тех пор, пока левый грузик давит на стенку (а стенка на него!). Следовательно, надо определить скорость центра масс именно в момент отрыва левого грузика от стенки: в дальнейшем эта скорость остается неизменной. В момент отрыва пружина не деформирована (этим и определяется момент отрыва!), значит, вся потенциальная энергия деформации пружины перешла в кинетическую энергию правого грузика:

$\frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2}$. Отсюда определим скорость правого грузи-

ка в момент отрыва левого грузика от стены: $v_2 = \Delta l \sqrt{\frac{k}{m_2}}$. Левый грузик в этот момент еще покойится ($v_1 = 0$), поэтому скорость центра масс, вычисленная по формуле $v_{\text{cm}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$, составит

$$v_{\text{cm}} = \frac{\Delta l \sqrt{km_2}}{m_1 + m_2} = 0,19 \text{ м/с.}$$

Чтобы ответить на третий вопрос, заметим, что в моменты наибольшего растяжения или сжатия пружины грузы покоятся друг относительно друга и кинетическая энергия системы равна $\frac{(m_1 + m_2)v_{\text{cm}}^2}{2}$. Потенциальная же энергия пружины в этот момент

равна $\frac{kx^2}{2}$, где x — величина максимального удлинения. Согласно

закону сохранения энергии

$$\frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{(m_1 + m_2)v_{\text{им}}^2}{2}.$$

Подставляя в это уравнение выражение для $v_{\text{им}}$, находим

$$x = \Delta l \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} = 1 \text{ см.}$$

Длина недеформированной пружины равна $l_0 + \Delta l$. Значит, при колебаниях длина пружины меняется от $l_{\min} = l_0 + \Delta l - x = 7 \text{ см}$ до $l_{\max} = l_0 + \Delta l + x = 9 \text{ см}$. Таким образом, деформация пружины в ходе движения не достигает начального значения Δl . Дело в том, что часть начальной энергии деформированной пружины $W_0 = \frac{k(\Delta l)^2}{2}$ переходит в кинетическую энергию поступательного движения системы как целого:

$$W_k = \frac{(m_1 + m_2)v_{\text{им}}^2}{2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} W_0.$$

Эта часть тем больше, чем больше отношение $\frac{m_2}{m_1}$. Она заметно изменится, если грузы поменять местами (от 75% до 25% в нашем случае).

7.14. Ответ: 0,26 м.

Решение. Чтобы определить толщину d отколившейся льдины, достаточно узнать ее массу M , поскольку $M = \rho_{\text{л}} S d$. Эту массу можно, в свою очередь, найти, зная период колебаний льдины, на которой находится барон: при изменении осадки на величину Δx возникает возвращающая сила, обусловленная изменением силы Архимеда: $\Delta F_A = \rho_{\text{в}} g \Delta V = \rho_{\text{в}} g S \Delta x$. Как видно, возвращающая сила пропорциональна величине отклонения льдины от положения равновесия, поэтому колебания будут гармоническими. Циклическая частота колебаний определяется соотношением $\omega^2 = \frac{\rho_{\text{в}} g S}{M + m}$.

Таким образом, $M = \frac{\rho_{\text{л}} g S}{\omega^2} - m$, а толщина льдины

$$d = \frac{M}{\rho_{\text{л}} S} = \frac{\rho_{\text{л}} g S - m \omega^2}{\omega^2 \rho_{\text{л}} S} = 0,26 \text{ м.}$$

Мы учли, что $\omega = 2\pi v$, где $v = 1 \text{ Гц}$. Заметим, что на самом деле колебания льдины очень быстро затухнут из-за сопротивления воды.

7.15. Ответ: $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{kl + mg}}$; $T_2 = \pi \left(\sqrt{\frac{ml}{kl + mg}} + \sqrt{\frac{l}{g}} \right)$.

Решение. Определить период колебаний системы можно не только исходя из уравнения движения, но и воспользовавшись выражением для полной механической энергии. Пусть отклонение системы от положения равновесия описывается величиной x , а выражение для энергии

$$W = Ax^2 + B(x')^2. \quad (1)$$

Здесь A , B — положительные константы; $x' = \frac{dx}{dt}$ — скорость изменения величины x .

Величина x совсем не обязательно совпадает с декартовой координатой: это может быть, например, угол отклонения маятника от вертикали.

Если в системе отсутствует трение, то полная механическая энергия остается неизменной. Значит, $W' = 0$. Отсюда получаем $Ax + Bx'' = 0$, или $x'' = -\frac{A}{B}x$. Поскольку $\frac{A}{B} > 0$, это уравнение совпадает с уравнением гармонических колебаний $a_x = -\omega_0^2 x$. Следовательно, колебания являются гармоническими тогда (и только тогда!), когда выражение для энергии имеет вид (1), причем циклическая частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{A}{B}}$.

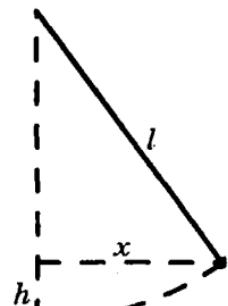
Попробуем применить этот подход к решению данной задачи. При малом отклонении x груза от положения равновесия пружина приобретает потенциальную энергию $\frac{kx^2}{2}$; кроме того, груз приобретает потенциальную энергию mgh , где (см. рисунок) $h = l - \sqrt{l^2 - x^2} \approx \frac{x^2}{2l}$ (см. математическое приложение).

Если учесть и кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2} = \frac{m(x')^2}{2}$, то получим

$$W = \left(k + \frac{mg}{l} \right) \frac{x^2}{2} + \frac{m(x')^2}{2}.$$

Это выражение соответствует формуле (1) при $A = \frac{1}{2}(k + \frac{mg}{l})$, $B = \frac{m}{2}$. Поэтому можно утверждать, что колебания — гармонические с периодом

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{B}{A}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{kl + mg}}.$$



Если заменить пружину на полоску резины, то при смещении груза влево от положения равновесия резина свободно провисает и не влияет на движение груза (разумеется, если можно пренебречь ее весом). Поэтому период колебаний T_2 такой системы складывается из половины T_1 и половины периода обычного математического маятника:

$$T_2 = \pi \left(\sqrt{\frac{ml}{kl + mg}} + \sqrt{\frac{l}{g}} \right).$$

7.16. Ответ: $\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{kl}{4mg}}$.

Решение. В отсутствие пружины мы имеем дело с обычным математическим маятником, частота колебаний которого

$$v_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Прикрепление пружины увеличивает возвращающую силу при отклонении маятника от равновесия, так что частота колебаний должна возрасти. Проще всего определить частоту v_2 колебаний системы из выражения для полной механической энергии W системы. При отклонении груза от положения равновесия на $x \ll l$ он приобретает потенциальную энергию $mgh = \frac{mgx^2}{2l}$ (см. решение задачи 7.15); кроме того, растяжение пружины на $\frac{x}{2}$ сообщает

ей потенциальную энергию $\frac{k\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$. С учетом кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(x')^2 \text{ получаем } W = \left(\frac{mg}{l} + \frac{k}{4} \right) \frac{x^2}{2} + \frac{m(x')^2}{2}.$$

Отсюда (см. решение задачи 7.15) находим циклическую частоту и частоту колебаний: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}}$; $v_2 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

Следовательно, в результате прикрепления пружины частота колебаний увеличивается в $\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{kl}{4mg}}$ раз.

7.17. Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, если маятники отклонены в одну сторону;

$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg + 2kl}}$ при отклонении их в противоположные стороны.

Решение. а) Пружина не деформируется при колебаниях, так что сила упругости не возникает (связь между маятниками «не рабо-

тает*). Поэтому оба маятника колеблются независимо друг от друга с одним и тем же периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

6) Воспользуемся методом, описанным в решении задачи 7.15. Если каждый из маятников отклонился от положения равновесия на величину x , то деформация пружины равна $2x$, а энергия системы $W = \frac{k(2x)^2}{2} + 2\frac{mgx^2}{2l} + 2\frac{mv^2}{2} = (2k + \frac{mg}{l})x^2 + m(x')^2$. Отсюда

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k + \frac{mg}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + 2kl}}.$$

7.18. Ответ: $t = 42$ мин; $v = 7,9$ км/с.

Решение. Поскольку эта задача предложена в разделе, где рассматриваются колебания, у читателя может возникнуть догадка, что движение «сквозь Землю» — гармоническое колебание. Чтобы подтвердить (или опровергнуть) эту догадку, вспомним, что на тело, находящееся на расстоянии x от центра Земли, действует

сила тяготения $mg\frac{x}{R}$ (m — масса тела, g — ускорение свободного падения у поверхности Земли, R — радиус Земли; см. задачу 3.6). Эта сила пропорциональна величине отклонения x от положения равновесия и является возвращающей, поэтому движение «сквозь Землю» — действительно гармоническое колебание с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 84 \text{ мин.}$$

Полученный период совпадает с периодом обращения искусственного спутника Земли на малой высоте, но этому обстоятельству не стоит придавать слишком большого значения: если учесть неоднородность Земли, то совпадение исчезнет. Пролет сквозь Землю в одну сторону составляет половину периода, т. е. 42 мин. Согласитесь, что барон действительно нашел довольно быстрый способ перемещения из Арктики в Антарктику! Читателю не составит труда убедиться, что через центр Земли барон пронесся со скоростью $v = \sqrt{Rg} = 7,9$ км/с, равной как раз первой космической скорости!

7.19. Ответ: 0,71 с.

Решение. Прежде всего необходимо разобраться в характере движения. Заметим, что оно не является равноускоренным: чем дальше выезжают санки на асфальт, тем больше сила трения $F_{тр}$, а, значит, и ускорение санок. Найдем уравнение движения. Пусть m — масса санок, x — длина той части полозьев, которая в данный

момент уже выехала на асфальт. Тогда на эту часть полозьев приходится только часть веса санок $N_1 = mg \frac{x}{l}$. Соответствующая сила трения об асфальт $F_{\text{тр}} = \mu N_1 = \mu mg \frac{x}{l}$, а уравнение движения санок имеет вид: $ma_x = -F_{\text{тр}} = -\mu mg \frac{x}{l}$, или $a_x = -\frac{\mu g}{l}x$. Это хорошо известное уравнение гармонических колебаний, период которых $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$. Продолжительность движения от точки $x = 0$ до остановки соответствует четверти периода: $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}} = 0,71$ с.

7.20. Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{H}{g}}$.

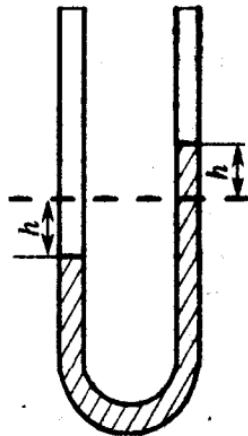
Решение 1. Пусть уровень жидкости в одном из колен сосуда увеличился на h относительно равновесного уровня (см. рисунок). Тогда в другом колене уровень жидкости на столько же опустился.

Разность давлений, создаваемых двумя вертикальными столбами жидкости, составляет $\Delta p = \rho g \cdot 2h$, а возвращающая сила $F = -\Delta p \cdot S = 2\rho g Sh$ (ρ — плотность жидкости, S — площадь сечения сосуда). Поскольку масса жидкости $m = 2\rho SH$, уравнение движения столба жидкости имеет вид: $2\rho Sh a = -2\rho g Sh$,

т. е. $a = -\frac{g}{H}h$. Это — уравнение гармонических колебаний с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{H}{g}}$.

Решение 2. При изменении уровня жидкости на h потенциальная энергия жидкости растет. Ее прирост ΔW_p такой же, как при подъеме столбика жидкости высотой h (и массой $\Delta m = \rho Sh$) на высоту h (см. рисунок): $\Delta W_p = \Delta mgh = \rho Sgh^2$.

Кинетическую энергию жидкости запишем в виде $W_k = \frac{mv^2}{2} = \rho SH(h')^2$. Если отсчитывать механическую энергию W системы от «нулевого уровня», соответствующего положению равновесия, то $W = \rho Sgh^2 + \rho SH(h')^2$. Из этого выражения для энергии следует (см. решение задачи 7.15), что период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{H}{g}}$.



7.21. Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{g(m_1 l_1 + m_2 l_2)}}.$

Решение. При нахождении периода T будем исходить из выражения для полной механической энергии W колебательной системы (см. решение задачи 7.15). Если угол отклонения стержня от вертикали φ , то каждый из шаров поднимается от положения равновесия на высоту $h_{1,2} = l_{1,2}(1 - \cos\varphi)$. При этом система приобретает потенциальную энергию

$$W_p = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = (m_1 l_1 + m_2 l_2) g (1 - \cos\varphi) = 2 g \sin^2 \frac{\varphi}{2} (m_1 l_1 + m_2 l_2).$$

Выражая скорости шаров через угловую скорость стержня $\omega = \dot{\varphi}$, получаем $v_{1,2} = \dot{\varphi} l_{1,2}$. Тогда кинетическая энергия системы

$$W_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(\dot{\varphi})^2}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2).$$

Поскольку мы рассматриваем *малые* колебания ($\varphi \ll 1$ рад), $\sin \frac{\varphi}{2}$ можно заменить на $\frac{\varphi}{2}$, и выражение для полной энергии приобретает вид

$$W = \frac{g}{2} (m_1 l_1 + m_2 l_2) \dot{\varphi}^2 + \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{2} (\dot{\varphi})^2.$$

Эта формула позволяет сделать вывод: система совершают гармонические колебания с периодом $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{g(m_1 l_1 + m_2 l_2)}}$. Для проверки можно рассмотреть предельные случаи $l_1 \rightarrow l_2$, $l_1 \rightarrow 0$ или $m_1 \rightarrow 0$. При этом полученная формула переходит в хорошо известную формулу периода колебаний математического маятника.

7.22. Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{g|m_1 l_1 - m_2 l_2|}}$. При $m_1 l_1 \rightarrow m_2 l_2$ период T стремится к бесконечности, при $m_1 l_1 = m_2 l_2$ колебания вообще не возникают (любое положение стержня соответствует безразличному равновесию).

Указание. См. задачу 7.21.

7.23. Ответ: $A > \frac{\mu g T^2}{4\pi^2} = 6,2$ мм.

Указание. Тело движется вместе с подставкой, если максимального значения силы трения цокоя достаточно для сообщения телу *максимального ускорения* при колебаниях.

7.24. Ответ: $v < \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{A}} = 7,0$ Гц.

Указание. В момент отрыва от подставки тело находится в состоянии

нии невесомости. Это возможно, если максимальное ускорение подставки превышает ускорение свободного падения; максимальное ускорение, направленное вниз, достигается в верхней точке.

7.25. Ответ: $A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$.

Решение. Несмотря на то, что удар шарика о чашку неупругий, мы все-таки можем воспользоваться законом сохранения механической энергии, поскольку в условии сказано, что чашка очень легкая. Действительно, в этом случае скорость чашки с шариком непосредственно после удара практически равна скорости шарика в момент удара, и поэтому кинетическая энергия чашки с шариком после удара тоже практически равна кинетической энергии шарика перед самым ударом.

Пусть в результате удара максимальное отклонение чашки вниз равно x . Поскольку скорость чашки с шариком в этом положении равна нулю, потерянная шариком энергия $mg(h + x)$ полностью переходит в потенциальную энергию деформированной пружины $\frac{kx^2}{2}$, т. е. $mg(h + x) = \frac{kx^2}{2}$. Отсюда получаем два решения

$$x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}.$$

Что означают эти два решения? Дело в том, что составленному нами уравнению удовлетворяет любое x , при котором скорость чашки с шариком равна нулю. А таких точек, конечно, две — они соответствуют верхнему и нижнему крайним положениям чашки при колебаниях. Среднее арифметическое $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{mg}{k}$ соответствует новому положению равновесия (когда на чашке лежит груз). Очевидно, $x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm A$, т. е. $A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$.

Заметим, что при $h = 0$ (шарик осторожно кладут на чашку) амплитуда колебаний A не обращается в нуль! Она, как и следовало ожидать, равна $\frac{mg}{k}$, т. е. равна расстоянию от начального положения чашки до нового положения равновесия.

7.26. Ответ: $y = A \cos(\omega t - kx)$, где $k = \frac{\omega}{v}$.

Решение. Амплитуды колебаний всех точек по условию одинаковы (волна незатухающая) и равны A , поэтому колебания в точке с координатой x будут отличаться от колебаний в точке O лишь начальной фазой. Это отличие обусловлено тем, что волна приходится

дит в точку с координатой x с запаздыванием на $\Delta t = \frac{x}{v}$ по сравнению с точкой O . Следовательно, интересующее нас уравнение колебаний имеет вид:

$$y = A \cos(\omega(t - \Delta t)) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v}\right).$$

Учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и $vT = \lambda$, где T — период, а λ — длина волны, получаем $y = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ — так называемое уравнение бегущей волны. Величину $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ называют волновым числом. Если записать уравнение бегущей волны используя k , получим $y = A \cos(\omega t - kx)$, откуда видно, что волновое число играет ту же роль по отношению к координате, что циклическая частота по отношению ко времени.

7.27. Ответ: частота не изменяется; длина волны увеличивается в 4,4 раза.

Решение. При падении из воздуха на поверхность воды звуковая волна частотой v вызовет колебания поверхности воды с такой же частотой. В свою очередь, колеблющиеся точки поверхности вызовут в толще воды распространение волн той же самой частоты. Следовательно, при переходе через границу раздела сред волна не изменяет своей частоты. Однако скорости звука в воздухе v_1 и воде v_2 различны. Поскольку длина волны в воздухе $\lambda_1 = \frac{v_1}{v}$, а в воде

$\lambda_2 = \frac{v_2}{v}$, получаем $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} = 4,4$. Таким образом, длина волны при переходе из одной среды в другую изменяется пропорционально скорости волны в данной среде.

7.28. Ответ: $v_k = k \cdot 50$ Гц, где k — произвольное натуральное число.

Решение. Собственные колебания воздушного столба представляют собой стоячие волны, причем у закрытых концов трубы находятся узлы стоячей волны. Поскольку расстояние между ближайшими узлами равно $\lambda/2$, на длине трубы должно укладываться целое число полуволн: $l = \frac{\lambda_k}{2}k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Тогда $\lambda_k = \frac{2l}{k}$, и

собственные частоты $v_k = \frac{v}{\lambda_k} = \frac{v}{2l}k$, где v — скорость звука в воздухе.

Итак, $v_k = k \cdot 50$ Гц.

7.29. Ответ: при уровнях воды 25 и 75 см.

Решение. Усиление звука происходит в случае резонанса, т. е. когда частота звука совпадает с собственной частотой колебаний воздушного столба в сосуде. Поскольку плотность воды намного превышает плотность воздуха, поверхность воды можно рассматривать как твердую нижнюю «пробку» воздушного столба. Поэтому у поверхности воды должен находиться узел, а у верхнего края сосуда — пучность стоячей волны. Расстояние между ближайшими узлом и пучностью стоячей волны равно $\lambda/4$, а между ближайшими узлами $\lambda/2$. Поэтому если обозначить высоту уровня воды через h , то длина воздушного столба $H - h$ должна удовлетворять соотношению $H - h = \frac{\lambda}{4} + k \frac{\lambda}{2}$, где k — целое число. Поскольку $\lambda = \frac{v}{\nu} = 1$ м (v — скорость звука в воздухе), это соотношение выполняется при $k = 0$, $h_0 = 0,75$ м и $k = 1$, $h_1 = 0,25$ м. Итак, звук усиливается при уровнях воды 25 см и 75 см.

7.30. Ответ: 19 см.

Решение. Резонаторный ящик представляет собой «трубу», открытую с одного конца. Минимальная длина ее, при которой наблюдается резонанс, $l = \frac{\lambda}{4} = \frac{v}{4\nu} = 19$ см (здесь v — скорость звука в воздухе).

Никаких нарушений закона сохранения энергии, естественно, нет. Громкость звучания определяется (при заданной частоте) не энергией излученного звука, а его мощностью. Резонатор увеличивает мощность излучаемого камертоном звука, т. е. расход энергии его колебаний в единицу времени. Поэтому камертон, установленный на резонаторе, быстрее израсходует свою энергию и затихнет.

7.31. Ответ: $h = \frac{v}{4\nu}(2k + 1) = 50(2k + 1)$ м, где v — скорость звука в воде; $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

7.32. Ответ: 300 Гц; 150 Гц.

7.33. Решение. Почему, собственно, следует ожидать какого-либо изменения звука из-за изменения состава «атмосферы»? Дело в том, что при замене азота гелием значительно понижается средняя молярная масса газовой смеси, а потому заметно увеличивается скорость звука v .

Звук голоса (как и любой звук) можно представить как результат сложения гармонических звуковых волн различных частот

(набор этих частот называют спектром звука). Колебания различных частот имеют разные амплитуды. Звучание голоса определяется частотами, для которых амплитуды звуковых колебаний велики. Гортань представляет собой «резонаторный ящик», усиливающий звуки с определенными *длинами волн*. Эти длины волн λ зависят от формы и размеров гортани и поэтому не изменяются при замене воздуха на дыхательную смесь. Однако из-за увеличения v «резонансные» частоты гортани $v = \frac{v}{\lambda}$ изменятся (станут выше), и поэтому голос станет более высоким. То же самое произойдет, конечно, и с тоном духовых инструментов (которые также представляют собой резонаторы).

Частота звучания камертона определяется его формой и размерами, а также плотностью и упругими свойствами материала (стали). Поэтому его звучание в кислородно-гелиевой дыхательной смеси не изменится. Если камертон установлен на резонаторе, то по указанным причинам его тон не изменится. Однако резонансная частота столба «воздуха» в резонаторе станет другой, поэтому резонанс нарушен, и резонаторный ящик практически не будет усиливать звучание камертона.

7.34. Ответ: форму конуса с углом при вершине $2\arcsin \frac{v}{u}$.

Решение. Фронт ударной волны представляет собой огибающую сферических волн, испущенных пулей в каждый из предшествующих моментов времени. При $u > v$ пуля обгоняет испущенный ею звук, так что фронт ударной волны может охватывать лишь область позади пули.

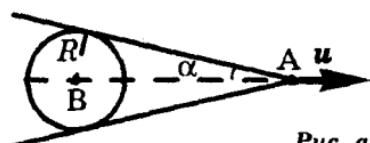


Рис. а

Докажем, что фронт ударной волны представляет собой коническую поверхность. Пусть пуля в данный момент находится в точке A . Рассмотрим звуковую волну, испущенную пулей в точке B (см. рис. а). Эта волна имеет к данному моменту «возраст» $\Delta t = \frac{AB}{u}$. Значит, ее волновая поверхность — сфера радиуса $R = v\Delta t = AB \cdot \frac{v}{u}$. Построим конус с вершиной в точке A , касающийся этой сферы. Угол α между образующей конуса и его осью (направлением полета пули) находим из соотношения $\sin \alpha = \frac{R}{AB} = \frac{v}{u}$. Оказывается, этот угол не зависит от длины отрезка AB ! Значит, этот конус касается всех волновых поверхностей ранее испущен-

ных звуковых волн, т. е. является для них огибающей поверхностью (ср. с задачей 1.20). Это — так называемый звуковой конус (см. рис. б).

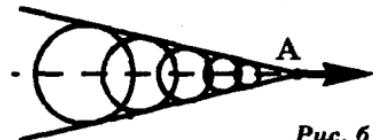


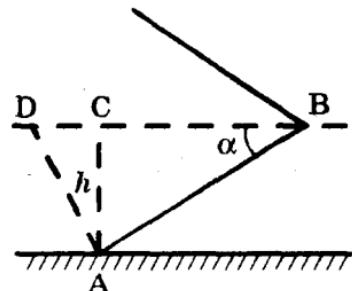
Рис. б

7.35. Ответ: на расстоянии 10 км.

Решение. Наблюдатель в точке A услышит звук (громкий хлопок), когда точка A достигнет поверхность звукового конуса (см. решение задачи 7.34), который самолет «тащит» за собой. К этому моменту самолет окажется в точке B (см. рисунок).

Очевидно, $AB = \frac{h}{\sin \alpha} = 2h = 10$ км, где

$\sin \alpha = \frac{v}{u} = 0,5$. Обратите внимание: дошедший до наблюдателя звук самолета «родился» не в точке C , а в точке D !



7.36. Ответ: более высокий звук слышит водитель лежащего автомобиля.

Решение. В системе отсчета лежащего автомобиля изменяется *длина волны* звука от приближающегося источника: за один период T колебаний источник приближается на расстояние uT , поэтому расстояние между ближайшими «гребнями» волн (уплотнениями воздуха) равно не $v_{\text{зв}} T$, а $v_{\text{зв}} T - uT$. Это расстояние и есть длина звуковой волны, воспринимаемой неподвижным относительно Земли автомобилистом, т. е. $\lambda = (v_{\text{зв}} - u)T$. В то же время скорость звука в его системе осталась неизменной, поскольку она определяется упругими свойствами воздуха, который покоятся относительно этого автомобиля. Следовательно, звук, слышимый пострадавшим водителем, имеет частоту

$$v_1 = \frac{v_{\text{зв}}}{\lambda} = \frac{v_{\text{зв}}}{(v_{\text{зв}} - u)T} = \frac{v_0}{1 - \frac{u}{v_{\text{зв}}}} = 533 \text{ Гц.}$$

Для движущегося автомобилиста повышение звука «покоящейся» сирены происходит по другой причине: в его системе отсчета *длина волны* звука не изменяется ($\lambda = \lambda_0$), поскольку источник звука неподвижен относительно воздуха, однако изменяется *скорость звука*. По отношению к едущему автомобилю воздух вместе со всеми сгущениями и разрежениями звуковых волн движется навстречу со скоростью u , поэтому скорость *этого* звука для движущегося автомобилиста $v = v_{\text{зв}} + u$. Следовательно,

он слышит звук, частота которого

$$v_2 = \frac{v}{\lambda_0} = \frac{v_{\text{из}} + u}{\lambda_0} = \frac{v_{\text{из}} \left(1 + \frac{u}{v_{\text{из}}}\right)}{\lambda_0} = v_0 \left(1 + \frac{u}{v_{\text{из}}}\right) = 500 \text{ Гц.}$$

Таким образом, более высокий звук приближающейся сирены услышит пострадавший автомобилист. Эффект изменения частоты звука при движении источника или приемника обнаружил Х. Доплер, поэтому он называется эффектом Доплера.

Обратите внимание, что при медленном движении $\left(\frac{u}{v_{\text{из}}} \ll 1\right)$

получаем $v_1 \approx v_2$, т. е. движение источника или приемника звука приводит к одинаковому изменению принимаемой частоты.

7.37. Ответ: $v = v_0 \left(1 + \frac{usina}{u}\right)$, если катер удаляется от берега;

$v = v_0 \left|1 - \frac{usina}{u}\right|$, если катер приближается к берегу.

Решение. Если катер удаляется от берега со скоростью v , как показано на рисунке, то проекция его скорости на направление распространения волн равна $-usina$. Время Δt между двумя ударами гребней волн о катер определяется из условия

$$usina\Delta t + u\Delta t = \lambda = \frac{u}{v_0}$$

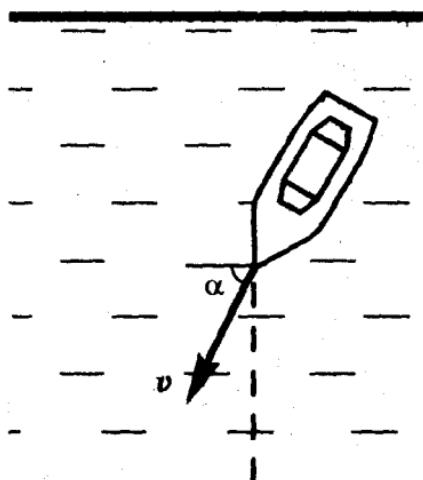
Здесь λ — длина волны. Учитывая, что $\Delta t = \frac{1}{v}$, получаем

$$v = v_0 \left(1 + \frac{usina}{u}\right).$$

Если катер приближается к берегу, то $v = v_0 \left|1 - \frac{usina}{u}\right|$. В этом случае катер может обгонять волну или отставать от нее. При $usina = u$ катер «оседает» волну и будет двигаться вместе с ней. При этом удары волн о катер прекратятся ($v = 0$).

7.38. Ответ: $a_D = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $a_E = 0$; $a_D = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $a_E = a$.

Решение. Из условия следует, что оба динамика излучают когерентные звуковые волны с длиной волны $\lambda = \frac{v}{u} = 0,5 \text{ м}$ (здесь $v =$



скорость звука в воздухе). До точки C обе волны доходят за одинаковое время. Согласно условию, в этой точке они усиливают друг друга, значит, мембранны обоих динамиков колеблются в одной фазе. Кроме того, можно считать, что обе волны приходят в точку C (и в близкие к ней точки D, E) с одинаковой амплитудой $\frac{a}{2}$. Разность хода обеих волн в точке D составит $\Delta_D = AD - BD = 2CD$; в точке E разность хода $\Delta_E = AE - BE = 2CE = \frac{\lambda}{2}$.

Отсюда следует, что в точку D волны приходят с разностью фаз $\frac{\pi}{2}$, а в точку E — с разностью фаз π , т. е. в противофазе. Очевидно, в точке E обе волны должны почти «погасить» друг друга, и поэтому амплитуда колебаний в точке E равна 0. В точке D складываются два колебания одной частоты с амплитудами $\frac{a}{2}$ и сдвигом фаз $\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$x_D = \frac{a}{2} \cos \omega t + \frac{a}{2} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \frac{a}{2} (\cos \omega t - \sin \omega t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}).$$

Итак, амплитуда колебаний в точке D равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Если поменять местами выводы одного из динамиков, то мембранны обоих динамиков станут колебаться в противофазах. Теперь обе волны «гасят» друг друга в точке C , зато усиливают в точке E : амплитуда колебаний в точке E станет равной a . В точке D изменение фазы одной из волн на противоположную не влияет на амплитуду результирующего колебания — эта амплитуда по-прежнему равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

8.1. Ответ: $\eta = 88\%$.

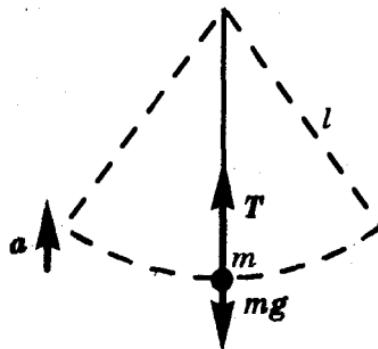
Указание. $\eta = \frac{mgh}{FL}$, где F — направленная вдоль наклонной плоскости сила, необходимая для равномерного подъема тела массой m .

8.2. Ответ: $h = 3,6$ м.

Решение. Механическая энергия тела при движении сохраняется. После отпускания веревки тело летит вертикально вверх и в верхней точке вся его кинетическая энергия переходит в потенциальную. Значит, $mgh = \frac{mv^2}{2}$, где v — скорость тела в нижней точке. Скорость v находим, применяя второй закон Ньютона (см.

рисунок): $ma = T - mg$, где $a = \frac{v^2}{l}$ — центростремительное ускорение при прохождении нижней точки окружности. Отсюда

$$v^2 = lg\left(\frac{T}{mg} - 1\right), h = \frac{l}{2}\left(\frac{T}{mg} - 1\right) = 3,6 \text{ м.}$$



К задаче 8.2

8.3. Ответ: $\alpha = 60^\circ$; $T_2 = \frac{mg}{2}$.

Решение. Максимальный угол отклонения α зависит от скорости шарика v в нижней точке: при отклонении от положения равновесия происходит переход кинетической энергии в потенциальную. Согласно закону сохранения энергии $\frac{mv^2}{2} = mgh$ (здесь $h = l(1 - \cos\alpha)$), где l — длина нити, см. рис. а). Скорость v можно определить из второго закона Ньютона (см. задачу 8.2):

$$v^2 = l\left(\frac{T_1}{m} - g\right) = lg.$$

Таким образом, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; $\alpha = 60^\circ$.

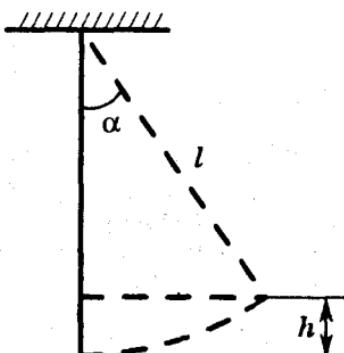


Рис. а

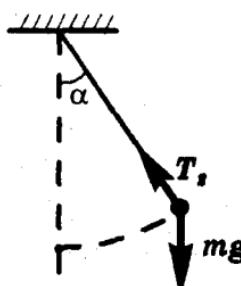


Рис. б

Силу T_2 также можно найти из второго закона Ньютона. Для этого не требуется даже знать величину полного ускорения шарика. Достаточно учесть, что в крайней точке отсутствует центростремительное ускорение, поскольку в этой точке скорость шарика обращается в нуль. Следовательно, сумма проекций всех сил на радиус окружности должна равняться нулю. Отсюда (см. рис. б)

$$T_2 = mg \cos \alpha = \frac{mg}{2}.$$

8.4. Ответ: $\alpha = \arccos \frac{1}{3} = 71^\circ$; $T_{\max} = 3mg$.

Указание. См. задачу 8.3. В произвольный момент времени $\frac{mv^2}{R} = T - mg \cos \alpha$, $\frac{mv^2}{2} = mg R \cos \alpha$. Отсюда $T = 3mg \cos \alpha$.

8.5. Ответ: минимальная прочность нити $6mg$, а стержня $5mg$.

Решение. Очевидно, наибольшая сила натяжения достигается в нижней точке: здесь, во-первых, центростремительное ускорение шарика направлено вертикально вверх, а во-вторых, скорость, а с ней и центростремительное ускорение, максимальны по величине. Из второго закона Ньютона следует, что $T = m\left(g + \frac{v_n^2}{l}\right)$, где v_n — скорость шарика в нижней точке, l — длина нити. Согласно закону сохранения энергии $\frac{mv_n^2}{2} = mv_b^2 + 2mgl$, где v_b — скорость шарика в верхней точке. Поскольку нас интересует минимальная возможная прочность нити, возникает вопрос: при каком минимальном значении v_b возможно движение шарика по окружности? Это такое значение v_b , при котором шарик «еще» движется по окружности, но в верхней точке «уже» не растягивает нить. Если в верхней точке сила натяжения нити равна нулю, то центростремительное ускорение $\frac{v_n^2}{l}$ шарику сообщает только сила тяжести: $mg = m\frac{v_n^2}{l}$, откуда $v_n^2 = gl$. Тогда $v_n^2 = 5gl$ и $T = 6mg$. При $v_n < \sqrt{5gl}$ в какой-то точке траектории нить свободно провиснет и шарик начнет двигаться по параболе. Итак, минимальная прочность нити должна в шесть раз превышать силу тяжести, действующую на шарик. Если нить заменить на невесомый стержень, то шарик не сможет «сойти» с окружности и изменить траекторию. Поэтому минимально возможное значение v_b практически равно нулю. Тогда $v_n^2 = 4gl$ и $T = 5mg$. Требования к прочности нити оказываются более высокими, чем к прочности стержня!

8.6. Ответ: $\alpha = \arctg \sqrt{2} = 55^\circ$; $v^2 = 2gl \cos \alpha = \frac{2gl}{\sqrt{3}}$; $T = \sqrt{3} mg$.

Указание. Из рисунков *a*, *б* видно, что нормальная составляющая ускорения $a_n = a \sin \alpha = g \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$. Используйте также соотношение $a_n = \frac{v^2}{l}$ и закон сохранения энергии (см. задачу 8.3).

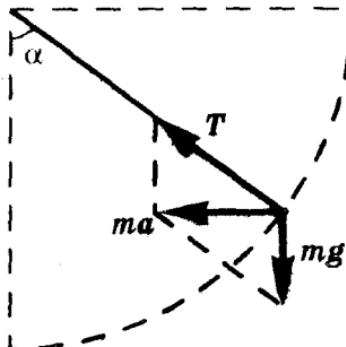


Рис. а

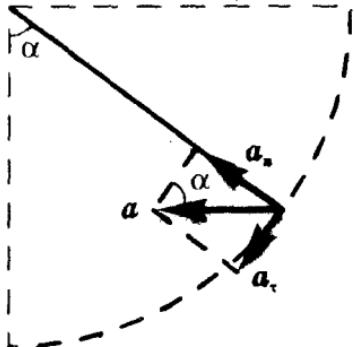


Рис. б

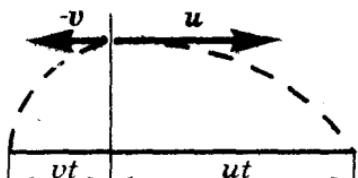
8.7. Ответ: $v_0 = \sqrt{g(2H + \frac{s^2}{32H})} = 220$ м/с.

Решение. Пусть масса снаряда m , скорость его в верхней точке v . После разрыва один из осколков получает скорость $-v$. Скорость u другого осколка определяется из закона сохранения импульса:

$$mv = -\frac{m}{2}v + \frac{m}{2}u.$$

Отсюда $u = 3v$. Начальные скорости обоих осколков направлены горизонтально (см. рисунок), поэтому время t их полета одинаково и равно $\sqrt{\frac{2H}{g}}$; следовательно, $s = (v + u)t = 4vt$. Отсюда

скорость снаряда в верхней точке $v = \frac{s}{4} \sqrt{\frac{g}{2H}}$. Согласно закону сохранения энергии $\frac{mv_0^2}{2} = mgH + \frac{mv^2}{2}$, откуда $v_0 = \sqrt{2gH + \frac{gs^2}{32H}} = 220$ м/с.



8.8. Ответ: уменьшить на $\frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2}$.

Указание. См. задачу 2.5.

8.9. Ответ:

$$a_1 = \frac{4m_1m_3 + m_1m_2 - 3m_2m_3}{4m_1m_3 + m_2(m_1 + m_3)}g; \quad a_2 = \frac{m_2(m_1 + m_3) - 4m_1m_3}{4m_1m_3 + m_2(m_1 + m_3)}g;$$

$$a_3 = \frac{4m_1m_3 + m_2m_3 - 3m_1m_2}{4m_1m_3 + m_2(m_1 + m_3)}g.$$

Решение. Сделанные в условии оговорки позволяют считать силу T натяжения нити постоянной по всей ее длине. Поэтому уравнения движения грузов имеют вид

$$m_1g - T = m_1a_1, \quad (1)$$

$$m_2g - 2T = m_2a_2, \quad (2)$$

$$m_3g - T = m_3a_3. \quad (3)$$

Здесь a_1, a_2, a_3 — проекции векторов ускорений грузов на ось, направленную вертикально вниз. Из нерастяжимости нити следует, что сумма длин всех четырех вертикальных отрезков нити остается при движении неизменной. Значит, в любой момент времени t сумма $\frac{a_1t^2}{2} + 2\frac{a_2t^2}{2} + \frac{a_3t^2}{2} = 0$, откуда $a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$.

Подставив в это уравнение выражения для a_1, a_2, a_3 , полученные из уравнений (1) — (3), находим:

$$T = \frac{4m_1m_2m_3g}{4m_1m_3 + m_2(m_1 + m_3)}. \quad (4)$$

Подставив выражение (4) в уравнения (1) — (3), получим выражения для ускорений грузов, приведенные в ответе.

8.10. Ответ: ускорение стержня $a_1 = g \sin^2 \alpha$; клина $a_2 = g \sin \alpha \cos \alpha$.

Решение. На рис. а, б указаны силы, действующие на стержень и клин. Спроектируем уравнения второго закона Ньютона на оси координат (силы, действующие на стержень, удобно проецировать на вертикальную ось; силы, действующие на клин, — на горизонтальную). При этом учтем, что согласно третьему закону Ньютона $N_1 = N_3 = N$. Получаем

$$ma_1 = mg - N \cos \alpha; \quad (1)$$

$$ma_2 = N \sin \alpha. \quad (2)$$

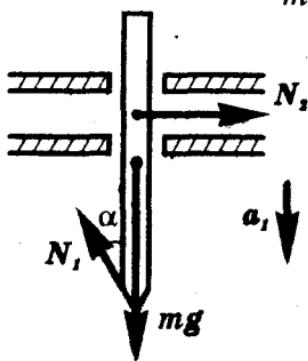


Рис. а

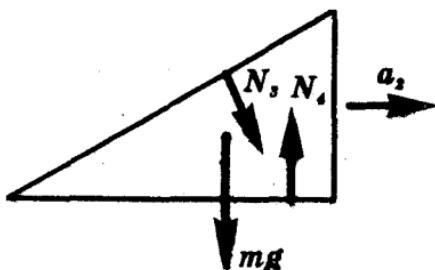


Рис. б

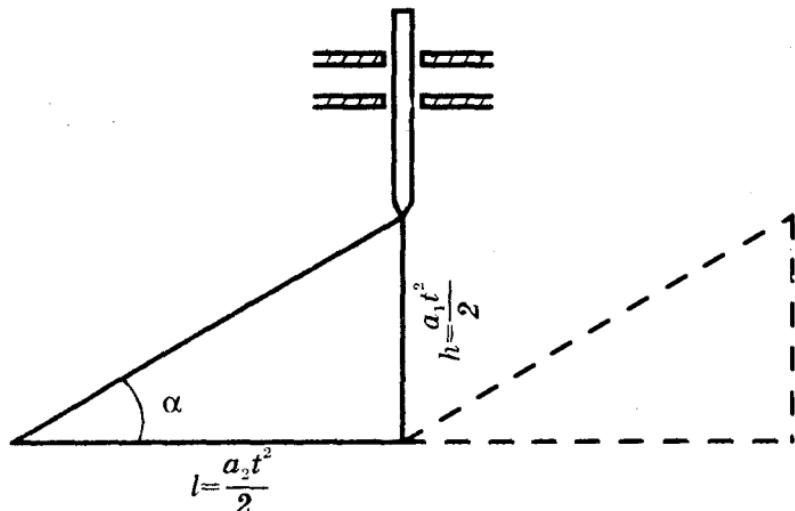


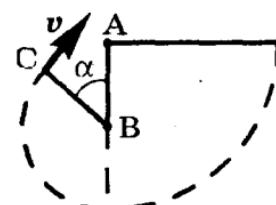
Рис. 6

Чтобы при движении не нарушался контакт между стержнем и клином, должно выполняться условие кинематической связи (см. рис. 6, на котором штриховой линией показано конечное положение клина): $h = lt \operatorname{tg} \alpha$ или $\frac{a_1 t^2}{2} = \frac{a_2 t^2}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$, где t — продолжительность опускания стержня. Итак, $a_1 = a_2 \operatorname{tg} \alpha$. Тогда, выражая через a_2 силу N и подставляя это значение в уравнение (1), получаем $ta_2 \operatorname{tg} \alpha = mg - ta_2 \operatorname{ctg} \alpha$. Используя соотношение $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$, приходим к ответу: $a_2 = g \sin \alpha \cos \alpha$, а значит, $a_1 = g \sin^2 \alpha$.

8.11. Ответ: на $\frac{l}{3}$ выше гвоздя; на $\frac{23}{54}l$ выше гвоздя.

Решение. Шарик будет двигаться по окружности до тех пор, пока натяжение нити не обратится в нуль. После этого момента шарик будет двигаться уже только под действием силы тяжести, то есть по параболе (как тело, брошенное под углом к горизонту). Найдем сначала, в какой точке исчезнет натяжение нити. Пусть при этом нить образует угол α с вертикалью (см. рисунок), а скорость шарика равна v . Мы можем воспользоваться законом сохранения энергии (за нулевой уровень принятая высота точки B):

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mgl \cos \alpha}{2} = \frac{mgl}{2}. \quad (1)$$



Второе уравнение, связывающее v и a , является следствием второго закона Ньютона (в проекции на направление нити):

$$g \cos \alpha = \frac{v^2}{0,5l}. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получаем $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, $v^2 = \frac{1}{3}gl$. Следовательно, точка C находится выше точки B на величину $\frac{l}{2} \cos \alpha = \frac{l}{3}$. При дальнейшем движении по параболе шарик поднимется еще на высоту $h = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3} \left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{5}{54}l$.

Значит, верхняя точка траектории находится выше точки B на величину $H = \frac{l}{3} + h = \frac{23}{54}l$.

8.12. Ответ: $N = mg(3 \cos \alpha - 2)$.

Указание. Закон сохранения энергии позволяет определить скорость v тела: $\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha)$, где R — радиус шара. Проецируя уравнение второго закона Ньютона на радиус шара, получаем (ср. с задачей 8.4) $\frac{mv^2}{R} = mg \cos \alpha - N$.

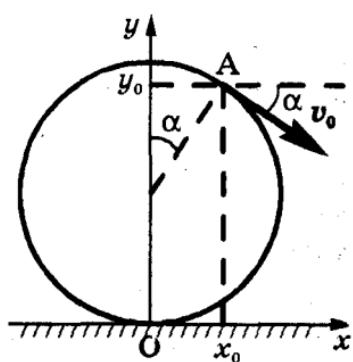
8.13. Ответ: $H = \frac{5}{3}R$.

Решение. Согласно полученному в задаче 8.12 результату, сила давления тела на шар по мере соскальзывания убывает и обращается в нуль при $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Именно в этот момент тело отделяется от шара и далее движется только под действием силы тяжести. В момент отрыва от поверхности шара тело находится на высоте $H = R(1 + \cos \alpha) = \frac{5}{3}R$.

8.14. Ответ: $\frac{5R(4\sqrt{2} + \sqrt{5})}{27} = 1,46R$.

Решение. Выберем систему координат, как показано на рисунке. Согласно результату, полученному при решении задачи 8.13, координаты точки A отрыва тела от шара:

$$x_0 = R \sin \alpha = \frac{R \sqrt{5}}{3}, \quad y_0 = \frac{5}{3}R.$$



Скорость v_0 тела в точке A определим из закона сохранения энергии: $\frac{mv_0^2}{2} = mgR(1 - \cos\alpha)$, откуда $v_0 = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$. После прохождения точки A тело движется по параболе под действием силы тяжести. Его координаты изменяются по закону

$$x = x_0 + v_{0x}t = \frac{R\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2gR}{3}}t;$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = \frac{5}{3}R - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10gR}{3}}t - \frac{gt^2}{2}$$

(мы учли, что $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ и $v_{0y} = -v_0 \sin\alpha$). Приравнивая y нулю, находим время t полета тела:

$t = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{R}{3g}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ и координату x точки падения тела:

$$x = \frac{5R(4\sqrt{2} + \sqrt{5})}{27} = 1,46R.$$

8.15. Ответ: $H = 2,5 R$.

Указание. В верхней точке «мертвой петли» центростремительное ускорение тела, равное $\frac{v^2}{R}$, не меньше, чем ускорение свободного падения.

8.16. Ответ: $v = \sqrt{gh}$.

Решение. Воспользуемся законом сохранения энергии. Учтем при этом, что кинетическая энергия скользящегося без проскальзывания обруча равна mv^2 (см. задачу 4.51). Следовательно, $mv^2 = mgh$, откуда $v = \sqrt{gh}$. Тело, скользящее без трения с той же наклонной плоскости, приобретает скорость в $\sqrt{2}$ раз большую. Может возникнуть вопрос: какая сила «притормаживает» катящийся обруч? Оказывается, та же самая сила, которая не дает обручу проскальзывать, — сила трения покоя. Благодаря действию этой силы уменьшается кинетическая энергия поступательного движения и на столько же возрастает кинетическая энергия вращения обруча вокруг своего центра.

8.17. Ответ: $g' = \frac{g}{2} = 4,9 \text{ м/с}^2$.

Решение. Прежде всего необходимо найти правильное значение ускорения a обруча. Воспользуемся известными нам значениями начальной ($v_0 = 0$) и конечной ($v = \sqrt{gh}$, см. задачу 8.16) скорости, а также известным соотношением для равноускоренного движения $2al = v^2 - v_0^2$. Здесь l — длина наклонной плоскости. Подставляя в это соотношение значение v и учитывая, что $h = lsina$,

получаем $a = \frac{g \sin \alpha}{2}$. Скатывается обруч вдвое медленнее, чем он соскальзывал бы без трения! Использованная Галилеем ошибочная формула $a = g' \sin \alpha$ приводит тогда к результату $g' = \frac{g}{2} = 4,9 \text{ м/с}^2$.

8.18. Ответ: $F = 5mg; F = 2mg$.

Указание. См. задачи 8.15 и 8.16.

8.19. Ответ: $F = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}; F = \frac{3(m_1^2 + m_2^2) - 2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$.

Решение. Как ни странно, ответить на второй вопрос легче, поэтому с него и начнем. Сила давления на ось зависит от скорости v движения шариков в момент прохождения положения равновесия. Эту скорость найдем из закона сохранения энергии (за нулевой уровень принимаем уровень точки O):

$$-m_1 g \frac{l}{2} + m_2 g \frac{l}{2} + \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} = 0,$$

откуда $v^2 = gl \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$. Найдем центростремительное ускорение каждого из грузов: $a = \frac{v^2}{l/2} = 2g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$. Величина $m_1 a_1 + m_2 a_2$ равна

равнодействующей всех *внешних* сил. Таких сил здесь три: силы тяжести $m_1 g$, $m_2 g$ и сила реакции оси N . Итак, $m_1 a_1 + m_2 a_2 = m_1 g + m_2 g + N$. Проецируя это уравнение на вертикальную ось (см.



Рис. а

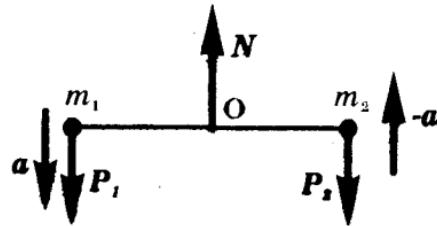


Рис. б

рис. а), получаем: $m_1 a - m_2 a = -m_1 g - m_2 g + N$, откуда

$$N = m_1(g + a) + m_2(g - a) = \frac{(m_1 + m_2)^2 + 2(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} g = \\ = g \frac{3(m_1^2 + m_2^2) - 2m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Согласно третьему закону Ньютона $F = N$.

Для ответа на второй вопрос учтем следующее:

— ускорения шариков равны по величине; они направлены вертикально (противоположно друг другу, см. рис. б), так как скорости шариков равны нулю и центростремительное ускорение отсутствует;

— равнодействующая R всех приложенных к стержню сил и сумма M моментов этих сил равны нулю: ведь масса стержня пренебрежимо мала. При $R \neq 0$ стержень приобрел бы бесконечно большое ускорение, а при $M \neq 0$ — бесконечно большое угловое ускорение. Из условия $M = 0$ следует, что $P_1 = P_2$; из условия $R = 0$ следует $N = P_1 + P_2$ (здесь $P_{1,2}$ — вес соответствующего груза). Равенство $P_1 = P_2$ выполняется независимо от масс m_1 и m_2 и обусловлено изменением веса при ускоренном движении (см. задачу 2.5):

$$m_1(g-a) = m_2(g+a).$$

Отсюда $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$; следовательно,

$$P_1 = P_2 = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2} \text{ и } F = N = \frac{4m_1m_2g}{m_1 + m_2}.$$

На второй вопрос задачи можно получить ответ и иначе. Достаточно заметить, что неподвижный блок, рассмотренный в задаче 2.5, и стержень, рассматриваемый в данной задаче, представляют собой *одинаковые* равноплечие рычаги. Благодаря этому можно просто воспользоваться результатом, полученным в задаче 2.5.

8.20. Ответ: $v = \sqrt{\frac{2g}{L}} \left(x - \frac{L}{2} \right)$, $F = 4mg \frac{x(L-x)}{L^2}$.

Решение. Для нахождения v используем закон сохранения энергии. Масса более длинной части веревки $m \frac{x}{L}$, ее центр тяжести находится на $\frac{x}{2}$ ниже блока и потенциальная энергия равна $-\frac{mgx^2}{2L}$ (нулевой уровень выбран на высоте блока). Потенциальная энергия всей веревки

$$W_p = -\frac{mgx^2}{2L} - \frac{mg(L-x)^2}{2L}.$$

В начальный момент (при $x = \frac{L}{2}$) потенциальная энергия $W_{0p} =$

$= -\frac{mgL}{4}$, а кинетическая энергия у веревки отсутствует. Согласно закону сохранения энергии в любой момент выполняется соотношение

$$-\frac{mgL}{4} = -\frac{mgx^2}{2L} - \frac{mg(L-x)^2}{2L} + \frac{mv^2}{2}.$$

$$\text{Отсюда } v = \sqrt{\frac{g}{2L}(L^2 + 4x^2 - 4Lx)} = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(x - \frac{L}{2}\right)}.$$

Чтобы определить силу, действующую на блок, необходимо найти ускорение веревки. Сила F равна удвоенной силе T натяжения веревки у блока. Обратите внимание, что вес частей веревки одинаков и равен $T = m\frac{x}{L}(g - a)$ (ср. с задачей 2.5) независимо от соотношения длин обеих частей. Это связано с изменением веса при ускоренном движении.

Итак, $F = 2T = 2m\frac{x}{L}(g - a)$. Ускорение a веревки можно найти,

например, так же, как в решении задачи 2.5, считая $m_1 = m\frac{x}{L}$,

$m_2 = m\frac{L-x}{L}$. В данном случае можно поступить и иначе — воспользоваться полученной формулой скорости. Из нее следует, что

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \sqrt{\frac{2g}{L}} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{\frac{2g}{L}} v = \frac{2g}{L} \left(x - \frac{L}{2}\right) = g\left(\frac{2x}{L} - 1\right).$$

Следовательно, $F = 4mg\frac{x(L-x)}{L^2}$. При $x = L$ получим $F = 0$ (в

этот момент веревка уже свободно падает и потому находится в состоянии невесомости).

8.21. Ответ: $v = \frac{1}{2}\sqrt{gL}$; $a = \frac{g}{2}$; $T = \frac{mg}{4}$.

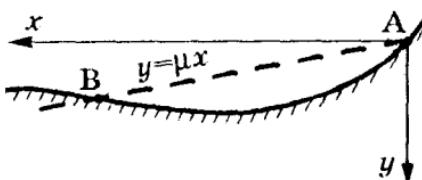
Указание. См. задачу 8.20. Если длина скользнувшей со стола части шнура равна x , то

$$v = x\sqrt{\frac{g}{L}}; a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v\sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{gx}{L}; T = m\frac{x}{L}(g - a) = mg\frac{x(L-x)}{L^2}.$$

Эти выражения справедливы при условии $x < \frac{L}{2}$. Случай $x > \frac{L}{2}$ рассмотрен в статье И.Гельфгата («Квант», 1993, №1/2, с. 55).

8.22. Решение. На санки действуют сила тяжести и сила трения скольжения. Пусть к моменту остановки в точке B координаты санок равны x и y (см. рисунок). Тогда сила тяжести совершила

над санками работу $A_1 = mgy$, а сила трения — работу $A_2 = -\mu mgx$ (см. задачу 4.27). Поскольку кинетическая энергия санок отсутствует и в точке A, и в точке B, полная работа внешних сил равна нулю: $A = A_1 + A_2 = 0$. Отсюда $y = \mu x$. Последний этап решения должен быть графическим: точка B определяется как первая (не считая точки A) точка пересечения профиля склона с прямой $y = \mu x$. Разумеется, если крутизна склона в точке A меньше, чем у прямой $y = \mu x$, санки вообще не сдвинутся с места.



К задаче 8.22



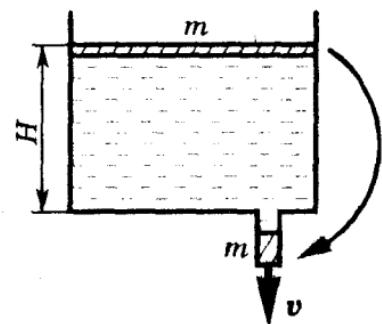
К задаче 8.23

8.23. Ответ: $\mu < 0,1$.

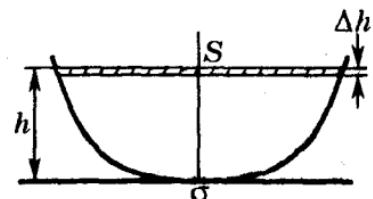
Указание. См. рисунок. Максимальное из возможных значений μ определяется как угловой коэффициент проведенной к траектории движения касательной (см. задачу 8.22).

8.24. Ответ: $v = \sqrt{2gH}$.

Указание. При вытекании жидкости происходит превращение потенциальной энергии только в кинетическую, поскольку из-за отсутствия трения механическая энергия не превращается во внутреннюю. Таким образом, можно считать, что верхний слой жидкости массой m (см. рисунок) как бы «проваливается» сквозь весь сосуд и падает из отверстия внизу. Естественно, падая с высоты H , «порция» жидкости приобретает скорость $v = \sqrt{2gH}$.



8.25. Решение. Согласно формуле $v = \sqrt{2gh}$ (см. задачу 8.24) по мере понижения уровня жидкости скорость вытекания уменьшается. Очевидно, для поддержания постоянной скорости понижения уровня сечение сосуда должно уменьшаться книзу (см. рисунок). Понижение уровня Δh за время Δt определим из условия $S\Delta h = \sigma \cdot v\Delta t$, где S — площадь



сечения сосуда на уровне поверхности жидкости; σ — площадь отверстия. Отсюда $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{v}{S}\sigma$. Поскольку $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ не должно зависеть от h , получаем $S \sim v \sim \sqrt{h}$. Если горизонтальное сечение сосуда имеет форму круга радиуса r , то $S \sim r^2$ и, следовательно, $r^2 \sim \sqrt{h}$, т. е. $r \sim \sqrt[4]{h}$.

8.26. Решение. Часто, не задумываясь, отвечают: «Рекорд увеличивается в шесть раз». Давайте разберемся, правилен ли такой ответ. Если отталкивание от пола на Земле и на Луне происходит одинаково, то тело спортсмена в обоих случаях приобретает одинаковую кинетическую энергию. При подъеме эта энергия переходит в потенциальную: $\Delta W_p = mg\Delta h$. Значит, $\Delta h_L = 6\Delta h_0$. Очень важно, однако, учесть, что здесь Δh — изменение высоты центра тяжести тела. А ведь тело спортсмена в прыжке движется не поступательно! Будем для простоты считать, что в момент толчка тело спортсмена занимает вертикальное положение, а в момент прохождения над планкой — горизонтальное. Оценим также (весома грубо) начальную высоту центра тяжести как $h_0 = 1$ м. Поскольку земной рекорд по прыжкам в высоту — около 2 м 40 см, находим $\Delta h_0 = 1,4$ м и $\Delta h_L = 6\Delta h_0 = 8,4$ м. Тогда полная высота рекордного прыжка на Луне составит $h_0 + \Delta h_L = 9,4$ м, что всего в четыре раза превышает земной рекорд. Правда, это тоже неплохо: можно прыгнуть на балкон четвертого этажа!

8.27. Ответ: $R \leq 3$ км.

Решение. Оценим сначала скорость v движения после отталкивания — она одинакова и на Земле и на малой планете. При прыжке на Земле увеличение Δh высоты центра тяжести составляет около 1 м (см. задачу 8.26). Таким образом, $\frac{mv^2}{2} = mg\Delta h$, откуда $v = \sqrt{2g\Delta h} \approx 4,5$ м/с. Чтобы человек мог улететь с малой планеты, вторая космическая скорость для этой планеты не должна превышать v , т. е. (см. задачу 4.50) $\sqrt{\frac{2GM}{R}} \leq v$, где M и R — масса и радиус планеты. Согласно условию, плотность малой планеты и Земли одинакова, поэтому $\frac{M}{R^3} = \frac{M_0}{R_0^3}$, где M_0 и R_0 — масса и радиус Земли. Таким образом, $M = M_0 \frac{R^3}{R_0^3}$ и $v \geq \frac{R}{R_0} \sqrt{\frac{2GM_0}{R_0}} = v_{II} \frac{R}{R_0}$, где

$v_{II} \approx 11$ км/с — вторая космическая скорость для Земли. Следовательно, $R < R_0 \frac{v}{v_{II}} \approx 3$ км.

Не такая уж маленькая эта планета: ее площадь может оказаться больше 100 км^2 , т. е. на ней мог бы разместиться целый город!

$$8.28. \text{ Ответ: } v_0 = \sqrt{\frac{gL}{(1 + m/M)\sin 2\alpha}}.$$

Решение. Если бы доска лежала на земле, то величину v_0 можно было бы найти из условия $L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. В данном же случае следует учесть «отдачу». Доска приобретает скорость «отдачи» величиной u , которую можно определить из закона сохранения импульса (в проекции на горизонтальное направление): $Mu = m v_0 \cos \alpha$.

Лягушка попадает на другой конец доски; следовательно,

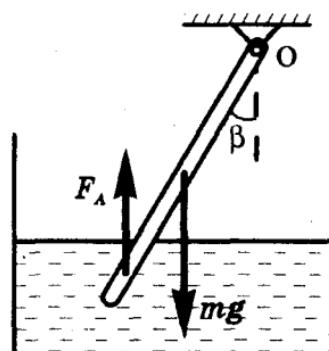
$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} + ut,$$

где $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ — продолжительность прыжка. Отсюда

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL}{(1 + m/M)\sin 2\alpha}}.$$

8.29. Ответ: $\rho = 440 \text{ кг/м}^3$.

Решение. Пусть палочка отклонилась от вертикали на небольшой угол β (см. рисунок), причем под водой находится ее часть длины h , а полная длина палочки l . Тогда дальнейшее движение палочки зависит от соотношения вращающих моментов двух сил (относительно точки O): момента M_1 силы тяжести mg и момента M_2 силы Архимеда F_A . Сила mg , приложенная в середине палочки, имеет плечо



$\frac{l}{2}\sin\beta$. Сила F_A , приложенная в середине погруженной части палочки, — плечо $(l - \frac{h}{2})\sin\beta$.

Разумеется, $M_1 = M_2 = 0$ при $\beta = 0$, т. е. вертикальное положение стержня соответствует равновесию (правда, пока неяс-

но — устойчивому или неустойчивому). А при $\beta \neq 0$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\rho g \frac{l}{2}}{F_A \left(l - \frac{h}{2}\right)} = \frac{\rho S l g \frac{l}{2}}{\rho_b S h g \left(l - \frac{h}{2}\right)} = \frac{\rho l^2}{\rho_b h (2l - h)}. \quad (1)$$

Здесь ρ_b — плотность воды, S — площадь сечения палочки. Очевидно, при достаточно малых h из формулы (1) следует $M_1 > M_2$, т. е. палочка после малого отклонения будет возвращаться к вертикальному положению — равновесие устойчиво. Однако при

$h \approx l$ (палочка почти полностью погружена в воду) $\frac{M_1}{M_2} \approx \frac{\rho}{\rho_b}$. Поскольку $\rho < \rho_b$, то $M_2 > M_1$ и малое отклонение от вертикали будет

нарастать. Устойчивое равновесие теперь, очевидно, достигается при некотором наклонном положении палочки. Это и требовалось доказать. Мы можем найти и то значение h_0 глубины погружения, при котором происходит потеря устойчивости вертикального равновесия. Устойчивость теряется при $M_1 = M_2$, поэтому из уравнения (1) следует

$$\rho l^2 = \rho_b h_0 (2l - h_0). \quad (2)$$

Отсюда $h_0 = l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_b}}\right)$ (второй корень квадратного уравнения превышает l и должен быть отброшен).

Условие равновесия палочки в наклонном положении (при $\beta \neq 0$) также имеет вид $M_1 = M_2$. Отсюда снова следует уравнение (2). Значит, после отклонения палочки от вертикали при дальнейшем подъеме сосуда величина h остается неизменной (равной h_0).

При этом отношение $\alpha = \frac{h_0}{l}$ определяется формулой $\alpha = 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_b}}$, откуда $\rho = \alpha \rho_b (2 - \alpha)$. При $\alpha = \frac{1}{4}$ получаем $\rho = 440 \text{ кг/м}^3$.

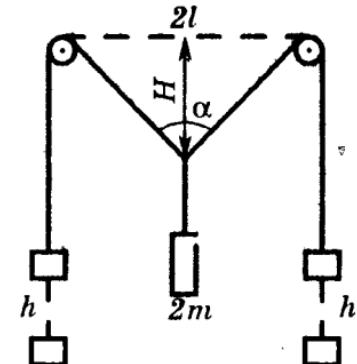
8.30. Ответ: скорости всех трех грузов равны \sqrt{gl} .

Решение. Сама постановка вопроса подсказывает, что по истечении достаточно большого промежутка времени скорость среднего груза перестанет расти, т. е. он будет двигаться без ускорения. В самом деле, в начальный момент этот груз опускается с ускорением g , но затем его ускорение уменьшается по мере уменьшения угла α (см. рисунок). Когда угол α станет очень малым, ускорение практически станет равным нулю, а силы натяжения обеих частей нити — равными mg . Скорости всех трех грузов при этом будут почти одинаковыми. Обозначим величину скорости

грузов через v , изменение высоты среднего и боковых грузов — соответственно через H и h . Согласно закону сохранения энергии

$$2mgH = 2mgh + 2 \frac{mv^2}{2} + \frac{(2m)v^2}{2}$$

(средний груз, опускаясь, теряет энергию $2mgH$; за счет этой энергии растет потенциальная энергия крайних грузов и кинетическая энергия всех трех грузов).



Из нерастяжимости нити (что, безусловно, подразумевается в условии задачи) следует, что по истечении достаточно большого промежутка времени $h + l = H$. Отсюда $v = \sqrt{gl}$.

8.31. Ответ: $\alpha_{\max} = \arccos \frac{2}{3} = 48^\circ$; $\mu \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$; на расстоянии $1,12l$.

Решение. Ответ на первый вопрос фактически уже получен ранее (см. решение задачи 8.13): $\cos \alpha_{\max} = \frac{2}{3}$, т. е. $\alpha_{\max} = \arccos \frac{2}{3} = 48^\circ$.

Необходимое значение μ можно определить из условия равенства нулю в любой момент равнодействующей \mathbf{R} всех приложенных к стержню сил (ведь масса m стержня пренебрежимо мала, а $\mathbf{R} = ma$): $N + F_{\text{тр}} + F_{\text{упр}} = 0$, где N — сила нормальной реакции со стороны пола, $F_{\text{тр}}$ — сила трения, $F_{\text{упр}}$ — сила упругости, действующая со стороны шара на стержень. Отсюда (см. рис. а) $N = F_{\text{упр}} \cos \alpha$,

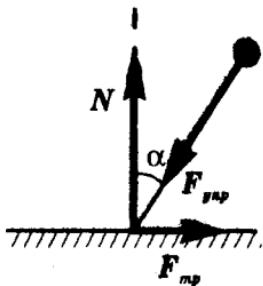


Рис. а

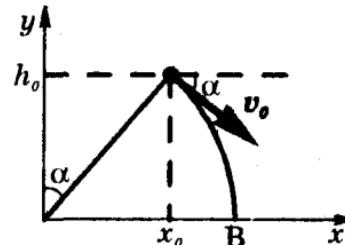


Рис. б

$F_{\text{тр}} = F_{\text{упр}} \sin \alpha$. Тогда $\mu > \frac{F_{\text{упр}}}{N} = \operatorname{tg} \alpha$. Стержень не проскальзывает,

если $\mu > \operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_{\max}}}{\cos \alpha_{\max}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

С того момента, когда N обращается в нуль (при $\cos \alpha_{\max} = \frac{2}{3}$), шар начинает двигаться как тело, брошенное под углом α_{\max} к горизонту.

зонту, то есть с ускорением g . В этот момент координаты шара (см. рис. б) таковы:

$$x_0 = l \sin \alpha_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{3}l, \quad h_0 = l \cos \alpha_{\max} = \frac{2}{3}l.$$

Скорость шара в этот момент составляет $v_0 = \sqrt{2g(l - h_0)} = \sqrt{\frac{2gl}{3}}$ и образует с горизонтом угол α_{\max} .

Время t свободного падения определяется из условия $h_0 = v_0 \sin \alpha_{\max} t + \frac{gt^2}{2}$. Отсюда $t = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2l}{3g}} (\sqrt{23} - \sqrt{5})$.

Горизонтальное перемещение шара при свободном падении $s_x = v_0 \cos \alpha_{\max} t$; следовательно, расстояние от точки опоры до точки падения

$$AB = x_0 + s_x = \frac{l}{27} (5\sqrt{5} + 4\sqrt{23}) \approx 1,12 l.$$

8.32. Ответ: см. рис. б.

Решение. В положении равновесия вращающий момент (относительно оси O) действующей на брускок силы Архимеда должен равняться нулю. Значит, центр тяжести вытесненной воды (т. е. точка приложения силы Архимеда, см. задачу 8.29) находится в одной вертикальной плоскости с осью O . Это условие выполняется при двух положениях бруска (см. рис. а, б). В случае а центр

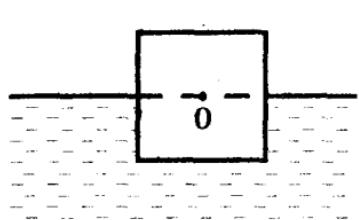


Рис. а

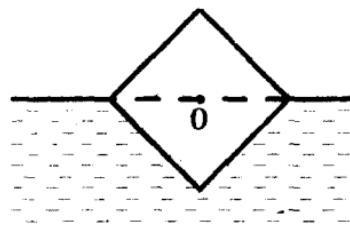


Рис. б

тяжести вытесненной воды находится на глубине $\frac{a}{4}$, где a — сторона квадрата, в случае б — на глубине $\frac{a\sqrt{2}}{6} < \frac{a}{4}$ (см. задачу 5.48). Объем вытесненной воды в обоих случаях одинаков — он равен половине объема бруска. Устойчивому равновесию соответствует минимальная потенциальная энергия системы брускок-вода. Поскольку потенциальная энергия бруска при повороте не изменяется (его центр тяжести остается на уровне воды), устойчивому равновесию соответствует минимальная глубина центра тяжести

вытесненной воды. Итак, положение устойчивого равновесия бруска показано на рис. б. Отметим, что именно в таком положении и будет плавать брускок, если его плотность равна половине плотности воды.

8.33. Ответ: $a = \frac{F}{m}$.

Решение. Движение диска не является поступательным. Однако для определения ускорения центра диска нет необходимости в анализе этого движения. Заметим, что действие силы F можно заменить действием четырех сил (см. рис. а), причем $F_1 = F_2 = F_3 = \frac{F}{2}$; $F_4 = -\frac{F}{2}$. Нетрудно видеть, что пара сил F_1 и F_4 не придает центру диска ускорения (эта пара сил вызывает только

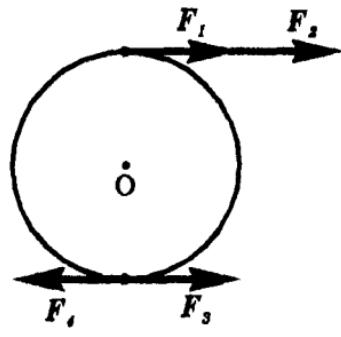


Рис. а

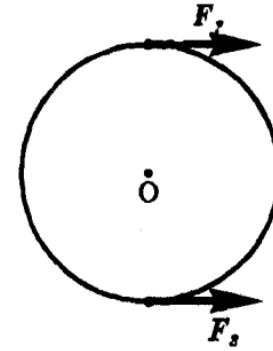


Рис. б

ускоренное вращение диска относительно точки O). Силы же F_2 и F_3 (см. рис. б) придают диску поступательное ускоренное движение. Их равнодействующая, равная F , приложена в точке O . Следовательно, ускорение центра диска $a = \frac{F}{m}$.

Можно доказать, что справедлив и более общий результат: центр масс любой системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

8.34. Ответ: против часовой стрелки; $\mu = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha$; $\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \right)$.

Решение. Прежде всего нужно понять: почему цилиндр не «отражается» под углом α . Очевидно, все дело в том, что он вращается. Из-за проскальзывания при соприкосновении цилиндра с поверхностью возникает сила трения скольжения F_{tr} , действующая на цилиндр горизонтально в сторону, противоположную вращению

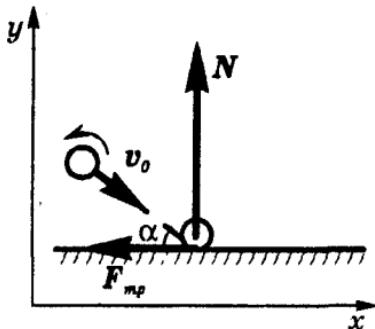


Рис. а

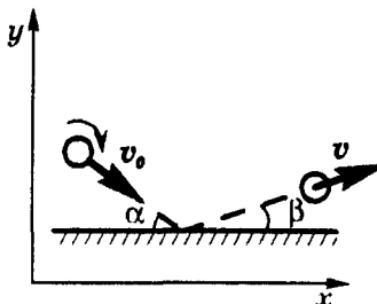


Рис. б

его нижней точки (см. рис. а). Эта сила вызывает изменение горизонтальной составляющей импульса цилиндра, а сила реакции поверхности N — изменение вертикальной составляющей импульса. Направление силы F_{tp} показано на рис. а, что позволяет определить и направление вращения. Второй закон Ньютона можно записать в виде

$$\Delta(mv_x) = -F_{tp}\Delta t, \Delta(mv_y) = N\Delta t,$$

где Δt — любой малый промежуток времени при соударении, в течение которого F_{tp} и N можно считать постоянными. Поскольку сила трения скольжения равна μN (согласно условию цилиндр вращается быстро, поэтому можно считать, что проскальзывание не прекратится), получаем $\Delta(mv_x) = -\mu\Delta(mv_y)$. Поскольку это соотношение выполняется для любого малого Δt , оно выполняется и для столкновения в целом.

Пусть v_0 — скорость цилиндра до удара, v — после удара, m — масса цилиндра. Тогда $mv_0 \cos \alpha = \mu m(v_y - v_{0y})$. Поскольку деформация при столкновении является упругой, $v_y = -v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. Отсюда $\mu = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha$.

Если бы цилиндр вращался в противоположную сторону, то изменилось бы и направление F_{tp} . В результате цилиндр отлетел бы под углом β к поверхности, причем $\beta < \alpha$ (см. рис. б). Второй закон Ньютона в этом случае дает

$$mv_x - mv_{0x} = \mu(mv_y - mv_{0y}),$$

$$\text{или } m v_0 \cos \beta - m v_0 \cos \alpha = \mu(m v_0 \sin \beta + m v_0 \sin \alpha).$$

Из упругости деформации следует $v_0 \sin \alpha = v \sin \beta$. Исключая из последних двух уравнений v и v_0 , получаем

$$\sin \alpha (\cos \beta - \mu \sin \beta) = \sin \beta (\mu \sin \alpha + \cos \alpha),$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + 2\mu \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}.$$

Этот ответ можно получить и сразу, если учесть, что во втором случае горизонтальная проекция импульса возрастает на столько же, на сколько в первом случае убывает (т. е. на $m v_{0x}$).

8.35. Ответ: скорость спутника увеличивается, но это не противоречит закону сохранения энергии.

Решение. При движении по круговой орбите сила притяжения к Земле придает спутнику центростремительное ускорение, поэтому $\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}$, где m — масса спутника, v — его скорость, M — масса Земли, r — расстояние от спутника до центра Земли. Из этой формулы следует, что $v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$, т. е. с уменьшением высоты скорость спутника **увеличивается!** Неужели трение может приводить к увеличению кинетической энергии? Чтобы разобраться в этом, запишем выражение для полной механической энергии спутника, которая является суммой кинетической и потенциальной энергий (см. задачу 4.49): $W = W_k + W_p = \frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{r} = -\frac{1}{2}G \frac{mM}{r}$. Отсюда следует, что полная механическая энергия при уменьшении r **уменьшается**, чего и следовало ожидать из-за наличия трения. Тогда возникает вопрос: какая же сила разгоняет спутник, когда он переходит на более низкую орбиту? Снижаясь, спутник движется не по круговой орбите, а по спирали (как бы спускаясь по спиральной «наклонной плоскости»). А при таком движении сила тяготения образует уже не прямой, а острый угол с направлением скорости спутника; поэтому сила тяготения совершает положительную работу. Из формулы для полной механической энергии следует, что только половина «потерянной» потенциальной энергии «расходуется» на увеличение кинетической энергии — вторая же половина превращается из-за трения во внутреннюю энергию: спутник и окружающий его слой атмосферы нагреваются.

8.36. Ответ: на $5 \cdot 10^{-7}$ м/с².

Решение. Барон, как всегда, сказал правду: он обнаружил явление, обусловленное так называемой приливной силой. На невращающейся планете он, очевидно, измерял ускорение свободного падения относительно ее центра O (см. рис. а). Решая задачу 3.1, мы установили, что ускорение самой точки O при движении планеты вокруг Солнца $a_0 = 6 \cdot 10^{-3}$ м/с². На любое тело у поверхности планеты действует сила тяготения самой планеты и Солнца.

Сила притяжения планеты придает всем телам одинаковое по величине ускорение g_n , направленное к центру планеты. А вот сила притяжения Солнца сообщает телам *разные* ускорения в точках A , B и C , удаленных от него на различные расстояния: $a_A > a_0$, $a_C < a_0$. Величину a_B можно считать равной a_0 .

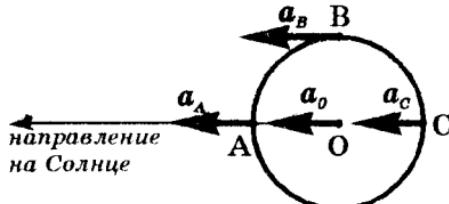


Рис. а

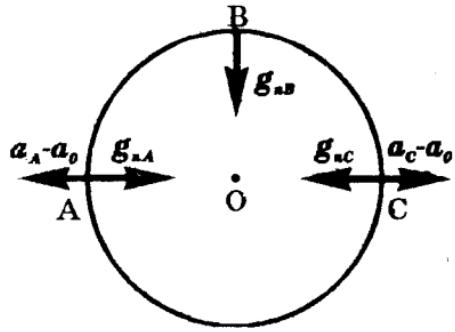


Рис. б

В системе отсчета, связанной с центром планеты, тело в точке A приобретает за счет притяжения Солнца дополнительное ускорение (см. рис. б), направленное от центра планеты и составляющее $|a_A - a_0| = a_A - a_0$; тела в точке C также приобретают ускорение $a_C - a_0$, направленное от центра планеты. А вот в точке B тела не приобретают из-за тяготения Солнца дополнительного ускорения относительно центра планеты. Таким образом, даже на шарообразной планете, не вращающейся вокруг своей оси, ускорение свободного падения оказывается не всюду одинаковым. Нетрудно видеть, что в точке B достигается максимальное значение g , а в точке A или C — минимальное. Обозначим R расстояние от точки O до центра Солнца. Тогда

$$a_A - a_0 = G \frac{M}{(R-r)^2} - G \frac{M}{R^2} = GM \frac{r(2R-r)}{R^2(R-r)^2} \approx \frac{2GMr}{R^3} = \frac{2r}{R} a_0,$$

$$|a_C - a_0| = a_0 - a_C \approx \frac{2r}{R} a_0 \quad (\text{мы учли, что } r \ll R).$$

Таким образом, ускорение свободного падения в точках A и C одинаково. Максимальное и минимальное значения g отличаются друг от друга на $\frac{2r}{R} a_0 \approx 5 \cdot 10^{-7}$ м/с². Интересно, что уменьшение ускорения свободного падения (a , значит, и измеряемой величины силы тяжести) наблюдается как на *дальней* от Солнца стороне планеты, так и на *ближней*. На Земле приливные эффекты обусловлены тяготением Солнца и Луны. Из-за вращения Земли образующиеся приливные волны обходят земной шар примерно

за сутки. Поскольку приливных «горбов» — два, приливы наблюдаются примерно через 12 часов.

8.37. Решение. Пусть жесткость проволоки k , масса груза m . Тогда висящий неподвижно груз растягивает проволоку на $x = \frac{mg}{k}$. Значит, проволока приобрела потенциальную энергию $\Delta W_1 = \frac{kx^2}{2} = \frac{(mg)^2}{2k}$, а груз потерял энергию mgx , т. е. $\Delta W_2 = -\frac{(mg)^2}{k}$. Итак, лишь половина потерянной грузом энергии перешла в потенциальную энергию растянутой проволоки. Куда же девалась вторая половина? Ответ прост: эта энергия перешла во внутреннюю. В данном случае нельзя пренебречь силами трения, как бы малы они ни были. При отпускании груза в системе возникают колебания: груз по инерции «проскаивает» положение равновесия, двигаясь вниз, затем то же происходит при движении вверх. В отсутствие трения эти колебания вообще никогда бы не прекратились! Получается, что половиной энергии $|\Delta W_2|$ система «расплачивается» за возможность перейти в состояние равновесия. Уменьшение трения не влияет на величину этой «платы», оно приводит только к более медленному затуханию колебаний при переходе к равновесию. Этот процесс становится более наглядным, если заменить проволоку пружиной или полоской резины.

9.1. Ответ: $3,9 \cdot 10^{18}$.

Решение. Прежде всего определим общее количество N молекул воды в стакане. Поскольку масса одной молекулы $m_0 = \frac{M}{N_A}$ (M — молярная масса воды, N_A — постоянная Авогадро), то $N = \frac{m}{m_0} = \frac{m}{M} N_A$. Тогда из пропорции $\frac{N_t}{N} = \frac{\tau}{t}$ следует, что за время τ испарялось количество молекул $N_t = \frac{N \cdot \tau}{t} = \frac{m N_A \tau}{M \cdot t} = 3,9 \cdot 10^{18}$.

9.2. Ответ: $1,0 \cdot 10^9$.

Решение. Общее количество ионов натрия в кристаллике соли $N_0 = N_A \frac{m}{M}$, где M — молярная масса NaCl. За длительное время ионы натрия равномерно распределяются по всему объему озера, равному hS . Значит, концентрация ионов натрия в стакане и в озере одинакова: $\frac{N}{V} = \frac{N_0}{hS}$ (N — искомое количество ионов натрия

в стакане). Отсюда $N = N_0 \frac{V}{hS} = \frac{mVN_A}{MhS} = 1,0 \cdot 10^9$.

9.3. Ответ: $\rho = \frac{m_0}{a^3}$.

Решение. Плотность кристалла $\rho = \frac{m_1}{a^3}$, где m_1 — масса, приходящаяся на одну кубическую ячейку. Для определения m_1 можно представить каждый атом как маленький шарик. Каждой из восьми «сходящихся» в центре атома кубических ячеек принадлежит $\frac{1}{8}$ этого шарика, т. е. масса $\frac{m_0}{8}$. Поскольку у кубической ячейки восемь вершин, получаем $m_1 = 8 \cdot \frac{m_0}{8} = m_0$, т. е. на каждую кубическую ячейку кристалла приходится по одному атому. Итак, $\rho = \frac{m_0}{a^3}$. Интересно, что такая простая кристаллическая решетка в природе не встречается.

9.4. Ответ: $a = 2,8 \cdot 10^{-10}$ м.

Указание. См. задачу 9.3. В случае NaCl на одну кубическую ячейку объемом a^3 приходится «пол-иона» натрия и «пол-иона» хлора, т. е. масса, равная полусумме масс ионов Na^+ и Cl^- .

9.5. Ответ: $\rho = \frac{4M}{N_A a^3}$ (N_A — постоянная Авогадро).

Указание. См. задачу 9.3. В данном случае на каждую кубическую ячейку приходится по четыре иона.

9.6. Ответ: давление увеличилось бы.

Решение. В газах среднее расстояние между молекулами превышает размеры молекул. При этом преобладает притяжение молекул (отталкивание проявляется фактически лишь при столкновениях). Как влияет взаимное притяжение молекул на величину давления? Давление газа на поверхность твердого тела обусловлено столкновениями молекул газа с этой поверхностью. Оно возрастает с увеличением средней скорости подлетающих к поверхности молекул. На подлетающую к поверхности молекулу силы притяжения со стороны других молекул газа действуют в основном «сзади», приводя к уменьшению ее скорости. Значит, исчезновение притяжения приведет к увеличению скорости молекул и, следовательно, давление на поверхность увеличится.

9.7. Ответ: давление не изменится.

Решение. Часто приходится слышать ответ: «Поскольку масса газа в сосуде после сжигания угля увеличилась, то должно воз-

расти и давление». Однако согласно уравнению молекулярно-кинетической теории $p = nkT = \frac{NkT}{V}$ (N — количество молекул газа, n — их концентрация, k — постоянная Больцмана), давление газа зависит не от массы газа, а от *количество его молекул*. Уравнение реакции горения $\text{C} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2$, т. е. одну вступившую в реакцию молекулу кислорода заменяет *одна* образовавшаяся молекула углекислого газа. Полное количество молекул газа не изменяется; следовательно, конечное давление в сосуде совпадает с начальным. (Мы учли, что объем кусочка угля пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда.)

9.8. Ответ: $\frac{2}{3}p_0$.

Решение. Уравнение реакции $2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$ показывает, что в данном случае кислород и водород прореагируют полностью, без остатка. При этом из двух молей водорода и одного моля кислорода получаются два моля водяных паров, т. е. количество молекул газа уменьшается в 1,5 раза. Значит (см. решение задачи 9.7), в сосуде установится давление $\frac{2}{3}p_0$.

9.9. Ответ: $p = 176$ кПа.

Решение. В смеси находилось $v_1 = \frac{m_1}{M_1} = 0,25$ моль водорода и $v_2 = \frac{m_2}{M_2} = 0,25$ моль кислорода. В реакцию $2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$ вступят весь водород и половина кислорода. В результате реакции образуется $v_3 = 0,25$ моль водяного пара и остается $v_4 = 0,125$ моль кислорода. Если объем баллона V , а первоначальная температура в нем T , то $p_1V = (v_1 + v_2)RT$ и $pV = (v_3 + v_4)RT$. Отсюда

$$p = p_1 \frac{v_3 + v_4}{v_1 + v_2} = 1,76 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

9.10. Ответ: средние кинетические энергии одинаковы и равны $6,2 \cdot 10^{-21}$ Дж; средняя квадратичная скорость молекул кислорода равна 480 м/с, водорода — 1900 м/с.

Указание. Воспользуйтесь соотношениями

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT = \frac{m_0 \bar{v}^2}{2} \text{ и } m_0 = \frac{M}{N_A}.$$

Из них следует, что \bar{E} вообще не зависит от характеристик самих молекул; средняя квадратичная скорость выше у более легких молекул.

9.11. Ответ: $p = 140$ МПа.

Решение. В результате исчезновения сил взаимодействия между молекулами вода превратилась бы в идеальный газ с той же плотностью $\rho = 1000$ кг/м³. Используя уравнение Менделеева-Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$ и соотношение $m = \rho V$, получаем $p = \rho \frac{RT}{M} = 1,4 \cdot 10^8$ Па = 1400 атм. Здесь $T = 300$ К, M — молярная масса воды, R — универсальная газовая постоянная. Огромная величина полученного давления показывает, сколь велики силы молекулярного «сцепления».

9.12. Решение. Сначала жидкость вытечет из трубки, после чего давление во всей трубке будет равно атмосферному. Значит, и давление в жидкости на уровне нижнего конца трубки тоже будет равно атмосферному. Следовательно, жидкость из нижнего отверстия будет вытекать под действием избыточного давления $p_1 = \rho gh_1$, где ρ — плотность жидкости. Это давление, конечно, остается неизменным, чем и объясняется постоянство скорости вытекания жидкости (по мере вытекания жидкости в сосуд через трубку будут проскачивать пузырьки наружного воздуха). Давление воздуха в сосуде над жидкостью меньше атмосферного. Поэтому, если открыть отверстие 2, через него в сосуд устремится наружный воздух. Теперь атмосферное давление установится на уровне отверстия 2, и жидкость заполнит трубку до этого же уровня. В результате вытекание жидкости из нижнего отверстия ускорится: теперь избыточное давление $p_2 = \rho gh_2 > p_1$. Открывая же малое отверстие 1, мы ничего не изменим: давление в жидкости на этом уровне при наличии трубки и так равно атмосферному. Заметим, что «сосуд Мариотта» представляет собой идеальные водяные часы.

9.13. Ответ: $p_0 = 3,7$ кПа.

Решение. Воздух в трубке испытывает изотермическое сжатие от начального объема V до объема $V - \frac{m}{\rho}$, где ρ — плотность воды. Конечное давление в трубке равно $p_a + \rho gh$. Согласно закону Бойля-Мариотта $p_0V = (p_a + \rho gh)\left(V - \frac{m}{\rho}\right)$. Отсюда $p_0 = (p_a + \rho gh)\left(1 - \frac{m}{\rho V}\right) = 3700$ Па. Как видим, $p_0 \ll p_a$. Этого и следовало ожидать, поскольку вода заняла почти весь объем трубки.

9.14. Ответ: $x = 25$ см.

Решение. Когда трубку вынимают из ртути, воздух в ней испытывает изотермическое расширение от объема $lS/2$ до объема $(l - x)S$, где S — площадь сечения трубки. Начальное давление в

трубке равно атмосферному, т. е. ρgH (ρ — плотность ртути), а конечное — меньше атмосферного на величину ρgx . Запишем для воздуха в трубке уравнение закона Бойля-Мариотта:

$$\rho gH \cdot \frac{lS}{2} = (\rho gH - \rho gx)(l - x)S.$$

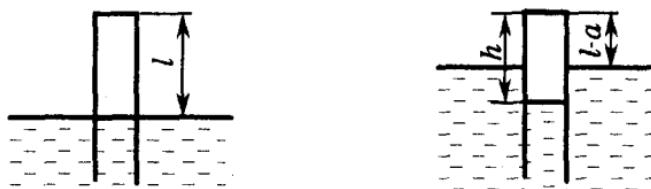
Решая квадратное уравнение $x^2 - (H + l)x + \frac{Hl}{2} = 0$, получаем

$$x = \frac{H + l}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{H^2 + l^2} = 0,25 \text{ м}$$

(второй корень уравнения не имеет смысла — он превышает l). Обратим внимание, что нам не пришлось выражать давление в паскалях, поскольку оно измерялось высотой столба той же жидкости (ртути), которая рассматривалась в задаче.

9.15. Ответ: $h = \sqrt{\frac{(H + a - l)^2}{4} + Hl} - \frac{H + a - l}{2} = 48 \text{ см.}$

Указание. Воспользуйтесь рисунком и уравнением Бойля-Мариотта (см. задачу 9.14).



9.16. Ответ: $h_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{H^2 + 4Hh_1} - H) = 23 \text{ см.}$

9.17. Ответ: $p = 560 \text{ мм рт. ст.}$, уровень ртути понизится на 10 см.

Решение. К моменту прекращения вытекания ртути давление у обоих концов сифона становится одинаковым (равным атмосферному). Пусть уровень ртути понизится на величину x . У левого конца сифона давление складывается из давления воздуха p и давления столба ртути высотой $\frac{h}{2} - x$. Если давление p измерять высотой столба ртути, получаем:

$$H = p + \frac{h}{2} - x. \quad (1)$$

Воздух в сосуде при вытекании ртути испытывает изотермическое расширение от объема $\frac{hS}{2}$ до объема $\left(\frac{h}{2} + x\right)S$, где S — площадь сечения сосуда. Этот процесс описывается уравнением закона

Бойля-Мариотта:

$$H \frac{h}{2} S = p \left(\frac{h}{2} + x \right) S. \quad (2)$$

Определив p из уравнения (1) и подставив его в уравнение (2), получим: $x^2 + xH - \frac{h^2}{4} = 0$. Отсюда $x = 10$ см, $p = 560$ мм рт. ст.

9.18. Ответ: $p_0 = 50$ кПа.

Решение. Вначале объем воздуха в каждой из половинок трубки составлял $\frac{L-h}{2} \cdot S$. Если трубку поставить вертикально, воздух в верхней части испытает изотермическое расширение до объема $\left(\frac{L-h}{2} + l\right)S$ и давления p_1 ; воздух же в нижней части испытает изотермическое сжатие до объема $\left(\frac{L-h}{2} - l\right)S$ и давления p_2 .

Согласно закону Бойля-Мариотта

$$p_0 \frac{L-h}{2} S = p_1 \left(\frac{L-h}{2} + l \right) S = p_2 \left(\frac{L-h}{2} - l \right) S.$$

Условие равновесия столбика ртути имеет вид $p_2 - p_1 = \rho gh$, где ρ — плотность ртути. Отсюда получаем

$$p_0 = \rho gh \frac{(L-h)^2 - 4l^2}{4l(L-h)} = 50 \text{ кПа.}$$

9.19. Ответ: кислород занимает часть сосуда длиной 2,9 см.

Решение. В равновесии давление p и температура T (а также, по условию, и масса m) обоих газов должны быть одинаковыми. Запишем для каждого из газов уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$pV_{\kappa} = \frac{m}{M_{\kappa}} RT, \quad pV_{\nu} = \frac{m}{M_{\nu}} RT.$$

Отсюда отношение объемов газов равно обратному отношению их молярных масс: $\frac{V_{\nu}}{V_{\kappa}} = \frac{M_{\kappa}}{M_{\nu}}$. Если обозначить через x длину части сосуда, занятой кислородом, то $\frac{V_{\nu}}{V_{\kappa}} = \frac{l-x}{x}$. Отсюда

$$x = l \frac{M_{\nu}}{M_{\nu} + M_{\kappa}} = 2,9 \text{ см.}$$

9.20. Ответ: $p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}$.

Решение 1. Можно считать, что газ из первого баллона изотермически расширяется до объема $V_1 + V_2$. Тогда его давление

после расширения согласно закону Бойля-Мариотта

$$p_1' = p_1 \frac{V_1}{V_1 + V_2}.$$

Аналогично $p_2' = p_2 \frac{V_2}{V_1 + V_2}$. Согласно закону Дальтона полное

давление в баллонах равно сумме парциальных давлений обоих газов:

$$p = p_1' + p_2' = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

Решение 2. Воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона:

$$p_1 V_1 = v_1 RT, \quad p_2 V_2 = v_2 RT, \quad p(V_1 + V_2) = vRT.$$

Здесь v_1 и v_2 — количество вещества соответственно в первом и втором баллонах, v — общее количество вещества. Поскольку $v = v_1 + v_2$, получаем: $p_1 V_1 + p_2 V_2 = p(V_1 + V_2)$, что приводит нас к тому же ответу.

9.21. Ответ: $p_N = p_a \left(1 + N \frac{\Delta V}{V}\right)$.

Решение. Фактически речь идет об изотермическом сжатии порции воздуха, которая при атмосферном давлении занимала объем $V + N\Delta V$, до объема V . Согласно закону Бойля-Мариотта $p_N V = p_a(V + N\Delta V)$. Отсюда $p_N = p_a \left(1 + N \frac{\Delta V}{V}\right)$. С каждым качанием компрессора давление возрастает на одну и ту же величину $p_a \frac{\Delta V}{V}$.

9.22. Ответ: $p_N = p_a \left(\frac{V}{V + \Delta V}\right)^N$.

Решение. Обозначим давление в сосуде перед k -м качанием p_{k-1} . Очередное качание вызывает изотермическое расширение воздуха от объема V до объема $V + \Delta V$. Поэтому $p_{k-1} \cdot V = p_k(V + \Delta V)$, откуда

$$p_k = p_{k-1} \frac{V}{V + \Delta V}.$$

Итак, при откачке газа постоянной величиной является не разность давлений до и после каждого качания (ср. с задачей 9.21), а отношение этих давлений. Другими словами, теперь значения давления образуют не арифметическую, а геометрическую прогрессию. Это происходит потому, что количество захватываемого насосом воздуха с каждым качанием уменьшается. После N качаний

$$p_N = p_a \left(\frac{V}{V + \Delta V}\right)^N.$$

9.23. Ответ: в 1,2 раза.

Решение. Обозначим давление в нагретых шинах p_2 . Тогда согласно закону Шарля $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$. Здесь T_1 и T_2 — абсолютные температуры, соответствующие t_1 и t_2 . Заметим, что сила давления шин на дорогу в обоих случаях одна и та же: она равна весу автомобиля (при этом надо учесть, что речь идет об избыточном давлении, т. е. о разности между давлением в шинах и атмосферным): $(p_1 - p_a)S_1 = (p_2 - p_a)S_2$. Из двух выписанных уравнений получаем:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{p_2 - p_a}{p_1 - p_a} = \frac{p_1 T_2 - p_a T_1}{T_1 (p_1 - p_a)} = 1,2.$$

9.24. Ответ: $v = 1,1$ м/с.

Решение. За время τ при скорости v через любое поперечное сечение газопровода проходит объем газа $V = v\tau S$. Этот объем связан с массой газа уравнением Менделеева-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT.$$

Следовательно, $v = \frac{mRT}{MptS} = 1,1$ м/с.

9.25. Ответ: см. рис. а и б.

Решение. Основное затруднение в данной задаче связано с необходимостью одновременно прослеживать характер изменений трех величин (p , V , T). Советуем сначала составить краткую сводку изменений этих трех величин на каждом из этапов (значок \sim означает прямую пропорциональную зависимость).

Этап 1-2: T — растет, V — растет ($\sim T$), p = const.

Этап 2-3: T = const, V — убывает, p — растет ($\sim 1/V$).

Этап 3-1: T — убывает, V = const, p — убывает ($\sim T$).

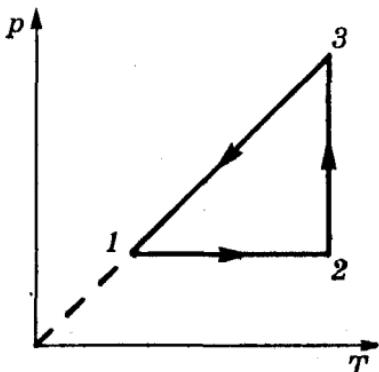


Рис. а

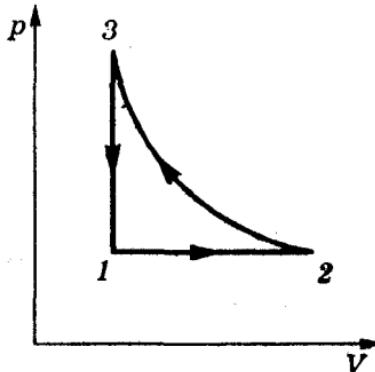


Рис. б

Характер изменения T и V виден прямо из графика; характер же изменения p можно определить из уравнения Клапейрона (или воспользоваться тем, что каждый отрезок на графике изображает хорошо известный изопроцесс).

Теперь нетрудно построить необходимые графики (см. рис. а и б).

9.26. Ответ: см. рис. а и б.

Указание. См. задачу 9.25.

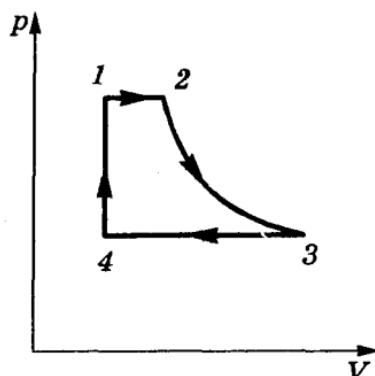


Рис. а

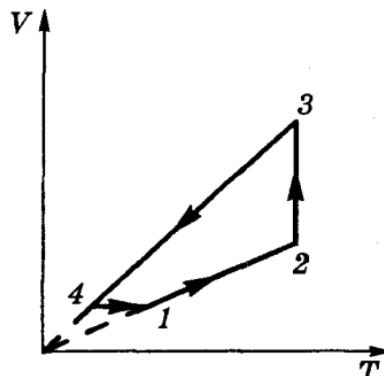


Рис. б

9.27. Ответ: см. рис. а и б.

Указание. См. задачу 9.25.

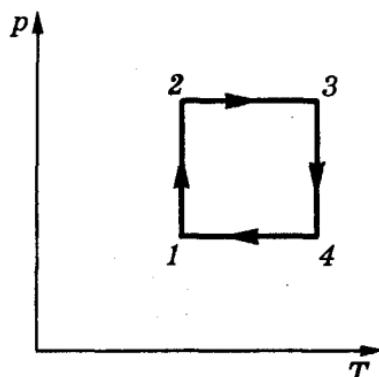


Рис. а

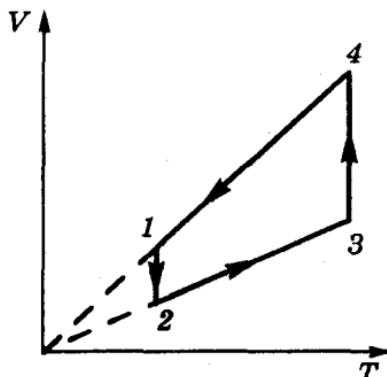
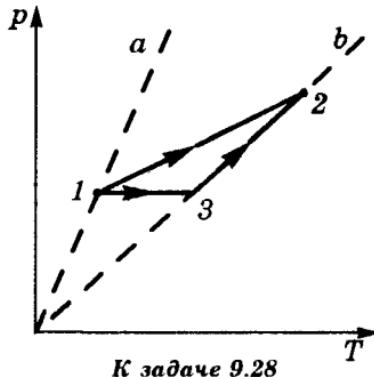


Рис. б

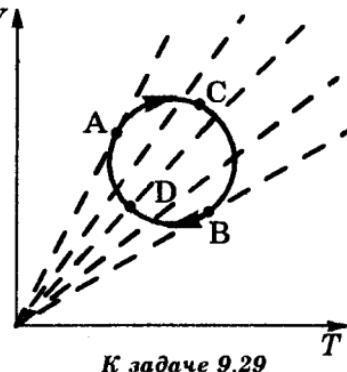
9.28. Ответ: $V_2 > V_1$.

Решение. Переход из состояния 1 в состояние 2 можно осуществить с помощью изопроцессов (заданный в условии процесс к ним не относится). Один из вариантов показан на рисунке. Мы видим, что на участке 1-3 объем газа растет (происходит изобарное нагревание), а на участке 3-2 объем не меняется. Следовательно, $V_2 > V_1$.

Такой же ответ можно получить, если провести через точки 1 и 2 соответствующие им изохоры *a* и *b*. Остается вспомнить, что большему объему соответствует нижняя изохора.



К задаче 9.28



К задаче 9.29

9.29. Решение. Проведем через различные точки графика соответствующие им изобары (см. рисунок). Наибольшему давлению соответствует самая нижняя изобара, поэтому максимальное давление соответствует точке касания *B*. Аналогично минимальное давление соответствует верхней точке касания *A*. Таким образом, на участке графика *ACB* давление газа возрастает, на участке *BDA* — убывает.

9.30. Ответ: наибольшая температура достигается в точке *A* (см. рисунок)

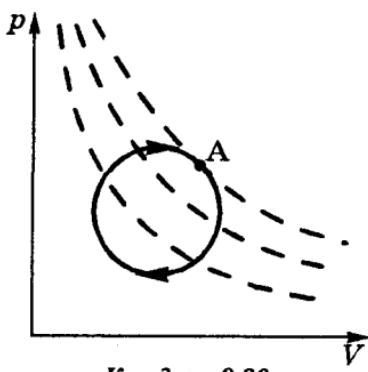
Указание. Проведите в координатах *p*-*V* семейство изотерм (гипербол). Найдите среди них изотерму, касающуюся графика в точке *A* (см. рисунок).

9.31. Ответ: от точки 2 к точке 1.

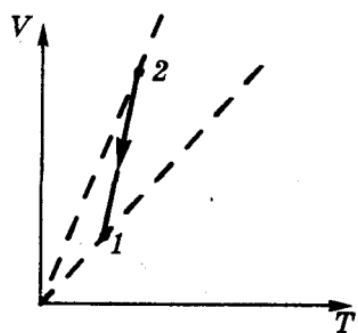
Решение. При отсутствии утечки газа график (изобара) представлял бы собой отрезок прямой, проходящей через начало координат. Проведем изобары через концы отрезка на графике (см. рисунок). Посмотрим, чем определяется угловой коэффициент (*a*, значит, и наклон) изобары. Из уравнения Менделеева-Клапейрона получаем:

$$\frac{V}{T} = \frac{mR}{Mp}.$$

Таким образом, лежащая выше изобара соответствует большей массе газа, поэтому лежащая на ней точка графика представляет начальное состояние. Направление процесса указано на рисунке.



К задаче 9.30



К задаче 9.31

9.32. Ответ: $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$.

Решение. Воспользуемся уравнением Клапейрона, позволяющим связать между собой параметры всех четырех состояний газа:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_3 V_3}{T_3} = \frac{p_4 V_4}{T_4}.$$

Согласно графику $p_2 = p_3$, $p_4 = p_1$, $V_2 = V_1$, $V_4 = V_3$. Учитывая, что $T_4 = T_2$, запишем систему уравнений:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_3 V_1}{T_2}, \quad \frac{p_3 V_3}{T_3} = \frac{p_1 V_3}{T_2}.$$

Перемножая почленно эти уравнения, получаем $T_1 T_3 = T_2^2$. Следовательно, $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$.

9.33. Ответ: а) охлаждается; б) нагревается; в) нагревается.

Решение. Чтобы найти связь между V и T , надо в заданном соотношении выразить p через V и T , пользуясь уравнением

Клапейрона: $p = \text{const} \cdot \frac{T}{V}$. Таким образом, получаем:

а) $TV = \text{const}$; при расширении газ охлаждается;

б) $\frac{T}{V} = \text{const}$, при расширении газ нагревается;

в) $\frac{T}{V^2} = \text{const}$, при расширении газ нагревается.

Отметим, что только в случае б мы имеем дело с изопроцессом. В случаях а и в в ходе процессов изменяются все три макроскопических параметра (p , V и T).

9.34. Ответ: $T_{\max} = \frac{9p_0V_0}{4vR}$ ($v = 1$ моль).

Решение. Согласно уравнению Менделеева-Клапейрона $pV = vRT$ ($v = 1$ моль). Значит, следует отыскать наибольшее значение произведения pV в ходе процесса. Уравнение, описывающее процесс 1-2, имеет вид $\frac{p}{p_0} + \frac{V}{V_0} = 3$ (см. математическое приложение).

Если сумма двух положительных величин постоянна, их произведение максимально, когда эти величины равны друг другу (см. математическое приложение). Следовательно, pV максимально при $\frac{p}{p_0} = \frac{V}{V_0} = \frac{3}{2}$, что соответствует температуре $T_{\max} = \frac{9p_0V_0}{4vR}$.

9.35. Ответ: 1,0 кг.

Решение. Давление газа в аэростате практически не отличается от давления воздуха снаружи (тонкая оболочка не может выдержать сколько-нибудь значительного перепада давлений). При подъеме газ внутри аэростата расширяется, заполняет всю оболочку и начинает выходить через клапан (ведь оболочка практически

нерастяжима, а для дальнейшего уменьшения давления газ должен продолжать расширяться).

Уравнение Менделеева-Клапейрона позволяет найти массу водорода в оболочке в начале (m_1) и в конце (m_2) подъема:

$$p_1 \alpha V = \frac{m_1}{M} RT_1, \quad p_2 V = \frac{m_2}{M} RT_2,$$

где M — молярная масса водорода. Отсюда определяем массу потерянного водорода:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{MV}{R} \left(\frac{\alpha p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) = 1,0 \text{ кг.}$$

9.36. Ответ: увеличится на 8%.

Решение. Напомним молярные массы газов: $M_1 = 0,004$ кг/моль (гелий), $M_2 = 0,002$ кг/моль (водород), $M_B = 0,029$ кг/моль (воздух). Водород вдвое легче гелия. Однако подъемная сила F возрастает отнюдь не вдвое! Она определяется разностью между архимедовой силой F_A , действующей на шар со стороны воздуха, и силой тяжести $m_F g$ наполняющего шар газа:

$$F = F_A - m_F g = (m_B - m_F)g.$$

Здесь m_B — масса воздуха в объеме шара (т. е. «вытесенного» воздуха). Значит, отношение подъемных сил в случае заполнения шара водородом и гелием равно:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{m_B - m_2}{m_B - m_1}.$$

Согласно уравнению Менделеева-Клапейрона

$$p_A V = \frac{m_B}{M_B} RT = \frac{m_1}{M_1} RT = \frac{m_2}{M_2} RT.$$

Здесь V — объем шара, p_A — атмосферное давление. Мы считаем температуру T газа в шаре равной температуре наружного воздуха, а давление — равным атмосферному (см. решение задачи 9.35).

Отсюда получаем $m_1 = \frac{M_1}{M_B} m_B$, $m_2 = \frac{M_2}{M_B} m_B$.

Следовательно, $\frac{F_2}{F_1} = \frac{M_B - M_2}{M_B - M_1} = 1,08$.

Итак, подъемная сила возрастет всего на 8%. Дело в том, что она определяется разностью между плотностью газа в шаре и плотностью окружающего воздуха. Оба газа — гелий и водород — намного легче воздуха, поэтому существенного увеличения подъемной силы при замене гелия водородом не происходит. Водород сейчас в воздухоплавании практически не используется, его заменяют гелием, что полностью исключает возможность пожара.

9.37. Ответ: опустится на 19 см.

Решение. Запишем условия равновесия поршня в начальном и конечном положениях:

$$m_1g + p_aS = p_1S, m_1g + m_2g + p_aS = p_2S.$$

Здесь p_1 и p_2 — начальное и конечное давление воздуха в цилиндре. Эти величины связаны между собой уравнением Клапейрона: $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$. Здесь $V_1 = Sh_1$ и $V_2 = S(h_1 + x)$ — соответственно начальный и конечный объем воздуха в цилиндре, x — перемещение поршня ($x > 0$ соответствует поднятию поршня, $x < 0$ — опусканию). Отсюда

$$x = h_1 \left(-1 + \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{m_1g + p_aS}{m_1g + m_2g + p_aS} \right) = -19 \text{ см.}$$

Таким образом, поршень опустится на 19 см.

9.38. Ответ: $8,05 \cdot 10^{26}$.

Решение. Количество N молекул воздуха в комнате можно получить из соотношения $p = nkT$, где $n = \frac{N}{V}$ — концентрация молекул, k — постоянная Больцмана. Отсюда $N = \frac{pAV}{kT}$ и $N_1 - N_2 = N_1 - N_2 = \frac{p_1V}{kT_1} - \frac{p_2V}{kT_2} = 8,05 \cdot 10^{26}$.

9.39. Ответ: сосуд с влажным воздухом.

Решение. В равных объемах газов при одинаковых температурах и давлениях содержится одинаковое число молекул (это следует, например, из соотношения $p = nkT$). Значит, во влажном воздухе молекулы воды просто заменили такое же количество молекул воздуха. Однако средняя молярная масса воздуха — 0,029 кг/моль, а молярная масса воды — лишь 0,018 кг/моль. Поскольку молекулы воды легче, то и сосуд с влажным воздухом тоже легче. Часто неправильно отвечают, что сырой воздух тяжелее сухого: к весу сухого воздуха добавляют вес водяного пара. На самом же деле водяной пар вытесняет из данного объема часть воздуха, масса которого больше массы пара.

9.40. Ответ: $p = 190$ кПа.

Решение. До диссоциации количество молекул азота в сосуде было $N_1 = \frac{m}{M}N_A$, где N_A — число Авогадро, а $M = 0,028$ кг/моль — молярная масса молекулярного азота. Диссоциируют $N_d = \alpha N_1$ ($\alpha = 0,3$) молекул. Каждая из них диссоциирует на два атома, тем

самым общее количество молекул стало

$$N_2 = N_1(1 - \alpha) + 2\alpha N_1 = N_1(1 + \alpha).$$

Давление в сосуде определяется теперь из соотношения

$$p = nkT = \frac{N_2 kT}{V}.$$

$$\text{Отсюда } p = (1 + \alpha) \frac{m k N_A T}{M V} = (1 + \alpha) \frac{m R T}{M V} = 1,9 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

9.41. Ответ: масса азота в 7 раз больше.

Решение. При нагревании смеси давление растет не только за счет увеличения скоростей молекул, но и за счет увеличения их концентрации. Обозначим через n_1 и n_2 концентрации атомов азота и водорода после полной диссоциации, а через p — давление смеси при температуре T . Полная концентрация частиц при температуре $2T$ равна $n_1 + n_2$, а при температуре T она составляла $n_1 + \frac{n_2}{2}$ (так как атомы водорода были объединены в молекулы H_2).

Поэтому $p = \left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right)kT$, $3p = (n_1 + n_2)k \cdot 2T$. Отсюда $n_2 = 2n_1$.

Масса газа в сосуде объемом V выражается через концентрацию его молекул: $m = nV m_0 = nV \frac{M}{N_A}$, поэтому отношение масс азота и водорода $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1 M_1}{n_2 M_2}$, где $M_1 = 0,014$ кг/моль и $M_2 = 0,001$ кг/моль — молярные массы соответственно азота и водорода в атомарном состоянии. Итак, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1 M_1}{n_2 M_2} = \frac{M_1}{2M_2} = 7$.

9.42. Ответ: $p = p_0 + \rho gh = 0,20$ МПа (здесь ρ — плотность воды).
Решение. Согласно условию, при всплытии объем пузырька не может измениться — ведь это привело бы к изменению объема воды или общего объема бака. Температура в системе, очевидно, тоже неизменна. Но тогда и давление в пузырьке не может измениться! Оно останется равным p_0 . Значит, таким же станет давление у верхней крышки бака. А давление на дно бака станет $p = p_0 + \rho gh = 0,20$ МПа.

Напомним, однако, что «несжимаемая жидкость» — это идеализация, модель реальной жидкости, а всякая модель имеет ограниченную область применимости. В данном случае, если бак достаточно велик, изменение объема воды окажется вполне сравнимым с объемом пузырька или даже большим (см. задачу 9.43). Тогда, конечно, считать воду несжимаемой нельзя.

9.43. Ответ: $S \ll 1 \text{ см}^2$.

Решение. Сжимаемость воды приводит к расширению пузырька при всплытии. Поэтому давление в нем несколько уменьшается,

так что увеличение давления в жидкости Δp оказывается меньшим, чем для несжимаемой жидкости: $\Delta p < \rho gh$ (см. задачу 9.42). Общее уменьшение объема воды (т. е. увеличение объема пузырька) составит

$$\Delta V = \beta h S \Delta p < (\beta h S) \cdot (\rho gh).$$

Воду можно считать несжимаемой при $\Delta V \ll V_0$. Для этого достаточно выполнения условия $(\beta h S) \cdot (\rho gh) \ll V_0$, или $S \ll \frac{V_0}{\rho g \beta h^2} \approx 1 \text{ см}^2$.

Итак, чтобы воду в баке можно было считать несжимаемой, бак должен представлять собой очень узкую высокую трубку.

9.44. Ответ: 0,20 МПа; 0,18 МПа.

Решение. Легче ответить сразу на второй вопрос. При всплытии обоих пузырьков возникает ситуация, описанная в задаче 9.42. При этом давление на дно станет $p = p_0 + \rho gh = 0,20 \text{ МПа}$.

Что же изменится, если всплыает один из двух пузырьков? Очевидно, теперь нельзя утверждать, что объемы пузырьков неизменны: неизменным должен оставаться только их *суммарный* объем. Всплыvший пузырек находится под давлением $p - \rho gh$, оставшийся у дна — под давлением p ; поэтому верхний пузырек должен расшириться до объема $V_1 = V_0 \frac{p_0}{p - \rho gh}$, а нижний —

сжаться до объема $V_2 = V_0 \frac{p_0}{p}$ (здесь V_0 — начальный объем каждого пузырька). Из условия $V_1 + V_2 = 2V_0$ получаем

$$p^2 - p(\rho gh + p_0) + \frac{p_0 \rho gh}{2} = 0 \text{ и } p = \frac{\rho gh + p_0 + \sqrt{p_0^2 + (\rho gh)^2}}{2}$$

(знак перед корнем выбирается с помощью простого соображения: при $h \rightarrow 0$ должно быть $p \rightarrow p_0$). Подстановка численных значений дает $p = 0,18 \text{ МПа}$. Границы применимости такого решения проанализированы в решениях задач 9.42 и 9.43.

9.45. Ответ: $r \geq 0,15 \text{ м}$.

Указание. Условие плавания шара в воздухе состоит в том, что сила Архимеда, равная весу вытесненного воздуха, уравновешивает силу тяжести оболочки mg и наполняющего шар гелия $m_{\text{г}}g$. Массы воздуха и гелия в объеме шара можно выразить через r , воспользовавшись уравнением Менделеева-Кланейрона; массу оболочки — из соотношения $\frac{m}{m_0} = \frac{S}{S_0}$, где S — площадь поверхности оболочки, а $S_0 = 1 \text{ м}^2$.

$$9.46. \text{Ответ: } \frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

Решение. На первый взгляд может показаться, что p_1 и p_2 одинаковы, потому что части баллона сообщаются, а равенство давлений является необходимым условием теплового равновесия. Но ведь в данном случае теплового равновесия нет — наоборот, в разных частях баллона поддерживаются *различные* температуры! Чтобы состояние системы не изменялось, число молекул газа в каждой из частей баллона также не должно меняться. А для этого должны быть одинаковы количества Z_1 и Z_2 молекул, пролетающих через отверстие в одну и другую сторону за одно и то же время Δt .

Величину Z можно записать в виде $Z = \frac{1}{2}n\overline{|v_x|}S\Delta t$, где n — концентрация молекул, S — площадь отверстия; ось x направлена нормально к плоскости отверстия. Воспользовавшись соотношениями $n = \frac{p}{kT}$ и $\overline{|v_x|} \sim \bar{v} = \sqrt{\frac{RT}{M}}$, получаем $Z \sim \frac{p}{\sqrt{T}}$ (мы не выписываем коэффициенты, одинаковые для Z_1 и Z_2 и потому не влияющие на ответ). Из условия $Z_1 = Z_2$ получаем $\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}$, откуда $\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$. Интересно, что отношение концентраций молекул оказывается при этом *обратным* отношению давлений:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{p_2}{p_1},$$

т. е. давление больше в той части баллона, где концентрация молекул меньше!

$$9.47. \text{Ответ: } \tau = \pi l \sqrt{\frac{2m}{vRT}}.$$

Указание. При *малых* смещениях x поршня от положения равновесия (когда $x \ll l$) уравнение $ma = F = -S\Delta p$ (где S — площадь поршня, Δp — разница давлений газа по обе стороны от поршня) приводится к виду $a = -\omega^2 x$. А это — стандартное уравнение гармонических колебаний.

$$10.1. \text{Ответ: } \phi_2 = 29\%.$$

Решение. Согласно определению относительной влажности $\phi_2 = \frac{p_2}{p_{n2}} \cdot 100\%$, где p_2 — парциальное давление водяного пара при температуре t_2 , а p_{n2} — давление насыщенного пара при той же температуре (см. таблицу в приложении). Водяной пар с хорошей

точностью описывается уравнением состояния идеального газа, поэтому при $V = \text{const}$ получаем $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$, т. е. $p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1}$. Парциальное давление p_1 пара при температуре t_1 можно найти из соотношения $\varphi_1 = \frac{p_1}{p_{n1}} \cdot 100\%$. Подставляя полученные выражения в формулу для φ_2 , получаем $\varphi_2 = \frac{p_{n1}T_2}{p_{n2}T_1} \varphi_1 = 29\%$.

Задачу можно решить проще, если воспользоваться таблицей зависимости плотности ρ_n насыщенного пара от температуры и формулой¹⁾ $\varphi = \frac{\rho}{\rho_n} \cdot 100\%$, где ρ — плотность пара. Поскольку плотность пара при изохорном нагревании не изменяется,

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\rho_{n1}}{\rho_{n2}},$$

откуда $\varphi_2 = \varphi_1 \frac{\rho_{n1}}{\rho_{n2}} = 29\%$.

10.2. Ответ: воздух надо увлажнить, испарив 22 кг воды.

Решение. Масса водяного пара в помещении $m_1 = \rho_1 V$, в забираемом снаружи воздухе $m_2 = \rho_2 V_2$ (здесь ρ_1 и ρ_2 — плотность соответствующего водяного пара, $V_2 = \frac{V T_2}{T_1}$ — объем забираемого снаружи воздуха). Таким образом, массу пара в забираемом воздухе следует изменить на $\Delta m = m_1 - m_2 = V(\rho_1 - \rho_2 \frac{T_2}{T_1})$. Если $\Delta m > 0$, то воздух надо увлажнять; если $\Delta m < 0$ — осушать. Плотность водяного пара легко выразить через относительную влажность φ и плотность ρ_n насыщенного пара при *той же* температуре:

$$\rho = \rho_n \frac{\varphi}{100\%}.$$

Отсюда $\Delta m = \frac{V}{100\%} \left(\rho_{n1}\varphi_1 - \rho_{n2}\varphi_2 \frac{T_2}{T_1} \right)$. Подставляя табличные значения ρ_{n1} и ρ_{n2} , получаем $\Delta m = 22$ кг, т. е. воздух надо увлажнить, испарив в него дополнительно 22 кг воды.

10.3. Ответ: $\varphi_2 = 63\%$.

Решение. Параметры водяного пара приближенно удовлетворяют уравнению состояния идеального газа. Начальное парциальное

¹⁾ Эту формулу легко вывести из определения относительной влажности, если воспользоваться уравнением состояния идеального газа.

давление пара $p_1 = p_{\text{н}} \frac{\phi_1}{100\%}$, где $p_{\text{н}}$ — давление насыщенного пара при 30°C. Из уравнения Менделеева-Клапейрона находим начальную массу пара: $m_1 = \frac{Mp_1V}{RT}$ (здесь M — молярная масса воды, R — универсальная газовая постоянная). Предположим, что вся добавленная вода испарилась, тогда масса пара составит $m_2 = m_1 + m$, а его давление $p_2 = \frac{m_2RT}{MV} = p_1 + \frac{mRT}{MV}$. Относительная влажность

$$\phi_2 = \frac{p_2}{p_{\text{н}}} \cdot 100\% = \phi_1 + \frac{mRT}{Mp_{\text{н}}V} \cdot 100\% = 63\%.$$

Получилось $\phi_2 < 100\%$; следовательно, вся внесенная вода действительно испарилась. Если бы мы получили $\phi_2 > 100\%$, это означало бы, что вода испарилась не полностью. Правильный ответ в таком случае был бы $\phi_2 = 100\%$ (пар стал насыщенным).

Эту задачу можно решить и короче, используя табличное значение плотности $\rho_{\text{н}}$ насыщенного пара при 30°C:

$$\phi_1 = \frac{m_1}{\rho_{\text{н}}V} \cdot 100\%; \phi_2 = \frac{m_1 + m}{\rho_{\text{н}}V} \cdot 100\% = \phi_1 + \frac{m}{\rho_{\text{н}}V} \cdot 100\% = 63\%.$$

10.4. Ответ: $m_{\text{n}} = 0,59$ г.

Решение. Вода занимает объем $V_0 = \frac{m}{\rho}$, где ρ — плотность воды.

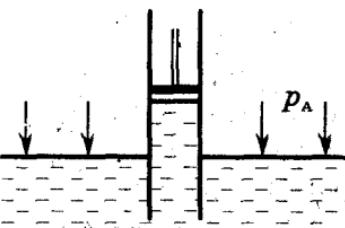
Тогда пар занимает остальной объем: $V_1 = V - V_0$. При 100°C давление насыщенного водяного пара $p_{\text{н}} = 101$ кПа, т. е. равно нормальному атмосферному давлению. Остается воспользоваться уравнением Менделеева-Клапейрона, из которого получаем

$$m_{\text{n}} = \frac{Mp_{\text{н}}V_1}{RT} = \frac{Mp_{\text{н}}}{RT} \left(V - \frac{m}{\rho} \right) = 0,59 \text{ г.}$$

Обратите внимание на то, во сколько раз пар легче воды!

10.5. Ответ: $h = 0$.

Решение. Напомним принцип действия поршневого насоса (простейшая его модель показана на рисунке). При поднятии поршня между ним и поверхностью жидкости образуется разрежение и вода начинает подниматься под действием атмосферного давления p_a . Предельная высота h подъема воды обычно определяется из условия $p_a = \rho gh$, где ρ — плотность воды;



отсюда $h \approx 10$ м. Однако при этом предполагается, что давлением насыщенного пара под поршнем можно пренебречь. При комнатной температуре такое допущение справедливо: например, при 20°C давление насыщенного пара составляет около 2% атмосферного. Однако при повышении температуры давление насыщенного водяного пара быстро возрастет и при кипении сравняется с атмосферным. Поэтому кипящую воду насос не поднимет вообще.

10.6. Решение. На первый взгляд может показаться, что каждая жидкость начнет кипеть при «своей» температуре и потому $t = 77^\circ\text{C}$. Рассмотрим, однако, механизм процесса кипения. Кипение начинается, когда давление паров в пузырьках становится равным внешнему (мы считаем, что в жидкостях достаточно много центров парообразования). В пузырьках, образующихся на границе двух жидкостей, находятся насыщенные пары *обеих* жидкостей; поэтому давление в этих пузырьках (равное сумме давлений насыщенных паров *обеих* жидкостей) *больше*, чем в пузырьках, которые возникают внутри каждой жидкости. Следовательно, при нагревании раньше всего сравняется с атмосферным *ра* давление в «пограничных» пузырьках, и кипение на границе раздела жидкостей начнется при $t < 77^\circ\text{C}$. При этом нижняя жидкость, как более летучая, будет выкипать быстрее.

Чтобы определить t , надо знать зависимость давления насыщенных паров каждой из жидкостей от температуры. Тогда можно построить график зависимости от температуры давления p_n в «пограничных» пузырьках ($p_n = p_{n1} + p_{n2}$). Температура кипения определяется из условия $p_n = p_a$. Поскольку зависимости $p_{n1}(t)$ и $p_{n2}(t)$ в задаче не приведены, определить температуру кипения t по приведенным в условии данным нельзя.

10.7. Ответ: $\varphi = 54\%$.

Решение. Напомним, что точка росы — это температура, при которой водяной пар становится насыщенным. Воспользуемся формулой $\varphi = \frac{\rho}{\rho_{n1}} \cdot 100\%$ (здесь ρ — плотность водяного пара, содержащегося в воздухе, а ρ_{n1} — плотность насыщенного пара при температуре t_1). При охлаждении $\rho = \text{const}$ вплоть до начала конденсации. Следовательно, начальная плотность водяного пара равна ρ_{n2} . Таким образом, $\varphi = \frac{\rho_{n2}}{\rho_{n1}} \cdot 100\% = 54\%$.

10.8. Ответ: $\varphi_2 = 2,9\%$.

Решение. Относительная влажность $\varphi_2 = \frac{p_2}{p_{n2}} \cdot 100\%$, где p_2 — парциальное давление водяного пара после нагревания и сжатия,

а p_{H_2} — давление насыщенного водяного пара при $t_2 = 100^\circ\text{C}$. Поскольку t_2 совпадает с температурой кипения воды при нормальном атмосферном давлении p_a , получаем $p_{\text{H}_2} = p_a$. Давление p_2 определим из уравнения Менделеева-Клапейрона: $p_2V = \frac{m}{M}RT_2$ (здесь m , M — соответственно масса и молярная масса водяного пара, V — конечный объем воздуха). Аналогичное соотношение можно записать для начального состояния пара: $p_1 \cdot 3V = \frac{m}{M}RT_1$.

Из двух последних уравнений получаем $p_2 = \frac{3p_1T_2}{T_1}$. Воспользовавшись формулой $\phi_1 = \frac{p_1}{p_{\text{H}_1}} \cdot 100\%$, находим

$$p_2 = \frac{3p_{\text{H}_1}T_2\phi_1}{T_1 \cdot 100\%} \text{ и } \phi_2 = \frac{3p_{\text{H}_1}T_2\phi_1}{p_{\text{H}_2}T_1} = 2,9\%.$$

При более сильном сжатии и более высокой температуре t_1 мы могли бы получить $\phi_2 > 100\%$. Это означало бы, что на самом деле произошла частичная конденсация пара. Правильным ответом в этом случае было бы $\phi_2 = 100\%$.

10.9. Ответ: $V = 1,0 \text{ м}^3$, $m = 7,7 \text{ г}$.

Решение. Конденсация пара начнется в момент, когда пар станет насыщенным, т. е. при $\rho_{\text{H}}V = \rho V_0$ (здесь ρ_{H} — плотность насыщенного пара при температуре t , $\rho = \rho_{\text{H}} \frac{\phi_0}{100\%}$ — плотность пара до сжатия). Отсюда $V = \frac{V_0\phi_0}{100\%} = 1,0 \text{ м}^3$. Масса пара в воздухе изменяется от $m_1 = \rho V_0$ до $m_2 = \rho_{\text{H}} \frac{V_0}{4}$. Значит, масса выпавшей росы $m = m_1 - m_2 = \rho_{\text{H}}V_0 \left(\frac{\phi_0}{100\%} - \frac{1}{4} \right) = 7,7 \text{ г}$.

10.10. Ответ: $\rho = 0,59 \text{ кг}/\text{м}^3$.

Решение. 100°C — температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении $p_a = 101 \text{ кПа}$. Значит, давление насыщенного пара при этой температуре тоже равно атмосферному. Применяя уравнение Менделеева-Клапейрона и учитывая, что $m = \rho V$, получаем $\rho = \frac{p_a M}{R T} = 0,59 \text{ кг}/\text{м}^3$, где M — молярная масса воды.

10.11. Ответ: $p_2 = 233 \text{ кПа}$.

Решение. Очевидно, давление $p_2 = p'_2 + p_{\text{H}}$, т. е. складывается из парциальных давлений сухого воздуха p'_2 и водяного пара p_{H} .

Поскольку $V = \text{const}$ (мы пренебрегаем объемом налитой воды), $\frac{p_2'}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$. Отсюда $p_2' = p_1 \frac{T_2}{T_1}$. Чтобы определить p_n , нужно сначала выяснить, вся ли вода испарится. С помощью уравнения Менделеева-Клапейрона можно найти (см., например, решение задачи 10.4), что масса насыщенного пара в сосуде при 100°C равна 5,9 г. Следовательно, часть воды останется в жидкому состоянии, а пар будет насыщенным. Его давление равно $p_n = p_a = 101 \text{ кПа}$. Итак, $p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} + p_a = 233 \text{ кПа}$. Типичная ошибка при решении таких задач — отождествление массы образовавшегося пара с массой налитой воды.

10.12. Решение. Весь вопрос в том, повысится или понизится *относительная влажность* воздуха в кухне, если открыть форточку: ведь скорость сушки белья зависит только от относительной влажности. На первый взгляд — повысится: ведь относительная влажность на улице близка к 100%! Однако заметим, что, во-первых, в кухне относительная влажность тоже достаточно велика, а во-вторых (и это главное!), температура в кухне намного выше. Поэтому давление насыщенного пара при комнатной температуре воздуха намного выше, чем при температуре наружного воздуха. Даже ненасыщенный водяной пар в кухне имеет большее давление, чем насыщенный на улице. Поэтому при открытой форточке пар будет выходить из кухни и белье будет сохнуть быстрее.

10.13. Решение. Давление на дно второго сосуда, естественно, больше, чем на дно первого. Поэтому после открывания нижнего крана вода начнет перетекать в первый сосуд. Это перетекание будет происходить вплоть до выравнивания уровней воды в обоих сосудах. Давление же паров в обоих сосудах будет оставаться неизменным (за счет конденсации некоторой части пара в первом сосуде и испарения воды во втором), так что оно не влияет на процесс перетекания воды (если бы в сосудах был воздух, то его сжатие в сосуде 1 и расширение в сосуде 2 создали бы перепад давлений, не позволяющий уровням воды выравняться). Что произойдет, если открыть верхний кран? Казалось бы, ничего — ведь давление насыщенного пара в обоих сосудах одинаково. Но это означает только то, что давление пара *у поверхности воды* в сосудах 1 и 2 одинаково. С высотой же давление пара падает. Поэтому на уровне верхнего крана давление со стороны сосуда 1 меньше. Если открыть кран, начнется медленное перетекание пара из сосуда 2 в сосуд 1. В результате преобладающим процессом

в сосуде 1 окажется теперь конденсация, а в сосуде 2 — испарение. Так будет продолжаться до полного выравнивания уровней в сосудах. Естественно, при открывании верхнего крана скорость протекания процесса намного меньше: в этом случае заметное изменение уровней воды в сосудах может произойти только через несколько месяцев.

10.14. Ответ: $h = 19$ см.

Решение. Для нагревания воды до $t_2 = 100^\circ\text{C}$ потребуется количество теплоты $Q_1 = mc(t_2 - t_1) = 12,6$ кДж. Следовательно, оставшееся количество теплоты $Q_2 = Q - Q_1 = 12,4$ кДж затрачено на парообразование. В пар перейдет $m_1 = \frac{Q_2}{L} = \frac{12,4}{2260} = 5,4$ г воды (здесь L — удельная теплота парообразования воды при 100°C). Поскольку $m_1 < m$, пар является насыщенным и его температура не поднимется выше 100°C . Объем пара определим из уравнения Менделеева-Клапейрона: $V = \frac{m_1 RT}{Mp} = \frac{5,4 \cdot 8,314 \cdot 373}{101325} = 9,3$ л. Высота подъема поршня $h = \frac{V}{S} = \frac{9,3}{100} = 0,093$ м = 9,3 см. Может возникнуть вопрос: почему не учтена работа по подъему поршня, т. е. работа расширяющегося пара $A' = p\Delta V$? Дело в том, что эта работа уже учтена в табличном значении L . Ведь если бы даже поршня не было, пар при расширении должен был бы преодолеть то же самое давление $p_a = 10^5$ Па.

10.15. Ответ: уменьшится.

Решение. Состав паров у соленой воды тот же, что у пресной. Давление паров также одинаково (оно совпадает с внешним). Воспользовавшись формулой $\rho = \frac{pM}{RT}$ (см. решение задачи 10.10), приходим к выводу: поскольку T увеличивается, плотность паров уменьшится.

10.16. Ответ: $\phi = 72\%$.

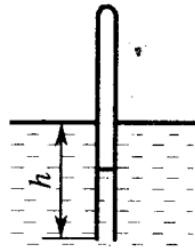
Решение. Влажный воздух в трубке испытывает изотермическое расширение, при этом его давление падает от p_a до $p_a - l$ (в мм рт. ст.). Согласно закону Бойля-Мариотта объем воздуха увеличивается в $\frac{p_a}{p_a - l}$ раз. Во столько же раз уменьшаются давление и плотность водяного пара. Значит, $\phi = \phi_0 \frac{p_a - l}{p_a} = 72\%$.

10.17. Ответ: $l > p_a \left(\frac{100\%}{\phi_0} - 1 \right) = 190$ мм.

10.18. Ответ: $h = 31$ см.

Решение. Конденсация начнется, когда относительная влажность достигнет 100%. Для этого объем воздуха в трубке должен уменьшиться в $\frac{100\%}{\varphi} = 1,25$ раз. Значит, длина воздушного столбика в трубке будет при этом $\frac{l}{1,25} = 0,8l$. Давление

в трубке, выраженное в см рт. ст., $p = p_a + h - 0,2l$ (см. рисунок). Тогда согласно закону Бойля-Мариотта $p_a l = (p_a + h - 0,2l) \cdot 0,8l$. Отсюда $h = 0,25p_a + 0,2l = 31$ см.



10.19. Ответ: $p_2 = 153$ кПа.

Решение. Будем считать объем газа постоянным, т. е. не будем учитывать небольшого изменения объема воды за счет конденсации. Давление насыщенного водяного пара при 100°C равно атмосферному. Следовательно, парциальное давление воздуха первоначально $p_1 = p_a = 2p_a$. В результате изохорного охлаждения парциальное давление воздуха станет $2p_a \cdot \frac{T_2}{T_1}$. Давление насыщенного водяного пара при $t_2 = 10^\circ\text{C}$ составляет $p_{\text{H}_2} = 1,23$ кПа. Таким образом, полное давление в котле $p_2 = p_{\text{H}_2} + 2p_a \cdot \frac{T_2}{T_1} = 153$ кПа.

10.20. Ответ: $p = 60$ кПа.

Решение. В смеси находилось $v_1 = \frac{m_1}{M_1} = 0,25$ моль водорода и $v_2 = \frac{m_2}{M_2} = 0,25$ моль кислорода. Первоначальную температуру T в баллоне можно определить из уравнения Менделеева-Клапейрона: $T = \frac{p_1 V}{(v_1 + v_2) R} = 283$ К. В реакцию $2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$ вступит весь водород, но только половина кислорода. В результате реакции образуется $v_3 = 0,25$ моль воды и остается $v_4 = 0,125$ моль кислорода. Масса воды $m = v_3 M = 4,5$ г намного превышает массу насыщенного водяного пара в объеме баллона при данной температуре ($m_{\text{H}_2\text{O}} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} V = 0,047$ г), поэтому большая часть воды окажется в жидком состоянии, а водяной пар в баллоне будет насыщенным. Его давление при температуре T составляет $p_{\text{H}_2\text{O}} = 1,23$ кПа. Парциальное давление кислорода $p_{\text{K}} = \frac{v_4 R T}{V} = \frac{p_1}{4}$ (объемом, который занимает вода, можно пренебречь). Итак, $p = p_0 + p_{\text{K}} = 60$ кПа. Интересно сравнить этот результат с полученным в задаче 9.9.

10.21. Ответ: $\phi = 50\%$.

Решение. Уже при первом сжатии давление выросло *менее*, чем в четыре раза: пар стал насыщенным и произошла частичная его конденсация. Поэтому давление пара после первого и второго сжатия одинаково и равно p_n — давлению насыщенного пара при данной температуре. Парциальное же давление воздуха менялось при изотермическом сжатии обратно пропорционально объему. Если начальное давление воздуха было p_v , то после первого и второго сжатия оно стало равным соответственно $4p_v$ и $8p_v$. Обозначим первоначальное парциальное давление пара p_n . Тогда полное давление влажного воздуха сначала было $p_n + p_v$, после первого сжатия стало $p_n + 4p_v$, а после второго $p_n + 8p_v$. Согласно условию

$$p_n + 4p_v = 3(p_n + p_v),$$

$$p_n + 8p_v = 5(p_n + p_v).$$

Исключая из этих уравнений p_v , получаем $p_n = 2p_v$. Значит, начальная относительная влажность воздуха $\phi = \frac{p_n}{p_n + p_v} \cdot 100\% = 50\%$.

10.22. Решение. Очевидно, вода в плавающей кастрюле нагревается до температуры кипения. Однако это еще не означает, что она закипит: ведь для того, чтобы жидкость, достигшая температуры кипения, и в самом деле закипела, необходим дальнейший подвод теплоты к этой жидкости. Вода в большой кастрюле получает необходимое количество теплоты от нагревателя; вода же в плавающей кастрюле может получать теплоту лишь от воды в большой кастрюле. Однако при достижении температуры кипения теплообмен между жидкостями прекращается, поскольку их температуры становятся одинаковыми! Поэтому вода в плавающей кастрюле кипеть не будет.

10.23. Решение. Температура кипения существенно зависит от внешнего давления. Поэтому, если поместить воду в герметичный сосуд и откачивать из него воздух, можно заставить воду закипеть. Например, чтобы вода закипела при 20°C , т. е. при комнатной температуре, надо понизить давление до 2,33 кПа (это давление насыщенного водяного пара при 20°C). Такое давление несложно получить с помощью довольно простых насосов. Если производить откачку достаточно быстро, то температура воды заметно понижается. Ведь интенсивное парообразование при кипении происходит за счет уменьшения внутренней энергии жидкости. Охлаждение вполне может привести к *замерзанию* некоторой части воды. При этом вода, замерзая, будет кипеть!

10.24. Решение. На первый взгляд — нельзя: ведь температура плавления свинца $t_1 = 327^\circ\text{C}$ намного превосходит температуру кипения воды $t_2 = 100^\circ\text{C}$. Однако вода кипит при 100°C лишь при

нормальном атмосферном давлении! Повышенное давление, можно нагревать воду без кипения намного выше 100°C , а именно до так называемой критической температуры $t_3 = 374^{\circ}\text{C}$. Поскольку $t_1 < t_3$, свинец расплавить в воде можно! Для этого нужно только нагревать оба вещества в герметично закрытом сосуде. Однако стенки сосуда должны выдерживать очень высокое давление, создаваемое насыщенными парами воды при высокой температуре.

10.25. Решение. Замерзание происходит при 0°C только при наличии центров кристаллизации — например, каких-то нерастворимых частиц. В стакане воды практически наверняка найдется несколько таких центров. Этого уже достаточно, чтобы замерзла вся вода. Если же вода раздроблена на мельчайшие капли, то центры кристаллизации найдутся лишь в некоторых каплях. Эти капли и замерзнут при 0°C , а остальные (т. е. подавляющее большинство) останутся жидкими вплоть до значительно более низких температур. Заметим, однако, что во многих случаях облака (например, перистые) состоят не из капелек воды, а из кристаллов льда.

10.26. Ответ: $r = 1,5$ мм.

Решение. Силы поверхностного натяжения тянут капиллярную трубку вниз. Они приложены к внутренней и внешней поверхностям по окружностям радиуса r , поэтому полная длина линии, вдоль которой действует сила поверхностного натяжения F , равна $4\pi r$. Следовательно, $F = 4\pi r\sigma$. С другой стороны, согласно условию $F = mg$, отсюда $r = \frac{mg}{4\pi\sigma} = 1,5$ мм.

10.27. Ответ: $F = (\sigma_1 - \sigma_2)l$; сила действует перпендикулярно стороне BC (на рисунке в условии задачи — вверх).

Указание. На любой прямолинейный участок рамки длиной L действуют перпендикулярно этому участку две силы поверхностного натяжения: сила $F_1 = \sigma_1 L$ направлена наружу и сила $F_2 = \sigma_2 L$ — внутрь рамки.

10.28. Ответ: около 1 л.

Решение. Вода не будет выливаться из решета, если нити не смачиваются водой и силы поверхностного натяжения компенсируют силу тяжести. Рассмотрим столб воды, в основании которого лежит один квадратик, образованный нитями решета. При максимальной высоте воды h силы поверхностного натяжения на линии соприкосновения воды с каждой из нитей направлены вверх, тогда их равнодействующая равна $4\sigma d$. Она уравнове-

шивает силу тяжести столба воды ρd^2gh . Отсюда $h = \frac{4\sigma}{\rho gd} = 3$ см;

полная масса воды $m = \pi r^2 h \rho = \frac{4\pi\sigma r^2}{gd} = 0,94$ кг. Оказывается, в решете можно перенести не так уж мало воды! Однако требуется осторожность: нельзя нарушать пленку воды, «провисающую» внизу, и наклонять решето — ведь при этом глубина в каком-то месте увеличится и решето станет протекать. Разумеется, полученный результат следует рассматривать как весьма приближенный.

10.29. Ответ: $F = mg + 4\sigma(a + b)$.

Указание. Сила F должна уравновесить силу тяжести и силы поверхностного натяжения, действующие на проволоку с двух сторон.

10.30. Решение. И материя, и бумага пронизаны капиллярами. Жир смачивает материю и бумагу. Поэтому расплавленный горячим утюгом жир «втягивается» в капилляры — тем сильнее, чем уже эти капилляры (ср. с задачей 10.40). Капилляры же в бумаге тоньше, чем в материи.

10.31. Ответ: снаружи.

Указание. Нагревание жидкости уменьшает поверхностное натяжение. Поэтому в капиллярах, пронизывающих кожу, жидкость втягивается в сторону более холодной части.

10.32. Ответ: см. рис. *a*, *b*, *c* (при $h < \frac{2\sigma}{\rho gr}$) и рис. *g*, *d*, *e* (при

$$h > \frac{2\sigma}{\rho gr}.$$

Решение. Обозначим через H_k и H высоту уровня воды соответственно в капилляре и в широком сосуде; $\Delta H = H_k - H$. Будем считать широкую трубку настолько высокой, что вода не достигает ее края. Рассмотрим два случая.

1. $h < \frac{2\sigma}{\rho gr}$. В этом случае капилляр заполнится, когда широкий сосуд будет еще практически пуст. Только после этого начнет заполняться (естественно, намного медленнее) широкий сосуд. При этом форма мениска в капилляре будет меняться от вогнутой до плоской (при $\Delta H = 0$) и затем выпуклой (при $\Delta H < 0$). Когда H достигнет значения $h + \frac{2\sigma}{\rho gr}$, вода начнет выливаться из капилляра и повышение уровня воды прекратится. Графики $H_k(t)$, $H(t)$, $\Delta H(t)$ приведены на рис. *a*, *b*, *c*.

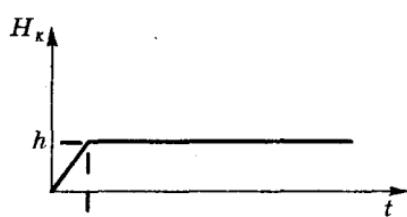


Рис. а

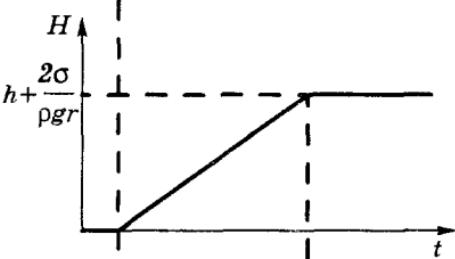


Рис. б

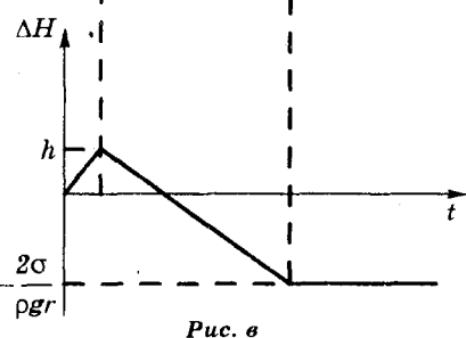


Рис. в

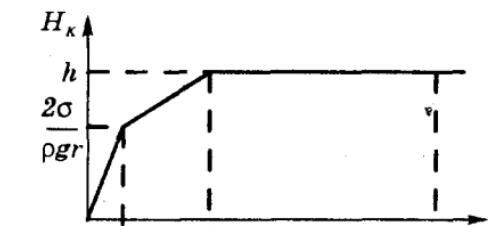


Рис. г

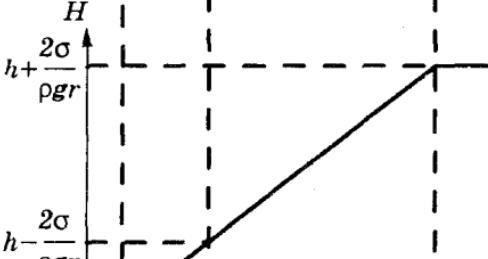


Рис. д

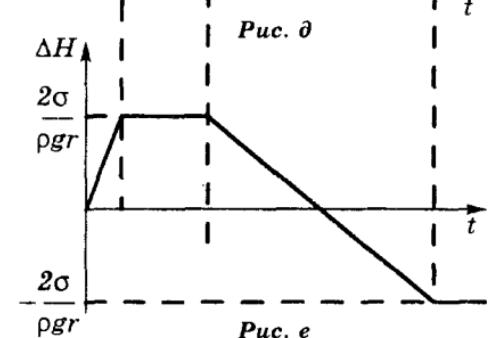


Рис. е

2. $h > \frac{2\sigma}{\rho gr}$. В отличие от предыдущего случая теперь, начиная с некоторого момента, уровень воды растет с одинаковой скоростью в капилляре и в широком сосуде, так что $\Delta H = \frac{2\sigma}{\rho gr} = \text{const}$. Так продолжается, пока вода не заполнит капилляр полностью. Соответствующие графики приведены на рис. г, д, е. Обратим внимание, что $|\Delta H|$ во всех случаях не превышает $\frac{2\sigma}{\rho gr}$.

10.33. Ответ: $h = 3,0$ см.

Решение. Свободная поверхность жидкости граничит со стенками трубы по двум окружностям радиуса r (см. рисунок). Верхний и нижний мениски при максимально возможной высоте столба

воды представляют собой полусфера, поэтому силы поверхностного натяжения $F_{\text{пп}}$ направлены вертикально вверх. Они уравновешивают силу тяжести, действующую на воду:

$$2F_{\text{пп}} = 4\pi\sigma r = mg.$$

Учитывая, что $m = \rho V = \rho\pi r^2 h$, находим:

$$h = \frac{4\sigma}{\rho gr} = 0,03 \text{ м.}$$

Разумеется, это вдвое превосходит обычную высоту капиллярного подъема $\frac{2\sigma}{\rho gr}$: ведь воду здесь «держат» два мениска, а не один.

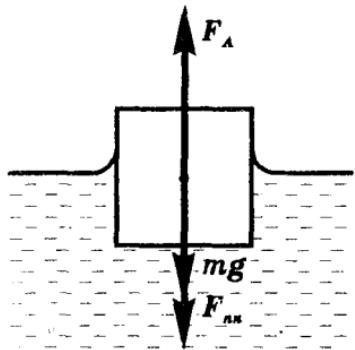


10.34. Ответ: $h = 2,3 \text{ см.}$

Решение. Свободная поверхность жидкости граничит со стенками кубика по периметру квадрата со стороной a . Кубик тянет вниз сила поверхностного натяжения $F_{\text{пп}} = 4\sigma a$ (см. рисунок).

Условие равновесия: $F_A = mg + F_{\text{пп}}$. Учитывая, что $F_A = \rho_w g V_s = \rho_w g a^2 h$, где ρ_w — плотность воды, а V_s — объем погруженной части кубика (т. е. объем вытесненной воды), получаем:

$$h = \frac{mg + 4\sigma a}{\rho_w g a^2} = 0,023 \text{ м.}$$



Итак, нижняя часть кубика погружена на глубину 2,3 см. В «отсутствие» поверхностного натяжения (при $\sigma = 0$) эта глубина была бы на 1 мм меньше.

10.35. Ответ: натертый парафином кубик плавает на 6,0 мм выше.

Указание. См. задачу 10.34. Учтите, что парафин не смачивается водой.

$$10.36. \text{Ответ: } r = \sqrt{\frac{3\sigma}{g(2\rho_w - \rho_p)}} = 2,25 \text{ мм.}$$

Указание. Парафин не смачивается водой; см. также задачу 10.34.

10.37. Ответ: $r \approx 5 \text{ мм.}$

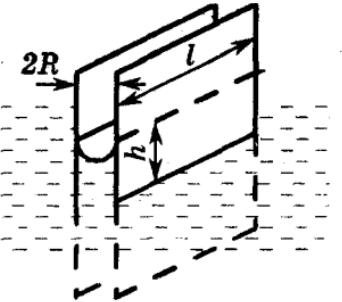
Решение. Для грубой оценки можно принять, что висящая на потолке капля имеет форму полусфера радиуса r . Тогда действующая на нее сила поверхностного натяжения равна $\sigma \cdot 2\pi r$, а сила тяжести капли $mg = \frac{2}{3}\pi r^3 g$, откуда $r = \sqrt{\frac{3\sigma}{\rho g}} = 4,7 \text{ мм.}$

$$r = \sqrt{\frac{3\sigma}{\rho g}} = 4,7 \text{ мм.}$$

10.38. Решение. Рассмотрим ситуацию, в которой образуется цилиндрический мениск жидкости: в жидкость на небольшом расстоянии $2R$ друг от друга опущены две параллельные вертикальные смачиваемые пластины (см. рисунок). На столбик жидкости, поднявшейся между пластинами на высоту h , действует вверх сила поверхностного натяжения $2\sigma l$ (l — длина пластин), уравновешивающая силу тяжести $mg = \rho \cdot 2Rlh \cdot g$. Из равенства $2\sigma l = \rho \cdot 2Rlh \cdot g$ получаем

$$h = \frac{\sigma}{\rho R g}. \text{ Следовательно, давление в жидкости под поверхностью}$$

$$\text{мениска меньше атмосферного на величину } \Delta p = \rho gh = \frac{\sigma}{R}.$$



Полусферический мениск возникает в круглом капилляре, опущенном в жидкость. В этом случае условие равновесия столбика жидкости в капилляре с внутренним радиусом R имеет вид

$$\sigma \cdot 2\pi R = mg = \rho \cdot \pi R^2 hg, \text{ откуда } \Delta p = \rho gh = \frac{2\sigma}{R}.$$

Если жидкость не смачивает поверхность, давление под выпуклой поверхностью мениска увеличивается на величину Δp . Вообще давление всегда меньше с той стороны мениска, куда обращена выпуклость (искривленная поверхность жидкости ведет себя в этом отношении как упругая пленка). Величину Δp называют лапласовским давлением.

10.39. Ответ: к узкому колену; $\Delta p = 510$ Па.

Решение. После выравнивания уровней ртути давление p под ее поверхностью в обоих коленах станет одинаковым. Давление воздуха в узком колене $p_1 =$

$$= p - \frac{2\sigma}{r_1}, \text{ в широком } p_2 = p - \frac{2\sigma}{r_2} \text{ (см. задачу 10.38).}$$

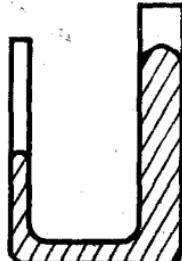
Следовательно, разность давлений в коленах трубки

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 2\sigma \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 510 \text{ Па. Поскольку } \Delta p > 0$$

(т. е. $p_2 > p_1$), вакуумный насос следует присоединить к узкому колену трубки.

10.40. Ответ: в сторону сужения капилляра; в сторону расширения капилляра.

Решение. Для случая смачивания форма калли показана на рис. а.



Очевидно, радиус кривизны сферического мениска 1 меньше радиуса кривизны мениска 2, т. е. $r_1 < r_2$. Давление в жидкости у менисков соответственно: $p_1 = p_a - \frac{2\sigma}{r_1}$, $p_2 = p_a - \frac{2\sigma}{r_2}$ (см. задачу 10.38; здесь p_a — атмосферное давление). Очевидно, $p_1 < p_2$. Жидкость будет перетекать в сторону более низкого давления; значит, капля втягивается в более узкую часть капилляра. С «энергетической» точки зрения такое поведение жидкости обусловлено тем, что она «стремится» увеличить площадь соприкосновения со смачиваемой поверхностью. В случае несмачивания (см. рис. б) $p_1 = p_a + \frac{2\sigma}{r_1}$, $p_2 = p_a + \frac{2\sigma}{r_2}$. Капля будет перемещаться в более широкую часть капилляра, поскольку $p_1 > p_2$.

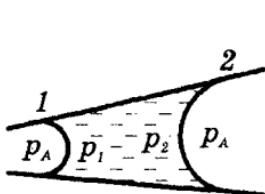


Рис. а

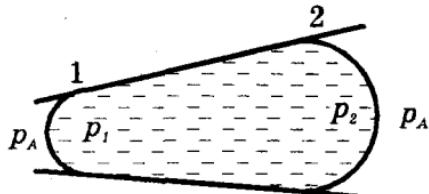


Рис. б

Заметим, что рассмотрение сил, действующих вдоль окружностей с радиусами r_1 и r_2 , привело бы к противоположному (неправильному!) ответу. Дело в том, что стенки капилляра действуют и на боковую поверхность жидкости: «тянут» ее в случае смачивания и «отталкивают» в случае несмачивания.

10.41. Ответ: в обоих случаях $r = 1,5$ мм. В первом случае выпуклость мениска обращена внутрь, а во втором — наружу.

Решение. В обоих случаях радиус кривизны верхнего мениска равен $\frac{d}{2}$ (верхний мениск — полусфера, касающаяся внутренних стенок капилляра). Поэтому давление внутри воды непосредственно под верхним мениском $p_b = p_a - \frac{4\sigma}{d}$. Давление внутри жидкости у нижнего мениска $p_u = p_a + \rho gh$, где h — длина столбика воды. Это давление отличается от атмосферного на величину

$\Delta p = p_b - p_a = \rho gh - \frac{4\sigma}{d}$. Величина Δp связана с r соотношением

$$|\Delta p| = \frac{2\sigma}{r}, \text{ откуда } r = \frac{2\sigma}{|\rho gh - \frac{4\sigma}{d}|}. \text{ При } \Delta p > 0 \text{ выпуклость нижнего}$$

мениска направлена вниз, при $\Delta p < 0$ — вверх; при $\Delta p = 0$ нижний мениск плоский. Разумеется, при допустимых значениях h , т. е. при

$h < \frac{8\sigma}{\rho gd}$, получаем $r \geq \frac{d}{2}$. Таким образом, при $h = 2,0$ см радиус сферического мениска $r = 1,5$ мм и мениск вогнут внутрь (см. рис. а); при $h = 4,0$ см радиус мениска $r = 1,5$ мм и мениск обращен выпуклостью вниз (см. рис. б).

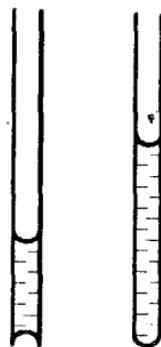
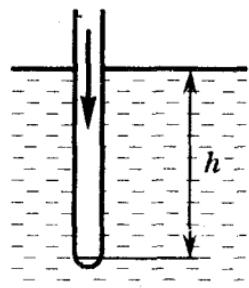


Рис. а

Рис. б

10.42. Ответ: $\Delta p = 490$ Па.

Решение. Непосредственно перед отрывом пузырька радиус кривизны поверхности воды у нижнего края капилляра равен r (см. рисунок). Давление в воде в этом месте равно $p_a + \rho gh$, внутри капилляра оно равно $p_a + \rho gh + \frac{2\sigma}{r}$. Значит, необходимое избыточное давление составляет $\Delta p = \rho gh + \frac{2\sigma}{r} = 490$ Па.



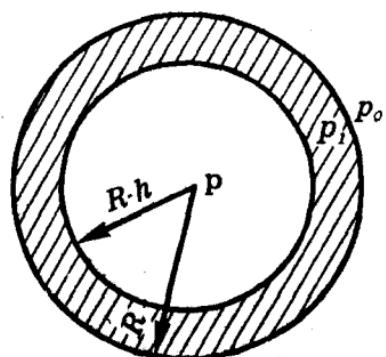
10.43. Решение. Вода может подняться и заполнить достаточно тонкую трубку полностью. Однако *вытекать* из трубки она не будет: воду удержат те самые силы поверхностного натяжения, которые втянули ее в капилляр.

10.44. Ответ: выпуклость мениска обращена вниз, его радиус $r = -\frac{2\sigma}{\rho gh} = 0,74$ мм.

Указание. См. решение задачи 10.41.

10.45. Ответ: $p = p_0 + \frac{4\sigma}{R}$.

Решение. Очевидно, давление внутри мыльной пленки (см. рисунок, на котором толщина пленки намеренно преувеличена) $p_1 = p_0 + \frac{2\sigma}{R}$; давление же внутри пузыря $p = p_1 + \frac{2\sigma}{R-h}$. Поскольку толщина h стенки мыльного пузыря чрезвычайно мала (в сотни раз мень-



ше толщины волоса), получаем $p = p_0 + \frac{4\sigma}{R}$. Таким образом, избыточное давление в мыльном пузыре вдвое больше, чем внутри воздушного пузырька того же радиуса в мыльной воде — ведь в мыльном пузыре избыточное давление создается *двумя* поверхностями.

10.46. Ответ: $F \approx 700$ Н.

Решение. Почему «слипаются» стекла? У их краев образуется цилиндрический мениск, вогнутый внутрь, с радиусом кривизны $\frac{d}{2}$ (величина d определяется высотой неровностей и возможным изгибом стекол). Значит, давление внутри воды (между стеклами) меньше атмосферного на $\Delta p = \frac{2\sigma}{d}$ (см. задачу 10.38). Именно за

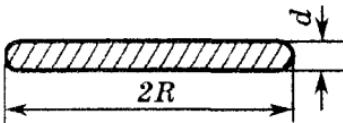
счет этой разности давлений и создается сила $F = \Delta p \cdot S = \frac{2\sigma S}{d}$, прижимающая стекла друг к другу. В данном случае она равна 730 Н. Такую силу необходимо приложить, чтобы «оторвать» стекла друг от друга. Заметим, что чем лучше отполированы стекла и чем они более плоские, тем труднее их разъединить ($F \sim \frac{1}{d}$). Можно, конечно, заставить стекла скользить друг относительно друга, уменьшая тем самым площадь их перекрытия S . Для этого потребуется преодолеть лишь силу трения, намного меньшую F . Однако так стекла можно поцарапать. Лучше всего погрузить стекла в воду — мениск исчезнет, и стекла разъединятся без труда.

10.47. Ответ: $d = 0,15$ мм.

Решение. Поскольку ртутные шарики расположены симметрично, пластиника давит на каждый из них с силой $\frac{mg}{4}$. В результате каждый из шариков сплюзивается в «блин» толщиной d и радиусом R (см. рисунок). Будем предполагать, что $d \ll R$. Объем «блина» $\pi R^2 d$ должен совпадать с начальным объемом шарика:

$$\pi R^2 d = \frac{4}{3} \pi r_0^3. \quad (1)$$

Давление внутри «блина» (избыточное над атмосферным) $p = \frac{mg}{4\pi R^2}$. С другой стороны, это давление обусловлено кривизной боковой поверхности блина. Поскольку $R \gg d$, давление p будет



таким же, как для цилиндрического мениска с радиусом $\frac{d}{2}$, т. е.

$p = \frac{2\sigma}{d}$ (см. задачу 10.38). Итак, $\frac{mg}{4\pi R^2} = \frac{2\sigma}{d}$. Решая это уравнение

совместно с уравнением (1), получаем $d = 4r_0 \sqrt{\frac{2\pi\sigma r_0}{3mg}} = 0,15$ мм,

$$R = \left(\frac{m g r_0^3}{6\pi\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = 3,0 \text{ мм.}$$

Предположение $d \ll R$ вполне оправдалось. Нижняя поверхность пластинки находится на высоте 0,15 мм от горизонтальной плоскости.

10.48. Решение. Непосредственное использование формулы для давления $p = \rho gh$ здесь затруднено. Ведь при остывании плотность ρ воды возрастает, зато высота столба воды h уменьшается. Возникает «конкуренция» этих двух факторов, и ответ определяется тем, какой из них окажется важнее.

Проще всего ответить на этот вопрос для сосуда 1 (цилиндрического). В этом случае можно записать $p = \frac{mg}{S}$, где m — масса жидкости, S — площадь дна. Все величины в правой части этой формулы от температуры не зависят (мы пренебрегаем тепловым расширением самого сосуда по сравнению с тепловым расширением жидкости). Итак, в первом сосуде давление не изменится, хотя уровень воды понизится. Сравним теперь уровни остывшей воды во всех трех сосудах. Очевидно, при одинаковом уменьшении (в результате остывания) объема воды уровень ее в сосуде 2 понизится меньше, а в сосуде 3 — больше, чем в сосуде 1. Поскольку температурная зависимость плотности воды для всех сосудов одинакова, при остывании воды в сосуде 2 давление на дно возрастет, а в сосуде 3 — уменьшится.

10.49. Ответ: 34 см и 24 см.

Решение. Пусть при 0°C длина железного стержня l_{01} , медного l_{02} . Тогда при температуре t длины стержней: $l_1 = l_{01}(1 + \alpha_1 t)$, $l_2 = l_{02}(1 + \alpha_2 t)$, где α_1 и α_2 — температурные коэффициенты линейного расширения железа и меди соответственно. Разница этих длин $\Delta l = l_1 - l_2 = l_{01} - l_{02} + (\alpha_1 l_{01} - \alpha_2 l_{02})t$. Чтобы величина Δl не зависела от температуры, выражение в скобках должно равняться нулю. Таким образом, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} l_{01} - l_{02} = \Delta l, \\ \alpha_1 l_{01} - \alpha_2 l_{02} = 0. \end{cases}$$

Отсюда $l_{01} = \Delta l \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} = 34$ см, $l_{02} = \Delta l \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = 24$ см.

10.50. Решение. Обычный металл с поликристаллической структурой является изотропным. Следовательно, при *однородном* нагревании металла любой отрезок между двумя его точками удлиняется в одно и то же количество раз, независимо от направления этого отрезка. Другими словами, в результате нагревания любого тела *все* его размеры увеличиваются пропорционально, т. е. получившееся тело геометрически подобно исходному. Это общее утверждение позволяет ответить на поставленные вопросы. Внутренний диаметр кольца при нагревании увеличивается (т. е. «дырка» тоже расширяется при нагревании!). Угол ϕ при нагревании не изменяется.

10.51. Ответ: $F = 65 \text{ кН}$.

Решение. При отсутствии опор стержень удлинился бы на $\Delta l = \alpha l \times \Delta t = \alpha l(t_2 - t_1)$, где l — длина стержня. Значит, сила F должна вызвать сжатие стержня на такую же величину. Согласно закону Гука $\sigma = E|\varepsilon|$, где $\sigma = \frac{F}{S}$ — механическое напряжение в стержне, E

— модуль упругости (модуль Юнга) стали, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ — относительное удлинение стержня.

Отсюда находим $F = E\alpha(t_2 - t_1)S = 65 \text{ кН}$.

Обратите внимание на то, какие значительные силы возникают в твердых телах при деформациях, обусловленных изменением температуры.

10.52. Ответ: $t_2 = -210^\circ\text{C}$.

Решение. При охлаждении в проволоке возникает механическое напряжение σ . Проволока лопнет, когда это напряжение достигнет предела прочности $\sigma_{\text{пп}}$. Используя выражение $\sigma = E\alpha(t_1 - t_2)$ (см. задачу 10.51), получаем $t_2 = t_1 - \frac{\sigma_{\text{пп}}}{E\alpha} = -210^\circ\text{C}$.

10.53. Ответ: $\alpha = \left(\frac{mg}{ES}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Решение. Обозначим силу натяжения проволоки T . Из условия равновесия фонаря следует, что $2T\sin\alpha = mg$. С другой стороны, из закона Гука следует, что $T = ES\frac{\Delta l}{2l}$; здесь $\Delta l = 2l\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$ — удлинение проволоки. Итак, $2\sin\alpha \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{mg}{ES}$. При малых α можно считать $\sin\alpha = \alpha$, $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$. Отсюда $\alpha = \left(\frac{mg}{ES}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Разумеется, это решение справедливо при $mg \ll ES$.

10.54. Ответ: $\frac{1}{3}$.

Решение. Пусть на бетон приходится нагрузка (усилие) F_6 , а на железо $F_{ж}$. Как следует из закона Гука, $F_6 = E_6 S_6 |\varepsilon|$, $F_{ж} = E_{ж} \times S_{ж} |\varepsilon|$ (относительное удлинение ε у бетона и железа одинаково; в данном случае оно отрицательно, потому что колонна сжата).

Отсюда $\frac{F_6}{F_{ж}} = \frac{E_6 S_6}{E_{ж} S_{ж}}$. Учитывая также, что $F_b + F_{ж} = F$, получаем

$$\frac{F_{ж}}{F} = \left(1 + \frac{E_6 S_6}{E_{ж} S_{ж}}\right)^{-1} = \frac{1}{3}.$$

Итак, хотя площадь поперечного сечения железа в 20 раз меньше, чем у бетона, железо «принимает на себя» треть всей нагрузки! Это обусловлено значительно большей «жесткостью» железа по сравнению с бетоном.

10.55. Ответ: не менее, чем из 100.

Решение. Пусть количество проволок равно N . Тогда каждую проволоку растягивает сила $\frac{mg}{N}$, создавая в ней механическое

напряжение $\sigma = \frac{mg}{NS} = \frac{4mg}{\pi N d^2}$. Минимально возможное количество проволок N_{min} соответствует случаю $\sigma = \sigma_{нч}$, где $\sigma_{нч}$ — предел прочности стали. Отсюда $N_{min} = \frac{4mg}{\pi d^2 \sigma_{нч}} = 100$ (округление до ближайшего целого числа следует в данном случае проводить в сторону увеличения). В реальной ситуации число проволок N выбирается всегда большим N_{min} . Отношение $\frac{N}{N_{min}}$ характеризует так называемый запас прочности.

11.1. Ответ: см. рисунок.

Решение. Пока нагревается лед, $t(t)$ линейно возрастает от t_1 до 0°C , затем некоторое время $t = 0^\circ\text{C}$ (лед тает), после чего t линейно возрастает от 0°C до t_2 (нагревается вода). Для построения графика сравним длительности τ_1 , τ_2 , τ_3 каждого из этапов, воспользовавшись законом сохранения энергии:

$$P\tau_1 = c_a m (0^\circ - t_1); P\tau_2 = \lambda m; P\tau_3 = c_w m (t_2 - 0^\circ).$$

Здесь P — мощность нагревателя; c_a и c_w — удельная теплоемкость соответственно льда и воды ($c_a = \frac{c_w}{2}$); λ — удельная теплота плавления льда. Из записанных соотношений получаем

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\lambda}{c_a |t_1|} = 16, \quad \frac{\tau_3}{\tau_1} = \frac{c_w t_2}{c_a |t_1|} = 2,0.$$

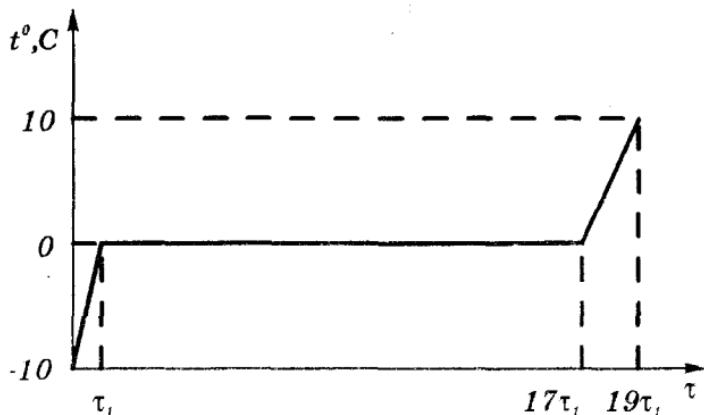


График $t(\tau)$ имеет вид, показанный на рисунке. Обратите внимание: вода нагревается медленнее льда из-за вдвое большей удельной теплоемкости.

11.2. Ответ: $\tau_2 = \tau_1 \frac{L}{c(t_2 - t_1)} = 82$ мин.

11.3. Ответ: $\Theta = 0^{\circ}\text{C}$.

Решение. Эту задачу не очень удобно решать в общем виде: ведь для составления уравнения теплового баланса необходимо заранее знать, какие процессы произойдут со льдом и с водой, т. е. каким будет конечное состояние (только вода, вода и лед или только лед). А это определяется как раз численными значениями m_v , m_l , t_v , t_l . Предположим сначала, что весь лед растает, а вода несколько остынет. Тогда уравнение теплового баланса имеет вид $Q_v + Q_l = 0$, где $Q_v < 0$ — количество теплоты, отданное водой; Q_l — количество теплоты, полученное льдом. Вода охлаждается от t_v до Θ , значит, $Q_v = m_v c_v (\Theta - t_v)$.

Лед нагревается от t_l до 0°C , при 0°C плавится и далее (уже будучи водой!) нагревается от 0°C до Θ . Значит,

$$Q_l = m_l c_l (0^{\circ}\text{C} - t_l) + \lambda m_l + m_l c_v (\Theta - 0^{\circ}\text{C}).$$

Из уравнения теплового баланса получаем

$$\Theta = \frac{m_v c_v t_v + m_l c_l t_l - \lambda m_l}{c_v (m_l + m_v)} = -21^{\circ}\text{C}.$$

Однако полученное значение ($\Theta < 0^{\circ}\text{C}$) противоречит сделанному предположению, что весь лед растает! Значит, это предположение было неверно. Можно теперь предположить, что вся вода замерзнет. Но тогда (предоставляем читателю проверить это) температура Θ окажется положительной, что снова будет противоречить сделанному предположению. Остается лишь один вариант ответа: $\Theta = 0^{\circ}\text{C}$, т. е. весь лед не растает и вся вода не

замерзнет,— в калориметре будет смесь воды со льдом. К этому результату можно прийти гораздо быстрее, если заметить, что вода, даже остыв до 0°C (а оставаться дальше, не замерзая, она не может!), отдаст количество теплоты $m_{\text{в}}c_{\text{в}}t_{\text{в}}$. Этого количества теплоты хватит лишь на плавление льда массой $\frac{m_{\text{в}}c_{\text{в}}t_{\text{в}}}{\lambda} = 0,38$ кг, что меньше начальной массы льда $m_{\text{л}}$ (при этом мы даже не учли необходимости нагревания льда до 0°C). Значит, весь лед растаять не может, т. е. $\Theta < 0^{\circ}\text{C}$. Аналогично доказывается, что $\Theta \geq 0^{\circ}\text{C}$. Отсюда $\Theta = 0^{\circ}\text{C}$.

11.4. Ответ: а) $\Theta = \frac{m_{\text{в}}c_{\text{в}}t_{\text{в}} + m_{\text{л}}c_{\text{л}}t_{\text{л}} - \lambda m_{\text{л}}}{c_{\text{в}}(m_{\text{в}} + m_{\text{л}})} = 13,5^{\circ}\text{C}$, $V = \frac{m_{\text{в}} + m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} = 1,6$ л.

б) $\Theta = 0^{\circ}\text{C}$, $V = \frac{m_{\text{л}} + \Delta m}{\rho_{\text{л}}} + \frac{m_{\text{в}} - \Delta m}{\rho_{\text{в}}} = 10,4$ л,

где $\Delta m = -\frac{m_{\text{в}}c_{\text{в}}t_{\text{в}} + m_{\text{л}}c_{\text{л}}t_{\text{л}}}{\lambda} = 0,13$ кг.

11.5. Ответ: $\Theta = 0^{\circ}\text{C}$; масса льда увеличится до 500 г.

Решение. Проанализируем условие задачи (см. также решение задачи 11.3). При охлаждении всей воды до 0°C она выделит количество теплоты $c_{\text{в}}(m_1t_1 + m_2t_2) = 16,8$ кДж. Легко убедиться, что это меньше количества теплоты $\lambda m_{\text{л}}$, необходимого для плавления *всего* льда. Значит, $\Theta < 0^{\circ}\text{C}$. С другой стороны, на нагревание льда до 0°C уйдет количество теплоты $-c_{\text{л}}m_{\text{л}}t_3 = 50,4$ кДж. Это меньше, чем выделилось бы теплоты при замерзании *всей* воды. Поэтому $\Theta > 0^{\circ}\text{C}$. Итак, мы пришли к выводу, что $\Theta = 0^{\circ}\text{C}$. Для охлаждения воды и нагревания льда до этой температуры требуется количество теплоты

$$Q = 50,4 \text{ кДж} - 16,8 \text{ кДж} = 33,6 \text{ кДж.}$$

Оно может выделиться только за счет замерзания воды массой $\Delta m = \frac{Q}{\lambda} = 0,10$ кг. Итак, при установлении теплового равновесия масса льда увеличится на $\Delta m = 100$ г и составит $m = m_3 + \Delta m = 500$ г.

11.6. Ответ: 0°C .

Указание. См. задачу 11.3.

11.7. Ответ: 112 г.

Решение. Необходимое для плавления льда количество теплоты $Q_{\text{л}} = m_{\text{л}}\lambda$ выделяется при конденсации некоторой массы пара $m_{\text{п}}$ и охлаждении получившейся воды до 0°C . Следовательно, урав-

нение теплового баланса имеет вид

$$m_a \lambda - m_n L + m_n c(t_n - t_n) = 0,$$

где L — удельная теплота парообразования, а c — удельная теплоемкость воды. Отсюда $m_n = m_a \frac{\lambda}{L + c_n(t_n - t_n)}$. Полная масса образовавшейся в калориметре воды

$$m = m_a + m_n = m_a \left(1 + \frac{\lambda}{L + c_n(t_n - t_n)}\right) = 112 \text{ г.}$$

11.8. Ответ: $m_n = 3,5 \text{ кг.}$

Указание. Уравнение теплового баланса имеет вид

$$Q_a + Q_b + Q_n = 0,$$

где $Q_a = m_a \lambda + m_a c(\Theta - t_1)$; $Q_b = m_b c(\Theta - t_1)$; $Q_n = -m_n L + m_n c(\Theta - t_n)$.

11.9. Ответ: 6,6 г.

Указание. Если обозначить массу содержащейся в мокром снеге воды через m_b , то уравнение теплового баланса приобретает вид:

$$-m_1 c_b \Delta t + (m_2 - m_b) \lambda + m_2 c_b (t_1 - \Delta t) = 0$$

(мы учли, что температура мокрого снега равна 0°C).

11.10. Ответ: $t \geq 125^\circ\text{C}.$

Решение. Пусть объем куба (и выплавленной во льду ямки) равен V . Разумеется, мы пренебрегаем изменением потенциальной энергии системы при погружении куба в лед — оно ничтожно мало по сравнению с количеством передаваемой теплоты. Масса куба равна $\rho_A V$, масса расплавленного льда $\rho_L V$ (здесь ρ_A , ρ_L — соответственно плотность алюминия и льда). Уравнение теплового баланса имеет вид $\rho_A V c_A t = \lambda \rho_L V$, откуда $t = \frac{\lambda \rho_L}{c_A \rho_A} = 125^\circ\text{C}$. При большей температуре верхняя грань куба окажется ниже поверхности льда.

11.11. Ответ: $m_a = 0,76 \text{ г.}$

Решение. При замерзании части воды будет выделяться теплота, благодаря чему образующийся лед и оставшаяся вода будут нагреваться до 0°C. Проследить этот процесс во всех деталях очень сложно, но в этом и нет необходимости: нас ведь интересует только конечный результат, а его можно узнать, воспользовавшись законом сохранения энергии в форме уравнения теплового баланса. Представим себе воображаемый процесс, при котором сначала вся вода нагревается до 0°C, «занимая» при этом некоторое количество теплоты, а потом часть воды замерзает, отдавая в точности то же самое количество теплоты. Для такого процесса уравнение теплового баланса имеет вид: $m_c (0^\circ\text{C} - t) = \lambda m_a$, откуда $m_a = \frac{m_c |t|}{\lambda} = 0,76 \text{ г.}$

11.12. Ответ: 12%.

Решение. Механизм явления описан в решении задачи 11.11. Уравнение теплового баланса имеет вид: $m_n L = (m - m_n)\lambda$, где m — начальная масса воды, m_n — масса испарившейся воды. Отсюда $\frac{m_n}{m} = \frac{\lambda}{L + \lambda} = 0,12$. Итак, испарится 12% воды.

11.13. Ответ: $v = 840$ м/с.

Решение. Будем считать, что вся начальная кинетическая энергия льдинок $2 \cdot \frac{mv^2}{2}$ (m — масса каждой льдинки) переходит в их внутреннюю энергию. Льдинки нагреваются от t_1 до $t_2 = 0^\circ\text{C}$ и плавятся. Закон сохранения энергии дает

$$\frac{mv^2}{2} = 2m(c_n(t_2 - t_1) + \lambda),$$

откуда $v = \sqrt{2(c_n(t_2 - t_1) + \lambda)} = 840$ м/с.

11.14. Ответ: 36%.

Решение. Внутренняя энергия пули увеличится на $Q = \eta\left(\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2}\right)$, где $\eta = 0,6$. Эта энергия идет на нагревание всей пули до температуры плавления свинца t_2 и плавление некоторой ее части массой m_x : $Q = mc(t_2 - t_1) + m_x\lambda$. Приравнивая оба выражения для Q , получаем $\frac{m_x}{m} = \frac{\eta(v_0^2 - v^2)}{2\lambda} - \frac{c(t_2 - t_1)}{\lambda} = 0,36$.

11.15. Ответ: $v = 2,7$ м/с.

Решение. Будем считать, что вся выделяемая установкой за промежуток времени τ энергия идет только на нагрев протекающей воды. Тогда $N\tau = mc\Delta t$, где m — масса протекающей за время τ воды, c — удельная теплоемкость воды. Поскольку $m = \rho \frac{\pi d^2}{4} \cdot v\tau$,

получаем: $v = \frac{4N}{\pi\rho c \Delta t d^2} = 2,7$ м/с.

11.16. Ответ: $h \approx 70$ км.

Решение. Согласно условию, на нагрев воды массой m расходуется энергия, равная $\frac{1}{2}mgh$. Поэтому $\frac{1}{2}mgh = mc(t_2 - t_1)$, где $t_2 = 100^\circ\text{C}$.

Отсюда $h = \frac{2c(t_2 - t_1)}{g} \approx 70$ км.

Полученный результат показывает, сколь велика энергия, выделяемая и поглощаемая в тепловых процессах.

11.17. Ответ: внутренняя энергия воздуха в комнате не изменяется.
Решение. Напрашивается «очевидный» ответ: внутренняя энергия U газа изменяется прямо пропорционально его абсолютной температуре. Однако будем внимательны: это утверждение справедливо только тогда, когда масса m газа неизменна! А можно ли в данном случае считать $m = \text{const}$? Какие параметры воздуха *внутри* комнаты остаются при нагревании неизменными? Очевидно, $V = \text{const}$; кроме того, давление в комнате (равное атмосферному) тоже не должно измениться. А это возможно только вследствие утечки части воздуха из комнаты при нагревании. Если представить себе герметично закрытую «комнату», то даже при относительно небольшом повышении температуры ($\Delta T \approx 10 \text{ K}$)

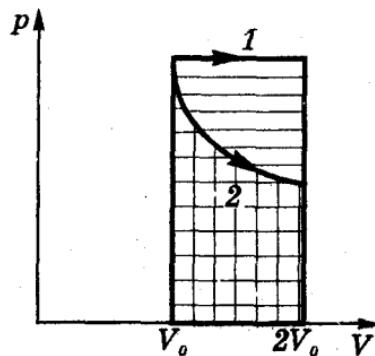
давление в ней повысится на $\Delta p = p \frac{\Delta T}{T} \approx 3 \text{ кПа}$, а такого перепада давлений не выдержат оконные стекла. Итак, $p = \text{const}$, а m уменьшается.

Воспользуемся теперь тем, что внутренняя энергия идеального газа пропорциональна¹⁾ величине $\frac{m}{M}RT$. Согласно уравнению Менделеева-Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$, поэтому $U \sim pV$. Отсюда следует,

что при нагревании $U = \text{const}$. Внутренняя энергия воздуха *в комнате* вообще не растет: всю поступающую от источника тепла энергию уносит уходящий наружу воздух! Наружный атмосферный воздух становится чуть-чуть теплее — благодаря этому зимой температура воздуха в большом городе на градус-два выше, чем за городом (это особенно заметно при температуре, близкой к 0°C : в городе оттепель, а за городом лежит снег).

11.18. Ответ: большую работу газ совершил при изобарном расширении.

Решение. Работа газа при небольшом изменении объема $\Delta A' = p\Delta V$. Поскольку при изотермическом расширении давление падает, работа в этом случае совершается меньшая. Особенность нагляден этот вывод при рассмотрении графиков обоих процессов в координатах p, V (см. рисунок). Площадь фигуры, отмеченной горизонтальной штриховкой, численно равна работе при изобарном расширении;



¹⁾ Численный множитель для воздуха, преимущественно двухатомного газа, можно считать равным $5/2$. Однако в данном случае значение величины этого множителя не требуется.

площадь фигуры, отмеченной вертикальной штриховкой, соответствует работе при изотермическом расширении.

11.19. Ответ: газ получал тепло на этапах 1-2, 2-3; отдавал на этапах 3-4, 4-1. Получено большее количество теплоты, чем отдано.

Решение. Для любого этапа процесса можно записать уравнение первого закона термодинамики:

$$Q = \Delta U + A'. \quad (1)$$

Здесь Q — полученное газом количество теплоты ($Q < 0$ означает, что газ *отдает тепло* холодильнику); ΔU — изменение внутренней энергии газа; A' — совершенная газом работа ($A' > 0$ при расширении газа, $A' < 0$ при его сжатии).

Внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры, поэтому $\Delta U > 0$ при нагревании и $\Delta U < 0$ при охлаждении газа. Из уравнения состояния газа следует, что газ нагревается в процессах 1-2 и 2-3, а охлаждается в процессах 3-4 и 4-1. Таким образом, на различных этапах процесса имеем:

$$1-2: \Delta T > 0, \Delta U > 0; V = \text{const}, A' = 0;$$

$$2-3: \Delta T > 0, \Delta U > 0; \Delta V > 0, A' > 0;$$

$$3-4: \Delta T < 0, \Delta U < 0; V = \text{const}, A' = 0;$$

$$4-1: \Delta T < 0, \Delta U < 0; \Delta V < 0, A' < 0.$$

Из соотношения (1) получаем:

$$Q_{1-2} > 0, Q_{2-3} > 0, Q_{3-4} < 0, Q_{4-1} < 0.$$

Хотелось бы предостеречь читателя от чрезмерно упрощенных рассуждений: «когда газ нагревается, он получает теплоту, когда охлаждается — отдает». Для рассматриваемых здесь изобарных и изохорных процессов это действительно так, но, вообще говоря, бывает и иначе (см., например, задачу 11.25). Для ответа на последний вопрос воспользуемся первым законом термодинамики в применении ко всему циклическому процессу. При этом $\Delta U = 0$ (газ возвращается в исходное состояние) и $Q = A'$. Газ совершает работу только на этапах 2-3 и 4-1, причем $(A')_{2-3} = p_2(V_3 - V_2)$ и $A'_{4-1} = -p_1(V_3 - V_2)$. Значит, $A' = A'_{2-3} + A'_{4-1} = (p_2 - p_1)(V_3 - V_2) > 0$ (полезно иметь в виду, что A' численно равна площади внутри графика циклического процесса в координатах p, V). Итак, $Q = A' > 0$. Таким образом, газ получает большее количество теплоты, чем отдает, — ведь иначе он не смог бы совершать работу.

11.20. Ответ: см. рисунок; воздух получает тепло на этапах 1-2-3-4; отдает тепло на этапе 4-1.

Указание. См. решение задачи 11.19.

11.21. Ответ: большее количество теплоты газ получит во втором случае.
Решение. Очевидно, в первом случае газ испытывает изохорное нагревание, во втором же случае нагревание происходит изобарно. В обоих случаях изменение температуры ΔT одно и то же. Поскольку внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры, изменение внутренней энергии ΔU в обоих случаях одинаково.

При изохорном процессе газ, естественно, не совершает работы; при изобарном — газ расширяется, совершая положительную работу A' . Согласно первому закону термодинамики в первом случае $Q_1 = \Delta U$, а во втором случае $Q_2 = \Delta U + A'$.

Итак, $Q_2 > Q_1$, т. е. изобарное нагревание требует сообщения газу большего количества теплоты. Это неудивительно: такое нагревание сопровождается расширением газа и совершением работы.

11.22. Решение. Из определения молярной теплоемкости C следует:

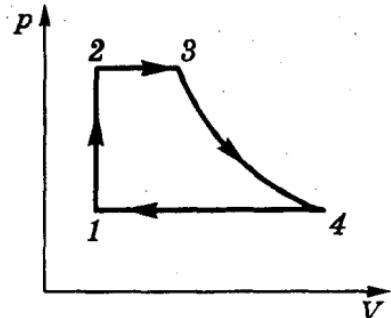
$$C = \frac{Q}{v\Delta T},$$

где v — количество вещества. При изохорном нагревании газ не совершает работы, поэтому согласно первому закону термодинамики $Q_v = \Delta U$. Следовательно, $C_v = \frac{\Delta U}{v\Delta T}$. При изобарном нагревании $Q_p = \Delta U + A'$, причем работа газа $A' = p\Delta V$. Как следует из уравнения Менделеева-Клапейрона, $p\Delta V = vR\Delta T$, поэтому $Q_p = \Delta U + vR\Delta T$ и $C_p = \frac{\Delta U}{m\Delta T} + R$. Отсюда и следует соотношение $C_p - C_v = R$.

11.23. Ответ: например, кислород.

Решение. Воспользуемся соотношением для молярных теплоемкостей газа $C_p - C_v = R$ (см. задачу 11.22). Из заданных в условии величин определим удельные теплоемкости газа ($c_p = \frac{Q_p}{m\Delta T}$;

$c_v = \frac{Q_v}{m\Delta T}$) и воспользуемся связью между молярной и удельной теплоемкостями $C = cM$, где M — молярная масса газа. Из



К задаче 11.20

приведенных соотношений следует: $M = \frac{Rm\Delta T}{Q_p - Q_v} = 0,032 \text{ кг/моль.}$

Как раз такую молярную массу имеет кислород.

11.24. Ответ: $C_v = \frac{3}{2}R = 12,5 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К);}$

$C_p = \frac{5}{2}R = 21 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К); } \gamma = 1,67.$

Решение. При постоянном объеме $C_v = \frac{\Delta U}{v\Delta T}$ (см. решение задачи

11.22). Для одноатомного идеального газа, как известно, $U = \frac{3}{2}vRT$, поэтому $C_v = \frac{3}{2}R = 12,5 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К). Отсюда } C_p = C +$

$+ R = \frac{5}{2}R = 21 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К) и } \gamma = \frac{5}{3} = 1,67.$ Разность между C_p и C_v обусловлена работой, совершающей газом при изобарном нагревании.

Жидкость при изобарном нагревании тоже расширяется, но очень слабо, поэтому $C_p - C \ll C_v$; этой разностью можно пренебречь и считать $\frac{C_p}{C_v} = 1$. В справочных таблицах для удельной теплоемкости газа обычно оговаривается, для какого процесса указана теплоемкость газа (например, при постоянном давлении). Для жидкостей и твердых тел такие оговорки не делаются.

11.25. Решение. На этот вопрос часто дают утвердительный ответ, ссылаясь на известную формулу $Q = c\Delta T$, где c — удельная теплоемкость вещества. Разумеется, эта формула применима и к газам, но для газов (см. задачи 11.21, 11.22) величина c может быть совершенно различной при разных процессах. Может быть, существует процесс, для которого $c < 0$? Запишем первый закон термодинамики в виде $\Delta U = Q - A'$ и учтем, что для любого идеального газа внутренняя энергия U прямо пропорциональна абсолютной температуре T . Следовательно, вопрос можно поставить так: обязательно ли $\Delta U > 0$, если $Q > 0$? Теперь ясно, что все зависит от величины A' — работы, совершенной газом. Из первого закона термодинамики следует, что если A' достаточно велика (газ быстро расширяется), ответ на поставленный вопрос может быть и отрицательным. Подтвердим сказанное примерами:

1. При изотермическом расширении $Q > 0$, $A' > 0$, $\Delta T = 0$ (т. к. $T = \text{const}$). Следовательно, в этом процессе $c \rightarrow \infty$!

2. При адиабатном расширении или сжатии $Q = 0$, $\Delta T \neq 0$, т. е. $c = 0$.

3. Если открыть вентиль баллона, содержащего газ при очень высоком давлении, газ начнет быстро расширяться. Температура его при этом может настолько понизиться, что на баллоне появится иней (даже летом). Значит, в ходе такого процесса газ получает тепло от окружающей среды, но охлаждается (т. е. $Q > 0$, $\Delta T < 0$). Следовательно, в этом случае $c < 0$.

11.26. Ответ: в процессе 3-2-4-3.

Решение. В этой задаче можно обойтись без расчетов, сделав ответ геометрически очевидным. Работа газа A' имеет простой геометрический смысл: поскольку при малом изменении объема ΔV работа $\Delta A' = p\Delta V$, где p — давление газа, то A' при расширении от V_1 до V_2 численно равна площади криволинейной трапеции под графиком $p(V)$ (см. рис. а). При циклическом процессе возрастание объема сменяется его убыванием, при сжатии работа $A' < 0$. На рис. б, например, вертикальной штриховкой отмечена площадь, равная работе A'_1 при расширении газа; горизонтальной штриховкой — площадь, равная $|A'_2|$, где $A'_2 < 0$ — работа газа при сжатии. Тогда полная работа газа за цикл $A' = A'_1 + A'_2 = A'_1 - |A'_2|$ представляет собой просто площадь *внутри* графика циклического процесса в координатах p , V ; причем $A' > 0$, если цикл «проходится» по часовой стрелке, и $A' < 0$, если против часовой стрелки.

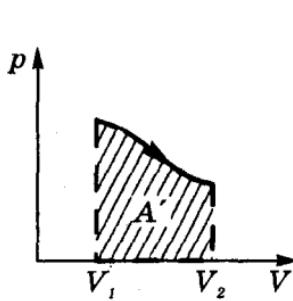


Рис. а

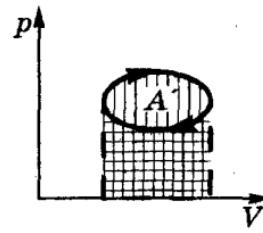


Рис. б

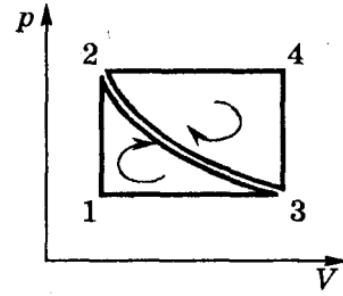


Рис. в

Чтобы воспользоваться этим результатом, следует построить графики заданных процессов в координатах p , V (см. рис. в). Поскольку гипербола (участок графика 2-3) делит прямоугольник на две неравные части, получаем $A'_{3243} > A'_{1231}$.

11.27. Ответ: $A' = vR(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2$, где $v = 1$ моль.

Решение. Температура в состояниях 2 и 4 (лежащих на одной изотерме) $T_2 = T_4 = \sqrt{T_1 T_3}$ (см. задачу 9.32). Искомая работа A' равна площади прямоугольника (см. рисунок к условию):

$$A' = (p_2 - p_1)(V_3 - V_1) = p_2 V_3 - p_1 V_3 - p_2 V_1 + p_1 V_1.$$

Учитывая, что $p_2 = p_3$, $V_3 = V_4$, $p_1 = p_4$, $V_1 = V_2$, получим:

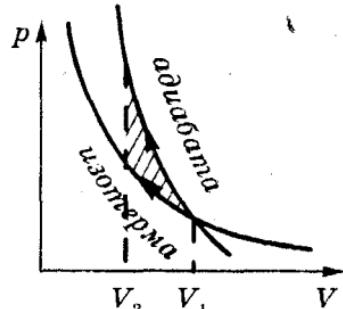
$$A' = p_3V_3 - p_4V_4 - p_2V_2 + p_1V_1.$$

Для любого из состояний газа $pV_i = \nu RT_i$, где $\nu = 1$ моль; $i = 1, 2, 3, 4$. Поэтому

$$A' = \nu R(T_3 - T_4 - T_2 + T_1) = \nu R(T_3 + T_1 - 2\sqrt{T_3T_1}) = \nu R(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2.$$

11.28. Ответ: в случае *b* конечная температура и работа при сжатии больше.

Решение. Очевидно, в случае *a* сжатие происходит медленнее. Как может скорость сжатия повлиять на конечную температуру? При сжатии газ получает энергию за счет работы A , совершенной внешними силами. Если сжатие достаточно быстрое, то теплообмен «не успевает» за этим процессом, вследствие чего процесс можно считать адиабатным ($Q = 0$). Поэтому газ нагревается ($\Delta U = A > 0$). При медленном сжатии теплообмен обеспечивает равенство температур газа и окружающей среды (процесс изотермический). Поскольку при быстром сжатии газ нагревается, его давление растет быстрее, чем при медленном сжатии. Другими словами, в координатах p, V график адиабаты имеет большую крутизну, чем график изотермы. Поэтому работа при адиабатном сжатии от V_1 до V_2 (см. рисунок) больше, чем при изотермическом. Разность работ численно равна заштрихованной на графике площади.



11.29. Ответ: $Q = 7,9$ кДж.

Решение. Можно просто воспользоваться формулами $Q = c_p m \Delta T$ и $m = \nu M$, где c_p — удельная теплоемкость кислорода при постоянном давлении, M — молярная масса кислорода. При изобарном процессе объем прямо пропорционален абсолютной температуре. Поэтому $T_2 = 2T_1$ и $\Delta T = T_1 = 273$ К. Таким образом, $Q = \nu c_p M T_1 = 7,9$ кДж. Читатели, знакомые с общими выражениями для теплоемкости идеального газа, могут найти более короткое решение, не требующее даже табличных сведений: $Q = \nu C_p \Delta T = \nu C_p T_1 = \frac{7}{2} \nu R T_1 = 7,9$ кДж. Здесь $C_p = \frac{7}{2} R$ — молярная теплоемкость двухатомного идеального газа при постоянном давлении.

11.30. Ответ: $Q = 126$ Дж.

Решение. Очевидно, при закрепленном поршне газ не совершает работы и потому $Q_1 = \Delta U$. В случае, когда поршень не закреплен,

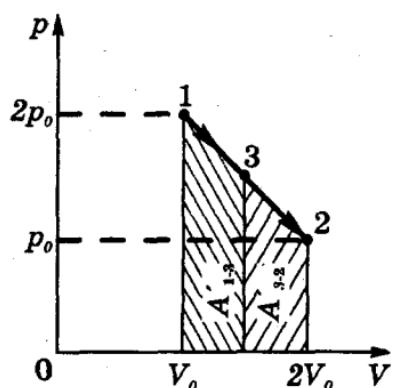
газ расширяется изобарно. При этом изменение ΔU его внутренней энергии такое же: ведь внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры. Работа газа при расширении $A' = p\Delta V$, так что $Q = \Delta U + A' = Q_1 + p\Delta V$. Учтем также, что $p = \frac{mg}{S} + p_0$ и $\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta T}{T_0}$ (т. к. при изобарном процессе объем прямо пропорционален абсолютной температуре газа). Тогда $Q = Q_1 + \frac{(mg + p_0 S)V_0 \Delta T}{ST_0} = 126$ Дж.

11.31. Ответ: $1,25p_0V_0$; при охлаждении газ получает количество теплоты, равное $0,25p_0V_0$.

Решение. Согласно результату решения задачи 9.34 газ сначала нагревается от температуры $T_1 = \frac{2p_0V_0}{vR}$ до тем-

пературы $T_3 = \frac{9}{8}T_1$ (точка 3 на рисунке с координатами $V_3 = \frac{3}{2}V_0$ и $p_3 = \frac{3}{2}p_0$),

а затем охлаждается от T_3 до $T_2 = T_1$. На обоих этапах (1-3 и 3-2) газ, расширяясь, совершает работу. Работу на каждом этапе нетрудно определить как площадь соответствующей трапеции:



$$A_{1-3}' = \frac{2p_0 + 1,5p_0}{2} \cdot \frac{V_0}{2} = 0,875p_0V_0;$$

$$A_{3-2}' = \frac{1,5p_0 + p_0}{2} \cdot \frac{V_0}{2} = 0,625p_0V_0.$$

Изменение внутренней энергии одноатомного газа задается выражением $\Delta U = \frac{3}{2}vRT$, значит,

$$\Delta U_{1-3} = \frac{3}{2}vR(T_3 - T_1) = \frac{3}{16}vRT_1 = \frac{3}{8}p_0V_0;$$

$$\Delta U_{3-2} = \frac{3}{2}vR(T_2 - T_3) = -\frac{3}{8}p_0V_0.$$

Мы воспользовались здесь уравнением Менделеева-Клапейрона $2p_0V_0 = vRT_1$. Остается лишь применить первый закон термодинамики:

$$Q_{1-3} = \Delta U_{1-3} + A_{1-3}' = 1,25p_0V_0; Q_{3-2} = \Delta U_{3-2} + A_{3-2}' = 0,25p_0V_0.$$

Нетрудно проверить, что $Q_{1-2} = Q_{1-3} + Q_{3-2} = A_{1-2}'$. Ведь полное

изменение внутренней энергии в ходе процесса равно нулю (точки 1 и 2 лежат на одной изотерме).

Обратите внимание: газ получает теплоту при охлаждении! Ничего удивительного в этом нет: просто газ расширяется настолько быстро, что подводимой к нему теплоты недостаточно для совершения работы и газу «приходится» отдавать часть своей внутренней энергии. Заметим, что теплоемкость газа в этом процессе отрицательна (см. задачу 11.25).

11.32. Ответ: $T = T_0 + \frac{2mv^2}{3vR}$.

Решение. При сближении поршней происходит адиабатное сжатие газа. Оно, как известно, сопровождается нагреванием. Максимальная температура достигается при максимальном сжатии, т. е. в момент, когда поршни перестают сближаться. В этот момент их скорости u одинаковы и могут быть определены из закона сохранения импульса: $3mv + mv = 2mu$, откуда $u = 2v$. При адиабатном сжатии сумма кинетической энергии поршней и внутренней энергии газа ($U = \frac{3}{2}vRT$) остается постоянной:

$$\frac{m(3v)^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{3}{2}vRT_0 = 2 \cdot \frac{m(2v)^2}{2} + \frac{3}{2}vRT.$$

Отсюда $T = T_0 + \frac{2mv^2}{3vR}$.

11.33. Ответ: $m = \frac{Ns}{\eta qv} = 0,22$ кг (здесь $\eta = 0,3$; q — удельная теплота сгорания бензина).

11.34. Ответ: $m = \frac{4Fl}{\eta q} = 42$ т (здесь $\eta = 0,25$, q — удельная теплота сгорания керосина).

11.35. Решение. Тепло, отбиравшееся у воздуха и продуктов внутри холодильного шкафа, может быть передано только воздуху в той же комнате. Энергия же, потребляемая холодильником из сети, также превращается во внутреннюю и приводит к повышению температуры в комнате. Так что температура в комнате в конечном счете повысится! Правда, при работающем холодильнике температура в разных местах комнаты будет неодинаковой. Она будет несколько ниже у раскрытой дверцы и выше у задней стенки холодильника, где расположен теплообменник и происходит основное выделение тепла (попробуйте наощупь трубы теплообменника!).

11.36. Ответ: $P = 6,3 \text{ Вт}$.

Решение. Минимальную мощность будет потреблять холодильник, представляющий собой обратимую тепловую машину, которая работает по обращенному циклу. При работе по прямому циклу КПД такой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{A}{A + Q_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Здесь A — совершаемая работа, Q_1 — количество теплоты, получаемой от нагревателя (воздуха в комнате), Q_2 — количество теплоты, передаваемой холодильнику. При работе по обращенному циклу $A = Pt$, а $Q_2 = Q$ (холодильник должен отдавать такое же количество теплоты, какое он получает через стенки от окружающего воздуха). Поэтому $P = \frac{Q(T_1 - T_2)}{tT_2} = 6,3 \text{ Вт}$.

В действительности современные домашние холодильники потребляют мощность на порядок большую. Дело в том, что цикл работы холодильного агрегата весьма далек от обратимого.

11.37. Решение. Разумеется, никакого противоречия с законом сохранения энергии здесь нет: если за один цикл работы тепловой насос потребляет из сети энергию W и передает воздуху в комнате количество теплоты $Q > W$ (при этом коэффициент полезного действия $\eta_{\text{пл}} = \frac{Q}{W} > 1$), то недостающее количество теплоты $Q' = Q - W$ поступает от наружного воздуха. Так может действовать тепловой двигатель, запущенный «в обратную сторону»: отбирающий тепло у менее нагреветого тела (наружного воздуха с температурой T') и передающий тепло более нагретому телу (воздуху в комнате с температурой $T > T'$). Если «обратить» работу теплового насоса, работающего по обратимому циклу, и заставить его работать как обычный тепловой двигатель, то его КПД

$\eta_{\text{пл}} = \frac{W}{Q} = \frac{T - T'}{T} < 1$ (из обратимости следует, что за один цикл совершается полезная работа W). Тогда $\eta_{\text{пл}} = \frac{1}{\eta_{\text{пл}}} = \frac{T}{T - T'} > 1$. Очевидно, чем меньше разность температур $T - T'$, тем меньше энергии потребуется для отопления. Так, при $t = 20^\circ\text{C}$ и $t' = 10^\circ\text{C}$ величина W составляет лишь 3,4% от величины Q ; при $t = 20^\circ\text{C}$ и $t' = -20^\circ\text{C}$ эта доля составляет уже 14%. На самом деле, конечно, ни один тепловой насос не работает по обратимому циклу. Тем не

менее экономия энергии получается очень большой. Широкому

распространению тепловых насосов мешает пока их большая стоимость по сравнению с нагревательными приборами.

11.38. Ответ: $Q = Pt + m(ct + \lambda)$, где c — удельная теплоемкость воды, λ — удельная теплота плавления льда.

Указание. Из закона сохранения энергии следует, что количество теплоты Q равно сумме количества теплоты, отобранного у содержимого холодильной камеры ($|Q_b| = mc(t - 0^\circ\text{C}) + m\lambda$), и энергии, полученной от сети ($W = Pt$).

11.39. Ответ: $t = 65^\circ\text{C}$.

Решение. Согласно определению $\eta = \frac{Q_b}{Q_u}$, где Q_b — количество теплоты, полученное водой; Q_u — количество теплоты, выделившееся при сгорании метана. Для Q_b получаем

$$Q_b = m_b c(t - t_0) = \frac{\pi \rho d^2 u c (t - t_0) \tau}{4},$$

где m_b — масса воды, протекающей через колонку за время $\tau = 1$ ч; ρ — плотность воды; c — ее удельная теплоемкость. С другой стороны, $Q_u = q m_u$, где масса метана m_u определяется из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV_0 = \frac{m_u}{M} RT_0$ (здесь $M = 0,016$ кг/моль).

$$\text{Отсюда } t = t_0 + \frac{4\eta M p V_0 q}{\pi R T_0 \rho d^2 u c \tau} = 65^\circ\text{C}.$$

11.40. Ответ: 17%.

Решение. По определению КПД цикла $\eta = \frac{A'}{Q_u}$, где A' — совершенная газом за цикл работа; Q_u — количество теплоты, полученной за цикл от нагревателя. Работа A' легко определяется — она численно равна площади внутри графика циклического процесса в координатах p, V (см. решение задачи 11.26). В данном случае $A' = 2p_0 V_0$ (это площадь прямоугольника 1-2-3-4).

Для определения Q_u необходимо сначала выяснить, на каких этапах процесса газ получал тепло от нагревателя. Для данного цикла это этапы 1-2 и 2-3 (см. решение задачи 11.19). Поэтому $Q_u = Q_{1-2} + Q_{2-3}$. Для нахождения этих величин необходимо определить соотношение между температурами газа в состояниях 1, 2 и 3. Воспользовавшись уравнением Клапейрона $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_3 V_3}{T_3}$, получим: $T_2 = 2T_1$, $T_3 = 6T_1$. Используя результат

решения задачи 11.24, можно записать:

$$Q_{1-2} = vC_v(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}vRT_1,$$

$$Q_{2-3} = vC_p(T_3 - T_2) = \frac{5}{2}vR \cdot 4T_1 = 10vRT_1.$$

Здесь v — количество вещества.

Подставив полученные значения A' , Q_{1-2} , Q_{2-3} в формулу для КПД, получим: $\eta = \frac{2p_0V_0}{11,5vRT_1}$. Применяя уравнение Менделеева-Клапейрона $p_0V_0 = vRT_1$, находим: $\eta = \frac{4}{23} \approx 0,17$.

11.41. Ответ: 15%.

Решение. КПД цикла $\eta = \frac{A'}{Q_n}$, где A' — работа газа за цикл; Q_n — количество теплоты, полученное от нагревателя за цикл. Работа газа численно равна площади треугольника 1-2-3, поэтому

$$A' = \frac{3V_0 \cdot 3p_0}{2} = \frac{9p_0V_0}{2}.$$

Газ получает тепло только на этапе 1-2: здесь происходит расширение газа (т. е. $A'_{1-2} > 0$) и его нагревание (т. е. $\Delta U_{1-2} > 0$), так что $Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A'_{1-2} > 0$. На двух других этапах газ теплоотдает (см. задачу 11.19). Работа A'_{1-2} вычисляется как площадь соответствующей трапеции:

$$A'_{1-2} = \frac{p_0 + 4p_0}{2} \cdot 3V_0 = \frac{15p_0V_0}{2}.$$

Изменение внутренней энергии газа на этапе 1-2 составит:

$$\Delta U_{1-2} = \frac{3}{2}vR(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(4p_0 \cdot 4V_0 - p_0V_0) = \frac{45p_0V_0}{2}.$$

Следовательно, $Q_n = Q_{1-2} = 30p_0V_0$ и $\eta = 0,15$.

11.42. Ответ: $\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2$.

Решение. КПД любого цикла можно записать в виде

$$\eta = \frac{Q_{\text{нагр}} - Q_{\text{хол}}}{Q_{\text{нагр}}}.$$

Здесь $Q_{\text{нагр}}$ — количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя; $Q_{\text{хол}}$ — количество теплоты, отданное рабочим телом холодильнику. В данном случае в цикле 1-2-3-4-1 рабочее тело получает тепло в процессах 1-2 и 2-3, а отдает в процессах 3-4 и 4-1 ($|Q_{34}| = Q_{143}$). Формулы для КПД циклов принимают вид

$$\eta_1 = \frac{Q_{123} - Q_{13}}{Q_{123}}, \quad \eta_2 = \frac{Q_{13} - Q_{143}}{Q_{13}}, \quad \eta = \frac{Q_{123} - Q_{143}}{Q_{123}}.$$

Из первых двух формул находим $Q_{123} = \frac{Q_{13}}{1 - \eta_1}$, $Q_{143} = (1 - \eta_3)Q_{13}$.

Следовательно, $\eta = 1 - (1 - \eta_1)(1 - \eta_2) = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2$.

12.1. Ответ: да, зависит; для разноименных зарядов сила взаимодействия больше.

Решение. Казалось бы, согласно закону Кулона величина силы не должна зависеть от знаков зарядов. Но вспомните: в законе Кулона говорится о точечных зарядах! Выполняется ли этот закон для заряженных металлических шаров? Следует учесть, что свободные заряды в проводниках подвижны, они не «привязаны» к определенному месту. Характерное распределение зарядов для разноименно заряженных шаров показано на рис. а, а для одно-



Рис. а



Рис. б

именно заряженных шаров — на рис. б. Очевидно, что в первом случае заряды под действием взаимного притяжения будут расположены ближе друг к другу, и поэтому сила их взаимодействия (притяжение) будет больше, чем во втором случае (отталкивание). Разумеется, перераспределение зарядов на шарах влияет на величину силы их взаимодействия лишь тогда, когда расстояние между шарами не слишком велико по сравнению с их радиусами. Если же шары находятся на достаточно больших расстояниях, то их можно рассматривать как точечные заряды и применять закон Кулона.

12.2. Ответ: да, могут.

Решение. На первый взгляд, это противоречило бы закону Кулона. Но вспомним, что незаряженное тело притягивается к заряженному (например, кусочки бумаги к наэлектризованной расческе), а это тоже формально не соответствует закону Кулона. Объясняется такое притяжение перераспределением зарядов внутри тела (см. рис. а). Но тогда этот же эффект может привести к притя-

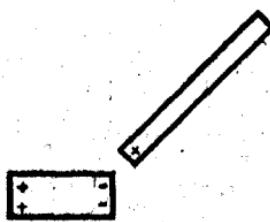


Рис. а

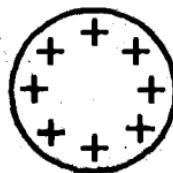
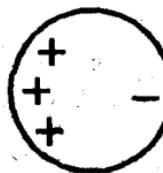


Рис. б

жению одноименно заряженных тел: «ближняя» сторона одного из тел может изменить знак заряда (см. рис. 6). Такое возможно, если тела находятся достаточно близко друг к другу и заряд одного из тел во много раз превышает заряд другого. В этом случае у тела с меньшим зарядом описанное перераспределение может привести к появлению заряда противоположного знака.

12.3. Ответ: увеличится за счет поляризации диэлектрика (стекла).

12.4. Ответ: заряды могли быть одноименными и отличаться в 3 раза либо разноименными и отличаться по модулю в 7,2 раза.

Решение. Поскольку шарики одинаковы, после соприкосновения каждый из них имеет один и тот же заряд $q = \frac{q_1 + q_2}{2}$. Определим согласно закону Кулона силы их взаимодействия до и после соприкосновения соответственно: $F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$ и $nF = k \frac{(q_1 + q_2)^2}{4r^2}$, где r — расстояние между шариками. Отсюда $(q_1 + q_2)^2 = 4n|q_1||q_2|$. Обозначим $\frac{q_1}{q_2} = x$ и разделим последнее равенство на $q_2^2 = |q_2|^2$. Получим: $(x + 1)^2 = 4n|x|$ или $x^2 + 2(x - 2n|x|) + 1 = 0$. Предполагая, что $x > 0$ (т. е. $|x| = x$), получим

$$x_{1,2} = 2n - 1 \pm \sqrt{(2n - 1)^2 - 1},$$

$$\text{т. е. } x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}.$$

Оба решения, естественно, означают одно и то же: одноименные заряды на шариках отличаются в 3 раза.

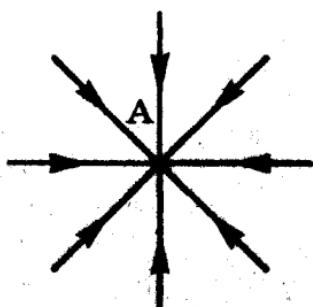
Предполагая, что $x < 0$ (т. е. $|x| = -x$), придем к решениям

$$x_1 = -\frac{1}{3}(11 + \sqrt{112}) = -7,2; x_2 = \frac{1}{x_1}.$$

Оба эти решения означают, что заряды q_1 и q_2 могли быть разноименными, отличающимися по модулю в 7,2 раза.

12.5. Ответ: не может.

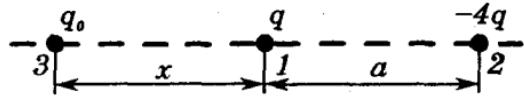
Решение. В положении устойчивого равновесия действующая на тело сила должна равняться нулю; при небольшом же отклонении в любом направлении от этого положения возникает сила, возвращающая тело в положение равновесия. Если, к примеру, точечный положительный заряд в точке A находится в положении устойчивого равновесия, то силовые линии поля вблизи этой точки имеют вид, показанный на рисунке. Тогда в



точке A должен находиться отрицательный заряд, на котором эти линии заканчивались бы, а такого заряда там нет. Поэтому устойчивое равновесие заряда в электростатическом поле невозможно (это утверждение называют теоремой Ирншоу).

12.6. Ответ: заряд $q_0 = -4q$ нужно расположить на расстоянии a от заряда q и на расстоянии $2a$ от заряда $-4q$.

Решение. Определим сначала, где следует расположить заряд q_0 , чтобы он находил-



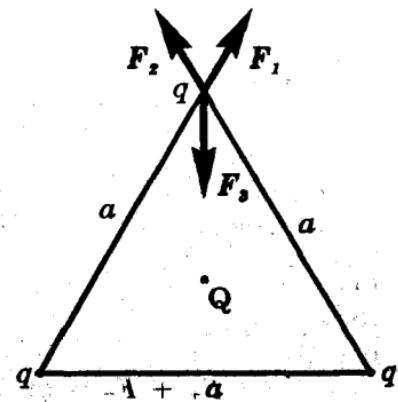
ся в равновесии. Очевидно, это точка, в которой равна нулю напряженность E поля двух первых зарядов: $E = E_1 + E_2 = 0$. Такая точка может лежать только на соединяющей заряды 1 и 2 прямой, причем вне отрезка 1-2 (в точках на этом отрезке E_1 и E_2 направлены в одну сторону). Может ли искомая точка находиться правее заряда 2? Нет, поскольку тогда она будет лежать ближе к большему (по модулю) заряду, а там $E_1 < E_2$ и $E = E_1 + E_2 \neq 0$. Итак, искомая точка расположена левее меньшего заряда, на расстоянии x от него (см. рисунок). Из условия $E = 0$ следует, что $E_1 = E_2$, т. е.

$$k \frac{|4q|}{(a+x)^2} = k \frac{|q|}{x^2}, \text{ откуда } (a+x)^2 = 4x^2, \text{ или } a+x = 2x \text{ (мы учли, что } x > 0\text{). Таким образом, } x = a. \text{ Для определения величины } q_0 \text{ достаточно заметить, что заряды } q_0 \text{ и } -4q \text{ расположены симметрично относительно заряда } q. \text{ Поэтому напряженность поля зарядов 2 и 3 в точке 1 равна нулю только при } q_0 = -4q. \text{ Итак, следует разместить заряд } q_0 = -4q \text{ на расстоянии } a \text{ от заряда } q. \text{ Равновесие системы зарядов будет, естественно, неустойчивым (см. задачу 12.5).}$$

12.7. Ответ: нужно расположить заряд $-\frac{4}{9}q$ на соединяющем первые два заряда отрезке, на расстоянии $a/3$ от заряда q .

12.8. Ответ: $Q = -\frac{q}{\sqrt{3}}$.

Решение. Очевидно, заряды q и Q должны быть разноименными. Для равновесия достаточно, чтобы равнялась нулю равнодействующая сил, приложенных к одному из зарядов q (см. рисунок): $F_1 + F_2 + F_3 = 0$. Проецируя это условие равновесия на вертикальную ось и используя закон Кулона



$$\left(F_1 = F_2 = k \frac{q^2}{a^2}, F_3 = k \frac{|q||Q|}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} \right), \text{ получим } 2k \frac{q^2}{a^2} \cos 30^\circ = k \frac{|q||Q|}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Отсюда $|Q| = \frac{|q|}{\sqrt{3}}$, т. е. $Q = -\frac{q}{\sqrt{3}}$.

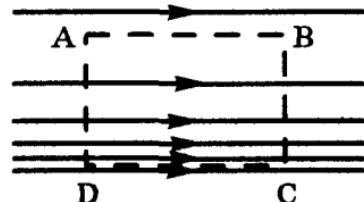
12.9. Ответ: $Q = -\frac{q}{4}(1 + 2\sqrt{2})$; равновесие неустойчиво.

Указание. См. задачи 12.5, 12.8.

12.10. Решение. Направление силовых линий совпадает с направлением действующей на заряд силы, а, значит, с направлением ускорения заряженной частицы. Направление же скорости при криволинейном движении не всегда совпадает с направлением ускорения: например, в однородном поле внутри конденсатора электрон может двигаться по параболе, а в поле точечного заряда — по окружности.

12.11. Ответ: нельзя.

Решение. Такое поле не является потенциальным: можно выбрать замкнутую траекторию, при перемещении заряда вдоль которой поле совершает отличную от нуля работу. Рассмотрим, например, траекторию $ABCDA$ (см. рисунок). На участках BC и DA поле не совершает работы (сила перпендикулярна перемещению). На участках AB и CD ($AB = CD$) работа поля имеет разные знаки и модули (поскольку густота линий напряженности вблизи CD больше, там выше напряженность поля и больше действующая на заряд сила). Следовательно, работа при перемещении по замкнутой траектории получается отличной от нуля. В электростатическом же поле такого быть не может: это поле потенциально.



12.12. Ответ: в случаях *а* и *б* шарик будет втягиваться в область более сильного поля, в случае *в* останется неподвижным.

Решение. Когда шарик попадает в электрическое поле, в нем происходит разделение зарядов (в диэлектрике — поляризация, а в проводнике — электростатическая индукция). В результате справа на поверхности появляется положительный заряд q , а слева — равный ему по модулю отрицательный заряд. Следовательно, в поле на шарик действует сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q(\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-)$ (на рисунке в качестве примера



показан случай *a*). Здесь E_+ и E_- — напряженности поля в области концентрации положительного и отрицательного зарядов соответственно. В случае *a* (справа линии напряженности сгущаются) $E_+ > E_-$, поэтому сила F направлена вправо. Аналогично можно показать, что в случае *b* сила F направлена влево. В обоих случаях шарик втягивается в область более сильного поля (например, притягивается к создающему поле заряду). В случае *c*, когда поле однородно, $F = 0$, т. е. шарик останется неподвижным.

12.13. Ответ: $E = \sqrt{6} k \frac{q}{a^2} = \frac{\sqrt{6} q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$.

Решение. Указанная точка представляет собой вершину правильного тетраэдра, в вершинах основания которого находятся заряды. Высота тетраэдра является осью симметрии системы. Поэтому напряженность E направлена вдоль высоты тетраэдра (см. рис. *a*). Согласно принципу суперпозиции

$$E = E_1 + E_2 + E_3, \quad (1)$$

причем $E_1 = E_2 = E_3 = k \frac{q}{a^2}$. Проецируя (1) на ось y , параллельную высоте тетраэдра (и учитывая, что $E_{1y} = E_{2y} = E_{3y}$), получаем $E = 3E_{1y}$.

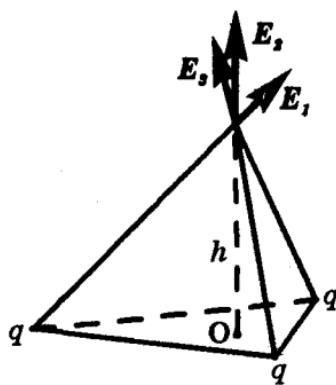


Рис. *a*

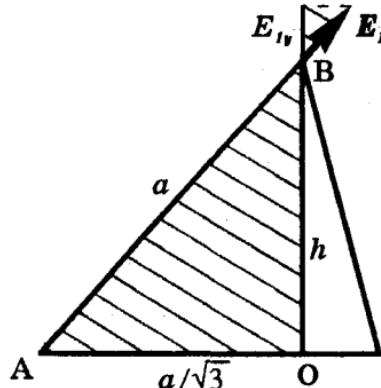


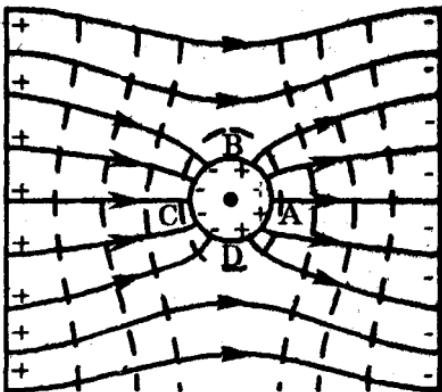
Рис. *б*

На рис. *б* показано сечение тетраэдра вертикальной плоскостью, проходящей через высоту и одну из вершин основания. Из подобия запятых треугольников получаем $\frac{E_{1y}}{E_1} = \frac{h}{a}$; из прямоугольного треугольника ABO находим

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Отсюда $E_{1y} = \frac{2}{3}k \frac{q}{a^2}$; следовательно, $E = \sqrt{6} k \frac{q}{a^2}$.

12.14. Решение. Свободные электроны сместились в сторону, противоположную направлению поля (см. рисунок). Теперь поверхностная плотность заряда максимальна (по модулю) в точках *A* и *C*, плавно уменьшается при удалении от них и обращается в нуль в точках *B* и *D*. На достаточно больших расстояниях от шара поле остается однородным. Вблизи шара линии напряженности искривляются. Они входят в поверхность шара (перпендикулярно ей!) на участке *BCD* и обрываются; на участке *BAD* они выходят из шара.



Эквиденциальные поверхности перпендикулярны линиям напряженности. Положение трех эквиденциальных поверхностей очевидно: это две пластины конденсатора и поверхность шара. Учитывая эти обстоятельства, получаем картину, показанную на рисунке.

12.15. Ответ: напряженность поля увеличится, потенциал уменьшится.

Решение. Под действием электрического поля в шаре произойдет разделение зарядов (поляризация в диэлектрическом шаре или электростатическая индукция в проводнике). На ближней к точке *A* стороне шара возникнет отрицательный заряд, на дальней — такой же величины положительный. Поскольку отрицательный заряд находится ближе к точке *A*, его влияние является определяющим. Поэтому вопрос можно сформулировать так: как изменятся E и ϕ , если справа от точки *A* поместить отрицательный заряд? Этот заряд создаст в точке *A* поле, направленное слева направо (туда же, куда и поле заряда $+q$), и отрицательный потенциал (напомним, что потенциал поля заряда $+q$ положителен). На основании принципа суперпозиции можно сделать вывод: напряженность поля увеличится, потенциал уменьшится.

12.16. Ответ: $\Delta q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Решение. Условие равновесия пылинки имеет вид $mg = F_k$, где $F_k = q_0 E = \frac{q_0 U_0}{d}$. Отсюда начальный заряд пылинки $q_0 = \frac{mgd}{U_0}$. Ана-

логично находим ее конечный заряд: $q = \frac{mgd}{U_0 + \Delta U}$. Следовательно,

$$\Delta q = q_0 - q = \frac{mgd\Delta U}{U_0(U_0 + \Delta U)} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Другими словами, при облучении пылинка потеряла один электрон. В задаче описан классический опыт Иоффе-Милликена, доказывающий дискретность электрического заряда.

12.17. Ответ: $\rho = 1500 \text{ кг/м}^3$.

Решение. На рис. *a* показаны силы, действующие на один из шариков в воздухе; на рис. *б* — в керосине. Хотя заряды шариков

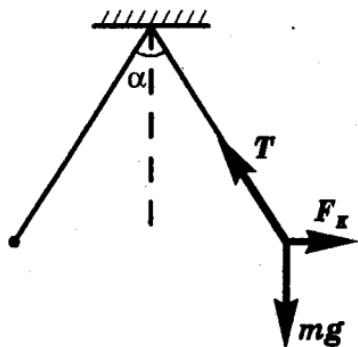


Рис. *a*

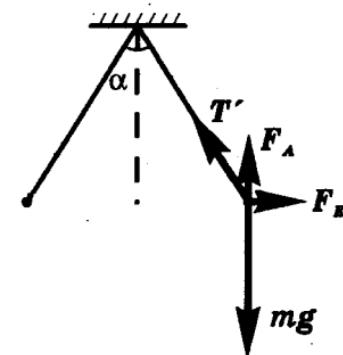


Рис. *б*

могут отличаться друг от друга по величине, согласно третьему закону Ньютона на оба шарика действуют одинаковые по модулю кулоновские силы. Поэтому оба шарика расположены симметрично относительно вертикальной оси, проходящей через точку подвеса. Из условий равновесия следует, что кулоновская сила в воздухе $F_k = mg \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, а в керосине $F_k' = (mg - F_A) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, где F_A — сила Архимеда. В керосине кулоновская сила при том же расстоянии между шариками в ϵ раз меньше: $F_k' = \frac{F_k}{\epsilon}$ (здесь ϵ — диэлектрическая проницаемость керосина). Таким образом, $mg - F_A = \frac{mg}{\epsilon}$. Подставив в эту формулу $m = \rho V$ и $F_A = \rho_k g V$ (здесь ρ_k — плотность керосина), получим $\rho = \rho_k \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} = 1500 \text{ кг/м}^3$.

12.18. Ответ: $b = 6,0 \text{ см.}$

Решение. Что произойдет с шариками после разрядки одного из них? Отталкивание сменится притяжением, шарики соприкоснутся. При этом заряд q одного из них поделится между шариками пополам. В результате опять возникнет отталкивание, но слабее первоначального; поэтому после затухания колебаний шарики

разойдутся на расстояние $b < a$. Чтобы найти b , нужно выразить его через заряды шариков. С одной стороны, сила кулоновского отталкивания (см. задачу 12.17) $F_k = mgtg\frac{\alpha}{2}$; с другой стороны, ее величина (до разрядки) $F_k = k\frac{q^2}{a^2}$, где расстояние a связано с длиной l нити соотношением $a = 2lsin\frac{\alpha}{2}$. Чтобы выразить теперь a через q , воспользуемся условием $a \ll l$ (т. е. $\alpha \ll 1$ рад). Считая $tg\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$, получаем $k\frac{q^2}{a^2} = mg\frac{a}{2l}$, откуда $a = \left(\frac{2klq^2}{mg}\right)^{\frac{1}{3}}$. Заменяя q на $\frac{q}{2}$, получаем $b = \left(\frac{k\frac{q}{2}lq^2}{2mg}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{a}{4^{\frac{1}{3}}} = 6,0$ см.

12.19. Ответ: $q = 13,5$ нКл.

Решение. Каждый из шариков отклонен от центра треугольника на расстояние $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Отсюда следует (см. рис. а), что на шарик действует горизонтальная отклоняющая сила

$$F = mgtga \approx mg\frac{a}{\sqrt{3}l}. \quad (1)$$

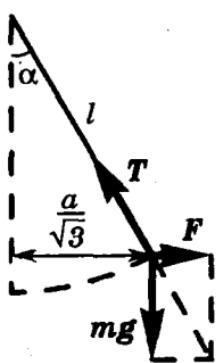


Рис. а

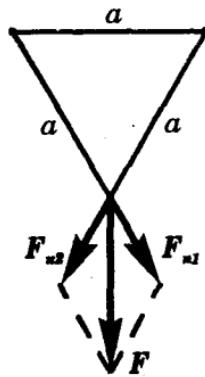


Рис. б

Мы использовали тот факт, что $a \ll l$, т. е. $\alpha \ll 1$ рад. Сила F (см. рис. б) является равнодействующей двух кулоновских сил F_{k1} и F_{k2} , одинаковых по модулю ($F_{k1} = F_{k2} = k\frac{q^2}{a^2}$). Из параллелограмма сил следует

$$F = \sqrt{3}k\frac{q^2}{a^3}. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) получаем

$$q = a \sqrt{\frac{amg}{3lk}} = a \frac{\sqrt{4\pi\epsilon_0 a \cdot mg}}{3l} = 13,5 \text{ нКл.}$$

12.20. Ответ: на 0,25 нм.

Решение. При сближении электронов их скорости уменьшаются в результате кулоновского отталкивания. В какой-то момент электроны останавливаются, а затем начинают все быстрее удаляться друг от друга. Минимальное расстояние r_{\min} достигается именно в момент остановки электронов. К этому моменту вся их начальная кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию кулоновского отталкивания, т. е. $2 \frac{mv_0^2}{2} = k \frac{e^2}{r_{\min}}$. Отсюда

$$r_{\min} = \frac{ke^2}{mv_0^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

12.21. Ответ: электроны сблизятся на расстояние $r_{\min} = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0 m v_0^2}$; в

результате взаимодействия они просто обменяются скоростями.

Решение 1. Обозначим скорость первого электрона через v_1 (она увеличивается вследствие отталкивания электронов), а скорость второго — через v_2 (она, наоборот, уменьшается). Сближение закончится в тот момент, когда скорости электронов сравняются, т. е. $v_1 = v_2$. Расстояние между электронами в этот момент можно найти, пользуясь законами сохранения энергии $\left(\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + k \frac{e^2}{r_{\min}} \right)$ и импульса ($mv_0 = mv_1 + mv_2$) при условии $v_1 = v_2$.

Из этих соотношений находим $v_1 = v_2 = \frac{v_0}{2}$ и $r_{\min} = \frac{4ke^2}{mv_0^2} = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0 m v_0^2}$.

После сближения электроны опять разлетятся на большое расстояние, где потенциальной энергией их взаимодействия можно пренебречь. Формулы законов сохранения энергии и импульса в применении к этому случаю имеют такой же вид, как для упругого лобового удара одинаковых шаров (см. задачу 4.36). Значит, произойдет обмен скоростями: налетающий электрон остановится, а покончившийся приобретет скорость v_0 .

Решение 2. Проще и красивее задача решается, если перейти в систему отсчета центра масс, скорость которой $v = \frac{mv_0}{m+m} = \frac{v_0}{2}$. В

этой системе отсчета электроны сближаются со скоростями $\frac{v_0}{2}$.

Тогда можно воспользоваться результатом решения задачи 12.20.

заменив v_0 на $\frac{v_0}{2}$: $r_{\min} = \frac{e^2}{\pi \epsilon_0 m v_0^2}$. Очевидно, в системе отсчета центра масс после упругого взаимодействия (не сопровождающегося потерями механической энергии) электроны разлетаются с такими же по модулю скоростями $\frac{v_0}{2}$, т. е. обмениваются скоростями.

12.22. Ответ: $r_{\min} = \left(\frac{1}{r} + \frac{2\pi\epsilon_0 m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{q_1 q_2 (m_1 + m_2)} \right)^{-1}$.

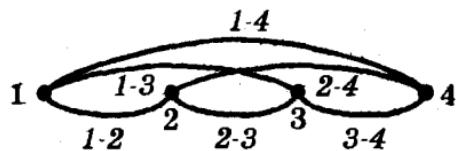
Решение. В момент максимального сближения заряды будут иметь одну и ту же скорость $v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ (см. задачу 12.21). Тогда закон сохранения энергии примет вид:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + k \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} + k \frac{q_1 q_2}{r_{\min}}$$

Отсюда $r_{\min} = \left(\frac{1}{r} + \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2k q_1 q_2 (m_1 + m_2)} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{r} + \frac{2\pi\epsilon_0 m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{q_1 q_2 (m_1 + m_2)} \right)^{-1}$.

12.23. Ответ: $\frac{q^2(3\sqrt{2} - 1)}{12\pi\epsilon_0 a}; \frac{5q^2}{12\pi\epsilon_0 a}$.

Решение. Работу A следует вычислять через изменение потенциальной энергии W_p системы: $A = \Delta W_p$ (напомним: A — работа внешних сил, поэтому здесь нет



привычного знака «минус»). Потенциальную энергию системы точечных зарядов можно представить как сумму энергий взаимодействия всех пар зарядов: $W_p = \sum_{\alpha, \beta} k \frac{q_\alpha q_\beta}{r_{\alpha\beta}}$. Для четырех зарядов таких пар шесть (см. рисунок). При линейном расположении зарядов $r_{1-2} = r_{2-3} = r_{3-4} = a$, $r_{1-3} = r_{2-4} = 2a$, $r_{1-4} = 3a$. Поэтому начальная энергия системы $W_{p0} = \frac{13}{3} k \frac{q^2}{a}$. При размещении зарядов в вершинах квадрата четыре расстояния в «парах» равны a и два (диагонали квадрата) равны $a\sqrt{2}$. Поэтому $W_p = k \frac{q^2}{a} (4 + \sqrt{2})$, а

$$A = W_p - W_{p0} = k \frac{q^2}{a} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3} \right)$$

При размещении зарядов в вершинах тетраэдра все расстояния между зарядами равны a , следовательно, $W_p = 6k \frac{q^2}{a}$; поэтому

$$A = \frac{5}{3} k \frac{q^2}{a} = \frac{5q^2}{12\pi\epsilon_0 a}$$

12.24. Ответ: $5,7 \cdot 10^{-12}$ Кл; $6,7 \cdot 10^{-12}$ Кл.

Решение. Чем ограничена величина заряда Q ? Двумя факторами: отталкиванием электронов от уже заряженного шарика и возможностью электрического пробоя разреженного воздуха, когда напряженность поля на поверхности шарика достигает E_0 . Учтем, что заряд Q делится между шариками поровну (диэлектрическая проницаемость разреженного воздуха практически не отличается от единицы). Электроны перестают долетать до шарика в вакууме после накопления такого заряда Q_1 , что $\frac{mv_0^2}{2} = k \frac{e|Q_1|}{2R}$ (здесь m — масса электрона, e — элементарный заряд). Отсюда

$$|Q_1| = \frac{mv_0^2 R}{ke} = \frac{4\pi\epsilon_0 m v_0^2 R}{e}.$$

Электрический пробой наступает при накоплении заряда Q_2 , если $E_0 = k \frac{|Q_2|}{2R^2}$, т. е. при $|Q_2| = \frac{2E_0 R^2}{k} = 8\pi\epsilon_0 R^2 E_0$.

Накопленный заряд $|Q|$ не может превышать ни $|Q_1|$, ни $|Q_2|$, т. е. равен меньшей из величин $|Q_1|$ и $|Q_2|$. При заданных числовых значениях $|Q_1| = 5,7 \cdot 10^{-12}$ Кл, $|Q_2| = 6,7 \cdot 10^{-12}$ Кл, так что $|Q| = 5,7 \cdot 10^{-12}$ Кл.

Увеличение v_0 приведет к тому, что $|Q_1|$ станет больше $|Q_2|$. При этом заряд возрастет лишь до значения $|Q| = 6,7 \cdot 10^{-12}$ Кл.

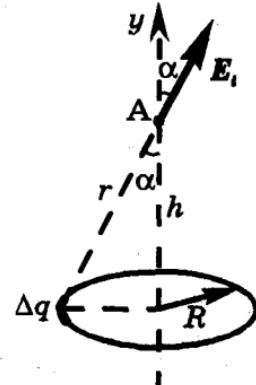
12.25. Ответ: $E = \frac{hq}{4\pi\epsilon_0(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Решение. Для определения E и Φ можно воспользоваться принципом суперпозиции. Разобьем кольцо на одинаковые малые участки, каждый из которых имеет заряд Δq . Каждый из таких участков можно рассматривать как точечный заряд, дающий свой вклад E_i и Φ_i в E и Φ ; т. е. $E = \sum_i E_i$, $\Phi = \sum_i \Phi_i$. Будем считать

$q > 0$ (см. рисунок). Обратим внимание на два обстоятельства: первое — поле E из-за симметрии системы направлено вдоль оси y , поэтому $E = \sum_i E_y$; второе — точка A удалена от всех точек кольца на

одинаковое расстояние $r = (R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}$. Поскольку $E_i = k \frac{\Delta q}{r^3}$, а $\cos\alpha =$

$= \frac{h}{r}$ (см. рисунок), получаем $E_y = E \cos\alpha = k \frac{h}{r^3} \Delta q$. При суммиров-



вании по различным участкам кольца все множители, стоящие в этом выражении при Δq , являются постоянными и могут быть вынесены за знак суммы. Поскольку $\sum \Delta q = q$, получаем

$$E = k \frac{hq}{r^3} = \frac{hq}{4\pi\epsilon_0(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

При суммировании величин $\varphi_i = k \frac{\Delta q}{r}$ находим

$$\Phi = k \frac{q}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2)$$

Например, для центра кольца ($h = 0$) получаем $E = 0$, т. е. поля, создаваемые противоположными участками кольца, взаимно компенсируются; $\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$. Заметим, что формулу (1) можно также

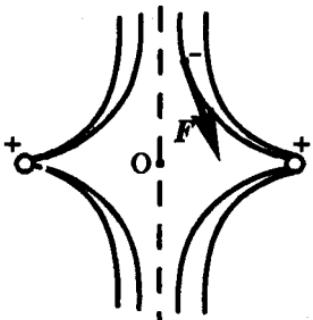
получить из формулы (2): $E_v = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta h}$, т. е. E равняется производной выражения (2) по переменной h (с обратным знаком).

12.26. Ответ: $v = \left(\frac{eq}{2\pi\epsilon_0 m} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$; электрон не обязательно пролетит через центр кольца.

Решение. При решении удобнее всего воспользоваться законом сохранения энергии:

$$W_{p0} = W_p + W_k,$$

где $W_{p0} = -e\Phi_0 = -\frac{eq}{4\pi\epsilon_0(R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}$ — потенциальная энергия электрона в начальной точке, $W_p = -\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 R}$ — потенциальная энер-



гия электрона в центре кольца, $W_k = \frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия электрона в центре кольца, m — масса электрона, e — элементарный электрический заряд ($e > 0$). Отсюда

$$v = \left(\frac{eq}{2\pi\epsilon_0 m} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Обязательно ли электрон пролетит через центр кольца? Казалось бы, симметрия начальных условий исключает любые отклонения электрона от оси кольца. Однако устойчиво ли его движение по оси кольца? На рисунке представлен вид электрического поля кольца (кольцо показано в разрезе). Похожее поле создают

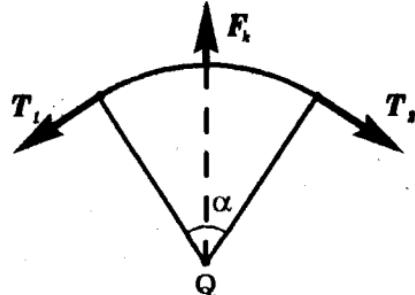
два одноименных точечных заряда. Если электрон, как показано на рисунке, случайно чуть сместится в сторону от оси, то действующая на него со стороны поля силы F «потянет» его еще дальше. Значит, движение вдоль оси неустойчиво. Если величина h не слишком мала, электрон почти наверняка не пролетит через точку O .

12.27. Ответ: $T = \frac{qQ}{8\pi^2\epsilon_0 R^2}$.

Решение. Рассмотрим малый элемент кольца (см. рисунок), заряд которого

$$\Delta q = \frac{q}{2\pi} \cdot \alpha. \text{ Поскольку заряд кольца мал}$$

по сравнению с размещенным в центре зарядом Q , можно пренебречь кулоновским взаимодействием различных частей кольца. На рисунке показаны действующие на элемент кольца силы. Согласно закону Кулона $F_k = k \frac{\Delta q Q}{R^2} = k \frac{q Q}{R^2} \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$. Из усло-



вия равновесия следует, что $F_k = 2T \sin \frac{\alpha}{2} \approx \alpha T$ (мы считаем $\alpha \ll 1$, $T_1 = T_2 = T$). Тогда $T = \frac{k}{2\pi} \cdot \frac{qQ}{R^2} = \frac{qQ}{8\pi^2\epsilon_0 R^2}$.

12.28. Ответ: шарик будет совершать гармонические колебания:

$$x = x_0 \cos \left[\left(\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 m R^3} \right)^{\frac{1}{2}} t \right]; \text{ шарик притягивается к кольцу.}$$

Решение. Согласно результату решения задачи 12.25, на расстоянии x от центра кольца на шарик действует сила $F = qE =$

$$= \frac{xQq}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ направленная к центру кольца. Поскольку } R^2 +$$

$+ x^2 \approx R^2$ при $x \ll R$, второй закон Ньютона для шарика принимает вид $ma_x = - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^3} x$. Это — уравнение гармонических колебаний

с циклической частотой $\omega = \left(\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 m R^3} \right)^{\frac{1}{2}}$. Максимальное отклонение

x_0 от положения равновесия достигается в начальный момент, так что

$$x = x_0 \cos \omega t = x_0 \cos \left[\left(\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 m R^3} \right)^{\frac{1}{2}} t \right].$$

Если убрать спицу, проявится неустойчивость такого движения по отношению к малым боковым смещениям (см. задачу 12.26), поэтому шарик притягается к какой-нибудь точке кольца.

12.29. Ответ: при $v_0 > v_{\min} = \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\epsilon_0 m R}}$ шарик уйдет на бесконечность; при $v_0 < v_{\min}$ — будет совершать колебания (при $v_0 \ll v_{\min}$ — гармонические) и в конце концов притягнется к кольцу.

Указание. См. задачи 12.26 и 12.28.

12.30. Ответ: $F = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2}$.

Решение. Под действием электрического поля заряда $+q$ в пластине произойдет разделение зарядов. На ближайшей к заряду поверхности пластины образуется отрицательный поверхностный заряд $-q$ (на этой поверхности заканчиваются все силовые линии поля, выходящие из заряда $+q$). Поэтому пластина притягивает заряд.

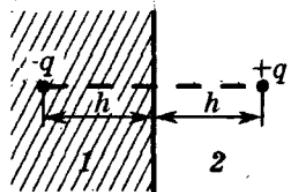


Рис. а

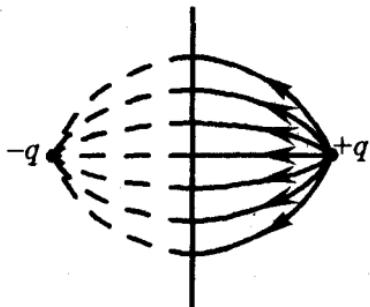


Рис. б

Чтобы определить силу взаимодействия между точечным зарядом и проводником, воспользуемся тем, что электростатическое поле не проникает через проводник. Поэтому нужно учитывать только силу взаимодействия между точечным зарядом $+q$ и поверхностным зарядом $-q$, наведенным на поверхности пластины. Следовательно, пластину можно заменить «металлическим» полу-пространством (см. область 1 на рис. а). Поле в этой области равно нулю, т. е. поля точечного и поверхностного зарядов в области 1 компенсируют друг друга. Это означает, что поле поверхностного заряда в области 1 совпадает с полем заряда $-q$, расположенного в той же точке, что и заряд $+q$. Но поле поверхностного заряда симметрично относительно плоскости! Значит, в области 2 оно совпадает с полем точечного заряда $-q$, расположенного симметрично заряду $+q$ относительно поверхности (см. рис. б). Поэтому на заряд $+q$ действует со стороны пластины точно такая же сила, как и со стороны воображаемого заряда $-q$, т. е.

$$F = h \cdot \frac{q^2}{(2h)^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2}.$$

Описанный выше метод решения задачи называется методом изображений: воображаемый заряд $-q$ является как бы зеркальным отражением заряда $+q$ относительно поверхности пластины.

Возможен и другой подход к решению. Рассмотрим поле двух разноименных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных симметрично относительно некоторой плоскости на расстоянии h от нее. Заметим теперь, что эта плоскость является эквипотенциальной поверхностью. Значит, если совместить с ней тонкую проводящую пластину, то перераспределения заряда вдоль пластины не произойдет и поэтому картина поля не изменится. Если убрать теперь любой из зарядов, то поле с противоположной стороны пластины не изменится, поскольку проводящая пластина экранирует электростатическое поле. Благодаря этому мы можем убрать заряд $-q$: поле со стороны заряда $+q$ при этом не изменится. В общем случае метод изображений состоит в подборе таких дополнительных зарядов в «зазеркалье», чтобы поверхности заданных в условии проводников совпадали с эквипотенциальными поверхностями полученного поля.

12.31. Ответ: $E = \frac{|Q|r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ при $r < R$; $E = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ при $r > R$. График $E(r)$ см. на рисунке.

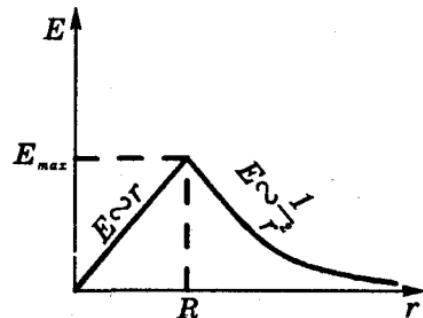
Решение. Воспользуемся аналогией между законом Кулона и законом всемирного тяготения. При сферически симметричном распределении заряда поле на расстоянии r от центра создается только зарядом $q(r)$ внутри сферы радиуса r (ср. с задачей 3.6). Поскольку заряд распределен по шару равномерно, при $r < R$ можно записать

$$\frac{q(r)}{Q} = \frac{r^3}{R^3}.$$

Тогда $E(r) = k \frac{|q(r)|}{r^2} = k \frac{|Q|r}{R^3} = \frac{|Q|r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$.

При $r > R$ поле, создаваемое заряженным шаром, такое же, как поле точечного заряда Q , расположенного в центре шара, т. е. $E(r) = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

График зависимости $E(r)$ приведен на рисунке ($E_{\max} = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 R^3}$).



12.32. Ответ: $\phi = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$ при $r < R$; $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ при $r > R$. График $\phi(r)$ см. на рис. б.

Решение. При $r > R$ поле заряженного шара не отличается от поля точечного заряда, поэтому $\phi = k \frac{Q}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$. При $r = R$ потенциал

$\phi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$. Чтобы определить потенциал при $r < R$, подсчитаем работу поля по перемещению заряда q из интересующей нас точки к поверхности шара. При малом перемещении $\Delta A = qE\Delta r$. Значит,

полная работа (см. рис. а) составит $A = qS_E$. Площадь под графиком $S_E = \frac{E(r) + E(R)}{2} \cdot (R - r) = \frac{Q(R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$. Итак, $A = \frac{Qq(R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$.

С другой стороны, $A = q(\phi(r) - \phi_0)$. Поэтому получаем

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q(R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}.$$

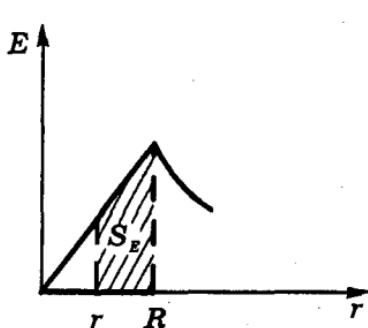


Рис. а

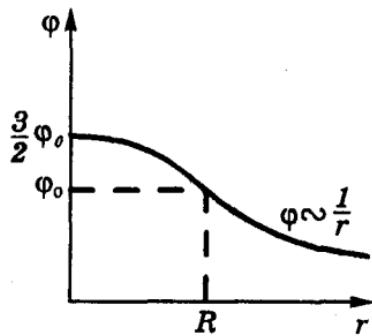


Рис. б

График $\phi(r)$ приведен на рис. б. Первый участок графика (при $r < R$) — парабола, второй (при $r > R$) — гипербола.

12.33. Ответ: $E = 0$, $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ при $r < R$, $E = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ при $r > R$. Графики $E(r)$ и $\phi(r)$ приведены на рис. а и б.

Указание. См. задачи 12.31, 12.32. Учтите также, что заряд расположен только на поверхности шара.

12.34. Решение. Вид силовых линий показан на рисунке. Как известно, силовые линии начинаются на положительных зарядах. Под действием поля заряженного шара происходит поляризация диэлектрика. На поверхностях диэлектрика появляются связанные заряды: на внешней поверхности — положительные, а на

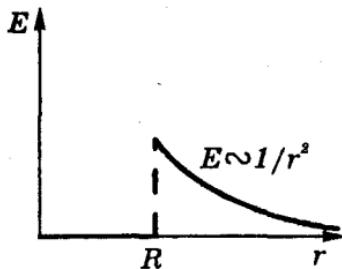


Рис. а к задаче 12.33

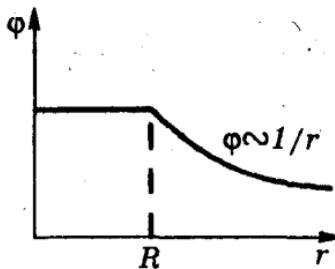
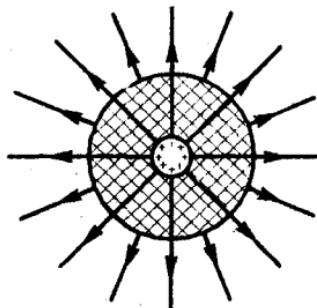


Рис. б к задаче 12.33



К задаче 12.34

внутренней (у поверхности металлического шара) — отрицательные. Благодаря отрицательным зарядам напряженность поля в диэлектрике уменьшается в ϵ раз. Наличие сферического слоя диэлектрика не влияет на электрическое поле за пределами этого слоя. На рисунке показаны только свободные заряды.

12.35. Ответ: $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Решение. Электрическое поле внутри сферы отсутствует, поэтому потенциалы всех находящихся здесь точек одинаковы и равны ϕ . Следовательно, достаточно определить потенциал одной точки — центра сферы. Этот потенциал, как следует из принципа суперпозиции, складывается из потенциала $\phi_1 = k\frac{q}{r}$ поля точечного заряда и суммы потенциалов полей всех зарядов Δq , образовавшихся на сфере: $\phi = \phi_1 + \sum k\frac{\Delta q}{R} = \phi_1 + \frac{k}{R} \sum \Delta q$. Однако $\sum \Delta q = 0$ (сфера в целом не заряжена), поэтому $\phi = \phi_1 = k\frac{q}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Сравните этот результат с полученным при решении задачи 12.38 для случая $r < R$.

12.36. Ответ: $Q = -q \frac{R}{r}$.

Решение. Потенциал заземленного шара равен нулю. При размещении вблизи шара положительного заряда нулевой потенциал поддерживается за счет перетекания на шар отрицательного заряда Q . Независимо от распределения заряда Q по поверхности (см. задачу 12.35) потенциал центра шара $\phi = k \frac{q}{r} + k \frac{Q}{R}$ (разумеется, остальные точки шара имеют тот же потенциал). Приравнивая ϕ нулю, получаем $Q = -q \frac{R}{r}$.

12.37. Ответ: $\Delta q = 19$ нКл.

Указание. Перемещение заряда будет продолжаться, пока потенциалы шаров не сравняются. Поэтому можно записать:

$$k \frac{q_1 - \Delta q}{R_1} = k \frac{q_2 + \Delta q}{R_2}.$$

Отсюда $\Delta q = \frac{q_1 R_2 - q_2 R_1}{R_1 + R_2} = 19$ нКл.

12.38. Решение. 1) На внутренней поверхности сферы индуцируется отрицательный заряд, а на внешней — равный ему положительный. Все силовые линии, выходящие из заряженного шарика, заканчиваются на внутренней поверхности сферы (внутри проводника поля нет), значит, индуцируемые заряды по модулю равны Q . На внутренней поверхности сферы заряд распределяется неравномерно (см. рисунок, на котором сфера условно заменена сферическим слоем). Распределение заряда на внешней поверхности определяется лишь собственным полем этого заряда (ведь поле заряженного шарика компенсируется полем заряда $-Q$ на поверхности полости). Значит, заряд $+Q$ распределится по внешней поверхности сферы равномерно.



2) Вид силовых линий показан на рисунке. Поскольку поле вне сферы совпадает с полем точечного заряда $+Q$, расположенного в центре сферы, получаем $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$.

3) Поле вне сферы имеет такой же вид, как поле заряда $+Q$, размещенного в ее центре. Поэтому на точечный заряд вне сферы будет действовать сила отталкивания $F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Интересно, что

эта сила не изменяется при перемещениях шарика внутри сферы. Фактически заряд q взаимодействует не с шариком, а с зарядами, индуцированными на внешней поверхности сферы.

4) В результате заземления потенциал сферы обратится в нуль за счет стекания на землю заряда с внешней поверхности сферы. Поле вне сферы при этом исчезнет. Распределение зарядов и поле внутри сферы не изменятся.

12.39. Ответ: сфера имеет заряд $-q$, равномерно распределенный по внешней поверхности. Поле внутри сферы отсутствует; вне сферы оно совпадает с полем точечного заряда $-q$, размещенного в центре сферы.

Указание. См. задачу 12.38.

12.40. Ответ: $\phi = 450$ В.

Решение. Если бы шар не был заземлен, то потенциалы сферы и шара были бы одинаковы: $\phi_1 = k \frac{Q}{R}$ (внутри сферы поле отсутствовало бы, см. задачу 12.33). Вследствие заземления шар получит от Земли такой заряд q , что его потенциал обратится в нуль: $k \frac{q}{r} + k \frac{Q}{R} = 0$, откуда $q = -\frac{Qr}{R}$. Тогда, согласно принципу суперпозиции $\phi = k \frac{Q+q}{R} = k \frac{Q}{R} \left(1 - \frac{r}{R}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{r}{R}\right) = 450$ В.

12.41. Ответ: $E = 0$ при $r < R_1$;

$$E = \frac{QR_1(R_3 - R_2)}{4\pi\epsilon_0 R_2(R_3 - R_1)r^2} \text{ при } R_1 < r < R_2 \text{ (поле направлено к центру);}$$

$$E = \frac{QR_3(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_2(R_3 - R_1)r^2} \text{ при } R_2 < r < R_3 \text{ (поле направлено от центра);}$$

$E = 0$ при $r > R_3$. Здесь r — расстояние точки от центра сфер.

Указание. См. задачу 12.40. Условия заземления первой и третьей сфер имеют, соответственно, вид $\frac{q_1}{R_1} + \frac{Q}{R_2} + \frac{q_3}{R_3} = 0$, $q_1 + Q + q_3 = 0$.

Напомним, что равномерно заряженная сфера не создает поля в той области пространства, которую она окружает.

12.42. Ответ: $-q\left(\frac{r}{R}\right)^{2n-1}$, $q\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}$.

Решение. Какой заряд $q_{1,1}$ останется на первом шарике после первого заземления? Этот заряд можно определить, приравняв нулю потенциал $\phi_{1,1}$ этого шарика: $\phi_{1,1} = k \frac{q_{1,1}}{r} + k \frac{q}{R} = 0$ (см. задачу

12.38). Тогда $q_{1,1} = -\frac{qR}{r}$. Тогда поле на расстоянии r от центра сферы будет равно

12.35. Отсюда $q_{1,1} = -q \frac{r}{R}$; аналогично находим заряд второго шара

после его первого заземления: $q_{1,1} = -q_{1,1} \frac{r}{R} = q \left(\frac{r}{R} \right)^2$. Отсюда видно, что при дальнейших заземлениях заряды шаров убывают в геометрической прогрессии и после N заземлений каждого шара

$$q_{1,N} = -q \left(\frac{r}{R} \right)^{2N-1}; q_{1,N} = q \left(\frac{r}{R} \right)^{2N}.$$

12.43. Ответ: $\frac{\phi_1 R_1}{R_2}$; $\phi_1 \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$.

Решение. Заряд Q шара можно определить из соотношения $\phi_1 = k \frac{Q}{R_1}$; после соединения шар и оболочка образуют единый проводник, все точки которого имеют одинаковый потенциал ϕ_2 . Поскольку весь заряд перейдет на внешнюю поверхность этого проводника, $\phi_2 = k \frac{Q}{R_2}$. Отсюда $\phi_2 = \phi_1 \frac{R_1}{R_2}$ (потенциал шара уменьшится). Если оболочку заземлить (не соединяя ее с шаром), то она получит от Земли такой отрицательный заряд q , что ее потенциал $k \frac{Q}{R_2} + k \frac{q}{R_2}$ обратится в нуль. Значит, $q = -Q$ (при этом система в целом электрически нейтральна и не создает поля снаружи). Поле заряда q обеспечивает оболочке (и шару) потенциал $k \frac{q}{R_2} = -k \frac{Q}{R_2}$. Согласно суперпозиции потенциал шара

$$\phi_3 = k \frac{Q}{R_1} - k \frac{Q}{R_2} = \phi_1 \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right).$$

К ответу на последний вопрос можно подойти и иначе. До заземления оболочки имела потенциал $\phi' = k \frac{Q}{R_2} = \phi_2$. Заряд, пришедший на сферическую оболочку после заземления, уменьшает ее потенциал до нуля, но не изменяет поля внутри сферы, а значит, разности потенциалов между шаром и оболочкой. Поэтому

$$\phi_1 - \phi_2 = \phi_3 - 0, \text{ откуда } \phi_3 = \phi_1 \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right).$$

12.44. Ответ: $|q| = Q \frac{|b - a|}{b + a}$.

Решение. До заземления тонкие незаряженные оболочки не влияли на вид поля; шары имели одинаковые потенциалы. После заземления одинаковые (нулевые) потенциалы имеют уже сферы

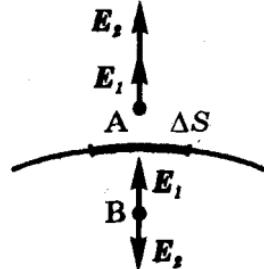
ческие оболочки. Перетекание заряда по проводу прекратится, когда сравняются потенциалы шаров. После заземления первый шар имеет заряд $Q + q$, а второй шар — заряд $Q - q$. Напряженность поля у поверхности первого шара $E_1 = k \frac{Q+q}{R^2}$, у поверхности второго $E_2 = k \frac{Q-q}{R^2}$. Поле в тонком зазоре между шарами и оболочкой можно считать однородным, поэтому потенциалы шаров найдем из соотношений $\phi_1 - 0 = E_1 a$; $\phi_2 - 0 = E_2 b$. Приравнивая ϕ_1 и ϕ_2 , получим $q = Q \frac{b-a}{b+a}$. При $b > a$ заряд перетекает к первому шару; при $b < a$ — ко второму.

12.45. Ответ: $f = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}$.

Решение 1. Рассмотрим малый элемент поверхности ΔS , на котором находится заряд $\Delta q = \frac{Q}{4\pi R^2} \Delta S$. Действующая на этот элемент сила

$\Delta F = \Delta q \cdot E_1$, где E_1 — напряженность поля, которое создается всеми остальными зарядами, не находящимися на площадке ΔS . Обозначим через E_2 напряженность поля заряда Δq непосредственно у площадки ΔS и рассмотрим две очень близкие точки A и B , лежащие по разные стороны от площадки ΔS . Определим полную напряженность поля в этих точках (см. рисунок; считаем, что $Q > 0$): $E_A = E_1 + E_2 = k \frac{Q}{R^2}$; $E_B = E_1 - E_2 = 0$. Отсюда $E_1 = E_2 = k \frac{Q}{2R^2}$, т. е. очень малый элемент заряженной поверхности создает вблизи себя такое же поле, как и все остальные заряды, вместе взятые! (Этот вывод справедлив для заряженного проводника любой формы.) Таким образом, $\Delta F = \frac{Q}{4\pi R^2} \Delta S \cdot k \frac{Q}{2R^2}$; тог-

да $f = \frac{\Delta F}{\Delta S} = k \frac{Q^2}{8\pi R^4} = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}$.



Решение 2. Потенциал оболочки $\phi = k \frac{Q}{R}$, а потенциальная энергия

кулоновского взаимодействия зарядов оболочки $W_p = \frac{1}{2} \Phi Q$ (множитель $1/2$ введен, чтобы не учитывать дважды энергию взаимодействия каждой пары точечных зарядов). Представим, что под

действием растягивающей силы $F = f \cdot 4\pi R^2$ радиус оболочки увеличился на малую величину ΔR . При этом работа $A = F\Delta R$ совершается за счет уменьшения потенциальной энергии: $A = -\Delta W_p$. Вычислим эту величину: $\Delta W_p = \Delta \left(k \frac{Q^2}{2R} \right) = \left(k \frac{Q^2}{2R} \right)' \Delta R = -k \frac{Q^2 \Delta R}{2R^2}$. Отсюда

$$f = k \frac{Q^2}{8\pi R^4} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4}.$$

12.46. Ответ: $p = 660$ Па.

Решение. Заряд Q распределяется по поверхности капли. При этом (см. задачу 12.45) за счет кулоновского отталкивания различных участков поверхности создается растягивающее каплю давление $p_1 = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4}$. С другой стороны, благодаря поверхностному натяжению создается сжимающее каплю давление $p_2 = 2\sigma/R$ (так называемое лапласовское давление, см. задачу 10.38). Давление внутри капли $p = p_2 - p_1 = 660$ Па. Заметим, что при $p_1 > p_2$ сферическая капля теряет устойчивость и может существенно деформироваться или распасться.

12.47. Ответ: не изменится; увеличится в 1,5 раза.

Решение. Возникшую после введения пластин систему можно рассматривать как батарею из трех последовательно соединенных конденсаторов, у каждого из которых емкость $C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d/3} = 3C_0$, где C_0 — первоначальная емкость конденсатора; емкость батареи составляет $C = \frac{1}{3}C_1 = C_0$. Соединив проводом введенные пластины, мы «закорачиваем» обкладки одного из трех конденсаторов. Тогда емкость оставшихся двух $C' = \frac{1}{2}C_1 = \frac{3}{2}C_0$.

12.48. Ответ: $C = 250$ пФ.

Решение. Пластины 1-2 и 2-3 образуют два одинаковых конденсатора емкостью $C_0 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$ каждый (здесь ϵ — диэлектрическая проницаемость слюды). Эти конденсаторы соединены между собой параллельно (на них одинаковые напряжения, поскольку $\phi_1 = \phi_3$). Поэтому $C = 2C_0 = \frac{2\epsilon_0 \epsilon S}{d} = 250$ пФ.

12.49. Ответ: $q_1 = 30$ мКл, $q_2 = 12$ мКл, $q_3 = 18$ мКл.

Решение. Найдем полную электрическую емкость C системы кон-

денсаторов. Емкость соединенных параллельно конденсаторов C_2 и C_3 составляет¹⁾ $C_{23} = C_2 + C_3$. Этот участок соединен последовательно с C_1 , поэтому $C = \frac{C_1 \cdot C_{23}}{C_1 + C_{23}} = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$.

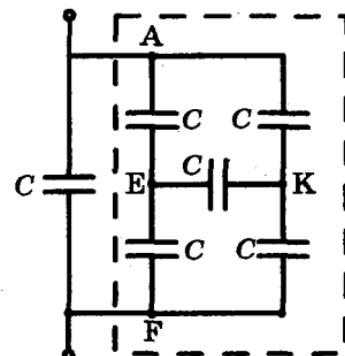
Полный заряд этой батареи конденсаторов $q = \mathcal{E}C = 30\text{ мККл}$. Именно такой заряд находится на конденсаторе C_1 и на батарее конденсаторов C_{23} (т. е. $q_1 = q_{23} = q = 30\text{ мККл}$). Чтобы найти распределение этого заряда между C_2 и C_3 , проще всего определить напряжение на них: $U_2 = U_3 = \frac{q}{C_{23}} = \frac{\mathcal{E}C}{C_{23}} = \frac{\mathcal{E}C_1}{C_1 + C_2 + C_3} = 3\text{ В}$. Отсюда $q_2 = U_2 C_2 = 12\text{ мККл}$; $q_3 = U_3 C_3 = 18\text{ мККл}$.

12.50. Ответ: $C_0 = C_1$.

Решение. Поскольку верхняя и нижняя ветви цепи одинаковы, задачу расчета емкости батареи можно существенно упростить. Вследствие симметрии цепи потенциалы точек A и B одинаковы: $\varphi_A = \varphi_B$. Напряжение U на включенном между этими точками конденсаторе равно нулю ($U = \varphi_A - \varphi_B$); значит, конденсатор емкостью C_2 не заряжен и его можно изъять из цепи²⁾, не изменив ее емкости. После этого расчет становится несложным: $C_0 = C_1$.

12.51. Ответ: $C_0 = 2C$.

Решение. Точки A и B , D и F соединены проводниками, поэтому $\varphi_A = \varphi_B$, $\varphi_D = \varphi_F$ (напомним, что это — условие отсутствия электрического тока). Соединим точки с равными потенциалами и преобразуем нашу цепь в другую, не допуская нигде разрывов и новых соединений (см. рисунок). Обведенная штриховой линией часть этой схемы уже рассмотрена в задаче 12.50. Ее емкость равна C . Еще один конденсатор емкостью C подключен параллельно к этой части схемы. Значит, $C_0 = C + C = 2C$.



12.52. Ответ: $q_1 = q_2 = \frac{CU}{2}$; $q_3 = q_4 = \frac{4CU}{5}$; $\varphi_D - \varphi_E = -0,3U$.

Решение. Емкость верхней ветви цепи составляет

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C}{2},$$

¹⁾ Здесь и далее $C_{l...k}$ обозначает емкость участка цепи, включающего элементы с номерами l , k , ... l .

²⁾ Здесь и далее подразумевается, что при изъятии какого-либо элемента цепи на его месте возникает разрыв.

заряды на конденсаторах верхней ветви $q_1 = q_2 = C_{12}U = \frac{CU}{2}$. Аналогично находим $C_{34} = \frac{C_3C_4}{C_3 + C_4} = \frac{4C}{5}$, $q_3 = q_4 = C_{34}U = \frac{4CU}{5}$.

Найдем напряжения на конденсаторах C_1 и C_3 : $U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{U}{2}$

(вполне очевидный результат) и $U_3 = \frac{q_3}{C_3} = \frac{4U}{5}$.

Учитывая, что $U_1 = \varphi_B - \varphi_A$ и $U_3 = \varphi_E - \varphi_A$, получаем $\varphi_B - \varphi_E = U_1 - U_3 = -0,3 U$.

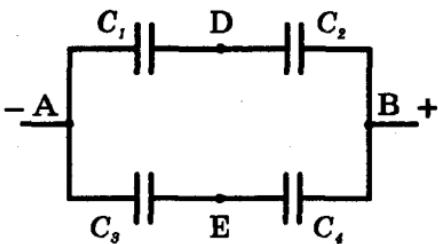
12.53. Ответ: $C_0 = 6C$.

Решение. Данная цепь не содержит ни последовательных, ни параллельных соединений. На первый взгляд, в ней отсутствует и симметрия между верхней и нижней ветвями цепи. Заметим, однако, что емкости конденсаторов нижней ветви вдвое больше соответствующих емкостей верхней ветви. Докажем, что при выполнении условия $\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4}$ (см. рисунок) потенциалы точек D и E одинаковы, если изъять конденсатор-«перемычку». Распределение напряжений в верхней и нижней ветвях цепи описывается в таком случае уравнениями $\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}$ и $\frac{U_3}{U_4} = \frac{C_4}{C_3}$. Значит, $\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_3}{U_4}$. Поскольку $U_1 + U_2 = U_3 + U_4$, получаем $U_1 = U_3$ (это можно доказать и методом, описанным в решении задачи 12.52). А эти напряжения не что иное, как разности потенциалов: $U_1 = \varphi_B - \varphi_A$, $U_3 = \varphi_E - \varphi_A$. Таким образом, $\varphi_B = \varphi_E$ и поэтому включение конденсатора-«перемычки» между точками D и E ничего не изменит: заряжаться он не будет, а значит, его можно изъять из цепи. После этого подсчет C_0 уже не вызывает затруднений:

$$C_{12} = \frac{3C \cdot 6C}{3C + 6C} = 2C, C_{34} = \frac{6C \cdot 12C}{6C + 12C} = 4C, C_0 = C_{12} + C_{34} = 6C.$$

12.54. Ответ: $C_0 = 1,2C$.

Решение. Схема обладает симметрией относительно пространственной диагонали куба 1-7. При повороте куба относительно этой оси на 120° схема в целом не меняется, но точки 2, 4, 5 меняются



между собой местами (так же, как и точки 3, 6, 8). Значит, при включении в цепь $\varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_6$ и $\varphi_3 = \varphi_5 = \varphi_7$. Каждую группу из трех точек можно объединить в одну точку. Тогда эквивалентная

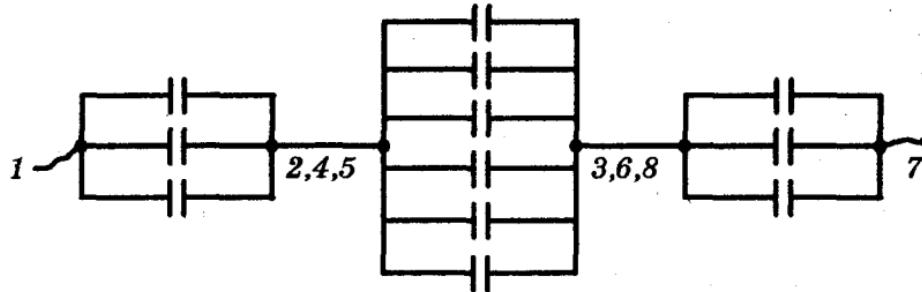


схема приобретет вид, показанный на рисунке. Емкости последовательных участков этой схемы равны $3C$, $6C$, $3C$. Полную емкость найдем из соотношения $\frac{1}{C_0} = \frac{1}{3C} + \frac{1}{6C} + \frac{1}{3C}$, откуда $C_0 = 1,2C$.

12.55. Ответ: $U = 120$ В.

Решение. Если первоначально емкость каждого конденсатора была равна C , то емкость батареи конденсаторов была $2C$, а полный заряд батареи $q = 2CU_0$. После сближения пластин одного из конденсаторов его емкость составит $3C$, а всей батареи $4C$. Значит, заряд батареи конденсаторов $q = 4CU$. Однако заряд батареи конденсаторов, отключенной от источника, не мог измениться (вследствие закона сохранения электрического заряда). Значит, $2CU_0 = 4CU$, откуда $U = \frac{U_0}{2} = 120$ В.

12.56. Ответ: в первом уменьшится в $\frac{\epsilon + 1}{2}$ раз, во втором увеличится в $\frac{2\epsilon}{\epsilon + 1}$ раз.

Решение. Обозначим первоначальную емкость каждого конденсатора через C_1 . Начальное напряжение на каждом конденсаторе было равно $U/2$. Заполнение диэлектриком увеличило емкость первого конденсатора в ϵ раз. Емкость же батареи конденсаторов стала $C = \frac{\epsilon C_1 \cdot C_1}{\epsilon C_1 + C_1} = \frac{\epsilon}{\epsilon + 1} C_1$. Заряд батареи (и каждого из конденсаторов) $q = UC = \frac{\epsilon}{\epsilon + 1} UC_1$. Напряжение на конденсаторе, заполненном диэлектриком, составляет $U_1 = \frac{q}{\epsilon C_1} = \frac{U}{\epsilon + 1}$, т. е. умень-

шилось в $\frac{\epsilon + 1}{2}$ раз. Во столько же раз уменьшилась и напряженность электрического поля в этом конденсаторе. Напряжение на конденсаторе, не заполненном диэлектриком, составляет $U_2 = \frac{q}{C_1} = \frac{\epsilon U}{\epsilon + 1}$. Оно увеличилось в $\frac{2\epsilon}{\epsilon + 1}$ раз по сравнению с первоначальным. Во столько же раз увеличилась и напряженность электрического поля в этом конденсаторе.

12.57. Ответ: а) $U_{\max} = 144$ В, б) $U_{\max} = 36$ В.

Решение. Напрашивающийся простой ответ $U_{\max} = U_1 + U_2$ справедлив лишь при условии $C_1 U_1 = C_2 U_2$, т. е. когда конденсаторы способны накапливать одинаковые максимальные заряды (ведь при последовательном соединении одинаковы именно заряды на конденсаторах). Когда к батарее приложено напряжение U , заряд батареи (а значит, и каждого из конденсаторов) составляет $q = \frac{C_1 C_2 U}{C_1 + C_2}$. Напряжения на конденсаторах составят соответственно

но $U_1' = \frac{q}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U$ и $U_2' = \frac{q}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U$. Напряжения U_1' и U_2'

не должны превышать предельно допустимых значений для каждого из конденсаторов, т. е. $U_1' < U_1$ и $U_2' < U_2$. Следовательно, приложенное к батарее напряжение U должно удовлетворять системе неравенств:

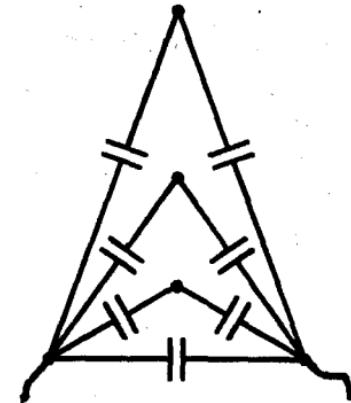
$$\begin{cases} \frac{C_2 U}{C_1 + C_2} < U_1, \\ \frac{C_1 U}{C_1 + C_2} < U_2. \end{cases}$$

Из первого неравенства получаем $U < \frac{C_1 + C_2}{C_2} U_1$, из второго $U < \frac{C_1 + C_2}{C_1} U_2$. Поскольку оба эти неравенства должны выполняться одновременно, U не должно превышать *меньшего* из двух выражений: $\frac{C_1 + C_2}{C_2} U_1$ и $\frac{C_1 + C_2}{C_1} U_2$ (нетрудно проверить, что при $C_1 U_1 = C_2 U_2$ оба эти выражения совпадают с суммой $U_1 + U_2$; такой «очевидный» ответ уже обсуждался выше). Подставляя числовые данные условия, получаем:

а) $U_{\max} = \frac{C_1 + C_2}{C_2} U_1 = 144$ В; б) $U_{\max} = \frac{C_1 + C_2}{C_1} U_2 = 36$ В.

12.58. Ответ: $C_0 = 2,5C$.

Решение. Попробуем упростить схему до того, как станем ее изображать. Учтем, что те три точки, к которым не подключена внешняя цепь, «взаимозаменяемы»; следовательно, их потенциалы одинаковы. Поэтому включенные между этими точками конденсаторы не заряжены и могут быть изъяты из цепи: на емкость системы они не влияют. Заряжены лишь семь конденсаторов (см. рисунок). Емкость каждой из трех одинаковых ветвей цепи равна $C/2$, а полная емкость системы $C_0 = 3 \frac{C}{2} + C = 2,5C$.



Этот результат можно обобщить: при произвольном количестве точек n получаем $C_0 = \frac{n}{2}C$.

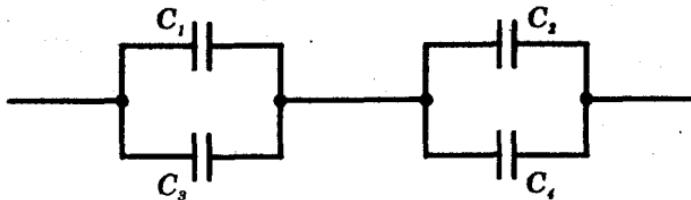
12.59. Ответ: $\phi_A - \phi_B = \frac{\mathcal{E}}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}$; после включения резистора $\phi_A - \phi_B = 0$, $C_0 = \frac{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}$.

Решение. Батарея из конденсаторов C_1 и C_2 , имеющая емкость $C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$, заряжена до напряжения, равного \mathcal{E} . Значит, ее заряд $q_{12} = \mathcal{E}C_{12}$. Такой же заряд и у конденсатора C_1 ; значит, напряжение на нем $U_1 = \frac{q_{12}}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\mathcal{E}$. Аналогично находим $U_3 = \frac{C_4}{C_3 + C_4}\mathcal{E}$. Учтем теперь, что $U_1 = \phi_B - \phi_A$, $U_3 = \phi_B - \phi_V$. Вычитая друг из друга эти соотношения, получаем

$$\phi_A - \phi_B = U_3 - U_1 = \frac{C_1 C_4 - C_2 C_3}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}\mathcal{E}.$$

Заметим, что $\phi_A - \phi_B = 0$, если $\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4}$ (ср. с задачей 12.52).

Если соединить резистором точки A и B , то цепь все равно останется разомкнутой и поэтому постоянный ток по ней течь не будет. По резистору пройдет лишь кратковременный всплеск тока, в результате чего потенциалы ϕ_A и ϕ_B уравняются (независимо от величины R). Эквивалентная схема получившейся системы конденсаторов показана на рисунке. Полная емкость системы со-



ставит $C_0 = \frac{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}$ (до введения в цепь резистора она равнялась $\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}$).

12.60. Ответ: $\phi_A - \phi_B = \frac{C_1 \mathcal{E}_1 - C_2 \mathcal{E}_2}{C_1 + C_2}$.

Решение. Батарея конденсаторов емкостью $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ находится под напряжением $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$; значит, ее заряд $q = \frac{C_1 C_2 (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)}{C_1 + C_2}$. Таким же будет заряд каждого из конденсаторов, поэтому напряжение на конденсаторе C_1 составит $U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)$. Поскольку ток в цепи отсутствует, напряжение на источнике тока равно его ЭДС. Итак,

$$\phi_D - \phi_B = \mathcal{E}_1,$$

$$\phi_D - \phi_A = U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2).$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем

$$\phi_A - \phi_B = \frac{C_1 \mathcal{E}_1 - C_2 \mathcal{E}_2}{C_1 + C_2}.$$

12.61. Ответ: а) $\frac{C}{3}$; б) C ; в) $3C$; г) $\frac{3C}{5}$; д) $\frac{5C}{3}$; е) C .

Указание. На рис. б, в, д, е приведены некоторые эквивалентные схемы систем конденсаторов, заданных в условиях.

12.62. Ответ: $U_1 = 100$ В, $U_2 = 150$ В, $U_3 = 300$ В.

Решение. Из закона сохранения заряда следует, что заряды на соединенных обкладках соседних конденсаторов одинаковы по модулю и противоположны по знаку¹¹ (см. рисунок). Наличие между конденсаторами источников тока в этом смысле ничего не

¹¹ Это справедливо, если только какая-то обкладка не была заряжена до включения в цепь (см., например, задачу 12.63).

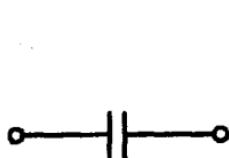


Рис. 6

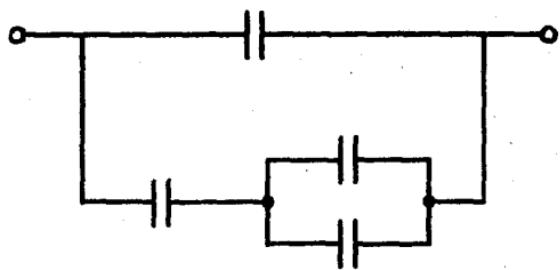


Рис. 6

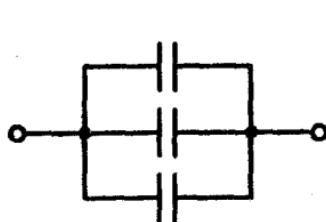


Рис. 8

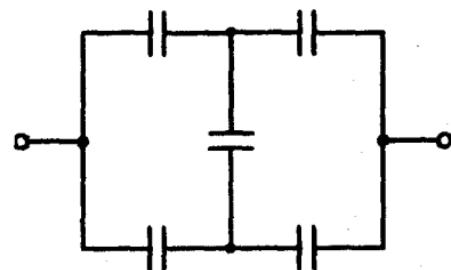


Рис. 9

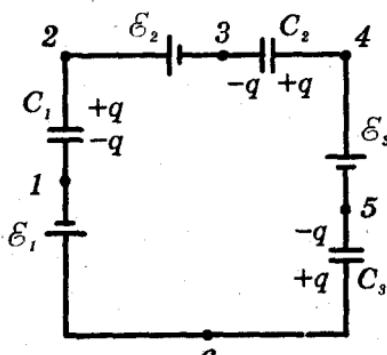
К задаче 12.61

меняет: источник тока *разделяет* заряды, но не создает их. Напряжения на конденсаторах: $U_1 = \frac{q}{C_1}$, $U_2 = \frac{q}{C_2}$, $U_3 = \frac{q}{C_3}$. Вводя потенциалы φ точек, обозначенных на рисунке, можем записать:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C_1}; \quad \varphi_3 - \varphi_2 = -\mathcal{E}_2; \quad \varphi_4 - \varphi_3 = \frac{q}{C_2};$$

$$\varphi_5 - \varphi_4 = -\mathcal{E}_3; \quad \varphi_6 - \varphi_5 = \frac{q}{C_3}; \quad \varphi_1 - \varphi_6 = -\mathcal{E}_1.$$

Складывая почленно все шесть записанных выше равенств, полу-



К задаче 12.62

чаем $\frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 = 0$. Отсюда $q = \frac{C_1 C_2 C_3 (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3)}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}$;

следовательно, напряжения на конденсаторах

$$U_1 = \frac{C_2 C_3 (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3)}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} = 100 \text{ В},$$

$$U_2 = \frac{C_1 C_3 (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3)}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} = 150 \text{ В},$$

$$U_3 = \frac{C_1 C_2 (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3)}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} = 300 \text{ В}.$$

Если с самого начала заметить, что результат не зависит от порядка следования элементов цепи, то задачу можно решить гораздо проще: достаточно рассмотреть последовательное соединение трех конденсаторов, подключенных к источнику напряжения $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$.

12.63. Ответ: $U_1 = \frac{5U_0}{8}$; $U_2 = \frac{3U_0}{8}$; $U_3 = \frac{U_0}{4}$; $U_4 = U_5 = \frac{U_0}{8}$; $U_6 = 0$.

Решение. Определим сначала емкость батареи, состоящей из конденсаторов 2-6. Эквивалентная схема этой батареи приведена на рисунке. Конденсатор 6 включен между точками с равными потенциалами (закорочен), поэтому $U_6 = 0$, и на схеме этот конденсатор не показан.

Очевидно, $C_{45} = \frac{C}{2}$; $C_{345} = C + \frac{C}{2} = \frac{3C}{2}$;

$C_{2345} = \frac{C \cdot 1,5C}{C + 1,5C} = \frac{3C}{5}$. После замыкания ключа имевшийся на первом конденсаторе заряд CU_0 распределяется между этим конденсатором и батареей C_{2345} (напряжение U_1 на них одинаково). Согласно закону сохранения заряда $CU_0 = (C + C_{2345})U_1$, откуда $U_1 = \frac{5U_0}{8}$.

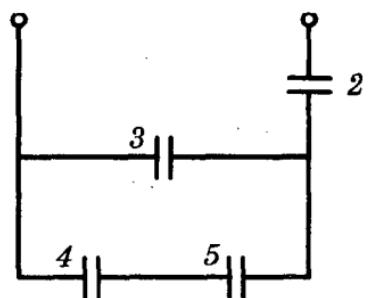
Тогда заряд батареи C_{2345} составит $q_{2345} = q_2 = C_{2345}U_1 = \frac{3CU_0}{8}$. Следо-

вательно, $U_2 = \frac{q_2}{C} = \frac{3U_0}{8}$; $U_3 = U_1 - U_2 = \frac{U_0}{4}$; $U_4 = U_5 = \frac{U_0}{8}$.

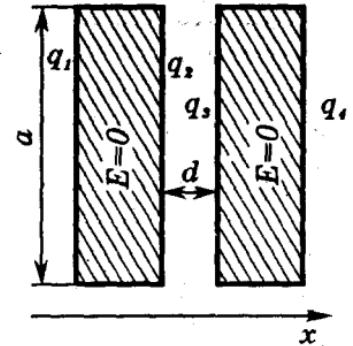
12.64. Ответ: $U = \frac{Qd}{\epsilon_0 A^2}$; на внешних поверхностях пластин одина-

ковые заряды $+2Q$, на внутренних — заряды $+Q$ и $-Q$.

Решение. Удобно начать как раз с выяснения характера распределения зарядов на пластинах (см. рисунок, на котором пластины



схематически утолщены). Напряженность поля каждой из четырех заряженных плоскостей задается формулой $E_i = \frac{|q_i|}{2\epsilon_0 a^2}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). С учетом знака заряда проекция напряженности на ось x составит справа от соответствующей плоскости $E_{ix} = \frac{q_i}{2\epsilon_0 a^2}$,



слева — $E_{ix} = -\frac{q_i}{2\epsilon_0 a^2}$. Как известно, напряженность поля *внутри* каждой из металлических пластин (суперпозиция всех четырех полей) равна нулю. Поэтому (с учетом направления полей)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\epsilon_0 a^2}(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) = 0, \\ \frac{1}{2\epsilon_0 a^2}(q_1 + q_2 + q_3 - q_4) = 0. \end{array} \right.$$

Кроме того, из условия задачи получаем еще два уравнения для величин q_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 + q_2 = 3Q, \\ q_3 + q_4 = Q. \end{array} \right.$$

Решая эту систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными, получаем: $q_1 = q_4 = 2Q$; $q_2 = -q_3 = Q$.

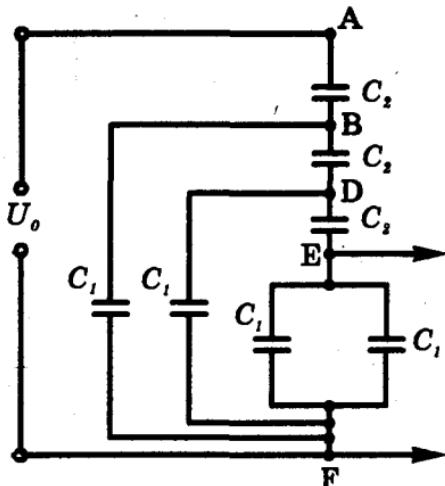
Таким образом, заряды на наружных поверхностях пластин одинаковы, а заряды на внутренних поверхностях противоположны (типичная для конденсатора ситуация). Определив напряженность поля между пластинами $E = \frac{1}{2\epsilon_0 a^2}(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) = \frac{Q}{\epsilon_0 a^2}$, по-

лучим $U = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 a^2}$.

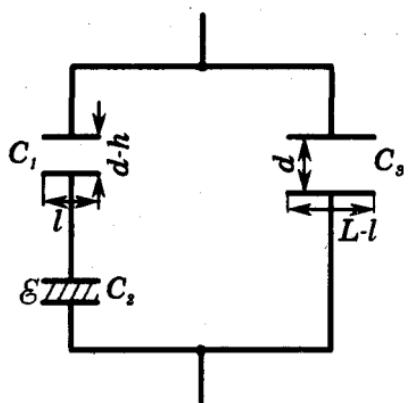
12.65. Ответ: $U = 10$ В.

Решение. Прежде всего представим схему так, чтобы были видны параллельные и последовательные соединения (см. рисунок). Надо найти напряжение между точками E и F , если известно, что напряжение между точками A и F равно U_0 . Благодаря условию $C_2 = 2C_1$ находим, что емкость цепи между точками E и F , D и F , B и F одна и та же: она равна C_2 . Следовательно, напряжение между точками B и F равно половине напряжения между A и F , то есть $U_{BF} = \frac{U_0}{2}$. Аналогично $U_{DF} = \frac{U_{BF}}{2} = \frac{U_0}{4}$, и, наконец, требуемое

в задаче напряжение $U_{EF} = \frac{U_{DF}}{2} = \frac{U_0}{8} = 10$ В.



К задаче 12.65



К задаче 12.66

12.66. Ответ: а) $C = \frac{\epsilon_0 S(L + l(\epsilon - 1))}{Ld}$; б) $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{\epsilon d - (\epsilon - 1)h}$;

в) $C = \frac{\epsilon_0 S(L - l)}{Ld} + \frac{\epsilon_0 S l \epsilon}{L(\epsilon d - (\epsilon - 1)h)}$.

Решение. В случае *а* конденсатор можно представить как батарею из трех различных конденсаторов — двух воздушных и одного полностью заполненного диэлектриком (см. рисунок). Очевидно,

$C_1 = \frac{\epsilon_0 S l}{L(d - h)}$, $C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S l}{Lh}$, $C_3 = \frac{\epsilon_0 S(L - l)}{Ld}$; тогда емкость батареи составляет $C = C_3 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 S(L - l)}{Ld} + \frac{\epsilon_0 S l \epsilon}{L(\epsilon d - (\epsilon - 1)h)}$. Отсюда при $h = d$ получаем случай *а*, а при $l = L$ — случай *б*.

12.67. Ответ: б) $C = \frac{\epsilon_0 S}{d - h}$; в) $C = \frac{\epsilon_0 S}{L} \left(\frac{l}{d - h} + \frac{L - l}{d} \right)$.

Указание. Внутри проводника электрическое поле отсутствует, поэтому объем конденсатора просто уменьшается на величину объема проводника, заряд переходит с обкладки на внутреннюю поверхность проводника.

Приведенные ответы можно формально получить предельным переходом $\epsilon \rightarrow \infty$ в ответах задачи 12.66, потому что с точки зрения электростатики проводник можно рассматривать как диэлектрик с бесконечно большой диэлектрической проницаемостью (поле внутри проводника исчезает, т. е. уменьшается в бесконечно много раз).

12.68. Ответ: 1) $\phi_2 = \frac{U}{3}$, $\phi_3 = \frac{2U}{3}$.

2) $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \phi_3 = \frac{U}{2}$, $\phi_4 = U$; напряженность поля в промежутках 1-2 и 3-4 увеличится в 1,5 раза, в промежутке 2-3 поле исчезнет.

3) Емкость конденсатора и заряды на обкладках возрастут в 1,5 раза.

Решение. 1) Внесение тонких незаряженных пластин не меняет вида электрического поля внутри конденсатора. Оно остается однородным, напряженность поля E_0 во всех трех промежутках одинакова. Значит, потенциал изменяется с расстоянием линейно,

и поэтому $\phi_2 = \frac{U}{3}$, $\phi_3 = \frac{2U}{3}$ (разумеется, $\phi_1 = 0$ и $\phi_4 = U$).

2) В результате замыкания пластин 2 и 3 между ними происходит такое перераспределение заряда, что их потенциалы уравниваются, а поле в промежутке 2-3 исчезает. При $U = \text{const}$ последующее размыкание пластин 2 и 3 уже ничего не меняет.

Очевидно, при этом $\phi_2 = \phi_3 = \frac{U}{2}$ (пластины 2 и 3 расположены симметрично относительно средней плоскости конденсатора). Значит, разности потенциалов между пластинами 1-2 и 3-4 возросли в полтора раза по сравнению с первоначальными. Во столько же раз выросла, конечно, и напряженность поля в этих промежутках. Итак, $E_{1-2} = E_{3-4} = 1,5 E_0$; $E_{2-3} = 0$.

3) В результате замыкания пластин 2-3 поле исчезает в одном из трех промежутков, что равносильно уменьшению расстояния между обкладками в полтора раза. Значит, емкость возрастает тоже в полтора раза: $C = 1,5 C_0$. Во столько же раз (поскольку $U = \text{const}$) возрастают и заряды на обкладках.

12.69. Ответ: энергия конденсатора уменьшается; увеличивается энергия, запасенная в аккумуляторе; энергия отключенного от источника конденсатора при раздвигании пластин растет.

Решение. Энергия заряженного конденсатора $W_p = \frac{CU^2}{2}$, где $C =$

$= \frac{\epsilon_0 S}{d}$. Пока конденсатор соединен с источником постоянной ЭДС, $U = \text{const}$. Емкость C при увеличении расстояния d между пластинами уменьшается. Значит, уменьшается и W_p . Куда же «исчезает» энергия конденсатора и вдобавок энергия, потраченная на раздвигание пластин (ведь нужно было преодолеть их взаимное

притяжение)? Противоречие с законом сохранения энергии, разумеется, кажущееся: ведь конденсатор не является замкнутой системой, он подключен к аккумулятору. При уменьшении емкости конденсатора уменьшается и его заряд. Уходящий с конденсатора заряд проходит через аккумулятор, совершая работу против сторонних сил. Вследствие этого увеличивается запасенная в аккумуляторе энергия, т. е. аккумулятор подзаряжается¹⁾. Если же цепь разомкнуть, то напряжение на конденсаторе уже не будет постоянным. Теперь постоянным будет заряд q конденсатора. Поэтому формулу для энергии заряженного конденсатора удобно записать в виде $W_p = \frac{q^2}{2C}$. При уменьшении C (раздвигании пластин) энергия конденсатора увеличивается: внешние силы совершают положительную работу, а энергии «уйти» некуда!

12.70. Ответ: а) $q = \text{const}$; U , E и W уменьшаются в ϵ раз; б) $U = \text{const}$; $E = \text{const}$; q и W увеличиваются в ϵ раз.

Указание. См. решение задачи 12.69.

12.71. Решение. Если бы конденсатор не был заряжен, то при вытекании из него жидкого диэлектрика приобрел бы кинетическую энергию W_k . При заряженном конденсаторе вытекание замедляется (его тормозит сила, «втягивающая» диэлектрик в поле конденсатора). Значит, кинетическая энергия W'_k , приобретенная диэлектриком в этом случае, меньше W_k . Разность $W_k - W'_k$ как раз и представляет собой добавочную энергию заряженного конденсатора.

12.72. Ответ: в случае б, когда конденсатор отключен от источника.

Решение. Вначале в обоих случаях необходимо преодолевать одинаковую силу F притяжения пластин. В случае б заряд $q = \text{const}$, поэтому напряженность поля $E = \text{const}$ и $F = \text{const}$. В случае а постоянным остается напряжение на конденсаторе: $U = \text{const}$. Поскольку емкость конденсатора при раздвигании пластин уменьшается, уменьшается и его заряд, а значит, и электрическое поле. Следовательно, в случае а потребуется совершить меньшую работу (при одинаковом перемещении пластин). Ср. эту задачу с задачей 12.69

¹⁾ Если аккумулятор заменить источником, который нельзя подзарядить, то «лишняя» энергия, конечно, перейдет во внутреннюю.

12.73. Ответ: $Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{3}$.

Решение. Полная емкость батареи конденсаторов после переключения не изменилась (и до, и после переключения два одинаковых конденсатора соединены параллельно, а третий такой же подключен к ним последовательно): $C_0 = \frac{2}{3}C$. Значит, энергия электрического поля в батарее также не изменилась: она равна $\frac{C_0\mathcal{E}^2}{2}$.

Означает ли это, что выделившееся количество теплоты $Q = 0$? Нет, потому что по цепи некоторое время шел ток (произошло перераспределение заряда между конденсаторами), а это значит, что должно было выделиться некоторое количество теплоты. Необходимая для этого энергия могла поступать только от источника ЭДС, т. е. $Q = A_{\text{ст}} = \Delta q\mathcal{E}$ (здесь $A_{\text{ст}}$ — работа сторонних сил в источнике ЭДС; Δq — заряд, пропущенный через источник от его отрицательного полюса к положительному). На рисунках показано распределение

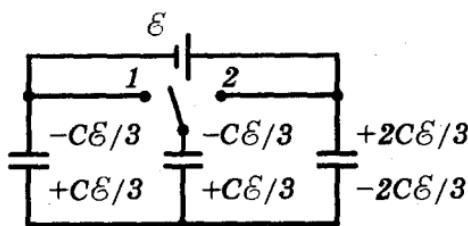


Рис. а

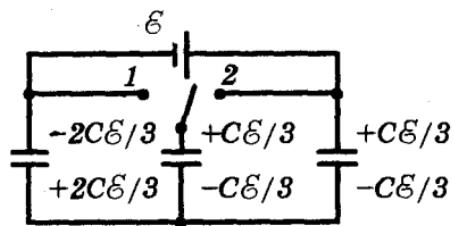


Рис. б

зарядов на обкладках конденсаторов до переключения (а) и после (б). Мы видим, что заряд $\Delta q = \frac{C\mathcal{E}}{3}$ «ушел» с верхней обкладки левого конденсатора и прошел через источник. Отсюда получаем $Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{3}$. Интересно, что при обратном переключении снова выделяется такое же количество теплоты, и необходимая для этого энергия опять поступает из источника. Переключая ключ туда и обратно, мы каждый раз «берем» из источника одну и ту же «порцию» энергии.

12.74. Ответ: $\phi = \frac{\Phi_0}{N^{\frac{2}{3}}}$.

Решение. Потенциал заряженной капли (проводящего шара) $\Phi_0 = k\frac{Q}{R}$, заряд каждой из маленьких капель $q = \frac{Q}{N}$. Радиус r ма-

леньких капель найдем из условия неизменности объема ртути:

$$\frac{4\pi R^3}{3} = N \frac{4\pi r^3}{3},$$

откуда $r = \frac{R}{N^{\frac{1}{3}}}$. Тогда потенциал образовавшихся капель составит

$\Phi = k \frac{q}{r} = k \frac{Q}{N^{\frac{2}{3}} R} = \frac{\Phi_0}{N^{\frac{2}{3}}}$, т. е. уменьшается. Отметим, что этот ответ справедлив только в том случае, когда образовавшиеся капли разлетятся на большое расстояние (чтобы можно было пренебречь энергией их взаимодействия).

12.75. Ответ: уменьшается в $N^{\frac{2}{3}}$ раза.

Решение. Первоначальная энергия электрического поля $W_0 = \frac{1}{2}\Phi_0 Q$ (см. задачу 12.74 и решение 2 задачи 12.45). Энергия поля после распада капли

$$W = N \cdot \frac{1}{2} \Phi q = N \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Phi_0}{N^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{Q}{N} = \frac{W_0}{N^{\frac{2}{3}}}.$$

При распаде капли, однако, возрастает поверхностная энергия жидкости, поэтому самопроизвольный распад не всегда возможен.

12.76. Решение. Шарики отталкиваются друг от друга, и поэтому все четыре нити натянуты. Следовательно, при равновесии шарики располагаются в вершинах ромба. Если угол между стороной ромба и одной из диагоналей равен α , то длины диагоналей ромба $2lsina$ и $2lcose$ (здесь l — длина нити). В положении устойчивого равновесия потенциальная энергия W_p кулоновского взаимодействия шариков должна быть минимальной. Поскольку расстояния между соседними шариками фиксированы, достаточно рассмотреть энергию взаимодействия между шариками, лежащими на одной диагонали:

$$W_p = k \cdot \frac{q^2}{2lsina} + k \cdot \frac{q^2}{2lcose}.$$

Производная W_p по углу α равна $\frac{kq^2(\sin^3\alpha - \cos^3\alpha)}{2lsin^2\alpha cos^2\alpha}$. Отсюда

следует, что величина W_p убывает при изменении угла α от 0 до 45° и возрастает при изменении α от 45 до 90° . Минимальное значение W_p достигается при $\alpha = 45^\circ$, когда ромб превращается в квадрат.

12.77. Ответ: $Q > \frac{32\pi\epsilon_0 mgR^2}{q}$.

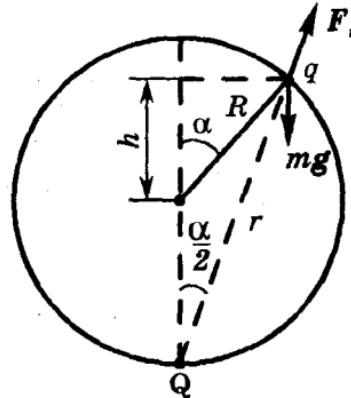
Решение. Разумеется, кулоновская сила должна, по крайней мере,

уравновешивать силу тяжести:

$$k \frac{Qq}{4R^2} > mg. \quad (1)$$

Однако этого мало. В верхней точке шарик должен иметь положение устойчивого равновесия, т. е. потенциальная энергия W_p при смещении шарика из верхнего положения должна увеличиваться. Эта энергия складывается из энергии mgh притяжения к Земле (высоту h можно, например, отсчитывать от уровня центра сферы) и энергии кулоновского отталкивания $k \frac{Qq}{r}$ (см. рисунок):

$$W_p = mgh + \frac{Qq}{r}.$$



Рассмотрим изменение W_p при смещении шарика из верхнего положения (шарик не отрывается от поверхности сферы!). Величину смещения будем характеризовать углом α . Тогда (см. рисунок) $h = R\cos\alpha$; $r = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$. Потенциальную энергию W_p удобно

записать как функцию величины $x = \cos\frac{\alpha}{2}$; тогда получим

$$W_p = mgR(2x^2 - 1) + \frac{kQq}{2Rx}.$$

Нас интересует поведение этой функции вблизи $\alpha = 0$, т. е. вблизи $x = 1$. Для того, чтобы равновесие шарика в верхней точке было устойчивым, необходимо, чтобы W_p увеличивалась при увеличении α , т. е. при уменьшении x . Это значит, что производная W'_p при $x = 1$ должна быть отрицательной:

$$W'_p|_{x=1} = \left(4xmgR - \frac{kQq}{2Rx^2}\right)|_{x=1} = 4mgR - \frac{kQq}{2R} < 0.$$

Отсюда получаем

$$Q > \frac{8mgR^2}{kq} = \frac{32\pi\epsilon_0 mgR^2}{q}.$$

Мы видим, что условие устойчивости является более сильным, чем просто условие равновесия, т. е. неравенство (1). Тот же результат можно получить иначе. Равновесие шарика будет устойчивым, если при малых углах α модуль проекции кулоновской силы F_k на касательную к окружности (см. рисунок) превышает модуль проекции силы тяжести mg на то же направление:

$$F_k \sin \frac{\alpha}{2} > mgsina.$$

Поскольку при малых α можно считать $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sin\alpha$, получаем

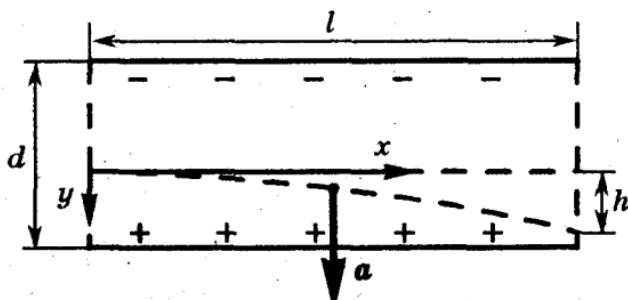
$$F_k > 2mg, \text{ откуда } Q > \frac{32\pi\epsilon_0 mgR^2}{q}.$$

12.78. Ответ: парабола; $h = 2,7$ мм.

Решение. Электрическое поле внутри конденсатора однородно, его напряженность $E = \frac{U}{d}$. Оно придает электрону постоянное ускорение $a = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{md}$, направленное под прямым углом к пластинам (см. рисунок). Движение электрона подобно движению горизонтально брошенного тела под действием силы тяжести. Координаты электрона изменяются со временем по закону $x = vt$, $y = \frac{at^2}{2}$. Исключая из этих соотношений время, получаем

$$y = \frac{a}{2v^2}x^2 = \frac{eU}{2mv^2d}x^2.$$

Это уравнение параболы. Подставляя в него $x = l$, находим $h = \frac{eUl^2}{2mv^2d} = 2,7$ мм.



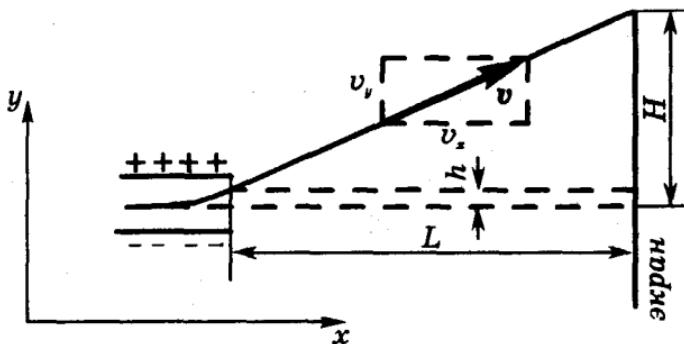
12.79. Ответ: $H = 2,47$ см.

Решение. После вылета из конденсатора электрон движется прямолинейно по инерции. Направление движения определяется скоростью электрона в момент вылета из конденсатора. Из подобия треугольников (см. рисунок) следует:

$$\frac{H - h}{L} = \frac{v_y}{v_x}.$$

К моменту вылета из конденсатора $v_x = v$, $v_y = \frac{eUl}{mv^2d}$ (см. задачу 12.78). Тогда

$$H = h + L \frac{eUl}{mv^2d} = \frac{eUl}{mv^2d} \left(\frac{l}{2} + L \right) = 2,47 \text{ см.}$$



Разумеется, основной вклад в H дает движение *вне* конденсатора. Значит, смещение точки на экране обусловлено не столько *смещением* электрона при движении внутри конденсатора, сколько изменением *направления его движения*.

12.80. Ответ: траектория электрона — парабола;

$$s = d \left(1 - \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2U_e} \right) \text{ при } U > \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2e}; s = 0 \text{ при } U < \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2e}.$$

Указание. См. задачу 12.78.

12.81. Ответ: $U_1 = 150$ В; при $l = 10$ см задача не имеет решения.

Решение. Энергия электрона соответствует разгону его напряжением $U_0 = 1500$ В, т. е.

$$\frac{mv_0^2}{2} = eU_0, \quad (1)$$

где v_0 — начальная скорость электрона в конденсаторе. Проекция начальной скорости v_0 на плоскость пластин равна $v_0 \cos \alpha$, на нормаль к ним $v_0 \sin \alpha$. Ускорение электрона в конденсаторе

$a = \frac{U_e}{md}$ (см. задачу 12.78), движение происходит по параболе (см.

рисунок). Время пролета электрона через конденсатор $t = \frac{l}{v_0 \cos \alpha}$.

Вертикальная проекция скорости электрона на вылете из конденсатора должна равняться нулю: $v_0 \sin \alpha - at = 0$, откуда

$$v_0 \sin \alpha - \frac{U e l}{m d v_0 \cos \alpha} = 0 \text{ и } U = \frac{m v_0^2}{e} \cdot \frac{d \sin \alpha \cos \alpha}{l}.$$

Учитывая уравнение (1), находим

$$U = U_0 \frac{d \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{l} = \frac{d \sin 2\alpha}{l} U_0.$$

При $l = l_1 = 5$ см получаем $U_1 = 150$ В, а при $l = l_2 = 10$ см $U_2 = 75$ В. Однако не будем торопиться: решение задачи еще не закончено. Определим вертикальное смещение h электрона за время пролета в конденсаторе. Среднее значение вертикальной

проекции скорости $v_{cp} = \frac{v_0 \sin \alpha + 0}{2}$, значит, $h = v_{cp} \cdot t = \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha$.

Если $l = l_1 = 5$ см, то $h = h_1 = 0,67$ см; если же $l = l_2 = 10$ см, то $h = h_2 = 1,34$ см. Как видим, $h_2 > d$! Значит, при $l_2 = 10$ см задача не имеет решения — электрон не сможет пролететь через весь конденсатор, так как непременно попадет на положительную пластину. При $l = l_1 = 5$ см электрон должен входить в конденсатор достаточно далеко от отрицательной пластины.

12.82. Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eEl}{mv_0}\right)^2} = 2,7 \cdot 10^7$ м/с; скорость направлена под углом $\alpha = \arctg \frac{eEl}{mv_0^2} = 41^\circ$ к плоскости пластин.

Указание. См. задачи 12.78, 12.79.

12.83. Ответ: $U_2 = \frac{2d^2}{l^2} U_1 = 100$ В.

Указание. См. задачи 12.78 и 12.81. Электроны не будут вылетать из конденсатора, если $\frac{at^2}{2} > \frac{d}{2}$.

12.84. Ответ: $U = d \sqrt{\frac{2\rho gh}{\epsilon_0(\epsilon - 1)}}$.

Решение. Как известно (см., например, задачу 12.12), диэлектрик втягивается в область более сильного электрического поля, а у края конденсатора возникает как раз резко неоднородное поле. Однако непосредственное вычисление силы, действующей на жидкость со стороны неоднородного поля, — непростая задача. Поэтому применим «энергетический подход»: воспользуемся тем, что потенциальная энергия W_p системы в положении устойчивого

равновесия минимальна. Эта энергия складывается из потенциальной энергии $\frac{mgh}{2}$ столбика втянутой в конденсатор жидкости (высота ее центра тяжести $\frac{h}{2}$) и энергии поля заряженного конденсатора $\frac{q^2}{2C}$. Заряд q конденсатора остается при подъеме жидкости неизменным, а емкость конденсатора возрастает от $C_0 = \frac{\epsilon_0 a^2}{d}$ до $C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} (1 + (\epsilon - 1) \frac{h}{a})$ (см. задачу 12.66). Учитывая, что $m = \rho da h$, записываем:

$$W_p = \frac{\rho gda h^2}{2} + \frac{q^2 d}{2\epsilon_0 a(a + (\epsilon - 1)h)}.$$

Приравнивая нулю производную W_p по h , получаем

$$\rho gda h - \frac{q^2 d(\epsilon - 1)}{2\epsilon_0 a(a + (\epsilon - 1)h)^2} = 0.$$

Поскольку $q = UC$, находим $U = d \sqrt{\frac{2\rho gh}{\epsilon_0(\epsilon - 1)}}$.

13.1. Ответ: $l = 340$ м; $S = 0,10$ мм².

Решение. Выразим массу и сопротивление проволоки через l и S :

$$m = dlS, R = \rho \frac{l}{S},$$

где d — плотность меди, ρ — ее удельное сопротивление. Из этих уравнений находим $l = \sqrt{\frac{mR}{d\rho}} = 340$ м, $S = \sqrt{\frac{\rho m}{dR}} = 1,0 \cdot 10^{-7}$ м².

13.2. Ответ: $j = \frac{E}{\rho l}$, где ρ — удельное сопротивление проводника.

Решение. Из определения плотности тока, закона Ома для участка цепи и формулы для сопротивления $R = \rho \frac{l}{S}$ следует:

$$j = \frac{U}{\rho l}.$$

Поскольку $E = \frac{U}{l}$, получаем $j = \frac{E}{\rho}$. Это соотношение часто называют дифференциальной формой закона Ома.

13.3. Ответ: схема на рис. *a* дает меньшую погрешность для больших сопротивлений R_x ; схема на рис. *b* — для малых сопротивлений R_x .

Для схемы *a*: $R_x = \frac{U}{I} - R_A$. Для схемы *b*: $R_x = \frac{R_V U}{IR_V - U}$.

Решение. Рассмотрим сначала схему *a*, в которой амперметр включен последовательно с резистором. Амперметр при этом дает правильные показания: он измеряет ток $I_A = I_x$, текущий через резистор. Однако вольтметр не включен параллельно резистору и поэтому «лжет»: он измеряет не напряжение на резисторе, а *сумму* напряжений на резисторе (U_x) и амперметре (U_A). Следовательно,

$$\frac{U}{I} = \frac{U_A + U_x}{I} = \frac{U_A}{I_A} + \frac{U_x}{I_x} = R_A + R_x,$$

то есть отношение $\frac{U}{I}$ равно сумме сопротивлений резистора и амперметра. Таким образом, измерение по этой схеме даст малую погрешность, если $R_A \ll R_x$ (сопротивление вольтметра при этом несущественно).

Рассматривая аналогично схему *b*, приходим к результату:

$$\frac{U}{I} = R_x \frac{R_v}{R_x + R_v}.$$

В данном случае погрешность мала при $R_v \gg R_x$ (сопротивление амперметра несущественно).

Таким образом, для больших сопротивлений R_x предпочтительнее схема *a*, для малых — схема *b*.

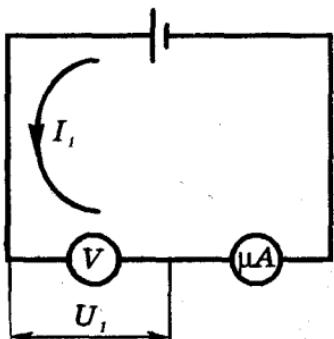
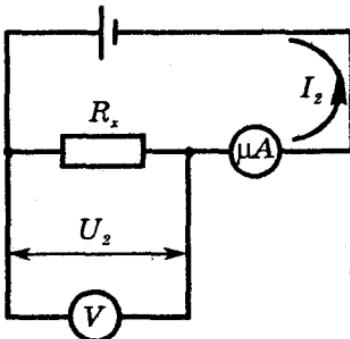
13.4. Ответ: $R_x = \frac{U}{I - \frac{U}{R_v}} = 61 \text{ Ом}$; $\Delta R_x = R_x - \frac{U}{I} \approx 1 \text{ Ом}$.

13.5. Решение. Можно, например, начать с измерения сопротивления вольтметра R_v (рис. *a*):

$$R_v = \frac{U_1}{I_1}.$$

Тогда для нахождения R_x можно воспользоваться схемой на рис. *b*:

$$R_x = \frac{\frac{U_2}{I_2} - \frac{U_2}{R_v}}{\frac{U_2}{R_v}} = \frac{U_2 U_1}{U_1 I_2 - U_2 I_1}.$$

Рис. *a*Рис. *b*

Такой метод можно использовать только в том случае, когда чувствительность микроамперметра достаточна для измерения малых токов I_1 и I_2 .

13.6. Ответ: $i = 0,80 \text{ мкА}$.

Решение. Пусть пластина вдвинута в конденсатор на расстояние x . Тогда емкость конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \left(1 + (\epsilon - 1) \frac{x}{a}\right)$$

(см. задачу 12.66), где ϵ — диэлектрическая проницаемость стекла, $a = 10 \text{ см}$. Заряд конденсатора $q = CU$. Сила тока в цепи

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) a U}{d} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) a U v}{d} = 0,80 \text{ мкА}.$$

13.7. Ответ: точки подключения должны делить кольцо в отношении $1 : 3$.

Решение. Два участка кольца представляют собой параллельно соединенные проводники. Пусть длина кольца l , а длины участков кольца (между точками подключения) x и $l - x$. Сопротивления

ветвей цепи равны $\frac{R_0 x}{l}$ и $\frac{R_0 (l - x)}{l}$. Из соотношения

$$R = \frac{\frac{R_0 x}{l} \cdot \frac{R_0 (l - x)}{l}}{\frac{R_0 x}{l} + \frac{R_0 (l - x)}{l}} = R_0 \frac{x(l - x)}{l^2}$$

получаем $\frac{x}{l} = 0,5 \pm \sqrt{0,25 - \frac{R}{R_0}}$. Заметим, что решения x_1 и x_2 удовлетворяют условию $x_1 + x_2 = l$, т. е. фактически мы получили не два разных решения, а одно. Подставляя численные значения R и R_0 , получаем $\frac{x_1}{l} = 0,25$, $\frac{x_2}{l} = 0,75$. Значит, точки подключения должны разделить кольцо в отношении $1 : 3$.

13.8. Ответ: $\frac{R_0}{4} = 8 \text{ Ом}$.

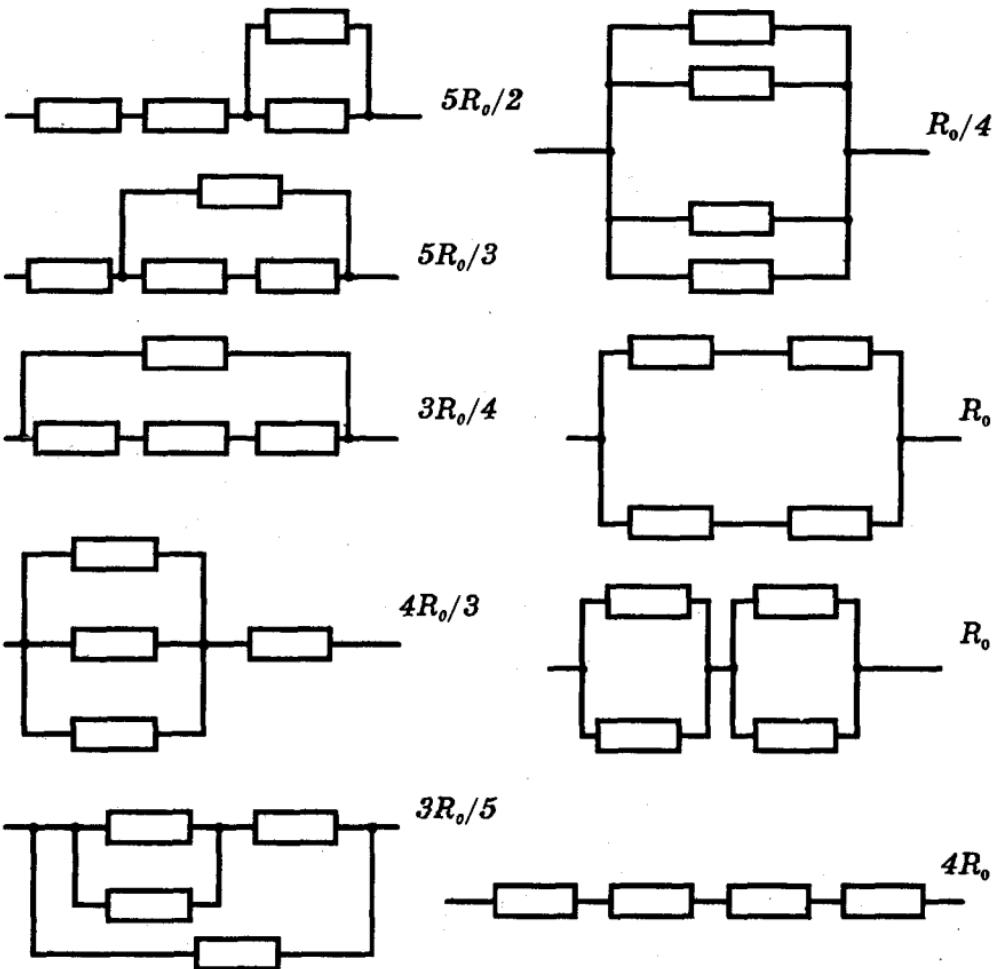
Указание. Воспользуйтесь тем, что выражение $x(l - x)$ максималь-но при $x = \frac{l}{2}$ (см. математическое приложение).

13.9. Решение. Всего можно получить 15 значений R : $\frac{R_0}{4} = 1,5 \text{ Ом}$,

$\frac{R_0}{3} = 2 \text{ Ом}$, $\frac{2R_0}{5} = 2,4 \text{ Ом}$, $\frac{R_0}{2} = 3 \text{ Ом}$, $\frac{3R_0}{5} = 3,6 \text{ Ом}$, $\frac{2R_0}{3} = 4 \text{ Ом}$,

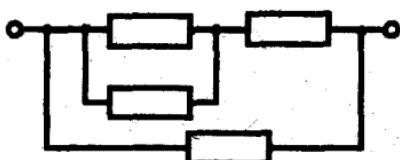
$$\frac{3R_0}{4} = 4,5 \text{ Ом}, R_0 = 6 \text{ Ом}, \frac{4R_0}{3} = 8 \text{ Ом}, \frac{3R_0}{2} = 9 \text{ Ом}, \frac{5R_0}{3} = 10 \text{ Ом},$$

$$2R_0 = 12 \text{ Ом}, \frac{5R_0}{2} = 15 \text{ Ом}, 3R_0 = 18 \text{ Ом}, 4R_0 = 24 \text{ Ом}.$$



Сопротивления R_0 , $2R_0$, $\frac{R_0}{2}$, $3R_0$, $\frac{R_0}{3}$, $\frac{2R_0}{3}$, $\frac{3R_0}{2}$ можно получить, используя один, два или три резистора (что, разумеется, допускается). Этих схем мы не приводим. Остальные приводятся на рисунке.

13.10. Ответ: четыре резистора (см. рисунок).



13.11. Ответ: $R = 18 \text{ Ом}$; $I_1 = I_6 = 2 \text{ А}$, $I_3 = 1,2 \text{ А}$, $I_2 = I_4 = I_5 = 0,8 \text{ А}$.

Решение. Прежде всего необходимо определить типы соединений резисторов в цепи. Резисторы R_2 , R_4 , R_5 соединены последовательно; $R_{245} = R_2 + R_4 + R_5 = 30 \text{ Ом}$. Резистор R_3 подключен параллельно к R_{245} ; поэтому $R_{2345} = \frac{R_3 R_{245}}{R_3 + R_{245}} = 12 \text{ Ом}$; резисторы R_1 и R_6 подключены к R_{2345} последовательно. Поэтому полное сопротивление цепи $R = R_1 + R_6 + R_{2345} = 18 \text{ Ом}$.

Полная сила тока в цепи согласно закону Ома $I = \frac{U}{R} = 2 \text{ А}$.

Поскольку резисторы R_1 и R_6 стоят в неразветвленной части цепи, через них идет весь ток: $I_1 = I_6 = 2 \text{ А}$. На участке же $R_3 - R_{245}$ ток разветвляется (ток в каждой из параллельных ветвей обратно пропорционален сопротивлению этой ветви). Для нахождения токов в различных ветвях можно составить соответствующую пропорцию. Можно поступить и иначе: найти напряжение на параллельном участке цепи $U_3 = I \cdot R_{2345} = 24 \text{ В}$. Тогда, согласно закону Ома $I_3 = \frac{U_3}{R_3} = 1,2 \text{ А}$; $I_2 = I_4 = I_5 = \frac{U_3}{R_{245}} = 0,8 \text{ А}$. Как и следовало ожидать, $I_2 + I_3 = I$.

13.12. Решение. Возможных схем с двумя резисторами не так уж много, и простым перебором можно проверить, что ни одна из них не удовлетворяет условию. Схем с тремя резисторами тоже немного; условию задачи могут удовлетворять только две схемы, показанные на рис. а и б. Покажем, что эти схемы действительно удовлетворяют условию и найдем соответствующие сопротивления резисторов.

Схема на рис. а при подключении к любой паре клемм пред-

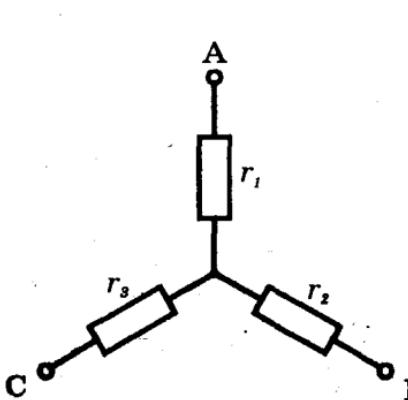


Рис. а

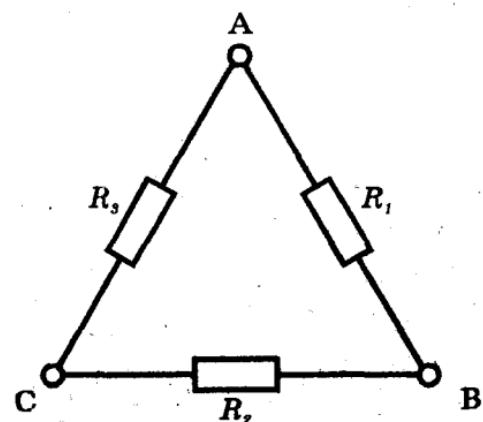


Рис. б

ставляет собой последовательное соединение двух резисторов. Поэтому $R_{AB} = r_1 + r_2$, $R_{BC} = r_2 + r_3$, $R_{AC} = r_1 + r_3$. Отсюда

$$r_1 = \frac{R_{AB} + R_{AC} - R_{BC}}{2} = 3 \text{ Ом};$$

$$r_2 = \frac{R_{AB} + R_{BC} - R_{AC}}{2} = 2 \text{ Ом};$$

$$r_3 = \frac{R_{BC} + R_{AC} - R_{AB}}{2} = 6 \text{ Ом}.$$

Схема на рис. б при подключении к любой паре клемм представляет собой параллельное соединение одного из резисторов с двумя другими, соединенными между собой последовательно. Поэтому

$$R_{AB} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3},$$

$$R_{BC} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3},$$

$$R_{AC} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Умножая каждое из этих уравнений на $R_1 + R_2 + R_3$ и складывая все три уравнения, получаем

$$R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 = \frac{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}}{2}(R_1 + R_2 + R_3).$$

Тогда

$$R_1R_2 = \frac{R_{AB} + R_{BC} - R_{AC}}{2}(R_1 + R_2 + R_3);$$

$$R_2R_3 = \frac{R_{BC} + R_{AC} - R_{AB}}{2}(R_1 + R_2 + R_3);$$

$$R_1R_3 = \frac{R_{AB} + R_{AC} - R_{BC}}{2}(R_1 + R_2 + R_3).$$

Разделив почленно эти уравнения друг на друга, найдем отношения неизвестных сопротивлений:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_{BC} + R_{AC} - R_{AB}}{R_{AB} + R_{AC} - R_{BC}} = 2; \quad \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_{BC} + R_{AC} - R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} - R_{AC}} = 3.$$

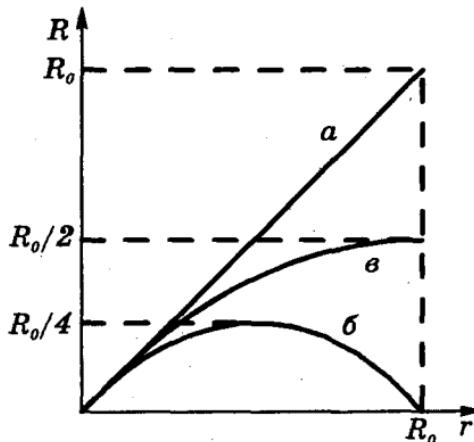
Подставляя $R_2 = 2R_1$, $R_3 = 3R_1$ в любое из уравнений системы, находим: $R_1 = 6 \text{ Ом}$; $R_2 = 12 \text{ Ом}$; $R_3 = 18 \text{ Ом}$.

13.13. Решение. Для схемы на рис. а, очевидно, $R = r$. В схеме на рис. б части реостата с сопротивлениями r и $R_0 - r$ соединены параллельно:

$$R = \frac{r(R_0 - r)}{r + (R_0 - r)} = \frac{r(R_0 - r)}{R_0}.$$

В схеме на рис. в соединены параллельно проводники с сопротивлениями r и R_0 :

$$R = \frac{rR_0}{r + R_0}.$$



Графики этих зависимостей приведены на рисунке (график a — прямая, b — парабола, v — гипербола). В начале координат все три графика касаются друг друга.

13.14. Ответ: $R_1 = 20$ Ом; $R_2 = 60$ Ом; $R_3 = 40$ Ом.

Решение. Резисторы R_2 и R_3 при подаче напряжения на вход цепи соединены между собой последовательно. Поэтому $I_2 = \frac{U_1}{R_3 + R_2}$,

$U_3 = I_2 R_3$. Отсюда $R_3 = \frac{U_3}{I_2} = 40$ Ом; $R_2 = \frac{U_1}{I_2} - R_3 = \frac{U_1 - U_3}{I_2} = 60$ Ом.

При подаче напряжения на выход соединены между собой последовательно резисторы R_1 и R_2 . Поэтому сила тока через них $I'_2 = \frac{U'_3}{R_1 + R_2}$ и $U'_1 = I'_2 R_1 = U'_3 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$. Отсюда $R_1 = R_2 \frac{U'_1}{U'_3 - U'_1} = 20$ Ом.

13.15. Ответ: а) $R = \frac{R_0}{3}$; б) $R = \frac{3R_0}{5}$; в) $R = R_0$.

Решение. а) Поскольку точки A и C , B и D закорочены, их потенциалы одинаковы: $\varphi_A = \varphi_C$, $\varphi_B = \varphi_D$. Объединив эти точки, получим эквивалентную схему (см. рис. а).

Значит, $R = \frac{R_0}{3}$.

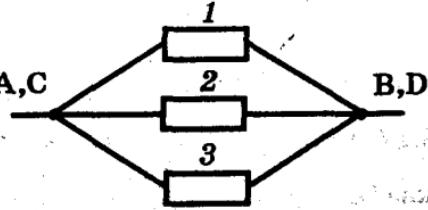


Рис. а

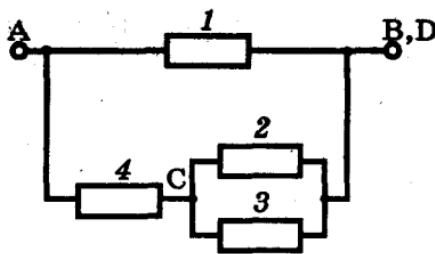


Рис. 6

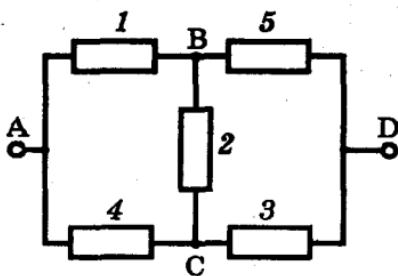


Рис. 6

б) Эквивалентная схема имеет вид, показанный на рис. 6.

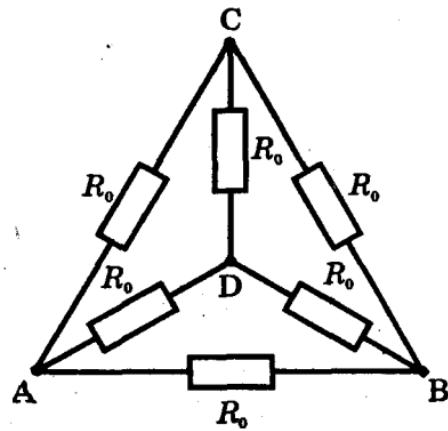
Очевидно, что $R_{23} = \frac{R_0}{2}$, $R_{234} = \frac{3R_0}{2}$, $R = \frac{3R_0}{5}$.

в) Наиболее удобная эквивалентная схема получится, если «вытянуть» в одну линию резисторы 1 и 5, 3 и 4 (см. рис. в). Симметрия схемы делает очевидным равенство $\phi_B = \phi_C$. Следовательно, ток через R_2 не идет и «перемычку» можно изъять из цепи. Поэтому $R_{15} = R_{43} = 2R_0$, $R = R_0$.

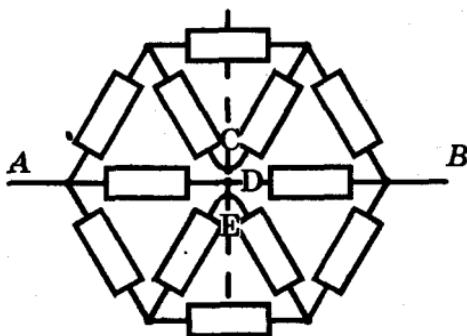
Советуем сравнить это решение с решением задачи 12.61.

13.16. Ответ: $R = \frac{R_0}{2}$.

Указание. На рисунке приведена схема цепи. См. также задачу 13.15 (случай в).



К задаче 13.16



К задаче 13.18

13.17. Ответ: $R = \frac{2R_0}{n}$.

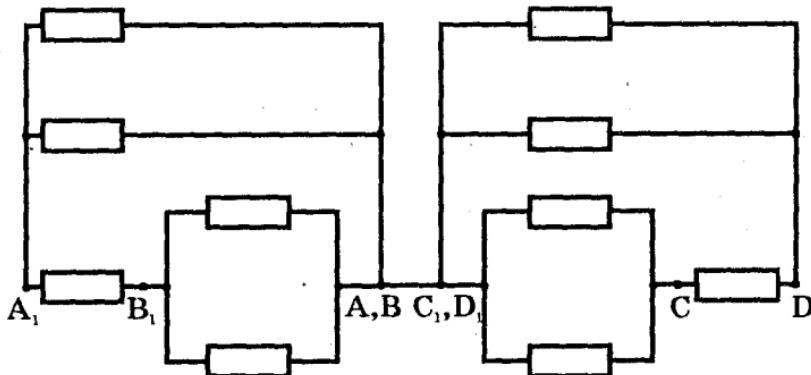
Указание. Ср. с задачей 12.58.

13.18. Ответ: $R = 0,8R_0$.

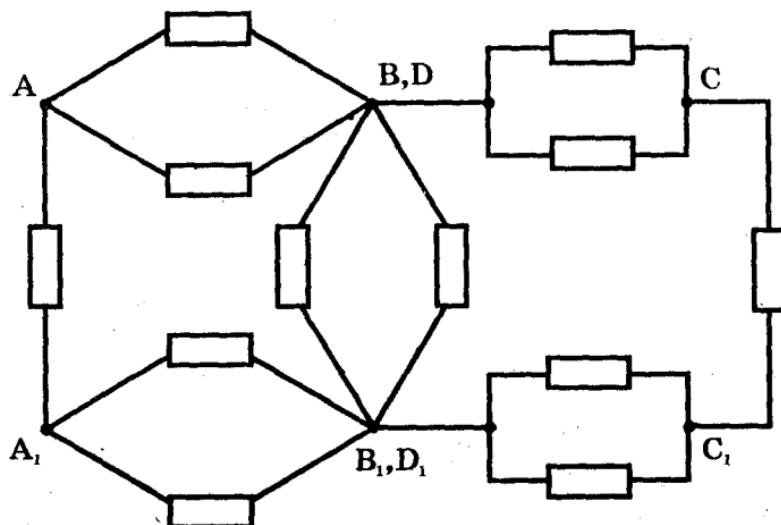
Решение. Воспользуемся тем, что цепь обладает симметрией, и

«разрубим» узел в центре, как показано на рисунке. Покажем, что сопротивление этой цепи такое же, как и исходной. Действительно, точки C , D , E (лежащие на вертикальной оси симметрии) имеют равные потенциалы. Поэтому их можно объединить, и мы получим исходную цепь. Расчет «разрубленной» цепи не представляет сложности, т. к. здесь мы имеем дело с комбинацией последовательных и параллельных соединений. Полное сопротивление цепи определяется из соотношения $\frac{1}{R} = \frac{3}{8R_0} +$

$$+ \frac{1}{2R_0} + \frac{3}{8R_0}, \text{ откуда } R = \frac{4R_0}{5} = 0,8R_0.$$



К задаче 13.20



К задаче 13.21

13.19. Ответ: $R = \frac{5R_0}{6}$.

Указание. Используйте эквипотенциальность точек A , B_1 , D_1 и B , C_1 (ср. с задачей 12.54).

13.20. Ответ: $R = \frac{3R_0}{4}$.

Указание. Из симметрии цепи следует, что потенциалы точек A , B , C_1 , D_1 равны между собой. Объединив все эти точки, получим эквивалентную схему (см. рисунок). Все резисторы на схеме имеют сопротивление R_0 .

13.21. Ответ: $R = \frac{7}{12}R_0$.

Указание. Система симметрична относительно плоскости AA_1CC_1 . Значит, потенциалы точек B и D , B_1 и D_1 попарно совпадают. Объединяя эти точки, получаем эквивалентную схему, показанную на рисунке.

13.22. Ответ: $R = \frac{13R_0}{7}$.

Указание. Эквивалентная схема показана на рисунке.

13.23. Ответ: $R = \frac{3R_0}{2}$.

Указание. Для получения эквивалентной схемы можно или «разорвать» схему по вертикальной оси симметрии (см. рис. а) или объединить точки с равными потенциалами (на рис. б они обозначены одинаковыми буквами). Соответствующая эквивалентная схема приведена на рис. в, сопротивления всех изображенных на ней резисторов равны R_0 .

13.24. Ответ: $R = \frac{R_1 + R_3}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R_2}{R_1 + R_3}}\right)$.

Решение. Поскольку рассматриваемая в задаче цепь бесконечна, удаление одной «ячейки» не влияет на ее сопротивление. Значит, вся цепь, находящаяся правее звена A_1B_1 , тоже имеет сопротивление R . Это позволяет использовать эквивалентную схему цепи, показанную на рисунке, и записать уравнение $R = R_1 + R_3 + \frac{R_2R}{R_2 + R}$. Отсюда $R^2 - (R_1 + R_3)R - (R_1 + R_3)R_2 = 0$ и $R = \frac{R_1 + R_3}{2} + \sqrt{\frac{(R_1 + R_3)^2}{4} + R_2(R_1 + R_3)}$. Если $R_2 \ll R_1 + R_3$, получаем $R = R_1 + R_3$ (резистор с сопротивлением R_2 практически «закоротил» всю последующую бесконечную цепь).



К задаче 13.22

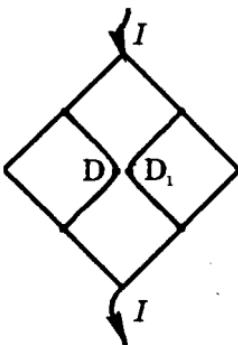
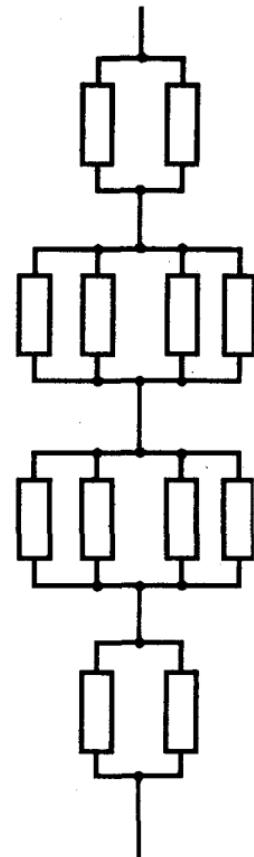


Рис. а к задаче 13.23

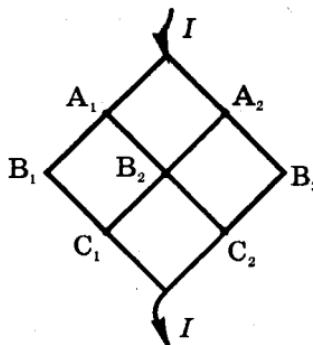
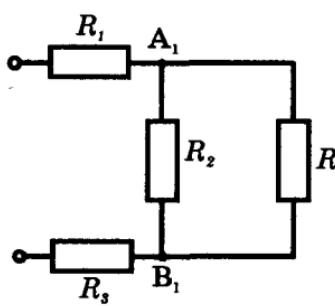
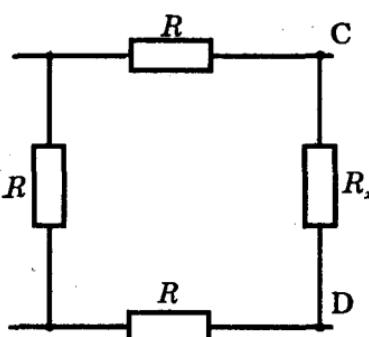


Рис. б к задаче 13.23

Рис. в к задаче 13.23



К задаче 13.24



К задаче 13.25

13.25. Ответ: $R_x = (\sqrt{3} - 1)R = 0,73R$.

Решение. Предположим, к цепи добавили одну ячейку (можно считать, что это последняя ячейка перед точками С и D). При этом сопротивление цепи не изменится, если сопротив-

ление последней ячейки вместе с R_x (см. рисунок) равно R_x , т. е.

$$\frac{R(2R + R_x)}{3R + R_x} = R_x.$$

Отсюда $R_x = (\sqrt{3} - 1)R = 0,73R$. Очевидно, при таком R_x добавление любого числа ячеек не изменит полного сопротивления цепи (также равного R_x).

13.26. Ответ: в $(2 + \sqrt{3})^N$ раз.

Решение. Найдем сначала напряжение U_1 на выходе первой ячейки. Эквивалентная схема цепи показана на рисунке. Согласно этой

схеме $\frac{U_1}{U_{AB}} = \frac{R_x}{R_x + 2R} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$. Однако напряжение U_1 яв-

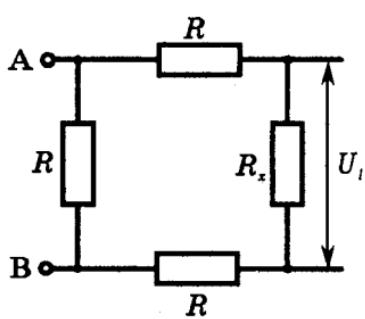
ляется входным для второй ячейки цепи, значит, $\frac{U_2}{U_1} = 2 - \sqrt{3}$

(эквивалентная схема цепи без первой ячейки соответствует тому же рисунку). Значит, по мере изменения номера k ячейки напряжение на ее выходе изменяется в геометрической прогрессии:

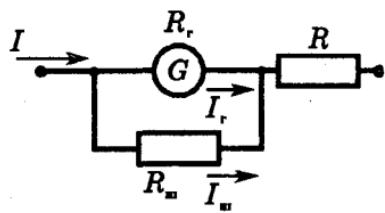
$U_k = U_{AB}(2 - \sqrt{3})^k$. Напряжение между точками C и D : $U_{CD} = U_N =$

$= U_{AB}(2 - \sqrt{3})^N = \frac{U_{AB}}{(2 + \sqrt{3})^N}$. Рассмотренный в этой задаче принцип

построения делителя напряжения применяется в так называемых аттенюаторах, осуществляющих ступенчатое уменьшение напряжения в геометрической прогрессии. Знаменатель прогрессии можно задавать, подбирая резисторы в цепи.



К задаче 13.26



К задаче 13.27

13.27. Ответ: $R = 297$ Ом.

Решение. Сопротивление шунта R_m (см. рисунок) должно быть таким, чтобы через гальванометр шел ток $I_r = \frac{I}{n}$ (I — полный ток

в цепи). Тогда $I_m = I - I_r = \frac{n - 1}{n}I = (n - 1)I_r$. Поскольку $\frac{R_m}{R_r} = \frac{I_r}{I_m}$,

находим $R_{\text{ш}} = \frac{R_r}{n-1}$. Полное сопротивление показанного на рисунке участка цепи $\frac{R_r R_{\text{ш}}}{R_r + R_{\text{ш}}} + R$. Общее сопротивление цепи не меняется, если $\frac{R_r R_{\text{ш}}}{R_r + R_{\text{ш}}} + R = R_d$. Отсюда $R = R_d \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 297 \text{ Ом}$.

Этот результат можно получить и не вычисляя $R_{\text{ш}}$: если полный ток в цепи I , то $I_r = \frac{I}{n}$, и напряжение на гальванометре с шунтом $U_r = \frac{IR_r}{n}$. Значит, общее сопротивление этого участка $R_{\text{ш}} = \frac{U_r}{I} = \frac{R_r}{n}$.

Сопротивление всей цепи остается неизменным, если $R = R_d \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

13.28. Ответ: $R_d = 2,2 \text{ кОм}$.

Решение. При последовательном соединении миллиамперметра и добавочного сопротивления сила тока и напряжение будут связаны соотношением $U = I(R_A + R_d)$, где R_A — сопротивление миллиамперметра, которое, в свою очередь, определяется из соотношения $R_A = \frac{R_{\text{ш}}}{n-1}$ (см. задачу 13.27). Из этих двух соотношений получаем $R_d = \frac{U}{I} - R_{\text{ш}}(n-1) \approx \frac{U}{I} = 2,2 \text{ кОм}$.

13.29. Ответ: увеличить на $(n-1) \left(R_d + \frac{R_r R_{\text{ш}}}{R_r + R_{\text{ш}}} \right)$.

Решение. Пусть стрелка гальванометра отклоняется на одно деление при силе тока I . При этом ток через шунт составляет $I_{\text{ш}} = I \frac{R_r}{R_{\text{ш}}}$, а ток через R_d равен $I \left(1 + \frac{R_r}{R_{\text{ш}}}\right)$. К цепи приложено напряжение $IR_r + IR_d \left(1 + \frac{R_r}{R_{\text{ш}}}\right)$. После замены R_d на R'_d это напряжение должно увеличиться в n раз:

$$IR_r + IR'_d \left(1 + \frac{R_r}{R_{\text{ш}}}\right) = n \left(IR_r + IR_d \left(1 + \frac{R_r}{R_{\text{ш}}}\right) \right).$$

$$\text{Отсюда } R'_d = nR_d + \frac{(n-1)R_r R_{\text{ш}}}{R_r + R_{\text{ш}}}.$$

13.30. Ответ: $q = \frac{U(C_2 R_2 - C_1 R_1)}{R_1 + R_2}$.

Решение. До замыкания ключа сумма зарядов на правой обкладке конденсатора C_1 и левой обкладке конденсатора C_2 равнялась нулю

(они были соединены последовательно). После замыкания ключа каждый из конденсаторов подключен параллельно к соответствующему резистору, поэтому напряжения на них $U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ и $U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. Сумма зарядов на обкладках конденсаторов, соединенных с точкой A , составит теперь

$$q = C_2 U_2 - C_1 U_1 = \frac{U(C_2 R_2 - C_1 R_1)}{R_1 + R_2}.$$

Именно этот заряд и прошел через ключ (при $q > 0$ ток через ключ шел от B к A , при $q < 0$ — наоборот).

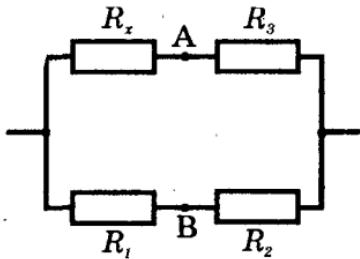
13.31. Ответ: $\phi_A - \phi_B = U \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{C_2}{C_1 + C_2} \right)$.

13.32. Ответ: $R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}$.

Решение. Ток не идет через гальванометр только тогда, когда прибор включен между точками с равными потенциалами. Изымая из цепи гальванометр, получаем (см. рисунок) $\phi_A = \phi_B$. Отсюда $U_x = U_1$, $U_3 = U_2$. Поскольку

$\frac{U_x}{U_3} = \frac{R_x}{R_3}$ и $\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$, получаем $\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_1}{R_2}$ и

$$R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}.$$



Советуем сравнить эту задачу с задачей 12.53.

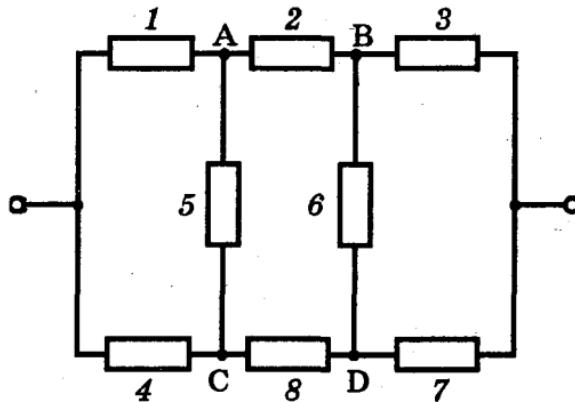
13.33. Указание. Воспользуемся результатом, полученным при решении задачи 13.32. Рассмотренная в этой задаче схема фактически представляет собой мостик Уитстона, если под R_1 и R_2 понимать сопротивления отрезков провода длиной l_1 и l_2 . Для измерения R_x подбирают такое положение движка D , при котором ток через гальванометр равен нулю (в этом случае мостик называют сбалансированным).

13.34. Решение. При сбалансированном мосте ток между точками C и D не идет независимо от того, замкнут ли ключ. В противном случае замыкание или размыкание ключа изменяет распределение токов в цепи. Значит, нужно подобрать такое положение движка D , при котором показания гальванометра не зависят от того, замкнут или разомкнут ключ. Сопротивление R_x вычисляют по формуле, приведенной в задаче 13.33. Заметим, однако, что в

реальной цепи такая перестановка приборов создает опасность выхода из строя гальванометра (не рассчитанного, как правило, на большую силу тока).

13.35. Ответ: $I_1 = I_2 = I_3 = 4 \text{ A}$; $I_4 = I_7 = I_8 = 2 \text{ A}$; $I_5 = I_6 = 0$.

Решение. Простейшая эквивалентная схема получается, если «вытянуть» в одну линию резисторы 1, 2, 3 и 4, 8, 7 (см. рисунок).

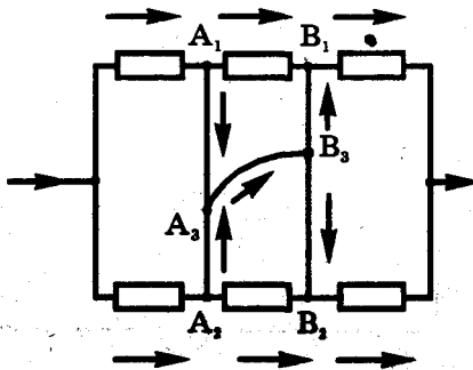


Поскольку $R_1 : R_2 : R_3 = R_4 : R_8 : R_7$, нетрудно показать (ср. с задачей 13.32), что потенциалы точек A и C , B и D совпадают: $\phi_A = \phi_C$, $\phi_B = \phi_D$. Поэтому ток через резисторы R_5 и R_6 не течет: $I_5 = I_6 = 0$. После изъятия из цепи этих резисторов расчет токов не вызывает затруднений:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = 4 \text{ A},$$

$$I_4 = I_7 = I_8 = \frac{U}{R_4 + R_7 + R_8} = 2 \text{ A}.$$

13.36. Решение. Очевидно, до соединения точек A_3 и B_3 было $\phi_{A1} = \phi_{A2}$, $\phi_{B1} = \phi_{B2}$. Однако потенциалы проводников A_1A_2 и B_1B_2 отличаются друг от друга (иначе не шел бы ток, например, через



участок A_1B_1); $\phi_{A_1} > \phi_{B_1}$. Значит, $\phi_{A_3} > \phi_{B_3}$, поэтому при соединении точек A_3 и B_3 по проводнику A_3B_3 пойдет ток (см. рисунок). Следовательно, должен появиться и ток в проводниках A_1A_2 и B_1B_2 . Ток течет в сторону убывания потенциала, поэтому после соединения точек A_3 и B_3 соотношения между потенциалами таковы: $\phi_{A_3} > \phi_{B_3}$; $\phi_{A_3} < \phi_{A_1}$; $\phi_{A_3} < \phi_{A_2}$; $\phi_{B_3} > \phi_{B_1}$; $\phi_{B_3} > \phi_{B_2}$. Разности потенциалов между точками A_1 и B_1 , A_2 и B_2 уменьшаются из-за перераспределения токов в цепи. Если сопротивления проводников A_1A_2 , B_1B_2 , A_3B_3 пренебрежимо малы, то потенциалы всех шести отмеченных на рисунке точек сравняются. При этом исчезнут токи через резисторы на участках A_1B_1 , A_2B_2 .

13.37. Ответ: ток $I_A = \frac{U}{3R}$ течет от точки A к точке B .

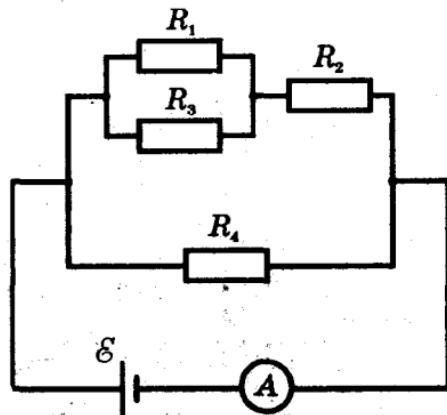
Решение. Непосредственное вычисление тока через амперметр (применение закона Ома) невозможно, т. к. сопротивление амперметра R_A считается пренебрежимо малым ($R_A \rightarrow 0$). Однако именно поэтому можно объединить точки A и B в одну ($\phi_A = \phi_B$) и найти силу тока через каждый из резисторов. Последовательно соединенные участки 1-3 и 2-4 имеют одинаковые сопротивления, поэтому напряжение на каждом из них равно $\frac{U}{2}$. Токи через

резисторы R_1 и R_2 соответственно $I_1 = \frac{U}{2R_1} = \frac{U}{2R}$ и $I_2 = \frac{U}{2R_2} = \frac{U}{6R}$.

Зная токи I_1 и I_2 , легко определить и ток I_A , текущий через амперметр: вследствие закона сохранения электрического заряда $I = I_1 - I_2$, откуда $I_A = \frac{U}{3R}$ (ток течет от A к B).

13.38. Ответ: $I = 4$ А.

Решение. Эквивалентная схема цепи представлена на рисунке.



Вычислим сопротивление цепи:

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 4 \text{ Ом}; R_{123} = R_{13} + R_2 = 12 \text{ Ом};$$

полное сопротивление внешней цепи

$$R = \frac{R_{123} R_4}{R_{123} + R_4} = 8 \text{ Ом}.$$

Согласно закону Ома для замкнутой цепи сила тока через амперметр $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = 4 \text{ А.}$

13.39. Ответ: $I = 0,1 \text{ А}; U = 14,6 \text{ В.}$

Решение. Сопротивления участков цепи:

$$R_{12} = \frac{R}{2}; R_{123} = \frac{3}{2}R; R_{1-5} = \frac{2R \cdot \frac{3}{2}R}{2R + \frac{3}{2}R} = \frac{6}{7}R; R_{1-6} = \frac{13}{7}R;$$

$$R_{1-9} = \frac{\frac{13}{7}R \cdot 3R}{\frac{13}{7}R + 3R} = \frac{39}{34}R;$$

полное сопротивление внешней цепи $R_0 = R_{1-9} + R = \frac{73}{34}R = 146 \text{ Ом.}$

Найдем силу тока через источник: $I = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + r} = 0,1 \text{ А}$ и напряжение на источнике: $U = IR_0 = 14,6 \text{ В}$ (или $U = \mathcal{E} - Ir = 14,6 \text{ В}$).

13.40. Ответ: $I_1 = 2 \text{ А.}$

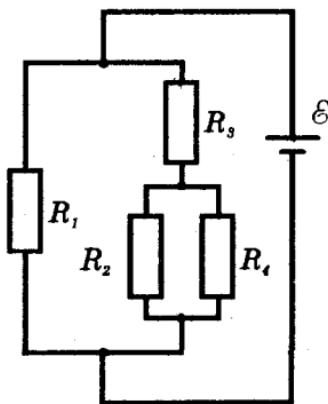
Решение. При произвольных значениях сопротивлений резисторов такая схема требует достаточно сложного расчета: ведь в ней нет ни параллельных, ни последовательных соединений. В данном случае, однако, сопротивления в верхней и нижней ветвях цепи пропорциональны друг другу, т. е. мы имеем дело со сбалансированным мостиком (см. задачу 13.33). Значит, при расчете цепи резистор R можно просто изъять (ток по нему не идет). Тогда полное сопротивление внешней цепи составит

$$R_0 = \frac{2}{3}(R_1 + R_2) = 8 \text{ Ом.}$$

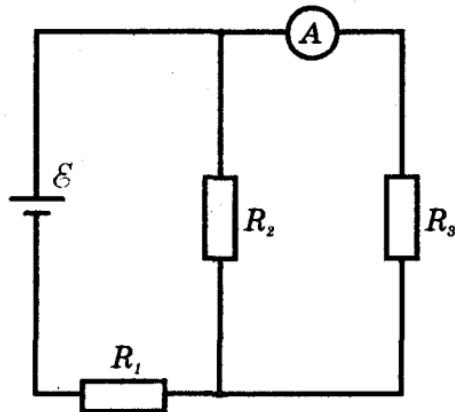
Следовательно, полная сила тока в цепи $I = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + r} = 3 \text{ А,}$ напряжение во внешней цепи $U = IR_0 = 24 \text{ В,}$ сила тока через первый резистор $I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} = 2 \text{ А.}$

13.41. Ответ: $I_A = 6 \text{ А.}$

Указание. Если «выбросить» из схемы амперметр, эквивалентная схема примет показанный на рисунке вид. Используя затем закон сохранения заряда (см. задачу 13.37), получаем $I_A = I - I_4$ или $I_A = I_2 + I_1$.



К задаче 13.41



К задаче 13.44

13.42. Ответ: $R = 2 \text{ Ом.}$

Решение. В первом случае согласно закону Ома $U_1 = I_1 R = \frac{\mathcal{E}R}{R+r}$.

Во втором случае полное сопротивление внешней цепи равно $R/2$, так что

$$U_2 = \frac{\frac{\mathcal{E}R}{2}}{\frac{R}{2} + r} = \frac{\mathcal{E}R}{R+2r}.$$

Отсюда $\frac{U_1}{U_2} = \frac{R+2r}{R+r}$ и $R = r \cdot \frac{2U_2 - U_1}{U_1 - U_2} = 2 \text{ Ом.}$

13.43. Ответ: $\mathcal{E} = 20,4 \text{ В.}$

Решение. Заметим, что $U_1 + U_2 > U'_1$, следовательно, сопротивления вольтметров R_1 и R_2 сравнимы с внутренним сопротивлением r батареи. Тогда из соотношения $\frac{\mathcal{E}}{R_1 + r} = \frac{U'_1}{R_1}$ следует, что

$\mathcal{E} = U'_1 \cdot \frac{R_1 + r}{R_1}$. Значит, для решения задачи достаточно установить соотношение между R_1 и r . При последовательном соединении вольтметров через них текут одинаковые токи; значит, $\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$ и

$\frac{R_2}{R_1} = \frac{U_2}{U_1}$. Поскольку $U_1 = \frac{\mathcal{E}R_1}{R_1 + R_2 + r}$, а $U'_1 = \frac{\mathcal{E}R_1}{R_1 + r}$, можно записать:

$$\frac{U'_1}{U_1} = \frac{R_1 + R_2 + r}{R_1 + r}.$$

Отсюда $r = R_1 \left(\frac{U_2}{U'_1 - U_1} - 1 \right)$. Подставляя это выражение в формулу для \mathcal{E} , получаем $\mathcal{E} = \frac{U'_1 U_2}{U'_1 - U_1} = 20,4$ В.

13.44. Ответ: в обоих случаях амперметр показывает 0,67 А.

Решение. Полное сопротивление цепи $R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 9$ Ом. Сила тока в цепи $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{5}{3}$ А, напряжение на R_2 и R_3 составляет $U_{23} = \mathcal{E} - IR_1 = 8$ В; амперметр показывает силу тока через резистор R_3 : $I_3 = I_A = \frac{U_{23}}{R_3} = \frac{2}{3}$ А. Если поменять местами амперметр и источник ЭДС, то $R' = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 14,75$ Ом, $I' = \frac{\mathcal{E}}{R'} = 1$ А, $U'_{12} = 2,8$ В, $I'_A = I'_1 = \frac{U'_{12}}{R_1} = \frac{2}{3}$ А. Является ли случайным совпадение этих двух результатов? Если не торопиться с подстановкой в формулы численных значений, то получим выражение

$$I_A = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3};$$

в выражении для I'_A величины R_1 и R_3 меняются местами; при такой замене значение выражения не изменяется, поэтому $I'_A = I_A$.

13.45. Ответ: $R_V = 10$ кОм.

Решение. При последовательном подключении вольтметра напряжение на нем

$$U_1 = \frac{\mathcal{E} R_V}{r + R + R_V},$$

$$U_2 = \frac{\mathcal{E} R R_V}{R R_V + r R + r R_V}.$$

при параллельном

Приравнивая U_1 и U_2 , получаем $R_V = \frac{R^2}{r} = 10$ кОм. Следует, однако, отметить, что при любых значениях R_V и R , удовлетворяющих неравенству $r < R < R_V$ (а это условие, как правило, выполняется), разница между U_1 и U_2 может оказаться неуловимо малой: $U_1 \approx U_2 \approx \mathcal{E}$.

$$13.46. \text{Ответ: } U = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}; \quad U = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}.$$

Решение. Ток в цепи идет против часовой стрелки. Сила тока $I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2}$. Для определения разности потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ (т. е. напряжения U на источниках) можно воспользоваться, например, следствием из закона Ома для замкнутой цепи:

$$U = \mathcal{E}_1 - IR_1 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}.$$

Обратим внимание, что $U = 0$ при $\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}$, т. е. когда у обоих источников одинаковы токи короткого замыкания. Естественно, $U = 0$ и для одинаковых источников.

Если изменить полярность включения второго источника, в формуле для U знак перед \mathcal{E}_2 также изменится:

$$U = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}.$$

Для источников с одинаковыми ЭДС получим $U = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$.

Отметим, что разность потенциалов точек A и B можно рассматривать как ЭДС батареи из двух источников (ведь ЭДС равняется напряжению на источнике при разомкнутой внешней цепи). Внутреннее сопротивление этой батареи составит, конечно, $R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$. Разумеется, параллельное включение источников с разными ЭДС приведет к разрядке источника с большей ЭДС.

$$13.47. \text{Ответ: } \varphi_{A1} - \varphi_{A2} = 0, \quad \varphi_{A1} - \varphi_{Ak} = 0.$$

Решение 1. Рассматриваемая цепь обладает симметрией по отношению к поворотам: если мы повернем ее на одно звено по часовой стрелке, то цепь в целом не изменится, однако точка A_1 займет место точки A_2 . Однако потенциал любой точки цепи не мог измениться из-за поворота *всей* цепи, поэтому $\varphi_{A1} = \varphi_{A2}$. Отсюда сразу же следует, что $\varphi_{Ak} = \varphi_{A1}$ при всех k .

Решение 2. Согласно закону Ома для замкнутой цепи сила тока $I = \frac{N\mathcal{E}}{Nr} = \frac{\mathcal{E}}{r}$, т. е. каждый элемент работает в режиме короткого замыкания. Значит, напряжение на каждом из элементов $U_1 = \dots = \mathcal{E} - Ir = 0$. Соответственно обращается в нуль и сумма любого числа этих напряжений: $\varphi_k - \varphi_{A1} = (k - 1)U_1 = 0$. Отметим, что такой же результат получится и для элементов *различных*, но обладающих одинаковым током короткого замыкания.

13.48. Ответ: $U = 0$, если между точками A_1 и A_k имеется четное количество элементов; $U = \pm \mathcal{E}$, если между этими точками — нечетное количество элементов.

13.49. Ответ: $n = \sqrt{\frac{NR}{r}}$, $m = \sqrt{\frac{Nr}{R}}$.

Решение. Полная ЭДС батареи $n\mathcal{E}$ (здесь \mathcal{E} — ЭДС каждого из элементов). Внутреннее сопротивление всей батареи $\frac{nr}{m}$. Поэтому сила тока через резистор $I = \frac{n\mathcal{E}}{\frac{nr}{m} + R}$. Учитывая, что $m = \frac{N}{n}$, получаем

$$I = \frac{Nn\mathcal{E}}{n^2r + NR} = \frac{N\mathcal{E}}{nr + \frac{N}{n}R}. \quad (1)$$

Следует подобрать такое n , чтобы сумма $nr + \frac{N}{n}R$ была минимальна. Согласно известному неравенству (см. математическое приложение) получаем $nr + \frac{N}{n}R > 2\sqrt{nr\frac{N}{n}R} = 2\sqrt{NrR} = \text{const}$. Равенство достигается только при $nr = \frac{N}{n}R$ (при этом внутреннее сопротивление батареи совпадает с сопротивлением R внешней цепи). Отсюда $n = \sqrt{N\frac{R}{r}}$, $m = \sqrt{N\frac{r}{R}}$. Подставляя числовые значения N , r и R , получаем $n_0 = 14,1$, $m_0 = 7,07$. Ближайшие к n_0 значения n , соответствующие целым m : $n_1 = 10$ (тогда $m_1 = 10$) и $n_2 = 20$ (тогда $m_2 = 5$). Сравниваем соответствующие значения силы тока:

$$I_1 = \frac{10\mathcal{E}}{3r}; I_2 = \frac{10\mathcal{E}}{3r} = I_1.$$

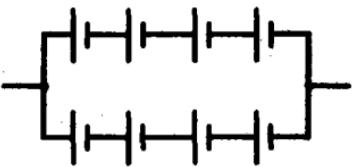
Итак, задача имеет два решения: $n_1 = 10$, $m_1 = 10$ и $n_2 = 20$, $m_2 = 5$.

Можно предложить и лучшее решение этой задачи: если вообще не использовать два из ста элементов, то при $n = 14$ и $m = 7$ получаем $I = \frac{14\mathcal{E}}{2r + R} = 3,5\frac{\mathcal{E}}{r}$, что больше полученных выше значений силы тока.

13.50. Ответ: $N = 8$.

Решение. Будем рассматривать батареи типа описанной в задаче 13.49 (очевидно, последовательное соединение групп параллельно

соединенных элементов дает тот же результат). Для обеспечения максимальной силы тока при заданном N должно выполняться условие $n = \sqrt{N \frac{R}{r}}$ (обозначения те же, что и в задаче 13.49). Тогда из формулы (1), приведенной в решении задачи 13.49, следует, что $I = \frac{\mathcal{E}\sqrt{N}}{2\sqrt{Rr}}$, откуда $N = \frac{4I^2Rr}{\mathcal{E}^2} = 8$; $n = 4$, $m = 2$ (см. рисунок).



13.51. Ответ: $\mathcal{E} = 8,7$ В, $r = 0,05$ Ом.

Решение. В конце зарядки и начале разрядки \mathcal{E} и r аккумулятора можно считать одинаковыми. Когда ток в цепи равен нулю, напряжение на аккумуляторе совпадает с его ЭДС. При разрядке (см. рис. а) напряжение меньше ЭДС:

$$U_2 = \mathcal{E} - I_2 r. \quad (1)$$

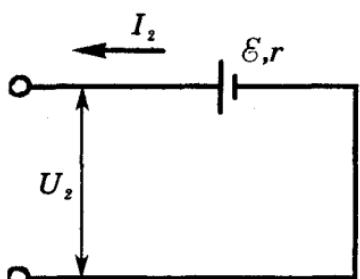


Рис. а

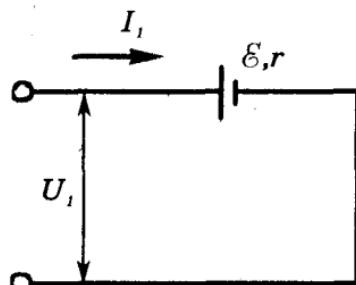


Рис. б

При зарядке (см. рис. б) заряды движутся против сторонних сил в аккумуляторе. Это возможно лишь при напряжении, превышающем \mathcal{E} :

$$U_1 = \mathcal{E} + I_1 r. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), получаем $r = \frac{U_1 - U_2}{I_1 + I_2} = 0,05$ Ом; $\mathcal{E} = \frac{I_1 U_2 + I_2 U_1}{I_1 + I_2} = 8,7$ В.

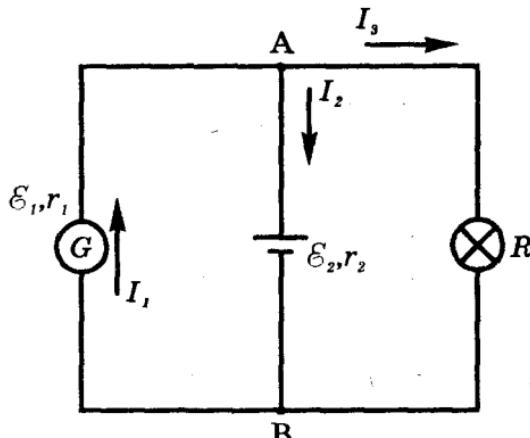
13.52. Ответ: $I_1 = 21$ А; $I_2 = 6,3$ А; $I_3 = 14,6$ А.

Решение 1. Согласно результатам решения задачи 13.51 напряжение между точками A и B (см. рисунок) составляет $U = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1 = \mathcal{E}_2 + I_2 r_2 = I_3 R$. Из закона сохранения электрического заряда следует: $I_1 = I_2 + I_3$. Решая систему этих уравнений, получаем:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1(R + r_2) - \mathcal{E}_2 R}{r_1 r_2 + R r_1 + R r_2} = 21 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 R - \mathcal{E}_2(r_1 + R)}{r_1 r_2 + R r_1 + R r_2} = 6,3 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R r_1 + R r_2} = 14,6 \text{ A}.$$



Решение 2. Воспользуемся «методом суперпозиции», пригодным для любых систем, где связь между токами и ЭДС линейна, т. е. все элементы цепи подчиняются закону Ома. Предположим сначала, что батарея «потеряла» свою ЭДС, сохранив внутреннее сопротивление. Тогда токи, обусловленные ЭДС \mathcal{E}_1 , определяются соотношениями:

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}_1(R + r_2)}{r_1 r_2 + R r_1 + R r_2}; i_2 = \frac{\mathcal{E}_1 R}{r_1 r_2 + R r_1 + R r_2}; i_3 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2}{r_1 r_2 + R r_1 + R r_2}.$$

Если же «утратил» ЭДС генератор, то распределение токов имеет вид (положительными считаются направления токов, показанные на рисунке):

$$i'_1 = -\frac{\mathcal{E}_2 R}{r_1 r_2 + R r_1 + R r_2}; i'_2 = -\frac{\mathcal{E}_2(R + r_1)}{r_1 r_2 + R r_1 + R r_2}; i'_3 = \frac{\mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R r_1 + R r_2}.$$

При «включении» обеих ЭДС получаем $I_1 = i_1 + i'_1$, $I_2 = i_2 + i'_2$, $I_3 = i_3 + i'_3$, что совпадает с результатом решения 1.

13.53. Решение. Сила тока в цепи $I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R}$. Напряжение на зажимах, например, первого элемента составляет $U_1 = \mathcal{E}_1 - I r_1 = \frac{\mathcal{E}_1(r_2 + R) - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2 + R}$. Приравнивая это выражение нулю, находим

$$R = \frac{\mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_1} - r_2. \text{ Полученное значение } R \text{ положительно при } \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} > \frac{\mathcal{E}_1}{r_1}.$$

Величина \mathcal{E}/r для источника ЭДС представляет собой ток корот-

кого замыкания. Значит, можно сделать равным нулю напряжение на том из элементов, у которого ток короткого замыкания меньше. Если величина токов короткого замыкания одинакова ($\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}$), то при $R \rightarrow 0$ напряжения на обоих элементах обращаются в нуль одновременно.

13.54. Ответ: $\mathcal{E} = 0,60$ В.

Решение. Описанная в задаче ситуация возникает при измерении ЭДС компенсационным методом. Напряжение на резисторе с сопротивлением R_1 равно ЭДС \mathcal{E} аккумулятора. Поскольку ток через аккумулятор все равно не идет, эту ветвь цепи можно убрать, не изменив напряжения на резисторе. Сила тока в цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0 + R_1 + R_2},$$

поэтому $\mathcal{E} = IR_1 = \mathcal{E}_0 \frac{R_1}{r_0 + R_1 + R_2} = 0,60$ В.

13.55. Ответ: $\mathcal{E} = 36$ В; $r = 0,50$ Ом.

Указание. Из закона Ома для замкнутой цепи следует: $\frac{R_1 + r}{R_2 + r} = \frac{I_2}{I_1}$.

13.56. Ответ: $I = \frac{\mathcal{E}R_1}{(r + R_1)(R + R_2) + rR_1}$.

Решение. Сопротивление внешней цепи, подключенной к источнику тока, $R_{CD} = \frac{R_1(R_2 + R)}{R_1 + R_2 + R}$; напряжение между точками C и D

составляет $U_{CD} = \frac{\mathcal{E}R_{CD}}{r + R_{CD}}$. Следовательно,

$$I = \frac{U_{CD}}{R_2 + R} = \frac{\mathcal{E}R_1}{r(R_1 + R_2 + R) + R_1(R_2 + R)} = \frac{\mathcal{E}R_1}{(r + R_1)(R + R_2) + rR_1}.$$

Интересно, что этот результат можно записать в виде

$$I = \frac{\mathcal{E}'}{r' + R},$$

где $\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}R_1}{r + R_1}$, $r' = R_2 + \frac{rR_1}{r + R_1}$. Величина \mathcal{E}' совпадает с напряжением между разомкнутыми клеммами A и B ; величина r' совпадает с сопротивлением двухполюсника, показанного на рисунке к условию задачи, между точками A и B . Таким образом, рассматриваемая цепь по отношению ко всякой нагрузке, подключаемой между клеммами A и B , эквивалентна источнику тока с ЭДС, равной \mathcal{E}' , и внутренним сопротивлением r' . Можно доказать

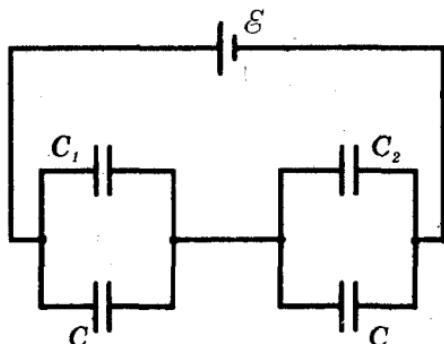
зать, что этот вывод справедлив для любого двухполюсника, состоящего из линейных (т. е. подчиняющихся закону Ома) элементов.

13.57. Ответ: $I = I_0 \frac{U_0}{U_0 + I_0 R}$.

Указание. См. задачу 13.56. Рассматриваемый двухполюсник можно заменить эквивалентным источником тока, у которого ЭДС равна U_0 , а сила тока при коротком замыкании I_0 .

13.58. Ответ: $U_1 = \mathcal{E} \frac{C_2 + C}{C_1 + C_2 + 2C}$; $U_2 = \mathcal{E} \frac{C_1 + C}{C_1 + C_2 + 2C}$.

Решение. Цепь разомкнута, тока в ней нет. Поэтому потенциалы обоих концов резистора одинаковы; эти точки можно совместить, убрав резистор. На рисунке приведена эквивалентная схема. Полная емкость батареи из четырех конденсаторов $C_0 = \frac{(C_1 + C)(C_2 + C)}{C_1 + C_2 + 2C}$.



Напряжения на конденсаторах:

$$U_1 = \frac{\mathcal{E} C_0}{C_1 + C} = \mathcal{E} \frac{C_2 + C}{C_1 + C_2 + 2C}; U_2 = \mathcal{E} \frac{C_1 + C}{C_1 + C_2 + 2C}.$$

13.59. Ответ: $U_1 = 0$, $U_2 = U_3 = \mathcal{E}$.

Указание. См. решение задачи 13.58.

13.60. Ответ: $\mathcal{E} = 222$ В.

Решение. Определим сопротивление R внешней цепи:

$$R_{234} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4 = 60 \text{ Ом}; R = \frac{R_1 R_{234}}{R_1 + R_{234}} = 36 \text{ Ом}.$$

Находим напряжение на конденсаторе (а, следовательно, и на источнике):

$$U = \frac{q}{C} = 216 \text{ В.}$$

Тогда сила тока в цепи $I = \frac{U}{R} = 6 \text{ А}$, и ЭДС источника составляет $\mathcal{E} = I(R + r) = 222 \text{ В.}$

13.61. Ответ: $q = \frac{4\mathcal{E}CR(r + R)}{(2R + r)(2R + 3r)}$.

Указание. Эквивалентные схемы цепи при замкнутом и разомкнутом ключе приведены соответственно на рис. а и б. Обратите

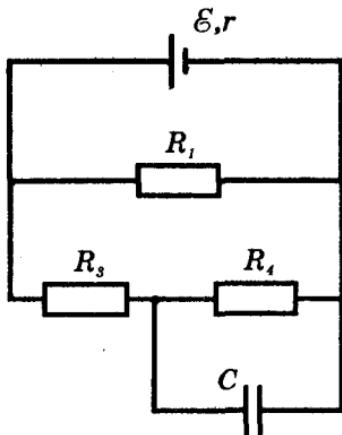


Рис. а

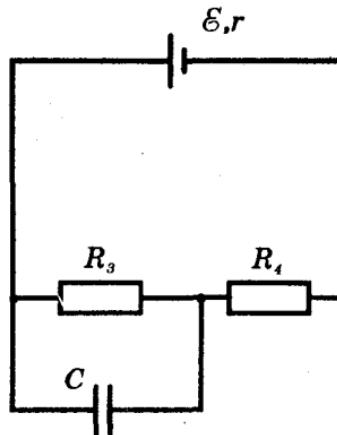


Рис. б

внимание на то, что знаки зарядов на обкладках конденсатора изменяются.

$$13.62. \text{Ответ: } q = \frac{C\mathcal{E}}{8}.$$

Решение. Резисторы соединены последовательно, поэтому напряжения на них относятся как 3 : 1. Значит, $\phi_B - \phi_V = \frac{3\mathcal{E}}{4}$; $\phi_V - \phi_E = \frac{\mathcal{E}}{4}$. Найдем теперь ϕ_A — потенциал точки A. Заряды соединенных с точкой A обкладок конденсаторов равны $2C(\phi_A - \phi_B)$, $3C(\phi_A - \phi_E)$, $C(\phi_A - \phi_V)$. Поскольку эти обкладки образуют изолированную систему, сумма их зарядов равна нулю. Записывая это условие и выражая ϕ_B и ϕ_E через ϕ_V , получаем: $\phi_A - \phi_B = \frac{\mathcal{E}}{8}$.

Заряд на конденсаторе C составляет $q = C(\phi_A - \phi_B) = \frac{C\mathcal{E}}{8}$.

Предостерегаем читателя от попытки рассматривать соединение конденсаторов $2C$ и $3C$ как последовательное! Это было бы верно только в случае очень малой емкости конденсатора, включенного между точками A и B.

$$13.63. \text{Ответ: Напряжение понизится на 8 В.}$$

Решение. По номинальной мощности приборов (т. е. соответствующей нормальному напряжению сети) определим их электрические сопротивления: $R_1 = \frac{U^2}{P_1} = 480 \text{ Ом}$, $R_2 = \frac{U^2}{P_2} = 97 \text{ Ом}$. До включения электрокамина напряжение на лампе было $U_1 = \frac{UR_1}{R_0 + R_1} =$

= 218 В. После включения электрокамина сопротивление по-

потребителей электротехники в комнате составит $R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 81 \text{ Ом}$.

Теперь напряжение на лампе и электрокамине будет $U_2 = \frac{UR_{12}}{R_o + R_{12}} = 210 \text{ В}$. Таким образом, напряжение на лампе понизилось на $\Delta U = U_1 - U_2 = 8 \text{ В}$.

В действительности, однако, при таком изменении напряжения следовало бы учитывать изменение сопротивления нити накала из-за понижения ее температуры.

13.64. Ответ: $R = r$.

Указание. В обоих случаях через нагреватель течет ток одинаковой силы. Значит, $\frac{\mathcal{E}}{r + R} = \frac{N\mathcal{E}}{Nr + R}$.

13.65. Ответ: 8 лампочек.

Решение 1. Сопротивление каждой из лампочек $R_o = \frac{U^2}{P_o}$. Обозначим количество их N . Тогда полное сопротивление всех параллельно включенных лампочек равно $R = \frac{R_o}{N}$, сила тока в цепи

$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$ и напряжение на лампочках $U = IR = \frac{\mathcal{E}}{Nr + R_o} \cdot \frac{R_o}{N}$. Отсюда

$$N = \frac{R_o}{r} \left(\frac{\mathcal{E}}{U} - 1 \right) = \frac{U^2}{rP_o} \left(\frac{\mathcal{E}}{U} - 1 \right) = \frac{U(\mathcal{E} - U)}{rP_o} = 8.$$

Решение 2. Сила тока через каждую из лампочек $I_o = \frac{P_o}{U}$, полная сила тока в цепи $I = NI_o = \frac{NP_o}{U}$. Тогда $U = \mathcal{E} - Ir = \mathcal{E} - \frac{NP_o r}{U}$; отсюда $N = \frac{U(\mathcal{E} - U)}{rP_o} = 8$.

13.66. Ответ: $U = \mathcal{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)} = 30 \text{ В}; I_1 = \frac{U}{R_1} = 3,75 \text{ А};$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = 1,25 \text{ А}; P = U(I_1 + I_2) = 150 \text{ Вт}.$$

13.67. Ответ: $R_x = 23 \text{ Ом}$.

Решение. Сопротивление участка AB при разомкнутом ключе $R_{AB1} = 2R_o$, при замкнутом ключе $R_{AB2} = \frac{2}{3}R_o$. Сила тока в цепи

$$I = \frac{U}{R_o + R_{AB}}, \text{ мощность на участке } AB \text{ составит}$$

$$P_{AB} = I^2 R_{AB} = \frac{U^2 R_{AB}}{(R_x + R_{AB})^2},$$

Из условия постоянства мощности получаем

$$\frac{2R_0}{(R_x + 2R_0)^2} = \frac{\frac{2}{3}R_0}{(R_x + \frac{2}{3}R_0)^2}.$$

Отсюда $R_x + 2R_0 = \sqrt{3}(R_x + \frac{2}{3}R_0)$, значит, $R_x = \frac{2R_0}{\sqrt{3}} = 23$ Ом.

13.68. Ответ: $r = \sqrt{R_1 R_2}$.

Решение. Обозначим ЭДС источника через \mathcal{E} . Резистор с сопротивлением R потребляет мощность $P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}$. Согласно условию $P_1 = P_2$, откуда $\frac{R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{R_2}{(R_2 + r)^2}$. Из этого уравнения получаем $r = \sqrt{R_1 R_2}$.

13.69. Ответ: $r = \sqrt{R_1 R_2} = 3,0$ Ом.

Указание. См. задачу 13.68.

13.70. Ответ: $I_{\text{кз}} = 25$ А.

Решение. Ток короткого замыкания $I_{\text{кз}} = \frac{\mathcal{E}}{r}$. Внутреннее сопротивление источника мы можем определить из условия равенства мощностей (см. задачу 13.68): $r = \sqrt{R_1 R_2}$. Величину \mathcal{E} можно теперь определить из выражения для мощности при подключении любого из нагревателей, например, $P = \frac{\mathcal{E}^2 R_1}{(R_1 + r)^2}$. Отсюда получаем (с учетом $r = \sqrt{R_1 R_2}$): $\mathcal{E} = \sqrt{P}(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})$ и $I_{\text{кз}} = \sqrt{P}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}\right) = 25$ А.

13.71. Ответ: первая лампочка потребляет мощность 9,6 Вт, вторая — 14,4 Вт. Полная мощность 24 Вт.

Решение. Мощность определяют по формуле $P = \frac{U^2}{R}$, где R — сопротивление участка цепи, U — напряжение на этом участке. Значит, сопротивление второй лампочки больше: $R_2 > R_1$. Очевидно, при последовательном включении обе лампочки горят неполным накалом, т. к. напряжение на каждой из них не достигает номинального (220 В). Более того, даже полная потребляемая мощность P меньше номинальной мощности $P_2 = 40$ Вт более слабой лампы (ведь при последовательном соединении сопротив-

ление цепи $R = R_1 + R_2$ превышает сопротивление каждой из лампочек). Кроме того, при последовательном соединении ярче будет гореть лампочка с большим сопротивлением, т. е. $P'_2 > P'_1$, ведь сила тока I является одинаковой для обеих лампочек, а $P = I^2R$.

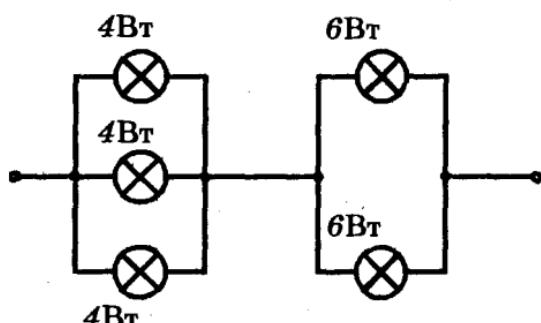
Произведем расчет, считая сопротивление лампочек неизменным, не зависящим от накала¹⁾: $R_1 = \frac{U^2}{P_1}$, $R_2 = \frac{U^2}{P_2}$. При последовательном включении $I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{P_1 P_2}{U(P_1 + P_2)}$. Найдем мощность каждой из лампочек при таком включении:

$$P'_1 = I^2 R_1 = \frac{P_1 P_2^2}{(P_1 + P_2)^2} = 9,6 \text{ Вт}; P'_2 = \frac{P_1^2 P_2}{(P_1 + P_2)^2} = 14,4 \text{ Вт}.$$

Полная потребляемая мощность $P = P'_1 + P'_2 = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} = 24 \text{ Вт}$.

Ярче горит лампочка, на которой написано «40 Вт».

13.72. Ответ: см. рисунок.



Указание. Достаточно обратить внимание, что при параллельном включении трех лампочек по 4 Вт или двух по 6 Вт мы получаем «потребителей» с одинаковой расчетной мощностью — 12 Вт. Значит, эти участки цепи имеют одинаковые сопротивления и при последовательном включении на них будут одинаковые напряжения.

13.73. Ответ: $I_{\text{вн}} = 20 \text{ А}$.

Решение. Из уравнения $P = I^2R$ определяем сопротивление нагрузки в обоих случаях:

$$R_1 = \frac{P_1}{I_1^2}, \quad R_2 = \frac{P_2}{I_2^2}.$$

¹⁾ На самом деле при увеличении напряжения на лампочке от 0 до 220 В ее сопротивление может возрастать примерно в десять раз.

Из закона Ома для замкнутой цепи следует:

$$\mathcal{E} = I_1(r + R_1) = I_2(r + R_2).$$

Отсюда $r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1}$, $\mathcal{E} = \frac{I_1 I_2 (R_1 - R_2)}{I_2 - I_1}$. Тогда

$$I_{\text{на}} = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{I_1 I_2 (R_1 - R_2)}{I_1 R_1 - I_2 R_2} = \frac{P_1 I_2^2 - P_2 I_1^2}{P_1 I_2 - P_2 I_1} = 20 \text{ А.}$$

13.74. Ответ: через 8 минут; через 36 минут.

Решение. Обозначим сопротивления обмоток R_1 и R_2 , напряжение в сети U . Количество теплоты, необходимое для доведения воды до

кишения, $Q = \frac{U^2}{R_1} t_1 = \frac{U^2}{R_2} t_2 = \frac{U^2}{R_1 + R_2} t_{\text{посл}} = \left(\frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2} \right) t_{\text{пар}}$. Отсюда $\frac{R_1}{R_2} =$

$= \frac{t_1}{t_2}$; время закипания воды при последовательном включении

$t_{\text{посл}} = t_1 + t_2 = 36$ мин, при параллельном включении обмоток $t_{\text{пар}} =$

$$= \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 8 \text{ мин.}$$

При решении подобных задач обычно предполагается (и даже не всегда оговаривается), что необходимое количество теплоты во всех случаях одинаково. На самом деле теплопередача от чайника к окружающему воздуху достаточно велика. Потери теплоты тем больше, чем медленнее происходит нагревание. Поэтому они максимальны при последовательном включении обмоток и минимальны — при параллельном. Значит, $t_{\text{посл}} > 36$ мин и $t_{\text{пар}} < 8$ мин.

13.75. Ответ: $d = 2,7$ мм.

Решение. Падение напряжения на проводах равно kU ($k = 0,01$); значит, напряжение на выходе линии электропередачи равно $(1 - k)U$. Из соотношения $P = (1 - k)UI$ получаем силу тока в линии: $I = \frac{P}{(1 - k)U} \approx \frac{P}{U}$. Значит, сопротивление линии $R = \frac{kU^2}{P}$.

Считая линию двухпроводной, записываем:

$$R = 2\rho \frac{l}{S} = \frac{8\rho l}{\pi d^2},$$

где ρ — удельное сопротивление меди. Отсюда $d = \frac{2}{U} \sqrt{\frac{2\rho l P}{\pi k}} = 2,7$ мм.

13.76. Ответ: увеличить в 20 раз.

Указание. См. решение задачи 13.75, где приведено соотношение между k , U и P .

13.77. Ответ: $\frac{v_1}{v_2} = 1,6$.

Решение. При равномерном движении по горизонтальному пути сила тяги $F_1 = \mu mg$ (m — масса электропоезда); при равномерном движении на наклонном участке $F_2 = mg(\mu + k)$ (см. задачу 4.16; мы учли, что $k \ll 1$). Соответственно развивающаяся механическая мощность на горизонтальном участке $N_1 = F_1 v_1 = \mu m g v_1$, на подъеме $N_2 = F_2 v_2 = m g v_2 (\mu + k)$; потребляемая электрическая мощность $P_1 = UI_1$, $P_2 = UI_2$, где U — напряжение в сети. Считая КПД двигателя неизменным, получаем:

$$\frac{N_1}{P_1} = \frac{N_2}{P_2}.$$

Отсюда $\frac{v_1}{v_2} = \frac{I_1}{I_2} \left(1 + \frac{k}{\mu}\right) = 1,6$.

13.78. Ответ: $I = 47$ А.

Решение. Выделившееся тепло равно $I^2 R \tau$, следовательно,

$$I^2 R \tau = mc(t_{\text{пл}} - t_0),$$

где R — сопротивление проволоки, m — ее масса, c — удельная теплоемкость железа, $t_{\text{пл}}$ — температура плавления железа. Учитывая, что $R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{4l}{\pi D^2}$ и $m = dl \frac{\pi D^2}{4}$, получим:

$$I = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{dc(t_{\text{пл}} - t_0)}{\rho \tau}} = 47 \text{ А.}$$

Здесь ρ и d — соответственно удельное сопротивление и плотность железа, l и S — длина и площадь поперечного сечения проволоки.

13.79. Ответ: алюминиевая проволока.

Решение. Фактически вопрос сводится к тому, какая из трех проволок раньше нагреется до «своей» температуры плавления. Указание на высокое напряжение означает, что процесс нагревания происходит быстро, так что теплообменом и потерями тепла можно пренебречь. Определим время, в течение которого проволока нагревается до температуры плавления:

$$\tau = \left(\frac{\pi D^2}{4I}\right)^2 \cdot \frac{dc(t_{\text{пл}} - t_0)}{\rho}$$

(см. задачу 13.78). Поскольку I и D для всех трех проволок одинаковы, перегорит та, у которой величина $\frac{dc(t_{\text{пл}} - t_0)}{\rho}$ наименьшая. Подставив табличные данные, увидим, что эта величина

минимальна у алюминия. Распространенная ошибка при решении этой задачи — подсчет количества теплоты, необходимого для того, чтобы расплавить целиком одну из проволок. В действительности же при перегорании проволоки плавится очень короткий ее отрезок.

13.80. Ответ: первой перегорит алюминиевая проволока, затем медная и, наконец, железная.

Указание. См. задачи 13.78 и 13.79. В данном случае одинаковым для всех трех проволок является напряжение. Первой перегорит та проволока, для которой время $\tau = \frac{\rho d c(t_{пл} - t_0)l^2}{U^2}$ минимально.

13.81. Ответ: $\tau = 0,21$ с; температура проводов повысится всего на $\Delta t = 0,1^\circ\text{C}$.

Указание. См. задачу 13.78.

13.82. Решение. Согласно закону Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

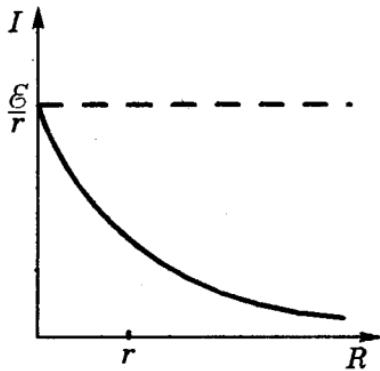


Рис. а

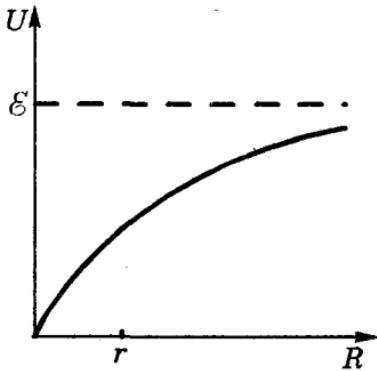


Рис. б

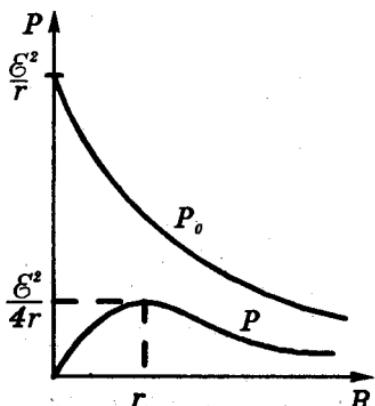


Рис. в

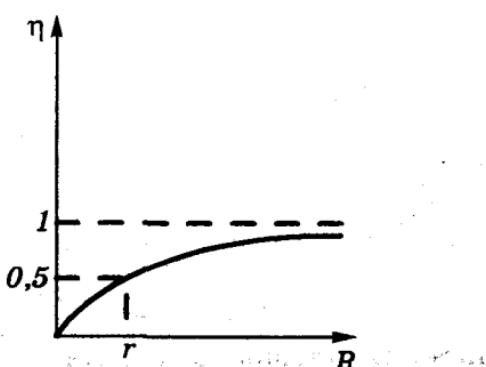


Рис. г

График этой зависимости (гипербола) приведен на рис. а.
Напряжение

$$U = IR = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}r}{R+r}.$$

График (также гипербола) — см. на рис. б. Мощность во внешней цепи

$$P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2};$$

полная мощность

$$P_0 = I^2 (R+r) = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r},$$

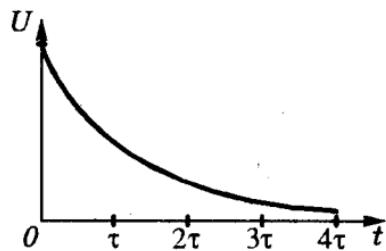
Графики зависимостей $P(R)$ и $P_0(R)$ приведены на рис. в. КПД цепи $\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{R}{R+r}$ (см. рис. г). Исследуем на максимум функцию $P(R)$, вычислив ее производную:

$$P'(R) = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^4} \left((R+r)^2 - R \cdot 2(R+r) \right) = \frac{\mathcal{E}^2(r-R)}{(R+r)^3}.$$

Значит, $P(R)$ возрастает при $R < r$ и убывает при $R > r$; максимум достигается при $R = r$ (такую нагрузку называют согласованной). При этом КПД цепи составляет всего 50%!

13.83. Ответ: $\tau \sim RC$; см. рисунок.

Решение. По мере уменьшения напряжения на конденсаторе уменьшается и сила тока i в цепи; следовательно, скорость разрядки конденсатора также уменьшается. Вид графика $U(t)$ показан на рисунке. Под временем разрядки понимают время τ , за которое напряжение заметно изменится, например, вдвое. Оценить τ можно различными способами. Простейший из них — метод размерностей. Из физических соображений ясно, что τ может зависеть лишь от R , C и, возможно, от начального напряжения U_0 на конденсаторе. Единицы измерения этих величин соответствен-но: 1 Ом, 1 Ф = 1 Кл/В = 1 с/Ом и 1 В. Из величин R , C и U_0 можно построить величину с размерностью времени единственным способом: умножить R на C . Следовательно, $\tau \sim RC$ (точное выражение для τ может содержать еще числовой коэффициент порядка единицы). Как видим, величина τ не зависит от U_0 . Можно получить тот же результат и иначе: напряжение заметно



уменьшается, когда выделившееся в цепи количество теплоты становится сравнимым с начальной энергией заряженного конденсатора:

$$i^2 R t \sim \frac{C U_0^2}{2}.$$

Считая, что $i \sim \frac{U_0}{R}$, получаем

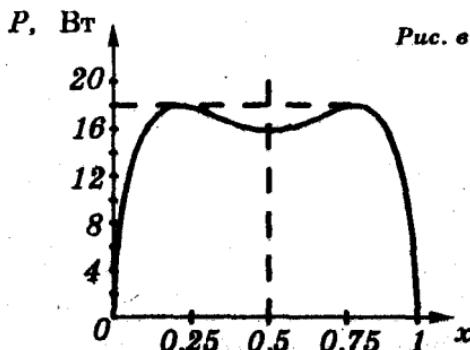
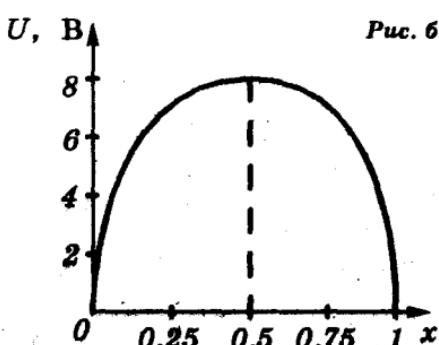
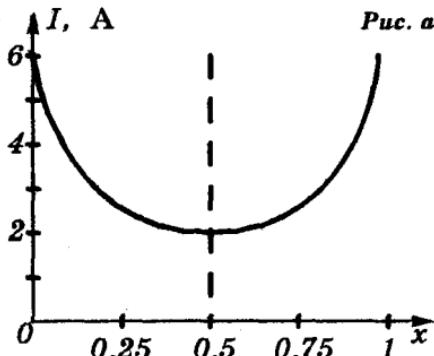
$$\tau \sim RC.$$

Наметим и точное решение. За малое время Δt напряжение на конденсаторе уменьшается на величину $\frac{\Delta q}{C} = \frac{i \Delta t}{C} = \frac{U \Delta t}{RC}$, откуда следует $U' = -\frac{U}{RC}$. Решение этого дифференциального уравнения (с учетом условия $U = U_0$ при $t = 0$) имеет вид $U = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, где $\tau = \frac{1}{RC}$. За время τ напряжение убывает в $e \approx 2,7$ раз, за время 5τ — в 150 раз!

13.84. Ответ: $I = \frac{\mathcal{E}}{r + Rx(1 - x)}$, $U = \frac{\mathcal{E}Rx(1 - x)}{r + Rx(1 - x)}$,

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 Rx(1 - x)}{(r + Rx(1 - x))^2}; \text{ см. рис. } a, b, c.$$

Указание. Обе части реостата соединены параллельно, поэтому сопротивление внешней цепи равно $Rx(1 - x)$; следовательно, все графики симметричны относительно прямой $x = 1/2$. Характерный «двугорбый» вид графика $P(x)$ можно было предсказать заранее. Дело в том, что максимум $P(x)$ достигается для согласованной нагрузки



(см. задачу 13.82), т. е. при сопротивлении внешней цепи 2 Ом. При перемещении же движка реостата от любого края к середине сопротивление внешней цепи изменяется от нуля до $R/4 = 4$ Ом, поэтому существуют два симметричных положения движка, соответствующих сопротивлению внешней цепи 2 Ом.

14.1. Ответ: $v = 0,45$ мм/с.

Решение. Согласно условию задачи концентрация n свободных электронов совпадает с концентрацией атомов меди. За время τ электроны перемещаются на расстояние vt ; значит, через сечение проводника площадью S пройдет $nSvt$ электронов, которые перенесут заряд $\Delta q = enSvt$, где e — элементарный заряд. Поскольку сила тока $I = \frac{\Delta q}{\tau} = enSv$, плотность тока связана со средней скоростью v соотношением $j = \frac{I}{S} = env$. Концентрацию n атомов меди можно определить из табличных данных следующим образом. В объеме V сосредоточена масса ρV (здесь ρ — плотность меди); масса одного атома равна $\frac{M}{N_A}$, где M — молярная масса меди, N_A — постоянная Авогадро. Определим число N находящихся в объеме V атомов:

$$N = \frac{\rho V \cdot N_A}{M};$$

их концентрация

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\rho N_A}{M}.$$

Отсюда получаем $v = \frac{j}{en} = \frac{jM}{eN_A\rho} = 0,45$ мм/с.

Заметим, что скорость упорядоченного движения свободных электронов (она называется дрейфовой скоростью) ничтожно мала по сравнению со скоростью беспорядочного движения электронов и атомов.

14.2. Ответ: $t = 2200^\circ\text{C}$.

Решение. Обозначим сопротивление лампы в рабочем режиме R , а в «исследовательском» режиме R_1 . Из данных, приведенных в условии, получаем:

$$R = \frac{U^2}{P} = 28,8 \text{ Ом}; R_1 = \frac{U_1}{I_1} = 2,5 \text{ Ом}.$$

Большее сопротивление в рабочем режиме обусловлено более

высокой температурой нити накала. Из формулы зависимости сопротивления проводника от температуры $R = R_1(1 + \alpha(t - t_1))$, где α — температурный коэффициент сопротивления, получаем

$$t = t_1 + \frac{R - R_1}{\alpha \cdot R_1}.$$

Подставляя в эту формулу значения R , R_1 и табличное значение α , получаем $t = 2200^\circ\text{C}$.

14.3. Решение. Часть спирали, на которую попадет вода, заметно охладится за счёт испарения воды. Сопротивление этой части существенно уменьшится (у металлов сопротивление с температурой растет) и сила тока в спирали возрастет. Вследствие этого накал той части спирали, куда не попала вода, увеличится (из-за этого спираль может перегореть!).

14.4. Ответ: железный стержень должен быть длиннее угольного в 62 раза.

Решение. Сопротивление каждого из стержней при температуре t составит

$$R = \rho_0 \frac{l}{S}(1 + \alpha t),$$

где ρ_0 — удельное сопротивление при 0°C , α — температурный коэффициент сопротивления, l — длина стержня. Мы пренебрегаем изменением размеров стержней, т. к. коэффициент линейного расширения твердых тел на один-два порядка меньше температурного коэффициента сопротивления. Полное сопротивление соединенных стержней:

$$R = \rho_{01} \frac{l_1}{S}(1 + \alpha_1 t) + \rho_{02} \frac{l_2}{S}(1 + \alpha_2 t) = \rho_{01} \frac{l_1}{S} + \rho_{02} \frac{l_2}{S} + \frac{t}{S}(\rho_{01} l_1 \alpha_1 + \rho_{02} l_2 \alpha_2),$$

где индекс 1 соответствует угольному стержню, а индекс 2 — железному. Эта величина не зависит от температуры, если коэффициент при t в последней формуле обращается в нуль, т. е. при $\frac{l_2}{l_1} = -\frac{\rho_{01}\alpha_1}{\rho_{02}\alpha_2}$. Значения ρ_{01} и ρ_{02} выразим через величины удельных сопротивлений ρ_1 и ρ_2 при $t_1 = 20^\circ\text{C}$ (см. приложение, таблица 10):

$$\rho_{01,02} = \frac{\rho_{1,2}}{1 + \alpha_{1,2} t_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{l_2}{l_1} = -\frac{\rho_1 \alpha_1 (1 + \alpha_2 t_1)}{\rho_2 \alpha_2 (1 + \alpha_1 t_1)} = 62.$$

Итак, железный стержень должен быть длиннее угольного в 62

раза. Разумеется, решение существует лишь благодаря тому, что $\alpha_2/\alpha_1 < 0$ (т. е. у одного из стержней сопротивление при нагревании растет, а у другого — уменьшается).

14.5. Решение. При включении нагревателя ток в проводах, подводящих электроэнергию к квартире, резко возрастает. Соответственно возрастает потеря напряжения на этих проводах и из-за этого уменьшается напряжение на лампочках. По мере нагревания сопротивление спирали увеличивается в несколько раз, поэтому ток в цепи уменьшается. В результате уменьшается и потеря напряжения на проводах, напряжение на лампочках возрастает, хотя и не достигает первоначальной величины.

14.6. Ответ: $l = 0,34$ м.

Решение. Сопротивление нити накала в рабочем состоянии $R = \frac{U^2}{P}$. С другой стороны, оно равно

$$R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{4l}{\pi d^2},$$

где ρ — удельное сопротивление накаленной нити. Учитывая, что $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T}{T_0}$, получим $l = \frac{\pi d^2 U^2 T_0}{4 P \rho_0 T} = 0,34$ м. Здесь ρ_0 — удельное сопротивление вольфрама при температуре $T_0 = 293$ К (см. табл. 10 в приложении).

14.7. Ответ: $q = \rho j^2$.

Указание. За время Δt во всем объеме проводника выделяется количество теплоты $Q = I^2 R \Delta t$. Воспользуйтесь соотношениями:

$$q = \frac{Q}{V \Delta t}; V = Sl; I = jS; R = \rho \frac{l}{S}.$$

14.8. Ответ: $U_1 = 525$ В, $U_2 = 131$ В.

Решение. Нить перегорит, когда нагреется до температуры плавления вольфрама $T = 3650$ К. Удельное сопротивление вольфрама при этой температуре $\rho = \rho_0 \frac{T}{T_0}$ (см. решение задачи 14.6), сопротивление нити $R = \rho \frac{l}{S_1} = \frac{4T\rho_0 l}{T_0 \pi d_1^2}$, выделяющаяся мощность

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{\pi U^2 T_0 d_1^2}{4 T \rho_0 l}. \quad (1)$$

Практически вся выделяющаяся мощность расходуется на тепловое излучение. Значит,

$$P = \sigma T^4 \pi d_1 l, \quad (2)$$

где $\pi d_1 l$ — площадь поверхности нити. Приравнивая выражения (1) и (2) для мощности, получаем

$$U_1 = 2IT^2 \sqrt{\frac{\sigma T \rho_0}{T_0 d_1}} = 525 \text{ В.}$$

Более толстая нить перегорит при более низком напряжении:

$$U_2 = U_1 \sqrt{\frac{d_1}{d_2}} = 131 \text{ В.}$$

Это объясняется тем, что при увеличении диаметра нити выделяющаяся в ней мощность согласно формуле (1) возрастает пропорционально d^2 (ср. с задачей 14.7; заметьте, что объем нити пропорционален d^3), а площадь поверхности, с которой происходит теплоотдача, растет медленнее (пропорционально d).

14.9. Ответ: $h = \frac{MIT}{neN_A p S} = 15 \text{ мкм}$ (здесь M — молярная масса никеля, p — его плотность).

14.10. Ответ: $W = 130 \text{ МДж} = 37 \text{ кВт} \cdot \text{ч.}$

Решение. Согласно закону электролиза масса полученного алюминия $m = kI\Delta t$, где $k = \frac{M}{eN_A n}$ — электрохимический эквивалент алюминия, M — его молярная масса, а n — валентность. КПД установки $\eta = \frac{A}{W}$, где $A = UI\Delta t$ — работа электрического тока.

Подставляя в формулу для КПД $I\Delta t = \frac{m}{k}$, получаем

$$W = \frac{mU}{k\eta} = \frac{mUeN_A n}{M\eta} = 1,3 \cdot 10^8 \text{ Дж} = 37 \text{ кВт} \cdot \text{ч.}$$

14.11. Ответ: $T = \frac{2eN_A npV}{Rq} = 940 \text{ К}$ (здесь R — универсальная газовая постоянная, $n = 2$ — валентность кислорода).

Указание. Воспользуйтесь законом электролиза и уравнением Менделеева-Клапейрона; не забудьте, что выделившиеся в результате электролиза атомы кислорода образуют двухатомные молекулы.

14.12. Решение. а) При последовательном соединении сила тока через обе ванны одинакова (см. рис. а). Поэтому согласно закону

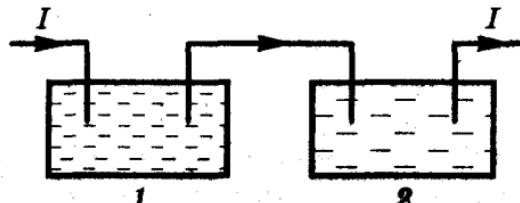


Рис. а

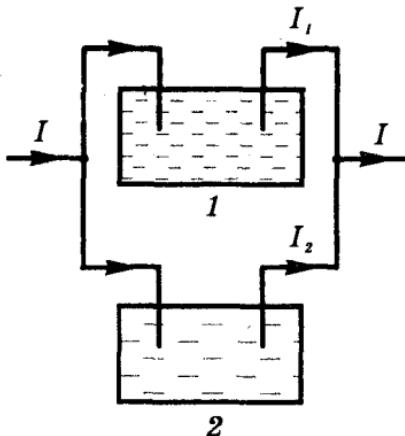


Рис. 6

электролиза массы выделившейся на катодах меди также одинаковы: $m_1 = m_2$.

б) Поскольку сопротивление первой ванны меньше (в ней более высокая концентрация свободных носителей заряда), при параллельном соединении через эту ванну идет более сильный ток: $I_1 > I_2$ (см. рис. 6). Следовательно, в этой ванне меди выделится больше: $m_1 > m_2$.

14.13. Решение. В соединении CuCl валентность меди $n_1 = 1$, а в соединении CuCl_2 валентность меди $n_2 = 2$. Значит, в ванне с CuCl_2 ионы меди имеют вдвое больший заряд. Однако за время электролиза через обе последовательно соединенные ванны проходит одинаковый заряд. Следовательно, через раствор CuCl_2 проходит вдвое меньшее количество ионов меди, чем через раствор CuCl , и поэтому на катоде ванны с CuCl_2 выделится вдвое меньше меди. То же самое следует и непосредственно из формулы $m = \frac{M}{neN_A} I \Delta t$ (закон Фарадея).

14.14. Решение. На поверхности металла всегда есть неровности. У выступов поверхностная плотность заряда, а следовательно, и напряженность электрического поля больше, чем у гладких участков или впадин. После изменения направления тока образовавшийся слой металла становится анодом и начинает растворяться. Этот процесс быстрее всего происходит у выступов (плотность тока прямо пропорциональна напряженности электрического поля, см. задачу 13.2), в результате выступы растворяются быстрее других участков, и поверхность металла выравнивается, становится более гладкой.

14.15. Ответ: $I = 8,1 \cdot 10^{-14}$ А; $U = 8,1 \cdot 10^{-11}$ В.

Решение. Читатели, знакомые с вольт-амперной характеристикой газового разряда, уже поняли: речь идет об определении так называемого тока насыщения. Высокое напряжение вызывает быстрое упорядоченное движение ионов между обкладками конденсатора. Будем считать, что все рождающиеся ионы достигают обкладок, не успев рекомбинировать. Сила тока при этом максимальна. Она численно равна общему заряду ионов одного знака, рождающихся ежесекундно: $I = enSd$. Здесь $n = 5 \cdot 10^4$ см⁻³с⁻¹; емкость конденсатора $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$, откуда $I = \frac{enCd^2}{\epsilon_0} = 8,1 \cdot 10^{-14}$ А. Тогда $U = IR = 8,1 \cdot 10^{-11}$ В.

Полученные значения I и U не зависят от величины приложенного к цепи высокого напряжения (пока напряжение это недостаточно велико для превращения разряда в самостоятельный).

14.16. Решение. Горение дуги поддерживается за счет сильной термоэлектронной эмиссии с раскаленного катода. Поэтому охлаждение катода прекратит дуговой разряд; охлаждение же анода на характер разряда существенно не повлияет.

14.17. Ответ: $v = 2700$ км/с.

Указание. Кинетической энергией, переданной электроном атому, можно пренебречь вследствие большого различия их масс. Поэтому можно считать, что энергия W_k электрона равна энергии ионизации: $W_k = \frac{mv^2}{2} = e\varphi$.

14.18. Ответ: $W_k = 43$ эВ = $6,9 \cdot 10^{-18}$ Дж; $v = 20$ км/с.

Решение. Поскольку рассматривается столкновение частиц с практически равными массами $m_0 = \frac{M}{N_A}$ (M — молярная масса неона), далеко не вся энергия W_k может быть затрачена непосредственно на ионизацию: обе частицы после столкновения будут иметь скорости, сравнимые с начальной скоростью v_0 иона, а следовательно, надо учесть их кинетическую энергию после столкновения (ср. с задачей 14.17). Наибольшая часть энергии W_k будет затрачена на ионизацию при неупругом ударе (см. задачу 4.48), когда после удара обе частицы имеют скорости $\frac{v_0}{2}$. При этом их суммар-

ная кинетическая энергия $2 \frac{m_0 \left(\frac{v_0}{2} \right)^2}{2} = \frac{W_k}{2}$ и из закона сохранения

энергии следует:

$$W_k = e\varphi + \frac{W_k}{2}.$$

Отсюда $W_k = 2e\varphi = 43 \text{ эВ} = 6,9 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$ и $v = \sqrt{\frac{2W_k}{m_0}} = \sqrt{\frac{4eN_A\varphi}{M}} = 2,0 \cdot 10^4 \text{ м/с.}$

Как видим, ион должен иметь вдвое большую кинетическую энергию, чем электрон (см. задачу 14.17).

14.19. Ответ: $T = 1,7 \cdot 10^5 \text{ К.}$

14.20. Решение. Дело не только в том, что для ионизации молекул газа ионы должны иметь кинетическую энергию большую, чем электроны (см. задачи 14.17 и 14.18). Главная причина неэффективности ударной ионизации с помощью ионов в другом: ионы из-за больших размеров сталкиваются с другими частицами гораздо чаще, чем электроны, т. е. имеют намного меньшую длину свободного пробега. В результате при столкновениях ионы теряют кинетическую энергию и не могут приобрести в электрическом поле такую же большую кинетическую энергию, как электроны.

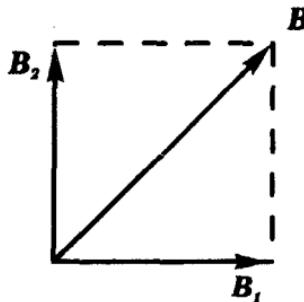
14.21. Ответ: уменьшается.

Решение. Количество образующихся ежесекундно в единице объема германия свободных электронов при легировании практически не меняется (оно определяется температурой полупроводника). А вот вероятность «гибели» свободного электрона в результате встречи с дыркой и рекомбинации резко возрастает — ведь дырок стало намного больше. Следовательно, динамическое равновесие между процессами рождения и гибели свободных электронов достигается при значительно меньшей концентрации свободных электронов, если в полупроводник внесена акцепторная примесь.

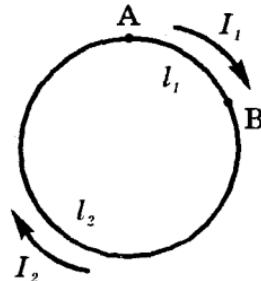
14.22. Решение. При нагревании увеличивается скорость беспорядочного движения свободных носителей заряда в полупроводнике. В результате происходит диффузия свободных носителей заряда от нагретого конца к холодному, ведущая к разделению зарядов. У холодного конца полупроводника возникает повышенная концентрация свободных носителей заряда. Если основными носителями заряда являются дырки (т. е. полупроводник принадлежит к *p*-типу), то потенциал выше у холодного конца. Если же основные носители заряда — электроны (полупроводник *n*-типа), то более высоким оказывается потенциал нагретого конца.

15.1. Решение. Согласно принципу суперпозиции $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$; направление векторов \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 определяется правилом буравчика

(см. рисунок). Поскольку $B_1 = B_2$, вектор \mathbf{B} образует с плоскостями обоих обрущей углы по 45° .



К задаче 15.1



К задаче 15.2

15.2. Ответ: $\mathbf{B} = 0$; нулевой вектор не имеет направления.

Решение. Радиальные провода не создают магнитного поля в центре кольца. Поле в центре кольца создается токами, текущими от A к B по малой и большой дугам кольца (см. рисунок). Поскольку обе дуги соединены параллельно, токи в них обратно пропорциональны сопротивлениям дуг, а, значит, и их длинам:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{l_2}{l_1}, \text{ т. е.}$$

$$I_1 l_1 = I_2 l_2. \quad (1)$$

Согласно правилу буравчика ток I_1 создает в центре кольца магнитное поле, направленное вниз; ток I_2 — поле, направленное вверх. Чтобы сравнить эти поля по величине, разобьем каждую из дуг AB на одинаковые малые участки. Величина магнитной индукции поля, созданного в центре кольца каждым участком, пропорциональна току, протекающему по этому участку; количество же участков в дуге пропорционально ее длине. Значит, магнитная индукция поля каждого из токов I_1 и I_2 прямо пропорциональна произведению Il . Согласно уравнению (1) величины индукций полей обоих токов одинаковы. Поэтому в центре кольца поля полностью компенсируют друг друга, т. е. $\mathbf{B} = 0$.

15.3. Решение. На рис. *a* показано распределение токов в ребрах куба. Все 12 проводников можно разбить на пары, состоящие из параллельных проводников одинаковой длины (1-3, 2-4, 5-11, 6-12, 7-9, 8-10). По обоим проводам в паре текут одинаковые токи; центр куба (точка O) расположен посередине между проводами пары (см. рис. *б*). Очевидно, созданные этими токами поля в точке O компенсируют друг друга. Поэтому магнитное поле в точке O отсутствует.

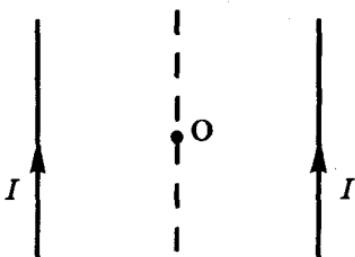
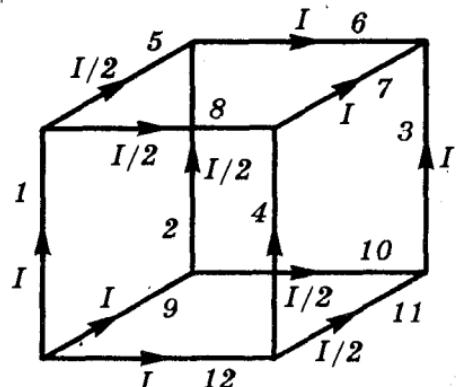


Рис. а, б к задаче 15.3

15.4. Решение. Предположим, рамка расположена в однородном магнитном поле, как показано на рис. а. Тогда на противоположные стороны рамки действуют согласно правилу левой руки равные по модулю и противоположно направленные силы Ампера (на рис. б показан вид сверху). Возникает пара сил, разворачивающая рамку. Вращающий момент этой пары сил обращается в нуль лишь тогда, когда плоскость рамки образует прямой угол с направлением вектора магнитной индукции \mathbf{B} . Равновесие является устойчивым, если направление тока в рамке связано с направлением вектора \mathbf{B}

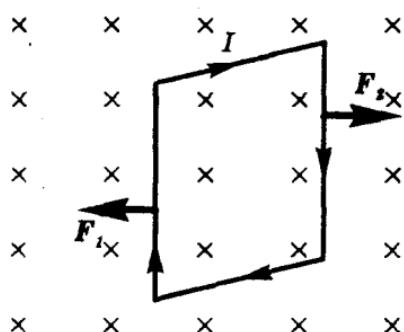


Рис. а

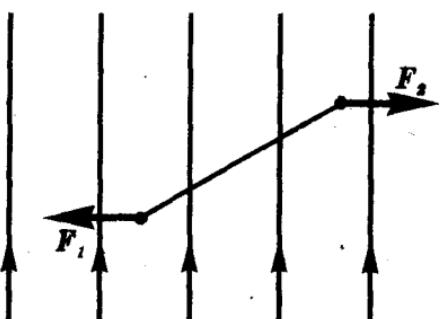


Рис. б

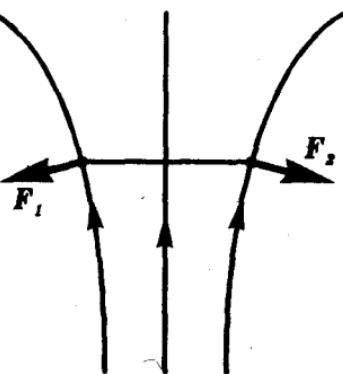


Рис. в

правилом буравчика (при этом силы F_1 и F_2 являются для рамки растягивающими). Итак, однородное магнитное поле (например, поле Земли) оказывает на рамку с током только ориентирующее действие. Поле магнита, в отличие от поля Земли, нельзя считать однородным. У магнита оно заметно усиливается по мере приближения к полюсам. В этом поле (см. рис. 8) силы F_1 и F_2 имеют отличную от нуля равнодействующую. В результате рамка не только повернется, но и втянется в область более сильного поля, т. е. притягивается к полюсу магнита. Совершенно аналогично ведет себя и магнитная стрелка.

15.5. Решение. После замыкания ключа по цепи пойдет ток. Соседние витки пружины, по которым ток протекает в одну сторону, притягиваются друг к другу. В результате пружина сжимается; если ток короткого замыкания источника достаточно велик, нижний конец пружины выходит из ртути и цепь разрывается. Когда ток исчезает, пружина опять расправляется и замыкает цепь. Весь процесс повторяется. Таким образом, система совершают колебания, период которых зависит от характеристик пружины, силы тока и глубины погружения в ртуть нижнего конца пружины. Если ток короткого замыкания источника недостаточно велик, чтобы «выдернуть» нижний конец пружины из ртути, то пружина просто сожмется.

15.6. Ответ: $I = 2,0 \text{ А}$. Ток должен идти слева направо.

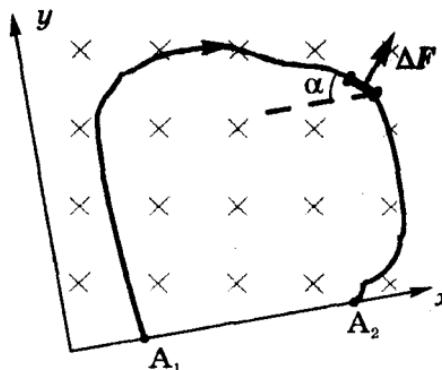
Решение. Натяжение гибких проводов исчезает, если действующая на горизонтальный проводник сила Ампера F_A компенсирует силу тяжести mg . Из правила левой руки следует, что ток по проводнику должен идти слева направо (тогда сила Ампера направлена вверх). Поскольку $F_A = IBl = mg$, получаем $I = \frac{mg}{Bl} = 2,0 \text{ А}$.

15.7. Ответ: $B = \frac{\mu mg}{Il} = 98 \text{ мТл}$.

Указание. Стержень сдвигается с места, когда сила Ампера $F_A = IBl$ превышает максимальную силу трения покоя.

15.8. Решение. Пусть магнитная индукция поля равна B , сила тока в проводнике I , концы проволоки расположены в точках A_1 и A_2 . Выберем систему координат, как показано на рисунке, и рассмотрим силу ΔF , действующую на малый элемент проволоки длиной Δl , а также ее проекции на оси координат:

$$\Delta F = IBl; \Delta F_x = \Delta F \sin \alpha; \Delta F_y = \Delta F \cos \alpha.$$



Тогда

$$\mathbf{F} = \sum \Delta \mathbf{F}; F_x = \sum \Delta F_x = IB \sum \Delta l \sin \alpha; F_y = \sum \Delta F_y = IB \sum \Delta l \cos \alpha.$$

Учтем, что $\Delta l \sin \alpha = (\Delta l)_y$; $\sum (\Delta l)_y = y_{A2} - y_{A1} = 0$; аналогично $\Delta l \cos \alpha = (\Delta l)_x$; $\sum (\Delta l)_x = x_{A2} - x_{A1} = |A_1 A_2|$. Итак, $F_x = 0$; $F_y = IB |A_1 A_2|$. Такая же сила действовала бы на прямолинейный провод $A_1 A_2$. Из полученного результата следует, в частности, что в однородном магнитном поле для замкнутого проводника с током сила \mathbf{F} равна нулю.

15.9. Ответ: $\sigma = 42$ кПа.

Решение. Рассмотрим малый элемент кольца (см. рисунок). На него действует сила Ампера $F_A = IB \Delta l = IB R \alpha$ и две равных по модулю силы упругости. Из условия равновесия следует:

$$F_{\text{упр}} = \frac{F_A}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{IB R \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

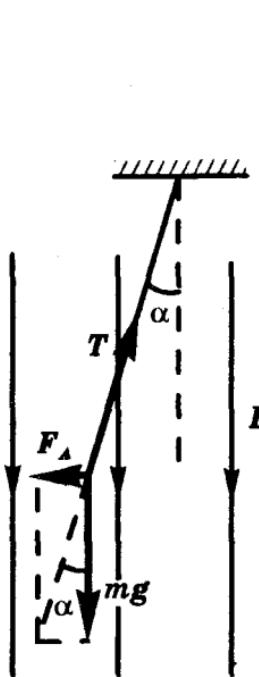
При малых α можно считать, что $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Следовательно,

$$F_{\text{упр}} = IB R \text{ и } \sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S} = \frac{IB R}{S} = 42 \text{ кПа.}$$

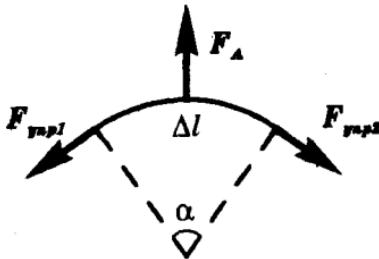
15.10. Ответ: $\alpha = \arctg \frac{IBl}{mg} = 45^\circ$.

Указание. См. рисунок (ток по проводнику идет от нас).

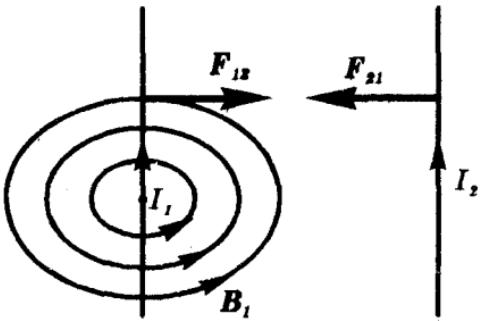
15.11. Решение. Проводники с током в целом электрически нейтральны, и взаимодействие между ними — только магнитное. Согласно правилу буравчика магнитное поле первого проводника в области, где находится второй проводник, направлено от нас (см. рисунок). Применяя правило левой руки, получаем: сила F_A (действующая на второй проводник со стороны первого) направ-



К задаче 15.10



К задаче 15.9



К задаче 15.11

лена влево, т. е. магнитное взаимодействие приводит к притяжению проводников (сила F_{12} рассматривается аналогично).

Магнитное взаимодействие электронных пучков тоже приводит к их взаимному притяжению. Однако между электронами есть еще и кулоновское взаимодействие! Оно, разумеется, приводит к отталкиванию. Известно, что для магнитных и кулоновских сил выполняется соотношение $\frac{F_m}{F_k} \sim \frac{v^2}{c^2}$ (v — скорость электронов в пучке). Понятно, что $F_k > F_m$; отталкивание преобладает. Под действием кулоновских сил пучки не только отталкиваются друг от друга, но и расширяются, «расплываются».

15.12. Ответ: по окружности радиуса $R = \frac{mv}{eB}$ в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B} .

Решение. На электрон действует сила Лоренца $F_L = eBv$, перпендикулярная вектору \mathbf{B} . Поскольку начальная скорость электрона также перпендикулярна \mathbf{B} , траектория электрона лежит в перпендикулярной вектору \mathbf{B} плоскости. Работа силы Лоренца равна нулю, поэтому $v = \text{const}$. Значит, электрон движется по плоской траектории с постоянной по модулю скоростью v и постоянным по модулю ускорением $a = \frac{F_L}{m} = \frac{eBv}{m}$ (ускорение обра-

зует прямой угол с вектором скорости). Названным условиям удовлетворяет только одна траектория — окружность. Из соотношения $a = \frac{v^2}{R}$ определяем радиус окружности $R = \frac{mv}{eB}$.

15.13. Ответ: не зависит.

Решение. Электрон движется с постоянной скоростью по окружности радиуса $R = \frac{mv}{eB}$ (см. задачу 15.12). Период его обращения

равен $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{eB}$ и не зависит от v (при большей скорости электрон опишет за то же время окружность большего радиуса). Независимость периода от скорости позволила создать первый циклический ускоритель заряженных частиц — циклотрон. При больших (релятивистских) скоростях появляется зависимость T от v (механика Ньютона применима лишь при малых скоростях $v \ll c$).

15.14. Ответ: электрон будет двигаться по винтовой линии радиуса

$$R = \frac{musina}{eB} \text{ с шагом } h = \frac{2\pi mv \cos \alpha}{eB}.$$

Решение. Поскольку действующая на электрон сила Лоренца F_L перпендикулярна его скорости, эта сила не совершает работы, и кинетическая энергия электрона (а значит, и модуль его скорости) остается неизменной. Кроме того $F_L \perp B$, поэтому проекция скорости электрона на направление поля также не изменяется. Удобно представить скорость электрона в виде векторной суммы (см. рис. а): $v = v_{||} + v_{\perp}$. Поскольку $v = \text{const}$ и $v_{||} = \text{const}$, получаем $\alpha = \text{const}$. Составляющая скорости $v_{\perp} = vsina$, оставаясь неизменной

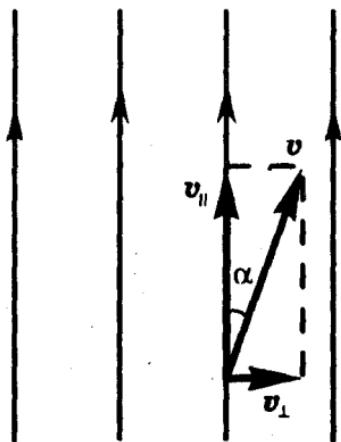


Рис. а

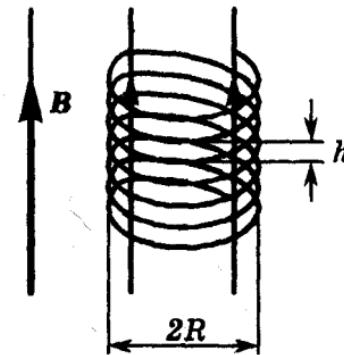


Рис. б

по модулю, может лишь поворачиваться в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B} . Таким образом, электрон одновременно участвует в двух движениях: равномерном перемещении вдоль \mathbf{B} с постоянной скоростью $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ и движении по окружности в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B} , со скоростью $v_{\perp} = v \sin \alpha$. Траектория такого движения представляет собой винтовую линию (см. рис. б). Найдем ее радиус R и шаг h (расстояние между соседними витками). Ускорение электрона соответствует движению по окружности радиусом R со скоростью v_{\perp} : $a = \frac{v_{\perp}^2}{R}$. Значит,

$$F_{\text{л}} = evB \sin \alpha = ma = \frac{mv_{\perp}^2}{R},$$

откуда $R = \frac{mv \sin \alpha}{eB}$, где e — модуль элементарного заряда, m — масса электрона. Один оборот по винтовой линии электрон делает за время $T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{eB}$. Шаг винтовой линии представляет собой перемещение электрона вдоль направления \mathbf{B} за время одного оборота: $h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{eB}$.

15.15. Решение. Как и при решении задачи 15.14, разложим скорость электрона на две составляющие: вдоль полей (v_{\parallel}) и перпендикулярно им (v_{\perp}). В результате действия электрического поля изменяется только v_{\parallel} . Сила Лоренца зависит только от $v_{\perp} = v \sin \alpha$, и поэтому «поперечное» движение электрона будет снова происходить по окружности, радиус которой можно найти так же, как и в задаче 15.14. «Продольное» же движение электрона в данном случае будет равноускоренным с ускорением $a = \frac{eE}{m}$, поскольку в этом направлении на электрон действует постоянная кулоновская сила $F_k = eE$. Это означает, что расстояния между соседними витками «винтовой линии» не будут одинаковыми: они составят арифметическую прогрессию (как пути, проходимые при равноускоренном движении за последовательные равные промежутки времени). Разность этой прогрессии $d = aT^2$,

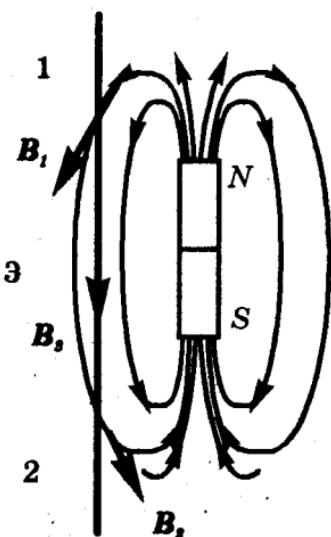
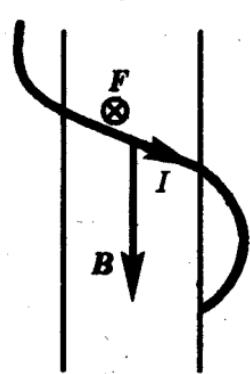
где $T = \frac{2\pi m}{eB}$ (см. задачу 15.13), то есть $d = \frac{eE}{m} \cdot \left(\frac{2\pi m}{eB}\right)^2 = \frac{4\pi^2 m E}{eB^2}$.

Прогрессия может быть как возрастающей, так и убывающей (в зависимости от направления E); в последнем случае, если протя-

женность l области, занятой полями, достаточно велика ($l > \frac{v^2 \cos^2 \alpha}{2a}$), то v_{\parallel} может обратиться в нуль и затем изменить знак: электрон как бы отразится от некоторой плоскости.

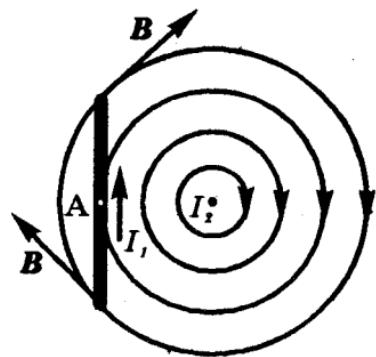
15.16. Решение. Какие силы действуют на частицу, влетевшую в прибор? Для определенности будем считать заряд q частицы положительным. Тогда сила Лоренца $F_L = qBv$ направлена вверх, а кулоновская сила $F_k = qE$ — вниз. Если эти силы не уравновешиваются друг друга, частица отклонится вверх или вниз и не попадет в выходное отверстие. Пройдут через прибор только те частицы, для которых сила Лоренца практически уравновешивает кулоновскую. Это возможно при $v = \frac{E}{B}$. Для отрицательно заряженных частиц получим такой же результат (в этом случае обе силы поменяют направления на противоположные). Заметим, что для прохождения сквозь фильтр никакие характеристики частицы роли не играют — лишь бы она была заряженной и двигалась со скоростью $v = \frac{E}{B}$ перпендикулярно обоим полям.

15.17. Решение. На рис. *a* показано направление вектора магнитной индукции \mathbf{B} поля магнита вблизи разных участков провода. Согласно правилу левой руки сила Ампера на участке 1 направлена от нас (перпендикулярно плоскости рисунка); на участке 2 — к нам; на участке 3 сила Ампера отсутствует. В результате

Рис. *a*Рис. *б*Рис. *в*

провод обвивается вокруг магнита (см. рис. б). Обвившийся вокруг магнита провод притягивается к магниту (см. рис. в).

15.18. Решение. Предположим для простоты, что второй проводник закреплен, а первый свободен. На рисунке показаны линии магнитной индукции поля второго проводника (ток I_2 направлен от нас). Из правила левой руки следует: на верхнюю часть первого проводника сила Ампера действует в направлении от нас, а на нижнюю — к нам. Значит, ток I_1 будет ориентироваться в ту же сторону, что и ток I_2 . Следовательно, проводники станут притягиваться (см. задачу 15.11).



15.19. Ответ: жидкость начнет вращаться по часовой стрелке.

Указание. Поскольку раствор медного купороса — проводник, в нем потекут токи от центрального электрода к медному кольцу. На положительные и отрицательные ионы, движущиеся навстречу друг другу, со стороны магнитного поля будут действовать силы, направленные в одну сторону (по часовой стрелке).

$$\text{15.20. Ответ: } m = \frac{2\pi R BI \sin \alpha}{g} = 3,2 \text{ г.}$$

Указание. См. задачу 15.4.

$$\text{15.21. Ответ: } U_{AC} = \frac{IB}{enb}.$$

Решение. При упорядоченном движении электронов (в направлении, противоположном направлению тока) на них действует сила Лоренца. В результате они отклоняются в сторону поверхности CC_1E_1E , на этой поверхности происходит накопление отрицательного заряда, а на противоположной — положительного. Процесс разделения зарядов продолжается до тех пор, пока возникающее электрическое поле E не скомпенсирует действие на электрон силы Лоренца: $eE = evB$, или $E = vB$ (здесь v — скорость упорядоченного движения электронов). Учитывая, что $\Phi_A - \Phi_C = Ea$ и $I = envS = enva b$, получим

$$U_{AC} = \Phi_A - \Phi_C = \frac{IB}{enb}.$$

Рассмотренный эффект дает возможность достаточно точно измерять концентрацию свободных заряженных частиц в проводнике или индукцию магнитного поля.

15.22. Ответ: $E = \frac{m\omega^2 r}{e}$; $U = 0,11$ мкВ, $B = 5,7 \cdot 10^{-9}$ Тл.

Решение. При вращении цилиндра свободные электроны за счет центробежного эффекта отбрасываются к поверхности цилиндра, образуя вблизи нее избыточный отрицательный заряд. Это разделение зарядов прекращается, когда возникшее электрическое поле способно сообщать свободным электронам центростремительное ускорение $a = \omega^2 r$, т. е. когда $eE = ma$. Отсюда $E = \frac{m\omega^2 r}{e}$. Напряженность электрического поля с ростом r линейно возрастает, поэтому ее среднее значение $E_{cp} = \frac{E_{max}}{2} = \frac{m\omega^2 R}{2e}$. Значит, $U = E_{cp}R = \frac{m\omega^2 R^2}{2e} = 1,1 \cdot 10^{-7}$ В.

Если магнитное поле направлено вдоль оси цилиндра, сила Лоренца, направленная по радиусу, может сама сообщить электронам необходимое центростремительное ускорение: $F_L = ma$. В таком случае электрическое поле не возникает и разделения зарядов не происходит. Учитывая, что $F_L = evB$, $v = \omega r$ и $a = \omega^2 r$, получаем $e\omega Br = m\omega^2 r$; значит, $B = \frac{m\omega}{e} = 5,7 \cdot 10^{-9}$ Тл.

Разумеется, направление B должно быть согласовано с направлением вращения (чтобы сила Лоренца была направлена к оси вращения).

15.23. Ответ: $x = 3,5$ мм.

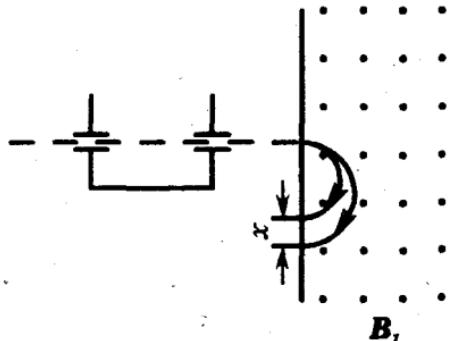
Решение. Все ионы попадают в

поле B_1 со скоростью $v = \frac{E}{B}$ (см. задачу 15.16). Радиус R описываемой окружности определяется из соотношения $R = \frac{m_0 v}{e B_1} = \frac{m_0 E}{e B B_1}$.

Здесь $m_0 = \frac{M}{N_A}$ — масса иона, M

— молярная масса соответствующего изотопа, N_A — постоянная Авогадро. Очевидно (см. рисунок),

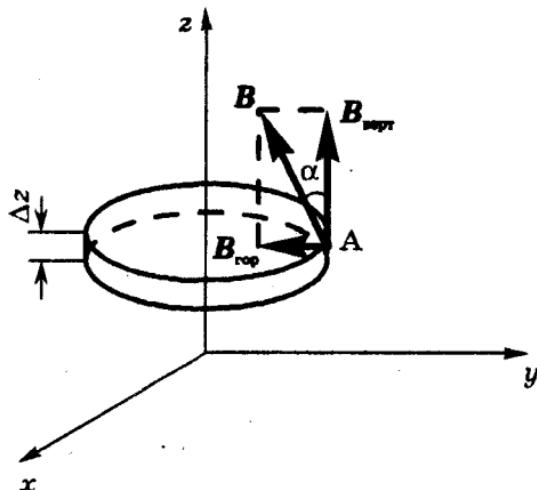
что $x = 2(R_2 - R_1) = \frac{2E}{e N_A B B_1} (M_2 - M_1) = 3,5 \cdot 10^{-3}$ м.



Измерив радиус описываемой ионами окружности, можно с высокой точностью определить массу иона. Прибор, в котором используется этот принцип, называется масс-спектрометром.

15.24. Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{R}{2(h_0 + h)}$.

Решение. Воспользуемся тем, что магнитное поле является вихревым, т. е. все линии магнитной индукции замкнуты. Следовательно, магнитный поток Φ через любую замкнутую поверхность равен нулю (количество входящих в поверхность и выходящих из нее наружу линий магнитной индукции одинаково). Рассмотрим проходящую через точку A замкнутую поверхность, имеющую форму цилиндра высотой Δz (см. рисунок). Представим вектор магнитной



индукции в точках на боковой поверхности цилиндра в виде суммы вертикальной и горизонтальной составляющих:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{верп}} + \mathbf{B}_{\text{гор.}}$$

В данном случае $B_{\text{верп}} = B_z$. Тогда

$$\Phi = B_z(z + \Delta z)\pi R^2 - B_z(z)\pi R^2 - 2\pi R\Delta z B_{\text{гор.}}$$

Поскольку $\Phi = 0$, получаем $B_{\text{гор.}} = \frac{R}{2\Delta z} (B_z(z + \Delta z) - B_z(z))$. Учитывая, что величина $\frac{B_z(z + \Delta z) - B_z(z)}{\Delta z}$ представляет собой при малых Δz производную B_z по z , находим $B_{\text{гор.}} = \frac{RB_0}{2h_0}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_{\text{гор.}}}{B_z} = \frac{R}{2(h_0 + h)}.$$

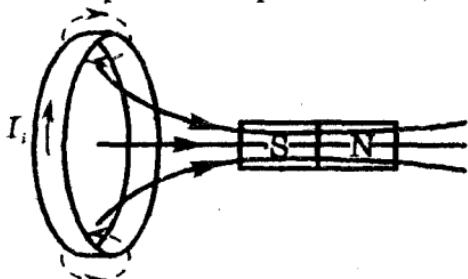
16.1. Решение. Изменение магнитного поля всегда вызывает появление вихревого электрического поля. В результате в диэлектрическом кольце возникает поляризация диэлектрика, а в проводящем — индукционный ток. Вихревое электрическое поле исчез-

зает, когда магнит останавливается. При этом поляризация диэлектрика¹⁾ также исчезает, а ток в проводнике затухает из-за сопротивления. Энергия вихревого поля переходит во внутреннюю энергию кольца (оно нагревается), а небольшую ее часть уносит электромагнитное излучение.

Согласно правилу Ленца направление индукционного тока в проводящем кольце таково, что магнит и кольцо во время движения магнита отталкиваются.

16.2. Ответ: по часовой стрелке, если смотреть со стороны магнита.

Решение. Направление магнитного поля магнита показано на рисунке сплошными линиями (магнитное поле «входит» в южный полюс). При приближении магнита к кольцу магнитный поток через кольцо увеличивается. Согласно правилу Ленца



магнитное поле индукционного тока I_i в кольце (его линии показаны на рисунке пунктирными стрелками) должно быть направлено противоположно увеличивающемуся внешнему магнитному полю, т. е. оно «стремится» воспрепятствовать увеличению магнитного потока через кольцо. Зная направление магнитного поля индукционного тока, можно по правилу буравчика определить направление индукционного тока: он идет по часовой стрелке, если смотреть на кольцо со стороны магнита.

16.3. Ответ: когда рамка находится в плоскости α ; когда плоскость рамки перпендикулярна плоскости α .

Указание. Согласно закону электромагнитной индукции величина ЭДС индукции определяется скоростью изменения магнитного потока через рамку. Эта скорость (и ЭДС) равны нулю, когда рамка и провод лежат в одной плоскости (при этом боковые стороны рамки не пересекают линий магнитной индукции, а движутся вдоль них).

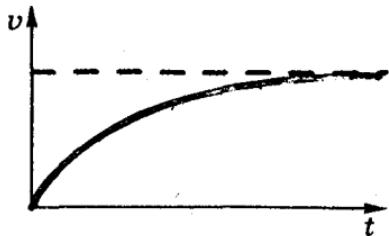
16.4. Ответ: не возникает.

Указание. Линии магнитной индукции поля, создаваемого током, текущим в одном из обрущей, не пересекают второго обруча.

16.5. Решение. При движении магнита возникает вихревое электрическое поле, которое вызывает вихревые электрические токи в трубе. Взаимодействие этих токов с падающим магнитом при-

¹⁾ Мы не рассматриваем случай, когда кольцо сделано из сегнетоэлектрика.

водит согласно правилу Ленца к возникновению силы, тормозящей магнит; причем эта сила возрастает с увеличением скорости падения. В самом начале падения эта сила мала, и магнит движется с ускорением свободного падения. Затем ускорение



плавно уменьшается, и через достаточно длительный промежуток времени сила взаимодействия магнита с вихревыми токами практически уравновесит силу тяжести магнита. Дальнейшее падение происходит почти равномерно. Характер изменения скорости со временем показан на графике (см. рисунок). Движение магнита в трубе напоминает падение тела в жидкости или газе, где сопротивление движению также возрастает с увеличением v .

16.6. Ответ: колебания быстро затухнут.

Указание. После замыкания ключа в цепи возникнет индукционный ток и на нить маятника начнет действовать сила Ампера. Из правила Ленца следует, что эта сила будет тормозить движение маятника. Кроме того, в соответствии с законом электромагнитной индукции, сила прямо пропорциональна скорости шарика. Значит, сила Ампера аналогична силе вязкого трения (см. задачу 16.5) и приводит к более быстрому затуханию колебаний.

16.7. Ответ: в первом случае плоскость рамки перпендикулярна вектору индукции магнитного поля; во втором случае — параллельна.

Решение. Необходимым условием равновесия является обращение в нуль момента сил, действующих со стороны магнитного поля на рамку, в которой возникает индукционный ток. Момент сил обращается в нуль в двух случаях: 1) индукционный ток вообще отсутствует (это возможно, когда плоскость рамки параллельна магнитному полю); 2) плоскость рамки перпендикулярна магнитному полю. Во втором случае равновесие является устойчивым, если индукция B_0 магнитного поля индукционного тока совпадает по направлению с индукцией B внешнего магнитного поля. Согласно правилу Ленца это происходит, когда внешнее магнитное поле убывает. При возрастании B такое положение рамки соответствует неустойчивому равновесию, а устойчивое равновесие достигается в случае 1. В этом можно убедиться, рассмотрев произвольное промежуточное положение рамки: возникающий момент сил поворачивает рамку к положению, при котором ее плоскость будет параллельна магнитному полю. Рас-

смотрение промежуточного положения поможет проанализировать также и случай убывания внешнего магнитного поля.

16.8. Ответ: $\Phi = \pi r^2 B$.

Решение. До выключения магнитного поля ток в кольце отсутствовал; плоскость кольца пронизывал магнитный поток $\Phi_0 = \pi r^2 B$. Во время выключения поля согласно закону электромагнитной

индукции в кольце возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Но в

соответствии с законом Ома $\mathcal{E}_i = IR$, и при $R \rightarrow 0$ получаем $\mathcal{E}_i \rightarrow 0$. Это возможно только при $\Delta\Phi = 0$, т. е. когда $\Phi = \text{const}$. Значит, магнитный поток через сверхпроводящий контур вообще не может измениться: он остается равным Φ_0 и после выключения внешнего магнитного поля. Теперь его создает индуцированный в кольце незатухающий ток.

16.9. Указание. См. задачу 16.1. В сверхпроводящем кольце, в отличие от проводящего, индукционный ток будет незатухающим. Магнитный поток, создаваемый этим током (см. задачу 16.8), в точности компенсирует магнитный поток, создаваемый магнитом. Отталкивание между магнитом и кольцом будет наблюдаться и после прекращения вдвигания магнита. Сверхпроводник всегда выталкивается из области более сильного поля (от полюса магнита), т. е. ведет себя как идеальный диамагнетик. Он может даже «зависнуть» в воздухе над полюсным наконечником магнита.

16.10. Ответ: $I = \frac{\pi N B r^2}{L}$.

Указание. Воспользуйтесь условием $\Phi = \text{const}$ (см. задачу 16.8) и соотношением $\Phi = LI$ для магнитного потока, создаваемого током в катушке.

16.11. Ответ: $B = 4B_0$.

Указание. Магнитный поток через сверхпроводящий контур не может измениться (см. задачу 16.8). Площадь контура уменьшилась в 4 раза; следовательно, индукция магнитного поля должна во столько же раз увеличиться.

16.12. Ответ: увеличится вдвое.

Указание. Радиус меньшего кольца составляет половину радиуса исходного кольца; площадь каждого из меньших колец стала в 4 раза меньше первоначальной, а их общая площадь — в 2 раза меньше первоначальной. Заметим, что после складывания «восьмерки» токи по меньшим кольцам текут в одну сторону. Значит,

магнитные потоки, пронизывающие оба кольца, складываются, причем полный магнитный поток остается неизменным (см. задачу 16.8).

16.13. Решение. Заметим, что в результате такого складывания ток должен был бы идти по двум сложенным кольцам в противоположные стороны! Поэтому суммарное магнитное поле контура, казалось бы, должно обратиться в нуль. Но это несовместимо с условием $\Phi = \text{const}$ (см. задачу 16.8). В чем же дело? Рассмотрим последний этап складывания «восьмерки». На этом этапе магнитные поля, создаваемые каждым из двух колец, направлены почти противоположно друг другу. Их сближение привело бы к уменьшению суммарного магнитного потока через контур; но согласно правилу Ленца уменьшение потока приводит к увеличению силы тока в контуре! Поэтому соотношение $\Phi = \text{const}$ выполняется, но сила тока при складывании «восьмерки» неограниченно растет. При этом неограниченно возрастает и сила отталкивания, которую нужно преодолевать для складывания «восьмерки». Реально это означает, что на некотором этапе процесса сверхпроводимость будет утрачена (для каждого сверхпроводника существует предельный ток, называемый критическим). После этого ток в контуре затухнет и «восьмерку» нетрудно будет сложить. Магнитное поле контура обратится в нуль.

16.14. Ответ: $q = 0,57 \text{ мКл.}$

Решение. В каждом из витков катушки при изменении магнитного поля индуцируется постоянная ЭДС \mathcal{E}_1 . Ее модуль $|\mathcal{E}_1| = \pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}$. Суммарная ЭДС в катушке $\mathcal{E} = n |\mathcal{E}_1|$. Через конденсатор постоянный ток не может идти, поэтому сила тока в цепи равна нулю. Значит, равна нулю и полная напряженность электрического поля в проводах. Она представляет собой сумму напряженности E_i вихревого электрического поля и напряженности E_k электростатического (кулоновского) поля; таким образом, $E_i + E_k = 0$, т. е. $E_k = -E_i$. Следовательно, при прохождении заряда через катушку работа кулоновского и вихревого полей отличается только знаком: $\phi_1 - \phi_2 = -\mathcal{E}$. Заряд конденсатора $q = C|\phi_1 - \phi_2| = \pi n Cr^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = 0,57 \text{ мКл.}$

16.15. Ответ: $P = \frac{\pi^2 n^2 r^4}{R} \left(\frac{\Delta B}{\Delta t} \right)^2 = 5,0 \cdot 10^{-6} \text{ Вт.}$

16.16. Ответ: заряд одинаковый; количество теплоты больше при быстром движении магнита.

Решение. Пусть сопротивление катушки R . Если за небольшой

промежуток времени Δt магнитный поток через контур изменяется на $\Delta\Phi$, то при этом в катушке возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Индукционный ток $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. За время Δt по цепи проходит заряд $\Delta q = I\Delta t = -\frac{\Delta\Phi}{R}$. Полный проходящий по цепи заряд $q = \sum \Delta q = -\frac{1}{R} \sum \Delta\Phi = -\frac{\Phi}{R}$. Здесь Φ — конечное значение магнитного потока (начальное равно нулю). Значит, q не зависит от скорости процесса. Выделившееся в цепи количество теплоты Q равно работе сторонних сил: $Q = q\mathcal{E}_i$. Поскольку заряд q в обоих случаях одинаков, а \mathcal{E}_i больше при быстром движении магнита, количество теплоты в первом случае больше. К такому выводу можно прийти и другим путем: $Q = A = Fs$, где A — совершающаяся при введении магнита механическая работа. Перемещение магнита s одинаково в обоих случаях, а F больше в первом случае (F — сила отталкивания магнита от катушки вследствие появления индукционных токов).

16.17. Ответ: $q = \frac{\pi n Br^2}{R} (1 - \cos a)$.

Указание. $q = -\frac{\Delta\Phi}{R}$ (см. задачу 16.16).

16.18. Ответ: $q_{\max} = 32 \text{ мкКл.}$

Решение. Из соотношения $q = \frac{|\Delta\Phi|}{R}$ (см. задачу 16.16) следует, что для прохождения максимального заряда провод должен охватить площадку наибольшей площади S . Как известно, из всех фигур с заданным периметром наибольшую площадь имеет круг. Из формул $l = 2\pi r$, $S = \pi r^2$ получаем $S = \frac{l^2}{4\pi}$; следовательно, $q_{\max} = \frac{B_s S}{R} = \frac{B_s l^2}{4\pi R} = 32 \text{ мкКл.}$

16.19. Ответ: $I = \frac{\omega Bl^2}{4R}$.

Решение. Фактически ЭДС наводится только во вращающемся стержне. Ее можно найти, применяя закон электромагнитной индукции к любому из двух секторов, на которые «стрелки» делят круг:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -B \frac{\Delta S}{\Delta t} = -B \frac{\Delta \left(\frac{\alpha l^2}{2}\right)}{\Delta t} = -\frac{Bl^2}{2} \cdot \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = -\frac{B\omega l^2}{2}.$$

Здесь S — площадь сектора, α — угол между стрелками ($\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$).

Согласно закону Ома $I = \frac{|E|}{2R} = \frac{\omega Bl^2}{4R}$.

16.20. Решение. Характер движения определяется равнодействующей сил, действующих на стержень. Она равна векторной сумме приложенной силы F и силы Ампера F_A со стороны магнитного поля (при движении стержня в нем индуцируется ток силой I). Чтобы найти F_A при движении стержня со скоростью v , используем соотношения $F_A = BIl$, $I = \frac{|E|}{R}$, $|E| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B \frac{\Delta S}{\Delta t} = Bul$.

Из них следует:

$$F_A = \frac{B^2 l^2}{R} v.$$

Согласно правилу Ленца сила Ампера направлена противоположно движению стержня. И по направлению, и по характеру зависимости от скорости эта сила напоминает силу сопротивления при движении в жидкости или газе. Отсюда ясен характер движения (ср. с задачей 16.5): ускорение стержня максимально в начальный момент, когда $F_A = 0$, а затем постепенно уменьшается до нуля. Стержень в конечном счете приобретает постоянную скорость, определяемую из условия $F_A = F$:

$$v = \frac{FR}{B^2 l^2}.$$

Заметим, что при установившейся скорости движения стержня выполняется соотношение $Fv \cdot \Delta t = I^2 R \cdot \Delta t$: работа внешней силы равна количеству теплоты, выделившейся в резисторе. При увеличении R скорость v растет из-за уменьшения силы индукционного тока, а, следовательно, и силы Ампера, направленной противоположно движению.

16.21. Ответ: Стержень будет двигаться равноускоренно под действием силы F , пока не достигнет скорости $v_1 = \frac{E_0}{Bl}$. Затем ускорение начнет уменьшаться и станет равным нулю при скорости $v_2 = v_1 + \frac{FR}{B^2 l^2}$. Далее стержень движется равномерно.

Указание. При $v < v_1$ индукционный ток в цепи отсутствует (диод включен «против» источника ЭДС). См. также задачу 16.20.

16.22. Ответ: $i = \frac{\pi r^2 a B_0}{R} = \text{const}$; разность потенциалов между любыми точками кольца равна нулю.

Решение. Поскольку $\frac{\Delta B}{\Delta t} = aB_0 = \text{const}$, в кольце индуцируется постоянная ЭДС:

$$|\mathcal{E}| = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \pi r^2 a B_0.$$

Значит, и сила тока в кольце постоянна:

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\pi r^2 a B_0}{R}.$$

На любом участке AB кольца индуцируется ЭДС \mathcal{E}_{AB} , пропорциональная длине участка (a , значит, и его сопротивлению R_{AB}):

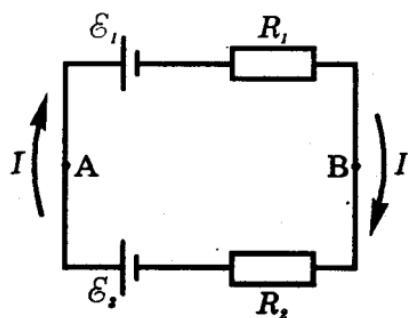
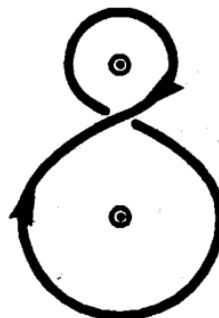
$$\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E} \frac{R_{AB}}{R}.$$

Из закона Ома для участка цепи с ЭДС следует: $\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_{AB} - i R_{AB} = \mathcal{E} \frac{R_{AB}}{R} - \mathcal{E} \frac{R_{AB}}{R} = 0$. Можно пояснить этот результат и иначе: плотность заряда всюду в кольце равна нулю (это следует из соображений симметрии). Значит, кулоновское электрическое поле в кольце отсутствует, а разность потенциалов может быть обусловлена только кулоновским полем (вихревое электрическое поле, поддерживающее ток в кольце, непотенциально).

16.23. Ответ: $U > 380$ В.

Решение. Обозначим сопротивления верхнего и нижнего колец «восьмерки» соответственно R_1 и R_2 , а индуцируемые в них ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 . Эти ЭДС действуют в цепи навстречу друг другу. Пробой возможен между точками A и B на перемычке «восьмерки». На рис. *a* представлена эквивалентная схема цепи. Согласно закону Ома

$$I = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R_2 + R_1}, \quad U_{AB} = \mathcal{E}_2 - IR_2 = \frac{\mathcal{E}_2 R_1 + \mathcal{E}_1 R_2}{R_2 + R_1} = \frac{\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R_1}}.$$

Рис. *a*Рис. *b*

В соответствии с законом электромагнитной индукции $\mathcal{E}_1 = \pi r_1^2 \frac{B}{\Delta t}$, $\mathcal{E}_2 = \pi r_2^2 \frac{B}{\Delta t}$. Учитывая, что $\frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1}$, получаем

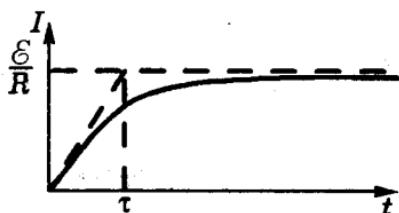
$$U_{AB} = \pi \frac{B}{\Delta t} \frac{r_2^2 + r_1 r_2}{1 + \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\pi B r_1 r_2}{\Delta t} = 380 \text{ В.}$$

Возникает вопрос: в чем же отличие этого изогнутого «восьмеркой» провода от кольца, рассмотренного в задаче 16.22? Почему тогда не возникало разности потенциалов между любыми двумя точками кольца, а теперь эта разность потенциалов есть? Для ответа на этот вопрос рассмотрим, как действует вихревое электрическое поле на свободные заряды в проводе. На рис. б показано, в какую сторону это поле «гонит» положительные заряды в верхней и нижней частях «восьмерки» (мы предположили, что возрастающее внешнее поле направлено к нам). В результате действия вихревого поля произойдет разделение зарядов: на ближней к нам части перемычки возникнет положительный заряд, а на дальней — отрицательный. Вследствие разделения зарядов возникнет кулоновское (электростатическое) поле — оно-то и создаст разность потенциалов.

16.24. Решение. ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{is} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$, поэтому, согласно закону Ома для всей цепи $IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_{is} = \mathcal{E} - L \frac{\Delta I}{\Delta t}$. Перепишем это соотношение в виде

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = \mathcal{E} - IR. \quad (1)$$

Сразу же после замыкания ключа $I = 0$, поэтому можно считать $L \frac{\Delta I}{\Delta t} \approx \frac{\mathcal{E}}{L}$, т. е. ток возрастает с постоянной скоростью ($I = \frac{\mathcal{E}}{L}t$; см. рисунок). При увеличении тока правая часть в уравнении (1) уменьшается, следовательно, уменьшается и скорость возрастания тока. Через достаточно длительное время (о том, каким оно должно быть, — чуть ниже) правая часть уравнения (1) становится пренебрежимо малой. Это означает, что ток стремится к постоянной величине $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ (см. рисунок). «Характерное» время τ для рассматриваемой системы можно определить, оце-



нив, когда слагаемое IR станет сравнимо по величине с \mathcal{E} . Воспользовавшись для оценки зависимостью $I = \frac{\mathcal{E}}{L}t$, получаем $\frac{\mathcal{E}}{L}tR \sim \mathcal{E}$, откуда $t \sim L/R$.

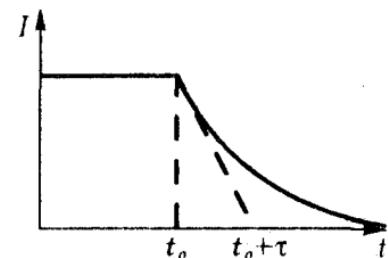
Для тех, кто уже изучил дифференциальное и интегральное исчисление в объеме школьного курса: уравнение (1) является простейшим дифференциальным уравнением $I' = -\frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}I$. Покажем, как оно решается. Введем переменную $y = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}I$.

Тогда наше уравнение примет вид: $y' = -\frac{R}{L}y$. Его решение $y = Ce^{-\frac{R}{L}t}$, где C — произвольная постоянная. Значение этой постоянной определяется из условия $I = 0$ при $t = 0$ (т. е. $y = \frac{\mathcal{E}}{L}$ при $t = 0$). Таким образом, для I получаем: $I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$.

Из этой формулы легко увидеть, что при $t \gg \frac{L}{R}$, когда второе слагаемое в скобках мало, I стремится к постоянному значению $\frac{\mathcal{E}}{R}$. Чтобы «увидеть» линейный рост I при малых t , надо воспользоваться формулой $e^x \approx 1 + x$, применимой при $|x| \ll 1$ (см. математическое приложение). При $\frac{R}{L}t \ll 1$ (т. е. при $t \ll \frac{L}{R}$) получаем $e^{-\frac{R}{L}t} \approx 1 - \frac{R}{L}t$, откуда $I \approx \frac{\mathcal{E}}{L}t$.

16.25. Ответ: см. рисунок; $\tau \sim \frac{L}{R}$.

Решение. Зависимость силы тока от времени показана на рисунке (ср. с задачей 16.24). Оценить время τ можно различными способами. Простейший из них — метод размерностей. Физически очевидно, что τ может зависеть лишь от L , от R и, возможно, от силы тока I_0 в момент t_0 . Единицы измерения этих величин: $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Ом} \cdot \text{с}$, 1 Ом и 1 А . Нетрудно убедиться, что величину с размерностью времени можно получить только одним способом: разделив L на R . Значит, $\tau \sim L/R$ (точное выражение для τ может содержать еще числовой коэффициент порядка единицы). Как видим, τ не зависит от I_0 . Тот же результат можно получить и иначе: ток затухает, когда начальная энергия магнитного поля тока $W_m = \frac{LI_0^2}{2}$ перейдет во внутреннюю энергию проводов, нагреваемых током: $W_m = Q \sim I_0^2 R \tau$. Отсюда также получаем $\tau \sim \frac{L}{R}$ (множитель $\frac{1}{2}$ при оценке можно опустить).



Наметим и точное решение (ср. с задачей 13.83). Закон Ома при $t \geq t_0$ приводит к соотношению $L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -IR$, или $I' = -\frac{R}{L}I$.

Решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию $I = I_0$ при $t = t_0$, имеет вид $I = I_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$, где $\tau = \frac{L}{R}$.

16.26. Ответ: L пропорциональна N^2 .

Решение 1. Индуктивность катушки определяется из соотношения

$$\mathcal{E} = L \left| \frac{\Delta I}{\Delta t} \right|,$$

где \mathcal{E} — ЭДС самоиндукции. Эта ЭДС является суммой ЭДС всех витков. В замкнутом сердечнике рассеянием магнитного потока можно пренебречь, поэтому каждый из витков пронизывается одинаковым магнитным потоком $\Phi = BS$. Значит, в каждом витке наводится одна и та же ЭДС $\mathcal{E}_1 = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = S \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|$. Согласно принципу суперпозиции магнитная индукция B поля в сердечнике прямо пропорциональна N , т. е. $B \sim N$. Значит, и $\mathcal{E}_1 \sim N$. Полная же ЭДС $\mathcal{E} = N\mathcal{E}_1$. Поэтому $\mathcal{E} \sim N^2$, откуда $L \sim N^2$.

Решение 2. Индуктивность — это коэффициент пропорциональности между магнитным потоком, пронизывающим контур, и силой тока: $\Phi = LI$ (магнитное поле создается током, текущим в контуре). Таким образом, наша задача сводится к вопросу: как зависит величина магнитного потока, пронизывающего катушку, от числа ее витков (при неизменной силе тока)? Заметим, что $\Phi = BS$, где B — индукция поля, а S — суммарная площадь всех витков. Оба множителя (B и S) прямо пропорциональны числу витков N (величина B потому, что поле в катушке является суперпозицией полей всех витков, а величина S — потому, что все витки пронизываются одним и тем же магнитным полем). Следовательно, $\Phi \sim N^2$ и $L \sim N^2$.

16.27. Ответ: $I = \frac{I_0}{2}$; уменьшится вдвое.

Решение. Магнитный поток Φ через сверхпроводящее кольцо не может измениться (см. задачу 16.8). В начальном положении этот поток составляет $\Phi = LI_0$, где L — индуктивность кольца. После сближения поле соседнего кольца дает в магнитный поток такой же вклад, как и собственное магнитное поле кольца; значит, $\Phi = 2LI$. Отсюда $I = \frac{I_0}{2}$.

В начальный момент, когда магнитные поля колец практически не перекрывались, энергия магнитного поля была $W_0 = \frac{LI_0^2}{2} \cdot 2$. Сблизившиеся вплотную кольца, по каждому из которых течет ток $\frac{I_0}{2}$, создают такое же магнитное поле, как одно кольцо с током

I_0 ; энергия этого поля $W = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{W_0}{2}$. Куда девалась половина начальной энергии? В результате взаимного притяжения кольца при сближении увеличивали свою скорость; значит, «исчезнувшая» энергия поля перешла в кинетическую энергию колец (некоторую часть энергии уносит электромагнитное излучение, возникающее при ускоренном движении колец).

16.28. Решение. Будем для определенности считать, что начальная сила тока в первом кольце больше: $I_{01} > I_{02}$. Кольца притягиваются и сближаются. В соответствии с условием $\Phi = \text{const}$ (см. задачу 16.8) токи в них уменьшаются. В некоторый момент t_1 сила тока во втором кольце обращается в нуль. Однако еще до этого (в некоторый момент t_0) магнитный поток через первое кольцо, создаваемый током I_2 , начнет уменьшаться, несмотря на сближение колец. Поэтому, начиная с момента t_0 , ток I_1 начнет возрастать. К моменту t_1 ток I_1 достигает начальной величины I_{01} (иначе не выполнялось бы условие $\Phi = \text{const}$ для первого кольца). И хотя в момент t_1 сила магнитного взаимодействия обращается в нуль, кольца продолжают сближаться по инерции; ток I_2 меняет направление на противоположное, в результате чего кольца теперь отталкиваются и их сближение замедляется. Отталкивание станет настолько велико, что не позволит кольцам сблизиться вплотную: ведь тогда магнитные потоки через них сравнялись бы, что противоречило бы условию $\Phi = \text{const}$ (напомним, что начальные значения магнитных потоков различны). После сближения на минимальное расстояние кольца начинают удаляться, затем опять сближаются. Возникнут затухающие колебания (затухание обусловлено потерями энергии на трение и электромагнитное излучение). В положении равновесия ток во втором кольце отсутствует, но пронизывающий кольцо магнитный поток остался тем же: этот поток обусловлен теперь полем тока, текущего в приближившемся первом кольце.

16.29. Ответ: $E = \frac{kr}{2}$ при $r < R$; $E = \frac{kR^2}{2r}$ при $r > R$.

Решение. Силовые линии вихревого электрического поля пред-

ставляют собой окружности с центрами на оси цилиндрического сердечника. Вследствие осевой симметрии величина напряженности поля вдоль каждой из силовых линий постоянна. Применим закон электромагнитной индукции к контуру радиуса r , совпадающему с одной из силовых линий:

$$\mathcal{E}_i = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right|.$$

Величина магнитного потока Φ равна $B \cdot \pi r^2$ при $r < R$ и $B \cdot \pi R^2$ при $r > R$.

Величина ЭДС индукции \mathcal{E}_i представляет собой работу вихревого электрического поля при перемещении по контуру единичного положительного заряда:

$$\mathcal{E}_i = 2\pi r E.$$

Итак, $2\pi r E = \pi r^2 k$ при $r < R$, $2\pi r E = \pi R^2 k$ при $r > R$. Отсюда $E = \frac{kr}{2}$ при $r < R$; $E = \frac{kR^2}{2r}$ при $r > R$.

16.30. Решение. Разность потенциалов между любыми двумя точками кольца равна нулю (см. задачу 16.22). Ведь в кольце создается только вихревое электрическое поле, которое и поддерживает индукционный ток, а разность потенциалов может создаваться только кулоновским полем. Итак, разность потенциалов между точками A и B равна нулю: $\varphi_A - \varphi_B = 0$. Однако можно ли утверждать, что вольтметр, подключенный к этим точкам, покажет нуль? Нельзя: ведь по кольцу идет ток. Часть тока, хотя и ничтожная, может ответвиться и идти через вольтметр (см. рис. а), вызывая отклонение стрелки от нулевого деления. Вспомним, что показание вольтметра определяется силой проходящего по нему тока; а ток ведь может возникать как за счет кулоновского поля, так и за счет вихревого электрического поля (при наличии ЭДС ток может идти и в отсутствие разности потенциалов). Из-за большого сопротивления вольтметра его подключение практически не приводит к изменению силы тока в кольце; значит, и возникающим кулоновским полем можно пренебречь (в отличие от ситуации, описанной в задаче 16.31).

ЭДС индукции \mathcal{E} равномерно распределена вдоль кольца. Зна-

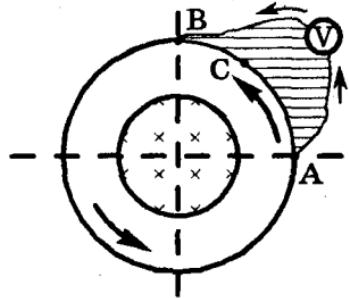


Рис. а

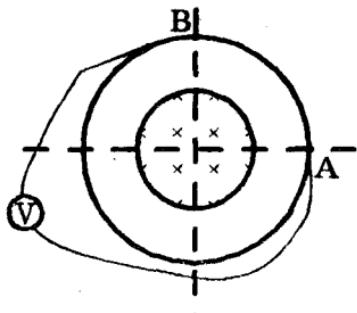


Рис. б

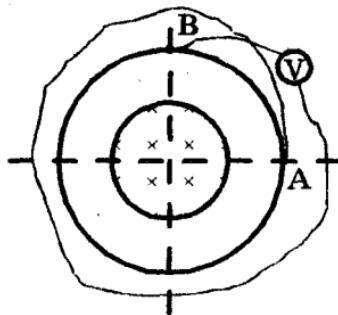


Рис. в

чит, на участке AB , составляющем четверть кольца, $\mathcal{E}_{AB} = \frac{1}{4}\mathcal{E}_i =$

$$= \frac{\pi r^2}{4} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{\pi kr^2}{4}. \text{ Рассмотрим теперь заштрихованный на рис. а}$$

контур. Магнитный поток через него равен нулю¹⁾; следовательно, полная ЭДС в этом контуре также равна нулю. Это означает, что $\mathcal{E}_{AVB} + \mathcal{E}_{VCA} = 0$, т. е. $|\mathcal{E}_{AVB}| = |\mathcal{E}_{VCA}| = |\mathcal{E}_{AB}|$. Значит, сила тока через вольтметр $I_v = \frac{\mathcal{E}_{AB}}{R_v}$,

и вольтметр показывает $U_v = I_v R_v = \mathcal{E}_{AB} = \frac{\pi kr^2}{4}$. Однако полученный ответ нельзя считать исчерпывающим: показание вольтметра зависит не только от того, к каким точкам кольца он подключен, но и от расположения самого прибора и подключенных к нему проводов! Предлагаем читателю убедиться, что в ситуации,

соответствующей рис. б, вольтметр показывает $U_v = \frac{3}{4}\mathcal{E}_i = \frac{3\pi kr^2}{4}$. А

весь возможен еще вариант, когда провод от вольтметра образует виток (или несколько витков) вокруг сердечника (см. рис. в)!

Поэтому окончательный ответ следует записать в виде

$$U_v = \frac{\pi kr^2}{4}(1 + 2N),$$

где N может быть равно 0, 1, 2...

16.31. Ответ: в меди 2,9 В/м, в латуни 12 В/м.

Решение. В кольце действует постоянная ЭДС $\mathcal{E}_i = \pi r^2 \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$. Зна-

чит, в нем протекает постоянный ток. Разумеется, сила тока одинакова во всех сечениях кольца, поэтому одинакова всюду и плотность тока j . Однако поскольку удельные сопротивления меди

¹⁾Имеется в виду внешнее магнитное поле. Магнитное поле индукционного тока в данном случае является постоянным, так что явления самониндукции не наблюдается.

и латуни различны, напряженность электрического поля разная в меди и латуни (E_m и E_n). Для определения E_m и E_n воспользуемся соотношениями $j = \frac{E_m}{\rho_m} = \frac{E_n}{\rho_n}$ (см. задачу 13.2) и $\mathcal{E}_i = \pi r(E_m + E_n)$ (см. задачу 16.29).

Из этих соотношений находим

$$E_m = \frac{\rho_n}{\rho_m + \rho_n} r \frac{\Delta B}{\Delta t} = 2,9 \text{ В/м}, \quad E_n = \frac{\rho_m}{\rho_m + \rho_n} r \frac{\Delta B}{\Delta t} = 12 \text{ В/м}.$$

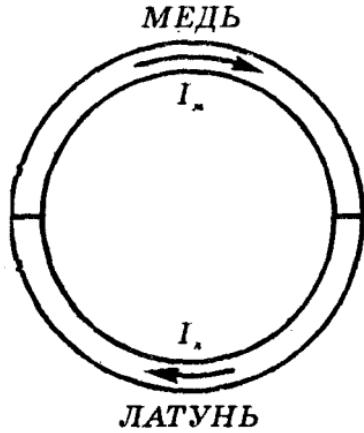


Рис. а

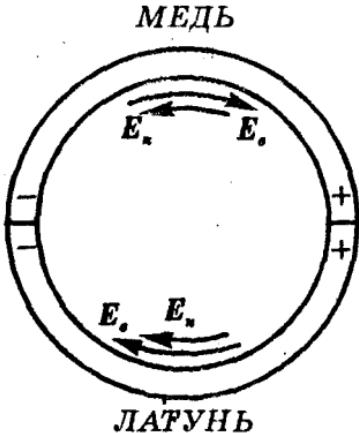


Рис. б

Заметим, что это поле является суперпозицией вихревого и кулоновского полей (ведь вихревое поле одинаково во всех точках кольца). Как же возникает кулоновское поле? Дело в том, что возникшее вихревое поле вызывает разные токи в меди и латуни (см. рис. а): из-за лучшей проводимости меди сила тока в медной части кольца в первые моменты больше. Это сразу же приведет к разделению зарядов и, следовательно, к возникновению кулоновского поля (см. рис. б). Напряженность E_k этого поля одинакова по модулю в меди и в латуни; но в латуни E_k совпадает по направлению с напряженностью E_v вихревого поля, а в меди эти поля направлены противоположно. Процесс разделения зарядов заканчивается, когда силы тока в меди и латуни становятся одинаковыми.

16.32. Решение. Разумеется, ток в проводнике может возникнуть под действием вихревого электрического поля и в отсутствие разности потенциалов (возникает же он в самом кольце!).

Рассмотрим два примера.

1. Проводники между A и B направлены, как показано на рисунке. Поскольку они перпендикулярны линиям вихревого

электрического поля, ток в них не возникает. Ток в кольце от включения таких проводников не изменяется, и по-прежнему $\Phi_A = \Phi_B$.

2. Дополнительный проводник между точками A и B практически совпадает с частью кольца AB и изготовлен из той же проволоки, что и само кольцо. В этом случае через него пойдет половина силы тока I , текущей через кольцо. Пусть сопротивление кольца R , тогда из закона электромагнитной индукции и закона Ома для замкнутой цепи следует

$$\mathcal{E}_i = \pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{3}{4} RI + \frac{R}{4} \cdot \frac{I}{2}.$$

Отсюда $I = \frac{8\mathcal{E}_i}{7R}$. Применим к дополнительному проводнику закон

Ома для участка цепи с ЭДС:

$$\frac{I}{2} \cdot \frac{R}{4} = \mathcal{E}_{AB} + \Phi_B - \Phi_A = \frac{\mathcal{E}_i}{4} + \Phi_B - \Phi_A.$$

Отсюда $\Phi_A - \Phi_B = \frac{\mathcal{E}_i}{4} - \frac{\mathcal{E}_i}{7} = \frac{3\mathcal{E}_i}{28} = \frac{3\pi r^2}{28} \frac{\Delta B}{\Delta t}$. Итак, включение дополнительного проводника может нарушить равенство потенциалов Φ_A и Φ_B . Причиной возникновения кулоновского поля является возникновение зарядов противоположных знаков в точках A и B ветвления цепи (ср. с задачей 16.31).

16.33. Ответ: $U = \frac{\rho_n - \rho_s}{\rho_n + \rho_s} \frac{\pi r^2}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t} = 0,43$ В.

Указание: См. задачи 16.31 и 16.32.

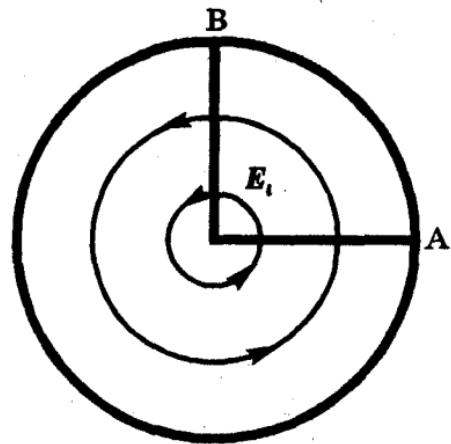
16.34. Ответ: $I_1 = I_3 = \frac{4\pi r^2}{3R} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$, $I_2 = 0$, $U = \frac{\pi r^2}{4} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$.

Решение. ЭДС индукции на участках кольца составляют

$$\mathcal{E}_1 = \frac{3\pi r^2}{4} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\pi r^2}{4} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

(см. задачу 16.30). Поскольку магнитный поток через контур, заштрихованный на рис. а, равен нулю, ЭДС на участках 2 и 3 одинаковы ($\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3$). Эквивалентная схема цепи показана на рис. б.

Здесь $R_1 = \frac{3R}{4}$, $R_2 = \frac{R}{4}$. Из закона сохранения заряда следует соот-



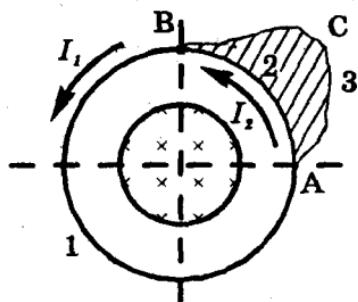


Рис. а

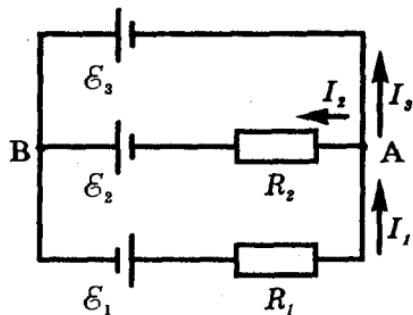


Рис. б

написание $I_1 = I_2 + I_3$. Применяя закон Ома к контуру, образованному ветвями 2 и 3, получаем $I_2 = 0$ (т. е. четверть кольца полностью шунтируется сверхпроводником). Тогда

$$I_1 = I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3}{R_1} = \frac{4\pi r^2 \cdot \Delta B}{3R} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t}.$$

Разность потенциалов между точками А и В совпадает с ЭДС на сверхпроводящем участке цепи: $U = \mathcal{E}_3 = \frac{\pi r^2}{4} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$.

16.35. Решение. Пока поезд продолжает по инерции двигаться, в обмотках электродвигателей индуцируется ток. Другими словами, вращающиеся двигатели превращаются в генераторы. Замкнув их на реостаты, мы осуществляем следующую цепочку превращений энергии: кинетическая энергия поезда превращается в электроэнергию, а затем переходит во внутреннюю энергию нагреваемых индукционным током реостатов. Разумеется, при этих превращениях скорость поезда быстро уменьшается (согласно правилу Ленца при работе генератора возникает врачающий момент, тормозящий его вращение; в данном случае это приводит к торможению поезда). Существует и другой, более экономный режим торможения, при котором вырабатываемая энергия не расходуется в реостатах, а возвращается в сеть (при этом также используется обратимость электрических машин постоянного тока).

16.36. Ответ: $P = 0,16$ Вт.

Решение. При вращении диска в нем происходит разделение зарядов за счет перераспределения свободных электронов. Таким образом, диск можно рассматривать как источник тока. Сопротивление диска пренебрежимо мало. Определим ЭДС такого источника, т. е. напряжение U на нем при разомкнутой цепи (при подключении резистора это напряжение практически не изменится, поскольку сопротивление диска намного меньше R даже

при малой толщине диска). При разомкнутой цепи процесс разделения зарядов заканчивается, когда напряженность электрического поля E в диске достигает такой величины, что действующие на свободный электрон со стороны электрического и магнитного полей силы F_k и F_l сообщают ему центростремительное ускорение a . В любой точке диска должно выполняться соотношение

$$ma = F_l + F_k, \quad (1)$$

где m — масса электрона, a — центростремительное ускорение данной точки диска.

Если обозначить расстояние от данной точки до оси вращения через x , то $a = \omega^2 x$, $F_l = eBv = eB\omega x$, $F_k = eE$. Заметим, что отношение $\frac{ma}{F_l} = \frac{m\omega}{eB} \approx 6 \cdot 10^{-9}$ одинаково для всех точек диска и очень мало. Это означает, что центробежные эффекты в данном случае несущественны. Пренебрегая величиной ma в соотношении (1), получаем $F_l = F_k$, откуда $E = B\omega x$. Поле линейно нарастает от оси диска к его окружности, значит, $U = E_{\text{ср}} \cdot r = \frac{B\omega r^2}{2}$. Выделяемая на резисторе мощность $P = \frac{U^2}{R} = \frac{B^2 \omega^2 r^4}{4R} = 0,16$ Вт.

16.37. Ответ: $U = \frac{B\omega l^2}{2} + \frac{mgR}{Bl} \sin \omega t$.

Решение. Будем отсчитывать время t от момента прохождения стержнем нижнего положения. Тогда угол α отклонения стержня от вертикали удовлетворяет уравнению $\alpha = \omega t$. Угловая скорость вращения будет сохраняться, если моменты приложенных к стержню сил (силы тяжести mg и силы Ампера $F_A = BlI$) уравновешиваются друг друга, т. е. $mg \frac{l \sin \alpha}{2} = BlI \cdot \frac{l}{2}$. Сила Ампера и сила тяжести равномерно распределены по длине стержня, поэтому точкой их приложения можно считать середину стержня. Итак, индукционный ток I должен изменяться по закону $I = \frac{mgsin\omega t}{Bl}$. Согласно закону Ома для замкнутой цепи $IR = U - \mathcal{E}_i$, где $\mathcal{E}_i = \frac{B\omega l^2}{2}$ (ср. с задачей 16.19) — ЭДС индукции, которая согласно правилу Ленца стремится затормозить вращение. Отсюда

$$U = \frac{B\omega l^2}{2} + \frac{mgR}{Bl} \sin \omega t,$$

т. е. приложенное напряжение должно иметь постоянную и переменную составляющие.

16.38. Ответ: мощность двигателя должна уменьшиться.

Решение. Частота вырабатываемого переменного напряжения зависит от частоты вращения ротора генератора. Значит, частота вращения должна оставаться неизменной. Не изменится поэтому и ЭДС генератора. Однако сила тока в цепи нагрузки при увеличении сопротивления этой цепи уменьшится в соответствии с законом Ома. Значит, уменьшится и вращающий момент, который возникает в генераторе за счет взаимодействия магнитного поля и индукционного тока и который стремится затормозить вращение ротора. Следовательно, мощность двигателя должна быть уменьшена. Конечно, этот же вывод следует непосредственно из закона сохранения энергии: ведь при увеличении сопротивления нагрузки потребляемая ею мощность уменьшается.

16.39. Ответ: когда совершает работу.

Решение. Нагревание обмотки двигателя зависит только от силы протекающего по нему тока. При вращении двигателя в его обмотке наводится ЭДС индукции, вызывающая согласно правилу Ленца уменьшение силы тока. Поскольку двигатель под нагрузкой вращается медленнее, ЭДС индукции в нем меньше, и поэтому сила тока больше. Значит, в этом случае двигатель нагревается сильнее. Обмотка двигателя может даже перегореть, если ротору включенного двигателя не давать вращаться.

16.40. Ответ: $N_{\max} = 300 \text{ Вт}$, $I_0 = 5 \text{ А}$.

Решение. Потребляемая от сети постоянного тока мощность всегда равна UI , а выделяющаяся в обмотке тепловая мощность всегда равна I^2R . Для резистора эти величины равны, поскольку $U = IR$. Однако в данном случае $U \neq IR$: при работе электродвигателя в его обмотке возбуждается ЭДС индукции δ , так что $IR = U - \delta < U$. Из закона сохранения энергии следует, что развиваемая двигателем механическая мощность $N = UI - I^2R$. Эта величина зависит не только от напряжения в сети и сопротивления обмотки, но и от скорости вращения двигателя: при увеличении нагрузки вращение двигателя замедляется, ЭДС индукции уменьшается, и поэтому сила тока растет. Она монотонно возрастает до величины

$I_{\max} = \frac{U}{R}$, которая достигается при неподвижном роторе двигателя (т.е. при заклинивании). Как следует из формулы $N = UI - I^2R$, максимальную мощность $N_{\max} = \frac{U^2}{4R} = 300 \text{ Вт}$ двигатель развивает

при $I_0 = \frac{U}{2R} = 5 \text{ А}$ (см. математическое приложение).

16.41. Ответ: $v = \left(\frac{4h_0}{\pi d^2 B_0}\right)^2 \cdot mgR$.

Решение. Скорость кольца перестает увеличиваться, когда сила Ампера, действующая на индукционный ток в кольце, уравновешивает силу тяжести:

$$I \cdot \pi d \cdot B_{\text{роп}} = mg.$$

Здесь $B_{\text{роп}}$ — проекция вектора \mathbf{B} на горизонтальную плоскость. Величина этой проекции:

$$B_{\text{роп}} = \frac{d}{4} \cdot \frac{\Delta B_z}{\Delta z} = \frac{d}{4h_0} B_0$$

(см. задачу 15.24). Отсюда находим $I = \frac{4h_0 mg}{\pi d^2 B_0}$; ЭДС индукции в кольце равна $\mathcal{E}_i = IR$. Согласно закону электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i = \left|\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}\right| = \frac{\pi d^2}{4} \left|\frac{\Delta B_z}{\Delta t}\right| = \frac{\pi d^2}{4} \frac{|\Delta B_z|}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\pi d^2 B_0 v}{4h_0}$. Следовательно,

$v = \frac{4h_0 \mathcal{E}_i}{\pi d^2 B_0} = \left(\frac{4h_0}{\pi d^2 B_0}\right)^2 \cdot mgR$. Заметим, что при установившейся скорости падения $I = \text{const}$, поэтому ЭДС самоиндукции равна нулю.

17.1. Ответ: а) $T = 1,26$ мкс, $v = 800$ кГц;

б) $T = 2,5$ мкс, $v = 400$ кГц.

Указание. Согласно формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC_0}$, где C_0 — емкость батареи конденсаторов, равная $\frac{C}{2}$ в случае а и $2C$ — в случае б.

17.2. Ответ: а) 5,0 А; б) 10 А.

Решение. Максимальная сила тока I_M достигается в тот момент, когда конденсатор полностью разряжен. Если пренебречь потерями энергии на нагревание контура и излучение электромагнитных волн, то энергия заряженной батареи конденсаторов $W_0 = \frac{C_0 U_M^2}{2}$ полностью переходит к этому моменту в энергию $W_M = \frac{LI_M^2}{2}$ магнитного поля в катушке: $W_0 = W_M$. Отсюда $I_M = U_M \sqrt{\frac{C_0}{L}}$.

В случае а получаем $I_M = U_M \sqrt{\frac{C}{2L}} = 5,0$ А; в случае б находим

$$I_M = U_M \sqrt{\frac{2C}{L}} = 10$$
 А.

17.3. Ответ: а) 7,0 А; б) 8,7 А.

Решение. В начальный момент напряжение на конденсаторе максимально, а сила тока i равна нулю. Следовательно, эти величины

изменяются согласно формулам

$$u = U_m \cos \omega t = U_m \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad (1)$$

$$i = I_m \sin \omega t = I_m \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (2)$$

($\omega = \frac{2\pi}{T}$ — циклическая частота колебаний). Величины I_m , T определены при решении задач 17.1 и 17.2.

a) $i_1 = I_m \sin \frac{2\pi t_1}{T} = 7,0 \text{ A.}$

б) Чтобы выразить силу тока i через напряжение u , следует исключить время t из соотношений (1) и (2). Из тождества $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ следует:

$$\left(\frac{i}{I_m}\right)^2 + \left(\frac{u}{U_m}\right)^2 = 1,$$

т. е. $i = I_m \sqrt{1 - \frac{u^2}{U_m^2}} = \sqrt{\frac{C_0}{L}(U_m^2 - u^2)} = 8,7 \text{ A.}$

Последний результат можно получить и непосредственно из закона сохранения энергии: $\frac{C_0 U_m^2}{2} = \frac{C_0 u^2}{2} + \frac{L i^2}{2}$.

17.4. Ответ: раздвигать пластины, уменьшать площадь перекрытия пластин.

Решение. Из формулы Томсона и соотношения $\lambda = cT$ (λ — длина электромагнитной волны, c — ее скорость) следует, что $\lambda = 2\pi c \sqrt{LC}$. Следовательно, емкость C конденсатора нужно уменьшать. Согласно формуле $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$ для уменьшения емкости плоского конденсатора следует либо увеличить расстояние d между пластинами, либо уменьшить площадь S их перекрытия.

17.5. Ответ: $L_k = \frac{1}{C_1} \left(\frac{\lambda_{\min}}{2\pi c} \right)^2 \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^{k-1}$, где $k = 1, 2, \dots, N$. $\lambda_{\max} = \lambda_{\min} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^N$.

Решение. Определим сначала, при какой индуктивности L_1 катушки нижняя граница диапазона длин волн радиоприемника совпадает с λ_{\min} . Поскольку $\lambda_{\min} = 2\pi c \sqrt{L_1 C_1}$, находим $L_1 = \frac{\lambda_{\min}^2}{4\pi^2 c^2 C_1}$.

Индуктивности катушек L_k ($k = 1, 2, \dots, N$) обеспечивают максимальную ширину диапазона и полное перекрытие его частей при условии $2\pi c \sqrt{L_k C_2} = 2\pi c \sqrt{L_{k+1} C_1}$. Следовательно, $L_{k+1} = L_k \frac{C_2}{C_1}$ (т. е. по-

следовательность L_k составляет геометрическую прогрессию: $L_k = L_1 \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^{k-1}$.

Наибольшая индуктивность $L_N = L_1 \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^{N-1}$, так что

$$\lambda_{\max} = 2\pi c \sqrt{L_N C_2} = 2\pi c \sqrt{L_1 C_1 \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^N} = \lambda_{\min} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^{\frac{N}{2}}.$$

17.6. Ответ: 4 катушки.

Указание. См. задачу 17.5. Поскольку $\lambda_2 < \lambda_1 \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2$, можно подобрать катушки так, чтобы соответствующие им участки диапазона перекрывались.

17.7. Ответ: 2000 колебаний.

Решение. За один период $T_{\text{зв}} = \frac{1}{v}$ звуковых колебаний произойдет

$N = \frac{T_{\text{зв}}}{T_{\text{м}}}$ электромагнитных колебаний с периодом $T_{\text{м}} = \frac{\lambda}{c}$. Таким

образом, $N = \frac{c}{v\lambda} = 2 \cdot 10^3$.

17.8. Ответ: увеличить в 9 раз..

17.9. Ответ: частота уменьшится; увеличится.

Решение. Изменение собственной частоты обусловлено изменением индуктивности катушки. Ферритовый сердечник, намного усиливая магнитное поле, увеличивает индуктивность катушки. Согласно формуле Томсона период свободных колебаний при этом растет; следовательно, частота уменьшается. Если внести в катушку медный сердечник, то в нем при периодических изменениях магнитного поля катушки возникнут вихревые индукционные токи (токи Фуко). Согласно правилу Ленца магнитное поле этих токов уменьшает магнитное поле катушки, а значит, и ее индуктивность. Частота свободных колебаний возрастет. Правда, возрастет и затухание колебаний за счет нагревания сердечника индукционными токами.

Заметим, что на величину *постоянного* магнитного поля медный сердечник практически не повлиял бы (магнитная проницаемость μ меди очень близка к единице). А вот у железа $\mu \gg 1$. Поэтому при введении железного сердечника возникли бы конкурирующие факторы: усиление магнитного поля за счет ферромагнетизма и его ослабление за счет индукционных токов. Однозначно ответить на поставленный в задаче вопрос в этом случае нельзя.

17.10. Ответ: $\Delta\Phi = \frac{\pi}{5}$ рад.

Решение. Прохождение переменного тока по линии электропередачи

дачей представляет собой волновой процесс. Волна проходит линию за время $t = \frac{l}{c}$; за это время фаза колебаний напряжения в начале

линии изменяется на $\Delta\phi = \omega t = \frac{2\pi v l}{c} = \frac{\pi}{5}$ рад.

17.11. Ответ: $s_{\max} = 18$ км, $n < 8,3 \cdot 10^3$ с⁻¹.

Решение. Радиолокаторы работают в УКВ-диапазоне, поэтому их излучение распространяется практически прямолинейно. Радиолокатор действует в пределах прямой видимости. На рисунке A — радиолокатор, $AB = s_{\max}$ — максимально возможная дальность обнаружения плата, $OB = R$ — радиус Земли. Учитывая, что $OA = R + h$, запишем теорему Пифагора для прямоугольного треугольника OAB : $(R + h)^2 = R^2 + s_{\max}^2$.

Отсюда $s_{\max} = \sqrt{h(2R + h)} \approx \sqrt{2Rh} = 18$ км ($2R + h \approx 2R$, поскольку $h \ll R$). Отраженный радиоимпульс должен вернуться до того, как начнется излучение следующего импульса, т. е. $\frac{2s_{\max}}{c} < \frac{1}{n}$.

Отсюда $n < \frac{c}{2s_{\max}} = 8,3 \cdot 10^3$ с⁻¹.

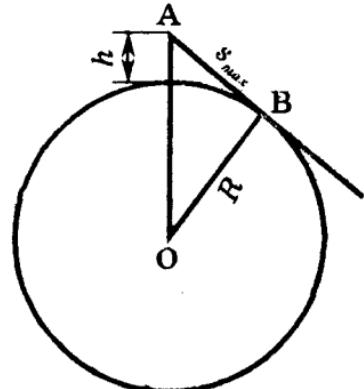
17.12. Ответ: 9000; $s_{\min} = \frac{ct}{2} = 225$ м.

Указание. Радиолокатор способен принимать отраженные сигналы лишь после окончания излучения очередного импульса.

17.13. Решение. Радиосвязь и радиолокация возможны только в том случае, когда плотность потока I энергии, поступающей к приемному устройству, превышает некоторую величину I_0 , характеризующую чувствительность приемника. Поскольку I обратно пропорциональна квадрату расстояния R от передатчика, выполняется соотношение $I_0 = k \frac{P}{R^2}$ (здесь P — излучаемая мощность, k — безразмерный коэффициент; для передатчика, равномерно излучающего по всем направлениям, $k = \frac{1}{4\pi}$). Отсюда $P = \frac{I_0 R^2}{k}$, т.

е. $P \sim R^2$.

При радиолокации цель отражает пришедший к ней радиосигнал, т. е. сама становится вторичным источником радиоволн,



мощность которого P' пропорциональна $\frac{P}{R^2}$. Интенсивность вернувшегося к радиолокатору отраженного сигнала пропорциональна $\frac{P'}{R^2}$, т. е. $\frac{P}{R^4}$. Отсюда $P \sim R^4$. Таким образом, для увеличения дальности радиолокации в три раза потребуется увеличить мощность передатчика в $3^4 = 81$ раз.

17.14. Ответ: на 7,8 см.

Решение. Сигнал, отразившийся от крыши, проходит на пути к приемной антенне «лишних» 3 км; поэтому он запаздывает по сравнению с сигналом, распространявшимся прямолинейно, на $\Delta t = 10^{-5}$ с. В результате второй контур изображения смещен относительно первого на $\Delta l = v\Delta t$, где v — скорость перемещения электронного «луча» по строке. Эту скорость можно найти из условия, что за одну n -ую долю секунды луч пробегает N строк длины l , откуда $v = nNl$. Таким образом, $\Delta l = nNl\Delta t = 7,8$ см.

17.15. Ответ: $I_m = U_1 \sqrt{\frac{C_1 C_2}{L(C_1 + C_2)}}$.

Решение. После замыкания ключа в цепи возникают свободные электромагнитные колебания. При этих колебаниях изменяются заряды q_1 и q_2 на конденсаторах и сила тока i через катушку. Воспользуемся законом сохранения электрического заряда и законом сохранения энергии (ведь потери энергии отсутствуют, колебания незатухающие):

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = C_1 U_1, \\ \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{Li^2}{2} = \frac{C_1 U_1^2}{2}. \end{cases}$$

Отсюда $Li^2 = C_1 U_1^2 - \frac{q_1^2}{C_1} - \frac{(C_1 U_1 - q_1)^2}{C_2}$. Это выражение максимально, когда производная от правой части по q_1 равна нулю:

$$-\frac{2q_{1m}}{C_1} + \frac{2(C_1 U_1 - q_{1m})}{C_2} = 0, \text{ т. е. при } q_{1m} = \frac{C_1^2 U_1}{C_1 + C_2}.$$

Величину q_{1m} можно найти и без дифференцирования. Достаточно заметить, что $i = I_m$ при прохождении системой «положения равновесия» (при механических колебаниях скорость также максимальна при прохождении положения равновесия), т. е. q_{1m} — «равновесный» заряд первого конденсатора при замкнутом ключе. Он определяется из условия равенства напряжений на обоих конденсаторах и закона сохранения заряда:

$$\begin{cases} \frac{q_{1M}}{C_1} = \frac{q_{2M}}{C_2}, \\ q_{1M} + q_{2M} = C_1 U_1. \end{cases}$$

Подставляя полученное значение q_{1M} в формулу для i , находим

$$I_M = U_1 \sqrt{\frac{C_1 C_2}{L(C_1 + C_2)}}.$$

Заметим, что при $C_2 \rightarrow \infty$ получается $I_M = U_1 \sqrt{\frac{C_1}{L}}$. Это соответствует результату для обычного колебательного контура (см. задачу 17.2), как и следовало ожидать.

17.16. Решение. Величину U нетрудно найти из закона сохранения электрического заряда: $CU_0 = 2CU$, откуда $U = \frac{U_0}{2}$. Следовательно, энергия электрического поля в конденсаторах после замыкания

ключа уменьшается на величину $|\Delta W| = \frac{CU_0^2}{2} - 2 \frac{C\left(\frac{U_0}{2}\right)^2}{2} = \frac{CU_0^2}{4}$. Таким образом, ровно половина начальной энергии «теряется». Может ли «потерянная» энергия перейти во внутреннюю энергию проводов? Проверим это. Увеличение внутренней энергии проводов $Q \sim I_0^2 R \tau$, где $I_0 = \frac{U_0}{R}$ — начальная сила тока в цепи, R —

сопротивление проводов, $\tau \sim RC$ — время перераспределения зарядов между обкладками конденсатора (см. задачу 13.83). Подставляя значения I_0 и τ , получаем¹⁾ $Q \sim CU_0^2$, т. е. $Q \sim |\Delta W|$. Обратим внимание на то, что полученный результат не зависит от R , т. е. формально он применим и при сколь угодно малом сопротивлении R . Но ведь сверхпроводящие провода вообще не нагреваются при протекании тока! В этом случае на первый план выступает другой фактор. Всякая замкнутая цепь обладает индуктивностью, поэтому рассматриваемая цепь представляет собой колебательный контур. После замыкания ключа в цепи возникнут электромагнитные колебания, затухающие вследствие излучения электромагнитных волн. Эти-то волны и унесут «потерянную» энергию.

¹⁾ Более точный подсчет выглядит так: $Q = \int_0^\infty i^2 R dt$, где $i = I_0 e^{-\frac{2}{RC}t}$ (формула для силы тока i выводится аналогично задаче 13.81). Подставляя i в выражение для Q , находим $Q = \frac{CU_0^2}{4} = |\Delta W|$.

17.17. Ответ: $I_m = U_1 \sqrt{\frac{C}{2L}}$.

Решение. Сразу после замыкания ключа, до начала электромагнитных колебаний, происходит очень быстрое перераспределение заряда между конденсаторами (ведь замкнутая цепь из конденсаторов практически не обладает индуктивностью). В результате перераспределения заряда получается батарея конденсаторов общей емкостью $2C$, заряженная до напряжения $\frac{U_1}{2}$. В этом процессе «теряется» половина начальной энергии первого конденсатора (см. задачу 17.16). Именно учет этой «потери» энергии и представляет основную трудность в задаче. В дальнейшем энергия из цепи не уходит, так что

$$\frac{LI_m^2}{2} = \frac{2C \cdot \left(\frac{U_1}{2}\right)^2}{2}.$$

Отсюда $I_m = U_1 \sqrt{\frac{C}{2L}}$.

17.18. Ответ: $n = 8,0 \text{ с}^{-1}$.

Решение. Будем отсчитывать время t от момента, когда нормаль к плоскости рамки совпадает по направлению с вектором B . Тогда в произвольный момент времени угол между нормалью и B составляет $\alpha = \omega t = 2\pi n t$, где ω — угловая скорость вращения. Магнитный поток через рамку $\Phi = BSN \cos 2\pi n t$. Согласно закону электромагнитной индукции ЭДС в рамке

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi' = 2\pi BSN n \sin 2\pi n t = \mathcal{E}_m \sin 2\pi n t.$$

Следовательно, $\mathcal{E}_m = 2\pi BSN n$ и $n = \frac{\mathcal{E}_m}{2\pi BSN} = 8,0 \text{ с}^{-1} = 480 \text{ об/мин.}$

17.19. Ответ: $U_{MR} = I_m R$, $U_{MC} = \frac{I_m}{\omega C}$, $U_{ML} = I_m \omega L$;

$$U_m = I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, u = U_m \cos(\omega t + \varphi), \text{ где } \varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Решение. Амплитуда напряжения на резисторе $U_R = I_m R$; амплитуда напряжения на конденсаторе $U_{MC} = I_m X_C = \frac{I_m}{\omega C}$; амплитуда напряжения на катушке $U_{ML} = I_m X_L = I_m \omega L$. Здесь $X_C = \frac{1}{\omega C}$ — емкостное сопротивление, $X_L = \omega L$ — индуктивное сопротивление.

Казалось бы, при последовательном соединении $U_m = U_{MR} + U_{MC} + U_{ML}$. Но это не так, потому что в цепи переменного тока мгновенные значения напряжения на отдельных элементах — это функции времени, а не постоянные величины! По существу речь идет о сложении гармонических колебаний. При этом очень важно, что фазы трех складываемых гармонических колебаний различны: $u_R(t)$ совпадает по фазе с силой тока, $u_C(t)$ отстает от тока на $\frac{\pi}{2}$, $u_L(t)$ опережает ток на $\frac{\pi}{2}$. Запишем закон изменения каждого из напряжений:

$$u_R = I_m R \cos \omega t, u_C = I_m X_C \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), u_L = I_m X_L \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Мгновенное значение приложенного к цепи напряжения

$$\begin{aligned} u &= u_R + u_C + u_L = U_{MR} \cos \omega t + (U_{MC} - U_{ML}) \sin \omega t = \\ &= \sqrt{U_{MR}^2 + (U_{ML} - U_{MC})^2} \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varphi = \arctg \frac{U_{ML} - U_{MC}}{U_{MR}}$ (см. математическое приложение).

Итак, при сложении мгновенных значений периодически изменяющихся величин (в данном случае — напряжений) их амплитуды не всегда складываются. Выражение (1) можно записать в виде $U = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, где амплитуда напряжения во всей цепи $U_m = I_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I_m Z$. Выведенное здесь соотношение обычно записывают в виде $I_m = U_m / Z$ и называют законом Ома для цепи переменного тока, а величину Z — полным сопротивлением цепи переменного тока. Величина φ характеризует сдвиг фаз между колебаниями силы тока и напряжения в цепи. Ее можно записать в виде $\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$. Полезно также иметь в виду, что $\cos \varphi = R/Z$.

17.20. Ответ: см. рисунок.

Решение. Как показано в задаче 17.19, $I_m = \frac{U_m}{Z}$, где

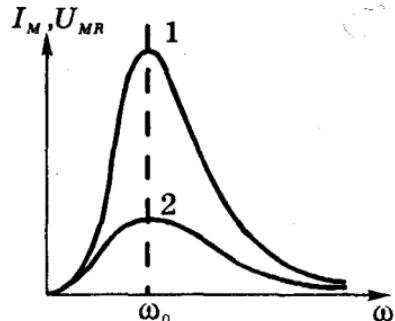
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

Поскольку второе слагаемое под корнем в выражении для Z неотрицательно, $Z \geq R$ (т. е. $I_m \leq U_m/R$). Величина Z принимает минимальное значение $Z_{min} = R$ при $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, что соответствует

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ (здесь ω_0 — циклическая частота свободных колебаний).

баний в рассматриваемом контуре). При $0 < \omega < \omega_0$ функция $Z(\omega)$ монотонно убывает (I_m возрастает), а при $\omega > \omega_0$ функция $Z(\omega)$ возрастает (I_m убывает). График зависимости $I_m(\omega)$ для двух различных значений R ($R_1 < R_2$) приведен на рисунке (поскольку $U_{mR} = I_m R$, зависимость $U_{mR}(\omega)$ имеет такой же вид). Высота максимума при $\omega = \omega_0$ и фиксированном U_m зависит от величины R . Резкое увеличение I_m при $\omega = \omega_0$ называют резонансом в цепи переменного тока. Очевидно, при резонансе $X_L = X_C = -\sqrt{\frac{L}{C}}$, $\varphi = 0$ (отсутствует сдвиг фаз между током и напряжением), $U_{mR} = U_m$ (напряжение на резисторе совпадает с приложенным ко всей цепи напряжением). Однако это не значит, что отсутствуют напряжения на конденсаторе и катушке:

$$U_{mC} = U_{mL} = I_m \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} U_m.$$



При больших значениях величины $\frac{\sqrt{L/C}}{R}$, называемой добротностью контура, напряжения на конденсаторе и катушке при резонансе многократно превосходят U_m (что может привести, например, к пробою конденсатора). Но поскольку напряжения U_C и U_L изменяются в противофазе, в любой момент $U_C + U_L = 0$. Таким образом, напряжение на участке цепи переменного тока может во много раз превосходить напряжение на всей цепи!

17.21. Ответ: $X_{C1} = 3,2 \text{ кОм}$, $X_{L1} = 157 \text{ Ом}$, $Z_1 = 3,2 \text{ кОм}$.

$X_{C2} = 16 \text{ Ом}$, $X_{L2} = 31,4 \text{ кОм}$, $Z_2 = 31,4 \text{ кОм}$. $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 225 \text{ Гц}$.

Указание. См. задачи 17.19 и 17.20.

17.22. Ответ: $P_R = \frac{I_m^2}{2} R = I^2 R$, где $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$; $P_C = P_L = 0$.

Решение. Мгновенная (т. е. средняя за очень малый промежуток времени) мощность на любом участке цепи $p = ui$, где u , i — мгновенные значения напряжения и силы тока. Если $i = I_m \cos \omega t$, то напряжение на резисторе изменяется по закону $u_R = I_m R \cos \omega t$, на конденсаторе $u_C = I_m X_C \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_m X_C \sin \omega t$, а на катушке $u_L = I_m X_L \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -I_m X_L \sin \omega t$. При нахождении средних зна-

чений произведений и воспользуемся тем, что

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1 + \overline{\cos 2\omega t}}{2} = \frac{1}{2}, \quad \overline{\cos \omega t \sin \omega t} = \frac{1}{2} \overline{\sin 2\omega t} = 0$$

(черта сверху означает здесь усреднение за время, равное периоду колебаний). Тогда $P_R = \overline{P_R} = \frac{I_m^2}{2} R = I^2 R$, где $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ — действующее

значение силы тока; $P_C = \overline{P_C} = 0$ и $P_L = \overline{P_L} = 0$. Таким образом, конденсатор и катушка в *среднем* не потребляют энергии (напомним, что речь идет об идеализированных элементах цепи, не обладающих активным сопротивлением). Конденсатор четверть периода заряжается, запасая энергию электрического поля $W_p = \frac{C U_c^2}{2}$, но следующую четверть периода он разряжается, полностью возвращая энергию в цепь. При возрастании силы тока в катушке, т. е. также в течение четверти периода, она запасает

энергию магнитного поля $W_m = \frac{L i^2}{2}$, однако за следующую четверть периода эта энергия также полностью возвращается в цепь. Только в резисторе (элементе цепи, обладающем активным сопротивлением) происходит необратимое превращение электрической энергии во внутреннюю.

17.23. Ответ: $P = UI \cos \phi$.

Решение. Величина P совпадает со средней мощностью, потребляемой резистором: $P = P_R = I^2 R$ (конденсатор и катушка, как показано в задаче 17.22, вообще не потребляют энергии). Воспользовавшись соотношениями $I = \frac{U}{Z}$ и $\cos \phi = \frac{R}{Z}$ (Z — полное электрическое сопротивление цепи), получаем $P = I \frac{U}{Z} R = UI \frac{R}{Z} = UI \cos \phi$. Величину $\cos \phi$ называют коэффициентом мощности.

17.24. Ответ: $U_3 = 15$ В.

Решение. Разумеется, из-за сдвига фаз между напряжениями на различных участках цепи $U_3 \neq U_1 + U_2$. Вольтметры переменного тока показывают действующие значения соответствующих напряжений. Значит, амплитуда напряжения на конденсаторе $U_{mc} = \sqrt{2} U_1$, а амплитуда напряжения на резисторе $U_{mr} = \sqrt{2} U_2$. Если сила тока в цепи изменяется по закону $i = I_m \cos \omega t$, то

$$U_C = \sqrt{2} U_1 \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad U_R = \sqrt{2} U_2 \cos \omega t.$$

Следовательно, полное напряжение в цепи равно (см. матема-

тическое приложение)

$$u = u_R + u_C = \sqrt{2} U_2 \cos \omega t + \sqrt{2} U_1 \sin \omega t = \sqrt{2(U_1^2 + U_2^2)} \cos(\omega t + \phi).$$

Итак, $U_m = \sqrt{2(U_1^2 + U_2^2)}$. Третий вольтметр показывает действующее значение полного напряжения $U_3 = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = 15$ В.

17.25. Ответ: $Z_1 = 50$ Ом, $Z_2 = 321$ Ом, $\phi_1 = 53^\circ = 0,92$ рад, $\phi_2 = 85^\circ = 1,5$ рад.

Указание. См. задачу 17.19.

17.26. Ответ: $L = 0,13$ Гн, $P_1 = 30$ Вт, $P_2 = 11$ Вт.

17.27. Ответ: сначала возрастает, затем убывает.

Указание. Максимально возможная сила тока будет при резонансе, когда $\omega = 2\pi\nu = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, т. е. $L = \frac{1}{4\pi^2\nu^2C} = 0,51$ Гн. Накал лампы

возрастает при приближении к резонансу и убывает при удалении от него.

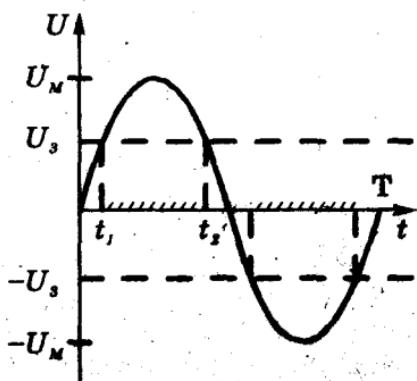
17.28. Ответ: после подключения второго конденсатора накал лампы возрастет; после подключения третьего — уменьшится, но останется больше первоначального.

Указание. См. задачу 17.27. При неизменной индуктивности резонанс в цепи наблюдается при емкости $C_0 = \frac{1}{4\pi^2\nu^2L} = 20$ мкФ = $2C$.

После подключения третьего конденсатора общее реактивное сопротивление цепи (т. е. сопротивление катушки и конденсатора) равно $2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu \cdot 3C} = 51$ Ом, что примерно втрое меньше первоначального реактивного сопротивления цепи $|2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}| = 160$ Ом.

17.29. Ответ: $n = 100$ с⁻¹; лампа горит $\frac{2}{3}$ периода.

Решение. Пусть напряжение в сети изменяется по закону $u = U_m \sin \omega t$ (амплитуда напряжения $U_m = \sqrt{2} \cdot 220$ В = 311 В). Неоновая лампа горит, когда выполняется условие $|u| > U_s$. На рисунке штриховкой отмечены промежутки времени, в течение которых делятся вспышки лампы. За период происходят две вспышки, поэтому $n = 100$ с⁻¹. Моменты



менты времени t_1 и t_2 определяются из условия $U_0 = U_m \sin \omega t$:

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{U_0}{U_m} = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{U_0}{U_m}, \quad t_2 = \frac{T}{2} - t_1.$$

Продолжительность каждой вспышки .

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{2} - \frac{T}{\pi} \arcsin \frac{U_0}{U_m};$$

значит, лампа горит в течение доли периода

$$\frac{2\Delta t}{T} = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{U_0}{U_m} = 0,67.$$

17.30. Ответ: а) $I = I_0$, б) $I = \frac{I_0}{2}$; в) $I = I_0 \sqrt{\frac{\tau}{T}}$.

Решение. «Ступенчатые» сигналы такого типа широко применяются в современной электронике. Для них, разумеется, в общем случае $I \neq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$. Величина I представляет собой значение силы постоянного тока, при прохождении которого в проводнике выделяется такое же количество теплоты, как и при прохождении переменного тока за это же время. Это означает, что $I^2 = \bar{i}^2$ (усреднение производится за период).

а) Квадрат силы тока в любой момент равен I_0^2 . Поэтому $I = I_0$.

б) $I^2 T = I_0^2 \frac{T}{8} + (-I_0)^2 \frac{T}{8}$, откуда $I = \frac{I_0}{2}$.

в) $I^2 T = I_0^2 \tau$, т. е. $I = I_0 \sqrt{\frac{\tau}{T}}$.

17.31. Ответ: $U_{\text{вых}} = 51$ В; не менее 102 В.

Решение. Рассмотрим сначала работу выпрямителя без нагрузки. Если пренебречь обратным током полупроводникового диода (а этот ток обычно ничтожно мал), то положительные заряды могут поступать на верхнюю обкладку конденсатора (при условии $\phi_A > \phi_D$), но не могут с нее стекать. Значит, после включения выпрямителя в сеть конденсатор быстро зарядится до напряжения $U_m = \sqrt{2} \cdot 36$ В = 51 В, равного амплитуде напряжения в цепи. Что изменится после подключения к выпрямителю нагрузки? Практически ничего: постоянная времени $\tau = RC = 0,5$ с (см. задачу 13.83) цепи разряда конденсатора намного превышает период $T = 0,02$ с переменного напряжения в сети. Значит, за время между двумя «всплесками» тока, идущего через диод и подзаряжающего конденсатор, напряжение на конденсаторе снижается очень незначительно. Таким образом, RC -цепочка хорошо сглаживает напряжение на выходе. Резистор выполняет и другую

функцию — защиты от перегрузки при возможном коротком замыкании выхода выпрямителя. Максимально возможное напряжение на выходе (при разомкнутой цепи нагрузки) совпадает с напряжением на конденсаторе, т. е. равно 51 В.

Чтобы определить, в каких пределах изменяется за период напряжение на диоде, запишем его в виде $\phi_D - \phi_A = (\phi_D - \phi_B) + + (\phi_B - \phi_A)$. Остается заметить, что $\phi_D - \phi_B$ (напряжение на конденсаторе) постоянно и равно U_m , а разность $\phi_B - \phi_A$ (мгновенное напряжение в сети) удовлетворяет неравенству $-U_m < \phi_B - \phi_A < U_m$. Значит, $\phi_D - \phi_A < 2U_m$ (равенство достигается в моменты, когда потенциал точки А становится минимальным). Следовательно, диод должен быть рассчитан на обратное напряжение, не меньшее, чем $2U_m = 102$ В.

17.32. Ответ: в первичной обмотке сила тока увеличивается, во вторичной — уменьшится.

Решение. При удалении части сердечника магнитное поле, пронизывающее обе катушки, уменьшится. По этой причине уменьшится и ЭДС индукции во вторичной обмотке, а следовательно, и сила тока в этой обмотке. В первичной же обмотке из-за ослабления магнитного поля уменьшатся ЭДС самоиндукции и индукции, приводящие к уменьшению тока. В результате сила тока в первичной обмотке увеличится.

17.33. Решение. При замыкании витка обмотки реостата ток просто не пойдет по нему. В результате сопротивление реостата чуть уменьшится (число витков обычно достаточно велико) и сила тока немного увеличится, что не опасно. У трансформатора же в каждом (в том числе и в замкнутом) витке создается одна и та же ЭДС индукции. Поскольку сопротивление одного витка ничтожно мало, в нем индуцируется очень большой ток. Чрезмерный нагрев может расплавить провода или разрушить изоляцию и вызвать замыкание соседних витков.

17.34. Ответ: первичная обмотка имеет $N_1 = U_1/U = 440$ витков; вторичная — $N_2 = U_2/U = 84$ витка.

Указание. Провод с вольтметром можно рассматривать как дополнительную обмотку трансформатора из одного витка (этот контур пронизывается таким же магнитным потоком, как и любой из витков).

17.35. Ответ: а) во вторичной обмотке; б, в) нельзя.

Решение. а) Напряжения и токи в первичной и вторичной обмотках связаны соотношением $\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{U_2}{U_1}$. Поэтому трансформатор, по-

нижающий напряжение, во столько же раз повышает силу тока. Необходимая толщина провода определяется именно силой тока, поэтому во вторичной обмотке провод должен быть толще.

б) При подключении к источнику постоянного напряжения в первичной катушке идет ток силой $I = \frac{U}{R}$. При переменном токе полное сопротивление катушки $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$, причем индуктивное сопротивление X_L намного превышает активное сопротивление R . Значит, при подключении к источнику постоянного напряжения сила тока резко возрастет. Катушка может выйти из строя.

в) В отсутствие сердечника резко уменьшается индуктивность катушки, а, значит, и ее индуктивное сопротивление. Сила тока опасно возрастает. Поэтому включать в сеть снятую с сердечника катушку нельзя.

17.36. Ответ: $U_{AC} = 120$ В.

Решение. Напряжение U_{AC} равно сумме напряжений на выходе каждого из трансформаторов: $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$ (поскольку U_{AB} и U_{BC} совпадают по фазе). Эти напряжения можно выразить через напряжения U_1 и U_2 на входе трансформаторов:

$$U_{AB} = U_1 \frac{N_1}{N_2}, \quad U_{BC} = U_2 \frac{N_2}{N_1}.$$

Итак, задача свелась к определению U_1 и U_2 . Пренебрегая активным сопротивлением обмоток трансформаторов, можно записать силу тока I в первичных обмотках в виде $I = \frac{U}{\omega L_{1,2}}$ ($L_{1,2}$ — индуктивность катушки с числом витков $N_{1,2}$). Тогда

$$U_1 = I \omega L_1 = U \frac{L_1}{L_1 + L_2}, \quad U_2 = U \frac{L_2}{L_1 + L_2}.$$

Для катушек, отличающихся только числом витков, $\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2}$

(см. задачу 16.26). Поэтому

$$U_{AB} = U_{BC} = U \frac{N_1 N_2}{N_1^2 + N_2^2}, \quad U_{AC} = 2U \frac{N_1 N_2}{N_1^2 + N_2^2} = 120 \text{ В.}$$

Интересно, что при любых значениях N_1 и N_2 получаем $U_{AC} < U$, причем равенство достигается лишь при $N_1 = N_2$. Это следует из неравенства $2N_1 N_2 < N_1^2 + N_2^2$.

18.1. Ответ: $H = 4,0$ м.

Решение. Если обозначить через a первоначальное расстояние от фонарного столба до шеста, то из подобия треугольников получаем

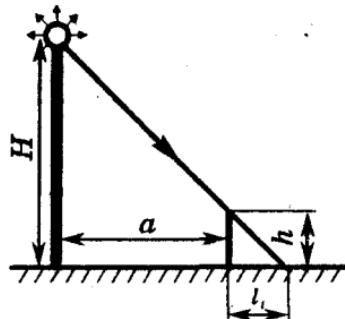


Рис. а

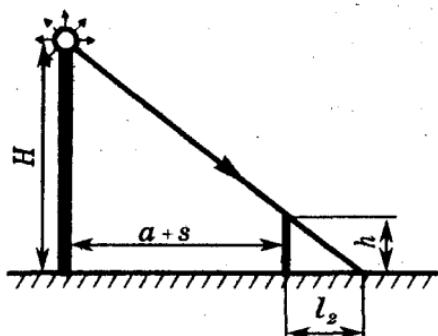


Рис. б

$\frac{H}{h} = \frac{a + l_1}{l_1}$ (см. рис. а) и $\frac{H}{h} = \frac{a + s + l_2}{l_2}$ (см. рис. б). Из этих двух уравнений получаем: $H = h \frac{s + l_2 - l_1}{l_2 - l_1} = 4,0$ м.

18.2. Ответ: около 7000 км.

Решение 1. Луна отбрасывает расширяющийся конус полутени (см. рис. а). Поскольку вершина этого конуса (точка А) лежит намного ближе к Луне и Земле, чем к Солнцу, можно считать, что угол α практически совпадает с малым углом $\beta = \frac{2r_c}{R_c}$, под которым виден солнечный диск с Земли. На рис. а поверхность Земли рассматривается как «плоскость», нормальная к оси конуса полутени (т. е. считается, что Солнце в зените и область полутени захватывает небольшую часть поверхности Земли). Тогда диаметр области полутени $BE = CD + 2BC = 2r_L + \alpha R_L = 2\left(r_L + \frac{R_L}{R_c}\right) \approx 7000$ км (это еще

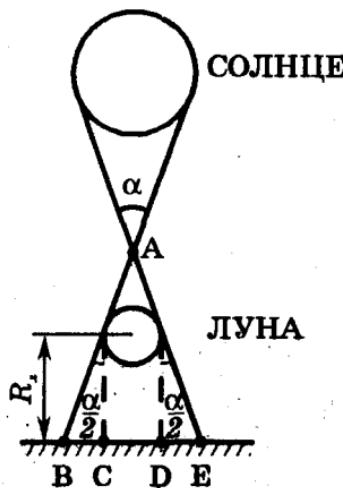


Рис. а

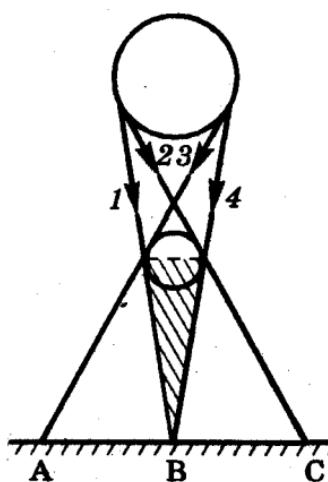


Рис. б

не настолько много, чтобы при оценочном расчете учитывать кривизну Земли). Если, как обычно, Солнце в момент затмения не в зените, то «плоскость» поверхности Земли образует с осью конуса угол, отличный от прямого. Из-за этого пятно полутени удлинится, но его максимальная ширина и в этом случае около 7000 км.

Решение 2. Воспользуемся тем известным фактом, что видимые с Земли размеры Солнца и Луны практически совпадают, поэтому вершина B конуса полной тени от Луны (заштрихованного на рис. б) находится вблизи поверхности Земли. На рис. б изображен случай, когда Солнце стоит в зените. Считая лучи 1 и 2, 3 и 4 практически параллельными из-за большой удаленности Солнца, получаем: $AB = BC = 2r_L$. Тогда ширина AC полутени примерно равна удвоенному диаметру Луны, т. е. $AC \approx 7000$ км.

18.3. Решение. Разобьем щель на малые участки, каждый из которых можно рассматривать как точечное отверстие. Солнечный свет, проходящий через каждое из таких отверстий, будет давать на стене круглое светлое пятно — изображение Солнца (как в камере-обскуре). Диаметр этого пятна $d = \frac{Dl}{L} \approx 3$ см (см. рис. а), где D — диаметр Солнца, L — расстояние от Земли до Солнца.

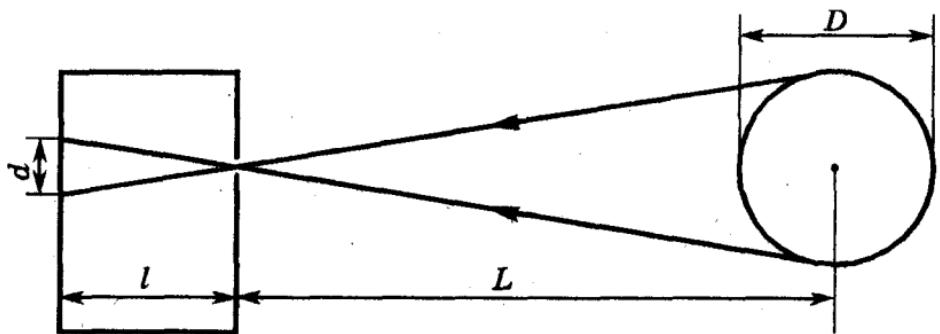


Рис. а

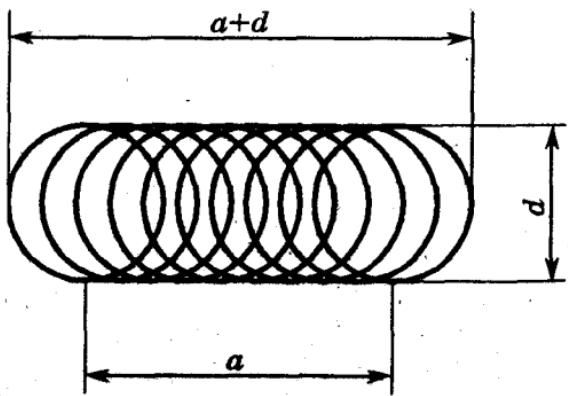
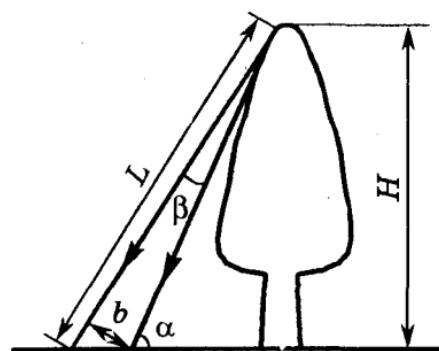


Рис. б

Пятно от всей щели является результатом наложения световых кругов от каждой из точек, поэтому оно имеет форму полоски с закругленными краями (см. рис. б). Ширина полоски $d \approx 3$ см, она не зависит от ширины щели, пока ширина щели намного меньше $\frac{Dl}{L}$; длина полоски $a + d \approx 9$ см. Уменьшение ширины щели практически не влияет на размеры светового пятна, а ведет лишь к уменьшению его освещенности. Уменьшение же длины щели до величины, заметно меньшей d , приближает форму светового пятна к круговой. Однако если во время опыта случайнно начнется солнечное затмение, то форма пятна станет серповидной, потому что это пятно — изображение Солнца. Тот же эффект можно изучать, наблюдая летом за формой светлых пятен на земле под кронами деревьев. Эти пятна имеют форму эллипсов, хотя они образованы солнечными лучами, прошедшими через промежутки неправильной формы (см. задачу 18.4).

18.4. Ответ: $H = 9,7$ м, $\alpha = 49^\circ$.

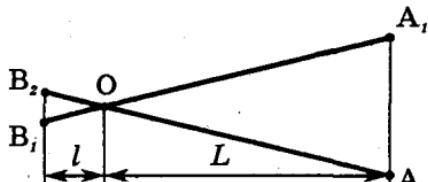
Решение. Солнечные лучи, пройдя сквозь маленькое отверстие (см. рисунок), образуют в пространстве круговой конус; поэтому самые крупные пятна созданы светом, прошедшим через отверстия вблизи вершины дерева. Угол при вершине конуса равен β . Диаметр кругового сечения этого конуса на уровне земли равен b ; из-за наклонного падения световых лучей пятно на земле имеет форму эллипса с большой осью $a = \frac{b}{\sin \alpha}$. Учитывая, что $b = L\beta$ и $H = L \sin \alpha$, получаем $H = \frac{b^2}{a\beta} = 9,7$ м и $\sin \alpha = \frac{b}{a} = 0,75$, откуда $\alpha = 49^\circ$.



18.5. Ответ: $L \approx 900$ м.

Решение. В момент наибольшего сближения боцман видит борт теплохода A_1A_2 под прямым углом (на рисунке изображен вид сверху). Из подобия треугольников OA_1A_2 и OB_1B_2 , где O — большой палец боцмана, B_1 и B_2 — его глаза, следует, что $\frac{L}{l} = \frac{a}{b}$.

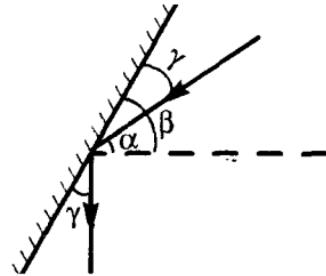
Отсюда $L = \frac{la}{b} \approx 900$ м.



Боцман в данном случае использует параллакс — изменение направления на какое-нибудь тело вследствие перемены точки наблюдения. Именно благодаря параллаксу расстояния до предметов гораздо точнее оцениваются с помощью двух глаз, чем одним глазом. Параллакс используют при определении расстояний до небесных тел, в оптических дальномерах и для создания стереоэффектов.

18.6. Ответ: $\beta = 69^\circ$.

Решение. Из закона отражения света следует, что падающий и отраженный лучи образуют одинаковые углы с плоскостью зеркала (на рисунке эти углы обозначены γ). Из рисунка видно, что $\gamma = \beta - \alpha = 90^\circ - \beta$, откуда $\beta = 45^\circ + \frac{\alpha}{2} = 69^\circ$.



18.7. Решение. Рассмотрим траекторию AEB (см. рис. а), где E — произвольная точка пластины CD . Длина этой траектории совпа-

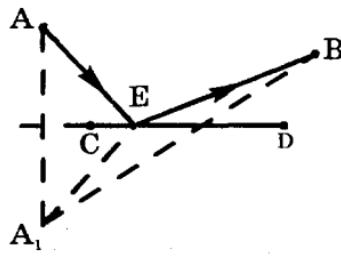


Рис. а

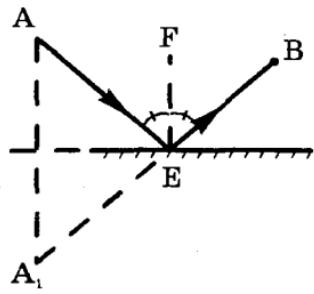


Рис. б

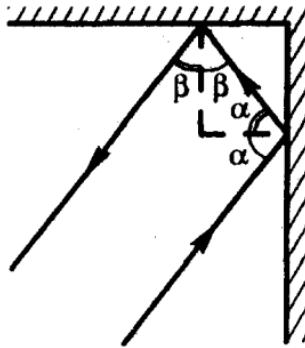
дает с длиной ломаной A_1EB (A_1 — точка, симметричная точке A относительно прямой, на которой лежит отрезок CD). Минимально возможная длина ломаной A_1EB достигается, когда точка E лежит на прямой A_1B . При этом, как видно из рис. б, угол падения луча ($\angle AEF$) равен углу его отражения ($\angle BEF$). Таким образом, длина траектории будет минимальной именно при зеркальном отражении. Это свойство отражения открыл Герон Александрийский (о дальнейшем развитии этой идеи см. задачу 18.19).

18.8. Ответ: изменится на противоположное.

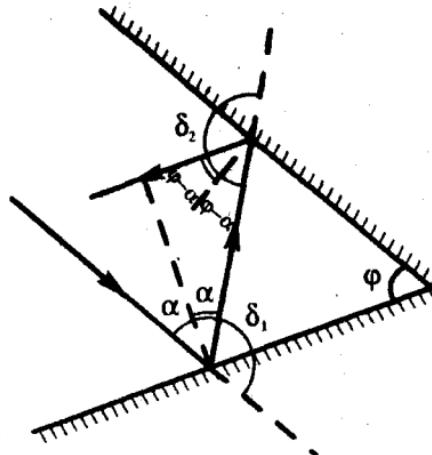
Указание. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ (см. рисунок), следовательно, $2\alpha + 2\beta = \pi$.

18.9. Ответ: на угол 2ϕ ; этот угол не зависит от угла α .

Указание. При первом отражении (см. рисунок) луч отклоняется



К задаче 18.8



К задаче 18.9

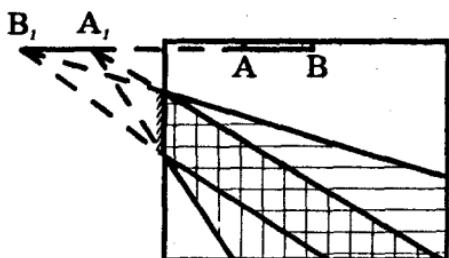
на угол $\delta_1 = \pi - 2\alpha$; угол падения луча на второе зеркало равен $\varphi - \alpha$ (при $\varphi > \alpha$); при втором отражении луч отклоняется на угол $\delta_2 = \pi - 2(\varphi - \alpha)$. Угол полного отклонения $\delta = \delta_1 + \delta_2 = 2\pi - 2\varphi$, что равносильно отклонению на угол 2φ . При $\varphi < \alpha$ луч испытывает более двух отражений. Независимость угла отклонения луча от угла его падения используется, например, в секстанте — приборе для определения угловой высоты светил над горизонтом.

18.10. Решение. Воспользуемся механической аналогией — тем, что при упругом ударе шарика о неподвижную гладкую стенку также происходит «зеркальное» отражение. Значит, вместо светового луча можно рассматривать траекторию движения упругого шарика. Направим оси координат x , y , z вдоль ребер двугранных углов. Пусть проекции начальной скорости v шарика на эти оси равны v_x , v_y , v_z . Тогда после отскока от зеркала, лежащего в плоскости yz , скорость шарика имеет проекции $-v_x$, v_y , v_z ; два последующих отскока приводят к изменению знаков v_y , v_z . Следовательно, после трех «ударов» о зеркала вектор скорости шарика имеет проекции на оси координат $-v_x$, $-v_y$, $-v_z$, т. е. этот вектор равен $-v$. Таким образом, направление движения шарика изменилось на противоположное. То же самое произойдет и с направлением распространения света.

Уголковые отражатели (катафоты), в которых используется этот принцип, устанавливаются сзади на велосипедах и автомобилях, а также на дорожных знаках. Отражая обратно падающий на них свет фар, катафоты хорошо видны водителю даже ночью на неосвещенной дороге. Расстояние от Земли до Луны наиболее точно было измерено с помощью отражения лазерного луча от доставленного на Луну уголкового отражателя.

18.11. Ответ: см. рисунок. Искомая область отмечена двойной штриховкой.

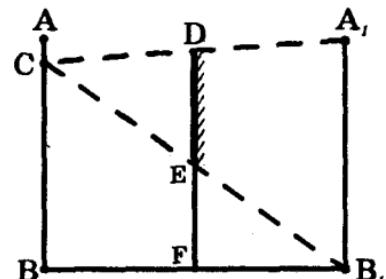
Решение. Можно воспользоваться тем, что зеркало играет как бы роль «окна», через которое наблюдатель смотрит на изображение экрана. На рисунке A_1B_1 — изображение в зеркале экрана телевизора; вертикальной штриховкой отмечена область, откуда



можно видеть в зеркале отражение точки A ; горизонтальной штриховкой — соответствующая область для точки B . Из области, отмеченной двойной штриховкой, можно видеть отражения точек A и B , а, значит, и всего экрана телевизора. Однако читать рекламу даже из этой области будет довольно неудобно!

18.12. Ответ: $H/2$; при этом высота нижнего края зеркала должна быть вдвое меньше расстояния от глаз до пола.

Решение. На рисунке отрезок AB — «человек»; A_1B_1 — его изображение в зеркале, висящем на стене DF ; точка C расположена на уровне глаз человека. Отрезок DE представляет собой среднюю линию треугольника A_1B_1C ; следовательно, $DE = H/2$. Аналогично $EF = BC/2$. Этот результат, казалось бы, не зависит от расстояния между человеком и зеркалом. Однако когда это расстояние становится сравнимым с толщиной человека, следует учитывать, что тело человека является объемным, а не плоским. По этой причине может потребоваться зеркало большей высоты, чем половина роста человека.



18.13. Решение. Падающие на поверхность воды солнечные лучи частично отражаются, а частично преломляются и уходят в воду. Коэффициент отражения света от границы раздела любых прозрачных сред убывает с уменьшением угла падения. Рано утром для наклонных солнечных лучей этот коэффициент близок к единице, а к полудню сильно уменьшается (особенно летом, когда Солнце в полдень стоит высоко). По этой же причине рано утром, хотя Солнце уже взошло, в воде еще темно.

18.14. Решение. Когда луч света проходит сквозь толченое стекло, ему приходится пересекать множество границ раздела между

стеклом и воздухом. На каждой из этих границ происходит отражение и преломление света. Когда же толченое стекло находится в воде, отражение света на границах вода-стекло резко уменьшается, потому что показатель преломления воды мало отличается от показателя преломления стекла. По той же причине отклонение лучей при преломлении тоже значительно уменьшается. Вот почему толченое стекло, находящееся в воде, почти прозрачно.

18.15. Решение. И лужу, и дорогу освещают ночью только фары автомобиля. Однако от этих двух поверхностей свет отражается по-разному: от гладкой поверхности воды — зеркально (т. е. вперед), а от шероховатой дороги — диффузно, т. е. отраженный свет частично попадает в глаза водителя. При появлении встречного автомобиля ситуация может измениться: отражая свет «чужих» фар, лужа воспринимается как яркое пятно на темном фоне. Разумеется, в сильный дождь или ветер поверхность лужи перестает быть зеркально гладкой и описанные эффекты ослабляются.

18.16. Ответ: 3 изображения; см. рисунок.

Решение. Два изображения A_1 и A_2 (см. рисунок) расположены симметрично относительно зеркал 1 и 2. Эти мнимые изображения образованы лучами, отразившимися от одного из зеркал. Но часть лучей, отразившихся сначала от зеркала 1, отражается затем и от зеркала 2. После первого отражения пучок этих лучей как бы «исходит» из точки A_1 (в этой точке пересекаются их продолжения). Значит, после второго отражения появится еще мнимое изображение A_3 точки A_1 в зеркале 2. Изображение точки A_2 в зеркале 1 тоже попадает в точку A_3 . Более двух отражений не испытывает ни один луч; следовательно, других изображений нет. Это видно и из того, что точка A_3 уже не может отразиться от какого-либо зеркала: для обоих зеркал она находится в «зазеркалье».

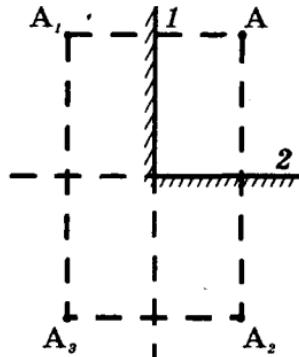
18.17. Ответ: 5 изображений; см. рисунок.

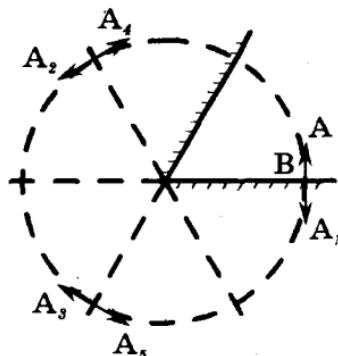
Указание. См. задачу 18.16.

18.18. Ответ: $\alpha = 40^\circ$.

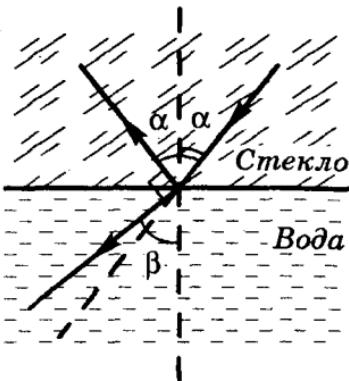
Решение. Из закона преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_s}{n_{ov}}$ и равенства $\alpha + \beta = 90^\circ$

(см. рисунок) следует: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{n_s}{n_{ov}}$; отсюда $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{n_s}{n_{ov}} = 40^\circ$.





К задаче 18.17



К задаче 18.18

18.19. Решение. Пусть v_1 и v_2 — скорости света соответственно в первой и второй средах; α и β — углы падения и преломления луча. Минимальное время достигается при прохождении света по некоторой ломаной: при $v_1 \neq v_2$ «выгодно» уменьшить длину траектории в оптически более плотной среде за счет удлинения той части траектории, которая проходит в оптически менее плотной среде. Выразим время t прохождения света из точки A в точку B через длину x отрезка A_1C (см. рисунок):

$$t = \frac{AC}{v_1} + \frac{BC}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}.$$

Производная этой функции $t' = \frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}$.

Воспользовавшись тем, что

$$\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \sin\alpha, \quad \frac{d-x}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = \sin\beta,$$

получим $t' = \frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{\sin\beta}{v_2}$. Эта производная обращается в нуль,

когда $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$, т. е. как раз при выполнении закона преломления.

Для точек, лежащих левее точки преломления, $t' < 0$; для точек, лежащих правее, $t' > 0$. Значит, функция $t(x)$ принимает на истинной траектории минимальное значение. Таким образом, свет «выбирает» траекторию, прохождение которой требует наименьшего времени (принцип Ферма). Этот принцип распространяется

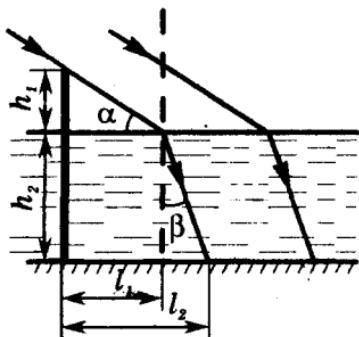
и на отражение света (ср. с задачей 18.7). Он является общим принципом геометрической оптики¹⁾.

18.20. Ответ: 1,7 м; 3,4 м.

Решение. Обозначим длину тени на поверхности воды через l_1 (см. рисунок). Тогда $l_1 = h_1 \operatorname{ctg} \alpha = 1,7$ м; длина тени на дне $l_2 = l_1 + h_2 \operatorname{tg} \beta$. Здесь β — угол преломления солнечных лучей в воде. Согласно закону преломления $\frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin \beta} = n$, где n — показатель преломления воды. Следовательно,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}},$$

откуда $l_2 = h_1 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{h_2 \cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}} = 3,4$ м.



18.21. Ответ: $h = 28$ мм.

Решение. Смещение луча $a = AB \sin(\alpha - \beta)$, где β — угол преломления луча в стекле (см. рисунок). Толщина пластинки

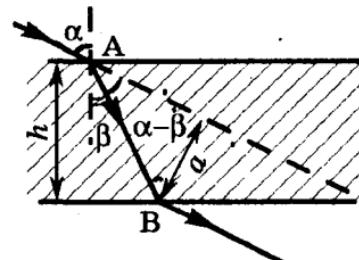
$$h = AB \cos \beta = \frac{a \cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}.$$

Пользуясь законом преломления света,

получаем $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$; тогда

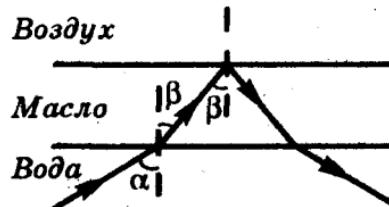
$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}},$$

откуда $h = \frac{a \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha (\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha)} = 28$ мм.



18.22. Ответ: не сможет.

Решение. На первый взгляд может показаться, что слой подсолнечного масла (оптически более плотного, чем вода) делает возможным выход луча в воздух: ведь после преломления на границе вода-масло луч па-



¹⁾ В более строгой формулировке принципа Ферма говорится не о «минимальности» траектории, а о ее «экстремальности».

дает на границу масло-воздух под углом β , меньшим α (см. рисунок). Однако следует учесть, что предельный угол полного отражения у масла меньше, чем у воды! Согласно закону преломления

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_s}{n_b}$, откуда $\sin\beta = \frac{n_s \sin\alpha}{n_b}$. По условию $\sin\alpha > \frac{1}{n_b}$, следовательно,

$\sin\beta > \frac{1}{n_b}$, т. е. угол β превышает предельный угол полного отражения для масла, и, значит, выйти из масла в воздух луч по-прежнему не сможет.

18.23. Ответ: $\beta = \arcsin\left(\frac{n_s \sin\alpha}{n_b}\right)$.

Решение. В оптически неоднородной среде, где показатель преломления меняется с г точки к точке, траектория светового луча искривляется. Найти ее довольно трудно, но в данном случае в этом и нет необходимости. Разобьем объем жидкости на большое число N тонких слоев, каждый из которых можно считать оптически однородным (см. рис. а). Обозначим показатели прелом-

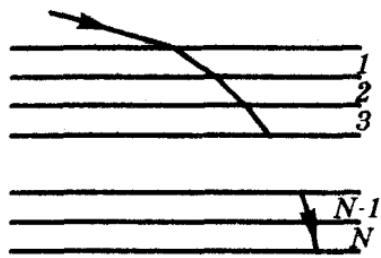


Рис. а

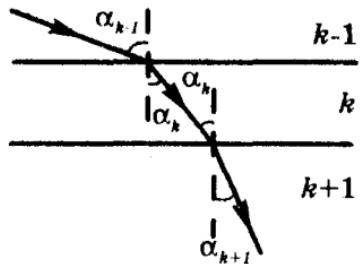


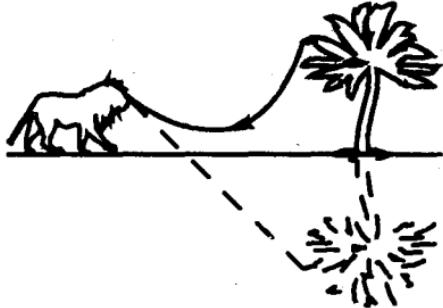
Рис. б

ления слоев $n_1 \equiv n_s$, n_2 , n_3 , ..., $n_N \equiv n_b$. При преломлении на границе двух слоев (см. рис. б) $\frac{\sin\alpha_{k-1}}{\sin\alpha_k} = \frac{n_k}{n_{k-1}}$, т. е. $n_{k-1} \sin\alpha_{k-1} = n_k \sin\alpha_k$. Отсюда следует важный вывод: при переходе от слоя к слою произведение $n_s \sin\alpha$ остается *неизменным!* Поэтому $n_1 \sin\alpha_1 = n_N \sin\alpha_N$, а поскольку $\alpha_1 \equiv \alpha$ и $\alpha_N \equiv \beta$, получаем $n_s \sin\alpha = n_b \sin\beta$.

Описанное в задаче явление происходит не только в неоднородной жидкости, но и в газе — например, в земной атмосфере, плотность которой убывает с высотой. Искривление световых лучей в оптически неоднородной среде называют рефракцией.

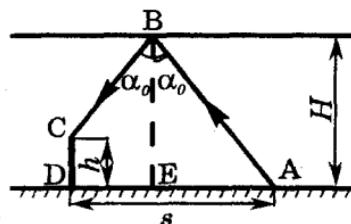
18.24. Решение. Воздух в пустыне нагревается в основном не прямыми солнечными лучами, а от горячего песка; поэтому нижние слои воздуха оказываются днем самыми горячими. По

этой причине плотность (а, следовательно, и оптическая плотность) нижних слоев воздуха меньше, чем верхних. Свет, отраженный от какого-либо предмета, может испытать в такой атмосфере настолько большую рефракцию (см. задачу 18.23), что это приведет к полному отражению (см. рисунок). В результате возникнет иллюзия, будто свет отражается от зеркальной поверхности — эту поверхность и принимают за поверхность водоема. Аналогичный эффект возникает на разогретой солнцем дороге: водитель видит впереди на дороге «лужи» воды, в которых отражается голубое небо.



18.25. Ответ: $H = 5,2$ м.

Решение. Луч, изображенный на рисунке, падает на поверхность воды под углом α_0 , равным предельному углу полного отражения: $\sin \alpha_0 = \frac{1}{n}$. Тогда из равенства $AD = AE + DE$ следует



$$s = H \operatorname{tg} \alpha_0 + (H - h) \operatorname{tg} \alpha_0 = (2H - h) \frac{\sin \alpha_0}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_0}} = \frac{2H - h}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

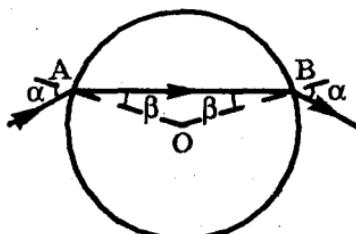
Отсюда $H = \frac{h}{2} + \frac{s}{2} \sqrt{n^2 - 1} = 5,2$ м.

18.26. Ответ: 5 м × 2,5 м; 2,7 м × 0,2 м.

Указание. В ясный день плот освещен практически параллельным пучком солнечных лучей; в пасмурный же день рассеянный свет падает со всех сторон, так что в воде он распространяется по всем направлениям, для которых $\beta < \beta_0 = \arcsin \frac{1}{n}$.

18.27. Ответ: не могут.

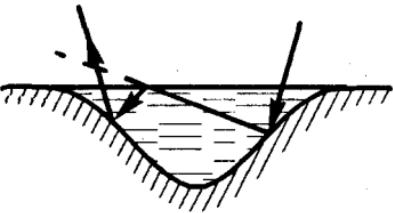
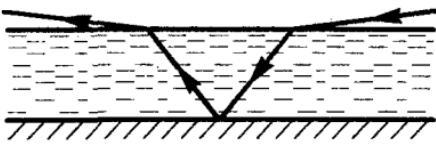
Решение. Пусть угол падения луча света на поверхность капли в точке A равен α (см. рисунок). Тогда угол преломления β определяется соотношением $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} < \frac{1}{n}$. Поскольку треугольник



ABO равнобедренный, угол падения луча на поверхность капли в

точке B также равен β . Так как $\sin\beta < \frac{1}{n}$, полного отражения в точке B не произойдет: луч выйдет в воздух, отразившись в точке B лишь частично.

18.28. Решение. Заметим, что от влаги темнеет не только асфальт: вспомним, как темнеет, например, намокшая ткань. А вот полированные поверхности от влаги не темнеют. Отсюда мы можем сделать вывод, что существенную роль играют неровности поверхности, и переформулировать вопрос задачи так: почему увлажнение шероховатой поверхности делает ее темнее? Дело в том, что неровности поверхности покрываются тонким слоем воды (см. рис. *a*). В результате луч, однократно отраженный от поверхности, не обязательно выйдет в воздух: он может испытать полное

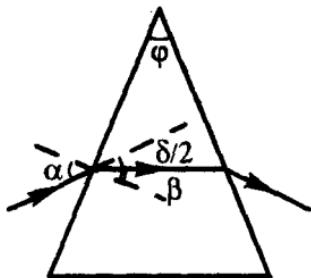
Рис. *a*Рис. *b*

отражение на границе вода-воздух и повторно отразиться от поверхности (на рис. *a* пунктиром показан ход луча при отражении от сухой поверхности, а сплошной линией — от мокрой). Однако при каждом отражении от поверхности часть света поглощается, поэтому мокрая шероховатая поверхность кажется более темной. На гладкой же поверхности слой воды плоский, и полное отражение невозможно (см. рис. *b*). Аналогично объясняется и увеличение насыщенности цвета окрашенной шероховатой поверхности при ее увлажнении. Тот же эффект наблюдается, когда поверхность покрывают прозрачным лаком или пленкой — поэтому художники лакируют свои картины, а яркие книги оклеиваются тонкой пленкой.

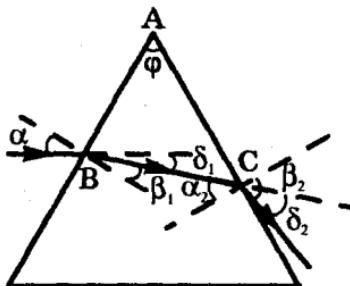
18.29. Ответ: $n = 1,5$.

Решение. Согласно условию при каждом из двух преломлений луч отклоняется от первоначального направления на угол $\delta/2$, т. е. $\alpha - \beta = \delta/2$ (см. рисунок). Из рисунка видно, что $\beta = \varphi/2$. Следовательно,

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{\varphi + \delta}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 1,5.$$



К задаче 18.29



К задаче 18.30

18.30. Ответ: $\delta = 47^\circ$.

Решение. При первом преломлении луча угол преломления $\beta_1 = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) = 19,5^\circ$. Значит, при первом преломлении луч отклонился от первоначального направления на угол $\delta_1 = \alpha - \beta_1 = 10,5^\circ$ (см. рисунок). Из треугольника ABC получаем $\phi + (90^\circ - \beta_1) + (90^\circ - \alpha_2) = 180^\circ$, откуда угол падения луча на вторую боковую грань $\alpha_2 = \phi - \beta_1 = 40,5^\circ$. Тогда угол преломления на этой грани $\beta_2 = \arcsin(nsina_2) = 77^\circ$ и угол отклонения луча при втором преломлении $\delta_2 = \beta_2 - \alpha_2 = 36,5^\circ$. Таким образом, суммарный угол отклонения луча составляет $\delta = \delta_1 + \delta_2 = 47^\circ$.

18.31. Ответ: а) $\delta = 23^\circ$; б) $\delta = 60^\circ$.

Решение. Угол падения луча на вторую грань призмы равен преломляющему углу призмы: $\alpha = \phi$ (см. рис. а). Угол преломления в случае а составляет $\beta = \arcsin(nsina)$, а угол отклонения $\delta = \beta - \alpha = 23^\circ$.

В случае б $\sin\alpha > \frac{1}{n}$, поэтому произойдет полное отражение от второй грани призмы (см. рис. б). Отраженный луч падает на

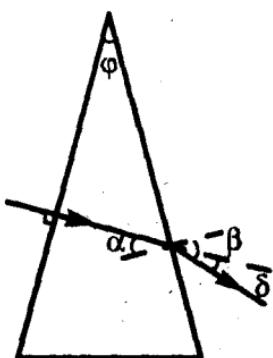


Рис. а

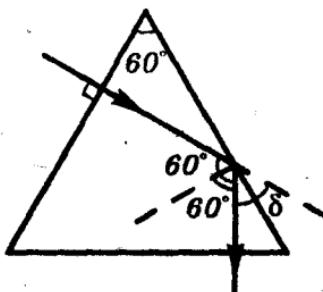


Рис. б

третью грань призмы перпендикулярно к поверхности, так что преломления на этой грани не происходит. Как видно из рис. б, угол отклонения $\delta = 60^\circ$.

18.32. Решение. Это возможно только в том случае, если луч испытает, помимо двух преломлений на боковых гранях призмы, полное отражение от основания призмы (см. рис. а). Тогда из

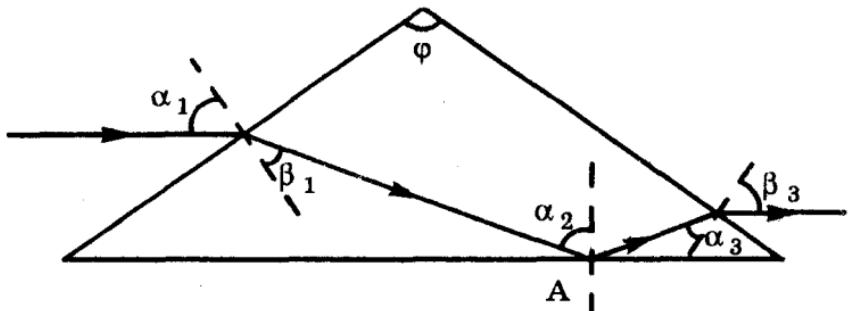


Рис. а

закона отражения можно вывести, что $\beta_1 = \alpha_3$. Отсюда следует, что $\alpha_1 = \beta_3$, т. е. вышедший из призмы луч также параллелен основанию.

Если точка A лежит посередине основания призмы, то луч не только сохраняет направление, но вышедший луч лежит на продолжении падающего. Выясним теперь, при каком соотношении преломляющего угла ϕ призмы и ее показателя преломления n относительно окружающей среды возможен такой ход луча. Полное

отражение происходит при $\alpha_2 > \arcsin \frac{1}{n}$. Из соотношений $90^\circ + \beta_1 = \frac{\phi}{2} + \alpha_2$, $\alpha_1 = \frac{\phi}{2}$ и $\sin \beta_1 = \frac{\sin \alpha_1}{n}$ получаем $\beta_1 > \frac{\phi}{2} + \arcsin \frac{1}{n} - 90^\circ$,

откуда $\sin \frac{\phi}{2} > -n \cos \left(\frac{\phi}{2} + \arcsin \frac{1}{n} \right)$. Заметим, что для справедливости этого неравенства достаточно выполнения условия $\frac{\phi}{2} + \arcsin \frac{1}{n} < 90^\circ$, т. е. $\frac{1}{n} < \cos \frac{\phi}{2}$.

Чаще всего такие призмы используют при $\phi = 90^\circ$, тогда условие $n > \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$ выполняется практически для всех сортов стекла. На рис. б показан результат

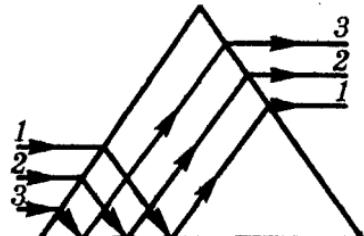


Рис. б

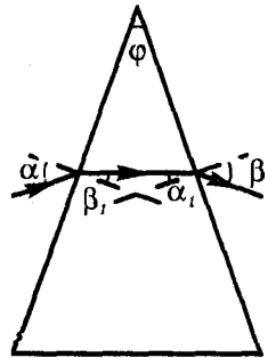
прохождения параллельного пучка лучей через рассмотренную нами призму. Ее называют обратной, потому что такая призма позволяет переворачивать изображение.

18.33. Ответ: $\delta = \phi(n - 1)$, этот угол не зависит от α .

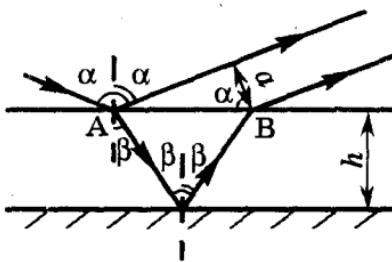
Решение. Углы падения и преломления луча при входе в призму

и при выходе из нее малы (см. рисунок), поэтому $\beta_1 = \frac{\alpha}{n}$, $\beta = \alpha_1 n$.

Поскольку $\alpha_1 = \phi - \beta_1$, получаем $\alpha_1 = \phi - \frac{\alpha}{n}$, $\beta = \phi n - \alpha$. При первом преломлении луч отклоняется на угол $\delta_1 = \alpha - \beta_1$, при втором — на угол $\delta_2 = \beta - \alpha_1$. Следовательно, $\delta = \delta_1 + \delta_2 = \phi(n - 1)$.



К задаче 18.33



К задаче 18.34

18.34. Ответ: $h = \frac{a\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{\sin 2\alpha} = 3,1$ см.

Решение. Падающий на пластинку луч частично отражается от ее верхней поверхности, а частично — от нижней (см. рисунок). Из рисунка видно: $a = AB \cos \alpha = 2h \cos \alpha \operatorname{tg} \beta$. Согласно закону преломления света $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$, тогда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \text{ и } h = \frac{a\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{a\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\sin 2\alpha} = 3,1 \text{ см.}$$

18.35. Ответ: в 1,33 раза.

Решение. Кажущееся уменьшение глубины объясняется преломлением света на поверхности воды. Пусть H — действительная глубина водоема, а h — его кажущаяся глубина (см. рисунок). Точка A на дне водоема рассеивает попадающие на нее солнечные лучи; узкий вертикальный пучок лучей, преломившись на поверхности воды, попадает в глаза наблюдателя (на рисунке пучок

сильно расширен). Определим глубину точки A_1 пересечения вертикального луча с продолжением преломленного луча CD . Согласно закону преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}$; из прямоугольных треугольников ABC и A_1BC находим $\tan \alpha = \frac{BC}{H}$ и

$\tan \beta = \frac{BC}{BA_1}$. Синус и тангенс малого угла можно считать равными друг другу, поэтому $BA_1 = \frac{H}{n}$. Эта величина, как видим, не зависит от α : она одинакова для всех лучей, близких к вертикальному. Значит, именно в точке A_1 находится мнимое изображение точки A дна водоема. Итак, $h = BA_1 = \frac{H}{n}$.

Глубина водоема кажется уменьшенной в $n = 1,33$ раза.

18.36. Ответ: $l = h_1 + nh_2 = 3,0$ м.

Указание. См. задачу 18.35.

18.37. Ответ: $h = 3,2$ м.

Решение. Отраженные от рыбы солнечные лучи испытывают:
а) преломление при выходе в воздух, б) отражение от зеркала, в) преломление при обратном переходе из воздуха в воду. На каждом из этих этапов формируется новое мнимое изображение рыбы (обозначенной на рисунках точкой A).

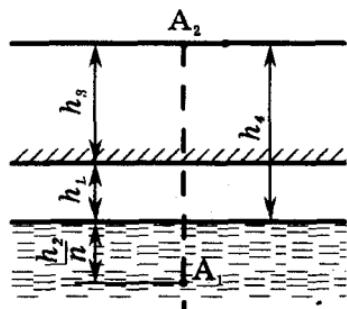


Рис. а

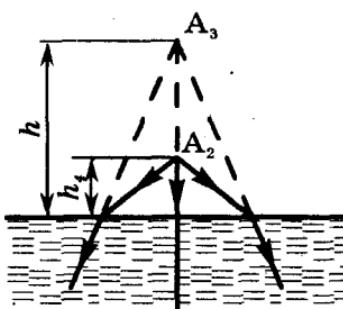


Рис. б

а) Изображение A_1 находится на глубине h_2/n (см. задачу 18.35), т. е. на расстоянии $h_3 = h_1 + h_2/n$ от зеркала.

б) Изображение A_2 (см. рис. а) находится на высоте $h_4 = h_3 + h_1 = 2h_1 + h_2/n$ над водой.

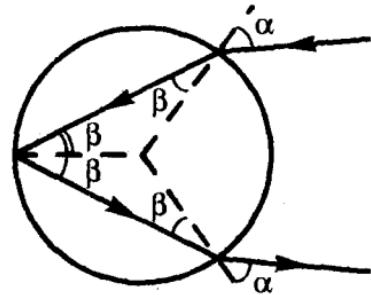
в) Изображение A_3 (которое и будет наблюдать рыба) находится

на высоте $h = nh_4 = 2h_1n + h_2 = 3,2$ м над водой (см. задачу 18.36 и рис. б).

18.38. Ответ: $\delta = \pi + 2\alpha - 4\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)$.

Указание. См. рисунок: при каждом из преломлений луч отклоняется на угол $\delta_1 = \alpha - \beta$, а при отражении — на угол $\delta_2 = \pi - 2\beta$, где $\beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \delta &= 2\delta_1 + \delta_2 = \pi + 2\alpha - 4\beta = \\ &= \pi + 2\alpha - 4\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right). \end{aligned}$$



Заметим, что именно благодаря преломлению и отражению солнечных лучей в каплях дождя или тумана возникает радуга.

19.1. Ответ: см. рис. а, б, в; а) линза собирающая, изображение действительное; б) линза собирающая, изображение мнимое; в) линза рассеивающая, изображение мнимое.

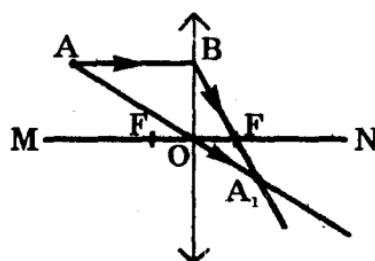


Рис. а

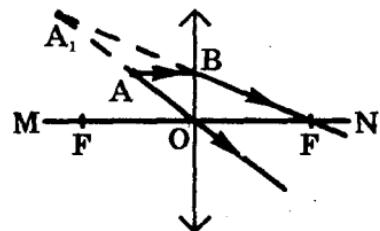


Рис. б

Указание. Все лучи, вышедшие из точки A и прошедшие через линзу, попадают в точку A_1 . Во всех трех случаях построение удобно начинать с нахождения точки O (она находится на пересечении прямых MN и AA_1 , так как луч, проходящий через оптический центр тонкой линзы, не преломляется). Затем можно построить луч AB , параллельный MN . Этот луч (или его продолжение) пересекается с MN в точке F .

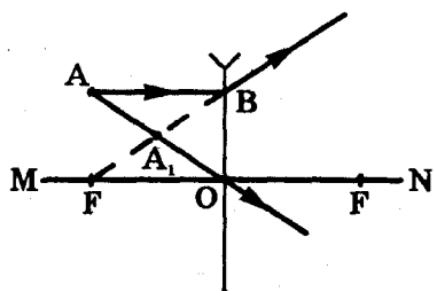


Рис. в

19.2. Ответ: см. рис. а, б.

Указание. На рис. а, б использована при построении побочная оптическая ось линзы, параллельная падающему на линзу лучу. Она пересекается с прошедшим через линзу лучом в фокальной плоскости. Второй фокус симметричен первому относительно оптического центра линзы.

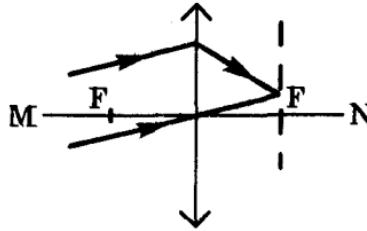


Рис. а

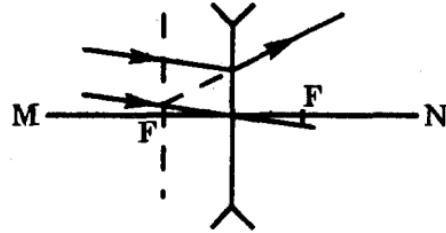


Рис. б

тического центра линзы. На рис. в показан другой метод решения для случая собирающей линзы: на падающем луче выбирается произвольная точка A и с помощью луча AO строится ее изображение A_1 . После этого легко найти ход луча AB , параллельного MN , и фокус F линзы.

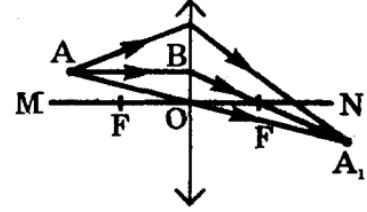


Рис. в

19.3. Ответ: см. рис. а, б.

Решение. Сложность этой задачи в том, что все три основных луча, с помощью которых обычно строится изображение, в данном случае совпадают друг с другом и с главной оптической осью. Однако для построения можно использовать, например, выходящий из точки A «наклонный» луч и параллельную ему побочную оптическую ось (см. рис. а): они пересекаются в фокальной плоскости. Другой метод построения показан на рис. б.

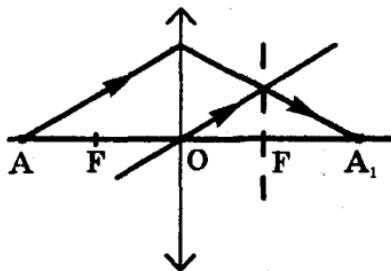


Рис. а

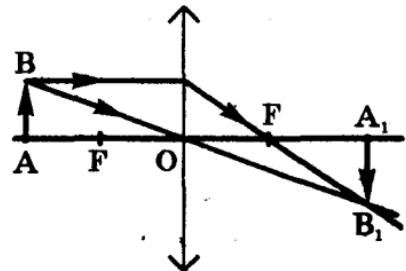


Рис. б

19.4. Решение. Учтем, что изображение A_1 точки A создано всеми лучами, вышедшими из точки A и прошедшими через линзу (см.

рисунок). Закрыв верхнюю часть линзы, мы перекрываем часть лучей, но остальные по-прежнему пересекаются в точке A_1 . Поэтому положение и размер изображения не изменятся, однако оно станет менее ярким.

19.5. Решение. Закроем непрозрачными полосками все слои из стекла одного сорта. Оставшиеся слои «работают» (см. задачу 19.4) как целая линза из однородного

стекла. Открыв теперь эти слои и закрыв остальные, получим линзу из другого сорта стекла, а, значит, с другим фокусным расстоянием. Если открыты все слои линзы, она дает два изображения одного источника света. На экране, перпендикулярном главной оптической оси линзы, лишь одно из изображений может быть четким. Лучи, преломленные слоями из стекла другого сорта, образуют вокруг этого изображения светлый ореол.

19.6. Ответ: не всегда.

Решение. Направление отклонения луча при преломлении зависит от соотношения показателей преломления граничащих сред. Двояковыпуклая линза является собирающей, если показатель преломления n_l материала линзы больше показателя преломления n_c окружающей среды (стеклянная линза в воздухе или воде). Если же $n_l < n_c$ (воздушная линза в воде или стекле), то двояковыпуклая линза является рассеивающей.

19.7. Ответ: $F = 12$ см.

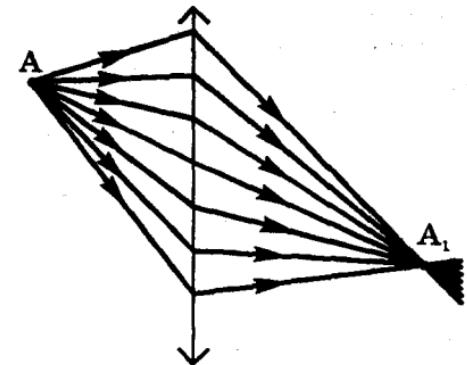
Решение. На экране может быть получено только действительное изображение. Значит, линза собирающая, а предмет и экран расположены дальше от линзы, чем ее фокусы. Следовательно, $d = F + a_1$, $f = F + a_2$, и согласно формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F + a_1} + \frac{1}{F + a_2} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда $F = \sqrt{a_1 a_2} = 12$ см.

19.8. Ответ: $l_{\min} = 4F$, $\Gamma = 1$.

Решение. Согласно формуле тонкой линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. Отсюда $f = \frac{Fd}{d - F}$, и для расстояния между предметом и изображением



К задаче 19.4

получаем

$$l = d + f = \frac{d^2}{d - F}.$$

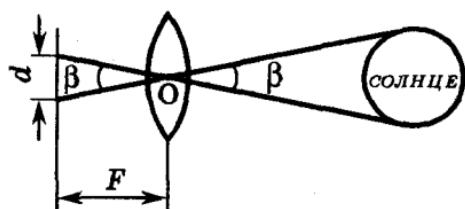
Это выражение достигает минимума при $d = 2F$ (когда производная l по d обращается в нуль); при этом $l_{\min} = 4F$.

Тот же результат можно получить и иначе, воспользовавшись неравенством $fd < \left(\frac{f+d}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{4}$ (см. математическое приложение).

Тогда $\frac{1}{F} = \frac{f+d}{fd} > \frac{4}{l}$, или $l > 4F$. Равенство достигается при $d = f = 2F$. Итак, предмет и его изображение должны быть расположены симметрично относительно линзы. При этом $\Gamma = \frac{f}{d} = 1$.

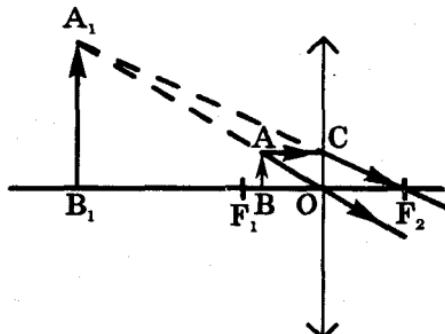
19.9. Ответ: $d = 0,37$ мм.

Решение. Яркое (и горячее) световое пятно от зажигательного стекла представляет собой изображение Солнца. Солнце находится настолько далеко, что его изображение расположено в фо-



кальной плоскости. Из оптического центра O линзы (см. рисунок) это изображение видно под тем же углом β , что и солнечный диск (ведь солнечные лучи, проходящие через точку O , не меняют своего направления). Поскольку угол β мал, $d = \beta F = 0,37$ мм.

19.10. Решение. На рисунке AB — предмет, A_1B_1 — его мнимое изображение; $OB = d$, $OB_1 = |f|$. Линейное увеличение $\Gamma = \frac{A_1B_1}{AB}$. Из подобия треугольников OAB и OA_1B_1 следует: $\Gamma = \frac{|f|}{d}$. Из подобия треугольников $A_1B_1F_2$ и COF_2 следует:



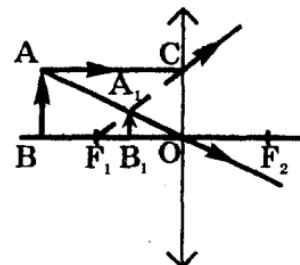
$$\Gamma = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1B_1}{CO} = \frac{F + |f|}{F}.$$

Приравнивая правые части обеих формул для Γ , получаем:

$$\frac{|f|}{d} = \frac{F + |f|}{F}.$$

Отсюда $\frac{1}{d} - \frac{1}{|f|} = \frac{1}{F}$; если считать $f < 0$, то $|f| = -f$, и формула принимает обычный вид формулы тонкой линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$.

19.11. Решение. На рисунке AB — предмет, A_1B_1 — его мнимое изображение; $OB = d$, $OB_1 = |f|$, $OF_1 = OF_2 = |F|$ (точки F_1 и F_2 называют мнимыми фокусами, поскольку в них собираются не сами пучки лучей, падающих на линзу параллельно ее главной оптической оси, а продолжения этих лучей). Из подобия треугольников OAB и OA_1B_1



следует, что линейное увеличение $\Gamma = \frac{A_1B_1}{AB}$

равно $\frac{|f|}{d}$. Из подобия треугольников $F_1A_1B_1$ и F_1CO следует:

$$\Gamma = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1B_1}{CO} = \frac{|F| - |f|}{|F|}.$$

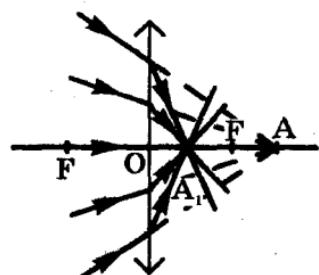
Отсюда $\frac{|f|}{d} = \frac{|F| - |f|}{|F|}$ и $\frac{1}{d} - \frac{1}{|f|} = -\frac{1}{|F|}$. Если считать $f < 0$ и $F < 0$, то $|f| = -f$ и $|F| = -F$. Полученное уравнение тогда приобретает вид $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$.

19.12. Ответ: $f = 12$ см; изображение действительное (см. рисунок).

Решение. Воспользуемся обратимостью хода световых лучей. Тогда вопрос принимает такую форму: на каком расстоянии f от линзы следует разместить точку A_1 , чтобы ее мнимое изображение оказалось на расстоянии a от линзы? Уравнение тонкой линзы принимает вид

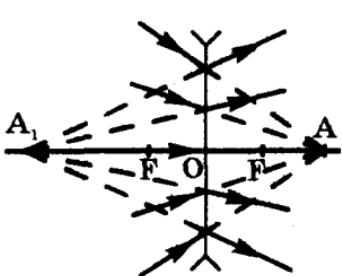
$$\frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{1}{F} \quad (1)$$

(см. задачу 19.10), откуда $f = 12$ см. Ход лучей показан на рисунке. Изображение действительное, поскольку в точке A_1 пересекаются сами лучи, а не их продолжения. Заметим, что формула (1) представляет собой формулу тонкой линзы, в которой $d = -a$.

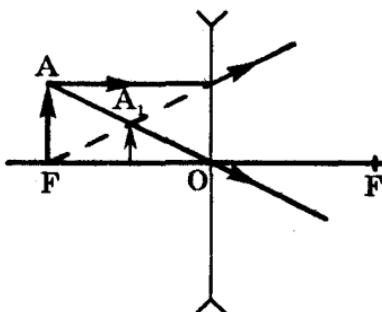


Точку A можно рассматривать как «мнимый» источник света или «мнимый» предмет — в этой точке пересекаются не сами лучи, а их продолжения¹⁾.

19.13. Ответ: в 60 см от линзы; изображение мнимое (см. рисунок).
Указание. См. задачу 19.12. Считая $d = -a$, получаем $f = -60$ см.



К задаче 19.13



К задаче 19.14

19.14. Ответ: $d = 10$ см; см. рисунок.

Решение. Воспользуемся формулой тонкой линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ и соотношением $\Gamma = \left| \frac{f}{d} \right|$, где Γ — линейное увеличение (в данном случае равное $\frac{1}{2}$). Подставляя в первое уравнение $f = -\Gamma d$, получаем $d = \frac{F(\Gamma - 1)}{\Gamma} = 10$ см.

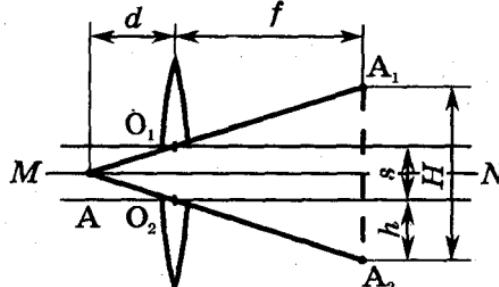
19.15. Ответ: $D = -8,3$ дптр.

Решение. Мнимое изображение и предмет находятся по одну сторону от линзы, так что $l = d - |f| = d + f$. Увеличение $\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{|f|}{d} = -\frac{f}{d}$. Отсюда $d = \frac{lh}{h - H}$, $f = -\frac{lH}{h - H}$. Согласно формуле тонкой линзы $D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = -\frac{(h - H)^2}{Hhl} = -8,3$ дптр.

¹⁾ Суммируя результаты задач 19.10 — 19.12, можно утверждать, что формула тонкой линзы в виде $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ применима ко всем случаям получения изображений с помощью тонкой линзы, если величины, соответствующие мнимым точкам, считать отрицательными: в случае «мнимого» предмета (т. е. когда на линзу падает сходящийся пучок лучей) $d < 0$, в случае мнимого изображения $f < 0$, в случае мнимого фокуса (т. е. для рассеивающей линзы) $F < 0$. Увеличение линзы во всех случаях $\Gamma = \left| \frac{f}{d} \right|$.

19.16. Ответ: $H = 60$ мм.

Указание. Каждая половина линзы действует как целая линза (см. задачу 19.4), ось которой находится на расстоянии $s/2$ от источника света A . Изображение источника находится на расстоянии $h = \frac{s}{2} \cdot \frac{f}{d} = \frac{sf}{2(d-F)}$ от этой оси (см. рисунок). Тогда расстояние



между изображениями A_1 и A_2 равно $H = 2h + s = \frac{sd}{d-F} = 60$ мм.

Тот же результат можно получить из подобия треугольников AA_1A_2 и AO_1O_2 .

19.17. Ответ: 15 см или 10 см.

Решение. Существуют две возможности получить на расстоянии a от линзы пучок света радиуса r (см. рис. а, б). В первом случае действительное изображение источника света получается на рас-

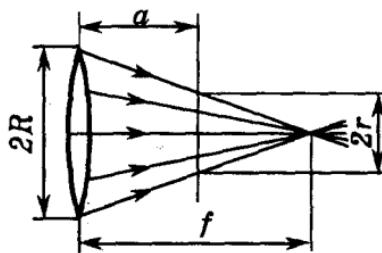


Рис. а

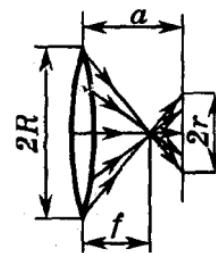


Рис. б

стоянии $f = \frac{aR}{R-r} = 60$ см от линзы, а во втором — на расстоянии $f = \frac{aR}{R+r} = 20$ см. Величину F определяем из формулы тонкой линзы: в первом случае $F = 15$ см, во втором $F = 10$ см.

19.18. Ответ: $r = 40$ мм.

Указание. Расстояние от линзы до экрана $f = \frac{dF}{d-F} = 60$ см. Если

убрать линзу, то $\frac{r}{R} = \frac{d+f}{d}$.

19.19. Ответ: а) $F = 9,1$ см; б) $F = 20$ см.

Решение. а) Поскольку $\Gamma = 0,1$, расстояние от оптического центра объектива до пленки $f = \Gamma d$. Согласно формуле тонкой линзы

$$F = \frac{fd}{f + d} = \frac{\Gamma d}{\Gamma + 1} = 9,1 \text{ см.}$$

б) Разумеется, и в этом случае $F = \frac{\Gamma d}{\Gamma + 1}$ (в данном случае

$$\Gamma = \frac{1}{5000}, d = h).$$
 Поскольку $\Gamma \ll 1$, можно считать $F = \Gamma d = 0,20 \text{ м.}$

Обычно при фотографировании условие $\Gamma \ll 1$ выполняется, поэтому можно считать $F = f = \Gamma d$.

19.20. Ответ: $\Delta t < 0,83 \text{ мс.}$

Решение. Увеличение при фотографировании равно $\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{F}{d}$ (см. задачу 19.19). Разумеется, $\Gamma < 1$, т. е. изображение получается уменьшенным. За время экспозиции автомобиль перемещается на расстояние $v\Delta t$, так что размытость контуров изображения, обусловленная движением автомобиля, равна $\Gamma v\Delta t$. Из условия $\Gamma v\Delta t < a$ получаем $\Delta t < \frac{ad}{vF} = 8,3 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$

19.21. Ответ: $L > \Delta l \frac{H}{F} = 15 \text{ м}; \tau < 2 \text{ мс.}$

Указание. См. задачу 19.20. Фотографируемая поверхность движется относительно объектива со скоростью, равной первой космической скорости $v_1 \approx \sqrt{gR}$. Увеличение фотоаппарата $\Gamma = \frac{F}{H}$.

19.22. Ответ: $F = \frac{H_1 d_1 - H_2 d_2}{H_1 - H_2} = 5,6 \text{ см.}$

Указание. Из формулы тонкой линзы следует: $\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d} = \frac{F}{d - F}$,

где h — высота фотографируемого предмета.

19.23. Ответ: $1,8 \text{ м} < d < 2,3 \text{ м.}$

Решение. Если $d \neq d_0$, изображение точки получается за пленкой или перед ней. На пленке при этом возникает не точечное изображение, а размытое круглое пятно. Согласно формуле линзы пленка расположена на расстоянии $f_0 = \frac{Fd_0}{d_0 - F}$ от объектива. Если расстояние от объектива до изображения равно f , диаметр пятна

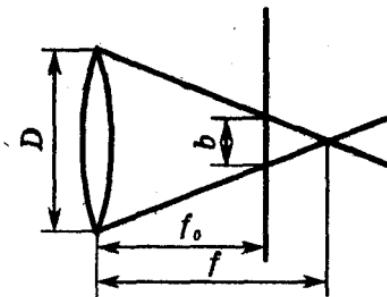


Рис. а

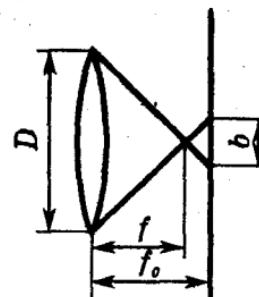


Рис. б

на пленке $b = D \frac{|f - f_0|}{f}$ (см. рис. а, б). Из условия $b < a$ получаем

$f_1 < f < f_2$, где $f_1 = \frac{f_0 D}{D + a}$ и $f_2 = \frac{f_0 D}{D - a}$. Значит, $d_2 < d < d_1$, где

$d_1 = \frac{F f_1}{f_1 - F}$ и $d_2 = \frac{F f_2}{f_2 - F}$. Подставив в соотношения для d_1 и d_2 выражения для f_1 , f_2 и f_0 , получим окончательно

$$d_1 = \frac{d_0}{1 - \frac{a(d_0 - F)}{FD}} \approx \frac{d_0}{1 - \frac{ad_0}{FD}} = 2,3 \text{ м}$$

$$\text{и } d_2 = \frac{d_0}{1 + \frac{a(d_0 - F)}{FD}} \approx \frac{d_0}{1 + \frac{ad_0}{FD}} = 1,8 \text{ м (мы учли, что } F \ll d_0\text{).}$$

19.24. Ответ: $F < 0,67$ см.

Указание. См. задачу 19.23. В данном случае $d_1 \rightarrow \infty$ при $F = \frac{ad_0}{D} = 0,67$ см (при этом $d_2 = \frac{d_0}{2} = 1$ м, т. е. изображение получается достаточно резким при фотографировании с любого расстояния, большего 1 м).

19.25. Ответ: $d = 2,5$ м; $L = 2,0$ мм.

Указание. Преломившиеся при выходе из воды в воздух световые лучи дают мнимое изображение краба в натуральную величину на глубине $H = \frac{H_1}{n}$ (см. задачу 18.35), т. е. на расстоянии $d = H + H_2 = 2,5$ м от объектива.

19.26. Ответ: $f_1 = 30$ см, $f_2 = 60$ см.

Решение. Запишем систему двух уравнений

$$\begin{cases} d + f = l, \\ \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \end{cases}$$

Здесь d — расстояние между лампой и линзой. Эта система приводит к квадратному уравнению $f^2 - lf + lF = 0$, из которого находим $f_{1,2} = \frac{l}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4F}{l}} \right)$.

Заметим, что $d_1 = f_2$ и $d_2 = f_1$. Итак, во втором решении расстояния от линзы до стены и до лампы просто меняются местами по сравнению с первым. Наличие двух таких решений следует из обратимости хода световых лучей.

19.27. Ответ: $h_2 = \frac{h^2}{h_1}$.

Решение. Во втором случае (см. задачу 19.26) расстояния до предмета и изображения меняются местами: $f_2 = d_1$, $d_2 = f_1$. Согласно формуле увеличения линзы $\frac{h_1}{h} = \frac{f_1}{d_1}$, $\frac{h_2}{h} = \frac{f_2}{d_2} = \frac{d_1}{f_1} = \frac{h}{h_1}$. Второе изображение уменьшено во столько же раз, во сколько первое увеличено. Его высота $h_2 = \frac{h^2}{h_1}$.

19.28. Ответ: $F = \frac{l\sqrt{n}}{(\sqrt{n} + 1)^2} = 10$ см.

Указание. См. задачи 19.26 и 19.27. $\Gamma_2 = \frac{1}{\Gamma_1} = \sqrt{n}$; следовательно,

$$d_2 = \frac{l}{\sqrt{n} + 1}, \quad f_2 = \frac{l\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1}.$$

19.29. Ответ: $D = 5/3$ дптр.

Указание. См. задачу 19.26.

19.30. Ответ: на расстоянии 8 см от одного и 24 см от другого источника.

Решение. Очевидно, одно из изображений будет мнимым, т. е. $f_1 = -f_2$. Поэтому можно записать соотношения $\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}$, $\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}$, где $d_{1,2}$ — расстояния от линзы до источников света.

Отсюда $d_1 = \frac{Ff_2}{f_2 + F}$, $d_2 = \frac{Ff_2}{f_2 - F}$. Из условия $d_1 + d_2 = l$ находим расстояние между линзой и изображениями: $|f_2| = F \sqrt{\frac{l}{l - 2F}}$. Зна-

$$\text{чит, } d_1 = \frac{F\sqrt{l}}{\sqrt{l} + \sqrt{l - 2F}} = \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2F}{l}} \right) = 8 \text{ см}$$

$$\text{и } d_2 = \frac{F\sqrt{l}}{\sqrt{l} - \sqrt{l - 2F}} = \frac{l}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2F}{l}} \right) = 24 \text{ см.}$$

19.31. Ответ: см. рисунок.

Решение. Изображение в данном случае будет иметь необычный вид — оно будет разорванным: действительное изображение отрезка AF находится с противоположной стороны линзы, а мнимое изображение отрезка BF — по ту же сторону линзы. Обе части изображения уходят на бесконечность (расстояние от линзы до изображения точки неограниченно возрастает по мере приближения точки к фокусу). Но какую форму имеет изображение стрелки AB ? Заметим, что если из любой точки стрелки выходит луч в направлении от A к B (см. рисунок), то после преломления он идет по прямой, проходящей через точку C параллельно главной оптической оси линзы. Значит, изображения всех точек стрелки лежат на этой прямой! Дальнейшие построения уже несложны.

19.32. Ответ: а) $L = 20$ мм; б) $L = 40$ мм.

Решение. а) $\frac{L}{l} = \frac{f}{d} = \frac{F}{d - F}$, откуда $L = \frac{lF}{d - F} = 20$ мм.

б) Концы стержня находятся на оси линзы на расстояниях $d_1 = d - \frac{l}{2}$ и $d_2 = d + \frac{l}{2}$ от линзы. Их изображения находятся на расстояниях $f_1 = 38,2$ см и $f_2 = 34,2$ см от линзы, поэтому $L = f_1 - f_2 = 40$ мм.

Итак, «продольное» увеличение Γ_1 линзы не совпадает с «поперечным» увеличением Γ_2 . Можно доказать, что для небольших отрезков вблизи главной оптической оси $\Gamma_1 = \Gamma_2^2$.

19.33. Ответ: см. рис. а, б, в.

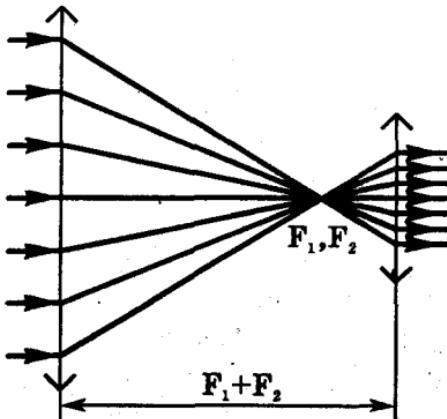


Рис. а

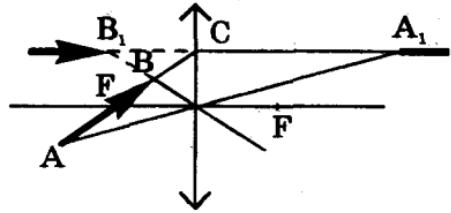
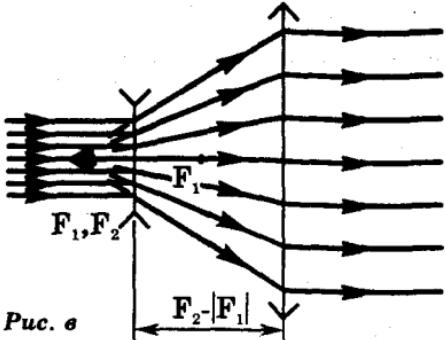


Рис. б

Указание. В условии не указано, о каких линзах идет речь. На рис. *a*, *b*, *c* приведены все возможные варианты (из двух рассеивающих линз построить телескопическую систему нельзя). Разумеется, падающие под углом к главной оптической оси параллельные лучи также сохраняют свою параллельность.

Рис. *c*

19.34. Решение. Пусть точка *A* размещена на некотором расстоянии *d* от линз. Тогда лучи после прохождения первой линзы формируют изображение *A*₁ на расстоянии *f*₁ от линз, причем $\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = D_1$. Заметим, что если *f*₁ > 0 (изображение действительное), то на вторую линзу падает сходящийся пучок лучей, т. е. для второй линзы точка *A*₁ является «мнимым» источником. Если же *f*₁ < 0 (изображение *A*₁ мнимое), то для второй линзы точка *A*₁ является действительным источником, из которого исходит расходящийся пучок лучей. Таким образом, во всех случаях *d*₂ = *-f*₁. Тогда расстояние *f* до изображения *A*₂, создаваемого системой линз, удовлетворяет соотношению $-\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f} = D_2$. Складывая уравнения, записанные для обеих линз, получаем $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_1 + D_2$, т. е. уравнение для линзы с оптической силой *D*₁ + *D*₂.

Нетрудно обобщить этот результат на случай большего количества линз: $D = \sum D_i$; однако при этом необходимо, чтобы толщина всей оптической системы была намного меньше фокусных расстояний каждой из отдельных линз и фокусного расстояния всей системы в целом.

19.35. Ответ: по ту же сторону от линзы, что предмет, на расстоянии 60 см от линзы; изображение действительное.

Решение. Лучи от предмета *AB* проходят через линзу, отражаются от зеркала и снова проходят через линзу. Проследим, какая последовательность изображений при этом возникает. Линза дает мнимое изображение *A*₁*B*₁ на расстоянии $|f| = \frac{dF}{F-d} = 30$ см (см. рис. *a*); это изображение находится на расстоянии $|f| + a = 45$ см от зеркала, поэтому зеркало дает изображение *A*₂*B*₂ на таком же

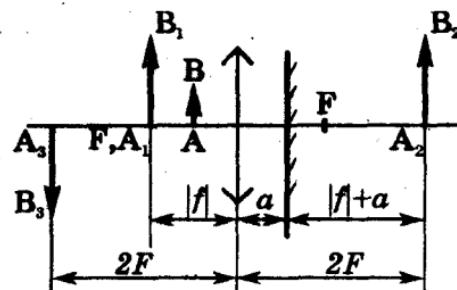


Рис. а

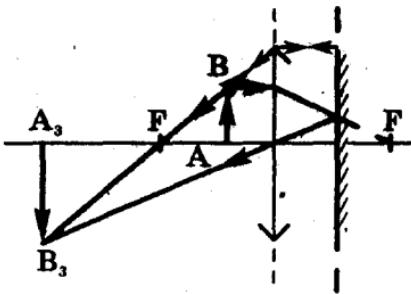


Рис. б

расстоянии от своей плоскости (т. е. на расстоянии $d_2 = |f| + 2a = 60$ см от линзы). Итак, A_2B_2 находится на двойном фокусном расстоянии от линзы и является для линзы действительным источником (т. е. на линзу справа падает расходящийся пучок лучей). Следовательно, изображение A_3B_3 является действительным и расположено на расстоянии $2F = 60$ см левее линзы. Такая цепочка вычислений и построений, когда каждое очередное изображение является «предметом» для следующего элемента оптической системы, позволяет рассматривать довольно сложные оптические системы. Другой подход состоит в том, чтобы выбрать два луча и проследить за их прохождением через систему (см. рис. б).

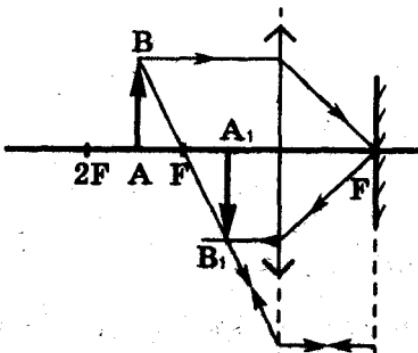
19.36. Решение. Лучи, исходящие из точки A , после преломления на сферической поверхности образуют внутри линзы параллельный пучок. Этот пучок после отражения от плоского зеркала (слоя серебра), образует такой же угол с главной оптической осью, как и до отражения. Значит, изображение A_1 расположено симметрично точке A относительно фокуса. Можно прийти к этому результату и иначе: благодаря зеркалу луч проходит линзу дважды, поэтому оптическая сила системы удваивается (см. задачу 19.34). Фокусное расстояние системы равно $F/2$, т. е. точка A расположена от системы на двойном фокусном расстоянии. Поэтому изображение A_1 расположено на таком же расстоянии F от линзы.

19.37. Ответ: см. рисунок; изображение действительное, расположено между линзой и ее фокусом.

Указание. См. задачу 19.35.

19.38. Ответ: на расстоянии $2F$.

Указание. Линза дает первое изображение A_1B_1 на расстоянии $3F$ от линзы, а второе изображение A_2B_2 зеркало должно дать в фокусе линзы. Следовательно, зеркало должно



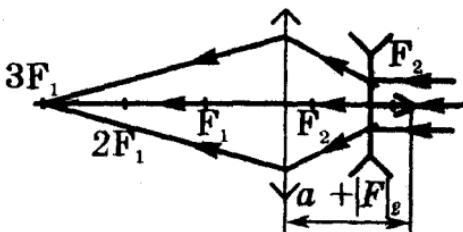
К задаче 19.37

находиться посередине между этими изображениями. При этом на зеркало падает сходящийся пучок лучей; в результате зеркало дает действительное изображение A_2B_2 , находящееся перед зеркалом.

19.39. Ответ: со стороны собирающей линзы на расстоянии 90 см от нее либо в плоскости рассеивающей линзы.

Решение. Проще всего воспользоваться обратимостью хода световых лучей. Направив со стороны рассеивающей линзы пучок параллельных лучей (см. рисунок), получим точечное изображение A на расстоянии

$$3F_1 = 90 \text{ см от собирающей линзы } (a + |F_2| = \frac{3}{2}F_1).$$



Направив параллельный пучок лучей с противоположной стороны, получим точку A как раз в центре рассеивающей линзы. Естественно, источник можно смещать в плоскости, перпендикулярной оси системы. При этом меняется направление выходящего из системы пучка лучей, но он остается параллельным.

19.40. Ответ: $f = 60 \text{ см}$.

Решение. Первая линза дает действительное изображение на расстоянии $f_1 = \frac{dF_1}{d - F_1} = 16 \text{ см}$ от своей плоскости, т. е. на расстоянии

$$d_2 = a - f_1 = 20 \text{ см от второй линзы. Следовательно, } f = \frac{d_2 F_2}{d_2 - F_2} =$$

$= 60 \text{ см.}$ Отметим, что для подобных задач нецелесообразно искать решение в общем виде, потому что формулы получаются чрезмерно громоздкими.

19.41. Ответ: в 30 см за второй линзой; $H = 25 \text{ мм}$.

Указание. Первая линза дает уменьшенное в 4 раза действительное изображение на расстоянии 6 см от второй линзы. Это изображение является «предметом» для второй линзы (см. задачу 19.40).

19.42. Ответ: нужна собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 40 \text{ см}$.

Решение. Первая линза дает изображение Солнца диаметром βF_1 (см. задачу 19.9; β — угловой размер Солнца) в своей фокальной плоскости, т. е. за второй линзой на расстоянии $F_1 - l$ от нее. Это изображение является «мнимым» предметом для второй линзы

(см. задачу 19.12). Вторая линза дает действительное изображение на расстоянии f , определяемом из уравнения $-\frac{1}{F_1 - l} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_2}$:

Отсюда $f = \frac{F_2(F_1 - l)}{F_1 + F_2 - l}$; диаметр изображения равен

$$\beta F_1 \frac{f}{F_1 - l} = \beta \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2 - l}.$$

Приравнивая эту величину βF , где F — фокусное расстояние интересующей нас одной линзы, получаем $F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2 - l} = 40$ см.

19.43. Ответ: $F = 15$ см.

Решение. Если солнечные лучи (которые можно считать параллельными) сначала падают на собирающую линзу, а изображение Солнца получается на расстоянии f_1 от второй линзы (см. рис. а),

то $-\frac{1}{F - l} + \frac{1}{f_1} = -\frac{1}{F}$ (l — расстояние между линзами; $l < F$, поскольку рассеивающая линза может дать действительное изображение только при падении на нее сходящегося пучка лучей). После перестановки линз изображение Солнца получается на расстоянии f_2 от второй линзы (см. рис. б), где $\frac{1}{F + l} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}$.

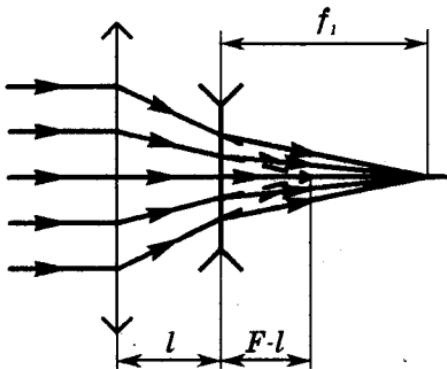


Рис. а

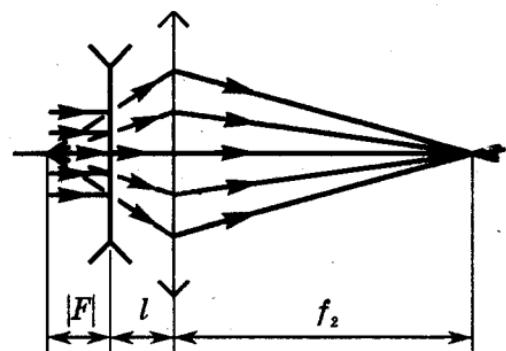


Рис. б

Из записанных соотношений получаем

$$f_1 = \frac{F(F - l)}{l}, \quad f_2 = \frac{F(F + l)}{l}.$$

Во втором случае экран должен быть размещен дальше (поскольку $f_2 > f_1$); согласно условию $f_2 - f_1 = s$, откуда $F = \frac{s}{2} = 15$ см.

19.44. Ответ: перед рассеивающей линзой на расстоянии 3,5 см от нее или за рассеивающей линзой на расстоянии 5 см или 35 см.
Указание. См. задачи 19.40 и 19.43.

19.45. Решение. Глаз как оптическая система, преломляя лучи несколько раз, дает четкое изображение предметов на сетчатке, когда мы наблюдаем эти предметы в воздухе. При этом основное преломление происходит на внешней поверхности роговицы. Показатели преломления воды и роговицы довольно близки, поэтому преломление на внешней поверхности роговицы в воде резко ослабляется. Оптическая сила глаза сильно падает, и глаз становится настолько дальнозорким, что аккомодация с помощью деформации хрусталика уже не позволяет сфокусировать изображение на сетчатке. При нырянии в маске роговица ограничит не с водой, а с воздухом в маске. Переход же света из воды в воздух, находящийся под маской, происходит на *плоском* переднем стекле маски. При этом меняется лишь кажущееся расстояние до предмета (см. задачу 18.35), но четкость изображения сохраняется.

19.46. Решение. Предположим, человек смог стать невидимым. Это означает, что показатель преломления всех тканей его тела стал очень близким к показателю преломления воздуха (т. е. к единице). Но в результате на поверхности роговицы и хрусталика свет перестанет преломляться, а, значит, на сетчатке не будет формироваться изображение! Поэтому человек-невидимка должен стать слепым, и это, к счастью, помешает ему стать неуловимым преступником. Кроме того, сетчатка обязательно должна поглощать хотя бы часть падающего на нее света — ведь именно за счет поглощенной световой энергии в сетчатке происходят фотохимические реакции. Поэтому сетчатка не может быть совершенно невидимой. Таким образом, законы физики надежно предохраняют нас от козней человека-невидимки.

19.47. Ответ: $D = -6,0$ дптр.

Решение. Человек в правильно подобранных очках читает книгу, держа ее на расстоянии наилучшего зрения $d_0 = 25$ см от глаз. Для глаза «предметом» служит уже не страница книги, а созданное линзой очков изображение этой страницы. Значит, очки создают мнимое изображение страницы на расстоянии $d = 10$ см от глаз. Согласно формуле тонкой линзы $D = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} = -6,0$ дптр.

19.48. Ответ: уменьшится на 4 дптр.

Решение. Оптическая сила глаза в первом случае $D_1 = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{f}$ (мы

считаем, что учебник находится на расстоянии наилучшего зрения $d_0 = 25$ см от глаза; f — расстояние от оптического центра глаза до сетчатки). Во втором случае, при рассматривании далеких облаков, $D_2 = \frac{1}{f}$. Изменение оптической силы глаза (совпадающее

с изменением оптической силы хрусталика) $\Delta D = D_2 - D_1 = -\frac{1}{d_0} = -4$ дптр. Перевод взгляда за окно приятен не только потому, что мы отрываем глаза от учебника, но еще и потому, что при рассматривании далеких предметов не надо напрягать мышцу хрусталика. Вот почему врачи рекомендуют во избежание переутомления глаз время от времени смотреть на удаленные предметы.

19.49. Ответ: $14 \text{ см} < d < 33 \text{ см}$.

Решение. Нормальный глаз позволяет без напряжения разглядывать предметы на расстояниях от d_0 (расстояние наилучшего зрения) до бесконечности (дальнего предела аккомодации нормального глаза). Значит, именно в таких пределах может изменяться расстояние $|f|$ от глаза (линзы очков) до мнимого изображения предмета, которое дает линза: $|f| > d_0$. Используя соотношение $D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, получаем при $f < 0$ неравенство

$$D < \frac{1}{d} < D + \frac{1}{d_0},$$

$$\text{т. е. } \frac{d_0}{1 + Dd_0} < d < \frac{1}{D} \quad (14 \text{ см} < d < 33 \text{ см}).$$

19.50. Ответ: $25 \text{ см} < d < 33 \text{ см}$.

Указание. См. задачи 19.47, 19.49.

19.51. Ответ: $a = 15$ см.

Решение. Рассеивающие линзы очков должны иметь такую оптическую силу D , чтобы «собирать» на расстоянии d_2 от глаз продолжения параллельных лучей от удаленных предметов, поэтому

$D = -\frac{1}{d_2}$. При чтении (на ближнем пределе аккомодации глаза)

$$D = \frac{1}{a} - \frac{1}{d_1}. \text{ Отсюда } \frac{1}{a} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \text{ и } a = \frac{d_1 d_2}{d_2 - d_1} = 15 \text{ см}.$$

19.52. Ответ: $d_1' = 12$ см, $d_2' = 53$ см.

Указание. См. задачу 19.51.

19.53. **Решение.** Как следует из условия задачи, в данном случае наибольшее изменение оптической силы глаза при аккомодации

$$\Delta D = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} = 4 \text{ дптр}. \text{ У системы «глаз + очки» величина } \Delta D \text{ такая}$$

же. Однако для того, чтобы хорошо видеть все предметы на расстояниях от a до «бесконечности», необходимо изменение оптической силы $\Delta D_{\min} = \frac{1}{a} = 6,7$ дптр. Поэтому одной пары очков будет недостаточно: потребуются различные очки для «ближнего» и «дальнего» зрения — вот почему у пожилых людей часто две пары разных очков. Очки для «ближнего» зрения должны давать на расстоянии d_1 от глаза мнимые изображения точек, расположенных на расстоянии a ; поэтому оптическая сила очков для «ближнего» зрения $D_1 = \frac{1}{a} - \frac{1}{d_1} \approx -4$ дптр. Такие очки позволяют хорошо видеть предметы на расстояниях от $a = 15$ см до $b = \frac{d_2}{1 + D_1 d_2} = 32$ см. Чтобы хорошо видеть удаленные предметы,

потребуются очки с оптической силой $D_2 = -\frac{1}{d_2} \approx -7$ дптр. Заметим, что минимальное расстояние, на котором можно хорошо видеть предметы с помощью таких очков, $c = \frac{d_1}{1 + D_2 d_1} = 24$ см.

Итак, потребуются очки «для чтения» с оптической силой -4 дптр и очки для «дальнего» зрения с оптической силой -7 дптр. Когда расстояние d до предмета удовлетворяет соотношению $c < d < b$, можно пользоваться любыми из этих очков.

19.54. Репенне. Лупа представляет собой короткофокусную собирающую линзу: ее фокусное расстояние F меньше расстояния паилучшего зрения d_0 . Лупа должна располагаться у глаза, а предмет — вблизи ее фокальной плоскости. Будем считать, что точка A предмета расположена точно в фокальной плоскости линзы. Тогда вышедшие из нее световые лучи после прохождения через лупу образуют параллельный пучок (см. рис. а); в результате нормальный глаз формирует на сетчатке изображение точки A без деформации хрусталика (так же, как при

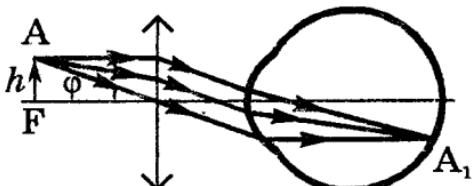


Рис. а

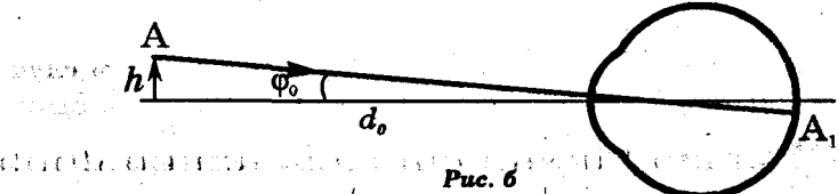


Рис. б

рассматривании очень удаленных предметов). Поэтому часовщики и ювелиры, правильно используя лупу, подолгу работают без переутомления глаз. Следовательно, говорить о «приближении» предмета к глазу неверно: наоборот, лупа может дать изображение даже бесконечно далеко от глаза (при этом линейное увеличение лупы тоже будет стремиться к бесконечности)! Однако при использовании лупы нас интересует не эта величина: способность различать мелкие детали предмета определяется не размером изображения, даваемого лупой, а размером изображения предмета *на сетчатке глаза*. А этот размер определяется углом ϕ , под которым виден предмет. Невооруженный глаз без значительного напряжения видит предмет под углом $\phi_0 = \frac{h}{d_0}$ (см. рис. б), а при использовании лупы (см. рис. а) тот же предмет виден под большим углом $\Phi = \frac{h}{F}$ (мы считаем углы ϕ_0 и Φ малыми). При малых углах зрения угловое увеличение лупы $\Gamma = \frac{\Phi}{\phi_0} = \frac{d_0}{F}$. Именно эту величину указывают на оправе лупы. Например, надпись « $\times 4$ » соответствует $F = \frac{d_0}{4} \approx 6$ см.

19.55. Решение. Приближая предмет к глазу, мы увеличиваем угол, под которым виден этот предмет. Поэтому увеличивается и размер изображения на сетчатке. Однако для того, чтобы четко различать детали предмета, требуется большая деформация хрусталика; если предмет находится слишком близко, изображение на сетчатке начинает расплываться. Маленькое отверстие в картоне играет ту же роль, что и диафрагма в фотоаппарате: оно ограничивает ширину светового пучка, попадающего в глаз от каждой точки предмета. Благодаря этому размер светового пятна на сетчатке, соответствующего «изображению» точки предмета, уменьшается, и изображение становится более четким. Заметим, однако, что для эффективности такого простого оптического прибора (действующего как камера-обскура) необходимо хорошее освещение предмета.

19.56. Решение. Угловые размеры звезд столь малы, что даже в самые сильные телескопы звезды видны как точечные источники света. Поэтому говорить об «увеличенных изображениях» звезд неверно. Однако телескоп, увеличивая угловые расстояния между звездами, позволяет наблюдать раздельно звезды, которые для невооруженного глаза сливаются. Например, при наблюдении

даже в школьный телескоп видно, что Млечный Путь — это гигантское скопление звезд (наша Галактика). Кроме того, плотность потока световой энергии, попадающей в глаз, при использовании телескопа становится намного больше: ведь объектив телескопа намного больше зрачка. Поэтому в телескоп видны слабые звезды, невидимые невооруженным глазом.

19.57. Ответ: на 0,93 см дальше от объектива.

Решение. Объектив дает изображение Луны в своей фокальной плоскости, а изображение предмета — на расстоянии $f = \frac{dF}{d - F}$,

т. е. дальше изображения Луны на $\Delta f = f - F = \frac{F^2}{d - F} = 0,93$ см.

Окуляр же всегда располагается так, чтобы созданное объективом изображение находилось в его фокальной плоскости. Значит, во втором случае он должен быть дальше от объектива на $\Delta f = 0,93$ см.

19.58. Ответ: $\Gamma = 150$.

Решение. В задаче идет речь об угловом увеличении микроскопа (см. задачу 19.54). Оно определяется как $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$, где Γ_1 — линейное увеличение объектива, Γ_2 — угловое увеличение окуляра. Чтобы не приходилось напрягать мышцу хрусталика, из окуляра в глаз должны идти параллельные пучки лучей, т. е. объектив должен давать изображение в фокальной плоскости окуляра. При этом $\Gamma_2 = \frac{d_0}{F_2}$ (см. задачу 19.54). Увеличение объектива

$\Gamma_1 = \frac{F_1}{d - F_1}$ (это следует из формулы тонкой линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_1}$ и соотношения $\Gamma_1 = \frac{f}{d}$). Отсюда $\Gamma = \frac{F_1 d_0}{F_2(d - F_1)} = 150$.

19.59. Ответ: $F_2 = 5,0$ см.

Решение. Пусть предмет расположен на расстоянии d от объектива.

Тогда его изображение расположено на расстоянии $f = \frac{dF_1}{d - F_1}$ от

объектива и увеличено в $\Gamma_1 = \frac{f}{d} = \frac{F_1}{d - F_1}$ раз. Это изображение находится в фокальной плоскости окуляра (окуляр работает как лупа), так что $f + F_2 = l$; окуляр увеличивает изображение в $\Gamma_2 = \frac{d_0}{F_2}$ раз ($d_0 = 25$ см). Увеличение микроскопа

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \frac{F_1 d_0}{F_2(d - F_1)}$$

Последнее уравнение вместе с уравнением $\frac{dF_1}{d - F_1} + F_2 = l$ образует систему, из которой находим $F_2 = \frac{d_0(l - F_1)}{d_0 + \Gamma F_1} = 5,0$ см.

Можно предложить и приближенное решение задачи, гораздо более простое и в данном случае достаточно точное. Запишем увеличение объектива как $\Gamma_1 = \frac{\Gamma}{\Gamma_2} = \frac{\Gamma F_2}{d_0}$ и воспользуемся тем, что

для микроскопа $\Gamma_1 \gg 1$. Следовательно, $d \approx F_1$ и $f \approx \Gamma_1 F_1 = \frac{\Gamma F_1 F_2}{d_0}$; поэтому $\frac{\Gamma F_1 F_2}{d_0} + F_2 \approx l$ и $F_2 \approx \frac{d_0 l}{d_0 + \Gamma F_1} = 5$ см.

20.1. Ответ: $v = 12$ см⁻¹.

Решение. Отраженный свет не виден наблюдателю, если за время $t = \frac{2l}{c}$ прохождения света до зеркала и обратно колесо повернется так, что на пути отраженного светового пучка окажется не прорезь, а зубец. Минимальный угол поворота колеса за время t , при котором это возможно, равен $\frac{\pi}{N}$ рад. Полный оборот колесо сделает за время $2Nt$. Следовательно, $v = \frac{1}{2Nt} = \frac{c}{4Nl} = 12$ см⁻¹.

20.2. Решение. Природа света и радиоволн одинакова — это электромагнитные волны. Но у света длина волны меньше 1 мкм, а у радиоволн она в десятки и сотни тысяч раз больше. Отражение от поверхности будет зеркальным, если размеры неровностей меньше длины волны, а высота неровностей на поверхности листового железа больше 1 мкм, но меньше 1 мм.

20.3. Ответ: надпись станет зеленой, фон — черным.

Решение. Белая поверхность хорошо отражает лучи всех цветов видимого спектра, поэтому белая надпись отразит зеленый свет и будет казаться зеленой. Красная же поверхность хорошо отражает красный свет, а зеленый свет поглощает. Значит, зеленый свет почти не отражается от красной поверхности, и фон будет казаться темным, почти черным.

20.4. Ответ: $\lambda' = 547$ нм; красный; красный.

Решение. Волны, в том числе и световые, при переходе из среды в среду частоты не меняют (ср. с задачей 7.27), однако длина волны изменяется пропорционально скорости света в данной среде

де. Поскольку скорость света в воде уменьшается в n раз по сравнению с воздухом, получаем $\lambda' = \frac{\lambda}{n} = 547$ нм.

Действие света на молекулы светочувствительных веществ (на сетчатке глаза и на фотопленке) определяется частотой колебаний электромагнитного поля световой волны, а не длиной волны. Поэтому и глаз, и фотопленка воспримут свет в воде как красный.

20.5. Решение. С поверхности Земли мы видим небо голубым из-за рассеяния солнечного света в атмосфере¹⁾.

Это происходит потому, что коротковолновая часть видимого солнечного света (фиолетовый, синий, голубой участки спектра) рассеивается сильнее всего. Благодаря исследованию Рэлея выяснилось, что рассеяние происходит на неоднородностях воздушной среды, малых даже по сравнению с длиной волны света (это быстро возникающие и исчезающие в результате хаотического движения молекул микроскопические сгущения и разрежения). Вследствие такого рассеяния голубая часть спектра света, идущего к нам прямо от Солнца, ослаблена, поэтому Солнце кажется нам не белым, а желтоватым. Возникает вопрос: чем же тогда объясняется белый или серый цвет облаков, в которых также происходит рассеяние солнечного света. Дело в том, что рассеяние света в облаках происходит на капельках воды или кристалликах льда, размеры которых велики по сравнению с длиной волны света. При этом световые волны различных частот рассеиваются примерно одинаково.

20.6. Решение. В этом случае свет от Солнца или Луны проходит значительно большее расстояние в атмосфере, чем в другое время суток. На более длинном пути заметно рассеиваются не только синие и голубые составляющие солнечного света, но и желтые и зеленые. Остаются лишь световые волны, которые рассеиваются слабее других. В результате Солнце или Луна приобретают красноватый оттенок.

20.7. Решение. На темном фоне мы наблюдаем дым в рассеянном свете, а на фоне светлого неба — в проходящем свете; поэтому речь идет о том же явлении, которое является причиной голубого цвета неба и желтого цвета Солнца при наблюдении с поверхности Земли. Достаточно мелкие частицы дыма (см. задачу 20.5) рассеивают коротковолновую часть солнечного излучения гораздо сильнее, чем длинноволновую. Поэтому рассеянный дымом белый

¹⁾ Все побывавшие в космосе (или по крайней мере за пределами плотных слоев атмосферы) описывают черное небо и ослепительно белое солнце.

свет приобретает синеватый оттенок, а свет, прошедший через дым, приобретает желтоватый оттенок.

20.8. Указание. Снег в тени освещен светом, рассеянным атмосферой. См. задачу 20.5.

20.9. Решение. Наше восприятие цвета обусловлено физиологией зрения: в природе же есть лишь световые волны различных частот. Монокроматическая волна не может быть получена смешиванием волн с другими значениями частот, поэтому, строго говоря, приведенное утверждение неверно. Однако наш глаз не является таким совершенным анализатором света, как, например, спектроскоп. На сетчатке размещены «цветочувствительные» приемники всего трех типов, максимумы чувствительности которых приходятся соответственно на красную, синюю и зеленую области спектра. Наш мозг формирует восприятие цвета, сравнивая интенсивность нервных импульсов, приходящих от «красных», «синих» и «зеленых» светочувствительных элементов. Смешивая красный, синий и зеленый свет, всегда можно получить такое же цветоощущение, которое дает любой световой сигнал (это используется, например, в цветном телевидении). Итак, если ограничиться рассмотрением физиологии зрения, приведенное утверждение можно считать справедливым. Физически же оно неверно: достаточно пропустить «телеизионный» желтый свет через призму или дифракционную решетку спектроскопа, чтобы убедиться, что на самом деле это смесь красного и зеленого цветов.

20.10. Ответ: $L < 1,8$ м.

Решение. Углы преломления лучей при входе в призму определяются из закона преломления $\sin\beta_1 = \frac{\sin\alpha}{n}$; угол падения на вторую грань призмы (см. задачу 18.30) $\alpha_2 = \phi - \beta_1$; угол преломления при выходе из призмы определяется соотношением

$$\begin{aligned} \sin\beta_2 &= n \sin\alpha_2 = n \sin(\phi - \beta_1) = \\ &= n \sin\phi \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}} - n \cos\phi \frac{\sin\alpha}{n} = \sin\phi \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \sin\alpha \cos\phi. \end{aligned}$$

Подставляя в это выражение вместо n величины n_k и n_f , находим углы преломления крайних лучей спектра (красного и фиолетового): $\beta_{2k} = 47,4^\circ$, $\beta_{2f} = 50,6^\circ$. Итак, вышедший из призмы пучок разноцветных лучей расходится под небольшим углом $\Theta = \beta_{2f} - \beta_{2k} = 3,2^\circ = 0,056$ рад. Ширина пучка достигает величины s на расстоянии $L_{\max} = \frac{s}{\Theta} = 1,8$ м (мы пренебрегаем шириной пучка

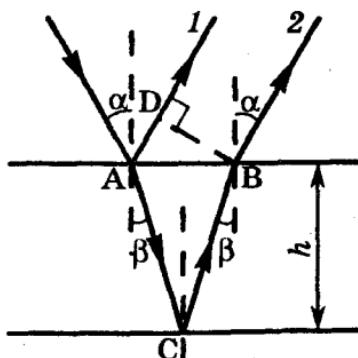
при выходе из призмы, считая размеры призмы малыми). Экран должен быть перпендикулярным световому пучку, вышедшему из призмы.

20.11. Решение. Разумеется, исчезнуть энергия не может. Не происходит и перехода энергии в другие формы (например, во внутреннюю): ведь интерференция происходит и в вакууме. Поэтому для ответа на вопрос нужно выяснить, что происходит в соседней области, где волны усиливают друг друга. Если амплитуда каждой из волн равна A , то в области интерференционного максимума амплитуда результирующих колебаний электромагнитного поля равна $2A$. Поскольку плотность энергии волны пропорциональна квадрату ее амплитуды, при удвоении амплитуды плотность энергии возрастет в четыре раза. Итак, в результате наложения волн энергия в некоторой области не удваивается (как это, казалось бы, должно быть), а утверждается! «Лишняя» энергия как раз и есть та энергия, которая исчезла из области взаимного погашения волн. Таким образом, при интерференции энергия воли перераспределяется в пространстве.

20.12. Ответ: смещается к красному концу спектра; смещается к фиолетовому концу спектра.

Решение. Окраска пластиинки обусловлена интерференцией световых волн, отраженных от передней и задней поверхностей (см. рисунок). Если пластиинка кажется зеленою, это значит, что Δd пучков 1 и 2 составляет целое число k длин волн зеленого света: $\Delta d = k\lambda$ (условие максимума интерференции). Оптическую разность хода лучей можно записать в виде

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2} + n(AC + BC) - AD$$



Слагаемое $\frac{\lambda}{2}$ учитывает, что при отражении пучка 1 от оптически более плотной среды фаза колебаний электромагнитного поля меняется на противоположную ($\Delta\phi = \pi$), т. е. возникает такое же изменение фазы, как при прохождении пути $\frac{\lambda}{2}$ (как говорят, «теряется полволны»). Множитель n учитывает уменьшение скорости света в среде: $\Delta\phi = \omega\Delta t = \omega \frac{s}{v} = \frac{\omega s}{c}n$, т. е. на пути s в среде

возникает такое же изменение фазы $\Delta\phi$, как на пути *зп* в вакууме.

Учитывая, что $AC = BC = \frac{h}{\cos\beta}$, $AD = AB \sin\alpha = 2h \sin\alpha \operatorname{tg}\beta$, и ис-

пользуя закон преломления света $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$, получаем

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2} + \frac{2h(n - \sin\alpha \sin\beta)}{\cos\beta} = \frac{\lambda}{2} + 2h\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}.$$

Таким образом, условие максимума интерференции принимает вид $(k - \frac{1}{2})\lambda = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$. Отсюда видно, что при уменьшении

угла α величина λ увеличивается (цвет пластиинки смещается к красному концу спектра), а при увеличении угла α величина λ уменьшается (цвет смещается к фиолетовому концу спектра).

20.13. Решение. Цвета радуги представляют собой чистые спектральные цвета (такой же спектр получается и с помощью призмы). А вот цвета тонких пленок образуются за счет полного или частичного «вычитания» из белого света некоторых его цветных составляющих. Это «вычитание» происходит за счет гашения некоторых световых волн при интерференции; поэтому свет, отраженный от тонкой пленки, не является спектрально чистым (монохроматическим).

20.14. Ответ: $d = 590$ нм.

Решение. При нормальном падении света ($\alpha = 0$) интерференционный максимум наблюдается в отраженном свете при $(k - \frac{1}{2})\lambda_1 = 2dn$ (см. задачу 20.12). Условие интерференционного минимума имеет вид $k\lambda_2 = 2dn$. Из этих уравнений находим $k = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} = 3$, $d = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{4n(\lambda_1 - \lambda_2)} = 590$ нм.

20.15. Решение. Наличие интерференционной окраски только у достаточно тонких пленок обусловлено тремя причинами.

Во-первых, если толщина пленки заметно превышает т. н. длину гармонического цуга падающего света (для солнечного света это величина порядка 1 мкм), отраженные от двух различных поверхностей пленки световые волны не являются когерентными (хотя обе они — «продолжения» одной и той же падающей волны) и интерференция этих волн невозможна.

Во-вторых, при большой толщине пленки «густота» интерференционных максимумов и минимумов так возрастает, что мы перестаем их различать.

В-третьих, в обычных условиях (когда падающий свет не является монохроматическим) происходит наложение интерференционных максимумов световых волн различной длины.

20.16. Ответ: $x = 1,8 \text{ мм}$; не обязательно.

Решение. Начнем со второго вопроса.

Хотя расстояния от точки O до источников A_1 и A_2 одинаковы, это еще не значит, что обе световые волны приходят в точку O в одинаковых фазах, т. е. что будет наблюдаться максимум освещенности. Ведь когерентность источников не исключает, что они испускают волны с различными фазами (когерентность означает лишь то, что разность фаз $\Delta\phi$ остается постоянной). Поэтому в задаче не хватает данных, чтобы ответить на этот вопрос. А вот найти величину x по приведенным в условии данным можно. Воспользуемся тем, что изменение фазы колебаний одного из источников приводит к одинаковому смещению темных и светлых полос, не изменяя их ширины. Поэтому для вычисления x можно считать $\Delta\phi = 0$. Тогда в точке O наблюдается максимум освещенности, так как $OA_1 - OA_2 = 0$; расстояние x берется до точки M следующего максимума (см. рисунок): $MA_1 - MA_2 = \lambda$. Обозначив через s половину отрезка A_1A_2 , записываем

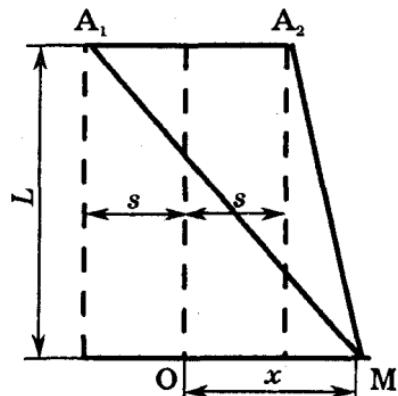
$$MA_1 = \sqrt{L^2 + (x + s)^2}, \quad MA_2 = \sqrt{L^2 + (x - s)^2}.$$

Решение уравнения $\sqrt{L^2 + (x + s)^2} - \sqrt{L^2 + (x - s)^2} = \lambda$ довольно громоздко, однако его можно упростить, используя малость x и s по сравнению с L . Можно воспользоваться формулой из математического приложения или домножить и разделить левую часть последнего уравнения на сопряженное выражение $\sqrt{L^2 + (x + s)^2} + \sqrt{L^2 + (x - s)^2}$, приблизительно равное $2L$. Получаем

$$\frac{(x + s)^2 - (x - s)^2}{2L} = \lambda, \quad \text{или} \quad \frac{2xs}{L} = \lambda.$$

$$\text{Отсюда } x = \frac{\lambda L}{2s} = \frac{\lambda L}{A_1 A_2} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

20.17. Ответ: $x = \frac{\lambda L}{2s} = 1,2 \text{ мм.}$



Указание. В задаче описан известный интерференционный опыт Ллойда. Интерференция происходит между световыми волнами,

непосредственно попадающими на экран, и волнами, отраженными от зеркала. Можно считать поэтому, что имеются два источника когерентных волн: источник A и его изображение в зеркале A_1 . Далее см. задачу 20.16. Заметим, что из-за потери полуволны при отражении света от зеркала (см. задачу 20.12) источники A и A_1 — противофазные.

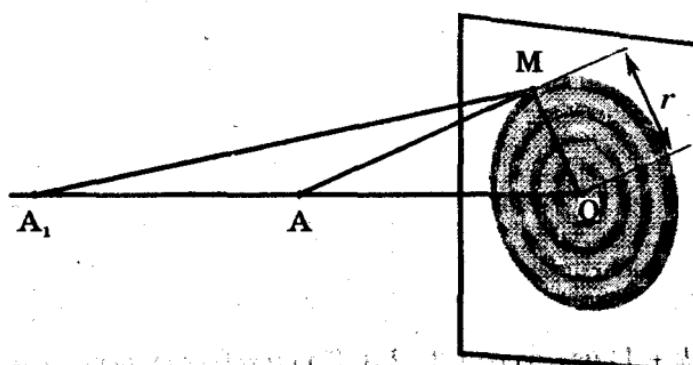
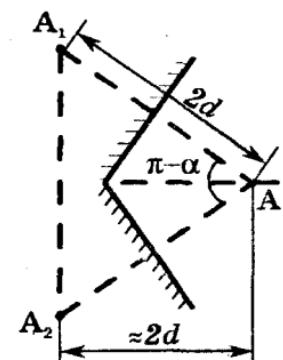
20.18. Ответ: $x = 1,1$ мм.

Указание. Интерференционную картину создают световые волны от двух мнимых изображений A_1 и A_2 источника A (см. рисунок). Точки A_1 и A_2 находятся на расстоянии $A_1A_2 = 2d(\pi - \alpha)$ друг от друга (здесь $\pi - \alpha = \frac{\pi}{360}$ рад) и на расстоянии $L + d$ от экрана (мы учитываем малость угла $\pi - \alpha$). Таким образом, для расстояния между соседними интерференционными полосами получаем

$$\text{(см. задачу 20.16)} \quad x = \frac{\lambda(L + d)}{2d(\pi - \alpha)} = 1,1 \text{ мм.}$$

20.19. Ответ: концентрические темные и светлые кольца; темная полоса.

Решение. Интерференционную картину на экране можно рассматривать как результат сложения световых волн от источника A и противофазного ему источника A_1 (см. рисунок), расположенного на расстоянии $2l$ от экрана (см. задачу 20.17). Точки экрана, равноудаленные от точки O , равноудалены и от любой другой точки прямой AA_1 . Поэтому результат интерференции двух световых волн в этих точках одинаков; интерференционная картина имеет вид концентрических светлых и темных колец с центром в точке O . Для точки M экрана на расстоянии r от точки O



оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2} + A_1 M - A M = \frac{\lambda}{2} + \sqrt{4l^2 + r^2} - \sqrt{l^2 + r^2}.$$

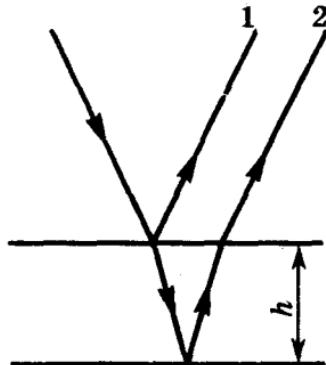
Считая $r \ll l$, получим

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2} + \left(2l + \frac{r^2}{4l}\right) - \left(l + \frac{r^2}{2l}\right) = l + \frac{\lambda}{2} - \frac{r^2}{4l}$$

(см. математическое приложение). Поскольку $\frac{\Delta d}{\lambda}$ представляет собой «полуцелое» число, световые волны приходят в точку M в противофазе; следовательно, через точку M проходит темная интерференционная полоса.

20.20. Ответ: $h = h_0(2k + 1)$, где $h_0 = \frac{\lambda}{4\sqrt{n}} = 0,10$ мкм; $k = 0, 1, 2, \dots$

Решение. Ослабление отраженного света достигается за счет взаимного ослабления при интерференции двух световых волн (см. рисунок): отраженной от внешней границы пленки и от границы пленка-стекло. Поскольку $1 < n_p < n$, обе волны при отражении «теряют полволны» (см. задачу 20.12). Поэтому оптическая разность хода обеих волн равна $2hn_p$; она должна составлять нечетное число полуволн, т. е.



$$2hn_p = \frac{\lambda}{2}(2k + 1), \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots$$

Итак,

$$h = \frac{\lambda}{4\sqrt{n}}(2k + 1) = h_0(2k + 1).$$

Минимально возможная толщина пленки $h_0 = 0,10$ мкм (четвертьволновая пленка). На практике из-за сложности нанесения очень тонких пленок используют пленки с толщиной, превышающей h_0 в нечетное число раз.

20.21. Ответ: зеленый; сиреневый.

Решение. С минимальным отражением через объектив проходят световые волны с длиной волны, удовлетворяющей условию

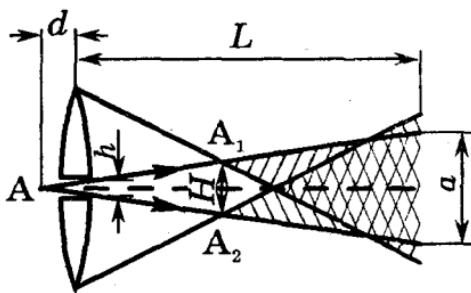
$$2h\sqrt{n} = \frac{\lambda}{2}(2k + 1) \quad (\text{см. задачу 20.20}). \text{ При } k = 0 \text{ получаем } \lambda_0 = 1520 \text{ нм},$$

что соответствует инфракрасному излучению далеко за пределами видимой части спектра; при $k = 1$ получаем $\lambda_1 = 510$ нм (зеленый цвет); $\lambda_2 = 300$ нм соответствует уже ультрафиолетовому излучению (на самом деле это излучение поглощается стеклом). Итак, прошедший через объектив свет приобретает зеленоватый оттенок. Толщину пленки обычно подбирают именно для пропускания зеленого света, к которому наиболее чувствителен глаз: ведь зеленый цвет соответствует середине спектра видимого света. Наиболее сильное отражение испытывают те световые волны, для которых отраженные пучки 1 и 2 (см. рисунок к решению задачи 20.20) вследствие интерференции усиливают друг друга: $2h\sqrt{n} = k\lambda'$.

При $k = 1$ получаем $\lambda_1' = 760$ нм; при $k = 2$ получаем $\lambda_2' = 380$ нм; для остальных k будет $\lambda'_k < 250$ нм. Длины волн λ_1' и λ_2' очень близки соответственно к красной и фиолетовой границам видимой части спектра. Значит, отраженный объективом свет имеет красно-фиолетовый (т. е. сиреневый) оттенок. Это особенно заметно в случае сложных объективов, содержащих несколько линз.

20.22. Ответ: $N \approx 25$.

Решение. Билинза дает два изображения A_1 и A_2 источника A (см. рисунок) на расстоянии $H = \frac{hd}{d - F}$ друг от друга и $L_1 = L - \frac{dF}{d - F}$



от экрана (см. задачу 19.16). Расстояние между соседними светловыми интерференционными полосами на экране $x = \frac{\lambda L_1}{H}$ (см. задачу 20.16). Ширина полосы перекрытия на экране двух световых пучков (они отмечены на рисунке различной штриховкой) составляет $a = h \frac{L + d}{d}$. Следовательно, $N \approx \frac{a}{x} = \frac{h^2(L + d)}{\lambda(dL - LF - dF)} = 25$.

20.23. Ответ: $r_s = 1,2$ мм.

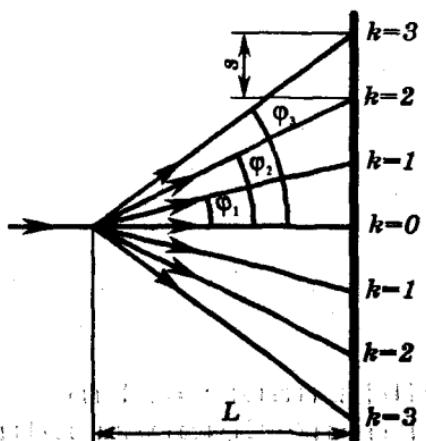
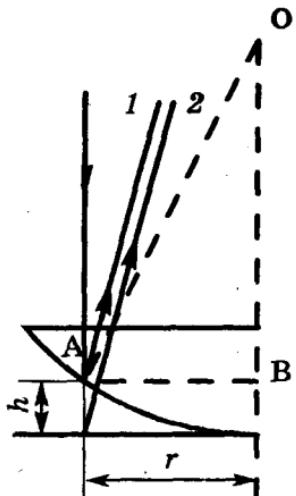
Решение. Описанный эффект обусловлен наличием тонкой воз-

душной прослойки между линзой и пластиной. Интерференция происходит между световым пучком 1, отраженным от выпуклой поверхности линзы (отклонением этого пучка от вертикального направления можно пренебречь), и световым пучком 2, отраженным от плоской поверхности пластины (см. рисунок). Оптическая разность хода этих двух пучков $\Delta d = 2h + \frac{\lambda}{2}$, где h — толщина воздушной прослойки (слагаемое $\lambda/2$ обусловлено «потерей полуволны» при отражении от поверхности стекла, см. задачу 20.12). Воздушная прослойка аналогична тонкой пленке переменной толщины. Зависимость h от расстояния r до центра колец можно получить, записав для прямоугольного треугольника ABO теорему Пифагора: $R^2 = r^2 + (R - h)^2$, откуда $h = R - \sqrt{R^2 - r^2}$. Учитывая, что $R \gg r$, получим (см. математическое приложение) $h = \frac{r^2}{2R}$. Величина r , соответствующая середине темного кольца с номером k , определяется из условия взаимного ослабления двух волн при интерференции: $\Delta d = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$, т. е.

$2h = k\lambda$. Отсюда $r_k = \sqrt{k\lambda R}$; при $k = 3$ темное кольцо имеет радиус $r_3 = \sqrt{3\lambda R} = 1,2 \cdot 10^{-3}$ м. Темное пятно в центре колец соответствует случаю $k = 0$. В этом случае разность хода $\Delta d = \lambda/2$ обусловлена только «потерей полуволны», т. е. изменением фазы световой волны в пучке 2 на противоположную при отражении от оптически более плотной среды.

20.24. Ответ: $\lambda = 0,61$ мкм.

Решение. Формула дифракционной решетки $ds \sin \phi = k\lambda$ позволяет определить угол ϕ_k отклонения спектра k -го порядка от первоначального направления (см. рисунок). Расстояние на экране между спектрами k -го и нулевого порядка равно $L \operatorname{tg} \phi_k$, поэтому $s = L \operatorname{tg} \phi_3 - L \operatorname{tg} \phi_2$. Согласно условию $s \ll L$, так что можно считать углы отклонения малыми и



заменить их тангенсы на синусы:

$$s = L(\sin\phi_3 - \sin\phi_2) = \frac{L\lambda}{d}.$$

Отсюда $\lambda = \frac{sd}{L} = 6,1 \cdot 10^{-7}$ м.

20.25. Ответ: $k_{\max} = 3$.

Решение. Согласно формуле дифракционной решетки

$$k = \frac{ds\sin\phi}{\lambda} \leq \frac{d}{\lambda}.$$

При $d = \frac{1}{500}$ мм = $2 \cdot 10^{-6}$ м получаем $k \leq 3,85$, т. е. $k_{\max} = 3$.

20.26. Решение. Угловое отклонение лучей, пропущенных через призму, находящуюся в вакууме (или в воздухе), возрастает с увеличением показателя преломления $n = \frac{c}{v}$. Здесь c — скорость света в вакууме, являющаяся универсальной постоянной; v — скорость света в материале призмы, зависящая от длины волны. Для «красных» волн величина v , как правило, больше, чем для волн, соответствующих другим цветам видимого спектра. Поэтому показатель преломления материала призмы и угол отклонения для красного цвета минимальны. Отклонение света дифракционной решеткой зависит от длины волны согласно формуле $ds\sin\phi = k\lambda$; следовательно, меньше всего отклоняются самые короткие световые волны (в видимой части спектра — фиолетовые).

20.27. Ответ: в фокальной плоскости линзы; $s = 57$ см.

Решение. Из дифракционной решетки выходят несколько параллельных пучков лучей. Поэтому для получения четкого дифракционного спектра экран должен находиться в фокальной плоскости линзы. При этом расстояние s связано с углом отклонения спектра третьего порядка соотношением $s = F\tg\phi_3$. Из уравнения $ds\sin\phi_3 = 3\lambda$ получаем $\tg\phi_3 = \frac{\sin\phi_3}{\sqrt{1 - \sin^2\phi_3}} = \frac{3\lambda}{\sqrt{d^2 - 9\lambda^2}}$ (угол ϕ_3 в данном случае не настолько мал, чтобы считать $\tg\phi_3 = \sin\phi_3$). Таким образом, $s = \frac{3\lambda F}{\sqrt{d^2 - 9\lambda^2}} = 0,57$ м.

20.28. Решение. В воде длина волны, соответствующая определенному цвету, уменьшается в n раз (см. задачу 20.4). Согласно

соотношению $\sin\phi = \frac{k\lambda}{d}$ уменьшается и угол отклонения лучей, а

значит — и расстояние s от соответствующей полосы спектра до центрального максимума (при малых углах отклонение s уменьшается в n раз). Если для получения дифракционного спектра используется (как это обычно и бывает) собирающая линза, то в воде ее оптическая сила резко падает. Поэтому экран окажется намного ближе фокальной плоскости линзы, и четкого дифракционного спектра на нем не будет.

20.29. Ответ: перекрытия не будет.

Решение. Спектры порядка k и $k + 1$ перекрываются, если $k\lambda_2 > > (k + 1)\lambda_1$, т. е. если $k > \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 10$. Однако максимальный порядок спектра, который вообще может быть получен с помощью данной дифракционной решетки, ограничен условием $k < \frac{d}{\lambda_1} = 8$.

Как видно, полученные неравенства несовместны; следовательно, перекрытие спектров разных порядков в данном случае невозможно.

20.30. Ответ: $d(\sin\phi - \sin\alpha) = k\lambda$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Решение. При наклонном падении света разность хода между волнами, идущими от краев соседних щелей, составляет

$$\Delta d = AD - BC = AB\sin\phi - AB\sin\alpha = d(\sin\phi - \sin\alpha)$$

(см. рис. а). Дифракционный максимум наблюдается, когда $\Delta d = k\lambda$, т. е. $d(\sin\phi - \sin\alpha) = k\lambda$. Здесь k — любое целое число; $k = 0$ соответствует случаю $\phi = \alpha$, т. е. прохождению света без изменения направления распространения (при падении белого света именно в этом направлении наблюдается белый, неокрашенный центральный максимум). Значения $k > 0$ и $k < 0$ соответствуют дифракционным максимумам по разные стороны от центрального (см. рис. б).

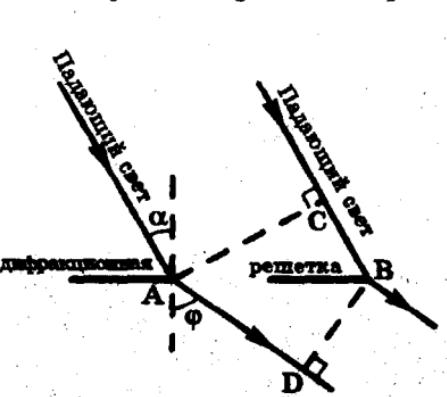


Рис. а

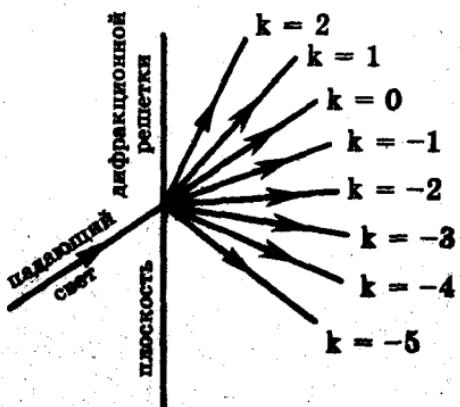


Рис. б

21.1. Ответ: $v = 0,14c = 4,2 \cdot 10^7$ м/с; $v = 0,87c = 2,6 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. Релятивистское сокращение длины описывается формулой $l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$, где l_0 — длина тела в системе отсчета, в которой оно неподвижно. Отсюда $v = c \sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2}$. При $\frac{l}{l_0} = 0,99$ получаем

$$v = 0,14c = 4,2 \cdot 10^7 \text{ м/с; при } \frac{l}{l_0} = 0,5 \text{ получаем } v = 0,87c = 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

21.2. Ответ: $l = 2,0$ км.

Решение. Разумеется, в справочнике приводится среднее время жизни неподвижных частиц (или, что то же самое, среднее время жизни частиц в связанный с ними системе отсчета). В системе отсчета, относительно которой частицы движутся со скоростью v ,

среднее время жизни $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ («эффект замедления времени»). Поэтому $l = v\tau = \frac{v\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 3,0c\tau_0 = 2,0$ км.

21.3. Ответ: а) $V = 0,98c$. б) $u = 0,98c$.

Решение. а) Согласно релятивистской формуле сложения скоростей

$$V = \frac{v + u}{1 + vu/c^2} = \frac{2v}{1 + v^2/c^2} = 0,98c.$$

б) Из соотношения $-V = \frac{v - u}{1 - vu/c^2}$ при $V = v$ получаем

$$u = \frac{2v}{1 + v^2/c^2} = 0,98c.$$

Этот результат можно получить и иначе — рассматривая ракету как «неподвижную» систему отсчета, а наблюдателя — как «движущуюся назад» со скоростью v . Поскольку снаряд движется относительно наблюдателя также со скоростью v , его скорость относительно «неподвижной» системы отсчета, т. е. ракеты,

$$u = \frac{2v}{1 + v^2/c^2} = 0,98c.$$

21.4. Ответ: $v = u$, $v_2 = \frac{2uc^2}{c^2 + u^2}$.

Решение. В системе отсчета K' , в которой частица до распада неподвижна, скорости обоих осколков равны по величине u . Значит, первый осколок вылетел в системе отсчета K' назад со скоростью u . Этот осколок по условию неподвижен в лабораторной системе отсчета K . Следовательно, система отсчета K движется относительно K' назад со скоростью u . Очевидно, с такой же

скоростью u система отсчета K' движется вперед относительно K , т. е. $v = u$. Для определения скорости второго осколка в системе отсчета K воспользуемся релятивистским правилом сложения

$$\text{скоростей: } v_2 = \frac{v + u}{1 + vu/c^2} = \frac{2uc^2}{c^2 + u^2}.$$

$$21.5. \text{Ответ: } u = \frac{v}{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Решение. Очевидно, скорость u центра масс направлена в ту же сторону, что и v . В системе отсчета, связанной с центром масс, частицы имеют равные по величине и противоположно направленные скорости. Поэтому $\frac{v - u}{1 - vu/c^2} = u$, откуда $u^2 - 2\frac{c^2}{v}u + c^2 = 0$, так

$$\text{что } u = \frac{c^2}{v} \pm c\sqrt{c^2/v^2 - 1}.$$

Из естественного условия $u < c$ следует, что физический смысл имеет только меньший корень уравнения:

$$u = \frac{c^2}{v} - c\sqrt{c^2/v^2 - 1} = \frac{v}{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

При $v \ll c$ получаем $u = \frac{v}{2}$, т. е. классический результат. При $v \approx c$ (ультрапререлятивистский случай) получаем $u \approx v$.

21.6. Решение. Пусть $S = 0$, т. е. $l = ct$. Это означает, что свет, испущенный при первом событии, может быть поглощен при втором событии. Это утверждение справедливо, разумеется, в любой системе отсчета. Поскольку скорость света в вакууме одинакова в системах отсчета K и K' , получаем $l' = ct'$, т. е. $S' = 0$.

Если $S < 0$, то $ct < l$. Это означает, что испущенный при первом событии свет не поспевает ко второму событию. Такое же утверждение справедливо и в системе отсчета K' , поэтому $S' < 0$. Аналогично получаем $S' > 0$ при $S > 0$.

21.7. Решение. Заметим, что в данном случае речь идет не о произвольных событиях, а о двух *причинно связанных* событиях. Поскольку скорость передачи взаимодействия не превышает c , для таких двух событий выполняется условие $l < ct$, или $S > 0$ (см. задачу 21.6). В системе отсчета K' при $t' = 0$ величина S' равнялась бы $-l'^2$, т. е. была бы отрицательной (ведь l' не может обратиться в нуль вместе с t' — тогда оба события просто совпали бы). Согласно полученному в задаче 21.6 результату неравенства $S > 0$ и $S' < 0$ не могут выполняться одновременно. Следовательно,

искомой системы K' не существует. Тем более не существует такой системы отсчета, в которой рассматриваемые события происходят в обратном порядке во времени. В такой системе отсчета нарушился бы принцип причинности: следствие не может опережать по времени причину (а что, если после попадания мяча в окно игрок передумает наносить удар?). Как видим, выполнение принципа причинности в релятивистской теории связано с отсутствием сигналов, распространяющихся со сверхсветовой скоростью.

21.8. Ответ: $\lambda = 26,25$ см.

Решение. Поскольку движение излучающих атомов перпендикулярно направлению на Землю, расстояние между источником и приемником волн не меняется. В этом случае частота и длина волны с точки зрения классической физики вообще не должны изменяться (поперечный эффект Доплера отсутствует). Так и происходит, например, для звуковых волн. А вот для электромагнитных волн, излучаемых достаточно быстрым источником, поперечный эффект Доплера наблюдается. Он связан с различием в промежутках времени, измеряемых в «неподвижной» и «движущейся» системах отсчета. По этой причине период T излучаемых радиоволн с точки зрения земного наблюдателя больше:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где $T_0 = \frac{\lambda_0}{c}$. Следовательно, $\lambda = cT = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1,25\lambda_0 = 26,25$ см.

Заметим, что при $v \ll c$ это соотношение принимает вид

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right),$$

т. е. $\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v^2}{2c^2}$ (см. математическое приложение). Отсюда можно видеть, что даже для $v = 30$ км/с (скорость орбитального движения Земли) относительное увеличение длины волны составляет всего $5 \cdot 10^{-9}$. Таким образом, поперечный эффект Доплера является чисто релятивистским эффектом.

21.9. Ответ: $u = 4,0$ см/сут.

Решение. За время Δt_0 в системе отсчета «Корабль» стебель удлиняется на $\Delta l = u_0 \Delta t_0$. В системе отсчета «Земля» удлинение стебля такое же (поперечные размеры одинаковы в обеих системах отсчета), но прошедшее время Δt больше: $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Поэтому

$$u = \frac{\Delta l}{\Delta t} = u_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = 4,0 \text{ см/сут.}$$

Фактически мы получили фор-

мулу преобразования «поперечной» составляющей скорости любого движения при переходе в другую систему отсчета.

21.10. Решение. Описанная в задаче ситуация действительно возможна. Однако противоречия с постулатами теории относительности при этом не возникает. Согласно этим постулатам превысить скорость света в вакууме не может ни один *материальный объект* (частица, волна); рассмотренное же в данной задаче светлое пятно, образованное точками пересечения световых лучей с плоскостью экрана, материальным объектом не является. В самом деле: разве при движении светлого пятна происходит перенос энергии или информации от одной точки экрана к другой? Если между двумя точками *A* и *B* экрана поставить непрозрачное препятствие, это не помешает светлому пятну пробежать от *A* к *B* — ведь на самом деле свет идет не из *A* в *B*, он приходит в точку *B* совсем с другой стороны — от лазера. Так что полученная сверхсветовая скорость не должна нас смущать. Советуем читателю самостоятельно убедиться, что светлое пятно от расположенного на Земле лазера перемещается по поверхности Луны со сверхсветовой скоростью даже при довольно медленном повороте лазера.

Другая ситуация, в которой *геометрическая точка* может двигаться быстрее света, рассмотрена в задаче 1.21.

21.11. Ответ: $F = \frac{ma}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Решение. Второй закон Ньютона в динамике специальной теории относительности записывается в виде $F = \frac{dp}{dt}$, где импульс тела

$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. В скалярном виде получаем (ср. с задачей 21.14)

$$F = m \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{m \frac{dv}{dt}}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ma}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

21.12. Ответ: $v = c \frac{eEt}{\sqrt{m^2c^2 + e^2E^2t^2}}$; $\tau = \frac{mc}{\sqrt{3}eE}$; см. рисунок.

Решение. Из уравнения движения $F = \frac{dp}{dt}$ при $F = eE = \text{const}$

следует: $p = eEt$. Поскольку $p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, получаем

$$v = \frac{pc}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}} = \frac{ceEt}{\sqrt{m^2c^2 + e^2E^2t^2}}.$$

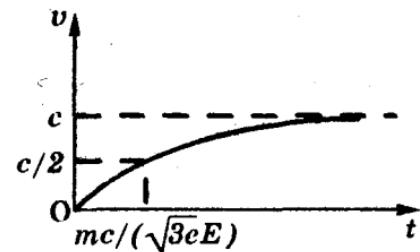
Проанализируем эту формулу. При малых t , когда $eEt \ll mc$, скорость растет линейно со временем:

$$v = \frac{eEt}{m}$$

(нерелятивистское движение является, естественно, равноускоренным).

Затем рост скорости замедляется,

при $eEt \gg mc$ получаем $v \approx c$ (ультрарелятивистский случай). График зависимости $v(t)$ приведен на рисунке.



21.13. Ответ: $s = \frac{c}{eE}(\sqrt{m^2c^2 + e^2E^2t^2} - mc)$.

Решение. Для ответа на первый вопрос проще всего воспользоваться законом сохранения энергии:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 + A,$$

где A — работа электрического поля: $A = Fs = eEs$. Отсюда

$$s = \frac{mc^2}{eE} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).$$

Подставляя в это выражение формулу для v (см. задачу 21.12), получаем¹⁾

$$s = \frac{c}{eE}(\sqrt{m^2c^2 + e^2E^2t^2} - mc).$$

В нерелятивистском случае (при $eEt \ll mc$) можно записать

$$s = \frac{mc^2}{eE} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{eEt}{mc} \right)^2} - 1 \right) = \frac{eEt^2}{2m}$$

(см. математическое приложение). Это, конечно, соответствует равноускоренному движению с ускорением $a = \frac{eE}{m}$. В ультрарелятивистском случае (при $eEt \gg mc$) получаем $s = ct$.

21.14. Ответ: $F = \frac{ma}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

Решение. Очевидно, при $v = \text{const}$ ускорение a представляет собой нормальное (центростремительное) ускорение. Воспользовавшись соотношением $F = \frac{dp}{dt}$, мы можем при дифференцировании вынести постоянный множитель $\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. В результате получим:

¹⁾ Эту формулу можно получить и с помощью интегрирования: $s = \int_0^t v(t) dt$.

$$F = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{ma}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Сравнивая эту формулу с ответом задачи 21.11, мы видим, что «релятивистская масса» $m_{\text{рв}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ не всегда является коэффициентом пропорциональности между a и F : «поперечная» масса (при нормальном ускорении) и «продольная» (при тангенциальном) — различны. Следовательно, a и F не всегда даже направлены одинаково! А это значит, что масса как коэффициент пропорциональности между a и F теряет смысл в механике теории относительности. По этой и ряду других причин многие физики предпочитают не использовать термин «релятивистская масса». В современной научной литературе «масса» означает обычно массу покоя.

21.15. Ответ: $T = \frac{2\pi m}{eB\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. См. рисунок.

Решение. При движении в циклотроне на протон действует сила Лоренца $F = evB$, где B — индукция однородного магнитного поля. Эта сила сообщает протону центростремительное ускорение $a = \frac{v^2}{R}$, где R —

радиус окружности, по которой движется протон. Из соотношения $F = \frac{ma}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (см. задачу 21.14) находим

$$R = \frac{mv}{eB\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

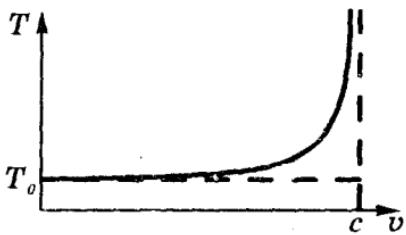
Период движения по окружности

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{eB\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

При $v \ll c$ период не зависит от скорости частицы: $T = \frac{2\pi m}{eB}$ (см. задачу 15.13). График зависимости $T(v)$ приведен на рисунке.

21.16. Ответ: $W = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$, $W_k = W - mc^2$.

Решение. Полная энергия частицы $W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, а импульс $p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Из последнего соотношения находим



$$v^2 = \frac{c^2 p^2}{m^2 c^2 + p^2},$$

откуда

$$W = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}.$$

Кинетическая энергия (энергия движения) представляет собой разность между полной энергией частицы и ее энергией покоя: $W_k = W - mc^2$. Она показывает, какую энергию нужно передать неподвижному телу для разгона до скорости v .

21.17. Ответ: скорость электрона должна быть на 44,5 м/с меньше скорости света в вакууме.

Решение. Из соотношения $\frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_p c^2$ получаем

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2}.$$

Поскольку $\frac{m_e}{m_p} = 5,45 \cdot 10^{-4} \ll 1$, можно записать

$$v = c \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2\right)$$

(см. математическое приложение). Таким образом, $c - v = \frac{c}{2} \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2 = 44,5$ м/с. На современных ускорителях электронам сообщается на порядок большая энергия, так что $c - v < 50$ см/с. И хотя при этом электрон движется почти со скоростью света, сам свет по отношению к такому электрону движется все равно со скоростью c !

21.18. Ответ: $\Delta m = 6,7 \cdot 10^{-6}$ г.

Решение. Согласно соотношению Эйнштейна

$$\Delta m = \frac{W_k}{c^2} = \frac{mv^2}{2c^2} = 6,7 \cdot 10^{-6} \text{ кг.}$$

Эту массу можно измерить, если речь идет о пылинке, однако такое изменение массы тысячетонного поезда наблюдать невозможно.

21.19. Ответ: на $3,7 \cdot 10^{-8}$ г.

Решение. При замерзании вода отдает энергию λm , где λ — удельная теплота плавления льда. Согласно соотношению Эйнштейна при этом масса уменьшается на $\Delta m = \frac{\lambda m}{c^2} = 3,7 \cdot 10^{-11}$ кг.

21.20. Ответ: $v = 2,6 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. Кинетическая энергия W_k частицы связана с ее полной

энергией $W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ соотношением $mc^2 + W_k = W$ (здесь m — масса покоя частицы). При $W_k = mc^2$ получаем $\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{2}$, откуда $v = \frac{c\sqrt{3}}{2} = 2,6 \cdot 10^8$ м/с.

21.21. Ответ: $v_p = 1,2 \cdot 10^7$ м/с, $v_e = 2,7 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. Можно воспользоваться законом сохранения энергии

$$mc^2 + eU = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где e — элементарный заряд; отсюда

$$v = c \frac{\sqrt{eU(2mc^2 + eU)}}{mc^2 + eU}.$$

В данном случае удобно измерять энергию в килоэлектронвольтах: $eU = 700$ кэВ, энергия покоя протона $m_p c^2 = 938 \cdot 10^3$ кэВ, энергия покоя электрона $m_e c^2 = 511$ кэВ. Подставляя в формулу для v эти значения, получаем $v_p = 0,039c = 1,2 \cdot 10^7$ м/с, $v_e = 0,91c = 2,7 \cdot 10^8$ м/с. Поскольку для протона $m_p c^2 \gg eU$, можно заменить $2m_p c^2 + eU$ на $2m_p c^2$ и $m_p c^2 + eU$ на $m_p c^2$, что приводит к хорошо известной формуле классической физики $v_p = \sqrt{\frac{2eU}{m_p}}$ (при $v_p \ll c$ закон сохранения энергии может быть записан в виде $\frac{m_p v_p^2}{2} = eU$).

21.22. Ответ: $v_1 = \frac{v + u}{1 + vu/c^2}$, $v_2 = \frac{v - u}{1 - vu/c^2}$,

$$p = \frac{2mv}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}}.$$

Решение. Для определения скоростей v_1 и v_2 проще всего воспользоваться релятивистским правилом сложения скоростей:

$$v_1 = \frac{v + u}{1 + vu/c^2}, \quad v_2 = \frac{v - u}{1 - vu/c^2}.$$

Суммарный импульс разлетающихся шариков

$$p = \frac{mv_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} + \frac{mv_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{2mv}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}}.$$

До выстрела суммарный импульс шариков был меньше:

$$p_0 = \frac{2mv}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Однако следует учесть, что сжатая пружина обладала потен-

циальной энергией, которая при выстреле перешла в кинетическую энергию шариков:

$$W = 2mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right).$$

Это энергия пружины в той системе отсчета, в которой пружина неподвижна, т. е. добавка к ее энергии покоя. Энергии W соответствует добавка $m_1 = \frac{W}{c^2}$ к массе покоя. При движении со скоростью u этой добавке к массе соответствует импульс

$$p_1 = \frac{m_1 v}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2mv}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right).$$

После выстрела импульс p_1 передается шарикам. Как и следовало ожидать, $p_0 + p_1 = p$ в полном соответствии с законом сохранения импульса. Отметим, что масса покоя системы до распада больше суммарной массы покоя образовавшихся при распаде «осколков» (для ядерной физики это обычная ситуация).

21.23. Ответ: $M = \frac{2m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$, $p_1 = p_2 = \frac{2mi}{1 - u^2/c^2}$.

Решение. Начнем с определения величины p_2 , совпадающей с импульсом второго осколка:

$$p_2 = \frac{mv_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{2mi}{1 - u^2/c^2}$$

(см. задачу 21.4). На первый взгляд может показаться, что начальный импульс частицы $p_1 = \frac{2mi}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$, и поэтому $p_1 < p_2$. Однако следует учесть, что масса покоя M исходной частицы не равна $2m$. Закон сохранения энергии в системе отсчета K' (см. задачу 21.4) записывается в виде

$$Mc^2 = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

откуда $M = \frac{2m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} > 2m$. Начальный импульс частицы

$$p_1 = \frac{Mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2mi}{1 - u^2/c^2}.$$

Таким образом, $p_1 = p_2$ в полном соответствии с законом сохранения импульса.

21.24. Ответ: $u = 0,5 \text{ c}$; $M = 2,3 \text{ m}$.

Решение. Согласно законам сохранения энергии и импульса должны выполняться соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + mc^2 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{Mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{array} \right.$$

Разделив почленно второе уравнение на первое, получим

$$u = \frac{v}{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0,5 \text{ с.}$$

Это скорость центра масс (см. задачу 21.5). Подставляя значение u в любое из уравнений системы, получим

$$M = m \frac{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - v^2/c^2})}}{(1 - v^2/c^2)^{1/4}} = 2,3m.$$

Разумеется, при $v \ll c$ мы получили бы $M \approx 2m$. При реальных распадах нестабильных ядер и элементарных частиц расчеты усложняются: заметную часть энергии и импульса могут уносить кванты электромагнитного излучения и нейтрино.

21.25. Ответ: $W = 10400 \text{ ГэВ.}$

Решение. В обоих случаях должна быть одинакова скорость и движения одного из протонов в системе отсчета, связанной с другим протоном. При энергии W_1 скорость v протона относительно неподвижной системы отсчета определяется из соотношения $W_1 = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Эта скорость $v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_p c^2}{W_1}\right)^2}$. При $W_1 \gg m_p c^2$ скорость v близка к скорости света. Согласно релятивистскому закону сложения скоростей

$$u = \frac{2v}{1 + v^2/c^2} = \frac{2c\sqrt{1 - (m_p c^2/W_1)^2}}{2 - (m_p c^2/W_1)^2}.$$

Именно такую скорость должен иметь протон при бомбардировке неподвижной мишени. При этом его энергия

$$W = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2W_1^2}{m_p c^2} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_p c^2}{W_1}\right)^2\right).$$

При $W_1 \gg m_p c^2$ (в данном случае это условие выполняется) получаем $W = \frac{2W_1^2}{m_p c^2} = 10400 \text{ ГэВ.}$ Полученная формула объясняет преимущества ускорителей на встречных пучках в области сверхвысоких энергий частиц. Она же показывает, что выигрыши в энергии при использовании встречных пучков существенно больше для легких частиц (например, электронов).

21.26. Ответ: $W = \sqrt{\frac{W_1 m_e c^2}{2}} = 196 \text{ МэВ.}$

Указание. См. задачу 21.25. В данном случае W_1 и W намного превышают энергию покоя электрона.

22.1. Ответ: $6,3 \cdot 10^{15}$.

Решение. Энергия излучения, испущенного за время $t = 1$ с, равна Pt , а энергия каждого кванта равна $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$. Значит, количество испущенных фотонов $N = \frac{Pt\lambda}{hc} = 6,3 \cdot 10^{15}$.

22.2. Ответ: $\lambda = \frac{hc}{nW_0} = 3,4 \cdot 10^{-7}$ м.

22.3. Ответ: $U = 41$ кВ.

Решение. При разгоне в рентгеновской трубке электроны приобретают кинетическую энергию $W_k = eU$; эта энергия при ударе электрона об анод переходит в энергию излучаемых фотонов и во внутреннюю энергию анода. Очевидно, энергия излучаемого фотона $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ не может превышать W_k ; поэтому $\frac{hc}{\lambda_{\min}} = eU$. Отсюда $U = \frac{hc}{e\lambda_{\min}} = 41$ кВ.

22.4. Ответ: $v = 580$ км/с.

Решение. Работа выхода A для калия равна минимальной энергии фотона, вызывающего фотоэффект:

$$A = h\nu_{\min} = \frac{hc}{\lambda_{\max}}.$$

Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта $h\nu = A + \frac{mv^2}{2}$,

$$\text{откуда } v = \sqrt{\frac{2h\nu(\lambda_{\max} - \lambda)}{m\lambda\lambda_{\max}}} = 5,8 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

22.5. Ответ: $v < v_0 + \frac{eU}{h} = 1,3 \cdot 10^{15}$ Гц.

22.6. Ответ: $U_2 = 0,51$ В.

Решение. Запирающее напряжение U связано с максимальной кинетической энергией фотоэлектронов W_k соотношением $W_k = eU$. Поскольку $v = \frac{c}{\lambda}$, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{hc}{\lambda_1} = A + eU_1, \\ \frac{hc}{\lambda_2} = A + eU_2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $U_2 = U_1 + \frac{hc}{e} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = 0,51$ В.

22.7. Ответ: $\frac{I}{c}; \frac{2I}{c}$.

Решение. Легче всего ответить на поставленные вопросы, рассматривая излучение как поток фотонов с энергией W_0 и импульсом $\frac{W_0}{c}$ (классическая теория электромагнитного поля дает ту же величину светового давления). При падении на черную поверхность фотон поглощается, передавая поверхности импульс $\frac{W_0}{c}$. За время Δt на поверхность площадью S падает излучение с энергией $W = IS\Delta t$, содержащее $\frac{W}{W_0}$ фотонов. Значит, за это время поверхность получает импульс

$$\frac{W}{W_0} \cdot \frac{W_0}{c} = \frac{W}{c} = \frac{IS\Delta t}{c}.$$

Согласно второму закону Ньютона переданный импульс равен $F\Delta t = p_n S\Delta t$. Следовательно, $p_n = \frac{I}{c}$. В случае зеркальной поверхности падающие фотоны отражаются, изменяя свой импульс на противоположный. При этом каждый фотон передает зеркальной поверхности импульс $\frac{2W_0}{c}$, вдвое больший, чем в случае черной поверхности. Поэтому и давление излучения на зеркальную поверхность вдвое больше: $p_s = 2p_n = \frac{2I}{c}$.

22.8. Ответ: $p = \frac{2I\cos^2\alpha}{c}$.

Решение. Давление света на поверхность обусловлено передачей импульса падающих на эту поверхность фотонов. Пусть энергия одного фотона W_0 , тогда его импульс $P_0 = \frac{W_0}{c}$. При зеркальном

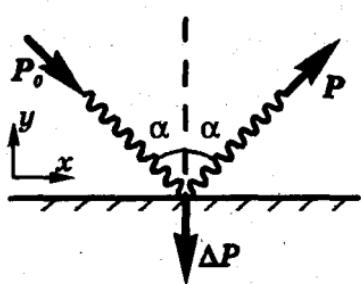


Рис. а

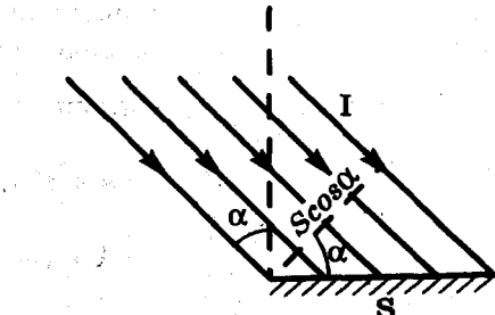


Рис. б

отражении от поверхности проекция импульса фотона на ось x не изменяется, а проекция на ось y изменяется на противоположную: $P_y = -P_{0y}$ (см. рис. *a*). Значит, действующая на поверхность сила направлена по нормали к поверхности, причем каждый фотон передает поверхности импульс $\Delta P = 2P_{0y} = \frac{2W_0 \cos \alpha}{c}$. Согласно второму закону Ньютона можно записать:

$$F \Delta t = \frac{2N W_0 \cos \alpha}{c},$$

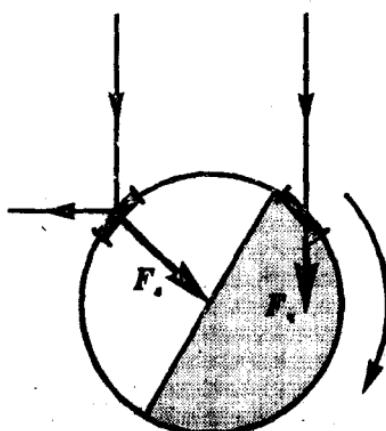
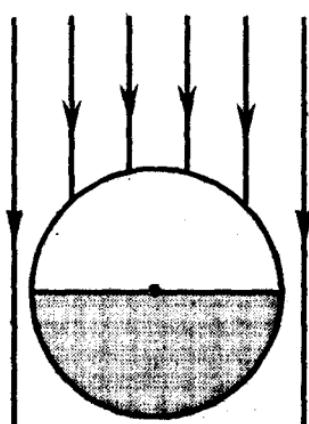
где N — количество падающих за время Δt фотонов. Для участка поверхности площадью S (см. рис. *b*) энергия падающего за время Δt излучения $W = IS\Delta t \cos \alpha$, так что

$$N = \frac{W}{W_0} = \frac{IS\Delta t \cos \alpha}{W_0}.$$

Отсюда находим $p = \frac{F}{S} = \frac{2I \cos^2 \alpha}{c}$.

22.9. Ответ: зеркальной стороной к Солнцу.

Решение. На первый взгляд может показаться, что необходимо сравнивать величины светового давления на черную и зеркальную половины цилиндра. Однако поворот цилиндра зависит не от силы светового давления, а от момента этой силы. Сила F_s светового давления на небольшой зеркальный участок поверхности (см. рис. *a*) направлена нормально к поверхности, т. е. вдоль радиуса (см. задачу 22.8); поэтому момент этой силы равен нулю. Момент же силы F_s светового давления на черные участки поверхности стремится повернуть цилиндр, как показано на рис. *a*. На рис. *b*

Рис. *a*Рис. *b*

показано положение устойчивого равновесия цилиндра. При очень малом трении цилиндр может совершать колебания вокруг этого положения.

22.10. Ответ: $\lambda = 2,4 \cdot 10^{-12}$ м, $v = 2,1 \cdot 10^8$ м/с, $\frac{W}{W_0} = 1,41$.

Решение. Энергия кванта $W_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$. Приравнивая это выражение величине mc^2 , где m — масса покоя электрона, получаем $\lambda = \frac{h}{mc} = 2,4 \cdot 10^{-12}$ м. Это комптоновская длина волны электрона (см. задачу 22.14). Полученная длина волны соответствует жесткому рентгеновскому излучению. Импульс соответствующего фотона $p = \frac{h}{\lambda} = mc$. Скорость v электрона можно определить из соотношения $\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc$. Получаем $v = \frac{c}{\sqrt{2}}$ = $2,1 \cdot 10^8$ м/с. Поскольку $W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, находим $\frac{W}{W_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1,41$.

22.11. Ответ: не может.

Указание. Предположите, что описанный в задаче процесс возможен, перейдите в систему отсчета центра масс электрона и позитрона и воспользуйтесь законами сохранения энергии и импульса¹⁾.

22.12. Ответ: $v > 2,47 \cdot 10^{20}$ Гц.

Указание. В отличие от процесса, описанного в задаче 22.11, данный процесс возможен, поскольку в этом случае импульс и энергия передаются веществу. Энергия кванта должна превышать энергию покоя пары электрон-позитрон: $h\nu > 2m_e c^2$.

22.13. Решение. Предположим, что этот процесс произошел и скорость электрона изменилась. Тогда в системе отсчета, в которой электрон *после* взаимодействия поконится, процесс выглядит так: движущийся электрон поглощает фотон и останавливается. Это очевидным образом противоречит закону сохранения энергии. Однако возможен процесс, при котором электрон, поглотив фотон, испускает другой фотон (см. задачу 22.14).

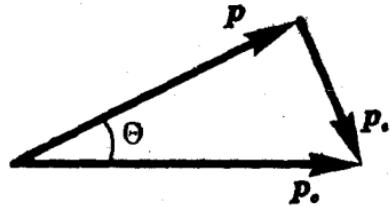
22.14. Ответ: $\Delta\lambda = \frac{2h}{mc} \sin \frac{\theta}{2}$, где m — масса покоя электрона.

¹⁾ Полученный в задаче 22.11 ответ является частным случаем более общего результата (см. задачи 21.22 и 21.23): распад частицы на «сколки» возможен лишь в том случае, когда масса покоя этой частицы больше суммы масс трех «сколков».

Решение. Применим к рассматриваемому процессу законы сохранения энергии и импульса:

$$\begin{cases} p_0 = p + p_e, \\ mc^2 + W_0 = W + W_e. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь p_0 — начальный импульс фотона ($p_0 = \frac{h}{\lambda}$); p — его конечный импульс ($p = \frac{h}{\lambda + \Delta\lambda}$); p_e — импульс, переданный электрону; $W_0 = cp_0$ и $W = cp$ — энергии фотона до и после рассеяния; $W_e = c\sqrt{m^2c^2 + p_e^2}$ — энергия электрона после взаимодействия с фотоном; mc^2 — энергия покоя электрона. Применяя теорему косинусов к треугольнику импульсов (см. рисунок), получаем $p_e^2 = p_0^2 + p^2 - 2p_0 p \cos\Theta$. Подставим это выражение в формулу (1):



$$\sqrt{m^2c^2 + \frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{(\lambda + \Delta\lambda)^2} - \frac{2h^2 \cos\Theta}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)}} = mc + \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda + \Delta\lambda}.$$

Возведя обе части последнего уравнения в квадрат и упростив полученное соотношение, находим

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\Theta) = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\Theta}{2}.$$

Мы видим, что $\Delta\lambda$ не зависит от длины волны падающего излучения. Поскольку величина $\Delta\lambda$ весьма мала — она характеризуется комптоновской длиной волны электрона ($\frac{h}{mc} = 2,4 \cdot 10^{-12}$ м), эффект Комптона наблюдается только для достаточно коротковолновых излучений. За открытие (1922 г.) и объяснение описанного в этой задаче эффекта американский физик Артур Комптон был удостоен Нобелевской премии.

22.15. Ответ: $W_k = 0,10$ МэВ, $v = 1,6 \cdot 10^8$ м/с, $\Theta = 33^\circ$, $\alpha = 58^\circ$.

Решение. Согласно полученному в задаче 22.14 результату $\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\Theta)$. Следовательно, $\Theta = \arccos\left(1 - \frac{mc(\lambda_2 - \lambda_1)}{h}\right) = 33^\circ$.

Кинетическая энергия электрона равна энергии, потерянной фотоном:

$$W_k = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = 1,66 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,10 \text{ МэВ.}$$

Полная энергия электрона $W = mc^2 + W_k = 0,61$ МэВ. Поскольку

ку $W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, получаем

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{W}\right)^2} = 0,55 c = 1,6 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Разумеется, при такой большой скорости электронов применять законы классической механики нельзя. Для определения угла α найдем импульс электрона

$p_e = \frac{vW}{c^2}$ и применим теорему синусов к треугольнику импульсов (см. рисунок):

$$\frac{p_e}{\sin \Theta} = \frac{p}{\sin \alpha},$$

где $p = \frac{h}{\lambda_2}$ — импульс рассеянного фотона. Отсюда

$$\sin \alpha = \frac{hc^2 \sin \Theta}{\lambda_2 v W} = 0,85 \text{ и } \alpha = 58^\circ.$$

22.16. Ответ: сила увеличится в 2,4 раза.

Решение. Пусть за время Δt на поверхность пластины попадает N фотонов. Энергия каждого из них $W_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, импульс $p_0 = \frac{h}{\lambda}$.

Поскольку W_0 меньше работы выхода электронов с поверхности серебра, все фотоны зеркально отражаются, передавая пластине суммарный импульс $2Np_0$. На пластину действует сила

$$F_1 = \frac{2Np_0}{\Delta t} = \frac{2N}{\Delta t} \cdot \frac{h}{\lambda}.$$

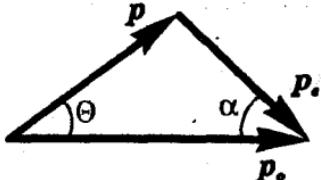
После поворота пластины фотоны начинают выбивать с поверхности лития фотоэлектроны. Из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта находим скорость фотоэлектронов:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{hc}{\lambda} - A \right)},$$

где A — работа выхода для лития. Каждый вылетающий фотоэлектрон передает поверхности импульс $p_1 = mv$. Следовательно, на поверхность лития при падении света действует сила

$$F_2 = F_1 + \frac{N}{100\Delta t} \sqrt{2m \left(\frac{hc}{\lambda} - A \right)}$$

(мы пренебрегли тем, что первое слагаемое в этой формуле должно быть уменьшено на $\frac{1}{200}$ своей величины, потому что фотон, вызвавший вылет фотоэлектрона, не отражается, а поглощается).



Итак,

$$\frac{F_2}{F_1} = 1 + \frac{\lambda}{200h} \sqrt{2m\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)} = 2,4.$$

Такое увеличение силы объясняется тем, что импульс p_1 фотоэлектрона во много раз превышает импульс p_0 выбившего его фотона (в данном случае $\frac{p_1}{p_0} = 274$).

22.17. Ответ: $v = c \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}$.

Решение. Приведенные в условии данные позволяют, применив законы сохранения, найти энергию W и импульс p частицы:

$$W = W_1 + W_2, p = \frac{W_1 - W_2}{c}$$

(мы учли, что импульс фотона с энергией W_0 равен $\frac{W_0}{c}$). Разделив друг на друга формулы для импульса релятивистской частицы ($p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$) и для ее энергии ($W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$), получаем выражение для скорости частицы: $v = \frac{pc^2}{W} = c \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}$.

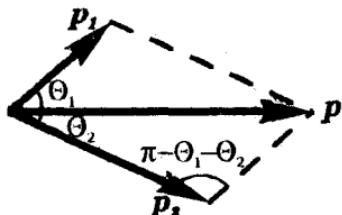
22.18. Ответ: $v = c \frac{\sin(\Theta_1 + \Theta_2)}{\sin \Theta_1 + \sin \Theta_2}$ при Θ_1, Θ_2 не равных 0 или π .

Решение. Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$W = h\nu_1 + h\nu_2, p = p_1 + p_2.$$

Здесь W, p — энергия и импульс распавшейся частицы, p_1 и p_2 — импульсы фотонов, ν_1 и ν_2 — их частоты. Воспользовавшись теоремой синусов (см. рисунок), получаем

$$p = p_1 \frac{\sin(\Theta_1 + \Theta_2)}{\sin \Theta_2}, p_2 = p_1 \frac{\sin \Theta_1}{\sin \Theta_2}.$$



Поскольку $p_1 = \frac{h\nu_1}{c}$, $p_2 = \frac{h\nu_2}{c}$, можно записать:

$$p = \frac{h\nu_1 \sin(\Theta_1 + \Theta_2)}{c \sin \Theta_2}, W = h\nu_1 \left(1 + \frac{\sin \Theta_1}{\sin \Theta_2}\right).$$

Отсюда (см. задачу 22.17) $v = \frac{pc^2}{W} = c \frac{\sin(\Theta_1 + \Theta_2)}{\sin \Theta_1 + \sin \Theta_2}$.

Заметим, что если $\sin \Theta_1 = \sin \Theta_2 = 0$, задача не имеет решения (ср. с задачей 22.17).

22.19. Ответ: $\Theta_{\min} = 2 \arccos \frac{v}{c}$.

Решение. Поскольку $\sin \Theta_1 \neq 0$ и $\sin \Theta_2 \neq 0$, можно воспользоваться полученной в задаче 22.18 формулой

$$v = c \frac{\sin(\Theta_1 + \Theta_2)}{\sin \Theta_1 + \sin \Theta_2}.$$

Записав ее в виде

$$v = c \frac{\cos\left(\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{2}\right)},$$

получим $\cos \frac{\Theta}{2} = \frac{v}{c} \cos \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{2}$, где $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$ — угол разлета фотонов.

Из этого соотношения следует, что $\Theta \geq 2 \arccos \frac{v}{c}$, причем минимальное значение угла разлета $\Theta_{\min} = 2 \arccos \frac{v}{c}$ достигается при $\Theta_1 = \Theta_2$, т. е. при симметричном разлете двух фотонов одинаковой частоты.

22.20. Ответ: $v = 0,27c$.

Указание. Мюон и нейтрино имеют равные по величине импульсы p . Энергия нейтрино равна cp , энергия мюона $W_2 = c\sqrt{m_2^2 c^2 + p^2}$ (см. задачу 21.16). Согласно закону сохранения энергии

$$m_1 c^2 = c\sqrt{m_2^2 c^2 + p^2} + pc.$$

Отсюда $p = c \frac{m_1^2 - m_2^2}{2m_1}$, $v = \frac{pc^2}{W_2} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2 + m_2^2} c = 0,27c$.

22.21. Ответ: $\lambda_1 = 1,7 \cdot 10^{-14}$ м, $\lambda_2 = 3,6 \cdot 10^{-13}$ м.

Решение. Кинетическая энергия частиц после разгона одинакова: $W_k = eU = 3,0$ МэВ. Эта величина намного меньше энергии покоя протона, так что движение протона можно считать нерелятивистским. Поскольку

$$W_k = \frac{m_p v_p^2}{2} = \frac{p_p^2}{2m_p},$$

находим $p_p = \sqrt{2m_p W_k}$ и $\lambda_1 = \frac{h}{p_p} = 1,7 \cdot 10^{-14}$ м. Энергия же покоя электрона $m_e c^2$ существенно меньше W , т. е. движение электрона является релятивистским. Из соотношения

$$m_e c^2 + W_k = c\sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2}$$

находим $p_e = \frac{W_k}{c} \sqrt{1 + \frac{2m_e c^2}{W_k}}$; следовательно, $\lambda_2 = \frac{h}{p_e} = 3,6 \cdot 10^{-13}$ м.

Заметим, что применение для электрона формул классической механики дало бы значение $\lambda_2 = \lambda_1 \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = 7,1 \cdot 10^{-13}$ м, завышенное почти в 2 раза.

22.22. Ответ: $v = 1300$ м/с.

Решение. Из условия задачи следует, что де-бройлевская длина волны электрона такая же, как длина волны света: $\frac{h}{p} = \lambda$. Отсюда $v = \frac{p}{m} = \frac{h}{m\lambda} = 1300$ м/с. Для электронов это очень маленькая скорость. Обычно де-бройлевская длина волны электронов намного меньше. Так, в атоме водорода (см. задачи 22.23 и 22.24) она порядка 0,3 нм.

22.23. Ответ: $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mr}}$, $W = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$.

Решение. Электрон вращается по круговой орбите под действием силы Кулона $F_k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, сообщающей ему центростремительное ускорение $a = \frac{v^2}{r}$. Из второго закона Ньютона находим

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mr}}. \quad (1)$$

Механическая энергия электрона $W = W_k + W_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Подставляя в это выражение значение v из формулы (1), получаем $W = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$. Полная энергия получилась отрицательной, как это и должно быть для связанной частицы: отрицательная потенциальная энергия притяжения превышает по модулю кинетическую энергию, и поэтому частица не может уйти «на бесконечность», т. е. сколь угодно далеко от притягивающего центра.

22.24. Ответ: $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$ м, $W_i = 13,6$ эВ.

Решение. Де-бройлевская длина волны электрона в атоме водорода

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{e} \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 r}{m_e}}$$

(см. задачу 22.23). Из условия $\lambda = 2\pi r$ следует, что $r = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} = 5,3 \cdot 10^{-11}$ м. Для ионизации атома (т. е. для удаления электрона на бесконечность) надо сообщить электрону такую энергию, чтобы

полная энергия электрона стала неотрицательной. Поскольку полная энергия электрона в атоме $W = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$, находим $W_1 = |W| = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = 2,2 \cdot 10^{-18}$ Дж = 13,6 эВ.

Согласно теории Бора именно по такой орбите вращается электрон в атоме водорода, когда атом находится в основном состоянии. Некоторые из читателей, несомненно, уже знают, что у электрона в атоме нет никаких орбит: его движение вообще нельзя описывать как движение классической частицы по определенной траектории. Теория Бора представляла собой промежуточный этап между классической физикой и квантовой механикой, но для атома водорода уже эта теория позволила получить правильный порядок размера атома и точное значение энергии ионизации (она действительно равна 13,6 эВ), а также частоты линейчатого спектра водорода.

22.25. Ответ: 12 ч; 7,2 ч; 693 сут.

Решение. Легче ответить на первый вопрос: если через сутки из каждого четырех атомов остался один, то сутки составляют ровно два периода полураспада, т. е. период полураспада равен 12 ч. В общем случае из соотношения $N = N_0 \cdot 2^{-t/T}$ находим

$$T = \frac{t}{\log_2(N_0/N)},$$

где $t = 1$ сут, N_0 — начальное число атомов, $N = N_0 - \Delta N$ — число нераспавшихся атомов (здесь ΔN — число распавшихся атомов). При $\Delta N = 900$ получаем $T = 7,2$ ч; при $\Delta N = 1$ получаем $T = 693$ сут. В последнем случае, при $\Delta N \ll N_0$, формулу для T можно записать (см. математическое приложение) в виде

$$T = \frac{t}{-\log_2(1 - \Delta N/N_0)} \approx \frac{tN_0 \ln 2}{\Delta N}.$$

22.26. Ответ: $t = 80$ сут.

22.27. Ответ: $1,8 \cdot 10^{10}$.

Решение. В образце руды одновременно идут два процесса: распад урана, увеличивающий число атомов тория, и распад тория, уменьшающий число его атомов.

Если эти два процесса не компенсируют друг друга, число атомов тория изменяется со временем. Каков характерный масштаб времени такого изменения? Для ответа на этот вопрос следует учесть, что период полураспада урана во много раз больше, чем период полураспада тория. Поэтому масштаб времени определя-

ется более «быстрым» процессом, т. е. распадом тория. Следовательно, каким бы ни было начальное количество атомов тория, через промежуток времени, малый по сравнению с T_u , но большой по сравнению с T_{Th} (скажем, через тысячу лет), число атомов тория перестанет зависеть от времени (и не будет зависеть от своего начального значения!). Это значит, что количество распадающихся за небольшое время τ будет равно количеству «рождающихся» за это время атомов тория (т. е. распадающихся атомов урана). Число распадающихся за время $\tau \ll T$ радиоактивных атомов $\Delta N = N_0 - N_0 \cdot 2^{-\tau/T} = N_0 t \ln 2/T$ (см. математическое приложение). Приравнивая количества распадающихся за одно и то же время атомов урана и тория, получаем $\frac{N_{Th}}{T_{Th}} = \frac{N_u}{T_u}$. Поскольку

$$N_u = \frac{m N_A}{M} (M — молярная масса урана), \text{ находим окончательно}$$

$$N_{Th} = \frac{N_A m T_{Th}}{M T_u} = 1,8 \cdot 10^{10}.$$

22.28. Ответ: 39,2 МэВ и 5,6 МэВ/нуклон для ядра лития; 225 МэВ и 8,3 МэВ/нуклон для ядра алюминия.

Решение. Дефект масс атомного ядра массой m_n определяется из соотношения

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_n,$$

где Z — атомный номер элемента, $N = A - Z$ — число нейтронов в ядре, A — массовое число. Считая $m_n = m_{ne} - Zm_e$, где m_{ne} — масса нейтрального атома (дефект масс при связывании электронов с ядром ничтожно мал), получаем

$$\Delta m = Z(m_p + m_e) + Nm_n - m_{ne} = Zm_H + Nm_n - m_{ne}.$$

Здесь $m_H = m_p + m_e$ — масса атома водорода 1H . Энергия связи $E_{cb} = \Delta m c^2$.

Для ядра 3Li получаем $\Delta m = 3m_H + 4m_n - m_{Li} = 0,0421$ а.е.м.; $E_{cb} = 0,0421$ а.е.м. $\cdot 931,5$ МэВ/а.е.м. $= 39,2$ МэВ; $\frac{E_{cb}}{A} = 5,6$ МэВ/нуклон. Для ядра ${}^{27}Al$ находим $\Delta m = 0,242$ а.е.м., $E_{cb} = 225$ МэВ, $\frac{E_{cb}}{A} = 8,3$ МэВ/нуклон.

22.29. Ответ: 5 α -распадов и 3 β -распада.

Решение. При β -распаде массовое число ядра не изменяется, а при α -распаде оно уменьшается на 4. В рассматриваемом случае массовое число уменьшилось на 20. Следовательно, произошло пять α -распадов. При каждом из них атомный номер ядра уменьшился

на 2, т. е. в результате одних только α -распадов получилось бы ядро с атомным номером $90 - 5 \cdot 2 = 80$. Следовательно, для того, чтобы образовалось ядро с атомным номером 83, должны произойти три β -распада (при каждом из них атомный номер увеличивается на 1).

22.30. Ответ: 17,6 МэВ.

Решение: Запишем уравнение ядерной реакции:



Масса покоя m_2 образовавшихся частиц меньше массы покоя m_1 частиц, вступивших в реакцию¹⁾, на $\Delta m = 1,89 \cdot 10^{-2}$ а.е.м. Таким образом, при данной реакции выделяется энергия $W_0 = \Delta m c^2 = 1,89 \cdot 10^{-2}$ а.е.м. $\cdot 931,5$ МэВ/а.е.м. = 17,6 МэВ.

22.31. Ответ: $m_s = 50$ т.

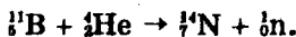
Решение. При единичном акте термоядерного синтеза выделяется энергия $W_0 = 17,6$ МэВ и расходуется ядерное топливо массой $m_0 = 5$ а.е.м. Следовательно, израсходовав топливо массой m , мы освобождаем энергию $W = W_0 \frac{m}{m_0}$. Вода при этом получает количество теплоты $Q = \eta W$, где $\eta = 0,1$. Отсюда получаем

$$m_s = \frac{Q}{c_s \Delta t} = m \frac{\eta W_0}{c_s m_0 \Delta t} = 50 \text{ т.}$$

Это в 50 миллионов раз больше массы израсходованного термоядерного горючего!

22.32. Ответ: ${}^1\text{B} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^4\text{N} + {}^1\text{n}; W = 0,17$ МэВ.

Решение. В ядерную реакцию вступают ядра с суммарным зарядом, равным 7 элементарным зарядам, и массой около 15 а.е.м. Пользуясь законом сохранения заряда, а также тем, что изменение массы покоя при ядерных реакциях намного меньше 1 а.е.м., приходим к выводу: паряду с пейтроном образуется ядро с зарядом +7 элементарных зарядов и массой около 14 а.е.м. Это — ядро ${}^14\text{N}$. Следовательно, уравнение реакции имеет вид



В этой реакции масса покоя частиц уменьшается на $\Delta m = 1,8 \cdot 10^{-4}$ а.е.м. При этом выделяется энергия $W = \Delta m c^2 = 0,17$ МэВ.

22.33. Ответ: ${}^10\text{B} + {}^1\text{n} \rightarrow {}^7\text{Li} + {}^4\text{He}; W = 2,8$ МэВ.

¹⁾Заметим, что для вычисления Δm не обязательно из приведенных в таблице (см. приложение 18) масс атомов вычитать массу электронов — это приведет к изменению m_1 и m_2 на одну и ту же величину ($2m_e$) и не изменит величину Δm .

22.34. Ответ: $W = 2,2 \text{ МэВ}$; $v = 3,4 \cdot 10^{21} \text{ Гц}$.

Решение. Дефект масс ядра дейтерия

$$\Delta m = m_p + m_n - m_d = m_H + m_n - m_D = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ а.е.м.},$$

где m_d — масса дейтрона, m_H — масса атома ^2H , m_D — масса атома ^3H . Следовательно, минимальная энергия гамма-кванта $W = \Delta m c^2 = 2,2 \text{ МэВ}$. Частота $v = \frac{W}{h} = 3,4 \cdot 10^{21} \text{ Гц}$. При решении задачи мы не учитывали кинетической энергии освободившихся нуклонов, поскольку она невелика (подробнее см. задачу 22.35).

22.35. Ответ: $W_k = 3,3 \text{ МэВ}$.

Решение. Может показаться, что ответ на этот вопрос (2,2 МэВ) уже получен в задаче 22.34. Однако это не так. При энергии 2,2 МэВ

импульс гамма-кванта $p_r = \frac{W}{c} = 1,2 \cdot 10^{-21} \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}$, а импульс про-

тона $p_p = \sqrt{2m_p W_k} = 3,4 \cdot 10^{-20} \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}$ (при $W_k < m_p c^2$ можно поль- зоваться формулами классической механики). Как видим, им-

пульс протона почти в 30 раз больше. Максимальная кинетиче-

ская энергия продуктов реакции между протоном и дейтроном

$$W_{\max} \approx \frac{p_r^2}{2m_p} \approx 1 \text{ МэВ},$$

что весьма близко к величине, полученной

при решении задачи 22.34. Поэтому кинетическую энергию обра- зующихся в реакции частиц обязательно следует учесть (при

взаимодействии гамма-кванта с дейтроном $W_{\max} \approx \frac{p_r^2}{2m_p} \approx 10^{-3} \text{ МэВ}$,

что намного меньше поглощаемой в реакции энергии; именно это

и позволило не учитывать кинетической энергии продуктов реакции при решении задачи 22.34). Минимальная величина

$$W_k = \frac{m_p v_0^2}{2} \quad (v_0 \text{ --- скорость налетающего протона})$$

соответствует случаю, когда после разрушения ядра все три нуклона движутся

с одинаковой скоростью v (см. задачу 4.48). Считая $m_p = m_n$,

получаем из закона сохранения импульса $v = \frac{v_0}{3}$. Тогда

$$W_k = \Delta m \cdot c^2 + \frac{3m_p \left(\frac{v_0}{3}\right)^2}{2} = \Delta m \cdot c^2 + \frac{W_k}{3}.$$

Отсюда $W_k = \frac{3\Delta m \cdot c^2}{2} = 3,3 \text{ МэВ}$. Как видим, протон должен иметь энергию, существенно большую, чем гамма-квант.

22.36. Ответ: $W_0 = 4,4 \text{ МэВ}$.

Решение. Масса покоя продуктов ядерной реакции на $\Delta m =$

$= 3,0 \cdot 10^{-3}$ а.е.м. превышает массу покоя вступивших в реакцию частиц. Значит, при реакции поглощается энергия $W_1 = \Delta m \cdot c^2 = 2,8$ МэВ. Однако для осуществления реакции α -частица должна иметь большую кинетическую энергию: ведь часть этой энергии перейдет в кинетическую энергию W_2 ядра бора и нейтрона. Согласно полученному в задаче 4.48 результату максимально возможная часть энергии α -частицы будет «использована» для ядерной реакции, если продукты реакции (ядро бора и нейтрон) будут двигаться с одинаковой скоростью v . Величина v определяется из закона сохранения импульса. Округляя массы частиц (до величин, кратных а.е.м.), находим $v = \frac{4v_0}{11}$, где v_0 — начальная скорость α -частицы. Тогда

$$W_2 = \left(\frac{11m_\alpha}{4} \right) \frac{v^2}{2} = \frac{4}{11} \cdot \frac{m_\alpha v_0^2}{2} = \frac{4}{11} W_0;$$

закон сохранения энергии принимает вид

$$W_0 = W_1 + \frac{4W_0}{11}.$$

Отсюда $W_0 = \frac{11W_1}{7} = 4,4$ МэВ.

22.37. Ответ: $W_2 = 14,9$ МэВ.

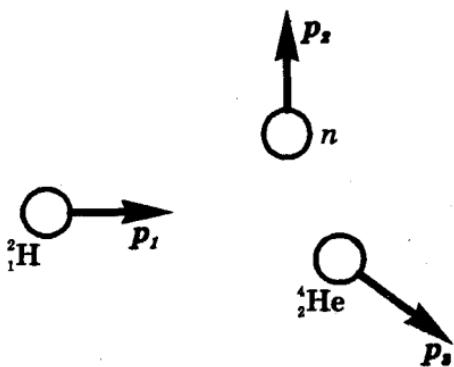
Решение. Поскольку W_1 намного меньше энергии покоя любой из участвующих в процессе частиц, мы можем пользоваться законами классической механики. Согласно полученному в задаче 22.30 результату в данной реакции выделяется энергия $W = 17,6$ МэВ. Поэтому закон сохранения энергии принимает вид:

$$W_1 + W = W_2 + W_3$$

(W_3 — кинетическая энергия образовавшихся α -частиц). Запишем также закон сохранения импульса: $p_1 = p_2 + p_3$ (см. рисунок). Поскольку $p_2 \perp p_1$, получаем $p_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$. Тогда

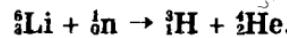
$$W_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} = \frac{p_3^2}{2m_3} = \frac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}{2m_3}.$$

Полагая $m_1 = 2m_2$, $m_3 = 4m_2$, получаем $W_3 = \frac{1}{2}W_1 + \frac{1}{4}W_2$. Подставляя это выражение для W_3 в формулу закона сохранения энергии, находим $W_3 = 0,4(2W + W_1) = 14,9$ МэВ.



22.38. Ответ: $W_n = 0,61$ МэВ.

Решение. Бомбардировка литиевой мишени нейтронами вызывает ядерную реакцию



Масса покоя образовавшихся ядер на $\Delta m = 5,14 \cdot 10^{-3}$ а.е.м. меньше массы покоя вступивших в реакцию частиц, т. е. при реакции выделяется энергия $W = \Delta m \cdot c^2 = 4,8$ МэВ. Если не учитывать энергии, уносимой гамма-излучением, то закон сохранения энергии принимает вид

$$W_n + W = W_t + W_\alpha,$$

где W_t — кинетическая энергия ядра трития. Поскольку величины W , W_α намного меньше энергии покоя любой из рассматриваемых частиц, движение всех частиц является нерелятивистским. Поэтому мы можем пользоваться классическими формулами для кинетической энергии и импульса частиц. Из законов сохранения энергии и импульса для лобового соударения (напомним, что α -частицы вылетают вперед) получаем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m_n v_n^2}{2} - \frac{m_t v_t^2}{2} = W_\alpha - W, \\ m_n v_n = m_t v_t + m_\alpha v_\alpha. \end{array} \right.$$

Считая $m_t = 3m_n$, $m_\alpha = 4m_n$ и обозначив $\frac{v_n}{v_\alpha} = x$, приходим к уравнению

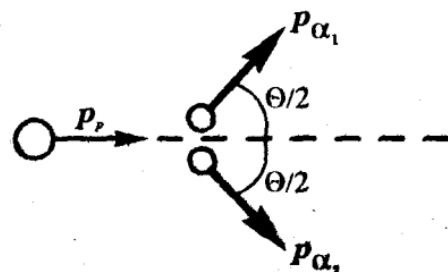
$$x^2 + 4x - 14 + 6 \frac{W}{W_\alpha} = 0$$

(мы учли, что $m_n v_\alpha^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = \frac{W_\alpha}{2}$). Положительный корень этого уравнения $x = 0,90$, т. е. $v_n = 0,90v_\alpha$. Следовательно,

$$W_n = \frac{m_n v_n^2}{2} = \frac{x^2}{4} \cdot \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = \frac{x^2}{4} W_\alpha = 0,61 \text{ МэВ.}$$

22.39. Ответ: $W_2 = 11,2$ МэВ, $\Theta = 161^\circ$.

Решение. В результате рассмотревшейся ядерной реакции масса покоя частиц уменьшается на $\Delta m = 1,86 \cdot 10^{-2}$ а.е.м. Следовательно, при реакции освобождается энергия $W = \Delta m \cdot c^2 = 17,4$ МэВ. Согласно закону сохранения энергии $2W_2 = W_1 + W$, откуда $W_2 = 11,2$ МэВ. Импульсы α -частиц одинаковы (как и их энергии); поэтому из закона сохранения



импульса $p_p = p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2}$ следует, что α -частицы разлетаются симметрично относительно направления движения протона (см. рисунок) и $p_p = 2p_\alpha \cos \frac{\Theta}{2}$ (здесь $p_\alpha = p_{\alpha_1} = p_{\alpha_2}$). Поскольку кинетические энергии всех частиц намного меньше их энергий покоя, можно использовать формулы классической механики:

$$p_p = m_p v_p = \sqrt{2m_p W_1}, \quad p_\alpha = \sqrt{2m_\alpha W_2}.$$

Тогда $\Theta = 2\arccos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_p W_1}{m_\alpha W_2}} = 161^\circ$.

22.40. Ответ: $m = 5,3$ кг.

Решение. Пусть за время $\tau = 1$ сут = 86400 с произошло N актов деления. При этом выделилась энергия NW_0 , так что полезная (электрическая) мощность

$$P = \eta NW_0 / \tau$$

(здесь $\eta = 0,2$). Отсюда $N = P\tau / \eta W_0$; масса израсходованного урана $m = \frac{MN}{N_A} = \frac{MP\tau}{\eta N_A W_0} = 5,3$ кг (здесь M — молярная масса урана).

22.41. Ответ: 150 000 вагонов; $\Delta m = 4,8$ г.

22.42. Ответ: на 65 К.

Решение. Первоначальное количество атомов полония $N_0 = \frac{mN_A}{M}$, где M — молярная масса полония. Через время $\tau \ll T$ число атомов

$$N = N_0 \cdot 2^{-\tau/T} = N_0 \left(1 - \frac{\tau \cdot \ln 2}{T}\right)$$

(см. математическое приложение). Следовательно, число распавшихся ядер полония

$$\Delta N = N_0 - N = \frac{N_0 \tau \ln 2}{T}.$$

Масса покоя ядра полония превышает суммарную массу покоя ядра свинца и α -частицы на $\Delta m = 5,8 \cdot 10^{-3}$ а.е.м., поэтому при распаде каждого ядра выделяется энергия $W_0 = \Delta m \cdot c^2 = 5,4$ МэВ. Калориметру передается энергия

$$Q = W_0 \Delta N = \frac{\tau m N_A \ln 2}{T M} W_0,$$

значит, температура калориметра поднимется на

$$\Delta t = \frac{Q}{C} = \frac{\tau m N_A \ln 2}{T M} \cdot \frac{W_0}{C} = 65 \text{ К.}$$

Мы учли, что теплоемкость самого препарата намного меньше теплоемкости калориметра; кроме того, вылет α -частиц за пределы калориметра считается невозможным.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Для любых неотрицательных чисел a и b выполняется неравенство $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Для доказательства этого неравенства достаточно привести его к виду $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$. Равенство достигается только при $a = b$.

Следствие А. Если $a + b = s$, то $ab < \frac{s^2}{4}$, причем равенство достигается только при $a = b = \frac{s}{2}$.

Следствие Б. Если $ab = p$, то $a + b \geq 2\sqrt{p}$, причем равенство достигается только при $a = b = \sqrt{p}$.

2. Парабола, являющаяся графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, имеет вершину с координатами $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$. При $a > 0$ величина y_0 представляет собой минимальное значение рассматриваемой функции, при $a < 0$ — максимальное.

3. При $|x| \ll 1$ выполняются приближенные равенства:

$$\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x, \quad \sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \approx 1 \mp \frac{x}{2}.$$

Эти соотношения являются частными случаями более общей формулы $(1+x)^a \approx 1 + ax$, где a — любое действительное число.

Полезное следствие: $\sqrt{a^2 \pm x^2} \approx a \pm \frac{x^2}{2a}$.

4. При $|x| \ll 1$ выполняются приближенные равенства:

$$e^{\pm x} \approx 1 \pm x,$$

$$a^{\pm x} \approx 1 \pm x \ln a \quad (\text{например, } 2^{-x} \approx 1 - x \ln 2),$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x,$$

$$\log_a(1 \pm x) \approx \pm \frac{x}{\ln a}.$$

5. Выражение $f(\alpha) = a \sin \alpha + b \cos \alpha$ можно представить в виде:

$$f(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right).$$

Сумма квадратов величин $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ равна единице.

поэтому существует такой угол β , что

$$\sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(т. е. $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$). Следовательно,

$$f(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \beta).$$

Следствие А. Максимальное значение рассматриваемой функции равно $\sqrt{a^2 + b^2}$ и достигается при $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ (например, функция

$f(\alpha) = \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha$ приводится к виду $f(\alpha) = 2 \sin(\alpha + \frac{\pi}{3})$; ее максимальное значение равно 2 и достигается при $\alpha = \frac{\pi}{6}$).

Следствие Б. Сумма гармонических колебаний одинаковой частоты представляет собой гармоническое колебание той же частоты.

6. Средние значения периодических функций за период:

$$\overline{\sin \phi} = \overline{\cos \phi} = \overline{\sin 2\phi} = \overline{\cos 2\phi} = 0,$$

$$\overline{\sin^2 \phi} = \overline{\cos^2 \phi} = \frac{1}{2}.$$

7. Если прямая лежит в плоскости xOy и проходит через точки $(x_0, 0)$ и $(0, y_0)$, то ее уравнение имеет вид $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$.

8. Площадь поверхности сферы $S = 4\pi R^2$, где R — радиус сферы.

Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — радиус шара.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Плотность веществ

Твердые тела		Жидкости		Газы (при нормальных условиях)	
Вещество	ρ , кг/м ³	Вещество	ρ , кг/м ³	Вещество	ρ , кг/м ³
Алюминий	2700	Бензин	700	Гелий	0,18
Железо	7800	Вода	1000	Водород	0,09
Латунь	8500	Керосин	800	Воздух	1,29
Лед	900	Нефть	800	Кислород	1,43
Медь	8900	Ртуть	13600		
Никель	8900	Спирт	800		
Свинец	11300				
Сталь	7800				
Стекло	2500				

2. Тепловые свойства веществ

Твердые тела

Вещество	Удельная теплоемкость, кДж/(кг · К)	Температура плавления, °C	Удельная теплота плавления, кДж/кг
Алюминий	0,88	660	380
Вольфрам	0,13	3387	185
Железо	0,46	1535	270
Лед	2,1	0	330
Медь	0,38	1083	180
Свинец	0,13	327	25
Сталь	0,46	1400	82

Жидкости

Вещество	Удельная теплоемкость, кДж/(кг · К)	Температура кипения ¹⁾ , °C	Удельная теплота парообразования ²⁾ , МДж/кг
Вода	4,2	100	2,3
Спирт	2,4	78	0,85

¹⁾ При нормальном давлении.

²⁾ При нормальном давлении и температуре кипения.

Газы (при постоянном давлении)

Вещество	Удельная теплоемкость, кДж/(кг·К)
Водород	14,3
Воздух	1,01
Кислород	0,91

3. Скорость звука при 20°C, м/с

4. Поверхностное напряжение жидкостей при 20°C, мН/м

Воздух	340	Вода	73
Вода	1500	Ртуть	510

5. Зависимость давления p_h и плотности ρ_h насыщенного водяного пара от температуры t

$t, ^\circ\text{C}$	p_h, kPa	$\rho_h, \text{г}/\text{м}^3$	$t, ^\circ\text{C}$	p_h, kPa	$\rho_h, \text{г}/\text{м}^3$
0	0,61	4,8	20	2,33	17,3
2	0,71	5,6	30	4,24	30,4
4	0,81	6,4	40	7,37	51,2
6	0,93	7,3	50	12,34	82,9
8	1,06	8,3	90	70,11	423,3
10	1,23	9,4	200	1560	7870
18	2,07	15,4	300	8600	46250

6. Удельная теплота сгорания топлива, МДж/кг

7. Температурный коэффициент линейного расширения твердых тел $\alpha, 10^{-5} \text{ К}^{-1}$

Бензин	46	Железо	1,2
Дерево	10	Медь	1,7
Керосин	46	Сталь	1,2

8. Предел прочности на растяжение $\sigma_{\text{пп}}$ и модуль упругости E

9. Диэлектрическая проницаемость

Вещество	$\sigma_{\text{пп}}, \text{МПа}$	$E, \text{ГПа}$	Керосин	2,1
Алюминий	100	70	Парафин	2
Медь	50	120	Слюдя	7
Сталь	500	200	Стекло	7

10. Удельное сопротивление ρ при 20°C и температурный коэффициент сопротивления α проводников

Вещество	ρ , 10^{-8} Ом · м	α , К $^{-1}$	Вещество	ρ , 10^{-8} Ом · м	α , К $^{-1}$
Алюминий	2,8	0,0042	Медь	1,7	0,0043
Вольфрам	5,5	0,0048	Свинец	21	0,0037
Железо	9,8	0,006	Сталь	12	0,006
Латунь	7,1	0,001	Уголь	4000	- 0,0008

11. Работа выхода электронов, эВ

Литий	2,4
Серебро	4,3
Цинк	4,2

12. Показатель преломления (средний для видимых лучей)

Вода	1,33
Воздух	1,00029
Стекло	1,60

13. Относительная атомная масса некоторых изотопов¹⁾, а.е.м.

Изотоп	Масса нейтрального атома	Изотоп	Масса нейтрального атома
^1H (водород)	1,00783	^{10}B (бор)	10,01294
^2H (дейтерий)	2,01410	^{11}B (бор)	11,00931
^3H (тритий)	3,01605	^{12}C (углерод)	12,00000
^3He (гелий)	3,01602	^{14}N (азот)	14,00307
^4He (гелий)	4,00260	^{15}N (азот)	15,00011
^6Li (литий)	6,01513	^{16}O (кислород)	15,99491
^7Li (литий)	7,01601	^{17}O (кислород)	16,99913
^{10}Be (бериллий)	8,00531	^{27}Al (алюминий)	26,98146
^{9}Be (бериллий)	9,01219		

14. Приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц

Кратные			Дольные		
Приставка	Обозначение	Множитель	Приставка	Обозначение	Множитель
тера	Т	10^{12}	пико	п	10^{-12}
гига	Г	10^9	nano	н	10^{-9}
мега	М	10^6	микро	мк	10^{-6}
кило	к	10^3	милли	м	10^{-3}
гекто	г	10^2	санти	с	10^{-2}

¹⁾ Для нахождения массы ядра необходимо вычесть суммарную массу электронов.

ОБОЗНАЧЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В КНИГЕ, И ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ЭТИХ ВЕЛИЧИН В СИ

Механические величины

Величина	Обозначение	Единица
Вес	P	$\text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$
Время	t, τ	с
Давление	p	$\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$
Импульс	p	$\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$
Коэффициент жесткости (жесткость)	k	$\text{Н}/\text{м}$
Коэффициент полезного действия	η	
Коэффициент трения скольжения	μ	
Масса	m, M	кг
Механическое напряжение	σ	$\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$
Момент силы	M	$\text{Н} \cdot \text{м}$
Мощность	N, P	$\text{Вт} = \text{Дж}/\text{с}$
Объем	V	м^3
Перемещение	s	м
Период (равномерного вращения, колебания)	T	с
Плотность	ρ	$\text{кг}/\text{м}^3$
Площадь	S	м^2
Путь	l	м
Работа	A	$\text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м}$
Сила	F, N, T	$\text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$
Скорость	v, u, V	м/с
Скорость угловая	ω	рад/с
Ускорение	a	$\text{м}/\text{с}^2$
Частота вращения	n	с^{-1}
Энергия	E, W	$\text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м}$

Тепловые величины и величины молекулярной физики

Количество вещества	v	моль
Количество теплоты	Q	Дж
Концентрация частиц	n	м^{-3}
Модуль упругости (модуль Юнга)	E	$\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$
Молярная масса	M	$\text{кг}/\text{моль}$
Относительная влажность	φ	
Поверхностное напряжение	σ	$\text{Н}/\text{м}$
Температура по шкале Цельсия	t, Θ	$^\circ\text{C}$
Температура абсолютная (термодинамическая)	T	К
Температурный коэффициент линейного расширения	α	К^{-1}
Теплоемкость	C	$\text{Дж}/\text{К}$
Удельная теплоемкость	c	$\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$
Удельная теплота парообразования	L	$\text{Дж}/\text{кг}$
Удельная теплота плавления	λ	$\text{Дж}/\text{кг}$
Удельная теплота сгорания топлива	q	$\text{Дж}/\text{кг}$
Энергия внутренняя	U	Дж

Электрические и магнитные величины

Величина	Обозначение	Единица
Индуктивность	L	$\text{Гн} = \text{В} \cdot \text{с}/\text{А}$
Магнитная индукция	B	$\text{Tл} = \text{Н}/(\text{А} \cdot \text{м})$
Магнитный поток	Φ	$\text{Вб} = \text{Tл} \cdot \text{м}^2 = \text{В} \cdot \text{с}$
Напряженность электрического поля	E	$\text{Н}/\text{Кл} = \text{В}/\text{м}$
Плотность энергии поля	w	$\text{Дж}/\text{м}^3$
Плотность заряда поверхностная	σ	$\text{Кл}/\text{м}^2$
Плотность электрического тока	j	$\text{А}/\text{м}^2$
Проциаемость диэлектрическая	ϵ	
Сила тока	I	А
Температурный коэффициент электрического сопротивления	α	К^{-1}
Удельное электрическое сопротивление	ρ	$\text{Ом} \cdot \text{м}$
Электрическая емкость	C	$\Phi = \text{Кл}/\text{В}$
Электрический заряд	q, Q	$\text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с}$
Электрический потенциал	ϕ	$\text{В} = \text{Дж}/\text{Кл}$
Электрическое напряжение	U	$\text{В} = \text{Дж}/\text{Кл}$
Электрическое сопротивление	R, r	$\text{Ом} = \text{В}/\text{А}$
Электродвижущая сила (ЭДС)	E	$\text{В} = \text{Дж}/\text{Кл}$
Электрохимический эквивалент	k	$\text{кг}/\text{Кл}$

Величины физики колебаний и волн, оптические величины

Длина волны	λ	м
Интенсивность волны	I	$\text{Вт}/\text{м}^2$
Оптическая сила	D	$\text{дptr} = \text{м}^{-1}$
Показатель преломления	n	
Фаза гармонического колебания	ϕ	рад
Фокусное расстояние	F	м
Частота колебаний	v	$\text{Гц} = \text{с}^{-1}$
Частота циклическая	ω	рад/с.

ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Гравитационная постоянная $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$

Постоянная Авогадро $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$

Постоянная Больцмана $k = 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}/\text{К}$

Универсальная газовая постоянная $R = k \cdot N_A = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$

Элементарный электрический заряд $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$

Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}/\text{м}$

$(1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2)$

Скорость света в вакууме $c = 299\,792\,458 \text{ м}/\text{с}$

Постоянная Планка $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ эВ} \cdot \text{с}$

$\hbar = h/(2\pi) = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} = 6,59 \cdot 10^{-16} \text{ эВ} \cdot \text{с}$

Коэффициент пропорциональности между единицами измерения
массы и энергии $c^2 = E/m = 8,987 \cdot 10^{16} \text{ Дж}/\text{кг} = 931,5 \text{ МэВ}/\text{а.е.м.}$
 $(1 \text{ а.е.м.} = 1,66057 \cdot 10^{-27} \text{ кг}; 1 \text{ МэВ} = 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ Дж})$

Масса покоя электрона $m_e = 9,1095 \cdot 10^{-31} \text{ кг} = 5,486 \cdot 10^{-4} \text{ а.е.м.}$

Энергия покоя электрона $E_{0e} = m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$

Масса покоя протона $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,00728 \text{ а.е.м.}$

Энергия покоя протона $E_{0p} = m_p c^2 = 938,26 \text{ МэВ}$

Масса покоя нейтрона $m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,00866 \text{ а.е.м.}$

Энергия покоя нейтрона $E_{0n} = m_n c^2 = 939,55 \text{ МэВ}$

СОДЕРЖАНИЕ

Механика

1. Кинематика	6
2. Законы Ньютона	17
3. Закон всемирного тяготения	23
4. Импульс, работа, энергия. Законы сохранения	25
5. Статика	34
6. Гидростатика и аэростатика	42
7. Механические колебания и волны	46
8. Комбинированные задачи по механике	52

Молекулярная физика

9. Молекулярно-кинетическая теория. Свойства газов	62
10. Пары, жидкости и твердые тела	70
11. Законы термодинамики	77

Электричество и магнетизм

12. Электростатика	86
13. Законы постоянного тока	99
14. Электрический ток в различных средах	116
15. Магнитное поле. Сила Лоренца	119
16. Электромагнитная индукция	124
17. Электромагнитные колебания и волны. Переменный ток .	131

Оптика

18. Законы геометрической оптики	140
19. Оптические системы и приборы	145
20. Волновая оптика	154

Теория относительности и атомная физика

21. Релятивистская механика	162
22. Кванты, атомы, ядра, частицы	165

Тесты

172

Ответы, указания, решения

185

Приложения

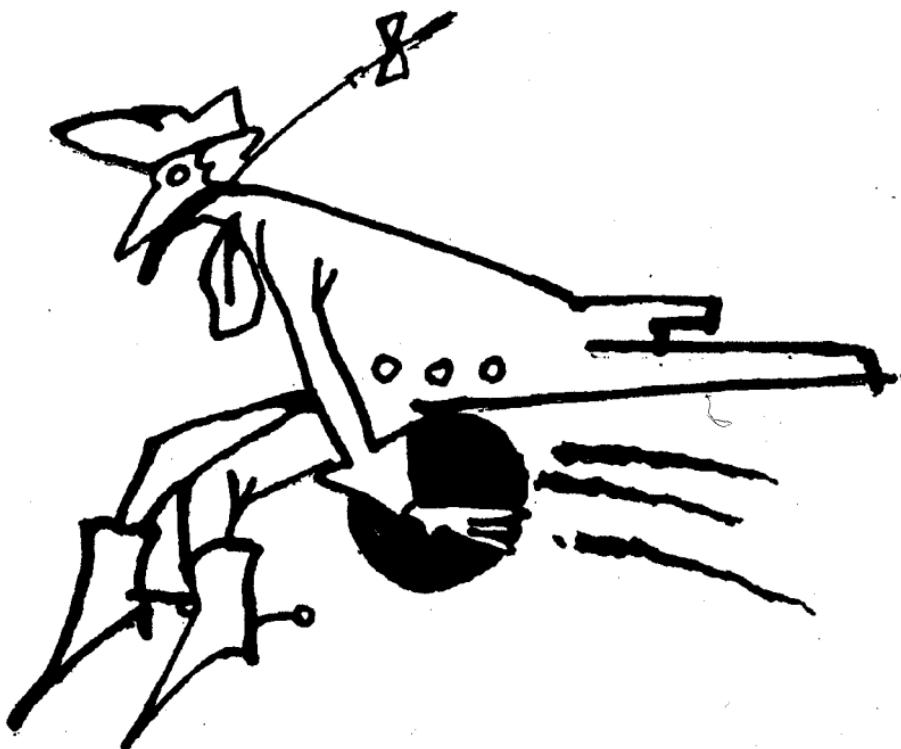
588

НЕЗАВИСИМЫЙ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ
ЦЕНТР «РАЗВИВАЮЩЕЕ ОБУЧЕНИЕ»

И.М. ГЕЛЬФГАТ
Л.Э. ГЕНДЕНШТЕЙН
Л.А. КИРИК

1001

ЗАДАЧА ПО ФИЗИКЕ С РЕШЕНИЯМИ



Харьков-Москва

Центр «Инновации в науке, технике, образовании»

1996

Учебное издание

ГЕЛЬФГАТ Илья Маркович
ГЕНДЕНШТЕЙН Лев Элевич
КИРИК Леонид Анатольевич

1001 задача по физике с решениями

Учебное пособие

Ответственный за выпуск Р.М.Деревянченко

Редактор И.Д.Клугман

Технический редактор Г.П.Александрова

Компьютерная верстка: И.В.Макаров, П.В.Наливайко,
М.В.Захаров

Художник-оформитель Е.П.Таборисский

Переплет художника А.И.Удовенко

Подписано к печати 13.07.95. Формат 60×90/16.

Бумага газетная. Гарнитура школьная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 37. Уч.-изд. л. 37. Тираж 30 000 экз.

(2-й завод 15 001—30 000 экз.). Зак. 5-172.

Независимый научно-методический центр

«Развивающее обучение»,

Украина, 310001, Харьков, ул. Плехановская, 4-а, к 31/2

ИМП «Рубикон»

Украина, 310166, Харьков, ул.Бакулина, 11

Научно-практический центр

«Иновации в науке, технике, образовании» (ИНТОР)

Россия, 121069, Москва, ул.Поварская, 14

Отпечатано с оригинал-макета на Харьковской книжной
фабрике «Глобус»

Украина, 310012, Харьков, ул.Энгельса, 11.