Излучение

Формула Планка. Многоцветная фотометрия.

1. Излучение

1.1. Введение

Мы будем рассматривать, по крайней мере пока, лишь излучение абсолютно чёрных тел (АЧТ). Под этим подразумеваем, что эти объекты светят лишь «собственным» светом, а весь свет, что на них падает они поглощают. Излучение звёзд будем считать чёрнотельным. Для начала введём некоторые понятия:

1) **Поток** – количество энергии, излучаемое объектом в единицу времени с единичной площади:

$$F = \frac{d^2E}{dt \cdot dS}\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right]$$

2) **Светимость** – количество энергии, излучаемое всем объектом в единицу времени, по сути суммарная мощность излучения всего объекта:

$$L = \frac{dE}{dt}[\text{Вт}]$$

Чтобы получить полную светимость объекта, зная распределение потока необходимо проинтегрировать (по сути сложить потоки со всех площадок):

$$L = \iint_S F dS$$

Если поток на всей излучающей поверхности постоянен, светимость можно найти сильно проще:

$$L = F \cdot S$$

Как правило, для звёзд мы можем считать, что поток на всей поверхности постоянен. Также нам будут полезны некоторые соотношения для фотонов:

$$\varepsilon = h\nu \ , \quad c = \lambda\nu$$

Здесь ε – энергия фотона, λ – его длина волны, ν – частота, c – скорость света, h – постоянная Планка.

1.2. Формула Планка

Вернёмся к потоку. Как мы знаем, по сути поток формируют фотоны, которые излучает звезда. У этих фотонов разные длины волн, энергии. Нам интересно, как поток распределён по этим фотонам, в частности, какая часть потока излучается фотонами с определённой длиной волны/частотой. Для этого введём новые понятия:

1) **Яркость излучения** – количество потока, излучаемого в единицу телесного угла, в направлении, перпендикулярном излучающей площадке.

$$\Lambda_\perp = \frac{dF_\perp}{d\Omega} \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right]$$

Также отметим, что количество потока, излучаемого в единицу телесного угла, но в направлении, отличном от нормали будет меньше яркости излучения:

$$\Lambda = \Lambda_\perp \cdot \cos\theta$$

Здесь θ – угол между нормалью и направлением излучения. Это связанно с тем, что при излучении «в сторону» площадь проекции излучающей площадки уменьшается.

2) **Спектральная плотность излучения** – количество потока, излучаемого в единицу длин волн (или частот). Мы будем отдельно обозначать спектральную плотность излучения для случая длин волн и частот.

$$\rho_\lambda = \frac{dF}{d\lambda} \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}\right], \quad \rho_\nu = \frac{dF}{d\nu} \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{Гц}}\right]$$

3) **Спектральная плотность яркости излучения** – количество потока, излучаемого в единицу телесного угла, в единицу длин волн (или частот), в направлении, перпендикулярном площадке. На лекции мы это называли спектральной плотностью излучения в единицу телесного угла (что по сути так и есть) и обозначали как I (переобозначим, чтобы не путать с интенсивностью).

$$B_\lambda = \frac{d\Lambda_\perp}{d\lambda} = \frac{d^2F_\perp}{d\lambda \cdot d\Omega} \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{стер.}}\right], \quad B_\nu = \frac{d\Lambda_\perp}{d\nu} = \frac{d^2F_\perp}{d\nu \cdot d\Omega} \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{Гц} \cdot \text{стер.}}\right]$$

Формулой Планка мы будем называть зависимость спектральной плотности яркости излучения от частоты и температуры. Она была получена Планком в 1900 году.

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Отсюда можем получить формулу Планка для длин волн. При этом нельзя просто заменить везде ν на $\frac{c}{\lambda}$, так как единичный интервал частот и длин волн не совпадают, более того, даже по разному соотносятся друг с другом для разных частот (длин волн). Заметим, что $d\Lambda = B_\lambda d\lambda = B_\nu d\nu$. Отсюда:

$$B_\lambda = B_\nu \frac{d\nu}{d\lambda}$$

Знаем, что $\nu = \frac{c}{\lambda}$, а $\frac{d\nu}{d\lambda}$ по сути производная функции $\frac{c}{\lambda}$ по λ. Отсюда $\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$. Минус появляется, потому что при росте частоты длина волны падает, соответственно его мы можем убрать. Подставляя, получим:

$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}$$

Теперь выразим спектральную плотность излучения через спектральную плотность яркости излучения. Как следует из определений, второе это по сути первое, но в единицу телесного угла, направленного перпендикулярно площадке. Выразим $p_{\nu(B_\nu)}$, для $p_{\lambda(B_\lambda)}$ всё будет аналогично. Чтобы получить спектральную плотность излучения нам нужно «просуммировать» спектральные плотности яркости излучения по всем телесным углам (на которые мы излучаем, то есть по полусфере):

$$dp_\nu = \frac{d^2F}{d\nu} = \frac{d^2F}{d\nu d\Omega}d\Omega = \frac{d^2F_\perp \cos(\theta)}{d\nu d\Omega}d\Omega = \frac{d\Lambda_\perp}{d\nu}\cos(\theta)d\Omega = B_\nu \cos(\theta)d\Omega$$

$$p_\nu = \int_S dp_\nu = \int_S B_\nu \cos(\theta)d\Omega$$

Здесь S – направление в которое мы излучаем, в нашем случае полусфера. Будем интегрировать по тонким колечкам, находящимся на одном угловом расстоянии θ от нормали. Осталось выразить площадь колечка $d\Omega$ через θ и $d\theta$.

Мы знаем, что площадь полоски на сфере (отсчитывая от большого круга) $\Omega_1 = 2\pi\sin(\alpha)$, где α – толщина полоски. Площадь полусферы – 2π, поэтому вычитая из площади полусферы площадь полоски получим площадь шапки: $\Omega_2 = 2\pi(1-\sin(\alpha)) = 2\pi(1-\cos(\theta))$, где θ – угол от центра шапки. Наша полоска по сути слой между двумя очень близко расположенными шапками. Взяв производную от $d\Omega_2$ по $d\theta$ получим отношение приращения площади шапки к приращению угла, а первое это и есть площадь полоски.

$$\frac{d\Omega_2}{d\theta} = 2\pi \cdot \sin(\theta)$$

Итого, получили: $(d\Omega) = 2\pi \cdot \sin(\theta)d\theta$. Подставляя в интеграл, получим:

$$p_\nu = \pi B_\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta = \pi B_\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)d\theta$$

Делая замену $\beta = 2\theta$, $d\theta = \frac{d\beta}{2}$:

$$p_\nu = -\frac{\pi}{2}B_\nu \int_0^{\pi} \sin(\beta)d\beta = -\frac{\pi}{2}B_\nu \cos(\beta)\Big|_0^{\pi} = \pi B_\nu\left(-\frac{1}{2}(-1-1)\right) = \pi B_\nu$$

Итого, мы получили выражения для спектральной плотности излучения:

1. $p_\nu = \pi B_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT})-1}$
2. $p_\lambda = \pi B_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda kT})-1}$

Заметим, что если бы мы считали, что поток во все стороны одинаков, то должны были бы умножать $B_\nu(B_\lambda)$ на 2π, а не на π.

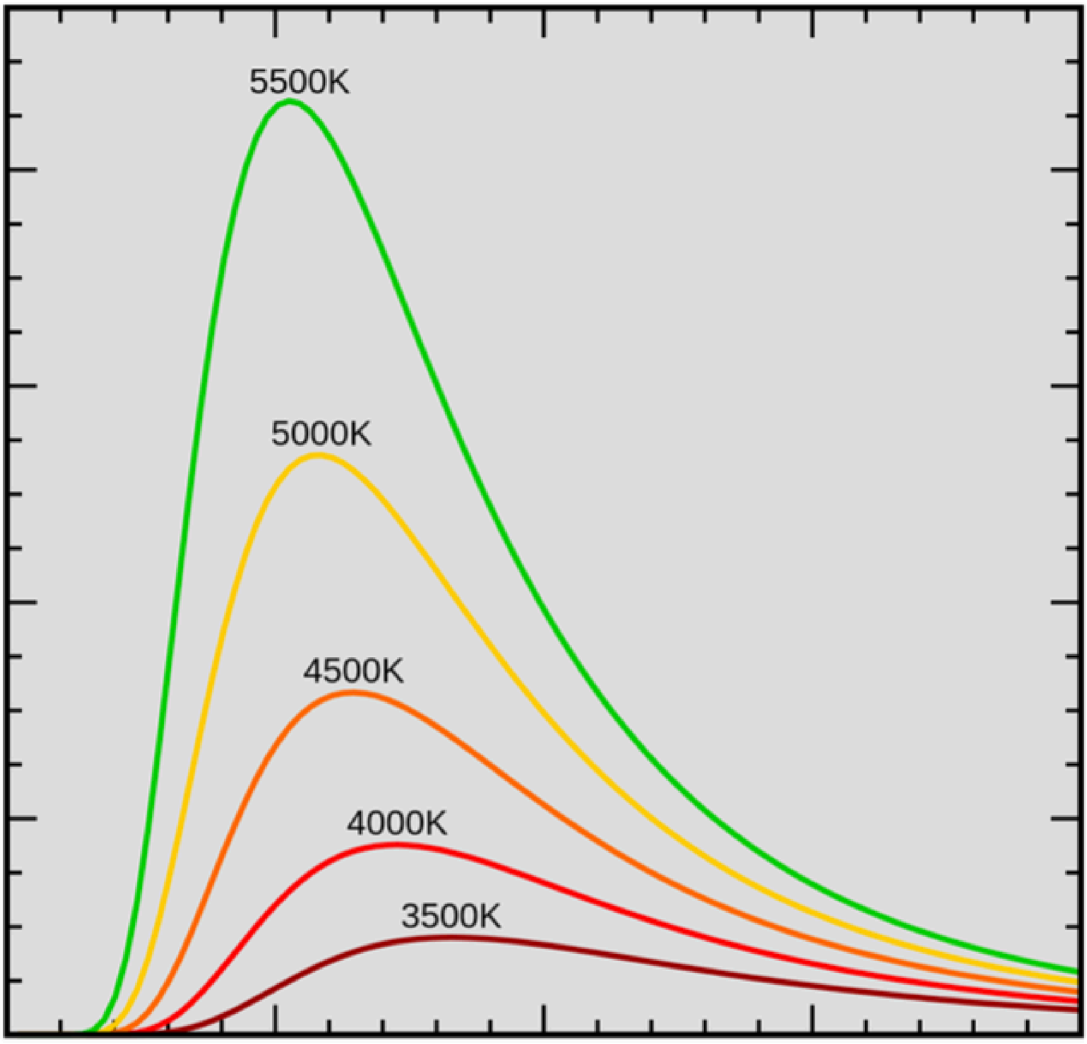
Отсюда, кстати, можно найти и яркость излучения. Действительно, мы по сути нашли во сколько раз поток во все стороны больше чем поток в единицу телесного угла перпендикулярно поверхности, а это и есть $\Lambda_\perp$. Если расписать чуть более строго, получим:

$$d\Lambda_\perp = \frac{d^2F}{d\Omega} = \frac{B_\lambda}{\rho_\lambda}dF = \frac{dF}{\pi}$$

$$\Lambda_\perp = \frac{F}{\pi}$$

1.3. Закон смещения Вина

На этом графике вы можете увидеть зависимость B_λ от длины волны для разных температур.



Интересно, что планковские кривые для разных температур не пересекают друг друга. Найдём выражение для длины волны, на которой B_λ максимальна. Видно, что производная наших кривых равна 0 только в точке максимума, поэтому достаточно просто продифференцировать B_λ по λ и приравнять к 0:

$$B_\lambda = C \cdot \frac{\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}$$

Здесь и далее C – константы, не обязательно одинаковые. Сделав замену $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ получим:

$$B_\lambda = C \cdot \frac{x^5}{e^x - 1}$$

$$\frac{dB_\lambda}{d\lambda} = \frac{C}{\left(e_m^x - 1\right)^2} \cdot \left(5x_m^4(e^{x_m} - 1) - x_m^5 e^{x_m}\right) = 0$$

$$5e^{x_m} - x_m e^{x_m} = 5$$

Численное решение даёт $x_m \approx 4.97$. Отсюда сразу следует **закон смещения Вина**, описывающий связь длины волны максимума излучения и температуры:

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{x_m kT} \approx \frac{0.0029}{T}$$

Здесь, как в целом и во всех формулах(если не указано иное) все величины в СИ. Число $\frac{hc}{x_m k}$ называется постоянной Вина $b \approx 0.0029[\text{м} \cdot \text{К}]$. Важно отметить, что длина волны максимума B_λ не соответствует частоте максимума B_ν, опять же из-за того, что единицы длин волн и частот для разных длин волн (частот) отличаются в разное число раз.

1.4. Закон Стефана - Больцмана

Теперь выразим полный поток F через площадку. Для этого просуммируем спектральные плотности излучения по всем частотам. По сути мы будем находить площадь под планковской кривой.

$$dF = \rho_\nu d\nu$$

$$F = \int dF = \int_0^{+\infty} \rho_\nu d\nu = \int_0^{+\infty} \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu$$

Как и в случае с законом смещения Вина делаем замену $x = \frac{h\nu}{kT}$, $d\nu = \frac{kT}{h}dx$.

$$F = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = A \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = A \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx$$

Заметим, что $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ – сумма геометрической прогрессии, с $q = e^{-x}$. Тогда:

$$F = A \cdot \int_0^{+\infty} \Sigma_{n=1}^{+\infty} x^3 e^{-nx} dx$$

Сделав замену $y = nx$, $dx = \frac{dy}{n}$ получаем:

$$F = A \cdot \int_0^{+\infty} y^3 e^{-y} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} dy = A \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \int_0^{+\infty} y^3 e^{-y} dy$$

Значение суммы представляет собой значение дзета-функции Римана $\zeta(x)$ от 4, а интеграла – гамма-функции $\Gamma(x)$ от 4 (хотя его можно и относительно просто взять по частям). $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\Gamma(4) = 3! = 6$. Итого мы получили **закон Стефана - Больцмана**, который связывает поток с температурой:

$$F = A \cdot \frac{\pi^4}{90} \cdot 6 = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2} \cdot T^4 = \sigma T^4$$

Здесь $\sigma \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}\right]$ – постоянная Стефана - Больцмана. Тогда светимость звёзд можно найти так:

$$L = F \cdot S = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

1.5. Приближения Формулы Планка

Рассмотрим случай, когда $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$. Знаем, что при $x \ll 1 : e^x \approx 1 + x$. Тогда можем получить **закон Рэлея - Джинса**:

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} =\approx \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} = \frac{2\nu^2 kT}{c^2} = \frac{2kT}{\lambda^2}$$

Аналогичное выражение можно получить и для B_λ:

$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{1 + \frac{hc}{\lambda kT} - 1} = \frac{2ckT}{\lambda^4}$$

Это приближение как правило используется либо для очень горячих объектов, либо для микроволнового/радиоизлучения. Как мы помним, для максимума плотности яркости излучения (по λ):

$$x_m = \frac{h\nu}{kT} \approx 4.97$$

Видим, что для максимума излучения закон Рэлея-Джинса применять нельзя. Более того, длина волны излучения должна быть хотя в 10-20 раз больше, чем длина волны максимума излучения (B_λ). Например, для АЧТ с солнечной температурой можно применять примерно с $\lambda > 10$ мкм.

Теперь рассмотрим случай, когда $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$. Тогда 1 во втором знаменателе можем пренебречь. Получим **закон излучение Вина**:

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

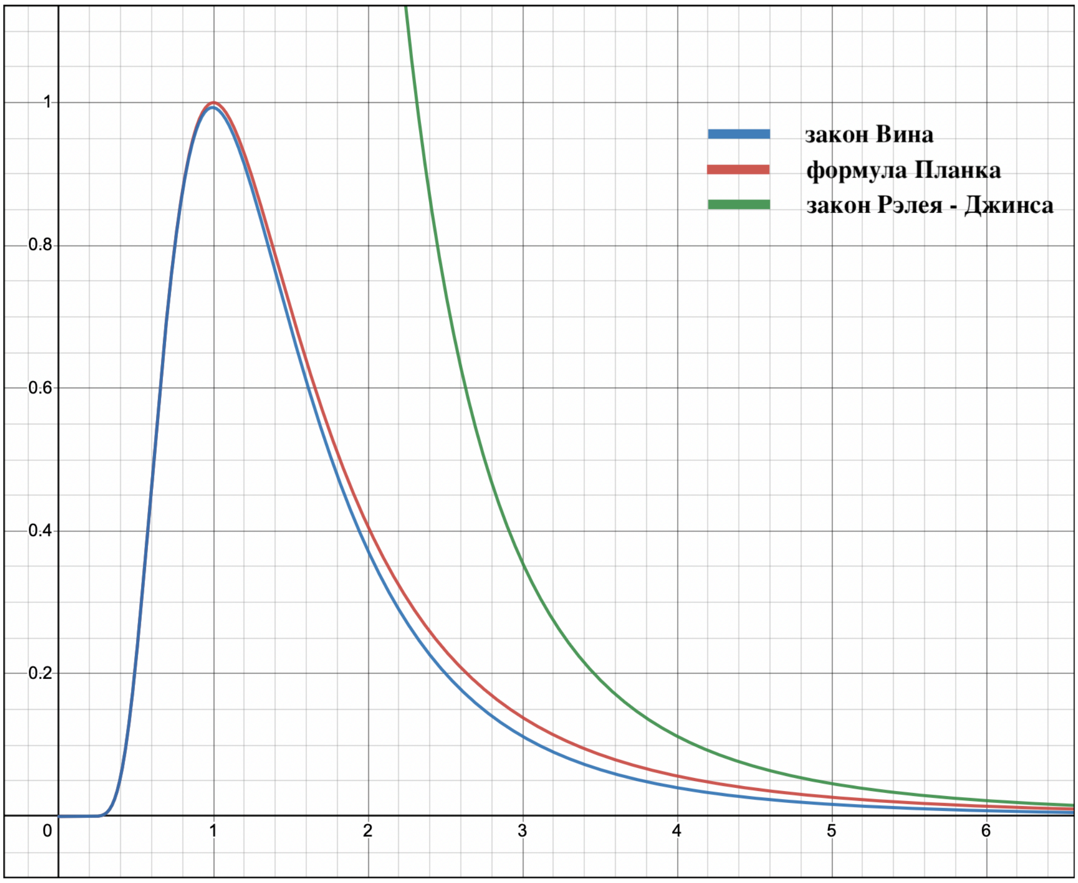
Также для B_λ:

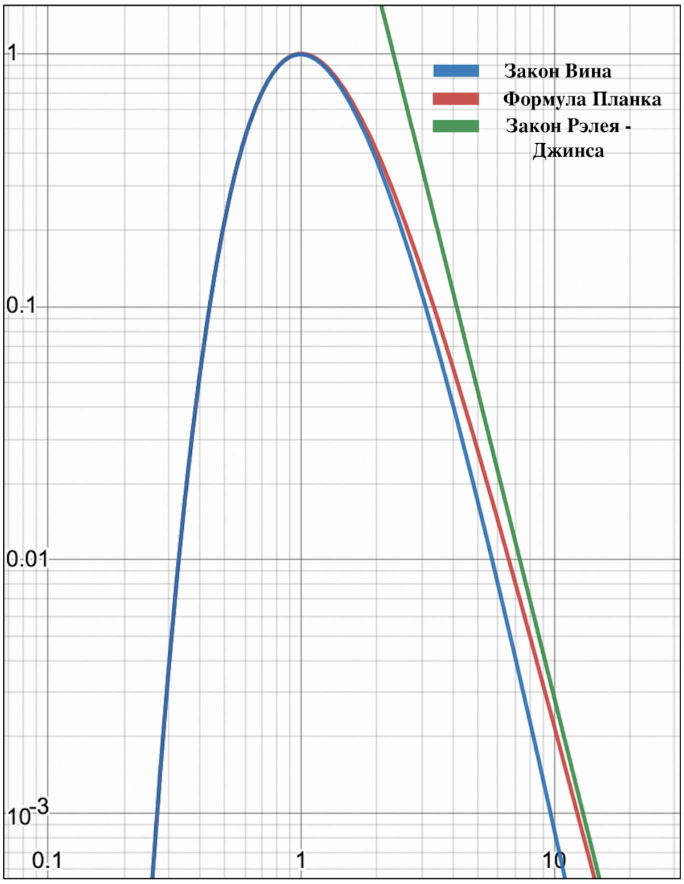
$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right)$$

Заметим, что для максимума излучения (B_λ) его вполне можно использовать. В целом приближение Вина гораздо лучше повторяет планковскую кривую, однако на больших длинах волн расхождения становится слишком большим, и там следует использовать приближение Рэлея - Джинса.

Также важно заметить, что в отличии от формулы Планка приближения достаточно удобно интегрировать в любых пределах. Это значит, что с помощью них мы можем находить поток, который излучается на определённом диапазоне длин волн (частот), что в будущем нам будет очень помогать.

На графиках изображены планковские кривые (B_λ) в разных моделях. Ось x нормированна на $\lambda_{\max}$, y на значение максимума. На первом графике оси линеные, видно что в окрестности максимума излучения закон Вина лучше аппроксимирует формулу Планка. На втором графике оси уже логарифмические, видно, как планковская кривая приближается к аппроксимации законом Рэлея - Джинса.





2.Принимаемое излучение

2.1. Введение

Мы будем считать, по крайней мере пока, что поглощения нет. Давайте снова введём некоторые понятия, которые нам понадобятся для описания излучения объектов, которое мы регистрируем:

1) **Освещённость** – количество энергии, проходящее через единичную площадку (расположенную перпендикулярно излучению) в единицу времени:

$$E_I = \frac{d^2E}{dt \cdot dS}\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right]$$

В случаях, когда энергия и освещённость не фигурируют вместе мы будем опускать индекс I. Выразим освещённость, создаваемую объектом через его светимость L и расстояние r до него. Для этого рассмотрим сферу, с центром в центре объекта, на поверхности которого и находится наша площадка. Тогда за единицу времени через всю сферу проходит тот же поток, что и излучает звезда за то же время – L. Считая, что объект светит равномерно во все стороны, получаем, что через нашу площадку проходит в S раз меньше излучения, где S – площадь сферы. Итого:

$$E = \frac{L}{S} = \frac{L}{4\pi R^2}$$

2) **Поверхностная яркость** – количество освещённости, приходящее с единицы угловой площади (телесного угла) объекта:

$$\kappa = \frac{dE}{d\Omega}\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{стер.}}\right]$$

В таком случае полную освещённость можно найти так:

$$E = \iint_\Omega \kappa d\Omega$$

Если поверхностная яркость постоянна на всей видимой поверхности объекта:

$$E = \kappa \cdot S$$

3) **Спектральная плотность принимаемого излучения** – количество освещённости, принимаемой от объекта в единицу длин волн или частот. Как и раньше, введём обе величины:

$$\varrho_\lambda = \frac{dE}{d\lambda}\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}\right], \quad \varrho_\nu = \frac{dE}{d\nu}\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{Гц}} = 10^{26}\ \text{Ян}\right]$$

4) **Интенсивность принимаемого излучения** – количество освещённости, принимаемой от объекта в единицу длин волн (частот), в единицы его угловой площади (телесного угла). По сути это спектральная плотность поверхностной яркости принимаемого излучения:

$$I_\lambda = \frac{d\kappa}{d\lambda} = \frac{d^2E}{d\lambda \cdot d\Omega}\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{стер.}}\right], \quad I_\nu = \frac{d\kappa}{d\nu} = \frac{d^2E}{d\nu \cdot d\Omega}\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{Гц} \cdot \text{стер.}}\right]$$

Не сложно заметить аналогию в ведении терминологии с F, Λ, ρ, B соответственно. Только в том случае все величины были для излучающей площадки, а сейчас для принимающей.

2.2. Поверхностная яркость

Давайте распишем выражение для поверхностной яркости. dE будет освещённостью, создаваемой излучающей площадкой, которую мы видим под углом $d\Omega$. При этом мы не можем взять от неё весь поток, так как она его высвечивает во все стороны, а нам нужен только тот, что приходит к нам. Получаем:

$$dE = \frac{dL}{dS_1} = \frac{dF \cdot dS}{r^2 d\Omega_1} = \frac{\Lambda \cdot dS}{r^2} = \frac{\Lambda_\perp \cos(\theta) \cdot dS}{r^2}$$

Здесь Ω_1 – единичный угол, в который излучает рассматриваемая площадка, dS_1 – площадь на сфере (с центом в центре объекта, такая, что наша площадка на ней), куда приходит излучение площадки, направленное на нас (в угол $d\Omega_1$), dS – площадь излучающей площадки, а θ – угол от нормали, в который излучает площадка (в данном случае «на нас»). Теперь распишем $d\Omega$:

$$d\Omega = \frac{dS_\perp}{r^2}$$

Здесь $dS_\perp$ – площадь проекции излучающей площадки. Итого для κ получаем:

$$\kappa = \frac{dE}{d\Omega} = \frac{\Lambda_\perp \cos(\theta) r^2 dS}{r^2 dS_\perp}$$

Заметим, что $dS_\perp = dS\cos(\theta)$. Тогда:

$$\kappa = \Lambda_\perp = \frac{F}{\pi} = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

<u>Получаем, что количество освещённости, которую мы получаем от объекта с единицы его угловой площади (телесного угла) в точности равно количеству потока, которое излучает объект в единицу телесного угла, перпендикулярно поверхности.</u> Отдельно отметит два важных вывода, которые отсюда следуют:

1) Поверхностная яркость у объектов, имеющих по всей поверхности одинаковое $\Lambda_\perp$ – одинаковая на всей их угловой площади. Это верно для объектов с одинаковой температурой на поверхности. Будем считать, по крайней мере пока, что это верно и для звёзд, хотя в реальности там есть перепады температуры на поверхности, эффекты потемнения диска к краю.

В целом постоянство поверхностной яркости (при равных потоках на поверхности) вытекает из того, что с одной стороны, площадь площадки изменяется пропорционально $\cos(\theta)$, а с другой поток в направлении, отличном от нормали также изменяется в $\cos(\theta)$ раз, и эти эффекты друг друга компенсируют.

2) Поверхностная яркость объектов (или единицы угловой площади объекта не зависит от расстояния до него

3) Поверхностная яркость определятся температурой объекта, причём пропорциональна ей в 4 степени

Аналогичное выражение для поверхностной яркости можно получить и подругому. Рассмотрим объекты, у которых на всей поверхности $\Lambda_\perp = \text{const}$, например звёзды. Тогда знаем, что:

$$E = \iint_\Omega \kappa d\Omega = \kappa \cdot \Omega$$

$$\kappa = \frac{E}{\Omega} = \frac{L}{4\pi r^2 \frac{S_\perp}{r^2}}$$

Здесь $S_\perp$ – площадь сечения объекта с нашей точки наблюдения. Для сферически - симметричных объектов:

$$\kappa = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi r^2 \pi \frac{R^2}{r^2}} = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

Однако такой вывод работает, как видно, только для сферически - симметричных объектов, хотя он и выглядит попроще.

2.3. Спектральная плотность принимаемого излучения

Будем рассматривать общий случай, когда поверхностная яркость объекта не постоянна на его видимой поверхности. Тогда про спектральную плотность можем находить так:

$$\varrho_\lambda = \iint_\Omega I_\lambda d\Omega$$

На самом деле понятно, что отличие между I и κ такое же, как и между $\Lambda_\perp$, B. Первое это по сути второе в единицу длин волн в обоих случаях, и если нет поглощения (которое, как правило разное для разных длин волн), то отношение этих величин должно сохраняться. Распишем более строго:

$$\frac{I_\lambda}{B_\lambda} = \frac{\frac{d\kappa}{d\lambda}}{\frac{d\Lambda_\perp}{d\lambda}} = \frac{d\kappa}{d\Lambda_\perp} = \frac{\kappa}{\Lambda_\perp} = 1$$

Совершенно аналогично можно написать и для частоты. Итого, мы получили, что:

$$I_\lambda = B_\lambda$$
$$I_\nu = B_\nu$$

Получается, что спектральная плотность поверхностной яркости приходящего излучения (интенсивность) в точности равна спектральной плотности яркости излучения, то есть сколько освещённости приходит с единицы угловой площади (телесного угла) в единицу длин волн (частот), столько потока и излучилось в единицу телесного угла, перпендикулярно площадке, в единицу длин волн (частот). Именно за счёт этого равенства мы и принимаем излучение от объектов в виде планковских кривых.

На самом деле это можно было получить расписав честно, как мы делали с κ (просто где нужно поставить в знаменатель $d\lambda$ или $d\nu$), но, кажется, так наглядней.

Теперь вернёмся к спектральной плотности. Как правило, она измеряется в Янских. Перевод такой:

$$1 \text{ Ян} = 10^{26} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{ Гц}}$$

Здесь важно обратить внимание на то, что спектральная плотность в Янских определяется исключительно для единицы частот, а значит во всех формулах, где фигурируют Янские необходимо использовать именно выражения, где величины берутся на единицу частот.

Запишем, как в итоге находить спектральную плотность принимаемого от объекта излучения в Янских:

$$\varrho[\text{Jy}] = \iint_\Omega I_\nu d\Omega \cdot 10^{26} = \iint_\Omega B_\nu d\Omega \cdot 10^{26} = \iint_\Omega \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\Omega \cdot 10^{26}$$

Также B_ν иногда можно записывать через приближения. Как можно заметить, для фиксированной ν (или λ) B_ν зависит только от температуры. Значит, что если у объекта на всей поверхности постоянная температура (например, звёзды), то и B_ν постоянно, а значит и I_ν постоянна на всей видимо поверхности. Тогда получаем:

$$\varrho_\nu[\mathrm{Jy}] = I_\nu \Omega \cdot 10^{26} = B_\nu \Omega \cdot 10^{26} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \Omega \cdot 10^{26}$$

Здесь, как и раньше Ω – угловая площадь объекта (в стерадианах). Спектром излучения, приходящего от объекта мы называем зависимость ϱ_λ (или ρ_ν) от λ (или соответственно ν).

3. Многоцветная фотометрия

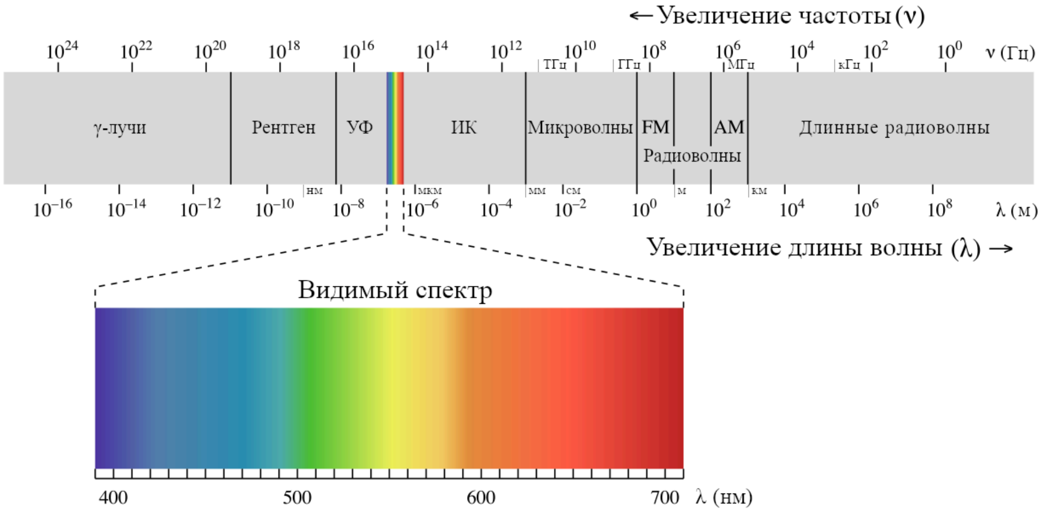
3.1 Диапазоны и фильтры

Зачастую нам нужно уметь измерять приходящий (или исходящий) поток (освещённость) не для всех возможных длин волн (частот), а только для определённого диапазона. Например человеческий глаз видит только в достаточно узком диапазоне длин волн, середина которого, кстати, соответствует максимуму солнечного излучения (и, кажется, не случайно).

Фотоны делятся на группы по длине волны (частоте) следующим образом:

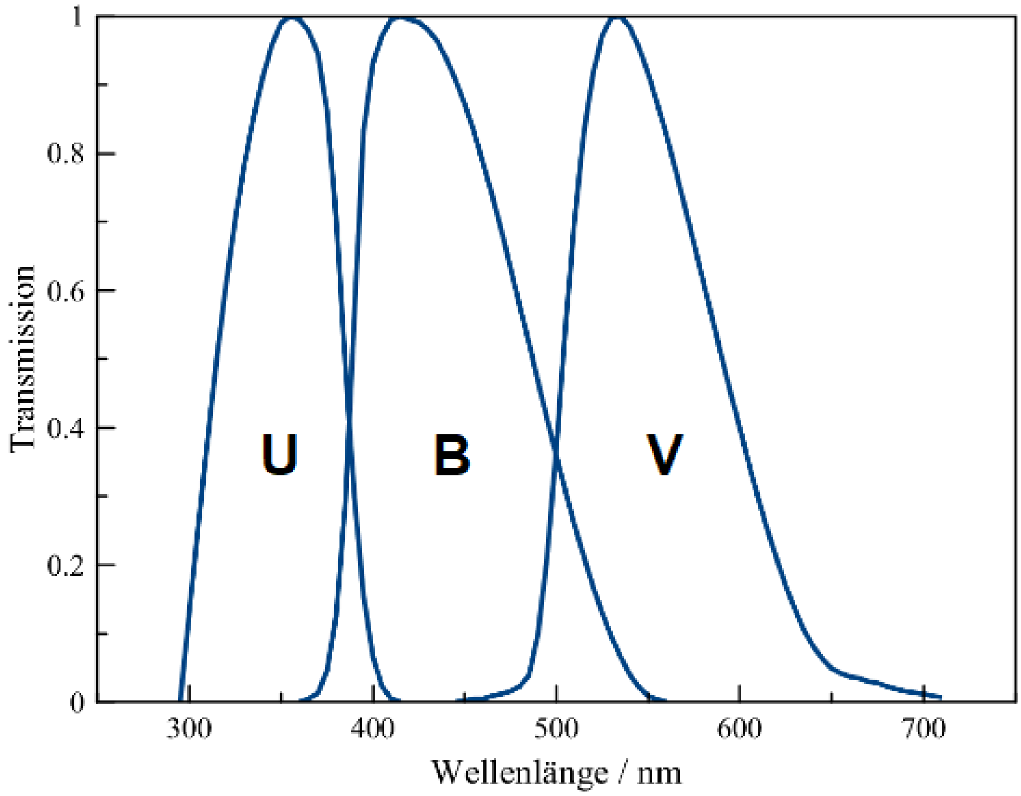
Название диапазона		Длины волн, *λ*	Частоты, *f*
Радиоволны	Сверхдлинные	более 10 км	менее 30 кГц
	Длинные	10 км — 1 км	30 кГц — 300 кГц
	Средние	1 км — 100 м	300 кГц — 3 МГц
	Короткие	100 м — 10 м	3 МГц — 30 МГц
	Ультракороткие	10 м — 1 мм	30 МГц — 300 ГГц[4]
Инфракрасное излучение		1 мм — 780 нм	300 ГГц — 429 ТГц
Видимое излучение		780 нм — 380 нм	429 ТГц — 750 ТГц
Ультрафиолетовое		380 нм — 10 нм	$7{,}5\cdot10^{14}$ Гц — $3\cdot10^{16}$ Гц
Рентгеновское		10 нм — 5 пм	$3\cdot10^{16}$ Гц — $6\cdot10^{19}$ Гц
Гамма		менее 5 пм	более $6\cdot10^{19}$ Гц

При этом светом мы называем только видимое излучение. В видимом свете фотонам с разной длиной волны также соответствует разный цвет:



В астрономии чаще всего используют UBV - систему. Первоначально она включала только эти три фильтра, однако потом была расширена. Разберёмся что же такое фильтр. В самой простой интерпретации его можно приблизить как прибор, который принимает весь свет на определённом (соответствующем ему) диапазоне длин волн (частот), а на остальной части света просто ничего не регистрирует.

Однако в реальности фильтры имеют некоторую кривую пропускания, по сути показывающую, с каким КПД мы регистрируем фотоны на разных длинах волн.



Соответсвенно, в первой интерпретации кривая пропускания соответствовала просто прямоугольнику, с КПД либо 0, либо 1. Фильтр, у которого кривая пропускания принимает только два значения (0 и ещё одно) называется плоским, соответственно под его КПД будем понимать значение кривой пропускания на длинах волн, соответствующих этому фильтру.

Мы, как правило, работаем (в задачах) именно с плоскими фильтрами, однако на практике это не совсем так (что и видно из графиков).

Напишем выражение, с помощью которого можно искать освещённость объекта E_X, соответствующую некоторому объекту в некотором фильтре X. Для этого введём функцию кривой пропускания $k(\lambda)$ (или $k(\nu)$). Тогда получаем:

$$E_X = \int_X \varrho_\lambda k(\lambda) d\lambda = \int_X \rho_\nu k(\nu) d\lambda$$

Здесь интегрирование по X следует понимать как интегрирование по диапазону, соответствующему фильтру. Для плоских фильтров можем записать:

$$E_X = \int_X \varrho_\lambda k(\lambda) d\lambda = \rho_\lambda k \Delta\lambda$$

Для случая исходящего потока излучения соответственно:

$$E_X = \int_X \rho_\lambda k(\lambda) d\lambda = \int_X \rho_\nu k(\nu) d\lambda$$

$$E_X = \int_X \rho_\lambda k(\lambda) d\lambda = \rho_\lambda k \Delta\lambda$$

Здесь k – как раз КПД фильтра (его кривой пропускания). Далее представлены границы некоторых диапазонов:

Band	λ (μm)	$\Delta\lambda/\lambda$ (FWHM)
U	0.36	0.15
B	0.44	0.22
V	0.55	0.16
R	0.64	0.23
I	0.79	0.19
J	1.26	0.16
H	1.60	0.23
K	2.22	0.23
L	3.50	
g	0.52	0.14
r	0.67	0.14
i	0.79	0.16
z	0.91	0.13

Здесь «Band» – название фильтра, λ – длина волны центра, $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$(FWHM) – отношение полной ширины кривой пропускания на высоте, в два раза меньше максимальной (Full Width at Half Maximum) к длине волны середины фильтра.

3.2 Звёздная величина

Примерно во II веке д.н.э. древнегреческий астроном Гиппарх разделил все звёзды на 6 категорий по яркости. В связи с тем, что человеческие органы чувств воспринимают всё, как правило, в логорифмическом масштабе, яркость звёзд (освещённость, создаваемая ими) в соседних категориях отличалась во сколько-то раз, а не на сколько-то.

1) **Звёздная величина** – некоторая мера яркости (освещённости) небесного тела, в общем виде обозначается как m.

Уже в XIX Погсон предложил формализовать связь освещённости, создаваемой звездой и её звёздную величину. Формулы, задающие это биективное оторбражение мы и называем **формулами Погсона**:

$$E = E_0 \cdot 10^{-0.4(m-m_0)}$$

Соответственно, отсюда следует и обратная формула:

$$m = m_0 - 2.5 \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Здесь E_0, m_0 – нуль-пункты шкал. Как правило за m_0 принимают 0^m, однако понятно, что формула подразумевает, что можно придумать бесконечное число пар (m_0, E_0) таких, что все отображения, задаваемые этими парами будут тождественно равны друг другу.

Интересно, кстати, что множество всех таких эквивалентных нормировочных пар по сути и задаёт множество всех звёздных величин и освещённостей выбранного «класса» (по сути фильтр или болометрическая звёздная величина), так как любая корректная для данного «класса» пара (m, E) может являться нормировочной, а любая нормировочная пара принадлежит «классу», который задаёт.

Здесь важно отметить, что на самом деле нормировки отображения для каждого фильтра (и для болометрической звёздной величины) отличаются друг от друга (это значит, например, что если у объекта звёздная величина в двух фильтрах одинакова, то совсем не обязательно, что и освещённости в этих фильрах будут равны).

2) **Звёздная величина в фильтре** X – такая звёздная величина, которая соответствует освещённости (потоку), приходящему (исходящему) в этом фильтре и <u>нормированна на сответствующие этому фильтру пары</u> (m_0, E_0). Обозначим как m_X.

3) **Болометрическая звёздная величина** – такая звёздная величина, которая соответствует освещённости (потоку), приходящему (исходящему) со всего спектра (на всех длинах волн (частотах)) и <u>нормированна на сответствующие болометричесой звёздной величине пары</u> (m_0, E_0). Обозначим как m_{bol}.

Изначально нуль-пунктом шкал звёздных величин была Вега (во всех фильтрах, и в болометриской звёздной величине), однако потом значения E, соответствующее 0^m в разных фильтрах были немного переопределены. Сейчас для болометрической звёздной величины значению 0^m соотвествует $E_0 \approx 2.48 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$. При этом, в большинстве задач можно считать, что звёздная величина Веги во всех фильтрах примерно равна 0, как и её болометрическая звёздная величина (при этом очевидно, что освещённости у Веги в разных фильтрах (как и болометрическая) разные).

Иногда формулы Погсона записывают немного в другом виде, как бы сравнивая два объекта. Действительно, если записать первое отображение для некоторых E_1, E_2 получим:

$$\frac{E_1}{E_2} = \cdot 10^{-0.4(m_1 - m_2)}$$

$$m_1 = m_2 - 2.5 \log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

Однако важно понимать, что это можно делать только тогда, когда <u>нормировочные пары (m_0, E_0) являются эквивалентными</u> (то есть почти всегда только при сравнении звёздных величин одного фильтра (или болометрических)).

3.3 Показатели цвета и болометрические поправки

Как мы уже поняли, цвет объекта определяется тем, какие фотоны он излучает. В случае, когда объект излучает на всех длинах волн, понять, какого цвета объект можно по соотношению освещённостей (потоков), приходящих (исходящих) от объекта в различных диапазонах. Введём новые понятия:

2) **Показатель цвета** (X - Y) – разность звёздных величин в фильтрах X и Y.

$$(X - Y) = m_{0X} - 2.5 \log\left(\frac{E_X}{E_{0X}}\right) - m_{0Y} + 2.5 \log\left(\frac{E_Y}{E_{0Y}}\right)$$

Для таких нормировочных пар (по сути здесь нормировали на Вегу) можем брать $m_{0X} = m_{0Y} = 0$. Тогда можем получить просто:

$$(X - Y) = -2.5 \log\left(\frac{\int_X \varrho_\lambda k_x d\lambda}{\int_X \varrho_\lambda (A0) k_x d\lambda}\right) + 2.5 \log\left(\frac{\int_Y \varrho_\lambda k_y d\lambda}{\int_Y \varrho_\lambda (A0) k_y d\lambda}\right)$$

Интересно, что это выражение эквивалентно следующему:

$$(X-Y) = -2.5\log\left(\frac{\int_X \varrho_\lambda k_x d\lambda}{\int_Y \varrho_\lambda k_y d\lambda}\right) + 2.5\log\left(\frac{\int_X \varrho_\lambda (A0) k_x d\lambda}{\int_Y \varrho_\lambda (A0) k_y d\lambda}\right)$$

То есть по сути:

$$(X-Y) = -2.5\log\left(\frac{E_X}{E_{0X}}\right) + 2.5\log\left(\frac{E_Y}{E_{0Y}}\right) = -2.5\log\left(\frac{E_X}{E_Y}\right) + 2.5\log\left(\frac{E_{0X}}{E_{0Y}}\right)$$

Совершенно аналогично пишется и для исходящего излучения:

$$(X-Y) = -2.5\log\left(\frac{F_X}{F_{0X}}\right) + 2.5\log\left(\frac{F_Y}{F_{0Y}}\right) = -2.5\log\left(\frac{F_X}{F_Y}\right) + 2.5\log\left(\frac{F_{0X}}{F_{0Y}}\right)$$

$$(X-Y) = -2.5\log\left(\frac{\int_X \rho_\lambda k_x d\lambda}{\int_X \rho_\lambda (A0) k_x d\lambda}\right) + 2.5\log\left(\frac{\int_Y \rho_\lambda k_y d\lambda}{\int_Y \rho_\lambda (A0) k_y d\lambda}\right)$$

$$(X-Y) = -2.5\log\left(\frac{\int_X \rho_\lambda k_x d\lambda}{\int_Y \rho_\lambda k_y d\lambda}\right) + 2.5\log\left(\frac{\int_X \rho_\lambda (A0) k_x d\lambda}{\int_Y \rho_\lambda (A0) k_y d\lambda}\right)$$

Здесь $k_x(\lambda), k_y(\lambda)$ – кривые пропускания. Так как мы пока рассматриваем случай, когда нет поглощения, у нас $\varrho_\lambda = \rho_\lambda$, а значит и значения интегралов равны.

Наиболее часто используемый показатель цвета – (B - V). Для него даже есть формула зависимости от температуры:

$$T[K] = 4600 \cdot \left(\frac{1}{0.92(B-V)+0.62} + \frac{1}{0.92(B-V)+0.72}\right)$$

Хотя, судя по всему подобные формулы можно полчить для любого показателя цвета.

4) **Болометрическая поправка** – разность звёздных величин в видимом диапазоне длин волн и болометрической звёздной величины, нормированная на звезду F5. Обозначим как BC.

$$BC = m_{\text{bol}} - m_V - (m_{\text{bol}}(F5) - m_V(F5))$$

Здесь V – фильтр V. Так как звёзды $F5$ имеет наиболее близкое к 1 отношение E_V / E, то для всех остальных звёзд болометрическая поправка отрицательная (а для звёзд $F5$) она равна 0. Для Веги m_{bol}, m_V равны 0, поэтому её болометрическая поправка равна $(m_V(F5)) - m_{\text{bol}}(F5))$.

Если это расписать аналогично показателю цвета (также нормируя на Вегу и считая m_0 всегда равным 0^m для неё) получим:

$$BC = -2.5\log\left(\frac{E}{E(A_0)}\right) + 2.5\log\left(\frac{E_V}{E_V(A_0)}\right) + 2.5\log\left(\frac{E(F_5)}{E(A_0)}\right) - 2.5\log\left(\frac{E_V(F_5)}{E_V(A_0)}\right)$$

Используя болометрическую поправку для Веги $BC(A_0)$ можем получить:

$$BC = -2.5\log\left(\frac{E}{E(A_0)}\right) + 2.5\log\left(\frac{E_V}{E_V(A_0)}\right) + BC(A_0)$$

Аналогично пишется и для исходящего излучения:

$$BC = -2.5\log\left(\frac{F}{F(A_0)}\right) + 2.5\log\left(\frac{F_V}{F_V(A_0)}\right) + 2.5\log\left(\frac{F(F_5)}{F(A_0)}\right) - 2.5\log\left(\frac{F_V(F_5)}{F_V(A_0)}\right)$$

$$BC = -2.5\log\left(\frac{F}{F(A_0)}\right) + 2.5\log\left(\frac{F_V}{F_V(A_0)}\right) + BC(A_0)$$

Болометрическая поправка для Солнца равна примерно -0.1^m. Видимая звёздная величина Солнца (в фильтре (V)) равна -26.74^m, а болометрическая -26.83^m. Первому значению соответствует освещённость примерно в 600 Вт, а второму примерно 1360 Вт.

На самом деле болометрическая поправка может вводиться не только для фильтра V. В этом случае говорится болометрическая поправка к фильтру X, где X – какой-то фильтр.

Аналогично показателю цвета, в случае когда нет поглощения обе величины будут равны. В общем случае, для исходящего излучения обычно ставится индекс 0, например $(B-V)_0, BC_0$.