

# Векторы, тензоры и формы.

Инструкция по использованию.

Степанов С.С.





# Оглавление

<b>1</b>	<b>Векторы</b>	<b>9</b>
1.1	Вектор . . . . .	10
1.2	Векторное произведение . . . . .	12
1.3	Инварианты . . . . .	14
1.4	Прямая и плоскость . . . . .	16
1.5	Линии в пространстве . . . . .	18
1.6	Репер Френе . . . . .	20
1.7	Что такое вектор? . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Векторный анализ</b>	<b>27</b>
2.1	Градиент и оператор набла . . . . .	28
2.2	Дивергенция, ротор и не только . . . . .	30
2.3	Правила дифференцирования . . . . .	32
2.4	Интегральные теоремы . . . . .	34
2.5	Доказательство теорем . . . . .	36
2.6	Дельта-функция Дирака . . . . .	38
2.7	Потенциальные и соленоидальные поля . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Матрицы</b>	<b>45</b>
3.1	Матрицы . . . . .	46
3.2	Определитель . . . . .	48
3.3	Обратная матрица . . . . .	50
3.4	Работа с индексами . . . . .	52
3.5	Символ Леви-Чевиты . . . . .	54
3.6	Собственные значения . . . . .	56
3.7	Матрица поворотов . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Криволинейные координаты</b>	<b>63</b>
4.1	Полярные координаты . . . . .	64
4.2	Криволинейный базис . . . . .	66
4.3	Взаимный базис . . . . .	68
4.4	Преобразования координат . . . . .	70
4.5	Преобразование векторов . . . . .	72
4.6	Тензоры . . . . .	74
4.7	Приведение к главным осям . . . . .	76

<b>5</b>	<b>Ковариантное дифференцирование</b>	<b>81</b>
5.1	Символы Кристоффеля . . . . .	82
5.2	Ковариантная производная . . . . .	84
5.3	Геодезическая и параллельный перенос . . . . .	86
5.4	Минимизация расстояния . . . . .	88
5.5	Скорость и символы Кристоффеля . . . . .	90
5.6	Криволинейный векторный анализ . . . . .	92
5.7	Ортогональные координаты . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Дифференциальная геометрия</b>	<b>99</b>
6.1	Поверхности в 3-мерном пространстве . . . . .	100
6.2	Кривизна поверхности . . . . .	102
6.3	Геометрия поверхности . . . . .	104
6.4	Размерность пространства . . . . .	106
6.5	Геометрия пространства . . . . .	108
6.6	Тензор кривизны . . . . .	110
6.7	Свойства тензора кривизны . . . . .	112
<b>7</b>	<b>Дифференциальные формы</b>	<b>117</b>
7.1	Формы . . . . .	118
7.2	Замена координат . . . . .	120
7.3	Внешнее дифференцирование . . . . .	122
7.4	Криволинейное дифференцирование . . . . .	124
7.5	Дуальные формы . . . . .	126
7.6	Интегральные теоремы . . . . .	128
7.7	Уравнения Картана . . . . .	130
<b>М:</b>	<b>Векторы, тензоры и формы</b>	<b>135</b>
I	Векторы и 1-формы . . . . .	136
II	Тензоры как функции . . . . .	138
III	Внешние формы и произведения . . . . .	140
IV	Многообразие . . . . .	142
V	Касательные векторы . . . . .	144
VI	Градиент и площадь . . . . .	146
VII	Векторные поля . . . . .	148
VIII	Производная Ли . . . . .	150
<b>Н:</b>	<b>Помощь</b>	<b>155</b>

# Инструкция к инструкции

Эти материалы возникли при написании математического приложения к книге “*Релятивистский мир*”. Размер приложения оказался слишком большим для приложения. А так как рассматриваемый математический аппарат полезен не только для тех, кто интересуется физикой, было принято решение написать эту книжку.

Физики, особенно начинающие, стремятся освоить математику максимально быстро. Их задача – получить инструмент для анализа физического мира. На первый план выходит уверенное владение этим инструментом. Важные для математиков вопросы обоснования, строгости доказательств, непротиворечивости и т.п. отходят на второй план. К этим вопросам рано или поздно приходится возвращаться. Однако для этого существует множество других замечательных книг.

Эта же книга является инструкцией по освоению математического инструмента. Поэтому написана она максимально неформально и просто. Тем не менее, при её чтении можно добраться до достаточно нетривиальных конструкций, таких как искривлённые пространства или дифференциальные формы. Язык инструкции местами может показаться излишне разговорным. Однако опыт показывает, что такие термины, как “правило лома” или “правило выталкивания”, позволяют лучше запомнить определения, чем их более политкорректные названия.

Изучая математический текст, необходимо максимально концентрировать внимание на математических символах. Любую формулу необходимо разглядывать очень внимательно, а в трудных случаях несколько раз с любовью красиво воспроизвести кисточкой и тушью на листе пергамента. Быстро скользить глазами по формулам, читая только привычные буквы текста, абсолютно недопустимо.

Инструкция разбита на 7 глав, каждая из которых состоит из 7 коротких разделов. Как известно, в оперативной памяти можно одновременно удержать около 7 объектов. Расположение каждого раздела на одном развороте поможет, задействуя зрительную память, эффективно перенести информацию сначала в оперативную, а затем и в структурированную долговременную память. Предполагается, что материал книги может быть легко освоен за 7 недель, хотя, отложив все дела, его можно изучить и за неделю. Однако эффективность освоения инструмента при этом будет существенно ниже.

Первая глава “*Векторы*” посвящена основному объекту – вектору. Векторная запись лежит в основе уравнений динамики и описания простых геометрических объектов (прямая, кривая, плоскость и т.п.).

“*Векторный анализ*” – способ изучения векторных полей  $\mathbf{A}(x, y, z)$ , т.е. векторов, заданных в каждой точке пространства. Векторный анализ широко используется в гидро- и аэродинамике, электродинамике и множестве других важнейших разделов физики.

В главе “*Матрицы*” рассматриваются простейшие свойства матриц и закладываются навыки по работе с индексными выражениями.

Существование симметрий в физической системе приводит к тому, что часто оказываются удобными “*Криволинейные координаты*”. Трансформационные свойства геометрических и физических объектов при преобразовании координат позволят по-новому взглянуть на понятие вектора и более общие математические конструкции.

Продолжению этой темы посвящена глава “*Ковариантное дифференцирование*”, в которой выяснится, какими должны быть дифференциальные уравнения, описывающие физическую систему.

“*Дифференциальная геометрия*” лежит в основе современных теорий пространства и времени. Геометрия нашего мира отличается от простой евклидовой геометрии. Для её описания необходимо использование пространств, обладающих кривизной.

“*Дифференциальные формы*” посвящены аппарату, особенно удобному при рассмотрении пространств с размерностью больше трёх. Многие уравнения (например, ковариантные уравнения Максвелла) в обозначениях этой главы получают очень лаконичную и красивую форму записи.

В конце каждой главы приведены задачи. Их решение составляет наиболее важную часть освоения математического аппарата. Необходимо после каждой главы *сначала* решить все задачи, которые к ней относятся, а только после этого переходить к следующей главе. Каким бы очевидным это правило ни было, почти наверняка его захочется нарушить, оставив задачи “на потом”. Так вот: категорически не стоит так делать.

Дополнительную поддержку окажет приложение с вполне компьютерным названием “*Помощь*”. Простые задачи также встречаются и в теоретической части. Они помечены стилизованным символом глаза ( $\leq H_i$ ), где индекс  $i$  – номер решения в приложении “*Помощь*”.

Ещё одно приложение  $M$  необходимо изучить перед чтением более строгих математических учебников. Это же приложение настоятельно рекомендуется просмотреть математикам, планирующим использовать эти инструкции для обучения нематематиков.





# Глава 1

## Векторы

Вектор – один из важнейших математических объектов, оказавшийся полезным при изучении окружающего мира. Предполагается, что основы работы с векторами уже известны, поэтому их свойства напоминаются очень бегло.

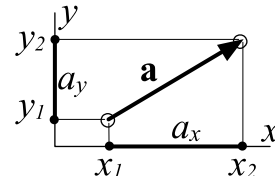
Двум векторам можно поставить в соответствие число или третий вектор. В первом случае говорят об операции скалярного произведения, а во втором – о векторном произведении. С их помощью записывается множество физических закономерностей. Векторы также полезны при описании геометрических объектов. Мы рассмотрим векторное представление для прямой и плоскости, а затем перейдём к описанию произвольных кривых в пространстве. В этой и двух последующих главах используется декартова система координат.

К вектору можно относиться как к направленному отрезку (стрелке), соединяющему две точки евклидова пространства. Для задания положения частицы относительно фиксированного объекта (начала системы отсчёта) подобное представление соответствует радиус-вектору. Однако уже скорость частицы (производная по времени радиус-вектора), предполагает переход к более абстрактному пониманию смысла вектора. Понятию вектора с точки зрения алгебраического подхода посвящён последний раздел главы.

## 1.1 Вектор

Рассмотрим 2-мерную *декартову систему координат* с перпендикулярными осями  $x$  и  $y$ . *Вектором* назовём *направленный отрезок*, соединяющий две точки пространства с координатами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . Первая точка является “началом” отрезка, а вторая “концом” (стрелка вектора). Разности координат конца и начала отрезка являются проекциями вектора на оси декартовой системы координат и называются *компонентами* вектора:

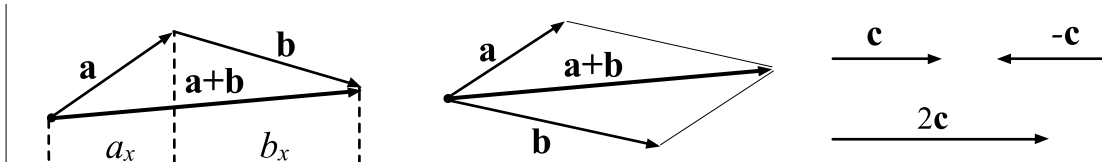
$$\mathbf{a} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\} = \{a_x, a_y\}.$$



Аналогично определяется *вектор* в 3-мерном пространстве с компонентами  $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$  или  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ . Векторы можно складывать (покомпонентно) и умножать на число, получая новый вектор:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}, \quad \mu \mathbf{a} = \{\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3\}.$$

Геометрически сложение векторов можно представить в виде *правила треугольника* (первый рисунок):



На втором рисунке вектор  $\mathbf{b}$  параллельно перенесен (при этом его компоненты не изменились!). В результате получается эквивалентное правило сложения векторов по *параллелограмму*. Оно имеет простое физическое приложение: если два мышонка тащат кусок сыра в разные стороны с различными силами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , то их общее усилие будет направлено по диагонали параллелограмма  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  (“между ними”).

Умножение проекций вектора на число  $\mu$  геометрически во столько же раз удлиняет вектор (третий рисунок). Если для компонент двух векторов существует такое число  $\mu$ , что  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{a}$ , то говорят, что векторы *параллельны*:  $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ . Иначе их *направление* различно. Вектор, умноженный на -1, имеет противоположное направление. Его сумма с исходным вектором даёт *нулевой вектор*:  $\mathbf{0} = \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{a}$ , направление которого неопределенно, а длина равна нулю (точки отрезка совпадают). Сложение нулевого вектора с любым вектором даст снова этот вектор:  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ . Компоненты нулевого вектора равны  $\mathbf{0} = \{0, 0, 0\}$ .

Для двух векторов вводится операция *скалярного произведения*, результат которой равен числу (*скаляру*). В декартовых координатах:

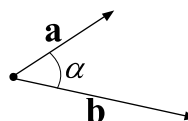
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

При помощи скалярного произведения можно определить *длину вектора* (теорема Пифагора):

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2} \equiv \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

и косинус угла между двумя векторами:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$



Если  $\cos \alpha = 0$  для векторов ненулевой длины, то говорят, что векторы *ортогональны* (нормальны, перпендикулярны). В этом случае:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ .

Скалярное произведение обладает привычными алгебраическими свойствами (*коммутативность* и *дистрибутивность*):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}).$$

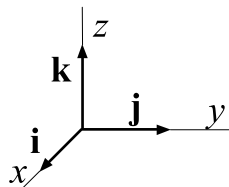
Скобки подчёркивают порядок выполнения операций. Для скалярных произведений важна последовательность умножений, и в общем случае “*ассоциативность*” не выполняется:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \neq \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Дело в том, что слева вектор  $\mathbf{c}$  умножается на *число*  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ , а справа — *другой вектор*  $\mathbf{a}$  на число  $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ . Если  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{a}$  имеют различное направление, то умножением на число их нельзя сделать одинаковыми.

С осями декартовой системы координат удобно связать три *единичных*, взаимно *перпендикулярных* вектора  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , называемых *базисом*:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0.$$



Любой вектор может быть разложен по этому базису, т.е. записан в виде следующей линейной комбинации:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

где  $a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}$ ,  $a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}$ ,  $a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}$  — проекции вектора на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Представив два вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в таком виде, несложно убедиться ( $\leq N_1$ ), что  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ .

## 1.2 Векторное произведение

Для 3-мерного пространства можно ввести ещё одну операцию между векторами, называемую *векторным произведением*. В отличие от скалярного произведения, которое представляет собой число, векторное произведение – это вектор, компоненты которого равны:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \{a_2b_3 - a_3b_2, \quad a_3b_1 - a_1b_3, \quad a_1b_2 - a_2b_1\} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – базисные векторы, а  $\det$  – определитель матрицы (стр. 48). Используя определение, можно проверить ( $\leq H_4$ ), что векторное произведение *дистрибутивно*:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] + [\mathbf{a} \times \mathbf{c}], \quad (1.1)$$

однако, в отличие от скалярного произведения, *антисимметрично*:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = -[\mathbf{b} \times \mathbf{a}]. \quad (1.2)$$

Для параллельных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  существует число  $\mu$ , такое, что  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{a} = (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3)$ . В этом случае векторное произведение равно нулю:  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{0}$ . Естественно, что  $[\mathbf{a} \times \mathbf{a}] = \mathbf{0}$ .

Вектор  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{a} \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0,$$

и также для  $\mathbf{b}$ . Именно это важное свойство векторного произведения делает его столь полезным.

*Смешанным произведением* называется произведение  $\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$ , равное числу. В компонентном виде можно проверить ( $\leq H_6$ ) следующее свойство смешанного произведения, т.н. “*правило выталкивания*”:

$$\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c}. \quad (1.3)$$

Скалярное произведение “выталкивает” один вектор из векторного, сдвигая всех вправо. “Правило выталкивания” действует как слева направо, так и справа налево (если читать его в обратном направлении).

Часто используется правило “*б’ац минус ц’аб*”, которое можно ( $\leq H_7$ ) проверить в компонентном виде:

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{b} (\mathbf{ac}) - \mathbf{c} (\mathbf{ab}). \quad (1.4)$$

Название правила нужно произносить с ударением на первую букву  $\smile$ , так как скобки важны (поэтому “б” на “ац” минус “ц” на “аб”).

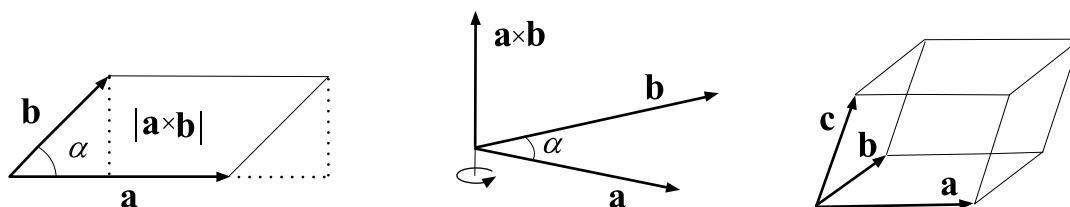
Ещё одно важное тождество выражает скалярное произведение двух векторных произведений:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc}). \quad (1.5)$$

Обратим внимание, что сначала перемножаются первые векторы из векторных произведений с первыми, а вторые со вторыми. Из этого вычитается аналогичное произведение “крест накрест” (первые со вторыми). Это тождество несложно получить из предыдущих тождеств, используя сначала правило “выталкивания”, затем антисимметричности, и наконец, “бац минус цаб” ( $\leq H_8$ ). Частным случаем этого тождества является выражение для квадрата векторного произведения:

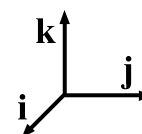
$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \sin^2 \alpha, \quad (1.6)$$

где последнее равенство записано при помощи угла  $\alpha$  между векторами, определяемого через скалярное произведение  $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$ . Таким образом, *модуль* векторного произведения равен *площади параллелограмма*, образованного векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (см. первый рисунок). Высота параллелограмма равна  $|\mathbf{b}| \sin \alpha$ , основание  $|\mathbf{a}|$ :



Как мы видели, векторное произведение  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  перпендикулярно векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , а следовательно, плоскости в которой они находятся. Направление вектора  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  определяется “*правилom штопора*”. Если от вектора  $\mathbf{a}$  к вектору  $\mathbf{b}$  вкручивать штопор по часовой стрелке (правый винт), то направление его движения будет указывать в сторону  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Например, при обычном выборе осей  $(x, y, z)$  декартовой системы координат базисные векторы образуют *правую тройку* так, что:

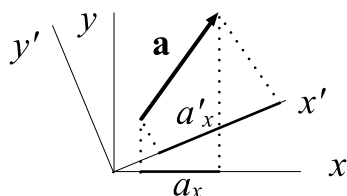
$$\mathbf{k} = [\mathbf{i} \times \mathbf{j}], \quad \mathbf{j} = [\mathbf{k} \times \mathbf{i}], \quad \mathbf{i} = [\mathbf{j} \times \mathbf{k}].$$



Смешанное произведение  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c}$  правой тройки векторов равно объёму параллелепипеда, построенного на  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  (см. выше третий рисунок). Это произведение положительно, *только* если векторы  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  образуют правую тройку. При перестановке любых двух векторов в смешанном произведении происходит смена его знака ( $\leq H_9$ ).

### 1.3 Инварианты

В декартовой системе координат компоненты вектора являются его проекциями на соответствующие оси. Если систему координат повернуть, то проекции будут, естественно, другими:



$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j},$$

$$\mathbf{a} = a'_x \mathbf{i}' + a'_y \mathbf{j}'.$$

Вектор, как направленный отрезок, связывает две *фиксированные* точки пространства. При повороте системы координат оси меняются, но точки пространства остаются *теми же* самими. Поэтому говорят, что вектор — это геометрический объект, не зависящий от выбора системы координат. Тем не менее в различных системах координат компоненты (проекции на оси) *одного и того же* вектора будут разными.

При повороте системы координат длина вектора  $|\mathbf{a}|$  и скалярное произведение  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$  не изменяются. Их называют *инвариантами*. Физика не должна зависеть от выбора системы координат, поэтому инварианты играют существенную роль при записи физических законов.

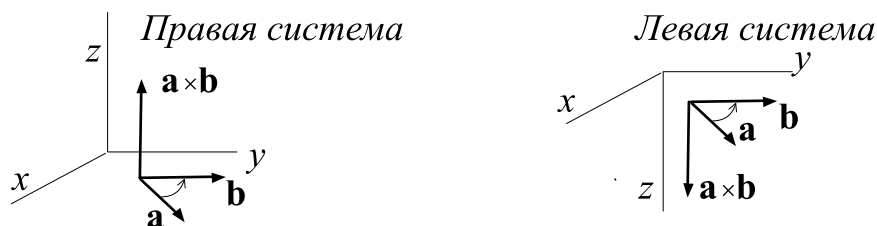
Кроме поворотов осей координат можно провести операцию их *инвертирования*. Сделаем это для оси  $x$  в 2-мерном пространстве:



В исходной системе координат вектор направленного отрезка имел компоненты  $\mathbf{a} = \{7 - 1, 4 - 2\} = \{6, 2\}$ . В новой системе координат  $\mathbf{a} = \{-6, 2\}$ . Другими словами, при инвертировании оси, соответствующая ей компонента вектора меняет свой знак. В примере выше произошла замена:  $\mathbf{a} = \{a_x, a_y\} \mapsto \{-a_x, a_y\}$ .

Поворотом систему координат с одной инвертированной осью в 2-мерном пространстве нельзя совместить с исходными осями. Если же инвертировать обе оси  $x \mapsto -x$ ,  $y \mapsto -y$ , то поворот позволяет вернуться в исходную систему. Несколько иная ситуация в 3-мерном пространстве. Если инвертировать *три* оси  $x \mapsto -x$ ,  $y \mapsto -y$ ,  $z \mapsto -z$ , то никаким поворотом не получится совместить новые оси с исходными. Аналогична ситуация при инвертировании любой *одной* оси.

Поэтому в 3-мерном пространстве различают право- и левоориентированные оси системы координат:



Левая система получается из правой инверсией или одной, или трёх осей (на втором рисунке инвертирована ось  $z$ ).

Эти свойства 3-мерного пространства приводят к определённым нюансам, связанным с различным поведением “обычных” векторов и векторов, получаемых в результате векторного произведения. Мы определили векторное произведение двух векторов следующим образом:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \{a_2b_3 - a_3b_2, \quad a_3b_1 - a_1b_3, \quad a_1b_2 - a_2b_1\}.$$

Если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  имеют смысл направленных отрезков, то при инверсии трёх координатных осей их компоненты изменяют знак:  $a_i \mapsto -a_i$ ,  $b_i \mapsto -b_i$ . Несложно увидеть, что компоненты вектора  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  при этом не изменятся! Поэтому различают *полярные векторы* (направленные отрезки) и *аксиальные векторы* (векторное произведение полярных).

Полярными векторами являются: радиус-вектор, скорость, ускорение, сила, электрическое поле. Аксиальные векторы: угловая скорость, момент импульса, магнитное поле.

Подойдите с этой книгой к зеркалу. Если придвинуть её к зеркалу, то Ваше зазеркальное “Я” сделает тоже самое, и книги будут двигаться *навстречу* (векторы скорости направлены в противоположные стороны). Теперь начните вращать книгу. Ваше Я будет её крутить в *том же* направлении. Поэтому угловая скорость книг будет одинаковой.

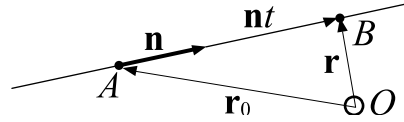
Направление вектора  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  определяется правилом “правого штопора” только в правой системе координат. В левой необходимо использовать штопор, поворачивающийся против часовой стрелки. Если, например,  $\mathbf{a} = \{1, 0, 0\}$  и  $\mathbf{b} = \{0, 1, 0\}$ , то их векторное произведение по определению имеет компоненты  $\mathbf{c} = \{0, 0, 1\}$ . Этот вектор в обеих системах будет направлен по осям  $z$  и различным образом в пространстве (см. рисунки выше). Мы будем использовать правую систему координат.

Инвариант, который не изменяется при инверсии, называют *скаляром*, а инвариант, получающий при инверсии противоположный знак, — *псевдоскаляром*. Например, если  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — полярные векторы, то смешанное произведение  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c}$  будет псевдоскаляром.

## 1.4 Прямая и плоскость

• Радиус-вектор  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$  – это "стрелка" или направленный отрезок, соединяющий начало координат  $O$  и точку с декартовыми координатами  $x, y$  и  $z$ . Параметрическое уравнение прямой, проходящей через фиксированную точку пространства  $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ , имеет вид:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{n}t,$$



где вектор  $\mathbf{n}$  направлен вдоль прямой. Действительно, пусть  $\vec{OB} = \mathbf{r}$  выходит из начала координат (кружок на рисунке) в направлении произвольной точки на прямой, положение которой нас интересует. Всегда можно подобрать такое число  $t$ , чтобы вектор  $\vec{AB} = \mathbf{n}t$  оказался в точности между точками  $\vec{OA} = \mathbf{r}_0$  и  $\vec{OB} = \mathbf{r}$ . Из сложения векторов  $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$  следует параметрическое уравнение прямой.

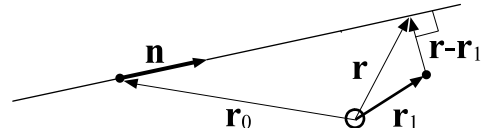
Перенеся  $\mathbf{r}_0$  влево:  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{n}t$ , и выписав явным образом компоненты, это уравнение можно представить в виде:

$$\frac{x - x_0}{n_x} = \frac{y - y_0}{n_y} = \frac{z - z_0}{n_z} = t.$$

Компоненты вектора  $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$  определяются координатами точек  $\mathbf{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$  и  $\mathbf{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$ , через которые проходит прямая.

Найдём кратчайшее расстояние от точки  $\mathbf{r}_1$  до прямой  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$ . Минимальность расстояния означает, что вектор  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$  перпендикулярен прямой (см. рисунок). Подставляя в условие ортогональности уравнение прямой, получаем:

$$0 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{r}_0 + \mathbf{n}t - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}.$$



Из этого соотношения несложно найти параметр  $t$ , а следовательно, при заданных векторах  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{r}_0$ , точку пересечения перпендикуляра и прямой:

$$t = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n}^2}.$$

Подставляя этот параметр в уравнение прямой и учитывая формулу (1.6), стр. 13, находим квадрат расстояния:

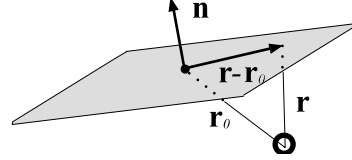
$$d^2 = (\mathbf{r}_0 + \mathbf{n}t - \mathbf{r}_1)^2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)^2 - \frac{\{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}\}^2}{\mathbf{n}^2} = \frac{[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{n}]^2}{\mathbf{n}^2}.$$

При известных компонентах векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_1$  эта формула позволяет вычислить расстояние  $d$  от точки до прямой.



• *Плоскость* можно задать при помощи фиксированной точки  $\mathbf{r}_0$ , через которую она проходит, и перпендикулярного к плоскости вектора  $\mathbf{n}$ . Если  $\mathbf{r}$  – вектор к произвольной точке на плоскости, то вектор разности  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  лежит в этой плоскости. Поэтому эта разность перпендикулярна к  $\mathbf{n}$ , и, следовательно, *уравнение плоскости* имеет вид:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

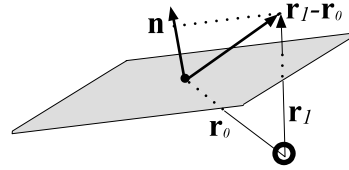


Вводя компоненты вектора  $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$  и параметр  $D = \mathbf{r}_0 \mathbf{n}$ , уравнение плоскости несложно переписать в координатном виде:

$$x n_x + y n_y + z n_z = D.$$

Рассмотрим точку пространства  $\mathbf{r}_1$ , не лежащую на плоскости, и некоторую точку плоскости  $\mathbf{r}_0$ . Вектор  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$  можно спроектировать на *единичный* вектор нормали  $\mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ . Длина этой проекции равна кратчайшему расстоянию от точки  $\mathbf{r}_1$  до плоскости:

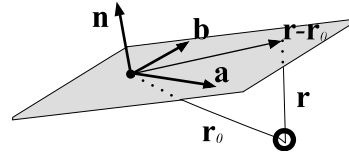
$$d = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}.$$



Если  $d > 0$ , то точка лежит “над” плоскостью, т.е. с той стороны, куда направлена нормаль. В противном случае ( $d < 0$ ) точка находится “под” плоскостью. Понятно, что если  $\mathbf{r}_1$  лежит в плоскости, то вектор  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$  перпендикулярен нормали  $\mathbf{n}$  и расстояние равно нулю ( $d = 0$ ).

Плоскость можно также задать в параметрическом виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a} t + \mathbf{b} u,$$



где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  – фиксированные непараллельные векторы, лежащие в плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . При помощи двух чисел  $u$  и  $t$  произвольный вектор в плоскости можно разложить по векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Такое задание плоскости называется *параметрическим*.

Две непараллельные плоскости своим пересечением имеют прямую. Поэтому ещё одним представлением для прямой будет пара уравнений

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}_2 = 0.$$

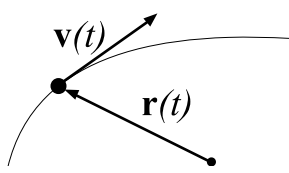
Вектор  $\mathbf{n}$ , лежащий вдоль прямой, при этом равен  $\mathbf{n} = [\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2]$ .

## 1.5 Линии в пространстве

• Рассмотрим движение материальной точки под воздействием силы. Её положение (радиус-вектор) является функцией времени. Фактически, это три функции для каждой декартовой координаты:

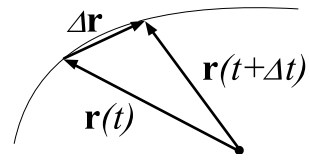
$$\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}. \quad (1.7)$$

Скорость движения (первая производная по времени) и ускорение (вторая производная) являются функциями времени:



$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}},$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{r}}.$$



Точка над вектором обозначает производную по  $t$ . Производная вектора определяется, аналогично обычным функциям, как предельный переход  $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$  при стремлении  $\Delta t \rightarrow 0$ , где  $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$  – разница двух радиус-векторов в бесконечно близкие моменты времени. Геометрический смысл производной  $d\mathbf{r}/dt$  – это *касательная к кривой  $\mathbf{r}(t)$* . Компоненты производной радиус-вектора равны “обычным” производным по каждой компоненте. Например, для скорости:

$$\mathbf{v}(t) = \{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\}. \quad (1.8)$$

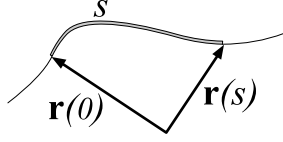
Если радиус-вектор  $\mathbf{r}$  является направленным отрезком, связывающим начало координат и точку в пространстве, то для скорости “двух точек” нет. При проведении предельного перехода  $\Delta t \rightarrow 0$  две точки, связанные вектором  $\Delta\mathbf{r}$ , “стягиваются” в одну, в которой вычисляется производная. Поэтому существует разница между вектором как направленным отрезком (две точки) и вектором скорости, характеризующимся длиной и направлением в *данной* точке.

Запись конкретной функции времени  $\mathbf{r}(t)$  является параметрическим представлением *траектории* частицы. Естественно, время не единственный способ параметризации. Всегда можно перейти к другому параметру  $s$ , связанному некоторой гладкой функциональной зависимостью со временем  $t = t(s)$ . Производные от радиус-вектора в этом случае вычисляются как производные сложной функции:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2}, \quad (1.9)$$

и т.д. для производных более высокого порядка.

• Вместо времени в качестве параметра можно использовать *длину линии*  $s$ , отсчитываемую относительно некоторой фиксированной точки. Подобная параметризация называется *натуральной*. Производную по параметру  $s$  будем обозначать при помощи штриха:



$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} \equiv \mathbf{r}', \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \equiv \mathbf{r}''.$$

Если линия задана в произвольной параметризации, то её длину можно найти при помощи интеграла [см. (1.8) ]:

$$s = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} |d\mathbf{r}| = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (1.10)$$

Для натуральной параметризации длина производной радиус-вектора равна единице:  $|\mathbf{r}'| = 1$ . Действительно, бесконечно малое смещение  $d\mathbf{r}$  вдоль линии это и есть расстояние, т.е.  $ds = |d\mathbf{r}|$ . Другим замечательным свойством натуральной параметризации является то, что вторая производная  $\mathbf{r}''$  всегда оказывается перпендикулярной к первой  $\mathbf{r}'$ . Чтобы в этом убедиться, достаточно взять производную по  $s$  от квадрата  $\mathbf{r}'$  (как производную произведения  $\mathbf{r}'^2 = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'$ ):

$$\mathbf{r}'^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = 0.$$

На самом деле любой *единичный* вектор  $\mathbf{n}^2 = 1$  всегда перпендикулярен скорости своего изменения:  $\mathbf{n}\mathbf{n}' = 0$ .

Вектор  $\mathbf{r}' = d\mathbf{r}/ds$  направлен по касательной вдоль кривой, в сторону возрастания параметра  $s$ . Можно говорить, что  $\mathbf{r}'$  локально задаёт направление кривой.

*Кривизна* линии (степень её “выгнутости”) определяется второй производной и равна её модулю:

$$k(s) = |\mathbf{r}''(s)| = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}.$$

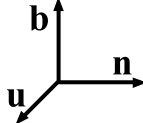
Обратная величина  $1/k(s)$  называется радиусом кривизны линии. Например, окружность радиуса  $R$ , лежащая в плоскости  $(x, y)$  имеет следующую натуральную параметризацию:

$$\mathbf{r}(s) = \{R \cos(s/R), R \sin(s/R), 0\}.$$

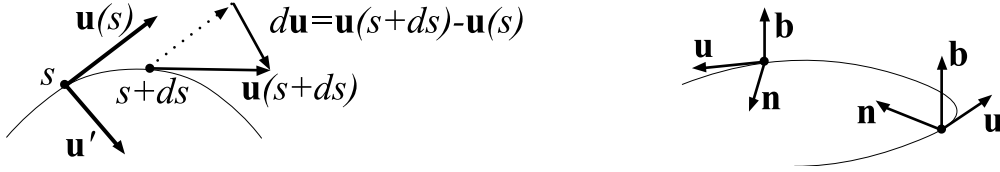
Если  $s = 2\pi R$  (длина окружности), то  $x$  и  $y$  возвращаются к исходным значениям, а расстояние от центра системы координат постоянно и равно радиусу:  $\mathbf{r}^2 = x^2 + y^2 = R^2$ . В качестве упражнения предлагается убедиться, что для окружности кривизна равна:  $k(s) = 1/R$ , а  $|\mathbf{r}'| = 1$ . Кривизна прямой линии  $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{n} s$  нулевая.

## 1.6 Репер Френе

Рассмотрим три *единичных вектора*, определённых в данной точке линии (используем натуральную параметризацию  $s$ ):

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}'(s), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{k(s)}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{u} \times \mathbf{n}.$$


Вектор  $\mathbf{u}$  – единичный по определению натуральной параметризации. Он касателен к линии. Вектор  $\mathbf{n}$  единичен, так как  $\mathbf{r}''$  разделён на свою длину  $k = |\mathbf{r}''|$ . Он пропорционален второй производной по  $\mathbf{r}$  или первой производной по  $\mathbf{u}$ , поэтому направлен вовнутрь “выпуклости” линии (первый рисунок ниже):



Так как  $\mathbf{u}^2 = 1$ , то  $\mathbf{u}\mathbf{u}' = 0$ . Следовательно, векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{n} \sim \mathbf{u}'$  ортогональны друг другу:  $\mathbf{u}\mathbf{n} = 0$ . Третий вектор  $\mathbf{b} = \mathbf{u} \times \mathbf{n}$  ортогонален обоим этим векторам (векторное произведение!) и также является единичным вектором:  $\mathbf{b}^2 = \mathbf{u}^2\mathbf{n}^2 - (\mathbf{u}\mathbf{n})^2 = 1$  [см. (1.6), стр. 13]. Он перпендикулярен *соприкасающейся плоскости*, проходящей через  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{n}$ .

Тройка векторов  $(\mathbf{u}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  образует единичный ортогональный базис, который называют *репером Френе*. При перемещении вдоль линии репер Френе поворачивается, изменяя свою ориентацию (см. правый рисунок).

Найдём производную вектора  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{b}' = [\mathbf{u} \times \mathbf{n}]' = [\mathbf{u}' \times \mathbf{n}] + [\mathbf{u} \times \mathbf{n}'] = [\mathbf{u} \times \mathbf{n}'] = -\chi(s) \mathbf{n}.$$

В первом равенстве подставлено определение  $\mathbf{b}$ . Во втором записана производная произведения. Первый член этого выражения  $[\mathbf{u}' \times \mathbf{n}]$  равен нулю, так как  $\mathbf{u}' = \mathbf{r}'' \sim \mathbf{n}$ , а векторное произведение параллельных векторов равно нулю. Таким образом  $\mathbf{b}'$  перпендикулярен  $\mathbf{u}$  (векторное произведение  $[\mathbf{u} \times \mathbf{n}']$ ). Кроме этого, так как  $\mathbf{b}^2 = 1$ , то  $\mathbf{b}'\mathbf{b} = 0$ , т.е. производная  $\mathbf{b}'$  одновременно ортогональна и  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{u}$ . Поэтому вектор  $\mathbf{b}'$  параллелен третьему вектору репера Френе  $\mathbf{n}$ . Коэффициент пропорциональности обозначен как  $\chi(s)$  и называется *кручением линии*. Кручение характеризует скорость поворота вектора  $\mathbf{b}$ , а следовательно, и соприкасающейся плоскости  $(\mathbf{u}, \mathbf{n})$ , которой он перпендикулярен. Если кривая лежит в одной плоскости, то кручение равно нулю.

Если кривизна линии  $k(s)$  выражается через вторые производные, то кручение  $\chi(s) = -\mathbf{b}' \cdot \mathbf{n}$  зависит от третьих производных по параметру  $s$ :

$$\chi(s) = \frac{\mathbf{r}' \cdot [\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}''']}{|\mathbf{r}''|^2}.$$

Это равенство предлагается вывести в качестве упражнения ( $\leq H_{18}$ ). Для этого необходимо проверить, что производная по  $s$  от  $\mathbf{n} = \mathbf{r}''/k(s)$  равна  $\mathbf{n}' = (\mathbf{r}''' - k' \mathbf{n})/k$ .

Вектор  $\mathbf{n}$  можно представить в виде произведения  $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{u}$ . Это следует из геометрического смысла векторного произведения (правило штопора для 3-х взаимно перпендикулярных векторов) и может быть проверено подстановкой определения  $\mathbf{b} = \mathbf{u} \times \mathbf{n}$  ( $\leq H_{17}$ ). Поэтому производная от  $\mathbf{n}$  равна:

$$\mathbf{n}' = [\mathbf{b} \times \mathbf{u}]' = [\mathbf{b}' \times \mathbf{u}] + [\mathbf{b} \times \mathbf{u}'] = -\chi(s)[\mathbf{n} \times \mathbf{u}] + k(s)[\mathbf{b} \times \mathbf{n}],$$

где учтено, что  $\mathbf{b}' = -\chi \mathbf{n}$  и  $\mathbf{u}' = \mathbf{r}'' = k(s) \mathbf{n}$ . В силу ортогональности репера  $[\mathbf{n} \times \mathbf{u}] = -\mathbf{b}$  и  $[\mathbf{b} \times \mathbf{n}] = -\mathbf{u}$  (правило штопора!), что позволяет выразить  $\mathbf{n}'$  через  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{u}$ . Собирая все производные вместе, получаем:

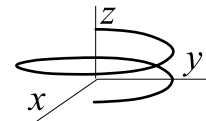
$$\begin{cases} \mathbf{u}' = k(s) \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = \chi(s) \mathbf{b} - k(s) \mathbf{u} \\ \mathbf{b}' = -\chi(s) \mathbf{n}. \end{cases}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Френе*. Первое уравнение является определением вектора  $\mathbf{n} = \mathbf{u}'/k = \mathbf{r}''/|\mathbf{r}''|$ , второе и третье соответствуют вычисленным производным векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b}$ .

При заданных скалярных функциях кривизны  $k(s)$  и кручения  $\chi(s)$ , решив уравнения Френе, можно найти форму линии. Заметим, что  $k(s)$  и  $\chi(s)$  не зависят от ориентации осей декартовой системы координат. Поэтому они определяют одинаковые кривые, по-разному ориентированные и сдвинутые в пространстве. Конкретная кривая зависит от начального значения  $\mathbf{r}(0)$ , его первой  $\mathbf{u}(0)$  и второй производной  $\mathbf{n}(0)$ .

Линия с постоянной кривизной и кручением является *спиралью*. В произвольной (не натуральной) параметризации её уравнение можно записать следующим образом:

$$\mathbf{r}(t) = \{R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), V \omega t\}.$$



Проверьте ( $\leq H_{20}$ ), что длина спирали равна  $s = \sqrt{R^2 + V^2} \omega t$ , кривизна  $k = R/(R^2 + V^2)$  и кручение  $\chi = V/(R^2 + V^2)$ . Для этого необходимо при помощи (1.10) найти  $s$ , подставить вместо  $t$  и воспользоваться определением кручения и кривизны  $k = |\mathbf{r}''|$  в натуральной параметризации.

## 1.7 Что такое вектор?

• Фундаментальным понятием математики является *множество* — объединение некоторых объектов по определённым признакам (множество всех функций, множество векторов, множество умных блондинок и т.п.) Множество может быть и пустым, т.е. не содержащим элементов ( $\emptyset$ ). Запись  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$  означает, что объект  $\mathbf{a}$  принадлежит множеству  $\mathbf{V}$ . На множестве можно вводить операции. Например, *бинарная операция* (функция с двумя аргументами) ставит в соответствие любым двум элементам множества  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$  некоторый третий элемент  $\mathbf{c} \in \mathbf{V}$ . Это обозначается так:  $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}$  (крестик это не векторное произведение, а множество всех упорядоченных пар  $\mathbf{V}$ ). Подобные операции можно записывать в функциональной форме  $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{c}$  или операторной  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ . Операции могут быть *коммутативными* и *ассоциативными*:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

Можно постулировать существование *выделенного* элемента  $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$  и *обратного* к  $\mathbf{a}$  элемента  $(-\mathbf{a})$ , таких, что для любого  $\mathbf{a}$  справедливо:

$$\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

Множество элементов с такой операцией называется *абелевой группой*.

• Рассмотрим теперь *другое* множество  $\Omega$ , на элементах которого введём две бинарные ( $\Omega \times \Omega \mapsto \Omega$ ) операции, которые обозначим как  $\alpha + \beta$  и  $\alpha \cdot \beta$ . Пусть они также являются абелевыми группами. Относительно “сложения” обратный элемент обозначается как  $(-\alpha)$ , а выделенный — как  $0$ . Относительно “умножения” это  $\alpha^{-1}$  и  $1$ :

$$\begin{array}{l|l} \alpha + \beta = \beta + \alpha & \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \\ \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma & \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \\ 0 + \alpha = \alpha & 1 \cdot \alpha = \alpha \\ \alpha + (-\alpha) = 0 & \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1. \end{array}$$

Свяжем эти две (пока независимые!) операции при помощи аксиомы:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma),$$

которая называется *дистрибутивностью* относительно “умножения”. Две абелевы группы на одном множестве, связанные дистрибутивностью, в алгебре называются *коммутативным телом*. Наиболее привычные примеры — это множества рациональных  $\mathbf{Q}$ , вещественных  $\mathbf{R}$  и комплексных  $\mathbf{Z}$  чисел с арифметическими сложением и умножением.

• Пока множества  $\Omega$  и  $\mathbf{V}$  не были связаны никак друг с другом. Все три введенные операции, определяющие абелеву группу и коммутативное тело, были замкнутыми. Аргументы операции и её результат оставался в одном множестве. Введём теперь четвёртую операцию, которую по бедности также будем обозначать точкой. Однако это будет уже функция вида:  $\Omega \times \mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}$ . Первый её аргумент – элемент из  $\Omega$ , второй – из  $\mathbf{V}$ , а результат находится в множестве  $\mathbf{V}$ , т.е.  $(\alpha \cdot \mathbf{a}) \in \mathbf{V}$ .

Будем считать, что введенные четыре функции (стоит их все найти в формулах ниже) удовлетворяют следующим аксиомам:

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{a} &= \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{a}), \\ \alpha \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= (\alpha \cdot \mathbf{a}) + (\alpha \cdot \mathbf{b}), \\ (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{a} &= (\alpha \cdot \mathbf{a}) + (\beta \cdot \mathbf{a}).\end{aligned}$$

Первое соотношение можно назвать ассоциативностью, правда, сразу для двух операций (точки имеют различный смысл), а второе и третье – дистрибутивностью (хотя плюсы различны). Выделенные элементы множеств свяжем следующим образом (различаем  $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$  и  $0 \in \Omega$  !):

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad (-1) \cdot \mathbf{a} = (-\mathbf{a}), \quad \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Любые множества объектов двух видов  $\Omega$  и  $\mathbf{V}$ , удовлетворяющие всем этим аксиомам, называются *векторным пространством*, а элементы множества  $\mathbf{V}$  – *векторами*.

Скалярное произведение – это функция  $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \mapsto \Omega$ , которая является линейной и коммутативной. Её иногда обозначают в круглых скобках:  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Линейность означает, что  $(\mathbf{a}, \alpha \cdot \mathbf{b} + \beta \cdot \mathbf{c}) = \alpha \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \beta \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{c})$ . Векторное произведение – это тоже бинарная  $(\mathbf{V} \times \mathbf{V} \mapsto \mathbf{V})$  антисимметричная  $([\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}])$  линейная функция.

До сих пор векторами были три различных математических объекта: набор 3-х чисел (компоненты вектора); направленный отрезок, связывающий две точки (радиус-вектор); величина, характеризующаяся длиной и направлением (скорость). Все эти объекты удовлетворяют приведенным выше аксиомам. Именно поэтому они называются векторами.

Необходимо ощущать тонкую разницу между вектором как направленным отрезком, соединяющим две точки, и такими векторами, как скорость или сила, которые соответствуют не двум, а одной точке пространства, с которой связывается “стрелочка”. Наборы  $n$  чисел  $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$  с операцией сложения  $\{a_1, \dots, a_n\} + \{b_1, \dots, b_n\} = \{a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n\}$  и умножения на число  $\alpha \cdot \{a_1, \dots, a_n\} = \{\alpha a_1, \dots, \alpha a_n\}$  тоже являются векторами. Они могут и не иметь геометрического смысла в *обычном* пространстве (например, быть компонентами цвета в RGB модели).

## Задачи

• ( $\leq H_1$ ) Прямым умножением разложений двух векторов по декартовому базису (стр. 11) проверить, что их скалярное произведение равно  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ .

• ( $\leq H_2$ ) Найти угол между векторами  $\mathbf{a} = \{1, 2, 2\}$  и  $\mathbf{b} = \{4, 0, 3\}$ .

• ( $\leq H_3$ ) Убедиться, что для векторов  $\mathbf{a} = \{1, 2, 3\}$ ,  $\mathbf{b} = \{3, 2, 1\}$  и  $\mathbf{c} = \{1, 1, 1\}$  скалярное произведение “неассоциативно”. Найти компоненты вектора  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

• ( $\leq H_4$ ) Доказать дистрибутивность векторного произведения относительно операции сложения векторов (стр. 12).

• ( $\leq H_5$ ) Для векторов  $\mathbf{a} = \{1, 0, 2\}$ ,  $\mathbf{b} = \{2, -1, 3\}$  и  $\mathbf{c} = \{1, -1, 1\}$  найти результат смешанного произведения  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c}$ .

• ( $\leq H_6$ ) Доказать правило выталкивания для смешанного произведения (стр. 12).

• ( $\leq H_7$ ) Доказать тождество “бац минус цаб” для двойного векторного произведения (стр. 12).

• ( $\leq H_8$ ) Доказать формулу  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc})$ .

• ( $\leq H_9$ ) Доказать антисимметричность смешанного произведения при перестановке любых двух векторов.

• ( $\leq H_{10}$ ) Найти площадь параллелограмма, одна вершина которого находится в  $\mathbf{r}_0 = \{1, 1\}$ , а две другие (соседние) в точках  $\mathbf{r}_1 = \{4, 1\}$ ,  $\mathbf{r}_2 = \{2, 3\}$ . Какие координаты четвёртой вершины?

• ( $\leq H_{11}$ ) Найти площади проекций параллелограмма с вершинами  $\mathbf{r}_0 = \{0, 0, 0\}$ ,  $\mathbf{r}_1 = \{-2, 1, 0\}$ ,  $\mathbf{r}_2 = \{1, 1/2, 1\}$  на координатные плоскости. Найти четвёртую вершину и площадь параллелограмма.

• ( $\leq H_{12}$ ) Найти расстояние от точки  $\mathbf{r}_1 = \{3, 2, 1\}$  к прямой, проходящей через точку  $\mathbf{r}_0 = \{1, 0, 0\}$  в направлении  $\mathbf{n} = \{2, 2, 1\}$ .

• ( $\leq H_{13}$ ) Найти расстояние от точки  $\mathbf{r}_1 = \{1, 2, 3\}$  к плоскости, проходящей через точку  $\mathbf{r}_0 = \{0, 0, 0\}$  и перпендикулярной  $\mathbf{n} = \{1, 1, 1\}$ .

• ( $\leq H_{14}$ ) Найти расстояние от точки  $\mathbf{r} = \{2, 1, 2\}$  к плоскости, проходящей через точки  $\mathbf{r}_0 = \{1, 1, 1\}$ ,  $\mathbf{r}_1 = \{1, 2, 3\}$  и  $\mathbf{r}_2 = \{3, 2, 1\}$ .

• ( $\leq H_{15}$ ) Найти точку пересечения плоскости, проходящей через  $\mathbf{r}_1$ , перпендикулярной вектору  $\mathbf{n}_1$ , и прямой, проходящей через  $\mathbf{r}_2$  в направлении  $\mathbf{n}_2$ . Когда прямая и плоскость не пересекаются?



• ( $\leq$  Н<sub>16</sub>) Частица движется по окружности радиуса  $R$  с угловой скоростью  $\omega$  по траектории:  $\mathbf{r}(t) = \{R \cos(\omega t), R \sin(\omega t)\}$ . Найти её скорость  $\mathbf{u}$  и ускорение  $\mathbf{a}$ . Вычислить их скалярное произведение.

• ( $\leq$  Н<sub>17</sub>) Прямой подстановкой  $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{u}$  в  $\mathbf{u} \times \mathbf{n}$  доказать, что получается  $\mathbf{b}$ , если вектор  $\mathbf{u}$  единичный и ортогональный к  $\mathbf{n}$  (стр. 21).

• ( $\leq$  Н<sub>18</sub>) Доказать, что  $\chi(s) = \mathbf{r}' \cdot [\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'''] / \mathbf{r}''^2$  (стр. 21).

• ( $\leq$  Н<sub>19</sub>) Какие свойства вектора  $\mathbf{n}$  в уравнении прямой  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{n}t$ , если  $t = s$  – натуральный параметр (длина прямой).

• ( $\leq$  Н<sub>20</sub>) Для спирали  $\mathbf{r}(t) = \{R \cos \omega t, R \sin \omega t, V \omega t\}$  найти длину, кривизну и кручение.

• ( $\leq$  Н<sub>21</sub>) Доказать, что в произвольной параметризации (не натуральной) кривизна линии равна:

$$k = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}.$$

Учесь, что в натуральной параметризации  $\mathbf{r}'^2 = 1$ ,  $\mathbf{r}'\mathbf{r}'' = 0$ .

• ( $\leq$  Н<sub>22</sub>) Записать кручение линии в произвольной параметризации.

• ( $\leq$  Н<sub>23</sub>) Решить уравнения Френе для  $k = \text{const}$ ,  $\chi = \text{const}$ .

• ( $\leq$  Н<sub>24</sub>) Доказать, что при движении в центральном поле (сила направлена по радиус-вектору) сохраняется момент импульса, т.е.:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = f(r)\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d[\mathbf{r} \times \mathbf{p}]}{dt} = 0.$$

• ( $\leq$  Н<sub>25</sub>) Доказать, что в центральном поле сохраняется энергия:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -V'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r) \right] = 0.$$

• ( $\leq$  Н<sub>26</sub>) Доказать, что в кулоновском поле сохраняется вектор  $\mathbf{A}$ :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r}, \quad \mathbf{A} = [\mathbf{u} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{u}]] - \frac{\alpha}{r}\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0.$$

• ( $\leq$  Н<sub>27</sub>) Пусть  $\mathbf{V}$  – это множество дифференцируемых функций 2-х аргументов  $f(x, y)$ , которые можно складывать и умножать на числа. Множество  $\Omega$  пусть состоит из операторов частных производных:  $\partial^{n+m}/\partial x^n \partial y^m$ , которые можно применять последовательно и складывать. Умножение  $\Omega \times \mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}$  соответствует действию оператора на функцию (т.е. взятие производной), в результате которой снова получается функция. Каким аксиомам удовлетворяют эти операции?



## Глава 2

# Векторный анализ

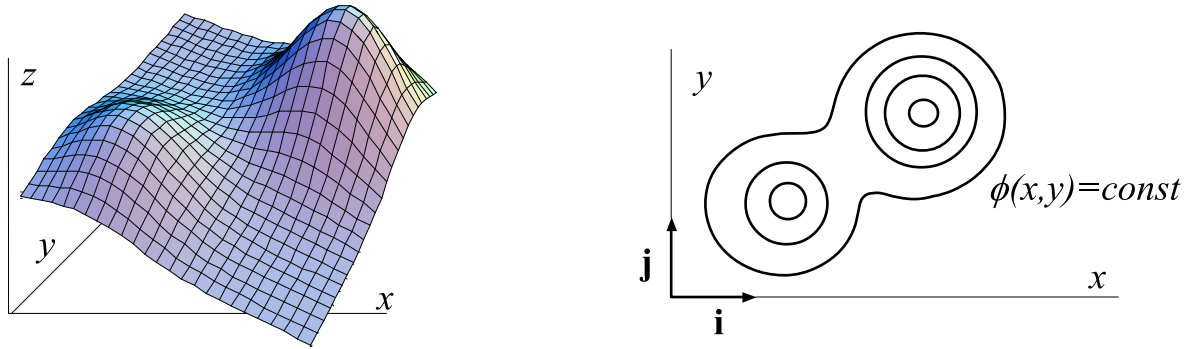
С каждой точкой пространства может быть связан некоторый вектор. Существует множество физических систем, которые описываются подобным образом: скорость потока воздуха, напряжённость электрического поля, и т.д. В разных точках пространства длина и направление вектора могут быть различными, поэтому вектор зависит не только от времени, но и от координат. В этом случае говорят о векторном поле или векторной функции.

Естественной операцией оказывается вычисление частных производных от векторных функций по  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Векторные дифференциальные уравнения, содержащие такие производные, лежат в основе электродинамики, гидро-, аэродинамики и других теорий.

Ключевым математическим объектом главы является оператор набла. С его помощью определяются различные способы дифференцирования векторных и скалярных функций. Важную роль в приложениях играют интегральные теоремы. Кроме этого рассматривается функция Дирака, возникающая в результате дифференцирования сингулярных функций, и некоторые важные классы векторных полей.

## 2.1 Градиент и оператор набла

• Рассмотрим 2-мерную, однозначно заданную при помощи функции  $\varphi(x, y)$  поверхность (например, высоту рельефа). Графически её можно изобразить в виде 3-мерного рисунка (слева) или при помощи линий постоянной высоты, аналогично географическим картам (справа):



Дифференциал функции (бесконечно малое изменение) равен:

$$d\varphi = \varphi(x + dx, y + dy) - \varphi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy.$$

Его значение зависит от направления, в котором происходит сдвиг  $(dx, dy)$ , и от начальной точки  $(x, y)$ . Удобно ввести бесконечно малое изменение радиус-вектора  $d\mathbf{r}$  и вектор *градиента функции*  $\nabla \varphi$ :

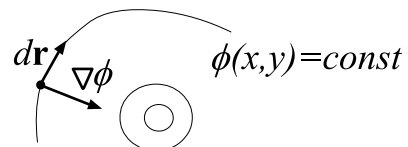
$$d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy, \quad \nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

где  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  единичные перпендикулярные векторы, направленные вдоль осей  $x$  и  $y$ . Так как  $\mathbf{i}\mathbf{j} = 0$ , несложно проверить, что дифференциал функции равен скалярному произведению:

$$d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r}.$$

Рассмотрим линию постоянной высоты (значение  $\varphi(x, y) = \text{const}$ ), т.н. *линию уровня*. Если смещение  $d\mathbf{r}$  происходит вдоль неё, то  $d\varphi = 0$ , и

$$\nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = 0$$



Равенство нулю скалярного произведения означает перпендикулярность векторов. Следовательно, градиент функции всегда направлен перпендикулярно к линии  $\varphi(x, y) = \text{const}$ . Так как производная растущей функции положительна, градиент указывает направление максимального возрастания функции (двигаясь вдоль градиента, можно забраться на ближайший локальный максимум поверхности).

• Перейдём теперь к 3-мерному пространству. Пусть в каждой точке задано некоторое число  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ . В этом случае говорят о скалярной функции или *скалярном поле*. Физические примеры: поле температуры (изменяющаяся в пространстве температура), распределение плотности массы или заряда, и т.д. Естественно, изобразить 3-мерное поле в виде поверхности мы не можем. Для этого потребовалось бы 4-мерное пространство. Однако рассуждения остаются теми же, что и для 2-мерных поверхностей. Дифференциал функции можно выразить через скалярное произведение  $d\mathbf{r}$  и градиента  $\nabla\varphi$ :

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r},$$

где

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz, \quad \nabla\varphi = \mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

а  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – единичные взаимно перпендикулярные базисные векторы, направленные вдоль осей  $x, y$  и  $z$ .

Вектор градиента перпендикулярен к *поверхностям* постоянного значения поля  $\varphi(x, y, z) = \text{const}$  и направлен в сторону максимального локального увеличения функции  $\varphi$ .

Градиент  $\nabla\varphi$  обозначается также следующим образом:  $\text{grad}\varphi$ . Однако использование значка *набла*  $\nabla$  оказывается очень удобным для запоминания многих формул векторного анализа.

Чтобы продвинуться дальше, “оторвём” наблу от буквы  $\varphi$  и введём следующий *оператор*:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Это выражение “незаконченное”, так как под знаками частных производных должна находиться функция. Оператором *набла*  $\nabla$  необходимо “подействовать” на функцию, чтобы получилось “обычное” выражение. Ситуация полностью аналогична значкам частной или полной производных, дифференциалу и т.п.:

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d}{dx}, \quad d.$$

Для завершения выражения справа должна стоять некоторая функция. Точно так же и с наблой. Только это векторный дифференциальный оператор, и в его определение, кроме частных производных, входят базисные векторы  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$ .

## 2.2 Дивергенция, ротор и не только

• Кроме скалярных, в физике часто встречаются векторные функции, компоненты которых являются функциями координат:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{i} A_x(x, y, z) + \mathbf{j} A_y(x, y, z) + \mathbf{k} A_z(x, y, z).$$

Представим, например, поток воды. Каждая точка имеет определённую скорость, поэтому можно говорить о векторном поле скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ . Аналогично, в окрестности заряда или массивного тела на другие тела действует сила, меняющаяся от точки к точке. Следовательно, можно говорить о векторном поле сил.

Набла является вектором с компонентами  $\nabla = \{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$ . Он может подействовать на векторную функцию  $\mathbf{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$  при помощи скалярного произведения. В этом случае говорят о *дивергенции* поля:

$$\nabla \mathbf{A} \equiv \text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Как и для обычных векторов, дивергенция (скалярное произведение) — это скаляр (точнее, скалярное поле).

Из определения следует, что дивергенция радиус-вектора  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$  равна трём (в общем случае размерности пространства):

$$\nabla \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

• Второе действие с оператором набла основано на векторном произведении и называется *ротором*. Ротор можно записать в более запоминающемся виде при помощи определителя (стр. 48):

$$\nabla \times \mathbf{A} \equiv \text{rot} \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix},$$

или в явном покомпонентном виде (см. стр. 12):

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

Ротор — это вектор, а точнее, векторное поле. Ротор радиус-вектора равен нулю:

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0.$$

Для доказательства достаточно подставить в определение ротора компоненты радиус-вектора  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$  и вычислить частные производные.

• Оператор набла, прежде чем подействовать на функцию, может предварительно свернуться с некоторым вектором  $\mathbf{a}$ . В результате получится скалярный оператор вида  $(\mathbf{a}\nabla)$ . Часто в качестве  $\mathbf{a}$  используется единичный вектор. Оператор  $(\mathbf{a}\nabla)$  называют *производной по направлению* вектора  $\mathbf{a}$ . Понятно, что он может подействовать как на скалярную, так и на векторную функцию. Вычислим, например:

$$(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{r} = \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z = \mathbf{a}.$$

Название “производная по направлению” возникает по следующей причине. Рассмотрим некоторую функцию  $f(\mathbf{r})$ . Через данную точку  $\mathbf{r}$  можно провести прямую в направлении, определяемом вектором  $\mathbf{a}$ . Её параметрическое уравнение имеет вид:  $\mathbf{r} + \mathbf{a}t$ , где  $t$  – скалярный параметр (стр. 16). Найдём производную  $f$  *вдоль этой прямой* в точке  $\mathbf{r}$ . Дифференцирование вдоль прямой может быть определено, как дифференцирование по параметру  $t$ , при помощи которого пробегаются точки на прямой вдоль вектора  $\mathbf{a}$ . Производная вычисляется, как производная сложной функции:

$$\frac{d}{dt}f(x+a_x t, y+a_y t, z+a_z t) = \frac{\partial f}{\partial(x+a_x t)}a_x + \frac{\partial f}{\partial(y+a_y t)}a_y + \frac{\partial f}{\partial(z+a_z t)}a_z.$$

Поэтому производная по направлению  $\mathbf{a}$  в данной точке пространства  $\mathbf{r}$  при  $t = 0$  равна:

$$\left.\frac{df(\mathbf{r} + \mathbf{a}t)}{dt}\right|_{t=0} = (\mathbf{a}\nabla)f(\mathbf{r}).$$

• Кроме оператора набла, часто встречается *оператор Лапласа*, равный квадрату оператора набла:

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Так как компонентами вектора  $\nabla$  являются частные производные, то квадрат этого вектора равен сумме квадратов компонент, т.е. вторых производных. Оператор Лапласа может действовать как на скалярную, так и на векторную функции. Неоднородное линейное уравнение с оператором Лапласа называют *уравнением Пуассона*. Например, потенциал электростатического поля  $\varphi$  в системе СГС удовлетворяет уравнению:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho,$$

где  $\rho$  – плотность заряда.

## 2.3 Правила дифференцирования

• Любое выражение с участием оператора набла может быть вычислено в явном компонентном виде. Найдём, например, градиент расстояния от начала координат (длина радиус-вектора). Для этого вычислим частную производную по  $x$ :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{x}{r}.$$

Для производной по  $y$  в числителе появится  $y$ , и аналогично для  $z$ . Учтивая определение векторного оператора набла (стр. 29), получаем:

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{r} = ix + jy + kz$  – радиус вектор,  $r$  – его длина, а  $\mathbf{n}$  – единичный вектор в направлении  $\mathbf{r}$ . Аналогично ( $\leq H_{28}$ ):

$$\nabla f(r) = f'(r) \mathbf{n}, \quad \nabla(\mathbf{a}r) = \mathbf{a},$$

где  $\mathbf{a}$  – постоянный вектор. В последнем уравнении скобки обязательны. Оператор набла является вектором, поэтому должно быть указано, какие векторы участвуют в скалярном произведении.

Пусть функция  $f$  зависит от координат и постоянного вектора  $\mathbf{a}$  и при этом является *скалярной величиной*. Это означает, что её значение не зависит, например, от поворота системы координат. Тогда функция может зависеть только от двух скалярных величин – длины вектора  $r$  и скалярного произведения  $\mathbf{r}\mathbf{a}$ . Градиент такой функции будет равен:

$$\nabla f(r, \mathbf{a}r) = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{n} + \frac{\partial f}{\partial(\mathbf{a}r)} \mathbf{a}.$$

Аналогично вычисляется градиент и в более сложных случаях.

Если понятно, на что действует оператор набла, то с ним можно обращаться, как с обычным вектором. Например, вычислим ротор от векторного произведения *постоянного* вектора  $\mathbf{a}$  на радиус-вектор  $\mathbf{r}$ :

$$\nabla \times [\mathbf{a} \times \mathbf{r}] = \mathbf{a}(\nabla \mathbf{r}) - (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{r} = 3\mathbf{a} - \mathbf{a} = 2\mathbf{a}.$$

В первом равенстве применено тождество “бац минус цаб”, затем учтены соотношения  $\nabla \mathbf{r} = 3$  и  $(\mathbf{a} \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{a}$ , которые были получены выше. Вектор  $\mathbf{r}$ , на который действует набла, должен оставаться всё время справа от оператора.



• В общем случае при действии  $\nabla$  на некоторое выражение необходимо учитывать, что производная произведения равна сумме производных каждого сомножителя. Для преобразования подобных выражений удобно в промежуточных вычислениях ставить у оператора индекс, помечающий объект, на который он действует. Затем при помощи преобразований необходимо оставить справа от оператора только объект действия. После этого индексы убираются. Например:

$$\nabla(f\mathbf{A}) = \nabla_f(f\mathbf{A}) + \nabla_{\mathbf{A}}(f\mathbf{A}) = (\mathbf{A}\nabla_f)f + f\nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{A} = (\mathbf{A}\nabla)f + f\nabla\mathbf{A}.$$

Аналогично вычисляется дивергенция векторного произведения двух векторных полей:

$$\nabla[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \nabla_{\mathbf{A}}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] + \nabla_{\mathbf{B}}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = [\nabla_{\mathbf{A}} \times \mathbf{A}]\mathbf{B} - [\nabla_{\mathbf{B}} \times \mathbf{B}]\mathbf{A}.$$

После выставления индексов с наблой можно работать, как с обычным вектором. Поэтому во втором равенстве применено правило выталкивания для первого слагаемого, а во втором сначала переставлены со знаком минус сомножители в векторном произведении, а затем применено правило выталкивания. Теперь необходимо изменить порядок в скалярных произведениях, после чего индекс у наблы можно опустить:

$$\nabla[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot [\nabla \times \mathbf{A}] - \mathbf{A} \cdot [\nabla \times \mathbf{B}].$$

Точно так же при помощи формулы “бац минус цаб” можно доказать следующее тождество ( $\leq N_{29}$ ):

$$\nabla \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla\mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B}.$$

• Иногда полезно умножить выражение на *произвольный* постоянный вектор. После проведения преобразований этот вектор опускается. Вычислим, к примеру, выражение  $(\mathbf{a}\nabla)[\mathbf{r} \times \mathbf{b}]$ , где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  постоянные векторы. Умножая справа на постоянный вектор  $\mathbf{c}$ , получаем:

$$(\mathbf{a}\nabla)[\mathbf{r} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{r} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c}.$$

В первом равенстве применено правило выталкивания, во втором – вычислена производная по направлению  $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{a}$ , в третьем – правило выталкивания слева-направо. Окончательно, *в силу произвольности* вектора  $\mathbf{c}$ , его можно опустить и получить тождество:

$$(\mathbf{a}\nabla)[\mathbf{r} \times \mathbf{b}] = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}].$$

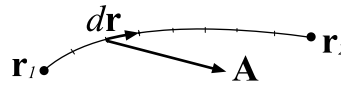
Сокращение произвольного вектора в скалярном произведении означает, что можно последовательно выбрать  $\mathbf{c} = \{1, 0, 0\}$ ,  $\mathbf{c} = \{0, 1, 0\}$ ,  $\mathbf{c} = \{0, 0, 1\}$ , получая соответствующие проекции выражения на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

## 2.4 Интегральные теоремы

Смысл дивергенции и ротора наглядно проявляется при использовании интегральных соотношений. Определим три вида интегралов.

Пусть некоторая линия (контур)  $L$ , соединяющая две точки  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , разбита на маленькие отрезки, касательные к которым обозначаются как  $d\mathbf{r}$ . Возьмём скалярное произведение векторного поля  $\mathbf{A}$  в данной точке и малого сдвига вдоль контура  $d\mathbf{r}$ . Если все такие произведения просуммировать, то получится *интеграл вдоль контура*:

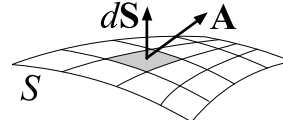
$$\int_L \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \sum_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i.$$



Контур может быть замкнутым ( $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ ). В этом случае значок интеграла пересекается кружочком.

Похожим образом вычисляется *интеграл по поверхности*. Для этого поверхность разбивается на небольшие участки, в каждом из которых определяется вектор  $d\mathbf{S}$ , равный по модулю площади участка и перпендикулярный к поверхности. Затем вычисляется скалярное произведение векторного поля на  $d\mathbf{S}$  в каждой точке. Все произведения суммируются:

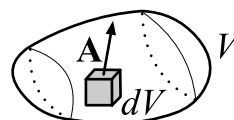
$$\int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) d\mathbf{S}_i.$$



Поверхность, по которой производится интегрирование, может быть замкнутой или открытой. Например поверхность сферы замкнута (у неё нет границ). Любая конечная область на плоскости открыта, так как имеет границы. Интегрирование по замкнутой поверхности обозначается кружком вокруг интеграла.

Наконец, *интегрирование по объёму*  $dV$  проводится разбиением области интегрирования на множество элементарных объёмов и суммированием значения подынтегральной функции в каждом таком объёме.

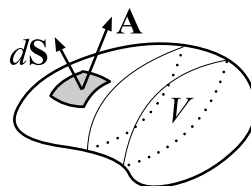
$$\int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV = \sum_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) dV_i.$$



В декартовых координатах  $dV = dx dy dz$ , т.е. интеграл по объёму представляет собой три "обычных" интеграла (трёхкратный интеграл).

• Пусть замкнутая поверхность  $S$  окружает объём  $V$ , и в пространстве задано векторное поле  $\mathbf{A}$ . Тогда справедлива *теорема Гаусса*:

$$\oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_V \nabla \mathbf{A} dV.$$

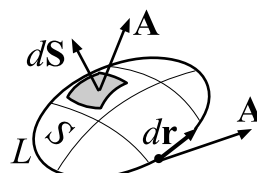


При интегрировании по замкнутой поверхности (см. кружок вокруг интеграла) используется следующее соглашение. Вектор элементарной площадки поверхности  $d\mathbf{S}$  направлен *перпендикулярно* поверхности и *наружу* из объёма. Сумма скалярных произведений маленьких площадок  $d\mathbf{S}$  и векторного поля  $\mathbf{A}$  в каждой точке поверхности называется *поток*. Именно поток стоит в левой части теоремы Гаусса.

Пусть объём интегрирования, окружающий некоторую точку, мал, так что в нём дивергенция  $\nabla \mathbf{A}$  примерно постоянна. Тогда, в силу теоремы Гаусса, дивергенция оказывается равной отношению потока векторного поля через поверхность, окружающую эту точку, делённую на объём внутри поверхности.

• *Теорема Стокса* связывает контурный и поверхностный интегралы:

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{r} = \int_S [\nabla \times \mathbf{A}] d\mathbf{S}.$$



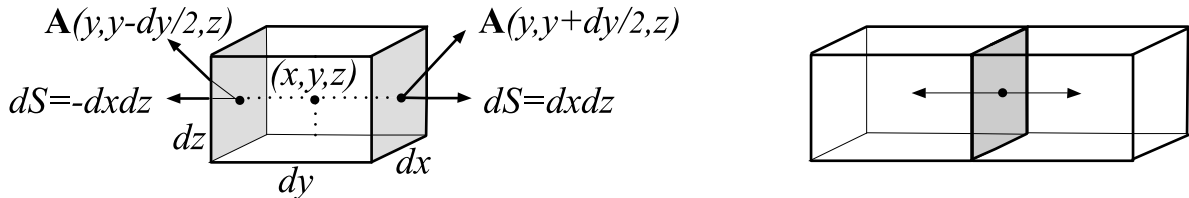
Поверхность  $S$  является незамкнутой. Её граница – это замкнутый контур  $L$ , интегрирование по которому проводится в левой части теоремы. Подобный контурный интеграл называется *циркуляцией*, или *вихрем* векторного поля. Поверхность  $S$  в теореме Стокса может быть как плоской, так и выгнутой. Направление вектора  $d\mathbf{S}$  показано на рисунке. Если ввинчивать правый штопор так, что его ручка повторяет направление интегрирования по контуру, то винт будет указывать в направлении внешней стороны поверхности. Какова бы ни была степень её выгнутости, поверхностный интеграл от ротора определяется только циркуляцией поля по границе этой поверхности.

У поверхности могут быть “дырки” и, следовательно, несколько не связанных границ. Теорема Стокса выполняется и в этом случае, однако необходимо следить за направлением обхода контуров ( $\leq H_{36}$ ).

Если площадь  $d\mathbf{S}$  мала и ротор  $[\nabla \times \mathbf{A}]$  в её пределах постоянен, то скалярное произведение ротора на  $d\mathbf{S}$  будет равно циркуляции векторного поля *вокруг* этой точки.

## 2.5 Доказательство теорем

• Для доказательства теоремы Гаусса вычислим сначала поток через поверхность маленького параллелепипеда с рёбрами  $dx, dy, dz$ , который окружает точку  $(x, y, z)$ . Будем считать, что эта точка находится в центре параллелепипеда (левый рисунок):



Поток через боковые грани, перпендикулярные оси  $y$ , равен:

$$A_y(x, y + dy/2, z) dx dz - A_y(x, y - dy/2, z) dx dz \approx \frac{\partial A_y}{\partial y} dy dx dz.$$

Произведение  $dx dz$  – это площадь боковой грани. Компонента  $A_y$  появляется из скалярного произведения  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ , так как вектор  $d\mathbf{S}$  перпендикулярен к поверхности и направлен из объёма. На правой грани он имеет компоненты  $d\mathbf{S} = \{0, dx dz, 0\}$ , а на левой грани  $d\mathbf{S} = \{0, -dx dz, 0\}$ . Кроме этого, каждая функция  $A_y(x, y \pm dy/2, z) \approx A_y \pm (\partial A_y / \partial y) dy/2$  разложена в ряд Тейлора по  $dy/2$ .

Аналогично вычисляется поток через оставшиеся две пары граней. В результате:

$$\oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} \approx \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz = (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV.$$

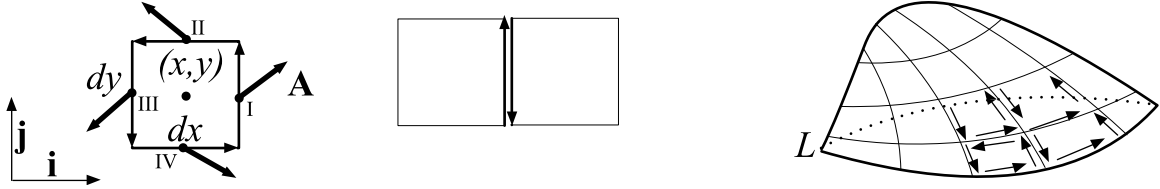
Произвольный объём можно разбить на множество подобных блоков. Так как вектор  $d\mathbf{S}$  направлен наружу из объёма, то потоки на прилегающих гранях двух соседних блоков имеют разный знак, и их сумма будет равна нулю (см. правый рисунок выше). Поэтому не скомпенсируются только потоки на внешних гранях, прилегающих к поверхности объёма. В результате поток через поверхность объёма будет равен сумме дивергенций в каждом элементарном объёме.

При выводе теоремы Гаусса предполагается дифференцируемость векторного поля во всех точках объёма. В физически интересных задачах обычно существуют *источники* или *стоки* поля. Это такие точки, из которых векторы “выходят” в разные стороны (исток) или “входят” в точку (сток). Примером служит напряжённость электрического поля точечного заряда. В таких точках производная может не существовать, и при вычислении дивергенции необходима процедура регуляризации (см. следующий раздел).

• Идея доказательства теоремы Стокса аналогична теореме Гаусса. Введём в некоторой точке поверхности систему координат, так что ось  $z$  будет перпендикулярна поверхности. Тогда циркуляция  $\mathbf{A} d\mathbf{r}$  по маленькому контуру, ограничивающему элемент поверхности, равна:

$$\underbrace{A_y(x + \frac{dx}{2}, y) dy}_{I} - \underbrace{A_x(x, y + \frac{dy}{2}) dx}_{II} - \underbrace{A_y(x - \frac{dx}{2}, y) dy}_{III} + \underbrace{A_x(x, y - \frac{dy}{2}) dx}_{IV},$$

где опущен аргумент  $z$  у проекций векторной функции на контур. Скалярное произведение  $\mathbf{A} d\mathbf{r}$  вычисляется в середине отрезков контура, и знаки минус соответствуют движению против осей (первый рисунок):



Раскладывая функции в ряд Тейлора по  $dx/2$ ,  $dy/2$ , получаем:

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{r} \approx \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy = [\nabla \times \mathbf{A}]_z dx dy.$$

Произведение  $dx dy$  равно площади прямоугольного контура, а выражение в круглых скобках –  $z$ -компоненте ротора  $[\nabla \times \mathbf{A}]_z$ . По принятому соглашению, вектор элементарной площади направлен перпендикулярно к ней (в нашем случае, вдоль оси  $z$  в сторону Читателя), поэтому  $d\mathbf{S} = (0, 0, dx dy)$ . Значение контурного интеграла можно записать в векторном виде:

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{r} = [\nabla \times \mathbf{A}] d\mathbf{S}.$$

Естественно, поверхность в пространстве ориентирована произвольным образом. Однако запись при помощи векторов не зависит от выбора системы координат, поэтому это соотношение будет справедливо и в общем случае.

Большую поверхность можно разбить на множество таких прямоугольников. Если обходы по контуру в каждом из них проводятся в одном направлении, то контурные интегралы на прилегающих гранях будут сокращаться (см. выше второй рисунок), и ненулевым окажется только интеграл по контуру, ограничивающему поверхность. В результате доказывается теорема Стокса.

## 2.6 Дельта-функция Дирака

Неподвижный единичный заряд  $Q = 1$ , находящийся в начале координат, воздействует на пробный заряд  $q$  силой Кулона:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

где  $\mathbf{E}$  – электрическое поле. Для точечного заряда  $Q$  при  $r = 0$  получается бесконечное значение  $\mathbf{E}$ . Попробуем временно устранить эту проблему, модифицируя закон Кулона при помощи малой константы  $a$ :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{(r^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (2.1)$$

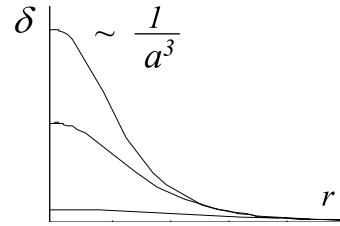
При  $a = 0$  мы возвращаемся к исходному выражению, однако при  $a \neq 0$  получается конечное значение напряжённости  $\mathbf{E}$  при  $r = 0$ . Подобное устранение сингулярности (бесконечности) называется *регуляризацией*.

Вычислим дивергенцию электрического поля. Так как дивергенция радиус вектора  $\nabla \mathbf{r} = 3$ , а градиент его длины  $\nabla r = \mathbf{r}/r$  (стр. 32), то, раскрывая производную произведения, получаем:

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{3}{(r^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{r}}{(r^2 + a^2)^{5/2}} 2r \frac{\mathbf{r}}{r} = 4\pi \delta_a(\mathbf{r}),$$

где введена следующая скалярная функция:

$$\delta_a(\mathbf{r}) = \frac{3}{4\pi} \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}}.$$



При уменьшении значения параметра  $a$  функция  $\delta_a(\mathbf{r})$  оказывается всё более высокой и узкой (см. рисунок). Множитель при функции выбран таким образом, чтобы интеграл от  $\delta_a(\mathbf{r})$  по всему пространству был равен единице:

$$\int \delta_a(\mathbf{r}) dV = \frac{3a^2}{4\pi} \int_0^\infty \frac{4\pi r^2 dr}{(r^2 + a^2)^{5/2}} = \int_0^\infty \frac{3\chi^2 d\chi}{(1 + \chi^2)^{5/2}} = \frac{\chi^3}{(1 + \chi^2)^{3/2}} \Big|_0^\infty = 1.$$

При интегрировании пространство разбивается на сферические слои радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ . Объём каждого слоя  $4\pi r^2 dr$ . В интеграле по  $r$  затем делается замена  $\chi = r/a$ , а первообразная проверяется прямым взятием производной.

Значение интеграла остаётся единичным и при  $a \rightarrow 0$ , хотя функция  $\delta(\mathbf{r}) = \delta_0(\mathbf{r})$  в этом пределе становится разрывной:

$$\delta(\mathbf{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & r \neq 0 \\ \infty, & r = 0 \end{cases}, \quad \int \delta(\mathbf{r}) dV = 1.$$

Функция с такими свойствами называется *3-мерной дельта-функцией Дирака*. Её удобно использовать для описания точечных зарядов, когда заряд сосредоточен в сколь угодно малом объёме. В этом случае дивергенция электрического поля равна нулю везде, кроме начала координат, где она обращается в бесконечность (бесконечная плотность заряда).

Если бы мы формально вычислили  $\nabla \mathbf{E}$  для закона Кулона, то получился бы ноль при любом значении  $r$ . Поэтому дифференцирование *сингулярных функций* требует определённой аккуратности. В частности:

$$\nabla \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Абсолютно аналогично, при помощи регуляризации, вычисляется лапласиан от  $1/r$  (сингулярная функция). Можно также взять дивергенцию от  $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$ .

$$\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Дельта-функция обладает одним очень полезным свойством. Интеграл от её произведения с произвольной гладкой функцией равен значению этой функции в точке сингулярности  $\delta$ -функции:

$$\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_0).$$

Интеграл по  $dV \equiv d^3\mathbf{r}$  может проводиться по всему пространству (координаты  $\mathbf{r}$ ), или по объёму, непосредственно окружающему точку  $\mathbf{r}_0$ . Так как  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  равна нулю везде, кроме  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ , то можно положить  $f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0)$ . Эта константа выносится за интеграл, а оставшийся интеграл от функции Дирака равен 1.

Такое свойство позволяет записать решение *уравнения Пуассона* (интегрирование по координатам  $\mathbf{R}$  по объёмам  $dV \equiv d^3\mathbf{R} = dXdYdZ$ ):

$$\Delta\phi = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{R}) d^3\mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}.$$

Решение проверяется прямой подстановкой в уравнение. Лапласиан от  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$  даёт  $-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ , интегрирование с которой приводит к  $\rho(\mathbf{r})$ .

## 2.7 Потенциальные и соленоидальные поля

- Для произвольного скалярного поля  $\varphi$  справедливо тождество:

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

(ротор градиента скалярного поля равен нулю). Оно следует из того, что векторное произведение вектора самого на себя равно нулю ( $[\nabla \times \nabla] = 0$ ). Справедливо и *обратное* утверждение. Если ротор векторного поля равен нулю, то такое поле может быть представлено в виде градиента от некоторого скалярного поля:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi.$$

Действительно, если  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , то, в силу теоремы Стокса, интеграл от  $\mathbf{E}$  по *любому* замкнутому контуру равен нулю. Поэтому криволинейный интеграл между двумя точками не зависит от пути интегрирования и определяется только значениями координат начальной и конечной точки, которые мы запишем при помощи некоторой функции  $\varphi$ :



$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}_0) - \varphi(\mathbf{r}).$$

В этом случае интеграл по замкнутому контуру равен нулю, так как  $\varphi(\mathbf{r}_0) - \varphi(\mathbf{r}) + \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0) = 0$ .

То, что интеграл зависит от разности значений скалярной функции, означает, что  $\mathbf{E} d\mathbf{r}$  является дифференциалом функции  $-d\varphi$ . Учитывая, что  $d\varphi = \nabla \varphi d\mathbf{r}$ , делаем вывод, что векторное поле равно  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ . Поле  $\mathbf{E}$  называют *потенциальным* полем, а функцию  $\varphi$  – *потенциалом*. Понятно, что потенциал определён с точностью до константы. Не меняя поля  $\mathbf{E}$ , всегда можно заменить  $\varphi \mapsto \varphi' = \varphi + C$ , где  $C = \text{const}$ .

Потенциальное поле полностью определяется своей дивергенцией и может быть представлено в виде следующего интеграла:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3\mathbf{R}, \quad (2.2)$$

где интегрирование ведётся по точкам  $\mathbf{R}$  (т.е.  $d^3\mathbf{R} = dX dY dZ$ ) всего пространства. Действительно, так как справа стоит градиент от скалярной функции (интеграла), то  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  – потенциальное поле. Взяв дивергенцию правой и левой части и воспользовавшись тем, что лапласиан  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  от  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$  равен функции Дирака, приходим к тождеству.



- Существует ещё одно важное тождество для векторного поля  $\mathbf{A}$ :

$$\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{A}] = 0.$$

Оно также следует из свойства  $[\nabla \times \nabla] = 0$ , однако предварительно необходимо применить правило “выталкивания”. Если поле  $\mathbf{B}$  убывает на бесконечности и  $\nabla \mathbf{B} = 0$ , то существует такое  $\mathbf{A}$ , что:

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Поле  $\mathbf{B}$  в этом случае называют *соленоидальным*, а  $\mathbf{A}$  – *векторным потенциалом*. Заметим, что потенциал  $\mathbf{A}$  определён не однозначно, и к нему, без изменения поля  $\mathbf{B}$ , всегда можно добавить градиент произвольной скалярной функции:

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f.$$

Так как  $\nabla \times \nabla f = 0$ , то поле  $\mathbf{B}$  не изменяется. Такой произвол позволяет накладывать на векторный потенциал  $\mathbf{A}$  дополнительные условия, называемые *калибровкой*. Например, подбором  $f$  всегда можно добиться того, что  $\nabla \mathbf{A} = 0$  (т.н. *кулоновская калибровка*). Действительно, пусть  $\mathbf{A}$  не удовлетворяет этому условию. Без изменения поля  $\mathbf{B}$  можно подобрать такую  $f$ , что потенциал  $\mathbf{A}'$  этому условию будет удовлетворять:

$$\nabla \mathbf{A}' = \nabla \mathbf{A} + \Delta f = 0.$$

Решая уравнение Пуассона  $\Delta f = -\nabla \mathbf{A}$ , получаем требуемую  $f$ . В кулоновской калибровке:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}] = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A}.$$

Если ротор  $\nabla \times \mathbf{B}$  соленоидального поля  $\mathbf{B}$  известен, то, решая уравнение Лапласа  $\Delta \mathbf{A} = -\nabla \times \mathbf{B}$  (для каждой компоненты) и беря от решения ротор, получаем:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} dV_R. \quad (2.3)$$

Таким образом, если потенциальное поле определяется своей дивергенцией (2.2), то соленоидальное – ротором.

В общем случае справедлива следующая теорема. Если дивергенция и ротор *произвольного* непрерывного векторного поля  $\mathbf{A}$  обращаются в ноль на бесконечности быстрее, чем  $1/r^2$  (существуют интегралы (2.2) и (2.3)), то  $\mathbf{A}$  может быть единственным образом разложено  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$  на *соленоидальное* ( $\nabla \mathbf{A}_1 = 0$ ) и *потенциальное* ( $\nabla \times \mathbf{A}_2 = 0$ ) поля.

## Задачи

- ( $\leq$  Н<sub>28</sub>) Доказать, что:

$$\nabla f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \nabla(\mathbf{r}\mathbf{a}) = \mathbf{a},$$

где  $\mathbf{a} = \text{const}$  – постоянный вектор.

- ( $\leq$  Н<sub>29</sub>) Доказать:

$$\nabla \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla\mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B}.$$

- ( $\leq$  Н<sub>30</sub>) Доказать:

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times [\nabla \times \mathbf{B}] + \mathbf{B} \times [\nabla \times \mathbf{A}] + (\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{A}.$$

- ( $\leq$  Н<sub>31</sub>) Для двух постоянных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  доказать тождество  $[\mathbf{a} \times \nabla](\mathbf{r}\mathbf{b}) = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ , умножив его на постоянный вектор  $\mathbf{c}$ .

- ( $\leq$  Н<sub>32</sub>) Интегрируя по сфере при помощи теоремы Гаусса проверить соотношение  $\nabla(\mathbf{r}/r^3) = 4\pi\delta(\mathbf{r})$ .

- ( $\leq$  Н<sub>33</sub>) Найти интегралы ( $\mathbf{a} = \text{const}$ ) по произвольной замкнутой поверхности  $S$ :

$$\oint_S \mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}), \quad \oint_S (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{S}, \quad \oint_S [\mathbf{r} \times d\mathbf{S}].$$

- ( $\leq$  Н<sub>34</sub>) Вычислить интеграл  $\int d\mathbf{S}$  по полусфере. Для этого умножить его на постоянный вектор и применить теорему Стокса для замкнутого контура по экватору (для “северного полушария”).

- ( $\leq$  Н<sub>35</sub>) Доказать закон Архимеда для тела произвольной формы. Давление воды всегда перпендикулярно поверхности тела.

- ( $\leq$  Н<sub>36</sub>) Записать теорему Стокса для круга с одной и двумя дырками и нарисовать направление обхода контуров.

- ( $\leq$  Н<sub>37</sub>) Пусть  $\mathbf{k}$  – единичный вектор и  $a$  – малая константа. Вычислить ротор поля  $\mathbf{A}$ , устремив  $a \rightarrow 0$ :

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{k}\mathbf{r}}{r} \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{k}]}{[\mathbf{r} \times \mathbf{k}]^2 + a^2}.$$

- ( $\leq$  Н<sub>38</sub>) При помощи предыдущих двух задач и теоремы Стокса покажите, что площадь полусферы единичного радиуса равна  $2\pi$ . Для этого перейдите от поверхностного интеграла  $\int(\mathbf{r}d\mathbf{S})/r^3$  к контурному. Учтите наличие особенности при  $|\mathbf{k} \times \mathbf{r}| = 0$ .

• ( $\leq N_{39}$ ) Напряжённость электрического поля заряда  $Q$ , имеющего скорость  $\mathbf{v}$ , равна ( $v = |\mathbf{v}|$ , скорость света  $c = 1$  и  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ ):

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{r^3} \mathbf{r} \frac{1 - v^2}{(1 - [\mathbf{n} \times \mathbf{v}]^2)^{3/2}}.$$

Найти поток поля через сферу, окружающую заряд.

• ( $\leq N_{40}$ ) Для поля из предыдущей задачи убедиться, что оно удовлетворяет уравнению  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi Q \delta(\mathbf{r})$ , где  $\delta(\mathbf{r})$  – дельта-функция Дирака.

• ( $\leq N_{41}$ ) Напряжённость магнитного поля движущегося заряда из предыдущей задачи равна:  $\mathbf{B} = [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]$ . Убедиться, что  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

• ( $\leq N_{42}$ ) Если  $\rho$  – плотность заряда, а  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  – плотность тока зарядов, движущихся со скоростью  $\mathbf{v}$ , то справедливы уравнения Максвелла (скорость света  $c = 1$ ). Получить из них *уравнение непрерывности*:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho, & \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \mathbf{B} = 0. \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0.$$

• ( $\leq N_{43}$ ) Из уравнений Максвелла получить закон сохранения энергии электромагнитного поля и зарядов:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathbf{E} \mathbf{j} + \nabla \mathbf{P} = 0, \quad \text{где} \quad W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}, \quad \mathbf{P} = \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{4\pi}.$$

• ( $\leq N_{44}$ ) Выразить решения уравнений Максвелла для дивергенции  $\nabla \mathbf{B}$  и ротора  $\nabla \times \mathbf{E}$  через векторный  $\mathbf{A}$  и скалярный  $\varphi$  потенциалы и подставить их в оставшуюся пару уравнений.

• ( $\leq N_{45}$ ) Убедиться, что векторные функции  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(u)$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(u)$  с аргументом  $u = \mathbf{n} \mathbf{r} - t$  удовлетворяют уравнениям Максвелла в пустоте  $\rho = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$ . Найти ограничение на постоянный вектор  $\mathbf{n}$ .

• ( $\leq N_{46}$ ) В гидродинамике рассматривается непрерывная среда, скорость которой зависит от времени и точки в пространстве  $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ , обладающая плотностью массы  $\rho(t, \mathbf{r})$ . На каждый элементарный объём действует давление  $p(t, \mathbf{r})$  перпендикулярно его поверхности. Записать 2-й закон Ньютона во внешнем поле силы тяжести (уравнение Эйлера).

• ( $\leq N_{47}$ ) При помощи уравнения Эйлера для идеальной несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ), имеющей стационарное ( $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$ ) безвихревое движение ( $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ), вывести *закон Бернулли*  $\rho \mathbf{u}^2 / 2 + p - \rho \mathbf{g} \mathbf{r} = \text{const}$ .

• ( $\leq N_{48}$ ) Доказать, что жидкость будет неподвижной, только если силовое поле удовлетворяет следующему условию:  $\mathbf{g}[\nabla \times \mathbf{g}] = 0$ .



## Глава 3

# Матрицы

Матрицей называется таблица чисел. Матрицы очень часто встречаются в физике. К тому же, это первый нетривиальный пример индексного объекта, которым будут посвящены следующие главы.

С каждой квадратной матрицей связывается число, называемое определителем матрицы. Оно обладает любопытными свойствами и появляется во многих формулах при работе с матрицами. Важную роль играют также обратная матрица и собственные значения матриц. Предполагается, что Читатель имеет представление о матрицах, системах линейных уравнений и т.п., поэтому связанные с ними вопросы напоминаются достаточно бегло.

Соотношения для матриц и формулы векторного анализа могут быть представлены в изящной индексной форме. Мы рассмотрим очень важные символы Кронекера и Леви-Чевиты. В заключение обсудим матричное представление для описания поворотов декартовой системы координат в 3-мерном пространстве.

### 3.1 Матрицы

• *Матрица* – это набор чисел, упорядоченных в виде прямоугольной таблицы. Компоненты вектора имеют только один индекс  $a_i$ , тогда как у матрицы их два:  $a_{ij}$ . Рассмотрим *квадратную матрицу*  $3 \times 3$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В табличной записи первый индекс чисел  $a_{ij}$  увеличивается при переходе к следующей строке, а второй – к следующему столбцу. Числа  $a_{ij}$  называют *элементами матрицы*, а числа, имеющие одинаковые значения индексов  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  – *диагональными элементами*.

Как и в случае с векторами, матрицы можно поэлементно складывать и умножать на число:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij}.$$

Кроме этого, вводится операция умножения матриц друг на друга, в результате которой опять получается *матрица*. Для матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  с элементами  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  матрица  $\mathbf{C}$ , равная их произведению, имеет элементы:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj}.$$

В табличной форме умножение матриц можно представить в виде “*правила лома*”. Чтобы получить  $c_{ij}$ , необходимо взять  $i$ -ю строку матрицы  $\mathbf{A}$  (лом) и пробить им “дыру” в стенке из  $j$ -го столбика матрицы  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \mathbf{b}_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & \mathbf{b}_{22} & b_{2n} \\ b_{n1} & \mathbf{b}_{n2} & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

После этого на месте дырки в матрице  $\mathbf{C}$  записывается сумма произведений элементов лома и стенки:  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$ .

Из определения видно, что при перемножении матриц их можно группировать произвольным образом (умножение *ассоциативно*), но нельзя переставлять местами (умножение *не коммутативно*):

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}), \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Т.е. всё с точностью до наоборот по сравнению со скалярным умножением векторов! Произведение матриц не является обычным арифметическим умножением. Это сокращение для операции суммирования произведения элементов  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$ .

• Вектор с компонентами  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$  можно представить в виде столбика, и определить умножение матрицы  $\mathbf{C}$  на вектор, в результате которого получается новый вектор  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{b} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}, \quad b_i = \sum_{k=1}^3 c_{ik} a_k, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

При умножении матрицы на вектор также используется “правило лома”, однако “стенка” теперь состоит из единственного столбца (вектора).

• Из матрицы  $\mathbf{A}$  можно получить новую, *транспонированную* матрицу  $\mathbf{A}^T$ , в которой столбцы и строчки переставлены местами:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если элементы матрицы  $\mathbf{A}$  равны  $a_{ij}$ , то в транспонированной матрице  $\mathbf{A}^T$  они будут получены перестановкой индексов:  $a_{ij}^T = a_{ji}$ . Матрица, которая не меняется при транспонировании  $a_{ij} = a_{ji}$ , называется *симметричной*. Иногда коэффициенты матрицы таковы, что  $a_{ij} = -a_{ji}$ . Такие матрицы называются *антисимметричными*. *Унитарными матрицами* называют матрицы, которые не изменяются при перестановке индексов и взятии комплексного сопряжения:  $a_{ij}^* = a_{ji}$ .

• Особое значение имеет *единичная матрица*, в которой все элементы равны нулю, за исключением диагональных, равных единице:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножение единичной матрицы на любую  $\mathbf{A}$  не меняет этой матрицы:

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{A}.$$

Единичная матрица может быть переставлена местами с любой матрицей. Это легко проверить напрямую, умножая произвольную матрицу на единичную слева или справа. В общем случае это не так, и за порядком произведения матриц необходимо внимательно следить. *Коммутатором* двух матриц называют следующую комбинацию:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Если это выражение равно *нулевой матрице* (все элементы – нули), то говорят, что матрицы *коммутируют*. В противном случае матрицы *не коммутируют*, и  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ .

## 3.2 Определитель

• Для квадратной матрицы размером  $2 \times 2$  введём число, которое называется *определителем матрицы*:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Для вычисления определителя берутся произведения элементов матрицы "крест – накрест" и вычитаются друг из друга. При этом определитель произведения двух матриц  $2 \times 2$  равен произведению определителей каждой из них ( $\leq N_{49}$ ):

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}. \quad (3.1)$$

Умножение матриц является специфической процедурой (правило "лома"). Поэтому замечательным является существование для каждой матрицы числа, удовлетворяющего обычному арифметическому правилу перемножения (3.1). Для матрицы  $3 \times 3$ :

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

также можно ввести число (определитель) со свойством (3.1):

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Каждое слагаемое имеет вид  $a_{1i}a_{2j}a_{3k}$ , и перебираются все  $6=3!$  перестановок *различных* индексов  $(i, j, k)$ . Знак "+" выбирается, если перестановка следует из  $(i, j, k) = (1, 2, 3)$  чётным числом парных перестановок, а "-" – при нечётном числе. Эту формулу легко запомнить, если взять элементы первой строки и для каждого из них вычеркнуть из матрицы строку и столбец, в котором элемент стоит. Затем найти определитель оставшейся матрицы  $2 \times 2$  и умножить его на этот элемент. Все такие произведения необходимо сложить со знаком "+", если сумма номеров строки и столбца, в котором стоит элемент, чётная, и со знаком "-", если нечётная:

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Это определение можно распространить на матрицу произвольной размерности, сводя вычисление определителя к сумме (разности) определителей матриц с размерностью на единицу меньше. Определитель матрицы  $2 \times 2$  тоже вычисляется по этому правилу, если считать, что определитель "матрицы"  $1 \times 1$  равен её элементу.



• Для любой *диагональной матрицы* определитель равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots$$

Произведение двух диагональных матриц снова даёт диагональную. Естественно, что при этом выполняется правило (3.1).

- Определители обладают рядом полезных для их вычисления свойств:
  - ▷ Транспонирование не изменяет определителя  $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$ .
  - ▷ Перестановка двух строк или столбцов меняет знак определителя.
  - ▷ Определитель не изменится, если к любой строке поэлементно прибавить другую строку, умноженную на произвольное число  $\lambda$ . Аналогично и для столбцов.

• В различных задачах часто возникают *системы линейных уравнений* относительно  $n$  неизвестных  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Решения такой системы можно выразить при помощи *формулы Крамера*:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где  $\Delta = \det \mathbf{A}$  – определитель матрицы  $\mathbf{A}$ , а  $\Delta_i$  – определители матриц, полученных из  $\mathbf{A}$  в результате замены  $i$ -го столбика на столбик  $\mathbf{b}$ .

Если правая часть системы уравнений равна нулю:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$ , то решение, отличное от нуля, существует только, если  $\det \mathbf{A} = 0$ . Такая система уравнений называется *однородной*, а её матрица *сингулярной*.

• *Минором* матрицы  $\mathbf{A}$  для элемента  $a_{ij}$  называется определитель матрицы, получающейся при вычёркивании  $i$ -той строки и  $j$ -го столбца. *Алгебраическое дополнение* равно минору, умноженному на  $(-1)^{i+j}$ . При вычислении определителя по элементам первой строки производилось умножение этих элементов на их алгебраические дополнения. Производная определителя по элементу  $a_{ij}$  даёт алгебраическое дополнение матрицы к этому элементу.

### 3.3 Обратная матрица

• Матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  называется *обратной* к матрице  $\mathbf{A}$ , если выполняется следующее уравнение:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}.$$

Обратная матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  при перемножении может быть переставлена местами с  $\mathbf{A}$ , следовательно, они *коммутируют* друг с другом. Действительно, будем считать, что  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}$ . Докажем выражение для переставленных матриц  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}$ . Умножим его слева на матрицу  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A},$$

где с учётом свойства ассоциативности изменена последовательность перемножения матриц. В результате мы пришли к тождеству  $\mathbf{A} = \mathbf{A}$ .

Ещё одно важное свойство обратных матриц:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1},$$

проверяется умножением левой и правой части на  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  (точку опускаем):

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^{-1} = (\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}.$$

Напомним, что такое вольное обращение со скобками возможно только для матриц. Для скалярных произведений векторов ассоциативность не выполняется.

• Обратную матрицу можно находить при помощи алгебраических дополнений. Для этого необходимо каждый элемент  $a_{ij}$  исходной матрицы заменить на определитель матрицы, полученной вычёркиванием строки и столбца, на пересечении которых он стоит, умножив его на  $(-1)^{i+j}$ . Т.е. из исходной матрицы строится матрица алгебраических дополнений к элементам исходной матрицы. После этого каждый элемент получившейся матрицы делят на определитель исходной матрицы и *транспонируют*. Результирующая матрица окажется обратной к исходной. Найдём обратную матрицу в следующем случае:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение к  $a_{23}$  равно  $(-1)^{2+3} \cdot (2 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 1$ , к элементу  $a_{31}$ :  $(-1)^{3+1}(1 \cdot 2 - 0 \cdot 4) = 2$ , и т.д. Определитель матрицы равен  $\det |\mathbf{A}| = 2$ . В качестве упражнения предлагается проверить, что умножение результирующей матрицы на исходную приводит к единичной матрице.

• Решение системы линейных уравнений можно записывать при помощи обратной матрицы. Для этого матричную запись системы необходимо слева умножить на  $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}.$$

Такая система уравнений имеет решение, если у матрицы  $\mathbf{A}$  есть обратная  $\mathbf{A}^{-1}$  и, следовательно, она не является сингулярной ( $\det \mathbf{A} \neq 0$ ).

• Функция от матрицы понимается в смысле степенного ряда. Например, экспонента от матрицы – это сокращённая запись бесконечного ряда ( $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}$ , и т.д.):

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots$$

• Интеграл от матричной экспоненты можно вычислить следующим образом:

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\mathbf{A}^k \tau^k}{k!} d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^{k+1}}{(k+1)!} = \mathbf{A}^{-1} \cdot [e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{1}],$$

где  $\mathbf{A}^{-1}$  – обратная к  $\mathbf{A}$  матрица, а  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{1}$  – единичная. В последнем равенстве проведено следующее преобразование:

$$\mathbf{1}t + \mathbf{A} \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^2 \frac{t^3}{3!} + \dots = \mathbf{A}^{-1} \cdot \left[ \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \right] = \mathbf{A}^{-1} \cdot [e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{1}].$$

• Ещё одно формальное разложение стоит проверить, умножив правую и левую части на  $(1 - \mathbf{A})$ :

$$(1 - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{1} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots$$

• Так как  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}$  и определитель произведения матриц равен произведению их определителей, то  $\det \mathbf{A}^{-1} = 1/\det \mathbf{A}$ .

• Важной характеристикой матрицы размера  $n \times n$  является сумма её диагональных элементов:

$$\text{Tr} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Это число называют *следом* матрицы и обозначают при помощи символа  $\text{Tr}$  или  $\text{Sp}$ . Справедлива изящная формула, связывающая след и определитель матрицы:

$$\det e^{\mathbf{A}} = e^{\text{Tr} \mathbf{A}}.$$

В качестве упражнения ( $\leq \text{H}_{56}$ ) предлагается проверить это соотношение в частном случае диагональной матрицы.

### 3.4 Работа с индексами

• Матрицы  $a_{ij}$  являются частным случаем использования *индексных* символов. В общем случае индексов может быть больше, например,  $a_{ijk}$ . В 3-мерном пространстве каждый из индексов принимает значения 1, 2, 3. Компоненты вектора также являются индексными объектами. В табличном виде их можно представить, как строку или столбец. Индексные выражения иногда называются *тензорными*, однако, кроме наличия индексов, тензоры должны определённым образом преобразовываться при смене координат. Мы рассмотрим этот вопрос в следующей главе.

Принято использовать соглашение, при котором по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Так, умножение матрицы на вектор записывается при помощи трёх эквивалентных способов:

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} b_j = a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + a_{i3}b_3 = a_{ij} b_j.$$

В последнем равенстве сумма не ставится, но *подразумевается*, так как индекс  $j$  в выражении *повторяется*.

Скалярное произведение векторов и след матрицы (сумма диагональных элементов) в индексной записи выглядят следующим образом:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i, \quad \text{Tr} \mathbf{A} = a_{ii}.$$

Суммационные индексы, как и переменная интегрирования, могут быть обозначены любой буквой, которая ещё не используется в качестве индекса в выражении. За такую “бесправность” их обычно называют *немными*, или *связанными* индексами. Например:  $a_{ij}b_j = a_{ik}b_k$  (переобозначили  $j$  на  $k$ ), но  $a_{ij}b_j \neq a_{ii}b_i$  (нельзя, так как индекс  $i$  уже есть в выражении). Следить за правильным использованием повторяющихся индексов важно только в сомножителях. В суммах сомножителей они могут встречаться и независимо:  $a_i b_i + c_{jj} = a_i b_i + c_{ii}$ .

Индексы, не участвующие в суммированиях, называют *свободными*. В индексных равенствах все свободные индексы в левой и правой части должны совпадать. Например,  $a_{ijk}b_k = c_{ij}$  ( $i, j$  - свободные индексы,  $k$  - связанный индекс). В то же время выражение  $a_{ijk}b_k = c_{im}$  без дополнительных уточнений смысла не имеет.

Иногда, если индекс в выражении “случайно” повторяется, но по нему нет суммирования, это либо оговаривается, либо такой индекс подчёркивается. Например:  $x_i = \lambda_{\underline{i}} n_i$ , т.е. справа по  $i$  суммы нет. Обычно достаточно таким образом пометить только один индекс.

• Для элементов единичной матрицы **1** существует специальное обозначение, придуманное Кронекером:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = j \\ 0 & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Символ  $\delta_{ij}$  “съедает” сумму, в которой участвует, и после этого “гибнет”, заменяя везде суммационный индекс (ниже  $j$ ) на свой второй (ниже  $i$ ):

$$\delta_{ij} a_j = a_i.$$

Действительно, в сумме по  $j$  окажутся равными нулю все слагаемые, за исключением случая, когда  $j = i$ . Приведём несколько выражений с символом Кронекера (значение индексов изменяется от 1 до 3):

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad \delta_{ii} = 3, \quad \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}, \quad \delta_{pi}a_{ijk}\delta_{kq} = a_{pq}.$$

Первое равенство отражает очевидно симметричный характер символа, а второе равно 3, так как  $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ .

Дифференцирование в индексных обозначениях удобно проводить, записав компоненты радиус-вектора следующим образом:  $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Тогда:

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} \equiv \partial_i x_j = \delta_{ij}, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Т.е. когда индексы совпадают, то производная, например,  $\partial x_1 / \partial x_1 = 1$ . При несовпадающих индексах такая производная равна нулю. Обратим внимание на запись оператора  $\partial_i$ , который является ничем иным, как  $i$ -той компонентой оператора набла.

Полученная в предыдущей главе (стр. 32) формула для градиента скалярного произведения радиус-вектора  $\mathbf{r}$  на постоянный вектор  $\mathbf{a}$ :

$$\nabla(\mathbf{r}\mathbf{a}) = \mathbf{a}$$

в индексном виде может быть выведена следующим образом:

$$\partial_i(x_j a_j) = \delta_{ij} a_j = a_i,$$

где  $i$  – компонента оператора набла.

Аналогично для производной радиус-вектора вдоль направления, задаваемого вектором  $\mathbf{a}$ :

$$(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{a},$$

имеем:

$$a_j \partial_j x_i = a_j \delta_{ij} = a_i.$$

Свободный индекс в этом выражении  $i$ . Именно он определяет компоненты векторов тождества в левой и правой части.

### 3.5 Символ Леви-Чевиты

• Для записи векторного произведения в индексных обозначениях вводится антисимметричный *символ Леви-Чевиты*  $\varepsilon_{ijk}$ . Он имеет значение  $\varepsilon_{123} = 1$ , а при перестановке *любых двух* индексов меняет знак. Если у символа есть два одинаковых индекса, то он равен нулю. Приведём примеры компонент символа Леви-Чевиты (всего их  $27 = 3^3$ ):

$$\varepsilon_{213} = -1, \quad \varepsilon_{231} = 1, \quad \varepsilon_{321} = -1, \quad \varepsilon_{112} = 0, \quad \varepsilon_{323} = 0, \quad \varepsilon_{222} = 0.$$

Векторное произведение  $\mathbf{c} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$  в компонентном виде записывается следующим образом (по повторяющимся индексам  $i$  и  $j$  суммирование):

$$c_k = \varepsilon_{kij} a_i b_j.$$

Действительно, вычислим, например:

$$c_3 = \varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1 + \dots = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Слагаемые, обозначенные многоточием, равны нулю, так как равен нулю символ Леви-Чевиты с одинаковыми индексами.

Если базисные векторы декартовой системы координат записать, как  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$  и  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ , то для них справедлива формула:

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k,$$

где индексы – *номера* базисных векторов, а не их компоненты!

При свёртывании по одному индексу произведения двух символов Леви-Чевиты получается следующее соотношение:

$$\varepsilon_{kij} \varepsilon_{kpq} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp},$$

эквивалентное двойному векторному произведению. Для запоминания индексов работает правило “прямо, минус крест на крест” (стр. 13). Убедимся, что это соотношение приводит к тождеству скалярного произведения двух векторных произведений. Запишем его в компонентном виде:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}][\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = \varepsilon_{kij} a_i b_j \varepsilon_{kpq} c_p d_q = (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) a_i b_j c_p d_q.$$

Производя суммирование по  $p$  и  $q$  с символами Кронекера, получаем:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}][\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = a_i b_j c_i d_j - a_i b_j c_j d_i = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc}).$$

Во втором равенстве для перехода к векторным обозначениям мы переставили местами компоненты, чтобы получилось, например,  $a_i c_i = \mathbf{ac}$ . В этом состоит определённое преимущество индексных обозначений. Выразив величины в компонентном виде, мы можем не следить за порядком матриц, неассоциативностью умножения векторов, и т.д.

• Ротор, как векторное умножение оператора набла на векторную функцию  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ , также может быть записан при помощи символа Леви-Чевиты:

$$[\nabla \times \mathbf{A}]_k = \varepsilon_{kij} \partial_i A_j.$$

Докажем ещё раз тождество (стр. 33), справедливое для двух произвольных постоянных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :  $[\mathbf{a} \times \nabla](\mathbf{r}\mathbf{b}) = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ . Выражая векторное произведение через тензор Леви-Чевиты, имеем:

$$\varepsilon_{kij} a_i \partial_j x_p b_p = \varepsilon_{kij} a_i \delta_{jp} b_p = \varepsilon_{kij} a_i b_j = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_k.$$

• В 2-мерном пространстве можно ввести символ Леви-Чевиты с двумя индексами  $\varepsilon_{ij}$ , так, что  $\varepsilon_{12} = 1$  и  $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$ . Аналогично в 4-мерном пространстве определяется символ с четырьмя индексами  $\varepsilon_{ijkl}$ , так, что  $\varepsilon_{1234} = 1$ . Все эти символы являются абсолютно антисимметричными, т.е. перестановка *любых* *двух* индексов меняет знак символа. Поменяем, например, в  $\varepsilon_{1234} = 1$  первый и последний индекс местами, делая только парные перестановки. Будем "переворачивать" сначала первый индекс слева направо, а затем последний, в обратном направлении:

$$\varepsilon_{1234} = 1, \quad \varepsilon_{2134} = -1, \quad \varepsilon_{2314} = 1, \quad \varepsilon_{2341} = -1, \quad \varepsilon_{2431} = 1, \quad \varepsilon_{4231} = -1.$$

• Символы Леви-Чевиты можно использовать для записи определителей матриц. Например для матрицы 2x2:

$$\det |a_{ij}| = \varepsilon_{ij} a_{1i} a_{2j} = \varepsilon_{12} a_{11} a_{22} + \varepsilon_{21} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Аналогично записываются определители матриц  $3 \times 3$  и  $4 \times 4$ :

$$\det |a_{ij}| = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}, \quad \det |a_{ij}| = \varepsilon_{ijkl} a_{1i} a_{2j} a_{3k} a_{4l}.$$

Во всех этих случаях стоит произведение элементов матриц, с фиксированными значениями первого индекса, которые упорядочены по возрастанию. По вторым индексам проводится свёртка с символом Леви-Чевиты.

• В связи с антисимметричным символом Леви-Чевиты заметим, что свёртка симметричного по паре индексов и антисимметричного выражений всегда равна нулю. Пусть  $s_{ij} = s_{ji}$  и  $a_{ij} = -a_{ji}$ , тогда:

$$s_{ij} a_{ji} = -s_{ji} a_{ij} = -s_{ij} a_{ji} = 0.$$

В первом равенстве индексы переставлены с учётом симметрии, а во втором немые индексы переименованы  $i \mapsto j$ ,  $j \mapsto i$ . Получилось то же выражение, что и исходное, но со знаком минус. Поэтому оно равно нулю. Например,  $\varepsilon_{kij} a_i a_j = [\mathbf{a} \times \mathbf{a}]_k = 0$ .

### 3.6 Собственные значения

- Для матрицы  $\mathbf{A}$  решим систему линейных уравнений вида:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}, \quad (3.2)$$

где  $\lambda$  – некоторое число, называемое *собственным значением* матрицы, а  $\mathbf{u}^T = (u_1 \dots u_n)$  – соответствующий ему *собственный вектор*.

Уравнение (3.2) – это система однородных уравнений с нулевой правой частью:  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \cdot \mathbf{u} = 0$ . Она имеет отличное от нуля решение, только если её определитель равен нулю. Для матрицы 3x3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В результате получается *характеристическое* уравнение 3-й степени относительно  $\lambda$ , имеющее, вообще говоря, 3 решения:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Для каждого собственного значения  $\lambda_\alpha$  после решения (3.2) получается соответствующий ему собственный вектор  $\mathbf{u}^{(\alpha)} = \{u_1^{(\alpha)}, u_2^{(\alpha)}, u_3^{(\alpha)}\}$ . Верхний индекс – это *номер* собственного вектора, а не его компонента!

- Собственные значения *унитарной матрицы* ( $a_{ij}^* = a_{ji}$ ) *действительны*. Для доказательства этого свернём исходное уравнение на собственные значения под номером  $\alpha$  с комплексно сопряженным вектором под номером  $\beta$ . Аналогично поступим с комплексным сопряжением уравнения с номером  $\beta$  (по  $\alpha$  и  $\beta$  суммы нет!):

$$u_i^{*(\beta)} a_{ij} u_j^{(\alpha)} = u_i^{*(\beta)} \lambda_\alpha u_i^{(\alpha)}, \quad u_i^{(\alpha)} a_{ij}^* u_j^{*(\beta)} = u_i^{(\alpha)} \lambda_\beta^* u_i^{*(\beta)}.$$

Вычтем эти два уравнения, воспользовавшись унитарностью  $a_{ij}^* = a_{ji}$ :

$$(\lambda_\alpha - \lambda_\beta^*) u_i^{*(\beta)} u_i^{(\alpha)} = u_i^{*(\beta)} a_{ij} u_j^{(\alpha)} - u_i^{(\alpha)} a_{ji} u_j^{*(\beta)} = 0.$$

Если  $\alpha = \beta$ , то свёртка  $u_i^{*(\alpha)} u_i^{(\alpha)}$  является суммой квадратов модулей. Так как она не равна нулю (тривиальное решение), то  $\lambda_\alpha^* = \lambda_\alpha$ . Если же собственные значения различны, то  $u_i^{*(\beta)} u_i^{(\alpha)} = 0$ , что можно записать в виде условия *ортogonalности* собственных векторов унитарной матрицы:

$$\mathbf{u}^{*(\alpha)} \cdot \mathbf{u}^{(\beta)} = u_i^{*(\alpha)} u_i^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.3)$$

Так как уравнения (3.2) линейны, собственный вектор всегда можно умножить на константу, выбрав её таким образом, чтобы он стал единичным, поэтому в (3.3) стоит символ Кронекера.



• Собственные векторы и значения можно использовать для диагонализации *квадратичных форм*. Предположим, что для симметричной матрицы  $\mathbf{A}$  (частный случай унитарной матрицы) мы имеем выражение вида:

$$F = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = x_i a_{ij} x_j = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2,$$

где суммирование по  $i$  и  $j$  записано для 2-мерной матрицы. Сделаем замену переменных, перейдя от  $x_i$  к  $y_i$  (по  $\alpha$  сумма):

$$x_i = u_i^{(\alpha)} y_\alpha,$$

где  $u_i^{(\alpha)}$  – действительные собственные векторы действительной симметричной матрицы  $\mathbf{A}$ . Тогда:

$$F = u_i^{(\beta)} y_\beta a_{ij} u_j^{(\alpha)} y_\alpha = u_i^{(\beta)} y_\beta \lambda_\alpha u_i^{(\alpha)} y_\alpha = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta = \lambda_\alpha y_\alpha^2 = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Сначала мы воспользовались уравнением на собственные значения, а затем ортогональностью собственных функций и свёрткой с символом Кронекера. Таким образом, если известны собственные значения и векторы матрицы  $\mathbf{A}$ , всегда можно найти такое преобразование координат, которое *диагонализует* квадратичную форму  $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ , устраняя слагаемые типа  $x_1 x_2$  и т.д.

• Ещё одно замечательное свойство собственных значений состоит в том, что их произведение даёт определитель матрицы:

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n. \quad (3.4)$$

Действительно, характеристическое уравнение матрицы  $n \times n$  является полиномом  $n$ -й степени с коэффициентами  $p_i$ :

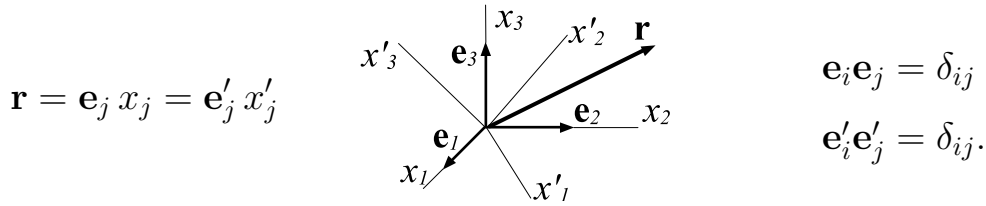
$$(\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda) = (-1)^n \lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + p_1 \lambda + p_0 = 0.$$

Свободный член этого уравнения  $p_0 = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$  равен детерминанту матрицы  $\det \mathbf{A}$ , так как он получается при  $\lambda = 0$  из  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1})$ . Аналогично показывается, что след матрицы  $\text{Tr} \mathbf{A} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ . Существует изящная *теорема Кэли-Гамильтона*, утверждающая, что любая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению:  $(\lambda_1 \mathbf{1} - \mathbf{A}) \cdot \dots \cdot (\lambda_n \mathbf{1} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}$ . В частности, для матриц  $2 \times 2$  справедливо следующее квадратное матричное уравнение:  $\mathbf{A}^2 - \text{Tr}(\mathbf{A})\mathbf{A} + \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$ , что предлагается проверить прямым вычислением.

Множество собственных значений матрицы называется её *спектром*. Вообще говоря, решения уравнения  $n$ -той степени по  $\lambda$  не обязательно все различны. Если часть собственных значений совпадают, то говорят, что спектр матрицы *вырожден*.

### 3.7 Матрица поворотов

• Пусть две декартовы системы координат  $(x_1, x_2, x_3)$  и  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  повернуты друг относительно друга. Базисные векторы исходной системы обозначим как  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$ , где индекс внизу – это *номер* вектора, а не его компонента! Другими словами  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$  и  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ . Штрихами пометим базисные векторы повернутой системы координат:



Базисные векторы ортогональны, поэтому справа от рисунка появляются символы Кронекера. Слева от рисунка записаны разложения *одного и того же* вектора  $\mathbf{r}$  по базисам каждой системы координат. Умножим это выражение на  $\mathbf{e}'_i$ :

$$(\mathbf{e}'_i \mathbf{e}_j) x_j = (\mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j) x'_j = \delta_{ij} x'_j = x'_i.$$

Вводя матрицу  $R_{ij} = \mathbf{e}'_i \mathbf{e}_j$ , получаем связь исходных и повернутых координат радиус-вектора:

$$x'_i = R_{ij} x_j.$$

По индексу  $j$  ведётся суммирование. Так как векторы базиса единичные, матрица  $R_{ij} = \mathbf{e}'_i \mathbf{e}_j$  определяется углами между осями координат. Её называют *матрицей поворотов*.

Длина радиус-вектора (расстояние от точки пространства до начала координат) не зависит от ориентации осей, поэтому:

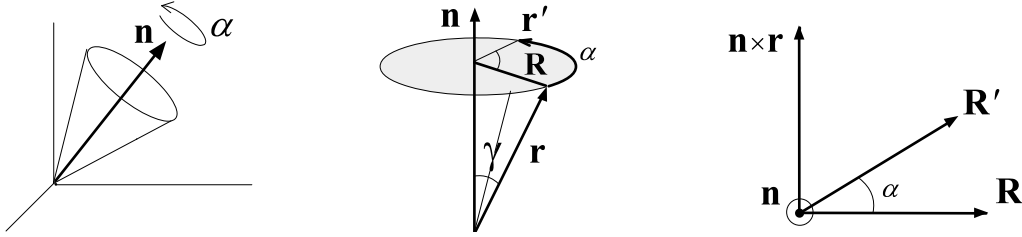
$$\mathbf{r}^2 = x'_k x'_k = R_{ki} x_i R_{kj} x_j = x_i R_{ik}^T R_{kj} x_j = x_i x_i.$$

В предпоследнем равенстве у матрицы  $R_{ki}$  переставлены местами индексы, и поставлен значок транспонирования. Последнее равенство выполняется, если матрица поворотов удовлетворяет следующему матричному уравнению:

$$R_{ik}^T R_{kj} = \delta_{ij}, \quad \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{1}.$$

Матрица с такими свойствами называется *ортогональной*. Обратная к ней – это просто транспонированная матрица:  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ .

• Рассмотрим вращение произвольного твёрдого тела (ниже для примера – конус), с которым жёстко связан базис  $\mathbf{e}'_i$ , первоначально совпадающий с  $\mathbf{e}_i$ . Свяжем с твёрдым телом единичный вектор  $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ ,  $\mathbf{n}^2 = 1$  с "закреплённым" началом, вокруг которого этот вектор вместе с телом может поворачиваться. Кроме поворотов вектора  $\mathbf{n}$ , тело можно вращать вокруг  $\mathbf{n}$  на угол  $\alpha$  (первый рисунок):



Некоторый связанный с телом вектор  $\mathbf{r}$  при вращении вокруг оси  $\mathbf{n}$  на угол  $\alpha$  переходит в вектор  $\mathbf{r}'$ . При этом он скользит по перевёрнутому конусу (см. второй рисунок). Обозначим проекцию  $\mathbf{r}$  на основание конуса через  $\mathbf{R}$ , а проекцию  $\mathbf{r}'$ , соответственно, через  $\mathbf{R}'$ . Их длины равны, и вектор  $\mathbf{R}$  в результате поворота на угол  $\alpha$  переходит в  $\mathbf{R}'$ .

При помощи векторного произведения введём вектор  $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ , лежащий в основании конуса перпендикулярно  $\mathbf{R}$  (см. "вид сверху" на третьем рисунке). Его длина равна  $|\mathbf{n} \times \mathbf{r}| = r \sin \gamma = R$ . Поэтому разложение  $\mathbf{R}'$  выглядит следующим образом:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} \cos \alpha + [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \sin \alpha.$$

По правилу сложения треугольником (стр. 10), векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{R}' + \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'),$$

где  $\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})$  направлен вдоль  $\mathbf{n}$  и равен высоте конуса. В результате, учитывая, что  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$ , получаем:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R} \cos \alpha + [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \sin \alpha + \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}),$$

или, выражая  $\mathbf{R}$  через  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \alpha + \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos \alpha) + [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \sin \alpha. \quad (3.5)$$

Поворачиваемым вектором  $\mathbf{r}$  может быть любой базисный вектор  $\mathbf{e}_i$ , тогда  $\mathbf{r}'$  это  $\mathbf{e}'_i$ . Поэтому матрица поворота равна:

$$R_{ij} = \mathbf{e}'_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \cos \alpha + n_i n_j (1 - \cos \alpha) + \varepsilon_{ijk} n_k \sin \alpha, \quad (3.6)$$

где  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ ,  $n_i = \mathbf{n} \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$  (стр. 54). Очень полезным упражнением по работе с индексами будет прямая проверка того, что  $R_{ij}$  является ортогональной матрицей ( $\leq H_{70}$ ).

## Задачи

• ( $\leq$  H<sub>49</sub>) Прямым вычислением проверить что определитель произведения двух матриц  $2 \times 2$  равен определителю их произведения.

• ( $\leq$  H<sub>50</sub>) Найти обратные матрицы к:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямым перемножением убедиться, что  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}$ , и аналогично для  $\mathbf{B}$ .

• ( $\leq$  H<sub>51</sub>) Найти собственные значения и векторы матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

• ( $\leq$  H<sub>52</sub>) Прямой проверкой убедиться, что собственные значения произвольной симметричной матрицы  $2 \times 2$  действительны. Выяснить условия вырождения спектра.

• ( $\leq$  H<sub>53</sub>) Доказать следующие свойства коммутаторов матриц:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] &= -[\mathbf{B}, \mathbf{A}], \\ [\mathbf{A}, \mathbf{B} + \mathbf{C}] &= [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}], \\ [\mathbf{A}, \mathbf{BC}] &= [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \mathbf{C} + \mathbf{B} [\mathbf{A}, \mathbf{C}], \\ [\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] &= 0. \end{aligned}$$

• ( $\leq$  H<sub>54</sub>) Для трёх матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{G}$  доказать:

$$\mathbf{1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}^{-1}.$$

• ( $\leq$  H<sub>55</sub>) Найти собственные значения матриц Паули ( $i^2 = -1$ ):

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и проверить соотношение:  $[\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\mathbf{S}_k$ .

• ( $\leq$  H<sub>56</sub>) Для диагональной матрицы  $\mathbf{A}$  проверить выполнение следующего тождества:  $\det e^{\mathbf{A}} = e^{\text{Tr}\mathbf{A}}$ .

• ( $\leq$  H<sub>57</sub>) Доказать, что:  $d \ln \det \mathbf{A} = \text{Tr}(\mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A})$ , где  $d\mathbf{A}$  – дифференциалы приращения элементов матрицы  $\mathbf{A}$ .

• ( $\leq$  H<sub>58</sub>) Доказать, что для любых матриц:

$$\text{Tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}), \quad \text{Tr}(\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{Tr}\mathbf{A}.$$

- ( $\leq$  Н<sub>59</sub>) Расписать в явном виде квадратные матрицы  $\varepsilon_{1ij}$ ,  $\varepsilon_{2ij}$ ,  $\varepsilon_{3ij}$ .
- ( $\leq$  Н<sub>60</sub>) Упростить выражение:  $x_i x_i + \delta_{pq} x_p x_q - 2x_k x_k$ .
- ( $\leq$  Н<sub>61</sub>) Упростить выражение:  $\delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{kl}$ .
- ( $\leq$  Н<sub>62</sub>) Вычислить производные:  $\partial_k(x_i x_j)$ ,  $\partial^2(x_i x_j)$ .
- ( $\leq$  Н<sub>63</sub>) Для двух постоянных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  доказать тождество, расписав его в индексном виде:  $(\mathbf{a} \nabla)[\mathbf{r} \times \mathbf{b}] = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ .
- ( $\leq$  Н<sub>64</sub>) Вычислить в компонентах ( $a = \text{const}$ ) дивергенцию:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r}^2 + a^2)^{3/2}}.$$

- ( $\leq$  Н<sub>65</sub>) Доказать тождества, справедливые для 3-мерного пространства:

$$\varepsilon_{ipq} \varepsilon_{jpr} = 2\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6.$$

- ( $\leq$  Н<sub>66</sub>) Упростить выражение и записать его в векторном виде:

$$\varepsilon_{kji} \varepsilon_{krs} \varepsilon_{imp} \varepsilon_{pst} a_j a_r b_m c_t.$$

- ( $\leq$  Н<sub>67</sub>) Найти матрицу, обратную к:  $a_{ij} = \delta_{ij} + x_i x_j$ .
- ( $\leq$  Н<sub>68</sub>) Вычислить в компонентах:  $\nabla \times [\mathbf{a} \times \mathbf{r}]$ , где  $\mathbf{a} = \text{const}$ .
- ( $\leq$  Н<sub>69</sub>) Записать матрицу поворота 2-мерных декартовых координат на угол  $\phi$ .
- ( $\leq$  Н<sub>70</sub>) Доказать, что при  $\mathbf{n}^2 = 1$  матрица

$$R_{ij} = \delta_{ij} \cos \alpha + n_i n_j (1 - \cos \alpha) + \varepsilon_{ijk} n_k \sin \alpha$$

ортогональна.

- ( $\leq$  Н<sub>71</sub>) Записать матрицу 3D вращения задачи ( $\leq$  Н<sub>70</sub>) в явном матричном (табличном) виде.

• ( $\leq$  Н<sub>72</sub>) Кватернионом называется четвёрка чисел  $\mathbf{a} = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$  или  $a = \{a_0, \mathbf{a}\}$  для которой введено произведение, снова дающее кватернион  $a \circ b = \{a_0 b_0 - \mathbf{a} \mathbf{b}, a_0 \mathbf{b} + b_0 \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ . Нормой кватерниона называют число  $N(q) = q_0^2 + \mathbf{q}^2$ . Доказать, что  $N(a \circ b) = N(a) N(b)$ . Найти обратный кватернион  $q^{-1}$ , для которого  $q \circ q^{-1} = \{1, \mathbf{0}\}$ .

• ( $\leq$  Н<sub>73</sub>) Показать, что, если  $x = \{0, \mathbf{r}\}$ , а  $q = \{\cos(\alpha/2), \mathbf{n} \sin(\alpha/2)\}$ , то поворот вектора можно записать в следующем виде:  $x' = q \circ x \circ q^{-1}$ . Найти композицию (последовательность) поворотов и выразить матрицу поворотов  $R_{ij}$  через кватернион  $q$ .



## Глава 4

# Криволинейные координаты

Декартовы координаты представляют собой очень естественный способ “нумерации” точек пространства. Однако такой способ не единственный. Часто оказываются удобными другие координаты. Ещё более важным является то, что физика не должна зависеть от выбора системы нумерации точек. Это требование накладывает определённые ограничения, сужая класс возможных физических уравнений.

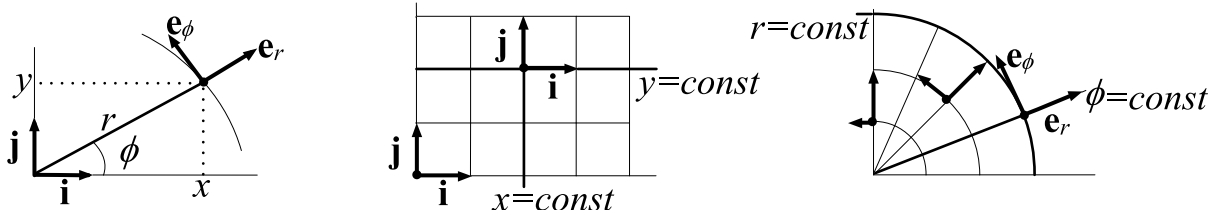
На простом примере 2-мерных полярных координат будет введено понятие криволинейного базиса. Затем эта идея обобщается, и рассматриваются два вида базисов и соответствующие им два вида компонент вектора. Изучение закона их преобразования при смене координат приведёт нас к понятию тензорных выражений.

Некоторые формулы в этой главе содержат множество индексов, и требуется их внимательное изучение. Поэтому достаём кисточку и тушь...

## 4.1 Полярные координаты

• Многие физические системы обладают определённой симметрией. Например, напряжённость поля неподвижного точечного заряда сферически симметрична, зависит от расстояния к заряду и не зависит от направления. В таких ситуациях удобнее использовать специальные координаты, отражающие подобную симметрию.

Рассмотрим полярные координаты  $(r, \phi)$ , где  $r$  – расстояние от начала координат, а  $\phi$  – угол между радиус-вектором и осью  $x$  (левый рисунок):



Связь декартовых и полярных координат легко находится из геометрических соображений (проекции  $\mathbf{r}$  на оси  $x$  и  $y$ ):

$$\begin{cases} x = r \cos \phi = r c_\phi \\ y = r \sin \phi = r s_\phi \end{cases}, \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \phi = y/x. \end{cases} \quad (4.1)$$

Сокращая формулы, мы будем использовать  $c_\phi$  для обозначения косинуса, и  $s_\phi$ , соответственно, для синуса.

Радиус-вектор в декартовых координатах записывается при помощи ортогональных базисных векторов ( $\mathbf{i}\mathbf{j} = 0$ ,  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1$ ):

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} = r (c_\phi \mathbf{i} + s_\phi \mathbf{j}).$$

Определим два вектора, направленных в сторону малого перемещения радиус-вектора при изменении каждой из координат полярной системы:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = c_\phi \mathbf{i} + s_\phi \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = r (-s_\phi \mathbf{i} + c_\phi \mathbf{j}). \quad (4.2)$$

Прямым перемножением можно проверить, что эти векторы ортогональны и вектор  $\mathbf{e}_\phi$  не является единичным:

$$\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\phi = 0, \quad \mathbf{e}_r^2 = 1, \quad \mathbf{e}_\phi^2 = r^2. \quad (4.3)$$

Назовём пару векторов  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi)$  *базисом полярной системы* координат. В отличие от базиса  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  декартовых координат, базис  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi)$  имеет разное направление в разных точках пространства (см. рисунки). Вектор  $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$  направлен вдоль радиус-вектора,  $\mathbf{e}_\phi$  перпендикулярен ему и направлен по окружности радиуса  $r$  в сторону увеличения угла  $\phi$ .

Декартовы координаты можно представить в виде прямоугольной сетки (линии  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ ). Полярная сетка напоминает паутину.



• Пусть в данной точке пространства задан вектор  $\mathbf{a}$ . Будем считать, что это не направленный отрезок, а величина, *определённая в точке* и характеризующаяся длиной и направлением (например, скорость или сила). Этот вектор можно разложить как по декартовому базису, так и по полярному (в этой же точке!):

$$\mathbf{a} = a^x \mathbf{i} + a^y \mathbf{j} = a^r \mathbf{e}_r + a^\phi \mathbf{e}_\phi.$$

В дальнейшем мы будем помечать проекцию на базисный вектор верхним индексом, поэтому  $a^x$ ,  $a^r$ , и т.д. – это *не степени*, а просто обозначения соответствующих проекций.

Записав разложения для векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , с учётом соотношений (4.3) можно выразить скалярное произведение следующим образом:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^x b^x + a^y b^y = a^r b^r + r^2 a^\phi b^\phi.$$

Первое равенство – хорошо знакомое представление скалярного произведения в декартовых координатах. Второе – произведение этих же векторов в полярных координатах. Обратим внимание на дополнительный множитель  $r^2$  во втором слагаемом.

• Найдём в полярном базисе выражение для градиента скалярной функции. Прежде всего обратим соотношения (4.2):

$$\mathbf{i} = c_\phi \mathbf{e}_r - \frac{s_\phi}{r} \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{j} = s_\phi \mathbf{e}_r + \frac{c_\phi}{r} \mathbf{e}_\phi. \quad (4.4)$$

Скалярная функция  $f$ , зависящая от декартовых координат  $f(x, y)$ , может быть выражена через полярные координаты:  $f(r, \phi)$ . Её производная берётся, как производная сложной функции. Поэтому градиент равен:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = \left( \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \mathbf{j}.$$

Производные радиуса  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  по  $x$  и  $y$  вычисляются элементарным образом. Производные от  $\phi$  можно получить следующим образом:  $\partial_y(\operatorname{tg} \phi) = \partial_y \phi / c_\phi^2$ . С другой стороны,  $\partial_y(\operatorname{tg} \phi) = \partial_y(y/x) = 1/x$  (см. (4.1)), где  $\partial_y = \partial/\partial y$ , и т.д. Поэтому:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = c_\phi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = s_\phi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} c_\phi^2 = -\frac{s_\phi}{r}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{c_\phi^2}{x} = \frac{c_\phi}{r}.$$

Подставляя их в градиент и выражая базис  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  через  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi)$  при помощи (4.4), получаем:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi.$$

Таким образом,  $\nabla f$ , как и любой другой вектор, в данной точке можно разложить как по декартовому, так и по полярному базису.

## 4.2 Криволинейный базис

• Обобщим идею полярного базиса на произвольную систему координат, которые будем обозначать, как  $q^i$ . В 2-мерных декартовых координатах  $q^i = (x, y)$ , в полярных координатах  $q^i = (r, \phi)$ , в трёхмерном пространстве  $q^i = (q^1, q^2, q^3)$ , и т.д. Напомним, что вверху координат стоят их номера, а не показатели степени.

*Векторы базиса* будем определять следующим образом:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \equiv \partial_i \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  – радиус-вектор в декартовых координатах, которые связаны с криволинейными координатами гладкими, дифференцируемыми взаимно-однозначными функциями:  $x = x(q^1, q^2, q^3)$ ,  $y = y(q^1, q^2, q^3)$ ,  $z = z(q^1, q^2, q^3)$ . Таким образом, в каждой точке трёхмерного пространства задана тройка независимых векторов  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , где индекс внизу вектора – это его номер, а не компонента! Независимость означает, что ни один из векторов не может быть выражен в виде линейной комбинации двух других (они не лежат в одной плоскости).

Произвольный вектор в *данной точке* пространства может быть разложен по этому базису:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3.$$

Как и раньше, используется соглашение о том, что по повторяющимся индексам (выше индекс  $i$ ) проводится суммирование (в трёхмерном пространстве от 1 до 3). Далее суммационные индексы всегда будут располагаться на различном уровне – один вверху, другой – внизу. Это будет являться дополнительным признаком подразумеваемого суммирования.

Запишем скалярное произведение 2-х векторов:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^i \mathbf{e}_i) \cdot (b^j \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) a^i b^j = g_{ij} a^i b^j,$$

где для скалярного произведения базисных векторов введено специальное обозначение, называемое коэффициентами *метрического тензора*:

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j}.$$

Обратим внимание, что при вычислении скалярного произведения, для разложения векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  использовались различные индексы  $i$  и  $j$ . Это две независимые суммы, поэтому и индексы должны быть различными. В силу определения, метрический тензор является симметричным, т.е. он не изменяется при перестановке индексов:  $g_{ij} = g_{ji}$ .

• Рассмотрим вектор бесконечно малого смещения из данной точки пространства. Его длина является расстоянием между двумя бесконечно близкими точками, которое принято обозначать как  $dl$ :

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{e}_i dq^i, \quad dl^2 = (d\mathbf{r})^2 = g_{ij} dq^i dq^j.$$

В полярных координатах метрический тензор равен [см. (4.3)]:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \equiv \text{diag}(1, r^2), \quad (4.5)$$

а в декартовых –  $g_{ij} = \delta_{ij} = \text{diag}(1, 1)$ . Поэтому расстояние в декартовых и полярных координатах имеет вид (говорят, что  $g_{ij}$  задаёт метрику):

$$dl^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\phi)^2.$$

Первое равенство – теорема Пифагора для прямоугольного треугольника (см. ниже левый рисунок). Расстояние в полярных координатах также имеет простой геометрический смысл. Длина дуги радиуса  $r = \text{const}$  при изменении угла на  $d\phi$  равна  $r d\phi$ . Поэтому расстояние (по той же теореме Пифагора) равно  $(dr)^2 + (r d\phi)^2$  (см. правый рисунок):



В  $n$ -мерном евклидовом пространстве квадрат расстояния всегда положителен  $dl^2 > 0$ , и существует декартова система координат, в которой метрический тензор диагонален  $g_{ij} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ . В теории относительности рассматривается 4-мерное псевдоевклидово пространство-время с метрикой  $g_{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Расстояние в таком пространстве называют *интервалом* и обозначают как  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ . Несмотря на наличие формального квадрата, знак  $ds^2$  может быть произвольным, а  $ds^2 = 0$  не означает совпадения точек в пространстве. Поэтому общее понятие расстояния, вообще говоря, может отличаться от привычного для “жителей” евклидова пространства.

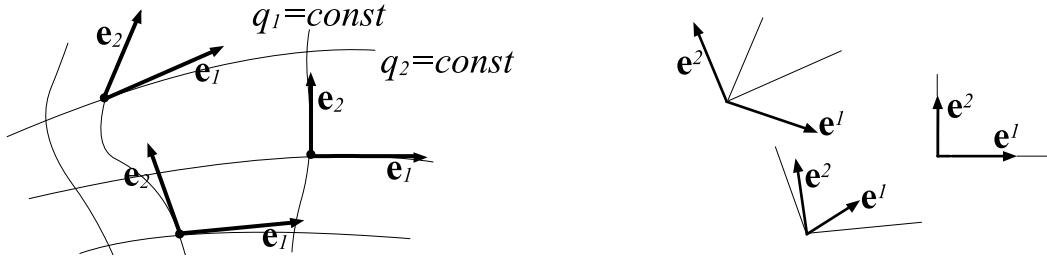
Обратим внимание на один важный факт. В декартовых координатах мы можем проинтегрировать разложение  $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$  (векторы  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – постоянны), но не можем это же сделать для произвольного криволинейного базиса  $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i dq^i$ . Базис  $\mathbf{e}_i$  в каждой точке пространства имеет свою ориентацию, поэтому имеет смысл говорить только о разложении вектора, заданного в данной точке пространства, по базису в этой же точке. Поэтому  $d\mathbf{r}$  – вектор (в общем случае), тогда как  $\mathbf{r}$  – нет (т.е. не может быть разложен по криволинейному базису).

### 4.3 Взаимный базис

• В полярной системе координат базисные векторы  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi)$  всегда ортогональны друг другу. В произвольной системе координат с базисом  $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{r}$  это не так, и метрический тензор в общем случае не является диагональным. Дополнительно к базису  $\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  удобно ввести ещё один базис  $\mathbf{e}^i = (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$ , называемый *взаимным*, так, чтобы он был *ортонормированным* к исходному базису, т.е.:

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i, \quad (4.6)$$

где  $\delta_j^i$  – символ Кронекера (стр. 53) равен нулю для различных индексов и единице для совпадающих. Ниже слева на рисунке приведен некоторый криволинейный базис, а справа – взаимный к нему (тонкими линиями повторены векторы исходного базиса):



В трёхмерном пространстве векторы взаимного базиса можно выразить при помощи векторного произведения. Так, например,  $\mathbf{e}^1$  перпендикулярен к  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  (символ Кронекера), поэтому пропорционален  $[\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3]$ . Аналогично для остальных векторов базиса:

$$\mathbf{e}^1 = \frac{[\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3]}{V}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{[\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1]}{V}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2]}{V}.$$

В знаменателе находится нормировочный множитель  $V = \mathbf{e}_1 \cdot [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3]$ , имеющий смысл объёма, построенного на векторах исходного базиса. Он необходим, чтобы выполнялось определение (4.6).

Говорят, что базис  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  образует правую тройку, если  $V > 0$ :



Соответственно, выбор порядка векторов базиса  $\mathbf{e}^i$  в векторном произведении сделан таким образом, чтобы  $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$  также составляли правый базис. Обычно подразумевается выбор правого базиса.

Если векторы базиса перпендикулярны друг другу  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \sim \delta_{ij}$ , то такой базис называется *ортогональным*. Для ортогональных базисов часто вводятся т.н. *физические* базисные векторы, имеющие единичную длину  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1/|\mathbf{e}_1|$ , и т.д.

• При помощи векторов взаимного базиса можно ввести метрический тензор с верхними индексами:

$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j.$$

Вместе с метрическим тензором  $g_{ij}$  он позволяет раскладывать векторы исходного базиса по взаимному, и наоборот:

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j.$$

Действительно, умножая, например, первое соотношение на  $\mathbf{e}_k$ , с учётом условия ортогональности (4.6) получим  $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_i = g_{ij} \delta_k^j = g_{ik}$ .

Метрические тензоры с верхними и нижними индексами являются обратными друг другу:

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i.$$

Это легко проверить, умножив, например,  $\mathbf{e}_j = g_{jk} \mathbf{e}^k$  на  $\mathbf{e}^i$ .

• Любой вектор в *данной точке* пространства можно разложить как по исходному, так и по взаимному базису. Коэффициенты разложения в общем случае будут *различными*:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}^i. \quad (4.7)$$

Проекции на векторы исходного базиса, обозначенные верхними индексами  $a^i$ , называются *контравариантными* компонентами вектора, а проекции с нижними индексами  $a_i$  – *ковариантными* компонентами. Иногда сами компоненты  $a^i$  называют *вектором*, а компоненты  $a_i$  разложения по взаимному базису – *ковектором*.

Смысл введения взаимного базиса состоит в упрощении скалярного произведения двух векторов. Для этого один из них записывается в исходном, а второй – во взаимном базисе:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^i \mathbf{e}_i) \cdot (b_j \mathbf{e}^j) = a^i b_j \delta_j^i = a^i b_i = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3.$$

Таким образом, получается выражение, похожее на скалярное произведение в декартовых координатах, однако компоненты векторов в сумме стоят различные. Понятно, что  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b_i = a_i b^i$ .

Умножая обе части (4.7) на  $\mathbf{e}_j$  или  $\mathbf{e}^j$ , получаем:

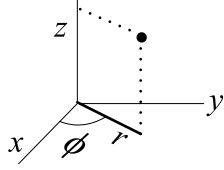
$$a_i = g_{ij} a^j, \quad a^i = g^{ij} a_j.$$

Таким образом, при помощи метрического тензора с нижними индексами  $g_{ij}$  можно опускать индекс, превращая контравариантные компоненты в ковариантные. Аналогично, метрический тензор с верхними индексами  $g^{ij}$  поднимает индекс вверх.

#### 4.4 Преобразования координат

В 3-мерном пространстве кроме декартовых, можно ввести множество других систем координат. Напомним наиболее важные из них.

- *Цилиндрическая система координат* добавляет третье измерение в полярную систему, рассмотренную ранее. Кроме расстояния  $r$  от оси  $z$  в плоскости  $(x, y)$  и угла  $\phi$ , вводится третья координата  $z$ :



$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z. \end{cases}$$

Базисные векторы цилиндрической системы координат, выраженные через ортонормированный декартовый базис  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$ , имеют вид:

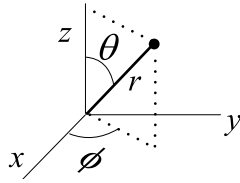
$$\mathbf{e}_r = c_\phi \mathbf{i} + s_\phi \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_\phi = r(-s_\phi \mathbf{i} + c_\phi \mathbf{j}), \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k}.$$

Соответственно, метрический тензор для  $\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$  равен:

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Диапазон изменения цилиндрических координат, охватывающий все точки пространства, равен:  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ ,  $-\infty < z < \infty$ .

- *Сферическая система координат*:  $(r, \theta, \phi)$ , где  $r$  – расстояние от начала координат,  $\theta$  – угол между радиус-вектором и осью  $z$ , а  $\phi$  – угол между проекцией радиус-вектора на плоскость  $(x, y)$  и осью  $x$ :



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

Базисные векторы:

$$\mathbf{e}_r = s_\theta c_\phi \mathbf{i} + s_\theta s_\phi \mathbf{j} + c_\theta \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_\theta = r(c_\theta c_\phi \mathbf{i} + c_\theta s_\phi \mathbf{j} - s_\theta \mathbf{k}), \quad \mathbf{e}_\phi = r s_\theta (-s_\phi \mathbf{i} + c_\phi \mathbf{j})$$

для  $\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$  приводят к следующему метрическому тензору:

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 s_\theta^2 \end{pmatrix}.$$

Диапазон изменения координат:  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ .

• Не любые три функции  $q^i(x, y, z)$  являются подходящими для задания криволинейных координат. Подобное преобразование должно быть взаимно-однозначным. В математическом анализе доказывается, что для этого необходим отличный от нуля якобиан. *Якобиан* – это определитель матрицы, составленной из частных производных старых координат по новым. Вычислим якобиан цилиндрической системы координат:

$$J = \det \left( \frac{\partial x^j}{\partial q^i} \right) = \begin{vmatrix} \partial_r x & \partial_r y & \partial_r z \\ \partial_\phi x & \partial_\phi y & \partial_\phi z \\ \partial_z x & \partial_z y & \partial_z z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_\phi & s_\phi & 0 \\ -rs_\phi & rc_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Цилиндрические координаты являются “хорошими” везде, кроме точки  $r = 0$ , которой соответствуют любые значения  $\phi$  (нет однозначности). Такие точки называются *координатными особенностями*. Чуть ниже (стр. 75) мы докажем, что  $J = \sqrt{|g|}$ , где  $g$  – определитель метрического тензора  $g_{ij}$ . Поэтому в сферических координатах  $J = r^2 s_\theta$  и, кроме  $r = 0$ , существуют координатные особенности при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ .

• В физике очень важно делать различие между физическими (геометрическими) объектами и их координатным представлением. Например, некоторая точка пространства  $P$  является геометрическим объектом. Точки пространства можно описывать (нумеровать, перечислять) при помощи различных координат. В трёхмерном пространстве это могут быть декартовы  $(x, y, z)$ , сферические  $(r, \theta, \phi)$ , цилиндрические  $(r, \phi, z)$  и другие координаты. Т.е. точка одна, а её координатных представлений может быть множество. Всё это – описание одного и того же объекта.

Аналогично, скалярное поле  $f = f(P)$  – это число, связанное с каждой точкой пространства (например, температура). В различных координатах его описание будет различным. Так, пусть скалярная функция в декартовых координатах имеет вид:  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . В цилиндрических координатах *эта же* функция равна:  $f(r, \phi, z) = r^2 - z^2$ . Хотя её внешний вид изменился, значение функции (число для данной точки пространства) осталось тем же самым.

Физика не должна зависеть от выбора системы координат. Любое физическое уравнение должно иметь запись, отражающую подобную независимость. Часто это проявляется в векторной форме уравнений (например,  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ ). Иногда уравнения записываются в индексной форме, например:  $ma^i = F^{ij}u_j$ , где по  $j$  – сумма. Если  $a^i$  и  $u_j$  – компоненты векторов, а  $m$  – скаляр, то чтобы это уравнение выглядело так же *в любой системе координат*, величины  $F^{ij}$  должны при переходе к новой системе координат изменяться согласованным образом с векторами. Рассмотрим этот важный вопрос подробнее.

## 4.5 Преобразование векторов

• Мы называли вектором бесконечно малое смещение в пространстве  $d\mathbf{r}$ , а криволинейным базисом – набор линейно независимых векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Коэффициенты разложения  $d\mathbf{r}$  по базису равны дифференциалам координат криволинейной системы координат  $(q^1, q^2, q^3)$ :

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i dq^i.$$

В каждой системе координат базис свой. В отличие от этого, малое смещение в пространстве  $d\mathbf{r}$  является геометрическим объектом, связывающим две бесконечно близкие точки, и не зависит от выбора координат.

Рассмотрим системы координат  $(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3)$  и  $(q^1, q^2, q^3)$ , которые связаны дифференцируемыми, однозначными функциями  $q^i(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3)$ . По правилу вычисления сложной производной имеем:

$$\frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial \tilde{q}^j} = \delta_j^i = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^j}, \quad \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i = \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^k} \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^j}, \quad (4.8)$$

где  $\delta_j^i$  – символы Кронекера, а по индексу  $k$  проводится суммирование. Поэтому матрицы  $\partial q^i / \partial \tilde{q}^j$  и  $\partial \tilde{q}^i / \partial q^j$  являются обратными друг к другу. Соотношения (4.8) легко запоминаются, если читать их в обратном порядке: свёртка (сумма) по дифференциалам одинаковых координат ”сокращается”, и оставшаяся производная даёт символ Кронекера.

Пометим тильдой базисные векторы в системе координат  $(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3)$  и разложим вектор смещения по базисам каждой системы:

$$d\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{e}}_i d\tilde{q}^i = \mathbf{e}_j dq^j = \mathbf{e}_j \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^i} d\tilde{q}^i.$$

В последнем равенстве подставлено выражение для дифференциала функций  $q^j(\tilde{q}^i)$  при преобразовании от одной системы к другой. Сравнивая первое и последнее равенство, получаем выражение для связи базисных векторов в двух системах координат (первое соотношение):

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^i} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i = \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i} \tilde{\mathbf{e}}_j.$$

Обратное преобразование (второе соотношение) получается аналогично, или при помощи свойств матриц (4.8). Для взаимного базиса:

$$\tilde{\mathbf{e}}^i = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j} \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{e}^i = \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^j} \tilde{\mathbf{e}}^j.$$

Эти соотношения соответствуют определению  $\mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = \delta_j^i$  и условиям (4.8).



Умножая последние соотношения на  $\mathbf{e}_j$  и  $\tilde{\mathbf{e}}_j$  соответственно, несложно получить следующие представления для матриц преобразований:

$$\tilde{\mathbf{e}}^i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j}, \quad \mathbf{e}^i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_j = \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^j}. \quad (4.9)$$

Произвольный вектор  $\mathbf{a}$  является геометрическим объектом, который может быть разложен по базису любой криволинейной системы:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = \tilde{a}^i \tilde{\mathbf{e}}_i.$$

Умножим обе части на  $\tilde{\mathbf{e}}^i$  или  $\mathbf{e}^i$ . При помощи (4.9) получается следующий закон преобразования компонент вектора с верхними индексами (контравариантные компоненты):

$$\tilde{a}^i = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j} a^j, \quad a^i = \frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^j} \tilde{a}^j.$$

Аналогичным образом находятся законы преобразования компонент с нижними индексами (ковариантных). Можно также использовать факт, что скалярное произведение двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  является величиной, не зависящей от выбора системы координат:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b^i = \tilde{a}_i \tilde{b}^i$ . Подставляя преобразования для компонент с верхними индексами для  $b^i$ ,  $\tilde{b}^i$  и пользуясь произвольностью векторов, получаем:

$$\tilde{a}_i = \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^i} a_j, \quad a_i = \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i} \tilde{a}_j.$$

В качестве примера преобразования компонент с верхними и нижними индексами рассмотрим дифференциалы  $dq^i$  и частные производные от скалярной функции. По общим правилам математического анализа имеем:

$$d\tilde{q}^i = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j} dq^j, \quad \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}^i} = \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^i} \frac{\partial f}{\partial q^j}.$$

Их свёртка (суммирование по индексу  $i$ ) даёт дифференциал функции, являющийся *инвариантом*, не зависящим от выбора системы координат:

$$df = \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i = \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}^i} d\tilde{q}^i.$$

Таким образом, компоненты вектора с верхними индексами преобразуются так же, как дифференциал координат  $dq^i$ , а с нижними – как частные производные скалярной функции  $\partial_i f = \partial f / \partial q^i$ . Этот факт позволяет легко запомнить вид матриц преобразований для  $a^i$ ,  $\mathbf{e}^i$  и  $a_i$ ,  $\mathbf{e}_i$ .

Напомним, что при смене координат скалярная функция изменяет свою функциональную форму  $f(q^i) = f(q^i(\tilde{q}^j)) = \tilde{f}(\tilde{q}^j)$ . Однако её значение, соответствующее данной точке пространства, не изменяется, поэтому тильда над  $\tilde{f}$  обычно не ставится.

## 4.6 Тензоры

• Вектор **a** в данной системе координат определяется компонентами с верхними  $a^i$  или нижними  $a_i$  индексами. Из подобных компонент двух векторов можно составить 4 комбинации:  $a^i b^j$ ,  $a^i b_j$ ,  $a_i b^j$ ,  $a_i b_j$ , каждая из которых представляет собой  $n^2$  величин, где  $n$ -размерность пространства. Так как компоненты преобразуются независимым образом, то произведение компонент двух векторов при преобразовании координат будет преобразовываться следующим образом:

$$\tilde{a}^i \tilde{b}^j = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^p} \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^r} a^p b^r \quad \tilde{a}^i \tilde{b}_j = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^p} \frac{\partial q^r}{\partial \tilde{q}^j} a^p b_r,$$

и т.д. В общем случае будем называть тензором типа  $(\mu, \nu)$  величину с  $\mu + \nu$  индексами, из которых  $\mu$  находятся вверху, а  $\nu$  – внизу. Число  $\mu + \nu$  называется *рангом* тензора. Тензор от любой другой индексной величины отличает закон преобразования при смене системы координат, который по *определению* равен произведению  $\mu$  матриц преобразований для компонент векторов с верхними индексами и  $\nu$  матриц – с нижними. Например для тензора типа  $(1,2)$  имеем тройную сумму по  $p, q$  и  $s$ :

$$\tilde{a}_{jk}^i = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^p} \frac{\partial q^r}{\partial \tilde{q}^j} \frac{\partial q^s}{\partial \tilde{q}^k} a_{rs}^p.$$

Любая свёртка (суммирование) тензоров по верхнему и нижнему индексу снова даёт тензорное выражение:

$$f = A_i^i, \quad a_i = B_{ik}^j C^k D_j, \quad F_{ij} = g_{ip} g_{jr} F^{pr}.$$

В первом случае получается скаляр (число, безындexсная величина). Во втором – тензор  $(0,1)$ , т.е. компоненты вектора с нижними индексами (ковариантные). В третьем, при помощи двух метрических тензоров, производится опускание индексов у тензора типа  $(2,0)$ , что превращает его в тензор  $(0,2)$ , который традиционно обозначается тем же символом.

Метрические тензоры  $g_{ij}$  и  $g^{ij}$  подчиняются закону преобразования для тензоров типа  $(0,2)$  и  $(2,0)$  соответственно. Это непосредственно следует из того, что расстояние между двумя бесконечно близкими точками  $dl^2 = g_{ij} dq^i dq^j$  не зависит от выбора системы координат, а  $dq^i$  являются компонентами вектора.

При помощи явной проверки, используя соотношение (4.8), можно убедиться, что символ Кронекера  $\delta_j^i$  является тензором, причём имеющим одинаковые компоненты во всех системах координат. Тензорность символов Кронекера также следует из соотношения  $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$  (свёртка двух тензоров снова даёт тензор).

• В *декартовых* координатах 3-мерного пространства был введен антисимметричный *символ* Леви-Чевиты  $\varepsilon_{ijk}$  со значением  $\varepsilon_{123} = 1$ . Аналогично, в 4-мерном пространстве этот же *символ* имеет вид  $\varepsilon_{ijkl}$  со значением  $\varepsilon_{1234} = 1$  и т.д. Обозначим декартовы координаты  $\tilde{q}^i = x^i = (x, y, z)$ , и в произвольных координатах определим антисимметричный ( $\leq$  Н<sub>77</sub>) *тензор* Леви-Чевиты:

$$E_{ijk} = \frac{\partial x^p}{\partial q^i} \frac{\partial x^r}{\partial q^j} \frac{\partial x^s}{\partial q^k} \varepsilon_{prs} = J \varepsilon_{ijk}, \quad (4.10)$$

где  $\tilde{E}_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$  тензор в декартовых координатах, а  $J$  – *якобиан* (стр. 71). Действительно, т.к. при помощи  $\varepsilon_{ijk}$  определяется детерминант матрицы (см. стр. 55), то, например, для  $E_{123}$  имеем:

$$J = \det \left( \frac{\partial x^j}{\partial q^i} \right) = \begin{vmatrix} \partial_1 x & \partial_1 y & \partial_1 z \\ \partial_2 x & \partial_2 y & \partial_2 z \\ \partial_3 x & \partial_3 y & \partial_3 z \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial q^1} \frac{\partial x^j}{\partial q^2} \frac{\partial x^k}{\partial q^3} = E_{123}.$$

Якобиан можно выразить через определитель  $g$  матрицы, составленной из компонент метрического тензора  $g_{ij}$ , т.е.  $g = \det(g_{ij})$ . Рассмотрим преобразование тензора из декартовой системы координат (где он является символом Кронекера) к произвольной криволинейной системе:

$$g_{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial q^i} \frac{\partial x^r}{\partial q^j} \delta_{pr}.$$

Справа – произведение трёх квадратных матриц: поэтому  $\det g_{ij} = J^2$  (определитель произведения матриц равен произведению их определителей, и в декартовых координатах  $\det \delta_{pr} = 1$ ). Таким образом:

$$E_{ijk} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{ijk}, \quad E^{ijk} = \frac{\sqrt{|g|}}{g} \varepsilon^{ijk}.$$

Тензор  $E^{ijk}$  определяется при помощи метрического тензора, и аналогично якобиану  $E^{ijk} = g^{ip} g^{jr} g^{ks} \sqrt{|g|} \varepsilon_{prs} = \det(g^{pr}) \sqrt{|g|} \varepsilon_{ijk}$ . Так как  $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$ , то появляется множитель  $\det(g^{ij}) = 1/\det(g_{ij}) = 1/g$ . По определению символы Леви-Чевиты от положения индексов не меняются:  $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ .

Наличие в определениях тензоров Леви-Чевиты модуля метрического тензора связано с обобщением этих соотношений на псевдоевклидовы пространства, в которых  $\det \text{diag}(1, -1, -1, -1) = -1$ . В этом случае мы бы получили  $\det(g_{ij}) = -J^2$  или  $J = \sqrt{-g}$ .

#### 4.7 Приведение к главным осям

Рассмотрим вращение декартовой системы координат (стр. 58). Так как в декартовых координатах исходный и взаимный к нему базисы совпадают:  $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , разницы между верхними и нижними индексами нет. Поэтому в этом разделе временно забудем о суммационном правиле – “один вверху, второй внизу” – и все индексы опустим вниз. Декартовы координаты исходной системы будем обозначать, как  $x_i = (x_1, x_2, x_3)$ , а повернутой – как  $\tilde{x}_i = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ .

Повороты являются линейным, ортогональным ( $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ ) преобразованием координат:

$$\tilde{x}_i = R_{ij} x_j, \quad x_i = R_{ij}^{-1} \tilde{x}_j = R_{ij}^T \tilde{x}_j = R_{ji} \tilde{x}_j.$$

Не зависящая от координат матрица вращений (линейность преобразований!):

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} = R_{ij}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j} = R_{ji}$$

определяет изменение любого тензора при таком преобразовании. Если базис исходной системы координат равен  $\mathbf{e}_i = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , то базис повернутой системы (направление осей) определяется из соотношений:

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \mathbf{e}_j = R_{ij} \mathbf{e}_j, \quad \tilde{\mathbf{e}}^i = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \mathbf{e}^j = R_{ij} \mathbf{e}^j.$$

Выше специально записаны преобразования для базисных векторов с верхним и нижним индексом (исходный и взаимный), чтобы ещё раз подчеркнуть, что в декартовых координатах эти базисы совпадают, и вращение, естественно, это совпадение сохраняет.

Тензор 2-го ранга (квадратная матрица) при вращении изменяется следующим образом (компонентная и матричная запись):

$$\tilde{a}_{ij} = R_{ip} R_{jr} a_{pr} = R_{ip} a_{pr} R_{rj}^T, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^T.$$

В физике встречается множество действительных симметричных тензоров  $a_{ij} = a_{ji}$  (тензор инерции, упругости и т.д.). Значения их компонент зависят от выбора ориентации системы координат. Для любого *симметричного* тензора, с *независящими* от координат компонентами, существует выделенное направление декартовых осей (т.н. *главные оси*), при котором он становится диагональным. Другими словами, при удачном выборе ориентации осей такой тензор в 3-мерном пространстве определяется только 3-мя, а не 6-ю независимыми компонентами.

Предположим, что в системе координат  $x_i$  *симметричный* тензор  $\mathbf{S}$  не диагонален. Найдём новую систему  $\tilde{x}_i$  в которой он будет диагональным.

Для *несингулярной* матрицы ( $\det \mathbf{S} \neq 0$ ) размером  $3 \times 3$  уравнение

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

(уравнение на собственные значения) имеет не более трёх решений. Будем обозначать в круглых скобках сверху *номер* собственного вектора матрицы, а внизу – его компоненты:  $\mathbf{u}^{(\alpha)} = \{u_1^{(\alpha)}, u_2^{(\alpha)}, u_3^{(\alpha)}\}$ . Построим матрицу поворота при помощи собственных векторов  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{R} = R_{\alpha\beta} = u_{\beta}^{(\alpha)}.$$

Прямым вычислением можно проверить, что она ортогональна:

$$(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T)_{\alpha\beta} = R_{\alpha i} R_{i\beta}^T = R_{\alpha i} R_{\beta i} = u_i^{(\alpha)} u_i^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}.$$

В последнем равенстве использована ортогональность [(3.3), стр. 56], справедливая для унитарной (и, следовательно, для действительной симметричной матрицы). Тензор  $\tilde{\mathbf{S}}$  в повернутой системе координат равен:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\alpha\beta} = R_{\alpha i} s_{ij} R_{\beta j} = u_i^{(\alpha)} s_{ij} u_j^{(\beta)} = \lambda_{\beta} u_i^{(\alpha)} u_i^{(\beta)} = \lambda_{\beta} \delta_{\alpha\beta},$$

где использовано уравнение на собственные значения и соотношение ортогональности (по  $\beta$  суммирования нет). Таким образом, в подходящей системе координат симметричный тензор является диагональным:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Положение *главных осей* определяется новыми базисными векторами:

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = R_{ij} \mathbf{e}_j = u_j^{(i)} \mathbf{e}_j = u_1^{(i)} \mathbf{i} + u_2^{(i)} \mathbf{j} + u_3^{(i)} \mathbf{k}.$$

Их компоненты и являются собственными векторами  $\mathbf{u}^{(i)} = \{u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)}\}$ .

В случае, если все три собственных значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  различны, существует три различных ортогональных собственных вектора, являющихся главными осями.

Возможна ситуация, когда два собственных значения одинаковы и отличны от третьего  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ . В этом случае одну главную ось можно выбрать вдоль вектора  $\mathbf{u}^{(3)}$ . Две других лежат в плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{u}^{(3)}$ , и могут быть ориентированы произвольным образом (с сохранением ортогональности). Говорят, что подобный тензор обладает *цилиндрической симметрией* с осью симметрии  $\mathbf{u}^{(3)}$ .

Равенство всех трех собственных значений  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  означает, что матрица  $\mathbf{S}$  пропорциональна единичной  $\mathbf{S} = \lambda \mathbf{1}$ . В силу ортогональности вращений “единичность” будет сохраняться при поворотах, и любые три ортогональные оси будут главными. В этом случае говорят, что тензор обладает *сферической симметрией*.

## Задачи

• ( $\leq$  Н<sub>74</sub>) Убедиться, что сумма двух тензоров одинакового типа снова является тензором того же типа.

• ( $\leq$  Н<sub>75</sub>) Пусть  $T^{ij}$  – тензор, а  $a^i, b^i$  векторы. Показать, что  $a^i b_i$  является скаляром, а  $T^{ij} a_j$  – ковариантными компонентами вектора.

• ( $\leq$  Н<sub>76</sub>) Какие из приведенных выражений являются тензорными в произвольных криволинейных координатах ( $g_{ij}$  – метрический тензор).

$$(x^i x_i) x^j, \quad \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}, \quad g_{ij} x^i \frac{dx^j}{dt}.$$

Какие из выражений являются тензорами при поворотах декартовой системы координат?

• ( $\leq$  Н<sub>77</sub>) Доказать антисимметричность тензора  $E_{ijk}$ .

• ( $\leq$  Н<sub>78</sub>) Доказать:

$$E_{ijk} E^{prs} = \text{sign}(g) \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{prs}, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{prs} = \begin{vmatrix} \delta_i^p & \delta_i^r & \delta_i^s \\ \delta_j^p & \delta_j^r & \delta_j^s \\ \delta_k^p & \delta_k^r & \delta_k^s \end{vmatrix},$$

где  $\text{sign}(g)$  – знак определителя метрического тензора.

• ( $\leq$  Н<sub>79</sub>) Доказать, что в  $n$ -мерном пространстве свертка произведения двух тензоров Леви-Чевиты по всем индексам равна факториалу  $n$ . Затем получить второе тождество (нет свёртки по последним индексам):

$$E_{ijk\dots} E^{ijk\dots} = \text{sign}(g) n!, \quad E_{ij\dots kp} E^{ij\dots kr} = \text{sign}(g) (n-1)! \delta_p^r.$$

• ( $\leq$  Н<sub>80</sub>) Найти матрицу поворотов  $\mathbf{R}$  для симметричной матрицы  $2 \times 2$  из задачи ( $\leq$  Н<sub>51</sub>), стр. 174. Убедиться, что  $\mathbf{R}$  её диагонализует.

• ( $\leq$  Н<sub>81</sub>) Найти угол, на который необходимо повернуть декартову систему координат, чтобы произвольная симметричная матрица  $2 \times 2$  стала диагональной.

• ( $\leq$  Н<sub>82</sub>) В данной декартовой системе координат компоненты тензора имеют вид

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти компоненты этого тензора в системе координат с базисными векторами  $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{i}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . В новой системе вычислить компоненты тензоров  $\tilde{A}^{ij}$ ,  $\tilde{A}_j^i$ . Найти взаимный базис.

• ( $\leq$  Н<sub>83</sub>) В теории относительности рассматривается 4-мерное *псевдоевклидово* пространство-время с метрикой:  $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Индексы координат принято нумеровать с нуля:  $x^\alpha = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{t, x, y, z\}$ , где  $t$  – время события,  $x, y, z$  – его декартовы координаты, и выбрана система единиц, в которой скорость света  $c = 1$ . Записать выражение для интервала  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ . Чему соответствует  $ds = 0$ ?

• ( $\leq$  Н<sub>84</sub>) Показать, что в теории относительности *преобразования Лоренца*:  $\tilde{x}^0 = \gamma(x^0 - vx^1)$ ,  $\tilde{x}^1 = \gamma(x^1 - vx^0)$ ,  $\tilde{x}^2 = x^2$ ,  $\tilde{x}^3 = x^3$ , где  $v$  – относительная скорость двух систем отсчёта, оставляют интервал  $ds$  неизменным (инвариантным). Выразить  $\gamma$  через  $v$ .

• ( $\leq$  Н<sub>85</sub>) Контравариантные компоненты 4-вектора в псевдоевклидовом пространстве – это числа  $A^\alpha = \{A^0, A^1, A^2, A^3\} = \{A^0, \mathbf{A}\}$ .  $A^0$  называется временной частью вектора, а тройка  $\mathbf{A} = \{A^1, A^2, A^3\}$  – пространственной. Выразить через них компоненты  $A_\alpha = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ .

• ( $\leq$  Н<sub>86</sub>) Рассмотреть 4-вектор электрического тока  $j^\alpha = \{\rho, \mathbf{j}\}$ , где  $\rho$  – плотность заряда, а  $\mathbf{j}$  – плотность тока. Какому уравнению соответствует соотношение  $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ , где  $\partial_0 = \partial/\partial t$ ,  $\partial_1 = \partial/\partial x^1 = \partial/\partial x$ , и т.д.

• ( $\leq$  Н<sub>87</sub>) Компоненты 4-вектора потенциала  $A^\alpha = \{\varphi, \mathbf{A}\}$  связаны с электрическим и магнитным полями следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\partial_0 \mathbf{A} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Выразить тензоры  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$  и  $F^{\alpha\beta}$  через векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ .

• ( $\leq$  Н<sub>88</sub>) Записать через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  следующие *сопряжённые тензоры*:

$${}^*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad {}^*F^{\alpha\beta}.$$

• ( $\leq$  Н<sub>89</sub>) Записать через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  уравнения:  $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta$ .

• ( $\leq$  Н<sub>90</sub>) Записать через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  уравнения:  $\partial_\alpha {}^*F^{\alpha\beta} = 0$ .

• ( $\leq$  Н<sub>91</sub>) Вывести из уравнения задачи ( $\leq$  Н<sub>89</sub>) уравнение непрерывности.

• ( $\leq$  Н<sub>92</sub>) Выразить инвариантные свёртки  $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ ,  ${}^*F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$  через напряжённости электрического и магнитного полей.

• ( $\leq$  Н<sub>93</sub>) При помощи тензора  $F_{\alpha\beta}$  записать преобразования напряжённости электрического и магнитного полей при преобразованиях Лоренца.





## Глава 5

# Ковариантное дифференцирование

В этой главе мы продолжим изучение тензорных свойств величин. Так как большинство уравнений в физике являются дифференциальными, необходимо разобраться, как должны выглядеть подобные уравнения с учётом требования независимости их формы от выбора системы координат.

Мы введём новый объект – символы Кристоффеля. Они, не являясь тензором, так “подправляют производные” по произвольным координатам, что дифференцирование сохраняет тензорный характер преобразований. Кроме этого, символы Кристоффеля определяют дифференциальное уравнение для прямой, что окажется исключительно важным в дальнейшем при рассмотрении искривлённых пространств. Мы найдём явный вид векторных дифференциальных операций (градиента, дивергенции и ротора) в произвольных криволинейных координатах и рассмотрим специальный класс ортогональных координат.

## 5.1 Символы Кристоффеля

• Какие бы координаты мы не выбрали, дифференциал скалярной функции будет равен:

$$df = \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i = \partial_i f dq^i,$$

где используется сокращённая запись для частной производной по  $i$ -той координате  $\partial_i f$ . Бесконечно малое смещение в пространстве является вектором, компоненты разложения по криволинейному базису которого являются дифференциалами координат:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i dq^i, \quad \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \equiv \partial_i \mathbf{r}.$$

Определим *вектор* градиента следующим образом:

$$\nabla f = \mathbf{e}^i \partial_i f, \quad (5.1)$$

где записано разложение по *взаимному базису*. Определение градиента сделано так, чтобы при его скалярном произведении на вектор бесконечно малого смещения  $d\mathbf{r}$  получался дифференциал:

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{e}^i \partial_i f) \cdot (\mathbf{e}_j dq^j) = \delta_j^i \partial_i f dq^j = \partial_j f dq^j.$$

”Оторвём” наблу от функции, определив векторный оператор:

$$\nabla = \mathbf{e}^i \partial_i.$$

При действии производной необходимо дифференцировать *всё*, что стоит справа от неё, в том числе и базисные векторы. Например, при вычислении дивергенции вектора  $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$  имеем:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{e}^k \partial_k) \cdot (A^i \mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}^k \mathbf{e}_i) \partial_k A^i + \mathbf{e}^k (\partial_k \mathbf{e}_i) A^i,$$

или

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_k A^k + \Gamma_{ik}^k A^i,$$

где учтено, что  $\mathbf{e}^k \mathbf{e}_i = \delta_i^k$  и введены *символы Кристоффеля*:

$$\Gamma_{ij}^k = \mathbf{e}^k \partial_j \mathbf{e}_i. \quad (5.2)$$

При помощи метрического тензора также определяются символы Кристоффеля с нижними индексами:

$$\Gamma_{k,ij} = g_{kp} \Gamma_{ij}^p = \mathbf{e}_k \partial_j \mathbf{e}_i.$$

Первое слагаемое в дивергенции  $\partial_k A^k$  представляет собой производные компонент векторного поля, тогда как второе связано с тем, что в криволинейных координатах базисные векторы изменяются при переходе от одной точки пространства к другой (зависят от координат). Символы Кристоффеля отражают в себе это изменение базиса.

• Базис является производной радиус-вектора  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  декартовой системы координат  $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{r}$ . Поэтому символы Кристоффеля симметричны по последним двум индексам  $\Gamma_{k,ij} = \mathbf{e}_k \partial_j \partial_i \mathbf{r}$  (так как  $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ ):

$$\Gamma_{k,ij} = \Gamma_{k,ji}, \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

• Символы Кристоффеля могут быть выражены через метрический тензор  $g_{ij}$ . Возьмём производную от  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij}$  по  $k$ -той координате:

$$\mathbf{e}_i \partial_k \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \partial_k \mathbf{e}_i = \partial_k g_{ij}.$$

Переименовывая индексы (или беря производные от  $g_{ik}$  и  $g_{jk}$ ), получаем два аналогичных уравнения:

$$\mathbf{e}_i \partial_j \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k \partial_j \mathbf{e}_i = \partial_j g_{ik}, \quad \mathbf{e}_j \partial_i \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k \partial_i \mathbf{e}_j = \partial_i g_{jk}.$$

Складывая последние два уравнения и вычитая первое, с учётом того, что  $\partial_i \mathbf{e}_j = \partial_j \mathbf{e}_i = \partial_i \partial_j \mathbf{r}$ , получаем:

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) = \mathbf{e}_k \partial_j \mathbf{e}_i. \quad (5.3)$$

Символы Кристоффеля с верхним индексом получаются из этого выражения при помощи метрического тензора  $\Gamma_{ij}^k = g^{kp} \Gamma_{p,ij}$ .

• Символы Кристоффеля не являются тензором:

$$\tilde{\Gamma}_{k,ij} = \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\partial}_j \tilde{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial q^r}{\partial \tilde{q}^k} \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial q^s} \left( \frac{\partial q^p}{\partial \tilde{q}^i} \mathbf{e}_p \right) \frac{\partial q^s}{\partial \tilde{q}^j}. \quad (5.4)$$

В результате раскрытия производной от круглых скобок ( $\leq N_{95}$ ) появляется вторая производная по координатам, которая в случае нелинейных преобразований нарушает тензорный характер преобразования  $\Gamma_{k,ij}$ .

• Рассмотрим полярную систему координат. Дифференцирование векторов базиса (4.2), стр. 64, даёт:

$$\partial_r \mathbf{e}_r = 0, \quad \partial_r \mathbf{e}_\phi = \partial_\phi \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{e}_\phi}{r}, \quad \partial_\phi \mathbf{e}_\phi = -r \mathbf{e}_r,$$

где  $\partial_r = \partial/\partial r$ ,  $\partial_\phi = \partial/\partial \phi$ . Нумеруя координаты так, что  $q^i = (r, \phi)$ , получаем только три отличных от нуля символа Кристоффеля:

$$\Gamma_{1,22} = \mathbf{e}_r \partial_\phi \mathbf{e}_\phi = -r, \quad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = \mathbf{e}_\phi \partial_r \mathbf{e}_\phi = r.$$

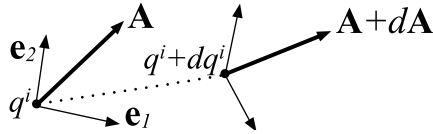
Стоит проверить ( $\leq N_{94}$ ), что этот же результат следует из (5.3). Обратный к метрическому тензору (4.5), стр. 67, тензор  $g^{ij}$  имеет два ненулевых элемента:  $g^{11} = 1$ ,  $g^{22} = 1/r^2$ . Суммируя символы  $\Gamma_{p,ij}$  с тензором  $g^{kp}$ , получим символы Кристоффеля с верхним индексом:

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 1/r.$$

Все остальные коэффициенты равны нулю.

## 5.2 Ковариантная производная

• Пусть задано векторное поле  $\mathbf{A}$ . Эта векторная функция предполагается достаточно гладкой, и при переходе из одной точки в другую (бесконечно близкую) изменяется незначительно. В декартовых координатах изменение проекций векторного поля обусловлено только изменением самого поля. В криволинейном базисе компоненты вектора изменяются как из-за изменения векторного поля, так и в результате изменения базисных векторов при смещении в пространстве:



$$d\mathbf{A} = d(A^j \mathbf{e}_j) = d(A_j \mathbf{e}^j).$$

Раскрывая дифференциал произведения, например, при разложении векторного поля по базису  $\mathbf{e}_j$ , имеем:

$$d\mathbf{A} = (\mathbf{e}_j \partial_k A^j + A^j \partial_k \mathbf{e}_j) dq^k = \mathbf{e}_j DA^j.$$

Во втором равенстве записано разложение вектора  $d\mathbf{A}$  по базису  $\mathbf{e}_j$ . Коэффициенты разложения

$$DA^i = (D_k A^i) dq^k$$

называются *ковариантным дифференциалом*, а  $D_k A^i$  — *ковариантной производной*. Принято также обозначение:  $D_k A^i \equiv A^i_{;k}$ . Чтобы её найти, умножим обе части разложения  $d\mathbf{A}$  на взаимный базис  $\mathbf{e}^i$ . С учётом определения  $\Gamma^i_{jk} = \mathbf{e}^i \partial_k \mathbf{e}_j$  и свойства ортогональности  $\mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = \delta^i_j$ , имеем:

$$D_k A^i \equiv A^i_{;k} = \partial_k A^i + \Gamma^i_{jk} A^j. \quad (5.5)$$

Аналогично при разложении по взаимному базису  $d\mathbf{A} = \mathbf{e}^i DA_i$ . Для получения коэффициентов  $DA_i = D_k A_i dq^k$  необходимо учесть, что из  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = \delta^j_i$  следует  $\mathbf{e}_i \partial_k \mathbf{e}^j = -\mathbf{e}^j \partial_k \mathbf{e}_i$ . В результате ковариантная производная от  $A_i$  равна:

$$D_k A_i \equiv A_{i;k} = \partial_k A_i - \Gamma^j_{ik} A_j. \quad (5.6)$$

Изменение вектора  $d\mathbf{A}$  является физической (геометрической) величиной и не зависит от системы координат. Так как  $\mathbf{e}_i$  и  $dq^k$  преобразуются по тензорному закону, то и обобщённые производные  $D_k A^i$ ,  $D_k A_i$  также являются тензорами. В отличие от производной скалярного поля  $\partial_k f$ , выражение  $\partial_k A^i$  тензором не является. Поэтому, если необходимо записать дифференциальные уравнения, имеющие *ковариантный* (неизменный) вид в различных системах координат, необходимо вместо производных  $\partial_k A^i$  использовать их ковариантную версию  $D_k A^i$ , которая является тензором. В частности, дивергенция — это  $\nabla \mathbf{A} = D_i A^i = A^i_{;i}$ .

• Аналогично ковариантному дифференцированию компонент вектора можно ввести ковариантное дифференцирование тензора, которое подчиняется обычным правилам дифференцирования. Например, для производной произведения имеем:

$$D_k(A^i B^j) = (D_k A^i) B^j + A^i (D_k B^j) = \partial_k(A^i B^j) + \Gamma_{pk}^i A^p B^j + \Gamma_{pk}^j A^i B^p,$$

где во втором равенстве подставлена ковариантная производная каждого вектора. Так как  $(D_k A^i)$  и  $B^j$  преобразуются как тензор, сумма тензоров также тензор ( $\leq H_{74}$ ), то определенная таким образом ковариантная производная  $D_k(A^i B^j)$  оказывается тензором. Таким образом, для тензоров второго ранга ковариантная производная *определяется* следующим образом:

$$\begin{aligned} D_k A^{ij} &\equiv A^{ij}_{;k} = \partial_k A^{ij} + \Gamma_{pk}^i A^p j + \Gamma_{pk}^j A^i p, \\ D_k A_{ij} &\equiv A_{ij;k} = \partial_k A_{ij} - \Gamma_{ik}^p A_{pj} - \Gamma_{jk}^p A_{ip}, \\ D_k A^i_j &\equiv A^i_{j;k} = \partial_k A^i_j + \Gamma_{pk}^i A^p_j - \Gamma_{jk}^p A^i_p. \end{aligned}$$

Первое выражение записано по аналогии производной  $A^i B^j$  [тензор типа  $(2,0)$ ], второе и третье – как  $A_i B_j$  и  $A^i B_j$  [тензоры типа  $(0,2)$  и  $(1,1)$  соответственно]. Аналогично определяется производная от тензора произвольного типа. Ковариантная производная повышает ранг тензора на единицу. При этом она сохраняет тензорность выражения, а следовательно, уравнение, в которое она входит, будет иметь одинаковую форму во всех системах координат. Ковариантный дифференциал тензора равен  $DA^{ij} = D_k A^{ij} dq^k$ , и т.д.

• Ковариантная производная метрического тензора равна нулю:

$$D_k g_{ij} = 0. \quad (5.7)$$

Этот важный факт называется *теоремой Риччи*. Она доказывается прямым вычислением. По определению производной тензора имеем:

$$D_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ik}^p g_{pj} - \Gamma_{jk}^p g_{ip} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{j,ik} - \Gamma_{i,jk} = 0.$$

Во втором равенстве опущен вниз индекс у символа Кристоффеля, а ноль в третьем получается после подстановки выражения (5.3) для символов Кристоффеля через производные метрического тензора. Аналогично проверяется тождество  $D_k g^{ij} = 0$  ( $\leq H_{103}$ ).

Теорема Риччи позволяет обращаться с метрическим тензором, как с постоянным тензором, внося его под ковариантную производную:

$$g_{ik} D_j A^k = D_j (g_{ik} A^k) = D_j A_i,$$

поднимая и опуская индексы под производной.

### 5.3 Геодезическая и параллельный перенос

• В декартовых координатах  $x^k = (x, y, z)$  уравнение прямой имеет вид:  $x^k = a^k + u^k t$ , где  $a^k$ ,  $u^k$  – константы, а  $t$  – скалярный параметр (стр. 16). Физически это может быть траектория свободной частицы, движущейся в пространстве с постоянной скоростью  $u^k = dx^k/dt$ . В этом случае  $t$  – это время. Уравнение движения такой частицы (второй закон Ньютона) записывается следующим образом:

$$\frac{du^k}{dt} = \frac{d^2 x^k}{dt^2} = 0.$$

Придадим ему ковариантный вид в произвольных координатах  $q^k$ . Так как  $dq^k$  преобразуется, как контравариантный вектор, а  $t$  – скаляр (время), то скорость  $u^k = dq^k/dt$  в произвольных криволинейных координатах является вектором (компонентами вектора). Заменим обычный дифференциал  $d$  ковариантным  $D$ :

$$\frac{Du^k}{dt} = \frac{D_j u^k dq^j}{dt} = (\partial_j u^k + \Gamma_{ij}^k u^i) \frac{dq^j}{dt} = \partial_j u^k \frac{dq^j}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} = 0.$$

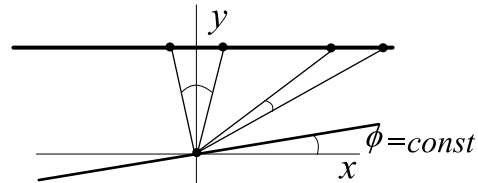
Производная скорости равна  $du^k/dt = (\partial_j u^k)(dq^j/dt)$ , и, следовательно, уравнение прямой (т.н. *геодезическая*) принимает вид:

$$\frac{d^2 q^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} = 0. \quad (5.8)$$

В декартовых координатах символы Кристоффеля равны нулю (метрический тензор постоянен), и мы возвращаемся к  $d^2 q^k/dt^2 = 0$ .

В 2-мерных полярных координатах  $q^i = (r, \phi)$  символы Кристоффеля равны:  $\Gamma_{22}^1 = -r$  и  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 1/r$ , поэтому уравнения геодезической:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = 0 \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{\phi}\dot{r} = 0, \end{cases}$$



где точка – производная по  $t$ . Если  $\phi = const$ , получаем  $\ddot{r} = 0$ , что соответствует прямой, проходящей через начало координат:  $r = ut$ , где  $u$  – константа и  $r = 0$  при  $t = 0$ . Если прямая не проходит через начало координат, то второе уравнение даёт  $\dot{\phi} = const/r^2$ , т.е. чем дальше точки на прямой от начала координат, тем меньше изменяется угол.

• *Однородным векторным полем* называется одинаковое во всём пространстве поле. В декартовых координатах постоянство означало бы независимость компонент поля от координат, т.е.  $\partial_i A^k = 0$ . В произвольном криволинейном базисе компоненты однородного поля изменяются от точки к точке, и ковариантное условие однородности имеет вид:

$$D_j A^k = \partial_j A^k + \Gamma_{ij}^k A^i = 0.$$

Говорят, что однородное векторное поле получается в результате параллельного переноса некоторого вектора во все точки пространства. Пусть при переносе изменение векторного поля равно нулю:

$$d\mathbf{A} = d(A^i \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i dA^i + A^i \partial_j \mathbf{e}_i dq^j = 0.$$

Умножая на  $\mathbf{e}^k$ , получаем изменение *компонент* параллельно перенесенного вектора в направлении  $dq^j$ :

$$dA^k = -\Gamma_{ij}^k A^i dq^j. \quad (5.9)$$

Геометрическая (5.8) определяет параллельный перенос *вектора*  $dq^k$ . В начальный момент времени он касается геодезической (является её направляющей). При параллельном переносе  $d^2 q^k = d(dq^k) = -\Gamma_{ij}^k dq^i dq^j$  возникает уравнение (5.8), дающее касательную в соседней точке.

Рассмотрим для примера параллельный перенос в полярной системе координат  $q^i = (r, \phi)$ :

$$\begin{cases} dA^r = r A^\phi d\phi \\ dA^\phi = -\frac{1}{r}(A^r d\phi + A^\phi dr). \end{cases}$$

Напомним (стр. 70), что  $\mathbf{e}_r = \{c_\phi, s_\phi\}$ ,  $\mathbf{e}_\phi = \{-rs_\phi, rc_\phi\}$ , поэтому базисный вектор  $|\mathbf{e}_r| = 1$ , а вектор  $\mathbf{e}_\phi$  ему перпендикулярен, и тем длиннее, чем дальше он находится от начала координат ( $|\mathbf{e}_\phi| = r$ ):



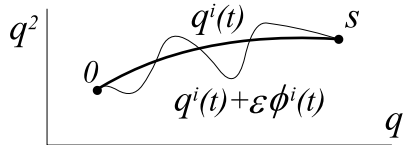
Если перенос происходит вдоль радиуса ( $d\phi = 0$ ), то радиальная проекция  $A^r$  не изменяется  $dA^r = 0$ , а для угловой получаем уравнение  $dA^\phi/A^\phi = -dr/r$ , откуда  $A^\phi = \text{const}/r$ . Так как базисный вектор  $\mathbf{e}_\phi$  в  $r$  раз удлиняется при удалении от начала координат, проекция постоянного вектора  $\mathbf{A}$  во столько же раз уменьшается. Аналогично анализируется правый рисунок (перенос вдоль окружности  $dr = 0$ ). Угол вектора с прямой (геодезическая!) при параллельном переносе постоянен.

## 5.4 Минимизация расстояния

• Напомним, что *функционалом* называется математический объект, который некоторой функции ставит в соответствие число. Определённый интеграл это простейший пример функционала. Числом является площадь под той или иной функцией. Из всех возможных функций особый интерес представляют функции, которые минимизируют значение интеграла. Пусть  $L(q^i, \dot{q}^i)$  (т.н. *функция Лагранжа*) зависит от функций  $q^i = q^i(t)$  и их производных  $\dot{q}^i = dq^i/dt$ . Проинтегрируем её от 0 до фиксированного числа  $s$ :

$$I[q] = \int_0^s L(q, \dot{q}) dt = \min.$$

Функционал  $I[q]$  будет минимальным (точнее, экстремальным), если функции  $q^i(t)$  удовлетворяют *уравнениям Лагранжа*:



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}. \quad (5.10)$$

Для их вывода необходимо к *экстремальной траектории*  $q^i(t)$  добавить *произвольные* функции  $\varphi^i(t)$ , умноженные на некоторое число  $\varepsilon$ . Будем рассматривать все возможные функции, соединяющие начальную и конечную точки, т.е.  $\varphi^i(0) = \varphi^i(s) = 0$  (см. рисунок).

Интеграл, как функция  $\varepsilon$ , имеет экстремум при  $\varepsilon = 0$ , следовательно:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^s L(q + \varepsilon\varphi, \dot{q} + \varepsilon\dot{\varphi}) dt \right|_{\varepsilon=0} = \int_0^s \left[ \frac{\partial L}{\partial q^i} \varphi^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{\varphi}^i \right] dt = 0.$$

Во втором слагаемом в квадратных скобках выделим полный дифференциал:

$$\int_0^s \left[ \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \varphi^i dt + \int_0^s \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \varphi^i \right) dt = 0.$$

В силу фиксированности начальной и конечной точки ( $\varphi^i(0) = \varphi^i(s) = 0$ ) второй интеграл равен нулю. Так как функции  $\varphi^i(t)$  *произвольны*, первый интеграл будет равен нулю, только если равно нулю выражение в квадратных скобках, что и приводит к уравнениям Лагранжа.



• Геодезическая имеет важное свойство, которое остаётся справедливым и в пространствах с достаточно произвольной геометрией: *кратчайшее расстояние между двумя точками проходит по геодезической*:

$$I[q] = \int_0^s \sqrt{dl^2} = \int_0^s (g_{ij} dq^i dq^j)^{1/2} = \int_0^s (g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j)^{1/2} dt = \min.$$

В этом случае функция Лагранжа  $L(q, \dot{q}) = (g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j)^{1/2}$ , и поэтому уравнения Лагранжа принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{g_{kj} \dot{q}^j}{L} \right) = \frac{\partial_k g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j}{2L}.$$

Выберем вместо произвольной параметризации кривой натуральную параметризацию  $t = s$  (стр. 19). В этом случае  $L = dl/dt = 1$ , и при дифференцировании на экстремальной кривой можно положить  $L = 1$ :

$$\partial_i g_{kj} \dot{q}^j \dot{q}^i + g_{kj} \ddot{q}^j = \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Так как произведение  $\dot{q}^j \dot{q}^i$  симметрично по индексам  $i$  и  $j$ , симметризуем (переименовав индексы) первый член в левой части уравнения:

$$\partial_i g_{kj} \dot{q}^j \dot{q}^i = \frac{1}{2} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki}) \dot{q}^j \dot{q}^i.$$

Свернув с  $g^{pk}$ , окончательно получим *уравнение геодезической*:

$$\frac{d^2 q^p}{ds^2} + \Gamma_{ij}^p \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} = 0. \quad (5.11)$$

Записывать уравнение геодезической в евклидовом пространстве обычно особого смысла не имеет. Наиболее просто прямая линия описывается в декартовых координатах. Однако в следующей главе будут рассмотрены пространства, обладающие кривизной (например, поверхность сферы). В таких пространствах можно определить прямую, как кратчайшее расстояние между двумя точками. Эта линия уже не будет прямой в евклидовом смысле, но она оказывается очень полезной для задач внутренней геометрии искривлённого пространства. В этом случае никаким преобразованием координат нельзя получить евклидову метрику в декартовых координатах  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  с прямыми вида  $x^i = a^i + u^i t$ . Поэтому использование уравнения геодезической является основным инструментом для построения “прямых” в искривлённом пространстве.

## 5.5 Скорость и символы Кристоффеля

• Рассмотрим частицу, движущуюся в пространстве с некоторой скоростью  $\mathbf{u}$ , равной отношению смещения  $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i dq^i$  на время  $dt$ :

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{q}^i \mathbf{e}_i. \quad (5.12)$$

Таким образом, производные координат  $\dot{q}^i$  являются контравариантными компонентами вектора скорости.

Вектор скорости можно рассматривать, как функцию координат и их производных по времени  $\mathbf{u}(q^i, \dot{q}^i)$ . От производных  $\dot{q}^i$  скорость зависит линейно, а от координат – через базисные векторы  $\mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3)$ . Поэтому из (5.12) следует, что:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \dot{q}^i} = \mathbf{e}_i, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q^i} = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^i} \dot{q}^j = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} \dot{q}^j = \frac{d\mathbf{e}_i}{dt}. \quad (5.13)$$

Во втором соотношении учтено, что  $\partial_j \mathbf{e}_i = \partial_j \partial_i \mathbf{r} = \partial_i \mathbf{e}_j$ , и затем записана полная производная по времени от  $\mathbf{e}_i$ .

Найдём теперь *ковариантные* компоненты ускорения  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}^i$  (производной от скорости  $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$ ):

$$a_i = \mathbf{a} \mathbf{e}_i = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \mathbf{e}_i = \frac{d(\mathbf{u} \mathbf{e}_i)}{dt} - \mathbf{u} \frac{d\mathbf{e}_i}{dt}.$$

Подставляя выражения для базисных векторов и их полной производной по времени (5.13), получаем:

$$a_i = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial q^i} \right), \quad (5.14)$$

где учтено, что  $\mathbf{u}(\partial \mathbf{u} / \partial q^i) = (1/2) \partial \mathbf{u}^2 / \partial q^i$ , и т.д. Квадрат скорости выражается через метрический тензор:

$$\mathbf{u}^2 = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = \frac{(\mathbf{e}_i dq^i)^2}{dt^2} = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

и является квадратичным по координатным скоростям  $\dot{q}^i$ , а от координат зависит через коэффициенты метрического тензора  $g_{ij}$ .

Контравариантные компоненты ускорения находятся, как обычно, при помощи обратного метрического тензора:

$$a^i = g^{ij} a_j.$$

Заметим, что свободное движение, соответствующее нулевому ускорению  $a_i = 0$ , получается из уравнений Лагранжа с  $L = \mathbf{u}^2/2$  [см. (5.10) и (5.14)]. Эта функция пропорциональна кинетической энергии частицы.

• В 3-мерном пространстве, в общем случае, существует  $18 = 3 \cdot 6$  символов Кристоффеля  $\Gamma_{ij}^k$  (с учётом их симметрии по индексам  $i$  и  $j$ ). Часто многие из этих символов равны нулю. Выражение (5.14) позволяет сразу получить ненулевые символы Кристоффеля без перебора всех 18 возможных комбинаций их индексов. Действительно, вычислим компоненты ускорения ещё одним способом:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d(\mathbf{e}_i \dot{q}^i)}{dt} = \mathbf{e}_i \ddot{q}^i + \partial_j \mathbf{e}_i \dot{q}^j \dot{q}^i.$$

Умножая на взаимный базис  $\mathbf{e}^k$ , получаем:

$$a^k = \mathbf{a} \mathbf{e}^k = \ddot{q}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{q}^i \dot{q}^j,$$

где учтено определение символов Кристоффеля  $\Gamma_{ij}^k = \mathbf{e}^k \partial_j \mathbf{e}_i$ . Обратим внимание, что если  $a^k = 0$ , то получается уравнение геодезической!

Алгоритм вычисления ненулевых символов Кристоффеля следующий. По формуле (5.14) находятся компоненты ускорения  $a_i$ . Символы Кристоффеля будут коэффициентами при первых производных координат по времени. Прделаем эти вычисления в случае сферической системы координат  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 s_\theta^2 d\phi^2$  (см. стр. 70):

$$\mathbf{u}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 s_\theta^2 \dot{\phi}^2.$$

Три компоненты ускорения по формуле (5.14) равны:

$$a_r = \frac{d\dot{r}}{dt} - r\dot{\theta}^2 - r s_\theta^2 \dot{\phi}^2, \quad a_\theta = \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} - r^2 s_\theta c_\theta \dot{\phi}^2, \quad a_\phi = \frac{d(r^2 s_\theta^2 \dot{\phi})}{dt},$$

или, раскрывая производные по времени:

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r s_\theta^2 \dot{\phi}^2, \\ a_\theta &= r^2 \ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2 s_\theta c_\theta \dot{\phi}^2, \\ a_\phi &= r^2 s_\theta^2 \ddot{\phi} + 2r s_\theta^2 \dot{r}\dot{\phi} + 2r^2 s_\theta c_\theta \dot{\theta}\dot{\phi}. \end{aligned}$$

Коэффициенты при первых производных  $\dot{q}^i = (\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$  равны:

$$\Gamma_{1,22} = -r, \quad \Gamma_{1,33} = -r s_\theta^2, \quad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = r, \quad \Gamma_{2,33} = -r^2 s_\theta c_\theta,$$

$$\Gamma_{3,13} = \Gamma_{3,31} = r s_\theta^2, \quad \Gamma_{3,23} = \Gamma_{3,32} = r^2 s_\theta c_\theta.$$

Остальные 12 (!) символов Кристоффеля равны нулю. Индекс поднимается при помощи метрического тензора  $g^{ij} = \text{diag}(1, 1/r^2, 1/(r s_\theta)^2)$ . Поэтому  $\Gamma_{ij}^1 = \Gamma_{1,ij}$ ,  $\Gamma_{ij}^2 = \Gamma_{2,ij}/r^2$ ,  $\Gamma_{ij}^3 = \Gamma_{3,ij}/r^2 s_\theta^2$ .

## 5.6 Криволинейный векторный анализ

• Получим несколько полезных соотношений, упрощающих вычисление дифференциальных операций в криволинейных координатах. Важную роль играет *определитель метрического тензора* с нижними индексами  $g = \det |g_{ij}|$ . Метрический тензор с верхними индексами может быть выражен через производную этого определителя:

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}. \quad (5.15)$$

Например, в 2-мерном пространстве определитель равен:

$$g = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}.$$

Беря от него производную последовательно по  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ , и т.д., получаем:

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}.$$

Прямым умножением матриц несложно проверить, что, если  $g_{ij} = g_{ji}$ , то этот тензор действительно является обратным к  $g_{ij}$ .

В общем случае (5.15) доказывается на основе алгоритма построения обратной матрицы (стр. 50). Её элементом будет алгебраическое дополнение к этому же элементу исходной матрицы, делённое на определитель  $g$  (транспонирование не нужно, так как  $g^{ij}$  и  $g_{ij}$  симметричные матрицы). С другой стороны, определитель  $g$  строится из произведения элементов на их алгебраические дополнения. Производная определителя по элементу равна его алгебраическому дополнению.

Ещё одно важное соотношение нам даёт теорема Риччи (стр. 85):

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik}. \quad (5.16)$$

Оно позволяет записать простое выражение для *симметричных* символов Кристоффеля, свёрнутых по паре индексов:

$$\Gamma_{ij}^j = g^{jp} \Gamma_{p,ij} = \frac{1}{2} g^{jp} (\Gamma_{p,ij} + \Gamma_{j,ip}) = \frac{1}{2} g^{jp} \partial_i g_{jp} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial g_{jp}} \frac{\partial g_{jp}}{\partial q^i}.$$

Во втором равенстве, с учётом симметричности  $g^{jp}$ , переименованы и переставлены индексы  $p, j$ . Затем подставлено (5.16) и (5.15). В результате:

$$\Gamma_{ij}^j = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial q^i} \equiv \frac{\partial_i g}{2g}, \quad (5.17)$$

где выполнено дифференцирование сложной функции. Это тождество можно также доказать, пользуясь результатом задачи ( $\leq$  Н<sub>57</sub>), подставив вместо матрицы  $\mathbf{A}$  тензор  $g_{ij}$ :  $d \ln g = \text{Tr}(\mathbf{g}^{-1} d\mathbf{g})$  или  $\partial_i \ln g = \text{Tr}(\mathbf{g}^{-1} \partial_i \mathbf{g})$ .

• Теперь не составляет труда записать выражение для ковариантной дивергенции:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = D_i A^i = \partial_i A^i + \Gamma_{pi}^i A^p = \partial_i A^i + \frac{(\partial_p g)}{2g} A^p.$$

Заменяя  $p \mapsto i$  и сворачивая производную произведения, имеем:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} A^i). \quad (5.18)$$

В отличие от исходного выражения, теперь нет необходимости вычислять множество компонент символов Кристоффеля, нужен только определитель метрического тензора  $g$ .

Ковариантные компоненты градиента  $\nabla f = \mathbf{e}^i \partial_i f$  – это производные  $\partial_i f$ . Поэтому лапласиан скалярной функции равен

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j f), \quad (5.19)$$

где мы воспользовались выражением для дивергенции от вектора  $\nabla f$ . Так как в (5.18) стоят компоненты вектора с верхними индексами, в (5.19) они подняты из  $\partial_i f$  при помощи метрического тензора  $g^{ij} \partial_j f$ .

Наконец, ротор в 3-мерном пространстве можно определить в ковариантном виде при помощи тензора Леви-Чевиты (4.10), стр. 75:

$$[\nabla \times \mathbf{A}]^i = E^{ijk} D_j A_k = E^{ijk} (\partial_j A_k - \Gamma_{kj}^p A_p) = E^{ijk} \partial_j A_k,$$

где учтено, что свёртка антисимметричного тензора  $E^{ijk}$  и симметричных по нижним индексам символов Кристоффеля  $\Gamma_{kj}^p$  равна нулю. Так как  $E^{ijk}$  и  $D_j A_k$  являются тензорами, то их свёртка даёт контравариантные компоненты вектора ротора. Напомним, что для  $g > 0$  в произвольной системе координат  $E^{ijk} = \varepsilon^{ijk} / \sqrt{g}$ , где  $\varepsilon^{ijk}$  – обычный антисимметричный символ Леви-Чевиты ( $\varepsilon^{123} = 1$ ). Поэтому:

$$[\nabla \times \mathbf{A}]^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} \partial_j A_k. \quad (5.20)$$

Таким образом, выражение для ротора в криволинейных координатах в 3-мерном пространстве от декартовых координат отличается только множителем  $1/\sqrt{g}$ . Векторное произведение (и, следовательно, ротор) можно определить только для трёх измерений. В то же время выражения для дивергенции (5.18) и лапласиана (5.19) справедливы для пространств любой размерности. Математический аппарат, обобщающий понятие ротора на произвольные размерности, мы рассмотрим в 7-й главе, при обсуждении дифференциальных форм.

## 5.7 Ортогональные координаты

• Запишем векторные дифференциальные операции 3-мерного пространства в *ортогональных координатах*. В таких координатах метрический тензор  $g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  диагонален:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} h_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & h_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & h_3^{-2} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

и определяется тремя параметрами  $h_1, h_2, h_3$ , называемыми *коэффициентами Ламе*. Сейчас двойка вверху – это степень (квадрат), а не индекс. Вообще, в этом разделе мы не будем использовать ковариантные обозначения, и даже суммирование будем указывать явным образом, не используя правило повторяющегося индекса.

Определитель метрического тензора обозначим следующим образом:

$$g = \det |g_{ij}| = H^2 = (h_1 h_2 h_3)^2.$$

Вместо базиса  $\mathbf{e}_i$  введём *единичные ортогональные векторы*:

$$\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{\mathbf{e}_i^2}} = \left( \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}, \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}, \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \right).$$

Учитывая, что  $\mathbf{e}^i$  получается суммированием  $g^{ij}$  и  $\mathbf{e}_j$  по индексу  $j$ , для векторов взаимного базиса имеем:

$$\mathbf{e}^i = \left( \frac{\mathbf{e}_1}{h_1^2}, \frac{\mathbf{e}_2}{h_2^2}, \frac{\mathbf{e}_3}{h_3^2} \right) = \left( \frac{\mathbf{n}_1}{h_1}, \frac{\mathbf{n}_2}{h_2}, \frac{\mathbf{n}_3}{h_3} \right).$$

Поэтому выражение для градиента скалярной функции в *физическом базисе*  $\mathbf{n}_i$  имеет вид:

$$\nabla f = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}^i \partial_i f = \frac{\mathbf{n}_1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{n}_2}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{n}_3}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{n}_i}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

Смысл перехода от базиса  $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{r}$ , который мы рассматривали до сих пор, к базису  $\mathbf{n}_i$  состоит в следующем. Так как метрический тензор  $g_{ij}$  зависит от координат, то *физическая размерность* компонент вектора оказывается различной. Так, в полярных координатах скалярное произведение равно  $\mathbf{A}\mathbf{B} = A^r B^r + r^2 A^\phi B^\phi$  (стр. 65). Так как длина радиус-вектора имеет размерность, например, метр, то из этого соотношения видно, что  $A^r$  и  $A^\phi$  – величины различной размерности. В ортонормированном же физическом базисе  $\mathbf{n}_i$ , компоненты вектора (*физические компоненты*) имеют одинаковую размерность.

Запишем разложение поля  $\mathbf{A}$  по ортонормированному базису:

$$\mathbf{A} = a_1 \mathbf{n}_1 + a_2 \mathbf{n}_2 + a_3 \mathbf{n}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{n}_i = \sum_{i=1}^3 A^i \mathbf{e}_i. \quad (5.22)$$

Ещё раз напомним, что при переходе к конкретной ортогональной системе принято игнорировать ковариантные обозначения, используя для всех величин нижние индексы. Чтобы не путаться с компонентами  $A^i$  базиса  $\mathbf{e}_i$ , для компонент базиса  $\mathbf{n}_i$  мы используем маленькие буквы  $a_i$ .

Так как  $\mathbf{n}_i \neq \partial_i \mathbf{r}$ , то их нельзя подставлять в определение символов Кристоффеля, а необходимо сначала выразить  $\Gamma_{ij}^k$  через базис  $\mathbf{e}_i$ , а затем перейти к  $\mathbf{n}_i$ . Однако мы поступим проще. Так как  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1/h_1$ , и т.д., то компоненты  $A^i$  разложения по базису  $\mathbf{e}_i$  связаны с компонентами  $a_i$  разложения по  $\mathbf{n}_i$  следующим образом:  $A^1 = a_1/h_1$ , и т.д. [см. (5.22)] Поэтому, делая соответствующую замену в выражении для дивергенции (5.18) в физических компонентах, получаем:

$$\nabla \mathbf{A} = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left( H \frac{a_i}{h_i} \right) = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial(h_2 h_3 a_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 a_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 a_3)}{\partial q_3} \right\}.$$

Лапласиан записывается по (5.19), с учётом (5.21):

$$\Delta f = \nabla(\nabla f) = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q^i} \left( \frac{H}{h_i^2} \frac{\partial f}{\partial q^i} \right).$$

Для записи ротора в ортогональном базисе необходимо выразить компоненты с нижними индексами  $A_i$  через  $a_i$ . Например, для  $A_1$ :

$$A_1 = \sum_{i=1}^3 g_{1i} A^i = g_{11} A^1 = h_1^2 \frac{a_1}{h_1} = h_1 a_1,$$

и т.д. Кроме этого, ротор (5.20) мы определили, как контравариантные компоненты:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i [\nabla \times \mathbf{A}]^i = \sum_{i=1}^3 h_i \mathbf{n}_i [\nabla \times \mathbf{A}]^i.$$

Поэтому, подставляя  $A_1 = h_1 a_1$ , и т.д., получаем:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{H} \sum_{i,j,k=1}^3 h_i \mathbf{n}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (a_k h_k) = \frac{1}{H} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{n}_1 & h_2 \mathbf{n}_2 & h_3 \mathbf{n}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix}.$$

Раскрытие определителя в последнем равенстве даёт разложение ротора по физическому базису  $\mathbf{n}_i$ .

## Задачи

- ( $\leq$  Н<sub>94</sub>) Найти символы Кристоффеля для полярной системы координат при помощи соотношения (5.3) стр.83.
- ( $\leq$  Н<sub>95</sub>) Записать преобразование (5.4), стр. 83, для символов Кристоффеля  $\Gamma_{k,ij}$  и  $\Gamma_{ij}^k$  через производные  $\partial q^i/\partial \tilde{q}^j$  и  $\partial \tilde{q}^i/\partial q^j$ .
- ( $\leq$  Н<sub>96</sub>) Найти преобразование координат, позволяющее в данной точке пространства обнулить все символы Кристоффеля.
- ( $\leq$  Н<sub>97</sub>) При помощи закона преобразования символов Кристоффеля показать, что величина  $S_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$  преобразуется как тензор.
- ( $\leq$  Н<sub>98</sub>) Получить закон преобразования символов Кристоффеля из требования тензорности ковариантной производной  $D_j A_i$ .
- ( $\leq$  Н<sub>99</sub>) При каких преобразованиях координат символы Кристоффеля преобразуются как тензор?
- ( $\leq$  Н<sub>100</sub>) Записать производную  $D_p$  от тензоров  $A^{ijk}$ ,  $A_{ijk}$  и  $A_{jk}^i$ .
- ( $\leq$  Н<sub>101</sub>) Ковариантная производная от скалярной функции является обычной производной. Проверить это в случае  $D_k(A^i B_i)$ .
- ( $\leq$  Н<sub>102</sub>) Прямым вычислением проверить, что  $D_k g_{ij}$  в полярной системе координат равна нулю.
- ( $\leq$  Н<sub>103</sub>) Доказать теорему Риччи для  $D_k g^{ij} = 0$ .
- ( $\leq$  Н<sub>104</sub>) Для прямой в полярных координатах найти зависимость  $r = r(\phi)$ , решив уравнения геодезической.
- ( $\leq$  Н<sub>105</sub>) Найти уравнения Лагранжа и решить их для функции Лагранжа  $L(q, \dot{q}) = (\dot{q} - \omega^2 q^2)/2$ , где  $\omega$  – константа.
- ( $\leq$  Н<sub>106</sub>) Вычислить интеграл от функции Лагранжа из предыдущей задачи с  $\omega = 1$  по интервалу  $[0.. \pi]$  для функций  $q(t) = \sin(t)$ ,  $q(t) = \sin(2t)$ ,  $q(t) = \sin(3t)$  и  $q(t) = t(1 - t/\pi)$ .
- ( $\leq$  Н<sub>107</sub>) Записать уравнение геодезической (5.11), стр. 89, в произвольной параметризации, перейдя от расстояния  $s$  к параметру  $t$ .
- ( $\leq$  Н<sub>108</sub>) Найти  $du_i/ds$ , где  $u^i = dq^i/ds$  и  $u_i = g_{ij}u^j$ .
- ( $\leq$  Н<sub>109</sub>) Показать, что при параллельном переносе вектора вдоль геодезической его угол с касательной к геодезической не изменяется.
- ( $\leq$  Н<sub>110</sub>) Найти отличные от нуля символы Кристоффеля в цилиндрической системе координат при помощи функции  $\mathbf{u}^2$  (стр. 90).



- ( $\leq$  Н<sub>111</sub>) Записать градиент, дивергенцию, ротор, лапласиан скалярной и векторной функций в цилиндрической системе координат.
- ( $\leq$  Н<sub>112</sub>) Записать градиент, дивергенцию, ротор, лапласиан скалярной и векторной функций в сферической системе координат.
- ( $\leq$  Н<sub>113</sub>) Проверить соотношение  $g^{ij} = (\partial g / \partial g_{ij}) / g$  для метрического тензора 3-мерного пространства.
- ( $\leq$  Н<sub>114</sub>) Соотношение  $g^{ij} = (\partial g / \partial g_{ij}) / g$  проверить для диагональной метрики произвольной размерности (ортогональные координаты).
- ( $\leq$  Н<sub>115</sub>) Проверить  $\Gamma_{ij}^j = \partial_i g / 2g$  для полярной системы координат.
- ( $\leq$  Н<sub>116</sub>) Доказать, что  $\partial_i \Gamma_{jk}^k$  симметрично по индексам  $i$  и  $j$ .
- ( $\leq$  Н<sub>117</sub>) Доказать, что  $\partial_k (g_{ij} A^i B^j) = B_i D_k A^i + A_i D_k B^i$ .
- ( $\leq$  Н<sub>118</sub>) Вычислить  $\nabla \mathbf{r}$ ,  $\nabla \times \mathbf{r}$ ,  $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$  в сферических или цилиндрических координатах, выбрав для этого более удобные ( $\mathbf{a} = \text{const}$ ).
- ( $\leq$  Н<sub>119</sub>) Решить уравнение  $\Delta f = 0$  при цилиндрической симметрии.
- ( $\leq$  Н<sub>120</sub>) Решить уравнение  $\Delta f = 0$  при сферической симметрии.
- ( $\leq$  Н<sub>121</sub>) Записать выражение для скорости (компоненты разложения по физическому базису  $\mathbf{n}_i$ ) в ортогональных координатах. Выписать явный вид для цилиндрической и сферической систем координат.
- ( $\leq$  Н<sub>122</sub>) Записать выражение для ускорения (компоненты разложения по физическому базису  $\mathbf{n}_i$ ) в ортогональных координатах. Выписать явный вид для цилиндрической и сферической систем координат. Решить уравнение  $a_\phi = 0$  в сферических координатах.
- ( $\leq$  Н<sub>123</sub>) Получить выражение символов Кристоффеля через метрический тензор из требования инвариантности скалярного произведения  $g_{ij} A^i B^j$  при параллельном переносе.
- ( $\leq$  Н<sub>124</sub>) Записать уравнения гидродинамики Эйлера в ковариантном виде (в произвольных криволинейных пространственных координатах).
- ( $\leq$  Н<sub>125</sub>) Записать ковариантные уравнения Максвелла  $\partial_\alpha^* F^{\alpha\beta} = 0$  в произвольных пространственно-временных координатах для интервала  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ . Время также является криволинейной координатой!
- ( $\leq$  Н<sub>126</sub>) Показать, что ковариантные уравнения Максвелла с источниками имеют вид  $\partial_\alpha (\sqrt{g} F^{\alpha\beta}) / \sqrt{g} = 4\pi j^\beta$ .
- ( $\leq$  Н<sub>127</sub>) Вывести из ковариантных уравнений Максвелла уравнение непрерывности.



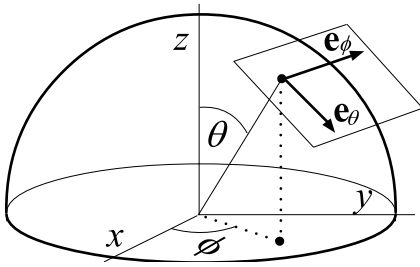
## Глава 6

# Дифференциальная геометрия

В простейшем случае дифференциальная геометрия оказывается полезной для анализа свойств различных поверхностей в 3-мерном пространстве. В то же время это исключительно мощный математический инструмент для описания пространств, обладающих геометрией, отличной от геометрии Евклида. Менее двухсот лет назад сама мысль о том, что возможны неевклидовы геометрии, была абсолютно неправдоподобной. Теперь мы знаем, что кроме привычной евклидовой геометрии существует множество других геометрий. Некоторые из них обладают свойствами изотропности и однородности, поэтому позволяют переносить и поворачивать без искажений различные геометрические объекты (треугольники, окружности, и т.п.). Более общие геометрии такими свойствами не обладают. Тем не менее, они позволяют определить “прямую”, угол и другие геометрические понятия. Изучать весь этот зоопарк геометрий с единой точки зрения необходимо хотя бы потому, что наша Вселенная, по всей видимости, обладает неевклидовой геометрией.

## 6.1 Поверхности в 3-мерном пространстве

Поверхность в 3-мерном пространстве можно задать при помощи уравнения  $F(x, y, z) = 0$ , или, разрешив его в виде  $z = f(x, y)$ , как значения высот  $z$  точек поверхности над плоскостью  $(x, y)$ . Альтернативный способ – параметрическое задание  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2)$  при помощи двух параметров. Параметры  $(q^1, q^2)$  могут быть координатами плоскости  $(x, y)$ , на которую проектируется точка поверхности:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) = \{x, y, f(x, y)\}$ . Однако в общем случае это произвольная нумерация *двумя* параметрами *2-мерной* поверхности. Так, для сферы радиуса  $a$ :



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, \phi) = a \{s_\theta c_\phi, s_\theta s_\phi, c_\theta\},$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$

$$z = f(x, y) = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Параметрическое задание сферы – это компоненты радиус-вектора в сферической системе с  $r = a = \text{const}$ . Любая точка на сфере задаётся углами  $q^i = (\theta, \phi)$ . Для описания сферы при помощи высот требуется две функции  $z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  (для верхней и нижней полусфер).

Введём два касательных к поверхности вектора:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}$$

и разложим функцию  $\mathbf{r}(q^1, q^2)$  в ряд Тейлора в окрестности  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\bar{q}^1, \bar{q}^2)$ , ограничившись линейным приближением ( $\mathbf{e}_i = (\partial \mathbf{r} / \partial q^i)_0$ ):

$$\mathbf{r}(q^1, q^2) \approx \mathbf{r}_0 + \mathbf{e}_1 (q^1 - \bar{q}^1) + \mathbf{e}_2 (q^2 - \bar{q}^2).$$

Это уравнение плоскости, касательной к поверхности в точке  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\bar{q}^1, \bar{q}^2)$  (см. стр. 17). Предполагается, что параметризация  $\mathbf{r}(q^1, q^2)$  такова, что векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  являются линейно независимыми и вместе с точкой  $\mathbf{r}_0$  полностью определяют касательную плоскость. Точки поверхности, где можно провести касательную плоскость, называются *неособыми*. Так, вершина конуса является *особой точкой*, и к ней нельзя провести касательную плоскость.

Ещё одно представление для касательной плоскости можно получить, разложив в ряд Тейлора уравнение  $z = f(x, y)$ :

$$z \approx f(\bar{x}, \bar{y}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 (x - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_0 (y - \bar{y}) = \bar{f} + f_x (x - \bar{x}) + f_y (y - \bar{y}).$$

В данном случае плоскость касается поверхности в точке  $\mathbf{r}_0 = \{\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y})\}$ .

Длина бесконечно малого смещения  $d\mathbf{r}$  *вдоль поверхности* является расстоянием между двумя близкими точками на поверхности. Её квадрат называется *первой квадратичной формой*:

$$dl^2 = (d\mathbf{r})^2 = (\mathbf{e}_1 dq^1 + \mathbf{e}_2 dq^2)^2 = \mathbf{e}_1^2 (dq^1)^2 + 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 dq^1 dq^2 + \mathbf{e}_2^2 (dq^2)^2.$$

Пусть поверхность задана уравнением  $z = f(x, y)$ . Тогда расстояние в 3-мерном евклидовом пространстве *вдоль поверхности* равно:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + (f_x dx + f_y dy)^2,$$

где  $f_x, f_y$  - частные производные по  $x$  и  $y$ , возникающие при взятии  $dz$ . Расстояние можно записать при помощи метрического тензора:

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^2 & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}.$$

В первом представлении  $g_{ij}$  координаты - это  $x^i = (q^1, q^2)$ , во втором -  $x^i = (x, y)$ . По повторяющимся индексам  $i$  и  $j$  ведётся суммирование.

Любой *касательный* к поверхности вектор можно разложить по векторам касательного базиса:  $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + b^2 \mathbf{e}_2$ . Коэффициенты метрического тензора определяют скалярное произведение этих касательных векторов:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = g_{ij} a^i b^j$ , и, соответственно, их длину.

Смещение вдоль поверхности равно  $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 dq^1 + \mathbf{e}_2 dq^2$ . Если, скажем,  $q^2 = \text{const}$ , то смещение при изменении  $q^1$  равно  $d\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1 dq^1$ . Аналогично получается вектор смещения  $d\mathbf{r}_2$ , соответствующий изменению  $q^2$  при постоянстве  $q^1 = \text{const}$ . Эти два вектора смещения по поверхности образуют на ней параллелограмм, площадь которого по модулю равна (стр. 13):

$$dS = |d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2| = |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| dq^1 dq^2 = \sqrt{\mathbf{e}_1^2 \mathbf{e}_2^2 - (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2} dq^1 dq^2 = \sqrt{g} dq^1 dq^2.$$

Для вычисления модуля  $|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|$  использована формула (1.6), стр.13, а в последнем равенстве через  $g$  обозначен определитель метрического тензора  $g = \det g_{ij}$ . Интегрируя элемент поверхности  $dS = \sqrt{g} dq^1 dq^2$  по некоторой области изменения параметров  $(q^1, q^2)$  можно получить значение площади этой области поверхности.

При помощи касательных векторов можно определить единичный вектор:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|} = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{\sqrt{g}},$$

который является нормальным к поверхности (перпендикулярным к касательной плоскости).

## 6.2 Кривизна поверхности

Возьмём точку поверхности и проведём к ней *касательную плоскость*. Выберем систему координат так, чтобы оси  $x$  и  $y$  лежали в касательной плоскости, а ось  $z$  была ей перпендикулярна. Зададим уравнение поверхности при помощи значения высот  $z = f(x, y)$  над касательной плоскостью  $(x, y)$ . Если  $f(0, 0) = 0$ , тогда уравнение плоскости равно  $z = 0$ . Поэтому первые производные  $f(x, y)$  в точке касания равны нулю. Запишем разложение Тейлора до квадратичных членов:

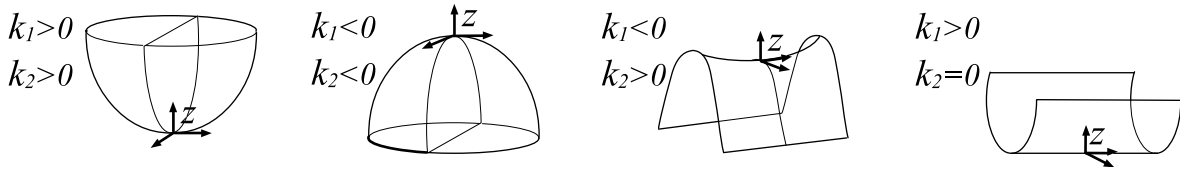
$$z \approx \frac{1}{2} [f_{xx} x^2 + 2f_{xy} xy + f_{yy} y^2] = \frac{1}{2} f_{ij} x^i x^j, \quad f_{ij} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

где  $f_{xx}$  – вторая производная по  $x$  в нуле, и т.д., а второе равенство записано при помощи координат  $x^i = (x, y)$  и симметричной матрицы  $f_{ij}$ , называемой *гесссианом*. При помощи поворотов осей координат  $(x, y)$  её всегда можно сделать диагональной (стр. 57, 76), с собственными значениями на диагонали. Они называются *главными кривизнами* и обозначаются  $k_1$  и  $k_2$ . В силу свойств собственных значений (стр. 57) след и определитель матрицы  $f_{ij}$  равны:

$$k_1 + k_2 = f_{xx} + f_{yy}, \quad K = k_1 k_2 = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

Определитель  $K = k_1 k_2$  называется *гауссовой кривизной поверхности*.

Чтобы диагонализировать матрицу  $f_{ij}$ , необходимо повернуть координатные оси  $(x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y})$ . В результате вдоль каждой оси в окрестности точки касания получатся параболы  $z = (k_1 \tilde{x}^2 + k_2 \tilde{y}^2)/2$ . Чем больше  $k_1$  и  $k_2$ , тем сильнее “выгнуты” (искривлены) параболы. В зависимости от знаков кривизн  $k_i$  возможны следующие варианты:



В первых двух случаях гауссова кривизна положительна:  $K = k_1 k_2 > 0$ , в третьем (седло) – отрицательна:  $K < 0$ . Для цилиндрической поверхности  $K = 0$ . Это принципиально отличает цилиндр от других поверхностей. Его можно, разрезав, без “комканий” развернуть в плоскость, имеющую нулевую кривизну. Со сферой, седлом, гиперboloидом и другими поверхностями так поступить нельзя. Говорят, что они, в отличие от цилиндра, конуса или плоскости, обладают внутренней кривизной  $K$ .

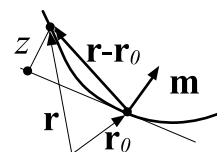
Кривизны  $k_1$  и  $k_2$  определены выше для точки которой касается плоскость  $(x, y)$ . Найдём их для произвольной точки поверхности.

• Разложим параметрическое уравнение поверхности в ряд Тейлора в точке  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\bar{q}^1, \bar{q}^2)$  до квадратичных слагаемых:

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0 + \mathbf{e}_i (q^i - \bar{q}^i) + \frac{1}{2} \partial_i \mathbf{e}_j (q^i - \bar{q}^i)(q^j - \bar{q}^j),$$

где  $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{r}$  и  $\partial_i \mathbf{e}_j = \partial_i \partial_j \mathbf{r} = \partial_j \mathbf{e}_i$ . По  $i$  и  $j$  – сумма. Первые два члена в разложении – это уравнение касательной плоскости. Расстояние от неё до поверхности будет равно  $z$  (в смысле предыдущих рассуждений):

$$z \approx (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{2} (\mathbf{m} \cdot \partial_i \mathbf{e}_j) (q^i - \bar{q}^i)(q^j - \bar{q}^j).$$



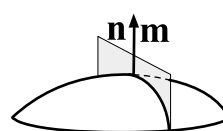
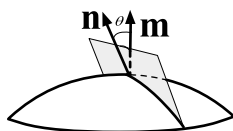
Величины  $\mathbf{B} = b_{ij} = \mathbf{m} \partial_i \mathbf{e}_j$  называют коэффициентами *второй квадратичной формы*. Они симметричны, так как  $\partial_i \mathbf{e}_j = \partial_j \mathbf{e}_i$ . Перейдя от координат  $(q^1, q^2)$  к декартовым  $(x^1, x^2)$  в касательной плоскости, можно диагонализировать  $b_{ij}$  ( $\leq \text{Н}_{143}$ ). При этом главные кривизны  $k_1$  и  $k_2$  оказываются решениями *характеристического уравнения* ( $\mathbf{G} = g_{ij}$ ):

$$\det(\mathbf{B} - k\mathbf{G}) = 0. \quad (6.1)$$

• Рассечём поверхность некоторой плоскостью. Их пересечением будет линия, лежащая на поверхности. Построим к одной из точек этой линии нормальный к поверхности вектор  $\mathbf{m}$ . От этой же точки отложим длину линии  $s$ . В натуральной параметризации  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  (см. стр. 19) кривизна линии равна  $k = |\mathbf{r}''(s)|$ . Линия лежит на поверхности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2)$ , и вдоль неё точки поверхности зависят от  $s$ , т.е.  $q^i = q^i(s)$ :

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \frac{dq^i}{ds} = \mathbf{e}_i q'^i, \quad \mathbf{r}'' = (\partial_j \mathbf{e}_i) q'^i q'^j + \mathbf{e}_i q''^i.$$

Вектор  $\mathbf{n} = \mathbf{r}''/k$  лежит в секущей плоскости, которая является соприкасающейся к кривой (см. стр. 20).



Угол между единичными векторами  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  равен  $\theta$  и  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{m} = 0$ , поэтому:

$$k \cos \theta = k \mathbf{m} \mathbf{n} = \mathbf{m} \mathbf{r}'' = (\mathbf{m} \cdot \partial_i \mathbf{e}_j) q'^i q'^j = \frac{b_{ij} dq^i dq^j}{dl^2} = \frac{b_{ij} dq^i dq^j}{g_{pr} dq^p dq^r}.$$

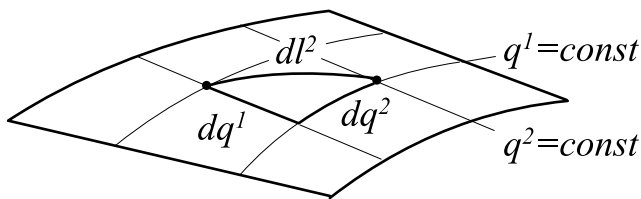
Если плоскость проходит через вектор нормали ( $\theta = 0$ ), то отношение второй и первой квадратичных форм равно *кривизне линии*  $k$ , отсекаемой плоскостью на поверхности. Смещения  $dq^i = (dq^1, dq^2)$  определяют ориентацию секущей плоскости, проходящей через вектор  $\mathbf{m}$ .

### 6.3 Геометрия поверхности

Линия в пространстве обладает определёнными характеристиками: кривизной и кручением. Это внешние к линии понятия. Всегда можно выбрать параметризацию, при которой длина искривлённой линии изменяется так же как и на прямой. Поэтому говорят, что линия не обладает внутренней геометрией и её можно “разогнуть” в прямую.

Для сферы это уже не так, и её нельзя “распрямить” в плоскость. Следствием этого является то, что никаким изменением параметризации (выбором координат на сфере) её метрика не может превратиться в метрику плоскости. В качестве упражнения ( $\leq N_{128}$ ) предлагается найти касательные векторы на сфере  $\mathbf{r} = a \{s_\theta c_\phi, s_\theta s_\phi, c_\theta\}$  и проверить, что они приводят к следующему расстоянию на её поверхности:  $dl^2 = a^2 [(d\theta)^2 + s_\theta^2 (d\phi)^2]$ . Выбрав другую параметризацию, мы получим другую метрику. Но никакой выбор координат *не позволит* привести метрику к евклидовому виду  $dl^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ . В этом состоит принципиальное отличие искривлённого пространства (2-мерная сфера) от плоского пространства (2-мерная плоскость  $(x, y)$ ).

Представим себе “плоскатики” – существ, живущих в 2-мерном мире на некоторой поверхности, например, сфере. Для них не существует третьего измерения и они не могут вырваться за пределы своего 2-мерного пространства. Пусть плоскатики очень маленькие так, что сначала они не замечают кривизны своего пространства. Они могут взять “маленький” эталон длины и, откладывая его, измерять расстояние между двумя точками. Отрезком прямой они назовут такую линию, длина которой минимальна. Окружностью будет множество точек, равноудалённых от данной (центра). Они могут ввести понятие угла, и т.д. Если выясняется, что в их мире для треугольников теорема Пифагора не выполняется, то это означает, что они “живут” не на плоскости, а в искривлённом пространстве с неплоской *внутренней геометрией*.



$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

$$dl^2 = g_{ij} dq^i dq^j.$$

Ключевым объектом, который определяет геометрию мира плоскатики, является метрика (метрические коэффициенты)  $g_{ij}$ . При данном выборе координат (способа нумерации точек пространства)  $g_{ij}$  определяют значение расстояния между двумя бесконечно близкими точками.



Выбор координат может быть произволен, поэтому плоскатики могут ввести понятие контравариантных и ковариантных компонент вектора, которые преобразуются при смене координат, как  $dq^i$  и  $\partial_i$ . Естественно, так как пространство 2-мерно, то компонент вектора будет только две.

Имея метрический тензор, по аналогии с евклидовым пространством можно записать символы Кристоффеля (стр. 83):

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kp} \Gamma_{p,ij}, \quad \Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

и с их помощью определить параллельный перенос вектора в пространстве плоскатики вдоль смещения  $dq^k$  (стр. 87):

$$A^i \mapsto A^i - \Gamma_{jk}^i A^j dq^k, \quad A_i \mapsto A_i + \Gamma_{ik}^j A_j dq^k.$$

Символы Кристоффеля определяют также уравнение кратчайшей линии между двумя точками – “прямой” в пространстве плоскатики (стр. 86):

$$\frac{d^2 q^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{ds} \frac{dq^j}{ds} = 0.$$

При параллельном переносе длина вектора  $A_i$  не изменяется. Не изменяется также его угол с вектором касательной  $u^i = dq^i/ds$  к геодезической:

$$d(A_i u^i) = u^i dA_i + A_i du^i = u^i \Gamma_{ik}^j A_j dq^k - A_i \Gamma_{jk}^i u^j u^k ds = 0,$$

где для  $dA_i$  подставлено изменение компонент при параллельном переносе, а для  $du^i = (d^2 q/ds^2) ds$  – уравнение геодезической.

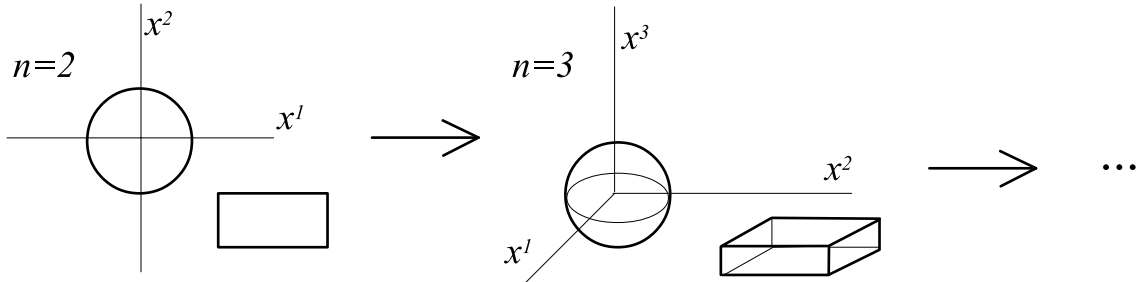
С точки зрения 3-мерного евклидового пространства, в которое вложена поверхность, вектор плоскатики при параллельном переносе всё время остаётся касательным к поверхности, так как изменяются только две его координаты в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ . Третья компонента вдоль вектора нормали  $\mathbf{m}$  равна нулю (ниже первый рисунок):



В отличие от евклидового пространства, параллельно перенесённый вектор по поверхности вдоль замкнутого контура не обязательно совпадёт с начальным вектором. Выше на втором рисунке показан подобный перенос на сфере, приводящий к вектору, направленному в противоположном направлении от исходного.

## 6.4 Размерность пространства

Аналогично геометрии на поверхности (2-мерное пространство) можно рассматривать геометрии пространств размерности  $n > 2$ . "Проще всего" представить себе  $n$ -мерное евклидово пространство:



Оно имеет  $n$  попарно перпендикулярных координатных осей, вдоль которых откладываются декартовы координаты  $\mathbf{r} = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ .

Кривая в пространстве – это однопараметрическая функция  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ . Если  $n > 2$ , то 2-мерной поверхностью является двухпараметрическая функция  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2)$ . Аналогично определяется 3-мерная поверхность, и т.д. Поверхность размерности  $n - 1$  называется *гиперповерхностью*.

Пусть при данных метрических коэффициентах  $g_{ij}(q)$ , определяющих геометрию  $m$ -мерной поверхности, существует такой минимальный набор  $n$  функций  $x^1(q^1, \dots, q^m), \dots, x^n(q^1, \dots, q^m)$ , что:

$$dl^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2 = g_{ij} dq^i dq^j,$$

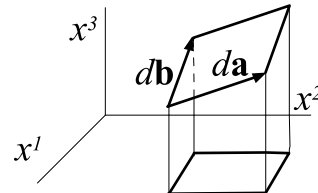
где сумма по  $i, j$  идёт от 1 до  $m$ . Тогда говорят, что  $m$ -мерная поверхность  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, \dots, q^m)$  вложена в  $n$ -мерное евклидово пространство.

Существует теорема, утверждающая, что  $m$ -мерное пространство с достаточно произвольной внутренней геометрией всегда можно рассматривать, как  $m$ -мерную поверхность, локально вложенную в  $n$ -мерное евклидово пространство. Стоит однако иметь в виду, что для подобного вложения иногда могут потребоваться размерности  $n$  много большие, чем  $m$  (хотя, например, для  $m$ -мерной сферы достаточно  $n = m + 1$ ).

В 3-мерном пространстве плоскость всегда можно пересечь перпендикулярной прямой в единственном направлении. Уже в 4-мерном пространстве это не так, и к 2-мерной плоскости можно провести две различные перпендикулярные прямые (например, плоскости  $(x^1, x^2)$  перпендикулярны оси  $x^3, x^4$ , которые, в свою очередь, перпендикулярны друг другу). Поэтому говорить о *векторе* площади  $d\mathbf{S} = d\mathbf{a} \times d\mathbf{b}$  параллелограмма, построенного на двух малых векторах  $d\mathbf{a}, d\mathbf{b}$ , уже нельзя.

В 3-мерном пространстве, если векторы параллелограмма спроектированы на координатную плоскость, например,  $(x, y)$ , то площадь проекции будет равна  $da^x db^y - da^y db^x$  (стр. 13). Аналогично в  $n$ -мерном евклидовом пространстве проекция 2-мерного параллелограмма на плоскость  $(x^i, x^j)$  равна определителю:

$$dS^{ij} = \begin{vmatrix} da^i & da^j \\ db^i & db^j \end{vmatrix} = da^i db^j - da^j db^i.$$



Таким образом, элемент поверхности в  $n$ -мерном евклидовом пространстве является тензором, а не вектором. Его компоненты характеризуют все возможные проекции ромба на координатные плоскости  $(x^i, x^j)$ .

Аналогично определяется тензор “площади” 3-мерной поверхности, построенной на трёх векторах в  $n$ -мерном пространстве:

$$dS^{ijk} = \begin{vmatrix} da^i & da^j & da^k \\ db^i & db^j & db^k \\ dc^i & dc^j & dc^k \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим в 4-мерном пространстве 4-вектор  $da^i$  с компонентами, равными  $\{da^x, da^y, da^z, da^w\}$ . Введём 3-вектор  $d\mathbf{a} = \{da^x, da^y, da^z\}$ , и аналогично для  $d\mathbf{b}$  и  $d\mathbf{c}$ . Тогда:

$$dS^{123} = d\mathbf{a} \cdot [d\mathbf{b} \times d\mathbf{c}].$$

Таким образом, для 4-мерного пространства  $dS^{123}$  будет элементом 3-мерного объёма, являющегося в этом пространстве гиперповерхностью.

Соответственно,  $dS^{ijk}$  являются проекциями не на плоскости (как для 2-мерного ромба  $dS^{ij}$ ), а на гиперплоскости  $(x^i, x^j, x^k)$ , перпендикулярные четвёртой оси. В нашем 3-мерном восприятии пространства это будут различные 3-объёмы.

Тензоры  $dS^{ij}$  и  $dS^{ijk}$  являются *антисимметричными тензорами*, и при перестановке любых двух индексов появляется знак минус. В случае 2-мерной поверхности в 3-мерном евклидовом пространстве при помощи тензора Леви-Чевиты в декартовых координатах (все индексы внизу!) из  $dS_{ij}$  можно сделать вектор  $d\mathbf{S}$ :

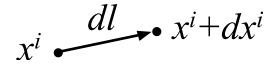
$$dS_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} dS_{jk} = \{dS_{23}, dS_{31}, dS_{12}\}.$$

Мы можем говорить о величине  $d\mathbf{S}$  только потому, что антисимметричный тензор  $dS^{ij}$  в 3-мерном пространстве имеет только 3 ненулевые независимые компоненты, которые оказываются компонентами вектора  $d\mathbf{S}$ .

## 6.5 Геометрия пространства

Пространство имеет размерность  $n$ , если его точки могут быть пронумерованы при помощи  $n$  произвольно заданных координат  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ . В каждой точке пространства может быть задан вектор  $A^i$ . При замене координат его компоненты изменяются в соответствии с законами тензорных преобразований (стр. 74). Предполагается, что расстояние между двумя бесконечно близкими точками мало и полностью определяется симметричными коэффициентами метрического тензора:

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

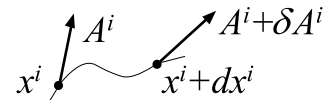


От одних координат можно перейти к другим при помощи непрерывных, дифференцируемых и независимых функций. Расстояние  $dl$  между двумя бесконечно близкими точками при смене координат не меняется (инвариантно), но  $g_{ij}$  при этом, вообще говоря, изменяются.

Хотя расстояние определяется между 2-я точками, коэффициенты метрического тензора относятся к *одной точке*. Они определяют связь компонент вектора  $A_i = g_{ij} A^j$  и его длину  $A^2 = g_{ij} A^i A^j$  в *данной точке*. Под бесконечно малым расстоянием подразумевается *длина вектора*, указывающего направление смещения. Тем не менее этот вектор задан в одной точке (можно представлять касательный к сфере в данной точке вектор).

Складывать и вычитать векторы (и тензоры) можно только в той точке пространства, где они определены. Чтобы можно было вычесть два вектора, заданных в “соседних” точках пространства, необходимо один из них перенести в “точку сравнения”. Если разность координат между точками равна  $dx^k$ , то при “*параллельном переносе вектора*” его компоненты изменяются  $A^i \mapsto A^i + \delta A^i$ . Изменение  $\delta A^i$  определяется символами Кристоффеля, которые также называются *коэффициентами связности*:

$$\delta A^i = -\Gamma_{jk}^i A^j dx^k.$$



Геометрия пространства считается полностью заданной, если в данной системе координат определены метрический тензор  $g_{ij}$  и связность  $\Gamma_{ij}^k$ .

В силу своего определения метрический тензор является симметричным  $g_{ij}$ . Нижние индексы символов Кристоффеля в  $\delta A^i$  входят неравновесным образом, поэтому в *общем случае* не предполагается их симметричность. Свойства пространства определяются  $(n^2 + n)/2$  функциями  $g_{ij}$  и  $n^3$  функциями  $\Gamma_{jk}^i$ . Дополнительные условия, накладываемые на эти функции, сужают класс возможных геометрий.

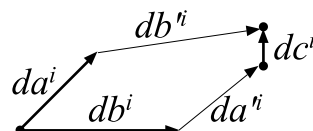
Это общее свойство любых математических или физических теорий. Чем больше мы используем независимых исходных аксиом, тем более частная теория при этом получается. Уменьшение числа аксиом, наоборот, приводит к более общим теориям.

Например, если мы потребуем, чтобы скалярное произведение векторов  $g_{ij}A^iB^j$  не изменялось при параллельном переносе из точки  $x^i$  в точку  $x^i + dx^i$ , то получится следующая связь [ $(\leq \text{Н}_{123})$ , стр. 201)]:

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik}. \quad (6.2)$$

Ещё один пример. Пусть  $da^i$  и  $db^i$  – два бесконечно малых смещения в пространстве, отложенные от данной точки  $x^i$ . Построим параллелограмм, перенеся вектор  $da^i$  параллельно вдоль  $db^i$ , а вектор  $db^i$ , соответственно, вдоль  $da^i$ . В результате получатся два новых вектора:

$$\begin{aligned} da'^i &= da^i - \Gamma_{jk}^i da^j db^k \\ db'^i &= db^i - \Gamma_{jk}^i db^j da^k. \end{aligned}$$



При произвольных связностях параллелограмм может не замкнуться, т.е. два перенесенных смещения окажутся в различных точках, и противоположная от  $x^i$  вершина "расщепится" на величину  $dc^i$ :

$$dc^i = (x^i + da^i + db'^i) - (x^i + db^i + da'^i) = (\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i) da^j db^k = T_{jk}^i \Delta S^{jk},$$

где  $\Delta S^{ij} = da^i db^j - da^j db^i$  – проекция площади, построенной на векторах  $da^i$  и  $db^i$  на плоскость  $(i, j)$ , а  $T_{ij}^k$  называется *тензором кручения*:

$$T_{jk}^i = \frac{1}{2} (\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i).$$

Обозначив  $T_{k,ij} = g_{kp} T_{ij}^p$  и воспользовавшись (6.2), несложно получить выражение связности через метрику и кручение:

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) + T_{i,jk} + T_{j,ik} + T_{k,ij}.$$

Если потребовать (ввести дополнительную аксиому), чтобы параллелограмм при описанном выше построении замыкался ( $T_{k,ij} = 0$ ), мы получим более узкий класс геометрий *пространства без кручения*. В этом случае его свойства полностью определяются метрическим тензором  $g_{ij}$ . Класс геометрий с симметричными связностями:

$$\Gamma_{k,ij} = \Gamma_{k,ji} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \quad (6.3)$$

называется *римановыми геометриями*.

## 6.6 Тензор кривизны

• Плоское пространство отличается от искривлённого тем, что подходящим выбором координат его метрика  $dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j$  может быть преобразована в евклидову декартову метрику  $dl^2 = (d\tilde{x}^1)^2 + \dots + (d\tilde{x}^n)^2$ . Необходим критерий, позволяющий выяснить, когда это можно сделать. Рассмотрим ковариантную производную (стр. 84):

$$D_p A^i = \partial_p A^i + \Gamma_{jp}^i A^j.$$

В декартовых координатах евклидового пространства  $\Gamma_{jp}^i = 0$ ,  $D_p = \partial_p$  и, так как частные производные коммутируют (перестановочны), выражение  $(D_p D_q - D_q D_p)A^i$  будет равно нулю. Это тензор, поэтому равенство его нулю в одной системе координат означает тождественное равенство нулю в любой другой системе. Если же пространство неевклидово, этот тензор будет отличен от нуля. Запишем производную:

$$D_p(D_q A^i) = D_p(\partial_q A^i + \Gamma_{jq}^i A^j).$$

Выражение в скобках является тензором типа (1,1), поэтому (стр. 85):

$$D_p(D_q A^i) = \partial_p(\partial_q A^i + \Gamma_{jq}^i A^j) + \Gamma_{kp}^i(\partial_q A^k + \Gamma_{jq}^k A^j) - \Gamma_{qp}^k(\partial_k A^i + \Gamma_{jk}^i A^j).$$

Раскроем производную произведения в первой скобке и опустим слагаемые (ниже многоточие) симметричные по  $p, q$ , так как они сократятся после вычитания  $D_q(D_p A^i)$  (считаем связность симметричной  $\Gamma_{pq}^i = \Gamma_{qp}^i$ ):

$$D_p(D_q A^i) = (\partial_p \Gamma_{jq}^i) A^j + \Gamma_{jq}^i \partial_p A^j + \Gamma_{kp}^i \partial_q A^k + \Gamma_{kp}^i \Gamma_{jq}^k A^j + \dots$$

Сумма второго и третьего слагаемых является симметричной по  $p$  и  $q$  величиной, поэтому производные по компонентам вектора сокращаются:

$$(D_p D_q - D_q D_p)A^i = R_{j,pq}^i A^j,$$

где коэффициенты при  $A^j$  называются *тензором кривизны*:

$$R_{j,pq}^i = \partial_p \Gamma_{jq}^i - \partial_q \Gamma_{jp}^i + \Gamma_{kp}^i \Gamma_{jq}^k - \Gamma_{kq}^i \Gamma_{jp}^k.$$

Скобки  $\{p \leftrightarrow q\}$  обозначают предшествующее выражение с переставленными индексами, т.е.:

$$R_{j,pq}^i = \partial_p \Gamma_{jq}^i - \partial_q \Gamma_{jp}^i + \Gamma_{kp}^i \Gamma_{jq}^k - \Gamma_{kq}^i \Gamma_{jp}^k. \quad (6.4)$$

Тензорность 4-х компонентной величины  $R_{j,pq}^i$  следует из того, что ковариантные производные являются тензорами, а в правой части находится свёртка  $R_{j,pq}^i$  и вектора  $A^j$ . Если все компоненты тензора  $R_{j,pq}^i$  равны нулю, то ковариантные производные коммутируют и пространство является евклидовым.

• Тензор кривизны имеет наглядный геометрический смысл. Рассмотрим два малых смещения в пространстве  $da^i$  и  $db^i$ . Переместим вектор параллельным образом сначала на  $da^i$  (см. (5.9), стр.87):

$$A^i \mapsto A'^i = A^i - \Gamma_{jp}^i(x) A^j da^p,$$

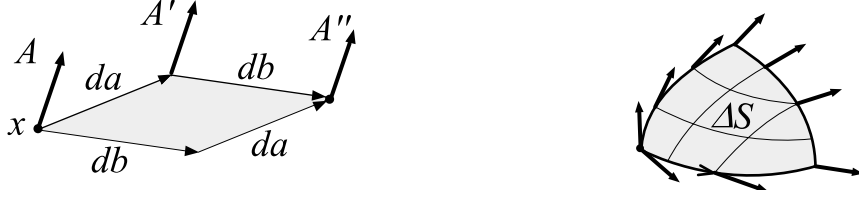
а затем на  $db^i$ :

$$A^i \mapsto A''^i = A'^i - \Gamma_{kq}^i(x + da) A'^k db^q,$$

где учтено, что в точке  $x^i + da^i$  связности изменились. Подставляя  $A'^i$  из первого выражения во второе, имеем:

$$A^i \mapsto A''^i = A^i - \Gamma_{jp}^i(x) A^j da^p - \Gamma_{kq}^i(x + da) (A^k - \Gamma_{jp}^k(x) A^j da^p) db^q,$$

см. левый рисунок:



Разложим коэффициенты связности в ряд Тейлора:

$$\Gamma_{kq}^i(x + da) \approx \Gamma_{kq}^i + \partial_p \Gamma_{kq}^i da^p,$$

где величины без указания аргументов относятся к начальной точке  $x^i$ . Пренебрегая членами третьего порядка малости по смещениям  $da$ ,  $db$ , получаем:

$$A^i \mapsto A''^i = A^i - \Gamma_{jp}^i A^j (da^p + db^p) - (\partial_p \Gamma_{jq}^i - \Gamma_{kq}^i \Gamma_{jp}^k) A^j da^p db^q.$$

Если бы вектор переносился сначала вдоль  $db^p$ , а затем вдоль  $da^p$ , то получилось бы выражение с переставленными  $a$  и  $b$  (переименовываем  $p \leftrightarrow q$ ):

$$A^i \mapsto A'''^i = A^i - \Gamma_{jp}^i A^j (db^p + da^p) - (\partial_q \Gamma_{jp}^i - \Gamma_{kp}^i \Gamma_{jq}^k) A^j db^q da^p.$$

Вычитая эти два выражения, получаем изменение вектора при его переносе вдоль малого замкнутого контура:

$$\Delta A^i = -R_{j,pq}^i A^j da^p db^q = -\frac{1}{2} R_{j,pq}^i A^j \Delta S^{pq},$$

где  $\Delta S^{pq} = da^p db^q - da^q db^p$  – тензор площади контура (параллелограмма) и учтено, что  $R_{j,pq}^i$  антисимметричен по индексам  $p, q$ .

Таким образом, тензор кривизны характеризует изменение компонент вектора при его переносе по бесконечно малому замкнутому контуру. Чем больше кривизна и площадь, тем сильнее изменяются компоненты вектора.

## 6.7 Свойства тензора кривизны

- При помощи метрического тензора опустим в тензоре кривизны

$$R^i_{j,pq} = \partial_p \Gamma^i_{jq} + \Gamma^i_{kp} \Gamma^k_{jq} - \{p \leftrightarrow q\}$$

индекс  $i$  вниз:

$$g_{ik} \partial_p \Gamma^k_{jq} + \Gamma_{i,kp} \Gamma^k_{jq} = \partial_p (g_{ik} \Gamma^k_{jq}) + (\Gamma_{i,kp} - \partial_p g_{ik}) \Gamma^k_{jq}.$$

Выразим связности через метрический тензор (6.2), стр. 109:

$$\Gamma_{i,kp} - \partial_p g_{ik} = -\Gamma_{k,ip}.$$

Аналогично, в производную  $\partial_p \Gamma_{i,jq}$  подставим выражение  $\Gamma_{i,jq}$  через метрические тензоры (6.3). В результате (опуская симметричные  $\partial_p \partial_q$ ):

$$R_{ij,pq} = \frac{1}{2} (\partial_p \partial_j g_{iq} - \partial_p \partial_i g_{jq}) - \Gamma_{k,ip} \Gamma^k_{jq} - \{p \leftrightarrow q\} \quad (6.5)$$

или

$$R_{ij,pq} = \frac{1}{2} (\partial_p \partial_j g_{iq} + \partial_q \partial_i g_{jp} - \partial_p \partial_i g_{jq} - \partial_q \partial_j g_{ip}) - g_{lm} (\Gamma^l_{ip} \Gamma^m_{jq} - \Gamma^l_{iq} \Gamma^m_{jp}).$$

Прямой проверкой можно проверить, что тензор  $R_{ij,pq}$  антисимметричен по первой и второй паре индексов:

$$R_{ij,pq} = -R_{ji,pq} = -R_{ij,qp} = R_{ji,qp}$$

и не изменяется при перестановке первой пары индексов со второй:

$$R_{ij,pq} = R_{pq,ij}.$$

Кроме этого, сумма циклических перестановок по *любым трём* индексам (ниже последние три индекса) равна нулю:

$$R_{ij,pq} + R_{ip,qj} + R_{iq,jp} = 0.$$

Справедливо также дифференциальное *тождество Бианки*:

$$D_k R^i_{j,pq} + D_q R^i_{j,kp} + D_p R^i_{j,qk} = 0,$$

в котором два индекса тензора кривизны фиксированны, а по  $(k, p, q)$  проводится циклическая перестановка. Для доказательства напомним, что связности не являются тензорами ( $\leq N_9$ ). В данной точке пространства можно выбрать систему координат, в которой все связности обращаются в ноль  $\Gamma^i_{kj} = 0$  (но не обязательно их производные). В такой системе координат и в такой точке:

$$D_k R^i_{j,pq} = \partial_k R^i_{j,pq} = \partial_k \partial_p \Gamma^i_{jq} - \partial_k \partial_q \Gamma^i_{jp}.$$

При помощи этого соотношения проверяется тождество Бианки. В силу тензорности оно будет справедливо в любой другой системе координат.



• Тензор кривизны  $R_{ij,pq}$  можно свернуть по паре индексов, получив тензор второго ранга. По паре антисимметричных индексов это делать бессмысленно, так как получится ноль. Поэтому определим *тензор Риччи* свёрткой первого и третьего индексов:

$$R_{jq} = R^i_{j,iq} = \partial_i \Gamma^i_{jq} - \partial_q \Gamma^i_{ji} + \Gamma^i_{ki} \Gamma^k_{jq} - \Gamma^i_{kq} \Gamma^k_{ji}.$$

Напомним, что свёртка связности выражается через производную метрического тензора (стр. 92):

$$\partial_q \Gamma^i_{ji} = \partial_q \left( \frac{\partial_j g}{2g} \right) = \frac{\partial_q \partial_j g}{2g} - \frac{\partial_q g \partial_j g}{2g^2}.$$

Поэтому тензор Риччи симметричен  $R_{jq} = R_{qj}$ . Ещё одна его свёртка приводит к скаляру, называемому скалярной *кривизной пространства*:

$$R = g^{jq} R_{jq} = g^{ip} g^{jq} R_{ij,pq}.$$

Сворачивая пары индексов  $(i, q)$  и  $(j, p)$  в тождестве Бианки, получаем:

$$D_k (g^{jp} R^i_{j,pi}) + D_i (g^{jp} R^i_{j,kp}) + D_p (g^{jp} R^i_{j,ik}) = 0,$$

где учтено, что в силу теоремы Риччи (стр. 85) метрический тензор можно вносить и выносить из-под ковариантной производной. Переставим индексы с учётом свойств симметрии ( $R^i_{j,pi} = -R^i_{j,ip}$ , и т.д.):

$$-D_k R + D_i R^i_k + D_p R^p_k = 0,$$

или, так как  $R$  – скаляр, окончательно:

$$D_i R^i_k = \frac{1}{2} \partial_k R.$$

Производная тензора Риччи может быть записана в виде следующего тождества:

$$D_i (G^i_j + \Lambda \delta^i_j) = 0, \quad G^i_j = R^i_j - \frac{1}{2} \delta^i_j R, \quad (6.6)$$

где  $\Lambda$  – некоторая константа, а  $G^i_j$  – *тензор Эйнштейна*. Именно это тождество привело в своё время Альберта Эйнштейна к построению уравнений гравитационного взаимодействия в общей теории относительности. Свойства вещества определяются тензором энергии-импульса  $T^{ij}$ . Он должен удовлетворять уравнению непрерывности  $D_i T^{ij} = 0$ . По гипотезе Эйнштейна материя влияет на геометрию пространства-времени. Уравнение непрерывности согласуется с (6.6), если:

$$G_{ij} + \Lambda g_{ij} = \chi T_{ij},$$

где  $\chi$  – ещё одна константа. Это и есть уравнения гравитации Эйнштейна.

## Задачи

- ( $\leq N_{128}$ ) Найти касательные векторы на сфере  $\mathbf{r} = a \{s_\theta c_\phi, s_\theta s_\phi, c_\theta\}$  и метрику. Определить главные кривизны.
- ( $\leq N_{129}$ ) Найти длину  $L$  окружности радиуса  $r$  на поверхности сферы с радиусом  $a$ . Вычислить площадь круга  $S$ , ограниченного этой окружностью. При каком радиусе  $r$  площадь максимальна? Найти первые поправки к евклидовым выражениям  $L = 2\pi r$ ,  $S = \pi r^2$ .
- ( $\leq N_{130}$ ) Пусть из южного полюса сферы проведена прямая, пересекающая некоторую точку сферы. Считать, что её координаты являются декартовыми координатами точки пересечения прямой и плоскости, касающейся северного полюса. Найти метрику сферы в этих координатах.
- ( $\leq N_{131}$ ) Аналогично ( $\leq N_{130}$ ) спроектировать точки северного полушария из центра сферы на плоскость, касательную северному полюсу (*координаты Бельтрами*). Найти метрику в этом случае. Во что проецируется прямая на сфере?
- ( $\leq N_{132}$ ) Доказать, что стороны  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и угол  $\gamma$  треугольника на сфере связаны следующим образом:  $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$ .
- ( $\leq N_{133}$ ) Найти связи между сторонами и углами прямоугольного сферического треугольника (теорема Пифагора, проекции гипотенузы).
- ( $\leq N_{134}$ ) Для сферического треугольника с углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  доказать теорему синусов:  $\sin a / \sin \alpha = \sin b / \sin \beta = \sin c / \sin \gamma$ .
- ( $\leq N_{135}$ ) Кратчайшее расстояние на сфере (отрезок) – сегмент большой окружности. Записать его уравнение. Воспользоваться поворотом начальной точки на угол  $\alpha$  при помощи матрицы  $R_{ij}$  (3.6), стр 59.
- ( $\leq N_{136}$ ) Записать уравнение поверхности цилиндра, ось симметрии которого направлена вдоль оси  $z$ . Найти гауссову кривизну.
- ( $\leq N_{137}$ ) Выразить первую  $g_{ij}$  и вторую  $b_{ij}$  квадратичные формы при задании поверхности при помощи высот  $\mathbf{r} = \{x, y, f(x, y)\}$ .
- ( $\leq N_{138}$ ) Выразить гауссову кривизну через определители первой и второй квадратичной форм. Подставить их значение из ( $\leq N_{137}$ ).
- ( $\leq N_{139}$ ) Рассмотреть поверхность:  $\mathbf{r} = \{f(z) \cos \phi, f(z) \sin \phi, z\}$ , получаемую в результате вращения кривой вокруг оси  $z$  (при каждом  $z$  – свой радиус  $f(z)$ ). Найти её первую и вторую квадратичные формы.
- ( $\leq N_{140}$ ) Найти кривизны  $k_1$  и  $k_2$  поверхности вращений ( $\leq N_{139}$ ). Для каких поверхностей равны нулю: 1)  $K = k_1 k_2$ ; 2)  $(k_1 + k_2)/2$ .

- ( $\leq$  Н<sub>141</sub>) Тор (бублик) получается при вращении окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности (но вне неё). Найти параметрическое представление тора, метрику и нормаль.
- ( $\leq$  Н<sub>142</sub>) Найти кривизны тора. Проанализировать гауссову кривизну при различных значениях угла  $\theta$ . Вычислить площадь тора.
- ( $\leq$  Н<sub>143</sub>) Вывести характеристическое уравнение (6.1), стр.103, перейдя от криволинейных координат к декартовым.
- ( $\leq$  Н<sub>144</sub>) Доказать, что в 2-мерии скалярная кривизна  $R = 2R_{12,12}/g$ .
- ( $\leq$  Н<sub>145</sub>) Сколько независимых компонент тензора кривизны в 3-мерном и 4-мерном пространстве?
- ( $\leq$  Н<sub>146</sub>) Найти коэффициенты разложения производных  $\partial_i \mathbf{e}_j$  и  $\partial_i \mathbf{m}$  по базису  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{m})$  (т.н. *дериwационные формулы*).
- ( $\leq$  Н<sub>147</sub>) Доказать, что в 2-мерном пространстве скалярная кривизна равна удвоенной кривизне Гаусса. Выбрать плоскость  $(x, y)$ , касательную к поверхности, и использовать представление поверхности  $z = f(x, y)$ .
- ( $\leq$  Н<sub>148</sub>) Найти символы Кристоффеля и тензор кривизны для 2-мерной сферы единичного радиуса с метрикой  $dl^2 = d\theta^2 + s_\theta^2 d\phi^2$ .
- ( $\leq$  Н<sub>149</sub>) Решить уравнение геодезической на сфере в координатах  $(\theta, \phi)$ .
- ( $\leq$  Н<sub>150</sub>) Рассмотреть  $n$ -мерную сферу  $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = a^2$  радиуса  $a$  в  $n + 1$ -мерном евклидовом пространстве с декартовыми координатами  $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2$ . Исключив координату  $x_{n+1}$ , найти  $g_{ij}$  и  $g^{ij}$ .
- ( $\leq$  Н<sub>151</sub>) Вычислить для  $n$ -мерной сферы из предыдущей задачи символы Кристоффеля  $\Gamma_{k,ij}$  и  $\Gamma_{ij}^k$ .
- ( $\leq$  Н<sub>152</sub>) Вычислить для  $n$ -мерной сферы из предыдущих двух задач тензор кривизны, тензор Риччи и скалярную кривизну.
- ( $\leq$  Н<sub>153</sub>) Вычислить  $R_{ij,pq}$ ,  $R_{jq}$  и  $R$  для  $n$ -мерной сферы, метрика которой записана в стереографических координатах ( $\leq$  Н<sub>130</sub>).
- ( $\leq$  Н<sub>154</sub>) Записать уравнение геодезической на поверхности  $n$ -мерной сферы в координатах Бельтрами ( $\leq$  Н<sub>131</sub>).
- ( $\leq$  Н<sub>155</sub>) Выразить тензор Риччи  $R_{\alpha\beta}$  4-мерного пространства-времени через 3-мерный тензор Риччи  $\tilde{R}_{ij}$  для  $ds^2 = dt^2 - a^2(t) \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j$ , где 3-мерные  $\tilde{g}_{ij}$  не зависят от времени, а латинские индексы  $i, j = 1 \dots 3$  (теория Большого Взрыва). Рассмотреть 3-мерное пространство с постоянной кривизной  $\tilde{R}_{ij} = 2K \tilde{g}_{ij}$ , где  $K = 1, 0, -1$ .



## Глава 7

# Дифференциальные формы

Дифференциальные формы - это простой и очень эффективный математический аппарат. Он позволяет при помощи одной формулы единым образом записать интегральные теоремы Гаусса и Стокса и лёгким движением руки получить правильные выражения для площади, объёма, ротора и дивергенции в криволинейных координатах. Этот инструмент существенно упрощает вычисления в дифференциальной геометрии, где приходится находить символы Кристоффеля и тензор кривизны со множеством компонент. При использовании дифференциальных форм сразу получаются ненулевые компоненты этих величин.

Используя векторные обозначения, простые законы физики можно записать в “безиндексной форме”. В более сложных случаях уже требуются тензоры, и в формулах появляется множество индексов. Обозначения дифференциальных форм позволяют снова избавиться от индексов, придав многим физическим законам очень элегантный и компактный вид. Тем не менее, чтобы формы не показались слишком абстрактными математическими объектами, мы начнём работать с их компонентами в привычных тензорных обозначениях, и лишь затем постепенно будем избавляться от индексов.

## 7.1 Формы

• Введём базис  $\mathbf{e}_i$ , определяющий разложение вектора бесконечно малого смещения в пространстве при изменении координат  $q^i$ :

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i dq^i.$$

Обозначим вектор градиента скалярной функции  $\nabla f$  при помощи жирной буквы  $\mathbf{d}f$ . Обозначения  $\nabla f$  и  $\mathbf{d}f$  полностью эквивалентны. В произвольных криволинейных координатах со *взаимным* базисом  $\mathbf{e}^i$

$$\mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial q^i} \mathbf{e}^i = \partial_i f \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{d}f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q^1}, \frac{\partial f}{\partial q^2}, \frac{\partial f}{\partial q^3} \right\}, \quad (7.1)$$

где в фигурных скобках перечислены *ковариантные компоненты* вектора. Естественно, символ  $\mathbf{d}$  не стоит путать с дифференциалом функции:

$$df = \mathbf{d}f \cdot d\mathbf{r} = (\partial_i f \mathbf{e}^i) \cdot (\mathbf{e}_j dq^j) = \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i.$$

Градиент  $\mathbf{d}f$  определяет *1-форму дифференциала*. Это означает, что его свёртка с конкретным смещением в пространстве  $d\mathbf{r}$  даёт число, равное бесконечно малому изменению функции  $df$  в этом направлении. В общем случае *1-форма*  $\omega$  – это линейная функция, которая каждому вектору ставит в соответствие определённое вещественное число. Если вектор  $\mathbf{a}$  задан контравариантными компонентами  $a^i$ , то 1-форма (функция от вектора) может быть записана следующим образом:  $\omega(\mathbf{a}) = \omega_i a^i$ .

В примере с градиентом скалярной функции  $\mathbf{d}f$  – это *имя* 1-формы. Её *компоненты*  $(\mathbf{d}f)_i$  равны частным производным (7.1). Аргументом 1-формы выступает бесконечно малое смещение  $d\mathbf{r}$ . Результат вычисления 1-формы – это число:  $\mathbf{d}f(d\mathbf{r}) = (\mathbf{d}f)_i (d\mathbf{r})^i = df$ , равное дифференциалу.

В данной системе координат  $(q^1, q^2, q^3)$  ковариантные компоненты вектора градиента от каждой координаты равны [см. (7.1)]:

$$\mathbf{d}q^1 = \{1, 0, 0\}; \quad \mathbf{d}q^2 = \{0, 1, 0\}; \quad \mathbf{d}q^3 = \{0, 0, 1\}. \quad (7.2)$$

Подчеркнём ещё раз:  $\mathbf{d}q^i$  – это *градиент*, а не *дифференциал*, поэтому его компоненты не являются бесконечно малыми величинами!

Так как  $\mathbf{d}f = (\mathbf{d}f)_i \mathbf{e}^i$ , то из (7.2) следует, что градиент от координат есть не что иное, как *ещё одно обозначение* векторов взаимного базиса:

$$\mathbf{d}q^i \equiv \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{d}q^i \cdot \mathbf{e}_j \equiv \mathbf{d}q^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i.$$

Обозначение  $\mathbf{d}q^i(\mathbf{e}_j)$  напоминает, что  $\mathbf{d}q^i$  – это 1-форма, т.е. линейная функция от  $\mathbf{e}_j$ . Её значение равно обычному числу  $\delta_j^i$ .

• Из ковариантных компонент двух векторов можно получить тензор типа  $(0, 2)$  при помощи *тензорного произведения*:  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta$ . Аналогично можно определить *косое произведение* векторов, как антисимметричный тензор:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_{\alpha\beta} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha.$$

Для градиентов координат имеем:

$$(\mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j)_{\alpha\beta} = (\mathbf{d}q^i)_\alpha (\mathbf{d}q^j)_\beta - (\mathbf{d}q^i)_\beta (\mathbf{d}q^j)_\alpha.$$

Верхние индексы  $i$  и  $j$  – это номера координат (или векторов взаимного базиса). Собственно к тензору относятся нижние индексы  $\alpha$  и  $\beta$ . Запишем компоненты этих тензоров в явном виде в 3-мерном пространстве:

$$\mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}q^2 \wedge \mathbf{d}q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Например, учитывая компоненты (7.2) для элемента  $(\mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}q^2)_{12}$ , получаем:  $(\{1, 0, 0\}_1 \{0, 1, 0\}_2 - \{1, 0, 0\}_2 \{0, 1, 0\}_1) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$ .

В силу определения косое произведение является антисимметричным:

$$\mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j = -\mathbf{d}q^j \wedge \mathbf{d}q^i,$$

а косое произведение одинаковых координат равно нулю (точнее, матрице со всеми нулевыми компонентами):  $\mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}q^1 = \mathbf{d}q^2 \wedge \mathbf{d}q^2 = \mathbf{d}q^3 \wedge \mathbf{d}q^3 = \mathbf{0}$ .

Рассмотрим антисимметричный тензор с двумя индексами  $F_{ij} = -F_{ji}$ :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Он определяется тремя величинами  $F_{12}$ ,  $F_{13}$  и  $F_{23}$ , которые можно использовать для разложения  $\mathbf{F}$  по полученным выше *матрицам*  $3 \times 3$ :

$$(\mathbf{F})_{\alpha\beta} = F_{12} (\mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}q^2)_{\alpha\beta} + F_{13} (\mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}q^3)_{\alpha\beta} + F_{23} (\mathbf{d}q^2 \wedge \mathbf{d}q^3)_{\alpha\beta}.$$

Так как  $F_{ij}$  и косое произведение антисимметричны, можно одновременно переставлять их индексы:  $F_{12} \mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}q^2 = F_{21} \mathbf{d}q^2 \wedge \mathbf{d}q^1$ , поэтому:

$$\mathbf{F} = \sum_{i < j} F_{ij} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j = \frac{1}{2} F_{ij} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j,$$

где, как обычно, по повторяющимся индексам  $i, j$  проводится суммирование без указания знака суммы. Такое представление антисимметричного тензора называется *дифференциальной 2-формой*. Разложение вектора по взаимному базису  $\mathbf{A} = A_i \mathbf{d}q^i$  является *дифференциальной 1-формой*.

## 7.2 Замена координат

При смене системы координат градиент от координаты (как *взаимный базис*:  $\mathbf{d}q^i = \mathbf{e}^i$ ), преобразуется аналогично дифференциалу:

$$\mathbf{d}\tilde{q}^i = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j = \partial_j \tilde{q}^i \mathbf{d}q^j,$$

что оправдывает введенное обозначение  $\mathbf{d}$ . Рассмотрим декартовую и полярную системы координат (стр. 64) в 2-мерном пространстве:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r c_\phi \\ y = r s_\phi \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{d}x = \partial_r x \mathbf{d}r + \partial_\phi x \mathbf{d}\phi = c_\phi \mathbf{d}r - r s_\phi \mathbf{d}\phi \\ \mathbf{d}y = \partial_r y \mathbf{d}r + \partial_\phi y \mathbf{d}\phi = s_\phi \mathbf{d}r + r c_\phi \mathbf{d}\phi. \end{array}$$

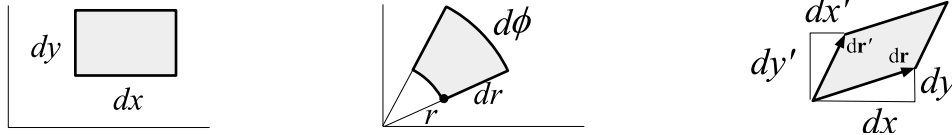
Перемножим градиенты координат косым образом:

$$\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y = (c_\phi \mathbf{d}r - r s_\phi \mathbf{d}\phi) \wedge (s_\phi \mathbf{d}r + r c_\phi \mathbf{d}\phi) = r c_\phi^2 \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\phi - r s_\phi^2 \mathbf{d}\phi \wedge \mathbf{d}r,$$

где учтено, что  $\mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}r = \mathbf{d}\phi \wedge \mathbf{d}\phi = 0$ . Переставляя  $\mathbf{d}\phi \wedge \mathbf{d}r = -\mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\phi$ , окончательно получаем:

$$\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y = r \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\phi. \quad (7.3)$$

Это соотношение определяет *2-форму площади* в декартовых (слева) и в полярных (справа) координатах. Действительно, в полярных координатах длина дуги равна  $r d\phi$ , и умножая её на  $dr$ , получаем площадь:



Естественно подобная мнемоника является огрублением смысла уравнения (7.3). На самом деле (7.3) – это не произведение дифференциалов, а тензорное выражение типа (0,2). Однако, если его свернуть с двумя бесконечно малыми смещениями ( $d\mathbf{r} = \{dx, dy\}$  и  $d\mathbf{r}' = \{dx', dy'\}$ ), мы получим правильное выражение для соответствующей площади. В декартовых координатах:

$$(\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y)_{\alpha\beta} d\mathbf{r}^\alpha d\mathbf{r}'^\beta = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \end{pmatrix} = dx dy' - dy dx'.$$

Таким образом, парное косое произведение  $\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j$  имеет смысл 2-формы (антисимметричной функции от двух векторов), при помощи которой можно получать значения проекции площади параллелограмма (построенного на этих векторах) на координатные плоскости ( $x^i, x^j$ ). В функциональной форме это можно записать при помощи антисимметричной функции  $S(d\mathbf{r}, d\mathbf{r}') = \text{площадь}$ , где  $S = \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j$  – 2-форма.



• В произвольных криволинейных координатах  $q^i = (q^1, q^2, q^3)$  роль декартовых плоскостей играют поверхности, возникающие при последовательном фиксировании значения одной из координат. Так, координатная поверхность  $(q^1, q^2)$  имеет уравнение  $q^3 = \text{const}$ . В декартовых координатах пространство разбивается на прямоугольные ячейки. В криволинейных координатах ячейки имеют различный размер и ориентацию. Например, в сферических координатах это набор вложенных сфер ( $r = \text{const}$ ), разрезанных плоскостями параллелей ( $\theta = \text{const}$ ) и меридианов ( $\phi = \text{const}$ ). Ориентация каждой такой ячейки определяется векторами криволинейного базиса  $\mathbf{e}_i$ . 2-форма поверхности, например,  $r d\mathbf{r} \wedge d\phi$  в цилиндрической системе, определяет ориентацию координатной плоскости. Свертка этой формы с двумя векторами малых смещений определяет проекцию параллелограмма, построенного на этих векторах, на координатную плоскость криволинейной системы координат. В 3-х измерениях возможны 3 комбинации  $\{\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z, \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x, \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y\}$ , которые условно можно считать компонентами 3-вектора площади  $(\mathbf{d}S)^i$ . Хотя на самом деле это 2-формы (антисимметричные тензоры  $(\mathbf{d}S)_{\alpha\beta}^i$ ).

• Аналогично косому произведению двух сомножителей в пространстве с размерностью  $n > 2$  можно определить тройное косое произведение, антисимметричное при перестановке любых сомножителей. Например, в 3-мерных декартовых координатах, пользуясь свойством парного косого умножения, переставим  $\mathbf{d}x$  и  $\mathbf{d}z$ :

$$\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z = -\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}z = \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x = -\mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}x.$$

В компонентах оно определяется аналогично двойному косому произведению при помощи антисимметризации компонент градиентов по всем трём индексам. Это удобно записать при помощи определителя:

$$(\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z)_{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} (\mathbf{d}x)_{\alpha} & (\mathbf{d}y)_{\alpha} & (\mathbf{d}z)_{\alpha} \\ (\mathbf{d}x)_{\beta} & (\mathbf{d}y)_{\beta} & (\mathbf{d}z)_{\beta} \\ (\mathbf{d}x)_{\gamma} & (\mathbf{d}y)_{\gamma} & (\mathbf{d}z)_{\gamma} \end{vmatrix}.$$

Так как  $\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}x = 0$ , то в  $n$ -мерном пространстве возможно косое произведение не более чем  $n$  градиентов.

Если двойное косое произведение определяет 2-форму проекции параллелограмма на координатную поверхность (площадь), то тройное косое произведение – это 3-форма проекции параллелепипеда, построенного на трёх бесконечно малых смещениях  $d\mathbf{r}$ ,  $d\mathbf{r}'$  и  $d\mathbf{r}''$ . В 3-мерном пространстве это будет объём. Антисимметризация косого произведения при переходе от декартовой системы координат к криволинейной будет давать правильный якобиан этого объёма (множитель при  $\mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}q^2 \wedge \mathbf{d}q^3$ ).

### 7.3 Внешнее дифференцирование

• Дифференциальные формы позволяют в едином виде записать аналоги градиента, ротора и дивергенции для пространств произвольной размерности. Напомним, что ротор (как векторное произведение оператора набла на вектор) определён только в 3-мерном пространстве. Тем не менее, существуют его аналоги для размерности  $n > 3$ .

Введём ещё одну операцию, т.н. *внешнее дифференцирование*. Для разложения некоторого вектора по базису  $\mathbf{d}q^i$  (1-форма):

$$\mathbf{A} = A_j \mathbf{d}q^j$$

внешнее дифференцирование определяется следующим образом:

$$d\mathbf{A} = dA_j \wedge \mathbf{d}q^j = \partial_i A_j \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j.$$

Другими словами, берётся градиент от компонент вектора  $A_j$  и косым образом умножается на уже стоящие в выражении 1-формы градиенты. Заметим, что для обозначения внешнего дифференцирования мы выбрали букву  $d$  в прямом нежирном шрифте, чтобы отличать её и от градиента ( $\mathbf{d}$ ), и от обычного дифференциала ( $d$ ). Впрочем, часто не делают подобных различий в обозначениях.

Аналогично определяется внешнее дифференцирование 2-форм:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{ij} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j.$$

Берётся градиент и косым образом слева умножается на уже существующее косое произведение:

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{2} dF_{ij} \wedge \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j = \frac{1}{2} \partial_k F_{ij} \mathbf{d}q^k \wedge \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j.$$

Двойное применение операции внешнего дифференцирования всегда приводит к нулевому результату:

$$d^2 = 0.$$

Продemonстрируем это на примере двойного дифференциала 1-формы:

$$d^2 \mathbf{A} = d(d\mathbf{A}) = d(\partial_i A_j \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j) = \partial_k \partial_i A_j \mathbf{d}q^k \wedge \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j = 0.$$

Так как частные производные по  $k$ -той и  $i$ -той координате перестановочны (симметричны), а косое произведение антисимметрично, то это выражение равно нулю.

- Пусть в декартовых координатах 1-форма равна:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{d}x + A_y \mathbf{d}y + A_z \mathbf{d}z.$$

Найдём её внешний дифференциал  $d\mathbf{A}$ :

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \mathbf{d}y + \frac{\partial A_x}{\partial z} \mathbf{d}z\right) \wedge \mathbf{d}x + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \mathbf{d}x + \frac{\partial A_y}{\partial z} \mathbf{d}z\right) \wedge \mathbf{d}y + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{d}x + \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{d}y\right) \wedge \mathbf{d}z,$$

где опущены члены в дифференциалах, которые в косом произведении дадут ноль  $\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}x = 0$ , и т.д. Переставляя местами градиенты координат, получаем:

$$d\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y.$$

Таким образом, в 3-мерном пространстве внешнее дифференцирование 1-формы вектора равно скалярному произведению вектора ротора на “вектор” площади  $d\mathbf{A} = [\nabla \times \mathbf{A}]_i (\mathbf{d}S)^i$ , имеющей проекции на координатные плоскости  $(\mathbf{d}S)^i = \{\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z, \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x, \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y\}$ . В 4-мерном пространстве это уже будет не вектор, а тензор, но, тем не менее, компоненты подобной 2-формы будут являться обобщённым вариантом ротора.

Аналогично, пусть есть 2-форма, которую в 3-мерном пространстве мы запишем в векторном виде, интерпретируя, как “поток” векторного поля:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z + A_y \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x + A_z \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y.$$

Проводя внешнее дифференцирование, получаем произведение дивергенции на “объём”:

$$d\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z = (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV.$$

Операторное тождество  $d^2 = 0$  соответствует равенству нулю ротора от градиента  $\nabla \times (\nabla f) = 0$ , если под внешним дифференцированием скалярной функции (0-форма) понимать просто её градиент:

$$df \equiv \mathbf{d}f = \partial_i f \mathbf{d}q^i.$$

Тогда, беря от такого градиента ещё одно внешнее дифференцирование, получим  $d^2 f = \partial_j \partial_i f \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j = 0$ . Аналогично,  $\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{A}] = 0$  (дивергенция ротора равна нулю) является следствием тождества  $d^2 = 0$ .

Таким образом, градиент, ротор и дивергенция в 3-мерном пространстве получаются в виде внешних дифференцирований 0, 1 и 2 - форм:  $d(0\text{-форма}) \mapsto \text{градиент}$ ;  $d(1\text{-форма}) \mapsto \text{ротор}$ ;  $d(2\text{-форма}) \mapsto \text{дивергенция}$ . В 4-мерном пространстве эта цепочка будет на единицу длиннее.

## 7.4 Криволинейное дифференцирование

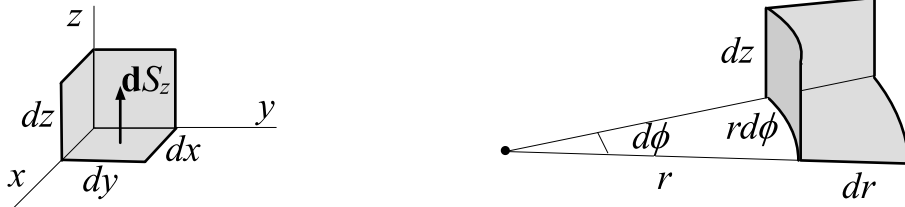
В пятой главе мы получили выражения для градиента, ротора и дивергенции в различных ортогональных координатах. В таких координатах метрика записывается при помощи коэффициентов Ламе:

$$dl^2 = (h_1 dq^1)^2 + (h_2 dq^2)^2 + (h_3 dq^3)^2.$$

Если, например,  $q^1, q^2 = \text{const}$ , то длина бесконечно малого отрезка, возникающего при изменении третьей координаты, равна  $dl_3 = dl = h_3 dq^3$ . В 3-мерном пространстве можно построить три элементарные площадки, равные произведению  $dl_1 dl_2$  и т.д. Поэтому определим “вектор поверхности” (на самом деле это 2-форма!) следующим образом:

$$\mathbf{dS} = \left\{ \underbrace{h_2 h_3 \mathbf{d}q^2 \wedge \mathbf{d}q^3}_{q^1=\text{const}}, \underbrace{h_3 h_1 \mathbf{d}q^3 \wedge \mathbf{d}q^1}_{q^2=\text{const}}, \underbrace{h_1 h_2 \mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}q^2}_{q^3=\text{const}} \right\}.$$

Последовательность координат в косых произведениях определена так, чтобы получалась правая ориентация системы координат. Например, в декартовом базисе  $\mathbf{dS} = \{\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z, \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x, \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y\}$ , что соответствует элементарным площадкам, лежащим в координатных плоскостях. Перпендикуляр к ним направлен вдоль “незадействованной” оси. В цилиндрических координатах  $q^i = \{r, \phi, z\}$  коэффициенты Ламе равны  $h_i = \{1, r, 1\}$ , поэтому  $\mathbf{dS} = \{r \mathbf{d}\phi \wedge \mathbf{d}z, \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}r, r \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\phi\}$ :



Определим 1-форму, как аналог скалярного произведения вектора на элемент смещения в пространстве:

$$\mathbf{A} = a_1 \underbrace{h_1 \mathbf{d}q^1}_{\mathbf{d}l_1} + a_2 \underbrace{h_2 \mathbf{d}q^2}_{\mathbf{d}l_2} + a_3 \underbrace{h_3 \mathbf{d}q^3}_{\mathbf{d}l_3}.$$

В качестве смещений взяты физические длины  $h_1 dq^1$ , и т.д. Градиенты координат – это вектор взаимного базиса  $\mathbf{d}q^i = \mathbf{e}^i$ , поэтому выше записано разложение вектора по этому базису  $\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}^i$ . Физические компоненты проекций вектора на ортонормированный базис  $\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_i / |\mathbf{e}_i|$  обозначены малыми буквами  $a_i$  (стр. 95). Они связаны с компонентами разложения на криволинейный базис с верхними и нижними индексами следующим образом:  $a_1 = h_1 A^1 = h_1 A_1 g^{11} = A_1 / h_1$ , или  $A_1 = a_1 h_1$ . В результате в 1-форме  $\mathbf{A}$  возникают коэффициенты  $h_i$ .

Аналогично определим 2-форму, как поток векторного поля в криволинейных координатах:

$$\mathbf{F} = a_1 \underbrace{h_2 h_3 \mathbf{d}q^2 \wedge \mathbf{d}q^3}_{\mathbf{d}S^1} + a_2 \underbrace{h_3 h_1 \mathbf{d}q^3 \wedge \mathbf{d}q^1}_{\mathbf{d}S^2} + a_3 \underbrace{h_1 h_2 \mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}q^2}_{\mathbf{d}S^3}.$$

В этой форме проекции  $a_i$  вектора на ортонормированный базис  $\mathbf{n}_i$  умножаются на 2-формы “вектора” элемента площади  $\mathbf{d}S^i$ .

Получим из этих форм ротор и дивергенцию на примере цилиндрических координат. В этом случае  $h_i = \{1, r, 1\}$ , поэтому 1-форма имеет вид:

$$\mathbf{A} = a_r \mathbf{d}r + r a_\phi \mathbf{d}\phi + a_z \mathbf{d}z.$$

Внешний дифференциал  $\mathbf{d}\mathbf{A}$  равен:

$$\left[ \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \mathbf{d}\phi + \frac{\partial a_r}{\partial z} \mathbf{d}z \right] \wedge \mathbf{d}r + \left[ \frac{\partial(r a_\phi)}{\partial r} \mathbf{d}r + \frac{\partial(r a_\phi)}{\partial z} \mathbf{d}z \right] \wedge \mathbf{d}\phi + \left[ \frac{\partial a_z}{\partial r} \mathbf{d}r + \frac{\partial a_z}{\partial \phi} \mathbf{d}\phi \right] \wedge \mathbf{d}z,$$

где в квадратных скобках опущены дифференциалы, равные нулю, благодаря косому произведению. Перемножая слагаемые с учётом антисимметричности косого произведения, после их группировки получим поток ротора:

$$\mathbf{d}\mathbf{A} = [\nabla \times \mathbf{A}]_r \mathbf{d}S^r + [\nabla \times \mathbf{A}]_\phi \mathbf{d}S^\phi + [\nabla \times \mathbf{A}]_z \mathbf{d}S^z,$$

где компоненты ротора равны:

$$[\nabla \times \mathbf{A}]_i = \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \phi} - \frac{\partial a_\phi}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \right\},$$

что совпадает с выражением, полученным в ( $\leq$  Н<sub>111</sub>) на стр. 196.

Аналогично, для 2-формы:

$$\mathbf{F} = a_r r \mathbf{d}\phi \wedge \mathbf{d}z + a_\phi \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}r + a_z r \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\phi,$$

внешняя производная равна:

$$\mathbf{d}\mathbf{F} = \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\phi \wedge \mathbf{d}z + \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \mathbf{d}\phi \wedge \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}r + \frac{\partial(r a_z)}{\partial z} \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\phi.$$

Переставляя местами сомножители в косых произведениях, получаем дивергенцию:

$$\mathbf{d}\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{A}) \mathbf{d}V = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right] r \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\phi \wedge \mathbf{d}z,$$

умноженную на 3-форму объёма в цилиндрической системе координат.

## 7.5 Дуальные формы

• В  $n$ -мерном пространстве тензор  ${}^*F$  типа  $(0, n - k)$  называют *дуальным* к тензору  $F$  типа  $(k, 0)$ , если:

$${}^*F_{i_{k+1} \dots i_n} = \frac{1}{k!} E_{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n} F^{i_1 \dots i_k}.$$

В правой части определения идёт суммирование по первым  $k$  индексам антисимметричного *тензора* Леви-Чивиты. Оставшиеся  $n - k$  индексов образуют дуальный тензор. Напомним, что в произвольных криволинейных координатах тензор  $E_{ij \dots} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{ij \dots}$  и  $\varepsilon_{12 \dots n} = 1$ , а  $g$  – определитель метрического тензора. Звёздочку называют *оператором Ходжа* (не путать с комплексным сопряжением!). Операция дуализации, как и опускание индексов при помощи метрического тензора  $F_{ij} = g_{ip} g_{jq} F^{pq}$ , связывает два *различных* тензора. Однако принято их обозначать одинаковой буквой (в случае с дуальностью ставя слева звёздочку).

В 3-мерном пространстве существует две операции дуализации:

$${}^*F_i = \frac{\sqrt{|g|}}{2} \varepsilon_{ipq} F^{pq}, \quad {}^*F_{ij} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{ijp} F^p,$$

где суммирование ведётся по последним индексам, что не принципиально, так как в данном случае  $\varepsilon_{ipq} = \varepsilon_{pqi}$ , и т.д. Распишем  ${}^*F_1$ :

$${}^*F_1 = \frac{\sqrt{|g|}}{2} (\varepsilon_{123} F^{23} + \varepsilon_{132} F^{32}) = \sqrt{|g|} F^{23}.$$

Поэтому компоненты вектора, дуального к тензору  $F^{ij}$ , равны:

$${}^*F_i = \sqrt{|g|} \{F^{23}, F^{31}, F^{12}\}.$$

Аналогично получается тензор  $(0,2)$  из вектора  $(1,0)$ :

$${}^*F_{ij} = \sqrt{|g|} \begin{pmatrix} 0 & F^3 & -F^2 \\ -F^3 & 0 & F^1 \\ F^2 & -F^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В 4-мерном пространстве операций дуализации на одну больше:

$${}^*F_i = -\frac{\sqrt{|g|}}{6} \varepsilon_{ipqr} F^{pqr}, \quad {}^*F_{ij} = \frac{\sqrt{|g|}}{2} \varepsilon_{ijpq} F^{pq}, \quad {}^*F_{ijk} = -\sqrt{|g|} \varepsilon_{ijkp} F^p.$$

Обратим внимание на знаки минус, связанные с нечётной перестановкой индексов суммирования в антисимметричном символе  $\varepsilon_{ijkl}$  в конце. Обычно в операции дуализации участвуют антисимметричные тензоры, так как симметричная часть тензора при свёртке с антисимметричным символом Леви-Чевиты даст 0.

• Косое произведение градиентов координат и образуемые с их помощью формы также являются тензорами. Поэтому к ним применима операция дуализации. Распишем, например,  $\mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy}$  в 3-мерных декартовых координатах. В этом случае нижние и верхние индексы совпадают. Используя матрицы на стр. 119 и полученные компоненты  ${}^*F_i$ , имеем:

$${}^*(\mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy})_i = \{(\mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy})_{23}, (\mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy})_{31}, (\mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy})_{12}\} = \{0, 0, 1\} = \mathbf{dz}.$$

Аналогично для остальных двух пар косых произведений. В результате:

$${}^*(\mathbf{dy} \wedge \mathbf{dz}) = \mathbf{dx}, \quad {}^*(\mathbf{dz} \wedge \mathbf{dx}) = \mathbf{dy}, \quad {}^*(\mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy}) = \mathbf{dz}.$$

Аналогично получаются операции  $({}^*\mathbf{dx})_{ij} = \varepsilon_{ij\alpha} (\mathbf{dx})_\alpha$ . Используя матрицу  ${}^*F_{ij}$  для  $(\mathbf{dx})_\alpha = \{1, 0, 0\}$ , получаем:

$${}^*\mathbf{dx} = \mathbf{dy} \wedge \mathbf{dz}, \quad {}^*\mathbf{dy} = \mathbf{dz} \wedge \mathbf{dx}, \quad {}^*\mathbf{dz} = \mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy}.$$

Таким образом, в данном случае операция двойной дуализации является единичной  ${}^{**}\mathbf{dx} = \mathbf{dx}$ , и т.д.

Можно применять дуализацию и к сумме тензоров, умноженных на числа. Например:

$${}^*\mathbf{A} = {}^*(A_x \mathbf{dx} + A_y \mathbf{dy} + A_z \mathbf{dz}) = A_x \mathbf{dy} \wedge \mathbf{dz} + A_y \mathbf{dz} \wedge \mathbf{dx} + A_z \mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy}.$$

Такая форма ("поток вектора через поверхность") была использована для получения дивергенции. Поэтому, если  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{dx} + A_y \mathbf{dy} + A_z \mathbf{dz}$ , то  $d\mathbf{A}$  является ротором, а  $d{}^*\mathbf{A}$  – дивергенцией. Это достаточно общее утверждение, применимое к произвольным размерностям пространства.

Таким образом, звезда Ходжа превращает 1-форму бесконечно малого смещения в пространстве в  $(n-1)$ -форму элемента гиперповерхности в  $n$ -мерном пространстве. В произвольных координатах необходимо помнить о метрическом тензоре. Если он диагонален  $g_{ij} = \text{diag}(h_1^2, h_2^2, h_3^2)$  с определителем  $g = (h_1 h_2 h_3)^2$ , то поднятие индексов  ${}^*F^i = g^{ij}({}^*F_j)$  сводится к делению на квадрат коэффициента Ламе:  ${}^*F^1 = {}^*F_1/h_1^2$ , и т.д. Поэтому

$${}^*F^i = \left\{ \frac{h_2 h_3}{h_1} F^{23}, \frac{h_3 h_1}{h_2} F^{31}, \frac{h_1 h_2}{h_3} F^{12} \right\}.$$

В частности, для перехода от линии к поверхности имеем:

$$h_1 {}^*dq^1 = h_2 h_3 dq^2 \wedge dq^3, \quad h_2 {}^*dq^2 = h_3 h_1 dq^3 \wedge dq^1, \quad h_3 {}^*dq^3 = h_1 h_2 dq^1 \wedge dq^2.$$

Слева стоят дуально сопряженные смещения в пространстве  $d\mathbf{l}_1 = h_1 d\mathbf{q}^1$ , а справа – перпендикулярные к ним бесконечно малые площадки.

## 7.6 Интегральные теоремы

• Выше мы видели, что внешнее дифференцирование 1-формы приводит к ротору, умноженному на элемент поверхности. С учётом теоремы Стокса (стр. 35) можно записать:

$$\int_L \underbrace{A_i dx^i}_{\mathbf{A}} = \int_S \underbrace{[\nabla \times \mathbf{A}] dS^i}_{d\mathbf{A}}.$$

Смещение вдоль “контура” равно  $dx^i$  и определяет 1-форму  $\mathbf{A}$ . Элемент “площади”  $dS^i = \{dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$  возникает при внешнем дифференцировании этой 1-формы. Кавычки у “контура” и “площади” напоминают, что полноценными контурами и площадями эти выражения станут при их свертке с вектором, касательным к контуру, или двумя векторами, образующими параллелограмм площади в окрестности каждой бесконечно малой области интегрирования.

Аналогично в формах записывается теорема Гаусса:

$$\int_S \underbrace{A_i \cdot dS^i}_{\mathbf{A}} = \int_V \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{A}) dV}_{d\mathbf{A}},$$

где элемент “объёма” равен  $dV = dx \wedge dy \wedge dz$ .

Эти соотношения можно представить в виде единой интегральной теоремы, которая объединяет теорему Гаусса и Стокса, а также справедлива для пространств произвольной размерности:

$$\int_{\partial D} \mathbf{A} = \int_D d\mathbf{A}, \quad (7.4)$$

где  $\mathbf{A}$  – некоторая форма (тензор, свёрнутый с косыми произведениями),  $D$  – область в пространстве, а  $\partial D$  – её граница. В 3-мерном пространстве, например,  $D$  может быть открытой поверхностью  $S$ , а  $\partial D$  – её границей  $L$ , или  $D$  – некоторый объём  $V$ , а  $\partial D$  – окружающая его замкнутая поверхность  $S$ . Размерность формы  $\mathbf{A}$  и  $\partial D$  должны совпадать.

В 4-мерном пространстве  $(x, y, z, w)$  определить поток вектора через 2-поверхность нельзя (компонент у вектора 4, а проекций элемента поверхности на координатные плоскости – 6). Но можно определить “поток” вектора “через” гиперповерхность (3-мерный объект!). Это будет 3-форма. Пусть в 4-мерном евклидовом пространстве есть 1-форма:

$$\mathbf{A} = A_x dx + A_y dy + A_z dz + A_w dw.$$

Её дуальное сопряжение равно

$$*\mathbf{A} = A_x dy \wedge dz \wedge dw - A_y dx \wedge dz \wedge dw + A_z dx \wedge dy \wedge dw - A_w dx \wedge dy \wedge dz,$$

где компоненты вектора умножаются на элементы 3-мерной площади.



Действительно, так как в  $(\mathbf{d}w)_\alpha = \{0, 0, 0, 1\} = \delta_{4\alpha}$  – единственная ненулевая компонента при  $\alpha = 4$ , то:

$$(*\mathbf{d}w)_{ijk} = -\varepsilon_{ijk\alpha} (\mathbf{d}w)_\alpha = -\varepsilon_{ijk4}.$$

С другой стороны,  $(\mathbf{d}x)_i = \delta_i^1$ ,  $(\mathbf{d}y)_i = \delta_i^2$ ,  $(\mathbf{d}z)_i = \delta_i^3$ , поэтому:

$$(\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z)_{ijk} = \begin{vmatrix} (\mathbf{d}x)_i & (\mathbf{d}y)_i & (\mathbf{d}z)_i \\ (\mathbf{d}x)_j & (\mathbf{d}y)_j & (\mathbf{d}z)_j \\ (\mathbf{d}x)_k & (\mathbf{d}y)_k & (\mathbf{d}z)_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_i^1 & \delta_i^2 & \delta_i^3 \\ \delta_j^1 & \delta_j^2 & \delta_j^3 \\ \delta_k^1 & \delta_k^2 & \delta_k^3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk4}.$$

Напомним ( $\leq$  Н<sub>78</sub>), что  $(\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z)_{123} = 1$ , а перестановка любых индексов меняет знак (свойство определителя при перестановке строк). В результате:

$$*\mathbf{d}w = -\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z.$$

Аналогично:

$$*\mathbf{d}x = \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}w, \quad *\mathbf{d}y = -\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}w, \quad *\mathbf{d}z = \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}w.$$

Внешнее дифференцирование сопряжённой формы  $*\mathbf{A}$  приводит к 4-мерной дивергенции  $\nabla \mathbf{A} = \partial_i A_i$ , умноженной на 4-объём  $\mathbf{d}V$ :

$$d*\mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_w}{\partial w} \right) \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}w.$$

Применяя интегральную теорему (7.4), можно записать 4-мерный вариант теоремы Гаусса:

$$\int_{\partial D} *\mathbf{A} = \int_D d*\mathbf{A}. \quad \Rightarrow \quad \int A_i dS^i = \int \partial_i A_i \mathbf{d}V.$$

Если же взять внешнее дифференцирование от исходной 1-формы, то получится 4-мерный аналог ротора  $d\mathbf{A} =$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y + \left[ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x + \left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z \\ & + \left[ \frac{\partial A_w}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial w} \right] \mathbf{d}w \wedge \mathbf{d}x + \left[ \frac{\partial A_y}{\partial w} - \frac{\partial A_w}{\partial y} \right] \mathbf{d}w \wedge \mathbf{d}y + \left[ \frac{\partial A_z}{\partial w} - \frac{\partial A_w}{\partial z} \right] \mathbf{d}w \wedge \mathbf{d}z. \end{aligned}$$

Соответственно, интегральная теорема (7.4) приводит к 4-мерной версии теоремы Стокса с интегрированием по контуру и 2-поверхности.

Напомним, что при интегрировании выражений с формами их необходимо свернуть с векторами смещения в пространстве, которые определяют контур, 2-поверхность, 3-поверхность, и т.д. В результате получатся обычные  $k$ -кратные интегралы.

## 7.7 Уравнения Картана

Количество компонент символов Кристоффеля и тензора кривизны быстро растёт с увеличением размерности пространства  $n$ . Даже для симметричной связности  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , прежде чем вычислять тензор кривизны  $R_{ij,pq}$ , необходимо получить  $n(n^2 + n)/2$  коэффициентов  $\Gamma_{ij}^k$ . Например, в теории гравитации Эйнштейна (4-мерное пространство-время) их будет 40. Дифференциальные формы заметно упрощают эти вычисления.

Определим при помощи метрического тензора  $g_{ij}$  и связностей  $\Gamma_{i,jk}$  следующие 1-формы (индексы – номера форм, а не их компоненты):

$$\omega_i = g_{ij} \mathbf{d}x^j, \quad \omega_{ij} = \Gamma_{i,jk} \mathbf{d}x^k.$$

Поднимая индекс, можно записать дополнительные 1-формы:

$$\omega^i = g^{ip} \omega_p = \mathbf{d}x^i, \quad \omega^i_j = g^{ip} \omega_{pj} = \Gamma_{jk}^i \mathbf{d}x^k.$$

Таким образом,  $\omega^i$  являются градиентами координат, а  $\omega^i_j$  содержат в качестве коэффициентов связности с верхним индексом. В общем случае формы  $\omega_{ij}$  не симметричны, поэтому обратим внимание на то, что в них поднимается именно первый индекс.

Вычислим следующее выражение:

$$\mathbf{d}\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \partial_p \Gamma_{jq}^i \mathbf{d}x^p \wedge \mathbf{d}x^q + \Gamma_{kp}^i \Gamma_{jq}^k \mathbf{d}x^p \wedge \mathbf{d}x^q.$$

В первом слагаемом записан внешний дифференциал для  $\omega^i_j = \Gamma_{jq}^i \mathbf{d}x^q$ . Второе слагаемое равно произведению форм. Сложим это выражение дважды, разделив на 2. Затем во втором слагаемом переименуем индексы  $p \leftrightarrow q$  (индекс  $p$  назовём  $q$ , и наоборот):

$$\frac{1}{2} (\partial_p \Gamma_{jq}^i + \Gamma_{kp}^i \Gamma_{jq}^k) \mathbf{d}x^p \wedge \mathbf{d}x^q + \frac{1}{2} (\partial_q \Gamma_{jp}^i + \Gamma_{kp}^i \Gamma_{jq}^k) \mathbf{d}x^q \wedge \mathbf{d}x^p.$$

Переставим во втором члене сомножители в косом произведении. В силу его антисимметричности получаем *структурное уравнение Картана*:

$$\mathbf{d}\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \frac{1}{2} R_{j,pq}^i \mathbf{d}x^p \wedge \mathbf{d}x^q,$$

где  $R_{j,pq}^i$  – тензор кривизны (6.4), стр. 110:

$$R_{j,pq}^i = \partial_p \Gamma_{jq}^i + \Gamma_{kp}^i \Gamma_{jq}^k - \{p \leftrightarrow q\}.$$

Если в  $n$ -мерном пространстве известно  $n^2$  форм  $\omega^i_j$ , то при вычислении левой части уравнения Картана получится 2-форма, коэффициенты которой будут являться компонентами тензора кривизны.

Для римановой геометрии с симметричными связностями несложно записать явное выражение *форм связности*  $\omega_{ij}$  через коэффициенты метрического тензора:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (dg_{ij} + \partial_j \omega_i - \partial_i \omega_j) = \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}) dx^k = \Gamma_{i,jk} dx^k.$$

Внешний дифференциал от метрических коэффициентов (0-форма) вычисляется обычным образом:  $dg_{ij} = \partial_k g_{ij} dx^k$ . Частные производные от форм  $\omega_i$  берутся только от коэффициентов этих форм:  $\partial_i \omega_j = \partial_i g_{jk} dx^k$ . На первый взгляд, первое равенство в определении  $\omega_{ij}$  не обладает особыми преимуществами перед явным выражением символов Кристоффеля  $\Gamma_{i,jk}$  через метрический тензор во втором равенстве. Однако определение  $n^2$  форм  $\omega_{ij}$  часто оказывается проще, чем перебор всех  $n(n^2 + n)/2$  индексов в связностях. В то же время коэффициенты в форме  $\omega_{ij}$  при  $dx^k$  дают ненулевые символы Кристоффеля (см. также стр. 91).

Проиллюстрируем это на примере метрики в 3-мерной сферической системе координат  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 s_\theta^2 d\phi^2$ . В этом случае метрический тензор диагонален:  $\omega_1 = g_{11} dx^1$ ,  $\omega_2 = g_{22} dx^2$ ,  $\omega_3 = g_{33} dx^3$ . Матрицу 1-форм  $\omega_{ij}$  можно записать в следующем явном виде:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} dg_{11} & \cdot & \cdot \\ \partial_1 g_{22} dx^2 - \partial_2 g_{11} dx^1 & dg_{22} & \cdot \\ \partial_1 g_{33} dx^3 - \partial_3 g_{11} dx^1 & \partial_2 g_{33} dx^3 - \partial_3 g_{22} dx^2 & dg_{33} \end{pmatrix},$$

где на месте точек стоят с обратным знаком элементы матрицы под диагональю (т.е. если  $i \neq j$ , то  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ ). Запишем 1-формы связности для сферических координат  $g_{11} = 1$ ,  $g_{22} = r^2$ ,  $g_{33} = r^2 s_\theta^2$ :

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -r d\theta & -r s_\theta^2 d\phi \\ r d\theta & r dr & -r^2 s_\theta c_\theta d\phi \\ r s_\theta^2 d\phi & r^2 s_\theta c_\theta d\phi & r s_\theta^2 dr + r^2 s_\theta c_\theta d\theta \end{pmatrix}.$$

По определению:

$$\omega_{ij} = \Gamma_{i,j1} dr + \Gamma_{i,j2} d\theta + \Gamma_{i,j3} d\phi,$$

поэтому коэффициенты при градиентах приводят к следующим ненулевым связностям:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,22} = -r, \quad \Gamma_{1,33} = -r s_\theta^2, \quad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = r, \quad \Gamma_{2,33} = -r^2 s_\theta c_\theta, \\ \Gamma_{3,13} = \Gamma_{3,31} = r s_\theta^2, \quad \Gamma_{3,23} = \Gamma_{3,32} = r^2 s_\theta c_\theta. \end{aligned}$$

Таким образом, вместо перебора 18 коэффициентов связности (с учётом их симметрии) мы сразу получили все их ненулевые значения. При помощи уравнения Картана предлагается проверить ( $\leq H_{176}$ ), что  $R^i_{j,pq} = 0$ .

## Задачи

• ( $\leq$  Н<sub>156</sub>) Записать тензорное произведение  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  двух векторов с ковариантными компонентами в явном матричном виде (3 измерения).

• ( $\leq$  Н<sub>157</sub>) Для векторов  $\mathbf{A} = \{1, 0, 2\}$  и  $\mathbf{B} = \{2, 1, 1\}$  найти матрицы  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$  и  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ .

• ( $\leq$  Н<sub>158</sub>) Доказать, что если  $\omega^k$  и  $\omega^p - k$  и  $p$ -формы соответственно, то справедливо тождество:  $\omega^k \wedge \omega^p = (-1)^{k \cdot p} \omega^p \wedge \omega^k$ .

• ( $\leq$  Н<sub>159</sub>) Доказать, что в 3-мерном пространстве тройное косое произведение  $(\mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy} \wedge \mathbf{dz})_{\alpha\beta\gamma}$  равно символу Леви-Чевиты  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ .

• ( $\leq$  Н<sub>160</sub>) Связать  $\mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy}$ ,  $\mathbf{dz} \wedge \mathbf{dx}$ ,  $\mathbf{dy} \wedge \mathbf{dz}$  с градиентами в сферической системе координат.

• ( $\leq$  Н<sub>161</sub>) Для предыдущей задачи, домножая на отсутствующий градиент, убедиться, что получится сферический элемент объёма.

• ( $\leq$  Н<sub>162</sub>) Вычислить внешние производные в 3-мерном пространстве от форм:  $xz \mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy}$ ,  $xyz \mathbf{dz}$ ,  $(x^2 + y^2 + z^2) \mathbf{dz}$ ,  $xyz \mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy} \wedge \mathbf{dz}$ .

• ( $\leq$  Н<sub>163</sub>) В 3-мерном пространстве  $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ . Показать, что аналог ротора в пространстве произвольной размерности также нулевой.

• ( $\leq$  Н<sub>164</sub>) Пусть  $f$  – скалярная функция (0-форма),  $\mathbf{A}$  – 1-форма, а  $\mathbf{F}$  – произвольная форма. Доказать, что:

$$d(f\mathbf{F}) = df \wedge \mathbf{F} + f d\mathbf{F}, \quad d(\mathbf{A} \wedge \mathbf{F}) = d\mathbf{A} \wedge \mathbf{F} - \mathbf{A} \wedge d\mathbf{F}.$$

• ( $\leq$  Н<sub>165</sub>) Доказать, что в 4-мерном пространстве:

$$(\mathbf{dx}^i \wedge \mathbf{dx}^j \wedge \mathbf{dx}^k)_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon^{ijk\mu} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}.$$

• ( $\leq$  Н<sub>166</sub>) Найти ротор и дивергенцию в сферической системе координат при помощи дифференциальных форм.

• ( $\leq$  Н<sub>167</sub>) Доказать, что в 4-мерном пространстве

$$*\mathbf{dx}^\mu = \frac{1}{3!} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} \mathbf{dx}^\alpha \wedge \mathbf{dx}^\beta \wedge \mathbf{dx}^\gamma.$$

• ( $\leq$  Н<sub>168</sub>) Доказать, что в 4-мерном пространстве

$$*(\mathbf{dx}^\alpha \wedge \mathbf{dx}^\beta) = \frac{\sqrt{|g|}}{2} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \mathbf{dx}^\sigma \wedge \mathbf{dx}^\tau.$$

• ( $\leq$  Н<sub>169</sub>) В 3-мерном пространстве дважды применить оператор Ходжа к вектору  $F_i$  и тензору  $F_{ij}$ .

- ( $\leq$  Н<sub>170</sub>) Доказать, что в  $n$ -мерном пространстве для тензора  $\mathbf{F}$  типа  $(k, 0)$  и  $^*\mathbf{F}$  типа  $(0, n - k)$  справедливо тождество:

$$^{**}\mathbf{F} = (-1)^{k(n-k)} \text{sign}(g) \mathbf{F}.$$

где  $\text{sign}(g)$  – знак определителя  $g$  метрического тензора.

- ( $\leq$  Н<sub>171</sub>) Ввести 1-форму потенциалов  $\mathbf{A} = A_\beta \mathbf{d}x^\beta$  и 2-форму напряжённостей  $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$ . Выразить  $\mathbf{F}$  и  $^*\mathbf{F}$  через поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ .

- ( $\leq$  Н<sub>172</sub>) Выразить сопряжение  $^*\mathbf{J}$  1-формы тока  $\mathbf{J} = j_\alpha \mathbf{d}x^\alpha$  через компоненты 4-вектора  $j^\alpha = (\rho, \mathbf{j})$ .

- ( $\leq$  Н<sub>173</sub>) Почему для 2-формы электромагнитного поля  $d\mathbf{F} = 0$ ? К каким уравнениям для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  это приводит?

- ( $\leq$  Н<sub>174</sub>) При помощи звезды Ходжа записать 2-форму электромагнитного поля  $^*\mathbf{F}$ . К каким уравнениям для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  приводит  $d^*\mathbf{F} = 4\pi^*\mathbf{J}$ ?

- ( $\leq$  Н<sub>175</sub>) Почему для  $d^*\mathbf{J} = 0$ ? Показать, что это уравнение является уравнением непрерывности электрического заряда.

- ( $\leq$  Н<sub>176</sub>) При помощи уравнений Картана доказать, что евклидова метрика в сферических координатах имеет нулевую кривизну.

- ( $\leq$  Н<sub>177</sub>) При помощи уравнений Картана найти связности и тензор кривизны для 2-мерной сферы с метрикой  $dl^2 = d\theta^2 + s_\theta^2 d\phi^2$ .

- ( $\leq$  Н<sub>178</sub>) Записать в явном виде матрицу  $\omega_{ij}$  для диагональной метрики ОТО:

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + g_{33} (dx^3)^2.$$

- ( $\leq$  Н<sub>179</sub>) Для описания эволюции однородной и изотропной Вселенной со сферической кривизной 3-мерного пространства в ОТО используется следующая метрика:

$$ds^2 = a^2(\eta) \{d\eta^2 - d\chi^2 - s_\chi^2 (d\theta^2 + s_\theta^2 d\phi^2)\}.$$

Найти 1-формы  $\omega_{ij}$ ,  $\omega_j^i$  и символы Кристоффеля.

- ( $\leq$  Н<sub>180</sub>) Найти тензор кривизны, тензор Риччи и скалярную кривизну для метрики из предыдущей задачи.

- ( $\leq$  Н<sub>181</sub>) Найти символы Кристоффеля  $\Gamma_{\gamma, \alpha\beta}$  и  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  для центрального гравитационного поля, описываемого в ОТО метрикой:

$$ds^2 = a(t, r) dt^2 - b(t, r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + s_\theta^2 d\phi^2).$$

- ( $\leq$  Н<sub>182</sub>) Найти тензор кривизны из предыдущей задачи, считая, что функции  $a$  и  $b$  зависят только от  $r$ .



## М: Векторы, тензоры и формы

Это приложение является факультативным. С одной стороны, его стоит прочесть физикам, которые планируют изучать книги, написанные математиками. В результате проработки приложения должно выработаться более общее понимание того, что такое вектор, тензор и форма с абстрактной точки зрения.

С другой стороны, математики узнают из приложения, какие упрощения для физиков были сделаны в этой Инструкции. В целях максимально быстрого овладения соответствующим аппаратом был существенно снижен уровень абстракции. Физики мыслят образами, а не греческим алфавитом.

Одним словом, это приложение является небольшим мостом между математической строгостью и физической прагматичностью.

## I Векторы и 1-формы

• *Вектор* – это абстрактный элемент векторного пространства  $\mathbb{V}$ , удовлетворяющий соответствующим алгебраическим аксиомам (стр.22). Следующий шаг в аксиоматике делается после введения *размерности* векторного пространства  $n = \dim \mathbb{V}$ . В  $n$ -мерном пространстве существует  $n$  базисных векторов  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , которые позволяют задавать (определять) любой вектор  $\mathbf{a}$  при помощи вещественных чисел  $a^i$  (контравариантных компонент):

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i.$$

*Скалярное произведение*  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  – это вещественнозначная, бинарная, линейная, симметричная функция векторов  $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}$ , которая любым двум векторам ставит в соответствие вещественное число. Иногда эта функция записывается в виде  $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Можно определить *метрику*, т.е. задать числа  $g_{ij}$ , равные скалярному произведению базисных векторов:

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \equiv g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

При помощи этих чисел (один раз заданных в данном базисе) мы можем *вычислять* скалярное произведение любых двух векторов (значение функции  $g$ ), если они заданы в этом же базисе при помощи компонент:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^i \mathbf{e}_i) \cdot (b^j \mathbf{e}_j) = g_{ij} a^i b^j.$$

Несмотря на название, метрика не имеет к геометрии никакого отношения, и пока речь идёт об алгебре. Геометрия появляется, когда вводят различные точки, связанные расстоянием, определяют параллельный перенос вектора (связь двух векторных пространств), и т.д.

*Один-форма* – это линейная вещественнозначная функция на векторах:  $\omega(\mathbf{a}) : \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}$ . Вектор или скалярное произведение можно задавать в компонентном виде при помощи чисел  $a^i$ ,  $g_{ij}$ . Точно так же в *данном базисе* можно выражать (определять) форму при помощи её компонент. Для этого вычисляются значения функции от базисных векторов:

$$\omega_i = \omega(\mathbf{e}_i).$$

Задав эти числа, можно вычислить 1-форму (найти значение функции) от любого вектора:

$$\omega(\mathbf{a}) = \omega(a^i \mathbf{e}_i) = a^i \omega(\mathbf{e}_i) = \omega_i a^i.$$

Поэтому как вектор  $\mathbf{a} = \{a^1, \dots, a^n\}$ , так и форму  $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  можно задать, перечислив  $n$  вещественных чисел (в данном базисе).



• От одного базиса  $\mathbf{e}_i$  можно переходить к другому базису  $\tilde{\mathbf{e}}_i$  при помощи набора  $n^2$  чисел (матрицы перехода):

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_j R^j_i.$$

Так как вектор  $\mathbf{a}$  при смене базиса не меняется, то меняются его компоненты:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = \tilde{a}^i \tilde{\mathbf{e}}_i, \quad a^i = R^i_j \tilde{a}^j.$$

При смене базиса пространства  $\mathbb{V}$  меняются и компоненты 1-форм:

$$\tilde{\omega}_i = \omega(\tilde{\mathbf{e}}_i) = \omega_j R^j_i.$$

Множество 1-форм (например, как все совокупности  $n$  вещественных чисел  $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ ), в свою очередь, образуют векторное пространство. Оно, в *общем* случае, не связано с исходным (к которому относятся аргументы формы) и называется *сопряжённым пространством*  $\mathbb{V}^*$ . Поэтому 1-формы иногда называют ковекторами. В этом сопряжённом векторном пространстве можно ввести *базисные 1-формы* (базисные ковекторы). Это такие  $n$  функций  $e^1(\cdot), \dots, e^n(\cdot)$ , которые дают компоненты вектора исходного пространства  $\mathbb{V}$ . Их же значения от базисных векторов пространства  $\mathbb{V}$  равны символу Кронекера:

$$e^i(\mathbf{a}) = a^i, \quad e^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j.$$

На сопряженном пространстве  $\mathbb{V}^*$  можно, в свою очередь, определить 1-формы  $\mathbb{V}^* \mapsto \mathbb{R}$ , как линейные вещественнозначные функции от ковекторов  $\omega$ ,  $e^i \in \mathbb{V}^*$ . Например, можно считать, что:

$$\mathbf{e}_i(\omega) = \omega_i, \quad \mathbf{e}_i(e^j) = \delta^j_i.$$

Аналогично можно говорить о *контравариантном метрическом тензоре*, как о функции на сопряжённом пространстве  $g^{ij} = {}^*g(e^i, e^j)$ .

В Инструкции были сделаны некоторые *упрощения* по сравнению с общим алгебраическим подходом. В декартовых координатах евклидоваго пространства (в “обычном” тензорном анализе) можно не различать верхние и нижние индексы. Аналогично мы считаем, что метрика задана, и поэтому не различаем исходное векторное пространство  $\mathbb{V}$  и ему сопряжённое  $\mathbb{V}^*$ , определяемое при помощи 1-форм:  $\mathbb{V}^* = \mathbb{V}$ . Эта некоторая потеря общности позволяет сократить число сущностей и операций между ними. Базисные 1-формы  $e^i$  мы считаем сопряжённым базисом  $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$ , где векторы  $\mathbf{e}^i \in \mathbb{V}$  и удовлетворяют соотношениям:

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j, \quad \mathbf{a} = a_i \mathbf{e}^i, \quad a_i = g_{ij} a^j, \quad g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j.$$

Таким образом, есть векторы только одного типа (из одного пространства) и единственная функция (операция) – скалярное произведение.

## II Тензоры как функции

• Тензор типа  $(k, m)$  может быть определён, как *полилинейная функция*  $T$  (линейная по каждому аргументу) от  $k$  векторов и  $m$  1-форм:

$$T : \underbrace{\mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V}}_m \times \underbrace{\mathbb{V}^* \times \dots \times \mathbb{V}^*}_k \mapsto \mathbb{R}.$$

Такое алгебраическое определение может быть приведено к “обычному” индексному виду, если вычислить эту функцию от базисных векторов пространства  $\mathbb{V}$  и базисных ковекторов ему сопряжённого пространства  $\mathbb{V}^*$ . Например, для  $(1,2)$ -тензора имеем набор чисел:

$$T_{jk}^i = T(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, e^i).$$

Если считать, что  $\mathbb{V}^* = \mathbb{V}$ , то в последнем аргументе функции необходимо также использовать жирный шрифт.

Таким образом, в общем подходе тензор  $(k, m)$  – это линейная функция  $k + m$  аргументов. Как и вектор или 1-форма в  $n$ -мерном пространстве, он может быть определён (задан) при помощи набора  $n^{k+m}$  чисел – компонент тензора. Сумма  $k + m$  называется *рангом тензора*.

Если задана матрица  $R^i_j$  перехода к новому базису, то она же определяет (в силу полилинейности функции  $T$ ) закон преобразования компонент тензора  $T_{jk}^i$ . Например, для тензора  $(0,2)$  имеем:

$$\tilde{T}_{ij} = T(\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j) = T(\mathbf{e}_k R^k_i, \mathbf{e}_l R^l_j) = R^k_i R^l_j T(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = R^k_i R^l_j T_{kl}.$$

Коэффициенты  $R^i_j$  вынесены за знак функции, так как она линейна по каждому аргументу. Абсолютно аналогично записываются преобразования в общем случае. При этом для базиса ковекторов сопряжённого пространства  $\mathbb{V}^*$  необходимо использовать преобразование, аналогичное преобразованию контравариантных компонент:

$$e^i = R^i_j \tilde{e}^j.$$

Тензор  $(0,1)$  является 1-формой. Тензор  $(1,0)$  – это вектор. Он становится функцией при задании 1-форм на ковекторах сопряжённого пространства:  $\mathbb{V}^* \mapsto \mathbb{R}$ . Т.е., если вещественнозначная функция на векторах  $\mathbb{V}$  является 1-формой, то вещественнозначная функция на ковекторах  $\mathbb{V}^*$  является вектором.

Скалярное произведение, как функция  $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , является 2-формой или  $(0,2)$  тензором. Тензор нулевого ранга – это просто вещественное число.

• *Тензорным произведением* называется произведение двух тензорных функций. Например, для тензоров  $A_{ij} = A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  и  $B^k = B(e^k)$  можно определить тензор  $(1,2)$ , т.е. функцию с тремя аргументами, следующим образом:

$$(A \otimes B)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, e^k) = A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) B(e^k).$$

Обратим внимание, что  $(A \otimes B)$  – это *имя* нового тензора (функции). Аргументы следуют, как обычно, в круглых скобках после имени функции. Компоненты получившегося тензора ранга 3 имеют 3 индекса и равны произведению компонент тензоров  $A$  и  $B$ :

$$(A \otimes B)_{ij}^k = A_{ij} B^k.$$

Тензорное произведение ассоциативно, но, вообще говоря, не коммутативно:

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C, \quad A \otimes B \neq B \otimes A.$$

Например, рассмотрим тензорное произведение двух векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  (точнее, двух  $(1,0)$  тензоров). Его результатом будет  $(2,0)$  тензор, определяемый в компонентном виде  $n^2$  числами:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{ij} = a^i b^j.$$

Если компоненты векторов различны, то получившаяся матрица компонент тензора  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  будет не симметрична, а  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{ij} \neq (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^{ij}$ .

Множество всех тензоров одного типа  $(k, m)$  образуют *векторное пространство* относительно сложения и умножения на вещественное число. В частности, при сложении компонент двух тензоров типа  $(1,2)$ :  $A_{jk}^i + B_{jk}^i$  и умножения на число:  $\lambda A_{jk}^i$  снова получаются компоненты некоторого тензора того же типа. На примере тензора  $(1,2)$  введём *базис* векторного пространства тензоров:

$$e^j \otimes e^k \otimes \mathbf{e}_i.$$

Любой тензор типа  $(2,1)$  может быть разложен по этому базису:

$$T = T_{jk}^i e^j \otimes e^k \otimes \mathbf{e}_i.$$

Напомним, что  $e^i$  являются базисными 1-формами (функциями на пространстве  $\mathbb{V}$ ), а  $\mathbf{e}_i$  – 1-формы на сопряжённом пространстве. Поэтому, чтобы получить компоненты тензора, надо вычислить функцию:

$$T(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q, e^r) = T_{jk}^i e^j(\mathbf{e}_p) e^k(\mathbf{e}_q) \mathbf{e}_i(e_r) = T_{jk}^i \delta_p^j \delta_q^k \delta_i^r = T_{pq}^r.$$

Аналогично записывается базис и разложение по нему для векторного пространства, задаваемого тензорами произвольного типа  $(k, m)$ .

### III Внешние формы и произведения

• *Внешняя форма* ( $\equiv m$ -форма или *кососимметрическая* или *антисимметрическая* форма) – это линейная функция  $m$  векторов, которая антисимметрична по всем своим аргументам. Например, для любой внешней 2-формы (бинарной функции) должно выполняться свойство:

$$\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\omega(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Таким образом, из класса бинарных линейных функций  $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbf{R}$  мы выделяем подкласс антисимметричных линейных функций, которые называем внешними формами. Аналогично для 3-формы:

$$\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\omega(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = \omega(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = -\omega(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Перестановка любых *двух* аргументов внешней формы должна изменить знак у значения функции. Примером внешней 3-формы является смешанное произведение  $\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$  в 3-мерном евклидовом пространстве.

Любую функцию можно “антисимметризовать”, превратив её во внешнюю форму. Для этого необходимо сложить  $m!$  перестановок  $m$  аргументов функции со знаком “+” для чётных и “−” для нечётных парных перестановок. Такое действие называется операцией *альтернирования*  $\hat{\text{Alt}}$ . Поясним её на примере 2-формы:

$$\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \hat{\text{Alt}} f = \frac{1}{2}(f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - f(\mathbf{b}, \mathbf{a})).$$

Если функция  $f$  имела компоненты  $f_{ij}$ , то внешняя форма  $\omega$  будет иметь компоненты:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(f_{ij} - f_{ji}).$$

Эту же внешнюю форму можно записать в виде разложения по базису:

$$\omega = \frac{1}{2}(f_{ij} - f_{ji}) e^i \otimes e^j.$$

Действительно, так как  $e^i$  являются функциями (1-формами), то:

$$\omega_{kl} = \omega(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \frac{1}{2}(f_{ij} - f_{ji}) (e^i \otimes e^j)(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \frac{1}{2}(f_{ij} - f_{ji}) \delta_k^i \delta_l^j.$$

Сворачивая символы Кронекера, получаем требуемые коэффициенты. Так же строится внешняя 3-форма  $\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \hat{\text{Alt}} f$ :

$$\frac{1}{6}(f(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) - f(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) + f(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) - f(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) + f(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) - f(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a})).$$

В общем случае внешняя  $m$ -форма при альтернировании делится на  $m!$ .

• Операция внешнего произведения (или косоуго произведения) вводится для двух  $k$  и  $m$  форм:

$$A \wedge B = \frac{(k+m)!}{k!m!} \hat{\text{Alt}}(A \otimes B).$$

Например, при внешнем произведении двух 1-форм  $\sigma$  и  $\lambda$  получаем внешнюю 2-форму

$$\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv (\sigma \wedge \lambda)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sigma(\mathbf{a})\lambda(\mathbf{b}) - \sigma(\mathbf{b})\lambda(\mathbf{a}).$$

Напомним, что  $(\sigma \wedge \lambda)$  является *именем* внешней 2-формы, эквивалентным букве  $\omega$ , а вот круглые скобки после этого имени – это уже аргументы функции. Если вместо произвольных векторов подставить векторы базиса, то получится связь компонент  $\omega_{ij} = \omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  форм:

$$\omega_{ij} \equiv (\sigma \wedge \lambda)_{ij} = \sigma_i \lambda_j - \sigma_j \lambda_i.$$

Аналогично вводится внешнее произведение трёх  $k$ -,  $l$ -,  $m$ - форм:

$$A \wedge B \wedge C = A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \hat{\text{Alt}}(A \otimes B \otimes C).$$

Внешнее произведение  $k$  штук 1-форм  $\omega^1(\mathbf{a}), \dots, \omega^k(\mathbf{a})$  (индекс – номер формы, а не её компонента!) можно выразить при помощи определителя:

$$\omega(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) \equiv (\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k)(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \begin{vmatrix} \omega^1(\mathbf{a}_1) & \dots & \omega^1(\mathbf{a}_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega^k(\mathbf{a}_1) & \dots & \omega^k(\mathbf{a}_k) \end{vmatrix}.$$

Наличие всевозможных факториалов является вопросом соглашения. В операции альтернирования  $m$  штук 1-форм ставится множитель  $(1/m!)$ , так как при альтернировании возникает  $m!$  перестановок аргументов. При определении косоуго произведения эти факториалы сокращаются. В результате косоуго произведение не содержит числовых множителей.

Внешнее произведение базисных 1-форм является базисом для антисимметричных тензоров типа  $(0, k)$ . Например, тензор  $(0, 2)$  с коэффициентами  $T_{ij} = -T_{ji}$  равен:

$$T = \frac{1}{2} T_{ij} e^i \wedge e^j.$$

Множитель  $1/2$  (для тензоров типа  $(0, k)$  будет  $1/k!$ ) необходим, чтобы получились верные коэффициенты при вычислении функции от базисных векторов  $T_{ij} = T(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q)$ :

$$\frac{1}{2} T_{ij} (e^i \wedge e^j)(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q) = \frac{1}{2} T_{ij} (e^i(\mathbf{e}_p) e^j(\mathbf{e}_q) - e^i(\mathbf{e}_q) e^j(\mathbf{e}_p)) = \frac{1}{2} T_{ij} (\delta_p^i \delta_q^j - \delta_q^i \delta_p^j).$$

Аналогично определяется базис  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \dots$  для тензоров, коэффициенты которых антисимметричны по верхним индексам.

## IV Многообразие

• Физик, думая о пространстве, представляет себе множество точек, которые это пространство *непрерывно* заполняют. Простейшая математическая модель  $n$ -мерного пространства – это множество упорядоченных последовательностей из  $n$  вещественных чисел  $\mathbf{x} = \{x^1, \dots, x^n\}$  (вверху индексы), обозначаемое, как  $\mathbb{R}^n$ . Каждая такая последовательность является точкой пространства. У каждой точки есть сколь угодно малая окрестность, в которой есть другие точки. Чтобы говорить об окрестности, необходимо некоторым образом определить понятие близости или расстояния  $d = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Подобная функция ещё не является “физическим” расстоянием и может быть достаточно произвольной, задавая лишь степень близости точек. Например:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x^1 - y^1| + \dots + |x^n - y^n| \quad \text{или} \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max(|x^1 - y^1|, \dots, |x^n - y^n|).$$

*Окрестность точки  $\mathbf{x}$  радиуса  $r$*  – это точки  $\mathbf{y}$ , для которых  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r$ . *Открытое множество  $U$*  содержит точки, каждая из которых имеет окрестность, полностью принадлежащую  $U$ . Например, в  $\mathbb{R}^1$  множество  $a < x < b$  открыто, а  $a \leq x < b$  – нет, так как точка  $a$  не имеет окрестности, полностью лежащей в этом множестве. Пересечение или объединение открытых множеств также является открытым множеством.

Наряду с множеством элементов, в основе всех математических теорий лежит понятие “*отображения*”. В результате отображения элементы одного множества ставятся в соответствие элементам другого множества. Например, каждой матрице соответствует её определитель. Матрицы и определители – это элементы различных множеств. Отображение  $\det : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{R}$  направлено из множества матриц  $\mathbb{D}$  в множество определителей  $\mathbb{R}$  (чисел). В данном примере обратное отображение не определено (по определителю нельзя восстановить матрицу).

Отображение можно записывать в функциональном виде  $\det(\mathbb{D}) = \mathbb{R}$ . Обычная вещественная функция  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  или  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  является отображением. Она может быть однозначной или многозначной. Т.е. отображение  $f(x)$  каждому  $x$  должно давать одно  $y = f(x)$ . Но каждому  $y = f(x)$  не обязательно соответствует одно  $x$ .

*Взаимно-однозначное* отображение (или 1-1 отображение) – это отображение, “работающее” в обе стороны. Для него  $f : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{B}$  всегда существует обратное отображение  $f^{-1} : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{A}$ . Функции  $y = x$ ,  $y = x^3$  являются взаимно-однозначными отображениями. Функции  $y = x^2$ ,  $y = \sin(x)$  – нет, так как они многозначны.

• *Многообразие*  $\mathbb{M}^n$  – это множество точек, каждая из которых имеет открытую окрестность, допускающую непрерывное взаимно-однозначное отображение на открытое множество  $\mathbb{R}^n$ . Естественно  $\mathbb{R}^n$  также является многообразием. Могут быть более общие модели пространства. Однако все они (являясь многообразием) *локально* подобны  $\mathbb{R}^n$ . *Размерностью* многообразия служит число  $n$ , а отображение в  $\mathbb{R}^n$  называется *координатным*. Числа  $\{x^1, \dots, x^n\} \in \mathbb{R}^n$  – это координаты точки многообразия. Многообразие – это очень общее понятие. На данном уровне аксиоматики ещё нет расстояний, углов и т.п. “привычных” элементов геометрии. Есть лишь *локальная топология* точек и их окрестностей, которые в многообразии “устроены” так же, как и в  $\mathbb{R}^n$ .

*Картой* называется окрестность данной точки многообразия  $p \in \mathbb{M}^n$  вместе с её отображением  $f : \mathbb{M}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ . Окрестности разных точек могут иметь различные карты. Множество перекрывающихся карт, отражающих все точки многообразия, называется *атласом*.

Простейший пример многообразия, глобально отличного от  $\mathbb{R}^n$  – это точки поверхности сферы. Какие бы способы отображения мы не придумывали, *все* точки 2-мерной сферы нельзя отобразить в плоскость  $\mathbb{R}^2$ . Однако, если у сферы выколоть (выбросить) одну точку, то она *топологически* станет эквивалентна плоскости. Стоит представить себе такую сферу резиновой и растянуть её через выколотую “дырку” в плоскость. Примером отображения сферы с выколотой точкой в плоскость является стереографическая проекция (стр. 206).

Сфера может быть представлена атласом, состоящим минимум из двух карт. Например, это могут быть проекции (отображения!) точек северного и южного полушарий на плоскость, проходящую через центр по экватору сферы (точнее, нужны две несовпадающие плоскости, чтобы получить на картах открытое множество перекрывающихся точек).

Необходимо различать локальную и *глобальную топологию*. Сфера и тор имеют одинаковую локальную топологию (подобную  $\mathbb{R}^n$ ), но абсолютно разную глобальную топологию. Например, резиновый тор никакими растяжениями поверхности нельзя превратить в сферу.

В *связных многообразиях* при помощи последовательности перекрывающихся окрестностей можно перейти от одной точки к любой другой. Две сферы с общим центром и различными радиусами являются *несвязным многообразием*. *Связностью* 2-мерных поверхностей также называют количество несводимых друг к другу деформацией замкнутых контуров. Плоскость и сфера односвязны. Круг с вырезанной дыркой двухсвязный. Тор – трёхсвязное многообразие ( $\leq H_{192}$ ).

## V Касательные векторы

• *Кривая* на многообразии  $M^n$  – это дифференцируемое отображение  $\mathbb{R}$  на  $M^n$ . Пусть на некоторой карте определены дифференцируемые функции  $\{x^1(t), \dots, x^n(t)\}$ . В силу взаимной однозначности отображения  $M^n$  на  $\mathbb{R}^n$  эти функции определяют кривую на многообразии. Таким образом, с точки зрения “обычной” дифференциальной геометрии речь идёт о параметрическом задании кривой в пространстве.

*Функция на многообразии* – это отображение  $f : M^n \mapsto \mathbb{R}$ , т.е. каждой точке многообразия ставится в соответствие вещественное число. Так как точки многообразия могут быть (при помощи карт) “пронумерованы” координатами, то для  $p \in M^n$  можно писать  $f(p) = f(x^1, \dots, x^n)$ .

Пусть на многообразии задана функция и некоторая кривая. В каждой точке кривой функция принимает определённое значение. Поэтому возникает функция  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ :

$$g(t) = f(x^1(t), \dots, x^n(t)).$$

Её производная вычисляется, как производная сложной функции:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt},$$

где по повторяющемуся индексу  $i$  идёт суммирование от 1 до  $n$ . *Зафиксировав кривую*, можно рассматривать самые различные функции на многообразии. Полученная производная справедлива для них всех. Поэтому запишем её в *операторном виде*:

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Будем отличать различные кривые именем параметра. Таким образом,  $x^i(t)$  и  $x^i(u)$  – это *различные функции*, определяющие различные кривые. Через данную точку пространства  $p \in M^n$  проходит бесконечное множество пересекающихся кривых. К каждой такой кривой в *данной точке* можно определить производную и соответствующий оператор  $d/dt$ ,  $d/du$ . Эти операторы действуют на одну и ту же функцию, значения которой заданы вдоль этих кривых. Можно говорить о линейной комбинации операторов, умножив их на вещественные числа  $\alpha$ ,  $\beta$ :

$$\alpha \frac{d}{dt} + \beta \frac{d}{du} = \left( \alpha \frac{dx^i}{dt} + \beta \frac{dx^i}{du} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Производные  $dx^i/dt$ ,  $dx^i/du$  по *различным функциям* вычислены в одной точке пространства и являются некоторыми числами.



Несложно видеть, что такие операции с операторами (сложение и умножение на число) образуют векторное пространство (стр.22). Поэтому говорят, что  $d/dt$  – это *касательный вектор* к кривой:

$$\frac{d}{dt} \text{ — вектор, } \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ — базисные векторы, } \quad \frac{dx^i}{dt} \text{ — компоненты.}$$

Возможно, физику, представляющему вектор как стрелку, покажется странным считать дифференциальный оператор вектором. Однако вспомним, что с математической точки зрения вектор – это абстрактный элемент некоторого множества с введенными на нём операциями (функциями). А вот “стрелочка” является как раз примером такого объекта. Скорость, сила, бесконечно малый сдвиг в некотором направлении – это всё векторы, лишь потому, что их свойства удовлетворяют соответствующим аксиомам векторного пространства.

На самом деле, к утверждению о том, что  $d/dt$  – касательный вектор, а  $\partial/\partial x^i$  – базисные векторы (т.н. *координатный базис*), можно относиться просто, как к некоторым обозначениям. В конечном счёте, обозначим мы базис значком  $\mathbf{e}_i$  или  $\partial/\partial x^i$ , роли не играет. Для физика, умеющего измерять вещественные числа, важны *компоненты вектора*  $dx^i/dt$ .

Следуя обозначениям Инструкции, можно записать касательный вектор, как бесконечно малое смещение  $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i dx^i$  вдоль кривой  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , где  $\mathbf{e}_i$  – базис (стрелочки) в данной точке пространства (стр. 66):

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \mathbf{e}_i.$$

Компоненты  $dx^i/dt$  разложения по базису  $\mathbf{e}_i$  получаются такими же, как и при разложении  $d/dt$  по  $\partial/\partial x^i$ .

Стоит особо обратить внимание, что касательный вектор (как бы мы его не обозначали) – это объект, определённый в *данной точке* пространства. В другой (даже “соседней”) точке будет иное множество касательных векторов к кривым, пересекающимся в этой точке. Говорят, что касательные векторы определены в *касательном* к многообразию пространстве  $T_P$  в точке  $P$ . Например, думая о сфере, как о многообразии, можно представлять касательную к сфере плоскость. Это и будет касательное пространство, в котором “лежат” все векторы, касательные к тем или иным кривым, проходящим по сфере через точку касания плоскости.

Множество всех касательных пространств само является многообразием. Его называют *расслоённым пространством*, или просто *расслоением*  $TM$ . Касательные плоскости к точкам сферы, собранные в стопку параллельных плоскостей, будут таким расслоением.

## VI Градиент и площадь

*Градиент* является примером 1-формы. Это означает, что существует отображение  $\mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}$ , которое некоторому вектору смещения в данном направлении (касательному к кривой вектору) ставит в соответствие число. Это число равно бесконечно малому изменению функции  $f$  в этом направлении. Присвоим, как и в 7-й главе, этой 1-форме имя  $\mathbf{d}f$ . Тогда:

$$(\mathbf{d}f) \left( \frac{d}{dt} \right) = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}.$$

Мы взяли имя формы в скобки  $(\mathbf{d}f)$ , чтобы подчеркнуть, что это не операция, а именно *имя функции* (отображения)  $\mathbf{d}f : \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}$ . Аргументом этой функции является касательный вектор  $d/dt$ . Вместо него можно было бы написать и  $d\mathbf{r}/dt$ . В правой части определения стоит уже обычная производная. В данной точке пространства это число. Второе равенство напоминает, что функция  $f$  определена на кривой  $x^i(t)$ .

Вектор *в конкретном базисе* вместо абстрактного значка  $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$  может быть эквивалентно представлен в виде набора вещественных чисел  $\{a^1, \dots, a^n\}$ . Точно так же, говоря об 1-форме, вместо абстрактного значка  $\omega : \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}$  можно записывать набор вещественных чисел  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ , которые эту форму задают. В координатном виде 1-форма  $\omega$  (функция от вектора  $\mathbf{a}$ ) имеет вид:  $\omega(\mathbf{a}) = \omega_i a^i$ . Аналогично 1-форму градиента можно записать следующим образом:

$$(\mathbf{d}f) \left( \frac{d}{dt} \right) = (\mathbf{d}f)_i \left( \frac{d}{dt} \right)^i.$$

Напомним, что компоненты касательного вектора  $d/dt$  – это “обычные” производные от функций, задающих кривую  $(d/dt)^i = dx^i/dt$ . Поэтому компоненты 1-формы градиента скалярной функции  $f$  равны:

$$(\mathbf{d}f)_i = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right\}.$$

Они преобразуются, как ковариантные компоненты вектора (как и должно быть для компонент 1-формы). Перечисление этих чисел полностью определяет 1-форму градиента (в данных координатах=базисе).

Выше вместо дифференциала  $df$  мы получили производную вдоль кривой. Так как 1-формы линейны, можно умножить обе части на изменение параметра  $dt$  и получить дифференциал:

$$df = (\mathbf{d}f)(d\mathbf{r}) = \mathbf{d}f_i d\mathbf{r}^i = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

где  $d\mathbf{r}$  – вектор бесконечно малого смещения в пространстве в данном направлении. Именно так трактовалась 1-форма градиента в 7-й главе.

В произвольных криволинейных координатах ( $n = 2$ ) выражения:

$$\mathbf{d}q^1 = \{1, 0\}; \quad \mathbf{d}q^2 = \{0, 1\}; \quad \mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

означают, что мы задаём 1- или 2-форму в компонентном представлении в данной системе координат. Результат “работы” формы (значение функции  $\mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}$ ) мы находим при помощи свёртки этих чисел с компонентами вектора (заданными, естественно, в этой же системе координат).

Например, внешняя 2-форма площади  $S = \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$  (антисимметричная бинарная функция  $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}$  в декартовом базисе) даёт обычную площадь бесконечно малого параллелограмма только *после её вычисления* на векторах сторон параллелограмма  $d\mathbf{r}, d\mathbf{r}'$ .

В полярных координатах  $q^i = (r, \phi)$  компоненты 1-формы градиентов координат такие же, как и в декартовых:  $\mathbf{d}r = \{1, 0\}$ ,  $\mathbf{d}\phi = \{0, 1\}$ . Внешняя 2-форма  $\mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\phi$  также имеет компоненты, совпадающие с декартовыми. Однако 2-форма площади равна  $S = r \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\phi$ . Чтобы вычислить, например, площадь “прямоугольничка”, в котором одна сторона получается смещением при постоянном  $\phi$ :  $d\mathbf{r} = \{dr, 0\}$ , а вторая при постоянном  $r$ :  $d\mathbf{r}' = \{0, d\phi\}$ , необходимо найти значение 2-формы (число):

$$S(d\mathbf{r}, d\mathbf{r}') = (r \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\phi)(d\mathbf{r}, d\mathbf{r}') = S_{ij} d\mathbf{r}^i d\mathbf{r}'^j = \begin{pmatrix} dr & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ d\phi \end{pmatrix}.$$

В результате получается  $r dr d\phi$ , где уже стоят “обычные” дифференциалы, а не 1-формы градиентов координат.

Обратим внимание, что площадь может быть определена независимо от введения метрики  $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Площадь – это внешняя 2-форма  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  (антисимметричная функция двух векторов). Она даёт число, ассоциируемое с этой парой векторов. Тем не менее, если метрика задана она позволяет вычислить и площадь.

То, что площадь должна быть внешней формой, следует из желания обобщить свойства площади в евклидовом пространстве, где для векторов (как направленных отрезков) выполняются соотношения ( $\leq H_{194}$ ):

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + S(\mathbf{a}, \mathbf{c}), \quad S(\mathbf{a}, \alpha \mathbf{b}) = \alpha S(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad S(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0.$$

Первые два соотношения (справедливые для обоих аргументов) приводят к тому, что  $S$  является билинейной функцией. Из последнего соотношения следует ( $\leq H_{195}$ ), что эта функция должна быть антисимметричной  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -S(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ , т.е. является внешней 2-формой.

## VII Векторные поля

*Векторное поле* возникает, когда в каждой точке многообразия задается вектор. В касательном пространстве существует свой базис и множество векторов. Поэтому векторное поле – это некоторое правило, по которому из этого множества выбирается один вектор в каждой точке.

Раньше некоторое векторное поле мы записывали в виде разложения  $\mathbf{V}(x^1, \dots, x^n) = V^i(x^1, \dots, x^n) \mathbf{e}_i$ , где векторы  $\mathbf{e}_i$  мыслились, как “стрелочки” смещений в пространстве вдоль линий координатной сетки. Эти векторы в криволинейном базисе также зависели от координат точки пространства (теперь мы скажем: от координат на карте  $\mathbb{R}^n$  многообразия  $\mathbb{M}^n$ ). Поэтому, например, при параллельном переносе даже постоянного векторного поля ( $V^i = \text{const}$ ) его компоненты менялись.

В новых, операторных обозначениях векторное поле записывается следующим образом:

$$\mathbf{V} \equiv \frac{d}{dv} = V^i(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Функции компонент в обоих представлениях одни и те же, а вот векторы базиса и само векторное поле обозначаются при помощи операторов. Обратим внимание, что в теории групп Ли вектор  $d/dv$  имеет смысл генератора некоторой непрерывной группы.

Операторная запись позволяет естественным образом вводить новые операции с векторными полями. Рассмотрим, например, два векторных поля  $d/dt$  и  $d/du$ , разложив их на базисе  $\partial/\partial x^i$ :

$$\frac{d}{dt} = T^i(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \frac{d}{du} = U^j(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Вычислим коммутатор этих операторов (т.н. *скобку Ли*). Для этого подействуем скобкой Ли на произвольную функцию  $f$ :

$$\left[ \frac{d}{dt}, \frac{d}{du} \right] f \equiv \left( \frac{d}{dt} \frac{d}{du} - \frac{d}{du} \frac{d}{dt} \right) f = T^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( U^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - U^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( T^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right).$$

Переименовывая в первом слагаемом немые индексы (переставляя их местами) и раскрывая производные произведения, получаем:

$$\left[ \frac{d}{dt}, \frac{d}{du} \right] = \left( T^j \frac{\partial U^i}{\partial x^j} - U^j \frac{\partial T^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

где опущена функция  $f$ . Таким образом, скобки Ли определяют новое векторное поле, компоненты разложения которого по базису  $\partial/\partial x^i$  равны  $T^j \partial_j U^i - U^j \partial_j T^i$ .

Векторное поле задаёт в пространстве множество кривых, которые называются *интегральными кривыми* векторного поля. Название происходит от способа получения таких кривых. Считая, что компоненты векторного поля являются касательными к кривой, можно записать:

$$\frac{dx^i}{dt} = V^i(x^1, \dots, x^n).$$

Решением этой системы дифференциальных уравнений будет параметрическое задание кривой  $x^i(t)$ . Различные начальные условия  $x^i(0)$  приводят к кривым, проходящим через различные точки пространства. Множество всех таких кривых называется *конгруэнцией*.

Рассмотрим две конгруэнции, определяемые векторными полями  $T^i = T^i(x^1, \dots, x^n)$  и  $U^i = U^i(x^1, \dots, x^n)$ . Сдвинемся из точки  $x$  в  $p$  вдоль интегральной кривой с касательным вектором  $T^i$ , увеличив параметр на  $\Delta t$ . Раскладывая в ряд Тейлора, находим координаты точки  $p$ :

$$p^i = x^i(t + \Delta t) = x^i + T^i(x) \Delta t + T^j \frac{\partial T^i}{\partial x^j} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots,$$

где учтено, что  $dx^i/dt = T^i$ , а  $d^2x^i/dt^2 = (\partial T^i/\partial x^j)(dx^j/dt)$ . В этой точке векторное поле  $U^i$  уже имеет другие компоненты. Применяя снова разложение Тейлора, имеем:

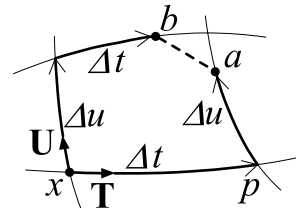
$$U^i(p) = U^i(x^j + T^j(x)\Delta t + \dots) = U^i(x) + \frac{\partial U^i(x)}{\partial x^j} T^j(x) \Delta t + \dots$$

Если мы теперь сдвинемся на  $\Delta u$  вдоль кривой с касательным вектором  $U^i(p)$ , то попадём в точку с координатами  $a^i = p^i + U^i(p)\Delta u + \dots$ :

$$a^i = x^i + T^i \Delta t + U^i \Delta u + T^j \frac{\partial T^i}{\partial x^j} \frac{\Delta t^2}{2} + U^j \frac{\partial U^i}{\partial x^j} \frac{\Delta u^2}{2} + T^j \frac{\partial U^i}{\partial x^j} \Delta t \Delta u + \dots$$

Сдвиги, сделанные в обратном порядке, приведут к точке  $b \neq a$  (см. рисунок). В выражении для её координат необходимо поменять компоненты векторов  $U^i$  и  $T^i$  местами. Разность координат этих точек выражается через компоненты векторного поля, порождаемого скобками Ли:

$$a^i - b^i \approx \left( T^j \frac{\partial U^i}{\partial x^j} - U^j \frac{\partial T^i}{\partial x^j} \right) \Delta t \Delta u.$$



Векторные поля, для которых скобка Ли равна нулю, называют *координатными*. Систему подобных полей порождают, например, базисные векторы, которые, очевидно, коммутируют друг с другом:  $[\partial_i, \partial_j] = 0$ .

## VIII Производная Ли

Запишем уравнение кривой, порождаемой полем  $V^i(x^1, \dots, x^n)$  в окрестности точки  $x_0^i$ , через которую кривая проходит при  $t = 0$ . При малом  $t$  из  $dx^i/dt = V^i$  следует:

$$x^i(t) \approx x_0^i + t V^i(x_0^1, \dots, x_0^n).$$

Это соотношение можно интерпретировать, как однопараметрическое отображение одной точки многообразия  $x_0^i = x^i(0)$  в другую  $x^i = x^i(t)$  при движении вдоль интегральной кривой  $x^i(t)$ . Компоненты векторного поля считаются дифференцируемыми. Поэтому такое взаимно-однозначное отображение называется *диффеоморфизмом*.

Подобное отображение можно интерпретировать, как преобразование координат от  $x^i$  к  $x_0^i$ . Будем считать, что при этом выполняется обычный закон преобразования тензоров. Например:

$$T_{jk}^i = T_{pq}^r \frac{\partial x^p}{\partial x_0^j} \frac{\partial x^q}{\partial x_0^k} \frac{\partial x_0^i}{\partial x^r}.$$

Говорят, что такое преобразование тензора определяет его *перенос* из точки  $x_0^i$  в точку  $x^i$  вдоль векторного поля  $\mathbf{V}$ .

*Производная Ли*  $\mathcal{L}_V$  вдоль векторного поля  $\mathbf{V}$  от тензора  $T$  — по определению тензор того же типа, имеющий следующие компоненты:

$$(\mathcal{L}_V T)_{jk}^i = \frac{dT_{jk}^i}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Так как матрицы преобразований координат известны ( $\leq H_{202}$ ):

$$\frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} = \delta_j^i + t \frac{\partial V^i}{\partial x_0^j}, \quad \frac{\partial x_0^i}{\partial x^j} = \delta_j^i - t \frac{\partial V^i}{\partial x_0^j},$$

несложно записать, например, производную Ли от вектора:

$$(\mathcal{L}_V U)^i = \frac{d}{dt} \left[ U^j \left( \delta_j^i - t \frac{\partial V^i}{\partial x_0^j} \right) \right]_{t=0} = V^j \frac{\partial U^i}{\partial x_0^j} - U^j \frac{\partial V^i}{\partial x_0^j},$$

где в первом слагаемом учтено, что  $dU^i/dt = (\partial U^i/\partial x_0^j)(dx_0^j/dt)$ , и подставлены координаты касательного вектора  $dx_0^i/dt = V^i(x_0)$ . Подобную производную можно записать при помощи скобок Ли:

$$\mathcal{L}_V \mathbf{U} = [\mathbf{V}, \mathbf{U}].$$

Жирные буквы  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  имеют смысл векторных полей в операторной записи. Т.е. это на самом деле  $\mathbf{U} = U^i(x^1, \dots, x^n) \partial/\partial x^i$ , и т.д. Компоненты получившегося вектора и будут производной Ли от вектора  $\mathbf{U}$ .

Аналогично вычисляется ( $\leq N_{203}$ ) производная Ли от 1-формы:

$$(\mathcal{L}_V \omega)_i = V^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} + \omega_j \frac{\partial V^j}{\partial x^i}.$$

Производная Ли от тензора нулевого ранга (скалярной функции) равна:

$$\mathcal{L}_V f = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} = V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Связь производной от вектора, 1-формы и скаляра можно записать в виде “*правила Лейбница*”, которое стоит проверить ( $\leq N_{204}$ ) в компонентном виде:

$$\mathcal{L}_V(\omega(\mathbf{U})) = (\mathcal{L}_V \omega)(\mathbf{U}) + \omega(\mathcal{L}_V \mathbf{U}).$$

В левой части стоит производная от скалярной функции (которой равна 1-форма от векторного поля). Выражение  $(\mathcal{L}_V \omega)$  – это имя 1-формы, получающейся после взятия производной Ли от формы  $\omega$ . Второе слагаемое в правой части – это результат вычисления исходной формы от вектора, равного производной Ли от  $\mathbf{U}$ .

Справедливо также “правило Лейбница” для прямого произведения тензоров:

$$\mathcal{L}_V(A \otimes B) = (\mathcal{L}_V A) \otimes B + A \otimes (\mathcal{L}_V B).$$

В безындексном виде производная Ли от произвольного тензора (функции от векторов и 1-форм)  $\mathcal{L}_V[T(\mathbf{a}, \dots, \omega, \dots)]$  имеет вид:

$$(\mathcal{L}_V T)(\mathbf{a}, \dots, \omega, \dots) + T(\mathcal{L}_V \mathbf{V}, \dots, \omega, \dots) + \dots + T(\mathbf{a}, \dots, \mathcal{L}_V \omega, \dots) + \dots,$$

где  $\mathbf{a}, \dots$  – векторы и  $\omega, \dots$  – 1-формы, от которых зависит тензор (точнее, в данном случае векторные поля и поля 1-форм).

Производная Ли является в некотором смысле альтернативой к ковариантному дифференцированию тензоров. Для введения ковариантной производной необходимо определить на многообразии дополнительную геометрическую структуру – *связность*  $\Gamma_{jk}^i$ , при помощи которой проводятся параллельные переносы тензоров. Производная Ли не требует связности, а параллельный перенос определяется вдоль интегральной кривой любого фиксированного векторного поля.

Напомним, что многообразие станет пространством в “привычном” смысле этого слова, если мы определим на нём две геометрические структуры – расстояние между двумя бесконечно близкими точками  $g_{ij}$  и параллельный перенос вектора (связность  $\Gamma_{jk}^i$ ), см. стр.108. До введения этих структур многообразие ещё не обладает более или менее богатыми геометрическими свойствами.

## Задачи

• ( $\leq$  Н<sub>183</sub>) Убедиться, что точки  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  пространства  $\mathbb{R}^n$  относительно сложения  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  и умножения на число  $\alpha\mathbf{x}$  образуют векторное пространство. Найти пример его базиса.

• ( $\leq$  Н<sub>184</sub>) Убедиться, что множество матриц  $n \times n$  относительно компонентного сложения и умножения на число образуют векторное пространство. Найти пример его базиса.

• ( $\leq$  Н<sub>185</sub>) Доказать, что бинарная функция скалярного произведения  $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  выражается через унарную функцию нормы  $n(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ :

$$g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{4}(n(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - n(\mathbf{a} - \mathbf{b})).$$

• ( $\leq$  Н<sub>186</sub>) Для операции альтернирования выполняется тождество:

$$\hat{\text{Alt}}(A \otimes B) = \hat{\text{Alt}}(\hat{\text{Alt}}(A) \otimes B) = \hat{\text{Alt}}(A \otimes \hat{\text{Alt}}(B)).$$

Проверить его на 3-форме  $\omega \otimes \sigma$ , где  $\omega = \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  и  $\sigma = \sigma(\mathbf{a})$ .

• ( $\leq$  Н<sub>187</sub>) Проверить числовой коэффициент в выражении для тройного косоугольного произведения  $A \wedge B \wedge C$  на стр. 141, исходя из ассоциативности косоугольного и тензорного произведений и коэффициента в определении для двойного косоугольного произведения  $A \wedge B$ .

• ( $\leq$  Н<sub>188</sub>) Объяснить, почему сферические координаты  $\theta, \phi$  с постоянным радиусом  $r = \text{const}$  не обеспечивают единственной карты, покрывающей всё многообразие точек сферы.

• ( $\leq$  Н<sub>189</sub>) Какое минимальное число карт необходимо для построения атласа поверхности тора? Предложить соответствующее отображение.

• ( $\leq$  Н<sub>190</sub>) Пусть есть две кривые  $t\mathbf{a}$ ,  $u\mathbf{a} + u^2\mathbf{b}$ . Найти касательные к ним векторы в точке, где кривые пересекаются.

• ( $\leq$  Н<sub>191</sub>) Для некоторой гладкой кривой  $x^i(t)$  доказать соотношение:

$$x^i(t + \tau) = \exp \left[ \tau \frac{d}{dt} \right] x^i(t).$$

• ( $\leq$  Н<sub>192</sub>) Круг с дыркой – это 2-связное многообразие. Тор – 3-связное многообразие. Нарисуйте на этих многообразиях соответствующие замкнутые контуры, которые нельзя свести друг к другу деформацией.



• ( $\leq$  Н<sub>193</sub>) Найти топологические (в глобальном смысле) эквиваленты таких 2-мерных многообразий, как поверхность чайной чашки, ножниц и морской звезды. Отбейте у чашки ручку, разберите ножницы и задумайтесь о физиологии иглокожих.

• ( $\leq$  Н<sub>194</sub>) Два вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  на евклидовой плоскости образуют параллелограмм с площадью  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Графически доказать, что для площадей выполняются соотношения  $S(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}) = \alpha S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  и  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + S(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ . Отдельно рассмотреть случай  $\mathbf{c} = -\mathbf{b}/2$ .

• ( $\leq$  Н<sub>195</sub>) Положив  $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ , доказать, что если для 2-формы  $S(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ , то это внешняя форма:  $S(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = -S(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ .

• ( $\leq$  Н<sub>196</sub>) Рассмотрим векторное поле, направленное вдоль одного из базисных векторов, например,  $\partial/\partial x^1$ . Найти его конгруэнцию.

• ( $\leq$  Н<sub>197</sub>) Найти интегральные кривые на  $\mathbb{R}^2$ , задаваемые векторным полем  $x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$ .

• ( $\leq$  Н<sub>198</sub>) Какой результат действия оператора  $\exp(\tau d/dt)$  на произвольную функцию координат  $f = f(x^1, \dots, x^n)$ , если  $d/dt$  – это векторное поле с компонентами  $T^i(x^1, \dots, x^n)$ ?

• ( $\leq$  Н<sub>199</sub>) Считая, что операторы  $\exp[\Delta t d/dt]$  и  $\exp[\Delta u d/du]$  являются перемещениями вдоль соответствующих векторных полей, получить финальную формулу раздела VII (стр. 149).

• ( $\leq$  Н<sub>200</sub>) Являются ли на многообразии  $\mathbb{R}^2$  координатными векторные поля  $x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$  и  $x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$ ?

• ( $\leq$  Н<sub>201</sub>) Найти скобки Ли векторных полей, являющихся генераторами группы вращения  $\mathbf{SO}(3)$ :

$$L_x = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad L_y = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_z = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

• ( $\leq$  Н<sub>202</sub>) Получить матрицы преобразований тензора, использованные при выводе коэффициентов производной Ли (стр. 150).

• ( $\leq$  Н<sub>203</sub>) Найти производную Ли от 1-формы.

• ( $\leq$  Н<sub>204</sub>) Проверить правило Лейбница (стр. 151) для формы и вектора.

• ( $\leq$  Н<sub>205</sub>) Доказать соотношение  $\mathcal{L}_V \mathbf{U} = -\mathcal{L}_U \mathbf{V}$ .



## Н: Помощь

В этом приложении приведено достаточно подробное решение задач к каждой главе Инструкции. Излишне напоминать, что прежде чем воспользоваться помощью, необходимо достаточно долго поломать голову самостоятельно. Даже если задача “не поддаётся”, не стоит внимательно читать её решение. Имеет смысл сначала очень бегло просмотреть формулы и, уловив идею решения, затем самостоятельно его записать на бумаге.

Только после окончательного получения решения задачи необходимо внимательно прочитать соответствующую часть этого приложения. Иногда вместе с решениями задач приводятся достаточно важные теоретические определения. Ещё и поэтому решение задач является неотъемлемой частью настоящей Инструкции и не стоит их оставлять “на потом”.

## Векторы

- **H<sub>1</sub>** *Скалярное произведение в декартовом базисе* (стр. 11, 24)

Раскроем скобки:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = a_x b_x \mathbf{i}^2 + a_y b_y \mathbf{j}^2 + a_z b_z \mathbf{k}^2,$$

где опущены перекрёстные произведения, так как  $\mathbf{i}\mathbf{j} = 0$ , и т.д. Учитывая, что  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1$ , получаем:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ .

---

- **H<sub>2</sub>** *Угол между векторами* (стр. 24)

Находим длины векторов  $\mathbf{a} = \{1, 2, 2\}$  и  $\mathbf{b} = \{4, 0, 3\}$ :

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = 5.$$

Косинус угла равен скалярному произведению, делённому на длины:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}.$$


---

- **H<sub>3</sub>** *“Неассоциативность” скалярного произведения* (стр. 24)

Вычисляем скалярные произведения:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \{1, 2, 3\} \cdot \{3, 2, 1\} = 3 + 4 + 3 = 10,$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \{3, 2, 1\} \cdot \{1, 1, 1\} = 3 + 2 + 1 = 6.$$

Поэтому:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = 10\{1, 1, 1\} - \{1, 2, 3\}6 = \{4, -2, -8\} = 2\{2, -1, -4\}.$$

Стоит отметить, что называть  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$  неассоциативностью, вообще говоря, неверно. Символы умножения, присутствующие в этом соотношении, имеют различный смысл (одна точка – это умножение векторов, вторая – числа на вектор). Т.е. это разные операции, в которых участвуют математические объекты различной природы.

---

- **H<sub>4</sub>** *Дистрибутивность векторного произведения* (стр.12)

Тождество

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] + [\mathbf{a} \times \mathbf{c}]$$

проверяется при помощи определения векторного произведения:

$$\{a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2), a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3), a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1)\}.$$

Раскрывая скобки, получаем сумму двух векторных произведений:

$$\{a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1\} + \{a_2 c_3 - a_3 c_2, a_3 c_1 - a_1 c_3, a_1 c_2 - a_2 c_1\}.$$


---

• **Н<sub>5</sub>** *Результат смешанного произведения* (стр. 24)

Векторное произведение  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  равно

$$\{1, 0, 2\} \times \{2, -1, 3\} = \{0 \cdot 3 - 2 \cdot (-1), 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3, 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 2\} = \{2, 1, -1\}.$$

Смешанное произведение:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = \{2, 1, -1\} \cdot \{1, -1, 1\} = 2 - 1 - 1 = 0.$$


---

• **Н<sub>6</sub>** *Правило выталкивания* (стр.12)

Тождество  $\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c}$  проверяем покомпонентно.

Левая часть:

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Правая часть:

$$(a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3.$$

Приводя подобные члены, убеждаемся, что оба выражения совпадают.

---

• **Н<sub>7</sub>** *Правило бац минус цаб* (стр.12)

Тождество:  $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  проверяем покомпонентно:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \{b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1\}.$$

Второе векторное произведение:

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]]_1 = a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) = b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3),$$

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]]_2 = a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) = b_2(a_1c_1 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3),$$

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]]_3 = a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) = b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2).$$

Скалярные произведения справа равны:

$$\{b_1, b_2, b_3\}(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - \{c_1, c_2, c_3\}(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3).$$


---

• **Н<sub>8</sub>** *Скалярное произведение двух векторных произведений* (стр.13)

В скалярном произведении  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{d}]$  применяем правило выталкивания, затем переставляем векторные произведения:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = [[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c}] \cdot \mathbf{d} = -[\mathbf{c} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]] \cdot \mathbf{d} =$$

и применяем тождество “бац минус цаб”:

$$= -(\mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})) \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$


---

• **H<sub>9</sub>** *Антисимметричность смешанного произведения* (стр.13)

Применяя правило выталкивания, затем переставляя “вытолкнутый” вектор в начало и опять применяя правило выталкивания, имеем:

$$\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] \cdot \mathbf{b}.$$

Поэтому, учитывая антисимметричность векторного произведения:

$$\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = -\mathbf{a} \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{b}],$$

$$\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = -\mathbf{b} \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{c}],$$

$$\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = -\mathbf{c} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{a}].$$

• **H<sub>10</sub>** *Площадь параллелограмма* (стр.24)

Векторы сторон параллелограмма равны:

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \{4, 1\} - \{1, 1\} = \{3, 0\},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0 = \{2, 3\} - \{1, 1\} = \{1, 2\}.$$

Площадь параллелограмма, лежащего в плоскости  $(x, y)$ , равна:

$$S = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 6.$$

Точка, противоположная вершине  $\mathbf{r}_0$ , равна:  $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a} + \mathbf{b} = \{5, 3\}$ .

• **H<sub>11</sub>** *Площадь проекций параллелограмма* (стр.24)

Компоненты вектора, перпендикулярного параллелограмму, равны:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} = \{1 \cdot 1 - 0 \cdot \frac{1}{2}, 0 \cdot 1 - (-2) \cdot 1, (-2) \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 1\} = \{1, 2, -2\}.$$

Поэтому площади проекций равны 1, 2 и 2. Площадь параллелограмма равна  $\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$ . Четвёртая вершина (противоположащая вершине в начале координат) имеет координаты  $\{-1, 3/2, 1\}$ .

• **H<sub>12</sub>** *Расстояние от точки до прямой* (стр.24)

Вычисляем по формулам стр. 16:

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \{3, 2, 1\} - \{1, 0, 0\} = \{2, 2, 1\},$$

$$\mathbf{n}^2 = \{2, 2, 1\}^2 = 2^2 + 2^2 + 1 = 9, \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 9.$$

Расстояние:

$$d = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)^2 - \frac{\{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}\}^2}{\mathbf{n}^2} = 9 - \frac{9^2}{9} = 0.$$

Точка  $\mathbf{r}_1$  лежит на прямой ( $t = 1$ ).

• **H<sub>13</sub>** *Расстояние от точки до плоскости* (стр.24)

Вычисляем по формулам стр. 17:

$$d = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{\{1, 2, 3\} \cdot \{1, 1, 1\}}{\sqrt{\{1, 1, 1\}^2}} = \frac{1 + 2 + 3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$


---

• **H<sub>14</sub>** *Плоскость, заданная 3-я точками* (стр.24)

Находим векторы, лежащие в плоскости:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \{1, 2, 3\} - \{1, 1, 1\} = \{0, 1, 2\}, \\ \mathbf{b} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0 = \{3, 2, 1\} - \{1, 1, 1\} = \{2, 1, 0\}.\end{aligned}$$

Нормаль к плоскости:

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \{0, 1, 2\} \times \{2, 1, 0\} = \{-2, 4, -2\} \sim \{1, -2, 1\}$$

(можно взять любой параллельный вектор, поэтому  $\mathbf{n}$  упростили). Расстояние равно:

$$d = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{(\{2, 1, 2\} - \{1, 1, 1\}) \cdot \{1, -2, 1\}}{\sqrt{\{1, -2, 1\}^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$


---

• **H<sub>15</sub>** *Точка пересечения плоскости и прямой* (стр.24)

Записываем совместное уравнение прямой и плоскости:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{n}_2 t, \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}_1 = 0.$$

Подставляем первое уравнение во второе:

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}_1 + (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}_1}{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)}.$$

Решение существует (параметр  $t$ ), если  $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \neq 0$ , т.е. прямая не параллельна плоскости. Точка пересечения в пространстве имеет координаты:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}_1}{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)} \mathbf{n}_2.$$


---

• **H<sub>16</sub>** *Движение частицы по окружности* (стр.25)

Берём покомпонентно от  $\mathbf{r}(t) = R\{\cos \omega t, \sin \omega t\}$  производные:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = R\omega \{-\sin \omega t, \cos \omega t\}, \\ \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = R\omega^2 \{-\cos \omega t, -\sin \omega t\} = -\omega^2 \mathbf{r}.\end{aligned}$$

Скалярное произведение:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = R^2 \omega^3 (\cos \omega t \sin \omega t - \sin \omega t \cos \omega t) = 0.$$

Таким образом, скорость всегда остаётся перпендикулярной ускорению и положению частицы, а ускорение  $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$  направлено от частицы к центру вращения.

---

- **H<sub>17</sub>** *Согласованность*  $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{u}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{u} \times \mathbf{n}$  (стр.21)

Подставим  $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{u}$  в  $\mathbf{u} \times \mathbf{n}$ :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{u} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{u}] = \mathbf{b} u^2 - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b},$$

где сначала применена формула двойного векторного произведения ”бац минус цаб” [(1.4), стр.12], а затем учтены единичность вектора  $u^2 = 1$  и ортогональность  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} = 0$ .

---

- **H<sub>18</sub>** *Выражение для кручения* (стр.21)

В определение кручения подставим вектор  $\mathbf{b}$ :

$$\chi(s) = -\mathbf{b}' \cdot \mathbf{n} = -[\mathbf{u} \times \mathbf{n}]' \cdot \mathbf{n}.$$

Возьмём производную произведения:

$$\chi(s) = -[\mathbf{u}' \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n} - [\mathbf{u} \times \mathbf{n}'] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{n}' \times \mathbf{u}] = [\mathbf{n} \times \mathbf{n}'] \cdot \mathbf{u}.$$

Первое смешанное произведение равно нулю:  $[\mathbf{u}' \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}' \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{n}] = 0$ . Во втором переставлены местами векторное и скалярное произведения, и в последнем равенстве применено правило выталкивания в смешанном произведении (1.3), стр. 12.

Вычислим теперь производную от  $\mathbf{n} = \mathbf{r}''/k(s)$ :

$$\mathbf{n}' = \left( \frac{\mathbf{r}''}{k} \right)' = \frac{\mathbf{r}'''}{k} - \frac{k' \mathbf{r}''}{k^2} = \frac{\mathbf{r}'''}{k} - \frac{k'}{k} \mathbf{n}$$

и подставим в кручение. Так как  $[\mathbf{n} \times \mathbf{n}] = 0$ , вклад даёт только  $\mathbf{r}'''$ . Учитывая  $\mathbf{u} = \mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{r}''/k$ , окончательно получаем:

$$\chi(s) = \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{r}'''] \cdot \mathbf{u}}{k} = \frac{\mathbf{r}' \cdot [\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}''']}{k^2} = \frac{\mathbf{r}' \cdot [\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}''']}{\mathbf{r}''^2}.$$


---

- **H<sub>19</sub>** *Уравнение прямой* (стр.25)

Длина прямой  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{n}t$  в натуральной параметризации должна равняться  $s$ , см (1.10) стр. 19. Найдём её:

$$s = \int_0^t \sqrt{\mathbf{r}'^2} dt = \int_0^t \sqrt{\mathbf{n}^2} dt = |\mathbf{n}|t.$$

Поэтому направляющий вектор должен быть единичным  $|\mathbf{n}| = 1$ .

---



• **H<sub>20</sub>** Кривизна и кручение спирали (стр.21)

Находим длину спирали  $\mathbf{r}(t) = \{R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), V \omega t\}$ :

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \int_0^t \sqrt{\omega^2 R^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) + V^2 \omega^2} dt = \frac{\omega t}{a},$$

где  $a = 1/\sqrt{R^2 + V^2}$ . Переходим к натуральной параметризации:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s) &= \{ R \cos(as), R \sin(as), V as \}, \\ \mathbf{r}'(s) &= \{ -a R \sin(as), a R \cos(as), Va \}, \\ \mathbf{r}''(s) &= \{ -a^2 R \cos(as), -a^2 R \sin(as), 0 \}, \\ \mathbf{r}'''(s) &= \{ a^3 R \sin(as), -a^3 R \cos(as), 0 \}. \end{aligned}$$

Кривизна спирали равна:

$$k = |\mathbf{r}''| = a^2 R \sqrt{\cos^2(as) + \sin^2(as)} = a^2 R = \frac{R}{R^2 + V^2}.$$

Векторное произведение:

$$[\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'''] = \{0, 0, a^5 R^2\}.$$

Поэтому кручение равно:

$$\chi = \frac{\mathbf{r}' \cdot [\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}''']}{k^2} = \frac{Va^6 R^2}{a^4 R^2} = a^2 V = \frac{V}{R^2 + V^2}.$$

• **H<sub>21</sub>** Кривизна при произвольной параметризации (стр.25)

Воспользуемся соотношениями (1.9) на стр. 18:

$$\mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}} t' \quad \mathbf{r}'' = \ddot{\mathbf{r}} t'^2 + \dot{\mathbf{r}} t''.$$

В натуральной параметризации  $\mathbf{r}'$  является единичным вектором:

$$\mathbf{r}'^2 = 1 = \dot{\mathbf{r}}^2 t'^2 \quad \Rightarrow \quad t'^2 = 1/\dot{\mathbf{r}}^2,$$

$$\mathbf{r}' \mathbf{r}'' = 0 = \dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} t'^3 + \dot{\mathbf{r}}^2 t' t'' \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}}}{\dot{\mathbf{r}}^2} = -\dot{\mathbf{r}}^2 t''.$$

Квадрат кривизны равен квадрату второй производной в натуральной параметризации, поэтому, исключая  $t'$  и  $t''$ , получаем:

$$k^2 = \mathbf{r}''^2 = \ddot{\mathbf{r}}^2 t'^4 + 2\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} t'^2 t'' + \dot{\mathbf{r}}^2 t''^2 = \frac{\dot{\mathbf{r}}^2 \ddot{\mathbf{r}}^2 - (\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}})^2}{(\dot{\mathbf{r}}^2)^3} = \frac{[\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}]^2}{(\dot{\mathbf{r}}^2)^3}.$$

Извлекая корень, приходим к требуемому соотношению.

• **H<sub>22</sub>** *Кручение при произвольной параметризации* (стр.25)

Дополнительно к результатам предыдущей задачи необходимо вычислить третью производную:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \dot{\mathbf{r}} t', \\ \mathbf{r}'' &= \ddot{\mathbf{r}} t'^2 + \dot{\mathbf{r}} t'', \\ \mathbf{r}''' &= \ddot{\mathbf{r}} t'^3 + 3\ddot{\mathbf{r}} t' t'' + \dot{\mathbf{r}} t'''.\end{aligned}$$

Вычисляем смешанное произведение:

$$\mathbf{r}' \cdot [\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'''] = [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''] \cdot \mathbf{r}''' = t'^3 [\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}] (\ddot{\mathbf{r}} t'^3 + 3\ddot{\mathbf{r}} t' t'' + \dot{\mathbf{r}} t''').$$

Произведение второго и третьего слагаемых в круглых скобках на векторное произведение равно нулю. Например,  $[\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}]\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}[\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}] = 0$ , поэтому:

$$\chi = \frac{\mathbf{r}' \cdot [\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}''']}{k^2} = \frac{t'^6}{k^2} \dot{\mathbf{r}} \cdot [\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}] = \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot [\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}]}{[\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}]^2}.$$


---

• **H<sub>23</sub>** *Решение уравнений Френе для спирали* (стр.25)

Запишем уравнения Френе для постоянной кривизны и кручения:

$$\mathbf{u}' = k \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = \chi \mathbf{b} - k \mathbf{u}, \quad \mathbf{b}' = -\chi \mathbf{n}.$$

Возьмём производную второго уравнения:

$$\mathbf{n}'' = \chi \mathbf{b}' - k \mathbf{u}' = -(\chi^2 + k^2) \mathbf{n}.$$

Это осцилляторное уравнение для каждой компоненты вектора  $\mathbf{n}$  имеет решение:

$$\mathbf{n} = -\mathbf{a} \cos(\gamma s) - \mathbf{b} \sin(\gamma s),$$

где  $\gamma = \sqrt{\chi^2 + k^2}$ , а векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  являются единичными, ортогональными, так как  $\mathbf{n}^2 = 1$ . Знаки минус выбраны для удобства. Интегрируем уравнение  $\mathbf{u}' = k \mathbf{n}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{c} \frac{\chi}{\gamma} - \mathbf{a} \frac{k}{\gamma} \sin(\gamma s) + \mathbf{b} \frac{k}{\gamma} \cos(\gamma s).$$

Так как  $\mathbf{u}^2 = 1$ , то постоянный вектор  $\mathbf{c}$  (константа интегрирования) ортогонален обоим векторам  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и также является единичным. Осталось проинтегрировать уравнение  $\mathbf{r}' = \mathbf{u}$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{c} \frac{\chi}{\gamma} s + \mathbf{a} \frac{k}{\gamma^2} \cos(\gamma s) + \mathbf{b} \frac{k}{\gamma^2} \sin(\gamma s),$$

где  $\mathbf{r}_0$  – четвёртая константа интегрирования, определяющая “начальное” положение спирали ( $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a} k/\gamma^2$ ).

---

• **H<sub>24</sub>** *Сохранение момента импульса* (стр.25)

Берём производную произведения:

$$\frac{d[\mathbf{r} \times \mathbf{p}]}{dt} = [\mathbf{u} \times \mathbf{p}] + [\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}] = \frac{1}{m}[\mathbf{p} \times \mathbf{p}] + f(r) [\mathbf{r} \times \mathbf{r}] = 0.$$

где учтено, что импульс равен  $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ , а скорость  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ .

---

• **H<sub>25</sub>** *Сохранение энергии в центральном поле* (стр.25)

Вычислим сначала производную от модуля радиус-вектора:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\sqrt{\mathbf{r}^2}}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{r}^2}} 2\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}}{r}.$$

Берём теперь производную по времени от энергии ( $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p}/m$ ):

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r) \right] = \frac{\mathbf{p}\dot{\mathbf{p}}}{m} + V'(r) \frac{\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}}{r} = \frac{\mathbf{p}}{m} \left[ \dot{\mathbf{p}} + V'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] = 0.$$


---

• **H<sub>26</sub>** *Интеграл движения в кулоновском поле* (стр.25)

Раскроем двойное векторное произведение в векторе Рунге-Ленца:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{u} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{u}]] - \frac{\alpha}{r} \mathbf{r} = \mathbf{r}\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}(\mathbf{r}\mathbf{u}) - \frac{\alpha}{r} \mathbf{r}.$$

Берём производную по времени:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \underline{\mathbf{u}\mathbf{u}^2} + 2\mathbf{r}(\mathbf{u}\dot{\mathbf{u}}) - \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}\mathbf{u}) - \underline{\mathbf{u}(\mathbf{u}\mathbf{u})} - \mathbf{u}(\mathbf{r}\dot{\mathbf{u}}) - \frac{\alpha}{r} \mathbf{u} + \frac{\alpha}{r^2} \frac{(\mathbf{r}\mathbf{u})}{r} \mathbf{r}.$$

Подставляя уравнение движения  $\dot{\mathbf{u}} = -\alpha\mathbf{r}/r^3$ , получаем:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -2\alpha\mathbf{r} \frac{(\mathbf{u}\mathbf{r})}{r^3} + \frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{u}) + \alpha\mathbf{u} \frac{(\mathbf{r}\mathbf{r})}{r^3} - \frac{\alpha}{r} \mathbf{u} + \alpha \frac{(\mathbf{r}\mathbf{u})}{r^3} \mathbf{r} = 0.$$


---

• **H<sub>27</sub>** *Проверка аксиом векторного пространства* (стр.25)

Эти два множества удовлетворяют трём аксиомам, объединяющим операции различных множеств, например:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) f = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (f+g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Сложение функций и умножение их на число образуют коммутативное тело с “обычными” единицей и нулём. Производные относительно умножения (последовательность производных) и сложения – коммутативные и ассоциативные операции. До векторного пространства множеству  $\Omega$  не хватает единичных и обратных элементов относительно обеих операций умножения (композиция производных и их сложение).

---

## Векторный анализ

- **H<sub>28</sub>**  $\nabla f(r) = f'(r) \mathbf{n}$ ,  $\nabla(\mathbf{r}\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ . (стр.32)

В первом случае берётся производная сложной функции:

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{r}.$$

Во втором – градиент расписываем по компонентам:

$$\frac{\partial(xa_x + ya_y + za_z)}{\partial x} = a_x.$$

Аналогично для  $y$  и  $z$ -компонент градиента.

---

- **H<sub>29</sub>**  $\nabla \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$  (стр.33)

Навешиваем “индексы действия”:

$$\nabla \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \nabla_{\mathbf{A}} \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] + \nabla_{\mathbf{B}} \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}].$$

Применяем формулу “бац минус цаб”:

$$\mathbf{A}(\nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla_{\mathbf{B}}\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla_{\mathbf{B}}\mathbf{A}).$$

Переставляем поля, на которые действует набла справа от неё:

$$(\mathbf{B}\nabla_{\mathbf{A}})\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla_{\mathbf{B}}\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\nabla_{\mathbf{B}})\mathbf{B}.$$

Теперь можно “индексы действия” опустить.

---

- **H<sub>30</sub>**  $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  (стр.42)

По “бац минус цаб”  $\mathbf{A} \times [\nabla_{\mathbf{B}} \times \mathbf{B}] = \nabla_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\nabla_{\mathbf{B}})\mathbf{B}$  имеем:

$$\mathbf{A} \times [\nabla \times \mathbf{B}] + \mathbf{B} \times [\nabla \times \mathbf{A}] = \nabla_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}\mathbf{B}) + \nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\nabla_{\mathbf{B}})\mathbf{B} - (\mathbf{B}\nabla_{\mathbf{A}})\mathbf{A}.$$

Первые два слагаемых после равенства – это производная произведения:

$$\nabla(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}\mathbf{B}) + \nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}\mathbf{B}),$$

откуда следует тождество.

---

- **H<sub>31</sub>**  $[\mathbf{a} \times \nabla](\mathbf{r}\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . (стр.42)

$$\mathbf{c}[\mathbf{a} \times \nabla](\mathbf{r}\mathbf{b}) = [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]\nabla(\mathbf{r}\mathbf{b}) = [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]\mathbf{b} = \mathbf{c}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}].$$


---

- **H<sub>32</sub>**  $\nabla(\mathbf{r}/r^3) = 4\pi\delta(\mathbf{r})$ . (стр.42)

Проинтегрируем по объёму  $V$ , окружающему сферу  $S$ :

$$4\pi = \int_V 4\pi\delta(\mathbf{r})dV = \int_V \nabla \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV = \int_S \frac{\mathbf{r}d\mathbf{S}}{r^3} = \frac{r 4\pi r^2}{r^3} = 4\pi.$$

Интеграл от дельта-функции по  $V$  равен единице. Радиус-вектор перпендикулярен сфере, поэтому  $\mathbf{r}d\mathbf{S}$  постоянно и равно  $r$  на площади.

---

• **Н<sub>33</sub>** *Интегралы* (стр.42)

Применим теорему Гаусса для проекции первого интеграла на ось  $x$ :

$$\int_S x \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla(x\mathbf{a}) dV = a_x \int_V dV = a_x V,$$

где  $V$  – объём. Аналогично для проекций на оси  $y$  и  $z$ . Поэтому интеграл от  $\mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S})$  равен  $\mathbf{a}V$ .

Во втором случае умножим интеграл на произвольный вектор  $\mathbf{c}$ :

$$\int_S (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{c} \cdot d\mathbf{S}) = \int_V \nabla(\mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})) dV = \int_V (\mathbf{c} \nabla)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) dV = \int_V (\mathbf{c}\mathbf{a}) dV.$$

В силу произвольности  $\mathbf{c}$  его можно опустить. Интеграл равен  $\mathbf{a}V$ .

Третий интеграл умножим на произвольный  $\mathbf{c}$  и учтём  $[\nabla \times \mathbf{r}] = 0$ :

$$\int_S \mathbf{c} \cdot [\mathbf{r} \times d\mathbf{S}] = \int_S [\mathbf{c} \times \mathbf{r}] \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla[\mathbf{c} \times \mathbf{r}] dV = - \int_V [\nabla \times \mathbf{r}] \cdot \mathbf{c} dV = 0.$$

• **Н<sub>34</sub>** *Интеграл от  $d\mathbf{S}$  по полусфере* (стр.42)

Умножим на произвольный вектор  $\mathbf{a}$  и применим теорему Стокса:

$$\int_S \mathbf{a} d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int_S (\nabla \times [\mathbf{a} \times \mathbf{r}]) d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int_L [\mathbf{a} \times \mathbf{r}] d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \mathbf{a} \int_L [\mathbf{r} \times d\mathbf{r}] = \pi r^2 \mathbf{a} \mathbf{k},$$

На окружности, проходящей по экватору (начало координат в центре сферы), радиус-вектор  $\mathbf{r}$  перпендикулярен  $d\mathbf{r}$  и постоянен. Поэтому имеем  $\mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \mathbf{k} r dl$ , где  $\mathbf{k}$  – единичный вектор, перпендикулярный плоскости экватора (контура), а  $dl$  – элемент длины окружности, полная длина которой равна  $2\pi r$ . Поэтому  $\int d\mathbf{S} = \pi r^2 \mathbf{k}$ . Интеграл по всей сфере будет равен нулю.

• **Н<sub>35</sub>** *Закон Архимеда* (стр.42)

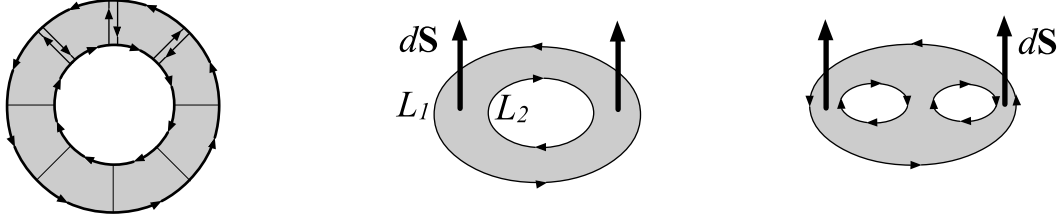
Сила давления воды всегда направлена перпендикулярно поверхности тела и равна весу столба жидкости  $mg = \rho g V = \rho g z S$ , где уровень поверхности воды находится при  $z = 0$ . Пусть  $\mathbf{g}$  – вектор ускорения свободного падения. Тогда силу можно записать в векторном виде  $\mathbf{F} = -(\mathbf{g}\mathbf{r})\rho d\mathbf{S}$  (минус, так как действует против вектора площади, направленного наружу тела). Интегрируем по всей поверхности:

$$\mathbf{F} = -\rho \int_S (\mathbf{g}\mathbf{r}) d\mathbf{S} = -\rho \mathbf{g} V,$$

где учтено значение второго интеграла задачи ( $\leq$  Н<sub>33</sub>) и  $V$  – объём тела. Сила направлена против ускорения свободного падения (т.е. “вверх”).

• **Н<sub>36</sub>** Теорема Стокса для круга с дырками (стр.42)

Аналогично стр. 37, область разбивается на малые площадки и контурные интегралы на прилегающих границах сокращаются. Остаются интегралы по внешней и внутренним границам, окружающим дырки в поверхности (первый рисунок для области с одной дыркой):



Поэтому контурное интегрирование по краям дырки проводится в обратную сторону по сравнению с внешней границей. Теорема Стокса, например, для одной дырки имеет вид:

$$\oint_{L_1} \mathbf{A} d\mathbf{r} + \oint_{L_2} \mathbf{A} d\mathbf{r} = \int_S [\nabla \times \mathbf{A}] d\mathbf{S}.$$

Термины “дырка” и “внешняя граница” условны. Например, второй рисунок можно деформировать в цилиндр, для которого “внешний” и “внутренний” контуры станут контурами оснований цилиндра (представьте круг, как резиновую плёнку, и потяните за края дырки вверх).

• **Н<sub>37</sub>** Ротор векторного поля (стр.42)

Применяя формулу “бац минус цаб”, для  $\nabla \times \mathbf{A}$  имеем:

$$\nabla \times \left[ \frac{\mathbf{kr}}{r} \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{k}]}{[\mathbf{r} \times \mathbf{k}]^2 + a^2} \right] = (\mathbf{k} \nabla) \frac{\mathbf{r}(\mathbf{kr})/r}{[\mathbf{r} \times \mathbf{k}]^2 + a^2} - \mathbf{k} \left[ \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}(\mathbf{kr})/r}{[\mathbf{r} \times \mathbf{k}]^2 + a^2} \right].$$

Учтём, что  $\nabla \mathbf{r} = \mathbf{3}$ ,  $\nabla r = \mathbf{r}/r$  и справедливы соотношения:

$$(\mathbf{k} \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{k}, \quad (\mathbf{k} \nabla)(\mathbf{kr}) = \mathbf{k}^2 = 1, \quad (\mathbf{k} \nabla)r = \frac{\mathbf{kr}}{r}, \quad [\mathbf{r} \times \mathbf{k}]^2 = r^2 - (\mathbf{rk})^2.$$

Беря, как производные сложной функции, получаем:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{k}]^2}{[\mathbf{r} \times \mathbf{k}]^2 + a^2} - \frac{2\mathbf{k}(\mathbf{kr})}{r} \frac{a^2}{([\mathbf{r} \times \mathbf{k}]^2 + a^2)^2}.$$

Первое слагаемое при  $a = 0$  не имеет особенностей в точке  $|\mathbf{r} \times \mathbf{k}| = 0$ , поэтому в этом слагаемом можно устремить  $a \rightarrow 0$ . Во втором этого сделать нельзя. Если  $|\mathbf{r} \times \mathbf{k}| \neq 0$ , то второе слагаемое при  $a \rightarrow 0$  стремится к нулю. Однако при  $|\mathbf{r} \times \mathbf{k}| = 0$  оно бесконечно и выражается через функцию Дирака. Окончательно, при малых  $a$ , имеем:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{2\mathbf{k}(\mathbf{kr})}{r} \frac{a^2}{([\mathbf{r} \times \mathbf{k}]^2 + a^2)^2}.$$

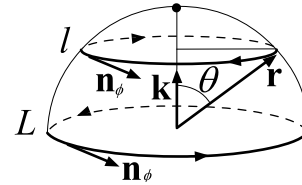
• **Н<sub>38</sub>** *Площадь полусферы через теорему Стокса (стр.42)*

Найдём площадь единичной полусферы (для определённости северного полушария) при помощи теоремы Стокса. На сфере  $r = \text{const}$ , поэтому  $\int \mathbf{r} d\mathbf{S}$  равно площади полусферы  $r 4\pi r^2/2$ :

$$2\pi = \int_S \frac{\mathbf{r} d\mathbf{S}}{r^3} = \int_S [\nabla \times \mathbf{A}] d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{r},$$

где замкнутый контур  $L$  – линия экватора. Чтобы вычислить контурный интеграл, необходимо найти такое векторное поле, ротор которого пропорционален радиус-вектору:  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{r}/r^3$ . На самом деле такого векторного поля не существует! Чтобы ротор был ненулевым, векторное поле должно циркулировать, что из соображений симметрии не может приводить к сферически симметричному ротору. Тем не менее, в задаче ( $\leq$  Н<sub>37</sub>) мы нашли поле, ротор которого на сфере равен  $\mathbf{r}/r^3$  везде, кроме точек северного и южного полюсов, в которых  $[\mathbf{r} \times \mathbf{k}]^2 = r^2 \sin^2 \theta = 0$ , где  $\theta$  – угол радиус-вектора с осью  $z$  (единичным вектором  $\mathbf{k}$ ). Чтобы вычислить площадь полусферы, выколем точку северного полюса. Площадь от этого не изменится, но теорема Стокса будет уже с двумя контурами см. ( $\leq$  Н<sub>36</sub>). На рисунке контур вокруг полюса нарисован большим для ясности чертежа.

$$\mathbf{A} = -\frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{n}_\phi.$$



Единичный вектор  $\mathbf{n}_\phi$  для обоих контуров направлен по касательной к контурам по часовой стрелке (см. рисунок). Он возникает из векторного произведения  $\mathbf{k} \times \mathbf{r} = \mathbf{n}_\phi r \sin \theta$  и всегда перпендикулярен плоскости векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{r}$ . Поэтому по теореме Стокса имеем:

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{r} + \oint_l \mathbf{A} d\mathbf{r} = -\frac{\cos \theta}{r \sin \theta} 2\pi r \Big|_{\theta=\pi/2} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} 2\pi r \sin \theta \Big|_{\theta \rightarrow 0} = 2\pi.$$

где учтено, что радиус контура  $l$  равен  $r \sin \theta$  и этот контур направлен против вектора  $\mathbf{n}_\phi$ , см. ( $\leq$  Н<sub>36</sub>). При стягивании контура  $l$  к северному полюсу  $\theta \rightarrow 0$  получается правильное конечное значение  $2\pi$  (см. первую формулу задачи). А вот контур по большой границе  $L$  (при  $\theta = \pi/2$ ) оказывается нулевым. Поэтому, если бы мы не учли особенность при  $\theta = 0$  у ротора, то получили бы нулевую площадь.

• **H<sub>39</sub>** Поток электрического поля движущегося заряда (стр.43)

В сферических координатах (стр.70) элемент площади сферы радиуса  $r$  равен  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ , а вектор  $d\mathbf{S}$  параллелен  $\mathbf{r}$  (начало координат в центре сферы). Направляя ось  $z$  вдоль скорости  $\mathbf{v}$  так, что  $\mathbf{r}\mathbf{v} = rv \cos \theta$ , получаем:

$$\int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = Q \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{1-v^2}{(1-v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \sin \theta d\theta = 4\pi Q,$$

где в интеграле сделана замена  $z = \cos \theta$ :

$$\int_0^\pi \frac{(1-v^2) \sin \theta d\theta}{(1-v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \int_{-1}^1 \frac{(1-v^2) dz}{(1-v^2 + v^2 z^2)^{3/2}} = \frac{z}{(1-v^2 + v^2 z^2)^{1/2}} \Big|_{-1}^{+1} = 2.$$

• **H<sub>40</sub>** Уравнение для электрического поля (стр.43)

Дивергенцию от электрического поля берём, как производную произведения, выделив сингулярность как отдельный сомножитель:

$$\nabla \mathbf{E} = Q \nabla \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \frac{1-v^2}{(1-[\mathbf{n} \times \mathbf{v}]^2)^{3/2}} + \frac{Q}{r^3} (\mathbf{r} \nabla) \frac{1-v^2}{(1-[\mathbf{n} \times \mathbf{v}]^2)^{3/2}}.$$

Действие наблы в первом слагаемом равно  $4\pi\delta(\mathbf{r})$ . Для вычисления второго слагаемого заметим, что  $[\mathbf{n} \times \mathbf{v}]^2 = \mathbf{v}^2 - (\mathbf{n}\mathbf{v})^2$ , поэтому:

$$\nabla \frac{1}{(1-[\mathbf{n} \times \mathbf{v}]^2)^{3/2}} = -\frac{3 \cdot 2(\mathbf{n}\mathbf{v}) \nabla(\mathbf{n}\mathbf{v})}{2 (1-[\mathbf{n} \times \mathbf{v}]^2)^{5/2}} = -\frac{3(\mathbf{n}\mathbf{v}) (\mathbf{v} - (\mathbf{v}\mathbf{n})\mathbf{n})}{r (1-[\mathbf{n} \times \mathbf{v}]^2)^{5/2}}.$$

Так как  $\mathbf{n}(\mathbf{v} - (\mathbf{v}\mathbf{n})\mathbf{n}) = 0$ , второе слагаемое в  $\nabla \mathbf{E}$  равно нулю. Поэтому для движущегося заряда  $Q$  по-прежнему справедлив закон Гаусса в дифференциальной форме:  $\nabla \mathbf{E} = 4\pi Q \delta(\mathbf{r})$ .

• **H<sub>41</sub>** Уравнение для магнитного поля (стр.43)

Дивергенция магнитного поля равна:

$$\nabla \mathbf{B} = \nabla [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] = -\mathbf{v} \cdot [\nabla \times \mathbf{E}].$$

Найдём  $[\nabla \times \mathbf{E}]$ . Учитывая, что  $[\nabla \times \mathbf{r}] = 0$ , имеем:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{Q}{r^3} [\mathbf{r} \times \nabla] \frac{1-v^2}{(1-[\mathbf{n} \times \mathbf{v}]^2)^{3/2}} = \frac{Q}{r^3} [\mathbf{n} \times \mathbf{v}] \frac{3(\mathbf{n}\mathbf{v}) (1-v^2)}{(1-[\mathbf{n} \times \mathbf{v}]^2)^{5/2}}$$

(см. градиент из предыдущей задачи). Умножая это выражение на скорость, в силу  $\mathbf{v} \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{v}] = [\mathbf{v} \times \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} = 0$  получаем  $\nabla \mathbf{B} = 0$ .



• **Н<sub>42</sub>** Уравнение непрерывности заряда (стр.43)

Умножим уравнение для ротора магнитного поля

$$[\nabla \times \mathbf{B}] = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

слева на оператор  $\nabla$ :

$$\nabla[\nabla \times \mathbf{B}] = [\nabla \times \nabla] \mathbf{B} = 0 = 4\pi \nabla \mathbf{j} + \frac{\partial \nabla \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Учитывая, что  $\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho$ , получим *уравнение непрерывности*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0.$$

При помощи теоремы Гаусса проинтегрируем по объёму:

$$\frac{dQ}{dt} + \int_V \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0,$$

где  $Q$  – интеграл по объёму от  $\rho$ , равен полному заряду внутри объёма. Так как  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ , то уравнение непрерывности выражает изменение заряда в объёме в результате его переноса через поверхность:  $\rho \mathbf{v} d\mathbf{S} = \rho d\mathbf{r} d\mathbf{S} / dt$ . За время  $dt$  прилегающий к поверхности объём  $d\mathbf{r} d\mathbf{S}$  покинут заряды, которые уменьшат (если  $\rho > 0$ ) общий заряд в объёме.

---

• **Н<sub>43</sub>** Энергия и импульс электромагнитного поля (стр.43)

Введём следующие величины:

$$W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}, \quad \mathbf{P} = \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{4\pi}.$$

При помощи уравнений Максвелла вычислим производную от  $W$  по времени:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}{4\pi} = \frac{\mathbf{E}[\nabla \times \mathbf{B}] - \mathbf{B}[\nabla \times \mathbf{E}]}{4\pi} - \mathbf{E} \mathbf{j}.$$

С другой стороны, вычисляя дивергенцию вектора  $\mathbf{P}$  по времени, как производную произведения, имеем:

$$4\pi \nabla \mathbf{P} = \nabla[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B}[\nabla \times \mathbf{E}] - \mathbf{E}[\nabla \times \mathbf{B}].$$

Подставляя выражение для дивергенции в производную по времени от  $W$ , получаем уравнение, выражающее, как и уравнение непрерывности для зарядов, закон сохранения:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathbf{E} \mathbf{j} + \nabla \mathbf{P} = 0.$$


---

• **Н<sub>44</sub>** Уравнения Максвелла для потенциалов (стр.43)

Так как дивергенция ротора равна нулю, из равенства нулю дивергенции магнитного поля следует:

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B} = [\nabla \times \mathbf{A}],$$

где  $\mathbf{A}$  называется *векторным потенциалом*.

Закон электромагнитной индукции Фарадея при помощи векторного потенциала можно переписать в следующем виде:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Аналогично дивергенции, если ротор некоторого векторного поля равен нулю, то это поле выражается через градиент скалярной функции  $-\nabla\varphi$ . Таким образом, *решение* двух уравнений Максвелла выражается через скалярную  $\varphi$  и векторную  $\mathbf{A}$  функции:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = [\nabla \times \mathbf{A}].$$

Подставляя эти соотношения в оставшуюся пару уравнений

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

получаем:

$$\square\varphi + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla \mathbf{A} \right) = -4\pi\rho, \quad \square\mathbf{A} - \nabla \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla \mathbf{A} \right) = -4\pi\mathbf{j},$$

где  $\square$  – дифференциальный оператор Даламбера:

$$\square = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

а  $\Delta$  – как обычно, оператор Лапласа.

Потенциалы определены неоднозначно. Точнее, при заменах:

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla f, \quad \varphi \mapsto \varphi - \frac{\partial f}{\partial t},$$

где  $f$  – произвольная функция координат и времени, значения электрического и магнитного полей не изменятся. Подобный произвол позволяет наложить на потенциалы дополнительное условие, при котором выражение в круглых скобках обращается в ноль (*калибровка Лоренца*). Если  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  ему не удовлетворяют, то с их помощью подбирается такая  $f$ , чтобы калибровка выполнялась (см. стр. 41). В результате уравнения принимают симметричный вид  $\square\varphi = -4\pi\rho$  и  $\square\mathbf{A} = -4\pi\mathbf{j}$ .

---

• **H<sub>45</sub>** *Электромагнитные волны* (стр.43)

Запишем уравнения Максвелла в пустоте  $\rho = 0$ :

$$\nabla \mathbf{E} = \nabla \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Рассмотрим решения уравнений Максвелла, в которых электрическое и магнитное поля зависят от следующей комбинации координат и времени  $u = \mathbf{n}\mathbf{r} - t$ , где  $\mathbf{n}$  - некоторый постоянный вектор:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(u), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(u), \quad u = \mathbf{n}\mathbf{r} - t.$$

Вычислим производные по координатам и времени от  $j$ -той компоненты электрического поля:

$$\nabla_i E_j = \frac{\partial E_j}{\partial r_i} = \frac{dE_j}{du} \frac{\partial u}{\partial r_i} = n_i \frac{dE_j}{du}, \quad \frac{\partial E_j}{\partial t} = -\frac{dE_j}{du},$$

и аналогично для магнитного поля. Подставляя эти выражения в уравнения Максвелла в пустоте для дивергенций, имеем:

$$\frac{d(\mathbf{n}\mathbf{E})}{du} = 0, \quad \frac{d(\mathbf{n}\mathbf{B})}{du} = 0.$$

Аналогично, для роторов:

$$\frac{d}{du} ([\mathbf{n} \times \mathbf{E}] - \mathbf{B}) = 0, \quad \frac{d}{du} ([\mathbf{n} \times \mathbf{B}] + \mathbf{E}) = 0.$$

Интегрируя эти уравнения по  $u$  и опуская константы интегрирования, которые соответствуют постоянным составляющим электрического и магнитного полей, получаем:

$$\mathbf{n}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n}\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{E} = -[\mathbf{n} \times \mathbf{B}].$$

Подставляя третье соотношение в четвёртое:

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]] = -\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{E}) + \mathbf{n}^2 \mathbf{E} = \mathbf{n}^2 \mathbf{E},$$

приходим к выводу, что вектор  $\mathbf{n}$  должен быть единичным  $\mathbf{n}^2 = 1$ .

Таким образом, мы получили нетривиальное решение уравнений Максвелла в пустоте:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{n}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1,$$

в котором функция напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}$  может *произвольным* образом зависеть от  $u$ . Обратим внимание, что векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{n}$  взаимно перпендикулярны друг другу.

---

• **H<sub>46</sub>** *Идеальная жидкость* (стр.43)

Рассмотрим небольшую область жидкости с постоянной массой  $m$ . Эта область должна содержать большое число молекул, чтобы сохранялась модель непрерывности. Однако при этом она считается достаточно маленькой. При движении жидкости с переменной плотностью объём и форма этой области может изменяться, однако её масса остаётся неизменной:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0.$$

Если движение происходит без трения (идеальная жидкость без вязкости), то на эту выделенную область действуют сила тяжести  $m\mathbf{g}$  и сила давления со стороны окружающей жидкости. Производная импульса по времени равна суммарной силе:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{u} \rho dV = \int_V \mathbf{g} \rho dV - \int_S p d\mathbf{S}.$$

Напомним, что вектор площади направлен из объёма, поэтому сила со стороны жидкости на область массы  $m$  стоит со знаком минус. Так как масса неизменна, полную производную по времени можно занести под интеграл, подействовав только на скорость ( $dm/dt = d(\rho dV)/dt = 0$ ). Интеграл по поверхности от давления по теореме Гаусса преобразовывается в интеграл по объёму от  $\nabla p$ . В результате для малого объёма, опуская интегралы, имеем:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p.$$

Полная производная от скорости  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x, y, z)$  равна:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}.$$

Поэтому окончательно получаем *уравнение Эйлера*:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho}.$$

Это уравнение движения идеальной (невязкой) жидкости. Второе важное уравнение – *уравнение непрерывности*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

выражающее закон сохранения массы (аналогично заряду в электродинамике).

---

- **H<sub>47</sub>** *Закон Бернулли* (стр.43)

В тождество ( $\leq$  H<sub>30</sub>)

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times [\nabla \times \mathbf{B}] + \mathbf{B} \times [\nabla \times \mathbf{A}] + (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A}$$

подставим  $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{u}$ :

$$\nabla \mathbf{u}^2 = 2\mathbf{u} \times [\nabla \times \mathbf{u}] + 2(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}.$$

Для безвихревого ( $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ), стационарного ( $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$ ) движения жидкости, используя уравнения Эйлера, получаем:

$$\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^2 = (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho}.$$

Если жидкость несжимаема ( $\rho = \text{const}$ ):

$$\nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{p}{\rho} - \mathbf{g} \mathbf{r} \right) = 0.$$

Откуда следует требуемое тождество:

$$\rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} + p + \rho g h = \text{const},$$

где  $h = -\mathbf{g} \mathbf{r}$  – высота над некоторым уровнем текущей точки жидкости. Это уравнение выражает *закон Бернулли*. Если скорость жидкости увеличивается, давление уменьшается, и наоборот. Первое слагаемое называют динамическим давлением, второе – статическим, третье – весовым.

- **H<sub>48</sub>** *Стационарная жидкость* (стр.43)

Уравнение неподвижной жидкости в соответствии с уравнением Эйлера имеет вид:

$$\rho \mathbf{g} = \nabla p.$$

Так как ротор градиента  $\nabla \times \nabla p$  равен нулю, имеем:

$$\nabla \times (\rho \mathbf{g}) = \nabla \rho \times \mathbf{g} + \rho \nabla \times \mathbf{g} = 0.$$

Умножив скалярно на  $\mathbf{g}$ , получим:

$$\mathbf{g}[\nabla \times \mathbf{g}] = 0.$$

Таким образом, ротор силового поля (например, силы тяжести) должен быть перпендикулярным полю. Частным случаем поля, в котором жидкость может быть равновесной, является потенциальное поле  $\nabla \times \mathbf{g} = 0$ .

## Матрицы

- **H<sub>49</sub>** *Определитель произведения матриц* (стр.48)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Произведение определителей слева равно:  $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$   
или

$$a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}.$$

С другой стороны, определитель произведения матриц равен:

$$(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}).$$

Приводя подобные, убеждаемся, что выражения совпадают.

---

- **H<sub>50</sub>** *Обратные матрицы* (стр.60)

Определитель матрицы равен 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы равен -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$


---

- **H<sub>51</sub>** *Собственные значения* (стр.60)

Запишем характеристическое уравнение:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Решения квадратного уравнения равны  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Для каждого собственного значения решим систему уравнений. Например, для  $\lambda_1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} \Rightarrow u_2^{(1)} = -2u_1^{(1)}.$$

Аналогично  $u_1^{(2)} = 2u_2^{(2)}$ . Поэтому с учётом нормировки имеем:

$$u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$


---

• **Н<sub>52</sub>** Собственные значения симметричной матрицы  $2 \times 2$  (стр.60)

Симметричная матрица  $2 \times 2$  определяется тремя параметрами. Запишем для неё характеристическое уравнение:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} a - \lambda & c \\ c & b - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - c^2 = 0.$$

Его решение:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( a + b \pm \sqrt{(a - b)^2 + 4c^2} \right).$$

Очевидно, что выражение под корнем всегда неотрицательно. Поэтому собственные значения действительны. Спектр вырожден (собственные значения совпадают), когда  $a = b$ ,  $c = 0$ , т.е. матрица пропорциональна единичной матрице.

• **Н<sub>53</sub>** Тождества для коммутаторов матриц (стр.60)

Тождества проверяются прямым раскрытием коммутаторов в соответствии с их определением  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ . Антисимметричность:

$$\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -(\mathbf{BA} - \mathbf{AB}) = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}.$$

Дистрибутивность:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) - (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = (\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) + (\mathbf{AC} - \mathbf{CA}).$$

Коммутатор произведения слева:  $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = \mathbf{ABC} - \mathbf{BCA}$ , а справа:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}] = (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\mathbf{C} + \mathbf{B}(\mathbf{AC} - \mathbf{CA}) = \mathbf{ABC} - \mathbf{BCA}.$$

Тождество Якоби:  $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] = 0$  равно:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}(\mathbf{BC} - \mathbf{CB}) - (\mathbf{BC} - \mathbf{CB})\mathbf{A} \\ & + \mathbf{C}(\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) - (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\mathbf{C} \\ & + \mathbf{B}(\mathbf{CA} - \mathbf{AC}) - (\mathbf{CA} - \mathbf{AC})\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, убеждаемся, что получается ноль.

• **Н<sub>54</sub>** Доказательство:  $\mathbf{1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}^{-1}$  (стр. 60, 216)

Умножим матричное уравнение слева на  $\mathbf{A}^{-1}$ , а справа на  $\mathbf{B}^{-1}$ :

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{G}$$

С другой стороны:  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^{-1}$ . Откуда следует  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}^{-1}$ .

• **H<sub>55</sub>** *Матрицы Паули* (стр.60)

Для матрицы  $\mathbf{S}_1$  характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1.$$

Аналогично для матриц  $\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ :  $\lambda = \pm 1$ . Коммутатор  $[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2]$  проверяется прямым умножением матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Откуда:  $[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2] = 2i\mathbf{S}_3$ . Аналогично:  $[\mathbf{S}_3, \mathbf{S}_1] = 2i\mathbf{S}_2$ ,  $[\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3] = 2i\mathbf{S}_1$ . Учитывая определение  $\varepsilon_{ijk}$ , эти три коммутатора можно объединить в  $[\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\mathbf{S}_k$ . Например:  $[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2] = 2i\varepsilon_{123}\mathbf{S}_3 = 2i\mathbf{S}_3$ , и т.д.

• **H<sub>56</sub>** *Проверка  $\det e^{\mathbf{A}} = e^{\text{Tr}\mathbf{A}}$  для диагональной матрицы* (стр.60)

Для диагональной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}, \dots \Rightarrow e^{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что  $\det e^{\mathbf{A}} = e^{a_1} \cdot e^{a_2} \dots = e^{a_1+a_2+\dots} = e^{\text{Tr}\mathbf{A}}$ .

• **H<sub>57</sub>**  *$d \ln \det \mathbf{A} = \text{Tr}(\mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A})$*  (стр.60)

По определению дифференциала  $d \ln \det \mathbf{A}$  равен:

$$\ln \det(\mathbf{A} + d\mathbf{A}) - \ln \det(\mathbf{A}) = \ln \det(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} + d\mathbf{A})) = \ln \det(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A}).$$

Используя малость  $d\mathbf{A}$  и тождество  $\det e^{\mathbf{A}} = e^{\text{Tr}\mathbf{A}}$ , окончательно имеем:

$$\ln \det(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A}) \approx \ln \det e^{(\mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A})} = \ln e^{\text{Tr}(\mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A})} = \text{Tr}(\mathbf{A}^{-1}d\mathbf{A}).$$

• **H<sub>58</sub>** *Тождества для следа* (стр.60)

По определению следа имеем:

$$\text{Tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = A_{ik}B_{ki} = B_{ki}A_{ik} = \text{Tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}).$$

Аналогично:

$$\text{Tr}(\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = B_{ik}^{-1}A_{kj}B_{ji} = B_{ji}B_{ik}^{-1}A_{kj} = \delta_{jk}A_{kj} = A_{jj} = \text{Tr}\mathbf{A}.$$

• **H<sub>59</sub>** *Компоненты символа Леви-Чевиты* (стр.61)

$$\varepsilon_{1ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{2ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{3ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



---

• **H<sub>60</sub>** Упрощение выражения (стр.61)

Сворачиваем с символом Кронекера и переименовываем индексы:

$$x_i x_i + \delta_{pq} x_p x_q - 2x_k x_k = x_i x_i + x_p x_p - 2x_k x_k = x_i x_i + x_i x_i - 2x_i x_i = 0.$$


---

• **H<sub>61</sub>** Упрощение выражения (стр.61)

Последовательно сворачиваем с символом Кронекера:

$$\delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{kl} = \delta_{ik} \delta_{kl} = \delta_{il}.$$


---

• **H<sub>62</sub>** Производная в компонентах (стр.61)

Берём, как производную произведения:

$$\partial_k (x_i x_j) = \delta_{ki} x_j + x_i \delta_{kj}.$$

Берём ещё одну производную:

$$\partial^2 (x_i x_j) = \partial_k \partial_k (x_i x_j) = \delta_{ki} \delta_{kj} + \delta_{ik} \delta_{kj} = 2\delta_{ki} \delta_{kj} = 2\delta_{ij}.$$


---

• **H<sub>63</sub>** Производная в компонентах (стр.61)

$$(\mathbf{a} \nabla) [\mathbf{r} \times \mathbf{b}]_i = a_k \partial_k \varepsilon_{ipq} x_p b_q = a_k \varepsilon_{ipq} \delta_{pk} b_q = \varepsilon_{ipq} a_p b_q = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i.$$


---

• **H<sub>64</sub>** Производная в компонентах (стр.61)

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r}^2 + a^2)^{3/2}} = \partial_i \frac{x_i}{(x_j x_j + a^2)^{3/2}} = \frac{\delta_{ii}}{(x_j x_j + a^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{2x_i x_j \delta_{ij}}{(x_j x_j + a^2)^{5/2}}.$$

или

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{r}^2 + a^2)^{3/2}} = 3 \frac{x_j x_j + a^2 - x_j x_j}{(x_j x_j + a^2)^{5/2}} = \frac{3a^2}{(x_j x_j + a^2)^{5/2}}.$$


---

• **H<sub>65</sub>** Тождества для символа Леви-Чевиты (стр.61)

Проще всего воспользоваться тождеством:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}.$$

Сворачивая по индексам  $j$  и  $\beta$ , получаем

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pj k} = \delta_{ip} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{jp} = 3\delta_{ip} - \delta_{ip} = 2\delta_{ip}.$$

Сворачивая по  $i$  и  $p$ , получаем второе тождество:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 2 \cdot 3 = 6.$$


---

• **H<sub>66</sub>** Упрощение выражения (стр.61)

К первой и второй паре символов Леви-Чевиты применяем формулу их свёртки по одному индексу:

$$\varepsilon_{kji}\varepsilon_{krs}\varepsilon_{imp}\varepsilon_{pst}a_ja_rb_mc_t = (\delta_{jr}\delta_{is} - \delta_{js}\delta_{ri})(\delta_{is}\delta_{mt} - \delta_{it}\delta_{ms})a_ja_rb_mc_t =$$

перемножая скобки:

$$= (\delta_{jr}\delta_{is}\delta_{is}\delta_{mt} - \delta_{jr}\delta_{is}\delta_{it}\delta_{ms} - \delta_{js}\delta_{ri}\delta_{is}\delta_{mt} + \delta_{js}\delta_{ri}\delta_{it}\delta_{ms})a_ja_rb_mc_t =$$

сворачиваем символы Кронекера:

$$= (3\delta_{jr}\delta_{mt} - \delta_{jr}\delta_{tm} - \delta_{jr}\delta_{mt} + \delta_{jm}\delta_{rt})a_ja_rb_mc_t = (\delta_{jr}\delta_{mt} + \delta_{jm}\delta_{rt})a_ja_rb_mc_t =$$

ещё раз сворачиваем с векторами:

$$= a_ja_jb_mb_m + a_ja_rb_jc_r = \mathbf{a}^2(\mathbf{bc}) + (\mathbf{ab})(\mathbf{ac}).$$

• **H<sub>67</sub>** Обратная матрица (стр.61)

Ищем обратную матрицу в виде  $a_{ij}^{-1} = \delta_{ij} + Ax_ix_j$ . По определению:  $a_{ik}^{-1}a_{kj} = (\delta_{ik} + Ax_ix_k)(\delta_{kj} + x_kx_j) = \delta_{ij}$ . Перемножая скобки, получаем:

$$x_ix_j(1 + A + Ax_kx_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{1 + \mathbf{x}^2}.$$

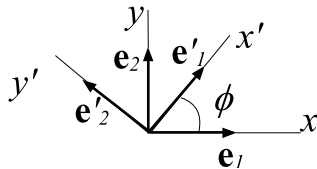
• **H<sub>68</sub>** Производная в компонентах (стр.61)

$$(\nabla \times [\mathbf{a} \times \mathbf{r}])_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}a_lx_m = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}a_l\delta_{jm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klj}a_l = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}a_l.$$

Воспользовавшись тождеством из задачи ( $\leq$  H<sub>65</sub>), стр. 177, имеем:

$$(\nabla \times [\mathbf{a} \times \mathbf{r}])_i = 2\delta_{il}a_l = 2a_i.$$

• **H<sub>69</sub>** Матрица поворотов в 2-мерном пространстве (стр.61)



$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}'_2\mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Длина базисных векторов равна единице, следовательно, их скалярное произведение равно косинусу угла между ними. Кроме этого, учтено, что  $\cos(\pi/2 \pm \phi) = \mp \sin(\phi)$ . Прямое перемножением матриц несложно убедиться, что выполняется свойство ортогональности:  $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{1}$ . Заметим также, что определитель матрицы поворота равен единице:  $\det \mathbf{R} = 1$ .

• **Н<sub>70</sub>** Ортогональность матрицы поворотов  $R_{ij}$  (стр.59)

Чтобы показать ортогональность матрицы:

$$R_{ij} = \delta_{ij} \cos \alpha + n_i n_j (1 - \cos \alpha) + \varepsilon_{ijk} n_k \sin \alpha,$$

необходимо записать её транспонированную версию:

$$R_{ij}^T = \delta_{ji} \cos \alpha + n_j n_i (1 - \cos \alpha) + \varepsilon_{jik} n_k \sin \alpha$$

и провести свёртку с исходной (для сокращения  $c_\alpha = \cos \alpha$ ,  $s_\alpha = \sin \alpha$ ):

$$\begin{aligned} R_{ik} R_{kj}^T = & (\delta_{ik} c_\alpha + n_i n_k (1 - c_\alpha) + \varepsilon_{ikp} n_p s_\alpha) \\ & (\delta_{jk} c_\alpha + n_j n_k (1 - c_\alpha) + \varepsilon_{jkq} n_q s_\alpha). \end{aligned}$$

Перемножая и сворачивая символы Кронекера, имеем:

$$\begin{aligned} R_{ik} R_{kj}^T = & \delta_{ij} c_\alpha^2 + n_i n_j c_\alpha (1 - c_\alpha) + \varepsilon_{jiq} n_q c_\alpha s_\alpha \\ & + n_i n_j c_\alpha (1 - c_\alpha) + n_i n_j (1 - c_\alpha)^2 \\ & + \varepsilon_{ijp} n_p s_\alpha c_\alpha + \varepsilon_{ikp} \varepsilon_{jkq} n_p n_q s_\alpha^2. \end{aligned}$$

где сразу учтено, что  $n_k n_k = \mathbf{n}^2 = 1$ , а свёртки типа  $\varepsilon_{jkq} n_k n_q = 0$ , так как символ Леви-Чивиты антисимметричен по любой паре индексов, а произведение  $n_k n_q$  по индексам  $k$  и  $q$  симметрично. Слагаемые  $\varepsilon_{jiq} n_q c_\alpha s_\alpha$  и  $\varepsilon_{ijp} n_p s_\alpha c_\alpha$  сокращаются (индексы  $p$  и  $q$  немые, поэтому их можно обозначить одной буквой, а  $\varepsilon_{jiq} = -\varepsilon_{ijq}$ ). Для свёртки произведения двух символов Леви-Чивиты воспользуемся тождеством (стр. 54):

$$\varepsilon_{ikp} \varepsilon_{jkq} n_p n_q = (\delta_{ij} \delta_{pq} - \delta_{iq} \delta_{pj}) n_p n_q = \delta_{ij} - n_i n_j.$$

Поэтому:

$$R_{ik} R_{kj}^T = \delta_{ij} (c_\alpha^2 + s_\alpha^2) + n_i n_j (2c_\alpha (1 - c_\alpha) + (1 - c_\alpha)^2 - s_\alpha^2) = \delta_{ij},$$

что и требовалось доказать.

• **Н<sub>71</sub>** Матрица поворотов в 3-мерном пространстве (стр.61)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c_\alpha + n_x^2 (1 - c_\alpha) & n_x n_y (1 - c_\alpha) + n_z s_\alpha & n_x n_z (1 - c_\alpha) - n_y s_\alpha \\ n_x n_y (1 - c_\alpha) - n_z s_\alpha & c_\alpha + n_y^2 (1 - c_\alpha) & n_y n_z (1 - c_\alpha) + n_x s_\alpha \\ n_x n_z (1 - c_\alpha) + n_y s_\alpha & n_y n_z (1 - c_\alpha) - n_x s_\alpha & c_\alpha + n_z^2 (1 - c_\alpha) \end{pmatrix},$$

где  $c_\alpha = \cos(\alpha)$ ,  $s_\alpha = \sin(\alpha)$ , в  $(n_x, n_y, n_z)$  - компоненты вектора  $\mathbf{n}$ .

Отметим, что справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{R}^T(\alpha, \mathbf{n}) = \mathbf{R}^{-1}(\alpha, \mathbf{n}) = \mathbf{R}(-\alpha, \mathbf{n}),$$

которые предлагается доказать в качестве упражнения.

• **H<sub>72</sub>** *Кватернионы* (стр.61)

Введём четвёрку чисел  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0, \mathbf{a})$ , которую назовём *кватернионом*, и определим произведение, в результате которого снова получается кватернион:

$$a \circ b = (a_0 b_0 - \mathbf{a}\mathbf{b}, a_0 \mathbf{b} + b_0 \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Умножение является ассоциативным, но некоммутативным:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \quad a \circ b \neq b \circ a.$$

Единичным кватернионом называют:  $\mathbf{1} = (1, \mathbf{0})$ . Он коммутирует с любым кватернионом:

$$\mathbf{1} \circ a = a \circ \mathbf{1} = a.$$

С каждым кватернионом связано число, т.н. *норма кватерниона*:

$$N(a) = a_0^2 + \mathbf{a}^2.$$

Убедимся, что:

$$N(a \circ b) = N(a) N(b).$$

Для этого вычислим

$$N(a \circ b) = (a_0 b_0 - \mathbf{a}\mathbf{b})^2 + (a_0 \mathbf{b} + b_0 \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b})^2.$$

Возводя в квадрат, с учётом  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}\mathbf{b})^2$  получаем:

$$N(a \circ b) = a_0^2 b_0^2 + a_0^2 \mathbf{b}^2 + b_0^2 \mathbf{a}^2 + \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 = (a_0^2 + \mathbf{a}^2)(b_0^2 + \mathbf{b}^2) = N(a)N(b),$$

где учтено, что в силу правила выталкивания  $\mathbf{a}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = [\mathbf{a} \times \mathbf{a}]\mathbf{b} = 0$ , и аналогично для скалярного произведения  $\mathbf{b}$  на векторное произведение.

Обратный кватернион равен:

$$q^{-1} = \frac{1}{N(q)} \{q_0, -\mathbf{q}\}.$$

Действительно:

$$q \circ q^{-1} = \frac{1}{N(q)} \{q_0^2 + \mathbf{q}^2, -q_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{q} - \mathbf{q} \times \mathbf{q}\} = \frac{\{q_0^2 + \mathbf{q}^2, \mathbf{0}\}}{N(q)}.$$

Таким образом:

$$q \circ q^{-1} = q^{-1} \circ q = \{1, \mathbf{0}\}.$$

Обратный порядок сомножителей (второе равенство) проверяется так же, как и прямой порядок. Отметим также тождество

$$(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1},$$

которое в силу ассоциативности доказывается аналогично матричному.

---

• **Н<sub>73</sub>** Кватернионы и вращение (стр.61)

Вращение вокруг единичного вектора  $\mathbf{n}$  на угол  $\alpha$  можно описать при помощи кватернионной алгебры. Для этого введём кватернион координат и поворота:

$$x = (0, \mathbf{x}), \quad q = \left( \cos \frac{\alpha}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\alpha}{2} \right) = (q_0, \mathbf{q}).$$

Несложно проверить, что:

$$x' = q \circ x \circ q^{-1} = (0, (q_0^2 - \mathbf{q}^2)\mathbf{x} + 2\mathbf{q}(\mathbf{q}\mathbf{x}) + 2q_0[\mathbf{q} \times \mathbf{x}]).$$

“Пространственная” часть этого кватернионного выражения равна:

$$\mathbf{x}' = \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \mathbf{x} + 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{x}) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} [\mathbf{n} \times \mathbf{x}].$$

Напомним, что:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha, \quad 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha, \quad 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha.$$

Поэтому:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cos \alpha + \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{x})(1 - \cos \alpha) + [\mathbf{n} \times \mathbf{x}] \sin \alpha,$$

что является 3-мерным поворотом вектора  $\mathbf{x}$  на угол  $\alpha$  вокруг оси  $\mathbf{n}$ .

В отличие от матричного преобразования координат, при кватернионном преобразовании кватернион с двух сторон умножается на вектор для получения повернутого вектора. Рассмотрим два последовательных поворота:

$$x_1 = q_1 \circ x \circ q_1^{-1}, \quad x_2 = q_2 \circ x_1 \circ q_2^{-1}.$$

Тогда

$$x_2 = (q_2 \circ q_1) \circ x \circ (q_2 \circ q_1)^{-1}.$$

Умножение двух кватернионов  $q_2 \circ q_1$  требует 16 умножений и 12 сложений (около 28 операций). В отличие от этого, матричные повороты требуют 27 умножений и 18 сложений (35 операций). Последовательные повороты  $q = q_n \circ q_{n-1} \circ \dots \circ q_1$  производятся без промежуточных умножений матрицы  $R = R_n \circ R_{n-1} \circ \dots \circ R_1$ .

Матрицу поворота  $\mathbf{R}$  можно выразить через компоненты кватерниона:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 - 2(q_y^2 + q_z^2) & 2(q_x q_y + q_0 q_z) & 2(q_x q_z - q_0 q_y) \\ 2(q_x q_y - q_0 q_z) & 1 - 2(q_x^2 + q_z^2) & 2(q_y q_z + q_0 q_x) \\ 2(q_x q_z + q_0 q_y) & 2(q_y q_z - q_0 q_x) & 1 - 2(q_x^2 + q_y^2) \end{pmatrix}.$$

## Криволинейные координаты

- **Н<sub>74</sub>** Сумма тензоров одинакового типа – тоже тензор (стр. 78)

Проверяем в случае двух векторов:

$$\tilde{A}^i + \tilde{B}^i = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j} A^j + \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j} B^j = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j} (A^j + B^j).$$

Аналогично для тензоров произвольного типа. Понятно, что их тип при этом должен совпадать.

---

- **Н<sub>75</sub>** Тензорность свёрток (стр. 78)

Проверяем тензорность первой свёртки:

$$\tilde{a}^i \tilde{b}_i = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^p} \frac{\partial q^s}{\partial \tilde{q}^i} a^p b_s = \delta_p^s a^p b_s = a^p b_p.$$

Аналогично:

$$\tilde{T}^{ij} \tilde{a}_j = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^p} \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^s} \frac{\partial q^r}{\partial \tilde{q}^j} T^{ps} a_r = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^p} \delta_s^r T^{ps} a_r = \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^p} T^{ps} a_s.$$


---

- **Н<sub>76</sub>** Тензорность выражений (стр. 78)

Относительно произвольных преобразований координат тензорным законом преобразования является только тензор типа (2,0)

$$\frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt},$$

так как дифференциал  $dx^i$  преобразуется, как компоненты контравариантного вектора (1,0). Оставшиеся два выражения имеют тензорный характер преобразований только для поворотов декартовых координат.

---

- **Н<sub>77</sub>** Антисимметричность  $E_{ijk}$  (стр. 78, 75)

Учитывая выражение  $E_{ijk} = J \varepsilon_{ijk}$ , антисимметричность очевидна. В этом же можно убедиться непосредственно из определения:

$$E_{ijk} = \frac{\partial \tilde{q}^p}{\partial q^i} \frac{\partial \tilde{q}^r}{\partial q^j} \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k} \varepsilon_{prs}$$

Переставляем индексы  $j$  и  $k$  у  $E_{ijk}$ , затем переименовываем  $r$  и  $s$  (поменяв их местами) и, наконец, физически их переставляем в  $\varepsilon_{psr}$ :

$$E_{ikj} = \frac{\partial \tilde{q}^p}{\partial q^i} \frac{\partial \tilde{q}^r}{\partial q^k} \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^j} \varepsilon_{prs} = \frac{\partial \tilde{q}^p}{\partial q^i} \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k} \frac{\partial \tilde{q}^r}{\partial q^j} \varepsilon_{psr} = -\frac{\partial \tilde{q}^p}{\partial q^i} \frac{\partial \tilde{q}^r}{\partial q^j} \frac{\partial \tilde{q}^s}{\partial q^k} \varepsilon_{prs} = -E_{ijk}.$$


---

• **Н<sub>78</sub>** *Произведение тензоров Леви-Чевиты* (стр. 78)

Прежде всего, произведение тензоров Леви-Чевиты с нижними и верхними индексами, с точностью до знака определителя, равно произведению символов Леви-Чевиты в декартовых координатах:

$$E_{ijk} E^{prs} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{ijk} \frac{\sqrt{|g|}}{g} \varepsilon^{prs} = \frac{|g|}{g} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{prs} = \text{sign}(g) \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{prs}.$$

Осталось проверить, что

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{prs} = \begin{vmatrix} \delta_i^p & \delta_i^r & \delta_i^s \\ \delta_j^p & \delta_j^r & \delta_j^s \\ \delta_k^p & \delta_k^r & \delta_k^s \end{vmatrix}.$$

Если тройки индексов  $i, j, k$  и  $p, r, s$  различны, то

$$\varepsilon_{123} \varepsilon^{123} = \begin{vmatrix} \delta_1^1 & \delta_1^2 & \delta_1^3 \\ \delta_2^1 & \delta_2^2 & \delta_2^3 \\ \delta_3^1 & \delta_3^2 & \delta_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Если любые два индекса равны, то в матрице оказываются равными две строки или два столбца. Например, при  $i = j$  равны первые две строки. Поэтому в этом случае определитель равен нулю. Перестановка любых двух индексов приводит для первого символа  $\varepsilon_{ijk}$  к перестановке местами строк, а для второго  $\varepsilon^{prs}$  – столбцов. В этом случае определитель меняет свой знак. Что и требовалось доказать.

• **Н<sub>79</sub>** *Свёртка тензоров Леви-Чевиты в  $n$ -мерном случае* (стр. 78)

Подставляем определение тензора Леви-Чевиты:

$$E_{ijk\dots} E^{ijk\dots} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{ijk\dots} \frac{\sqrt{|g|}}{g} \varepsilon^{ijk\dots} = \text{sign}(g) \varepsilon_{ijk\dots} \varepsilon^{ijk\dots} = \text{sign}(g) n!.$$

В свёртке по всем индексам символов Леви-Чевиты в декартовых координатах будут только слагаемые с различными индексами:

$$\varepsilon_{ijk\dots} \cdot \varepsilon^{ijk\dots} = \varepsilon_{123\dots n} \cdot \varepsilon^{123\dots n} + \varepsilon_{213\dots n} \cdot \varepsilon^{213\dots n} + \dots = n!$$

Всего возможно  $n!$  перестановок  $n$  чисел  $1, 2, 3, \dots, n$  и, следовательно, слагаемых в сумме. Упорядочивание любой такой перестановки к исходному порядку  $\varepsilon_{123\dots n}$  в каждом символе будет *одновременно* приводить или к  $+1$ , или к  $-1$ , произведение которых в любом случае равно 1.

При раскрытии определителя произведения символов Леви-Чевиты ( $\leq$  Н<sub>78</sub>) получаются символы Кронекера. Так как в  $\varepsilon_{ij\dots kp} \cdot \varepsilon^{ij\dots kr}$  только 2 свободных индекса, то  $\varepsilon_{ij\dots kp} \cdot \varepsilon^{ij\dots kr} = \chi \delta_p^r$ . Константа  $\chi = n!/n$  находится в результате свёртки по  $p, r$  и предыдущего тождества.

• **H<sub>80</sub>** *Диагонализация матрицы  $2 \times 2$*  (стр. 78)

В задаче ( $\leq$  H<sub>51</sub>), стр. 174, были найдены собственные значения  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = 2$  для следующей матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу поворотов (её строки – это компоненты векторов):

$$R_{pi} = u_i^{(p)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что матрица  $\mathbf{A}$  диагонализуется с собственными значениями на диагонали:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Главные оси  $\tilde{\mathbf{e}}_i = R_{ij} \mathbf{e}_j$ , где  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}), \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

• **H<sub>81</sub>** *Диагонализация матрицы  $2 \times 2$*  (стр. 78)

Сделав поворот системы координат, можно перейти от недиагональной симметричной матрицы  $\mathbf{A}$  к диагональной  $\tilde{\mathbf{A}}$ :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^T \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{R}^T \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{R}.$$

Пусть собственные значения матрицы равны  $p$  и  $r$ . Воспользовавшись обратным преобразованием и матрицей поворотов ( $\leq$  H<sub>69</sub>), запишем:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\phi & -s_\phi \\ s_\phi & c_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\phi & s_\phi \\ -s_\phi & c_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pc_\phi^2 + rs_\phi^2 & [p-r]s_\phi c_\phi \\ [p-r]s_\phi c_\phi & ps_\phi^2 + rc_\phi^2 \end{pmatrix}.$$

Откуда получаем:

$$a_{11} - a_{22} = (p-r)(c_\phi^2 - s_\phi^2) = (p-r) \cos 2\phi, \quad 2a_{12} = (p-r) \sin(2\phi).$$

Поэтому

$$\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \operatorname{tg} 2\phi.$$

Для диагонализации матрицы с одинаковыми диагональными элементами  $a_{11} = a_{22}$  система координат должна быть повернута на  $\pi/4$ .



• **H<sub>82</sub>** *Переход в косоугольную систему* (стр. 78)

В исходной системе базисные векторы  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ . В повернутой  $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{i}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Запишем матрицу преобразования:

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^i} \mathbf{e}_j = \Lambda_i^j \mathbf{e}_j \quad \Rightarrow \quad \Lambda_i^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При помощи этой матрицы запишем тензор в косоугольной системе:

$$\tilde{A}_{ij} = \Lambda_i^p A_{pr} \Lambda_j^r = (\Lambda \cdot \mathbf{A} \cdot \Lambda^T)_{ij}$$

или

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 10 \\ 4 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Запишем метрический тензор и ему обратный:

$$\tilde{g}_{ij} = \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{\mathbf{e}}_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}^{ij} = (\tilde{g}_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

С его помощью поднимем индексы:

$$\tilde{A}^i_j = \tilde{g}^{ip} \tilde{A}_{pj} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 10 \\ 4 & 10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

и

$$\tilde{A}^{ij} = \tilde{A}^i_p \tilde{g}^{pj} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для построения взаимного базиса найдём сначала смешанное произведение:

$$V = \tilde{\mathbf{e}}_1 \cdot [\tilde{\mathbf{e}}_2 \times \tilde{\mathbf{e}}_3] = \mathbf{i} \cdot [(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})] = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 1.$$

Поэтому:

$$\tilde{\mathbf{e}}^1 = \tilde{\mathbf{e}}_2 \times \tilde{\mathbf{e}}_3 = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = \mathbf{i} - \mathbf{j}.$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^2 = \tilde{\mathbf{e}}_3 \times \tilde{\mathbf{e}}_1 = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times \mathbf{i} = \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^3 = \tilde{\mathbf{e}}_1 \times \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{i} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \mathbf{k}.$$

• **H<sub>83</sub>** *Метрика псевдоевклидова пространства* (стр. 79)

Так как отличны от нуля только диагональные элементы метрического тензора, имеем:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{00} dx^0 dx^0 + g_{11} dx^1 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2 + g_{33} dx^3 dx^3.$$

Подставляя значения  $g_{\alpha\beta}$  и физические обозначения для координат 4-пространства, имеем:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2.$$

Если  $ds = 0$ , то  $(d\mathbf{r}/dt)^2 = 1$ . Две точки в 4-мерном пространстве-времени связаны нулевым расстоянием, если скорость сигнала, связывающего события, происходящие в этих точках, равна 1 (т.е. скорости света). Таким образом,  $ds = 0$  соответствует распространению света.

---

• **H<sub>84</sub>** *Преобразования Лоренца* (стр. 79)

Подставляем преобразования в интервал:

$$d\tilde{t}^2 - d\tilde{x}^2 = \gamma^2(dt - vdx)^2 - \gamma^2(dx - vdt)^2 = \gamma^2(1 - v^2)(dt^2 - dx^2).$$

Поэтому, если  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ , то снова получается  $dt^2 - dx^2$ .

---

• **H<sub>85</sub>** *Ковариантные компоненты 4-вектора* (стр. 79)

Используем метрический тензор из задачи ( $\leq$  H<sub>83</sub>):

$$A_0 = g_{0\mu} A^\mu = g_{00} A^0 = A^0, \quad A_1 = g_{1\mu} A^\mu = g_{11} A^1 = -A^1, \dots$$

Так как тензор диагонален, в суммах находится по одному слагаемому. В результате временные компоненты вектора не изменяются, а у пространственных появляется знак минус. Это записывается следующим образом:

$$A^\alpha = \{A^0, \mathbf{A}\}, \quad A_\alpha = \{A^0, -\mathbf{A}\}.$$


---

• **H<sub>86</sub>** *Уравнение для 4-тока*  $\partial_\alpha j^\alpha = 0$  (стр. 79)

Записываем сумму:

$$\partial_\alpha j^\alpha = \partial_0 j^0 + \partial_1 j^1 + \partial_2 j^2 + \partial_3 j^3 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j^x}{\partial x} + \frac{\partial j^y}{\partial y} + \frac{\partial j^z}{\partial z} = 0.$$

Это соотношение, записанное при помощи оператора набла, является уравнением непрерывности (закон сохранения заряда), см. стр. 169:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0.$$


---

- **Н<sub>87</sub>** Тензор электромагнитного поля  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$  (стр. 79)

Для ковариантных компонент 4-вектора потенциала, с учётом предыдущей задачи, имеем  $A_\alpha = \{\varphi, -\mathbf{A}\}$ . Тензор  $F_{\alpha\beta}$  является антисимметричным  $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ , поэтому расписываем ненулевые компоненты:

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = -\frac{\partial A^1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_x,$$

где знак минус появился, так как  $A_1 = -A^1$ . Аналогично  $F_{02} = E_y$ ,  $F_{03} = E_z$ . Остальные комбинации имеют вид:

$$F_{32} = \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 = -\frac{\partial A^2}{\partial z} + \frac{\partial A^3}{\partial y} = B_x,$$

$$F_{13} = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 = -\frac{\partial A^3}{\partial x} + \frac{\partial A^1}{\partial z} = B_y,$$

$$F_{21} = \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2 = -\frac{\partial A^1}{\partial y} + \frac{\partial A^2}{\partial x} = B_z.$$

Подъём индексов осуществляется при помощи метрического тензора. Для компонент с нулевым индексом

$$F^{01} = g^{0\mu} g^{1\nu} F_{\mu\nu} = g^{00} g^{11} F_{01} = -F_{01}.$$

происходит смена знака ( $g^{00} = 1$ ,  $g^{11} = -1$ ). Компоненты без нулевого индекса знак не меняют:

$$F^{12} = g^{1\mu} g^{2\nu} F_{\mu\nu} = g^{11} g^{22} F_{12} = F_{12}.$$

Поэтому с учётом антисимметричности окончательно получаем:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

В 4-мерном пространстве любой антисимметричный тензор имеет 6 независимых компонент, которые можно представить в виде компонент двух 3-мерных векторов. Условно это записывается так:

$$F_{\alpha\beta} = (\mathbf{E}, -\mathbf{B}), \quad F^{\alpha\beta} = (-\mathbf{E}, -\mathbf{B}).$$

Проекции напряжённости электрического поля (первый вектор в скобках) являются “временными” компонентами  $F_{01}$ ,  $F_{02}$ ,  $F_{03}$ , а магнитного поля (второй вектор) – пространственными  $F_{23}$ ,  $F_{31}$ ,  $F_{12}$ .

---

• **Н<sub>88</sub>** Тензоры  $*F_{\alpha\beta}$  и  $*F^{\alpha\beta}$  (стр. 79)

Расписываем сумму (опуская одинаковые индексы, для которых символ Леви-Чевиты равен нулю)

$$*F_{01} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{0123} F^{23} + \varepsilon_{0132} F^{32}) = \varepsilon_{0123} F^{23} = -B_x,$$

$$*F_{12} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{1203} F^{03} + \varepsilon_{1230} F^{30}) = \varepsilon_{0123} F^{03} = -E_z,$$

где  $\varepsilon_{0132} F^{32} = \varepsilon_{0123} F^{23}$ , и т.д., так как обе величины одновременно являются антисимметричными. Во втором случае индекс 0 в символе Леви-Чевиты необходимо перенести в начало  $\varepsilon_{1203} = -\varepsilon_{1023} = \varepsilon_{0123}$ . Расписывая таким образом все компоненты, получаем:

$$*F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} \quad *F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично тензорам  $F_{\alpha\beta}$  и  $F^{\alpha\beta}$  можно записать:

$$*F_{\alpha\beta} = (-\mathbf{B}, -\mathbf{E}), \quad *F^{\alpha\beta} = (\mathbf{B}, -\mathbf{E}).$$

• **Н<sub>89</sub>** Уравнения Максвелла (стр. 79)

Расписываем уравнение  $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta$  по компонентам для  $\beta = 0$ :

$$\partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \nabla \mathbf{E} = 4\pi j^0 = 4\pi \rho.$$

Аналогично для  $\beta = 1, 2, 3$  (опуская сразу  $F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0$ ):

$$\partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = -\partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y = 4\pi j^1.$$

В результате получается пара уравнений Максвелла с источниками:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Запись этих уравнений в форме одного уравнения  $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta$  называется *ковариантной записью* уравнений Максвелла.

• **Н<sub>90</sub>** Уравнения Максвелла (стр. 79)

Расписываем уравнение  $\partial_\alpha *F^{\alpha\beta} = 0$  по компонентам для  $\beta = 0$  и  $\beta = 1$ :

$$\partial_1 *F^{10} + \partial_2 *F^{20} + \partial_3 *F^{30} = -\nabla \mathbf{B} = 0.$$

$$\partial_\alpha *F^{\alpha 1} = \partial_0 *F^{01} + \partial_2 *F^{21} + \partial_3 *F^{31} = \partial_0 B_x + \partial_y E_z - \partial_z E_y = 0.$$

Аналогично для  $\beta = 2, 3$ . В результате получаются уравнения:

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

• **Н<sub>91</sub>** *Уравнение непрерывности* (стр. 79)

Уравнение непрерывности получается взятием производной от ковариантного уравнения Максвелла с током:

$$\partial_\beta \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi \partial_\beta j^\beta = 0.$$

Это соотношение равно нулю, так как вторая производная симметрична (перестановочная)  $\partial_\beta \partial_\alpha = \partial_\alpha \partial_\beta$ , а тензор антисимметричен  $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$ .

---

• **Н<sub>92</sub>** *Инварианты* (стр. 79)

Квадрат тензора электромагнитного поля равен:

$$\mathbf{F}^2 = F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = F_{01} F^{01} + F_{02} F^{02} + F_{03} F^{03} + F_{12} F^{12} + F_{13} F^{13} + F_{23} F^{23} + \dots,$$

где многоточием обозначены такие же слагаемые с переставленными индексами. Так как  $F_{\alpha\beta}$  и  $F^{\alpha\beta}$  антисимметричны, одновременная перестановка индексов ничего не изменит. Подставляя значения компонент, имеем:  $\mathbf{F}^2 = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$ . Аналогично  ${}^*\mathbf{F}\mathbf{F} = 4\mathbf{E}\mathbf{B}$ .

---

• **Н<sub>93</sub>** *Преобразования Лоренца для полей* (стр. 79)

При преобразованиях Лоренца  $F^{\alpha\beta}$  преобразуется, как тензор:

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu F^{\mu\nu} \Lambda^\beta_\nu = \Lambda^\alpha_\mu F^{\mu\nu} \Lambda_\nu^T{}^\beta = (\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Lambda}^T)^{\alpha\beta},$$

где матрица  $\Lambda^\alpha_\mu$  получается из преобразований Лоренца:

$$\Lambda^\alpha_\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ . Поэтому:

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x &= E_x, & \tilde{E}_y &= \gamma(E_y - vB_z), & \tilde{E}_z &= \gamma(E_z + vB_y), \\ \tilde{B}_x &= B_x, & \tilde{B}_y &= \gamma(B_y + vE_z), & \tilde{B}_z &= \gamma(B_z - vE_y). \end{aligned}$$


---

## Ковариантное дифференцирование

- **Н<sub>94</sub>** *Символы Кристоффеля в полярных координатах* (стр. 96)

Расписываем по компонентам:

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

для  $g_{ij} = \text{diag}(1, r^2)$  и  $q^i = (r, \theta)$ . Например:

$$\Gamma_{1,22} = \frac{1}{2} (\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) = -\frac{1}{2} \partial_1 g_{22} = -\frac{1}{2} \partial_r r^2 = -r,$$

$$\Gamma_{2,12} = \frac{1}{2} (\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) = \frac{1}{2} \partial_1 g_{22} = \frac{1}{2} \partial_r r^2 = r,$$

$$\Gamma_{1,11} = \frac{1}{2} (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = \frac{1}{2} \partial_1 g_{11} = \frac{1}{2} \partial_r 1 = 0,$$

и т.д. Отличными от нуля оказываются только символы:

$$\Gamma_{1,22} = -r, \quad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = r.$$

- **Н<sub>95</sub>** *Преобразование символов Кристоффеля* (стр.83, 96)

В выражении

$$\tilde{\Gamma}_{k,ij} = \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\partial}_j \tilde{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial q^s}{\partial \tilde{q}^k} \mathbf{e}_s \frac{\partial}{\partial q^r} \left( \frac{\partial q^p}{\partial \tilde{q}^i} \mathbf{e}_p \right) \frac{\partial q^r}{\partial \tilde{q}^j}$$

раскроем производную произведения:

$$\tilde{\Gamma}_{k,ij} = \frac{\partial q^s}{\partial \tilde{q}^k} \frac{\partial q^p}{\partial \tilde{q}^i} \frac{\partial q^r}{\partial \tilde{q}^j} \mathbf{e}_s \frac{\partial}{\partial q^r} \mathbf{e}_p + \frac{\partial q^s}{\partial \tilde{q}^k} \frac{\partial q^r}{\partial \tilde{q}^j} \frac{\partial^2 q^p}{\partial q^r \partial \tilde{q}^i} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_s.$$

В первом слагаемом подставляем определение символов Кристоффеля, а во втором – метрического тензора  $g_{ps} = \mathbf{e}_p \mathbf{e}_s$ , и “сокращаем” производную по  $q^r$  (как производную сложной функции):

$$\tilde{\Gamma}_{k,ij} = \frac{\partial q^s}{\partial \tilde{q}^k} \frac{\partial q^p}{\partial \tilde{q}^i} \frac{\partial q^r}{\partial \tilde{q}^j} \Gamma_{s,pr} + g_{ps} \frac{\partial q^s}{\partial \tilde{q}^k} \frac{\partial^2 q^p}{\partial \tilde{q}^i \partial \tilde{q}^j}.$$

При помощи метрического тензора в исходном выражении можно под-  
нять индекс  $k$ :  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\mathbf{e}}^k \tilde{\partial}_j \tilde{\mathbf{e}}_i$ . Для базисного вектора  $\tilde{\mathbf{e}}^k$  преобразования  
будут обратными, а  $\tilde{\mathbf{e}}^p \tilde{\mathbf{e}}_s = \delta_s^p$ , поэтому

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^s} \frac{\partial q^p}{\partial \tilde{q}^i} \frac{\partial q^r}{\partial \tilde{q}^j} \Gamma_{pr}^s + \frac{\partial \tilde{q}^k}{\partial q^p} \frac{\partial^2 q^p}{\partial \tilde{q}^i \partial \tilde{q}^j}.$$

• **Н<sub>96</sub>** Обнуление в точке символов Кристоффеля (стр.96)

Пусть в системе координат  $q^k$  символы Кристоффеля  $\Gamma_{k,ij}$  отличны от нуля. В данной точке пространства поместим начало координат  $q^k = 0$ , и в его окрестности запишем квадратичные преобразования координат с симметричными постоянными коэффициентами  $A_{ij}^k = A_{ji}^k$ :

$$q^k = \tilde{q}^k + \frac{1}{2} A_{ij}^k \tilde{q}^i \tilde{q}^j.$$

Матрицы преобразования, вычисленные при  $q^k = \tilde{q}^k = 0$ , равны:

$$\left. \frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^p} \right|_0 = (\delta_p^k + A_{pj}^k \tilde{q}^j) \Big|_0 = \delta_p^k, \quad \left. \frac{\partial^2 q^k}{\partial \tilde{q}^p \partial \tilde{q}^r} \right|_0 = A_{pr}^k.$$

Поэтому символы Кристоффеля в новой системе координат, вычисленные в точке  $\tilde{q}^k = 0$ , равны ( $\leq$  Н<sub>95</sub>):

$$\tilde{\Gamma}_{k,ij} \Big|_0 = \delta_k^s \delta_i^p \delta_j^r \Gamma_{s,pr} \Big|_0 + g_{ps} \delta_k^s A_{ij}^p = \Gamma_{k,ij} \Big|_0 + g_{pk} A_{ij}^p = 0.$$

Поэтому  $\tilde{\Gamma}_{k,ij} = 0$  если  $A_{ij}^k = -\Gamma_{ij}^k \Big|_0$ .

• **Н<sub>97</sub>** Тензорность  $S_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$  (стр.96)

В преобразовании символов Кристоффеля  $\Gamma_{ij}^k$  первая часть носит тензорный характер. Вторая (нетензорная) часть симметрична по индексам  $i$  и  $j$ , поэтому она сократится при преобразовании  $S_{ij}^k$ .

• **Н<sub>98</sub>** Преобразование символов Кристоффеля из  $D_j A_i$  (стр.96)

Запишем тензорное преобразование для ковариантной производной:

$$\tilde{D}_j \tilde{A}_i = \tilde{\partial}_j \tilde{A}_i - \tilde{\Gamma}_{ij}^k \tilde{A}_k = \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^j} \left( \frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^i} A_k \right) - \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial q^p}{\partial \tilde{q}^k} A_p = \frac{\partial q^r}{\partial \tilde{q}^j} \frac{\partial q^p}{\partial \tilde{q}^i} D_r A_p.$$

Во втором равенстве подставлены преобразования вектора, а третье записано из требования тензорности ковариантной производной. Раскроем производную произведения и умножим обе части на обратные преобразования:

$$\left. \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^l} \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^m} \right| \frac{\partial^2 q^k}{\partial \tilde{q}^i \partial \tilde{q}^j} A_k + \frac{\partial q^k}{\partial \tilde{q}^i} \frac{\partial A_k}{\partial q^r} \frac{\partial q^r}{\partial \tilde{q}^j} - \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial q^p}{\partial \tilde{q}^k} A_p = \frac{\partial q^r}{\partial \tilde{q}^j} \frac{\partial q^p}{\partial \tilde{q}^i} D_r A_p.$$

В итоге:

$$D_m A_l = \partial_m A_l - \left( \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial q^s}{\partial \tilde{q}^k} \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^l} \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^m} - \frac{\partial^2 q^s}{\partial q^l \partial q^m} \right) A_s = \partial_m A_l - \Gamma_{lm}^s A_s.$$

Выражение в круглых скобках можно обозначить, как  $\Gamma_{lm}^s$ . Его нетензорный характер преобразования компенсирует нековариантное преобразование частной производной  $\partial_m A_l$ . После умножения на обратные матрицы преобразований получаются преобразования символов Кристоффеля.

• **Н<sub>99</sub>** Когда символы Кристоффеля – тензор? (стр.96)

Так как нетензорная часть преобразования символов Кристоффеля содержит вторую производную, то при линейных преобразованиях с постоянными коэффициентами  $q^i = a^i + b_j^i \tilde{q}^j$  символы будут преобразовываться, как тензор.

---

• **Н<sub>100</sub>** Производные от тензоров ранга (1,2), (0,3) и (3,0) (стр.96)

По аналогии с ковариантными производными от тензоров второго ранга имеем:

$$\begin{aligned} D_s A^{ijk} &= \partial_s A^{ijk} + \Gamma_{ps}^i A^{pj k} + \Gamma_{ps}^j A^{ip k} + \Gamma_{ps}^k A^{ij p}, \\ D_s A_{ijk} &= \partial_s A_{ijk} - \Gamma_{is}^p A_{pjk} - \Gamma_{js}^p A_{ipk} - \Gamma_{ks}^p A_{ijp}, \\ D_s A_{ij}^k &= \partial_s A_{ij}^k - \Gamma_{is}^p A_{pj}^k - \Gamma_{js}^p A_{ip}^k + \Gamma_{ps}^k A_{ij}^p. \end{aligned}$$


---

• **Н<sub>101</sub>** Ковариантная производная от скаляра (стр.96)

Раскрываем ковариантную производную произведения и подставляем выражения для производных:

$$D_k(A^i B_i) = A^i D_k B_i + B_i D_k A^i = A^i (\partial_k B_i - \Gamma_{ik}^p B_p) + B_i (\partial_k A^i + \Gamma_{pk}^i A^p).$$

Перемножая скобки, получаем:

$$D_k(A^i B_i) = A^i \partial_k B_i + B_i \partial_k A^i - \Gamma_{ik}^p A^i B_p + \Gamma_{pk}^i A^p B_i = \partial_k(A^i B_i).$$


---

• **Н<sub>102</sub>**  $D_k g_{ij}$  в полярной системе координат (стр.96)

Как и для любого тензора ранга (0,2), имеем:

$$D_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ik}^p g_{pj} - \Gamma_{jk}^p g_{ip} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{i,jk} - \Gamma_{j,ik}.$$

В полярной системе координат имеем:

$$g_{ij} = \text{diag}(1, r^2), \quad \Gamma_{1,22} = -r, \quad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = r.$$

Перебор всех индексов  $k, i$  и  $j$  приводит к нулевым значениям. Например:

$$D_1 g_{22} = \partial_1 g_{22} - \Gamma_{2,21} - \Gamma_{2,21} = 2r - r - r = 0,$$

$$D_2 g_{12} = \partial_2 g_{12} - \Gamma_{1,22} - \Gamma_{2,12} = 0 + r - r = 0,$$

$$D_1 g_{11} = \partial_1 g_{11} - \Gamma_{1,11} - \Gamma_{1,11} = 0 - 0 - 0 = 0$$

и т.д. (всего 6 вариантов).

---



• **Н<sub>103</sub>** Теорема Риччи для  $g^{ij}$  (стр.96)

Для тензора ранга (2,0) ковариантная производная равна:

$$D_k g^{ij} = \partial_k g^{ij} + \Gamma_{pk}^i g^{pj} + \Gamma_{pk}^j g^{ip}.$$

Сворачиваем с  $g_{mi}g_{lj}$ :

$$g_{mi}g_{lj} D_k g^{ij} = g_{mi}g_{lj} \partial_k g^{ij} + \Gamma_{m,lk} + \Gamma_{l,mk}.$$

Так как

$$g_{lj} g^{ij} = \delta_l^i \quad \Rightarrow \quad \partial_k (g_{lj} g^{ij}) = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{lj} \partial_k g^{ij} = -g^{ij} \partial_k g_{lj}.$$

Поэтому

$$g_{mi}g_{lj} D_k g^{ij} = -\partial_k g_{lm} + \Gamma_{m,lk} + \Gamma_{l,mk} = 0.$$

Сворачивая с  $g^{mp}g^{lr}$ , получаем  $D_k g^{pr} = 0$ .

---

• **Н<sub>104</sub>** Геодезическая в полярных координатах (стр. 96)

Перепишем уравнения геодезической

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = 0, \quad \ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{\phi}\dot{r} = 0,$$

выразив производные по  $t$  через производные по  $\phi$ :

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = r' \dot{\phi}, \quad \ddot{r} = r'' \dot{\phi}^2 + r' \ddot{\phi}.$$

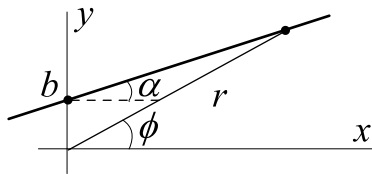
Подставляя эти производные в первое уравнение геодезической и учитывая второе уравнение, получаем:

$$r'' - \frac{2}{r} r'^2 = r.$$

Делая замену  $r = 1/z$ , приходим к осцилляторному уравнению:

$$z'' + z = 0.$$

Таким образом, решение можно записать в виде:



$$\frac{b \cos \alpha}{r} = \sin(\phi - \alpha),$$

где  $b$  и  $\alpha$  – константы, смысл которых изображён на рисунке. Если угол  $\phi = \pi/2$ , то  $r = b$ .

---

• **Н<sub>105</sub>** *Уравнения Лагранжа* (стр.96)

Подставляя  $L(q, \dot{q}) = (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)/2$  в уравнения Лагранжа, получаем осцилляторное уравнение  $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ , решение которого имеет вид:

$$q(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = \frac{\dot{q}(0)}{\omega} \sin(\omega t) + q(0) \cos(\omega t).$$

Константы  $A$  и  $B$  определяются из начальных условий  $q(0)$  и  $\dot{q}(0)$ .

• **Н<sub>106</sub>** *Минимальность действия* (стр.96)

Интегрирование приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} q(t) &= \sin(t) & I &= 0 & & = 0.000 \\ q(t) &= t - t^2/\pi & I &= \pi(10 - \pi^2)/60 & & = 0.007 \\ q(t) &= \sin(2t) & I &= 3\pi/4 & & = 2.356 \\ q(t) &= \sin(3t) & I &= 2\pi & & = 6.283 \end{aligned}$$

Полином лучше всего аппроксимирует экстремальную кривую  $\sin(t)$ .

• **Н<sub>107</sub>** *Геодезическая в ненатуральной параметризации* (стр.96)

Уравнение геодезической (5.11) определяет кратчайшее расстояние между двумя точками, если параметр  $s$  является длиной геодезической. Перейдём к произвольной параметризации  $\tau = \tau(s)$ . В этом случае:

$$\frac{dq^k}{ds} = \frac{dq^k}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} = \frac{dq^k}{d\tau} \tau', \quad \frac{d^2 q^k}{ds^2} = \frac{d^2 q^k}{d\tau^2} \tau'^2 + \frac{dq^k}{d\tau} \tau''.$$

Подставляя их в уравнение геодезической, получаем:

$$\frac{d^2 q^k}{d\tau^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{d\tau} \frac{dq^j}{d\tau} + \frac{dq^k}{d\tau} \frac{\tau''}{\tau'^2} = 0.$$

Если параметризация линейна  $\tau = \tau_0 + \tau_1 s$ , где  $\tau_1, \tau_2 = \text{const}$ , то уравнение геодезической не изменится.

• **Н<sub>108</sub>** *Уравнение для  $du_i/ds$*  (стр.96)

$$\frac{du_i}{ds} = \frac{d(g_{ij}u^j)}{ds} = \frac{dg_{ij}}{ds} u^j + g_{ij} \frac{du^j}{ds} = \partial_k g_{ij} u^k u^j - g_{ij} \Gamma_{kl}^j u^k u^l,$$

В последнем равенстве вычислена  $dg_{ij}/ds = \partial_k g_{ij} dq^k/ds$  и подставлено уравнение геодезической. Выражая  $\Gamma_{i,kl}$  через  $g_{ij}$  (5.3), стр.83, имеем:

$$\frac{du_i}{ds} = \frac{1}{2} \partial_i g_{jk} u^j u^k.$$

Если  $g_{ij}$  не зависит от некоторой координаты, то соответствующая ей ковариантная компонента скорости постоянна вдоль геодезической.

• **Н<sub>109</sub>** Угол вектора с геодезической (стр.96)

Рассмотрим кратчайшую линию (геодезическую) между двумя точками  $q^i(s)$ . В окрестности данной точки разложим её в ряд Тейлора:

$$q^i(s) = q^i(0) + \dot{q}^i(0) s + \frac{1}{2} \ddot{q}^i(0) s^2 + \dots, \quad \dot{q}^i(s) = \dot{q}^i(0) + \ddot{q}^i(0) s + \dots$$

Производная  $\dot{q}(s)$  является касательной к геодезической. В начальной точке она равна  $\dot{q}^i(0)$ . При небольшом смещении на  $dq^i$  за  $ds$  она, соответственно, равна  $\dot{q}^i(0) + \ddot{q}^i(0) ds$ . При параллельном переносе  $DA_i = dA_i - \Gamma_{ik}^j A_j dq^k = 0$ , поэтому изменение компонент вектора  $dA_i$  можно выразить через символы Кристоффеля. Вычислим скалярное произведение вектора  $A_i$ , который перенесли на  $dq^i$ :

$$(A_i + dA_i)(\dot{q}_0^i + \ddot{q}_0^i ds) = (A_i + \Gamma_{ik}^j A_j dq^k)(\dot{q}_0^i + \ddot{q}_0^i ds).$$

Перемножая скобки с сохранением первого порядка малости по смещению, получаем:

$$A_i \dot{q}_0^i + A_i \ddot{q}_0^i ds + \Gamma_{ik}^j A_j dq^k \dot{q}_0^i = A_i \dot{q}_0^i + (\ddot{q}_0^k + \Gamma_{ij}^k \dot{q}_0^i \dot{q}_0^j) A_k ds = A_i \dot{q}_0^i.$$

Выражение в круглых скобках равно нулю, если перемещение происходит по геодезической. Поэтому скалярное произведение вектора  $A_i$  на касательную в начальной и “сдвинутой” точках совпадают.

Постоянство угла следует также сразу из того, что при параллельном переносе угол между векторами не меняется, а касательная (вектор) переносится вдоль геодезической параллельным образом (стр.87).

• **Н<sub>110</sub>** Символы Кристоффеля в цилиндрических координатах (стр.96)

В цилиндрической системе координат  $dl^2 = d\mathbf{r}^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$  (см. стр. 70), поэтому:

$$\mathbf{u}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2.$$

Три компоненты ускорения по формуле (5.14), стр. 90, равны:

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\phi}^2, \quad a_\phi = r^2 \ddot{\phi} + 2r \dot{r} \dot{\phi}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

Коэффициенты при первых производных  $\dot{q}^i = (\dot{r}, \dot{\phi}, \dot{z})$  равны:

$$\Gamma_{1,22} = -r, \quad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = r.$$

Остальные 16 символов Кристоффеля равны нулю. Индекс поднимается при помощи метрического тензора  $g^{ij} = \text{diag}(1, 1/r^2, 1)$ . Поэтому:

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}.$$

Эти выражения совпадают с полярными символами Кристоффеля, и третье измерение по координате  $z$  к ним ничего не добавляет.

• **H<sub>111</sub>** Векторный анализ в цилиндрических координатах (стр.97)

Запишем явный вид дифференциальных операций в цилиндрических координатах  $(r, \phi, z)$  (см. стр. 70). В этом случае коэффициенты Ламе равны  $h_i = (1, r, 1)$ ,  $H = r$ . Метрика (расстояние между двумя бесконечно близкими точками):

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2.$$

Элемент объёма определяется якобианом  $J = H$  и равен:

$$dV = r dr d\phi dz.$$

Градиент:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{n}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{n}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{n}_z.$$

Дивергенция:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Ротор:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \phi} - \frac{\partial a_\phi}{\partial z} \right] \mathbf{n}_r + \left[ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right] \mathbf{n}_\phi + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r a_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \right] \mathbf{n}_z.$$

Лапласиан:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Для вычисления лапласиана от векторного поля в криволинейной системе отсчёта можно воспользоваться следующим тождеством:

$$\Delta \mathbf{A} = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}],$$

которое получается поле раскрытия двойного ротора по формуле “бац минус цаб”. Это соотношение записано в векторном виде и выполняется в любой системе координат. В частности, в цилиндрической системе координат:

$$\Delta \mathbf{A} = \left( \Delta a_r - \frac{a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \right) \mathbf{n}_r + \left( \Delta a_\phi - \frac{a_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \right) \mathbf{n}_\phi + \Delta a_z \mathbf{n}_z.$$

Лапласиан от проекций  $a_i$  на базис  $\mathbf{n}_i$  вычисляется по формуле лапласиана от скалярной функции.

Цилиндрические координаты используются, когда по соображениям симметрии существует выделенное направление (вдоль оси  $z$ ) такое, что поля не зависят от угла  $\phi$ , а иногда и от  $z$ .

---

• **Н<sub>112</sub>** Векторный анализ в сферических координатах (стр.97)

Сферические координаты удобно использовать, когда в пространстве есть выделенный центр, вокруг которого пространство изотропно. В общем случае в сферических координатах  $(r, \theta, \phi)$  (см. стр. 70) коэффициенты Ламе равны  $h_i = (1, r, r s_\theta)$ ,  $H = r^2 s_\theta$ . Как и раньше, используем сокращения  $s_\theta = \sin \theta$  и  $c_\theta = \cos \theta$ . Метрика в сферических координатах имеет вид:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 s_\theta^2 d\phi^2.$$

Элемент объёма:

$$dV = r^2 s_\theta dr d\theta d\phi.$$

Градиент:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{n}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{n}_\theta + \frac{1}{r s_\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{n}_\phi.$$

Дивергенция:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r s_\theta} \frac{\partial(s_\theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r s_\theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi}.$$

Ротор  $\nabla \times \mathbf{A}$ :

$$\frac{1}{r s_\theta} \left[ \frac{\partial(s_\theta a_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{n}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{s_\theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r a_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{n}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{n}_\phi.$$

Лапласиан скалярной функции:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 s_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( s_\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 s_\theta^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}.$$

Лапласиан векторной функции:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} = & \left( \Delta a_r - \frac{2a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 s_\theta} \frac{\partial(s_\theta a_\theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 s_\theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \right) \mathbf{n}_r \\ & + \left( \Delta a_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{a_\theta}{r^2 s_\theta^2} - \frac{2c_\theta}{r^2 s_\theta^2} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \right) \mathbf{n}_\theta \\ & + \left( \Delta a_\phi - \frac{a_\phi}{r^2 s_\theta^2} + \frac{2}{r^2 s_\theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} + \frac{2c_\theta}{r^2 s_\theta^2} \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{n}_\phi. \end{aligned}$$

Как и в случае с цилиндрическими координатами, для вычисления лапласиана от проекций вектора применяется формула лапласиана в сферических координатах от скалярной функции.

---

- **H<sub>113</sub>** Обратный метрический тензор для 3-х измерений (стр.97)

Определитель метрического тензора равен:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} g_{11}g_{22}g_{33} - g_{11}g_{23}g_{32} \\ +g_{12}g_{23}g_{31} - g_{12}g_{21}g_{33} \\ +g_{13}g_{21}g_{32} - g_{13}g_{22}g_{31}. \end{matrix}$$

Обратный тензор:

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32} & g_{23}g_{31} - g_{21}g_{33} & g_{21}g_{32} - g_{22}g_{31} \\ g_{13}g_{32} - g_{12}g_{33} & g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31} & g_{12}g_{31} - g_{11}g_{32} \\ g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22} & g_{13}g_{21} - g_{11}g_{23} & g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \end{pmatrix}.$$

Перемножая с исходной матрицей  $g_{ij}$ , получим единичную матрицу.

---

- **H<sub>114</sub>** Обратная метрика для ортогональных координат (стр.97)

Для диагонального метрического тензора

$$g = \det \text{diag}(g_{11}, g_{22}, \dots) = g_{11} \cdot g_{22} \cdot \dots$$

Поэтому:

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = \text{diag}\left(\frac{1}{g_{11}}, \frac{1}{g_{22}}, \dots\right),$$

как и должно быть.

---

- **H<sub>115</sub>**  $\Gamma_{ij}^j = (\partial_i g)/2g$  для полярной системы координат (стр.97)

В полярной системе координат  $g_{ij} = \text{diag}(1, r^2)$ , поэтому определитель метрического тензора равен  $g = r^2$ . Свёртки символов Кристоффеля равны:

$$\Gamma_{1j}^j = \frac{\partial_1 g}{2g} = \frac{\partial_r r^2}{2r^2} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{2j}^j = \frac{\partial_2 g}{2g} = \frac{\partial_{\theta} r^2}{2r^2} = 0.$$

С другой стороны, ненулевые символы Кристоффеля  $\Gamma_{22}^1 = -r$ ,  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 1/r$  дают:

$$\Gamma_{1j}^j = \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{2j}^j = \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 = 0.$$


---

- **H<sub>116</sub>** Симметричность  $\partial_i \Gamma_{jk}^k$  (стр.97)

Воспользуемся формулой свёртки символов Кристоффеля через определитель метрического тензора:

$$\partial_i \Gamma_{jk}^k = \partial_i \frac{\partial_j g}{2g} = \frac{\partial_i \partial_j g}{2g} - \frac{\partial_i g \partial_j g}{2g^2},$$

откуда симметричность по  $i$  и  $j$  очевидна.

---

- **Н<sub>117</sub>** Тождество  $\partial_k(g_{ij}A^iB^j) = B_iD_kA^i + A_iD_kB^i$  (стр.97)

Выражение в круглых скобках является скаляром, поэтому частную производную можно заменить на ковариантную:

$$\partial_k(g_{ij}A^iB^j) = D_k(g_{ij}A^iB^j) = g_{ij}D_k(A^iB^j) = g_{ij}B^jD_kA^i + g_{ij}A^iD_kB^j,$$

где мы воспользовались теоремой Риччи (постоянство метрического тензора относительно ковариантного дифференцирования) и раскрыли производную произведения. Опуская при помощи метрического тензора индексы, приходим к требуемому тождеству.

---

- **Н<sub>118</sub>** Дифференцирование в ортогональных координатах (стр.97)

В сферических координатах  $\mathbf{r} = r\mathbf{n}_r$ , поэтому проекция вектора  $\mathbf{r}$  равна  $a_r = r$ , а остальные равны нулю. Воспользовавшись выражением для дивергенции и ротора в сферических координатах (стр. 197), имеем:

$$\nabla \mathbf{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^3}{\partial r} = 3, \quad \nabla \times \mathbf{r} = 0.$$

Постоянный вектор  $\mathbf{a}$  задаёт выделенное направление. Выберем цилиндрическую систему, направив ось  $z$  вдоль  $\mathbf{a}$ . В этом случае  $\mathbf{ar} = az$ , поэтому используем выражение для градиента (стр. 196):

$$\nabla(\mathbf{ar}) = \frac{\partial(az)}{\partial z} \mathbf{n}_z = a\mathbf{n}_z = \mathbf{a}.$$


---

- **Н<sub>119</sub>** Уравнение  $\Delta f = 0$  для цилиндрической симметрии (стр.97)

При цилиндрической симметрии нет зависимости от  $z$  и  $\phi$ :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r f'(r) = A = \text{const}.$$

Интегрируя ещё раз, получаем решение:

$$f(r) = B + A \ln r,$$

где  $A$  и  $B$  – константы интегрирования.

---

- **Н<sub>120</sub>** Уравнение  $\Delta f = 0$  для сферической симметрии (стр.97)

При сферической симметрии нет зависимости от  $\theta$  и  $\phi$ :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 f'(r) = A = \text{const}.$$

Интегрируя ещё раз, получаем решение:

$$f(r) = B - \frac{A}{r},$$

где  $A$  и  $B$  – константы интегрирования.

---

• **H<sub>121</sub>** *Физические компоненты скорости* (стр. 97)

По определению скорости и криволинейного базиса имеем:

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{e}_i \frac{dq^i}{dt} = \mathbf{n}_i u_i = \mathbf{e}_i \frac{u_i}{h_i}.$$

где в последнем равенстве записано разложение по ортонормированному базису  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1/|\mathbf{e}_1| = \mathbf{e}_1/h_1$ , и т.д. (см. стр. 94). Поэтому:

$$u_1 = h_1 \dot{q}_1, \quad u_2 = h_2 \dot{q}_2, \quad u_3 = h_3 \dot{q}_3,$$

где  $h_i$  – коэффициенты Ламе. В цилиндрических и сферических координатах физические компоненты скорости на ортонормированный базис  $\mathbf{n}_i$  равны:

$$\mathbf{u} = \{\dot{r}, r\dot{\phi}, \dot{z}\}, \quad \mathbf{u} = \{\dot{r}, r\dot{\theta}, rs_{\theta}\dot{\phi}\}.$$

• **H<sub>122</sub>** *Физические компоненты ускорения* (стр. 97)

Ранее были найдены ковариантные компоненты ускорения  $\mathbf{a} = A_i \mathbf{e}^i$ . Так как  $\mathbf{e}^1 = \mathbf{n}_1/h_1$ , то компоненты  $A_i$  необходимо разделить на коэффициенты Ламе, чтобы получить коэффициенты разложения на ортонормированный базис  $\mathbf{n}_i$  (продолжаем их обозначать маленькими буквами). В цилиндрической системе координат  $h_i = (1, r, 1)$ , поэтому ( $\leq$  H<sub>110</sub>):

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2, \quad a_{\phi} = r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

В сферических координатах  $h_i = (1, r, rs_{\theta})$ , поэтому (стр. 91):

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - rs_{\theta}^2\dot{\phi}^2, \\ a_{\theta} &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - rs_{\theta}c_{\theta}\dot{\phi}^2, \\ a_{\phi} &= rs_{\theta}\ddot{\phi} + 2s_{\theta}\dot{r}\dot{\phi} + 2rc_{\theta}\dot{\theta}\dot{\phi}. \end{aligned}$$

Интегрируя уравнение  $a_{\phi} = 0$  в сферических координатах, получаем:

$$\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} + 2\frac{\dot{r}}{r} + 2\frac{c_{\theta}}{s_{\theta}}\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln \dot{\phi} + 2\ln r + 2\ln s_{\theta} = const$$

или

$$\dot{\phi} r^2 s_{\theta}^2 = A = const.$$



- **H<sub>123</sub>** *Неизменность  $g_{ij}A^iB^j$  при параллельном переносе* (стр.97)

В “соседних” точках  $q^i$  и  $q^i + dq^i$  метрические коэффициенты различны. Кроме этого, изменяются компоненты вектора при параллельном переносе. Скалярное произведение останется неизменным, если:

$$g_{ij}(q + dq) [A^i + dA^i] [B^j + dB^j] = g_{ij}(q) A^i B^j.$$

Разложим метрику в ряд Тейлора  $g_{ij}(q + dq) \approx g_{ij} + \partial_k g_{ij} dq^k$  и запишем  $dA^i$  и  $dB^i$  через символы Кристоффеля  $\Gamma_{jk}^i$ :

$$[g_{ij} + \partial_k g_{ij} dq^k] [A^i - \Gamma_{pm}^i A^p dq^m] [B^j - \Gamma_{rn}^j B^r dq^n] = g_{ij} A^i B^j.$$

Перемножим скобки с сохранением первого порядка малости по смещению  $dq^i$  (так как с такой точностью определено изменение компонент вектора при параллельном переносе и разложении  $g_{ij}$ ):

$$g_{ij} A^i B^j - g_{ij} \Gamma_{rn}^j A^i B^r dq^n - g_{ij} \Gamma_{pm}^i A^p B^j dq^m + \partial_k g_{ij} A^i B^j dq^k = g_{ij} A^i B^j.$$

Обозначая  $\Gamma_{i,jk} = g_{ip} \Gamma_{jk}^p$  и переименовывая немые индексы, получаем:

$$\partial_k g_{ij} A^i B^j dq^k = \Gamma_{j,pk} A^p B^j dq^k + \Gamma_{i,rk} A^i B^r dq^k.$$

Ещё раз переименуем индексы и вынесем  $A^i B^j dq^k$

$$\partial_k g_{ij} A^i B^j dq^k = (\Gamma_{j,ik} + \Gamma_{i,jk}^s) A^i B^j dq^k.$$

Так как компоненты  $A^i$ ,  $B^j$  и направление смещения  $dq^k$  произвольны, это выражение будет выполняться, только если коэффициенты при  $A^i B^j dq^k$  равны:

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik}.$$

Обратим внимание, что индекс, стоящий у производной в правой части, стоит последним, а индексы метрического тензора переставляются вокруг запятой. Несложно проверить, что:

$$\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij} = \Gamma_{j,ki} + \Gamma_{k,ji} + \Gamma_{i,kj} + \Gamma_{k,ij} - \Gamma_{i,jk} - \Gamma_{j,ik}.$$

Если символы Кристоффеля симметричны по вторым двум индексам, то:

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).$$

Для евклидова пространства симметричность  $\Gamma_{k,ij} = \mathbf{e}_k \partial_j \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_k \partial_j \partial_i \mathbf{r}$  очевидна. В следующей главе выяснится, что могут существовать пространства с несимметричными символами Кристоффеля. Тем не менее, и в этом случае остаётся справедливым соотношение  $\partial_k g_{ij} = \Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik}$ .

• **Н<sub>124</sub>** *Гидродинамическое уравнение Эйлера* (стр.97)

Уравнение

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p$$

записываем в криволинейном базисе:

$$\rho \frac{\partial u^p \mathbf{e}_p}{\partial t} + \rho (u^p \mathbf{e}_p \mathbf{e}^r \partial_r) u^s \mathbf{e}_s = \mathbf{e}_p f^p - \mathbf{e}^r \partial_r p.$$

При выборе статической системы координат базисные векторы не зависят от времени. Умножим на  $\mathbf{e}^k$

$$\rho \frac{\partial u^k}{\partial t} + \rho \mathbf{e}^k (u^p \partial_p) u^s \mathbf{e}_s = f^k - g^{kr} \partial_r p$$

и введём символы Кристоффеля

$$\rho \frac{\partial u^k}{\partial t} + \rho u^p (\partial_p u^k + \Gamma_{sp}^k u^s) = f^k - g^{kr} \partial_r p.$$

В скобках стоит ковариантная производная  $D_p u^k$ . Сворачивая с метрическим тензором  $g_{ik}$  (считая, что он не зависит от времени), получаем:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u^p D_p u_i = f_i - \partial_i p.$$

Это уравнение можно было бы записать сразу. Во взаимном базисе  $\mathbf{e}^k$  компоненты градиента  $\nabla$  равны частным производным  $\partial_k$ , а ковариантная версия оператора  $\mathbf{u} \nabla$  имеет вид  $u^p D_p$ .

• **Н<sub>125</sub>** *Ковариантные уравнения Максвелла* (стр.97)

Запишем тензор электромагнитного поля в ковариантном виде для симметричной связности  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$ :

$$F_{\alpha\beta} = D_\alpha A_\beta - D_\beta A_\alpha = \partial_\alpha A_\beta - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma A_\gamma - (\partial_\beta A_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma A_\gamma) = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha.$$

Уравнения Максвелла без источников (считая, что  $g < 0$ ):

$$D_\alpha {}^* F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} e^{\alpha\beta\mu\nu} D_\alpha \frac{F_{\mu\nu}}{\sqrt{|g|}} = -\frac{1}{2} e^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\alpha \frac{F_{\mu\nu}}{\sqrt{|g|}} = \partial_\alpha {}^* F_{\mu\nu} = 0.$$

Вместо символа Леви-Чевиты подставлена ковариантная форма тензора  $E^{\alpha\beta\mu\nu} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \sqrt{|g|}/g = -\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}/\sqrt{|g|}$ . В предпоследнем равенстве ковариантная производная может быть заменена на обычную, так как возникающие при её взятии символы Кристоффеля сворачиваются нижними симметричными индексами с антисимметричным символом Леви-Чевиты и дают ноль. Таким образом, уравнения Максвелла  $\partial_\alpha {}^* F^{\alpha\beta} = 0$  сохраняют свой вид.

• **Н<sub>126</sub>** Ковариантные уравнения с источниками (стр.97)

Уравнениям Максвелла  $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta$  придадим ковариантную форму:

$$D_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta.$$

Запишем определение ковариантной производной  $D_\gamma$ :

$$D_\gamma F^{\alpha\beta} = \partial_\gamma F^{\alpha\beta} + \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha F^{\nu\beta} + \Gamma_{\nu\gamma}^\beta F^{\alpha\nu}.$$

Сворачивая по  $\gamma = \alpha$ , получаем следующее выражение для “дивергенции” от тензора:

$$D_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha F^{\nu\beta} + \Gamma_{\nu\alpha}^\beta F^{\alpha\nu} = \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{\partial_\alpha g}{2g} F^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha (\sqrt{|g|} F^{\alpha\beta}).$$

Свёртка симметричного по нижним индексам символа Кристоффеля с антисимметричным тензором электромагнитного поля  $\Gamma_{\nu\alpha}^\beta F^{\alpha\nu} = 0$ . Для  $\Gamma_{\nu\alpha}^\alpha$  подставлено выражение (5.17), стр. 92. В результате уравнения Максвелла имеют вид:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha (\sqrt{|g|} F^{\alpha\beta}) = 4\pi j^\beta.$$

Модуль у определителя метрического тензора поставлен, так как обычно в теории относительности он отрицателен.

---

• **Н<sub>127</sub>** Ковариантные уравнение непрерывности (стр.97)

Умножив правую и левую часть последнего уравнения ( $\leq$  Н<sub>126</sub>) на  $\sqrt{|g|}$  и взяв производную по  $\partial_\beta$ , получаем ноль в силу антисимметричности тензора  $F^{\alpha\beta}$  и перестановочности производных  $\partial_\alpha \partial_\beta$ :

$$\partial_\alpha (\sqrt{|g|} j^\alpha) = 0.$$

Учитывая выражение для ковариантной дивергенции (5.18), стр. 93, это уравнение можно записать в явно ковариантном виде:

$$D_\alpha j^\alpha = 0.$$

Заметим, что, вообще говоря, сразу умножить уравнение  $D_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta$  на  $D_\beta$  и провести рассуждения, аналогичные выводу уравнения непрерывности  $\partial_\alpha j^\alpha$  из  $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta$ , нельзя. Дело в том, что, как мы увидим при введении тензора кривизны, ковариантные производные, в отличие от обычных, не перестановочны. Тем не менее в случае их свёртки с антисимметричным тензором они всё же оказываются коммутирующими, но продемонстрировать это необходимо так, как было проделано выше.

---

## Дифференциальная геометрия

- Н<sub>128</sub> Главные кривизны сферы (стр. 104, 114)

Для сферы  $\mathbf{r} = a \{s_\theta c_\phi, s_\theta s_\phi, c_\theta\}$  находим:

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = a \{c_\theta c_\phi, c_\theta s_\phi, -s_\theta\}, \quad \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = a \{-s_\theta s_\phi, s_\theta c_\phi, 0\}.$$

Метрический тензор:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\theta^2 & \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\phi^2 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_\theta^2 \end{pmatrix}.$$

Например:

$$\mathbf{e}_\theta^2 = a^2 (c_\theta^2 c_\phi^2 + c_\theta^2 s_\phi^2 + s_\theta^2) = a^2 (c_\theta^2 (c_\phi^2 + s_\phi^2) + s_\theta^2) = a^2 (c_\theta^2 + s_\theta^2) = a^2.$$

Вектор нормали:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi}{\sqrt{g}} = \frac{a^2}{a^2 s_\theta} \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c_\theta c_\phi & c_\theta s_\phi & -s_\theta \\ -s_\theta s_\phi & s_\theta c_\phi & 0 \end{pmatrix} = \{s_\theta c_\phi, s_\theta s_\phi, c_\theta\}.$$

Вектор нормали является единичным радиус-вектором  $\mathbf{m} = \mathbf{r}/r$ . Якобиан  $J = \sqrt{g} = a^2 s_\theta$  обращается в ноль при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$ . В этих же точках не определён базисный вектор  $\mathbf{e}_\phi$ . Геометрически это связано с тем, что, например, при  $\theta = 0$  изменение угла  $\phi = 0$  не приводит к перемещению по поверхности сферы. В данной системе координат точка  $\theta = 0$  плохо определена (*координатная особенность*) и лучше считать, что она “выколота” (не принадлежит сфере).

Вторые производные касательных векторов:

$$\begin{aligned} \partial_\theta \mathbf{e}_\theta &= a \{-s_\theta c_\phi, -s_\theta s_\phi, -c_\theta\} = -a \mathbf{m}, & \partial_\phi \mathbf{e}_\phi &= a \{-s_\theta c_\phi, -s_\theta s_\phi, 0\}, \\ \partial_\theta \mathbf{e}_\phi &= \partial_\phi \mathbf{e}_\theta = a \{-c_\theta s_\phi, c_\theta c_\phi, 0\}. \end{aligned}$$

Поэтому коэффициенты второй квадратичной формы равны  $(i, j) = (\theta, \phi)$ :

$$b_{ij} = \mathbf{m} \cdot \partial_i \mathbf{e}_j = a \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -s_\theta^2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти главные кривизны, решим уравнение

$$\det(\mathbf{B} - k\mathbf{G}) = \det \begin{pmatrix} -a - ka^2 & 0 \\ 0 & -as_\theta^2 - ka^2 s_\theta^2 \end{pmatrix} = a^2 s_\theta^2 (1 + ka)^2 = 0.$$

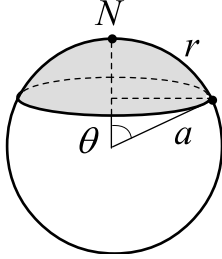
Откуда следует, что главные кривизны совпадают  $k_1 = k_2 = -1/a$ . В результате средняя и гауссова кривизны равны:

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{1}{a}, \quad k_1 k_2 = \frac{1}{a^2}.$$


---

• **Н<sub>129</sub>** Длина окружности на сфере (стр.114)

Расположим центр окружности на северном полюсе сферы. При данном  $\theta = \text{const}$  элемент длины окружности равен:



$$dl = \sqrt{(ad\theta)^2 + (as_\theta d\phi)^2} = as_\theta d\phi$$

Интегрируя по углу  $\phi$ , который изменяется от 0 до  $2\pi$ , получаем длину окружности на сфере:

$$L = \int_0^{2\pi} as_\theta d\phi = 2\pi a s_\theta = 2\pi a \sin \frac{r}{a},$$

где  $r = \theta a$  - длина дуги на сфере, соответствующая углу  $\theta$ . Для внутренней геометрии на сфере  $r$  имеет смысл радиус окружности. Длину окружности можно получить также из простых геометрических соображений. В 3-мерном пространстве радиус этой окружности равен  $a \sin \theta$  (см. рисунок). Поэтому  $L = 2\pi a \sin \theta$ .

Площадь круга получается при помощи корня из определителя метрического тензора  $\sqrt{g} = a^2 s_\theta$  при интегрировании по углам:

$$S = \int_0^\theta \int_0^{2\pi} \sqrt{g} d\theta d\phi = \int_0^\theta \int_0^{2\pi} a^2 s_\theta d\theta d\phi = -2\pi a^2 c_\theta \Big|_0^\theta = 2\pi a^2 \left(1 - \cos \frac{r}{a}\right).$$

Пределы интегрирования по  $\theta$  соответствуют движению вдоль радиуса окружности от 0 до  $\theta = r/a$ . Площадь окружности достигает максимума при следующем  $r$ :

$$S'(r) = 2\pi a \sin \frac{r}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 2\pi a,$$

или

$$S_{max} = 4\pi a^2,$$

что соответствует площади всего шара.

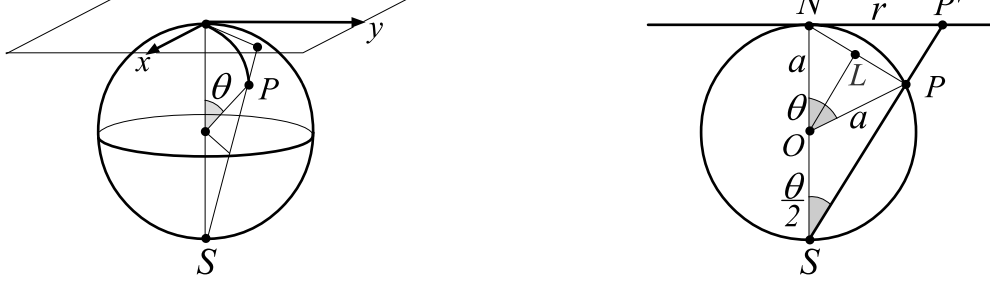
Синус и косинус можно разложить в ряд Тейлора:  $\sin x = x - x^3/6 + \dots$ , и  $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 - \dots$ . Поэтому:

$$L \approx 2\pi r \left(1 - \frac{1}{6} \frac{r^2}{a^2}\right), \quad S \approx \pi r^2 \left(1 - \frac{1}{12} \frac{r^2}{a^2}\right).$$

В частности,  $L^2/S \approx 4\pi - S/a^2 < 4\pi$ .

• **H<sub>130</sub>** *Стереографическая проекция сферы* (стр.114)

Используя южный полюс сферы как центр, спроектируем точку сферы на плоскость, касающуюся северного полюса:



Справа нарисован чертёж в плоскости, проходящей через вертикальную ось и проекционную прямую  $OP$ . В силу того, что треугольник  $NOP$  равнобедренный, перпендикуляр  $OL$  разделит сферический угол  $\theta$  пополам. В результате угол  $\widehat{ONP}$  равен  $(\pi/2) - \theta/2$ . Угол  $\widehat{NPS}$  является прямым, поэтому  $\widehat{NSP} = \theta/2$ .

$$\frac{r}{2a} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{a} = \frac{d\theta}{c_{\theta/2}^2}.$$

Кроме этого, учитывая формулу синуса двойного угла и соотношение  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1/c_{\alpha}^2$ , можно записать:

$$s_{\theta} = 2s_{\theta/2}c_{\theta/2} = \frac{r}{a} c_{\theta/2}^2, \quad 1 + \frac{r^2}{4a^2} = \frac{1}{c_{\theta/2}^2}.$$

Поэтому:

$$dl^2 = a^2(d\theta^2 + s_{\theta}^2 d\phi^2) = \frac{dr^2 + r^2 d\phi^2}{\left[1 + \frac{1}{4} \frac{r^2}{a^2}\right]^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{\left[1 + \frac{1}{4} \frac{x^2 + y^2}{a^2}\right]^2}.$$

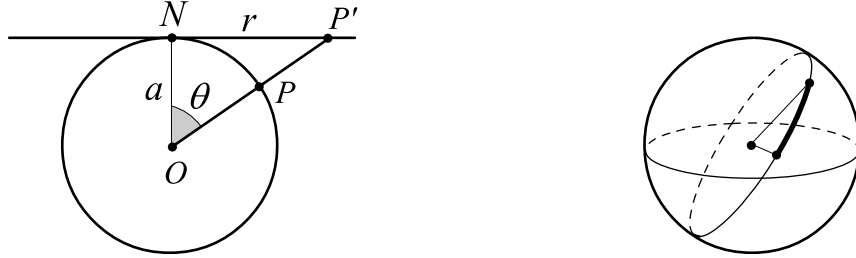
В последнем равенстве совершен переход от полярных координат к декартовым на касательной плоскости. Расстояние можно записать в векторном виде  $\mathbf{x} = \{x, y\}$ , справедливом и для пространств произвольной размерности  $n$ :

$$dl^2 = \frac{d\mathbf{x}^2}{\left[1 + \frac{K}{4} \frac{\mathbf{x}^2}{a^2}\right]^2}.$$

Параметр  $K$  введен для общности. Если  $K = 1$ , то такая метрика описывает пространства положительной кривизны ( $n$ -мерная сфера). Если  $K = 0$  – это евклидово плоское пространство. Наконец, если  $K = -1$ , то такое пространство имеет отрицательную постоянную кривизну и называется (*пространством Лобачевского*).

• **Н<sub>131</sub>** *Координаты Бельтрами* (стр.114)

Проекция Бельтрами аналогична стереографической проекции, но производится не из южного полюса, а из центра сферы (левый рисунок):



Из прямоугольного треугольника  $ONP'$  имеем:

$$\frac{r}{a} = \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{dr}{a} = \frac{d\theta}{c_\theta^2}, \quad 1 + \frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{c_\theta^2}.$$

Используя сферическую метрику, получаем:

$$dl^2 = a^2 (d\theta^2 + s_\theta^2 d\phi^2) = \frac{dr^2}{(1 + r^2/a^2)^2} + \frac{r^2 d\phi^2}{1 + r^2/a^2}.$$

К декартовым координатам на плоскости это выражение можно привести, если добавить и вычесть  $dr^2$  в числителе второй дроби:

$$dl^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\phi^2}{1 + r^2/a^2} - \frac{1}{a^2} \frac{(rdr)^2}{(1 + r^2/a^2)^2}.$$

Так как  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , то  $dr = (xdx + ydy)/r = (\mathbf{x}d\mathbf{x})/r$ , и окончательно:

$$dl^2 = \frac{d\mathbf{x}^2}{1 + \mathbf{x}^2/a^2} - \frac{(\mathbf{x}d\mathbf{x})^2/a^2}{(1 + \mathbf{x}^2/a^2)^2}.$$

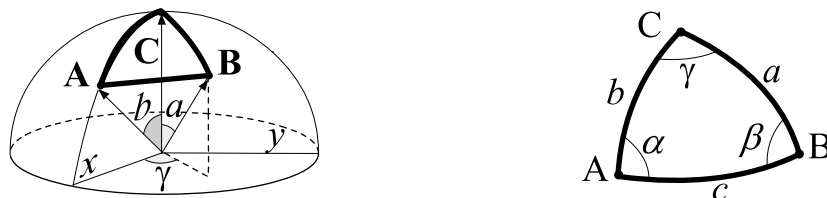
В случае 3-мерного пространства при помощи векторного произведения этой метрике можно придать более компактный вид:

$$dl^2 = \frac{d\mathbf{x}^2 + [\mathbf{x} \times d\mathbf{x}]^2/a^2}{(1 + \mathbf{x}^2/a^2)^2}.$$

Прямой отрезок на сфере (кратчайшее расстояние между двумя точками) всегда лежит на большом круге сферы. Он получается при сечении сферы плоскостью, проходящей через центр (см. выше правый рисунок). В свою очередь эта плоскость пересекает касательную к северному полюсу плоскость. Их пересечением является прямая, на которую проецируется прямая на сфере. Таким образом, в координатах Бельтрами прямая сферы является евклидовой прямой в касательной плоскости. Сферический треугольник проецируется в евклидовый треугольник, и т.д.

• **Н<sub>132</sub>** *Сферическая теорема косинусов* (стр. 114)

Рассмотрим сферу единичного радиуса. Выберем декартовы оси координат так, чтобы точка  $C$  треугольника  $ABC$  находилась на оси  $z$ , а точка  $A$  – в плоскости  $(x, z)$ :



Направим из центра сферы в вершины  $A, B, C$  три единичных вектора с проекциями на декартовы оси:

$$\mathbf{A} = \{\sin b, 0, \cos b\}, \quad \mathbf{B} = \{\sin a \cos \gamma, \sin a \sin \gamma, \cos a\}, \quad \mathbf{C} = \{0, 0, 1\},$$

где  $a, \gamma$  – углы сферической системы координат для вектора  $\mathbf{B}$ ,  $b$  – угол между векторами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$ . Так как сфера имеет единичный радиус, углы  $a, b$  равны дугам на сфере или длинам сторон треугольника. Угол  $\gamma$  – это угол при вершине  $C$ . Он задаётся между двумя касательными к сфере в точке  $C$  векторами, направленными вдоль сторон треугольника.

При помощи компонент векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  вычислим скалярное произведение:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \cos c$ , где  $c$  – третья сторона сферического треугольника:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Это уравнение является эквивалентом *теоремы косинусов* в плоской тригонометрии. Если треугольник малый, то  $\cos a \approx 1 - a^2/2$ ,  $\sin a \approx a$ , и т.д. В результате получается  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  (евклидова теорема косинусов).

Похожим образом выводится формула для углов:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a,$$

называемая *второй теоремой косинусов*.

Пространство на сфере однородно и изотропно. Треугольник может быть без искажений перенесен или повёрнут. Поэтому полученные соотношения не зависят от ориентации треугольника.

Выше мы положили радиус сферы равным единице  $R = 1$ . Для его восстановления в формулах необходимо все величины размерности длины разделить на  $R$ , например,  $a \mapsto a/R$ . Естественно, углы – это безразмерные величины, и их делить на  $R$  не надо.



• **Н<sub>133</sub>** *Сферический прямоугольный треугольник* (стр. 114)

Из теоремы косинусов ( $\triangleleft$  Н<sub>132</sub>) для  $\gamma = \pi/2$  имеем теорему Пифагора:

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Переобозначая стороны и углы в теореме косинусов, запишем:

$$\cos a = \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos \alpha.$$

Подставляя из “теоремы Пифагора”  $\cos a = \cos c / \cos b$ , получаем:

$$\sin c \sin b \cos \alpha = \frac{\cos c (1 - \cos^2 b)}{\cos b} = \frac{\cos c \sin^2 b}{\cos b},$$

откуда “проекция гипотенузы”:  $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos \alpha$ . Выражая косинус через синус, имеем  $\sin a = \sin c \sin \alpha$ . Запишем теперь проекции гипотенузы на катеты:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin a / \sin c}{\operatorname{tg} a / \operatorname{tg} c} = \frac{\cos a}{\cos c}.$$

Поэтому, используя сферическую теорему Пифагора, имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos a \cos b}{\cos^2 c} = \frac{\cos c}{\cos^2 c} = \frac{1}{\cos c}.$$

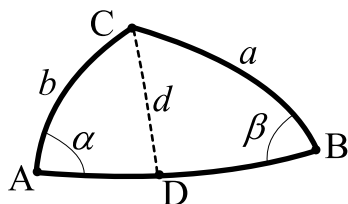
Таким образом, справедливы соотношения:

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos \alpha, \quad \sin a = \sin c \sin \alpha, \quad \cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta.$$

Из последнего соотношения следует, что сферический прямоугольный треугольник полностью определяется своими двумя углами.

• **Н<sub>134</sub>** *Сферическая теорема синусов* (стр. 114)

В произвольном треугольнике проведём прямую  $CD$ , перпендикулярную стороне  $AB$ , и воспользуемся соотношениями для двух прямоугольных треугольников  $CDA$  и  $CDB$ :



$$\sin d = \sin b \sin \alpha,$$

$$\sin d = \sin a \sin \beta.$$

Разделив одно уравнение на другое, получаем *теорему синусов*:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

• **Н<sub>135</sub>** *Отрезок на сфере* (стр.114)

Пусть две точки на сфере имеют координаты  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Длины этих векторов равны радиусу сферы  $a$ , а угол между ними —  $\beta$ . Проведём через векторы  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  плоскость. Она проходит через центр сферы и пересекается с поверхностью сферы по линии кратчайшего расстояния. Введём *единичный* вектор, перпендикулярный к этой плоскости:

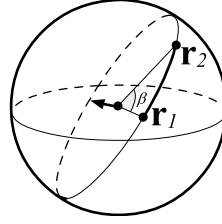
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{a^2 s_\beta}.$$

Вокруг этого вектора, оставаясь всё время в плоскости, можно повернуть  $\mathbf{r}_1$  в сторону  $\mathbf{r}_2$  на угол  $\alpha$  (стр. 59):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \cos \alpha + [\mathbf{n} \times \mathbf{r}_1] \sin \alpha.$$

где учтено, что  $\mathbf{n}$  перпендикулярно к  $\mathbf{r}_1$ . Подставляя  $\mathbf{n}$ , раскрывая двойное векторное произведение при помощи формулы “бац минус цаб” и учитывая  $s_\beta c_\alpha - c_\beta s_\alpha = s_{\beta-\alpha}$ , получаем:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \frac{s_{\beta-\alpha}}{s_\beta} + \mathbf{r}_2 \frac{s_\alpha}{s_\beta}.$$



Несложно проверить, что угол  $\alpha = 0$  соответствует начальному положению на сфере  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ , а при  $\alpha = \beta$  — конечному  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ . При этом длина вектора остаётся неизменной  $\mathbf{r}^2 = \mathbf{r}_1^2 = \mathbf{r}_2^2 = a^2$ .

Чтобы в явном виде записать изменение координат  $\theta, \phi$  при перемещении вдоль отрезка прямой, необходимо представить компоненты векторов в сферической системе координат:

$$\mathbf{r}_1 = a \{s_{\theta_1} c_{\phi_1}, s_{\theta_1} s_{\phi_1}, c_{\theta_1}\}, \quad \mathbf{r}_2 = a \{s_{\theta_2} c_{\phi_2}, s_{\theta_2} s_{\phi_2}, c_{\theta_2}\}$$

Косинус угла  $\beta$  между векторами равен:

$$c_\beta = s_{\theta_1} c_{\phi_1} s_{\theta_2} c_{\phi_2} + s_{\theta_1} s_{\phi_1} s_{\theta_2} s_{\phi_2} + c_{\theta_1} c_{\theta_2}.$$

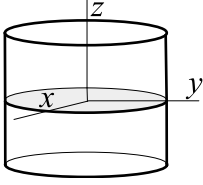
Координаты точек отрезка находятся из уравнений ( $\operatorname{tg} \phi = y/x$ ,  $c_\theta = z/a$ ):

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{s_{\theta_1} s_{\phi_1} s_{\beta-\alpha} + s_{\theta_2} s_{\phi_2} s_\alpha}{s_{\theta_1} c_{\phi_1} s_{\beta-\alpha} + s_{\theta_2} c_{\phi_2} s_\alpha}, \quad c_\theta = \frac{c_{\theta_1} s_{\beta-\alpha} + c_{\theta_2} s_\alpha}{s_\beta}.$$

Задав координаты на сфере начальной точки отрезка  $(\theta_1, \phi_1)$  и конечной  $(\theta_2, \phi_2)$ , изменяя угол  $\alpha$  от 0 до  $\beta$ , мы получим все точки отрезка по кратчайшему расстоянию между точками.

• **Н<sub>136</sub>** *Геометрия цилиндра* (стр. 114)

Рассмотрим цилиндр, ось симметрии которого направлена вдоль оси  $z$  декартовой системы координат. Простейшая параметризация цилиндра получается в цилиндрической системе координат с постоянным радиусом  $r = a$ , поэтому



$$\mathbf{r} = \{a c_\phi, a s_\phi, z\},$$

$$\mathbf{e}_\phi = \{-a s_\phi, a c_\phi, 0\},$$

$$\mathbf{e}_z = \{0, 0, 1\}.$$

Метрический тензор  $(i, j) = (\phi, z)$ :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = a^2, \quad dl^2 = (a d\phi)^2 + dz^2.$$

Заметим, что расстояние на поверхности цилиндра с точностью до переобозначения координат имеет евклидов вид.

Вектор нормали перпендикулярен оси  $z$ :

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_z}{\sqrt{g}} = \{c_\phi, s_\phi, 0\}.$$

Вторые производные касательных векторов:

$$\begin{aligned} \partial_\phi \mathbf{e}_\phi &= \{-a c_\phi, -a s_\phi, 0\} = -a \mathbf{m}, & \partial_\phi \mathbf{e}_z &= \{0, 0, 0\}, \\ \partial_z \mathbf{e}_\phi &= \{0, 0, 0\}, & \partial_z \mathbf{e}_z &= \{0, 0, 0\}. \end{aligned}$$

Поэтому коэффициенты второй квадратичной формы равны:

$$b_{ij} = \mathbf{m} \cdot \partial_i \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти главные кривизны, решим уравнение

$$\det(\mathbf{B} - k\mathbf{G}) = \det \begin{pmatrix} -a - ka^2 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} = ak(1 + ka) = 0.$$

Поэтому главные кривизны равны:  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = -1/a$ . Средняя и гауссова кривизны равны:

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{1}{2a}, \quad K = k_1 k_2 = 0.$$

Равенство нулю гауссовой кривизны связано с тем, что цилиндр можно, разрезав, без искажений координатной сетки, нанесенной на поверхность, развернуть в плоскость. Об этом же свидетельствует и евклидов характер метрики цилиндра.

- **Н<sub>137</sub>** *Формы для поверхности*  $\mathbf{r} = \{x, y, f(x, y)\}$  (стр.114)

Касательные векторы:

$$\mathbf{e}_x = \{1, 0, f_x\}, \quad \mathbf{e}_y = \{0, 1, f_y\}.$$

Метрика:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}, \quad g = 1 + f_x^2 + f_y^2.$$

Вектор нормали:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y}{\sqrt{g}} = \frac{\{-f_x, -f_y, 1\}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Вторые производные касательных векторов:

$$\begin{aligned} \partial_x \mathbf{e}_x &= \{0, 0, f_{xx}\}, & \partial_x \mathbf{e}_y &= \{0, 0, f_{xy}\} \\ \partial_y \mathbf{e}_x &= \{0, 0, f_{xy}\}, & \partial_y \mathbf{e}_y &= \{0, 0, f_{yy}\}. \end{aligned}$$

Поэтому коэффициенты второй квадратичной формы:

$$b_{ij} = \mathbf{m} \cdot \partial_i \mathbf{e}_j = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

В отличие от сферической и цилиндрической метрик в ортогональных координатах, метрика и вторая квадратичная формы в общем случае не являются диагональными матрицами.

---

- **Н<sub>138</sub>** *Гауссова кривизна через определители* (стр.114)

Так как главные кривизны  $k_1, k_2$ , являются собственными значениями матрицы  $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}$ , а определитель матрицы равен произведению её собственных значений, для гауссовой кривизны можно написать:

$$K = k_1 k_2 = \det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}) = \frac{\det \mathbf{B}}{\det \mathbf{G}} = \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}.$$

Это соотношение называется *формулой Гаусса*.

В случае поверхности, задаваемой функцией  $z = f(x, y)$  (высота поверхности над плоскостью  $(x, y)$ ), имеем:

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$


---

• **H<sub>139</sub>** *Поверхность вращения* (стр.114)

Для поверхности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\phi, z) = \{f(z) \cos \phi, f(z) \sin \phi, z\}$  находим:

$$\mathbf{e}_\phi = \{-f s_\phi, f c_\phi, 0\}, \quad \mathbf{e}_z = \{f' c_\phi, f' s_\phi, 1\}.$$

Метрика и вектор нормали:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & 1 + f'^2 \end{pmatrix}, \quad g = f^2 (1 + f'^2), \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_z}{\sqrt{g}} = \frac{\{c_\phi, s_\phi, -f'\}}{\sqrt{1 + f'^2}}.$$

Вторые производные касательных векторов:

$$\begin{aligned} \partial_\phi \mathbf{e}_\phi &= \{-f c_\phi, -f s_\phi, 0\}, & \partial_\phi \mathbf{e}_z &= \{-f' s_\phi, f' c_\phi, 0\}, \\ \partial_z \mathbf{e}_\phi &= \{-f' s_\phi, f' c_\phi, 0\}, & \partial_z \mathbf{e}_z &= \{f'' c_\phi, f'' s_\phi, 0\}. \end{aligned}$$

Поэтому коэффициенты второй квадратичной формы:

$$b_{ij} = \mathbf{m} \cdot \partial_i \mathbf{e}_j = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}} \begin{pmatrix} -f & 0 \\ 0 & f'' \end{pmatrix}.$$

• **H<sub>140</sub>** *Главные кривизны поверхности вращения* (стр.114)

Решение уравнения:

$$\det(\mathbf{B} - k\mathbf{G}) = \left[ -\frac{f}{\sqrt{1 + f'^2}} - kf^2 \right] \left[ \frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2}} - k(1 + f'^2) \right] = 0$$

даёт главные кривизны:

$$k_1 = -\frac{1}{f\sqrt{1 + f'^2}}, \quad k_2 = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}.$$

Средняя и гауссова кривизна равны:

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{1 + f'^2 - ff''}{2f(1 + f'^2)^{3/2}}, \quad K = k_1 k_2 = -\frac{f''/f}{(1 + f'^2)^2}.$$

Гауссова кривизна будет равна нулю  $K = 0$ , если  $f'' = 0$ , что соответствует вращению прямой параллельной оси  $z$ . Это цилиндр. Равенство нулю средней кривизны поверхности вращения приводит к уравнению:

$$1 + f'^2 - ff'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f' f''}{1 + f'^2} = \frac{f'}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \ln(1 + f'^2) = \ln \frac{f}{a},$$

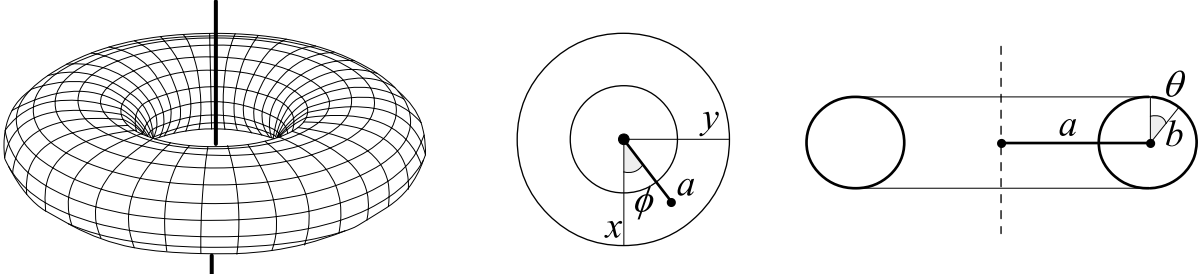
где  $a = \text{const}$ . Выражая  $f'$  и интегрируя ещё раз, получаем:

$$\frac{df}{\sqrt{\frac{f^2}{a^2} - 1}} = dz \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{f}{a} + \sqrt{\frac{f^2}{a^2} - 1}\right) = \frac{z}{a} \quad \Rightarrow \quad f(z) = a \operatorname{ch} \frac{z}{a},$$

где опущена константа смещения поверхности вращения параллельно оси вращения. Полученная поверхность называется *катеноидом*.

• **Н<sub>141</sub>** *Параметризация тора* (стр.115)

Поверхность тора получается вращением окружности радиуса  $b$  вокруг вертикальной оси, от которой центр этой окружности удалён на расстояние  $a$ . Точка на окружности радиуса  $b$  проецируется на этот радиус, удлиняя (или укорачивая его), так что расстояние проекции от центра равно  $a + bs_\theta$  (см. третий рисунок тора в сечении):



Поэтому справедлива параметризация ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ ):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, \phi) = \{(a + bs_\theta)c_\phi, (a + bs_\theta)s_\phi, bs_\theta\}.$$

Если  $a = 0$ , то получается сфера радиуса  $b$ , которая также может быть получена вращением окружности вокруг её центра. Для тора далее будем предполагать, что  $a > b$ , т.е. у бублика есть дырка.

Беря производные по  $\theta$  и  $\phi$ , получаем касательные векторы:

$$\mathbf{e}_\theta = \{bs_\theta c_\phi, bs_\theta s_\phi, -bs_\theta\}, \quad \mathbf{e}_\phi = \{-(a + bs_\theta)s_\phi, (a + bs_\theta)c_\phi, 0\}.$$

Они приводят к следующему метрическому тензору и расстоянию на торе:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a + bs_\theta)^2 \end{pmatrix}, \quad ds^2 = b^2 d\theta^2 + (a + bs_\theta)^2 d\phi^2.$$

Вычисляя определитель метрического тензора  $g = b^2(a + bs_\theta)^2$ , видим, что при  $a > b$  координатных особенностей на торе нет. Вектор нормали равен:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi}{\sqrt{g}} = \{s_\theta c_\phi, s_\theta s_\phi, c_\theta\}.$$

Этот вектор, как и в случае сферы, смотрит наружу из тора, оставаясь перпендикулярным его поверхности. Например, когда  $\theta = 0$ :  $\mathbf{m} = \{0, 0, 1\}$ , т.е. в верхних точках тора нормаль направлена по оси  $z$ . При  $\theta = \pi/2$ :  $\mathbf{m} = \{c_\phi, s_\phi, 0\}$  лежит в плоскости  $(x, y)$  и направлен радиально от оси симметрии, и т.д.

• **Н<sub>142</sub>** Кривизны тора (стр.115)

Для вычисления 2-й квадратичной формы тора найдём производные векторов касательного базиса:

$$\begin{aligned}\partial_\theta \mathbf{e}_\theta &= \{-bs_\theta c_\phi, -bs_\theta s_\phi, -bc_\theta\}, & \partial_\theta \mathbf{e}_\phi &= \{-bc_\theta s_\phi, bc_\theta c_\phi, 0\}, \\ \partial_\phi \mathbf{e}_\theta &= \{-bc_\theta s_\phi, bc_\theta c_\phi, 0\}, & \partial_\phi \mathbf{e}_\phi &= \{-(a + bs_\theta)c_\phi, -(a + bs_\theta)s_\phi, 0\}\end{aligned}$$

Поэтому коэффициенты второй квадратичной формы равны:

$$b_{ij} = \mathbf{m} \cdot \partial_i \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & -(a + bs_\theta)s_\theta \end{pmatrix}.$$

При  $a = 0$  коэффициенты  $b_{ij}$  переходят во вторую квадратичную форму на сфере.

Решая уравнение:

$$\det(\mathbf{B} - k\mathbf{G}) = \det \begin{pmatrix} -b - kb^2 & 0 \\ 0 & -(a + bs_\theta)s_\theta - k(a + bs_\theta)^2 \end{pmatrix} = 0,$$

или

$$(1 + kb)(s_\theta + k(a + bs_\theta)) = 0,$$

получаем:

$$k_1 = -\frac{1}{b}, \quad k_2 = -\frac{s_\theta}{a + bs_\theta}.$$

Если  $a = 0$ , то главные кривизны совпадают (тор переходит в сферу).

Средняя и гауссова кривизны равны:

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{bs_\theta + a/2}{b(a + bs_\theta)}, \quad K = k_1 k_2 = \frac{s_\theta}{b(a + bs_\theta)}.$$

В верхней и нижней части тора ( $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ ) гауссова кривизна равна нулю. На внутренней стороне тора на оси ( $\theta = -\pi/2$ ) кривизна по модулю максимальна  $K = -1/(ab - b^2)$ . На внешней стороне тора ( $\theta = \pi/2$ ) гауссова кривизна положительна и равна  $K = 1/(ab + b^2)$ .

Площадь поверхности тора вычисляется по формуле:

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{g} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} b(a + b \cos \theta) d\theta d\phi = (2\pi)^2 ab.$$

Интеграл от косинуса по его периоду (от 0 до  $2\pi$ ) равен нулю. Обратим внимание, что угол  $\theta$  для покрытия всей поверхности тора пробегает диапазон от 0 до  $2\pi$ .

---

• **H<sub>143</sub>** *Характеристическое уравнение* (стр.115)

Введём на касательной плоскости ортонормированные векторы декартового базиса  $\mathbf{i}_j = \mathbf{e}_k H_{kj}$ , разложив их по касательному базису.

$$\delta_{ij} = \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j = \mathbf{e}_k H_{ki} \cdot \mathbf{e}_p H_{pj} = (\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{H})_{ij} = 1_{ij}, \quad \begin{array}{c} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{array}$$


где  $\mathbf{G}$  – матрица тензора  $g_{kp} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_p$ . Пусть декартовы координаты точки на плоскости  $\mathbf{x} = (x, y)$ , а её же косоугольные координаты  $\mathbf{q} = (q^1, q^2)$ . Подставляя в  $q_j \mathbf{e}_j = x_i \mathbf{i}_i$  разложение  $\mathbf{i}_i = \mathbf{e}_j H_{ji}$ , получаем  $q_j = H_{ji} x_i$  или  $\mathbf{q} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}$ . Поэтому в декартовых координатах расстояние  $z$  равно (опускаем для краткости  $\bar{q}^i$  и обозначаем  $\mathbf{B}_{ij} = m \partial_i \mathbf{e}_j$ ):

$$z = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{H}^T \mathbf{B} \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}.$$

Таким образом, для получения главных кривизн диагонализации должна подвергаться матрица  $\mathbf{H}^T \mathbf{B} \mathbf{H}$ . Запишем её уравнение на собственные значения  $k$  и вектора  $\xi$ , умножив его слева на матрицу  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H}^T \mathbf{B} \mathbf{H} \cdot \xi = k \xi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{B} \cdot (\mathbf{H} \xi) = k (\mathbf{H} \xi).$$

Считая теперь  $\mathbf{H} \xi$  собственными векторами и учитывая, что  $\mathbf{H} \mathbf{H}^T = \mathbf{G}^{-1}$  ( $\leq \mathbf{H}_{54}$ ), получим *характеристическое уравнение*  $\det(\mathbf{G}^{-1} \mathbf{B} - k \mathbf{1}) = 0$  для определения главных кривизн  $k_1$  и  $k_2$ , или в эквивалентной форме:

$$\det(\mathbf{B} - k \mathbf{G}) = 0,$$

где обе части уравнения умножены на  $g = \det \mathbf{G} > 0$  и учтено, что произведение определителей равно определителю произведения матриц.

• **H<sub>144</sub>** *Скалярная кривизна в 2-х измерениях* (стр.115)

По определению скалярной кривизны имеем:

$$\begin{aligned} R &= g^{ip} g^{jr} R_{ij,pr} \\ &= g^{11} g^{jr} R_{1j,1r} + g^{12} g^{jr} R_{1j,2r} + g^{21} g^{jr} R_{2j,1r} + g^{22} g^{jr} R_{2j,2r} \\ &= g^{11} g^{22} R_{12,12} + g^{12} g^{21} R_{12,21} + g^{21} g^{12} R_{21,12} + g^{22} g^{11} R_{21,21}, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве сразу опущены нулевые компоненты тензора кривизны (по  $i, j$  и  $p, q$  тензор антисимметричен, поэтому  $R_{11,22} = 0$ , и т.д.). Переставляя индексы, с учётом свойств симметрии тензора кривизны получаем:

$$R = 2(g^{11} g^{22} - g^{12} g^{21}) R_{12,12} = 2(\det g^{jj}) R_{12,12} = \frac{2R_{12,12}}{\det g_{ij}} = \frac{2R_{12,12}}{g}.$$



• **Н<sub>145</sub>** *Независимые компоненты тензора кривизны* (стр.115)

Так как по индексам  $(i, j)$  и  $(p, r)$  тензор кривизны  $R_{ij,pr}$  антисимметричен, эти индексы не могут совпадать. В 3-мерном пространстве каждая пара индексов может равняться (12), (13), (23) и всем их антисимметричным перестановкам. Так как при перестановке пар индексов тензор не меняется, всего возможно 6 независимых компонент:

$$\begin{array}{ccc} R_{12,12} & R_{12,13} & R_{12,23} \\ & R_{13,13} & R_{13,23} \\ & & R_{23,23} \end{array}$$

Они упорядочены по возрастанию пар индексов. Тождество с циклической перестановкой индексов не добавляет связей, так как все три его слагаемых тождественно равны нулю (одинаковые индексы).

Выписанные 6-ть компонент  $R_{ij,pr}$  связаны с 6-ю компонентами симметричного тензора Риччи  $R_{ij}$ . Поворотом координатных осей симметричный тензор всегда можно привести к главным осям с 3-мя собственными значениями на диагонали. Поэтому в 3-мерии тензор кривизны пространства определяется 3-мя независимыми величинами.

Аналогично происходит подсчёт в 4-мерном пространстве (индексы с нуля). С учётом свойств антисимметрии по парам индексам слева и справа от запятой и симметричности при перестановке пар имеем:

$$\begin{array}{cccccc} R_{01,01} & R_{01,02} & R_{01,03} & R_{01,12} & R_{01,13} & R_{01,23} \\ & R_{02,02} & R_{02,03} & R_{02,12} & R_{02,13} & R_{02,23} \\ & & R_{03,03} & R_{03,12} & R_{03,13} & R_{03,23} \\ & & & R_{12,12} & R_{12,13} & R_{12,23} \\ & & & & R_{13,13} & R_{13,23} \\ & & & & & R_{23,23} \end{array}$$

Получилась 21-а компонента. Однако, в силу тождества с циклической перестановкой индексов (стр.112), существует ещё одна связь:

$$R_{01,23} + R_{03,12} + R_{02,31} = 0.$$

Поэтому независимых компонент в 4-мерном пространстве будет 20 штук.

На самом деле связей, ограничивающих компоненты тензора кривизны, ещё больше. В случае симметричных связностей он полностью определяется коэффициентами метрического тензора, которых в  $n$ -мерном пространстве, с учетом симметрии, будет  $(n^2 + n)/2$ , а в 4-мерном пространстве, соответственно, 10. Если геометрия пространства обладает достаточно высокой симметрией, можно выбрать систему координат, в которой тензор  $g_{ij}$  будет диагонален (в 3-мерном пространстве это можно сделать всегда). Тогда кривизна определяется 4 компонентами  $g_{ij}$ .

---

• **Н<sub>146</sub>** *Деривационные формулы* (стр.115)

Непараллельные касательные векторы  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  вместе с ортогональным вектором нормали  $\mathbf{m}$  образуют тройку линейно независимых векторов, которые можно рассматривать, как базис в 3-мерном пространстве. Разложение производных векторов  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{m})$  по этому базису называется *деривационными формулами* и выглядит следующим образом:

$$\partial_i \mathbf{e}_j = \Gamma_{ji}^p \mathbf{e}_p + b_{ij} \mathbf{m}, \quad \partial_i \mathbf{m} = -b_i^p \mathbf{e}_p.$$

где сумма по  $p$  от 1 до 2. Вектор нормали  $\mathbf{m}^2 = 1$  единичен, т.е. он ортогонален своим производным:  $\mathbf{m} \partial_i \mathbf{m} = 0$ , и  $\partial_i \mathbf{m}$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ . Так как  $g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ , и  $\mathbf{m} \mathbf{e}_i = 0$ , то коэффициенты равны:

$$\mathbf{e}_k \cdot \partial_i \mathbf{e}_j = g_{kp} \Gamma_{ji}^p = \Gamma_{k,ji}, \quad \mathbf{m} \cdot \partial_i \mathbf{e}_j = b_{ij}, \quad \mathbf{e}_i \cdot \partial_j \mathbf{m} = -b_j^p g_{pi}.$$

Аналогично вычислениям для криволинейного базиса, из  $g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  получается выражение для 2-мерных *символов Кристоффеля* поверхности (5.3), стр. 83. Так как  $\mathbf{m} \mathbf{e}_j = 0$ , то  $\mathbf{e}_j \partial_i \mathbf{m} = -\mathbf{m} \partial_i \mathbf{e}_j$ , то коэффициенты  $b_i^p$  равны:  $b_{ij} = b_i^p g_{pj}$ , или  $b_i^p = b_{ij} g^{jp}$ .

---

• **Н<sub>147</sub>** *Скалярная кривизна и кривизна Гаусса* (стр.115)

В данной точке поверхности выберем систему координат так, что плоскость  $(x, y)$  касается этой точки, а поверхность задана функцией  $z = f(x, y)$ . Метрические коэффициенты и кривизна Гаусса равны (стр. 212):

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}, \quad K = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

Так как плоскость касается поверхности, первые производные в точке касания равны нулю  $f'_x = f'_y = 0$ . Соответственно,  $\partial_k g_{ij}$  в точке касания также будут равны нулю. Следовательно, равны нулю и символы Кристоффеля (но не их производные!).

Воспользуемся выражением  $R_{ij,pr}$  через 2-е производные от метрического тензора (стр. 112) с нулевыми символами Кристоффеля:

$$R_{12,12} = \frac{1}{2} [2\partial_1 \partial_2 g_{12} - \partial_2 \partial_2 g_{11} - \partial_1 \partial_1 g_{22}] = \frac{1}{2} [2(f_x f_y)_{xy} - (f_x^2)_{yy} - (f_y^2)_{xx}].$$

Раскрывая вторые производные от произведения, получаем:

$$R_{12,12} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

Таким образом, в точке касания плоскости  $(x, y)$  получаем  $R_{12,12} = K$ . Учитывая, что скалярная кривизна равна  $R = 2R_{12,12}/g$ , приходим к соотношению  $R = 2K$ . Так как  $R$  и  $K$  являются скалярами, оно будет справедливо в любой системе координат. По характеристике Гаусса – это соотношение является “блистательной теоремой” (theorema egregium).

---

• **Н<sub>148</sub>** *Связность и кривизна 2-сферы* (стр.115)

Воспользуемся касательными векторами и их производными, полученными в задаче ( $\leq$  Н<sub>128</sub>),  $a = 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\theta &= \{c_\theta c_\phi, c_\theta s_\phi, -s_\theta\}, & \mathbf{e}_\phi &= \{-s_\theta s_\phi, s_\theta c_\phi, 0\}, \\ \partial_\theta \mathbf{e}_\theta &= \{-s_\theta c_\phi, -s_\theta s_\phi, -c_\theta\}, & \partial_\theta \mathbf{e}_\phi &= \{-c_\theta s_\phi, c_\theta c_\phi, 0\}, \\ \partial_\phi \mathbf{e}_\theta &= \{-c_\theta s_\phi, c_\theta c_\phi, 0\}, & \partial_\phi \mathbf{e}_\phi &= \{-s_\theta c_\phi, -s_\theta s_\phi, 0\}. \end{aligned}$$

Подставляя их в определение  $\Gamma_{k,ij} = \mathbf{e}_k \partial_j \mathbf{e}_i$ , получаем только 3 отличных от нуля символа Кристоффеля  $q^i = \{\theta, \phi\}$ :

$$\Gamma_{1,22} = -s_\theta c_\theta, \quad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = s_\theta c_\theta.$$

Поднятие индексов осуществляется при помощи обратного метрического тензора:  $g^{11} = 1$ ,  $g^{11} = 1/s_\theta^2$ , поэтому:

$$\Gamma_{22}^1 = -s_\theta c_\theta, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{c_\theta}{s_\theta}.$$

Второй, более быстрый способ основан на функции Лагранжа (стр. 90) с  $\mathbf{u}^2 = \dot{\theta}^2 + s_\theta^2 \dot{\phi}^2$ . Компоненты ускорения равны:

$$a_\theta = \ddot{\theta} - s_\theta c_\theta \dot{\phi}^2, \quad a_\phi = s_\theta^2 \ddot{\phi} + 2 s_\theta c_\theta \dot{\theta} \dot{\phi},$$

откуда сразу получаются ненулевые  $\Gamma_{k,ij}$ .

Тензор кривизны:  $R_{2,12}^1 = \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{k1}^1 \Gamma_{22}^k - \Gamma_{k2}^1 \Gamma_{21}^k = s_\theta^2$ . Поэтому  $R = 2R_{12,12}/g = 2R_{2,12}^1/g = 2 = \text{const}$ .

• **Н<sub>149</sub>** *Геодезические на сфере* (стр.115)

При помощи символов Кристоффеля из предыдущей задачи запишем:

$$\theta'' - s_\theta c_\theta \phi'^2 = 0, \quad \phi'' + 2 \frac{c_\theta}{s_\theta} \theta' \phi' = 0.$$

Второе уравнение легко интегрируется  $\phi' = \alpha/s_\theta^2$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Поэтому первое уравнение имеет вид:

$$\theta'' = \alpha^2 \frac{c_\theta}{s_\theta^3} \quad \Rightarrow \quad \theta'^2 = \beta - \frac{\alpha^2}{s_\theta^2},$$

где интегрирование проводится умножением левой и правой части на  $\theta'$ . Экватор сферы соответствует  $\theta = \pi/2$ ,  $\phi = s/a$ . Меридиан:  $\phi = \text{const}$ ,  $\theta = s/2$ . Малый круг  $\theta = \text{const} \neq \pi/2$  геодезической не является.

Можно проверить, что соотношения, полученные в задаче ( $\leq$  Н<sub>135</sub>), стр. 210, также удовлетворяют уравнению геодезической.

• **H<sub>150</sub>** *Метрика  $n$ -мерной сферы* (стр.115)

Будем при помощи векторов обозначать суммирование по  $n$  координатам  $\mathbf{x}^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$  и не будем различать для координат верхние и нижние индексы, т.е.  $x^k = x_k$ . Дифференцируя уравнение сферы, имеем:

$$x_{n+1}^2 = a^2 - \mathbf{x}^2 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} dx_{n+1} = -\mathbf{x} d\mathbf{x}.$$

Подставляя  $dx_{n+1}$  в метрику  $n+1$  мерного евклидова пространства, получаем:

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 + dx_{n+1}^2 = d\mathbf{x}^2 + \frac{(\mathbf{x} d\mathbf{x})^2}{x_{n+1}^2} = d\mathbf{x}^2 + \frac{(\mathbf{x} d\mathbf{x})^2}{a^2 - \mathbf{x}^2}.$$

Поэтому:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{a^2 - \mathbf{x}^2}.$$

Обратный тензор будем искать в виде:

$$g^{ij} = \delta^{ij} + x_i x_j A$$

Так как  $g^{ij}$  и  $g_{ij}$  являются обратными, имеем:

$$\delta_j^i = g^{ik} g_{kj} = (\delta^{ik} + x_i x_k A) (\delta_{kj} + x_k x_j / (a^2 - \mathbf{x}^2)),$$

перемножая скобки, получаем  $A = -1/a^2$ . Поэтому

$$g^{ij} = \delta^{ij} - \frac{x_i x_j}{a^2}.$$

• **H<sub>151</sub>** *Связность  $n$ -мерной сферы* (стр.115)

Дифференцируем полученные в предыдущей задаче метрические коэффициенты:

$$\partial_k g_{ij} = \frac{\delta_{ki} x_j + \delta_{kj} x_i}{a^2 - \mathbf{x}^2} + \frac{2x_i x_j x_k}{(a^2 - \mathbf{x}^2)^2} = \frac{x_i g_{jk} + x_j g_{ik}}{a^2 - \mathbf{x}^2}.$$

Подставляя в связь символов Кристоффеля и метрического тензора, получаем:

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) = \frac{x_k g_{ij}}{a^2 - \mathbf{x}^2}.$$

Символ Кристоффеля с верхним индексом:

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kp} \Gamma_{p,ij} = \left( \delta^{kp} - \frac{x_k x_p}{a^2} \right) \frac{x_p g_{ij}}{a^2 - \mathbf{x}^2} = \frac{x_k g_{ij}}{a^2}.$$

Напомним, что  $x_k = x^k$ , поэтому для “красоты” индексного выражения индекс  $k$  можно поднять вверх.

- **Н<sub>152</sub>** Кривизна  $n$ -мерной сферы (стр.115)

По определению тензор кривизны равен:

$$R_{j,pr}^i = \partial_p \Gamma_{jr}^i + \Gamma_{kp}^i \Gamma_{jr}^k - \{p \leftrightarrow r\}.$$

При помощи полученных выше связностей  $\Gamma_{ij}^k = x_k g_{ij}/a^2$  имеем:

$$R_{j,pr}^i = \frac{\partial_p(x_i g_{jr})}{a^2} + \frac{x_i g_{kp} x_k g_{jr}}{a^4} - \{p \leftrightarrow r\}.$$

Заметим, что

$$g_{kp} x_k = \left( \delta_{kp} + \frac{x_k x_p}{a^2 - \mathbf{x}^2} \right) x_k = \left( 1 + \frac{\mathbf{x}^2}{a^2 - \mathbf{x}^2} \right) x_p = \frac{a^2 x_p}{a^2 - \mathbf{x}^2}$$

и

$$\partial_p(x_i g_{jr}) = \delta_{pi} g_{jr} + x_i \partial_p g_{jr} = \delta_{pi} g_{jr} + \frac{x_i x_j g_{rp} + x_i x_r g_{jp}}{a^2 - \mathbf{x}^2}.$$

Подставляя, получаем:

$$R_{j,pr}^i = \frac{1}{a^2} (\delta_p^i g_{jr} - \delta_r^i g_{jp}).$$

При помощи метрического тензора  $g_{ij}$  можно опустить один индекс:

$$R_{ij,pr} = \frac{1}{a^2} (g_{ip} g_{jr} - g_{ir} g_{jp}).$$

Заметим, что в этом выражении координаты “спрятались” в метрический тензор. Поэтому это тензорное выражение (слева и справа только тензоры) будет справедливо *для любой системы координат*, а не только для той, с которой мы начали вычисления.

Тензор Риччи получается свёрткой первого и третьего индекса:

$$R_{jr} = R_{j,ir}^i = \frac{1}{a^2} (\delta_i^i g_{jr} - \delta_r^i g_{ij}) = \frac{n-1}{a^2} \cdot g_{jr},$$

где учтено, что  $\delta_i^i = \delta_1^1 + \dots + \delta_n^n = n$ .

Скалярная кривизна:

$$R = g^{ij} R_{ij} = \frac{n-1}{a^2} \cdot g^{ij} g_{ij} = \frac{n-1}{a^2} \cdot \delta_i^i = \frac{n(n-1)}{a^2}.$$

Заметим что выражения для  $R$ ,  $R_{ij}$ ,  $R_{ij,pr}$  можно получить сразу из соображений симметрии. Сфера является однородным и изотропным пространством без выделенных точек и направлений. Поэтому тензоры кривизны могут зависеть только от одного тензора – метрического. Дальше вступают в силу свойства симметрий тензоров кривизны и Риччи.

---

- **Н<sub>153</sub>** *n*-мерная сфера в стереографических координатах (стр.115)

Метрика сферы в стереографических координатах имеет вид:

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{A^2}, \quad g^{ij} = A^2 \delta^{ij}, \quad A = 1 + \frac{K}{4} \frac{\mathbf{x}^2}{a^2},$$

где, как и раньше,  $\mathbf{x}^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ , и не делается разницы между верхними и нижними индексами для координат  $x^i = x_i$ . Производные метрического тензора равны:

$$\partial_k g_{ij} = -K \frac{x_k \delta_{ij}}{a^2 A^3},$$

поэтому символы Кристоффеля имеют вид:

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) = -\frac{K}{2a^2 A^3} (x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ik} - x_k \delta_{ij}).$$

Поднимая индекс, получаем:

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kp} \Gamma_{p,ij} = -\frac{K}{2a^2 A} (x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ik} - x_k \delta_{ij}).$$

Производная  $\partial_p \Gamma_{jr}^i$  равна (опущены симметричные по  $p, r$  члены):

$$\partial_p \Gamma_{jr}^i = \frac{K}{2a^2 A} (\delta_{ip} \delta_{jr} - \delta_{ir} \delta_{jp}) + \frac{K^2}{4a^4 A^2} (x_p x_j \delta_{ri} - x_p x_i \delta_{jr}) + \dots$$

Произведение символов Кристоффеля:

$$\Gamma_{kp}^i \Gamma_{jr}^k = \frac{K^2}{4a^4 A^2} (2x_r x_j \delta_{pi} + x_p x_j \delta_{ir} - x_i x_r \delta_{pj} - \mathbf{x}^2 \delta_{pi} \delta_{rj}) + \dots$$

Сложим предыдущие два выражения (опуская симметричные  $(p, r)$  члены):

$$\frac{K}{2a^2 A} (\delta_{ip} \delta_{jr} - \delta_{ir} \delta_{jp}) - \frac{K^2}{a^4 A^2} \frac{\mathbf{x}^2}{4} \delta_{ip} \delta_{jr} + \dots$$

Вычитая такое же выражение с переставленными индексами  $p$  и  $r$ , получаем:

$$R_{j,pr}^i = \frac{K}{a^2 A^2} (\delta_{ip} \delta_{jr} - \delta_{ir} \delta_{jp}) = \frac{K}{a^2} (\delta_p^i g_{jr} - \delta_r^i g_{jp}).$$

При помощи метрического тензора  $g_{ij}$  можно опустить один индекс:

$$R_{ij,pr} = \frac{K}{a^2} (g_{ip} g_{jr} - g_{ir} g_{jp}).$$

Естественно, получается такое же выражение, как и при использовании координат предыдущей задачи ( $K = 1$ ). Если  $K = 0$ , то кривизна равна нулю, а при  $K = -1$  скалярная кривизна постоянна и отрицательна  $R = -n(n-1)/a^2$ .

---

• **Н<sub>154</sub>** *Геодезические на сфере в координатах Бельтрами* (стр.115)

Метрика сферы в координатах Бельтрами имеет вид:

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{A} - \frac{x_i x_j}{a^2 A^2}, \quad A = 1 + \frac{\mathbf{x}^2}{a^2},$$

где  $\mathbf{x}^2 = x_i x_i = x_1 x_1 + \dots + x_n x_n$ . Для координат  $x_i = x^i$  не делаем различия между верхними и нижними индексами. Берём производные:

$$\partial_k g_{ij} = -\frac{2\delta_{ij}x_k + \delta_{ik}x_j + \delta_{jk}x_i}{a^2 A^2} + \frac{4x_i x_j x_k}{a^4 A^3}.$$

Поэтому символы Кристоффеля равны:

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) = -\frac{x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ik}}{a^2 A^2} + \frac{2x_i x_j x_k}{a^4 A^3}.$$

Обратный метрический тензор ищем в виде  $g^{ij} = A\delta^{ij} + Bx_i x_j$ . Из условия  $g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$  получаем  $B = A/a^2$ , или

$$g^{ij} = A \left( \delta^{ij} + \frac{x_i x_j}{a^2} \right).$$

Поднимаем первый индекс у символов Кристоффеля:

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kp} \Gamma_{p,ij} = -\frac{x_i \delta_j^k + x_j \delta_i^k}{a^2 A}.$$

Поэтому уравнение геодезической имеет вид:

$$\frac{\ddot{x}_k}{a} = \frac{2\dot{x}_k \dot{x}_i x_i}{a^2 A} = \frac{d \ln A}{ds} \dot{x}_k,$$

где  $\dot{x}_k = dx_k/ds$ , и т.д. Интегрируя покомпонентно, имеем:

$$\frac{\dot{x}_k}{a} = \alpha_k \left( 1 + \frac{\mathbf{x}^2}{a^2} \right),$$

где  $\alpha_k$  – константы интегрирования. Решением этого уравнения является прямая с параметризацией вида:

$$x_k = \alpha_k f(s) + \beta_k,$$

где функция  $f(s)$  одинаковая для каждой координаты и удовлетворяет уравнению:

$$f'(s) = 1 + \beta_k \beta_k + 2\alpha_k \beta_k f(s) + \alpha_k^2 f^2(s).$$

Эта параметризация (длина отрезка на прямой) зависит от начального положения отрезка  $\beta_k$  и его направления  $\alpha_k$ . Наиболее простое выражение получается для прямых, проходящих через северный полюс (точку касания проективной плоскости), когда  $\beta_k = 0$ . В этом случае функция равна  $f(s) = \operatorname{tg}(\alpha s)/\alpha$ , где  $\alpha = \sqrt{\alpha_k \alpha_k}$ .

- **Н<sub>155</sub>** *Кривизна 4-пространства в теории Большого Взрыва* (стр.115)

Для расстояния  $ds^2 = dt^2 - a^2(t) \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j$  имеем следующие метрические коэффициенты:

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = -a^2(t) \tilde{g}_{ij}$$

Будем использовать латинские буквы  $i, j, \dots$  для 3-мерных пространственных индексов, пробегающих от 1 до 3, а греческие буквы  $\alpha, \beta, \dots$  для 4-мерных индексов со значениями от 0 до 3. Символы Кристоффеля, имеющие два или три нулевых индекса, равны нулю:

$$\Gamma_{0,00} = \frac{1}{2}(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0.$$

$$\Gamma_{i,00} = \frac{1}{2}(\partial_0 g_{0i} + \partial_0 g_{0i} - \partial_i g_{00}) = 0.$$

$$\Gamma_{0,i0} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{00} + \partial_0 g_{i0} - \partial_0 g_{i0}) = 0.$$

Ненулевые символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{0,ij} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{j0} + \partial_j g_{i0} - \partial_0 g_{ij}) = a\dot{a} \tilde{g}_{ij},$$

$$\Gamma_{i,j0} = \frac{1}{2}(\partial_j g_{0i} + \partial_0 g_{ji} - \partial_i g_{j0}) = -a\dot{a} \tilde{g}_{ij},$$

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) = -a^2 \tilde{\Gamma}_{k,ij},$$

где  $\tilde{\Gamma}_{k,ij}$  – 3-мерные символы Кристоффеля, составленные из метрических коэффициентов  $\tilde{g}_{ij}$ .

Обратный метрический тензор имеет компоненты:

$$g^{00} = 1, \quad g^{0i} = 0, \quad g^{ij} = -\frac{\tilde{g}^{ij}}{a^2(t)},$$

где  $\tilde{g}^{ik} \tilde{g}_{kj} = \delta_j^i$ . Поэтому несложно записать ненулевые символы Кристоффеля с верхним индексом. Например:

$$\Gamma_{ij}^0 = g^{00} \Gamma_{0,ij} + g^{0k} \Gamma_{k,ij} = g^{00} \Gamma_{0,ij} = a\dot{a} \tilde{g}_{ij},$$

и т.д. Таким образом:

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a} \tilde{g}_{ij}, \quad \Gamma_{j0}^i = \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i, \quad \Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k.$$

Остальные символы, имеющие два или три нулевых индекса, равны нулю. Отметим, что пространственные компоненты  $\Gamma_{ij}^k$  совпали с символами Кристоффеля  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{g}^{kp} \tilde{\Gamma}_{p,ij}$ , полученными их 3-мерной метрики  $\tilde{g}_{ij}$ .



Запишем теперь тензор Риччи:

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \Gamma_{\nu\beta}^\mu.$$

Распишем его по компонентам:

$$R_{00} = \partial_\mu \Gamma_{00}^\mu - \partial_0 \Gamma_{0\mu}^\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\mu \Gamma_{00}^\nu - \Gamma_{0\mu}^\nu \Gamma_{0\nu}^\mu = -\partial_0 \Gamma_{0k}^k - \Gamma_{0p}^k \Gamma_{0k}^p = -3 \frac{\ddot{a}}{a},$$

где для  $\delta_k^k = 3$ . При разбивании сумм на нулевой и пространственный индекс сразу учтено, что символы Кристоффеля с двумя или тремя нулевыми индексами равны нулю. Далее:

$$R_{i0} = \partial_\mu \Gamma_{i0}^\mu - \partial_0 \Gamma_{i\mu}^\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\mu \Gamma_{i0}^\nu - \Gamma_{i\mu}^\nu \Gamma_{\nu 0}^\mu = \partial_k \Gamma_{i0}^k - \partial_0 \Gamma_{ik}^k + \Gamma_{kp}^p \Gamma_{i0}^k - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{p0}^k.$$

Подставляя символы Кристоффеля, получаем:

$$R_{i0} = \Gamma_{kp}^p \frac{\dot{a}}{a} \delta_i^k - \Gamma_{ik}^p \frac{\dot{a}}{a} \delta_p^k = 0.$$

Пространственные компоненты:

$$R_{ij} = \partial_0 \Gamma_{ij}^0 + \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_j \Gamma_{ik}^k + \Gamma_{0k}^k \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{pk}^k \Gamma_{ij}^p - \Gamma_{ik}^0 \Gamma_{0j}^k - \Gamma_{i0}^k \Gamma_{kj}^0 - \Gamma_{ip}^k \Gamma_{kj}^p.$$

Члены, не содержащие нулевых индексов, собираются в 3-мерный тензор Риччи  $\tilde{R}_{ij}$ , в результате чего:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + [a\ddot{a} + 2\dot{a}^2] \tilde{g}_{ij} = \tilde{R}_{ij} - \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] g_{ij}.$$

Скалярная кривизна:

$$R = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij} = -6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{\tilde{R}}{a^2}.$$

Для однородного и изотропного 3-мерного пространства тензор Риччи  $\tilde{R}_{ij} = 2K\tilde{g}_{ij} = -2Kg_{ij}/a^2$  и скалярная кривизна  $\tilde{R} = 6K$ , поэтому тензор Эйнштейна:  $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - Rg_{\alpha\beta}/2$  имеет компоненты:

$$G_{00} = 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3 \frac{K}{a^2}, \quad G_{0i} = 0, \quad G_{ij} = \left[ 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{3} G_{00} \right] g_{ij}.$$

Равенство нулю тензора Эйнштейна приводит к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\dot{a}^2 = -K, \quad \ddot{a} = 0.$$

Для 3-мерного пространства с отрицательной кривизной  $K = -1$  получаем:  $a(t) = a_0 + t$ .

## Дифференциальные формы

- **H<sub>156</sub>** *Прямое произведение в виде матрицы* (стр.132)

Если  $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$  и  $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$ , то

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{pmatrix}.$$

- **H<sub>157</sub>** *Тензорные и косое произведения* (стр.132)

Для  $\mathbf{A} = \{1, 0, 2\}$  и  $\mathbf{B} = \{2, 1, 1\}$  имеем

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} \otimes \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$  получается из  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  операцией транспонирования, а  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$  – вычитанием предыдущих двух матриц. Естественно, результирующая матрица оказывается антисимметричной.

- **H<sub>158</sub>** *Тождество*  $\omega^k \wedge \omega^p = (-1)^{k \cdot p} \omega^p \wedge \omega^k$  (стр.132)

Пусть

$$\omega^k = \omega_{i_1 \dots i_k} \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_k}, \quad \omega^p = \omega_{j_1 \dots j_p} \mathbf{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{j_p}$$

Косое произведение равно:

$$\omega^k \wedge \omega^p = \omega_{i_1 \dots i_k} \omega_{j_1 \dots j_p} \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_k} \wedge \mathbf{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{j_p}.$$

При перестановке форм  $\mathbf{d}x^{j_1}$  из  $\omega^p$  необходимо перенести через  $k$  дифференциалов, в результате чего появляется множитель  $(-1)^k$ . Ещё один множитель  $(-1)^k$  возникнет при переносе  $\mathbf{d}x^{j_2}$ , и т.д. Итоговый множитель равен  $(-1)^{k \cdot p}$ .

- **H<sub>159</sub>** *Символ Леви-Чевиты равен косому произведению* (стр.132)

Вычислим компоненту  $(\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z)_{123}$ :

$$(\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z)_{123} = \begin{vmatrix} (\mathbf{d}x)_1 & (\mathbf{d}y)_1 & (\mathbf{d}z)_1 \\ (\mathbf{d}x)_2 & (\mathbf{d}y)_2 & (\mathbf{d}z)_2 \\ (\mathbf{d}x)_3 & (\mathbf{d}y)_3 & (\mathbf{d}z)_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

При перестановке любых двух индексов (строки в определителе) изменяется знак. Если два индекса равны, получается ноль. Это и есть компоненты тензора  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$

• **Н<sub>160</sub>** *Декартовы и сферические координаты* (стр.132)

При переходе от декартовой к сферической системе координат имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r s_{\theta} c_{\phi} \\ y = r s_{\theta} s_{\phi} \\ z = r c_{\theta} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = s_{\theta} c_{\phi} dr + r c_{\theta} c_{\phi} d\theta - r s_{\theta} s_{\phi} d\phi \\ dy = s_{\theta} s_{\phi} dr + r c_{\theta} s_{\phi} d\theta + r s_{\theta} c_{\phi} d\phi \\ dz = c_{\theta} dr - r s_{\theta} d\theta. \end{array}$$

Перемножая косым образом (с соблюдением порядка сомножителей), например, для проекции площади на плоскость  $(x, y)$ , имеем:

$$dx \wedge dy = r^2 s_{\theta} c_{\theta} d\theta \wedge d\phi - r s_{\theta}^2 d\phi \wedge dr.$$

Вторая проекция площади равна:

$$dz \wedge dx = r c_{\phi} dr \wedge d\theta - r s_{\theta} c_{\theta} s_{\phi} dr \wedge d\phi + r^2 s_{\theta}^2 s_{\phi} d\theta \wedge d\phi.$$

Аналогично для:

$$dy \wedge dz = -r s_{\phi} dr \wedge d\theta - r s_{\theta} c_{\theta} c_{\phi} dr \wedge d\phi + r^2 s_{\theta}^2 c_{\phi} d\theta \wedge d\phi.$$

• **Н<sub>161</sub>** *Объём в сферических координатах* (стр.132)

Если  $dx \wedge dy$  справа косым образом умножить на  $dz$ , то получится объём:

$$dx \wedge dy \wedge dz = r^2 s_{\theta} dr \wedge d\theta \wedge d\phi.$$

Естественно, это выражение является антисимметричным тензором ранга  $(0,3)$ , и в реальный объём оно превратится, если свернуть его с тремя смещениями в пространстве по каждой из координат. Собственно, именно эти смещения (обычные дифференциалы координат) определяют бесконечно малый объём в той или иной системе координат.

• **Н<sub>162</sub>** *Внешние производные* (стр.132)

$$\begin{aligned} d(xz dx \wedge dy) &= x dz \wedge dx \wedge dy = x dx \wedge dy \wedge dz, \\ d(xyz dz) &= yz dx \wedge dz + xz dy \wedge dz, \\ d((x^2 + y^2 + z^2) dz) &= 2x dx \wedge dz + 2y dy \wedge dz, \\ d(xyz dx \wedge dy \wedge dz) &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что в 3-мерном пространстве внешняя производная от 3-формы  $d(f dx \wedge dy \wedge dz)$  равна нулю при любой функции  $f = f(x, y, z)$ .

- **H<sub>163</sub>** Ротор  $\mathbf{r}$  в произвольной размерности (стр.132)

Запишем 1-форму:  $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{d}x_1 + \dots + x_n \mathbf{d}x_n$ . Её внешняя производная равна нулю:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{d}x_1 \wedge \mathbf{d}x_1 + \dots + \mathbf{d}x_n \wedge \mathbf{d}x_n = 0$$

так как равны нулю косые произведения одинаковых градиентов.

---

- **H<sub>164</sub>** Внешний дифференциал произведения форм (стр.132)

В выражении  $d(f\mathbf{F})$ , где  $f$  – скалярная функция (0-форма), а  $\mathbf{F}$  – произвольная форма, подставляем определение внешней производной:

$$\partial_k(f\mathbf{F}_{ij\dots})dq^k \wedge dq^i \wedge dq^j \wedge \dots = (F_{ij\dots}\partial_k f + f\partial_k F_{ij\dots})dq^k \wedge dq^i \wedge dq^j \wedge \dots$$

это выражение равно:

$$df \wedge F_{ij\dots}dq^i \wedge dq^j \wedge \dots + f\partial_k F_{ij\dots}dq^k \wedge dq^i \wedge dq^j \wedge \dots = df \wedge \mathbf{F} + f d\mathbf{F}.$$

Аналогично, если  $\mathbf{A}$  – 1-форма, имеем

$$d(\mathbf{A} \wedge \mathbf{F}) = d(A^i F_{j\dots} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j \wedge \dots) = \partial_k(A^i F_{j\dots}) \mathbf{d}q^k \wedge \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j \wedge \dots$$

Раскрывая производную произведения, получаем:

$$d(\mathbf{A} \wedge \mathbf{F}) = d\mathbf{A} \wedge \mathbf{F} + A^i \partial_k(F_{j\dots}) \mathbf{d}q^k \wedge \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j \wedge \dots = d\mathbf{A} \wedge \mathbf{F} - \mathbf{A} \wedge d\mathbf{F},$$

где в последнем слагаемом для сворачивания 1-формы  $\mathbf{A}$  переставлены сомножители в косом произведении  $\mathbf{d}q^k \wedge \mathbf{d}q^i = -\mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^k$ .

---

- **H<sub>165</sub>**  $(\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^k)_{\alpha\beta\gamma}$  в 4-мерном пространстве (стр.132)

По определению косого произведения:

$$(\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^k)_{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} (\mathbf{d}x^i)_\alpha & (\mathbf{d}x^j)_\alpha & (\mathbf{d}x^k)_\alpha \\ (\mathbf{d}x^i)_\beta & (\mathbf{d}x^j)_\beta & (\mathbf{d}x^k)_\beta \\ (\mathbf{d}x^i)_\gamma & (\mathbf{d}x^j)_\gamma & (\mathbf{d}x^k)_\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_\alpha^i & \delta_\alpha^j & \delta_\alpha^k \\ \delta_\beta^i & \delta_\beta^j & \delta_\beta^k \\ \delta_\gamma^i & \delta_\gamma^j & \delta_\gamma^k \end{vmatrix} = I_{\alpha\beta\gamma}^{ijk},$$

где учтено, что ковариантные компоненты градиента координаты равны  $(\mathbf{d}x^i)_\alpha = \partial_\alpha x^i = \delta_\alpha^i$ . Для произведения двух абсолютно антисимметричных символов Леви-Чевиты, свёрнутых по одному индексу, имеем:

$$\varepsilon^{ijk\mu} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} = \begin{vmatrix} \delta_\alpha^i & \delta_\alpha^j & \delta_\alpha^k & \delta_\alpha^\mu \\ \delta_\beta^i & \delta_\beta^j & \delta_\beta^k & \delta_\beta^\mu \\ \delta_\gamma^i & \delta_\gamma^j & \delta_\gamma^k & \delta_\gamma^\mu \\ \delta_\mu^i & \delta_\mu^j & \delta_\mu^k & \delta_\mu^\mu \end{vmatrix} = -\delta_\mu^i I_{\alpha\beta\gamma}^{jk\mu} + \delta_\mu^j I_{\alpha\beta\gamma}^{ik\mu} - \delta_\mu^k I_{\alpha\beta\gamma}^{ij\mu} + \delta_\mu^\mu I_{\alpha\beta\gamma}^{ijk} = I_{\alpha\beta\gamma}^{ijk}.$$

где определитель раскрыт по нижней строке и  $\delta_\mu^\mu = 4$  и учтена антисимметричность  $I_{\alpha\beta\gamma}^{ijk}$  по верхним индексам. В результате:

$$(\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^k)_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon^{ijk\mu} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}.$$


---

- **H<sub>166</sub>** Ротор и дивергенция в сферических координатах (стр.132)

В сферических координатах коэффициенты Ламе  $h_i = (1, r, rs_\theta)$ . Поэтому 1-форма вектора равна:

$$\mathbf{A} = a_r \mathbf{dr} + a_\theta r \mathbf{d\theta} + a_\phi r s_\theta \mathbf{d\phi}.$$

Берём внешний дифференциал, опуская градиенты, равные нулю в косом произведении:

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} = & \left[ \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \mathbf{d\theta} + \frac{\partial a_r}{\partial \phi} \mathbf{d\phi} \right] \wedge \mathbf{dr} + \left[ \frac{\partial(a_\theta r)}{\partial r} \mathbf{dr} + r \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \mathbf{d\phi} \right] \wedge \mathbf{d\theta} \\ & + \left[ s_\theta \frac{\partial(a_\phi r)}{\partial r} \mathbf{dr} + r \frac{\partial(a_\phi s_\theta)}{\partial \theta} \mathbf{d\theta} \right] \wedge \mathbf{d\phi}. \end{aligned}$$

Перегруппировывая слагаемые, с учётом антисимметричности косого произведения получаем:

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} = & \frac{1}{rs_\theta} \left[ \frac{\partial(s_\theta a_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right] r^2 s_\theta \mathbf{d\theta} \wedge \mathbf{d\phi} + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{s_\theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r a_\phi)}{\partial r} \right] r s_\theta \mathbf{d\phi} \wedge \mathbf{dr} \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] r \mathbf{dr} \wedge \mathbf{d\theta}. \end{aligned}$$

Справа от квадратных скобок вынесены проекции “вектора” элемента поверхности в сферических координатах. Коэффициенты при них – это компоненты ротора.

Аналогично записываем 2-форму потока вектора через поверхность:

$$\mathbf{F} = a_r r^2 s_\theta \mathbf{d\theta} \wedge \mathbf{d\phi} + a_\theta r s_\theta \mathbf{d\phi} \wedge \mathbf{dr} + a_\phi r \mathbf{dr} \wedge \mathbf{d\theta}.$$

Взятие внешнего дифференциала даёт:

$$d\mathbf{F} = \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{rs_\theta} \frac{\partial(s_\theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r s_\theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \right] r^2 s_\theta \mathbf{dr} \wedge \mathbf{d\theta} \wedge \mathbf{d\phi}.$$

Справа от квадратных скобок – элемент объёма в сферической системе координат

$$dV = r^2 s_\theta \mathbf{dr} \wedge \mathbf{d\theta} \wedge \mathbf{d\phi}.$$

Множитель при объёме является дивергенцией:

$$d\mathbf{F} = \nabla \mathbf{A} dV.$$

Напомним, что компоненты вектора  $a_r, a_\theta, a_\phi$  являются его проекциями на векторы ортонормированного базиса  $\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_\phi$ .

- **H<sub>167</sub>**  $*\mathbf{d}x^i$  в 4-мерном пространстве (стр.132)

Градиенты имеют ковариантные индексы, поэтому:

$$(*\mathbf{d}x^\mu)_{\alpha\beta\gamma} = E_{\nu\alpha\beta\gamma} g^{\nu k} (\mathbf{d}x^\mu)_k = E_{\nu\alpha\beta\gamma} g^{\nu k} \delta_k^\mu = g^{\mu\nu} E_{\nu\alpha\beta\gamma} = \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma},$$

где учтено, что ковариантные компоненты градиента координаты равны  $(\mathbf{d}x^\mu)_k = \partial_k x^\mu = \delta_k^\mu$ . Воспользуемся теперь задачей ( $\leq$  H<sub>165</sub>):

$$\varepsilon_{\nu ijk} (\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^k)_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\nu ijk} \varepsilon^{ijk\mu} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} = -3! \delta_\nu^\mu \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} = -3! \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu},$$

где учтено тождество  $\varepsilon^{ijk\mu} \varepsilon_{ijk\nu} = 3! \delta_\nu^\mu$  ( $\leq$  H<sub>79</sub>). Поэтому:

$$(*\mathbf{d}x^\mu)_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3!} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \varepsilon_{\nu ijk} (\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^k)_{\alpha\beta\gamma},$$

Ковариантные индексы  $\alpha, \beta, \gamma$  градиентов можно теперь опустить.

---

- **H<sub>168</sub>**  $*(\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j)$  в 4-мерном пространстве (стр.132)

Учитывая  $(\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j)_{\sigma\tau} = (\mathbf{d}x^i)_\sigma (\mathbf{d}x^j)_\tau - (\mathbf{d}x^j)_\sigma (\mathbf{d}x^i)_\tau$ , имеем:

$$*(\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} E_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} (\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j)_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} E_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} (\delta_\sigma^i \delta_\tau^j - \delta_\tau^i \delta_\sigma^j).$$

Поэтому:

$$*(\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j)_{\alpha\beta} = \sqrt{|g|} g^{i\mu} g^{j\nu} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}.$$

С другой стороны:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho q} (\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho q} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta},$$

откуда следует доказываемое тождество.

---

- **H<sub>169</sub>** Двойное применение оператора Ходжа в 3-мерии (стр.132)

Из тензора  $F^{ij}$  мы получаем  $*F_i$ :

$$**F_{ij} = *( *F)_{ij} = E_{ij\alpha} *F^\alpha = \frac{1}{2} E_{ij\alpha} E^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

Выражая свёртку двух символов Леви-Чевиты через символы Кронекера [см. ( $\leq$  H<sub>78</sub>), стр. 183)], имеем:

$$**F_{ij} = \text{sign}(g) \frac{1}{2} (\delta_i^\mu \delta_j^\nu - \delta_j^\mu \delta_i^\nu) F_{\mu\nu} = \text{sign}(g) \frac{1}{2} (F_{ij} - F_{ji}) = \text{sign}(g) F_{ij}.$$

Аналогично, учитывая ( $\leq$  H<sub>79</sub>), имеем:

$$**F_i = \frac{1}{2} E_{i\alpha\beta} *F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} E_{i\alpha\beta} E^{\alpha\beta\mu} F_\mu = \text{sign}(g) \frac{1}{2} \delta_i^\mu F_\mu = \text{sign}(g) F_i.$$


---

- **Н<sub>170</sub>** Двойное применение оператора Ходжа (стр.133)

Докажем тождество

$$^{**}\mathbf{F} = (-1)^{k(n-k)} \text{sign}(g) \mathbf{F},$$

справедливое для любой формы. Запишем его в координатном виде. Пусть  $\mathbf{F}$  – тензор ранга  $(0, k)$ . Тогда в  $n$ -мерном пространстве:

$$(^*\mathbf{F})_{i_1 \dots i_{n-k}} = \frac{1}{k!} E_{j_1 \dots j_k i_1 \dots i_{n-k}} F^{j_1 \dots j_k}.$$

Двойное сопряжение равно:

$$(^{**}\mathbf{F})_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{(n-k)!} E_{j_1 \dots j_{n-k} i_1 \dots i_k} (^*\mathbf{F})^{j_1 \dots j_{n-k}}$$

Подставляя первое соотношение во второе, имеем:

$$(^{**}\mathbf{F})_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!(n-k)!} E_{j_1 \dots j_{n-k} i_1 \dots i_k} E^{\mu_1 \dots \mu_k j_1 \dots j_{n-k}} F_{\mu_1 \dots \mu_k}.$$

Тензор Леви-Чевиты с нижними индексам равен символу Леви-Чевиты, умноженному на  $\sqrt{|g|}$ . С верхними индексами – множитель  $\sqrt{|g|}/g$ . В результате общий множитель равен  $|g|/g = \text{sign}(g)$ . Во втором тензоре Леви-Чевиты поменяем местами группу индексов  $\mu_1 \dots \mu_k$  и  $j_1 \dots j_{n-k}$ . Для этого необходимо перенести сначала  $n-k$  раз вправо индекс  $\mu_k$ . Появится множитель  $(-1)^{n-k}$ . Затем столько же раз переставить индекс  $\mu_{k-1}$ , и т.д.  $k$  раз. Результирующий множитель  $(-1)^{k(n-k)}$ . Поэтому осталось доказать, что:

$$F_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!(n-k)!} \varepsilon_{j_1 \dots j_{n-k} i_1 \dots i_k} \varepsilon^{j_1 \dots j_{n-k} \mu_1 \dots \mu_k} F_{\mu_1 \dots \mu_k}.$$

Все индексные символы в выражении антисимметричны при любой перестановке двух индексов. В суммах по  $j_1 \dots j_{n-k}$  и  $\mu_1 \dots \mu_k$  отличны от нуля только те слагаемые, у которых значения всех индексов различны. В суммах по  $j_1 \dots j_{n-k}$  будет  $(n-k)!$  таких ненулевых слагаемых. Для каждого из них в суммах по  $\mu_1 \dots \mu_k$  получится  $k!$  слагаемых. В результате появляется множитель  $k!(n-k)!$ .

Поэтому, например,

$$F_{1 \dots k} = \frac{k!(n-k)!}{k!(n-k)!} \varepsilon_{(k+1) \dots n 1 \dots k} \varepsilon^{(k+1) \dots n 1 \dots k} F_{1 \dots k} = F_{1 \dots k},$$

где  $k$  и  $n$  не индексы, а числа.

• **H<sub>171</sub>** 1-форма потенциала и 2-форма электромагнитного поля (стр.133)

Возьмём внешний дифференциал от 1-формы  $\mathbf{A} = A_\beta \mathbf{d}x^\beta$ :

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A} = \partial_\alpha A_\beta \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta = \frac{1}{2}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta.$$

Из тождества задачи ( $\leq$  H<sub>168</sub>) следует, что:

$$*\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} *(\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{|g|}}{2} F^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \mathbf{d}x^\sigma \wedge \mathbf{d}x^\tau = \frac{1}{2} *F_{\sigma\tau} \mathbf{d}x^\sigma \wedge \mathbf{d}x^\tau,$$

где компоненты  $F_{\alpha\beta}$  и  $*F_{\alpha\beta}$  получены в задачах ( $\leq$  H<sub>87</sub>), ( $\leq$  H<sub>88</sub>):

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad *F_{\alpha\beta} = \sqrt{|g|} \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для  $\mathbf{d}x^\alpha = \{\mathbf{d}t, \mathbf{d}x, \mathbf{d}y, \mathbf{d}z\}$ , 2-формы  $\mathbf{F}$  и  $*\mathbf{F}$ , можно записать:

$$\mathbf{F} = E_i \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}r_i - B_i \mathbf{d}S_i, \quad \frac{*\mathbf{F}}{\sqrt{|g|}} = -B_i \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}r_i - E_i \mathbf{d}S_i,$$

где для сокращения введены индексные формы, сворачивающиеся с электрическим и магнитным полем (сумма компонент) со следующими компонентами:  $\mathbf{d}r_i = \{\mathbf{d}x, \mathbf{d}y, \mathbf{d}z\}$ ,  $\mathbf{d}S_i = \{\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z, \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x, \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y\}$ .

• **H<sub>172</sub>** Сопряжённая форма 4-тока (стр.133)

Пусть  $\mathbf{J} = j_\alpha \mathbf{d}x^\alpha$ . Сопряжение 1-формы приводит к 3-форме ( $\leq$  H<sub>167</sub>):

$$*\mathbf{J} = \frac{1}{3!} \sqrt{|g|} j^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{d}x^\beta \wedge \mathbf{d}x^\gamma \wedge \mathbf{d}x^\delta.$$

В силу символа Леви-Чевиты в суммах по четырем индексам будут отличны от нуля слагаемые, для которых все индексы различны:

$$*\mathbf{J} = \sqrt{|g|} (j^0 \varepsilon_{0123} \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 + j^1 \varepsilon_{1023} \mathbf{d}x^0 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 + j^2 \varepsilon_{2013} \mathbf{d}x^0 \wedge \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^3 + j^3 \varepsilon_{3012} \mathbf{d}x^0 \wedge \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2).$$

Так как антисимметричный символ Леви-Чевиты с нижними индексами равен  $\varepsilon_{0123} = 1$  и  $j^\nu = (\rho, \mathbf{j}) = (\rho, j_x, j_y, j_z)$ , получаем:

$$\frac{*\mathbf{J}}{\sqrt{|g|}} = \rho \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z - j_x \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z - j_y \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x - j_z \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$$

или в обозначениях предыдущей задачи:

$$\frac{*\mathbf{J}}{\sqrt{|g|}} = \rho \mathbf{d}V - \mathbf{j}_i \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}S_i.$$



- **H<sub>173</sub>** Почему  $d\mathbf{F} = 0$ ? (стр.133)

Так как  $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$  и  $d^2 = 0$ , ответ очевиден. Запишем через электрическое и магнитное поле это уравнение [см. задачу ( $\leq H_{171}$ )]:

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} = & \left[ \frac{\partial E_x}{\partial y} dy + \frac{\partial E_x}{\partial z} dz \right] \wedge dt \wedge dx + \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} dx + \frac{\partial E_y}{\partial z} dz \right] \wedge dt \wedge dy \\ & + \left[ \frac{\partial E_z}{\partial x} dx + \frac{\partial E_z}{\partial y} dy \right] \wedge dt \wedge dz - \left[ \frac{\partial B_x}{\partial t} dt + \frac{\partial B_x}{\partial x} dx \right] \wedge dy \wedge dz \\ & - \left[ \frac{\partial B_y}{\partial t} dt + \frac{\partial B_y}{\partial y} dy \right] \wedge dz \wedge dx - \left[ \frac{\partial B_z}{\partial t} dt + \frac{\partial B_z}{\partial z} dz \right] \wedge dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Переставим косые произведения и перегруппируем слагаемые:

$$d\mathbf{F} = - \left( [\nabla \times \mathbf{E}]_i + \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t} \right) dS_i \wedge dt - (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = 0.$$

Это выражение равно нулю, если равны нулю коэффициенты при формах, поэтому получаются векторные уравнения:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

- **H<sub>174</sub>** Проверка уравнений Максвелла  $d^*\mathbf{F} = 4\pi^*\mathbf{J}$ ? (стр.133)

У сопряжённого тензора  $^*\mathbf{F}$  нужно переставить местами  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , и у  $\mathbf{E}$  затем поставить знак минус. Поэтому, используя результат предыдущей задачи и ( $\leq H_{171}$ ), можно сразу записать (считаем  $|g| = 1$ ):

$$d^*\mathbf{F} = \left( \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial t} - [\nabla \times \mathbf{B}]_i \right) dS_i \wedge dt + (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV.$$

Приравнявая коэффициенты при различных формах в уравнении

$$d^*\mathbf{F} = 4\pi^*\mathbf{J},$$

с учётом ( $\leq H_{172}$ ), получаем уравнения Максвелла:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial t}.$$

- **H<sub>175</sub>** Уравнение непрерывности  $d^*\mathbf{J} = 0$  (стр.133)

Беря внешний дифференциал от правой и левой части уравнений Максвелла  $d^*\mathbf{F} = 4\pi^*\mathbf{J}$ , в силу  $d^2 = 0$  получаем уравнение непрерывности в виде 4-формы (внешний дифференциал от 3-формы):

$$d^*\mathbf{J} = 0.$$

Прямым вычислением внешнего дифференциала ( $|g| = 1$ ) получаем:

$$d^*\mathbf{J} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right) dt \wedge dV = 0.$$

- **H<sub>176</sub>** Нулевая кривизна евклидовой сферической системы (стр.133)  
Перемножая метрический тензор  $g^{ik}$  и 1-формы  $\omega_{kj}$  (см. стр. 131):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 s_\theta^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -r d\theta & -r s_\theta^2 d\phi \\ r d\theta & r dr & -r^2 s_\theta c_\theta d\phi \\ r s_\theta^2 d\phi & r^2 s_\theta c_\theta d\phi & r s_\theta^2 dr + r^2 s_\theta c_\theta d\theta \end{pmatrix}$$

находим 1-формы связности с верхним индексом:

$$\omega^i_j = \begin{pmatrix} 0 & -r d\theta & -r s_\theta^2 d\phi \\ \frac{d\theta}{r} & \frac{dr}{r} & -s_\theta c_\theta d\phi \\ \frac{d\phi}{r} & \frac{c_\theta}{s_\theta} d\phi & \frac{dr}{r} + \frac{c_\theta}{s_\theta} d\theta \end{pmatrix}.$$

Её внешняя производная:

$$d\omega^i_j = \begin{pmatrix} 0 & -dr \wedge d\theta & -s_\theta^2 dr \wedge d\phi - 2r s_\theta c_\theta d\theta \wedge d\phi \\ -\frac{dr \wedge d\theta}{r^2} & 0 & (s_\theta^2 - c_\theta^2) d\theta \wedge d\phi \\ -\frac{dr \wedge d\phi}{r^2} & -\frac{d\theta \wedge d\phi}{s_\theta^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления  $\omega^i_k \wedge \omega^k_j$  перемножаем матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & -r d\theta & -r s_\theta^2 d\phi \\ \frac{d\theta}{r} & \frac{dr}{r} & -s_\theta c_\theta d\phi \\ \frac{d\phi}{r} & \frac{c_\theta}{s_\theta} d\phi & \frac{dr}{r} + \frac{c_\theta}{s_\theta} d\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & -r d\theta & -r s_\theta^2 d\phi \\ \frac{d\theta}{r} & \frac{dr}{r} & -s_\theta c_\theta d\phi \\ \frac{d\phi}{r} & \frac{c_\theta}{s_\theta} d\phi & \frac{dr}{r} + \frac{c_\theta}{s_\theta} d\theta \end{pmatrix}.$$

Подобное перемножение делается, как обычное умножение матриц (строка на столбец), однако сохраняется последовательность сомножителей и между ними ставится символ косого произведения. Например:

$$\omega^3_k \wedge \omega^k_2 = -\frac{d\phi}{r} \wedge r d\theta + \frac{c_\theta}{s_\theta} d\phi \wedge \frac{dr}{r} + \left(\frac{dr}{r} + \frac{c_\theta}{s_\theta} d\theta\right) \wedge \frac{c_\theta}{s_\theta} d\phi.$$

Переставим местами градиенты координат в косом произведении:

$$\omega^3_k \wedge \omega^k_2 = d\theta \wedge d\phi - \frac{c_\theta}{r s_\theta} dr \wedge d\phi + \frac{c_\theta}{r s_\theta} dr \wedge d\phi + \frac{c_\theta^2}{s_\theta^2} d\theta \wedge d\phi = \frac{d\theta \wedge d\phi}{s_\theta^2}.$$

Аналогично для остальных элементов. При этом получится матрица  $d\omega^i_j$ , но с обратным знаком. Поэтому:

$$d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = 0,$$

т.е. тензор кривизны для евклидового пространства равен нулю.

---

• **H<sub>177</sub>** 2-мерная сфера (стр.133)

Расстояние на сфере единичного радиуса в координатах  $x^i = (\theta, \phi)$  равно:

$$dl^2 = d\theta^2 + s_\theta^2 d\phi^2, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_\theta^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/s_\theta^2 \end{pmatrix}.$$

1-формы  $\omega_i$  равны:

$$\omega_1 = d\theta, \quad \omega_2 = s_\theta^2 d\phi.$$

Поэтому 1-формы связности, записанные в виде матрицы, для *диагонального* тензора  $g_{ij}$  имеют вид:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} dg_{11} & \partial_2 \omega_1 - \partial_1 \omega_2 \\ \partial_1 \omega_2 - \partial_2 \omega_1 & dg_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -s_\theta c_\theta d\phi \\ s_\theta c_\theta d\phi & s_\theta c_\theta d\theta \end{pmatrix}.$$

Так как  $\omega_{ij} = \Gamma_{i,j1} d\theta + \Gamma_{i,j2} d\phi$ , отличными от нуля символами Кристоффеля будут:

$$\Gamma_{1,22} = -s_\theta c_\theta, \quad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = s_\theta c_\theta.$$

Умножим  $\omega_{ij}$  слева на матрицу  $g^{ij}$  для получения  $\omega_j^i$  и возьмём внешний дифференциал от этих 1-форм:

$$\omega_j^i = \begin{pmatrix} 0 & -s_\theta c_\theta d\phi \\ \frac{c_\theta}{s_\theta} d\phi & \frac{c_\theta}{s_\theta} d\theta \end{pmatrix}, \quad d\omega_j^i = \begin{pmatrix} 0 & s_\theta^2 - c_\theta^2 \\ -\frac{1}{s_\theta^2} & 0 \end{pmatrix} d\theta \wedge d\phi.$$

Перемножим матрицы  $\omega_j^i$  (не забывая про косое произведение):

$$\omega_k^i \wedge \omega_j^k = \begin{pmatrix} 0 & -s_\theta c_\theta d\phi \\ \frac{c_\theta}{s_\theta} d\phi & \frac{c_\theta}{s_\theta} d\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & -s_\theta c_\theta d\phi \\ \frac{c_\theta}{s_\theta} d\phi & \frac{c_\theta}{s_\theta} d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_\theta^2 \\ \frac{c_\theta^2}{s_\theta^2} & 0 \end{pmatrix} d\theta \wedge d\phi.$$

Напомним, что  $d\phi \wedge d\theta = -d\theta \wedge d\phi$ . Окончательно:

$$d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \begin{pmatrix} 0 & s_\theta^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\theta \wedge d\phi = R_{j,12}^i d\theta \wedge d\phi.$$

Поэтому ненулевые коэффициенты тензора кривизны равны:

$$R_{2,12}^1 = s_\theta^2, \quad R_{1,12}^2 = -1.$$

Опуская индекс вниз, приходим (как и должно быть в 2-х измерениях) к единственной независимой компоненте:  $R_{12,12} = s_\theta^2$ . Напомним (стр. 217), что скалярная кривизна в 2-мерном пространстве равна:

$$R = \frac{2R_{12,12}}{g} = 2 \frac{s_\theta^2}{s_\theta^2} = 2 = 2K.$$

Таким образом, гауссова кривизна  $K$  единичной сферы равна 1.

- **H<sub>178</sub>** 1-форма  $\omega_{ij}$  для диагональной метрики (стр.133)

Для метрики:  $ds^2 = g_{00} dx^0 + g_{11} dx^1 + g_{22} dx^2 + g_{33} dx^3$  имеем следующую 1-форму  $\omega_{ij}$ :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} dg_{00} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \partial_0 g_{11} dx^1 - \partial_1 g_{00} dx^0 & dg_{11} & \cdot & \cdot \\ \partial_0 g_{22} dx^2 - \partial_2 g_{00} dx^0 & \partial_1 g_{22} dx^2 - \partial_2 g_{11} dx^1 & dg_{22} & \cdot \\ \partial_0 g_{33} dx^3 - \partial_3 g_{00} dx^0 & \partial_1 g_{33} dx^3 - \partial_3 g_{11} dx^1 & \partial_2 g_{33} dx^3 - \partial_3 g_{22} dx^2 & dg_{33} \end{pmatrix}.$$

Компоненты, стоящие над диагональю, имеют обратный знак. Другими словами,  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$  за исключением диагонали.

- **H<sub>179</sub>** 1-формы для расширяющейся Вселенной (стр.133)

Для метрики  $g_{00} = a^2$ ,  $g_{11} = -a^2$ ,  $g_{22} = -a^2 s_\chi^2$ ,  $g_{33} = -a^2 s_\chi^2 s_\theta^2$  имеем:

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} aa' d\eta & aa' d\chi & aa' s_\chi^2 d\theta & aa' s_\chi^2 s_\theta^2 d\phi \\ -aa' d\chi & -aa' d\eta & a^2 s_\chi c_\chi d\theta & a^2 s_\chi c_\chi s_\theta^2 d\phi \\ -aa' s_\chi^2 d\theta & -a^2 s_\chi c_\chi d\theta & -aa' s_\chi^2 d\eta - a^2 s_\chi c_\chi d\chi & a^2 s_\chi^2 s_\theta c_\theta d\phi \\ -aa' s_\chi^2 s_\theta^2 d\phi & -a^2 s_\chi c_\chi s_\theta^2 d\phi & -a^2 s_\chi^2 s_\theta c_\theta d\phi & \omega_{33} \end{pmatrix}.$$

где

$$\omega_{33} = -aa' s_\chi^2 s_\theta^2 d\eta - a^2 s_\chi c_\chi s_\theta^2 d\chi - a^2 s_\chi^2 s_\theta c_\theta d\theta.$$

Умножаем на обратный метрический тензор (первую строку делим на  $a^2$ , вторую на  $-a^2$ , третью на  $-a^2 s_\chi^2$  и четвертую на  $-a^2 s_\chi^2 s_\theta^2$ ):

$$\omega^i_j = \begin{pmatrix} \frac{a'}{a} d\eta & \frac{a'}{a} d\chi & \frac{a'}{a} s_\chi^2 d\theta & \frac{a'}{a} s_\chi^2 s_\theta^2 d\phi \\ \frac{a'}{a} d\chi & \frac{a'}{a} d\eta & -s_\chi c_\chi d\theta & -s_\chi c_\chi s_\theta^2 d\phi \\ \frac{a'}{a} d\theta & \frac{c_\chi}{s_\chi} d\theta & \frac{a'}{a} d\eta + \frac{c_\chi}{s_\chi} d\chi & -s_\theta c_\theta d\phi \\ \frac{a'}{a} d\phi & \frac{c_\chi}{s_\chi} d\phi & \frac{c_\theta}{s_\theta} d\phi & \frac{a'}{a} d\eta + \frac{c_\chi}{s_\chi} d\chi + \frac{c_\theta}{s_\theta} d\theta \end{pmatrix}.$$

Поэтому ненулевые символы Кристоффеля равны:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{a'}{a}, & \Gamma_{11}^0 &= \frac{a'}{a}, & \Gamma_{22}^0 &= \frac{a'}{a} s_\chi^2, & \Gamma_{33}^0 &= \frac{a'}{a} s_\chi^2 s_\theta^2, \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{a'}{a}, & \Gamma_{22}^1 &= -s_\chi c_\chi, & \Gamma_{33}^1 &= -s_\chi c_\chi s_\theta^2, \\ \Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{20}^2 = \frac{a'}{a}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{c_\chi}{s_\chi}, & \Gamma_{33}^2 &= -s_\theta c_\theta, \\ \Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = \frac{a'}{a}, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{c_\chi}{s_\chi}, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{c_\theta}{s_\theta}. \end{aligned}$$

• **Н<sub>180</sub>** *Кривизна расширяющейся Вселенной* (стр.133)

Введём обозначение  $b = a'/a$  и, взяв внешний дифференциал от 1-формы  $\omega^i_j$ , получим следующую матрицу  $d\omega^i_j$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & b'\sigma_{01} & b's_\chi^2\sigma_{02} + 2bs_\chi c_\chi\sigma_{12} & b's_\chi^2s_\theta^2\sigma_{03} + 2bs_\chi s_\theta[c_\chi s_\theta\sigma_{13} + s_\chi c_\theta\sigma_{23}] \\ b'\sigma_{01} & 0 & (s_\chi^2 - c_\chi^2)\sigma_{12} & (s_\chi^2 - c_\chi^2)s_\theta^2\sigma_{13} - 2s_\chi c_\chi s_\theta c_\theta\sigma_{23} \\ b'\sigma_{02} & -\frac{\sigma_{12}}{s_\chi^2} & 0 & (s_\theta^2 - c_\theta^2)\sigma_{23} \\ b'\sigma_{03} & -\frac{\sigma_{13}}{s_\chi^2} & -\frac{\sigma_{23}}{s_\theta^2} & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\sigma_{ij} = \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j$ . Возьмём произведение матриц  $\omega^i_k \wedge \omega^k_j$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2bs_\chi c_\chi\sigma_{12} & -2bs_\chi s_\theta[c_\chi s_\theta\sigma_{13} + s_\chi c_\theta\sigma_{23}] \\ 0 & 0 & [b^2s_\chi^2 + c_\chi^2]\sigma_{12} & s_\theta^2[c_\chi^2 + b^2s_\chi^2]\sigma_{13} + 2s_\chi c_\chi s_\theta c_\theta\sigma_{23} \\ 0 & \left[\frac{c_\chi^2}{s_\chi^2} - b^2\right]\sigma_{12} & 0 & [b^2s_\chi^2s_\theta^2 - c_\chi^2s_\theta^2 + c_\theta^2]\sigma_{23} \\ 0 & \left[\frac{c_\chi^2}{s_\chi^2} - b^2\right]\sigma_{13} & \frac{\sigma_{23}}{s_\theta^2} - s_\chi^2(1 + b^2)\sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Складываем эти две матрицы  $d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & b'\sigma_{01} & b's_\chi^2\sigma_{02} & b's_\chi^2s_\theta^2\sigma_{03} \\ b'\sigma_{01} & 0 & (1 + b^2)s_\chi^2\sigma_{12} & (1 + b^2)s_\chi^2s_\theta^2\sigma_{13} \\ b'\sigma_{02} & -(1 + b^2)\sigma_{12} & 0 & (1 + b^2)s_\chi^2s_\theta^2\sigma_{23} \\ b'\sigma_{03} & -(1 + b^2)\sigma_{13} & -(1 + b^2)s_\chi^2\sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате ненулевые коэффициенты тензора кривизны равны:

$$\begin{aligned} R^0_{1,01} &= b', & R^0_{2,02} &= b's_\chi^2, & R^0_{3,03} &= b's_\chi^2s_\theta^2, \\ R^1_{0,10} &= -b', & R^1_{2,12} &= (1 + b^2)s_\chi^2, & R^1_{3,13} &= (1 + b^2)s_\chi^2s_\theta^2, \\ R^2_{0,20} &= -b', & R^2_{1,21} &= (1 + b^2), & R^2_{3,23} &= (1 + b^2)s_\chi^2s_\theta^2, \\ R^3_{0,30} &= -b', & R^3_{1,31} &= (1 + b^2), & R^3_{2,32} &= (1 + b^2)s_\chi^2. \end{aligned}$$

Тензор Риччи  $R^\gamma_{\alpha,\gamma\beta} = R^0_{\alpha,0\beta} + R^1_{\alpha,1\beta} + R^2_{\alpha,2\beta} + R^3_{\alpha,3\beta}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ):

$$R_{00} = -3b' = \frac{3}{a^2}(a'^2 - aa''), \quad R_{0i} = 0, \quad R_{ij} = -\frac{1}{a^4}(2a^2 + a'^2 + aa'')g_{ij}.$$

Скалярная кривизна:

$$R = -\frac{6}{a^3}(a + a'').$$

• **Н<sub>181</sub>** Связности для центрально-симметричного гравполя (стр.133)  
 Для метрики  $ds^2 = a(t, r) dt^2 - b(t, r) dr^2 - r^2(d\theta^2 + s_\theta^2 d\phi^2)$ , метрические коэффициенты и им обратные равны:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 s_\theta^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/r^2 s_\theta^2 \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу из предыдущей задачи находим 1-форму:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{a} dt + a' dr & a' dt + \dot{b} dr & 0 & 0 \\ -a' dt - \dot{b} dr & -\dot{b} dt - b' dr & 2r d\theta & 2rs_\theta^2 d\phi \\ 0 & -2r d\theta & -2r dr & 2r^2 s_\theta c_\theta d\phi \\ 0 & -2rs_\theta^2 d\phi & -2r^2 s_\theta c_\theta d\phi & -2rs_\theta^2 dr - 2r^2 s_\theta c_\theta d\theta \end{pmatrix},$$

где точка – производная по  $t$ , а штрих – производная по  $r$ . Умножая слева на матрицу обратного метрического тензора  $g^{ij}$ , получаем:

$$\omega^i_j = \begin{pmatrix} \frac{\dot{a}}{2a} dt + \frac{a'}{2a} dr & \frac{a'}{2a} dt + \frac{\dot{b}}{2a} dr & 0 & 0 \\ \frac{a'}{2b} dt + \frac{\dot{b}}{2b} dr & \frac{\dot{b}}{2b} dt + \frac{b'}{2b} dr & -\frac{r}{b} d\theta & -\frac{rs_\theta^2}{b} d\phi \\ 0 & \frac{1}{r} d\theta & \frac{1}{r} dr & -s_\theta c_\theta d\phi \\ 0 & \frac{1}{r} d\phi & \frac{c_\theta}{s_\theta} d\phi & \frac{1}{r} dr + \frac{c_\theta}{s_\theta} d\theta \end{pmatrix},$$

1-форма  $\omega^i_j$  даёт разложение для символов Кристоффеля:

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{j0} dt + \Gamma^i_{j1} dr + \Gamma^i_{j2} d\theta + \Gamma^i_{j3} d\phi$$

Теперь несложно выписать явным образом ненулевые символы Кристоффеля.

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \frac{\dot{a}}{2a}, & \Gamma^0_{01} &= \Gamma^0_{10} = \frac{a'}{2a}, & \Gamma^0_{11} &= \frac{\dot{b}}{2a}, \\ \Gamma^1_{00} &= \frac{a'}{2b}, & \Gamma^1_{01} &= \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{b}}{2b}, & \Gamma^1_{11} &= \frac{b'}{2b}, & \Gamma^1_{22} &= -\frac{r}{b}, & \Gamma^1_{33} &= -\frac{rs_\theta^2}{b}, \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, & \Gamma^2_{33} &= -s_\theta c_\theta, \\ \Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, & \Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \frac{c_\theta}{s_\theta}. \end{aligned}$$


---

- **Н<sub>182</sub>** Кривизна для центрально-симметричного гравполя (стр.133)  
Запишем 1-форму  $\omega^i_j$  из ( $\prec$  Н<sub>181</sub>) для статической метрики:

$$\omega^i_j = \begin{pmatrix} \frac{a'}{2a} \mathbf{dr} & \frac{a'}{2a} \mathbf{dt} & 0 & 0 \\ \frac{a'}{2b} \mathbf{dt} & \frac{b'}{2b} \mathbf{dr} & -f \mathbf{d}\theta & -f s_\theta^2 \mathbf{d}\phi \\ 0 & \frac{\mathbf{d}\theta}{r} & \frac{\mathbf{dr}}{r} & -s_\theta c_\theta \mathbf{d}\phi \\ 0 & \frac{\mathbf{d}\phi}{r} & \frac{c_\theta}{s_\theta} \mathbf{d}\phi & \frac{\mathbf{dr}}{r} + \frac{c_\theta}{s_\theta} \mathbf{d}\theta \end{pmatrix},$$

где для сокращения  $f = f(r) = r/b$ . Возьмём внешний дифференциал:

$$d\omega^i_j = - \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{a'}{2a}\right)' \sigma_{01} & 0 & 0 \\ \left(\frac{a'}{2b}\right)' \sigma_{01} & 0 & f' \sigma_{12} & f' s_\theta^2 \sigma_{13} + 2f s_\theta c_\theta \sigma_{23} \\ 0 & \frac{\sigma_{12}}{r^2} & 0 & (c_\theta^2 - s_\theta^2) \sigma_{23} \\ 0 & \frac{\sigma_{13}}{r^2} & \frac{\sigma_{23}}{s_\theta^2} & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\sigma_{01} = \mathbf{dt} \wedge \mathbf{dr}$ ,  $\sigma_{12} = \mathbf{dr} \wedge \mathbf{d}\theta$  и т.д. Обратим внимание на вынесенный общий знак минус. Произведение матриц  $\omega^i_k \wedge \omega^k_j$  равно:

$$\begin{pmatrix} 0 & \left[\frac{a'b'}{4ab} - \frac{a'^2}{4a^2}\right] \sigma_{01} & -\frac{a'f}{2a} \sigma_{02} & -\frac{a'f s_\theta^2}{2a} \sigma_{03} \\ \left[\frac{a'^2}{4ab} - \frac{a'b'}{4b^2}\right] \sigma_{01} & 0 & fh \sigma_{12} & f s_\theta^2 h \sigma_{13} + 2f s_\theta c_\theta \sigma_{23} \\ -\frac{a'}{2rb} \sigma_{02} & \frac{h}{r} \sigma_{12} & 0 & \left[c_\theta^2 - \frac{f s_\theta^2}{r}\right] \sigma_{23} \\ -\frac{a'}{2rb} \sigma_{03} & \frac{h}{r} \sigma_{13} & \left[\frac{f}{r} + \frac{c_\theta^2}{s_\theta^2}\right] \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

где  $h = (1/r) - b'/2b$ . Складывая эти две матрицы  $d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$ , получаем 2-форму тензора кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & \left[\frac{a'b'}{4ab} + \frac{a'^2}{4a^2} - \frac{a''}{2a}\right] \sigma_{01} & -\frac{ra'}{2ab} \sigma_{02} & -\frac{ra' s_\theta^2}{2ab} \sigma_{03} \\ \left[\frac{a'^2}{4ab} + \frac{a'b'}{4b^2} - \frac{a''}{2b}\right] \sigma_{01} & 0 & \frac{rb'}{2b^2} \sigma_{12} & \frac{rb'}{2b^2} s_\theta^2 \sigma_{13} \\ -\frac{a'}{2rb} \sigma_{02} & -\frac{b'}{2b} \sigma_{12} & 0 & \frac{b-1}{b} s_\theta^2 \sigma_{23} \\ -\frac{a'}{2rb} \sigma_{03} & -\frac{b'}{2b} \sigma_{13} & \frac{1-b}{b} \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

содержащей все ненулевые коэффициенты тензора кривизны

## Векторы, тензоры и формы

- **H<sub>183</sub>**  $\mathbb{R}^n$ , как векторное пространство (стр. 152)

Все аксиомы векторного пространства (стр.22) для операций

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n\}, \quad \alpha \mathbf{x} = \{\alpha x_1, \dots, \alpha x_n\}$$

проверяются непосредственно. Базисными векторами могут быть (для краткости  $n = 3$ ):

$$\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0\}; \quad \mathbf{e}_2 = \{0, 1, 0\}; \quad \mathbf{e}_3 = \{0, 0, 1\}.$$

Любой вектор  $\mathbf{x}$  раскладывается по этому базису  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ . Его контравариантные компоненты  $x^i$  равны числам  $x_i$ .

- **H<sub>184</sub>** Матрицы  $n \times n$ , как векторное пространство (стр. 152)

Так как матрица – это набор вещественных чисел (записанный не в строчку, а в виде таблицы), то задача сводится к предыдущей. Базисом является набор  $n^2$  различных матриц, у которых все элементы нулевые, кроме одного, равного единице.

- **H<sub>185</sub>** Представление скалярного произведения через норму (стр. 152)

Записав скалярное произведение в более привычном операторном виде, имеем:

$$\frac{1}{4} ((\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2) = \frac{1}{4} (\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}^2) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

- **H<sub>186</sub>** Альтернирование  $\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b})\sigma(\mathbf{c})$  (стр. 152)

Записывая для компактности аргументы функций мелким шрифтом внизу, имеем

$$\hat{\text{Alt}}(\omega_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{1}{2}(\omega_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} - \omega_{\mathbf{b}, \mathbf{a}}).$$

Вычислим теперь  $\hat{\text{Alt}}(\hat{\text{Alt}}(\omega) \otimes \sigma)$ :

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2}(\omega_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} - \omega_{\mathbf{b}, \mathbf{a}})\sigma_{\mathbf{c}} - \frac{1}{2}(\omega_{\mathbf{a}, \mathbf{c}} - \omega_{\mathbf{c}, \mathbf{a}})\sigma_{\mathbf{b}} + \frac{1}{2}(\omega_{\mathbf{b}, \mathbf{c}} - \omega_{\mathbf{c}, \mathbf{b}})\sigma_{\mathbf{a}} \right).$$

Так как  $\hat{\text{Alt}}(\omega)$ , мы на место аргумента  $\sigma$  последовательно ставим  $\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}$ . Получившиеся 3 слагаемых делятся на их количество. Это эквивалентно  $\hat{\text{Alt}}(\omega \otimes \sigma)$ :

$$\frac{1}{3!} \left( \omega_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \sigma_{\mathbf{c}} - \omega_{\mathbf{b}, \mathbf{a}} \sigma_{\mathbf{c}} - \omega_{\mathbf{a}, \mathbf{c}} \sigma_{\mathbf{b}} + \omega_{\mathbf{c}, \mathbf{a}} \sigma_{\mathbf{b}} + \omega_{\mathbf{b}, \mathbf{c}} \sigma_{\mathbf{a}} - \omega_{\mathbf{c}, \mathbf{b}} \sigma_{\mathbf{a}} \right).$$



- **Н<sub>187</sub>** Коэффициент в тройном косом произведении (стр. 152)

Если  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно  $k$ -,  $l$ - и  $m$ - формы, запишем сначала определение двойного косого произведения  $A$  и  $B \wedge C$

$$A \wedge (B \wedge C) = \frac{(k + (l + m))!}{k! (l + m)!} \hat{\text{Alt}} (A \otimes (B \wedge C)) =$$

подставляя определение  $B \wedge C$ :

$$= \frac{(k + l + m)!}{k! (l + m)!} \hat{\text{Alt}} \left( A \otimes \frac{(l + m)!}{l! m!} \hat{\text{Alt}}(B \otimes C) \right) =$$

вынося числовые множители, имеем:

$$= \frac{(k + l + m)!}{k! l! m!} \hat{\text{Alt}} \left( A \otimes \hat{\text{Alt}}(B \otimes C) \right) = \frac{(k + l + m)!}{k! l! m!} \hat{\text{Alt}} (A \otimes B \otimes C).$$

- **Н<sub>188</sub>** Сферические координаты не дают атласа (стр. 152)

При  $\theta = 0$  весь диапазон изменения угла  $0 \leq \phi < 2\pi$  соответствует одной точке на сфере (северному полюсу). Это означает, что это отображение для северного полюса не взаимно-однозначное. Т.е. одной точке многообразия  $\mathbb{M}^n$  соответствует целый отрезок в  $\mathbb{R}^2 = (\theta, \phi)$ .

- **Н<sub>189</sub>** Минимальный атлас для поверхности тора (стр. 152)

В отличие от сферы, тор может покрыт только одной картой. Параметрическое представление тора было рассмотрено в задаче ( $\prec$  Н<sub>141</sub>).

- **Н<sub>190</sub>** Компоненты касательных векторов (стр. 152)

Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  различны, то общая точка у кривых соответствует значению параметров  $t = 0$ ,  $u = 0$ . В этой точке касательные векторы совпадают:

$$\left. \frac{d(t\mathbf{a})}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{a}, \quad \left. \frac{d(u\mathbf{a} + u^2\mathbf{b})}{du} \right|_{u=0} = \mathbf{a}.$$

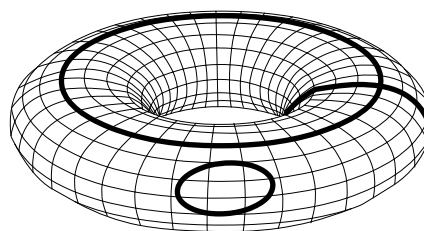
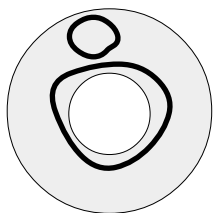
- **Н<sub>191</sub>** Экспонента от производной (стр. 152)

Если функции, определяющие кривую, бесконечное число раз дифференцируемы, то их можно разложить в ряд Тейлора:

$$x^i(t+\tau) = x^i(t) + \tau \frac{dx^i(t)}{dt} + \frac{1}{2!} \tau^2 \frac{d^2 x^i(t)}{dt^2} + \frac{1}{3!} \tau^3 \frac{d^3 x^i(t)}{dt^3} + \dots = \exp \left[ \tau \frac{d}{dt} \right] x^i(t).$$

Таким образом, экспонента от производной – это сокращенная запись для бесконечного разложения в ряд Тейлора.

- **H<sub>192</sub>** *Круг с дыркой 2-связно, тор – 3-связно* (стр. 152)



- **H<sub>193</sub>** *Топология чайной чашки, ножниц и морской звезды* (стр. 153)

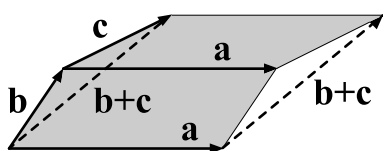
Поверхность чайной чашки с ручкой эквивалентна тору. Если ручку отбить и выкинуть (из многообразия), то чашка сменит топологию на сферическую.

Ножницы имеют два отверстия для пальцев. Если ножи ножниц плотно соединены, то получается многообразие с топологией двух “сросшихся” боками торов или сферы с двумя ручками. Если винтик у ножниц раскрутить – получится несвязное многообразие из двух торов (если проигнорировать отверстия под винтик и сам винтик). Если их не игнорировать (в топологии нет незначимых дырок), то получится многообразие, состоящее из двух сфер с двумя ручками и одной сферы без ручек (это винтик). Если винтик имел ещё и дополнительную гайку, то к предыдущему добавится тор. Лучше представлять тупые ножницы, чтобы игнорировать “недифференцируемую особенность” на краях лезвий.

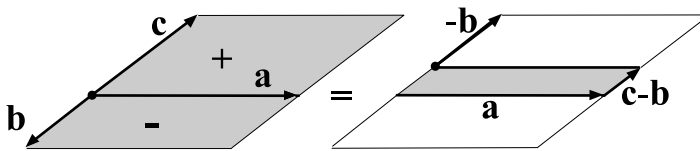
Если отвлечься от деталей физиологии и считать, что у морской звезды нет отверстий, то она топологически эквивалентна сфере. На самом деле, отверстий у любого существа немало. Например, в простейшем случае сквозного кишечника топология звезды становится подобна тору. Реальная же топология даже очень простого существа очень сложна.

- **H<sub>194</sub>** *Соотношение  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + S(\mathbf{a}, \mathbf{c})$*  (стр. 153)

$S(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) :$



$\mathbf{b} = -\mathbf{c}/2 :$



- **Н<sub>195</sub>** 2-форма  $S(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$  является внешней (стр. 153)

Так как тождество справедливо для любого вектора, применим его к вектору  $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ . Учитывая линейность формы сначала по второму аргументу, а затем по первому, и то, что  $S(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$ ,  $S(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = 0$ , получаем:

$$0 = S(\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = S(\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{b}) + S(\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{c}, \mathbf{b}) + S(\mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

откуда следует антисимметричность.

- **Н<sub>196</sub>** Конгруэнция базисных векторов (стр. 153)

Для векторного поля  $\partial/\partial x^1$  компонента  $V^1 = 1$ , а остальные компоненты равны нулю. Решение уравнения  $dx^i/dt = V^i$  даёт линию  $x^1 = x_0^1 + t$ ,  $x^2 = x_0^2, \dots, x^n = x_0^n$  координатной сетки ( $x_0^i = \text{const}$ ).

- **Н<sub>197</sub>** Интегральные кривые поля  $x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$  (стр. 153)

Решаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Умножая первое уравнение на  $x$ , а второе на  $y$ , и складывая, получаем:

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \text{const}.$$

Кривые образуют множество окружностей различного радиуса. Их множество непрерывно заполняет пространство. Это конгруэнция.

- **Н<sub>198</sub>** Действие  $\exp(\tau d/dt)$  на функцию  $f = f(x^1, \dots, x^n)$  (стр. 153)

Оператор  $\exp(\tau d/dt)$  осуществляет сдвиг вдоль кривой, переводя  $x^i(t)$  в  $x^i(t + \tau)$ , см. ( $\leq$  Н<sub>191</sub>). Функция  $f(x^1, \dots, x^n)$  на кривой  $x^i(t)$  зависит от одной переменной  $t$  (см. стр. 144). С другой стороны, по условию  $d/dt$  — это векторное поле, поэтому  $dx^i/dt = T^i$ . Вычислим первую производную от функции вдоль кривой:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = T^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Аналогично вычисляются последующие производные:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = T^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( T^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right), \quad \frac{d^3 f}{dt^3} = T^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( T^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( T^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \right), \dots$$

Поэтому результат действия экспоненты от оператора векторного поля даёт значение функции вдоль кривой:

$$f(x^1(t + \tau), \dots, x^n(t + \tau)) = \exp \left( \tau T^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f(x^1(t), \dots, x^n(t)).$$

- 
- **Н<sub>199</sub>** Скобки Ли, как разрыв “параллелограмма” (стр. 153)

Сдвинемся сначала на  $t$  вдоль интегральной кривой, касательная к которой есть поле  $\mathbf{T}$ . Затем на  $u$  вдоль кривой с касательным полем  $\mathbf{U}$ . Результирующий оператор сдвига можно представить в следующем виде:

$$e^{u d/du} e^{t d/dt} \approx \left(1 + u \frac{d}{du} + \frac{u^2}{2} \frac{d^2}{du^2} + \dots\right) \left(1 + t \frac{d}{dt} + \frac{t^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} + \dots\right).$$

Перемножим до второго порядка малости по  $t, u$ :

$$e^{u d/du} e^{t d/dt} \approx 1 + u \frac{d}{du} + t \frac{d}{dt} + \frac{u^2}{2} \frac{d^2}{du^2} + \frac{t^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} + u t \frac{d}{du} \frac{d}{dt} + \dots$$

Если произвести сдвиги в обратном порядке, то все слагаемые получатся такими же, кроме последнего, в котором операторы будут переставлены. Поэтому разность смещений равна

$$e^{t d/dt} e^{u d/du} - e^{u d/du} e^{t d/dt} \approx tu \left[ \frac{d}{dt}, \frac{d}{du} \right].$$

- 
- **Н<sub>200</sub>** Координатность векторных полей (стр. 153)

Вычислим скобки Ли:

$$[x\partial_x + y\partial_y, x\partial_y - y\partial_x] = [x\partial_x, x\partial_y] - [x\partial_x, y\partial_x] + [y\partial_y, x\partial_y] - [y\partial_y, y\partial_x].$$

Вычисляя коммутаторы, например:

$$[x\partial_x, x\partial_y]f = x\partial_x(x\partial_y f) - x\partial_y(x\partial_x f) = x\partial_y f,$$

получаем:

$$x\partial_y + y\partial_x - x\partial_y - y\partial_x = 0.$$

Скобка Ли равна нулю, следовательно, эти поля координатные.

- 
- **Н<sub>201</sub>** Генераторы группы вращения (стр. 153)

$$[L_x, L_y] = L_z, \quad [L_y, L_z] = L_x, \quad [L_z, L_x] = L_y.$$

- 
- **Н<sub>202</sub>** Матрицы преобразований в производной Ли (стр. 153)

Матрица  $\partial x^i / \partial x_0^j$  получается элементарным дифференцированием выражения  $x^i = x_0^i + tV^i(x_0)$ . Обратная матрица проверяется свёрткой с прямой. С точностью до первого порядка малости по  $t$  имеем:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x_0^k} \frac{\partial x_0^k}{\partial x^j} = \left( \delta_k^i + t \frac{\partial V^i}{\partial x_0^k} \right) \left( \delta_j^k - t \frac{\partial V^k}{\partial x_0^j} \right) = \delta_j^i + O(t^2).$$

- 
- **Н<sub>203</sub>** Производная Ли от 1-формы (стр. 153)

$$(\mathcal{L}_V \omega)_i = \frac{d}{dt} \left[ \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial x_0^i} \right]_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[ w_j \left( \delta_i^j + t \frac{\partial V^j}{\partial x_0^i} \right) \right]_{t=0} = V^j \frac{\partial w_i}{\partial x_0^j} + \omega_j \frac{\partial V^j}{\partial x_0^i}.$$


---

- **Н<sub>204</sub>** Правило Лейбница для формы и вектора (стр. 153)

Распишем определения правой части правила Лейбница:

$$\mathcal{L}_V(\omega(\mathbf{U})) = (\mathcal{L}_V \omega)(\mathbf{U}) + \omega(\mathcal{L}_V \mathbf{U})$$

в координатном виде

$$\left( V^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} + \omega_j \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) U^i + \omega_i \left( V^j \frac{\partial U^i}{\partial x^j} - U^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \right) = V^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} U^i + \omega_i V^j \frac{\partial U^i}{\partial x^j}.$$

Это производная от скалярной функции (от значения 1-формы):

$$\mathcal{L}_V(\omega_i U^i) = \frac{d}{dt} (\omega_i U^i) = \frac{d\omega_i}{dt} U^i + \omega_i \frac{dU^i}{dt}.$$


---

- **Н<sub>205</sub>**  $\mathcal{L}_V \mathbf{U} = -\mathcal{L}_U \mathbf{V}$  (стр. 153)

Тождество очевидно в силу антисимметричности скобок Ли и значения производной  $\mathcal{L}_V \mathbf{U} = [\mathbf{V}, \mathbf{U}]$ .

---

# Литература

## Математика в целом

- ▷ Фор Р., Кофман А., Дени-Пален М. — “*Современная математика*”, М.: “Мир” (1966)
- ▷ Курант Р., Роббинс Г. — “*Что такое математика?*”, М.: МЦНМО, 2001. - 568с.
- ▷ Степанов С.С. — “*Истина и доказуемость*”, <http://synset.com> (2010)

## Векторный и тензорный анализ

- ▷ Борисенко А. И., Тарапов И. Е. — “*Векторный анализ и начала тензорного исчисления*”, Харьков, 1959. - 238 с.
- ▷ Рашевский П.К. — “*Риманова геометрия и тензорный анализ*”, М.: “Наука” (1967)
- ▷ Схоутен Я.А. — “*Тензорный анализ для физиков*”, М.: “Наука” (1965)
- ▷ Кумпяк Д.Е. — “*Векторный и тензорный анализ*”, “Тверь” (2007)

## Дифференциальная геометрия

- ▷ Мищенко А.С., Фоменко А.Т. — “*Курс дифференциальной геометрии и топологии*”, М.: “Факториал Пресс” (2000)
- ▷ Дубровин Б.Л., Новиков С.П., Фоменко Л.Т. — “*Современная геометрия. Методы и приложения*”, М.: “Наука” (1986)
- ▷ Шутц Б. — “*Геометрические методы математической физики*”, М.: “Букинист” (1984)
- ▷ Тайманов И.А. — “*Лекции по дифференциальной геометрии*”, Институт компьютерных исследований (2002)

## Геометрические аспекты физики

- ▷ Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. — “*Гравитация*”, в 3-х томах, М.: “Мир” (1977)
- ▷ Степанов С.С. — “*Релятивистский мир*”, <http://synset.com> (2010)



# Предметный указатель

- 1-форма, 119
- 1-форма дифференциала, 118
- 2-форма, 119
  - площади, 120
- абелева группа, 22
- алгебраическое дополнение, 49
- антисимметричность, 12
- ассоциативность, 11, 22, 46
- базис, 11
  - взаимный, 68
  - физический, 94
- бинарная операция, 22
- вектор, 10, 23, 69
  - аксиальный, 15
  - единичный, 11, 20
  - нормали, 17
  - нулевой, 10
  - полярный, 15
- векторное произведение, 12
- взаимный базис, 68
- внешнее дифференцирование, 122
- вырожденный спектр, 57
- гауссова кривизна, 102
- геодезическая, 86
- геометрия
  - внутренняя, 104
  - риманова, 109
- гессиан, 102
- гиперповерхность, 106
- главные кривизны, 102
- главные оси, 76
- градиент, 28
- дериационные формулы, 115
- диагонализация, 57
- диагональная матрица, 49
- диагональный элемент, 46
- дивергенция, 30
- дистрибутивность, 11, 12, 22
- дифференциальная форма, 119
- длина вектора, 11
- длина линии, 19
- дуальный тензор, 126
- единичная матрица, 47
- единичный кватернион, 180
- закон Бернулли, 43, 173
- идеальная жидкость, 172
- инвариант, 73
- инверсия, 14
- индекс
  - немой, 52
  - свободный, 52
  - связанный, 52
- интеграл
  - вдоль контура, 34
  - по объёму, 34
  - по поверхности, 34
- интервал, 67
- источник, 36
- калибровка, 41
  - Лоренца, 170
- касательная плоскость, 102
- катеноид, 213



- квадратичная форма, 57
- квадратная матрица, 46
- кватернион, 61, 180
- ковариантная производная, 84
- ковариантность уравнения, 84
- ковариантный
  - дифференциал, 84
  - дифференциал тензора, 85
- ковектор, 69
- коммутативное тело, 22
- коммутативность, 11, 22, 46, 47
- коммутатор, 47
- коммутирование матриц, 50
- компоненты
  - вектора, 10
  - ковариантные, 69
  - контрвариантные, 69
- координатная особенность, 71, 204
- координаты
  - Бельтрами, 114
  - ортогональные, 94
  - полярные, 64
  - сферические, 70
  - цилиндрические, 70
- коэффициенты Ламе, 94
- кривизна, 19, 102
- кручение, 20
- линия уровня, 28
- матрица, 46
  - антисимметричная, 47
  - диагональная, 49
  - единичная, 47
  - квадратная, 46
  - несингулярная, 77
  - нулевая, 47
  - обратная, 50
  - ортогональная, 58
  - поворота, 58
  - симметричная, 47
  - сингулярная, 49
  - транспонированная, 47
  - унитарная, 47, 56
- метрика, 67
- метрический тензор, 66
- минор, 49
- набла, 29
- направленный отрезок, 10
- натуральная параметризация, 19
- несингулярная матрица, 77
- норма кватерниона, 180
- нулевая матрица, 47
- обратная матрица, 50
- однородная система, 49
- оператор
  - Лапласа, 31
  - Ходжа, 126
- определитель матрицы, 48
- ортогональная матрица, 58
- ортогональность, 56
- ортогональность векторов, 11
- плоскость, 17
  - касательная, 102
  - соприкасающаяся, 20
- поле
  - потенциальное, 40
  - скалярное, 29
  - соленоидальное, 41
- поток, 35
- правило
  - бац минус цаб, 12
  - выталкивания, 12
  - лома, 46
  - параллелограмма, 10
  - суммирования, 52
  - треугольника, 10
  - штопора, 13
- преобразования Лоренца, 79

- произведение
  - векторное, 12
  - косое, 119
  - скалярное, 11
  - смешанное, 12
  - тензорное, 119
- производная по направлению, 31
- пространство
  - Лобачевского, 206
  - без кручения, 109
  - векторное, 23
  - евклидово, 67
  - псевдоевклидово, 67
- прямая, 16
- псевдоскаляр, 15
- ранг тензора, 74
- регуляризация, 38
- репер Френе, 20
- ротор, 30
- связность, 108
- символ
  - $\varepsilon_{ijk}$ , 54
  - Кристоффеля, 82
  - Кронекера, 53
  - Леви-Чевиты, 54, 75
- сингулярная
  - матрица, 49
  - функция, 39
- система
  - однородная, 49
  - уравнений, 49
- система координат
  - декартова, 10
  - полярная, 64
  - сферическая, 70
  - цилиндрическая, 70
- скаляр, 11, 15
- скалярная кривизна, 113
- скалярное
  - поле, 29
  - произведение, 11
- след матрицы, 51
- собственное значение, 56
- собственный вектор, 56
- сопряжённый тензор, 79
- спектр, 57
- спираль, 21
- стационарная жидкость, 173
- стереографическая проекция, 114
- сток, 36
- структурное уравнение, 130
- сферическая теорема
  - Пифагора, 209
  - косинусов, 208
  - синусов, 209
- тензор, 74
  - Риччи, 113
  - Эйнштейна, 113
  - антисимметричный, 107
  - дуальный, 126
  - кривизны, 110
  - кручения, 109
  - метрический, 66
  - сопряжённый, 79
- теорема
  - Гаусса, 35
  - Кэли-Гамильтона, 57
  - Риччи, 85
  - Стокса, 35
- тип тензора, 74
- тождество Бианки, 112
- тор, 115
- точка
  - неособая, 100
  - особая, 100
- траектория, 18
- транспонированная матрица, 47
- тройка

левая, 15

правая, 13, 15

уравнение

Картана, 130

Пуассона, 31, 39

Эйлера, 172

геодезической, 89

непрерывности, 169, 172

плоскости, 17

прямой, 16, 17

структурное, 130

характеристическое, 56, 103, 216

уравнения

Лагранжа, 88

Френе, 21

физический базис, 68, 94

форма

вторая квадратичная, 103

первая квадратичная, 101

связности, 131

формула

Гаусса, 212

Крамера, 49

функционал, 88

функция

Дирака, 39

Лагранжа, 88

сингулярная, 39

характеристическое уравнение, 56

циркуляция, 35

электромагнитные волны, 171

элементы матрицы, 46

якобиан, 71, 75