К. А. Кноп

ВЗВЕШИВАНИЯ И АЛГОРИТМЫ: от головоломок к задачам

Школьные
Математические
Кружки

К. А. Кноп

Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам

Электронное издание

Издательство МЦНМО
Москва, 2016

УДК 51(07)
ББК 22.1
К53

Кноп К. А.
Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2016
103 с.
ISBN 978-5-4439-2381-9

Пятая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена задачам о взвешиваниях и предназначена для занятий со школьниками 6–9 классов. В неё вошли разработки семи занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для учителя. Приведены также дополнительные задачи. Для удобства заключительная часть книжки сделана в виде раздаточных материалов.

Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков.

Подготовлено на основе книги: *К. А. Кноп*. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. — 5-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-1034-5.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2381-9

© Кноп К. А., 2016.
© МЦНМО, 2016.

Я посвящаю эту книжку своему отцу,
научившему меня мыслить,
а значит, существовать.

Предисловие

Математические головоломки, как и математические задачи, известны с древности. В течение очень долгого времени они не отделялись друг от друга. Чёткого рубежа нет и поныне, несмотря на появление значительного культурного слоя, как в области олимпиадных задач, так и в области спортивных пазлов, то есть головоломок, традиционно предлагаемых на чемпионатах по решению головоломок (например, к таким пазлам относятся популярные ныне судоку и какуро). В рамках этой книжки автор хотел бы отличать головоломки от задач следующим образом: каждый сюжет перестает быть головоломкой и становится математической задачей тогда, когда к нему найден подход, позволяющий решать не только его, но и аналогичные сюжеты.

Задачи, о которых у нас пойдёт речь, очень популярны среди любителей головоломок и вместе с тем незаслуженно обойдены вниманием в большинстве книжек, предназначенных для занятий математического кружка. О них, конечно же, упоминается, но как-то вскользь. Вероятно, причиной такого положения дел является то, что в этих задачах очень многие видят головоломки, и только головоломки. На самом деле «взвешивательные» сюжеты — отличный полигон для знакомства с самыми разнообразными математическими идеями и методами, в том числе и актуальными для современной математики. Косвенным доказательством этого тезиса служит то, что зачастую простое упражнение всего одной деталью отличается от нерешённой математической проблемы. Например, задача об определении двух фальшивых монет из N за *наименьшее* число взвешиваний на чашечных весах — нерешённая (открытая) проблема. Задач промежуточной трудности (достаточно сложных, но решаемых полностью) не так много. Тем не менее они есть, и именно ими автор и старался наполнить эту книжку. Пользуясь случаем, автор выражает огромную признательность научному редактору книги Александру Васильевичу Шаповалову, вклад которого невозможно переоценить.

Для ряда задач мы выделили специальную часть, содержащую обсуждение основной идеи решения, предварительный анализ условия или иные наводящие соображения. Она напечатана более мелким шрифтом сразу после условия задачи. При решении задачи на занятии кружка учитель может «поделиться» этой частью решения с учениками. Аналогично после текста решений мелким шрифтом набраны комментарии для преподавателя, относящиеся к развитию и возможным обобщениям задачи.

Знаком ☝ обозначается важный комментарий для преподавателя (обычно после решения задачи), разъясняющий, на что следует обратить внимание, а также какие аналогии и обобщения имеют сама задача и приведённое решение.

Рамки этой книги не позволяют упомянуть в ней все сюжеты, имеющие отношение к взвешиваниям. Автору пришлось делать выбор, и не всегда он был лёгким. Так, в книжку не поместились задачи о сортировке, о нестандартных взвешивающих устройствах и многие другие. Впрочем, взвешивания — это только один из типов задач *комбинаторного поиска*. Чтобы напомнить о том, что бывают и другие типы, первое занятие мы целиком посвятили угадываниям задуманных объектов. Не удивляйтесь: это тоже задачи, решение которых сводится к работе с информацией, — а это и есть основное содержание настоящей книги.

Константин Кноп,
Санкт-Петербург, ноябрь 2010.

Занятие 1

Угадай, что я задумал!

В этом занятии, как и во всех последующих, задачи расположены в «генетическом» порядке: следующие задачи развивают предыдущие, а их решения могут существенно опираться на решения предыдущих. Это не значит, что последнюю задачу занятия совсем невозможно решить раньше остальных. Но пытаться решать задачи с конца или вразброс — тупиковый путь: решить, может быть, и решишь, но ничему не научишься. Поэтому, даже выдав листочек сразу со всеми задачами, учитель должен сориентировать школьников на *строго последовательное* решение. С этой целью рекомендуется разбирать первые задачи сразу, как только они решены хотя бы двумя-тремя учениками.

Во всех задачах на угадывание алгоритм считается верным, если он работает (то есть укладывается в заданное число действий и при этом решает поставленную задачу) во *всех* возможных случаях, а не только тогда, когда угадывающему повезло.

Если не оговаривается противное, то во всех последующих задачах этого занятия загадывающий даёт на вопросы ответы «да» либо «нет».

Задача 1.1. Петя загадал натуральное число от 1 до 8. Витя хочет отгадать его, задавая Пете вопросы, на которые тот отвечает «да» либо «нет». Как должен действовать Витя, чтобы отгадать загаданное число за 3 вопроса?

Несложная задача, допускает много различных решений. Например, первым вопросом можно спрашивать: «Верно ли, что загаданное тобой число чётно?». Если ученики предлагают решение с использованием неравенств, то полезно обратить их внимание на существенную разницу между строгими и нестрогими неравенствами. Например, один и тот же вопрос можно задать и как: «Верно ли, что твоё число не больше четырёх?», и как: «Верно ли, что твоё число меньше пяти?». Ещё один способ облегчить ученикам решение — предложить им разбиться на пары и поиграть за Петю и Витю.

Решение. Будем оформлять ход угадывания в виде такой таблички:

<table>
<tr><th>Вопр. 1</th><th>Отв. 1</th><th>Вопр. 2</th><th>Отв. 2</th><th>Вопр. 3</th><th>Отв. 3</th><th>Число</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Больше 4?</td><td rowspan="4">Да</td><td rowspan="4">Больше 6?</td><td rowspan="2">Да</td><td rowspan="2">Больше 7?</td><td>Да</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Нет</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Нет</td><td rowspan="2">Больше 5?</td><td>Да</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Нет</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Нет</td><td rowspan="4">Больше 2?</td><td rowspan="2">Да</td><td rowspan="2">Больше 3?</td><td>Да</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Нет</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Нет</td><td rowspan="2">Больше 1?</td><td>Да</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Нет</td><td>1</td></tr>
</table>

Первым вопросом Витя спрашивает: «Верно ли, что твоё число больше четырёх?» Ответить «да» Петя может, если он задумал 5, 6, 7 или 8, а ответ «нет» означает, что задумано одно из чисел 1, 2, 3 или 4. Как после ответа «да», так и после ответа «нет» Вите останется угадать задуманное число из четырёх возможных вариантов, и второй вопрос Вити для этих вариантов различен. После второго ответа у Вити останется для задуманного числа два варианта, а после третьего — только один, приведённый в столбце «Число».

Задача 1.2. Сколько вопросов понадобится Вите, если Петя может загадать число от 1 до 32?

Как правило, ученикам не нужно подсказывать, что 32, как и 8, — степень двойки. Однако если задача «зависла» надолго, учитель может задать наводящие вопросы: как свести эту задачу к предыдущей? Сколько вопросов для этого потребуется Вите?

Ответ: 5 вопросов.

Решение. Как и в предыдущей задаче, каждым вопросом Витя может делить пополам тот интервал, в котором может лежать задуманное Петей число. После первого вопроса он оставит 16 вариантов, после второго — 8, затем 4, 2 и, наконец, 1.

Задача 1.3. а) Петя загадал одну из сторон правильного восьмиугольника. Витя может провести любую диагональ в этом восьмиугольнике и спросить Петю, в какой из двух получившихся частей лежит загаданная сторона. Как Вите отгадать сторону за 3 вопроса? б) То же для семиугольника.

Несложная задача, демонстрирующая, что вовсе не обязательно загадывать числа, а тип разрешённых вопросов может быть сильно ограничен условиями задачи.

Решение. а) Первая диагональ должна соединять две противоположные вершины (последующие диагонали уже могут быть проведены по-разному).

б) Первая проведённая Витей диагональ должна разделить семиугольник на части, содержащие 4 и 3 стороны.

Задача 1.4. Петя загадывает число от 1 до 10. Докажите, что Вите не хватит трёх вопросов, чтобы угадать это число.

Сразу стоит напомнить, что «не хватит» означает, что *не во всех случаях* хватит. Так что это первая задача, в которой мы хотим получить от учеников *доказательство оценки*. Причём здесь ещё реально провести доказательство полным перебором, а вот в более сложных задачах это уже затруднительно. Однако дальнейшие задачи будут решаться намного проще, если в этом месте учитель предложит ученикам снова поиграть за Петю и Витю, причем «Пете» разрешит не загадывать число на самом деле, а выбирать свои ответы так, чтобы максимально затруднить «Вите» угадывание.

Первое решение. Проследим за количеством вариантов (возможностей для загаданного числа), остающихся после ответов Пети. Каким бы ни был первый вопрос Вити, общее количество чисел, соответствующих ответам «да» или «нет», равно 10, поэтому после первого ответа в неблагоприятном случае может остаться не менее 5 вариантов. Каким бы ни был второй вопрос, после ответа на него может остаться не менее $\left[\frac{5}{2}\right]+1=3$ вариантов, а после третьего — не менее $\left[\frac{3}{2}\right]+1=2$. Но это и значит, что после трёх ответов Вите не удалось угадать число.

Второе решение. Предположим, что Вите как-то удалось составить набор вопросов, решающих задачу, и оформить табличку как в задаче 1.1: для второго вопроса он, возможно, заготовил 2 варианта — для ответов «да» и «нет» на первый вопрос, для третьего — 4 варианта. Теперь есть 8 вариантов развития событий, которые мы для краткости назовем «наборами ответов». Например, набор «да, нет, да» означает, что на первый вопрос был дан ответ «да». Далее Витя задал второй вопрос, приготовленный для случая ответа «да», получил ответ «нет», задал третий вопрос, приготовленный для случая ответов «да, нет», и получил на него ответ «да». Теперь он обязан предъявить число. Каждому набору ответов должно соответствовать не более одного числа, иначе мы не решили задачу. Но такое невозможно: чисел больше, чем наборов ответов. Противоречие.

Задача 1.5. В орфографическом словарике 120 страниц, на каждой из них по 60 слов. Петя открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой страницы. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

Попробуйте подсказать, что сначала нужно угадать страницу, а потом — номер слова на этой странице. На первое действие уйдёт не более 7 вопросов, на второе — не более 6. А вот поставленный в задаче вопрос о меньшем числе вопросов — это повторение задачи об оценке, но тут уже полный перебор не помогает. Предложите ученикам подумать над тем, сколько всего различных слов в словарике.

Решение. Поскольку $120 < 128$, для угадывания номера страницы Вите хватит 7 вопросов. Затем ещё за 6 вопросов Витя угадает номер слова на этой странице ($60 < 2^6 = 64$). Таким образом, 13 вопросов Вите точно хватит. А вот меньшего числа не хватит, так как задуманным может быть любое из $120 \cdot 60 = 7200$ слов, а 12 вопросов позволяют угадать не более чем из $4096 = 2^{12}$ вариантов.

Задача 1.6*. В англо-русском словарике 80 страниц, на каждой из них по 50 слов. Петя открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой страницы. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

Задача с некоторым подвохом. Если решать её так, как предыдущую, то получается решение за $7 + 6$ вопросов. Но вот оценка даёт только 12, потому что $80 \times 50 = 4000 < 2^{12} = 4096$. (Разумеется, школьники могут не знать ни логарифмирования, ни даже возведения в степень, но здесь хватает умения делить на 2 и сосчитать, сколько таких делений необходимо.) Зато после вычисления оценки приходит идея, что можно с самого начала перенумеровать слова от 1 до 4000 и отгадывать номер слова! Систематическое применение этой идеи и превращает головоломку в более-менее стандартную математическую задачу.

Ещё можно порекомендовать поиграть в «угадай дату»: учитель загадывает дату (день и месяц), а ученики пытаются её угадать, называя свои даты. Учитель отвечает: раньше или позже его дата, чем названная.

Решение. Мысленно перенумеруем все слова — их не более 4000, поэтому угадать задуманное слово можно не более чем за 12 вопросов.

Задача 1.7. Петя загадал пару натуральных чисел и сообщил Вите, что их произведение равно 60. Помогите Вите угадать эти числа за три вопроса. Порядок чисел в паре не имеет значения.

Решение. Перечислим все варианты: $(1, 60)$, $(2, 30)$, $(3, 20)$, $(4, 15)$, $(5, 12)$, $(6, 10)$. Их всего шесть, и Витя может просто отгадывать меньшее число в каждой паре! Впрочем, нетрудно придумать за него и другие варианты отгадывания. Например, первым вопросом может быть: «Верно ли, что одно из загаданных чисел делится на 4?»

В занятии 5 мы вернёмся к этой же задаче в усложнённом варианте.

Задача 1.8. Петя загадывает два натуральных числа от 1 до 10 — одно чётное и одно нечётное. Помогите Вите угадать эти числа за 5 вопросов.

Ещё один сюжет, в котором требуется научиться делить пополам, потому что если отгадывать числа по отдельности, то потребуется шесть вопросов. Подсказка, которую можно дать ученикам, если они не справятся самостоятельно: первым вопросом Витя может спросить, верно ли, что сумма загаданных чисел меньше 12. Впрочем, в решениях приведён ещё более простой рецепт.

Первое решение («идейное»). Пусть Витя просто пронумерует все возможные пары загаданных чисел (в любом порядке), покажет листок с нумерацией Пете, а дальше будет задавать вопросы про пару с таким-то номером. Номеров всего 25, $25 < 2^5 = 32$, поэтому Витя сумеет угадать пару за 5 вопросов.

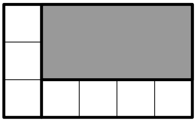
Второе решение («техническое»). Выпишем все 25 возможных сумм загаданных чисел: $1 + 2 = 3$, $1 + 4 = 2 + 3 = 5$, $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 7$, $1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5 = 9$, $1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6 = 11$, $3 + 10 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7 = 13$, $5 + 10 = 6 + 9 = 7 + 8 = 15$, $7 + 10 = 8 + 9 = 17$, $9 + 10 = 19$.

Сначала все варианты нужно разделить на две части так, чтобы в каждой части оказалось не более 16 вариантов (а лучше — ещё меньше). Например, это можно сделать вопросом: «Верно ли, что сумма твоих чисел меньше 12?» Для следующего вопроса надо проследить, чтобы при любом ответе на него осталось не более 8 вариантов, для третьего — не более 4 и т. д.

Задача 1.9. а) Петя загадывает клетку шахматной доски 8×8. Витя каждым ходом может обвести по границам клеток любой прямоугольник и узнать у Пети, попала ли в него загаданная клетка. Как должен действовать Витя, чтобы угадать

Петину клетку за 6 ходов? б) Решите ту же задачу для доски 5×5 и пяти ходов.

Решение. а) Например, Витя может сначала за три хода определить горизонталь, в которой находится искомая клетка, а потом ещё за три хода найти вертикаль. Впрочем, он может и чередовать «горизонтальные» и «вертикальные» ходы, лишь бы каждый ход делил множество подозрительных клеток пополам.



б) После ответа Пети на очевидный первый ход подозрительные клетки могут составить прямоугольник 3×5, из которого вторым ходом Вите надо вырезать прямоугольник 2×4. Если искомая клетка находится в нём, то дальше поступаем аналогично решению а), а если вне прямоугольника, то каёмка прямоугольника 3×5 следующим ходом делится на части 3×1 и 1×4 (см. рисунок слева).

Задача 1.10. Карточный фокус. Фокусник кладёт перед зрителем колоду из 36 карт и просит его посмотреть и запомнить одну из карт. После этого фокусник раскладывает все карты в 6 стопок и просит зрителя сказать, в какой из них лежит его карта. Затем фокусник тасует карты, снова выкладывает их в 6 стопок и снова просит зрителя назвать ту из них, в которой лежит задуманная им карта. После этого фокусник сразу вытаскивает эту карту из стопки. В чём секрет такого фокуса?

Конечно, фокусник «тасует» карты не произвольно, а отслеживает, в какую стопку какая карта попадёт.

Решение. Зритель дважды сообщает фокуснику число от 1 до 6. Задача фокусника — так раскладывать карты в кучке, чтобы все 36 вариантов сообщений (для разных карт) были различными. А именно, в каждой кучке должно лежать ровно по 6 карт, причём во второй раскладке все эти карты должны оказаться в разных кучках.

Задача 1.11. Угадывание по делимости — 1. Петя загадал натуральное число A от 1 до 8. Витя называет любое натуральное число X, и Петя отвечает, верно ли, что X делится на A. Может ли Витя угадать A после трёх таких вопросов?

Подсказка: каждое Витино число X должно делить множество вариантов точно пополам (то есть чтобы после ответов «да» и «нет» оставались 4 варианта, иначе угадать задуманное Петей число будет невозможно). Например, таким числом может быть 6, потому что оно делится на 1, 2, 3, 6 и не делится на остальные четыре числа.

Решение. Задача сводится к отысканию алгоритма деления пополам в указанных условиях. Например, Витя может поступать в соответствии с такой табличкой:

<table>
<tr><th>Вопрос 1</th><th>Ответ 1</th><th>Вопрос 2</th><th>Ответ 2</th><th>Вопрос 3</th><th>Ответ 3</th><th>A</th></tr>
<tr><td rowspan="8">$X = 105$</td><td rowspan="4">Делится</td><td rowspan="4">$X = 3$</td><td rowspan="2">Делится</td><td rowspan="2">$X = 1$</td><td>Делится</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Нет</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Нет</td><td rowspan="2">$X = 5$</td><td>Делится</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Нет</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Нет</td><td rowspan="4">$X = 4$</td><td rowspan="2">Делится</td><td rowspan="2">$X = 2$</td><td>Делится</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Нет</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Нет</td><td rowspan="2">$X = 6$</td><td>Делится</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Нет</td><td>8</td></tr>
</table>

Задача 1.12. Да/нет/не знаю. В этой задаче Петя может отвечать на вопросы «да», «нет» или «не знаю». Он загадал число 1, 2 или 3. Придумайте вопрос, ответ на который позволит Вите угадать это число.

Решение. Необходимо поставить Петю в ситуацию, в которой он точно будет что-то «не знать». Как это сделать проще всего? Очевидно, самому загадать какое-то число. Дальше возможны очень многие варианты, ограничиваемые лишь фантазией. Приведём примеры.

1. Я задумал число 1,5 или 2,5. Верно ли, что твоё число больше моего?

2. Я задумал 4 или 6. Верно ли, что если наши числа перемножить, результат будет двузначным?

3. Я задумал число, записываемое одними единицами. Верно ли, что моё число нацело делится на твоё?

Впрочем, вовсе не обязательно что-то задумывать. Есть и другие изящные возможности.

4. Замечательная книжка «Математический аквариум»[1], из которой взята эта задача, была впервые издана в 1987 году. Можно ли будет со временем найти её издание, датированное $(1887 + 50N)$-м годом, где N — задуманное тобой число?[2]

[1] *В. А. Уфнаровский*. Математический аквариум. М.: МЦНМО, 2014.

[2] Для простоты будем считать, что любую когда-то изданную книжку можно найти.

5. В каком из слов или словосочетаний «да», «нет», «не знаю» количество согласных букв равно загаданному тобой числу?

См. также дополнительные задачи Д.1–Д.5, Д.11.

Занятие 2

Монета на весах

О соглашениях и условностях. В математических задачах мы, как правило, имеем дело с «идеальными» объектами. Так, во всех задачах этого занятия мы работаем с идеальными *монетами*, а также с устройством под названием *двухчашечные весы*. Это устройство выглядит примерно так, как показано на рисунке справа. Для каждого взвешивания и каждого возможного результата мы должны принять решение, какие монеты в следующем взвешивании следует положить на левую чашу весов, какие — на правую, а какие отложить. Правила принятия таких решений мы называем *алгоритмом взвешиваний*. Если на чаши кладутся монеты равной суммарной массы, то результат такого взвешивания — равновесие, или *равенство*. Если же содержимое одной из чаш оказывается тяжелее, то мы говорим, что эта чаша *перевесила*. На сколько именно перевесила, мы не знаем, потому что никаких шкал и стрелок на наших весах нет. Таким образом, каждое взвешивание даёт один из трёх результатов — «равновесие», «перевесила левая чаша», «перевесила правая чаша». Про монеты подразумевается, что все настоящие монеты (для краткости и удобства — НМ) на вид неразличимы и имеют одинаковый вес, а фальшивые монеты (ФМ) на вид неотличимы от настоящих монет, но имеют другой вес. Монеты, которые

могут быть фальшивыми, поскольку в результате взвешиваний пока не установлено обратное, мы будем называть подозрительными монетами (ПМ). Для проведения взвешиваний мы различаем (и никогда не путаем) все используемые монеты. Например, можно считать, что монеты пронумерованы и на каждой монете фломастером с невесомыми чернилами написан её номер. Что ещё известно — говорится в условиях конкретных задач.

Задача 2.1. Самая классическая головоломка. Одна из девяти монет фальшивая, она весит легче настоящей. Как определить ФМ за 2 взвешивания?

После решения этой задачи следует обратить внимание учеников на то, что ключевая идея в решении — правильная *трисекция*, то есть последовательное деление множества вариантов на три равные части. После первой трисекции должно остаться не более трёх подозрительных монет, после второй — не более одной ПМ, которая и является фальшивой. Таким образом, взвешивания на чашечных весах являются логическим продолжением задач об угадывании чисел, в которых основным методом была *бисекция*.

Решение. Выложим на каждую чашу весов по три монеты. Если весы остались в равновесии, то ФМ — среди тех трёх монет, которые в этом взвешивании не участвовали. Если же одна из чаш оказалась легче, то ФМ — одна из трёх монет, лежащих на этой чаше. В каждом из этих случаев у нас остались только три подозрительных монеты. Вторым взвешиванием кладём на чаши по одной из них, и по результату этого взвешивания однозначно находим ФМ.

Вначале все 9 монет — ПМ. Суть приведённого решения состоит в том, чтобы каждым взвешиванием делить множество ПМ на три *равные* части, — тогда при любом исходе число ПМ уменьшается *ровно втрое*.

Задача 2.2. а) Одна из 27 монет фальшивая, она весит легче настоящей. Как определить ФМ за 3 взвешивания?

б) Решите ту же задачу для 26 монет.

в)* Придумайте, как обобщить решение на любое число монет от 10 до 27.

К задаче 2.2(в) возможны два различных подхода. Первый — стараться делать трисекцию как можно ближе к правильной (например, чтобы количества вариантов после каждого из трёх исходов каждого взвешивания отличались не более чем на 1, — кстати, почему этого всегда можно добиться?). Второй — сводить задачу к уже решённой. Например, для 20 монет можно положить на чаши по 9 монет, тогда в случае неравенства придётся решать задачу 2.1.

Решение. а) Выложим на каждую чашу весов по 9 монет. При любом исходе этого взвешивания какие-то 9 монет останутся ПМ, а в нашем распоряжении будет еще два взвешивания, и нам придётся решать задачу 2.1.

б) Выложим на весы по девять монет. В случае неравенства снова решаем задачу 2.1, а в случае равенства останутся только восемь ПМ. Добавив к ним любую из остальных монет (которые точно не могут быть ФМ), мы снова сведём задачу к уже решённой.

в) Пусть всего имеется N монет. Выложим на чаши по $\left[\frac{N}{3}\right]$, остальные отложим. Если одна из чаш перевесила, то осталось $\left[\frac{N}{3}\right]$ ПМ, а в случае равновесия — $N-2\left[\frac{N}{3}\right]$ ПМ. Поскольку все остальные монеты уже точно настоящие, а общее число монет не меньше десяти, группу ПМ можно дополнить настоящими монетами до девяти, а затем решать задачу 2.1.

Задача 2.3. а) Докажите, что за два взвешивания невозможно гарантированно определить одну лёгкую ФМ из более чем девяти монет.

б) Решая задачу 2.2(а), Петя положил в первом взвешивании на каждую чашу весов *не* по 9 монет. Докажите, что у него может не получиться определить ФМ за три взвешивания.

Предложите сравнить эту задачу (и её решения) с задачей 1.4.

а) **Первое решение.** Проследим за количеством вариантов — числом ПМ, остающихся после взвешиваний. Если число монет больше девяти (то есть не меньше десяти), то при каком-то из результатов первого взвешивания останется не менее $\left[\frac{10}{3}\right]+$ $+1=4$ ПМ, а после второго — в каком-то из исходов будет не менее $\left[\frac{4}{3}\right]+1=2$ ПМ. Но это и значит, что за два взвешивания нам не удалось определить ФМ.

Второе решение. Предположим, что нам как-то удалось проделать взвешивания, решающие задачу. Составим табличку соответствий между исходами пары этих взвешиваний и монетами, которые могли являться ФМ при данном исходе. Каждому из исходов должно соответствовать не более одной ФМ, иначе мы не решили задачу. Но исходов всего 9, а монет больше. Противоречие.

б) **Решение.** Если Петя положит на чаши *больше* чем по девять монет, то в случае неравенства у него останется более девяти ПМ и дальнейшее решение будет невозможно (см. задачу 2.3(а)). Если же он положит *менее* чем по 9 монет, то отложенными окажутся не менее 11 монет и в случае равновесия все они будут ПМ, что также означает невозможность гарантированно решить задачу за оставшиеся два взвешивания.

В сущности, оценка во всех случаях делается «анализом с конца»: перед последним взвешиванием должно быть не более 3 ПМ, перед предпоследним — не более $3 \cdot 3$ и т. д. Далее мы увидим, что этот же приём работает и в более сложных случаях.

Задача 2.4. Из какого наибольшего числа монет удастся определить одну лёгкую ФМ за четыре взвешивания? Обоснуйте свой ответ.

Большинство учеников решают задачи 2.1–2.2 так называемым «последовательным» алгоритмом, то есть указывают, какие монеты нужно класть на весы в первом взвешивании, затем в зависимости от его результатов проводят второе взвешивание и дальше точно так же рассматривают случаи перед каждым последующим взвешиванием. Это нормально и (при аккуратном и полном переборе случаев) не должно вызывать у учителя никаких возражений. Однако в задачах 2.3 и 2.4 возникают уже не алгоритмы взвешиваний, а *оценки* (нижняя оценка числа взвешиваний для данного количества монет и верхняя оценка числа монет для заданного числа взвешиваний). Многие ученики пытаются их решать такими же последовательными рассуждениями, однако такой подход принципиально неверен! Даже если конкретный (предлагаемый учеником) алгоритм взвешиваний не позволяет отыскать ФМ за необходимое число взвешиваний, то это вовсе не означает, что никакой другой способ взвешиваний не сможет дать нужный результат.

«Последовательные» рассуждения могут быть правильными, если только они не опираются ни на какой алгоритм взвешиваний, а рассматривают произвольное первое взвешивание и три его возможных результата. Дальше должен применяться *принцип Дирихле* или равносильное ему рассуждение: если изначально было N «подозрительных» монет, то хотя бы в одном из вариантов (результатов первого взвешивания) их окажется не меньше чем $\frac{N}{3}$.

Важнейший практический вывод из задачи 2.3(б) состоит в том, что оценки в информационных задачах — не «вещь в себе», а необходимый инструмент для поисков правильного алгоритма. Полученная оценка сразу показывает, какое число монет *не имеет смысла* класть на весы, а это резко ограничивает перебор случаев.

Ответ: из $81 = 3^4$.

Решение. Алгоритм взвешиваний для 81 монеты аналогичен решению задач 2.1 и 2.2(а), доказательство невозможности решить задачу для большего числа монет аналогично 2.3.

Задача 2.5. Среди восьми монет, возможно, есть одна лёгкая ФМ (но её может и не быть). Как за два взвешивания найти ФМ, если она есть, или доказать, что её нет?

Решение. Заметим, что при нахождении одной ФМ из девяти мы одну из монет вообще никогда не клали на весы. Таким образом, если мысленно добавить девятую монету, которая будет фальшивой в том случае, когда среди восьми монет нет фальшивой, то, используя 8 имеющихся монет, мы в любом случае найдём фальшивую.

В следующих задачах появятся разнотипные монеты (то есть некоторые из них визуально отличимы от других). Для них важно делать взвешивания так, чтобы класть на чаши весов равное количество монет каждого типа, иначе никакой исход взвешивания не даст никакой информации.

Задача 2.6. а) Пусть имеется 7 серебряных монет и 2 медные, причём медные отличаются по виду от серебряных. Известно, что одна из монет фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей медной, фальшивая монета легче настоящей монеты из того же металла). Как найти ФМ за два взвешивания?

б) Решите ту же задачу для $N \leqslant 9$ серебряных монет и $9 - N$ медных.

Решение. а) Положим на каждую чашу весов по 3 серебряные монеты. Если одна из чаш оказалась легче, то ФМ находится на ней и мы отыщем её вторым взвешиванием. Если же весы оказались в равновесии, то ФМ — одна из трёх остальных. Тогда вторым взвешиванием сравним между собой две медные монеты.

б) Для $N = 8$ задача решается аналогично, только вторым взвешиванием нужно сравнивать не две медные, а две серебряные монеты. Для $N = 6$ — ещё проще: вторым взвешиванием можно сравнить любые две медные монеты. Для $N = 5$ при первом взвешивании нужно класть на весы по 2 серебряные и по одной медной монете. Случаи с $N < 5$ — симметричные, решения для них получаются заменой слова «медная» на слово «серебряная» и наоборот.

Задача 2.7. Есть одна золотая, 3 серебряные и 5 бронзовых медалей. Известно, что одна из них фальшивая (весит легче настоящей). Настоящие медали из одного металла весят одинаково, а из различных — нет. Как за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую медаль?

Подсказка. Можно ли найти фальшивку, если есть одна золотая, одна серебряная и одна бронзовая медали? Нет, так как не с чем сравнивать. А если ещё есть настоящая серебряная и настоящая бронзовая медали? Наверное, да. Осталось придумать, как это сделать за одно взвешивание.

Решение. Поскольку имеется девять вариантов, первым взвешиванием должны быть положены на весы 6 медалей — по три на каждую чашу. При этом на каждой чаше должно быть поровну как серебряных, так и бронзовых медалей. Единственный способ достичь этого — положить по одной серебряной и две бронзовых медали. Если в результате одна из чаш оказалась легче, то вторым взвешиванием достаточно сравнить между собой те бронзовые медали, которые на ней лежали. Если же весы оказались в равновесии, то вторым взвешиванием нужно найти фальшивую медаль среди трёх оставшихся подозрительными — одной бронзовой, одной серебряной и одной золотой. Ясно, что золотую сравнивать не с чем, поэтому на весы её класть нельзя. А вот подозрительные бронзовую и серебряную медали нужно положить на разные чаши, при этом уравновесив настоящими (то есть уже определёнными как нефальшивые после первого взвешивания) медалями из того же материала. Иначе говоря, если после первого взвешивания остались подозрительными медали $З_1$, $С_1$ и $Б_1$, то вторым взвешиванием сравниваем $С_1 + Б_2$ с $С_2 + Б_1$. Если в результате наступило равновесие, то все эти медали настоящие, а фальшивой является $З_1$; если перевесила $С_2 + Б_1$, то ФМ на другой чаше, то есть это $С_1$; наконец, если перевесила $С_1 + Б_2$, то ФМ — $Б_1$.

Задача 2.8. Есть 27 монет, часть из них серебряные, остальные — медные. Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей медной). ФМ легче настоящей монеты из того же металла. Как найти ФМ за три взвешивания?

Решение. Разобьём все монеты на пары монет из одного металла, лишь одна монета останется без пары. Выберем любые 9 пар и разложим монеты каждой пары на две разные чаши. В результате на чашах окажется поровну медных и поровну серебряных монет. После взвешивания останется ровно 9 ПМ: с лёгкой чаши при неравновесии или отложенные при равновесии. Задача свелась к задаче 2.6(б).

Задача 2.9. Есть 5 серебряных и 4 золотые монеты. Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей золотой). Если ФМ серебряная, то она легче настоящих серебряных монет, а если золотая, то тяжелее настоящих золотых. Как найти ФМ за два взвешивания?

Решение. Положим на каждую чашу весов по 2 серебряные и одной золотой монете. При равенстве ПМ являются три отложенные монеты, сравним между собой две золотые из них. При неравенстве у нас тоже будет 3 ПМ (две серебряные с легкой чаши и одна золотая с тяжёлой), и мы сравним между собой серебряные.

Задача 2.10. Есть 27 монет, часть из них серебряные, остальные — золотые. Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей золотой). Серебряная ФМ легче настоящей серебряной, а золотая ФМ тяжелее настоящей золотой. Как найти ФМ за три взвешивания?

Решение. Разобьём все монеты на пары монет одного металла, лишь одна монета останется без пары. Выберем любые девять пар и разложим монеты каждой пары на две разные чаши. Пусть в результате на чашах окажется по z золотых и $9 - z$ серебряных монет. При равновесии ПМ являются 9 отложенных монет. При неравновесии подозрительны $9 - z$ серебряных монет на легкой чаше и z золотых на тяжелой, то есть снова девять ПМ. Повторим процедуру: выделим из ПМ четыре пары монет одного металла, разложим три пары по разным чашкам. По результатам взвешивания останутся три ПМ, причём как минимум две из них — пара, то есть одного металла. Их и сравним третьим взвешиванием.

Задача 2.11. Пусть среди 24 монет ровно половина — золотые. Одна из этих монет фальшивая, причём серебряная ФМ легче настоящей серебряной монеты, а золотая — тяжелее настоящей золотой. Более четырёх золотых или более четырёх серебряных монет класть на одну чашку запрещено. Как найти ФМ за три взвешивания?

Решение. Здесь всего 24 случая. Класть больше восьми монет на чаши весов точно нельзя, а если положить меньше восьми, то при равновесии останется больше девяти случаев и различить их оставшимися взвешиваниями будет невозможно. Следовательно, при первом взвешивании на весы кладём по 8 монет, то есть по 4 золотые и 4 серебряные. Тогда после неравенства останутся 4 золотые ПМ из перевесившей чаши и 4 серебряные ПМ с противоположной, остальные монеты уже будут заведомо настоящими. После равенства тоже будет $4 + 4$ ПМ. При втором взвешивании поступим почти так же, как мы делали в задаче о медалях: положим на одну чашу 3 подозрительные золотые и 3 подозрительные серебряные, а на другую — 3 настоящие золотые и 3 настоящие серебряные. Тогда если перевесит чаша с ПМ, то ФМ — одна из золотых, если перевесит другая чаша, то ФМ — одна из серебряных, а при равновесии ФМ является одна из двух оставшихся монет. В каждом из этих вариантов мы легко подберём третье взвешивание.

Задача 2.12. Подпиленная гирька. Имеется 9 гирек весом 100 г, 200 г, ..., 900 г. К сожалению, одна из гирек побывала в руках нечестных торговцев, и теперь она весит немного (не более чем на 10 г) легче, чем раньше. Как определить эту гирьку за два взвешивания?

Решение. Ключевая идея для этой задачи — найти две различные тройки гирь, которые в сумме должны весить одинаково. Тогда если одна из троек при взвешивании оказалась легче, то испорченная гиря находится именно в этой тройке, а в случае равновесия такая гиря находится среди тех трёх, которые в этом взвешивании не использовались. Пример таких троек — $100 + 300 + 700$ и $200 + 400 + 500$ (отложены 600, 800 и 900). Второе взвешивание в каждом из случаев отыскивается без труда (не забудьте, что можно уравновешивать весы заведомо настоящими гирьками).

См. также дополнительные задачи Д.8, Д.14, Д.15, Д.19.

Занятие 3

В поисках случая

В предыдущих задачах мы искали гирьку или монету и уже привыкли к трисекции. Правда, дважды возникал случай, когда фальшивой монеты не было вообще, но мы вывернулись, добавив фиктивную монету. В задачах этого занятия такой фокус не пройдёт: надо не просто найти монету или гирьку, а распознать, какой из возможных случаев имеет место. Основной приём решения — суметь увидеть *все* возможные случаи и провести *трисекцию случаев*, то есть именно из сравнения числа случаев подобрать нужные взвешивания.

В некоторых из задач этого занятия ученикам понадобится придумать новые идеи, в других задачах достаточно будет применить прежние идеи к новым сюжетам. В отличие от предыдущих занятий, здесь почти все сюжеты относительно новые, ещё не ставшие фольклором. Во всех задачах взвешивания делаются, как и раньше, на двухчашечных весах без дополнительных гирь.

Задача 3.1. Из трёх монет одна фальшивая, причём неизвестно, легче она или тяжелее настоящих. Как найти её за два взвешивания и определить, легче она или тяжелее?

Решение надо начинать с вопроса: сколько вариантов ответа в данной задаче? Хотя монет всего три, но каждая может фигурировать в ответе со словами «легче» или «тяжелее», то есть случаев, которые необходимо различить, не 3, а 6.

Хотя это и не спрашивается в задаче явно, но с учениками полезно обсудить, почему задачу нельзя решить за одно взвешивание. Причина в том, что одним взвешиванием удаётся различить не более трёх случаев. И даже если бы было известно заранее, что одна из этих монет заведомо настоящая, всё равно случаев оставалось бы 4.

Решение. Сравним любую пару монет. Если весы остались в равновесии, то ФМ в этом взвешивании не участвовала и обе взвешенные монеты настоящие. Тогда вторым взвешиванием можно любую из них сравнить с оставшейся (единственной подозрительной) монетой, и это позволит ответить на вопрос, легче она или тяжелее. Если же одна из чаш перевесила, то либо монета на этой чаше является тяжёлой ФМ, либо монета на другой чаше является лёгкой ФМ. В обоих случаях третья монета настоящая, и, сравнив её вторым взвешиванием с любой из ПМ, мы определим, является ли та фальшивой. В случае равенства во втором взвешивании вид фальшивой монеты (лёгкая/тяжёлая) определяется из результата первого взвешивания. Проиллюстрируем это с помощью таблички, пронумеровав монеты от 1 до 3.

Взвешивание 1	$1 \vee 2$								
Результат 1	$<$			$=$			$>$		
Взвешивание 2	$1 \vee 3$			$1 \vee 3$			$1 \vee 3$		
Результат 2	$<$	$=$	$>$	$<$	$=$	$>$	$<$	$=$	$>$
ФМ, лёгкая/тяжёлая	1, л	2, т	–	3, т	–	3, л	–	2, л	1, т

Поскольку второе взвешивание одно и то же для всех случаев, табличку можно сократить до двух строк:

Результаты	$<, <$	$<, =$	$<, >$	$=, <$	$=, =$	$=, >$	$>, <$	$>, =$	$>, >$
ФМ, л/т	1, л	2, т	–	3, т	–	3, л	–	2, л	1, т

Задача 3.2. Имеются 4 гири с маркировками 1 г, 2 г, 3 г и 4 г. Одна из них дефектная — более лёгкая или более тяжёлая, чем указано. Можно ли за два взвешивания узнать, какая из гирь дефектная, и при этом определить, легче она или тяжелее, чем на этой гире указано?

В задаче 8 вариантов ответа: каждая из гирь может оказаться лёгкой дефектной или тяжёлой дефектной. Значит, взвешивать надо так, чтобы были возможны три результата: левая чаша легче, равна или тяжелее правой (иначе множество случаев разобьётся на два и при невезении нам достанется не менее четырёх случаев на единственное взвешивание). Поскольку мы не знаем вес дефектной гири, равенство придётся обеспечивать для тех случаев, когда дефектная гиря не взвешивается. Тогда суммы маркировок гирь на разных чашах должны быть равными.

Ответ: да, можно.

Решение. Будем обозначать каждую гирю так, как она промаркирована. Как и в задаче 3.1, оба взвешивания можно спланировать сразу: $1 + 2 \vee 3$ и $1 + 3 \vee 4$. Табличка вариантов при этом оказывается такой:

$<, <$	$<, =$	$<, >$	$=, <$	$=, >$	$>, <$	$>, =$	$>, >$
1, л	2, л	3, т	4, т	4, л	3, л	2, т	1, т

Задача 3.3. Имеются 13 гирек массой 1 г, 2 г, ..., 13 г. К сожалению, одна из гирек побывала в руках нечестных торговцев, и теперь её вес немного отличается от правильного (но неизвестно, в какую сторону). Придумайте способ, позволяющий определить эту гирьку за три взвешивания.

Предварительный анализ. В задаче 26 вариантов ответа. Как и в задаче 3.2, необходимо сравнивать между собой наборы с равными суммами весов. Заметим, что если на весах лежат k гирь, то при неравенстве остаются подозрительными ровно k случаев: любая гиря с лёгкой чаши может оказаться дефектной лёгкой, а с тяжёлой — дефектной тяжёлой. Значит, чтобы осталось не более 9 случаев, мы обязаны взвесить не более девяти гирь. С другой стороны, при равенстве остаются подозрительными все невзвешенные гири, и каждой из них соответствует два случая. Значит, чтобы после равенства осталось не более 9 случаев, мы обязаны оставлять невзвешенными не более четырёх гирь. Таким образом, мы обязаны взвесить в первом взвешивании *ровно* 9 гирь.

Первое решение. Первым взвешиванием можно сравнить $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 12$ с $8 + 9 + 10$. Если результат оказался равновесием, то фальшивой является одна из гирь 6, 7, 11 или 13 г, а остальные гирьки настоящие. Объединим в пары гирьки (3, 6), (5, 7), (10, 11) и (9, 13). В каждой паре разность весов гирек — числа от 1 до 4, поэтому если мы будем класть гирьки из одной пары на разные чаши весов, то это равносильно взвешиванию гирек массой от 1 г до 4 г и найти дефектную гирьку можно так же, как в предыдущей задаче. (Поясним на примере: взвешивание $1 + 2 \vee 3$ из предыдущей задачи запишется как $(11 - 10) + (7 - 5) \vee (6 - 3)$. А затем, как в алгебре, перенесём отрицательные члены в другую сторону, то есть проделаем взвешивание $11 + 7 + 3 \vee 6 + 10 + 5$.)

Пусть, например, левая чаша в первом взвешивании перевесила (второй случай аналогичен). Тогда дефектная гиря — либо тяжёлая из $\{1, 2, 3, 4, 5, 12\}$, либо лёгкая из $\{8, 9, 10\}$. Сравним теперь $1 + 2 + 4 + 13$ с $3 + 5 + 12$. Если перевесит левая чаша, то дефектная — одна из гирь $\{1, 2, 4\}$ (13 — точно не дефектная), если правая, то одна из $\{3, 5, 12\}$. Если чаши останутся в равновесии, то дефектна одна из гирь $\{8, 9, 10\}$. В каждом случае легко подбирается третье взвешивание: для него нужно сравнить две подозрительные гири, добавив на весы одну заведомо настоящую.

Можно предложить ученикам сделать полную табличку взвешиваний и их результатов.

Второе решение. Для этой задачи удаётся придумать «план решения», то есть алгоритм, в котором используемые для взвешиваний гирьки не зависят от результатов предыдущих взвешиваний:

$$\begin{array}{rcl} 1+2+3+4+5+8 & \vee & 6+7+10, \\ 1+2+3+6+9+10 & \vee & 8+11+12, \\ 1+5+7+9+12 & \vee & 3+8+10+13. \end{array}$$

Для проверки достаточно убедиться, что никакие две гири не оказываются каждый раз либо на одной чаше, либо на противоположных чашах, либо одновременно отложенными.

Поскольку в плановом решении взвешивания можно делать в любом порядке, в каждом из них должно участвовать ровно 9 гирь. Проверяемое свойство («никакие две гири не оказываются каждый раз на одной чаше...» и т. д.) мы в дальнейшем будем называть *судьбой*. Решения, в которых используется понятие судьбы, а последующие взвешивания не опираются на результаты предыдущих, будут подробно разбираться в занятии 5. А пока не обязательно акцентировать внимание учеников на желательности именно таких решений, хотя и полезно отметить, что такая возможность во многих задачах имеется.

Задача 3.4. Потерянная гирька. Было 9 гирь массами 1 г, 2 г, ..., 9 г, причём гиря большей массы имеет больший размер. Одна из гирь потерялась. Как за два взвешивания на чашечных весах выяснить, какая именно гиря потеряна?

Решение. Промаркируем наименьшую гирю «1», вторую по размеру и весу — «2», последнюю — «8». Бесполезно взвешивать по одной гире на каждой чаше весов. Будем целенаправленно искать взвешивания «две гири против одной». Заметим, что если потеряна гиря весом p г, то гиря «k» при $k < p$ весит k г, а при $k \geqslant p$ весит $k + 1$ г. Посмотрим, что будет, когда сумма маркировок двух гирь равна третьей. Пусть «m»— меньшая из гирь на левой чаше, «n»— вторая гиря на ней же, а «$m + n$»— гиря на другой чаше весов. Левая чаша будет тяжелее только тогда, когда потерявшаяся гиря весит не больше m г. Поскольку таких случаев нужно набрать три, меньшая гиря должна быть «3». Правая чаша будет тяжелее, если масса потерянной гири p удовлетворяет двойному неравенству $n < p \leqslant m + n$, и очевидно, что при $m = 3$ таких случаев тоже три. Наконец, равновесие будет в остальных трёх случаях. Таким образом, в качестве первого взвешивания годится, например, «3» + «5» $\vee$ «8». При этом равенство соответствует потере одной из гирь 4, 5, 9, неравенство «<» означает потерю 6, 7 или 8, а «>» — потерю 1, 2 или 3. В каждом из этих случаев легко подбирается второе взвешивание, дающее нужную трисекцию трёх случаев.

Можно предложить ученикам сделать полную табличку взвешиваний и их результатов.

Задача 3.5. Фальшивые справа — 1. В ряд выложены десять монет, среди которых есть как настоящие, весящие по 10 г, так и фальшивые, весящие по 9 г. Известно, что каждая настоящая монета лежит левее любой фальшивой. Как за два взвешивания определить все фальшивые монеты?

Нужно сразу же обратить внимание учеников на то, что в этой задаче и НМ, и ФМ точно есть, поэтому возможны только 9 случаев: граница между НМ и ФМ проходит после 1-й монеты, после 2-й, ..., после 9-й. Какие взвешивания здесь имеют смысл? Если, например, положить на каждую чашу по одной монете, то лежавшая левее монета не может оказаться легче, поэтому такое взвешивание не способно дать три разных результата.

Решение. Прежде всего, мы хотим сделать первое взвешивание как можно более простым. Как и в предыдущей задаче, класть на чаши по одной монете не имеет смысла. А по две монеты? Выбрав для взвешивания 4 монеты, мы должны на одну чашу с самой правой из них положить и самую левую, иначе эта чаша окажется точно не тяжелее (то есть взвешивание даст не более двух исходов, и трисекции не получится!). Пусть таким образом взяты монеты с мест $A < B < C < D$, то есть сравниваются $A + D$ с $B + C$. Левая чаша перевесит, если граница настоящих и фальшивых монет находится где-то между C и D, а правая — если эта граница между A и B. Поскольку каждый из этих результатов должен соответствовать трём вариантам ФМ, получаем $B = A + 3$ и $D = C + 3$. Больше никаких условий нет, так как оставшиеся три варианта ФМ будут соответствовать равновесию. Например, можно взять $A = 1$, $B = 4$, $C = 5$, $D = 8$. После перевеса левой чаши нужно будет определять вторым взвешиванием, какая из монет в ряду является последней НМ — 5-я, 6-я или 7-я, после перевеса левой чаши последняя НМ — 1-я, 2-я или 3-я, а после равновесия последней из НМ может оказаться 4-я, 8-я или 9-я. Дальше уже совсем просто. Например, мы хотим разделить случаи «5-я», «6-я» и «7-я». Заметим, что это означает, что из этих трёх монет две, одна или 0 фальшивых. Возьмём 6-ю и 7-ю монеты — их сумма имеет разный вес для разных случаев (18, 19 или 20 г). Если мы сравним этот вес с 19 г (именно такой вес имеет сумма 1-й и 10-й монет), то мы узнаем, какой из трёх случаев имеет место. Аналогично делается трисекция и в двух остальных случаях.

Можно предложить ученикам сделать полную табличку взвешиваний и их результатов.

Задача 3.6. Перепутанные этикетки. Имеются 10 различных гирь массой 1 г, 2 г, ..., 10 г. Около каждой гири лежит этикетка, указывающая её массу, однако этикетки каких-то двух гирь, массы которых отличаются на 1 г, перепутаны. Как за два взвешивания найти эти гири?

Здесь ровно 9 возможных «путаниц», поэтому взвешивание должно делить их на 3 группы по 3.

Решение. Сравнение двух гирь (по одной на каждой чаше весов) даёт только два разных результата (их этикетки либо перепутаны, либо нет), значит, такое взвешивание для нас бесполезно. Поэтому будем искать взвешивание «две гири против одной». Пусть на левую чашу весов положены гири с этикетками m и n, а на правую — одна гиря. Поскольку нам необходимы варианты как с равновесием, так и с отклонениями от него в обе стороны, а каждые перепутанные этикетки дают отклонения не более чем на 1 г, эта гиря должна иметь этикетку $m+n$. Тогда отклонения в одну сторону будут при перепутывании «$m-1$» и «m», «$n-1$» и «n» или «$m+n+1$» и «$m+n$», а в другую — при обмене «$m+1$» и «m», «$n+1$» и «n» или «$m+n-1$» и «$m+n$». Чтобы все эти перепутывания давали по 3 разных случая, m и n не должны отличаться на 1, ни одно из них не должно быть равно 1, а $m+n$ не должно быть равно 10. Например, годится $m=3$, $n=5$, $m+n=8$. После результата «$<$» мы делаем вывод, что перепутаны «2»–«3», «4»–«5» или «8»–«9», после результата «$>$» — что перепутаны «3»–«4», «5»–«6» или «7»–«8». Равенство соответствует путаницам «1»–«2», «6»–«7» и «9»–«10». Второе взвешивание может быть в этих случаях разным, но можно придумать и единое взвешивание для всех трёх результатов, например, сравнить «2» + «5» с «7».

Можно предложить ученикам сделать полную табличку взвешиваний и их результатов.

Задача 3.7. Прогрессия котлет. Повар выложил на сковородку 9 котлет по кругу (по часовой стрелке), причём каждая следующая выкладываемая котлета была на 10 г тяжелее предыдущей. Когда котлеты поджарились, повар обнаружил, что забыл, с какой котлеты он начинал выкладывать. Помогите ему найти самую тяжёлую котлету за два взвешивания.

Здесь тоже девять случаев, однако взвешивания «две против одной» уже не помогают.

Решение. Пронумеруем котлеты по часовой стрелке с любого места: K_1, K_2, ..., K_9. Убедимся, что годятся, например, следующие два взвешивания: первое $K_1 + K_3 \vee K_6 + K_7$, второе $K_1 + K_4 + K_5 \vee K_2 + K_8 + K_9$.

Пусть самая лёгкая котлета весит $x + 10$ г (а самая тяжёлая $x + 90$ г). Значение x нам не известно, но так как на чаши весов выложены равные количества котлет, то при сравнении все иксы сократятся, что позволяет нам сравнивать только добавляемые к иксам числа. В табличке результатов выписаны эти числа, делённые на 10 (в зависимости от того, какая из котлет была самой тяжёлой).

Самая тяжелая	1 взвешивание	2 взвешивание	Результаты
K_9	$1+3 \vee 6+7$	$1+4+5 \vee 2+8+9$	$<\ <$
K_8	$2+4 \vee 7+8$	$2+5+6 \vee 3+9+1$	$<\ =$
K_7	$3+5 \vee 8+9$	$3+6+7 \vee 4+1+2$	$<\ >$
K_6	$4+6 \vee 9+1$	$4+7+8 \vee 5+2+3$	$=\ >$
K_5	$5+7 \vee 1+2$	$5+8+9 \vee 6+3+4$	$>\ >$
K_4	$6+8 \vee 2+3$	$6+9+1 \vee 7+4+5$	$>\ =$
K_3	$7+9 \vee 3+4$	$7+1+2 \vee 8+5+6$	$>\ <$
K_2	$8+1 \vee 4+5$	$8+2+3 \vee 9+6+7$	$=\ <$
K_1	$9+2 \vee 5+6$	$9+3+4 \vee 1+7+8$	$=\ =$

Из таблицы видно, что пара результатов однозначно определяет самую тяжёлую котлету. Разумеется, это не единственные возможные взвешивания.

☝ Можно предложить ученикам подумать, как упростить второе взвешивание, если делать его не одинаковым для всех трёх результатов первого, а зависящим от его результатов.

«Сюрприз» следующей задачи в том, что вариантов больше девяти, но при этом удается разделить их на правильные группы, и число таких групп ровно девять.

Задача 3.8. Соседние котлеты. По кругу лежат 9 одинаковых с виду котлет. а) Известно, что среди них семь одинаковых, а две более лёгкие, и они лежат рядом. При этом лёгкие котлеты не обязательно равны друг другу. Как найти их двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь? б) Найдите все лёгкие котлеты, если одинаковых не 7, а только 6, а лёгких — три подряд.

Решение. а) Первое взвешивание — $2+3$ против $5+6$, тогда результат «$<$» соответствует паре лёгких котлет 1–2, 2–3 или 3–4, результат «$>$» соответствует 4–5, 5–6 или 6–7, а результат «$=$»— 7–8, 8–9 и 9–1. Второе взвешивание однотипно для каждого из случаев. Например, в первом случае нужно взвесить 1 против 4, то есть на каждую чашу положить по одной подозрительной котлете.

б) Первое взвешивание — 3 против 6, тогда результат «$<$» соответствует тройкам лёгких котлет 1–2–3, 2–3–4 или 3–4–5, результат «$>$» соответствует 4–5–6, 5–6–7 или 6–7–8, а результат «$=$»— 7–8–9, 8–9–1 и 9–1–2. Второе взвешивание однотипно для каждого из случаев. Например, в первом случае можно взвесить 1 против 5.

Следующие две задачи объединяет подсчёт искомого числа «анализом с конца».

Задача 3.9. Фальшивое звено. а) Незамкнутая цепочка составлена из 31 звена. Известно, что одно из звеньев фальшивое, оно легче остальных. Докажите, что при помощи взвешиваний можно найти фальшивое звено, разрезав не более четырёх звеньев.

б) Незамкнутая цепочка составлена из 95 звеньев. Известно, что одно из звеньев фальшивое, оно отличается по весу от остальных (неизвестно, легче или тяжелее). Докажите, что при помощи взвешиваний можно найти фальшивое звено, разрезав не более шести звеньев.

Решение. а) Разрежем среднее звено и сравним на весах две получившихся 15-звенных цепочки. Если одна из них оказалась легче, то именно она содержит фальшивое звено (в противном случае фальшивым является разрезанное нами среднее звено). Дальше разделим подозрительную цепочку пополам, разрезав в ней среднее звено. После третьего разрезания подозрительной окажется трёхзвенная цепочка, и на четвёртом шаге мы разрежем в ней среднее звено и сравним крайние.

б) Разрежем в цепочке 32-е и 64-е звенья. Это разобьёт её на три куска по 31 звену. Сравним куски между собой. Если все равны, то фальшиво более лёгкое из разрезанных звеньев. Если же один кусок отличается от других, то фальшивое звено находится за четыре разреза, как в задаче а).

☝ Обратите внимание на то, как помогает «анализ с конца»: в цепочке из трёх звеньев достаточно разрезать одно звено, в цепочке из семи — два, и т. д. Эти рассуждения легко продолжить до цепочки из 31 звена. А цепочка из 95 звеньев из задачи 3.9(б) сводится к случаю 31 звена.

Задача 3.10. Взвешивания за плату. а) У бедного мальчика Саши всего 169 монет, причём одна из них — лёгкая ФМ. У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание он берёт с Саши плату: 1 рубль, если одна из чашек перевесила, и 2 рубля, если весы остались в равновесии. Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить ФМ с помощью Костиных весов?

б)* У бедного мальчика Саши всего 300 монет, и ровно одна из них — лёгкая ФМ. У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание он берёт с Саши плату: 2 рубля, если перевесила левая чашка, и 1 рубль при любом другом исходе. Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить ФМ с помощью Костиных весов?

Ответ: а) 6 рублей; б)* 7 рублей.

Решение. а) Пусть T_n — число монет, из которых Саша сможет определить ФМ, затратив не более n рублей. Ясно, что на каждую из чашек можно положить не более T_{n-1} монет (поскольку в случае неравенства придётся заплатить 1 рубль, а дальнейшими взвешиваниями нужно будет определять ФМ из T_{n-1}), а вне обеих чашек может остаться не более T_{n-2} монет. Таким образом, $T_n \leqslant 2T_{n-1} + T_{n-2}$. Кроме того, очевидно, что $T_0 = 1$ (если ничего не взвешивать, то ФМ должна быть единственной имеющейся монетой), а $T_1 = 2$. Последовательно находим, что $T_2 \leqslant 5$, $T_3 \leqslant 12$, $T_4 \leqslant 29$, $T_5 \leqslant 70$. Из последнего неравенства сразу вытекает, что пяти рублей Саше может не хватить.

Покажем по индукции, что Саше хватит k рублей для того, чтобы определить ФМ из D_k монет, где $D_0 = 1$, $D_1 = 2$, $D_n = 2D_{n-1} + D_{n-2}$. В частности, имея 6 рублей, Саша положит на каждую чашу весов по $D_5 = 70$ монет, а остальные $D_4 = 29$ отложит. Если весы окажутся в равновесии, то Саша заплатит 2 рубля, после чего с четырьмя оставшимися рублями будет определять одну ФМ из $D_4 = 29$. Если же одна из чашек перевесит, то Саша заплатит 1 рубль, и далее с пятью рублями будет определять одну ФМ из $D_5 = 70$.

б)* Прежде чем описывать алгоритм, заметим, что после первого же взвешивания у Саши уже будет некоторое число заведомо настоящих монет. Пусть T_n — число ПМ, из которых Саша сможет определить ФМ, затратив не более n рублей (имея достаточное количество НМ). Ясно, что на левую чашку можно положить не более T_{n-1} ПМ, столько же ПМ можно оставить вне обеих чашек, а на правой чашке может быть не более T_{n-2} ПМ (и ещё $T_{n-1} - T_{n-2}$ настоящих монет, чтобы общее число монет на двух чашках было одинаковым). Таким образом, $T_n \leqslant 2T_{n-1} + T_{n-2}$. Кроме того, очевидно, что $T_0 = 1$, а $T_1 = 2$ (раскладка монет 1–0–1, то есть на левую чашу кладётся одна ПМ, на правую — одна заведомо настоящая, а ещё одна ПМ не взвешивается). Последовательно находим, что $T_2 \leqslant 5$, $T_3 \leqslant 12$, $T_4 \leqslant 29$, $T_5 \leqslant 70$, $T_6 \leqslant 169$. Таким образом, шести рублей Саше может не хватить.

Покажем, что ему заведомо хватит семи рублей. Имея такую сумму, Саша может положить на каждую чашу весов по 70 монет, а остальные 160 — отложить. Если фальшивая монета окажется на правой чашке, то перевесит левая чашка и Саше придётся заплатить 2 рубля. После этого на нахождение фальшивой монеты из 70 ПМ ему хватит оставшихся пяти рублей (вначале Саша добавит 17 заведомо настоящих монет и разложит все ПМ на весы в количестве 29–12–29, потом в зависимости от результата применит раскладку 12–5–12 или 5–2–5, и т. д.). Если же фальшивая монета окажется не там, то число ПМ не более 160, остальные монеты будут заведомо настоящими и Саша сумеет провести взвешивания, заплатив не более шести рублей (70–20–70, далее аналогично первому случаю).

☝ Отметим, что в этой задаче всё — и оценка, и алгоритм — было сделано «анализом с конца» и сведением к случаю с меньшей платой.

В следующих двух задачах число случаев увеличивается из-за неопределённости с весами. Для решения таких задач полезно предварительно порешать задачи про рыцарей и лжецов. Хоть это явно и не требуется, в подавляющем большинстве случаев приходится разбираться с правильностью весов, а также «склеивать» случаи, когда фальшивая монета определяется, а неправильные весы — нет.

Задача 3.11. Взвешивания с заедающими весами. Из девяти монет одна фальшивая, она легче остальных. Имеются два экземпляра внешне неразличимых чашечных весов, из которых одни заедают (при любом взвешивании, в котором на чашах поровну монет, показывают равенство). За какое наименьшее число взвешиваний можно найти ФМ?

Решение. Перенумеруем монеты от 1 до 9. Первым взвешиванием сравним 1+2+3+4 с 5+6+7+8. Если весы не в равновесии, то мы нашли незаедающие весы — тогда за два оставшихся взвешивания можно найти фальшивую монету (из четырёх на лёгкой чаше). Если весы в равновесии, то вторым взвешиванием взвесим *на других весах* 1+2+3 против 5+6+7. Если весы не в равновесии, то мы нашли хорошие весы и три ПМ, среди которых за одно оставшееся взвешивание можно отыскать фальшивую. Если же весы снова в равновесии, то или первые весы верны и фальшива монета 9, или вторые весы верны и фальшива одна из монет 4, 8 или 9. Последнее взвешивание — сравним на вторых весах 4 с 8. В случае неравенства мы нашли и хорошие весы, и ФМ, а в случае равенства ФМ является 9, хотя какие весы заедают, нам так и не удалось определить.

Покажем, что двух взвешиваний не хватит. Допустим противное и рассмотрим два варианта первого взвешивания.

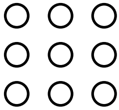
1. На чашах — по 4 монеты. Тогда при неравенстве подозрительными окажутся 4 монеты с лёгкой чаши. Оставшимся одним взвешиванием ФМ выявить нельзя.

2. На каждой чаше меньше 4 монет. Тогда отложено несколько (более одной) монет. Второе взвешивание нужно проводить на других весах, и если они окажутся заедающими, то любая из этих отложенных монет может быть фальшивой.

☝ После решения задачи можно обсудить, удастся ли за то же число взвешиваний решить эту задачу для большего количества монет.

Задача 3.12. Взвешивания со сломанными весами. Имеются 9 монет, одна из которых — лёгкая ФМ. Кроме того, у нас есть трое двухчашечных весов. Известно, что двое весов исправны, а одни — сломаны (показываемый ими исход взвешивания никак не связан с весом положенных на них монет, то есть может быть как верным, так и искажённым в любую сторону, причём на разных взвешиваниях — искажённым по-разному). При этом неизвестно, какие именно весы исправны, а какие сломаны. Как найти ФМ за 4 взвешивания?

Решение. Расположим 9 монет в три ряда по три монеты:



Первым взвешиванием сравним на весах №1 две первые строки (всего 6 монет), а вторым взвешиванием сравним на весах №2 два первых столбца (тоже 6 монет). По результатам каждого из взвешиваний отделим подозрительную тройку монет, делая вид, что весы исправны (если, скажем, весы были в равновесии, то объявим подозрительным столбец или строку, во взвешивании не участвовавшие, а если равновесия не было, то подозрительным объявим столбец или строку, «более лёгкие» согласно показаниям весов). Так как либо первые, либо вторые весы являются исправными, фальшивая монета заведомо попадёт либо в отобранный столбец, либо в отобранную строку. Итак, у нас имеется подозрительный столбец и подозрительная строка — всего 5 монет, среди которых заведомо есть ФМ. Обозначим монету на пересечении выбранных строки и столбца через A, две другие монеты из выбранной строки через B и C, а две оставшиеся ПМ — через D и E.

Третье взвешивание делаем на весах №3, положив на одну чашу весов монеты B и C, а на другую — монеты D и E. Если результатом этого взвешивания будет равенство, то ФМ — монета A. В самом деле, если весы №3 исправны, то это очевидно, а если они неисправны, то исправны весы №1 и №2, и тем самым фальшивая монета находится на пересечении подозрительного столбца и подозрительной строки. Если же в качестве результата получится неравенство, например $B + C < D + E$, то мы видим, что результаты взвешиваний на весах №2 и №3 не могут быть оба правдивыми: из правдивости взвешивания на весах №3 следует, что ФМ — монета B или C, а из правдивости взвешивания на весах №2 следует, что ФМ — монета A, D или E.

Стало быть, какие-то из весов №2 и №3 заведомо неисправны, так что весы №1 заведомо исправны и, согласно результатам взвешивания на этих весах, ФМ — одна из монет A, B или C. Теперь последнее взвешивание делаем на заведомо исправных весах №1 и находим там одну ФМ из трёх оставшихся ПМ.

☝Здесь снова полезно сделать полную табличку взвешиваний и их результатов, причём в результаты включить информацию о том, какие весы неисправны.

Задача 3.13. Найти хотя бы одну настоящую. а) Среди пяти внешне одинаковых монет три настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. За какое наименьшее число взвешиваний можно найти хотя бы одну настоящую монету?

б) Среди 15 монет — не более семи фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково (а фальшивые, возможно, нет). Можно ли за 14 взвешиваний найти хотя бы одну из настоящих монет? А за меньшее число взвешиваний?

Решение. а) Докажем, что за одно взвешивание НМ найти не удастся. Если класть на весы по одной монете, то после неравенства мы не узнаем, какая из них настоящая. Если же класть на весы по 2 монеты и одна из чаш перевесит, то каждая из пяти монет может оказаться как настоящей, так и фальшивой.

Покажем, как решить задачу за 2 взвешивания: $1 \vee 2$ и $3 \vee 4$. Если оба раза равенство или оба раза неравенство, то монета 5 настоящая. Если же в одном взвешивании равенство, а в другом неравенство, то каждая из двух равных монет настоящая.

б) Настоящих монет больше, чем фальшивых. Если одна монета тяжелее другой, то обе эти монеты можно мысленно выкинуть: среди них не более одной настоящей, и поэтому среди остальных монет настоящих тоже больше, чем фальшивых! Разобьём монеты на 7 пар и одиночку. Сравним монеты в каждой паре и выкинем пары с неравенством. В каждой из оставшихся пар либо обе монеты настоящие, либо обе — фальшивые, причём пар с НМ не меньше половины от общего числа пар. Выберем по одной монете из каждой пары, при чётном числе пар добавим ещё одиночку. Это нечётное число монет, среди которых настоящих больше половины. Процесс разбиения на пары, сравнения и выбора повторяем, пока не останется выбранной всего одна монета, которая и является настоящей. Теперь сосчитаем проделанные взвешивания. В первый раз было семь взвешиваний, выбрано не более семи монет. Во второй раз — не более трёх взвешиваний, выбрано не более трёх монет. В третий раз — не более одного взвешивания и одна монета. Итого не более чем 11 взвешиваний.

☝ Мы не утверждаем, что 11 — наименьшее возможное число взвешиваний в этой задаче.

См. также дополнительные задачи Д.6, Д.7, Д.9, Д.12, Д.13, Д.16, Д.18, Д.21–Д.33.

Занятие 4

Весы со стрелкой

В этом занятии мы немного отклонимся от «генеральной линии» и разберём задачи, в которых используются не двухчашечные весы, а весы со стрелкой, то есть прибор, позволяющий узнать точный вес груза. Обычно в задачах о взвешиваниях такие весы позволяют получить больше информации, чем двухчашечные рычажные. Например, если мы знаем, что все настоящие монеты весят по 10 г, а все фальшивые — по 9 г, то, взвесив несколько монет, мы можем точно выяснить, *сколько* из них являлись фальшивыми. В некоторых задачах вместо одночашечных используются обычные магазинные (двухчашечные) весы, позволяющие определить, какой из двух грузов тяжелее и на сколько именно.

При решении задач о взвешиваниях на весах со стрелкой полезно использовать следующие идеи и приёмы: 1) *крайние суммы* — рассмотреть наибольшее и наименьшее возможные значения суммарной массы нескольких объектов; 2) *алгебраизация* — массы можно искать как решения уравнений и систем уравнений; 3) *деление на большее число групп* (в отличие от бисекции и трисекции, здесь групп столько, сколько возможных результатов может дать одно взвешивание).

Поскольку тема этого занятия не связана прямо со следующими, его можно и пропустить (либо отложить на потом).

Задача 4.1. Среди 21 монеты 10 настоящих и 11 фальшивых. Фальшивые монеты на 1 г легче настоящих. Как за одно взвешивание на двухчашечных весах со стрелкой узнать, фальшива ли конкретная монета?

Решение. Нужно разложить на каждую чашу весов по 10 остальных монет. Если разность весов чётна, то выбранная монета является фальшивой, иначе — настоящей.

Задача 4.2. В корзине лежат 9 яблок. Имеются одночашечные весы со стрелкой, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых двух яблок. Придумайте способ выяснить за 6 взвешиваний суммарный вес всех яблок.

Подсказка: как за три взвешивания найти суммарный вес трёх яблок?

Решение. Взвесим первое яблоко со вторым, второе с третьим и третье с первым, затем сложим полученные веса — получим удвоенный вес этих трёх яблок. Следовательно, за три взвешивания мы узнали суммарный вес первых трёх яблок. Осталось три взвешивания и 6 яблок, — взвешиваем их попарно и, складывая все результаты, получаем общий вес.

Задача 4.3. Семь мешков. На столе лежат 7 пронумерованных мешков, в каждом из которых по 10 монет. В одном из мешков находятся фальшивые монеты, а в остальных — настоящие. Настоящая монета весит 10 граммов, а фальшивая — 9. Как определить, в каком мешке находятся ФМ, проделав всего одно взвешивание на одночашечных весах со стрелкой?

Решение. Это одна из самых известных и стандартных задач, в которых используются весы со стрелкой. Решение очень просто: из первого мешка для взвешивания возьмём 0 монет, из второго — одну, из третьего — две, и т. п., из седьмого — 6 монет. Если бы вес каждой монеты был равен 10 г, то весы показали бы ровно 210 граммов (всего взвешена 21 монета). Однако из-за наличия ФМ суммарный вес будет меньше — ровно на столько, сколько монет мы взяли из мешка с ФМ. Поскольку из всех мешков бралось разное число монет, мы легко определяем номер мешка с ФМ.

☝ Запомним этот приём. Суть его в том, что результат взвешивания как бы «склеивает» вклады отдельных мешков, и за счет подбора количеств-коэффициентов необходимо обеспечить обратную операцию — «разделение на части». «Разделяющая функция» должна давать однозначное соответствие между номером искомого мешка и результатом.

Задача 4.4. Несколько фальшивых мешков. а) Имеются 7 мешков, в некоторых из них все монеты фальшивые, а в остальных — все монеты настоящие. Настоящая монета весит 10 г, а фальшивая – 9 г. Как за одно взвешивание на весах со стрелкой найти все мешки с фальшивыми монетами?

б) Имеются 3 мешка, некоторые из них наполнены фальшивыми монетами, а остальные — настоящими. Настоящая монета весит 10 г, а фальшивая — 9 г. Как найти все мешки с фальшивыми монетами за два взвешивания на одночашечных весах со стрелкой, использовав во взвешиваниях не более четырёх монет?

в) Докажите, что в любом взвешивании, решающем задачу а), на весах будет не менее 127 монет.

Решение. а) Эта задача чуть более трудна, чем предыдущая. Возьмём из первого мешка одну монету, из второго — две, затем 4, 8, 16, 32 и 64. Всего взято 127 монет. Если бы все они были настоящими, то вместе весили бы 1270 г. Отклонение от этого веса равно числу фальшивых монет на весах. Воспользуемся тем, что мы брали степени двойки: запишем это отклонение в двоичной системе, и тогда единички в двоичной записи покажут номера тех мешков, в которых лежат фальшивые монеты.

☝ Ещё один стандартный приём: если слагаемые — разные степени двойки, то они однозначно восстанавливаются по значению суммы. А что делать, если ни в каком мешке не наберётся 64 монет? Можно ли обойтись меньшим количеством? (То есть, возможно, во взвешивании будет участвовать суммарно большее число монет, но зато число монет, которые берутся из одного мешка, будет меньше чем 64.) Оказывается, это возможно. От множества чисел 1, 2, 4, ..., 64 для нас требовалось выполнение всего-навсего такого условия: все различные его подмножества имеют различные суммы. При помощи компьютера можно проверить, что тем же свойством обладает и такое множество: 44, 43, 42, 40, 37, 31, 20. Таким образом, в мешки достаточно положить по 44 монеты.

Для других значений числа мешков количество монет в мешках может быть найдено при помощи последовательности Конвея—Гая 0, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 84, 161, 309 и т. д.: число монет, которые берутся из j-го мешка, равно $a_n - a_j$, где n — число мешков, $0 \leqslant j \leqslant n$ (в нашем случае $n = 7$ и $a_n = 44$). Вопрос о том, является ли это количество минимально возможным, на сегодняшний день является открытой проблемой. Подробнее см. [9], последовательность A005318, или [10], задача C8.

б) Нам потребуются две монеты из одного мешка (их вес $2a$) и по одной монете из двух других мешков (их веса b и c). Взвесим $2a+b$ и $b+c$, то есть найдём значения $X=2a+b$ и $Y=b+c$. Убедимся, что каждой паре (X, Y) соответствует свой случай весов (a, b, c):

a	b	c	X	Y
9	9	9	27	18
9	9	10	27	19
9	10	9	28	19
9	10	10	28	20
10	9	9	29	18
10	9	10	29	19
10	10	9	30	19
10	10	10	30	20

Это и означает, что нам удалось решить задачу.

☝ Задача о двух взвешиваниях тоже обобщается на любое число мешков (и любые известные нам веса НМ и ФМ). При этом для четырёх мешков достаточно восьми монет (3, 2, 1, 0 монет берутся для первого взвешивания и 0, 2, 2, 1 — для второго), для пяти мешков — 15 монет, для шести — 38, для семи — 74. Для большего числа мешков минимальные количества монет неизвестны, см. [9], последовательность A007673.

в) Так как существует всего $128=2^7$ вариантов для множества мешков, содержащих фальшивые монеты, то для решения задачи (однозначного определения множества «фальшивых мешков») вес выложенных монет должен принимать не менее 128 различных значений. При выкладывании на весы k монет их суммарный вес принимает ровно $k+1$ значение от $9k$ до $10k$, откуда получаем неравенство $k+1 \geqslant 128$, то есть $k \geqslant 127$.

Задача 4.5. Мешки неизвестного веса. Имеется 11 мешков монет. В 10 из них монеты настоящие, а в одном — все монеты фальшивые. Все НМ одного веса, все ФМ — также одного, но другого веса. Имеются двухчашечные весы со стрелкой, с помощью которых можно определить, какой из двух грузов тяжелее и на сколько. Как двумя взвешиваниями определить, в каком мешке фальшивые монеты?

Решение. Сделаем два таких взвешивания.

1. На одну чашу весов положим 10 монет из какого-то одного мешка (например, 11-го), а на другую — по одной монете из остальных мешков.

2. Положим на одну чашу 55 монет из 11-го мешка, а на другую — по i монет из i-го мешка, $i = 1, \ldots, 10$.

Обозначим $a = 10m_{11} - m_1 - m_2 - \ldots - m_{10}$, $b = 55m_{11} - m_1 - 2m_2 - 3m_3 - \ldots - 10m_{10}$. Если фальшивые монеты находятся в i-м мешке, $i \leqslant 10$, то a — разность между весами настоящей и фальшивой монеты, а b — та же разность, умноженная на i. Поэтому в этом случае $i = \frac{b}{a}$. Если же фальшивые монеты в 11-м мешке, то $\frac{b}{a} = 5{,}5$. Значит номер искомого мешка равен $\frac{b}{a}$, если это число целое, и 11 в противном случае.

☝ Веса неизвестны, а разделяющую функцию мы сумели построить: ею оказалось отношение результатов.

Задача 4.6. Есть шесть монет, одна из которых фальшивая (она отличается по весу от настоящей, но её вес, как и вес настоящей монеты, неизвестен). Как за три взвешивания на одночашечных весах со стрелкой найти фальшивую монету?

Решение. Взвесим сначала первые две монеты (пусть сумма их весов равна x), а потом — третью и четвёртую (сумма весов равна y).

1. Если $x = y$, то ФМ — одна из двух последних монет. Взвесим монету 5. Если её вес не равен $\frac{x}{2}$, то фальшива она, иначе — монета 6.

2. Если $x \neq y$, то возможны остальные четыре случая: фальшива монета 1, 2, 3 или 4. В каждом случае легко вычислить веса монет и предсказать общий вес суммы монет $1 + 3 + 5$: он будет $x + \frac{y}{2}$, $\frac{3y}{2}$, $\frac{x}{2} + y$ или $\frac{3x}{2}$ соответственно. Эти четыре веса различны, поэтому после такого взвешивания мы узнаем, какой именно случай имеет место.

Задача 4.7. а) Даны четыре одинаковых по виду шара массой 101 г, 102 г, 103 г и 105 г, а также весы со стрелкой. Как, сделав два взвешивания, определить массу каждого шара?

б) Даны пять гирь, массы которых равны 1000 г, 1001 г, 1002 г, 1004 г и 1007 г, но надписей на гирях нет и внешне они неотличимы. Как с помощью трёх взвешиваний на весах со стрелкой определить гирю в 1000 г?

Указание. Найдите разделяющую функцию для пар шаров/гирь.

Решение. а) Сумма весов любых двух шаров различна. Это значит, что результат взвешивания любой пары шаров позволяет сказать, какие именно два шара взвешивались. Занумеруем шары и взвесим сначала 1+2, а потом 1+3. Зная результаты этих двух взвешиваний, мы легко определяем вес общего для них шара, а затем и веса всех остальных шаров.

б) Взвесим две гири, а потом взвесим какие-то другие две гири. Если какая-то из этих пар весит 2001, 2002, 2004 или 2007 г, то одна из гирь в этой паре весит 1000 г. Поэтому, взвесив одну из гирь этой пары, мы определим гирю в 1000 г. Если же обе пары имеют иной вес, то оставшаяся гиря весит 1000 г.

Нетрудно убедиться, что можно было бы добавить ещё три гири весом 1015, 1031 и 1063: при таких массах вес любого подмножества гирек однозначно определяет все гирьки, входящие в это подмножество, поэтому трёх взвешиваний хватает для нахождения массы каждой из восьми таких гирь!

Задача 4.8. Четыре монеты за три взвешивания. Даны четыре монеты, среди которых могут оказаться фальшивые. Настоящая монета весит 10 г, а фальшивая — 9 г. Найдите наименьшее количество взвешиваний, которые нужно сделать на одночашечных весах со стрелкой, чтобы определить все ФМ.

Решение. Трёх взвешиваний достаточно. Действительно, если перенумеровать монеты от 1 до 4, то достаточно взвесить 1+2+4, 1+3 и 2+3. Пусть результаты этих взвешиваний равны w_1, w_2, w_3. Если сумма $w_1 + w_2 + w_3$ нечётна, то монета 4 (единственная взвешенная нечётное число раз) должна иметь нечётный вес, то есть быть фальшивой, а если чётна — то настоящей. Веса остальных монет легко найти, решая систему уравнений $x_1 + x_2 = w_1 - x_4$, $x_1 + x_3 = w_2$, $x_2 + x_3 = w_3$, где x_i — вес монеты i.

Докажем теперь, что двух взвешиваний не хватит. Действительно, каждую монету мы можем в каждом взвешивании либо класть на весы, либо не класть. Это даёт нам всего четыре варианта: «нет, нет», «нет, да», «да, нет» и «да, да». Если для каких-то двух монет использован один и тот же вариант, то эти две монеты неразличимы, и если одна из них настоящая, а другая фальшивая, то мы не сможем определить ФМ. Если же для всех монет использованы разные варианты, то монета с вариантом (нет, нет) не клалась на весы ни разу, то есть мы ничего о ней не знаем.

Эта задача допускает обобщение для большего числа монет и взвешиваний, однако в обобщении уже не всегда удастся доказать минимальность числа взвешиваний. Соответствующая общая задача, поставленная П. Эрдёшем и А. Реньи ещё в 1963 году, до сих пор не решена.

Задача 4.9. Две тройки монет за три взвешивания. Даны две тройки монет, причём в каждой тройке ровно одна монета фальшивая. Настоящая монета весит 10 г, а фальшивая — 9 г. Найдите наименьшее количество взвешиваний, которые нужно сделать на одночашечных весах со стрелкой, чтобы определить все ФМ.

Решение. Трёх взвешиваний достаточно. Если обозначить монеты первой тройки 1, 2, 3, а второй — A, B, C, то первыми двумя взвешиваниями найдём веса $1+A$ и $2+B$ и определим число ФМ в каждом из этих взвешиваний.

Пара ФМ	1, A	2, B	3, C	2, A	1, B	2, C	3, B	3, A	1, C
$1+A$	2	0	0	1	1	0	0	1	1
$2+B$	0	2	0	1	1	1	1	0	0

Для третьего взвешивания осталось различить не более двух случаев, и во всех вариантах для этого достаточно положить на весы по одной монете.

<table>
<tr><td>Пара ФМ</td><td>1, A</td><td>2, B</td><td>3, C</td><td>2, A</td><td>1, B</td><td>2, C</td><td>3, B</td><td>3, A</td><td>1, C</td></tr>
<tr><td>Третье взвешивание</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td colspan="2">A</td><td colspan="2">B</td><td colspan="2">C</td></tr>
</table>

Докажем, что двух взвешиваний не хватит. В каждом взвешивании можно использовать от 0 до 2 ФМ, поэтому для количеств ФМ на весах при двух взвешиваниях есть ровно 9 возможностей — от (0,0) до (2,2). Каждая из этих возможностей должна соответствовать не более чем одной паре ФМ (иначе при реализации такой возможности мы не сможем определить пару ФМ). Но так как возможных пар ФМ тоже ровно 9, то все эти возможности должны реализовываться. В частности, какой-то паре монет должна соответствовать возможность (0,0), а какой-то другой паре — (2,2). Иначе говоря, монет первой пары на весах не было, а обе монеты второй пары взвешены дважды. Пусть, для определённости, первая пара — $1+A$, а вторая — $2+B$. Тогда пары $1+B$ и $2+A$ неразличимы, поскольку и та, и другая дадут результат (1,1).

Задача 4.10. Три лёгких подряд. В ряд выстроены 18 внешне одинаковых 100-граммовых гирь. Известно, что какие-то три рядом стоящие гири «облегчённые», в них всего по 99 г. Как за два взвешивания на весах со стрелкой найти все фальшивые гири?

Решение. Всего возможны 16 случаев: самая левая облегчённая гиря может быть любой из первых 16. Результат взвешивания определяется числом взвешенных облегчённых гирь, поэтому за одно взвешивание различимы максимум четыре случая. Значит, взвешивания надо подбирать так, чтобы оба раза получить по 4 возможных исхода. Взвесим восемь гирь с номерами 4–7 и 12–15. Вычтя из 800 полученный вес, найдём число лёгких гирь среди взвешенных. Убедимся с помощью таблички, что каждое значение от 0 до 3 соответствует четырём вариантам положения фальшивых гирь:

0	1 2 3	8 9 10	9 10 11	16 17 18
1	2 3 4	7 8 9	10 11 12	15 16 17
2	3 4 5	6 7 8	11 12 13	14 15 16
3	4 5 6	5 6 7	12 13 14	13 14 15

Теперь осталось вторым взвешиванием различить эти четыре варианта. Это легко сделать, подобрав вторые взвешивания так, чтобы из первого варианта взять 0 гирь, из второго — одну, из третьего — две, а из последнего — три. Например, для строчки «0» во второе взвешивание берутся гири 10, 11, 16, 17, 18, а для строчки «3» — гири 7, 13, 14, 15.

Обобщение этой задачи связано с кодами Грея — последовательностями слов, в которых каждое следующее слово отличается от предыдущего ровно в одном разряде и при этом встречаются все возможные k-буквенные слова. Геометрически коды Грея соответствуют полному обходу вершин многомерного куба по его рёбрам.

Задача 4.11. Два фальшивых кошелька. Имеется n кошельков, по 20 монет в каждом. Все монеты по виду одинаковы, однако в одном кошельке все монеты весят на 1 г легче настоящих, в другом кошельке все монеты весят на 1 г тяжелее настоящих, а в остальных кошельках все монеты настоящие. Масса настоящей монеты известна. При каких значениях n за одно взвешивание на весах со стрелкой можно наверняка определить, в каких кошельках какие монеты?

Ответ: 2, 3, 4, 5 или 6.

Решение. Предположим, что при некотором $n \geqslant 2$ удалось подобрать взвешивание, с помощью которого можно наверняка определить, в каких кошельках какие монеты. Пусть для этого мы собираемся взвесить a_1 монет из первого кошелька, a_2 монет из второго кошелька, ..., a_n монет из n-го кошелька, $0 \leqslant a_i \leqslant 20$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Если тяжёлые монеты в i-м кошельке, а лёгкие — в j-м, то весы покажут $m(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (a_i - a_j)$, где m — вес настоящей монеты. Итак, веса однозначно соответствуют значениям разностей $a_i - a_j$ и должны однозначно определять пару кошельков. Отсюда следует, что все такие разности $a_i - a_j$ должны быть различными. Но, как легко посчитать, таких разностей всего $n(n-1)$, при этом, очевидно, $|a_i - a_j| \leqslant 20$, так как из каждого кошелька мы можем взять не более 20 монет. Следовательно, $n(n-1)$ различных целых чисел должны находиться на промежутке от -20 до 20, содержащем 41 целое число, поэтому n должно удовлетворять неравенству $n(n-1) < 42$, откуда следует, что $n < 7$. Итак, n не может принимать значений, отличных от 2, 3, 4, 5 и 6.

Докажем теперь, что для каждого из этих значений одного взвешивания достаточно. Пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$, $a_4 = 9$, $a_5 = 18$, $a_6 = 20$. Для этих шести чисел все 30 разностей попарно различны (пятнадцать положительных разностей равны 1, 5, 8, 17, 19, 4, 7, 16, 18, 3, 12, 14, 9, 11, 2). Проделаем взвешивание, взяв из кошельков указанное число монет (скажем, при четырёх кошельках берём из них соответственно 1, 2, 6 и 9 монет). По весу вычислим значение $a_i - a_j$ и подберём i и j для этого значения.

☝ Обобщение этой задачи тесно связано с *линейками Голомба* — такими наборами натуральных чисел, для которых все попарные разности различны и при этом каждая возможная разность встречается. Если на линейке длины N нанести только деления, соответствующие этим числам (первое число соответствует левому краю линейки, а последнее — правому), то такой линейкой можно будет отмерить любой целочисленный отрезок, не превышающий длины линейки.

Последние две задачи посвящены экспертизе. Эксперт владеет полной информацией о весах предъявленных предметов. Зрители (или судья), обладая необходимыми навыками в математике и логике, априори знают только часть информации. Задача эксперта — доказать им истинность той информации, которой он владеет. Эффективность работы эксперта обеспечивается двумя приёмами: 1) *принцип крайнего*: если вес данного набора из k элементов оказался наименьшим (наибольшим) из возможных, то набор состоит из k элементов наименьшего (наибольшего) веса, — это позволяет каждым взвешиванием разбивать предметы на несколько подмножеств; 2) *уникальность судьбы*: каждый элемент принадлежит пересечению подмножеств из разных взвешиваний, и это пересечение должно состоять ровно из одного элемента.

Задача 4.12. Геологи и консервы. Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на консервах стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он хочет это всем доказать (то есть обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов. Докажите, что для этой цели ему а) достаточно четырёх взвешиваний; б) недостаточно трёх.

Решение. а) Добавим для удобства ещё одну банку с нулевым весом. Занумеруем все банки по возрастанию масс от 1 до 81. Первое взвешивание: на левую чашу весов кладутся банки 1–27, на правую — банки 55–81. При этом весы покажут максимально возможную разницу весов на чашках. Поскольку эту разницу, имея список весов, легко вычислить и получается она в единственном случае, всем понятно, что на левой чашке — самые лёгкие банки, на правой — самые тяжёлые, а в группе, не участвовавшей во взвешивании — остальные 27 банок. Далее завхоз делит каждую чашу на три группы по 9 банок и снова кладёт лёгкие группы на левую чашу весов, а тяжёлые — на правую, и т. д.

б) Каждым взвешиванием банки делятся на три группы. После трёх взвешиваний образуется 27 групп, хотя бы в одной из которых будет не менее трёх банок. Они будут неразличимыми (для геологов), поэтому трёх взвешиваний завхозу недостаточно.

Задача 4.13. Маркированные слитки — 1. Эксперт предъявил суду 100 серебряных слитков, промаркированных по-китайски. У него есть весы, которые показывают вес груза, при условии, однако, что этот вес не более 2500 г. Эксперт знает вес каждого слитка, а судья знает только то, что слитков всего 100 штук, веса всех слитков различны и равны 1001, 1002, ..., 1100 грамм. Каково наименьшее количество взвешиваний, которое необходимо проделать эксперту, чтобы судья смог по их результатам восстановить вес каждого слитка?

Ответ: 66.

Решение. Отложим в сторону самый тяжёлый слиток, разобьём остальные на тройки по порядку: $(1001, 1002, 1003)$, $(1004, 1005, 1006)$, ..., $(1097, 1098, 1099)$. Первыми двумя взвешиваниями взвесим пары $1001+1002$ и $1001+1003$ из первой тройки. Веса пар однозначно определяют, какие именно слитки входят в каждую пару, тем самым определяя веса каждого слитка тройки. Следующей парой взвешиваний определим аналогично веса слитков во второй тройке, и т. д. Так за 66 взвешиваний определятся веса 99 слитков в тройках, для 100-го останется лишь одна возможность.

Докажем, что 65 взвешиваний не хватит. Каждый раз на весы кладут не более 2 слитков. Разложим изначально все слитки на 100 групп по одному. Если слитки из разных групп участвуют в одном взвешивании, то эти группы объединяются в одну. Но больше двух слитков одновременно не взвесишь, поэтому каждый раз число групп уменьшается максимум на 1. Значит, в конце будут минимум 35 групп. Среди них найдутся либо две группы по одному слитку, либо группа из двух слитков. (В противном случае все группы, кроме, возможно, одной, состояли бы из трёх и более слитков. Количество групп из трёх и более слитков не может быть больше 33, поскольку $34 \cdot 3 > 100$, а тогда всего групп было бы не больше $33 + 1 = 34$.) В обоих случаях эта пара слитков неразличима.

☝ Для учеников, знакомых с теорией графов, можно заметить, что слитки — это вершины графа, пары слитков из одного взвешивания — рёбра, а группы — компоненты связности.

См. также дополнительные задачи Д.34–Д.36, Д.44–Д.52.

Занятие 5

Всё идёт по плану

В этом занятии почти нет совсем новых задач, однако есть очень много новых идей. Будьте внимательны и осторожны: освоение новых идей всегда требует времени и сил. Основ-

ное содержание занятия — *плановые*, или *неадаптивные*, алгоритмы, то есть такие способы решения задач, в которых каждое следующее действие (в нашем случае — взвешивание) не должно меняться (адаптироваться) в зависимости от результатов предыдущих действий. Удивительно, но факт: почти у каждой задачи, которую мы решали на предыдущих занятиях, существует и неадаптивное решение. Иными словами, мы можем взглянуть на результаты взвешиваний всего один раз — после того как все взвешивания уже проделаны[1].

Важным техническим приёмом является кодировка монет. Она может быть получена либо из геометрических соображений, либо через запись «судьбы монеты» (подробнее см. задачу 5.4). Особенно плодотворно использование идеи судьбы при доказательстве оценки числа взвешиваний.

Задача 5.1. Угадывание по плану — 1. Зная, что Петя собирается опять загадывать число от 1 до 8, Витя заранее изготовил три карточки, на каждой из которых он записал одно или несколько натуральных чисел. Дальше Витя поочерёдно показывает Пете эти карточки, а тот отвечает, есть на данной карточке задуманное им число или нет. Как должен Витя под-

[1]Древние греки и римляне изображали богиню правосудия Фемиду (Юстицию) с весами и с повязкой на глазах. Может быть, они думали, что она решает задачи о взвешиваниях с помощью неадаптивных алгоритмов?

готовить карточки, чтобы с их помощью он всегда смог угадать Петино число?

Здесь «плановый» алгоритм всего лишь наполовину плановый: карточки делаются заранее, но показываются последовательно. Быстро ли ученики решат эту задачу — сильно зависит от того, какие темы ими уже пройдены (в том числе, возможно, и самостоятельно, а не на кружке). В частности, очень сильно помогает знание двоичной системы счисления. Однако нет ничего страшного, если ученики будут решать задачу с нуля. Подсказка для решающих может быть такой: предложите тому, кто играет за Витю, написать числа только на первой карточке, а вторую карточку заполнять после ответа Пети. А если Петя даст противоположный ответ, какие числа нужно будет выписать на вторую карточку? Продолжая аналогичным образом полный перебор вариантов, «Витя» с «Петей» достаточно быстро смогут заполнить все карточки. А поскольку на каждом шаге есть выбор, какие числа писать — меньшие или бо́льшие, — можно предложить при заполнении карточек каждый раз поступать одинаково, например, писать туда меньшие числа.

Первое решение. Карточки могут быть, например, следующими.

Первая: 1, 2, 3, 4.

Вторая: 1, 2, 5, 6.

Третья: 1, 3, 5, 7.

Несложно убедиться, что предъявление этих карточек именно в таком порядке полностью соответствует алгоритму последовательного угадывания числа. Вместе с тем очевидно, что карточки можно показывать в любом порядке.

Второе решение («геометрическое»). Представим себе куб размера $2 \times 2 \times 2$, разбитый на 8 единичных кубиков. Внутри каждого единичного кубика запишем какое-то одно число из наших восьми. Назовём первой карточкой список чисел, написанных в четырёх кубиках сверху, второй карточкой — числа в четырёх кубиках справа, третьей — числа в четырёх кубиках спереди. Тогда каждый ответ «да» означает, что Петя загадал число именно из этой половины кубиков, а ответ «нет» — что им загадано число из другой половины. Три любых ответа однозначно определяют три *половины*, в которых находится задуманное число, то есть тот единичный кубик, в котором оно записано. Следовательно, после трёх ответов Витя может угадать задуманное число.

Эти два решения фактически одинаковы, просто излагают одно и то же на разных языках. Геометрический язык может оказаться проще для тех школьников, которые привыкли мыслить образами, картинками, а числовой — для тех, кто предпочитает мыслить формулами и числами. Разницу типов мышления стоит учитывать и в дальнейшем, потому что большая часть задач допускает аналогичные переформулировки решений. Отметим, что «геометрические» решения здесь вовсе не случайны: то, что три множества «подозрительных» чисел всегда пересекаются ровно по одному элементу, в геометрии соответствует пересечению трёх непараллельных плоскостей ровно в одной точке.

Решение по существу не зависит от того, какие именно числа загадал Петя. Это вообще могут быть не числа, а буквы или любые другие объекты: для решения важно лишь их количество.

Задача 5.2. Угадывание по плану — 2. Петя загадал пару натуральных чисел и сообщил Вите, что их произведение равно 120. Помогите Вите создать три карточки так, чтобы, задав Пете вопросы «Есть ли задуманное тобой число на этой карточке?» и получив на них ответы, угадать эту пару. Порядок чисел в паре не имеет значения.

Решение. Достаточно найти меньший из сомножителей. Он может быть одним из следующих: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10. Вариантов всего восемь, поэтому задача равносильна предыдущей.

Здесь тоже можно предлагать «геометрическое» и «числовое» решения, однако принципиально важным является подсчёт числа вариантов: если бы вариантов было больше чем восемь, то Вите пришлось бы заводить четвёртую карточку...

Задача 5.3. Угадывание по делимости — 2. Петя загадал натуральное число A, принимающее значения от 1 до 8. Витя называет три своих числа X_1, X_2, X_3, а Петя сообщает, какие из них делятся на A. Какие числа должен назвать Витя, чтобы после ответа Пети правильно определить задуманное Петей число A?

Для последовательного алгоритма мы решали эту задачу на первом занятии. А здесь задача Вити труднее — нужно придумывать такое второе число, чтобы оно разбило пополам каждое из двух множеств вариантов, образовавшихся после первого ответа Пети. А затем он должен придумать третье число, делящее пополам каждое из четырёх получившихся множеств. Для проверки правильности решения полезно сделать табличку — выписать все возможные загаданные числа и для каждого из них записать три ответа на числа X_1, X_2, X_3. Если все восемь троек ответов различны, задача решена верно.

Решение. Одно из трёх нужных чисел было найдено в первом занятии — 105. Как найти два остальных? Каждое из них должно делиться на какие-то два нечётных числа и не делиться на два других, и точно то же самое должно быть верно для чётных чисел. Перебирая варианты, получаем следующие возможности.

1. Число делится на 1, 2, 3, 6 и не делится на 4, 5, 7, 8. Пример такого числа — 6.

2. Число делится на 1, 2, 4, 5 и не делится на 3, 6, 7, 8. Пример такого числа — 20.

3. Число делится на 1, 2, 4, 7 и не делится на 3, 5, 6, 8. Пример такого числа — 28. Поскольку нужно отличить 6 от 8, включать в список чисел одновременно 20 и 28 нельзя. А вот списки (105, 6, 20) и (105, 6, 28), как нетрудно убедиться с помощью составления таблички ответов, оба годятся.

Далее идёт серия задач на плановые решения. Кроме прочего, такие постановки задач помогают не забывать про монеты, переставшие быть подозрительными: их можно (и даже бывает нужно) использовать для дальнейших взвешиваний.

Задача 5.4. План — 9. Даны девять монет, из которых одна — лёгкая ФМ. Как найти такие два взвешивания (на двухчашечных весах), чтобы второе делалось независимо от результатов первого? Иначе говоря, как *спланировать* оба взвешивания заранее?

Чаще всего ученики приходят примерно к таким взвешиваниям: первое — монеты 1, 2 и 3 на левой чаше против 4, 5 и 6 на правой, второе — монеты 1, 4 и 7 на левой чаше против 2, 5 и 8 на правой. Этот алгоритм кратко записывается так: 1 2 3 $\vee$ 4 5 6; 1 4 7 $\vee$ 2 5 8. После решения этой задачи предложите ученикам сделать (по своим алгоритмам взвешиваний!) примерно такую табличку:

Результаты	№ ФМ	Судьба этой монеты
$<, <$	1	*Л Л*
$<, =$	3	*Л О*
$<, >$	2	*Л П*
$=, <$	7	*О Л*
$=, =$	9	*О О*
$=, >$	8	*О П*
$>, <$	4	*П Л*
$>, =$	6	*П О*
$>, >$	5	*П П*

Здесь и далее левая чаша обозначена буквой *Л*, а правая — *П*. Отложенные (не участвующие во взвешивании) монеты удобно считать отдельной чашей, обозначая её *О*.

В левой колонке указывается результат взвешивания, в средней — какая именно монета при таком результате является фальшивой, в правой — её «судьба», то есть на каких чашах весов она побывала в каждом из взвешиваний.

Судьбы из разных строчек различны, и это не случайно: если бы у двух разных монет была одинаковая судьба (то есть во *всех* взвешиваниях они оказывались на одной и той же чаше весов либо одновременно не участвовали во взвешивании), то отличить их друг от друга было бы невозможно, то есть в том случае, когда одна из этих монет фальшивая, мы не смогли бы определить, какая это монета. Это важнейший ключевой факт: каждая монета «кодируется» своей судьбой, судьбы разных монет не могут совпадать.

Решение. Один из возможных планов был уже приведен выше: $1\,2\,3 \vee 4\,5\,6$; $1\,4\,7 \vee 2\,5\,8$. Геометрически он означает такое расположение девяти чисел в виде квадрата 3×3:

	Левая	Правая	Отложенная
Левая	1	2	3
Правая	4	5	6
Отложенная	7	8	9

Здесь строчки соответствуют первому взвешиванию, а столбцы — второму. Фактически этот план является единственно возможным (с точностью до перенумерации монет): как мы уже знаем, в каждом взвешивании на каждой чаше весов должны быть по 3 монеты, при этом судьбы монет, оказавшихся в первом взвешивании на одной чаше, во втором взвешивании должны быть различными, то есть все тройки монет (123, 456, 789) необходимо разложить по трём разным чашам.

Полезно ещё раз обратить внимание учеников на то, что нумерация монет от 1 до 9 — вещь вспомогательная, не имеющая никакого отношения к сути задачи. Фактической меткой для каждой монеты является двухбуквенное «слово», задающее её судьбу. Если бы монеты с самого начала были *закодированы* парами букв, то сама задача и ее плановое решение стали бы намного проще. Сравните.

Условие: в нашем распоряжении имеются три круглые, три квадратные и три треугольные монеты, причём одна из монет каждой формы — красная, другая — жёлтая, а третья — зелёная. Все монеты должны весить одинаково, но одна из этих девяти монет фальшивая, она весит немного легче. Как найти её за два взвешивания?

Решение: первым взвешиванием сравним все красные монеты с зелёными, а вторым — все круглые с квадратными.

Таким образом, едва ли не главной трудностью в задачах об определении ФМ является отыскание правильной *кодировки* монет, и именно это и делается нами в каждом «плановом» решении.

Геометрически кодировка монет соответствует такой картинке: рассмотрим две тройки параллельных прямых (например, 3 горизонтальных и 3 вертикальных) и закодируем монеты точками пересечения. Взвешивание сравнивает между собой монеты с двух параллельных прямых, каждое взвешивание однозначно определяет «подозрительную» прямую, а искомая ФМ — точка пересечения двух таких прямых.

Задача 5.5. План — 27. Одна из 27 монет фальшивая, она весит меньше настоящей. Придумайте план из трёх взвешиваний, позволяющий определить ФМ.

Последовательное («адаптивное») решение этой задачи было приведено в занятии 2.

Решать задачи о взвешиваниях «планово» всегда кажется (и ученикам, и учителям) намного более трудным делом, чем искать «последовательные» решения. Однако на самом деле это не так. Если идеи из задачи 5.4 разобраны и хорошо поняты учениками, то решение задачи 5.5 не должно вызывать никаких трудностей: ученики кодируют монеты словами трёхбуквенного алфавита (например, $\{Л, О, П\}$), после чего первое взвешивание определяет первую букву кодировки, второе — вторую, а последнее — третью.

Геометрическая картинка здесь такова: положим 27 монет в 27 кубиков, составляющих куб размера $3 \times 3 \times 3$ — в каждый кубик по одной монете. Каждым взвешиванием будем сравнивать кубики, лежащие в двух параллельных слоях. Результат такого взвешивания определяет «подозрительный» слой, в котором находится кубик с ФМ. Пересечение трёх слоев (горизонтального, вертикального продольного и вертикального поперечного) однозначно задаёт кубик с ФМ. (Нетрудно понять, что куб и его слои здесь полностью аналогичны параллельным прямым и точкам их пересечения из геометрической интерпретации решения предыдущей задачи. Только здесь речь идёт уже о трёх тройках параллельных плоскостей и ФМ отыскивается как точка пересечения трёх «подозрительных» непараллельных плоскостей.)

Решение. Будем считать, что монеты закодированы тройками букв в алфавите $\{Л, О, П\}$. Первая/вторая/третья буква обозначает ту чашу, на которой данная монета должна оказаться при первом/втором/третьем взвешивании. Например, монета *ЛЛО* при первых двух взвешиваниях находится на левой чаше, а в третьем — не взвешивается. Отметим, что эта кодировка фактически уже создала план взвешиваний. Так, при первом взвешивании мы должны на левую чашу положить все те монеты, у которых первая буква *Л*, а на правую — все монеты с буквой *П*.

Как отыскать ФМ по результатам взвешиваний, проведённых по данному плану? Очень просто: по результату первого взвешивания определяется первая буква трёхбуквенного кода фальшивой монеты, по результату второго взвешивания — вторая буква, а по последнему — третья. Поскольку все 27 кодов различны, каждому результату взвешиваний соответствует своя фальшивая монета.

Задача 5.6. а) Одна из семи монет фальшивая, она весит меньше настоящей. Придумайте план, позволяющий определить эту ФМ за два взвешивания. б) Попробуйте обобщить это решение так, чтобы оно годилось и для любого числа монет (от 4 до 9).

Решение. а) Еще раз посмотрим на план из задачи о девяти монетах: 1 2 3 $\vee$ 4 5 6; 1 4 7 $\vee$ 2 5 8.

Табличка соответствия в этом плане была такой:

Результаты	№ ФМ	Судьба ФМ
$<, <$	1	*Л Л*
$<, =$	3	*Л О*
$<, >$	2	*Л П*
$=, <$	7	*О Л*
$=, =$	9	*О О*
$=, >$	8	*О П*
$>, <$	4	*П Л*
$>, =$	6	*П О*
$>, >$	5	*П П*

Хочется не строить совсем новый план, а слегка изменить уже имеющийся. Для этого из него нужно как-то вычеркнуть две строки (а остальные семь сопоставить имеющимся монетам). Однако не любую пару строк можно вычеркнуть. Например, если мы удалим последние две строки, то в каждом из взвешиваний на левой чаше весов окажется больше монет, чем на правой, а это недопустимо. Как же найти, какие строки удалять? Очень просто: вместе с любой строкой можно убрать симметричную, потому что в ней монета имеет симметричную судьбу, то есть каждый раз лежит на противоположной чаше весов. Тогда после удаления двух этих строк в каждом взвешивании по-прежнему будет поровну монет на каждой чаше. Так, вместе с первой строчкой (ФМ 1) должна быть удалена последняя (ФМ 5).

Итого: достаточно в каждом взвешивании снять с весов две этих монеты, и мы получим плановое решение для семи оставшихся монет.

б) Просто приведём номера монет (из того же плана), которые должны использоваться. Для четырёх монет: {1, 2, 4, 5}. Для пяти монет: {1, 2, 4, 5, 9}. Для шести монет: {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Для семи монет: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9}. Для восьми монет: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Более общий подход будет показан в решении следующей задачи.

Задача 5.7. а) Одна из 25 монет фальшивая, она весит меньше настоящей. Придумайте план, позволяющий определить эту ФМ за три взвешивания.

б)* Попробуйте обобщить это решение так, чтобы оно годилось и для любого числа монет (от 10 до 27).

Решение. а) Закодируем монеты трёхбуквенными словами в алфавите $\{Л, О, П\}$, кроме слов *ЛЛЛ* и *ППП*. Раскладываем монеты по чашам аналогично решению задачи 5.5, при этом в каждом взвешивании на весах окажется по 8 монет.

б)* Понятно, что и эту задачу можно решить перебором, для каждого значения $N < 27$ указывая список монет из плана взвешиваний, которые должны быть использованы. Мы пойдём другим путём — приведём решение, которое годится для произвольного N от 10 до 27 и которое можно будет даже обобщить на любое число взвешиваний.

Итак, что требуется для планового решения задачи об N монетах? Нужно, чтобы «судьбы» всех монет различались и при этом в *каждом взвешивании на левой и правой чашах весов лежали равные количества монет*. Поскольку каждая «судьба» представляет собой слово из $k = 3$ букв в алфавите $\{Л, О, П\}$, это условие переформулируется так: нужно выбрать из общего множества, состоящего из $3^k = 27$ слов, такое подмножество, чтобы у выбранных слов количество букв *Л* в каждой позиции было равно числу букв *П* в этой же позиции у них же. Назовём это условие *ЛП-равновесием*, а подмножества, для которых оно выполнено, — *ЛП-уравновешенными* или просто *ЛП-подмножествами*. Математической индукцией по N покажем, как для каждого N от $3^{k-1} + 1$ до 3^k можно выбрать *ЛП*-подмножество из N слов длины k. База — для $N = 1$, 2 и 3. При $N = 1$ выбираем единственное слово ($О$), при $N = 2$ выбираем слова ($Л$) и ($П$), при $N = 3$ добавляем к ним слово ($О$). Переход: представим N в виде $2N_1 + N_2$, где N_1, $N_2 \leqslant 3^{k-1}$. Ясно, что это всегда можно сделать, причём для большинства значений N — не единственным образом. Например, для $N = 3M$ просто положим $N_1 = N_2 = M$, для $N = 3M + 1$ положим $N_1 = M$ и $N_2 = M + 1$, а для $N = 3M + 2$ положим

$N_1 = M + 1$ и $N_2 = M$. По предположению индукции, можно выбрать *ЛП*-подмножества из N_1 и N_2 слов длины $k - 1$. Теперь *ЛП*-подмножество из N слов длины k строится следующим образом: каждое слово из первого выбранного подмножества превратим в два слова, дописав в конец поочередно буквы *Л* и *П*, а каждое слово из второго подмножества сохраним как одно слово, дописав в конец *О*. Тогда условие *ЛП*-равновесия выполнено для всех k позиций, потому что в последней позиции мы его обеспечили явным образом, а для всех остальных позиций оно обеспечено по предположению индукции для подмножеств из N_1 и N_2 слов, а значит, и для выбранного нами их объединения. Таким образом, *ЛП*-подмножества, а значит, и плановые алгоритмы взвешиваний существуют для любого N.

☝ По-видимому, это решение со школьниками придётся детально разобрать и проиллюстрировать на примерах. Начните с проверки того, что примеры для $4 \leqslant N \leqslant 8$, приведённые в задаче 5.6(б), получаются именно по той схеме, которая описана в этом решении.

☝ Мы можем кодировать монеты и в другом трёхбуквенном алфавите, например $\{A, B, C\}$, и выбирать AB-уравновешенные подмножества любого размера.

Задача 5.8. а) Пусть теперь из 25 монет, возможно, есть одна лёгкая ФМ (но её может и не быть). Решите такую задачу последовательным алгоритмом из трёх взвешиваний.

б)* Докажите, что для задачи а) не существует планового алгоритма.

Задача 5.8(а) — единственная из известных автору вариаций задач об отыскании одной ФМ, для которой существует последовательный алгоритм, но не существует планового.

Решение. а) Мысленно добавим 26-ю монету, которую мы не будем класть на весы ни разу (то есть именно её будем откладывать всякий раз, когда во взвешивании есть хотя бы одна монета, не лежащая на весах). Проделаем все взвешивания так, как это было описано в задаче 2.2(б). Если каждый раз на весах было равновесие, это означает, что фальшивой должна являться мысленно добавленная нами 26-я монета, то есть что среди 25 данных монет ФМ отсутствует.

б) **Первое решение.** Всего в этой задаче 26 случаев — либо фальшивой является какая-то из 25 монет, либо ФМ отсутствует. Если в первом взвешивании плана мы кладём на чаши весов по k монет, то результаты взвешивания «$<$» и «$>$» соответствуют ровно k случаям, а «$=$» соответствует остальным $26-2k$ случаям. Так как должны быть выполнены неравенства $k \leqslant 9$ и $26-2k \leqslant 9$, мы получаем, что $k=9$ и $26-2k=8$. Рассмотрим 8 случаев равенства. Пусть l из соответствующих им монет лежат на весах во втором взвешивании плана. Заметим, что при этом должны быть выполнены неравенства $l \leqslant 3$ и $8-2l \leqslant 3$, — иначе при каком-то из результатов второго взвешивания у нас для различения в третьем взвешивании останется более трёх случаев, а это невозможно. Отсюда получаем $l=3$ и $8-2l=2$. Аналогично получаем $l=3$ и $9-2l=3$ после неравенств в первом взвешивании. Итак, равновесия в двух первых взвешиваниях любого плана соответствуют двум случаям (причём один из них — когда ФМ отсутствует), а каждый из остальных 8 результатов этих взвешиваний соответствует трём случаям (трём каким-то ФМ, среди которых отсутствующей точно нет). Для того чтобы различить эти монеты третьим взвешиванием из нашего плана, мы должны в нём обязательно положить по одной из них на чаши весов, а третью монету — отложить. Таким образом, при третьем взвешивании определятся две группы по 8 монет на чашах. Осталась единственная (отличная от отсутствующей) монета, соответствующая двум равновесиям. В третьем взвешивании её нельзя класть на чашу весов, потому что на этой чаше будет больше монет, чем на другой. Но если её не класть, то получается, что она ведёт себя в каждом взвешивании так же, как и отсутствующая монета, то есть после равновесия в третьем взвешивании мы не сможем определить, какой из двух этих случаев имеет место! Следовательно, задача неразрешима.

Второе решение. Собственно, решение практически то же самое, только изложено по-другому. Предположим противное: существует план взвешиваний, решающий задачу. Запишем судьбу каждой монеты согласно этому плану в алфавите $\{Л, О, П\}$. Получив результат взвешиваний в виде слова из алфавита $\{<, >, =\}$, мы должны суметь указать конкретную фальшивую монету или сделать вывод об её отсутствии. Это значит, что все 25 монет должны соответствовать различным трёхбуквенным словам, причём слову *ООО* ни одна монета соответствовать не должна (поскольку это слово точно соответствует отсутствию ФМ). Значит, существует единственное ненулевое слово, которому не может соответствовать ФМ. Пусть, для определённости, в этом слове отличен от O первый разряд и в нём записано $Л$. Это значит, что $Л$ в первом разряде встречается в судьбах восьми монет, а $П$ в том же разряде — у девяти монет. Иначе говоря, в первом взвешивании на левой чаше весов было 8 монет, а на правой — 9. Но такое взвешивание не даёт никакой информации, а значит, ни в какой план входить не может. Противоречие.

Задача 5.9. Золото и серебро — 1. Пусть имеется ровно одна ФМ из 27. Однако среди этих 27 монет имеется N серебряных, а остальные — золотые (золотые отличаются по виду от серебряных, настоящая серебряная монета может отличаться по весу от настоящей золотой, значение N нам известно). Известно, что если ФМ серебряная, то она легче настоящих монет, а если золотая, то тяжелее. Как найти план из трёх взвешиваний, позволяющий отыскать ФМ?

Решение. Закодируем монеты трёхбуквенными словами в алфавите $\{A, B, C\}$ так, чтобы подмножество слов для серебряных монет было AB-уравновешенным (в решении задачи 5.7 мы показали, что это возможно). Поскольку общее число букв A в каждой позиции равно общему числу букв B в той же позиции (и равно 9), множество слов для золотых монет также будет (дополнительным) AB-подмножеством.

При первом взвешивании взвесим монеты с буквами A и B на первом месте: кладём серебряные с буквой A на левую, с буквой B — на правую, а золотые — наоборот. Если левая чаша окажется легче, то фальшива либо серебряная монета на левой, либо золотая на правой, то есть *первая буква у фальшивой монеты* — A. Аналогично другие результаты взвешивания тоже однозначно определят другую первую букву кода ФМ. Точно так же вторым и третьим взвешиваниями определим вторую и третью букву кода ФМ.

Задача 5.10. Золото и серебро — 2. Пусть среди 24 монет ровно половина — золотые. Одна из этих монет фальшивая, причём, как и раньше, серебряная ФМ легче серебряной НМ, а золотая — тяжелее. Найдите план из трёх взвешиваний, решающий эту задачу.

Первое решение. План взвешиваний почти очевидным образом строится по «последовательному» алгоритму, описанному в занятии 2. Например, во втором взвешивании мы будем уравновешивать две тройки ПМ двумя такими тройками, которые оказались бы ПМ при ином исходе первого взвешивания. В итоге получим такой план (золотые монеты обозначены $З_1$, ..., $З_{12}$, серебряные — C_1, ..., C_{12}):

$$З_1 + З_2 + З_3 + З_4 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \vee \vee З_5 + З_6 + З_7 + З_8 + C_5 + C_6 + C_7 + C_8;$$

$$З_5 + З_6 + З_7 + З_4 + C_5 + C_6 + C_7 + C_4 \vee \vee З_9 + З_{10} + З_{11} + З_8 + C_9 + C_{10} + C_{11} + C_8;$$

$$З_1 + C_1 + З_4 + C_4 + З_7 + C_7 + З_{10} + C_{10} \vee \vee З_2 + C_2 + З_5 + C_5 + З_8 + C_8 + З_{11} + C_{11}.$$

Второе решение (геометрическое). Рассмотрим куб размера $3 \times 3 \times 3$, составленный из 27 единичных кубиков, раскрашенных в два цвета в шахматном порядке. Выбросим три кубика по главной диагонали. В каждом слое осталось по четыре кубика каждого цвета. Сопоставим кубикам одного цвета золотые, а другого — серебряные монеты. При каждом взвешивании сравниваем кубики из двух параллельных слоев A и B: на одну чашу кладем золотые из слоя A и серебряные из слоя B, а на другую — наоборот. Тогда результат каждого взвешивания однозначно определяет «подозрительный» слой, а ФМ лежит в пересечении трёх непараллельных слоёв.

Следующие две задачи имеют непосредственное отношение к современной криптографии. Представьте, что план передаётся по каналу связи отдельными сообщениями (одно взвешивание — одно сообщение) и при этом некоторые сообщения могут теряться. Можно, конечно, просто дублировать каждое сообщение (то есть передавать вместо двух сообщений четыре), тогда при одиночной потере всё равно оба взвешивания дойдут до адресата. А что делать, если известно, что могут потеряться *два* сообщения, — неужели передавать каждое взвешивание трижды? Уж очень велика избыточность... К счастью, есть более экономный способ.

Задача 5.11. План с одним запасом. Снова вернёмся к задачам об определении одной ФМ из девяти. Витя предлагает Пете план, состоящий из трёх взвешиваний. Какое-то одно из взвешиваний Пете не нравится, но два остальных он проделывает, после чего сообщает Вите, какое взвешивание ему не понравилось и чем закончились остальные. Помогите Вите составить такой план, чтобы он смог найти ФМ независимо от действий и результатов Пети.

Решение. Покажем, как Витя может дополнить третьим взвешиванием стандартный план (1 2 3 $\vee$ 4 5 6; 1 4 7 $\vee$ 2 5 8). Для этого он должен третье взвешивание предложить таким, чтобы им можно было заменить каждое из первых двух. Значит, каждая из шести групп монет (1 2 3, 4 5 6, 1 4 7, 2 5 8, 7 8 9, 3 6 9 — последние две группы образованы монетами, которые не выкладывались на весы) в этом взвешивании должна быть разбита на три разные подгруппы. Следовательно, в одну группу этого взвешивания могут попасть только те монеты, которые в одной группе ещё не были. Например, вместе с монетой 1 могут быть монеты 5, 6, 8 и 9, но не одновременно 5 и 8 или 6 и 9. Пусть мы объединили в одну кучку 1, 5 и 9. Тогда в какой-то другой кучке должна быть монета 2. С ней могут быть только 4, 7 и 6, причём не одновременно 4 и 6 или 4 и 7. Значит, 2 находится в кучке с 6 и 7. Тогда 3, 4 и 8 образуют третью кучку. Таким образом, третье взвешивание в плане имеет вид 1 5 9 $\vee$ 2 6 7.

Обсуждение см. после решения следующей задачи.

Задача 5.12*. План с двумя запасами. Решите предыдущую задачу, если план состоит из четырёх взвешиваний, любые два из которых могут Пете не понравиться.

Решение. Заметим, что после выбранных трёх взвешиваний каждая монета побывала в одной группе с шестью другими, то есть для каждой монеты остались всего две такие монеты, с которыми её ещё можно объединить в одну группу для четвёртого взвешивания. Это условие задаёт четвёртое взвешивание плана с точностью до положения монет на чашах: 1 6 8 $\vee$ 3 5 7. Осталось убедиться (например, прямой проверкой), что это взвешивание вместе с любым из остальных трёх приводит к желаемому результату. (Для всех других пар взвешиваний это свойство заведомо выполняется, потому что они годились в качестве плана для предыдущей задачи.)

☝ Фактически в решении этой задачи нам удалось построить функцию, значение которой для любой пары монет (с номерами от 1 до 9) равно номеру взвешивания, в котором эти две монеты оказываются *на одной чаше весов*. (При этом на каждую чашу попадает тройка монет.) Если бы мы закодировали пары монет не натуральными числами, а парами цифр от 0 до 2 (то есть набор кодов был бы таким: 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22), то эту же функцию можно было бы задать и описать существенно проще: для двух монет с кодами a_1b_1 и

a_2b_2 номер взвешивания, в котором они попадают на одну чашку, равен

$$\begin{cases} 1, \text{ если } a_1 = a_2, \\ 2, \text{ если } b_1 = b_2, \\ 3, \text{ если } a_1 - b_1 \equiv a_2 - b_2 \pmod 3, \\ 4, \text{ если } a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \pmod 3. \end{cases}$$

Это разбиение на 4 взвешивания очень тесно связано с так называемыми *конечными плоскостями* — комбинаторными объектами, которые устроены во многом аналогично обычным плоскостям. В нашей конечной плоскости 9 точек (монет), закодированных числами xy. Через каждую пару точек проходит одна *прямая* (она задаётся уравнением $Ax + By \equiv C \pmod 3$), где A, B, C — целые числа). Каждая такая прямая проходит ровно через 3 точки, соответствующие значениям $x = 0$, $x = 1$ и $x = 2 \pmod 3$. Всего в этой конечной плоскости имеются 12 прямых: каждая из пар $(A, B) = (0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ и $(1, 2)$ задаёт три параллельные прямые, отличающиеся только значением коэффициента C, и это даёт естественное деление на 4 группы параллельных прямых. Каждое взвешивание сравнивает точки двух из прямых «своей» группы.

Задача 5.13. Маркированные слитки — 2. Эксперт предъявил суду 55 серебряных слитков, промаркированных по-китайски. У него есть весы, которые показывают вес груза, при условии, однако, что этот вес не более 3333 г. Эксперт знает вес каждого слитка, а судья знает только то, что слитков всего 55 штук, веса всех слитков различны и равны 1001, 1002, ..., 1055 грамм. Каково наименьшее количество взвешиваний, которое необходимо проделать эксперту, чтобы судья смог по их результатам восстановить вес каждого слитка?

Ответ: 27.

Решение. Докажем, что меньшего числа взвешиваний не хватит. Пусть k — количество проведенных взвешиваний. В этой задаче назовём *судьбой* каждого слитка номера тех взвешиваний, в которых он участвовал (все судьбы должны быть различными, так как слитки с одинаковой судьбой неразличимы). В каждом взвешивании используется не более 3 слитков, поэтому общее число номеров во всех судьбах не более $3k$. При этом может быть всего один слиток с «пустой» судьбой и не более k слитков, судьба которых содержит всего один номер взвешивания. Но тогда на остальные $54 - k$ слитков должно приходиться не менее чем $2(54 - k)$ номеров, и общее число номеров в судьбах не меньше $k + 108 - 2k = 108 - k$. Из неравенства $108 - k \leqslant 3k$ находим $k \geqslant 27$.

Алгоритм действий эксперта может быть таким: отложим в сторону самый тяжёлый слиток, разобьём остальные на шестёрки по порядку: $(1001, 1002, 1003, 1004, 1005, 1006)$, ..., $(1049, 1050, 1051, 1052, 1053, 1054)$. За 3 взвешивания определяем веса слитков в первой шестёрке: $1001 + 1002 + 1003$, $1001 + 1004 + 1005$, $1002 + 1004 + 1006$. Аналогично за 3 взвешивания определяем веса слитков второй шестёрки, и т. д. Так за 27 взвешиваний определятся веса 54 слитков в шестёрках, а для 55-го останется лишь одна возможность.

Задача 5.14. Найдите плановые решения для всех задач занятия 2, для которых это ещё не сделано.

См. также дополнительные задачи Д.37–Д.43.

Занятие 6

Султан Саладин и его пленник

Легенда, якобы описывающая события тысячелетней давности, гласит следующее. Один из рыцарей-крестоносцев был захвачен в плен и предстал перед султаном Саладином[1], который объявил, что освободит пленника и его коня за выкуп в 100 тысяч золотых монет.

— О великий Саладин, — обратился к султану рыцарь, у которого за душой не было ни гроша, — ты лишаешь меня последней надежды. На моей родине мудрому и находчивому пленнику всегда дают шанс выйти на свободу без выкупа, если он решит трудную головоломку.

— Пусть будет так, — ответил Саладин, и сам обожавший головоломки. — Слушай же. Тебе дадут двенадцать золотых монет и простые весы с двумя чашками, но без гирь. Одна из монет фальшивая, однако неизвестно, легче она или тяжелее настоящих. Ты должен найти её всего за три взвешивания и определить, легче она или тяжелее остальных. Не справишься с задачей до утра — пеняй на себя!

Следует отметить, что срок, отведённый рыцарю мудрым Саладином, гораздо меньше того времени, за которое эту головоломку удается решить подавляющему большинству наших современников. Иначе говоря, со времён крестовых походов человечество не очень продвинулось в умении решать труд-

[1]Саладин, или *Салах-ад-дин* (1138–1193), — историческое лицо, султан Египта и Сирии, полководец, основавший династию Айюбидов. Европейцам он известен именно как Саладин, хотя это не имя, а почётное прозвище, означающее «защитник веры». Собственное имя этого правителя — *Юсуф, сын Айюба*.

ные головоломки. Впрочем, на самом деле эта головоломка гораздо моложе. Впервые она появилась только в 1945 году в публикации американской «Математической газеты», куда была предложена Ф. Дайсоном. Через год — возможно, независимо от публикации Дайсона — она была переоткрыта Дональдом Ивсом и опубликована им в разделе задач «American Mathematical Monthly» (американского аналога нашего «Кванта»). После этого буквально за несколько месяцев в разных математических журналах, в том числе и в весьма серьезных, появились несколько обобщений и вариаций. Впрочем, обо всем по порядку.

Задача 6.1. а) Могут ли в задаче Саладина какие-нибудь монеты иметь *противоположные* «судьбы», то есть в каждом взвешивании оказываться либо на разных чашах весов, либо не использоваться одновременно?

б) Докажите, что ни одна монета не может иметь «судьбу» *OOO*.

Эта задача — сравнительно нетрудное упражнение на повторение и закрепление материала предыдущего занятия.

Решение. а) Пусть в каждом взвешивании монеты X и Y оказывались либо на разных чашах весов, либо одновременно вне весов. Тогда мы не сумеем отличить друг от друга две таких ситуации: 1) X — лёгкая ФМ; 2) Y — тяжёлая ФМ.

б) Пусть монета Z не выкладывалась на весы, то есть имела судьбу *OOO*. Если эта монета окажется ФМ, то мы не сможем сказать, легче она или тяжелее настоящих монет.

Задача 6.2. Решите задачу Саладина (всего в нашем распоряжении 12 монет, одна из которых — лёгкая или тяжёлая ФМ, нужно найти её за три взвешивания и определить, легче она или тяжелее, чем НМ).

К решению этой задачи уже всё подготовлено — задачей о 24 монетах из предыдущего занятия и задачей 6.1. Но если ученики не заметят этих подсказок, то им придётся проходить весь путь решения на ощупь, что, конечно, труднее. Всё-таки Саладин не зря давал рыцарю время до следующего утра, а мы не зря подчеркнули, что большинству наших современников и этого запаса времени оказывается мало.

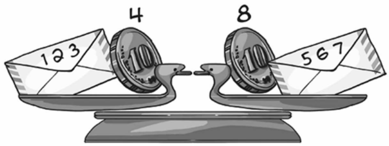
Первое решение. Вспомним, что мы уже решали задачу 5.10 о 12+12 монетах, в которой фальшивая золотая монета могла быть тяжелее настоящей, а фальшивая серебряная — легче, причём тех и других монет на весах должно быть поровну. Мысленно склеим в том решении каждую серебряную и золотую монету в единую биметаллическую (с тем же номером). Тогда эта *ЗС*-монета, если она окажется фальшивой, может быть как легче, так и тяжелее остальных, то есть оказывается именно такой, как в задаче Саладина. Итак, получаем взвешивания

$$\begin{aligned} ЗС_1 + ЗС_2 + ЗС_3 + ЗС_4 &\quad\vee\quad ЗС_5 + ЗС_6 + ЗС_7 + ЗС_8, \\ ЗС_5 + ЗС_6 + ЗС_7 + ЗС_4 &\quad\vee\quad ЗС_9 + ЗС_{10} + ЗС_{11} + ЗС_8, \\ ЗС_1 + ЗС_5 + ЗС_9 + ЗС_8 &\quad\vee\quad ЗС_2 + ЗС_6 + ЗС_{10} + ЗС_{12}. \end{aligned}$$

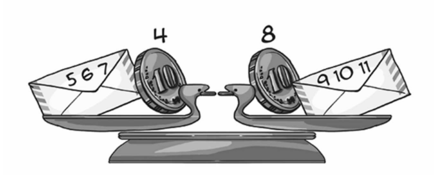
Второе решение. Рассмотрим ситуацию глобально: каждая монета должна иметь одну из 26 ненулевых судеб, при этом из каждой пары противоположных судеб встречается только одна. Поскольку монет всего 12, можно поступить следующим образом: пару противоположных судеб *ЛЛЛ* и *ППП* выкинем, а все остальные ненулевые судьбы разделим на пары и из каждой пары выберем ровно одну. Следить при этом нужно за тем, чтобы в каждом взвешивании букв *Л* и *П* было поровну. Например, можно оставить следующие 12 судеб: *ЛПЛ*, *ЛПО*, *ЛПП*, *ЛЛО*, *ПОЛ*, *ПОО*, *ПОП*, *ППЛ*, *ОЛЛ*, *ОЛО*, *ОЛП*, *ООП*. Затем каждая монета раскладывается на весы в соответствии со своей судьбой.

Почему этого достаточно? Предположим, что ФМ легче НМ. Будем по результатам взвешиваний выписывать код — судьбу ФМ. Он определится однозначно. Но что, если мы не угадали и ФМ тяжелее НМ? Выпишем другой код и для такого предположения. Он противоположен первому. Из двух противоположных кодов в списке есть только один. Зная, в каком предположении код написан, найдем и саму ФМ, и то, в какую сторону она отличается от НМ.

Ещё один подход к поиску планового решения может быть проиллюстрирован с помощью «конвертиков». Представим себе, что монеты 1–3, 5–7 и 9–11 запакованы в невесомые конвертики, а монеты 4, 8 и 12 лежат отдельно. При первом взвешивании на каждую чашу весов кладётся целый конвертик и одна отдельная монета.

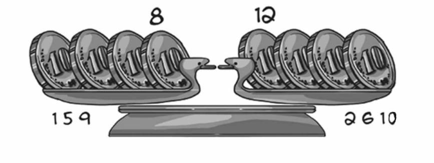


При втором взвешивании конвертики меняются (например, 5 6 7 на место 1 2 3, 9 10 11 на место 5 6 7, 1 2 3 откладывается), а отдельные монетки остаются на своих местах.



Проанализируем возможные результаты этих двух взвешиваний.

Если результат второго взвешивания окажется таким же, как у первого, то во всех конвертиках монеты настоящие (а фальшивой является одна из монет 4, 8 12). Если же результат второго взвешивания будет отличаться от первого, то по двум этим результатам мы можем точно сказать, в каком конвертике находится ФМ и легче она или тяжелее, чем НМ. Нетрудно убедиться, что после каждого результата осталось не более трёх возможных случаев. При третьем взвешивании мы должны разложить монеты так, чтобы разделить все эти тройки. Для этого, в частности, монеты из каждого конвертика раскладываются на три разные чаши весов. Одно из возможных взвешиваний показано ниже:



Наконец, ещё более лёгкий для запоминания способ разбить монеты на три взвешивания даёт английская мнемоническая фраза «Ma do like me to find fake coin» («Мама, делай как я, чтобы найти фальшивую монету»). Если обозначить монетки буквами этой фразы без повторений — M, A, D, O, L, I, K, E, T, F, N, C, — то слова MADO и LIKE дадут первое взвешивание, METO и FIND — второе, а FAKE и COIN — третье! Было бы интересно найти аналогичную мнемонику по-русски.

Задача 6.3. Версия 2. Пусть теперь по-прежнему нужно найти ФМ, но не требуется узнавать, легче она или тяжелее, чем НМ. Решите эту задачу для 13 монет.

Указание: достаточно просто добавить монету с судьбой *ООО*, то есть такую, которая во взвешиваниях не участвует.

Задача 6.4. Версия 3. Пусть имеется 13 монет, среди которых одна ФМ, и отдельно от них имеется хотя бы одна НМ (то есть такая монета, которая не может оказаться фальшивой). Решите задачу Саладина для такой ситуации.

Указание: а здесь мы к плану решения задачи 6.2 добавляем судьбу *ЛЛЛ* для 13-й монеты и судьбу *ППП* для 14-й —

заведомо настоящей. Судьба *OOO* оказывается снова невостребованной.

Задача 6.5. Версия 4. Пусть имеется 14 монет, среди которых одна ФМ, и отдельно есть одна НМ. Как найти ФМ, если не требуется узнавать, легче она или тяжелее?

Указание: Добавим монету с судьбой *OOO* к тому, что получили в задаче 6.4. Если она будет фальшивой, *и только в этом случае*, мы не сумеем сказать, легче она или тяжелее, чем настоящая.

Задача 6.6*. Ещё четыре версии. Как должны измениться условия (и решения) задач 6.2–6.5, если ФМ среди данных монет *может и не быть* (в этом случае необходимо дать ответ «фальшивых монет нет»)?

Указание: Возможность отсутствия ФМ равносильна отсутствию монеты с судьбой *OOO* в плане взвешиваний, то есть в задачах 6.2 и 6.4 вообще ничего не изменится, а вот в задачах 6.3 и 6.5 добавить одну дополнительную монету не удастся. (Аккуратно проведите доказательство оценки, см. решения следующих задач!)

Задача 6.7. Неразрешимый случай. Из шести монет одна фальшивая, причём неизвестно, легче она или тяжелее, чем настоящая. Требуется её найти (но не требуется определять, легче она или тяжелее настоящей). Докажите, что двух взвешиваний может не хватить.

Решение. Предположим противное: нам удалось как-то проделать два взвешивания (возможно, выбирая монеты для следующего взвешивания в зависимости от результатов предыдущего) и каждому из результатов сопоставить ту монету, которая при этом исходе является фальшивой. Рассмотрим 8 исходов, отличных от «=, =». Им соответствуют пять фальшивых монет. Каждая из них побывала на весах в момент неравенства. Но тогда, определив ФМ, по знаку этого неравенства определим и то, легче она или тяжелее настоящей. Однако для пяти монет имеется 10 вариантов «монета легче/тяжелее настоящей», а возможных исходов только 8. Противоречие.

Задача 6.8*. Оценки. Докажите, что количество монет, указанное в задачах 6.2–6.5, является в каждом случае наибольшим возможным.

Решение. Покажем, как в задаче Саладина получить оценку числа монет и одновременно использовать её для отыскания алгоритма взвешиваний. (Для вариаций это делается аналогично.) Пусть при первом взвешивании на каждую чашу положены k монет (остальные $N-2k$ монет не участвуют во взвешивании). Если одна из чаш перевесила, это соответствует $2k$ возможным случаям (и даже $2k$ различным ФМ): либо какая-то из монет этой чаши — фальшивая тяжёлая, либо какая-то из монет другой чаши — фальшивая лёгкая. При $k>4$ общее число ПМ оказывается больше девяти, а это значит, что мы не сможем обнаружить ФМ двумя оставшимися взвешиваниями. Значит, $k \leqslant 4$. С другой стороны, если при первом взвешивании весы остались в равновесии, то ФМ — одна из $N-2k$ монет, не принимающих участие во взвешивании. Иначе говоря, мы пришли к задаче, аналогичной 6.4 (ведь уже имеются заведомо настоящие монеты!), для двух взвешиваний и $N-2k$ монет. За 2 взвешивания мы можем различить не более девяти случаев, а каждая монета даёт 2 случая, поэтому монет не более четырёх. Следовательно, $N-2k \leqslant 4$, а значит, $N \leqslant 4+2k \leqslant 12$.

Совершенно аналогично в обобщении задачи Саладина для m взвешиваний получается оценка $N \leqslant \dfrac{3^m-3}{2}$.

Задача 6.9. Если в какой-либо из предыдущих задач вы построили «последовательный», а не «плановый» алгоритм взвешиваний, то теперь самое время вернуться к этой задаче и построить для нее плановое решение.

Задача 6.10. План с запасом. Витя предлагает Пете план решения задачи Саладина, состоящий из четырёх взвешиваний. Какое-то одно из взвешиваний Пете не нравится, но три остальных он проделывает, после чего сообщает Вите, какое взвешивание ему не понравилось и чем закончились остальные. Помогите Вите составить такой план, чтобы он смог решить задачу независимо от действий и результатов Пети.

Решение. Пример плана (монеты обозначены 1–9, A, B, C):

$$\begin{array}{ccc}
1\,2\,3\,A & \vee & 4\,5\,6\,B,\\
4\,5\,6\,A & \vee & 7\,8\,9\,B,\\
1\,4\,7\,B & \vee & 2\,5\,8\,C,\\
2\,5\,8\,B & \vee & 3\,6\,9\,C.
\end{array}$$

Любые три взвешивания этого плана включают либо первую пару взвешиваний, либо вторую пару взвешиваний. В каждой из этих пар монеты раскладываются «методом конвертиков» (см. комментарий к решению задачи 6.2), а оставшееся взвешивание раскладывает содержимое всех конвертиков по трём разным чашам весов. Таким образом, любые три взвешивания этого плана ведут себя так же, как три взвешивания из плана решения задачи Саладина.

См. также дополнительную задачу Д.10.

Занятие 7

Поищем настоящие

А зачем мы вообще расшибаемся в лепешку и ищем какие-то фальшивые монетки и гирьки? Нам ведь наверняка не нужен этот брак — а ищем мы их только затем, чтоб выкинуть. Тогда почему бы не поискать сразу настоящие монеты? Особенно если нам не нужно искать их все, а достаточно ограничиться каким-то количеством. На первый взгляд эта задача кажется принципиально иной, чем решавшиеся раньше, на второй взгляд понимаешь, что это не так, но на третий — все-таки находишь существенные различия. Впрочем, обо всём по порядку...

Задача 7.1. (Шутка) Среди 9 монет одна фальшивая и 8 настоящих, более тяжелых. Как найти все НМ за два взвешивания на чашечных весах?

Решение. Шуткой здесь является не сама задача, а ее формулировка. Сама же задача — это просто копия задачи 2.1. Ну и решать ее будем точно так же.

Выложим на каждую чашу весов по 3 монеты. Если весы остались в равновесии, то все 6 монет на весах — НМ. Если же одна из чаш перевесила, то настоящими являются 3 отложенных монеты и 3 монеты этой чаши. Вторым взвешиванием кладём на чаши по одной из оставшихся трёх монет и по результату этого взвешивания однозначно находим еще две НМ. Итого $6 + 2 = 8$ НМ.

А теперь перефразируем задачи 2.3–2.4.

Задача 7.2. Среди $N > 3^k$ монет одна фальшивая (более лёгкая, чем настоящие). Докажите, что за k взвешиваний невозможно гарантированно определить все настоящие монеты.

Указание. Здесь работают оба решения задачи 2.3 — и «последовательное», и анализ с конца.

Задача 7.3. Среди $9N$ монет одна лёгкая ФМ. Какое наибольшее число настоящих монет можно гарантированно выявить а) за одно взвешивание; б) за два взвешивания? в) Обобщите полученный результат на большее число взвешиваний.

Ответ: а) $6N$, б) $8N$.

Решение. Стандартный алгоритм позволяет за первое взвешивание найти $6N$ настоящих монет, а за второе — добавить к ним еще $2N$ настоящих монет. Осталось доказать оценку — утверждение о том, что больше чем $6N$ настоящих монет за одно взвешивание и больше чем $8N$ за два взвешивания определить не удастся. Докажем это от противного с помощью рассуждения, очень похожего на рассуждения о «судьбе». Рассмотрим все 9 возможных исходов двух взвешиваний, и пусть в каждом из исходов алгоритму удаётся определить более чем $8N$ настоящих монет. Это можно изобразить, как таблицу из $9N$ строк и 9 столбцов, на пересечении которых алгоритм ставит пометки — больше, чем $8N$ пометок в каждом столбце. Значит, всего в таблице более чем $72N$ пометок. А поскольку строк в ней ровно $9N$, то хотя бы одна строка помечена полностью (во всех девяти столбцах). Иначе говоря, какая-то монета при каждом исходе взвешиваний будет названа настоящей. Но это значит, что она вообще не может являться фальшивой — точнее, что алгоритм объявит ее настоящей даже в том случае, когда на самом деле она фальшива. Следовательно, получено противоречие, и такого алгоритма не существует.

☝ Результат задачи переформулируется так: доля настоящих монет, которую можно найти за одно взвешивание, не превышает $2/3$, а за два взвешивания — не превышает $8/9$ от общего числа монет.

в) Аналогично, доля настоящих момент, которую можно найти за k взвешиваний, не превышает $(3^k - 1)/3^k$. Докажите это самостоятельно.

Следующие задачи уже не имеют аналогов среди решенных в предыдущих занятиях.

Задача 7.4. У фальшивомонетчика есть 40 внешне одинаковых монет, среди которых 2 фальшивые — они легче настоящих и весят одинаково. Как с помощью двух взвешиваний отобрать 20 настоящих монет?

Решение. Разобьем все монеты на 4 кучи A_1–A_4 по 10 монет в каждой. Сравним A_1 с A_2. Если $A_1 = A_2$, то либо в них нет фальшивых монет, либо в каждой из них по одной фальшивой монете, а в остальных двух кучах нет фальшивых монет. Тогда вторым взвешиванием сравним $A_1 + A_2$ с $A_3 + A_4$. Более тяжелая чаша весов состоит из 20 настоящих монет.

Если же одна из куч (например, A_2) будет тяжелее, то все монеты в A_2 настоящие (т. е. уже найдены 10 настоящих монет), а в A_1 есть хотя бы одна фальшивая. Поэтому в $A_3 + A_4$ не более одной ФМ. Сравнив вторым взвешиванием A_3 с A_4, найдем ещё 10 настоящих монет.

☝ Это решение легко обобщается для любого количества монет, кратного 4, и в общем случае позволяет найти долю настоящих монет, равную 1/2. Является ли эта доля наибольшей из возможных? Нет.

Задача 7.5. Среди $7N$ внешне одинаковых монет две фальшивых — они весят одинаково, причём легче настоящих. Как с помощью двух взвешиваний выделить $4N$ настоящих монет?

Решение. Разобьём монеты на группы A_1, A_2 и A_3 из $2N$, $2N$ и $3N$ монет соответственно. Первым взвешиванием сравним A_1 с A_2. Если одна из чаш перевесит, то на ней лежат настоящие монеты, а в группе A_3 — не более одной ФМ. Тогда вторым взвешиванием можно найти 2/3 настоящих из группы A_3, т. е. довести общее число настоящих монет до $2N + 2/3 \cdot 3N = 4N$.

Если же $A_1 = A_2$, то вторым взвешиванием сравним между собой две половинки группы A_1. Если они будут равны, то все $4N$ взвешенных монет настоящие. Если же одна из половин тяжелее, то она, а также вся группа A_3 состоит из настоящих монет. Итого $N + 3N = 4N$ настоящих.

☝ Итак, при двух фальшивых монетах за два взвешивания удается довести долю настоящих монет до 4/7. А при трёх фальшивых монетах?

Задача 7.6. Среди $6N$ внешне одинаковых монет три фальшивых — они весят одинаково, причём легче настоящих. Как за два взвешивания выделить $2N$ заведомо настоящих монет?

Решение. Разделим монеты пополам — выложим на каждую чашу по $3N$ монет. Поскольку имеется нечётное число ФМ, одна из чаш обязательно будет легче другой. На более тяжёлой чаше — не более одной ФМ. Согласно результату задачи 7.3(а)), за оставшееся взвешивание, в котором используются только монеты этой чаши, можно определить $2/3 \cdot 3N = 2N$ настоящих.

☝ Разложение всех монет поровну на две чаши при нечетном числе фальшивых позволяет уменьшить число монет вдвое, а число фальшивых монет -

вдвое с округлением вниз. Выполняя так все взвешивания, кроме последнего, мы сможем найти $2N$ настоящих монет за три взвешивания из $12N$ монет при 7 фальшивых, за четыре взвешивания — из $24N$ монет при 15 фальшивых, и вообще, за k взвешиваний из $3N \cdot 2^{k-1}$ монет при $2^k - 1$ ФМ.

Следующая задача показывает, что и это не предел.

Задача 7.7. а) Среди $7N$ внешне одинаковых монет 4 фальшивых — они весят одинаково, причём легче настоящих. Как за два взвешивания выделить N заведомо настоящих монет?

б) Как отыскать хотя бы одну настоящую монету из 14 монет за три взвешивания, если среди них ровно 8 фальшивых?

Решение. а) Разобьём монеты на группы: в A и B по N монет, в C — $2N$, в D — $3N$ монет. Первое взвешивание: $A + B \vee C$. Если одна из чаш тяжелее, то на ней не более одной ФМ, и вторым взвешиванием мы отыщем не менее $2/3 \cdot 2N$ настоящих. Если же чаши оказались в равновесии, то вторым взвешиванием будет $B + C \vee D$.

Разберем возможные варианты расположения ФМ в группах:

A	B	C	D	Результат	Интерпретация
0	0	0	4	$>$	в B нет фальшивых
1	0	1	2	$>$	в B нет фальшивых
0	1	1	2	$=$	в A нет фальшивых
2	0	2	0	$<$	в D нет фальшивых
1	1	2	0	$<$	в D нет фальшивых
0	2	2	0	$<$	в D нет фальшивых

В каждом варианте получили целую группу, то есть не менее N, заведомо настоящих монет.

б) Разделим монеты пополам. Если чаши оказались в равновесии, то на каждой из них по 4 фальшивых, и мы дальше действуем с любой из половинок так, как в задаче а), получая в итоге одну настоящую монету. Если же одна чаша перевесила, то на более легкой чаше не более 3 ФМ, и после деления монет этой чаши (по 3 на каждую чашу) мы узнаем 3 монеты, среди которых не более одной ФМ. Тогда в результате третьего взвешивания удастся найти даже две настоящих монеты.

Начиная со следующей задачи рассматриваются фальшивые монеты, про которые заранее неизвестно, легче они или тяжелее настоящих, но известно, что все фальшивые весят одинаково (то есть такие, как монета в задаче Саладина).

Задача 7.8. а) Среди четырёх монет одна фальшивая, причём неизвестно, легче она или тяжелее настоящих. Как за одно взвешивание найти две настоящих монеты?

б) Среди пяти внешне одинаковых монет 2 фальшивых и 3 настоящих. Нам неизвестно, какие монеты легче — фальшивые или настоящие. Как найти хотя бы одну из настоящих монет за 2 взвешивания на чашечных весах?

Решение. а) Сравним между собой две монеты. Если они окажутся равны, то они обе настоящие, а если нет, то настоящими являются две остальные монеты.

б) Перенумеруем монеты. Сравним между собой монеты 1 и 2, а затем — монеты 3 и 4. Если получились два равенства, то в одном из них были обе фальшивых монеты, поэтому монета 5 настоящая. Если мы получили два неравенства, то в каждом из них было по одной ФМ, поэтому 5 снова настоящая. Если же было одно равенство и одно неравенство, то обе монеты в равенстве — настоящие.

Эта же идея — «если получено неравенство, то среди остальных монет не более одной фальшивой» — работает и в следующих задачах.

Задача 7.9. Среди $12N$ внешне одинаковых монет 2 фальшивых. Нам неизвестно, какие монеты легче — фальшивые или настоящие. Как найти хотя бы $4N$ настоящих монет за два взвешивания на чашечных весах?

Решение. Сравним между собой две группы A и B из $2N$ монет каждая. Если A и B не равны, то среди остальных $8N$ монет не более одной ФМ. Выделим из $8N$ монет две группы по $2N$ монет и сравним их. Если они равны, то все они настоящие, а если не равны, то остальные $4N$ монет — настоящие. Если же в первом взвешивании равновесие, то поделим группу A пополам и сравним эти половины. Если они равны, то все монеты, участвовавшие в первом взвешивании, были настоящими, а если нет, то настоящими будут все остальные $8N$ монет.

Задача 7.10. Среди 7 внешне одинаковых монет 2 фальшивых и 5 настоящих. Нам неизвестно, какие монеты легче — фальшивые или настоящие. Как найти не менее четырёх настоящих монет за три взвешивания на чашечных весах?

Решение. Перенумеруем монеты числами от 1 до 7. Первое взвешивание $1 + 2 \vee 3 + 4$. Если $1 + 2 = 3 + 4$, это означает, что либо на каждой чаше весов лежит по одной фальшивой, либо все четыре монеты настоящие. Тогда вторым взвешиванием сравниваем $1 \vee 2$. После равновесия делаем вывод о том, что монеты 1–4 настоящие, а после неравновесия имеем 3 настоящих монеты 5–7, а еще одну определим, сравнивая третьим взвешиванием, например, 1 и 5: если они равны, то 1 настоящая, а если нет, то 2 настоящая.

Если же, для определенности, $1 + 2 < 3 + 4$, это означает, что хотя бы на одной из чаш нет ФМ. Тогда вторым взвешиванием сравним 5 и 6. Если $5 = 6$, то обе они настоящие, и третьим взвешиванием можно сравнить $5 + 6 \vee 1 + 3$. При результате «$=$» 1 и 3 настоящие, при «$<$» делаем вывод о том, что ФМ тяжелее, поэтому 1 и 2 настоящие. Аналогично, при «$>$» монеты 3 и 4 настоящие. Наконец, если во втором взвешивании было неравенство (для определённости $5 < 6$), то заведомо настоящей будет монета 7, а еще тремя настоящими — или $1 + 2 + 5$, или $3 + 4 + 6$. Узнать, какая из двух этих ситуаций имеет место, можно, например, сравнив третьим взвешиванием $7 \vee 5$.

Задача 7.11. Среди 14 внешне одинаковых монет 3 фальшивых и 11 настоящих. Нам неизвестно, какие монеты легче — фальшивые или настоящие. Как найти не менее четырёх настоящих монет за три взвешивания на чашечных весах?

Решение. Сразу разделим монеты на 5 групп размерами 2, 2, 2, 2 и 6 — обозначим эти группы буквами A–E. Первыми двумя взвешиваниями сравним $A \vee B$ и $C \vee D$.

1. Если в обоих взвешиваниях неравенства (для определенности $A < B$ и $C < D$), то третьим взвешиванием сравним $A + B + C$ с E.

1.1. Если $A + B + C < E$, то ФМ легче НМ, поэтому B и D не содержат ФМ.

1.2. Если $A + B + C > E$, то ФМ тяжелее, чем НМ, поэтому A и C не содержат ФМ.

1.3. При $A + B + C = E$ в D точно есть одна ФМ (мы взвесили все, кроме D, и получили чётное число ФМ), а значит, ФМ тяжелее НМ, следовательно, A и C не содержат ФМ.

2. Если в одном из первых взвешиваний было равенство (для определенности $A = B$), то в A и в B не более чем по одной ФМ. Тогда третьим взвешиванием сравним две монеты из A между собой ($A_1 \vee A_2$).

2.1. Если $A_1 = A_2$, то в $A + B$ все монеты настоящие.

2.2. Если $A_1 \neq A_2$, но во втором взвешивании было $C = D$, то в $C + D$ все монеты настоящие (потому что двух фальшивых там быть не может).

2.3. Если $A_1 \neq A_2$ и во втором взвешивании $C \neq D$, то в этих четырёх группах содержатся обе ФМ, а значит, в E все монеты настоящие. Во всех случаях найдены не менее 4 настоящих монет.

Дополнительные задачи

Здесь собраны задачи разной трудности — от простых до очень трудных.

Задача Д.1. Петя загадал пятизначное число, все цифры которого различны. Сможет ли Витя заведомо угадать его за 15 вопросов, на которые нужно дать ответ «да» или «нет»?

Задача Д.2. Петя задумал тройку натуральных чисел от 1 до 10 (возможно, некоторые из этих чисел одинаковы). Сумеет ли Витя угадать эту тройку за 8 вопросов, на которые нужно дать ответ «да» или «нет»? Порядок чисел в тройке значения не имеет.

Задача Д.3. На плоскости расположен квадрат и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой). Какое наименьшее число таких вопросов необходимо задать, чтобы узнать, лежит ли точка P внутри квадрата?

Задача Д.4. Петя знает функцию f, определённую на $[0; 100]$, для которой $f(0)f(100) \leqslant 0$. За один вопрос Витя называет Пете число x, а Петя в ответ сообщает значение $f(x)$. За какое наименьшее число вопросов Витя сможет найти отрезок $[a; b]$ длины не больше 1, для которого $f(a)f(b) \leqslant 0$?

Задача Д.5. Ковбой Джо может попасть из пистолета в любую выбранную им точку. Ему надо попасть в точку на стене, прикрытую газетой размера 1 м $\times$ 1 м. После каждого выстрела начиная со второго ему сообщают, какая из пуль легла ближе к цели: эта или предыдущая. Докажите, что 18-м выстрелом он может всадить пулю не далее 1 см от нужной точки.

Задача Д.6. Фальшивые справа — 2. Девять монет, среди которых заведомо есть настоящие, но не обязательно есть фальшивые, выложены в ряд. Известно, что все НМ весят по 10 г, все ФМ весят по 9 г и что каждая НМ лежит левее любой ФМ.

Как за два взвешивания определить все НМ? Весы, разумеется, чашечные без гирь.

Задача Д.7. Фальшивые справа — 3. Обобщите предыдущую задачу на случай, когда в ряд выложено произвольное число N монет. Сколько взвешиваний заведомо хватит для нахождения всех НМ?

Задача Д.8. Неравноплечие весы. Среди 21 внешне одинаковых монет все, кроме одной, настоящие, весящие одинаково, и одна фальшивая, весящая легче настоящей. Имеются чашечные весы, которые оказываются в равновесии, если груз на правой их чашке ровно вдвое тяжелее, чем на левой. Если груз на правой чашке меньше, чем удвоенный груз на левой, то перевешивает левая чашка, а если больше, то правая. Как за три взвешивания на этих весах найти фальшивую монету?

Задача Д.9. Снова о перепутанных этикетках. В нашем распоряжении 9 различных гирь массой 1 г, 2 г, ..., 9 г. На каждой гире наклеена этикетка, указывающая её массу, однако этикетки каких-то двух гирь, массы которых отличаются на 1 г, возможно, перепутаны местами. Как за два взвешивания на двухчашечных весах найти эти гири или установить, что перепутанных этикеток нет?

Задача Д.10*. И опять Саладин. Найдите максимальное число монет, при котором в задаче Саладина (задача 6.2) можно определить ФМ за N взвешиваний. После этого обобщите на N взвешиваний задачи 6.3–6.6.

Задача Д.11. Стопки разного размера. Есть N карт, из которых задумана одна. Разрешается разложить карты на стопки с разным числом карт и спросить, в какой из стопок задуманная карта. При каких N можно найти задуманную карту за два таких вопроса?

Задача Д.12*. Расстояние между фальшивыми. В ряд лежат 8 монет, при этом из левых четырёх одна фальшивая и из правых четырёх тоже одна (обе фальшивые легче настоящих и равны по весу друг другу). За два взвешивания на чашечных весах без гирь найдите, сколько настоящих монет лежит между парой фальшивых (сами фальшивые монеты определять не обязательно).

Задача Д.13. Из девяти внешне одинаковых монет 7 весят по 2 г, одна — 1 г и ещё одна — 4 г. Как за 3 взвешивания на двухчашечных весах без гирь найти 4-граммовую монету?

Задача Д.14. В кассе купца Калашникова впервые за долгое время появились деньги — 2009 монет. К сожалению, известно, что одна из них фальшивая, отличающаяся по весу от настоящих. Разгневанные работники требуют немедленной выдачи зарплаты, причём настоящими монетами. У приказчика имеются чашечные весы без гирь. Как только становится ясно, что какие-либо монеты настоящие, они выплачиваются очередным работникам и, естественно, в дальнейших взвешиваниях не участвуют. Любопытный приказчик хочет определить, легче фальшивая монета настоящей или тяжелее. Сможет ли он наверняка это сделать?

Задача Д.15. Имеется 100 монет, среди которых несколько (больше 0, но меньше 99) фальшивых (ФМ весит легче, чем настоящая), и чашечные весы. Можно делать взвешивание на весах, заплатив перед взвешиванием одну из монет. Докажите, что можно с гарантией обнаружить настоящую монету.

Задача Д.16. У эксперта есть набор из N гирек весами 1, 2, ..., N г. Эксперт знает, какая гирька сколько весит, и хочет убедить в этом судью. Он берётся так провести одно взвешивание на чашечных весах без других гирь, что судья сам сможет определить вес одной из гирек. Как это сделать, если: а) $N = 3$; б) $N = 7$; в) $N = 8$; г)* $N = 25$?

Задача Д.17. Есть 5 монет достоинством 1, 2, 3, 5 и 10 пиастров, причём вес монеты в граммах должен быть равен её достоинству. Одна из них фальшивая, то есть её вес достоинству не равен. Как при помощи чашечных весов без гирь определить фальшивую монету?

Задача Д.18. В Колиной коллекции есть четыре гинеи. Коля хочет проверить (доказать или опровергнуть), что среди них есть ровно две фальшивых (равных друг другу и отличающихся по весу от настоящих). Удастся ли ему это сделать с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

Задача Д.19. Имеется 9 гирек весом 5 г, 6 г, ..., 13 г. К сожалению, одна из гирек побывала в руках нечестных торговцев, и теперь она весит немного легче, чем раньше. Имеются неравноплечие чашечные весы, которые оказываются в равновесии, если груз на их правой чашке ровно вдвое тяжелее, чем на левой. Если груз на правой чашке меньше, чем удвоенный груз на левой, то перевешивает левая чашка, если больше, то правая. Как определить эту гирьку за два взвешивания?

Задача Д.20. На складе лежит 81 деталь; каждая деталь промаркирована первым или вторым сортом. Детали одинакового сорта весят одинаково, и каждая деталь второго сорта немного легче детали первого сорта. Известно, что ровно одна из деталей промаркирована неправильно. Покажите, как определить её за четыре взвешивания на чашечных весах без гирь.

«Золото» и «серебро»

В цикле следующих задач речь идёт о золотых и серебряных монетах, при этом в условиях приводится только количество тех и других. Остальные условия следующие:

1) среди золотых монет есть ровно одна ФМ, и среди серебряных — ровно одна ФМ;

2) серебряные и золотые монеты внешне отличаются друг от друга;

3) настоящая серебряная монета равна по весу настоящей золотой;

4) две ФМ равны по весу и более лёгкие, чем НМ, но на вид неотличимы от них;

5) взвешивания проводятся на чашечных весах без гирь.

Задача Д.21. Имеются 2 золотые монеты и 4 серебряные. Как найти обе ФМ за два взвешивания?

Задача Д.22. Имеются 2 золотые монеты и 13 серебряных. Как найти обе ФМ за три взвешивания?

Задача Д.23. Решите аналогичную задачу для 2 золотых и $\frac{3^k-1}{2}$ серебряных монет за k взвешиваний.

Задача Д.24. Решите за три взвешивания задачу нахождения двух ФМ: а) из трёх золотых и девяти серебряных; б) из четырёх золотых и шести серебряных; в) из пяти золотых и пяти серебряных монет.

Задача Д.25. Решите за четыре взвешивания задачу нахождения двух ФМ: а) из 3 золотых и 27 серебряных; б) из 4 золотых и 20 серебряных; в) из 5 золотых и 16 серебряных монет.

Несколько следующих задач посвящены ситуациям, в которых найти ФМ не удаётся.

Задача Д.26. Имеются 4 золотые монеты и 7 серебряных. Среди тех и других — по одной ФМ. Докажите, что обе фальшивые монеты не удастся найти за три взвешивания.

Задача Д.27. Имеются пять монет, некоторые из них настоящие, а остальные — фальшивые (лёгкие, равные друг другу). Известно, что хотя бы одна фальшивая монета точно есть.

Удастся ли отыскать все фальшивые монеты за три взвешивания на чашечных весах без гирь?

Задача Д.28. Ещё об угадываниях по делимости. Петя загадал натуральное число A от 1 до 16, а Витя называет четыре числа X_1, X_2, X_3, X_4, после чего Петя даёт ответ, какие из них делятся на A. Получится ли у Вити угадать число A?

Задача Д.29. Из пяти монет не менее двух фальшивых. Докажите, что все фальшивые монеты не удастся найти за три взвешивания на чашечных весах без гирь.

Задача Д.30. Имеется 19 монет двух разных весов. Докажите, что за 12 взвешиваний не удастся выяснить, какие из них более лёгкие.

Пара лёгких

В следующих трёх задачах среди данных монет имеются две фальшивых, обе легче настоящих, при этом одна из них легче другой. В первых двух задачах *не требуется* выяснять, какая из двух ФМ легче. Взвешивания проводятся на чашечных весах без гирь.

Задача Д.31. Можно ли найти обе такие ФМ из четырёх монет за два взвешивания?

Задача Д.32. Как найти обе такие ФМ из шести монет за три взвешивания?

Задача Д.33. Как найти обе такие ФМ из восьми монет за четыре взвешивания?

Когда $1 + 1 \neq 2$

В следующем цикле задач среди данных 10-граммовых монет имеются две фальшивых, одна из них весит 9 г, а другая — 12 г. (Таким образом, вес их суммы отличается от веса суммы двух настоящих монет.) Требуется определить обе ФМ при помощи взвешиваний на одночашечных весах со стрелкой.

Задача Д.34. Как найти обе такие ФМ из четырёх монет за два взвешивания?

Задача Д.35. Можно ли найти обе ФМ из девяти монет за три взвешивания?

Задача Д.36. Как найти обе такие ФМ из 2^n монет за n взвешиваний?

Совсем без фальшивых

Следующий цикл известен гораздо меньше, чем задачи об определении ФМ. Здесь общее условие такое: среди данных монет могут быть монеты *двух весов* (то есть все фальшивые, если они есть, весят одинаково). Задача состоит в том, чтобы с помощью чашечных весов без гирь убедиться, что на самом деле все данные монеты весят одинаково. Назовём эту задачу *верификацией* N монет. Отметим, что если результат хотя бы одного из взвешиваний — неравенство, то результат верификации отрицательный. Важное следствие из этого состоит в том, что верификация — *плановая*, или *неадаптивная* задача: все взвешивания не только могут, но и должны быть спланированы заранее.

Задача Д.37. Верифицировать: а) 4 монеты за два взвешивания; б) 8 монет за три взвешивания.

Задача Д.38*. Верифицировать 10 монет за три взвешивания.

Задача Д.39. Верифицировать 10^n монет за $3n$ взвешиваний.

Задача Д.40.** Верифицировать 30 монет за четыре взвешивания.

Задача Д.41. Из 12 внешне одинаковых монет может быть 0 или 6 фальшивых (другие ситуации невозможны). За два взвешивания выяснить, какой из этих двух случаев имеет место.

Задача Д.42*. Из 17 внешне одинаковых монет может быть 0 или 5 фальшивых (другие ситуации невозможны). За два взвешивания выяснить, какой из этих двух случаев имеет место.

Задача Д.43*. Из 96 внешне одинаковых монет может быть 0 или 48 фальшивых (другие ситуации невозможны). За три взвешивания выяснить, какой из этих двух случаев имеет место.

Судебная экспертиза

В последнем цикле действуют уже упоминавшиеся нами персонажи — эксперт и судья. Эксперт владеет полной информацией об имеющихся предметах: о монетах (какие из них фальшивые, а какие настоящие) либо о гирях (знает их вес). Судья обладает необходимыми навыками в математике и логике, а задача эксперта — доказать судье истинность тех сведений, которыми владеет эксперт. Взвешивания производятся на чашечных весах.

Задача Д.44. Из 100 монет ровно одна фальшивая, известная эксперту. Судья знает, что фальшивая монета одна, но не знает, легче она или тяжелее, чем настоящая. Докажите, что эксперту потребуется не меньше двух взвешиваний, чтобы убедить судью в фальшивости данной монеты.

Задача Д.45. Судья знает, что среди 100 монет есть ровно две фальшивых, их веса равны и отличаются от настоящих. Эксперт знает, какие именно монеты фальшивые и в какую сторону их вес отличается от настоящих. Как ему за два взвешивания убедить в этом судью?

Задача Д.46. Как провести экспертизу трёх ФМ за те же два взвешивания, если судья знает, что ФМ легче настоящих?

Задача Д.47. То же для шести ФМ за три взвешивания.

Задача Д.48. Эксперт представляет судье 8 одинаковых по внешнему виду монет. Судья знает только то, что половина из них весит по 3 г, а остальные — по 4 г, а эксперту известен вес каждой монеты. Как эксперт может за одно взвешивание убедить в этом судью?

Задача Д.49. Эксперт предъявил суду 6 гирь. Он знает вес каждой гири, а судья знает только то, что веса гирь в граммах — последовательные целые числа от 1 до 6. Как эксперт должен проделать два взвешивания, чтобы судья смог по их результатам восстановить вес каждой гири?

Задача Д.50. Эксперт предъявил суду 8 гирь. Он знает вес каждой гири, а судья знает только то, что две из них весят по 1 г, две по 2 г, две по 3 г и две по 4 г. Как эксперт должен проделать: а) три взвешивания; б) два взвешивания, чтобы судья смог по их результатам восстановить вес каждой гири?

Задача Д.51. а) Эксперт предъявил суду 10 гирь. Он знает вес каждой гири, а судья знает только то, что две из них весят по 1 г, две по 2 г, две по 3 г, две по 4 г и две по 5 г. Как эксперт должен проделать два взвешивания, чтобы судья смог по их результатам восстановить вес каждой гири?

б) Эксперт предъявил суду 18 гирь. Он знает вес каждой гири, а судья знает только то, что три из них весят по 1 г, три по 2 г, ..., три по 6 г. Какие два взвешивания нужно проделать эксперту для того, чтобы судья смог по их результатам восстановить вес каждой гири?

Задача Д.52*. Эксперт предъявил судье 45 внешне одинаковых гирь. Он знает вес каждой гири, а судья знает только то, что среди них 9 гирь весом 1 г, 8 гирь весом 2 г, ..., 1 гиря весом 9 г. Каково наименьшее количество взвешиваний на двухчашечных весах, которое необходимо проделать эксперту, чтобы судья смог по их результатам восстановить вес каждой гири?

Краткие решения и указания

Д.1. Здесь требуется уметь считать число случаев. Для решения необходимы начальные знания комбинаторики (правило произведения: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216 < 32768 = 2^{15}$).

Д.2. $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$ троек различных чисел (x, y, z), $10 \cdot 9 = 90$ троек вида (x, x, y), 10 троек (x, x, x). Итого 220 вариантов, что меньше $256 = 2^8$.

Д.3. Три. Меньшего числа не хватит, потому что два вопроса определяют принадлежность точки только неограниченной части плоскости — полосе, полуплоскости или внутренности угла. Чтобы уложиться в три вопроса, сначала необходимо спросить про диагональ квадрата, а потом — про пару его сторон.

Д.4. За семь. Витя каждый раз может называть середину отрезка и в зависимости от ответа Пети выбирать ту из половин, на которой выполнено нужное неравенство. За семь вопросов Витя получит отрезок длины $\dfrac{100}{128} < 1$. Меньшего числа вопросов не хватит: ответы Пети могут быть такими, что после каждого вопроса «подозрительный» отрезок будет не меньше половины исходного, поэтому после 6 вопросов его длина может оказаться не меньшей чем $\dfrac{100}{64}$.

Д.5. Множество точек квадрата, для которых $MA < MB$, — часть квадрата, ограниченная серединным перпендикуляром к отрезку AB. Начав стрельбу с двух соседних углов, Джо последовательно делит квадрат и получающиеся после деления прямоугольники пополам серединными перпендикулярами сначала 7 раз по горизонтали (на что уйдёт 9 выстрелов), а затем ещё 7 раз по вертикали (ещё 8 выстрелов, потому что можно начинать с последнего выстрела первой серии). После этого Джо будет знать, что нужная точка лежит в квадрате со стороной $\frac{100}{128}$ см, и последней пулей выстрелит в центр этого квадрата.

Д.6. Вначале мысленно доложим вправо десятую монету, фальшивую. Это сразу сводит задачу к «версии 1» (задача 3.5), с той лишь разницей, что десятую монету нельзя использовать во взвешиваниях.

Д.7. Для k взвешиваний должно быть 3^k монет.

Д.8. Для первого взвешивания нужно на левую чашку положить 4 монеты, а на правую — 8.

Д.9. В решении задачи 3.6 гири с этикетками 9 и 10 ни разу не взвешивались. Так что если никакие этикетки не перепутаны, то можно считать, что гиря 9 перепутана с 10.

Д.10*. Эта задача требует от учеников уверенного владения *математической индукцией*. Результат для основной задачи — $\frac{3^N-3}{2}$ монет для N взвешиваний, в вариациях аналогично на 1 или 2 монеты больше.

Д.11. При любом $N=\frac{k(k+1)}{2}$, где k натуральное. Сопоставим каждой карте пару натуральных чисел — размеры стопок, в которых она лежала при первом и втором вопросах. Тогда всем картам должны быть сопоставлены разные пары. Пусть k — наибольшее из чисел, сопоставленных какой-то карте хотя бы на одном из двух мест. Тогда число k встречается в сопоставлениях на этом месте у разных карт ровно k раз, а на другом месте для этих карт должны быть k разных чисел, то есть все числа от 1 до k. Это значит, что размеры стопок являются последовательными натуральными числами.

Д.12*. Первое взвешивание — 1+2 против 5+6. Самый трудный случай — равновесие; после равновесия нужно взвешивать 1+3 против 5+7.

Д.13. Взвесим по 4 монеты, затем взвесим по 2 монеты с тяжёлой чашки, затем снова по одной монете с тяжёлой чашки. Самая тяжёлая монета — 4 г. Если где-то было равенство, то 4 г — отложенная монета.

Д.14. Нет. Если каждое взвешивание будет давать равенство, то все использованные в нём монеты настоящие, то есть сразу должны быть отданы. После этого остаётся меньшее нечётное число монет. В конце концов ФМ останется последней, и её вес приказчик так и не узнает.

Д.15. Отдадим сразу монету номер 1 и будем поочерёдно сравнивать монеты 3–100 с монетой 2. Если сравниваемые монеты равны, то одну из них перед следующим взвешиванием можно отдать и продолжить взвешивания. Если хотя бы в одном из сравнений получим неравенство, то более тяжёлая монета настоящая, и поиск окончен. Если же все взвешивания будут равенствами, то все взвешенные монеты настоящие (к тому времени останется одна последняя).

Д.16. а) $1 + 2 = 3$, гирька 3 г определена; б) $1 + 2 + 3 < 7$. Гиря справа точно весит 7 г; в) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 7 + 8$, что определяет отсутствующую гирю 6 г; г) $1 + 2 + \ldots + 17 < 19 + 20 + \ldots$ $\ldots + 25$, определяется гиря 18 г.

Д.17. Взвесить $1 + 2$ с 3, $2 + 3$ с 5 и $2 + 3 + 5$ с 10. Разные ФМ соответствуют разным наборам результатов этих взвешиваний.

Д.18. Да, удастся. Взвесить сначала по две гинеи. После равенства сравнить веса двух гиней с одной чашки, после неравенства поменять местами две какие-то гинеи с разных чашек.

Д.19. На левую чашку положим $5 + 6 + 7$, а на правую — $11 + 12 + 13$. После равновесия сравним 8 с $9 + 7$; если левая чаша тяжелее, то 11 с $10 + 12$, а если правая, то 7 с $6 + 8$.

Д.20. Здесь можно поступать так же, как в задачах второго занятия о золотых и серебряных монетах

Д.21. Первым взвешиванием положить на каждую чашу весов по одной золотой и одной серебряной монете.

Д.22. Первым взвешиванием положить на каждую чашу весов по 1 золотой и 4 серебряные монеты. После неравенства необходимо будет найти одну ФМ из девяти (см. задачу 2.1), а после равенства — одну серебряную ФМ из восьми, при этом золотая ФМ определится автоматически.

Д.23. На каждую чашу класть одну золотую и $\dfrac{3^{k-1} - 1}{2}$ всех серебряных монет.

Д.24. а) Отдельно ищем ФМ среди золотых (1 взвешивание) и среди серебряных (2 взвешивания);

б, в) первым взвешиванием на каждую чашу положить по 2 золотые и 2 серебряные.

Д.25. а) Отдельно ищем ФМ среди золотых (1 взвешивание) и среди серебряных (3 взвешивания); б) первым взвешиванием на каждую чашу положить по 1 золотой и 7 серебряных монет; в) на каждую чашу положить по 2 золотые и по 5 серебряных.

Д.26. Всего имеется 28 вариантов пары ФМ, а три взвешивания различают только 27 случаев.

Д.27. Нет, не удастся. Общее число вариантов равно $2^5 - 1 = 31$, что больше, чем $3^3 = 27$.

Д.28. Каждое из чисел Вити должно делиться на 8 чисел из 16. Мы будем говорить, что названное число «отличает» одно задуманное число от другого, если на одно из задуманных чисел оно делится, а на другое нет. Пусть X_1 отличает 1 от 2, тогда X_1 нечётно. В этом случае чётные задуманные числа отличаются друг от друга делимостью на них чисел X_2, X_3 и X_4, и каждое из этих чисел обязано делить множество чётных чисел пополам. Но одно из этих чисел должно отличать 2 от 4, и, так как оно не делится на 4, то четыре его чётных делителя — 2, 6, 10 и 14. Тогда всего у него не 8, а минимум 9 делителей: все эти, а также 1, 3, 5, 7 и 15. Противоречие.

Д.29. Всего имеется 10 вариантов для двух ФМ, столько же для трёх, 5 для четырёх и 1 для пяти. Итого $26 < 27$. Однако уже первое взвешивание сделать не получается: если класть на чаши по одной монете, то в 12 случаях будет равенство, а если по две монеты, то в 10. Так как $12 > 10 > 9$, за два оставшихся взвешивания отыскать подмножество с фальшивыми монетами невозможно.

Д.30. Как и в предыдущей задаче, общее количество вариантов (2^{19}) не превосходит 3^{12}. Однако, как и выше, даже первое взвешивание подобрать не удаётся. Действительно, если класть на чашу не более 2 монет, то после равенства остаётся не менее 196688 вариантов, а если класть 3 или более монет, то после неравенства остаётся не менее 180224 вариантов. Оба эти значения больше чем $3^{11} = 177147$. Таким образом, ни при каком первом взвешивании уложиться в 12 взвешиваний не получится.

Д.31. Сравнить монеты 1 и 2, а также 3 и 4. Если есть равенство — обе монеты в нём настоящие. Если оба неравенства — обе более лёгкие монеты фальшивые.

Д.32. Сначала сравнить между собой любую пару монет (1 и 2). После равенства сравнить монеты 3 и 4, а после неравенства (например, монета 1 оказалась легче 2) сравнить $2 + 3$ с $4 + 5$. Отметим, что нам не нужно (да и не получится) выяснять, какая из двух ФМ является более лёгкой.

Д.33. Сравним $1 + 2$ с $3 + 4$ и $5 + 6$ с $7 + 8$. Если оба раза неравенство, то достаточно сравнить между собой монеты с более лёгких чаш. Если же, например, во втором взвешивании равенство, то обе ФМ — среди 1–4. Тогда сравним между собой ту пару из них, которая лежит на более тяжёлой чаше.

Д.34. Взвесить монеты 1 и 2, а затем — монеты 1 и 3.

Д.35. Нельзя. Всего имеются 72 варианта, а каждое взвешивание даёт один из четырёх различных результатов, поэтому три взвешивания не позволяют различить более $64 = 4^3$ вариантов.

Д.36. База индукции — задача Д.34. Если первым взвешиванием положить на чашу весов половину всех монет, то результат этого взвешивания покажет, находится ли в этой половине лёгкая ФМ и находится ли в ней же тяжёлая ФМ. После этого множества подозрительных монет для лёгкой и для тяжелой ФМ либо совпадают, либо не пересекаются. Если они совпадают, то просто делим это множество пополам и взвешиваем одну из половин, если не пересекаются, то делим надвое каждое из подозрительных множеств.

Д.37. а) Разделим монеты на две кучки, убедимся, что они весят одинаково, после чего повторим это же с одной из кучек; б) то же, но проделаем это трижды.

Д.38*. Разделить монеты на группы из 1, 2, 3 и 4 монет. Взвесить $1+2$ монеты с 3, $1+3$ с 4 и $2+3$ с $1+4$. Доказать, что если все эти сравнения закончились равновесиями, то веса всех 10 монет равны.

Д.39. Рассмотреть 10^n монет как десять «псевдомонет», каждая из которых склеена из 10^{n-1} обычных, и воспользоваться математической индукцией. Базой индукции является предыдущая задача.

Д.40.** Разделить монеты на группы из 2, 5, 6, 8 и 9 монет. Убедиться четырьмя взвешиваниями, что $2+6=8$, $5+6=2+9$, $5+9=6+8$ и $2+5+8=6+9$.

Д.41. Разделить монеты на четыре группы из трёх монет и верифицировать их (как в задаче Д.37(а)). Если все эти группы весят одинаково, то число ФМ должно быть кратно 4, то есть их не может быть 6.

Д.42*. Разделить монеты на группы из 2, 3, 5 и 7 монет. Если $2+3=5$ и $2+5=7$, то пяти ФМ быть не может.

Д.43*. Отложим одну монету, остальные разделим на группы из 19, 19, 19, 38 монет. Если три группы из 19 монет весят поровну, а 38 весит вдвое больше, то число ФМ в них кратно 5, то есть не равно 48.

Д.44. Сравнить ФМ с двумя разными НМ.

Д.45. Эксперту достаточно использовать во взвешиваниях всего пять монет. Пусть 1 и 2 — лёгкие фальшивые монеты. Демонстрируется, что $1 < 3$ и $2 + 3 < 4 + 5$.

Д.46. Пусть 1–3 — фальшивые монеты. Демонстрируется, что $1 < 4$ и $2 + 3 + 4 < 1 + 5 + 6$.

Д.47. Эксперту достаточно использовать 13 монет — 6 фальшивых и 7 настоящих. Пусть 1–6 — лёгкие фальшивые монеты. Демонстрируется, что $1 < 7$, $2 + 3 + 7 < 1 + 8 + 9$ и $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 < 2 + 3 + 10 + 11 + 12 + 13$.

Д.48. $3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4$; это доказывает, что 4 монеты слева весят не больше 12 г, то есть каждая весит 3 г.

Д.49. $1 + 2 + 3 = 6$ и $1 + 6 < 3 + 5$.

Д.50. а) $1 + 1 = 2$, $2 + 2 = 4$, $4 = 4$; б) $1 + 1 + 2_1 = 4_1$, $1 + 1 + 2_2 = 4_2$. Такие равенства возможны, только если справа четвёрки, а слева — пара единиц и двойка.

Д.51. а) $1 + 1 + 2 + 2 + 3 < 5 + 5$, что определяет обе гири 5 и ещё два множества гирь: $\{1, 1, 2, 2, 3_1\}$ и $\{3_2, 4, 4\}$. Затем проверяется, что $1 + 1 + 3_2 + 5 < 3_1 + 4 + 4$. Это неравенство возможно, только если из каждого множества на левой чаше самые лёгкие гири, а на правой — самые тяжёлые. б) Например, $1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 = 6 + 6 + 6$ и $1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 4 = 3 + 3 + 3 + 6$ (ср. с решением задачи Д.49).

Д.52*. За 2. Первое взвешивание — $9 \times 1 + 8 \times 2 + 7 \times 3$ сравнить с $1 \times 9 + 2 \times 8 + 3 \times 7$. Второе — $9 \times 1 + 6 \times 4 + 3 \times 7$ с $1 \times 9 + 4 \times 6 + 7 \times 3$. Равенство при первом взвешивании доказывает судье, что на чаше весов с 24 гирями лежат гири 1–3 г и только они, а на другой чаше — только 7–9 г. Равенство при втором взвешивании окончательно определяет веса всех гирь.

Указатели

Авторы задач

Источники задач

Приёмы и методы решения

Общие приёмы и методы:

Специальные приёмы, методы, задачи:

Краткий путеводитель по задачам

Литература

1. *А. Орлов*. Поиск предмета // Квант. 1976. № 7. С. 55–57.

2. *А. В. Спивак*. Тысяча и одна задача по математике. М.: Просвещение, 2002.

3. *Е. В. Галкин*. Нестандартные задачи по математике. М.: Просвещение, 1996.

4. *Ж. К. Байиф*. Логические задачи. М.: Мир, 1983.

5. *Б. А. Кордемский*. Математическая смекалка. М.: Наука, 1991.

6. *Д. Бизам*, *Я. Герцег*. Многоцветная логика: 175 логических задач. М.: Мир, 1978.

7. *Н. В. Горбачев*. Сборник олимпиадных задач по математике. М.: МЦНМО, 2005.

8. *H. Apsimon*. Mathematical byways in Ayling, Beeling and Ceeling. Oxford, 1991.

9. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, `http://oeis.org`

10. *R. K. Guy*. Unsolved Problems in Number Theory. Springer, 1994.

Приложение
Раздаточный материал

Занятие 1. Угадай, что я задумал!

Если не оговаривается противное, то во всех последующих задачах этого занятия загадывающий даёт на вопросы ответы «да» либо «нет».

Задача 1.1. Петя загадал натуральное число от 1 до 8. Витя хочет отгадать его, задавая Пете вопросы, на которые тот отвечает «да» либо «нет». Как должен действовать Витя, чтобы отгадать загаданное число за 3 вопроса?

Задача 1.2. Сколько вопросов понадобится Вите, если Петя может загадать число от 1 до 32?

Задача 1.3. а) Петя загадал одну из сторон правильного восьмиугольника. Витя может провести любую диагональ в этом восьмиугольнике и спросить Петю, в какой из двух получившихся частей лежит загаданная сторона. Как Вите отгадать сторону за 3 вопроса? б) То же для семиугольника.

Задача 1.4. Петя загадывает число от 1 до 10. Докажите, что Вите не хватит трёх вопросов, чтобы угадать это число.

Задача 1.5. В орфографическом словарике 120 страниц, на каждой из них по 60 слов. Петя открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой страницы. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

Задача 1.6*. В англо-русском словарике 80 страниц, на каждой из них по 50 слов. Петя открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой страницы. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

Задача 1.7. Петя загадал пару натуральных чисел и сообщил Вите, что их произведение равно 60. Помогите Вите угадать эти числа за три вопроса. Порядок чисел в паре не имеет значения.

Задача 1.8. Петя загадывает два натуральных числа от 1 до 10 — одно чётное и одно нечётное. Помогите Вите угадать эти числа за 5 вопросов.

Задача 1.9. а) Петя загадывает клетку шахматной доски 8×8. Витя каждым ходом может обвести по границам клеток любой прямоугольник и узнать у Пети, попала ли в него загаданная клетка. Как должен действовать Витя, чтобы угадать Петину клетку за 6 ходов? б) Решите ту же задачу для доски 5×5 и пяти ходов.

Задача 1.10. Карточный фокус. Фокусник кладёт перед зрителем колоду из 36 карт и просит его посмотреть и запомнить одну из карт. После этого фокусник раскладывает все карты в 6 стопок и просит зрителя сказать, в какой из них лежит его карта. Затем фокусник тасует карты, снова выкладывает их в 6 стопок и снова просит зрителя назвать ту из них, в которой лежит задуманная им карта. После этого фокусник сразу вытаскивает эту карту из стопки. В чём секрет такого фокуса?

Задача 1.11. Угадывание по делимости — 1. Петя загадал натуральное число A от 1 до 8. Витя называет любое натуральное число X, и Петя отвечает, верно ли, что X делится на A. Может ли Витя угадать A после трёх таких вопросов?

Задача 1.12. Да/нет/не знаю. В этой задаче Петя может отвечать на вопросы «да», «нет» или «не знаю». Он загадал число 1, 2 или 3. Придумайте вопрос, ответ на который позволит Вите угадать это число.

Занятие 2. Монета на весах

Сокращение «ФМ» означает «фальшивая монета».

Задача 2.1. Самая классическая головоломка. Одна из девяти монет фальшивая, она весит легче настоящей. Как определить ФМ за 2 взвешивания?

Задача 2.2. а) Одна из 27 монет фальшивая, она весит легче настоящей. Как определить ФМ за 3 взвешивания?

б) Решите ту же задачу для 26 монет.

в)* Придумайте, как обобщить решение на любое число монет от 10 до 27.

Задача 2.3. а) Докажите, что за два взвешивания невозможно гарантированно определить одну лёгкую ФМ из более чем девяти монет.

б) Решая задачу 2.2(а), Петя положил в первом взвешивании на каждую чашу весов *не* по 9 монет. Докажите, что у него может не получиться определить ФМ за три взвешивания.

Задача 2.4. Из какого наибольшего числа монет удастся определить одну лёгкую ФМ за четыре взвешивания? Обоснуйте свой ответ.

Задача 2.5. Среди восьми монет, возможно, есть одна лёгкая ФМ (но её может и не быть). Как за два взвешивания найти ФМ, если она есть, или доказать, что её нет?

Задача 2.6. а) Пусть имеется 7 серебряных монет и 2 медные, причём медные отличаются по виду от серебряных. Известно, что одна из монет фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей медной). Как найти ФМ за два взвешивания?

б) Решите ту же задачу для $N \leqslant 9$ серебряных монет и $9 - N$ медных.

Задача 2.7. Есть одна золотая, 3 серебряные и 5 бронзовых медалей. Известно, что одна из них фальшивая (весит легче настоящей). Настоящие медали из одного металла весят одинаково, а из различных — нет. Как за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую медаль?

Задача 2.8. Есть 27 монет, часть из них серебряные, остальные — медные. Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей медной). ФМ легче настоящей монеты из того же металла. Как найти ФМ за три взвешивания?

Задача 2.9. Есть 5 серебряных и 4 золотые монеты. Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей золотой). Если ФМ серебряная, то она легче настоящих серебряных монет, а если золотая, то тяжелее настоящих золотых. Как найти ФМ за два взвешивания?

Задача 2.10. Есть 27 монет, часть из них серебряные, остальные — золотые. Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей золотой). Серебряная ФМ легче настоящей серебряной, а золотая ФМ тяжелее настоящей золотой. Как найти ФМ за три взвешивания?

Задача 2.11. Пусть среди 24 монет ровно половина — золотые. Одна из этих монет фальшивая, причём серебряная ФМ легче настоящей серебряной монеты, а золотая — тяжелее настоящей золотой. Более четырёх золотых или более четырёх серебряных монет класть на одну чашку запрещено. Как найти ФМ за три взвешивания?

Задача 2.12. Подпиленная гирька. Имеется 9 гирек весом 100 г, 200 г, ..., 900 г. К сожалению, одна из гирек побывала в руках нечестных торговцев, и теперь она весит немного (не более чем на 10 г) легче, чем раньше. Как определить эту гирьку за два взвешивания?

Занятие 3. В поисках случая

Сокращение «ФМ» означает «фальшивая монета».

Задача 3.1. Из трёх монет одна фальшивая, причём неизвестно, легче она или тяжелее настоящих. Как найти её за два взвешивания, и определить, легче она или тяжелее?

Задача 3.2. Имеются 4 гири с маркировками 1 г, 2 г, 3 г и 4 г. Одна из них дефектная — более лёгкая или более тяжёлая, чем указано. Можно ли за два взвешивания узнать, какая из гирь дефектная и при этом определить, легче она или тяжелее, чем на этой гире указано?

Задача 3.3. Имеются 13 гирек массой 1 г, 2 г, ..., 13 г. К сожалению, одна из гирек побывала в руках нечестных торговцев, и теперь её вес немного отличается от правильного (но неизвестно, в какую сторону). Придумайте способ, позволяющий определить эту гирьку за три взвешивания.

Задача 3.4. Потерянная гирька. Было 9 гирь массами 1 г, 2 г, ..., 9 г, причём гиря большей массы имеет больший размер. Одна из гирь потерялась. Как за два взвешивания на чашечных весах выяснить, какая именно гиря потеряна?

Задача 3.5. Фальшивые справа — 1. В ряд выложены десять монет, среди которых есть как настоящие, весящие по 10 г, так и фальшивые, весящие по 9 г. Известно, что каждая настоящая монета лежит левее любой фальшивой. Как за два взвешивания определить все фальшивые монеты?

Задача 3.6. Перепутанные этикетки. Имеются 10 различных гирь массой 1 г, 2 г, ..., 10 г. Около каждой гири лежит этикетка, указывающая её массу, однако этикетки каких-то двух гирь, массы которых отличаются на 1 г, перепутаны. Как за два взвешивания найти эти гири?

Задача 3.7. Прогрессия котлет. Повар выложил на сковородку 9 котлет по кругу (по часовой стрелке), причем каждая следующая выкладываемая котлета была на 10 г тяжелее предыдущей. Когда котлеты поджарились, повар обнаружил, что забыл, с какой котлеты он начинал выкладывать. Помогите ему найти самую тяжёлую котлету за два взвешивания.

Задача 3.8. Соседние котлеты. По кругу лежат 9 одинаковых с виду котлет. а) Известно, что среди них семь одинаковых, а две более лёгкие, и они лежат рядом. При этом лёгкие котлеты не обязательно равны друг другу. Как найти их двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь? б) Найдите все лёгкие котлеты, если одинаковых не 7, а только 6, а лёгких — три подряд.

Задача 3.9. Фальшивое звено. а) Незамкнутая цепочка составлена из 31 звена. Известно, что одно из звеньев фальшивое, оно легче остальных. Докажите, что при помощи взвешиваний можно найти фальшивое звено, разрезав не более четырёх звеньев.

б) Незамкнутая цепочка составлена из 95 звеньев. Известно, что одно из звеньев фальшивое, оно отличается по весу от остальных (неизвестно, легче или тяжелее). Докажите, что при помощи взвешиваний можно найти фальшивое звено, разрезав не более шести звеньев.

Задача 3.10. Взвешивания за плату. а) У бедного мальчика Саши всего 169 монет, причём одна из них — лёгкая ФМ. У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание он берёт с Саши плату: 1 рубль, если одна из чашек перевесила, и 2 рубля, если весы остались в равновесии. Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить ФМ с помощью Костиных весов?

б)* У бедного мальчика Саши всего 300 монет, и ровно одна из них — лёгкая ФМ. У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание он берёт с

Саши плату: 2 рубля, если перевесила левая чашка, и 1 рубль при любом другом исходе. Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить ФМ с помощью Костиных весов?

Задача 3.11. Взвешивания с заедающими весами. Из девяти монет одна фальшивая, она легче остальных. Имеются два экземпляра внешне неразличимых чашечных весов, из которых одни заедают (при любом взвешивании, в котором на чашах поровну монет, показывают равенство). За какое наименьшее число взвешиваний можно найти ФМ?

Задача 3.12. Взвешивания со сломанными весами. Имеются 9 монет, одна из которых — лёгкая ФМ. Кроме того, у нас есть трое двухчашечных весов. Известно, что двое весов исправны, а одни — сломаны (показываемый ими исход взвешивания никак не связан с весом положенных на них монет, то есть может быть как верным, так и искажённым в любую сторону, причём на разных взвешиваниях — искажённым по-разному). При этом неизвестно, какие именно весы исправны, а какие сломаны. Как найти ФМ за 4 взвешивания?

Задача 3.13. Найти хотя бы одну настоящую. а) Среди пяти внешне одинаковых монет три настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. За какое наименьшее число взвешиваний можно найти хотя бы одну настоящую монету?

б) Среди 15 монет — не более семи фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково (а фальшивые, возможно, нет). Можно ли за 14 взвешиваний найти хотя бы одну из настоящих монет? А за меньшее число взвешиваний?

Занятие 4. Весы со стрелкой

Сокращение «ФМ» означает «фальшивая монета», а «НМ» — «настоящая монета».

Задача 4.1. Среди 21 монеты 10 настоящих и 11 фальшивых. Фальшивые монеты на 1 г легче настоящих. Как за одно взвешивание на двухчашечных весах со стрелкой узнать, фальшива ли конкретная монета?

Задача 4.2. В корзине лежат 9 яблок. Имеются одночашечные весы со стрелкой, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых двух яблок. Придумайте способ выяснить за 6 взвешиваний суммарный вес всех яблок.

Задача 4.3. Семь мешков. На столе лежат 7 пронумерованных мешков, в каждом из которых по 10 монет. В одном из мешков находятся фальшивые монеты, а в остальных — настоящие. Настоящая монета моне весит 10 граммов, а фальшивая — 9. Как определить, в каком мешке находятся ФМ, проделав всего одно взвешивание на одночашечных весах со стрелкой?

Задача 4.4. Несколько фальшивых мешков. а) Имеются 7 мешков, в некоторых из них все монеты фальшивые, а в остальных — все монеты настоящие. Настоящая монета весит 10 г, а фальшивая – 9 г. Как за одно взвешивание на весах со стрелкой найти все мешки с фальшивыми монетами?

б) Имеются 3 мешка, некоторые из них наполнены фальшивыми монетами, а остальные — настоящими. Настоящая монета весит 10 г, а фальшивая — 9 г. Как найти все мешки с фальшивыми монетами за два взвешивания на одночашечных весах со стрелкой, использовав во взвешиваниях не более четырёх монет?

в) Докажите, что в любом взвешивании, решающем задачу а), на весах будет не менее 127 монет.

Задача 4.5. Мешки неизвестного веса. Имеется 11 мешков монет. В 10 из них монеты настоящие, а в одном — все монеты фальшивые. Все НМ одного веса, все ФМ — также одного, но другого веса. Имеются двухчашечные весы со стрелкой, с помощью которых можно определить, какой из двух грузов тяжелее и на сколько. Как двумя взвешиваниями определить, в каком мешке фальшивые монеты?

Задача 4.6. Есть шесть монет, одна из которых фальшивая (она отличается по весу от настоящей, но её вес, как и вес настоящей монеты, неизвестен). Как за три взвешивания на одночашечных весах со стрелкой найти фальшивую монету?

Задача 4.7. а) Даны четыре одинаковых по виду шара массой 101 г, 102 г, 103 г и 105 г, а также весы со стрелкой. Как, сделав два взвешивания, определить массу каждого шара?

б) Даны пять гирь, массы которых равны 1000 г, 1001 г, 1002 г, 1004 г и 1007 г, но надписей на гирях нет и внешне они неотличимы. Как с помощью трёх взвешиваний на весах со стрелкой определить гирю в 1000 г?

Задача 4.8. Четыре монеты за три взвешивания. Даны четыре монеты, среди которых могут оказаться фальшивые. Настоящая монета весит 10 г, а фальшивая — 9 г. Найдите наименьшее количество взвешиваний, которые нужно сделать на одночашечных весах со стрелкой, чтобы определить все ФМ.

Задача 4.9. Две тройки монет за три взвешивания. Даны две тройки монет, причём в каждой тройке ровно одна монета фальшивая. Настоящая монета весит 10 г, а фальшивая — 9 г. Найдите наименьшее количество взвешиваний, которые нужно сделать на одночашечных весах со стрелкой, чтобы определить все ФМ.

Задача 4.10. Три лёгких подряд. В ряд выстроены 18 внешне одинаковых 100-граммовых гирь. Известно, что какие-то три рядом стоящие гири «облегчённые», в них всего по 99 г. Как за два взвешивания на весах со стрелкой найти все фальшивые гири?

Задача 4.11. Два фальшивых кошелька. Имеется n кошельков, по 20 монет в каждом. Все монеты по виду одинаковы, однако в одном кошельке все монеты весят на 1 г легче настоящих, в другом кошельке все монеты весят на 1 г тяжелее настоящих, а в остальных кошельках все монеты настоящие. Масса настоящей монеты известна. При каких значениях n за одно взвешивание на весах со стрелкой можно наверняка определить, в каких кошельках какие монеты?

Задача 4.12. Геологи и консервы. Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на консервах стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он хочет это всем доказать (то есть обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов. Докажите, что для этой цели ему а) достаточно четырёх взвешиваний; б) не достаточно трёх.

Задача 4.13. Маркированные слитки — 1. Эксперт предъявил суду 100 серебряных слитков, промаркированных по-китайски. У него есть весы, которые показывают вес груза, при условии, однако, что этот вес не более 2500 г. Эксперт знает вес каждого слитка, а судья знает только то, что слитков всего 100 штук, веса всех слитков различны и равны 1001, 1002, ..., 1100 грамм. Каково наименьшее количество взвешиваний, которое необходимо проделать эксперту, чтобы судья смог по их результатам восстановить вес каждого слитка?

Занятие 5. Всё идёт по плану

Сокращение «ФМ» означает «фальшивая монета».

Задача 5.1. Угадывание по плану — 1. Зная, что Петя собирается опять загадывать число от 1 до 8, Витя заранее изготовил три карточки, на каждой из которых он написал одно или несколько натуральных чисел. Дальше Витя поочерёдно показывает Пете эти карточки, а тот отвечает, есть на данной карточке задуманное им число или нет. Как должен Витя подготовить карточки, чтобы с их помощью он всегда смог угадать Петино число?

Задача 5.2. Угадывание по плану — 2. Петя загадал пару натуральных чисел и сообщил Вите, что их произведение равно 120. Помогите Вите создать три карточки так, чтобы, задав Пете вопросы «Есть ли задуманное тобой число на этой карточке?» и получив на них ответы, угадать эту пару. Порядок чисел в паре не имеет значения.

Задача 5.3. Угадывание по делимости — 2. Петя загадал натуральное число A, принимающее значения от 1 до 8. Витя называет три своих числа X_1, X_2, X_3, а Петя сообщает, какие из них делятся на A. Какие числа должен назвать Витя, чтобы после ответа Пети правильно определить задуманное Петей число A?

Задача 5.4. План — 9. Даны девять монет, из которых одна — лёгкая ФМ. Как найти такие два взвешивания (на двухчашечных весах), чтобы второе делалось независимо от результатов первого? Иначе говоря, как *спланировать* оба взвешивания заранее?

Задача 5.5. План — 27. Одна из 27 монет фальшивая, она весит меньше настоящей. Придумайте план из трёх взвешиваний, позволяющий определить ФМ.

Задача 5.6. а) Одна из семи монет фальшивая, она весит меньше настоящей. Придумайте план, позволяющий определить эту ФМ за два взвешивания. б) Попробуйте обобщить это решение так, чтобы оно годилось и для любого числа монет (от 4 до 9).

Задача 5.7. а) Одна из 25 монет фальшивая, она весит меньше настоящей. Придумайте план, позволяющий определить эту ФМ за три взвешивания.

б)* Попробуйте обобщить это решение так, чтобы оно годилось и для любого числа монет (от 10 до 27).

Задача 5.8. а) Пусть теперь из 25 монет, возможно, есть одна лёгкая ФМ (но её может и не быть). Решите такую задачу последовательным алгоритмом из трёх взвешиваний.

б)* Докажите, что для задачи а) не существует планового алгоритма.

Задача 5.9. Золото и серебро — 1. Пусть имеется ровно одна ФМ из 27. Однако среди этих 27 монет имеется N серебряных, а остальные — золотые (золотые отличаются по виду от серебряных, настоящая серебряная монета может отличаться по весу от настоящей золотой). Известно, что если ФМ серебряная, то она легче настоящих монет, а если золотая — то тяжелее. Как найти план из трёх взвешиваний, позволяющий отыскать ФМ?

Задача 5.10. Золото и серебро — 2. Пусть среди 24 монет ровно половина — золотые. Одна из этих монет фальшивая, причём, как и раньше, серебряная ФМ легче серебряной НМ, а золотая — тяжелее. Найти план из трёх взвешиваний, решающий эту задачу.

Задача 5.11. План с одним запасом. Снова вернёмся к задачам об определении одной ФМ из девяти. Витя предлагает Пете план, состоящий из трёх взвешиваний. Какое-то одно из взвешиваний Пете не нравится, но два остальных он проделывает, после чего сообщает Вите, какое взвешивание ему не понравилось и чем закончились остальные. Помогите Вите составить такой план, чтобы он смог найти ФМ независимо от действий и результатов Пети.

Задача 5.12*. План с двумя запасами. Решите предыдущую задачу, если план состоит из четырёх взвешиваний, любые два из которых могут Пете не понравиться.

Задача 5.13. Маркированные слитки — 2. Эксперт предъявил суду 55 серебряных слитков, промаркированных по-китайски. У него есть весы, которые показывают вес груза, при условии, однако, что этот вес не более 3333 г. Эксперт знает вес каждого слитка, а судья знает только то, что слитков всего 55 штук, веса всех слитков различны и равны 1001, 1002, ..., 1055 грамм. Каково наименьшее количество взвешиваний, которое необходимо проделать эксперту, чтобы судья смог по их результатам восстановить вес каждого слитка?

Задача 5.14. Найдите плановые решения для всех задач занятия 2, для которых это ещё не сделано.

Занятие 6. Султан Саладин и его пленник

В задачах этого занятия фальшивая монета может быть как легче настоящей, так и тяжелее. «Задача Саладина» заключается в том, чтобы за три взвешивания на чашечных весах найти ФМ среди 12 *монет и определить, легче она или тяжелее настоящей.*

Задача 6.1. а) Могут ли в задаче Саладина какие-нибудь монеты иметь *противоположные* «судьбы», то есть в каждом взвешивании оказываться либо на разных чашах весов, либо не использоваться одновременно? б) Докажите, что ни одна монета не может иметь «судьбу» *OOO*.

Задача 6.2. Решите задачу Саладина (всего в нашем распоряжении 12 монет, одна из которых — лёгкая или тяжёлая ФМ, нужно найти её за три взвешивания и определить, легче она или тяжелее, чем НМ).

Задача 6.3. Версия 2. Пусть теперь по-прежнему нужно найти ФМ, но не требуется узнавать, легче она или тяжелее, чем НМ. Решите эту задачу для 13 монет.

Задача 6.4. Версия 3. Пусть имеется 13 монет, среди которых одна ФМ, и отдельно от них имеется хотя бы одна НМ (то есть такая монета, которая не может оказаться фальшивой). Решите задачу Саладина для такой ситуации.

Задача 6.5. Версия 4. Пусть имеется 14 монет, среди которых одна ФМ, и отдельно есть одна НМ. Как найти ФМ, если не требуется узнавать, легче она или тяжелее?

Задача 6.6*. Ещё четыре версии. Как должны измениться условия (и решения) задач 6.2–6.5, если ФМ среди данных монет *может и не быть* (в этом случае необходимо дать ответ «фальшивых монет нет»)?

Задача 6.7. Неразрешимый случай. Из шести монет одна фальшивая, причём неизвестно, легче она или тяжелее, чем настоящая. Требуется её найти (но не требуется определять, легче она или тяжелее настоящей). Докажите, что двух взвешиваний может не хватить.

Задача 6.8*. Оценки. Докажите, что количество монет, указанное в задачах 6.2–6.5, является в каждом случае наибольшим возможным.

Задача 6.9. Если в какой-либо из предыдущих задач вы построили «последовательный», а не «плановый» алгоритм взвешиваний, то теперь самое время вернуться к этой задаче и построить для нее плановое решение.

Задача 6.10. План с запасом. Витя предлагает Пете план решения задачи Саладина, состоящий из четырёх взвешиваний. Какое-то одно из взвешиваний Пете не нравится, но три остальных он проделывает, после чего сообщает Вите, какое взвешивание ему не понравилось и чем закончились остальные. Помогите Вите составить такой план, чтобы он смог решить задачу независимо от действий и результатов Пети.

Занятие 7. Поищем настоящие

Сокращение «ФМ» означает «фальшивая монета», а «НМ» — «настоящая монета».

Задача 7.1. (Шутка) Среди 9 монет одна фальшивая и 8 настоящих, более тяжелых. Как найти все НМ за два взвешивания на чашечных весах?

Задача 7.2. Среди $N > 3^k$ монет одна фальшивая (более лёгкая, чем настоящие). Докажите, что за k взвешиваний невозможно гарантированно определить все настоящие монеты.

Задача 7.3. Среди $9N$ монет одна лёгкая ФМ. Какое наибольшее число настоящих монет можно гарантированно выявить а) за одно взвешивание; б) за два взвешивания? в) Обобщите полученный результат на большее число взвешиваний.

Задача 7.4. У фальшивомонетчика есть 40 внешне одинаковых монет, среди которых 2 фальшивые — они легче настоящих и весят одинаково. Как с помощью двух взвешиваний отобрать 20 настоящих монет?

Задача 7.5. Среди $7N$ внешне одинаковых монет две фальшивых — они весят одинаково, причём легче настоящих. Как с помощью двух взвешиваний выделить $4N$ настоящих монет?

Задача 7.6. Среди $6N$ внешне одинаковых монет три фальшивых — они весят одинаково, причём легче настоящих. Как за два взвешивания выделить $2N$ заведомо настоящих монет?

Задача 7.7. а) Среди $7N$ внешне одинаковых монет 4 фальшивых — они весят одинаково, причём легче настоящих. Как за два взвешивания выделить N заведомо настоящих монет?

б) Как отыскать хотя бы одну настоящую монету из 14 монет за три взвешивания, если среди них ровно 8 фальшивых?

Задача 7.8. а) Среди четырёх монет одна фальшивая, причём неизвестно, легче она или тяжелее настоящих. Как за одно взвешивание найти две настоящих монеты?

б) Среди пяти внешне одинаковых монет 2 фальшивых и 3 настоящих. Нам неизвестно, какие монеты легче — фальшивые или настоящие. Как найти хотя бы одну из настоящих монет за 2 взвешивания на чашечных весах?

Задача 7.9. Среди $12N$ внешне одинаковых монет 2 фальшивых. Нам неизвестно, какие монеты легче — фальшивые или настоящие. Как найти хотя бы $4N$ настоящих монет за два взвешивания на чашечных весах?

Задача 7.10. Среди 7 внешне одинаковых монет 2 фальшивых и 5 настоящих. Нам неизвестно, какие монеты легче — фальшивые или настоящие. Как найти не менее четырёх настоящих монет за три взвешивания на чашечных весах?

Задача 7.11. Среди 14 внешне одинаковых монет 3 фальшивых и 11 настоящих. Нам неизвестно, какие монеты легче — фальшивые или настоящие. Как найти не менее четырёх настоящих монет за три взвешивания на чашечных весах?

Оглавление

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (495) 745-80-31; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: biblio.mccme.ru/shop/order

Книги в электронном виде: www.litres.ru/mcnmo

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru

ISBN 978-5-4439-0085-8

9 785443 900858 >