Логическое отрицание

Применение правил логического отрицания математических высказываний для решения конкурсных задач.

Понятие равносильности позволяет сформулировать логическое отрицание высказываний. Обозначим логическое «не» знаком $\rceil$, а высказывание противоположное A(x) - через $\overline{A(x)}$

Тогда правила логического отрицания высказываний, содержащих кванторы (знаки) всеобщности ∀ и существование ∃, формулируются следующим образом:

$$\rceil(\forall x \in X: A(x) \leftrightarrow \exists x \in X: \overline{A(x)}$$

$$\rceil(\exists x \in X: A(x) \leftrightarrow \forall x \in X: \overline{A(x)}$$

То есть при логическом отрицании данных высказываний кванторы всеобщности и существования меняются друг на друга, а высказывание меняется на противоположное.

Например, для определения по Коши предела функции

$$b = \lim_{x\to a} f(x) \quad \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D(f):$$

$$0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon$$

Логическое отрицание выглядит следующим образом:

$$b \neq \lim_{x\to a} f(x) \quad \leftrightarrow \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in D(f):$$

$$0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - b| \geq \varepsilon$$

Для школьников 9 класса задания на логическое отрицание с целью доступности восприятия можно решать в упрощенной форме.

Вывод: В сочетании с КП методом общая методика решения задач на логическое отрицание позволяет достаточно эффективно решать многие задачи, вызывающие у учащихся логические трудности на конкурсных экзаменах, олимпиадах и «С» части ЕГЭ.

Пример №1

При каких значениях параметра ***a*** не существуют x, для которых выполняется неравенство $x^2 + x - a < 0$

Решение:

Найдем a, при которых неравенство $x^2 + x - a \geq 0$ выполняется для всех $x \in R$

$D = 1 + 4a;\ D \leq 0;\ 1 + 4a \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -\frac{1}{4}.$

Ответ: $a \leq -\frac{1}{4}$.

Пример №2

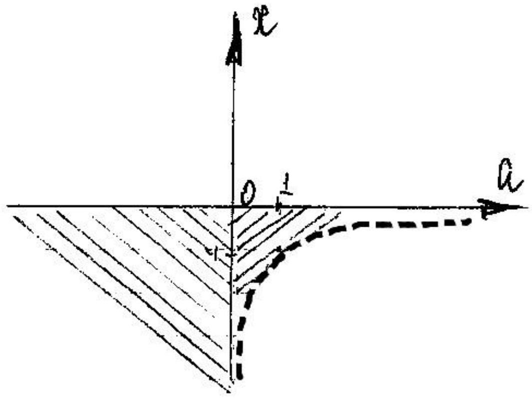
Найдите значения ***a***, при которых не существует $x \leq 0$, для которых справедливо неравенство $ax^2 - |x| > 0$

Решение:

Найдем а, при которых неравенство $ax^2 - |x| \le 0$ выполняется для всех

$$x \le 0;\ ax^2 + x \le 0 \Leftrightarrow (ax+1)x \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ a \in R \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ a < -\dfrac{1}{x} \end{cases} \end{array}\right.$$ для всех $x \le 0$ неравенство верно при

$a \le 0$.

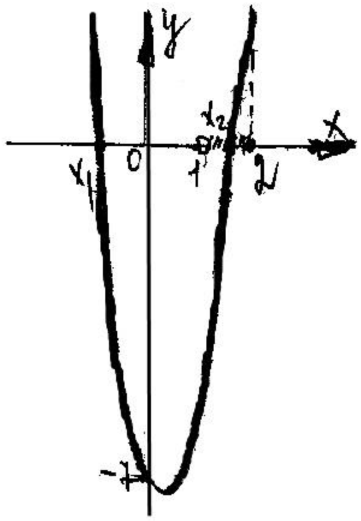


Ответ: $a \le 0$.

Пример №3

Найдите значение ***a***, для которых при всех $x \in (1;2]$ выражение $x^2 + 3x - 7 \ne ax$

Решение:



Рассмотрим уравнение $x^2 + (3-a)x - 7 = 0$.

Построим в координатной плоскости XOY схематически параболу $f(x) = x^2 + (3-a)x - 7$.

$f(0) = -7, x_1 < 0, x_2 > 0$ если $0 < x < x_2$, то $f(x) < 0$

Если $x > x_2$, то $f(x) > 0$

Значит, уравнение $f(x) = 0$ имеет корень на *(1;2]* тогда и только тогда, когда $1 < x_2 < 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + (3-a) - 7 < 0 \\ 4 + 2(3-a) - 7 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < a \le \frac{3}{2}$$

Значит, уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней на *(1;2]* для всех остальных ***a***, т.е. $a \le -3 \text{ или } a > \frac{3}{2}$.

Ответ: $a \le 3,\ a > 1{,}5$.

Пример №4

Найдите a, при которых для всех $x \in (-3; -1]$ выражение $x^4 - 8x^2 - 2 \neq ax^2$.

Решение:

Пусть $x^2 = t$ $(t \geq 0)$. Рассмотрим функцию

$$f(t) = t^2 - (a+8)t - 2, \textit{где } t \in [1; 9)$$

В координатной плоскости toy схематически изобразим параболу. Найдем a, при которых уравнение $f(t) = 0$ имеет корни на *[1;9)*

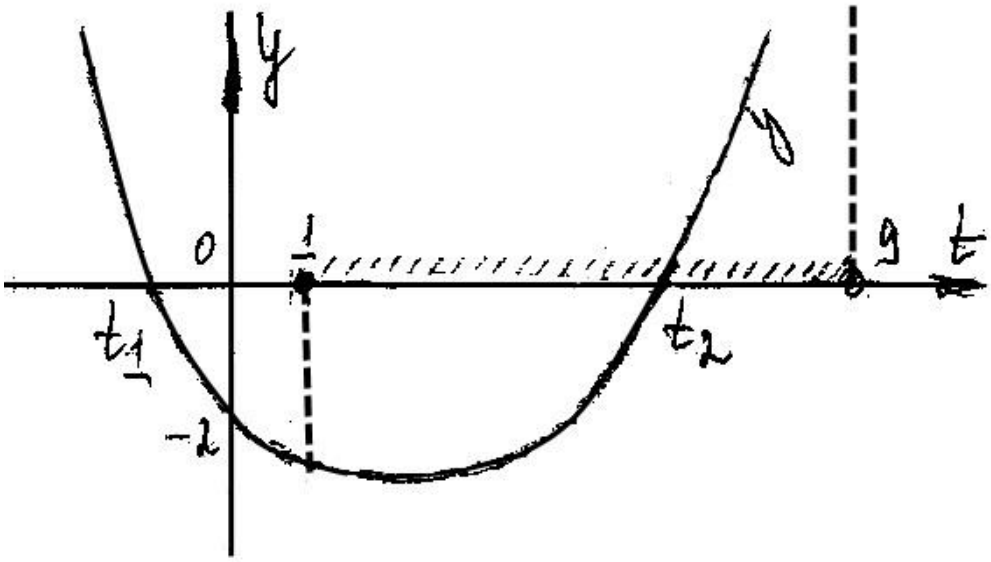
$$t_1 < 0;\ t_2 > 0;\ \textit{если } 0 < t < t_2,\ \textit{то } f(t) < 0$$

$$\textit{если } t > t_2, \textit{то } f(t) > 0$$

Уравнение $f(t) = 0$ имеет корни на *[1;9)*, если

$$1 \leq t_2 < 9 \Rightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(9) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - (a+8) - 2 \leq 0 \\ 81 - 9(a+8) - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow -9 \leq a < \frac{7}{9}$$

Значит, уравнение $f(t) = 0$ не имеет корней на *[1;9)* для всех остальных а, т.е. для $a < -9;\ a \geq \frac{7}{9}$.



Ответ: $a < -9;\ a \geq \frac{7}{9}$.

Пример №5

Найдите все значения a, при которых множество решений неравенства $(a - x^2)(a + x - 2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 2$.

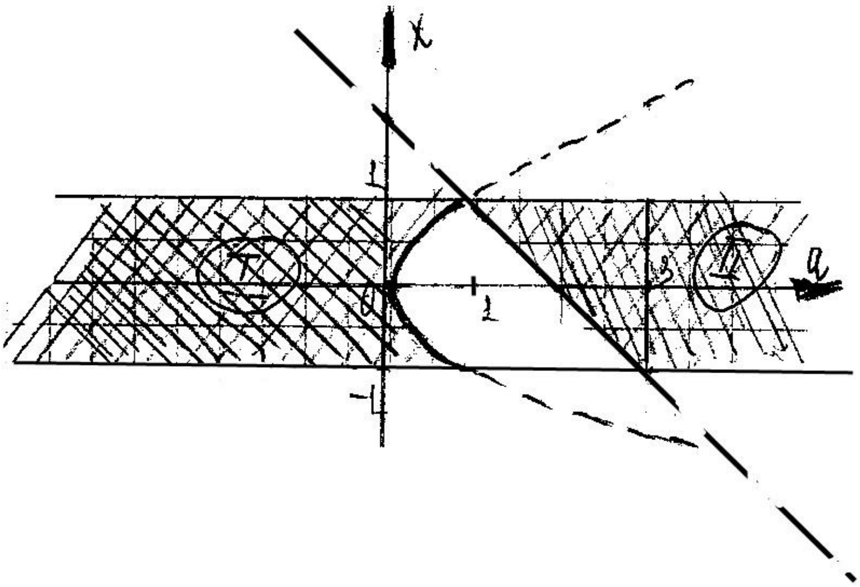
Решение:

Найдем a, при котором неравенство $(a - x^2)(a + x - 2) \geq 0$ выполняется для всех $x \in [-1; 1]$.

Неравенство равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - x^2 \geq 0 \\ a + x - 2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a - x^2 \leq 0 \\ a + x - 2 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq x^2 \\ a \geq -x + 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a \leq x^2 \\ a \leq -x + 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Автор: Кондрина Раиса Георгиевна



Неравенство выполняется для всех $x \in [-1; 1]$при $a \leq 0$ или $a \geq 3$

Ответ: $a \leq 0$; $a \geq 3$.

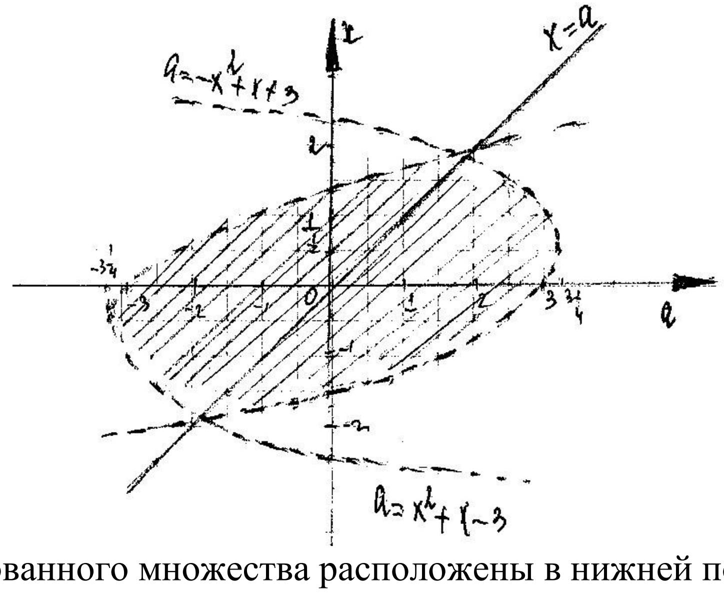
Пример №6

При каких ***a*** не для всех отрицательных значений ***x*** выполняется неравенство: $x^2 + |x - a| - 3 \geq 0$

Решение:

Найдём ***a***, при которых существуют отрицательные ***x***, удовлетворяющие неравенству: $x^2 + |x - a| - 3 < 0$

Рассмотрим совокупность систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - a \geq 0 \\ x^2 + x - a - 3 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - a < 0 \\ x^2 - x + a - 3 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ a > x^2 + x - 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < a \\ a < -x^2 + x + 3 \end{cases} \end{array}\right.$



Точки заштрихованного множества расположены в нижней полуплоскости при $-3\frac{1}{4} < a < 3$.

Ответ: $-3\frac{1}{4} < a < 3$.

Литература

1. В.П. Моденов. Грани математики. Москва 1999 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. координатно-параметрический метод.

Автор: Кондрина Раиса Георгиевна