

Тренерский штаб команды Московской области по астрономии

# НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА В ОЛИМПИАДНОЙ АСТРОНОМИИ

*учебно-методическое пособие*



Автор: *Муратов В. А.*

Редактор: *Ребриков А. В.*

версия 0.0 (черновая)

2022 год

# Содержание

<b>1</b>	<b>Задача двух тел в приближении Кеплера</b>	<b>4</b>
1.1	Вывод законов Кеплера . . . . .	4
1.1.1	Уравнение движения . . . . .	4
1.1.2	Второй закон Кеплера . . . . .	5
1.1.3	Первый закон Кеплера . . . . .	6
1.1.4	Третий закон Кеплера . . . . .	8
1.2	Орбиты и скорости на них . . . . .	9
1.2.1	Эллипс . . . . .	9
1.2.2	Парабола . . . . .	11
1.2.3	Гипербола . . . . .	12
1.2.4	Скорости и энергии на орбитах . . . . .	14
1.2.5	Определение основных параметров орбит . . . . .	17
1.2.6	Вырожденные случаи . . . . .	17
	Задачи и упражнения . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Задача двух тел в случае сопоставимых масс</b>	<b>21</b>
2.1	Решение в С.О. одного из тел . . . . .	21
2.2	Решение в С.О. центра масс . . . . .	22
2.2.1	Движение центра масс . . . . .	22
2.2.2	Основные уравнения . . . . .	23
2.3	Связь решений . . . . .	24
2.3.1	Круговые орбиты . . . . .	25
2.3.2	Эллиптические орбиты . . . . .	26
2.3.3	Параболические и гиперболические орбиты . . . . .	28
	Задачи и упражнения . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Кеплеровы элементы орбиты</b>	<b>33</b>
3.1	Определения элементов . . . . .	33
3.2	Поворот орбиты . . . . .	34
3.2.1	Двумерный поворот на плоскости . . . . .	34

3.2.2	Поворот орбиты . . . . .	36
3.3	Восстановление Кеплеровых элементов . . . . .	40
	Задачи и упражнения . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Уравнение Кеплера</b>	<b>44</b>
4.1	Общее уравнение . . . . .	44
4.2	Эллипс . . . . .	45
4.3	Парабола . . . . .	47
4.4	Гипербола . . . . .	48
4.5	Вырожденный случай . . . . .	49
4.5.1	Вырожденный эллипс . . . . .	49
4.5.2	Вырожденная парабола . . . . .	50
4.5.3	Вырожденная гипербола . . . . .	51
	Задачи и упражнения . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Специальные случаи</b>	<b>54</b>
5.1	Движение внутри однородно заряженного шара . . . . .	54
5.2	Солнечный парус . . . . .	57
5.3	Элементарная модель для учета эффекта Пойтнинга-Робертсона	59
5.4	Движение тел с переменной массой . . . . .	61
5.5	Точки Лагранжа . . . . .	62
5.5.1	Общее уравнение . . . . .	62
5.5.2	$L_4$ и $L_5$ . . . . .	65
5.5.3	$L_1$ . . . . .	65
5.5.4	$L_2$ . . . . .	67
5.5.5	$L_3$ . . . . .	69
	Задачи и упражнения . . . . .	72

## Вступление

Пособие целиком посвящено небесной механике — разделу астрономии, изучающему движение тел в гравитационных полях. Блоки теории разбиты на главы, после каждой из которых приведена подборка задач на тему главы,. Уровень задач примерно соответствует уровню задач финального этапа ВсОШ по астрономии.

Эта версия документа будет дополняться в будущем, однако уже способна серьезно продвинуть понимание читателем небесной механики. Если Вы обнаружите опечатку, ошибку или захотите сделать замечание любого другого характера, можете писать автору по контактам, указанным на титульном листе.

Желаю удачи!

*Василий Муратов*

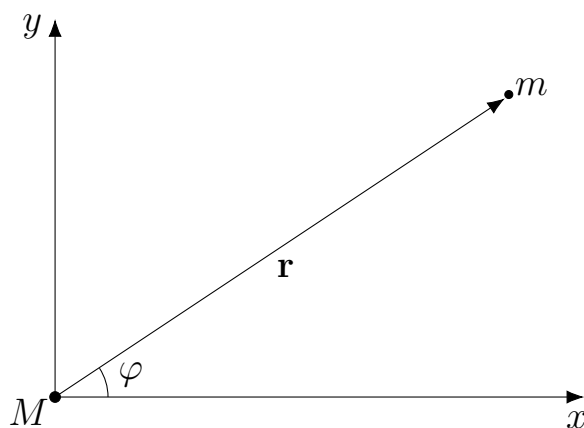
# 1 Задача двух тел в приближении Кеплера

Сначала решим задачу двух тел — задачу о движении двух гравитационно взаимодействующих материальных точек друг относительно друга. Эффектами ОТО, СТО пренебрегаем здесь и на протяжении всего документа. Сначала проще всего рассмотреть задачу двух тел в приближении Кеплера.

## 1.1 Вывод законов Кеплера

### 1.1.1 Уравнение движения

Рассматривается случай  $M \gg m$ . В этом случае отклонения большего тела от центра масс пренебрежимо малы по сравнению с отклонениями меньшего тела. Можно считать, что большее тело "приколото булавкой" в центре масс системы.



В этом случае, согласно закону всемирного тяготения, на меньшее тело действует сила:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$$

Где  $\mathbf{r}$  — радиус вектор, направленный от большего тела к меньшему\*. Тогда, уравнение движения меньшего тела:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} \quad (1.1)$$

---

\*здесь и далее жирным шрифтом обозначены векторные величины, а их модули — обычным

Где  $\mathbf{v}$  — скорость меньшего тела относительно большего. Или:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \quad (1.2)$$

Где  $\mu = GM$  — гравитационный параметр. Для решения данного уравнения проще всего воспользоваться вспомогательным утверждением — законом сохранения момента импульса, или его прямым следствием — вторым законом Кеплера.

### 1.1.2 Второй закон Кеплера

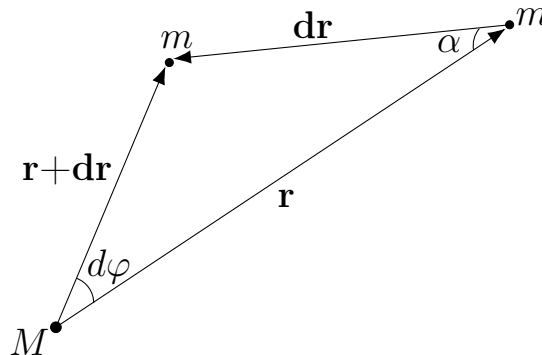
В данной задаче силы, действующие на меньшее тело сонаправлены с радиус-вектором. Поэтому они не создают момента сил, а значит момент импульса точки  $m$  сохраняется. Удобнее рассмотреть даже сохранение удельного момента импульса  $\mathbf{j}$ :

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const}$$

Рассмотрим подробнее модуль этого вектора:

$$j = vr \sin \alpha = \frac{r dr \sin \alpha}{dt} = 2 \frac{dS}{dt} \quad (1.3)$$

Где  $\alpha$  — угол между скоростью и радиус-вектором,  $dS$  — площадь треугольника на рисунке снизу. Этот треугольник составлен из положений меньшего тела в соседние моменты времени.



Если  $j$  сохраняется, значит сохраняется и производная площади по времени, называемая секторной скоростью  $C$ :

$$C = \frac{dS}{dt} = \frac{j}{2} = \text{const}$$

В этом и заключается второй закон Кеплера:

*За равные промежутки времени радиус-вектор из центра масс заметает равные площади*

Важное следствие: рассмотрим площадь треугольника несколько с иной стороны:

$$dS = \frac{r(r+dr)d\varphi}{2} = \frac{r^2}{2}d\varphi$$

Значит:

$$2\frac{dS}{dt} = r^2\frac{d\varphi}{dt} = j \quad (1.4)$$

Это соотношение является ключевым и важнейшим, и в будущем еще не раз выручит нас.

### 1.1.3 Первый закон Кеплера

Теперь приступим к решению уравнения (1.2). Если расписать его покомпонентно в декартовых координатах:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}x \quad (1.5)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}y \quad (1.6)$$

Осуществим переход к полярным координатам по формулам:

$$x = r \cos \varphi \quad (1.7)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (1.8)$$

Разделим (1.5) и (1.6) на (1.4), а затем выполним в них подстановку (1.7) и (1.8). Получится:

$$\frac{dv_x}{d\varphi} = -\frac{\mu}{j} \cos \varphi$$

$$\frac{dv_y}{d\varphi} = -\frac{\mu}{j} \sin \varphi$$

Интегрируя обе части, по  $\varphi$ , получим:

$$v_x = -\frac{\mu}{j} \sin \varphi + A \quad (1.9)$$

$$v_y = \frac{\mu}{j} \cos \varphi + B \quad (1.10)$$

Константы интегрирования, вообще говоря, ищутся из начальных условий. Однако никто не мешает нам повернуть координатные оси так, чтобы ось  $ix$  была перпендикулярна скорости в начальный момент времени. В таких координатах уравнение траектории просто будет иметь более красивый вид, так как в момент  $\varphi = 0$  у нас  $v_x = 0$  и тогда  $A = 0$ , так что эта константа больше не появится в наших выкладках. Теперь продифференцируем выражения (1.7) и (1.8) по времени. Получим:

$$v_x = \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} = \dot{r} \cos \varphi - \frac{j \sin \varphi}{r}$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} = \dot{r} \sin \varphi + \frac{j \cos \varphi}{r}$$

Здесь была выполнена подстановка (1.4) чтобы уйти от  $\dot{\varphi}$ . Теперь просто рассмотрим следующую сумму:

$$-v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi = -\dot{r} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{j \sin^2 \varphi}{r} + \dot{r} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{j \cos^2 \varphi}{r} \quad (1.11)$$

Но с другой стороны, из (1.9) и (1.10), эта же сумма есть:

$$-v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi = \frac{\mu}{j} \sin^2 \varphi + \frac{\mu}{j} \cos^2 \varphi + B \cos \varphi \quad (1.12)$$



Приравнявая (1.11) и (1.12) и сокращая все что можно, получим, если выразить  $r(\varphi)$ :

$$r = \frac{\frac{j^2}{\mu}}{1 + \frac{Bj}{\mu} \cos \varphi} \quad (1.13)$$

Данное уравнение задает кривую в полярных координатах. В курсе аналитической геометрии нетрудно доказывается, что кривая, которая задается уравнением:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

является одним из трёх конических сечений — эллипсом, параболой или гиперболой, причем фокус кривой находится в центре координат. Коэффициент  $p$  обозначает фокальный параметр,  $e$  — эксцентриситет. Это параметры кривой, и они будут рассмотрены подробнее далее. Таким образом, первый закон Кеплера можно сформулировать как:

*В ограниченной задаче двух тел меньшее из тел движется вокруг большего по коническому сечению, причем большее тело находится в фокусе сечения.*

Важные соотношения, полученные нами здесь связывают свойства кривой и начальные условия:

$$p = \frac{j^2}{\mu} \quad (1.14)$$

$$e = \frac{Bj}{\mu} \quad (1.15)$$

#### 1.1.4 Третий закон Кеплера

Вывод третьего закона Кеплера корректен только в случае, когда траектория замкнута, так как в нем фигурирует период обращения. Из названных кривых лишь эллипс является замкнутым, на параболе и гиперболе период просто бесконечен. В случае, если уж так получилось и траектория все же эллипс, период есть просто площадь эллипса, деленная на секторную скорость:

$$T = \frac{S}{C}$$

Площадь эллипса есть:

$$S = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

где  $a$  — половина большей оси эллипса (большая полуось).

$$C = \frac{j}{2} = \frac{\sqrt{\mu p}}{2} = \frac{\sqrt{\mu a (1 - e^2)}}{2}$$

Здесь была использована недоказанная ранее формула :

$$p = a (1 - e^2)$$

Она также является свойством эллипса, а о свойствах эллипса будет сказано чуть позже. Пока, если принять это за данность и подставить в уравнение для периода, получим:

$$T = 2\pi a^2 \sqrt{\frac{1 - e^2}{\mu a (1 - e^2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

Если множество малых тел обращаются вокруг одного большого (прямо как в солнечной системе!), то формула приобретает очень простой вид:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const}$$

Таким образом, второй закон Кеплера формулируется как:

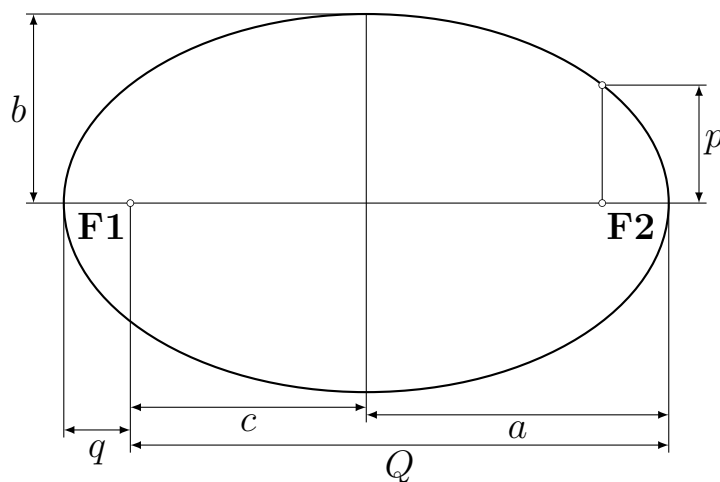
*Квадраты периодов тел относятся как кубы их больших полуосей, если все тела обращаются вокруг общего центра*

## 1.2 Орбиты и скорости на них

### 1.2.1 Эллипс

Чаще всего в олимпиадных задачах формой орбиты является именно эллипс, так как именно по эллипсам обращаются большие и малые планеты солнечной системы. Чисто геометрически эллипс — ГМТ точек, сумма расстояний

от которых до заданных двух (называемых фокусами) постоянна. Чуть ниже рисунок со всеми параметрами эллипса\*.



Парметры эллипса:

- ▷  $F_1$  и  $F_2$  — фокусы эллипса. В одном из них находится гравитирующий центр.
- ▷ Большая полуось  $a$  — половина большой оси эллипса. Является основной характеристикой, из которой выражаются все остальные.
- ▷ Фокусное расстояние  $c$  — половина межфокусного расстояния.
- ▷ Эксцентриситет  $e$  — отношение  $\frac{c}{a}$ . Вводится для всех конических сечений. Степень сжатости эллипса относительно окружности, которая является частным случаем эллипса с  $e = 0$ . Эксцентриситет у эллипса строго меньше 1.
- ▷ Малая полуось  $b$  — половина малой оси эллипса.  $b = a\sqrt{1 - e^2}$
- ▷ Фокальный параметр  $p$  — важный параметр, который возникает в ряде физических уравнений.  $p = a(1 - e^2)$
- ▷ Перицентрическое расстояние  $r_p$  или  $q$  — расстояние от фокуса до ближайшей к нему точки эллипса (перицентра орбиты).  $q = a(1 - e)$

---

\*За рисунок выражаю благодарность Гришину Юрию

- ▷ Апоцентрическое расстояние  $r_a$  или  $Q$  — расстояние от фокуса до самой удаленной от него точки эллипса (апоцентр орбиты).  $Q = a(1 + e)$

Эллипс может быть задан с помощью уравнения второй степени в декартовых координатах:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Центр координат совпадает с центром эллипса (пересечение большой и малой осей), а сами оси совпадают с большой и малой осями эллипса.

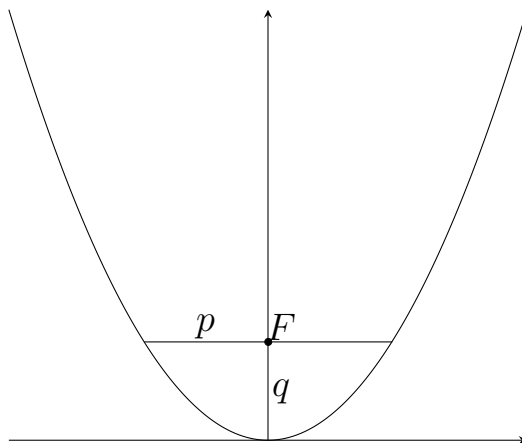
Площадь полного эллипса  $S$ :

$$S = \pi ab$$

Все приведенные формулы выводятся из тривиальной геометрии, а сам вывод предоставляется читателю в качестве упражнения.

### 1.2.2 Парабола

Параболой называется ГМТ точек, равноудаленных от точки (фокус) и данной прямой (директриса параболы). С точки зрения небесной механики параболу удобно считать коническим сечением с  $e = 1$ .



Элементы параболы:

- ▷  $F$  — фокус параболы. Именно там находится гравитирующий центр.
- ▷ Фокальный параметр  $p$  — основная характеристика параболы. Обычно все остальное выражается через него.

- ▷ Перицентрическое расстояние  $q$  — наименьшее расстояние от точки параболы до ее фокуса.  $q = \frac{p}{2}$

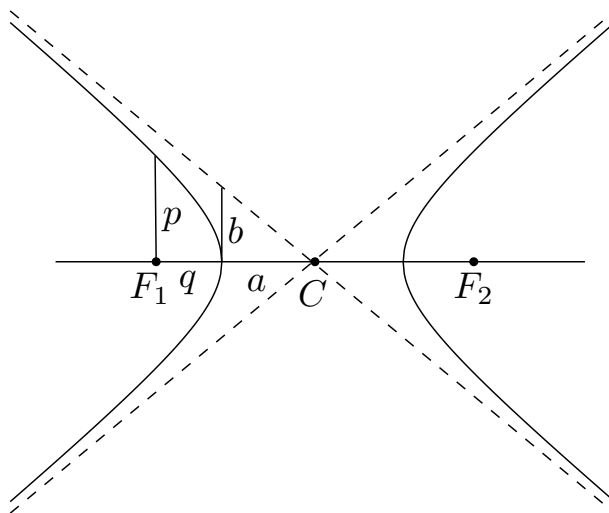
Каноническое уравнение параболы в декартовых координатах:

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

где центр координат совпадает с центром параболы. Парабола является переходным типом орбиты между эллипсом и гиперболой. Это орбита, на котором тело имеет наименьшую возможную энергию, необходимую чтобы преодолеть гравитационное поле центра притяжения.

### 1.2.3 Гипербола

Гипербола — орбита, которая позволяет меньшему телу улететь на бесконечность относительно большего. Большинство комет из облака Оорта имеют гиперболическую орбиту. Чисто математически гипербола — ГМТ точек, разность расстояний от которых до данных двух (фокусов) есть константа. Гипербола — коническое сечение с  $e > 1$ .



У гиперболы есть две ветви, как видно из рисунка. Тело летит по той из них, ближе к которой находится фокус с гравитирующим центром.

Элементы гиперболы:

- ▷  $F_1$  и  $F_2$  — фокусы гиперболы. В одном из них находится гравитирующая масса.
- ▷ Пунктирные линии — асимптоты гиперболы. На бесконечности гипербола совпадает с ними.
- ▷  $C$  — центр гиперболы. Точка пересечения асимптот.
- ▷  $a$  — большая полуось гиперболы. Расстояние от центра до ближайшей к центру точки гиперболы (перицентр). Обычно через большую полуось выражаются все остальные элементы.
- ▷  $c$  — фокальное расстояние. Половина межфокусного расстояния.
- ▷  $e$  — эксцентриситет гиперболы.  $e = \frac{c}{a}$ . На гиперболе строго больше единицы.
- ▷  $b$  — малая полуось. Длина перпендикуляра с асимптоты гиперболы на прямую  $F_1F_2$ , опущенного в точку перицентра.  $b = a\sqrt{e^2 - 1}$
- ▷  $p$  — фокальный параметр. Снова возникает в ряде физических формул.  
 $p = a(e^2 - 1)$
- ▷ Перицентрическое расстояние  $q$  — расстояние от фокуса до перицентра орбиты.  $q = a(e - 1)$

Гипербола задается уравнением в декартовых координатах как:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Где центр координат совпадает с центром гиперболы. Угол между асимптотами гиперболы  $\alpha$  связан с углом поворота вектора скорости тела, совершающего совершает гравитационный маневр в поле тяжести большого тела.

$$\alpha = 2 \arccos \left( \frac{1}{e} \right)$$

### 1.2.4 Скорости и энергии на орбитах

Теперь попробуем подсчитать с какой скоростью движется тело по каждой из орбит. Для этого применим уже готовые уравнения (1.9) и (1.10):

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{\mu^2}{j^2} \sin^2 \varphi + \left( \frac{\mu}{j} \cos \varphi + B \right)^2 = \frac{\mu^2}{j^2} + 2 \frac{\mu B}{j} \cos \varphi + B^2$$

В это выражение осталось лишь подставить полученные нами ранее выражения для  $B$  и  $j$  (уравнения (1.14) и (1.15)), а также выразить  $\varphi$  через  $r$ , чтобы получить скорость в зависимости от расстояния до центра. Сделаем все это:

$$v^2 = \frac{\mu}{p} + 2 \frac{\mu e \sqrt{\mu} \frac{p}{r} - 1}{\sqrt{\mu} p} + e^2 \frac{\mu}{p} \quad (1.16)$$

Здесь чтобы уйти от  $\varphi$  было использовано указанное ранее уравнение конических сечений в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

Упрощая (1.16), получим:

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} + \frac{e^2 - 1}{p} \right) \quad (1.17)$$

Эта формула является наиболее общей и задает скорость в самом общем случае для Кеплеровского движения. Однако на практике гораздо полезнее оказывается рассмотреть три возможных случая орбит.

**Эллиптическая орбита** Подставляя  $p = a(1 - e^2)$ , получим:

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (1.18)$$

Частный случай эллипса — окружность, получается из этой формулы подстановкой  $r = a = \text{const}$ . На окружности:

$$v^2 = \frac{\mu}{a}$$

Эта скорость называется первой космической, или круговой скоростью.

Полезно выразить удельную полную энергию на орбите через её параметры.

Полная удельная энергия есть:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (1.19)$$

Тут стоят удельная кинетическая энергия и потенциал взаимодействия точечных масс. Видно, что на эллипсе:

$$E = -\frac{\mu}{2a} = \text{const} < 0 \quad (1.20)$$

Итак, эллиптическая орбита обладает отрицательной полной энергией. Это и логично, ведь такая орбита является устоявшейся и периодической, а значит должна обладать отрицательной полной энергией. У систем с положительной энергией возможны состояния, когда нет потенциальной энергии (все частицы на бесконечности). На эллиптической орбите тела никогда не расстанутся, а значит обязаны обладать отрицательной энергией. Из закона сохранения энергии очевидно, что кинетическая энергия (скорость) наибольшая в момент, когда наименьшая потенциальная. Потенциальная энергия в нашей задаче с расстоянием монотонно возрастает, поэтому наибольшую скорость на эллиптической орбите тело имеет в самой ближайшей к фокусу точке — то есть в перигентре орбиты. По той же логике, самая маленькая полная скорость в апоцентре. Получить выражение для них можно просто подставив в (1.18)  $r = q$  и  $r = Q$ . Получится:

$$v_q = \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}}$$



$$v_Q = \sqrt{\frac{\mu(1-e)}{a(1+e)}}$$

**Параболическая орбита** Подставляя  $e = 1$  в (1.17), получим:

$$v^2 = \frac{2\mu}{r}$$

Эта скорость называется второй космической. Это минимальная скорость, нужная чтобы покинуть окрестности гравитирующей массы навсегда. Полная энергия на параболической орбите равна нулю, в чем можно убедиться простой подстановкой.

$$E = const = 0$$

На параболической орбите тело на бесконечности не имеет скорости.

**Гиперболическая орбита** Для гиперболы  $p = a(e^2 - 1)$  и полная скорость:

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)$$

А полная энергия:

$$E = \frac{\mu}{2a} = const > 0 \quad (1.21)$$

На гиперболической орбите тело на бесконечности имеет полную скорость, равную:

$$v_\infty^2 = \frac{\mu}{a}$$

А в периге — точке, где тело движется быстрее всего:

$$v_q = \sqrt{\frac{\mu(e+1)}{a(e-1)}}$$

Таким образом тип орбиты однозначно определяется знаком полной энергии.

### 1.2.5 Определение основных параметров орбит

Невероятно полезным в олимпиадной астрономии является умение определять параметры орбит из известных начальных данных. Для того, чтобы однозначно восстановить большую полуось и эксцентриситет, нужно знать лишь полную скорость, расстояние до гравитирующего центра и угол между вектором скорости и радиус-вектором. Итак, пусть нам известны  $v$ ,  $r$ ,  $\alpha$ , и массу центрального тела (обычно это Солнце) мы считаем известным. Как найти  $a$  и  $e$ ? Прежде всего заметим, что из (1.19) мы знаем полную энергию на орбите. Более того, по знаку полной энергии можно восстановить тип орбиты. Ну а затем, из формул (1.20) и (1.21) можно найти большую полуось в случае если орбита эллипс или гипербола. На параболе, как мы помним, понятие большой полуоси не вводится. Чтобы найти  $e$  нужно вспомнить другой закон сохранения — закон сохранения момента импульса. Он выражается соотношением (1.3):

$$j = vr \sin \alpha = \text{const}$$

И эту константу мы знаем, ведь  $j = \sqrt{\mu p}$  из (1.14) Поэтому:

$$vr \sin \alpha = \sqrt{\mu p}$$

Отсюда ищется фокальный параметр, а из него уже очевидно и эксцентриситет по известной полуоси.

### 1.2.6 Вырожденные случаи

А что будет если остановить Землю относительно Солнца, или, скажем, придать ей начальную скорость ровно вдоль радиус-вектора с Солнца? Кажется очевидным, что Земля начнет падать на Солнце просто по прямой. Но прямой линии не было в списке возможных траекторий в задаче двух тел, но тем не менее движение по ней возможно. Это — вырожденный случай задачи двух тел, и в реальности отрезок, являющийся траекторией в рамках задачи, представляет собой вырожденное коническое сечение. Например, если

сжимать эллипс все сильнее, устремляя его эксцентриситет к единице слева, эллипс будет все больше похож на отрезок. Нечто аналогичное можно проделать и с гиперболой, устремляя  $e$  к 1 справа, да и с параболой тоже. Поэтому отрезок в задаче про падение Земли на Солнце без начальной скорости — вырожденный эллипс (тип вырожденного сечения снова определяется знаком полной энергии, и в этой задаче она, очевидно, отрицательна). Можно даже определить большую полуось этого эллипса — из закона сохранения энергии получится 0.5 а.е.. Время падения Земли на Солнце будет равно просто половине периода полета по этому эллипсу, то есть  $\frac{0.5^{1.5}}{2}$  лет.

## Задачи и упражнения

1. Какую фазу при наблюдении с Земли должен иметь Марс во время старта АМС, которая летит к Марсу по энергетически выгодной траектории? Орбиту Марса принять круговой и лежащей в плоскости эклиптики, подразумевается что станция приземлится на Марс во время первого же прохождения апоцентра орбиты.
2. Проходя афелий своей орбиты, который находится на орбите Меркурия, комета останавливается в своем видимом движении среди звезд на Земном небе. Определите большую полуось и эксцентриситет ее орбиты, считая, что она лежит в плоскости эклиптики. Считать, что комета находилась в нижнем соединении с Солнцем.
3. За какое время долетает тело от перицентра до точки на расстоянии  $a$  от фокуса на эллиптической орбите?
4. Два одинаковых тела, одно из которых движется по параболической орбите, а второе по круговой, сталкиваются в момент, когда первое тело в перицентре. Найдите эксцентриситет орбиты нового тела.
5. Какой импульс и в каком направлении надо придать Земле, чтобы ее полная энергия на орбите не изменилась?

6. Находясь на широте  $30^\circ$ , я кинул камень на юг под некоторым углом к горизонту и случайно сбил геостационарный спутник. При этом в момент удара мой камень находился в апоцентре своей орбиты. С какой начальной скоростью и под каким углом к горизонту я кинул камень? Геостационарный спутник обращается вокруг Земли по круговой орбите с периодом в одни звездные сутки в плоскости экватора.
7. 17 января 2016 года комета C/2013 US10 приблизилась к Земле на минимальное расстояние. При этом ее горизонтальный параллакс составил  $12.0''$ . 18 марта того же года параллакс кометы был равен  $4.0''$ . С какой средней пространственной скоростью относительно Земли двигалась комета за этот период?
8. Два космических корабля прошли точку перисатурния над полюсом Сатурна на расстоянии его экваториального радиуса от центра планеты. После этого первый корабль пролетел сквозь щель Энке (радиус  $1.34 \cdot 10^5$  км), а второй – сквозь щель Гюйгенса (радиус  $1.17 \cdot 10^5$  км) в кольцах. Определите расстояния апосатурния этих кораблей. Останутся ли они искусственными спутниками Сатурна?
9. Сколько всего энергии поглощает черный астероид радиусом 2 км, который обращается по орбите полуосью 3 а.е. и эксцентриситетом 0.8 при движении от апоцентра к фокальному параметру?
10. Звезда — красный гигант обладает системой из очень большого количества планет, движущихся по орбитам с одинаковыми эксцентриситетами. В один момент звезда быстро сбрасывает оболочку, уносящую ровно половину массы гиганта. Тем не менее, 0.7 от общего числа планет в итоге остались в системе звезды. Определите эксцентриситет орбит планет до сброса оболочки. Считать, что оболочка рассеивается очень быстро, ее взаимодействие с планетами с момента сброса, а также взаимодействие планет между собой не учитывать. Все планеты несравнимо меньше звезды по массе.

11. Планета обращается по эллиптической орбите с большей полуосью  $a$  и эксцентриситетом  $e$  вокруг красного гиганта. В один момент звезда быстро сбрасывает оболочку, тем самым теряет половину своей массы. Эксцентриситет орбиты планеты при этом не изменился. Выразите новую большую полуось  $a_2$  и расстояние до звезды в момент сброса  $r$  через  $e$ . При каких  $e$  такое возможно?
12. Космический аппарат стартует с Земли с третьей космической скоростью, и вскоре совершает гравитационный маневр возле Юпитера. Определите фазу Юпитера в момент старта аппарата и угол поворота скорости при маневре. Минимальное расстояние, на которое приблизился аппарат к планете гиганту принять равным трём радиусам Юпитера. Примечание: вам может понадобиться уравнение Баркера, которое доказано в 13 разделе пятой части документа.
13. Комета покинула окрестности звезды Росс 248 по параболической траектории относительно нее и попала в окрестности Солнца, пролетев мимо него на минимальном расстоянии 1 а.е. Какой был эксцентриситет орбиты этой кометы при пролете около Солнца? На какой угол изменится направление скорости кометы после пролета через Солнечную систему? Параметры звезды Росс 248: собственное движение  $1.6''$  за год, лучевая скорость равна  $-78 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ , параллакс  $0.32''$ . Влиянием на систему всех иных тел, кроме Солнца и звезды Росс 248, пренебречь.
14. Аппарат совершил перелет с Земли к некоторой другой большой планете Солнечной системы по энергетически оптимальной траектории. Пролетев рядом с планетой, он сразу же отправился в обратный путь к Земле. В течение всей миссии аппарат, не включая двигателей, совершил один оборот вокруг Солнца и вернулся на нашу планету в точке старта миссии. Для какой ближайшей к Солнцу планеты такое возможно? Орбиту Земли считать круговой, действие планеты на аппарат не учитывать.
15. АМС массой 3 тонны обращается вокруг Солнца по эллиптической орбите

с  $a = 2$  а.е.,  $e = 0.4$ . В афелии станции был передан добавочный импульс в сторону её движения, и через 5 месяцев она оказалась от Солнца на том расстоянии, что и в момент передачи импульса. Найдите этот импульс.

## 2 Задача двух тел в случае сопоставимых масс

### 2.1 Решение в С.О. одного из тел

Теперь решим задачу двух тел в самом общем виде, ничем не пренебрегая. Два тела в пустом пространстве взаимодействуют друг с другом, и мы хотим понять как они будут двигаться. Перейдем в С.О. тела массой  $M$ . Эта система отсчета неинерциальна, ведь на неё действует меньшее тело с силой:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{GMm}{r^3} \mathbf{r}$$

Все обозначения те же, что и в первой главе. Ускорение данной С.О. есть:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{Gm}{r^3} \mathbf{r}$$

Поэтому, уравнение движения меньшего тела принимает вид:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r} - m\mathbf{a}_1$$

Второе слагаемое в левой части — сила инерции. Уравнение движения примет вид:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3} \mathbf{r}$$

Разумеется, закон сохранения момента импульса снова выполняется, ведь все силы вновь сонаправлены с радиус-вектором. Мы получили то же уравнение, что и (1.2), только вместо массы большего тела в знаменателе сумма масс. Решение будет абсолютно таким же, только вместо массы большего тела во всех формулах появляется сумма масс. И снова траектория второго тела при наблюдении с первого — одно из трех конических сечений. Период, очевидно,

равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(M+m)}}$$

Это утверждение называется обобщенным третьим законом Кеплера. Оно может быть записано как:

$$\frac{T^2 (M+m)}{a^3} = \text{const} \quad (2.1)$$

Выражение для всевозможных относительных скоростей также будут иметь такой же вид как и в ограниченной задаче, разумеется кроме того факта, что вместо массы большего тела туда стоит подставлять суммарную массу. Например, на эллипсе:

$$v = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{r} - \frac{G(M+m)}{a}}$$

$v$  — относительная скорость.

## 2.2 Решение в С.О. центра масс

Полезно понимать и то, как будут выглядеть траектории звезд в системе отсчета, связанной с их центром масс. Для этого докажем основные теоремы о движении центра масс.

### 2.2.1 Движение центра масс

Пусть относительно некоторой инерциальной системы отсчета тела  $M$  и  $m$  имеют радиус-векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Тогда, положение их центра масс в этой С.О.:

$$\mathbf{R} = \frac{M\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2}{M+m}$$

Дифференцируя (2.1) по времени, мы получим выражение для скорости центра масс звезд в этой С.О.:

$$\mathbf{V} = \frac{M\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2}{M + m}$$

Теперь определим скорости тел относительно центра масс:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V} = \frac{m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{M + m} = \frac{m\mathbf{v}}{M + m}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{V} = \frac{M(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}{M + m} = -\frac{M\mathbf{v}}{M + m}$$

Где  $\mathbf{v}$  — та самая относительная скорость, которая возникала буквально в предыдущем разделе. Отметим, что скорость центра масс есть величина постоянная, поскольку она является частным полного импульса системы (он сохраняется из третьего закона Ньютона) и суммарной массы, которую мы тоже считаем постоянной. Поэтому эта система отсчета инерциальна.

### 2.2.2 Основные уравнения

Система отсчета центра масс инерциальна, поэтому в ней уравнение движения скажем тела  $m$  примет вид:

$$\frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \quad (2.2)$$

Теперь пусть  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — радиус-векторы тел  $M$  и  $m$  в С.О. центра масс. Хорошо бы оставить в правой части (2.2) функцию от радиус-вектора  $\mathbf{r}_2$ . Сделать это совсем несложно, ведь в С.О. центра масс  $\mathbf{R} = 0$ , а значит:

$$\mathbf{r}_2 = -\frac{M}{m}\mathbf{r}_1$$

При этом, очевидно:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \left(1 + \frac{m}{M}\right)$$



Это следует просто из определения векторной разности. Поэтому, уравнение движения принимает вид:

$$\frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = -\frac{GM}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 r_2^3} \mathbf{r}_2$$

Уравнение снова тоже самое, однако эффективная масса на этот раз равна:

$$M_{eff} = \frac{M}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2} \quad (2.3)$$

Траектория снова является коническим сечением, фокус на этот раз расположен в центре масс. Если сделать аналогичную подстановку со второй звездой, для нее эффективная масса окажется равна:

$$m_{eff} = \frac{m}{\left(1 + \frac{M}{m}\right)^2} \quad (2.4)$$

Итак, в системе отсчета центра масс траектории представляют собой коники с общим фокусом в центре масс, лежащие в одной и той же плоскости. Выражения (2.3) и (2.4) показывают, какую массу нужно подставлять в уравнения чтобы считать движение так же, как обычное кеплеровское. Отметим, что тела всегда находятся в противофазе относительно центра масс, при этом вступая в перицентры своих орбит одновременно (ведь модули их скоростей связаны прямой пропорциональностью!). В любой момент времени справедливо:

$$\frac{M}{m} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{u_2}{u_1}$$

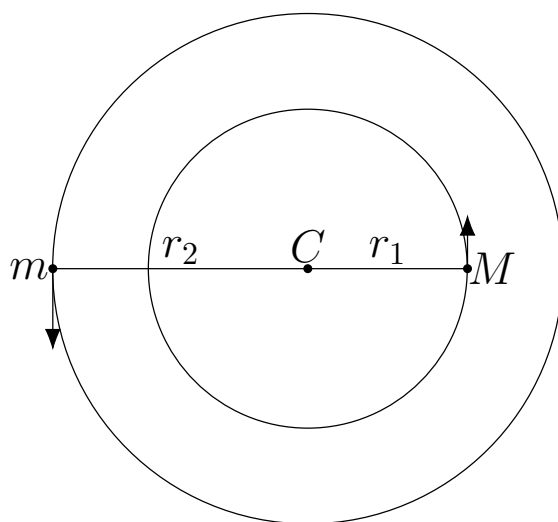
## 2.3 Связь решений

В этой части будут выведены соотношения для параметров орбит тел в двух полученных ранее решениях относительно разных систем отсчета. Здесь и далее, все величины с индексами относятся к решению относительно центра

масс, без индексов — к решению в системе отсчета одного из тел.

### 2.3.1 Круговые орбиты

Наиболее часто встречающийся в олимпиадных задачах случай — случай круговых орбит. Он является самым простым, однако встречается в задачах уж слишком часто. Именно поэтому автор решил выделить его в отдельную категорию.



На рисунке круговые орбиты с центром в центре масс системы  $C$ . Расстояние между телами постоянно и, конечно, будет равно относительной полуоси  $a$ . Очевидно, что:

$$a = r_1 + r_2$$

Вывести скорости тел тоже не составит труда, ведь при движении по окружности ускорение в проекции на радиус-вектор из центра равно центростремительному:

$$\frac{v_1^2}{r_1} = \frac{Gm}{a^2}$$

Подставляя:

$$r_1 = a \frac{m}{M + m}$$

Получим:

$$v_1^2 = \frac{Gm^2}{a(M + m)}$$

Аналогично:

$$v_2^2 = \frac{GM^2}{a(M+m)}$$

Полная энергия системы на такой орбите\*:

$$E = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a}$$

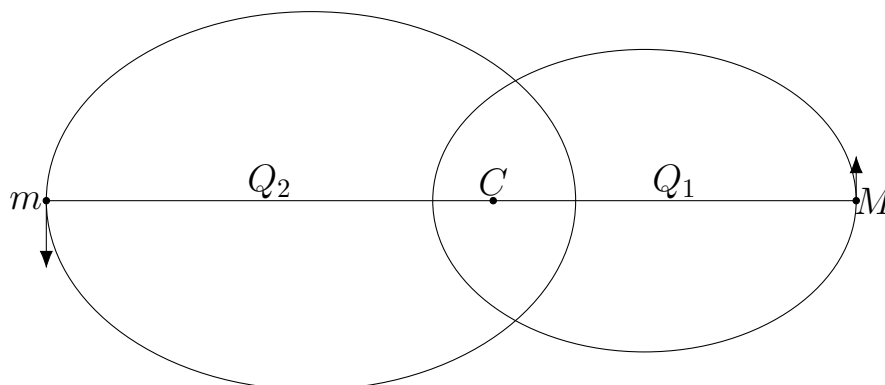
В совокупности с третьим законом Кеплера, который имеет вид:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(M+m)}}$$

Данные формулы позволяют по амплитудным значениям наблюдаемых лучевых скоростей двойных систем искать массы звезд.

### 2.3.2 Эллиптические орбиты

Если орбиты имеют форму эллипсов, основная задача состоит в том, чтобы понять как связаны между собой  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a$  и эксцентриситеты видимых и относительного эллипсов. Это делается чисто геометрически.



На рисунке два эллипса с общим фокусом, в котором находится центр масс. Конфигурация, изображенная конкретно здесь — обе звезды в афелии своей орбиты. С точки зрения относительной орбиты в этой точке, разумеется, тоже будет наблюдаться афелий с первого тела при наблюдении со второго, так как

---

\*В системе отсчета, связанной с центром масс системы

здесь расстояние между ними максимально. Из рисунка очевидно, что:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Но, из определения центра масс:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{m}{M}$$

Поэтому:

$$Q = Q_1 \left( 1 + \frac{M}{m} \right) \quad (2.5)$$

Аналогично, в перицентре:

$$q = q_1 \left( 1 + \frac{M}{m} \right) \quad (2.6)$$

Поэтому, разделив (2.5) на (2.6):

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{1+e_1}{1-e_1}$$

Что может быть выполнено только при  $e_1 = e$ . Аналогично получим и что  $e_2 = e$ . Итак, все три эллипса обладают одинаковыми эксцентриситетами:

$$e = e_1 = e_2 \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.6), получим:

$$a_1 = \frac{a}{1 + \frac{M}{m}}$$

Тут же, поскольку:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{m}{M}$$

Становится очевидно и что:

$$a_2 = \frac{M}{m} a_1 = \frac{a}{1 + \frac{m}{M}}$$

Тут уже видно, что:

$$a_1 + a_2 = a$$

Теперь, когда связь между параметрами орбит восстановлено, полезно получить еще и скорости на орбитах относительно центра масс. Но сделать это совсем просто, так как мы помним, что задача двух тел в С.О. центра масс полностью эквивалентна движению по кеплеровской орбите с эффективной массой  $M_{eff}$  и  $m_{eff}$ . Поэтому, немедленно получается:

$$u_1^2 = Gm_{eff} \left( \frac{2}{r_1} - \frac{1}{a_1} \right)$$

$$u_2^2 = GM_{eff} \left( \frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_2} \right)$$

Эффективные массы берутся из уравнений (2.3) и (2.4).

### 2.3.3 Параболические и гиперболические орбиты

Эти случаи объединены в один, так как практически никогда не встречаются в олимпиадной практике. При этом идеи вывода формул для связи параметров орбит в разных С.О. абсолютно те же. Снова выберем момент, когда оба тела в перицентре орбиты, скажем, на параболе. В этом случае, снова:

$$q_1 + q_2 = q_1 \left( 1 + \frac{M}{m} \right) = q_2 \left( 1 + \frac{m}{M} \right) = q$$

Учитывая, что  $p = 2q$  для параболы, снова получим:

$$p_1 + p_2 = p$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{M}$$

Для скорости тел на параболе относительно центра масс снова нужно просто подставить в известную формулу для второй космической эффективные массы.

На гиперболе придется применить еще одну новую идею, сделать совсем по аналогии с эллипсом не получится поскольку нет точки апоцентра. Однако вместо нее можно взять точки на бесконечности и скорости на них. Как мы помним, на гиперболе:

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

Поэтому:

$$\frac{u_{\infty 1}}{u_{\infty 2}} = \sqrt{\frac{m_{eff} a_2}{M_{eff} a_1}}$$

Но, в то же время, из свойств движения центра масс, отношение этих скоростей есть  $\frac{m}{M}$ . Приравнявая эти отношения, вновь получим:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m}{M}$$

С другой стороны, относительная скорость на бесконечности:

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{G(M+m)}{a}} = \left(1 + \frac{M}{m}\right) u_{\infty 1} = \left(1 + \frac{M}{m}\right) \sqrt{\frac{Gm_{eff}}{a_1}}$$

Если раскрыть скобки и все упростить, получим:

$$a_1 = \frac{a}{1 + \frac{M}{m}}$$

Аналогично:

$$a_2 = \frac{a}{1 + \frac{m}{M}}$$

Снова, как и на эллипсе:

$$a_1 + a_2 = a$$

Если снова написать уравнение для перицентров, вновь получим:

$$e_1 = e_2 = e$$

Читателю предлагается проделать это в качестве упражнения. Скорость на гиперболической орбите относительно центра масс абсолютно также:

$$u_1^2 = Gm_{eff} \left( \frac{2}{r_1} + \frac{1}{a_1} \right)$$

$$u_2^2 = GM_{eff} \left( \frac{2}{r_2} + \frac{1}{a_2} \right)$$

Вот и все, что нужно знать по задаче двух тел в самом общем виде. Полуоси сечений, которые получаются в С.О. центра масс в сумме дают относительную полуось, а эксцентриситеты у всех трёх орбит совпадают.

## Задачи и упражнения

1. Пусть мы наблюдаем звезду с экзопланетой, орбита которой лежит в плоскости луча зрения. Выразите массу экзопланеты через амплитудное значение лучевой скорости звезды  $v$ , период системы  $T$ , максимальное угловое расстояние от звезды до планеты  $\rho$  и параллакс  $\pi$ .
2. Скорости звезд в двойной системе с круговыми орбитами изменяются с амплитудой 20 и 10  $\frac{\text{км}}{\text{с}}$  и периодом 4 года. Найдите массы звезд.
3. Штурман космического корабля наблюдает за двойной системой, состоящей из двух одинаковых белых карликов с массой каждого, равной массе Солнца, движущихся по круговой орбите с периодом 7.9 лет. В некоторый момент расстояние от корабля до обеих компонент системы было одинаковым, видимый блеск каждой из них был равен  $-1^m$ , а угловое расстояние между ними составляло  $14'19.4''$ . Через некоторое время корабль, пролетая вблизи этой системы, оказался практически на одной линии со звездами на расстоянии 15 а.е. от ближайшей из них. Какую

суммарную звездную величину будет иметь система в этот момент, если штурман видит обе звезды полностью?

4. Четыре звезды солнечной массы вращаются в вершинах квадрата по круговой орбите. Сторона квадрата одна астрономическая единица. Найдите период системы.
5. Две звезды солнечной массы обращаются по круговой орбите вокруг общего центра масс, расстояние между звездами 1 а.е.. Издалека к ним навстречу мчится третья звезда с начальной скоростью  $v_0$ , и после тесного контакта три звезды больше никогда не встречаются. Определите минимально возможное значение  $v_0$ .
6. Красный гигант массой в три солнечных и белый карлик солнечной массы обращаются по эллиптическим орбитам вокруг общего центра масс. Эксцентриситет системы 0.5, полуось 2 а.е.. В результате взрыва красный гигант теряет половину массы в момент, когда расстояние между звездами 2.2 а.е.. Определите новые параметры орбиты.
7. Астрономы Лупа и Пупа живут на антипланетах, обращающихся вокруг звезды с массой  $10 M_{\odot}$  по эллиптической орбите с фокальным параметром 0.3 а. е. и эксцентриситетом 0.72. Как и полагается антипланетам, время от времени центральная звезда находится точно между ними. В этот момент  $X$  истинная аномалия планеты Пупы составляет  $237^\circ$ . Однажды кто-то опять всё перепутал, и в момент  $X$  центральная звезда бесследно исчезла, а модули скоростей планет уменьшились в 217 раз. Установите, с каким периодом  $T$  планеты бедных астрономов будут обращаться в отсутствие звезды. Известно, что планеты относятся к классу горячих Юпитеров с массой порядка масс обычных Юпитеров.
8. Выразите полный момент импульса двойной системы в С.О. её центра масс через массы звезд  $M$  и  $m$ , полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$ . Теперь представьте, что в двойной системе, в которой звезды равных масс  $M$

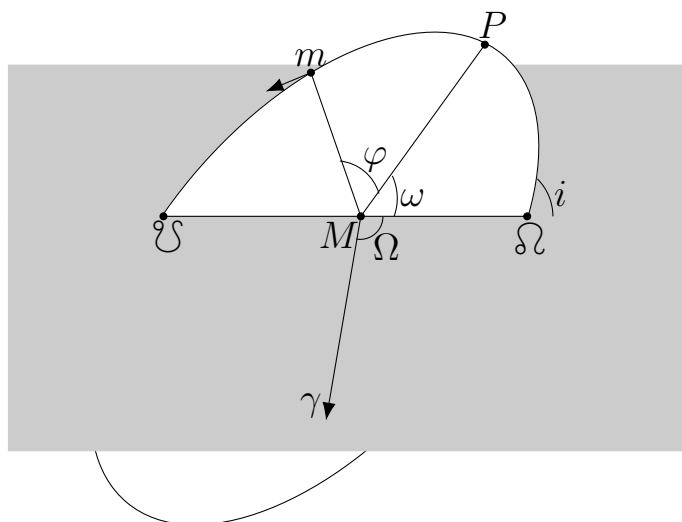


обращаются по круговым орбитам (полуось  $a$ ) происходит аккреция половины вещества первой звезды на вторую. Определите эксцентриситет новой орбиты, если каким то магическим образом ее большая полуось осталась без изменения? Указание: при аккреции полный момент импульса системы относительно ЦМ (НЕ удельный) сохраняет свое значение.

## 3 Кеплеровы элементы орбиты

### 3.1 Определения элементов

Кеплеровы элементы орбиты — 6 параметров, которые используются для описания положения тела на орбите в задаче двух тел. Некоторые из них уже знакомы читателю, остальные же придётся вводить с нуля.



На рисунке изображена эллиптическая орбита и некая плоскость. Ниже приведены определения Кеплеровых элементов орбит и связанные определения.

- ▷ Опорная плоскость — плоскость, относительно которой определяется положение орбиты в пространстве. Для тел солнечной системы опорной считается плоскость эклиптики, для экзопланет и двойных систем — картинная плоскость.
- ▷ Узлы орбиты  $\Omega$  и  $\mathcal{U}$  — точки пересечения орбиты с опорной плоскостью. Узел, в котором тело поднимается в полуплоскость, содержащую северный полюс эклиптики в солнечной системе называют восходящим ( $\Omega$ ), другой узел — нисходящим ( $\mathcal{U}$ ).
- ▷ Большая полуось орбиты  $a$  считается первым из кеплеровых элементов орбиты. На параболе вместо большой полуоси берется фокальный параметр.

- ▷ Эксцентриситет  $e$  берется как второй из кеплеровых элементов.
- ▷ Наклонение  $i$  — угол между плоскостью орбиты и опорной плоскостью. Для тела с прямым движением (против часовой стрелки при наблюдении с северного полюса) отсчитывается от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , для тела с обратным движением — от  $90^\circ$  до  $180^\circ$
- ▷ Долгота восходящего узла  $\Omega$  — угол между выделенным направлением на опорной плоскости и восходящим узлом орбиты при наблюдении из фокуса орбиты. Отсчитывается против часовой стрелки по опорной плоскости. В солнечной системе выделенным направлением служит точка весеннего равноденствия  $\gamma$ .
- ▷ Аргумент перицентра  $\omega$  — угол между восходящим узлом орбиты и ее перицентром при наблюдении из фокуса орбиты. Отсчитывается в сторону движения тела в плоскости орбиты.
- ▷ Истинная аномалия  $\varphi$  - угол между положением тела на орбите и перицентром при наблюдении из фокуса орбиты. Отсчитывается в сторону движения тела в плоскости орбиты. Тот самый угол, который фигурировал в уравнении эллипса в полярных координатах ранее. Единственный из кеплеровых элементов задает не положение орбиты в пространстве, а положение тела на орбите.

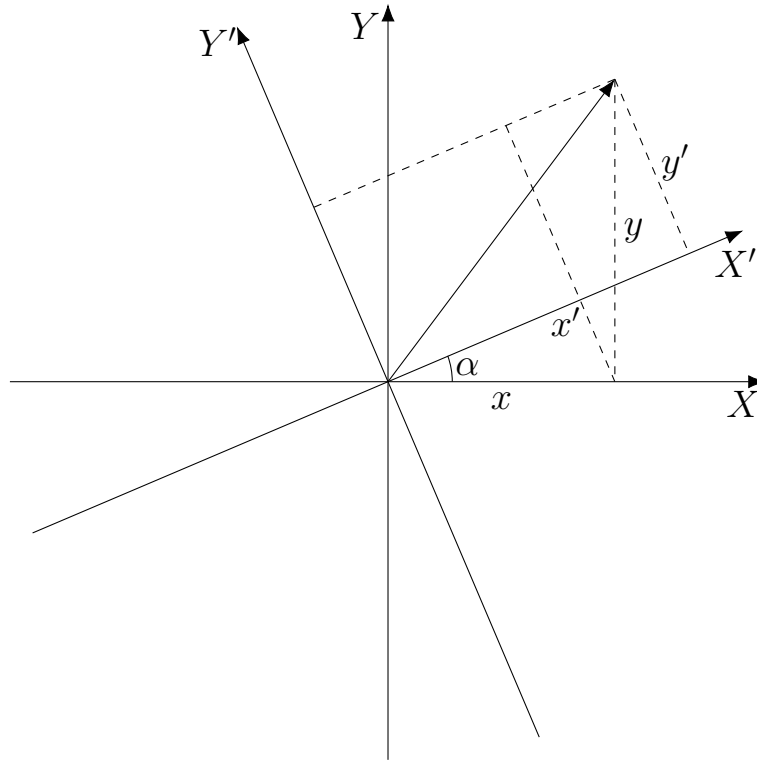
## 3.2 Поворот орбиты

### 3.2.1 Двумерный поворот на плоскости

Для начала решим задачу о преобразовании координат вектора при повороте координатных осей на плоскости. Пусть в системе  $XOY$  вектор  $r$  выражается как:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Повернем координатные оси на угол  $\alpha$ .



Из рисунка выше видно, что штрихованные координаты удовлетворяют соотношению:

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad (3.1)$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \quad (3.2)$$

Или:

$$\mathbf{r}' = R(\alpha)\mathbf{r}$$

Где

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Разумеется, для поворота по часовой стрелке, достаточно лишь заменить  $\alpha$  на  $-\alpha$ . Заметим, что с точки зрения трехмерных координат данный поворот выглядит так, как будто мы смотрим на него с оси  $Z$ . По сути, такой поворот является поворотом вокруг этой самой оси, не меняющим  $z$ -координату

вектора-столбца:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Такому повороту соответствует трехмерная матрица вида:

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Легко убедиться, что эта матрица не меняет  $z$ -компоненту вектора, а  $x$  и  $y$ -компоненты преобразуются в соответствии с (3.1) и (3.2). Аналогичные матрицы можно написать и для поворотов вокруг  $X$  и  $Y$  осей:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

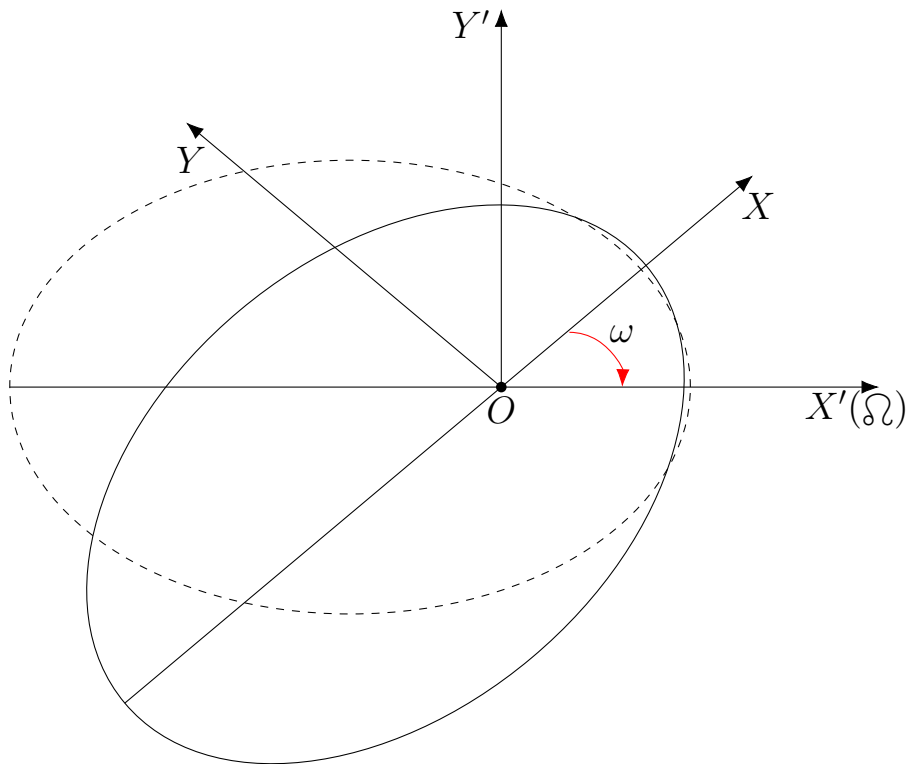
### 3.2.2 Поворот орбиты

Классической задачей небесной механики является восстановление координат (гелиоцентрических) объекта на повернутой орбите. Итак, пусть известны все Кеплеровы элементы орбиты тела с прямым вращением. Как из них определить координаты гелиоцентрического радиус-вектора тела? Рассмотрим точку на орбите в такой правосторонней системе координат, что плоскость  $XOY$  совпадает с плоскостью орбиты, ось  $X$  совпадает с линией апсид и направлена на перигелий, ось  $Z$  направлена в северное полушарие относительно эклиптики. В этой системе координат радиус-вектор тела, согласно (1.6) и

(1.7), выглядит как:

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Наша задача — найти связь между координатами тела в данной системе координат и в более удобной гелиоцентрической. Для начала повернем координатную систему в плоскости орбиты на угол  $\omega$  по часовой стрелке\*.



Это соответствует повороту координат по часовой стрелке вокруг оси  $Z$ , чему сопоставляется матрица:

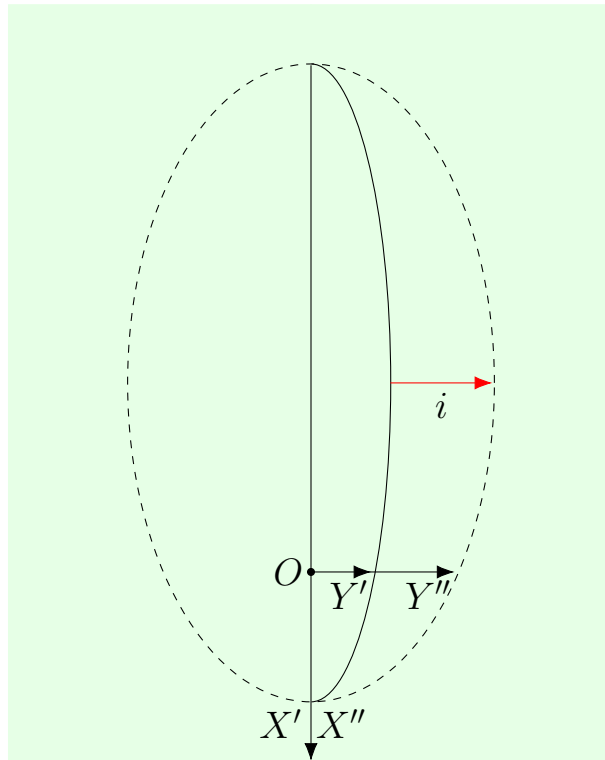
$$A = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Новая ось  $X$ , которую можно обозначить  $X'$ , совпадает теперь с линией узлов. Вокруг оси  $X'$  стоит выполнить поворот по часовой стрелке на угол  $i$ ,

---

\*За рисунок ниже выражаю благодарность Гришину Юрию

так плоскость орбиты будет совпадать с плоскостью эклиптики\*.



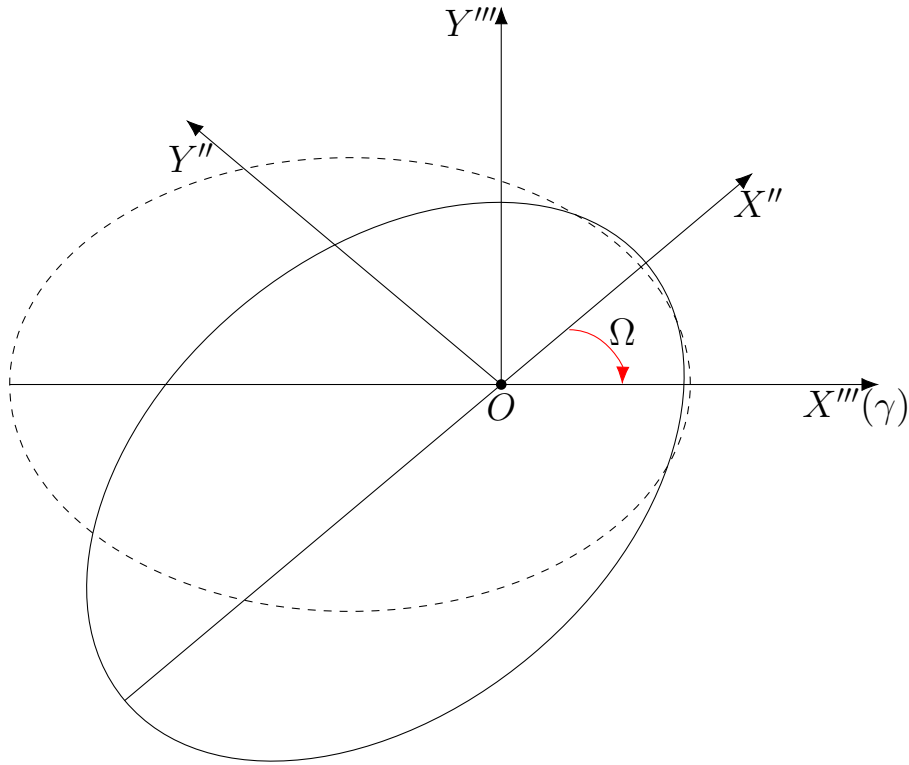
Матрица  $B$ , соответствующая такому повороту, имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}$$

Теперь, новая ось  $Z''$  направлена в северный полюс эклиптики. Осталось только повернуть координаты на угол  $\Omega$  вокруг оси  $Z''$  по часовой стрелке, чтобы ось  $X'''$  была направлена на точку весеннего равноденствия.

---

\*Рисунок снизу выполнен из северного полюса эклиптики. Эклиптика показана зеленым для наглядности



Для этого применим матрицу  $C$ :

$$C = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В результате получилась система координат  $X'''Y'''Z'''$ , такая, что плоскость  $X'''OY'''$  совпадает с эклиптикой, ось  $Z'''$  направлена в северный полюс эклиптики, а ось  $X'''$  на точку весеннего равноденствия. Эта система координат очень удобна, и считается в небесной механике основной. Связь вектора  $\mathbf{r}_0$  и вектора  $\mathbf{r}$  в данной системе координат мы уже нашли — она выражается в последовательных поворотах, или в произведении матриц:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$



Или:

$$\mathbf{r} = CBA\mathbf{r}_0 \quad (3.3)$$

Полученная система координат очень удобна прежде всего благодаря простому переходу к гелиоцентрическим эклиптическим сферическим координатам  $(r, \lambda, \beta)$ , ведь, как мы помним из раздела небесной сферы:

$$\begin{cases} x = r \cos \beta \cos \lambda \\ y = r \cos \beta \sin \lambda \\ z = r \sin \beta \end{cases} \quad (3.4)$$

Откуда легко получить и формулы для обратного перехода:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \beta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \tan \lambda = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Важным замечанием является и преобразование вектора скорости. Дифференцируя (3.3) по времени, получим:

$$\dot{\mathbf{r}} = CBA\dot{\mathbf{r}}_0$$

То есть, скорости преобразуются с помощью тех же матриц.

### 3.3 Восстановление Кеплеровых элементов

Теперь решим задачу, обратную предыдущей — восстановим Кеплеровы элементы орбиты по известному радиус-вектору и вектору скорости в гелиоцентрической системе координат  $X'''Y'''Z'''$ , которая рассматривалась нами в предыдущем пункте. Отметим, что нахождение  $a$  и  $e$  было подробно рассмотрено нами в пункте 4.5. Зная же  $a$ ,  $e$  и  $r$  установить  $\varphi$  можно из уравнения конических сечений в полярных координатах. Поэтому, основная задача сво-

дится к восстановлению  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ . Прежде всего построим единичную нормаль к плоскости орбиты, которая задается выражением:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{j}}{j}$$

Вычисление векторного произведения в координатах проблем не вызовет, ведь для запоминания есть довольно несложная формула:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

Где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — орты осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Угол между нормалью к плоскости орбиты и к эклиптике есть, конечно,  $i$ . А нормаль к эклиптике  $\mathbf{n}_0$  есть просто:

$$\mathbf{n}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда, конечно:

$$\cos i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0$$

Просто из определения скалярного произведения. Теперь вычислим  $\Omega$ . Введем единичный вектор  $\mathbf{n}_\Omega$ , направленный на восходящий узел орбиты тела, который, конечно, имеет эклиптические координаты  $(\Omega, 0)$ . Тогда, из (3.4), получим:

$$\mathbf{n}_\Omega = \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку этот вектор лежит в плоскости орбиты,  $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_\Omega$ , поэтому:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_\Omega = 0 \Rightarrow \tan \Omega = -\frac{\dot{j}_x}{\dot{j}_y}$$

И наконец заметим, что угол между положением тела и восходящим узлом, отсчитываемый в плоскости орбиты, есть просто  $\varphi + \omega$ , а значит:

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{n}_\Omega = \cos(\varphi + \omega)$$

Вот и все. Раскрывая векторные уравнения в координатном представлении, вы получите все Кеплеровы элементы. Главное — не запутаться с прямым и обратным вращением тела.

## Задачи и упражнения

1. В день весеннего равноденствия в северном полушарии Земли наблюдается метеорный поток, радиант которого совпадает с северным полюсом мира. Скорость астероидов относительно Земли составила  $15 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ . Найдите полуось, эксцентриситет и наклон орбиты астероидов.
2. 3 сентября группа астероидов с радиантом вблизи северного полюса эклиптики наблюдалась в земной обсерватории. Наземные измерения скорости астероидов в атмосфере планеты дали результат  $20 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ . Определите Кеплеровы элементы орбиты астероидов. Вращением Земли вокруг своей оси пренебречь.
3. Комета обращается по эллиптической орбите с эксцентриситетом 0.8, а ее скорости при пересечении эклиптики отличаются в 3.5 раза. Найдите аргумент перицентра кометы.
4. 12 сентября 2018 года комета Джакобини-Циннера прошла на минимальном расстоянии от Земли в своем текущем обороте вокруг Солнца и одновременно оказалась в точке перигелия своей орбиты. После этого, 9 октября 2018 года, наступил острый максимум метеорного потока Дракониды, порожденного этой кометой. Считая, что радиант потока находится в северном полюсе эклиптики, а сам рой компактен, найдите минимальное расстояние кометы Джакобини-Циннера от Земли в 2018 году

и наклонение ее орбиты к плоскости эклиптики. Эксцентриситет орбиты кометы равен 0.7, орбиту Земли считать круговой.

5. Каждый год 24 мая земные астрономы наблюдают прохождение короткопериодического астероида по диску Солнца. Им удалось измерить, что движется он под углом в  $80^\circ$  к солнечному экватору. При этом наклон орбиты астероида  $30^\circ$ , а аргумент перигелия —  $90^\circ$ . Определите возможные значения неизвестных вам кеплеровых элементов орбиты астероида. Наклоном плоскости экватора Солнца к эклиптике, эксцентриситетом земной орбиты и взаимодействием астероида с Землей пренебречь. Астероид пересекает солнечный экватор по направлению из северного полушария в южное, двигаясь с западного края к восточному.
6. Вам даны радиус-вектор и вектор скорости астероида пояса Койпера в гелиоцентрической эклиптической системе отсчета. Определите Кеплеровы элементы орбиты астероида (их шесть), а также его гелиоцентрические эклиптические координаты. Вращение астероида прямое.

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -26.9 \\ -41.2 \\ 13.3 \end{pmatrix} \text{ а.е.} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 0.3 \\ -3.0 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

7. Решите задачу обратную к предыдущей — зная 6 элементов восстановите координаты тела.

## 4 Уравнение Кеплера

### 4.1 Общее уравнение

До сих пор все полученные нами выводы помогали понять, какую форму будет иметь орбита в задаче двух тел. Чтобы это выяснить, пришлось уйти ото всякой привязки ко времени. Однако задача о том, сколько времени проходит между положениями тела на его орбите также требует внимательного рассмотрения. Для её решения нам поможет уравнение (1.4). Запишем его в виде:

$$r^2 d\varphi = j dt$$

В левой части можно оставить функцию только от  $\varphi$ , подставляя туда уравнение конических сечений в полярных координатах:

$$\frac{d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} = \frac{j}{p^2} dt \quad (4.1)$$

Но на деле удобнее оставить в левой части функцию от расстояния. Если выразить  $\varphi$  через  $r$ , получим:

$$\varphi = \pm \arccos \left( \frac{\frac{p}{r} - 1}{e} \right)$$

$$d\varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\frac{p}{r} - 1}{e} \right)^2}} \frac{p}{r^2} dr$$

Подставляя это в (1.4), получим:

$$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\frac{p}{r} - 1}{e} \right)^2}} \frac{p}{r^2} dr = j dt \quad (4.2)$$

Преобразуем дробь в левой части:

$$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{p-1}{e}\right)^2}} = \pm \frac{re}{\sqrt{r^2 e^2 - p^2 - r^2 + 2rp}}$$

Подставляя это в (4.2) и интегрируя обе части, получим следующее соотношение:

$$\pm \int \frac{rdr}{\sqrt{r^2 e^2 - p^2 - r^2 + 2rp}} = \int \frac{j}{p} dt = \sqrt{\frac{\mu}{p}} t + C \quad (4.3)$$

Интеграл слева выглядит страшно, но его можно взять с помощью параметрической замены, которая отличается для разных траекторий. Поэтому тут нужно будет рассмотреть три случая.

## 4.2 Эллипс

Из нижней части левой дроби можно вынести  $1 - e^2$ , если выразить предварительно фокальный параметр через большую полуось на эллипсе:

$$\frac{rdr}{\sqrt{r^2 e^2 - p^2 - r^2 + 2rp}} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{rdr}{\sqrt{-r^2 - a^2(1 - e^2) + 2ra}}$$

Введем замену:

$$r = a(1 - e \cos E)$$

$$dr = ae \sin E dE$$

$E$  называется эксцентрической аномалией. Принимают, что  $E$  меняется от 0 до  $\pi$  при движении от перигентра к апоцентру, и от  $\pi$  до  $2\pi$  при движении от апоцентра к перигентру. С учетом этой замены, интеграл примет вид:

$$\pm \int \frac{rdr}{\sqrt{r^2 e^2 - p^2 - r^2 + 2rp}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \int \frac{(1 - e \cos E) a^2 e \sin E dE}{\sqrt{a^2 e^2 - a^2 e^2 \cos^2 E}}$$

Подинтегральное выражение можно еще больше упростить как:

$$\pm \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \int \frac{(1-e \cos E) a^2 e \sin E dE}{\sqrt{a^2 e^2 - a^2 e^2 \cos^2 E}} = \pm \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \int (1-e \cos E) \frac{\sin E}{|\sin E|} dE$$

Заметим, что выбор знака перед интегралом определяется тем, в какой четверти лежит угол  $\varphi$ . Плюс соответствует случаю:

$$\varphi \in [0, \pi]$$

А минус случаю:

$$\varphi \in [\pi, 2\pi]$$

Однако ровно с таким же знаком и в тех же случаях нам придется снимать модуль с  $\sin E$ , ведь  $E$  и  $\varphi$  лежат либо одновременно от 0 до  $\pi$ , либо одновременно от  $\pi$  до  $2\pi$ . Поэтому знак снятия модуля убьет  $\pm$  перед интегралом, поэтому можно просто оставить:

$$\pm \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \int (1-e \cos E) \frac{\sin E}{|\sin E|} dE = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \int 1-e \cos E dE = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} (E - e \sin E)$$

Подставляя этот результат в (4.3), получим соотношение, известное как уравнение Кеплера:

$$E - e \sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t + C$$

Обычно нулевой момент времени выбирается в перигеетре орбиты. В этом случае  $E = 0$ , и поэтому оказывается  $C = 0$  тоже. Поэтому, если  $t$  — время от перигеетра, то уравнение Кеплера может быть записано как:

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{T} t$$

Отметим, что задача о нахождении времени движения между двумя точками на известных расстояниях решается с помощью уравнения Кеплера очень даже хорошо. Однако, обратная задача аналитического решения не имеет в силу трансцендентности уравнения Кеплера (Зная  $t$  найти  $E$  аналитически

невозможно). Тем не менее, это уравнение неплохо решается численно\*, по-этому и обратная задача не вызывает проблем.

### 4.3 Парабола

Как ни странно, для вывода похожего уравнения на параболической орбите проще всего использовать уравнение (4.1). В случае  $e = 1$  оно преобразуется как:

$$\frac{d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} = \frac{j}{p^2} dt = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt$$

Интегрируя обе части:

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} = \int \frac{j}{p^2} dt = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} t + C \quad (4.4)$$

Чтобы взять интеграл слева, следует воспользоваться подстановкой Вейерштрасса:

$$\tan \frac{\varphi}{2} = t$$

$$\cos \varphi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$d\varphi = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

В этом случае:

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} = \int \frac{2dt}{1 + t^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = \frac{1}{2} \int 1 + t^2 dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{t^3}{3} \right) + C$$

Возвращаясь к  $\varphi$  и подставляя результат в (4.4) мы получим т.н. уравнение Баркера:

$$\tan \frac{\varphi}{2} + \frac{\tan^3 \frac{\varphi}{2}}{3} = 2\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} t$$

$t$  снова отсчитывается от перицентра.

---

\*Например методом итераций



## 4.4 Гипербола

На гиперболической орбите снова удобнее работать с уравнением (4.3). На этот раз вынесем множитель  $(e^2 - 1)$  за скобки:

$$\pm \int \frac{rdr}{\sqrt{r^2 e^2 - p^2 - r^2 + 2rp}} = \pm \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \int \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - a^2 (e^2 - 1) - 2ra}}$$

Замена здесь похожа на замену для эллипса:

$$r = a(e \operatorname{ch} H - 1)$$

$$dr = ae \operatorname{sh} H dH$$

Где  $H$  — гиперболическая эксцентричная аномалия\*. Отметим, что когда тело летит к перигею издали принято говорить, что  $H \in (-\infty; 0)$ , когда тело удаляется  $H \in (0; \infty)$ . Снова подставим замену в интеграл:

$$\pm \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \int \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - a^2 (e^2 - 1) - 2ra}} = \pm \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \int \frac{a^2 e \operatorname{sh} H dH (e \operatorname{ch} H - 1)}{\sqrt{a^2 e^2 (\operatorname{ch}^2 H - 1)}}$$

Используя основное гиперболическое тождество:

$$\operatorname{ch}^2 H - \operatorname{sh}^2 H = 1$$

Можно снова получить под интегралом член вида  $\frac{\operatorname{sh} H}{|\operatorname{sh} H|}$ . И снова он взаимно-уничтожится с  $\pm$  по тем же причинам, что и при выводе уравнения Кеплера на эллипсе. Останется:

$$\pm \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \int \frac{a^2 e \operatorname{sh} H dH (e \operatorname{ch} H - 1)}{\sqrt{a^2 e^2 (\operatorname{ch}^2 H - 1)}} = \frac{a}{\sqrt{e^2 - 1}} \int e \operatorname{ch} H - 1 dH = \frac{a}{\sqrt{e^2 - 1}} (e \operatorname{sh} H - H)$$

---

\*  $\operatorname{ch} x$  — гиперболический косинус:  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . Также вводится гиперболический синус:  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Если подставить данный результат в исходное уравнение и снова занулить константы путем отсчета времени от перицентра, получится гиперболическое уравнение Кеплера:

$$e \operatorname{sh} H - H = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t$$

Уравнение снова не решается аналитически относительно  $H$ , однако численные методы все еще работают довольно неплохо.

## 4.5 Вырожденный случай

А как быть на вырожденной орбите? Напомним, что таковой является отрезок. Тут все очень просто, ведь тела движутся навстречу друг другу с относительной скоростью, которая может быть найдена например из уравнения (1.17). Здесь снова удобно рассматривать случаи. Однако, общее уравнение выглядит очень просто:

$$\frac{dr}{dt} = \pm v(r)$$

Понятно, что плюс в случае если скорость направлена от Солнца, минус если тело на Солнце падает.

### 4.5.1 Вырожденный эллипс

На эллипсе, как мы помним:

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}$$

Поэтому, основное уравнение будет выглядеть как:

$$\pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}} = \int \sqrt{\mu} dt$$

Здесь спасает замена:

$$r = 2a \sin^2 \theta$$

$$dr = 4a \cos \theta \sin \theta d\theta$$

Здесь во избежание появления различных неопределенностей со знаком можно договориться, что  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  когда тело от Солнца удаляется, а когда приближается  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$ . С учетом этой замены:

$$\pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}} = \int \frac{4a \cos \theta \sin \theta d\theta}{\sqrt{\frac{1}{a} \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 \right)}} = 4a^{1.5} \int |\tan \theta| \cos \theta \sin \theta d\theta$$

Теперь заметим, что снова  $\pm$  и модуль убивают друг друга, ведь случая, когда  $\tan \theta > 0$  и соответствует знак плюс перед интегралу, обратному случая — минус. Смело можно писать:

$$\pm \int |\tan \theta| \cos \theta \sin \theta d\theta = \int \sin^2 \theta d\theta = \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} + C$$

Теперь момент, когда  $\theta = 0$  у нас  $r = 0$ , это момент столкновения. Никто на самом деле не мешает выбрать этот момент за начало отсчета времени, поэтому так и сделаем. Тогда  $C = 0$  и получается следующее соотношение:

$$2\theta - \sin 2\theta = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t$$

Важно помнить, что  $t$  — именно время от момента  $r = 0$ .

#### 4.5.2 Вырожденная парабола

Все тоже самое можно проделать для параболической траектории. Напомним, что там:

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

Поэтому уравнение примет очень простой вид:

$$\int \sqrt{r} dr = \int \sqrt{2\mu} dt$$

Снова принимая за начальный момент  $r = 0$ , получим:

$$r^{1.5} = \frac{3}{2} \sqrt{2\mu t}$$

### 4.5.3 Вырожденная гипербола

Для гиперболы ситуация очень похожа на эллипс, ведь  $v(r)$  имеет похожую структуру, и основное уравнение будет иметь вид:

$$\pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{r} + \frac{1}{a}}} = \int \sqrt{\mu} dt$$

Здесь замена напрашивается сама по себе:

$$r = 2a \operatorname{sh}^2 \eta$$

$$dr = 4a \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta d\eta$$

Снова будем считать  $\eta < 0$  при приближении к центру и  $\eta > 0$  при удалении. Тогда:

$$\pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{r} + \frac{1}{a}}} = \int \frac{4a \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta d\eta}{\sqrt{\frac{1}{a} \left( \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \eta} + 1 \right)}} = 4a^{1.5} \int |\tanh \eta| \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta d\eta$$

Снова отбрасываем  $\pm$  и модуль\*. Итого:

$$\int \operatorname{sh}^2 \eta d\eta = \int \frac{\operatorname{ch} 2\eta - 1}{2} = \frac{\operatorname{sh} 2\eta}{4} - \frac{\eta}{2} + C$$

Итоговое уравнение имеет вид:

$$\operatorname{sh} 2\eta - 2\eta = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t$$

---

\* $\tanh x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$

$t$  снова отсчитываем от момента "столкновения".

## Задачи и упражнения

1. Суперзлодей будущего остановил Венеру и пнул её прямо в сторону Солнца, придав ей начальную скорость  $30 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ . Определите, через какое время возможно столкновение Венеры и Меркурия. Орбиту Венеры до злодеяния считайте круговой.
2. Как быстро долетит Земля до Солнца, если сначала остановишь её, а затем пнуть прямо в направлении Солнца со второй космической скоростью?
3. За какое время Меркурий проходит путь от апоцентра к фокальному параметру?
4. Оцените вероятность того, что астероид полуосью 1.2 а.е. и эксцентриситетом 0.8 в данный момент времени находится внутри круговой орбиты Земли.
5. 30.04.2030 гелиоцентрические эклиптические долготы сферического каменного тела с постоянным сферическим альбедо 0.5 и Земли совпали. В этот момент с Земли тело имело поверхностную яркость  $7.52^m$  на квадратную секунду. Считая угол между плоскостями эклиптики и орбиты тела малым, а саму орбиту - параболической, оцените возможную дату его перигелия, если долгота восходящего узла  $10^\circ$ , а аргумент перицентра —  $15^\circ$ . Орбита Земли круговая, взаимодействием тела с другими телами солнечной системы пренебречь.
6. Утром 12 апреля Дмитрий Олегович Рогозин вышел на крыльцо своего особняка ( $\varphi = 52^\circ$ ,  $\lambda = 128^\circ$ ) и кинул камень со скоростью  $4 \frac{\text{км}}{\text{с}}$  под углом в  $60^\circ$  к горизонту точно на юг. Определите большую полуось и эксцентриситет орбиты, на которую вышел камень. Определите наивысшую точку и время полета. На каком расстоянии от особняка он приземлится? Как

истинный инженер Роскосмоса пренебрегите сопротивлением воздуха. На задачу было выделено 5 млрд. рублей из государственного бюджета.

## 5 Специальные случаи

Решение классической задачи двух тел на этом решение классической задачи двух тел подходит к концу. Однако, в олимпиадных задачах иногда возникают касающиеся данной темы идеи, и некоторые из них разобраны ниже.

### 5.1 Движение внутри однородно заряженного шара

Рассмотрим следующую задачу: звезда влетает в шаровое скопление радиусом  $R$  с однородным пространственным распределением звезд  $\rho$ . Как будет двигаться звезда, если не будет вступать в тесное взаимодействие с остальными членами скопления? Прежде всего стоит посчитать, как меняется гравитационное поле внутри скопления. Здесь проще всего воспользоваться теоремой Гаусса в интегральной форме:

$$\oiint_S (\mathbf{g}, d\mathbf{S}) = -4\pi G M$$

Где  $S$  — замкнутая поверхность,  $M$  — масса, сосредоточенная внутри неё. За поверхность интегрирования проще всего выбирать эквипотенциальную поверхность, а для однородного шара такой поверхностью, очевидно, будет являться концентрическая сфера. Из симметрии очевидно, что на такой поверхности поле  $g$  всюду одинаково по модулю и по направлению\*. Поэтому, интеграл слева превращается в простое:

$$\oiint_S (\mathbf{g}, d\mathbf{S}) = -4\pi r^2 g(r)$$

Знак минус возникает из-за скалярного произведения. Если сферический слой выбран внутри однородной сферы, то заключенная в нём масса:

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

---

\*Направлено вдоль радиуса сферы в сторону её центра, опять же очевидно из симметрии

Подставляя данное значение в теорему Гаусса, получим значение для модуля  $\mathbf{g}$  внутри однородного шара:

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi G\rho r$$

Учитывая, что это поле направлено прямо к центру сферы, можно записать:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{4}{3}\pi G\rho \mathbf{r}$$

Где  $\mathbf{r}$  направлен из центра. Уравнение движения будет иметь вид:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega^2 \mathbf{r} = 0$$

Где  $\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}$  Расписывая данное уравнение покомпонентно в декартовых координатах:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

Видно, что это уравнения гармонических колебаний. Их решения записываются как:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.1)$$

$$y(t) = B \cos(\omega t + \psi) \quad (5.2)$$

Все константы ищутся из начальных условий, и обычно в задаче о влете в скопление таковыми являются параметры влёта звезды в скопление (начальная скорость и координаты). Если например выбрать икс проходящей через точку влёта\* в скопление, начальные условия будут выглядеть как:

$$x(0) = A \cos \varphi = R$$

$$y(0) = B \cos \psi = 0$$

---

\*Центр координат, разумеется, совпадает с центром скопления



Чтобы добавить еще два уравнения в систему, следует продифференцировать (5.1) и (5.2) по времени. Получим:

$$v_x(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v_y(t) = -B\omega \sin(\omega t + \psi)$$

Если известны компоненты скорости в начальный момент времени  $v_{x0}$  и  $v_{y0}$ , получится одна большая система из четырех начальных условий:

$$\begin{cases} A \cos \varphi = R \\ B \cos \psi = 0 \\ A\omega \sin \varphi = -v_{x0} \\ B\omega \sin \psi = -v_{y0} \end{cases}$$

Если решить данную систему, значения для констант получатся следующими:

$$\begin{cases} A = \sqrt{R^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega^2}} \\ \varphi = \arctan -\frac{v_{x0}}{\omega R} \\ \psi = \frac{\pi}{2} \\ B = -\frac{v_{y0}}{\omega} \end{cases}$$

Траектория, заданная системой (5.1) и (5.2), на самом деле является эллипсом, у которого центр совпадает с центром координат, т.е. с центром скопления. Именно по такой траектории и летают тела внутри однородно заряженных шаров. Отметим, что закон сохранения удельной энергии в данной задаче будет выполнен в виде:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\omega^2 r^2}{2} = E = \text{const}$$

Нетрудно увидеть, что из начальных условий эта самая константа:

$$E = \frac{v_0^2}{2} + \frac{\omega^2 R^2}{2}$$

## 5.2 Солнечный парус

Солнечный парус — устройство, которое использует давление света в качестве двигателя. Сила давления света на тело с геометрическим альбедо  $A$  может быть оценена как:

$$\mathbf{F} = \frac{LS(1+A)}{4\pi r^3 c} \mathbf{r}$$

Где  $S$  — эффективная площадь тела (та часть площади, которая отражает свет),  $L$  — светимость центрального тела. Данная сила учитывается очень просто — в уравнении (1.1) просто появляется второй член справа:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r} + \frac{LS(1+A)}{4\pi r^3 c} \mathbf{r}$$

Это уравнение можно переписать как:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu_{eff}}{r^3} \mathbf{r} = 0$$

Где:

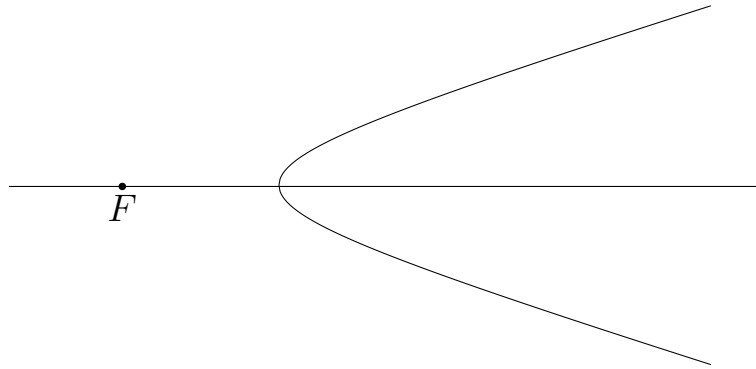
$$\mu_{eff} = GM - \frac{LS(1+A)}{4\pi mc}$$

Теперь все, что нужно сделать чтобы учесть давление света — просто подставлять во все формулы  $\mu_{eff}$  вместо  $\mu$ . Однако, если парус слишком большой, возможно что  $\mu_{eff}$  окажется отрицательным. Что же делать тогда? Никто не мешает подставить отрицательное  $\mu_{eff}$  в уравнение (1.13), которое было

получено при выводе законов Кеплера. В результате получится:

$$r = \frac{\frac{j^2}{|\mu_{eff}|}}{\frac{Bj}{|\mu_{eff}|} \cos \varphi - 1}$$

Данное уравнение также задает коническое сечение, параметры которого совпадают с параметрами обычного (снова наверху коэффициент, равный фокальному параметру, а перед  $\cos \varphi$  стоит эксцентриситет) только фокус с гравитирующей массой меняет свое положение. Но есть один нюанс, который довольно легко упустить: при  $e = \frac{Bj}{|\mu_{eff}|} \leq 1$  данное уравнение не имеет смысла, поскольку  $r$  отрицательно! Поэтому решением может быть либо гипербола, либо отрезок \*. При этом данная гипербола отличается от обычной, нужно брать не ближнюю к фокусу, а дальнюю её ветвь:



Перицентрическое расстояние, например, будет иметь вид:

$$q = 2a + a(e - 1) = a(e + 1)$$

Нетрудно убедиться, что закон сохранения энергии в задаче будет иметь вид:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{|\mu_{eff}|}{r} = \frac{|\mu_{eff}|}{2a}$$

А ЗСМИ будет выглядеть также:

$$vr \sin \alpha = \sqrt{|\mu_{eff}|p}$$

---

\*Который тоже будет являться вырожденной гиперболой

### 5.3 Элементарная модель для учета эффекта Пойтнинга-Робертсона

Эффект Пойтнинга-Робертсона заключается в том, что частица на орбите теряет угловой момент в результате поглощения излучения звезды и его анизотропного переизлучения. Этот эффект не может быть получен в классической теории так как является чисто релятивистским. Поэтому, здесь придются формулы для описания этого эффекта без вывода. Так сила, которая действует на абсолютно черную частицу, может быть записана как:

$$\mathbf{F}_{P-R} = -\frac{LS}{4\pi r^2 c} \frac{\mathbf{v}}{c}$$

Как видно, сила прямо пропорциональна скорости частицы, а значит консервативной не является. Включение её в уравнения движения задачи двух тел не приведет ни к чему хорошему. Однако, получить ряд оценок для учета этого эффекта можно довольно простым способом — предположить, что в каждый момент времени траектория тела это Кеплеровская окружность с переменным радиусом. В этом случае, момент силы Пойтнинга-Робертсона можно записать как:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = -\frac{LS}{4\pi r^2 c^2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = -\frac{LS}{4\pi r^2 c^2} \mathbf{j}$$

Как видно, момент сонаправлен с моментом импульса. Поэтому, от векторов можно перейти к скалярам и записать определение момента силы:

$$m \frac{dj}{dt} = -\frac{LSv}{4\pi r c^2} \quad (5.3)$$

Здесь уже учтено, что мы на окружности, а значит скорость перпендикулярна радиус-вектору. Теперь придется сделать некое допущение, записав, что в

каждый момент времени скорость может быть примерно описана как:

$$v \approx \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

$$j = vr = \sqrt{\mu r}$$

$$\frac{dj}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{r}} \frac{dr}{dt}$$

Подставив все это в (5.3), получим:

$$\frac{m}{2} \sqrt{\frac{\mu}{r}} \frac{dr}{dt} = -\frac{LS}{4\pi r c^2} \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

Разделяя переменные и интегрируя:

$$\int r dr = - \int \frac{LS}{2\pi m c^2} dt$$

$$\Delta r^2 = -\frac{LS}{\pi m c^2} \Delta t$$

Данная формула неплохо подходит для оценки изменения радиуса за небольшие промежутки времени. Можно попытаться оценить и время падения частицы на Солнце, подставив  $\Delta r = -r_0^2$ , где  $r_0$  — начальный радиус орбиты пылинки. Получится:

$$\tau = \frac{\pi r_0^2 m c^2}{LS}$$

Однако, это довольно неточная оценка. Так, для углеродной пылинки размером 3 мкм, которая находится в начальный момент времени на земной орбите, полученное время падения на Солнце составит примерно 4000 лет, что примерно в 2 раза меньше точного результата.

## 5.4 Движение тел с переменной массой

Часто в астрономии приходится описывать реактивное движение космических аппаратов. В таком движении масса ракеты меняется за счет постоянного выброса топлива из сопла. Чтобы описать такое движение, рассмотрим ракету массы  $m$ , двигающуюся со скоростью  $\mathbf{v}$  относительно некой ИСО, в которой на ракету действует равнодействующая сила  $\mathbf{F}$ . Пусть скорость газов относительно этой же ИСО  $\mathbf{u}_0$ . Запишем второй закон ньютона для системы ракета-газ для момента, когда ракета выбросила Из сопла маленький кусочек топлива массой  $dm$ :

$$\mathbf{F}dt = d\mathbf{p} = (m - dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + \mathbf{u}_0 dm - m\mathbf{v}$$

Оставляя лишь члены 1 порядка малости, получим:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + (\mathbf{u}_0 - \mathbf{v})\dot{m} \quad (5.4)$$

Обычно обозначают:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{v}$$

$u$  — скорость газов относительно ракеты. В этом случае, уравнение (5.4) принимает вид:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{u}\dot{m}$$

и называется уравнением Мещерского. Второе слагаемое обычно называют реактивной силой. Важным для астрономии случаем является ракета, летящая в вакууме и выбрасывающая газ из сопла в противоположную своему движению сторону с постоянной относительно самой ракеты скоростью. В этом случае,  $\mathbf{F} = 0$ ,  $|\mathbf{u}| = -u$  в проекции на направление движения ракеты. Уравнение примет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt}$$

Разделяя переменные и интегрируя:

$$\int \frac{dv}{u} = - \int \frac{dm}{m}$$

$$\Delta v = u \ln \frac{m_0}{m} \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) носит имя Константина Циолковского. С помощью него решается большое количество задач на движение тела с переменной массой в астрономии.

## 5.5 Точки Лагранжа

### 5.5.1 Общее уравнение

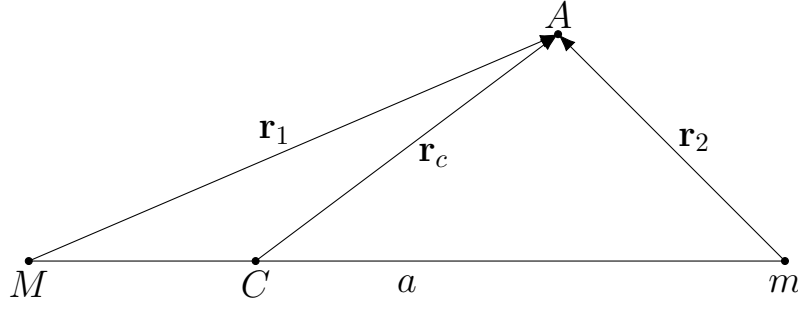
В астрономии иногда возникают и задачи более двух тел. Например, движение тел солнечной системы это, вообще говоря, не совсем задача о вращении планет вокруг Солнца — не стоит забывать, что планеты гравитационно влияют и друг на друга. Влияние это, конечно, сильно меньше солнечного притяжения, однако оно есть, и его учет приводит к ряду интересных эффектов. Однако их подробное описание требует очень серьезной математической подготовки, и в олимпиадных задачах не встречается. Однако, интерес представляют точные решения ограниченной задачи трех тел. Задача трех тел, как известно, не имеет адекватного точного аналитического решения в наиболее общем случае. Однако, примечательным является случай, когда масса третьего тела в разы меньше массы остальных, и его гравитационным влиянием на них можно пренебречь. Итак, пусть тела массами  $M$  и  $m$  обращаются вокруг общего центра масс с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , которая, из 3 закона Кеплера, равна:

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M + m)}{a^3}}$$

Где  $a$  — расстояние между телами. Поместим пробное тело малой массы в произвольную точку пространства. Стабильной будет считаться такая кон-

фигурация, при которой малое тело будет вращаться вокруг центра масс с той же угловой скоростью в плоскости орбиты, то есть по сути покоиться во вращающейся системе отсчета, связанной с звездами. Точки пространства, в которых возможно такое вращение, носят имя Жозефа Луи Лагранжа и обозначаются  $L_n$ , где  $n$  — номер точки.





Перейдем во вращающуюся с угловой скоростью  $\omega$  систему отсчета. В этой системе отсчета пробное тело единичной массы в точке  $A$  должно покоиться. На него действуют три силы — гравитационные силы со стороны звезд и центробежная сила инерции:

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{GM}{r_1^3}\mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{Gm}{r_2^3}\mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{F}_c = \omega^2\mathbf{r}_c$$

В сумме эти силы должны давать ноль:

$$-\frac{GM}{r_1^3}\mathbf{r}_1 - \frac{Gm}{r_2^3}\mathbf{r}_2 + \omega^2\mathbf{r}_c = 0 \quad (5.6)$$

Заметим, что радиус-вектор из центра масс  $C$  можно выразить через  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ :

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_1 - \overrightarrow{MC} = \mathbf{r}_1 - \frac{m}{M+m}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{M\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2}{M+m}$$

Подставим данное соотношение в (5.6) вместе с выражением для угловой скорости:

$$-\frac{GM}{r_1^3}\mathbf{r}_1 - \frac{Gm}{r_2^3}\mathbf{r}_2 + \frac{G}{a^3}(M\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2) = 0 \quad (5.7)$$

Введем обозначение:

$$\beta = \frac{m}{M}$$

И перегруппируем (5.7) в виде:

$$\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) \mathbf{r}_1 + \beta \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) \mathbf{r}_2 = 0 \quad (5.8)$$

Сумма двух векторов может быть нулевой только в двух случаях: векторы противоположены и равны по модулю, оба вектора нулевые. Поэтому, (5.8) будет иметь два вида решений. Разберем каждое из них

### 5.5.2 $L_4$ и $L_5$

Сначала подумаем, что будет, если оба вектора окажутся нулевыми. А будет все очень просто, ведь это случай вида:

$$r_1 = r_2 = a$$

То есть треугольник  $MmA$  — равносторонний. Две полученные точки называются  $L_4$  и  $L_5$ . Получается, существует две такие стабильные конфигурации: Точка  $L_4$  располагается в вершине треугольника, расположенной по движению меньшего тела, точка  $L_5$  — противоположно ей. В этих точках возможно устойчивое равновесие тела, однако достигается оно лишь при определенных условиях.

### 5.5.3 $L_1$

Теперь перейдем к случаю, когда входящие в выражение (5.8) векторы противоположены и равны по модулю. Это значит, что искомые точки Лагранжа находятся на прямой, соединяющей  $M$  и  $m$ . Предположим, что существует точка, лежащая на этой прямой между телами. В этом случае, векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  противоположены, а значит (5.8) принимает вид:

$$\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 - \beta \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) r_2 = 0$$

Теперь выполним очевидную подстановку:

$$r_1 = a - r_2$$

Тогда:

$$\left( \frac{1}{a^3} - \frac{1}{(a - r_2)^3} \right) (a - r_2) - \beta \left( \frac{1}{a^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) r_2 = 0$$

Введем обозначение:

$$x = \frac{r_2}{a}$$

Тогда:

$$\left( 1 - \frac{1}{(1 - x)^3} \right) (1 - x) - \beta \left( 1 - \frac{1}{x^3} \right) x = 0 \quad (5.9)$$

Если решить это уравнение относительно  $x$  численно, вы найдете положение точки Лагранжа  $L_1$ . Однако, на практике очень полезным оказывается случай  $\beta \ll 1$ , что на самом деле будет означать и  $x \ll 1^*$ . В этом случае, можно разложить в ряд до членов первого порядка малости некоторые куски выражения (5.9). Применим следующее разложение:

$$(1 - x)^\alpha \approx 1 - \alpha x, \quad x \ll 1$$

Тогда:

$$1 - \frac{1}{(1 - x)^3} \approx -3x \quad (5.10)$$

Отметим, что величины  $\beta$  и  $x$  вовсе не обязаны быть одного порядка малости. Поэтому выполним прикидку порядков малости. В системе единиц  $G = M = a = 1$  силы, действующие на тело в точке, имеют порядки (с удержанием лишь линейных членов по  $x$ ):

$$F_1 = \frac{1}{(1 - x)^2} \sim 1 + x$$

---

\* Действительно, если тело поместить близко к очень массивному телу, оно довольно быстро упадет на него, его не удержит ни гравитация малого тела, ни центробежная сила

$$F_2 = \frac{\beta}{x^2}$$

$$F_c = 1 - x - \beta x \sim 1 + x$$

Поскольку  $F_1$  уравнивается  $F_2$  и  $F_c$ , ясно, что:

$$\beta \sim x^3$$

Теперь преобразуем (5.9) с помощью (5.10):

$$-3x + 3x^2 - \beta x + \frac{\beta}{x^2} = 0$$

Удерживая члены лишь первого порядка малости по  $x$ , получим:

$$x = \sqrt[3]{\frac{\beta}{3}}$$

Это выражение и определяет положение  $L_1$  в случае  $\beta \ll 1$ . Можно переписать его как:

$$r_2 = a \sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \quad (5.11)$$

В этой точке Лагранжа равновесие неустойчивое, однако земляне ее все равно используют для размещения космических телескопов. Так, в первой точке Лагранжа системы Земля-Солнце находится известный КА SOHO.

#### 5.5.4 $L_2$

Теперь предположим, что существует точка за телом меньшей массы. В этом случае,  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  сонаправлены, и (5.8) принимает вид:

$$\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 + \beta \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) r_2 = 0 \quad (5.12)$$

Делаем подстановку:

$$r_1 = a + r_2$$

$$x = \frac{r_2}{a}$$

И (5.12) принимает вид:

$$\left(1 - \frac{1}{(1+x)^3}\right)(1+x) + \beta \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)x = 0 \quad (5.13)$$

Снова уравнение может быть сразу же решено численно, однако случай  $\beta \ll 1$ ,  $x \ll 1$  все еще интересен. Читатель может самостоятельно проделать с этим уравнением ровно то же самое, что было проделано в предыдущем пункте, и снова получить:

$$x = \sqrt[3]{\frac{\beta}{3}}$$

Эта точка Лагранжа называется  $L_2$ , и находится от малого тела на том же расстоянии, и  $L_1$ . В связи с этим часто вводят понятие сферы Хилла — характерной сферы гравитационного влияния малого объекта. Радиус сферы тот же, что расстояние до точек Лагранжа  $L_1$  и  $L_2$ :

$$R_\chi = a \sqrt[3]{\frac{m}{3M}}$$

Это расстояние можно использовать для характерной оценки стабильности орбиты спутника планеты — если она находится внутри сферы Хилла она будет более-менее стабильной. Спутники за пределами сферы Хилла имеют шансы начать обращение вокруг центральной звезды. Отметим, что понятие сферы Хилла не применимо к случаю двойной звезды, ведь выражения для положения точек Лагранжа в двойной системе будут иметь не такой вид как (5.11), ведь уравнение (5.9) или (5.13) придется решать без приближений. В во второй точке Лагранжа системы Земля-Солнце также располагаются космические телескопы, например известный Джеймс Уэбб находится именно там.

### 5.5.5 $L_3$

Теперь остался последний случай — точка Лагранжа  $L_3$ , предполагаемо находящаяся за массивным телом. Снова  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  сонаправлены, а значит уравнение (5.8) будет иметь тот же вид, что в предыдущем пункте:

$$\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 + \beta \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) r_2 = 0$$

Сделаем подстановку:

$$r_1 = r_2 - a$$

$$r_2 = (2 + x)a$$

Получим:

$$\left(1 - \frac{1}{(1+x)^3}\right)(1+x) + \beta \left(1 - \frac{1}{(2+x)^3}\right)(2+x) = 0 \quad (5.14)$$

Снова попробуем найти приближенное решение в том же случае. Возможно теперь неочевидно, что при  $\beta \ll 1$   $x$  также очень мал, однако это довольно легко объясняется: центробежная сила, способная уравновесить силу притяжения центральной звезды в данной системе отсчета достигается как раз при  $x \approx 0$ , ведь это практически (с точностью до расстояния до центра масс) точка на орбите тела  $m$ , противоположная ему. Гравитация от тела  $m$  сильно меньше, и не может сильно изменить  $x$ . Здесь для упрощения понадобится еще одна формула, которую читатель может доказать в качестве упражнения:

$$(2+x)^\alpha \approx 2^\alpha + \alpha 2^{\alpha-1}x$$

Тогда:

$$1 - \frac{1}{(2+x)^3} \approx \frac{7}{8} + \frac{3}{16}x$$

Если теперь преобразовать (5.14) с учетом данного выражения, получится:

$$3x + 3x^2 + \frac{7\beta}{4} + \frac{5\beta x}{5} + \frac{3\beta x^2}{16} = 0$$

Тут даже прикидка не нужна — убираем все, что имеет порядок точно больший, чем  $x$ . Получается, что для того, чтобы уравнение имело ненулевой корень,  $\beta$  и  $x$  должны быть одного порядка. Итого:

$$x = -\frac{7\beta}{12}$$

Может показаться, что раз  $\beta < 0$ ,  $L_3$  лежит внутри орбиты меньшего тела\*. Однако надо вспомнить, что орбита имеет центр в центре масс системы, а расстояние от центра масс до  $L_3$  это есть:

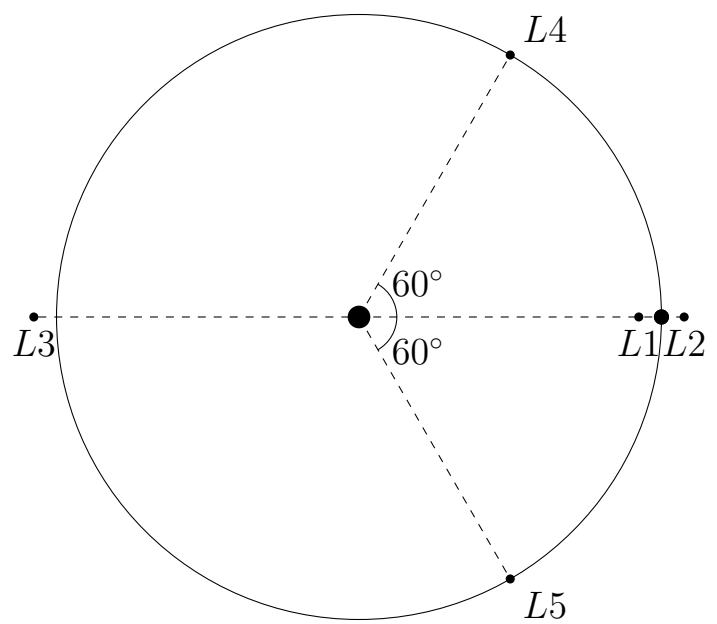
$$r_c = a + ax + \frac{m}{M+m}a \approx a + ax + \beta a = a(1 + \frac{5}{12}\beta)$$

Значит,  $L_3$  лежит все же вне орбиты тела  $m$ . Точка Лагранжа  $L_3$  системы Земля-Солнце используется человечеством гораздо меньше остальных, из-за сложности доставки туда грузов и сильной неустойчивости равновесия точки†.

---

\*Что, разумеется, абсурдно, ведь центробежная сила там не может уравновесить даже гравитацию большего тела, не говоря о сумме сил со стороны большего и меньшего!

†За рисунок ниже выражаю благодарность Гришину Юрию





## Задачи и упражнения

1. Эллиптическая галактика типа E0 (шарообразная форма) на 0.2 по массе состоит из звезд солнечного типа и на 0.8 — из темной материи. Плотность обеих составляющих постоянна на всем объеме галактики. Некоторая звезда движется по замкнутой траектории внутри галактики, не вылетая за ее пределы, с периодом 100 миллионов лет. Сколько всего звезд было бы видно невооруженным глазом в небе обитаемой планеты, обращающейся вокруг этой звезды? Тесные сближения с другими звездами не учитывать.
2. Между полюсами Земли прорыли прямую шахту, из которой был откачан газ. Аппарат, оснащенный надежной термозащитой, был сброшен в эту шахту с поверхности Земли без начальной скорости. Во время пролета через центр Земли аппарат на короткое время включил импульсный двигатель, выбросивший 0.1 полной массы аппарата с относительной скоростью  $10 \frac{m}{c}$  назад вдоль линии движения аппарата. С какой скоростью аппарат вылетит из шахты на противоположном полюсе Земли? Считать Землю однородным по плотности шаром.
3. Абсолютно зеркальный солнечный парус, установленный на теле массой 100 тонн, раскрылся и позволил телу, изначально имевшему круговую орбиту, улететь на бесконечность от Солнца. Какую наименьшую площадь мог иметь этот парус?
4. Черные шары с плотностью  $1 \frac{g}{cm^3}$  и радиусами 100 и 50 мкм запущены с первой космической скоростью, направленной перпендикулярно вектору с Солнца, по орбите радиусом 2 а.е.. Определите расстояние между шарами в момент, когда они оба снова пройдут эту точку орбиты.
5. Квадратный солнечный парус ориентирован перпендикулярно радиус-вектору с Солнца, имеет массу  $m$  и сторону  $a$ . Альбедо паруса равномерно меняется от "снизу вверх" (низ в нижнем полупространстве относительно

- орбиты паруса) от 0 до 1. Пусть  $\beta$  — угол между нормалью к плоскости паруса и радиус-вектором с Солнца. Как меняется  $\beta(t)$  при  $\beta \ll 1$ ?
6. Космический аппарат вывели на круговую околосолнечную орбиту с радиусом 1 а.е. После этого на нем был развернут солнечный парус, постоянно обращенный к Солнцу и уменьшающий эффективную силу его притяжения на 4 процента. В ходе дальнейшего движения этот парус мгновенно сворачивался, как только аппарат достигал афелия своей текущей орбиты, но вновь раскрывался в каждом перигелии. Сколько целых оборотов вокруг Солнца сделает этот аппарат? Какова его дальнейшая судьба? Взаимодействием аппарата со всеми телами, кроме Солнца и его фотонов, пренебречь.
  7. В одном из проектов будущего предполагается разгонять маленькие космические корабли мощным лазерным лучом, отправляя их на большие расстояния. До какой скорости можно разогнать идеально зеркальный корабль цилиндрической формы с диаметром основания 1 мм и массой 1 мг оптическим лазером мощностью 1 МВт и расходимостью пучка  $5''$ ? Считать, что основание цилиндра ориентировано перпендикулярно лазерному лучу, сам луч при выходе из лазера очень тонкий. Начальной скоростью корабля и гравитационным действием на него всех окрестных тел пренебречь.
  8. Идеально зеркальный солнечный парус массой 1 тонна обращается вокруг Солнца по круговой орбите радиусом 1 а.е. в закрытом состоянии. Парус открывают, и его площадь оказывается равной  $2 \text{ км}^2$ . Сможет ли данный парус покинуть солнечную систему? Если да, какую скорость на бесконечности он будет иметь?
  9. Суть известного эффекта Пойнтинга-Робертсона состоит в тормозящем действии боковых солнечных фотонов, имеющих встречную компоненту скорости относительно тела, движущегося вокруг Солнца. Как и насколько изменит расстояние от Солнца за один оборот сферическая графитовая

частица радиусом 10 мкм и плотностью  $2.1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ , изначально обращающаяся по орбите радиусом 1 а.е. и эксцентриситетом, равным нулю?

10. Покажите, что для ракеты, которая выбрасывает газ перпендикулярно своей скорости (в С.О. ракеты) модуль полной скорости не меняется при действии реактивной тяги. Как зависит угол поворота ракеты от выброшенной массы, если скорость газов в системе отсчета ракеты постоянна?