А. Д. БЛИНКОВ

КЛАССИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ В АРИФМЕТИКЕ И ГЕОМЕТРИИ

Школьные
Математические
Кружки

А. Д. Блинков

Классические средние в арифметике и геометрии

Электронное издание

Издательство МЦНМО
Москва, 2016

УДК 51(07)
ББК 22.1
Б69

Блинков А. Д.
Классические средние в арифметике и геометрии
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2016
168 с.
ISBN 978-5-4439-2397-0

Седьмая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена классическим средним величинам, большинство из которых были известны ещё в древности, и применениям их свойств при решении арифметических, алгебраических и геометрических задач. Особое внимание уделено взаимосвязи различных средних величин и установлению межпредметных связей между некоторыми темами школьных курсов алгебры и геометрии. Книжка предназначена для занятий со школьниками 5–11 классов. В неё вошли разработки десяти занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для учителя.

Приведён также большой список дополнительных задач различного уровня трудности. Для удобства использования заключительная часть книжки сделана в виде раздаточных материалов. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков.

Подготовлено на основе книги: Классические средние в арифметике и геометрии. — 3-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-0931-8.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2397-0

Предисловие

Предлагаемая книжка содержит достаточно небольшой вводный текст, содержащий основные определения и объясняющий происхождение классических средних, а также десять тематических занятий математического кружка, разбитых на два раздела. В материалы каждого занятия входят: вступительный и поясняющий текст учителя, включающий в себя несколько подробно разобранных типовых задач по данной теме; задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач; методические комментарии для учителя. В разделе приложений представлен обширный список дополнительных задач различного уровня трудности, часть из которых в какой-то степени дублирует задачи, предложенные для занятий, а часть — дополняет их новыми идеями (наиболее сложные задачи отмечены знаком *). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них приведены, как правило, подробные решения (в наиболее простых случаях — ответы и указания).

Для удобства в конце каждого занятия приведён список задач из этого раздела, которые имеет смысл использовать для закрепления материала, контроля его освоения и углубления. Следует учесть, что есть задачи, которые отнесены к нескольким занятиям (поскольку допускают различные подходы). Кроме того, для удобства преподавателей в разделе приложений помещён раздаточный материал. В конце книги приведён список литературы, на которую иногда делаются ссылки в тексте. Большую часть этих изданий и публикаций можно использовать в качестве дополнительной литературы.

Занятия 1–3 первого раздела ориентированы на учащихся 5–7 классов, а занятие 4 — на учащихся 8–9 классов. Проведение этих занятий может помочь школьникам освоиться с различными приложениями среднего арифметического нескольких чисел, узнать и научиться применять его различные свойства, познакомиться с понятием взвешенного среднего арифметического, а также установить логические связи между основными величинами в задачах на движение и их аналогами в других текстовых задачах. Это должно повысить вычислительную, алгебраическую и логическую культуру учащихся и расширить возможности решения ими текстовых задач за счёт применения рациональных и эффективных методов, опирающихся на взаимосвязь средних величин.

Занятия 5–9 второго раздела ориентированы на учащихся 8–10 классов, а занятие 10 — на учащихся 10–11 классов. Проведение этих занятий может помочь школьникам познакомиться с типичными геометрическими конфигурациями, в которых возникают классические средние величины, изучить различные геометрические способы доказательства неравенств о средних для двух положительных чисел, познакомиться с особыми видами треугольников, связанных со средними величинами. Это позволит повторить многие разделы школьного курса геометрии, развить уже имеющиеся навыки решения геометрических задач, расширить арсенал методов их решения (в том числе за счёт эффективного применения векторов) и познакомиться с рядом интересных геометрических фактов, выходящих за пределы стандартной школьной программы.

Естественно, преподаватель математического кружка может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, поменять порядок их изучения, и т. д. При этом имеет смысл учитывать, что материалы занятий 1–5, 7 и 10 достаточно близки к общеобразовательной программе, а занятия 6, 8 и 9 ориентированы на более глубокое «погружение» в геометрический материал.

Предлагаемые в книге разработки занятий различаются и с методической точки зрения, что обусловлено как спецификой их содержания, так и возрастными особенностями школьников. Предполагается, что при проведении занятий первого раздела задачи 1–6 (в занятии 4 — задачи 1–5) вступительной части предлагаются учащимся последовательно, по одной, и, после того как какая-то часть школьников решит задачу, проводится общее обсуждение решения и делаются какие-то обобщения. При проведении занятий второго раздела материал вступительной части занятия обсуждается со школьниками, в основном, фронтально.

Автор благодарен своей ученице Е. Харитоновой (выпуск 2005 года) за коллекцию геометрических задач, представленных в её экзаменационном проекте, И. А. Кушниру, из книг которого взято много интересных задач, Ю. А. Блинкову и А. И. Сгибневу — за полезные обсуждения, Е. С. Горской — за выполнение прекрасных чертежей.

Отдельная и огромная благодарность Александру Васильевичу Шаповалову: за подборки задач, за внимательное прочтение книжки, за подробные комментарии, способствовавшие существенному улучшению её текста, и за написание содержательного послесловия.

Из истории

Классическими средними значениями для двух положительных чисел a и b принято считать:

1) $m = \dfrac{a+b}{2}$ — *среднее арифметическое*;

2) $g = \sqrt{ab}$ (то есть $g^2 = ab$, $g > 0$) — *среднее геометрическое*;

3) $h = \dfrac{2ab}{a+b}$ — *среднее гармоническое*;

4) $d = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ — *среднее квадратичное*.

В одном из древнегреческих текстов, который приписывают древнегреческому математику Архиту (примерно 428–365 гг. до нашей эры), среднее арифметическое m, среднее геометрическое g и среднее гармоническое h определялись как равные члены арифметической, геометрической и гармонической «пропорций» соответственно:

1) $a - m = m - b$;

2) $a : g = g : b$;

3) $(a - h) : a = (h - b) : b$.

В первых двух случаях равносильность данных определений очевидна, в третьем случае её несложно проверить:

$$\frac{a-h}{a} = \frac{h-b}{b} \;\Leftrightarrow\; (a-h)b = (h-b)a \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; ha + hb = 2ab \;\Leftrightarrow\; h = \frac{2ab}{a+b}.$$

Первые два соотношения достаточно естественны, поэтому остановимся на том, как появилось третье. По преданию, среднее гармоническое ввёл Пифагор (VI век до н. э.), выразив с его помощью отношение основных музыкальных интервалов. Пифагор установил, что вместе со струной длиной $12L$, созвучно сливаясь с ней, звучат струны того же натяжения с длинами $6L$ (выше на октаву), $8L$ (выше на квинту) и $9L$ (выше на кварту). Число 9 есть среднее арифметическое чисел 6 и 12, а число 8 Пифагор определил как среднее гармоническое этих же чисел. Действительно, $\frac{12-8}{12} = \frac{8-6}{6}$.

Это созвучие (и определяющее его отношение чисел 6, 8, 9 и 12) называлось тетрадой. Пифагорейцы считали, что тетрада — это гамма, по которой поют сирены.

Немного позднее, когда математики заинтересовались бесконечными рядами чисел, были выделены ряды чисел, в которых каждый член начиная со второго был равен одной из средних величин двух соседних членов.

В случае, если это среднее было арифметическим, такие ряды стали называть арифметическими прогрессиями. Например, натуральный ряд чисел: 1; 2; 3; 4; ...

В случае, если это среднее было геометрическим, такие ряды стали называть геометрическими прогрессиями. В частности, ряд степеней двоек (с которым связана популярная легенда о происхождении шахмат): 1; 2; 4; 8; ...

Появился и ряд, который назвали гармоническим:

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots$$

При взгляде на гармонический ряд хорошо видно. что определение *среднего гармонического* h двух чисел a и b можно было дать и по-другому:

$$\frac{1}{h} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}.$$

Несложно убедиться в том, что оно равносильно всем предыдущим, однако в этом определении виден «арифметический смысл» среднего гармонического: число, обратное среднему гармоническому чисел a и b, является средним арифметическим чисел, обратных к числам a и b.

Отметим также, что *среднее геометрическое* двух чисел иногда называют иначе: *средним пропорциональным*, так как пропорция, из которой оно получается, является «классической».

И наконец, *среднее квадратичное* чисел a и b было введено несколько позже и также стало классическим. Оно возникает из соотношения:

$$a^2 - d^2 = d^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

(отметим, что в случае положительных чисел можно поставить знак равносильности). Отсюда опять же понятен его «арифметический смысл»: квадрат среднего квадратичного чисел a и b является средним арифметическим их квадратов.

В древнегреческой математике, которая была преимущественно геометрической, было известно несколько способов построения классических средних по двум данным отрезкам с длинами a и b. В частности, одно из первых описаний построения первых трёх средних на одном чертеже (см. задачу 5.1 данной брошюры) дано в трактате Паппа Александрийского (III век н. э.), который включал в себя труды Эратосфена (276–194 гг. до н. э.), Никомеда (II век до н. э.) и Герона (I век н. э.). Построения классических средних на одном чертеже позволяют найти геометрические способы доказательства неравенства о средних:

$$h \leqslant g \leqslant m \leqslant d.$$

Отметим, что каждое из *классических средних* обобщается для n чисел:

1) $m = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ — *среднее арифметическое*;

2) $g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ — *среднее геометрическое*;

3) $h = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}$ — *среднее гармоническое*;

4) $d = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$ — *среднее квадратичное* (у него есть ещё одно обобщение: $d' = \sqrt[k]{\dfrac{x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k}{n}}$ — *среднее степенное*).

Отметим также, что классические средние для n положительных чисел также связаны неравенствами $h \leqslant g \leqslant m \leqslant d$, но рассмотрение этих неравенств в обобщённом виде выходит за пределы данной брошюры (*этот материал будет подробно рассмотрен в книжке «Неравенства» нашей серии*). Более того, для всех классических средних, кроме среднего арифметического, мы во многих случаях ограничимся набором из двух чисел.

Для каждой из *классических средних* величин существуют обобщения, называемые *средними взвешенными*, которые первоначально появились в математике из рассмотрения некоторых физических процессов, а сейчас нашли широкое применение в математической статистике и экономике. Нам потребуется только одна из этих средних величин — *взвешенное среднее арифметическое*. Для чисел x_1, x_2, ..., x_n с «весами» m_1, m_2, ..., m_n его можно определить следующим образом:

$$x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Такое название объясняется простой механической моделью: если x_1, x_2, ..., x_n — координаты n материальных точек, а m_1, m_2, ..., m_n соответственно — их массы, то *взвешенное среднее арифметическое* — это координата центра масс этой системы точек (см. занятие 10).

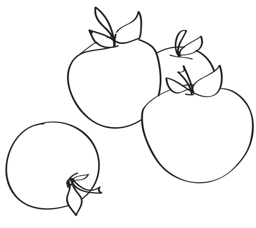
Занятие 1

Вычисление среднего арифметического и взвешенного среднего арифметического

Разбор и самостоятельное решение задач этого занятия помогут школьникам освоиться с различными приложениями среднего арифметического нескольких чисел, познакомиться с понятием взвешенного среднего арифметического и глубже разобраться с понятиями среднего роста, средней цены и средней скорости движения.

Задача 1.1. Сто яблок вместе весят 5 кг. Сколько весит «в среднем» одно яблоко? Сколько примерно весят 17 яблок?

Решение. Одно яблоко «в среднем» весит $5000 : 100 = 50$ (г), а 17 яблок — примерно $50 \cdot 17 = 350$ (г).



Полезно обратить внимание школьников на то, что, вычисляя средний вес одного яблока, мы делим их суммарный вес на количество яблок, то есть находим среднее арифметическое их весов.

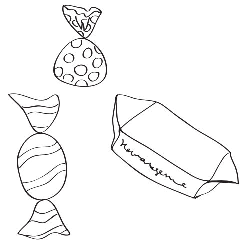
Задача 1.2. В классе 10 девочек и 20 мальчиков. Средний рост девочки — 140 см, средний рост мальчика — 149 см. Найдите средний рост ученика в классе.

Решение. Найдем суммарный рост всех учеников класса и разделим его на количество учеников. Получим

$$(140 \cdot 10 + 149 \cdot 20) : (10 + 20) = 146 \text{ (см)}.$$

Полезно обсудить со школьниками то, почему полученный ответ не равен среднему арифметическому чисел 140 и 149. Имеет смысл ещё раз подчеркнуть, что ***среднее арифметическое — относительная величина***, которая получается делением суммы на количество. В задачах на вычисление среднего арифметического эти суммарные величины всегда присутствуют (иногда незримо), поэтому, производя вычисления, «безопасно» складывать и вычитать можно только их. На первом этапе работы надо всегда быть готовым перейти (за счёт умножения) от средних величин к суммарным.

Задача 1.3. В магазин привезли три сорта конфет с разной ценой: 4 кг по цене 40 рублей за килограмм, 3 кг по цене 60 рублей за килограмм и 1 кг по цене 120 рублей за килограмм. По какой цене надо продавать смесь этих конфет?



Решение. Стоимость всех привезённых конфет равна $40 \cdot 4 + 60 \cdot 3 + 120 \cdot 1 = 460$ (руб.), а всего привезено 8 кг конфет. Значит, цена смеси («средняя стоимость килограмма») равна $460 : 8 = 57{,}5$ (руб.).

Имеет смысл обобщить полученный результат. Если привезено n сортов конфет с массами m_1, m_2, ..., m_n и ценами c_1, c_2, ..., c_n соответственно, то цена 1 кг смеси может быть найдена по формуле

$$c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2 + \ldots + c_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

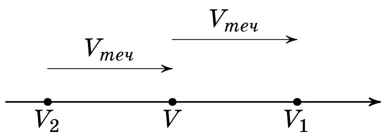
то есть является взвешенным средним арифметическим чисел c_1, c_2, ..., c_n. Полезно также обсудить с учащимися, что аналогичную формулу они практически применяли в задаче 1.2.

Задача 1.4. Скорость моторной лодки по течению реки равна 21 км/ч, а против течения — 15 км/ч. Найдите её скорость в стоячей воде. Проанализируйте полученный результат.

Решение. Пусть искомая скорость — V км/ч, тогда скорость течения реки можно выразить двумя способами: $21 - V$ (км/ч) и $V - 15$ (км/ч). Приравнивая полученные выражения, получим $21 - V = V - 15$; $2V = 21 + 15$; $V = 18$ (км/ч).

Мы получили, что $V = \frac{21 + 15}{2}$, то есть скорость лодки в стоячей воде равна среднему арифметическому её скоростей по течению и против течения.

Полезно сделать рисунок и записать полученный результат в общем виде, обозначив через V_1 и V_2 скорости лодки по течению и против течения: $V = \dfrac{V_1 + V_2}{2}$.



Задача 1.5. Скорость моторной лодки по течению реки равна 21 км/ч, а против течения — 15 км/ч. Она проплыла некоторое время по течению реки и такое же время против течения.

а) Верно ли, что средняя скорость её движения равна среднему арифметическому её скоростей по течению и против течения?

б) Изменится ли ответ, если время движения по течению и против течения будет различным?

Решение. а) Пусть лодка двигалась t часов по течению реки и столько же против течения, то есть общее время её движения равно $2t$ часов. Тогда весь путь, пройденный лодкой, равен $21t + 15t = 36t$ (км). Средняя скорость движения лодки равна $36t : 2t = 18$ (км/ч), что и составляет среднее арифметическое скоростей лодки по течению и против течения.

В случае, если школьники испытывают «технические» затруднения, можно сначала задать в условии конкретное время. Для подготовленных школьников, наоборот, можно сразу проводить аналогичные рассуждения в общем виде:

$$V_{\text{ср.}} = \frac{V_1 t + V_2 t}{2t} = \frac{(V_1 + V_2)t}{2t} = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

б) Ответ изменится. Достаточно рассмотреть числовой пример. Пусть, например, лодка двигалась один час по течению и два часа против течения, тогда

$$V_{\text{ср.}} = (21 \cdot 1 + 15 \cdot 2) : (1 + 2) = 17 \text{ (км/ч)}.$$

Следует ещё раз подчеркнуть, что средняя скорость движения — это отношение всего пройденного пути ко времени, затраченному на этот путь.

Полезно также обратить внимание учащихся на то, что в данной задаче не играет никакой роли, что движение осуществлялось по реке. Те же результаты можно получить при любом виде движения, когда несколько участков пути проходятся с разными скоростями, а время, затрачиваемое на прохождение этих участков, а) одинаковое; б) различное. Здесь же полезно обсудить, в каких случаях средняя величина равна среднему арифметическому частей, а в каких случаях это не так.

После этого имеет смысл обратить внимание школьников на то, что формула для вычисления средней скорости движения аналогична формуле для вычисления средней цены:

$$V_{\text{ср.}} = \frac{V_1 t_1 + V_2 t_2 + \ldots + V_k t_k}{t_1 + t_2 + \ldots + t_k},$$

где V_1, V_2, ..., V_k — скорости на различных участках пути, а t_1, t_2, ..., t_k — время их прохождения. Таким образом, средняя скорость — не среднее арифметическое скоростей, а их взвешенное среднее арифметическое!

Задача 1.6. Из двух сплавов, содержащих 10% и 50% меди соответственно, требуется получить новый сплав.

В каком отношении (по массе) требуется взять исходные сплавы, чтобы получить сплав, содержащий а) 30%; б) 40% меди? Проанализируйте полученный результат.

Решение. Пусть для нового сплава взято x кг первого сплава и y кг второго сплава, тогда в новом сплаве будет $0{,}1x + 0{,}5y$ (кг) меди. Следовательно, процентное содержание меди в новом сплаве составляет

$$p = \frac{0{,}1x + 0{,}5y}{x + y} \cdot 100\% = \frac{10x + 50y}{x + y}\ (\%).$$

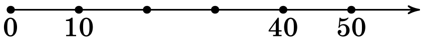
а) Если $p = 30$, то $10x + 50y = 30x + 30y$, то есть $x = y$. Значит, исходные сплавы надо взять в отношении $1 : 1$.

б) Если $p = 40$, то $10x + 50y = 40x + 40y$, то есть $y = 3x$. Значит, исходные сплавы надо взять в отношении $1 : 3$.

Проанализируем полученные результаты:

а) число 30 является средним арифметическим чисел 10 и 50, поэтому интуитивно понятно, что массы исходных сплавов должны быть одинаковы;

б) расположим заданные числа на числовом луче (см. рисунок). Число 40 находится на отрезке [10; 50] и делит его в отношении 3 : 1, считая от 10. А массы исходных сплавов надо взять в обратном отношении, то есть 1 : 3. В этом случае число 40 будет взвешенным средним арифметическим чисел 10 и 50!



Действительно, если массы исходных сплавов равны m_1 и m_2, а процентное содержание в них меди равно $p_1\%$ и $p_2\%$ соответственно, то $p = \dfrac{p_1 m_1 + p_2 m_2}{m_1 + m_2}$ является взвешенным средним арифметическим чисел p_1 и p_2. В нашем случае: $p = \dfrac{10 \cdot 1 + 50 \cdot 3}{4} = 40$.

Полезно также провести аналогию с вычислением среднего роста, средней цены и средней скорости движения. С подготовленными учащимися, используя тот же рисунок, можно также обсудить формулу для вычисления координаты точки, делящей отрезок AB, где $A(x_1)$, $B(x_2)$, в отношении $m : n$, считая от точки A: $x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m + n}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.7. Смешали четыре раствора, содержание соли в которых составляло 10%, 20%, 30% и 40%. При этом в одну ёмкость было слито 10 г первого раствора, 20 г второго, 30 г третьего и 40 г четвёртого. Каково процентное содержание соли в полученном растворе?

Задача 1.8. Каждый из десяти судей оценил выступление фигуриста, и средняя оценка оказалась равна 4,2 балла. Согласно правилам, были отброшены самая большая из поставленных оценок — 6 баллов и самая маленькая — 2 балла, после чего опять подсчитали средний балл. Чему он равен? (*Средний балл — среднее арифметическое баллов*.)

Задача 1.9. Когда в комнату вошел четвёртый человек, средний возраст находящихся в ней людей увеличился с 11 до 14 лет. Сколько лет вошедшему?

Задача 1.10. Профессор Тестер проводит серию тестов, на основании которых он выставляет испытуемому средний балл. Закончив отвечать, Джон понял, что если бы он получил за последний тест 97 баллов, то его средний балл составил бы 90, а если бы он получил за последний тест всего 73 балла, то его средний балл составил бы 87. Сколько тестов в серии профессора Тестера?

Задача 1.11. Желая найти среднюю годовую оценку по математике у всех шестиклассников, завуч попросил учителей математики четырёх шестых классов вычислить средние оценки в каждом из классов и затем нашёл среднее арифметическое этих четырёх чисел. Правильно ли сделал завуч?

Задача 1.12. От дома до школы Петя обычно едет на велосипеде со средней скоростью 300 м/мин. Сегодня, выехав в то же самое время, он часть пути проехал со скоростью 240 м/мин, а затем увеличил скорость до 420 м/мин и приехал вовремя. Какую часть от времени, затраченного на дорогу, Петя ехал с одной скоростью, а какую часть — с другой?

Ответы и решения

Задача 1.7. Ответ: 30%.

Искомая величина равна суммарной массе всей соли, делённой на массу полученного раствора и умноженной на 100%:

$$\frac{10\cdot 0,1+20\cdot 0,2+30\cdot 0,3+40\cdot 0,4}{10+20+30+40}\cdot 100\%=30\%$$

(то есть *взвешенное среднее арифметическое* 10%, 20%, 30% *и* 40%).

Задача 1.8. Ответ: 4,25.

Первоначальная сумма баллов равна $4{,}2\cdot 10 = 42$. После отбрасывания двух оценок сумма баллов стала $42 - (6 + + 2) = 34$. Итоговый средний балл равен $34 : 8 = 4{,}25$.

Задача 1.9. Ответ: 23 года.

Сначала сумма возрастов людей, находящихся в комнате, была равна $11 \cdot 3 = 33$ года, а затем эта сумма стала равна $14 \cdot 4 = 56$ лет. Значит, возраст вошедшего составляет $56 - 33 = 23$ года.

Задача 1.10. Ответ: 8 тестов.

Пусть количество тестов в серии равно n, тогда сумма баллов, набранных Джоном в первом случае, равна $90n$, а во втором случае эта сумма равна $87n$. Разница в сумме баллов возникает из-за результата последнего теста, поэтому $90n - 87n = 97 - 73$. Таким образом, $n = 8$.

Задача 1.11. Ответ: если количество учеников в классах различается, то завуч сделал неправильно.

Приведём числовой пример. Пусть в 6А классе учатся 20 учеников и их годовой средний балл равен 4,5, в 6Б — 25 учеников, а средний балл равен 4,2, в 6В — также 25 учеников, а средний балл — 3,8, в 6Г — 30 учеников и средний балл — 3,5. Тогда среднее арифметическое баллов, подсчитанное завучем, равно

$$(4{,}5 + 4{,}2 + 3{,}8 + 3{,}5) : 4 = 4.$$

Реальный средний балл равен сумме всех годовых оценок, делённой на их количество, то есть

$$\frac{4{,}5 \cdot 20 + 4{,}2 \cdot 25 + 3{,}8 \cdot 25 + 3{,}5 \cdot 30}{20 + 25 + 25 + 30} = 395 : 100 = 3{,}95.$$

Ошибка завуча: он вычислил среднее арифметическое, а надо было вычислить взвешенное среднее арифметическое (см. задачи 1.3 и 1.5).

Задача 1.12. Ответ: со скоростью 240 м/мин Петя ехал $\frac{2}{3}$ от всего времени, затраченного на дорогу, а со скоростью 420 м/мин — $\frac{1}{3}$.

Первый способ. Пусть сегодня Петя ехал t_1 минут со скоростью 240 м/мин и t_2 минут со скоростью 420 м/мин, тогда расстояние от дома до школы равно $240t_1 + 420t_2$ (м). Поскольку обычно он тратит на дорогу такое же время, это же расстояние равно $300(t_1 + t_2)$ (м). Приравнивая эти два выражения, получим $240t_1 + 420t_2 = 300(t_1 + t_2)$, то есть $t_1 = 2t_2$. Следовательно, со скоростью 240 м/мин Петя ехал $\frac{2}{3}$ всего времени, а со скоростью 420 м/мин — $\frac{1}{3}$ всего времени.

Второй способ. Поскольку средняя скорость Петиного движения равна 300 м/мин, число 300 является взвешенным средним арифметическим чисел 240 и 420 (см. задачу 1.5). Число 300 делит отрезок [240; 420] в отношении 1 : 2, считая от числа 240, значит, соотношение времени движения со скоростями 240 м/мин и 420 м/мин будет обратным, то есть 2 : 1 (сравните с задачей 1.6).

Можно также использовать задачи Д1–Д11.

Занятие 2

Свойства среднего арифметического

Разбор и самостоятельное решение задач этого занятия позволят школьникам познакомиться с различными свойствами среднего арифметического нескольких чисел, а также выяснить, как может изменяться среднее арифметическое в различных ситуациях. В итоге будут сформулированы и обоснованы основные свойства среднего арифметического нескольких чисел.

Задача 2.1. Компания друзей детства встретилась через 7 лет. Как за это время изменился средний возраст компании?

Решение. Пусть в компании было n человек, тогда через 7 лет возраст каждого из них увеличился на 7 лет, значит, сумма их возрастов увеличилась на $7n$ лет. Следовательно, средний возраст компании увеличился на $\frac{7n}{n} = 7$ лет.

Полученный результат можно обобщить: ***если к каждому из чисел некоторого набора прибавить одно и то же число, то среднее арифметическое нового набора чисел получится из среднего арифметического исходного набора прибавлением этого же числа.***

Действительно, среднее арифметическое набора чисел a_1, a_2, ..., a_n равно $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Прибавив к каждому числу этого набора число m, получим

$$\frac{(a_1 + m) + (a_2 + m) + \ldots + (a_n + m)}{n} = \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + mn}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + m.$$

Это свойство позволяет, в частности, упростить подсчёт среднего арифметического в тех случаях, когда заданные числа мало отклоняются от некоторой величины. Пусть, например, надо найти среднее арифметическое чисел 1002, 999, 1000, 998, 1003 и 1004. Понятно, что результат будет близок к числу 1000. Вычтем из каждого числа по 1000 и получим числа 2, -1, 0, -2, 3 и 4. Их сумма считается устно (она равна 6), значит, их среднее арифметическое равно 1. Тогда среднее арифметическое исходных чисел больше на 1000, то есть равно 1001.

Задача 2.2. В школе было решено перейти с пятибалльной системы оценок на 40-балльную. Для этого каждую текущую оценку ученика умножили на 8. Как изменился средний балл ученика?

Решение. Если каждую оценку умножить на 8, то и сумма этих оценок также увеличится в 8 раз. Количество оценок не изменилось, поэтому средний балл также увеличился в 8 раз.

Полученный результат можно обобщить: ***если каждое из чисел некоторого набора умножить на одно и то же число, отличное от нуля, то среднее арифметическое нового набора чисел получится из среднего арифметического исходного набора умножением на это же число.***

Действительно, среднее арифметическое набора чисел a_1, a_2, ..., a_n равно $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Умножив каждое число этого набора на $k \neq 0$, получим

$$\frac{ka_1 + ka_2 + \ldots + ka_n}{n} = \frac{k(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot k.$$

Задача 2.3. Баскетболист Джон перешёл из одной команды в другую. Мог ли в обеих командах вырасти средний рост?

Решение. Да, мог. Пусть Джон сначала играл в команде, средний рост которой больше, чем рост Джона, тогда после его перехода средний рост команды увеличился. Если Джон перешёл в команду, где средний рост был меньше его роста, то после перехода средний рост этой команды увеличился.

Имеет смысл обратить внимание школьников на следующий факт: ***если в набор из нескольких чисел добавить число, большее их среднего арифметического, то среднее арифметическое нового набора***

будет больше, если же добавлять число, меньшее среднего арифметического, то среднее арифметическое нового набора будет меньше.

Задача 2.4. Боб и Ваня соревнуются в изготовлении и употреблении сладких коктейлей. Боб смешал «пепси» с «фантой», а Ваня — лимонад с сиропом. Известно, что лимонад слаще «пепси», а сироп слаще «фанты». Могла ли смесь Боба оказаться слаще Ваниной? (Сладость — это доля сахара от общего веса.)

Решение. Да, могла. Пусть, например, «фанта» слаще, чем лимонад. Если в коктейле Боба много «фанты», но мало «пепси», а в коктейле Вани много лимонада, но мало сиропа, то сладость коктейля Боба почти не отличается от сладости «фанты», а сладость коктейля Вани почти не отличается от сладости лимонада.

Можно привести также более конкретный числовой пример. Пусть сладости «пепси», лимонада, «фанты» и сиропа составляют 1, 2, 3 и 4 условные единицы соответственно. Боб может взять, например, 9 частей «фанты» и одну часть «пепси», тогда сладость его смеси равна $(9 \cdot 3 + 1 \cdot 1) : 10 = 2{,}8$ условных единиц, а Ваня — 9 частей лимонада и одну часть сиропа, тогда сладость его смеси равна $(9 \cdot 2 + 1 \cdot 4) : 10 = 2{,}2$ условные единицы.

Задача 2.5. По окружности расставлены 100 чисел так, что каждое из них равно среднему арифметическому двух своих соседей. Докажите, что все числа между собой равны.

Решение. Предположим, что это не так, тогда среди этих ста чисел есть наименьшее число a (возможно, что не единственное). Пусть b и c — числа, соседние с a, тогда $a = \frac{b+c}{2}$. Так как $b \leqslant \frac{b+c}{2} \leqslant c$ или $c \leqslant \frac{b+c}{2} \leqslant b$, то либо одно из чисел b или c меньше, чем a, либо $b = c = a$. Первый случай противоречит нашему предположению, значит, эти три числа равны. Проведя аналогичное рассуждение для чисел b и c, получим, что соседние с ними числа также равны a, и так далее, пока не рассмотрим все данные числа.

Имеет смысл еще раз обратить внимание школьников на то, что ***среднее арифметическое любого набора чисел, среди которых есть различные, больше, чем наименьшее число этого набора, но меньше, чем наибольшее.***

При решении этой задачи использовался метод рассуждений, обычно называемый «принципом крайнего». При этом аналогичное рассуждение можно было провести, выбирая не наименьшее число набора, а наибольшее.

Задача 2.6. В последнюю неделю за любые три дня подряд Робин-Бобин в среднем съедал по 10 пончиков в день. Верно ли, что за эту неделю он в среднем съел 10 пончиков в день?

Решение. Нет, не верно. Пусть, например, в первый день Робин съел 15 пончиков, во второй — 10, в третий — 5, в четвёртый — 15, в пятый — 10, в шестой — 5, в седьмой — 15. Тогда за любые три дня подряд он съел 30 пончиков, то есть в среднем — 10 пончиков в день. При этом за неделю он съел $15 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 75$ пончиков. Значит, за эту неделю он съедал $75 : 7 = 10\frac{5}{7}$ пончиков в среднем за день.

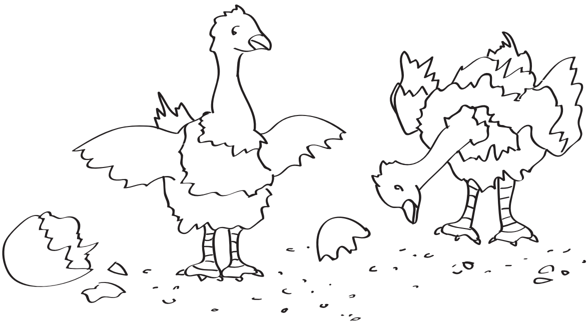
Возможно, имеет смысл, чтобы школьники привели ещё несколько примеров.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.7. На сколько уменьшится средний возраст команды из 11 футболистов, если закончившего выступление 32-летнего игрока заменит игрок в возрасте 21 год?

Задача 2.8. Из команды ушёл баскетболист ростом 192 см, при этом средний рост команды не изменился. Чему он мог быть равен?

Задача 2.9. Тринадцать индюшат клевали зерно. Первый индюшонок склевал 40 зёрен; второй — 60, каждый следующий — среднее арифметическое зёрен, склёванных всеми предыдущими индюшатами. Сколько зерён склевал тринадцатый индюшонок?



Задача 2.10. Средний рост восьми баскетболистов равен 195 см. Какое наибольшее количество из этих игроков может быть ниже чем 191 см?

Задача 2.11. Говорят, что средний доход 10% самых богатых жителей города в 15 раз превосходит средний доход всех жителей этого города. Докажите, что это выдумки.

Задача 2.12. Пешеход шёл 3,5 часа, причём за каждый промежуток времени длиной один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость за всё время движения равна 5 км/ч?

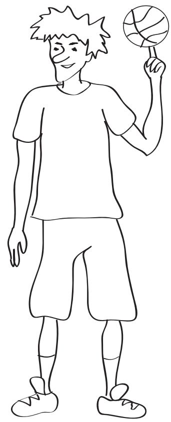
Ответы и решения

Задача 2.7. Ответ: на один год.

Сумма возрастов футболистов этой команды уменьшится на $32 - 21 = 11$ лет, а количество игроков не изменится. Следовательно, средний возраст команды уменьшится на $11 : 11 = 1$ год.

Это же решение может быть оформлено и алгебраически. Пусть S — сумма возрастов футболистов, тогда средний возраст команды был равен $\frac{S}{11}$ лет, а стал равен $\frac{S-11}{11} = \frac{S}{11} - 1$ лет.

Задача 2.8. Ответ: 192 см.



Первый способ. Если бы средний рост команды был больше чем 192 см, то при уходе игрока ростом 192 см средний рост мог только увеличиться. Аналогично, если средний рост команды был меньше, чем 192 см, то при уходе такого игрока он мог только уменьшиться. По условию, средний рост не изменился, значит, он в точности был равен 192 см.

Второй способ. Пусть в команде было n баскетболистов, а их суммарный рост был равен S, тогда средний рост команды был равен $\frac{S}{n}$. После ухода игрока суммарный рост стал равен $S - 192$, значит, средний рост равен $\frac{S-192}{n-1}$. Так как средний рост команды не изменился, то $\frac{S-192}{n-1} = \frac{S}{n}$. Решая это уравнение, получим $Sn - 192n = Sn - S$, то есть $\frac{S}{n} = 192$.

Задача 2.9. Ответ: 50 зёрен.

Третий индюшонок склевал $(40 + 60) : 2 = 50$ (зёрен). Четвёртый склевал $(40 + 60 + 50) : 3 = 50$ (зёрен), и так далее, то есть последний также склевал 50 зёрен.

Полученный ответ можно обосновать и не доводя счёт до конца. Справедливо следующее утверждение: ***если в набор чисел добавить число, равное среднему арифметическому этого набора, то среднее арифметическое новой группы будет равно среднему арифметическому начальной группы.***

Действительно, пусть $m = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = mn$. Следовательно,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + m}{n+1} = \frac{mn + m}{n+1} = \frac{m(n+1)}{n+1} = m.$$

Аналогичная ситуация была и в задаче 2.8, только число, равное среднему арифметическому, не добавлялось, а убиралось из набора!

Задача 2.10. Ответ: семь.

Все игроки не могут быть ниже чем 191 см, поскольку в этом случае их средний рост был бы меньше 191 см. Поэтому хотя бы один игрок должен быть существенно выше. Например, если один баскетболист имеет рост 230 см, то рост остальных может быть 190 см, так как $(230+190\times \times 7) : 8 = 195$.

Отметим, что в истории мирового баскетбола было несколько профессиональных игроков, рост которых был не только больше 230 см, но и больше 240 см!

Задача 2.11. Пусть в городе n жителей со средним доходом x, тогда суммарный доход всех жителей города равен nx. Если десятая часть жителей города имеет средний доход $15x$, то их суммарный доход равен $0{,}1n \cdot 15x = 1{,}5nx$, то есть больше, чем суммарный доход всех жителей, а это невозможно.

Задача 2.12. Ответ: нет, не следует.

Пусть пешеход идёт полчаса со скоростью 10 км/ч, затем полчаса отдыхает и так далее. Тогда за каждый час он будет проходить ровно 5 км, а всего пройдёт $4 \cdot 10 \cdot 0{,}5 = = 20$ км (поскольку идти он будет четыре получасовых интервала). Средняя скорость при этом равна $20 : 3{,}5$ (км/ч), что явно больше, чем 5.

Можно также использовать задачи Д12–Д22.

Занятие 3

Среднее гармоническое и среднее геометрическое

В этом занятии представлены текстовые задачи, иллюстрирующие различные случаи, в которых ответом в задаче является среднее гармоническое или среднее геометрическое двух данных величин. Разбор и самостоятельное решение этих задач помогут школьникам установить логические связи между основными величинами задач на движение и их аналогами в других текстовых задачах.

Начнем с задачи, условие которой очень похоже на условие задачи 1.4.

Задача 3.1. Скорость моторной лодки по течению реки равна 21 км/ч, а против течения — 15 км/ч. Она проплыла некоторое расстояние по течению реки и такое же расстояние против течения. Найдите среднюю скорость её движения. Проанализируйте полученный результат.

Имеет смысл до разбора решения задать учащимся вопрос: будет ли средняя скорость движения равняться среднему арифметическому скоростей по течению и против течения? Опыт показывает, что многие школьники отвечают утвердительно.

Решение. Пусть лодка прошла по течению реки S км и столько же против течения, то есть весь путь, пройденный лодкой, равен $2S$ км. Время движения лодки по течению равно $\frac{S}{21}$ часов, а против течения — $\frac{S}{15}$ часов, значит, общее время движения равно

$$\frac{S}{21} + \frac{S}{15} = \frac{4S}{35} \text{ (ч).}$$

Средняя скорость движения лодки равна $2S : \frac{4S}{35} = 17{,}5$ (км/ч).

В случае, если школьники испытывают «технические» затруднения, можно сначала задать в условии конкретное расстояние.

Для того чтобы проанализировать полученный результат, надо провести аналогичные рассуждения в общем виде: $V_{\text{ср.}} = \dfrac{2S}{t_1 + t_2}$; $t_1 = \dfrac{S}{V_1}$, $t_2 = \dfrac{S}{V_2}$, значит,

$$t_1 + t_2 = \frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_2} = \frac{S(V_1 + V_2)}{V_1 V_2}.$$

Следовательно, $V_{\text{ср.}} = 2S : \dfrac{S(V_1 + V_2)}{V_1 V_2} = \dfrac{2V_1 V_2}{V_1 + V_2}$ — среднее гармоническое скоростей по течению и против течения!

Для наиболее подготовленных школьников можно сразу сформулировать задачу в общем виде.

Полезно также обратить внимание учащихся на то, что и в данной задаче не играет никакой роли, что движение осуществлялось по реке. Тот же результат можно получить при любом виде движения, когда два одинаковых отрезка пути проходятся с разными скоростями.

Задача 3.2. Половину книги наборщик печатал со скоростью 6 страниц в час. Затем его сменил другой наборщик, который печатал со скоростью 12 страниц в час. С какой постоянной скоростью надо было печатать, чтобы набрать текст этой же книги за такое же время?

Эта задача вроде бы не на движение, и в ней не спрашивается про среднюю скорость. Но просматривается естественная аналогия — три величины: объём выполняемой работы (аналог расстояния), время и скорость (производительность труда).

Решение. Пусть V страниц в час — искомая скорость, а в половине книги содержится A страниц, тогда время работы первого — $\dfrac{A}{6}$ ч, время работы второго — $\dfrac{A}{12}$ ч, а предполагаемое время печатания книги — $\dfrac{2A}{V}$ ч. Приравнивая это время, получим $\dfrac{A}{6} + \dfrac{A}{12} = \dfrac{2A}{V}$. Тогда $V = \dfrac{2}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} =$ $= 8$ (страниц в час).

Таким образом, искомая скорость равна среднему гармоническому чисел 6 и 12!

А может ли средним гармоническим оказаться не скорость, а время?

Задача 3.3. Теплоход, двигаясь по течению реки, прошёл расстояние между пристанями A и B за 10 часов. Обратно он прошёл это же расстояние за 15 часов. За сколько времени теплоход проплыл бы такое же расстояние по озеру?

Решение. Допустим, что расстояние AB равно S км, тогда скорость движения из A в B равна $\frac{S}{10}$ км/ч, а обратно — $\frac{S}{15}$ км/ч. Скорость движения по озеру равна среднему арифметическому скоростей по течению и против течения, то есть $V = \frac{\frac{S}{10} + \frac{S}{15}}{2}$ (см. задачу 1.4). Найдём время движения по озеру:

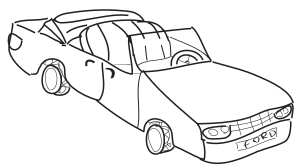
$$t = \frac{S}{V} = \frac{2}{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}} = 12 \text{ (часов)},$$

то время равно среднему гармоническому чисел 10 и 15.

Проанализируем полученный нами результат. Скорость движения по озеру — среднее арифметическое скоростей по течению и против течения, время движения при фиксированной длине пути обратно пропорционально скорости, поэтому время движения по озеру («среднее время») является средним гармоническим данных величин.

А может ли расстояние оказаться средней величиной?

Задача 3.4. Передние покрышки автомобиля «Антилопа–Гну» выходят из строя через 25000 км, а задние — через 15000 км. В какой момент Остап Бендер должен поменять местами покрышки, чтобы машина прошла наибольшее расстояние? Чему равно это расстояние?



Решение. Заметим, что каждый километр пробега изнашивает передние покрышки на $\frac{1}{25000}$ часть, а задние — на $\frac{1}{15000}$ часть. Пусть расстояние, пройденное автомобилем, равно S км. Если покрышки поменять на середине пути, то их износ на всём пути будет равен

$$\left(\frac{1}{25000}+\frac{1}{15000}\right)\cdot\frac{S}{2}.$$

Максимальный износ покрышек равен 1, поэтому

$$S=\frac{2}{\frac{1}{25000}+\frac{1}{15000}}=18750\ (\text{км}).$$

Из полученного выражения видно, что найденное число является средним гармоническим чисел 15000 и 25000.

Заметим, что если менять покрышки не на середине пути, то покрышки, прошедшие сзади больше, чем спереди, раньше выйдут из строя. Следовательно, покрышки надо поменять местами, пройдя 9375 км (половину максимального пути).

Задача 3.5. Мальчик сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он пробежал по этому же эскалатору вверх и насчитал 150 ступенек. Сколько ступенек насчитал бы мальчик, если бы он с такой же скоростью бежал по неподвижному эскалатору?

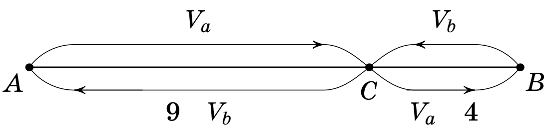
Отметим, что стандартное алгебраическое решение этой задачи потребует введения нескольких переменных и составления достаточно громоздких уравнений.

Решение. Пусть количество ступенек — *время* преодоления мальчиком эскалатора. Длину эскалатора можно принять за единицу, поскольку она одинакова в каждом из трёх случаев. Тогда скорость мальчика «по течению эскалатора» равна $\frac{1}{30}$, а «против течения» — $\frac{1}{150}$. Собственная скорость мальчика равна $\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{150}\right):2=\frac{1}{50}$, следовательно, на неподвижном эскалаторе он насчитает 50 ступенек.

При таком способе решения видна уже знакомая ситуация: собственная скорость движения есть среднее арифметическое скоростей «по течению» и «против течения», поэтому «среднее время» — среднее гармоническое!

Задача 3.6. Два путника вышли на рассвете из пунктов A и B навстречу друг другу с постоянными скоростями и встретились в полдень. Первый пришёл в пункт B в 16.00, а второй пришёл в пункт A в 21.00. В какое время был рассвет?

Решение. Сделаем рисунок (C — место встречи). Пусть от момента рассвета до встречи прошло t часов. Время, затраченное пешеходами на каждом из участков AC и BC, обратно пропорционально их скоростям, поэтому $t : 9 = V_B : V_A = 4 : t$; $t^2 = 36$; $t = 6$; $12 - t = 6$, то есть рассвет был в 6 часов.



Решая пропорцию $\frac{t}{9} = \frac{4}{t}$, мы получили, что время движения путников до встречи — среднее геометрическое двух заданных значений времени!

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.7. Первую половину пути всадник скакал со скоростью 20 км/час, а вторую — со скоростью 12 км/час. Найдите среднюю скорость движения всадника.

Задача 3.8. Велосипедист должен попасть в место назначения к определённому сроку. Если он будет ехать со скоростью 15 км/ч, то приедет на час раньше, а если со скоростью 10 км/ч, то опоздает на один час. С какой скоростью должен ехать велосипедист, чтобы приехать вовремя?

Задача 3.9. Первая труба заполняет бассейн за 6 часов, а вторая — за 18 часов. Сколько времени потребуется для заполнения этого бассейна, если одновременно открыть обе трубы?

Задача 3.10. В магазине было два контейнера картофеля, в одном — по 20 рублей за килограмм, в другом — по 30 рублей за килограмм. Контейнеры были разного объёма, а их суммарная стоимость оказалась одинаковой. Весь имеющийся картофель смешали. По какой цене следует продавать килограмм смеси?

Задача 3.11. У Алёны есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или 210 часов ожидания. Когда Алёна садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон разрядился.

Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алёна говорила по телефону ровно половину времени поездки?

Задача 3.12. Из пунктов A и B вышли навстречу друг другу два курьера с постоянными, но различными скоростями. После того как курьеры встретились, чтобы дойти до места своего назначения, первому потребовалось ещё 16 часов, а второму — ещё 9 часов. Сколько времени затратил каждый из курьеров на весь путь от A до B?

Ответы и решения

Задача 3.7. Ответ: 15 км/ч (*среднее гармоническое чисел* 12 *и* 20).

Пусть половина пути составляет S км, тогда первую половину пути всадник скакал $\frac{S}{20}$ часов, а вторую половину — $\frac{S}{12}$ часов. Время, затраченное на весь путь, равно $\frac{S}{20} + \frac{S}{12} = \frac{2S}{15}$ (ч), поэтому средняя скорость движения всадника: $V_{\text{ср.}} = \dfrac{2S}{\frac{2}{15}S} = 15$ (км/ч).

Задача 3.8. Ответ: 12 км/ч (*среднее гармоническое чисел* 10 *и* 15).

Пусть планируемое время приезда — t часов, тогда, выразив двумя способами расстояние до места назначения, получим уравнение $15(t-1) = 10(t+1)$. Его решением является $t = 5$, значит, расстояние до места назначения равно 60 км. Таким образом, искомая скорость равна $60 : : 5 = 12$ (км/ч).

Задача 3.9. Ответ: 4,5 часа.

Приняв объём бассейна за единицу, получим, что производительность первой трубы равна $\frac{1}{6}$ бассейна в час, а второй — $\frac{1}{18}$ бассейна в час. Производительность их совместной работы равна $\frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$ бассейна в час, значит, этот бассейн они смогут заполнить за $1 : \frac{2}{9} = 4{,}5$ (ч).

Можно рассуждать иначе, немного упростив вычисления. Используем в данном случае тот факт, что 18 делится на 6. За 18 часов вторая труба наполняет бассейн, а первая труба — три таких бассейна, поэтому, работая вместе, они наполнят 4 бассейна. Значит, один бассейн они наполнят за $18 : 4 = 4{,}5$ часа.

В данном случае средним гармоническим чисел 6 и 18 является число 9, а полученный ответ составляет половину от среднего гармонического. Это объясняется тем, что каждая труба по отдельности выполняет тот же объём работы, что и при совместной деятельности (сравните с задачей 3.2). Действительно, если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$, то $x = \frac{ab}{a+b}$.

Задача 3.10. Ответ: 24 рубля (*среднее гармоническое чисел* 20 *и* 30).

Пусть стоимость картофеля в каждом контейнере была равна $60x$ рублей (*для того чтобы иметь дело только с целыми числами, используем тот факт, что наибольшим общим делителем чисел* 20 *и* 30 *является число* 60), тогда в одном контейнере было $3x$ кг картофеля, а в другом — $2x$ кг. Масса смеси равна $5x$ кг. Цена килограмма смеси равна $120x : 5x = 24$ (руб.).

Полезно сравнить эту задачу с задачей 1.3 и обсудить различия.

Задача 3.11. Ответ: 11 часов 40 минут.

Первый способ. Если бы Алёна $210 \cdot 6$ часов говорила и столько же времени молчала, то телефон успел бы полностью разрядиться $210 + 6 = 216$ раз. Так как на самом деле он разрядился один раз, она говорила $\frac{210 \cdot 6}{210 + 6}$ часов и молчала $\frac{210 \cdot 6}{210 + 6}$ часов.

Таким образом, она ехала в поезде $\frac{2 \cdot 210 \cdot 6}{210 + 6} = \frac{35}{3}$ часа (*среднее гармоническое чисел* 6 *и* 210).

Второй способ. Во время разговора энергия аккумулятора расходуется в $210 : 6 = 35$ раз быстрее, чем в то время, когда разговор не ведётся. Пусть Алёна проговорила t часов. Тогда энергии аккумулятора осталось на $6 - t$ часов разговора или на $35(6-t)$ часов ожидания. По условию это время также равно t часов ожидания, поэтому $35(6-t) = t$, откуда $t = \frac{35}{6}$. Следовательно, вся поездка продолжалась $\frac{35}{6} \cdot 2 = \frac{35}{3}$ часа.

Задача 3.12. Ответ: 28 ч и 21 ч.

Можно использовать способ решения, аналогичный решению задачи 3.6, но можно привести и иное, более «алгебраическое» рассуждение. Пусть t — время, за которое курьеры добрались до места встречи, а V_1 и V_2 — скорости курьеров. Тогда $(V_1 + V_2)t = V_1(16 + t) = V_2(9 + t)$. Отсюда получим два равенства: $16V_1 = V_2 t$ и $V_1 t = 9V_2$. Тогда

$$\frac{16V_1}{V_1 t} = \frac{V_2 t}{9V_2},$$

то есть $\frac{16}{t} = \frac{t}{9}$. Следовательно, $t^2 = 16 \cdot 9$, то есть $t = 12$ — *среднее геометрическое чисел* 9 *и* 16. Значит, первый курьер к месту своего назначения ехал $12 + 16 = 28$ часов, а второй курьер ехал $12 + 9 = 21$ час.

Можно также использовать задачи Д25–Д34.

Занятие 4

Сравнение средних

В этом занятии рассматриваются неравенства между классическими средними двух неотрицательных чисел, алгебраические способы их доказательства, и задачи, которые иллюстрируют различные применения этих неравенств. Разбор и самостоятельное решение задач этого занятия позволят школьникам познакомиться с типичными случаями сравнения классических средних величин в текстовых задачах и в задачах, связанных с площадью и периметром простейших геометрических фигур.

Напомним, что классические средние двух неотрицательных чисел удовлетворяют неравенствам

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

причём в каждом случае равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = b$. Понятно, что при доказательстве этих неравенств достаточно рассмотреть три неравенства между «соседними» средними величинами.

Доказательство. 1) $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geqslant 0$, следовательно, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, то есть когда $a = b$.

2) $$\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \geqslant 0.$$

Числа, возведённые в квадрат, неотрицательны, поэтому $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \dfrac{a+b}{2}$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = b$.

3) Можно поступить так же, как в п. 2, но есть и другой способ. Если $a = 0$ либо $b = 0$, то выполняется равенство. Если же $ab > 0$, то обе части неравенства положительны и $\sqrt{ab} : \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{a+b}{2} : \sqrt{ab} \geqslant 1$ (см. п. 1), следовательно, $\sqrt{ab} \geqslant \dfrac{2ab}{a+b}$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда оно достигается в п. 1, то есть когда $a = b$.

Рассмотрим применение неравенств о средних при решении некоторых текстовых задач, а также задач, связанных с площадью и периметром простейших геометрических фигур.

Задача 4.1. Докажите, что среди всех прямоугольников с одинаковой площадью наименьший периметр имеет квадрат.

Решение. Пусть x см — длина стороны квадрата, a см и b см — длины сторон прямоугольника. По условию их площади равны, то есть $x^2 = ab \Leftrightarrow x = \sqrt{ab}$. Тогда периметр квадрата равен $4x = 4\sqrt{ab}$ (см), а периметр прямоугольника равен $2(a+b)$ (см). Для того чтобы периметр квадрата был наименьшим, должно выполняться неравенство $4\sqrt{ab} \leqslant 2(a+b)$, которое равносильно доказанному неравенству $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

Полезно обсудить со школьниками другую трактовку использованного неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим: если рассматриваются значения переменных a и b, для которых значение произведения ab постоянно, то постоянно и значение выражения $\sqrt{ab}$, поэтому выражение $\dfrac{a+b}{2}$ принимает наименьшее значение в случае, когда неравенство становится равенством, то есть в случае, когда $a = b$. Говоря иначе, ***если произведение двух положительных чисел a и b постоянно, то наименьшее значение их суммы достигается, если $a = b$.***

Аналогичным образом можно трактовать и другие неравенства между средними.

Задача 4.2. Теплоход прошёл путь от пункта A до пункта B по течению реки и обратно. Докажите, что собственная скорость теплохода больше, чем средняя скорость этого движения.

Если эта задача вызывает у школьников затруднения, то полезно вспомнить решение задачи 3.1.

Решение. Пусть теплоход прошёл по течению реки S км со скоростью V_1 км/ч и столько же против течения со скоростью V_2 км/ч. Собственная скорость теплохода: $V = \frac{V_1 + V_2}{2}$ (км/ч) (см. задачу 1.4). Время движения теплохода по течению: $t_1 = \frac{S}{V_1}$ (ч), а против течения: $t_2 = \frac{S}{V_2}$ (ч), значит, средняя скорость его движения:

$$V_{\text{ср.}} = \frac{2S}{t_1 + t_2} = \frac{2V_1V_2}{V_1 + V_2} \text{ (км/ч).}$$

Так как $V_1 \neq V_2$, то $\frac{2V_1V_2}{V_1 + V_2} < \frac{V_1 + V_2}{2}$, что и требовалось доказать.

Задача 4.3. Два тракториста, работая вместе, могут вспахать поле за t дней. Если бы первый вспахал половину поля, а второй — другую половину, то на это потребовалось бы T дней. Докажите, что $\frac{T}{t} \geqslant 2$.

Решение. Пусть S га — площадь поля, x и y (гектаров в день) — производительности труда трактористов, тогда время их совместной работы: $t = \frac{S}{x + y}$ (дней); а время их работы поочередно: $T = \frac{S}{2x} + \frac{S}{2y} = S \cdot \frac{x + y}{2xy}$ (дней).

Тогда $\frac{T}{t} = \frac{(x + y)^2}{2xy} \geqslant 2$, так как $\frac{x + y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$.

Утверждение задачи можно трактовать и по-другому: если бы пришлось вспахивать два одинаковых поля, то выгоднее (по времени) работать совместно, а не по отдельности, когда каждый тракторист вспахивает «своё» поле! Приведённое решение ещё раз это объясняет: средняя производительность совместной работы — среднее арифметическое производительностей трактористов, а средняя производительность работы по отдельности — их среднее гармоническое (сравните с задачей 4.2).

Задача 4.4. В двух племенах индейцев разное количество мужчин. Все мужчины одного племени — «братья» (в частности, каждый мужчина — сам себе «брат»). Что больше: среднее количество мужчин в этих племенах или среднее количество «братьев» у каждого мужчины?

Решение. Пусть в одном племени — x мужчин, а в другом — y мужчин. Тогда среднее количество мужчин равно $\frac{x+y}{2}$. В одном племени у каждого мужчины x «братьев», а в другом — y «братьев», поэтому среднее количество «братьев» у каждого мужчины равно $\frac{x^2+y^2}{x+y}$. Так как $x \neq y$, то

$$\frac{x+y}{2} < \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{4} < \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} < \frac{x^2+y^2}{x+y},$$

то есть среднее количество «братьев» у каждого мужчины больше, чем среднее количество мужчин в одном племени.

Задача 4.5. У продавца есть чашечные весы с неравными плечами и гири. Сначала он взвешивает товар на одной чашке, затем — на другой и берёт среднее арифметическое двух показаний. Определите, в чью пользу такое «взвешивание»: продавца или покупателя?

Решение. Пусть длины плеч весов равны l_1 и l_2 ($l_1 < l_2$), и продавец взвешивает 1 кг товара. Пусть при первом взвешивании (когда товар лежит на чаше весов с плечом l_2), он уравновесился гирей массой m_1 кг, а при втором взвешивании — гирей массой m_2 кг. Тогда $l_1 m_1 = l_2 \cdot 1$ и $l_2 m_2 = l_1 \cdot 1$. Таким образом, масса товара, вычисляемая продавцом, $m = \dfrac{m_1 + m_2}{2} = \left(\dfrac{l_2}{l_1} + \dfrac{l_1}{l_2}\right) : 2 > 1$, так как сумма различных взаимно обратных положительных чисел больше двух. Следовательно, продавец обманывает покупателя (*можно доказать, что обман тем больше, чем больше отношение длин плеч весов*).

Использованное в задаче неравенство о сумме взаимно обратных чисел можно доказать непосредственными тождественными преобразованиями, но полезнее получить его как следствие неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Действительно, если $a > 0$, то $\dfrac{a + \frac{1}{a}}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot \dfrac{1}{a}} = 1$, значит, $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = \dfrac{1}{a}$, то есть при $a = 1$.

Можно также вместо этого неравенства использовать другое неравенство между средними:

$$\left(\frac{l_2}{l_1} + \frac{l_1}{l_2}\right) : 2 = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2} : l_1 l_2 > 1,$$

так как если $l_1 \neq l_2$, то $\sqrt{\dfrac{l_1^2 + l_2^2}{2}} > \sqrt{l_1 l_2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.6. От потолка комнаты вертикально вниз по стене поползли две мухи. Спустившись до пола, они поползли обратно. Первая муха ползла в оба конца с одной и той же скоростью, а вторая, хотя и поднималась вдвое медленней первой, но зато спускалась вдвое быстрее. Какая из мух раньше приползёт обратно?

Задача 4.7. Докажите, что среди всех прямоугольников с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

Задача 4.8. В летней школе два корпуса. В одном из них m комнат по m человек в каждой, а в другом — n комнат по n человек в каждой. Санитарному надзору надо сообщить среднее число школьников в корпусе, а пожарной инспекции — расчётное число, равное произведению среднего числа комнат в корпусе и среднего арифметического наибольшего и наименьшего количества школьников в комнате. Какое из этих чисел больше — истинное или расчётное?

Задача 4.9. В каком случае вертолёт, собственная скорость которого постоянна, пролетит быстрее из пункта A в пункт B и обратно: при отсутствии ветра или при ветре, постоянно дующем в направлении из A в B с одной и той же скоростью?

Задача 4.10. Два туриста вышли из пункта A в пункт B. Первый турист половину затраченного времени от начала движения шёл со скоростью V_1 км/ч, а затем шёл со скоростью V_2 км/ч. Второй турист первую половину пути шёл со скоростью V_1 км/ч, а вторую половину — со скоростью V_2 км/ч. Кто из них затратил меньше времени на путь из A в B?

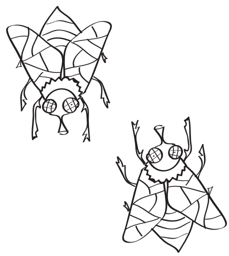
Задача 4.11. Докажите, что среди всех прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, квадрат имеет и наибольший периметр, и наибольшую площадь.

Ответы и решения

Задача 4.6. Ответ: первая муха приползёт раньше.

Первый способ. Скорость спуска второй мухи в два раза больше, чем скорость первой, поэтому в тот момент, когда вторая муха достигнет пола, первая муха будет на середине своего пути вниз. Тогда в тот момент, когда первая муха окажется на полу, вторая уже проползёт четверть пути вверх (скорость её подъёма в два раза меньше, чем скорость первой). Значит, первая муха догонит вторую на полпути от пола до потолка, а так как скорость подъёма первой мухи больше, затем первая муха обгонит вторую.

Эту же идею можно реализовать иначе. Так как вторая муха поднимается вдвое быстрее первой, на обратный путь она затратит такое же время, какое первая муха затратит на весь путь. Но второй мухе надо ещё проползти вниз, поэтому в результате она приползёт позже первой.



Второй способ. Пусть S — расстояние от потолка до пола, V — скорость первой мухи, тогда время, затраченное этой мухой на спуск и подъём, равно $\frac{2S}{V}$. У второй мухи скорость спуска равна $2V$, а скорость подъёма — $0{,}5V$, поэтому, время, которое она затратит на весь путь, равно $\frac{S}{2V} + \frac{S}{0,5V} = \frac{2{,}5S}{V} > \frac{2S}{V}$, следовательно, первая муха потратит меньше времени и вернётся обратно раньше.

Из второго способа решения видно, что средняя скорость движения второй мухи равна $2S : \frac{2{,}5S}{V} = \frac{4}{5}V$, что меньше, чем средняя скорость V движения первой мухи, и это также объясняет полученный ответ (сравните с задачей 4.2).

Задача 4.7. Пусть x см — длина стороны квадрата, a см и b см — длины сторон прямоугольника. По условию их периметры равны, то есть $4x = 2(a+b) \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2}$. Площадь квадрата равна $x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (см^2), а площадь прямоугольника равна ab (см^2).

Так как $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, то $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = b$.

Таким образом, наибольшая площадь достигается, если прямоугольник заданного периметра является квадратом.

Можно также провести рассуждение, аналогичное комментарию к задаче 4.1, которое покажет, что ***если сумма двух положительных чисел*** a ***и*** b ***постоянна, то наибольшее значение их произведения достигается в случае, когда*** $a = b$.

Задача 4.8. Ответ: истинное число не меньше расчётного.

В первом корпусе живёт m^2 школьников, а во втором — n^2, следовательно, среднее количество школьников, живущих в одном корпусе, равно $\frac{m^2+n^2}{2}$. И среднее число комнат в корпусе, и среднее арифметическое наибольшего и наименьшего количества школьников, живущих в одной комнате, равно $\frac{m+n}{2}$.

Так как $\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}} \geqslant \frac{m+n}{2}$, то $\frac{m^2+n^2}{2} \geqslant \left(\frac{m+n}{2}\right)^2$ (если $m = n$, то достигается равенство).

Задача 4.9. Ответ: вертолёт пролетит быстрее в безветренную погоду.

Пусть расстояние от A до B равно S км, а собственная скорость вертолёта — V км/ч. Тогда при отсутствии ветра вертолёт проделает весь путь за время $t = \frac{2S}{V}$ (ч). Если скорость ветра равна U км/ч, то время движения вертолета из A в B: $t_1 = \frac{S}{V-U}$ (ч), а время движения из B в A: $t_2 = \frac{S}{V+U}$. Тогда $t_1 + t_2 = \frac{S}{V+U} + \frac{S}{V-U} = \frac{2SV}{V^2-U^2}$ (ч).

Следовательно, $t = \frac{2S}{V} = \frac{2SV}{V^2} < \frac{2SV}{V^2-U^2} = t_1 + t_2$, то есть вертолёт пролетит быстрее в безветренную погоду.

Имеет смысл провести аналогию с задачами 4.6 и 4.2 (можно также вспомнить решение задачи 3.3). После этого можно предложить другое решение, в котором средние величины присутствуют в явном виде: если скорости вертолёта по ветру и против ветра равны соответственно V_1 и V_2, то его собственная скорость $V = \frac{V_1+V_2}{2}$. Тогда

$$t_1 + t_2 = \frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_2} = S \cdot \frac{V_1+V_2}{V_1V_2}; \qquad t = \frac{2S}{V} = \frac{4S}{V_1+V_2}.$$

Следовательно, $\frac{t_1+t_2}{t} = \frac{(V_1+V_2)^2}{4V_1V_2} > 1$, так как при $V_1 \neq V_2$ выполняется неравенство $\frac{V_1+V_2}{2} > \sqrt{V_1V_2}$. Таким образом, $t_1 + t_2 > t$.

Задача 4.10. Ответ: меньше времени затратил первый турист.

Пусть S км — расстояние от A до B, t ч — половина времени, потраченного первым туристом на путь из A в B, тогда $S = (V_1 + V_2)t$. Найдём время, потраченное вторым туристом на путь из A в B:

$$T = \frac{S}{2V_1} + \frac{S}{2V_2} = \frac{(V_1+V_2)t}{2V_1} + \frac{(V_1+V_2)t}{2V_2} = \frac{(V_1+V_2)^2 t}{2V_1V_2};$$

$$T \geqslant 2t \;\Leftrightarrow\; \frac{(V_1+V_2)^2}{4} \geqslant V_1V_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{V_1+V_2}{2} \geqslant \sqrt{V_1V_2}.$$

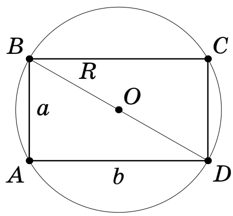
В заключительной фазе решения можно действовать иначе:

$$T = \frac{(V_1+V_2)t}{2V_1} + \frac{(V_1+V_2)t}{2V_2} = \frac{t}{2}\left(\frac{V_2}{V_1} + \frac{V_1}{V_2} + 2\right) \geqslant 2t,$$

так как при $a > 0$ верно неравенство $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$.

Полезно также сравнить это решение с решением задачи 4.3.

Задача 4.11. Пусть в окружность радиуса R вписан прямоугольник со сторонами a и b (см. рис.). Так как диагональ прямоугольника является диметром окружности, по теореме Пифагора, $a^2 + b^2 = 4R^2$. Таким образом, сумма квадратов соседних сторон любого прямоугольника, вписанного в данную окружность, есть величина постоянная. Используя неравенства $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \dfrac{a+b}{2}$ и $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \sqrt{ab}$, получим, что наибольшие значения выражений $\dfrac{a+b}{2}$ и $\sqrt{ab}$ достигаются, если $a = b$ (см. комментарии к задачам 4.1 и 4.7). Следовательно, и наибольшее значение $P = 2(a+b)$, и $S = ab$ достигаются в этом же случае, то есть в случае, когда прямоугольник является квадратом.



Можно также использовать задачи Д30–Д33, Д35–Д37.

Занятие 5

Построения классических средних на одном чертеже

В этом занятии рассматриваются геометрические конфигурации, в которых все классические средние длин двух отрезков изображаются на одном чертеже. Разбор и самостоятельное решение задач этого занятия позволят школьникам познакомиться с типичными случаями появления классических средних величин в геометрии, а также узнать различные геометрические способы доказательства неравенств о средних для двух положительных чисел.

В предыдущем занятии были рассмотрены неравенства между классическими средними величинами для неотрицательных чисел:

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Сегодня нас будут интересовать их геометрические доказательства. Для этого мы рассмотрим несколько геометрических конфигураций, в которых все классические средние величины изображаются на одном чертеже.

Задача 5.1. (*пункты а) и б) взяты из трактата Паппа Александрийского*) На одной прямой последовательно отложены отрезки AD и DB с длинами a и b соответственно и построена полуокружность с диаметром $AB = a + b$. Из точки D восставлен перпендикуляр к AB до пересечения с полуокружностью в точке C. Затем проведены радиус OC полуокружности и перпендикуляр DM к этому радиусу.

а) Выполнив чертёж, найдите на нём отрезки, длины которых равны среднему арифметическому, среднему геометрическому и среднему гармоническому чисел a и b соответственно;

б) используя найденные отрезки, докажите неравенство для этих трёх средних;

в) проведя дополнительное построение, найдите отрезок, равный среднему квадратичному чисел a и b, и завершите доказательство неравенства о средних;

г) обоснуйте, в каком случае во всех рассмотренных неравенствах достигается равенство.

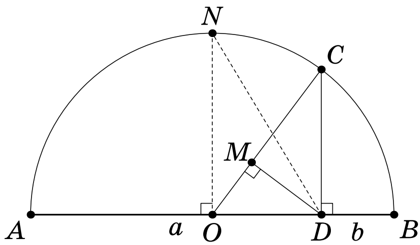


Рис. 5.1

Решение. а) См. рис. 5.1. $OC = \frac{1}{2}AB = \frac{a+b}{2}$; $CD = \sqrt{DA \cdot DB} = \sqrt{ab}$; $CM = \frac{CD^2}{OC} = \frac{2ab}{a+b}$ (*два последних равенства могут быть получены из известных соотношений о средних пропорциональных в прямоугольных треугольниках ABC и COD соответственно либо из подобия треугольников*);

б) используя то, что в любом прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы, получим: $CM \leqslant CD \leqslant CO$, то есть выполняется неравенство $\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$;

в) достаточно, например, провести радиус ON, перпендикулярный AB, тогда

$$DN = \sqrt{ON^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant ON = \frac{a+b}{2};$$

г) знак равенства во всех случаях возникает, если треугольник ABC равнобедренный, то есть если $a = b$.

Задача 5.2. Рассмотрим трапецию, основания которой имеют длины a и b.

а) Найдите отрезки, параллельные основаниям трапеции и равные четырём классическим средним чисел a и b;

б) используя расположение найденных отрезков, докажите неравенства о средних и определите, когда достигаются равенства.

Решение. а) Пусть задана трапеция $ABCD$, основания которой BC и AD имеют длины a и b соответственно (см. рис. 5.2а–д, $a < b$).

1) Проведём в трапеции среднюю линию MK (см. рис. 5.2а), тогда $MK = \frac{a+b}{2}$. *Действительно, пусть G — точка пересечения луча BK с прямой AD, тогда $\triangle BCK = \triangle GDK$ (по стороне и двум прилежащим углам), поэтому $BC = GD$ и $BK = KG$. Следовательно, MK — средняя линия треугольника ABG, значит, $MK \parallel AD$ и $MK = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}(AD + DG) = \frac{1}{2}(AD + BC)$.*

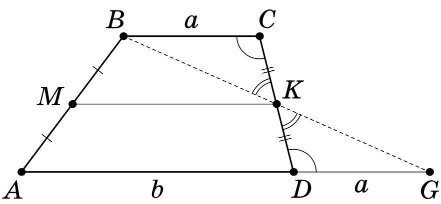


Рис. 5.2а

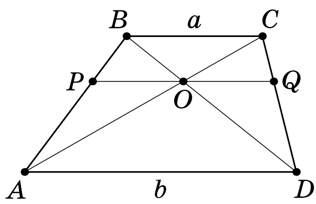


Рис. 5.2б

2) Проведём через точку O пересечения диагоналей трапеции отрезок PQ, параллельный основаниям, такой, что его концы лежат на боковых сторонах трапеции (см. рис. 5.2б).

Поскольку треугольники AOD и COB подобны, то $\frac{AO}{CO} = \frac{DO}{BO} = \frac{AD}{BC} = \frac{b}{a}$. Из подобия треугольников APO и ABC получим, что $\frac{PO}{BC} = \frac{AO}{AC} = \frac{b}{a+b}$. Аналогично $\frac{OQ}{BC} = \frac{DO}{DB} = \frac{b}{a+b}$.

Таким образом, $PO = OQ = \dfrac{ab}{a+b}$, то есть $PQ = \dfrac{2ab}{a+b}$ — *среднее гармоническое длин оснований.*

3) Проведём отрезок LN, параллельный основаниям, концы которого лежат на боковых сторонах трапеции, такой, что $\dfrac{BL}{AL} = \dfrac{CN}{DN} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (см. рис. 5.2в). Докажем, что длина отрезка LN является средним геометрическим длин оснований. Для этого проведём луч BN до пересечения с прямой AD в точке T. Так как $\triangle BNC \sim \triangle TND$, то $\dfrac{BC}{TD} = \dfrac{BN}{TN} = \dfrac{CN}{DN} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Тогда $TD = \dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{ab}$. Так как $\triangle LBN \sim \triangle ABT$, то $\dfrac{LN}{AT} = \dfrac{BN}{BT}$. Следовательно, $LN = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\left(b + \sqrt{ab}\right) = \sqrt{ab}$.

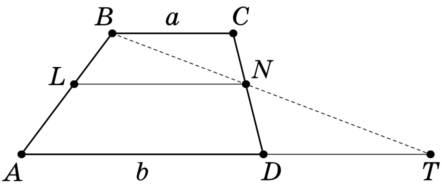


Рис. 5.2в

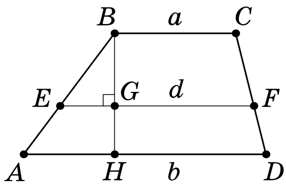


Рис. 5.2г

Попутно мы получили два любопытных факта: 1) четырёхугольник $DLNT$ — параллелограмм (стороны LN и DT равны и параллельны); 2) трапеции $LBCN$ и $ALND$ подобны (равны соответствующие углы и пропорциональны соответствующие стороны). Таким образом, отрезок, параллельный основаниям трапеции и делящий её на две подобные трапеции, является средним геометрическим длин её оснований.

4) Проведём отрезок EF, параллельный основаниям трапеции, концы которого лежат на её боковых сторонах, и такой, что трапеции $EBCF$ и $AEFD$ равновелики (см. рис. 5.2г). Докажем, что длина отрезка EF является средним квадратичным длин оснований. Для этого проведём высоту трапеции BH, которая пересечет отрезок EF в точке G. Пусть $EF = d$; $BH = h$; $BG = h_1$; $GH = h_2$. Тогда

$$h_1 = \frac{0{,}5S_{ABCD}}{0{,}5(a+d)} = \frac{(a+b)h}{2(a+d)}; \quad h_2 = \frac{0{,}5S_{ABCD}}{0{,}5(b+d)} = \frac{(a+b)h}{2(b+d)}.$$

Так как $h_1+h_2=h$, то $\dfrac{(a+b)h}{2(a+d)}+\dfrac{(a+b)h}{2(b+d)}=h \Leftrightarrow (a+b)(a+ + b+2d)=2(a+d)(b+d) \Leftrightarrow d=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

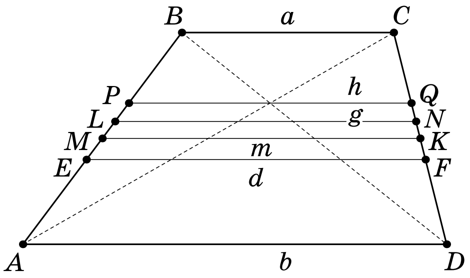


Рис. 5.2д

б) Из доказанного в п. а) следует, что $\dfrac{BP}{AP}=\dfrac{CO}{OA}=\dfrac{a}{b}$; $\dfrac{BL}{LA}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; $\dfrac{BM}{MA}=1$; $\dfrac{BE}{EA}=\dfrac{h_1}{h_2}=\dfrac{b+d}{a+d}$. Теперь достаточно заметить, что при $a \leqslant b$ выполняются неравенства $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \leqslant \leqslant 1 \leqslant \dfrac{b+d}{a+d}$, поэтому отрезки PQ, LN, MK и EF расположены так, как показано на рис. 5.2д. Следовательно, обозначая их длины через h, g, m и d соответственно, получим $h \leqslant g \leqslant m \leqslant d$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=b$ (то есть когда трапеция является параллелограммом).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.3. В равнобокую трапецию $ABCD$, основания которой BC и AD имеют длины a и b соответственно, вписана окружность. BH — высота трапеции, G — основание перпендикуляра, опущенного из точки H на сторону AB.

а) Докажите, что длины отрезков AB, BH и BG являются средним арифметическим, средним геометрическим и средним гармоническим чисел a и b соответственно;

б) используя эти отрезки, докажите неравенство для указанных средних величин и укажите, в каком случае достигается равенство.

Задача 5.4. На луче с началом D отложены отрезки $DA = a$ и $DB = b$, где $a < b$. Затем проведены окружность с диаметром AB и касательная DP к этой окружности.

а) Выполнив чертёж и проведя дополнительные построения, найдите отрезки, длины которых равны четырём классическим средним чисел a и b;

б) используя найденные отрезки, докажите неравенство для средних.

Задача 5.5. Две окружности с диаметрами a и b касаются внешним образом.

а) Докажите, что отрезок их общей касательной, концами которого являются точки касания, равен среднему геометрическому чисел a и b;

б) докажите, что расстояние от точки касания окружностей до общей касательной равно половине среднего гармонического чисел a и b.

Задача 5.6. Окружности с диаметрами a и b не имеют общих точек, а отрезок их общей внешней касательной, концами которого являются точки касания, равен среднему арифметическому диаметров. Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно среднему квадратичному диаметров.

Задача 5.7. Используя результаты, полученные в задачах 5.5 и 5.6, докажите неравенства о средних.

Ответы и решения

Задача 5.3. Пусть $a < b$ (см. рис. 5.3).

а) 1) Так как трапеция — описанная, то $AB+CD = BC+ + AD$. Кроме того, $AB = CD$, поэтому, $AB = \dfrac{a+b}{2}$.

2) Так как $AH = \dfrac{b-a}{2}$, из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора получим

$$BH^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = ab.$$

Следовательно, $BH = \sqrt{ab}$.

3) Для прямоугольного треугольника ABH с высотой HG используем одно из соотношений о среднем пропорциональном, уже рассмотренное ранее: $BG = \frac{BH^2}{AB} = \frac{2ab}{a+b}$;

б) Неравенство $BG \leqslant BH \leqslant AB$ выполняется, так как в любом прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы. Равенство достигается, если $a = b$, то есть трапеция становится квадратом.

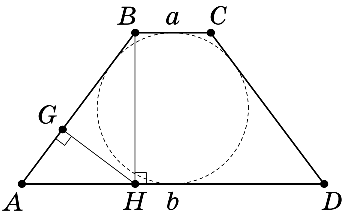


Рис. 5.3

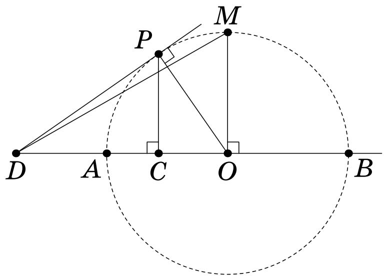


Рис. 5.4

Задача 5.4. а) Пусть O — середина отрезка AB, OM — радиус окружности, перпендикулярный AB, C — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую AB (см. рис. 5.4).

1) $DO = DA + AO = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$.

2) По теореме о касательной и секущей: $DP^2 = DB \times \times DA = ab$, то есть $DP = \sqrt{ab}$.

3) Из прямоугольного треугольника DPO: $DC = \frac{DP^2}{DO} = = \frac{2ab}{a+b}$.

4) Из прямоугольного треугольника DOM получим, что $DM^2 = DO^2 + OM^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$, то есть $DM = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

б) Так как $DC < DP < DO < DM$, то $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (в данном случае $a \neq b$ по условию).

Задача 5.5. Пусть AB — общая касательная к окружностям с центрами O_1 и O_2, которые касаются в точке K (см. рис. 5.5). Тогда O_1ABO_2 — прямоугольная трапеция, $O_1A = \frac{a}{2}$, $O_2B = \frac{b}{2}$, $O_1O_2 = \frac{a+b}{2}$.

а) Проведём $O_1M \perp O_2B$, тогда, учитывая то, что O_1ABM — прямоугольник, а O_1O_2M — прямоугольный треугольник, получим $O_2M = \frac{b-a}{2}$,

$$AB = O_1M = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2M^2} = \\ = \sqrt{\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

б) Пусть $KN \perp AB$, тогда $\frac{AN}{NB} = \frac{O_1K}{O_2K} = \frac{a}{b}$, значит, каждая диагональ трапеции делится точкой пересечения с отрезком KN в таком же отношении. Поэтому KN проходит через точку пересечения диагоналей, значит, $KN = \frac{2O_1A \cdot O_2B}{O_1A + O_2B} = \frac{ab}{a+b}$.

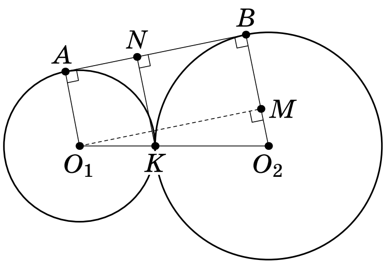


Рис. 5.5

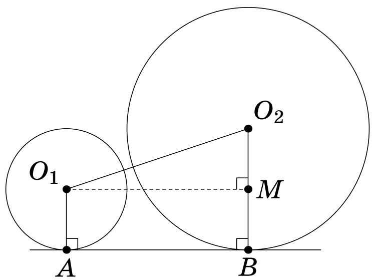


Рис. 5.6

Задача 5.6. Аналогично предыдущей задаче, рассматривая прямоугольную трапецию O_1ABO_2 (см. рис. 5.6), получим $O_1O_2 = \sqrt{O_1M^2 + O_2M^2} = \sqrt{\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Задача 5.7. 1) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} = O_1O_2 \geqslant AB = \dfrac{a+b}{2}$ (см. задачу 5.6).

2) $\dfrac{a+b}{2} = O_1O_2 \geqslant AB = \sqrt{ab}$ (см. задачу 5.5).

3) Рассмотрим прямоугольную трапецию O_1ABO_2 из задачи 5.5 и симметричную ей относительно прямой AB трапецию $O_1'ABO_2'$ (см. рис. 5.7). Тогда $O_1O_2O_2'O_1'$ — равнобокая трапеция. В эту трапецию можно вписать окружность, так как $O_1O_1' + O_2O_2' = a + b = O_1O_2 + O_1'O_2'$. Центр O этой окружности — середина отрезка AB, значит, O_2O — биссектриса острого угла этой трапеции. Тогда из равенства треугольников OO_2B и OO_2K получим, что $OK \perp O_1O_2$, то есть K — точка касания вписанной окружности с боковой стороной. Длина любой хорды окружности не больше диаметра этой окружности, поэтому $\dfrac{2ab}{a+b} = 2KN \leqslant AB = \sqrt{ab}$.

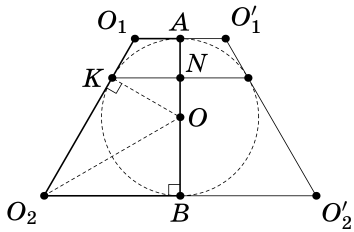


Рис. 5.7

Можно также использовать задачи Д34, Д40, Д57, Д82, Д85, Д86.

Занятие 6

Среднее арифметическое. Разностные треугольники

На этом занятии будут рассмотрены геометрические задачи, в условии или в ответе которых содержится среднее арифметическое двух величин. Некоторые из них уже были рассмотрены в занятии 5. Много таких задач возникает также при рассмотрении особого вида треугольника, который принято называть *разностным* (термин ввел И. А. Кушнир).

Определение. Треугольник, одна из сторон которого является ***средним арифметическим*** двух других, называется ***разностным*** (иначе говоря, ***разностным*** треугольником называется треугольник, стороны которого составляют арифметическую прогрессию).

Очевидно, что разностным является, например, равносторонний треугольник.

Разностные треугольники обладают рядом интересных свойств, часть которых мы рассмотрим. Для всех задач этого занятия условимся стандартно обозначать длины сторон треугольника ABC ($BC = a$, $AC = b$, $AB = C$); Пусть I и r — центр и радиус вписанной окружности этого треугольника, h_b — высота треугольника, проведённая из вершины B; W — точка пересечения луча BI и описанной окружности треугольника ABC. Если ABC — ***разностный*** треугольник, то $b = \dfrac{a+c}{2}$ ($a \leqslant b \leqslant c$).

Предварительно рассмотрим задачу, которая отражает один из важных фактов геометрии треугольника. Полученный результат будет использоваться как при решении некоторых задач этого занятия, так и при решении других задач.

Задача 6.1. Докажите, что в любом треугольнике ABC выполняется равенство $WI = WA = WC$.

Доказательство. Так как BW — биссектриса угла ABC, равны дуги WA и WC, а значит, равны и стягивающие их хорды, то есть $WA = WC$ (см. рис. 6.1). Докажем теперь, что $WI = WA$.

Пусть $\angle BAC = \alpha$; $\angle ABC = \beta$, тогда $\angle IAB = \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle IBA = \dfrac{\beta}{2}$. Угол AIW — внешний для треугольника AIB, значит, $\angle AIW = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}$. Кроме того, $\angle WAC = \angle WBC = \dfrac{\alpha}{2}$ (*свойство вписанных углов*), поэтому $\angle IAW = \angle IAC + \angle WAC = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}$. Следовательно, $\angle AIW = \angle IAW$, то есть $WI = WA$.

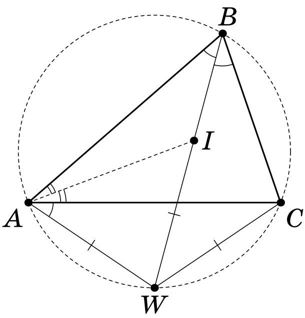


Рис. 6.1

Доказанное утверждение часто называют **теоремой о «трилистнике»**. Отметим, что из этой теоремы следует, что точка W является центром окружности, описанной около треугольника AIC. Кроме того, на этой же окружности лежит центр Q вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC (*так как Q — точка пересечения луча BI и биссектрисы внешнего угла A треугольника ABC, которая перпендикулярна AI*).

Рассмотрим основные свойства ***разностного*** треугольника.

Задача 6.2. Докажите, что в разностном треугольнике ABC: а) $BI = IW$; б) $r = \dfrac{1}{3}h_b$.

Доказательство. а) Опустим из точки I перпендикуляр IN на сторону BC, а из точки W — перпендикуляр WK на сторону AC (см. рис. 6.2). Так как N — точка касания стороны треугольника и вписанной окружности, $BN = p - b = \dfrac{1}{2}b = AK$. Кроме того, $\angle CBW = \angle CAW$. Тогда $\triangle BIN = \triangle AWK$ (по катету и острому углу), следовательно, $BI =$

$= AW$. По теореме «трилистника» $WA = WI$, то есть $BI = IW$, что и требовалось;

б) $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{bh_b}{a+b+c} = \dfrac{bh_b}{3b} = \dfrac{1}{3}h_b$.

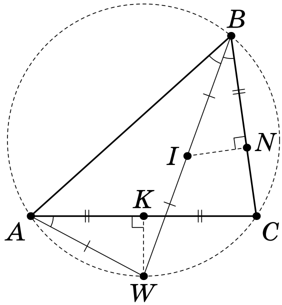


Рис. 6.2

Докажем, что эти утверждения являются также и ***признаками разностного*** треугольника, то есть если в треугольнике выполнено любое из этих соотношений, то он является ***разностным***.

Действительно, утверждение, обратное а), доказывается рассуждениями, аналогичными доказательству утверждения а), при этом равенство прямоугольных треугольников BIN и AWK будет обеспечено равенством их гипотенуз и тех же соответствующих острых углов, а доказательство утверждения, обратного б), можно, например, провести так: $b = \dfrac{2S}{h_b} = \dfrac{(a+b+c)r}{h_b} = \dfrac{a+b+c}{3} \Leftrightarrow b = \dfrac{a+c}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.3. Докажите, что треугольник ABC является разностным тогда и только тогда, когда:

а) прямая IM, где M — центр тяжести треугольника, параллельна стороне AC;

б) сторона AC пересекает отрезок IW в его середине;

в) середина стороны и основание высоты, проведённой к этой стороне, симметричны относительно точки касания этой же стороны и вписанной окружности;

г) высота треугольника равна радиусу вневписанной окружности, касающейся той стороны, к которой проведена высота;

д) точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника и основание высоты, проведённой к этой стороне, симметричны относительно основания биссектрисы, проведённой к этой же стороне.

Задача 6.4. Среди прямоугольных треугольников укажите все, являющиеся разностными, и докажите, что разностью арифметической прогрессии (a; b; c) является радиус вписанной в этот треугольник окружности.

Задача 6.5. Докажите, что в разностном треугольнике ABC:

а) вершина B, центры O и I описанной и вписанной окружностей и середины сторон AB и BC лежат на одной окружности;

б) прямая IM, где M — центр тяжести треугольника, является касательной к этой окружности.

Задача 6.6. Докажите, что в разностном треугольнике ABC центр I вписанной окружности является центром окружности, описанной около треугольника $A'LC'$, где L — основание биссектрисы, проведённой из вершины B, A' и C' — середины сторон BC и AB соответственно.

Задача 6.7. В разностном треугольнике ABC продолжение биссектрисы BL пересекает описанную окружность в точке W, T — основание перпендикуляра, опущенного из точки W на сторону AB. Докажите, что: а) $BT = AC$; б) $AL = \frac{1}{2}AB$.

Ответы и решения

Задача 6.3. Пусть прямая IM пересекает высоту BE треугольника ABC в точке P; L — основание биссектрисы, проведённой из вершины B, D — основание перпендикуляра, опущенного из точки I на сторону AC (см. рис. 6.3).

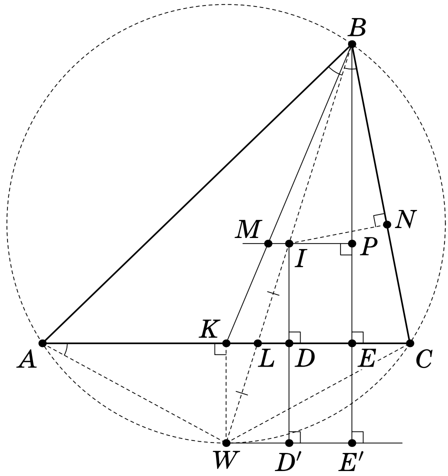


Рис. 6.3

а) Если в треугольнике $b = \dfrac{a+c}{2}$, то $ID = r = \dfrac{1}{3}h_b = \dfrac{1}{3}BE$ (см. задачу 6.2б), тогда из подобия треугольников LID и LBE получим, что $IL = \dfrac{1}{3}BL$. Учитывая, что $MK = \dfrac{1}{3}BK$, получим, что $IM \parallel AC$. Обратно, если $IM \parallel AC$, то $r = ID = PE = \dfrac{1}{3}BE = \dfrac{1}{3}h_b$, так как $MK = \dfrac{1}{3}BK$. Таким образом, треугольник ABC — разностный.

б) Если $b = \dfrac{a+c}{2}$, то $KW = IN = r = ID$ (см. задачу 6.2а), поэтому $\triangle WLK = \triangle ILD$ (по катету и острому углу), следовательно, $IL = LW$. Обратно, из равенства этих же треугольников по гипотенузе и острому углу следует, что $KW = ID = r = IN$. Тогда $\triangle BIN = \triangle AWK$ (по катету и острому углу), следовательно, $BI = AW = IW$, то есть треугольник ABC — разностный.

в) Если $b = \dfrac{a+c}{2}$, то $IL = LW = \dfrac{1}{2}BI$. Следовательно, $KL = DL$ (из равенства прямоугольных треугольников WKL и IDL) и $\dfrac{LD}{DE} = \dfrac{LI}{IB} = \dfrac{1}{2}$ (по теореме о пропорциональных отрезках). Таким образом, $DK = DE$, что и требовалось. Обратно, пусть D — середина отрезка KE, тогда ортогонально спроектируем точки K, D и E на касательную к описанной окружности в точке W (см. рис. 6.3). Так как $ID' \parallel BE'$, для их проекций — точек W, D' и E' соответственно выполняется равенство $D'W = D'E'$. Следовательно, точка I — середина отрезка BW, то есть треугольник ABC — разностный.

г) Вычислим площадь данного треугольника двумя способами: $S = \frac{1}{2}bh_b$ и $S = (p - b)r_b$. Следовательно, $bh_b = (a + c - b)r_b$. Тогда если $h_b = r_b$, то $b = \frac{a+c}{2}$, то есть треугольник — разностный; обратно, если $b = \frac{a+c}{2}$, то $h_b = r_b$.

д) Поскольку центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC, лежит на луче BL, симметрия точки касания и основания высоты относительно точки L равносильна симметрии центра и вершины B относительно L, а значит, равносильна утверждению задачи п. г).

Задача 6.4. Пусть

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2, \\ b = \dfrac{a+c}{2}, \end{cases}$$

тогда выполняется равенство $a^2 + \frac{a^2 + 2ac + c^2}{4} = c^2 \Leftrightarrow 3c^2 - 2ac - 5a^2 = 0$. Решая полученное квадратное уравнение относительно c, получим $c = \frac{5}{3}a$ или $c = -a < 0$. Значит, $b = \frac{4}{3}a$, то есть треугольник — ***египетский***. Тогда его радиус вписанной окружности $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a + \frac{4}{3}a - \frac{5}{3}a}{2} = \frac{a}{3} = b - a$, что и требовалось.

Задача 6.5. а) Пусть точки A' и C' — середины сторон BC и AB соответственно (см. рис. 6.5). Проведём диаметр BF описанной окружности и рассмотрим гомотетию с центром B и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Тогда образом описанной окружности, является окружность ω, проходящая через вершину B, а образами точек A, F и C, лежащих на описанной окружности, являются точки A', O и C' соответственно. Пусть W — точка пересечения луча BI и описанной окружности. Так как ABC — разностный треугольник, $BI = IW$, значит, при той же гомотетии образом точки W является точка I, лежащая на окружности ω;

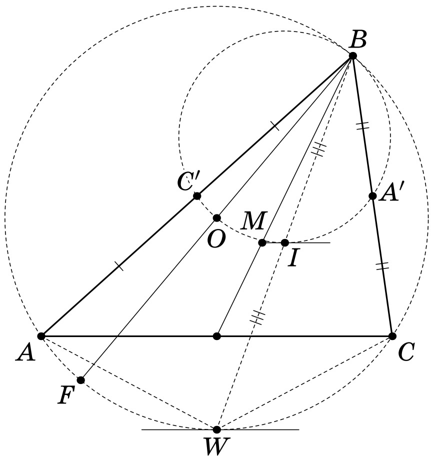


Рис. 6.5

б) касательная к описанной окружности, проходящая через точку W, параллельна AC, её образом при гомотетии с центром и коэффициентом $\frac{1}{2}$ является касательная к окружности ω в точке I, которая также параллельна AC, значит, это прямая IM.

Задача 6.6. Пусть прямая BL пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке W (см. рис. 6.6). Так как I — середина BW, IC' — средняя линия треугольника BWA, значит, $IC' = \frac{1}{2}WA$. Аналогично IA' — средняя линия треугольника BWC, значит, $IA' = \frac{1}{2}WC$. Кроме того, $IL = \frac{1}{2}WI$ (см. задачу 6.3б). По теореме «трилистника» $WA = WI = WC$, поэтому $IC' = IA' = IL$, что и требовалось.

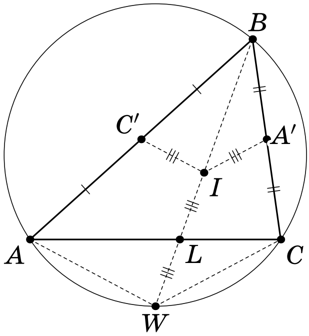


Рис. 6.6

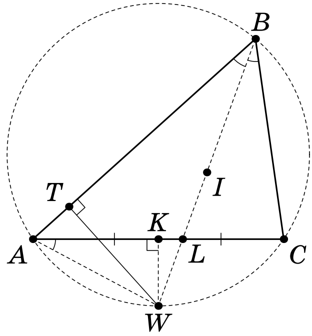


Рис. 6.7

Задача 6.7. а) Пусть K — середина AC (см. рис. 6.7), тогда, так как $\angle ABW = \angle CBW = \angle CAW$, прямоугольные треугольники BTW и AKW подобны. Следовательно, $\frac{BT}{AK} = \frac{BW}{AW}$. В разностном треугольнике $BW = 2WI = 2AW$, значит, $BT = 2AK = AC$, что и требовалось;

б) по свойству биссектрисы треугольника $\frac{AL}{CL} = \frac{BA}{BC}$ (см. рис. 6.7). Пусть $AL = x$, тогда $CL = b - x$. Таким образом, $\frac{x}{b-x} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow ax = bc - cx \Leftrightarrow x = \frac{bc}{a+c}$. Так как треугольник ABC — разностный, $b = \frac{a+c}{2}$, значит, $x = \frac{1}{2}c$, что и требовалось.

Можно также использовать задачи Д38–Д50а, Д82, Д83.

Занятие 7

Среднее геометрическое

На этом занятии будут рассмотрены геометрические задачи, в условии или в ответе которых содержится среднее геометрическое двух величин. Конфигураций, в которых возникает среднее геометрическое, очень много, некоторые из них были рассмотрены в занятии 5. В предлагаемом занятии выделено ещё несколько типичных конфигураций, связанных со средним геометрическим.

Напомним, что в любой школьный курс планиметрии входит несколько теорем, в условии которых содержится *среднее геометрическое* (пропорциональное) двух величин.

Прежде всего, это соотношения между отрезками в прямоугольном треугольнике, которые уже использовались в занятии 5 (см. рис. 7a):

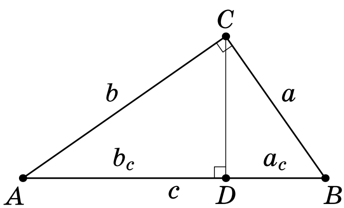


Рис. 7a

1) *Каждый катет является средним пропорциональным между гипотенузой и своей проекцией на гипотенузу*: $a^2 = c \cdot a_c$ и $b^2 = c \cdot b_c$.

2) *Высота, проведённая к гипотенузе является средним пропорциональным проекций катетов на гипотенузу*: $h^2 = a_c \cdot b_c$.

Кроме того, напомним теорему о касательной и секущей (см. рис. 7б): *если из точки, лежащей вне окружности, проведены к этой окружности касательная и секущая, то длина отрезка касательной есть среднее геометрическое между длинами секущей и её внешней части*: $AK^2 = AB \cdot AC$.

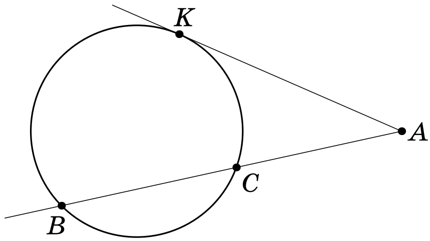


Рис. 7б

Доказательства этих утверждений можно найти в любом школьном учебнике геометрии, поэтому здесь они не приводятся. Отметим, что при доказательстве этих фактов (как и в большинстве задач, связанных со средним пропорциональным в геометрии) используется подобие треугольников. Ещё отметим, что справедливы и утверждения, обратные к рассмотренным теоремам, и их можно доказать, также используя подобие треугольников.

В качестве примера геометрической конфигурации, связанной со средним пропорциональным, рассмотрим несколько способов решения одной задачи.

Задача 7.1. В треугольнике ABC: R_1 и R_2 — радиусы окружностей, проходящих через вершину C и касающихся прямой AB в точках A и B соответственно.

а) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Пусть D — вторая точка пересечения данных окружностей. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABD.

Решение. а) Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, заданных в условии задачи, O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, R — её радиус (см. рис. 7.1а, б).

Первый способ. Проведём отрезки, соединяющие точку O со всеми вершинами треугольника ABC, точку O_1 — с вершинами A и C, а точку O_2 — с вершинами B и C (см. рис. 7.1а). Угол CAB является вписанным для окружности с центром O и углом между касательной и хордой для окружности с центром O_1, значит, центральные углы этих окружностей, опирающиеся на соответствующие дуги, равны: $\angle COB = \angle CO_1A$. Таким образом, равнобедренные треугольники COB и CO_1A подобны, откуда $\frac{R}{R_1} = \frac{BC}{AC}$.

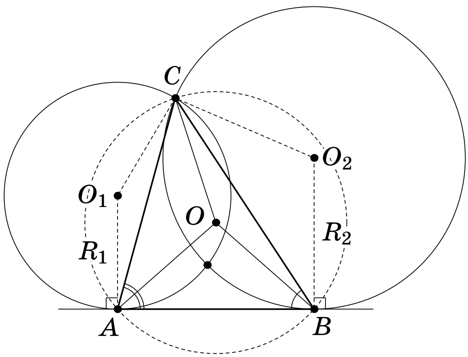


Рис. 7.1а

Аналогично $\angle COA = 2\angle CBA = \angle CO_2B$, то есть подобны треугольники CO_2B и COA, значит, $\frac{R_2}{R} = \frac{BC}{AC}$. Таким образом, $\frac{R}{R_1} = \frac{R_2}{R}$, значит, $R = \sqrt{R_1R_2}$ (*то есть, искомый радиус является средним геометрическим данных радиусов*).

Второй способ. Проведём диаметры AA_1 и BB_1 окружностей с центрами O_1 и O_2 соответственно, перпендикулярные прямой AB (см. рис. 7.1б). Треугольник A_1CA — прямоугольный, значит, $\angle CA_1A = \angle CAB$ (каждый из них дополняет угол CAA_1 до прямого угла). Поэтому $\frac{AC}{\sin\angle CAB} = 2R_1$. Аналогично, используя прямоугольный треугольник B_1CB, получим, что $\frac{BC}{\sin\angle CBA} = 2R_2$.

Перемножим полученные равенства почленно, тогда

$$\frac{AC \cdot BC}{\sin\angle CAB \cdot \sin\angle CBA} = 4R_1R_2.$$

По следствию из теоремы синусов для треугольника ABC $\frac{AC}{\sin\angle CBA} = 2R$ и $\frac{BC}{\sin\angle CAB} = 2R$. После перемножения этой пары равенств получим $\frac{AC \cdot BC}{\sin\angle CAB \cdot \sin\angle CBA} = 4R^2$. Таким образом, $R^2 = R_1R_2$, поэтому $R = \sqrt{R_1R_2}$.

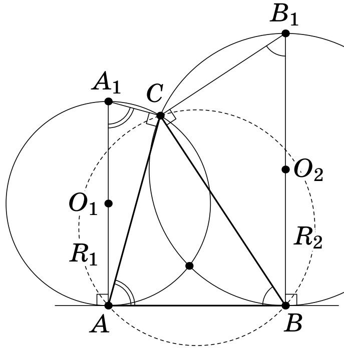


Рис. 7.1б

Отметим, что равенство двух пар углов, отмеченных на рис. 7.1б, можно было получить, не проводя диаметры, а используя теорему об угле между касательной и хордой.

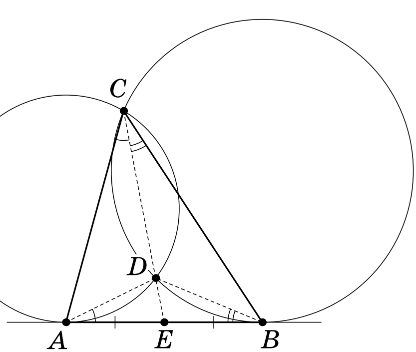


Рис. 7.1в

б) Пусть R' — искомый радиус. Используя теорему об угле между касательной и хордой, получим, что $\angle DAB = \angle DCA$ и $\angle DBA = \angle DCB$ (см. рис. 7.1в). Тогда $\angle ADB = 180^\circ - (\angle DAB + \angle DBA) = 180^\circ - (\angle DCA + \angle DCB) = 180^\circ - \angle ACB$. По следствию из теоремы синусов для треугольников ABD и ABC получим $R' = \dfrac{AB}{2\sin\angle ADB} = \dfrac{AB}{2\sin\angle ACB} = R = \sqrt{R_1R_2}$.

Кроме того, можно доказать, что точка E пересечения прямых AB и CD является серединой отрезка AB и в этом рассуждении нам опять поможет среднее геометрическое. Действительно, по теореме о касательной и секущей, применённой к каждой окружности, получим $EA^2 = EC \cdot ED$ и $EB^2 = EC \cdot ED$, поэтому $EA = EB$.

Таким образом, рассмотренная геометрическая конфигурация буквально «нашпигована» средними пропорциональными величинами!

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.2. В трапецию вписана окружность, точка касания которой с боковой стороной делит эту сторону на отрезки с длинами m и n. Найдите радиус окружности.

Задача 7.3. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, является средним пропорциональным его катетов. Найдите отношение катетов этого треугольника.

Задача 7.4. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка K. Прямая AK пересекает прямые BC и CD в точках L и M соответственно. Докажите, что отрезок AK является средним геометрическим отрезков LK и KM.

Задача 7.5. Продолжение биссектрисы BL треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке W. Докажите, что отрезок AW является средним геометрическим отрезков BW и WL.

Задача 7.6. В остроугольном треугольнике ABC на высоте AH выбрана точка O так, что окружность с центром O

проходит через вершины A и B и пересекает сторону AC в некоторой точке D. Докажите, что сторона AB является средним пропорциональным отрезков AC и AD.

Задача 7.7. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию AD. Окружность проходит через точки C и D и касается отрезка AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $BC = a$, $AD = b$.

Задача 7.8. Трапеция $ABCD$ разделена диагоналями на четыре треугольника. Площади треугольников, прилежащих к основаниям, равны S_1 и S_2. Найдите площади двух других треугольников.

Ответы и решения

Задача 7.2. Ответ: $\sqrt{mn}$.

Пусть O — центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, K — точка касания этой окружности с боковой стороной AB (см. рис. 7.2). Так как AO и BO — биссектрисы углов трапеции, $\angle OAB + \angle OBA = 90^\circ$, следовательно, $\angle AOB = 90^\circ$, то есть треугольник AOB — прямоугольный. Радиус OK вписанной окружности является высотой, проведённой к гипотенузе этого треугольника, следовательно, $OK^2 = KA \times KB = mn$.

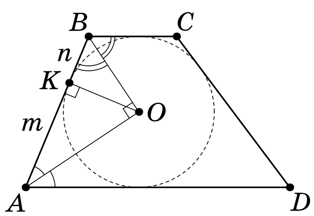


Рис. 7.2

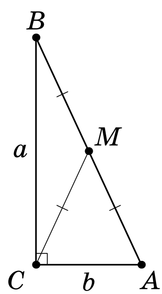


Рис. 7.3

Задача 7.3. Ответ: отношение меньшего катета к большему равно $2 - \sqrt{3}$.

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC длины катетов равны a и b, а длина гипотенузы равна c. Если M —

середина гипотенузы AB, то $CM = \frac{c}{2}$ (см. рис. 7.3). По условию $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = ab$, кроме того, $c^2 = a^2 + b^2$. Следовательно, $a^2 + b^2 = 4ab \Leftrightarrow a^2 - 4ab + b^2 = 0$. Разделив обе части этого уравнения на b^2 и введя обозначение $\frac{a}{b} = x$, получим квадратное уравнение $x^2 - 4x + 1 = 0$. Его корни: $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Отметим, что отношения катетов выражают тангенсы острых углов данного прямоугольного треугольника. Пользуясь тригонометрическими формулами половинного аргумента, можно показать, что острые углы данного треугольника равны 15° и 75°.

Задача 7.4. Так как $\triangle ABK \sim \triangle MDK$ (по двум углам), то $\frac{AK}{KM} = \frac{BK}{KD}$ (см. рис. 7.4). Аналогично $\triangle ADK \sim \triangle LBK$, следовательно, $\frac{AK}{KL} = \frac{KD}{BK}$. Перемножив полученные равенства почленно, получим, что $\frac{AK^2}{KM \cdot KL} = 1 \Leftrightarrow AK^2 = LK \cdot KM$, что и требовалось доказать.

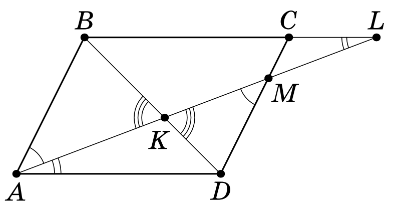


Рис. 7.4

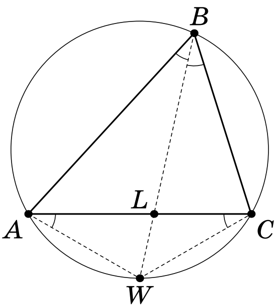


Рис. 7.5

Задача 7.5. Рассмотрим треугольники AWL и BWA (см. рис. 7.5). Так как угол AWB у них общий и $\angle WAL = \angle ABW$, эти треугольники подобны. Значит, $\frac{AW}{BW} = \frac{WL}{WA}$, откуда $AW^2 = BW \cdot WL$, что и требовалось доказать.

Можно обратить внимание школьников на то, что полученное соотношение является обобщением соотношения 1) между отрезками в прямоугольном треугольнике.

Задача 7.6. Через вершину A проведём касательную MA к данной окружности (см. рис. 7.6). Так как $MA \perp \perp AH$, то $MA \parallel BC$, и тогда $\angle BCA = \angle MAD = \angle DBA$ (последнее равенство следует из теоремы об угле между касательной и хордой). Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ (по двум углам), поэтому $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = AC \cdot AD$, что и требовалось.

Отметим, что равенство углов BCA и DBA можно доказать также непосредственным подсчётом углов (без дополнительного построения).

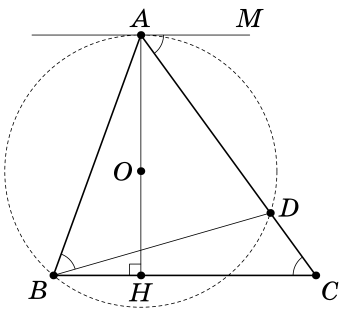


Рис. 7.6

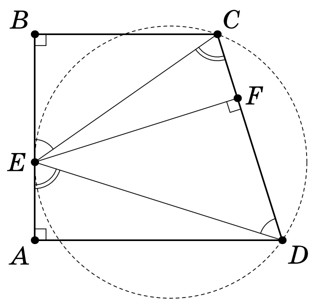


Рис. 7.7

Задача 7.7. Ответ: $\sqrt{ab}$.

Пусть F — основание перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую CD (см. рис. 7.7). По теореме о равенстве вписанного угла и угла между касательной и хордой $\angle EDF = \angle CEB$ и $\angle ECF = \angle DEA$. Тогда прямоугольные треугольники EDF и CEB подобны, значит, $\frac{EF}{BC} = \frac{DE}{CE}$. Аналогично, из подобия прямоугольных треугольников ECF и DEA получим, что $\frac{EF}{AD} = \frac{CE}{DE}$. Перемножив почленно полученные равенства, получим $\frac{EF^2}{BC \cdot AD} = 1$, следовательно, $EF = \sqrt{ab}$.

Задача 7.8. Ответ: $\sqrt{S_1 S_2}$.

Пусть $ABCD$ — данная трапеция, O — точка пересечения её диагоналей, площади треугольников BOC и AOD

равны S_1 и S_2 соответственно (см. рис. 7.8). Обозначим площади треугольников AOB и COD, прилежащих к боковым сторонам, через S_3 и S_4. Заметим, что $\frac{S_1}{S_3} = \frac{OC}{OA}$, так как у этих треугольников одна и та же высота, проведённая из точки B. Аналогично $\frac{S_2}{S_4} = \frac{OA}{OC}$. Перемножив почленно эти равенства и избавившись от знаменателя, получим $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$ (*отметим, что полученное равенство справедливо не только для трапеции, но и для любого выпуклого четырёхугольника*). Докажем, что в трапеции $S_3 = S_4$. Действительно, $S_3 = S_{ABC} - S_1$, а $S_4 = S_{DBC} - S_1$. Кроме того, треугольники ABC и DBC имеют равные площади, поскольку основание BC у них общее, а высоты, проведённые из точек A и D, равны. Таким образом, $S_3 = S_4 = \sqrt{S_1 S_2}$.

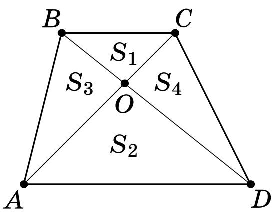


Рис. 7.8

Отметим, что в этом случае площадь трапеции $ABCD$ равна $S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2} = (\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. Кроме того, так как $\frac{S_1+S_2}{2} \geqslant \sqrt{S_1S_2}$, сумма площадей треугольников AOB и COD меньше, чем сумма площадей треугольников BOC и AOD (равенство будет возможно только в том случае, когда $ABCD$ — параллелограмм).

Можно также использовать задачи Д25 (в общем виде), Д50б–Д62.

Занятие 8

Среднее гармоническое. Гармонические треугольники

На этом занятии будут рассмотрены геометрические задачи, в условии или в ответе которых содержатся среднее гармоническое двух величин. Некоторые из конфигураций, в которых возникает среднее гармоническое, уже рассмотрены в занятии 5. В предлагаемом занятии выделено ещё несколько типичных конфигураций, связанных со средним гармоническим. Несколько таких задач возникает при рассмотрении особого вида треугольника, который иногда называют ***гармоническим*** (термин ввел И. А. Кушнир).

Определение. Треугольник, одна из сторон которого является ***средним гармоническим*** двух других, называется ***гармоническим***.

Очевидно, что гармоническим является, например, равносторонний треугольник.

Для всех задач этого занятия условимся стандартно обозначать длины сторон треугольника ABC ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$); h_a, h_b и h_c — высоты треугольника, проведённые к соответствующим сторонам; S — его площадь. Если ABC — ***гармонический*** треугольник, то $b = \dfrac{2ac}{a+c}$ ($a \leqslant b \leqslant c$).

Основное свойство и признак гармонического треугольника устанавливает его связь с ***разностным*** треугольником (см. занятие 6), используя то, что высоты треугольника обратно пропорциональны соответствующим сторонам.

Задача 8.1. Докажите, что треугольник ABC является гармоническим тогда и только тогда, когда: а) треугольник, составленный из его высот, является разностным; б) отрезок, соединяющий основания двух биссектрис треугольника, делит пополам медиану.

Доказательство.

а) $b = \dfrac{2ac}{a+c} \Leftrightarrow \dfrac{1}{b} = \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2S}{b} = \dfrac{\frac{2S}{a}+\frac{2S}{c}}{2} \Leftrightarrow h_b = \dfrac{h_a+h_c}{2}$.

б) Предварительно докажем ***лемму***: *точка принадлежит отрезку, соединяющему основания двух биссектрис треугольника, тогда и только тогда, когда сумма расстояний от этой точки до двух сторон треугольника равна расстоянию от неё до третьей стороны.*

Действительно, пусть AK и CL — биссектрисы треугольника ABC, точка X — внутренняя точка этого треугольника, точки D, E и F — основания перпендикуляров, опущенных из X на стороны AB, BC и AC соответственно (см. рис. 8.1а.)

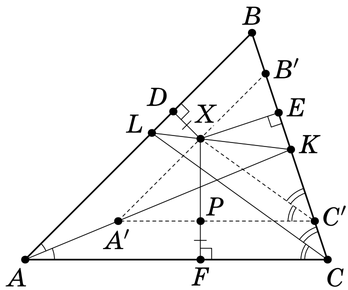


Рис. 8.1а

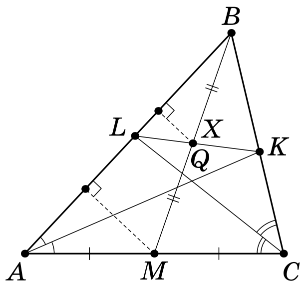


Рис. 8.1б

Пусть точка X лежит на отрезке KL. Рассмотрим гомотетию с центром K и коэффициентом $k = \dfrac{KX}{KL}$. Образами вершин A, B и C данного треугольника при этой гомотетии являются вершины A', B' и C' треугольника, стороны которого соответственно параллельны сторонам треугольника ABC; образами точек D и F — точки X и P соответственно. Кроме того, образом биссектрисы CL треугольника ABC является биссектриса CX треугольника $A'B'C'$. Следовательно, точка X равноудалена от сторон $C'A'$ и $C'B'$

треугольника $A'B'C'$, то есть $XP = XE$. При этом точка A' лежит на биссектрисе угла BAC, значит, прямые $A'B'$ и $A'C'$ равноудалены от AB и AC, то есть $XD = PF$. Таким образом, $XF = XP + PF = XE + XD$, что и требовалось.

В обратную сторону рассуждение проводится аналогично, поскольку биссектриса угла есть геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла.

Докажем теперь само утверждение. Из п. а) следует, что $b = \dfrac{2ac}{a+c} \Leftrightarrow \dfrac{h_b}{2} = \dfrac{h_a}{4} + \dfrac{h_c}{4}$ $(*)$. Пусть отрезок KL, соединяющий основания биссектрис AK и CL, пересекает медиану BM в точке X (см. рис. 8.1б). Заметим, что расстояния от точки M до прямых AB и AC равны $\dfrac{h_c}{2}$ и $\dfrac{h_a}{2}$ соответственно. Тогда если $BX = XM$, то расстояния от точки X до этих же прямых соответственно равны $\dfrac{h_c}{4}$ и $\dfrac{h_a}{4}$, а расстояние от X до AC равно $\dfrac{h_b}{2}$, то есть выполняется равенство $(*)$ и треугольник ABC — гармонический. Обратно, если треугольник ABC — гармонический, то для середины Q медианы BM выполняется равенство $(*)$, тогда по лемме точка Q лежит на отрезке KL и совпадает с точкой X, что и требовалось доказать.

В заключение отметим, что многие задачи, в которых «возникает» среднее гармоническое, так или иначе связаны с биссектрисами треугольника и их свойствами.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.2. Докажите, что треугольник ABC является гармоническим тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

а) $l_b = b \cdot \cos\dfrac{\angle B}{2}$, где l_b — биссектриса треугольника, проведённая из вершины B;

б) $b \cdot BT = l_b \cdot BW$, где W — точка пересечения этой биссектрисы с окружностью, описанной около треугольника

ABC, T — основание перпендикуляра, опущенного из точки W на прямую AB.

Задача 8.3. В треугольник вписан ромб так, что они имеют общий угол. Докажите, что полупериметр ромба равен среднему гармоническому сторон треугольника, на которых лежат стороны ромба.

Задача 8.4. Точки M и N — середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$; K — точка пересечения прямых AB и CD, O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что отрезок KO является средним гармоническим отрезков KM и KN.

Задача 8.5. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, а биссектриса внешнего угла при вершине A пересекает прямую BC в точке E. Докажите, что отрезок DE является средним гармоническим отрезков BE и CE.

Задача 8.6. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF. Лучи DF и DE пересекают прямую, проходящую через вершину A и параллельную BC, в точках M и N. Найдите MN, если $AC = b$, $AB = c$.

Задача 8.7. Из точки M пересечения медиан треугольника опущены перпендикуляры MK, ML и MN на его стороны. Докажите, что радиус r окружности, вписанной в этот треугольник, является средним гармоническим отрезков MK, ML и MN.

Задача 8.8. Пусть в треугольнике ABC: O_b и O_c — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон AC и AB соответственно, C_0 и B_0 — точки касания этих окружностей с прямой BC. Докажите, что прямые O_bB_0 и O_cC_0 пересекаются на середине высоты AH этого треугольника.

Ответы и решения

Задача 8.2. а) Утверждение непосредственно следует из формулы для вычисления биссектрисы треугольника:

$$l_b = \frac{2ac}{a+c} \cdot \cos\frac{\angle B}{2}.$$

б) $b \cdot BT = l_b \cdot BW \Leftrightarrow l_b = b \cdot \dfrac{BT}{BW} \Leftrightarrow l_b = b \cdot \cos\dfrac{\angle B}{2}$ (см. рис. 8.2).

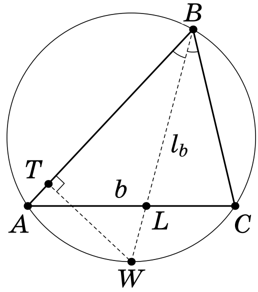


Рис. 8.2

Очевидно, что утверждение останется верным, если отрезок BW проектировать на прямую BC.

Задача 8.3. Пусть точки D, E и F расположены на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC соответственно так, что $ADEF$ — ромб (см. рис. 8.3). Из параллельности прямых DE и AC следует, что треугольники DBE и ABC подобны, значит, $\dfrac{DE}{AC} = \dfrac{BD}{AB}$. Пусть x — длина стороны ромба, тогда $\dfrac{x}{b} = \dfrac{c-x}{c} \Leftrightarrow x = \dfrac{bc}{b+c}$. Следовательно, полупериметр ромба равен $\dfrac{2bc}{b+c}$, что и требовалось доказать.

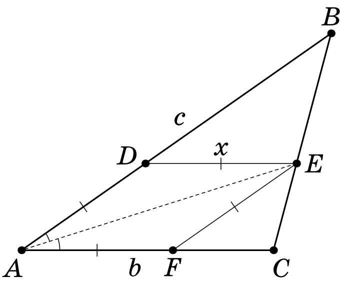


Рис. 8.3

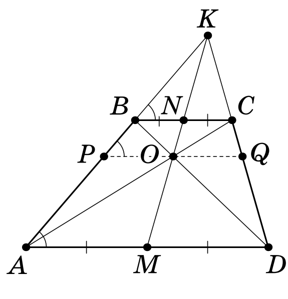


Рис. 8.4

Вместо подобия треугольников можно было использовать тот факт, что диагональ AE ромба является биссектрисой угла BAC (см. рис. 8.3); тогда $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Задача 8.4. В любой трапеции точки M, N, K и O лежат на одной прямой (см. рис. 8.4). Через точку O проведём отрезок PQ, параллельный основаниям трапеции, и воспользуемся тем, что PQ является средним гармоническим оснований AD и BC (см. задачу 5.2). Так как $PO = OQ = \frac{1}{2}PQ$, отрезок PO является средним гармоническим отрезков AM и BN, то есть $PO = \frac{2AM \cdot BN}{AM + BN}$ (∗). Из подобия треугольников KPO и KAM следует, что $\frac{KO}{KM} = \frac{PO}{AM}$, из подобия треугольников KPO и KBN следует, что $\frac{KO}{KN} = \frac{PO}{BN}$. Складывая почленно эти равенства и учитывая равенство (∗), получим $\frac{KO}{KM}+\frac{KO}{KN} = \frac{PO}{AM}+\frac{PO}{BN} = \frac{2BN}{AM+BN}+\frac{2AM}{AM+BN} = 2$. Значит, $KO = \frac{2KM \cdot KN}{KM + KN}$, что и требовалось доказать.

Отметим, что для получения равенства (∗) мы практически воспользовались очевидным свойством средних: ***если каждое из чисел некоторого набора умножить на одно и то же число, отличное от нуля, то любое среднее нового набора чисел получится из аналогичного среднего исходного набора умножением на это же число.*** Для среднего арифметического это свойство было доказано (см. комментарий к задаче 2.2), а для других средних доказывается аналогично.

Отметим также, что решение задачи можно оформить иначе, используя это же свойство и пропорциональность соответствующих элементов трёх подобных треугольников: BKC, PKQ и ABC. Из указанного подобия следует, что $KN : KO : KM = BC : PQ : AD$. Это означает, что элементы одной тройки получаются из соответствующих элементов другой тройки умножением на одно и то же число. Но в правой тройке средний элемент равен среднему гармоническому крайних, значит, и в левой тройке — тоже.

Задача 8.5. Воспользуемся основными свойствами внутренней и внешней биссектрис треугольника (см. рис. 8.5): $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} = \frac{BE}{CE}$. Учитывая, что $DB = BE - DE$, а $DC = DE - CE$, получим $\frac{BE - DE}{DE - CE} = \frac{BE}{CE} \Leftrightarrow BE \cdot CE - DE \cdot CE = BE \cdot DE - BE \cdot CE \Leftrightarrow 2BE \cdot CE = DE \cdot (BE + CE) \Leftrightarrow DE = \frac{2BE \cdot CE}{BE + CE}$, что и требовалось доказать.

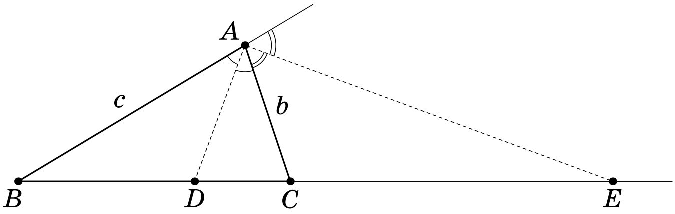


Рис. 8.5

Отметим, что отрезок DE является диаметром ***окружности Аполлония*** треугольника ABC, то есть геометрического места точек, отношение расстояний от которых до вершин B и C равно $\frac{c}{b}$.

Задача 8.6. Ответ: $MN = \frac{2bc}{b+c}$ (*среднее гармоническое чисел b и c*).

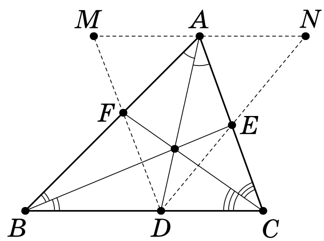


Рис. 8.6

Выразим сначала отрезки BD и CD через стороны треугольника (см. рис. 8.6). По основному свойству биссектрисы треугольника $\frac{BD}{CD} = \frac{c}{b}$, поэтому $BD = kc$, $CD = kb$ (k — коэффициент пропорциональности). Так как $BD + CD = a$, то $k = \frac{a}{b+c}$. Следовательно, $BD = \frac{ac}{b+c}$, $CD = \frac{ab}{b+c}$. Из подобия треугольников AFM и BFD и основного свойства биссектрисы треугольника следует, что $\frac{AM}{BD} = \frac{AF}{BF} = \frac{b}{a}$. Подставляя найденное значение BD, получим, что $AM = \frac{bc}{b+c}$. Аналогично из подобия треугольников AEN и CED и основного свойства биссектрисы треугольника следует, что $\frac{AN}{CD} = \frac{AE}{CE} = \frac{c}{a}$. Подставляя значение CD, получим, что $AN = \frac{bc}{b+c} = AM$. Значит, $MN = \frac{2bc}{b+c}$.

Задача 8.7. Докажем сначала равенство, связывающее высоты треугольника с радиусом вписанной окружности:

$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$. Действительно, это равенство равносильно тому, что $\frac{2S}{r} = \frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c} \Leftrightarrow 2p = a + b + c$.

Пусть D — середина стороны BC данного треугольника ABC (см. рис. 8.7). Проведём высоту AH, тогда треугольники MKD и AHD подобны, значит, $\frac{MK}{AH} = \frac{MD}{AD} = \frac{1}{3}$ (по основному свойству медиан треугольника). Таким образом, $h_a = 3MK$. Аналогично получим, что $h_b = 3ML$ и $h_c = 3MN$. Подставив это в доказанное равенство, получим $\frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{MK} + \frac{1}{ML} + \frac{1}{MN}}{3}$, что и требовалось доказать.

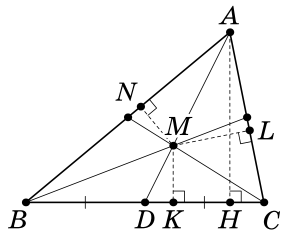


Рис. 8.7

Рассмотренная задача является иллюстрацией среднего гармонического трёх величин, что в планиметрии большая редкость!

Задача 8.8. Заметим, что точки O_b и O_c лежат на биссектрисах вертикальных внешних углов треугольника при вершине A, то есть точка A лежит на отрезке O_bO_c (см. рис. 8.8).

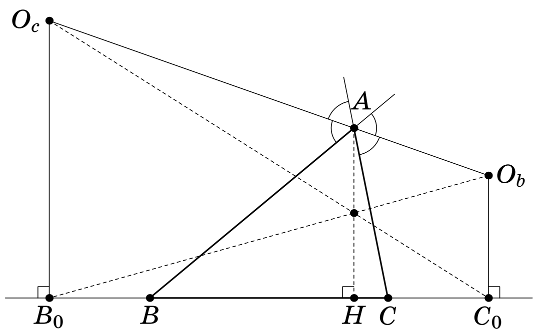


Рис. 8.8

Значит, $O_bO_cB_0C_0$ — трапеция, и утверждение задачи равносильно тому, что отрезок AH, параллельный основаниям трапеции, проходит через точку пересечения её диагоналей. Таким образом, достаточно доказать, что $h_a = \frac{2r_br_c}{r_b + r_c}$, где $AH = h_a$, $O_bC_0 = r_b$, $O_cB_0 = r_c$ (см. задачу 5.2). Действительно,

$$h_a = \frac{2r_br_c}{r_b + r_c} \Leftrightarrow \frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \Leftrightarrow \frac{2S}{h_a} = \frac{S}{r_b} + \frac{S}{r_c} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = p - b + p - c \Leftrightarrow 2p = a + b + c.$$

Приведённое рассуждение показывает, что утверждение задачи равносильно следующему факту: высота треугольника, проведённая к одной из сторон, является средним гармоническим радиусов вневписанных окружностей, касающихся двух других сторон треугольника.

Можно также использовать задачи Д40, Д63–Д69а.

Занятие 9

Среднее квадратичное. Автомедианные треугольники

На этом занятии будут рассмотрены геометрические задачи, в условии или в ответе которых содержится среднее квадратичное двух величин. Некоторые из конфигураций, в которых возникает среднее квадратичное, уже рассмотрены в занятии 5. Много таких задач возникает также при рассмотрении особого вида треугольника, который иногда называют ***автомедианным*** (термин ввел С. И. Зетель).

Определение. Треугольник, одна из сторон которого является ***средним квадратичным*** двух других, называется ***автомедианным***.

Очевидно, что автомедианным является, например, равносторонний треугольник.

Прежде чем станет ясен смысл такого названия треугольника, условимся для всех задач этого занятия стандартно обозначать длины сторон треугольника ABC ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$); m_a, m_b и m_c — медианы треугольника, проведённые к соответствующим сторонам; M — точка пересечения медиан, O — центр описанной окружности. Если ABC — ***автомедианный*** треугольник, то $b = \sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}}$ ($a \leqslant b \leqslant c$).

Теперь рассмотрим задачу, решив которую, мы сможем сформулировать основной признак автомедианного треугольника.

Задача 9.1. Найдите зависимость между сторонами треугольника, если треугольник, составленный из его медиан, ему подобен.

Решение. Воспользуемся формулой для вычисления длины медианы треугольника: $m_a = \frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$ (*её несложно вывести, достроив треугольник до параллелограмма и используя тот факт, что сумма квадратов его сторон равна сумме квадратов диагоналей*).

С её помощью докажем, что *большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана, и наоборот, большей медиане соответствует меньшая сторона*. Действительно, рассмотрим разность квадратов двух медиан:

$$m_a^2 - m_b^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} - \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4} = \frac{3(b^2-a^2)}{4}.$$

Следовательно, $b > a \Leftrightarrow m_b < m_a$. Таким образом, условие задачи равносильно выполнению равенства $\frac{m_a}{c} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{a}$ (без ограничения общности можно считать, что $a \leqslant b \leqslant c$). Его следствием является равенство $\frac{m_a^2}{c^2} = \frac{m_c^2}{a^2}$, подставив в которое выражения для медиан и избавившись от знаменателя, получим

$$a^2(2b^2+2c^2-a^2) = c^2(2a^2+2b^2-c^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2b^2(a^2-c^2) = a^4-c^4 \Leftrightarrow a = c \text{ или } b = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}.$$

В обоих случаях должно ещё выполняться равенство $\frac{m_a^2}{c^2} = \frac{m_b^2}{b^2}$.

Так как $a \leqslant b \leqslant c$, в первом случае получим, что искомый треугольник равносторонний, его медианы равны, значит, требуемое равенство, очевидно, выполняется.

Во втором случае

$$\frac{m_a^2}{c^2} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4c^2} = \frac{a^2+c^2+2c^2-a^2}{4c^2} = \frac{3}{4}$$

и $\frac{m_b^2}{b^2} = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4b^2} = \frac{4b^2-b^2}{4b^2} = \frac{3}{4}$, то есть требуемое равенство также выполняется.

Таким образом, сформулированное в задаче условие является ***основным признаком автомедианного треугольника.*** Проведя аналогичные выкладки, несложно проверить, что если $b = \sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}}$, то треугольник со сторонами a, b и c — автомедианный, то есть сформулированное условие можно считать и ***основным свойством автомедианного треугольника.***

В заключение отметим важное следствие полученных утверждений, возникшее по ходу выкладок: ***в автомедианном треугольнике коэффициент подобия «медианного» треугольника и самого треугольника равен*** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Это свойство можно также получить и из других соображений. Действительно, отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, а в любом треугольнике отношение площади треугольника, составленного из его медиан, к площади самого треугольника равно $\dfrac{3}{4}$ (см. задачу Д70).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 9.2. Докажите, что средний по величине угол автомедианного треугольника не превосходит 60°.

Задача 9.3. Докажите, что треугольник является автомедианным тогда и только тогда, когда:

а) медианы этого треугольника, взятые в порядке возрастания, обратно пропорциональны его высотам, взятым в порядке убывания;

б) одна из его медиан является средним квадратичным двух других;

в) вершина, середины двух сторон треугольника, сходящихся в этой вершине, и точка пересечения медиан лежат на одной окружности.

Задача 9.4. Пусть медиана BB' треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке T. Докажите, что треугольник ABC — автомедианный тогда и только тогда, когда:

а) M — середина BT;

б) точки M и T симметричны относительно точки B'.

Задача 9.5. Докажите, что треугольник является автомедианным тогда и только тогда, когда середина отрезка BM лежит на окружности, проходящей через середины сторон треугольника ABC.

Задача 9.6. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC (отличного от правильного); M — точка пересечения его медиан. Докажите, что прямая OM перпендикулярна медиане BB' тогда и только тогда, когда треугольник ABC — автомедианный.

Ответы и решения

Задача 9.2. Пусть $b = \sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}} \Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2$, тогда $\angle B$ — средний по величине угол треугольника. По следствию из теоремы косинусов $\cos\angle B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{b^2}{2ac} \geqslant \dfrac{1}{2}$, так как $b^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2} \geqslant ac$. Следовательно, $\angle B \leqslant 60^\circ$, что и требовалось доказать.

Задача 9.3. а) Поскольку высоты треугольника обратно пропорциональны сторонам, к которым они проведены, равенство $m_a h_c = m_b h_b = m_c h_a$ равносильно равенству $\dfrac{m_a}{c} = \dfrac{m_b}{b} = \dfrac{m_c}{a}$.

б) $m_b = \sqrt{\dfrac{m_a^2+m_c^2}{2}} \Leftrightarrow 2m_b^2 = m_a^2 + m_c^2 \Leftrightarrow \dfrac{2a^2+2c^2-b^2}{2} = \dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4} + \dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4} \Leftrightarrow 4a^2+4c^2-2b^2 = 4b^2+a^2+c^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}}$.

в) Пусть точки A' и C' — середины сторон BC и AB треугольника ABC, N — точка пересечения средней линии $A'C'$ и медианы BB' (см. рис. 9.3). Так как N — середина

$A'C'$, $NA' = NC' = \dfrac{b}{4}$. Кроме того, $NB = \dfrac{m_b}{2}$, $NM = NB' - MB' = \dfrac{m_b}{6}$. Точки B, A', C' и M лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда выполняется равенство $NA' \cdot NC' = NB \cdot NM$. В нашем случае это равенство примет вид $\dfrac{b^2}{16} = \dfrac{m_b^2}{12}$. Так как $m_b^2 = \dfrac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$, полученное равенство, в свою очередь, равносильно равенству $b = \sqrt{\dfrac{a^2 + c^2}{2}}$, что и требовалось доказать.

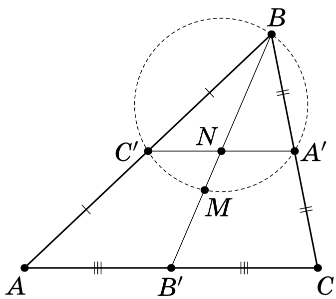


Рис. 9.3

Задача 9.4. Рассмотрим окружность, проходящую через вершину B данного треугольника, и точки A' и C' — середины сторон BC и AB (см. рис. 9.4а).

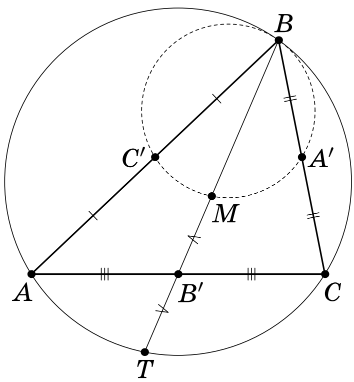


Рис. 9.4а

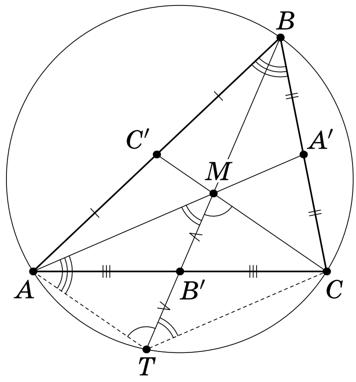


Рис. 9.4б

Пусть M' — точка пересечения этой окружности и медианы BB'. При гомотетии с центром B и коэффициентом 2 образом этой окружности является окружность, описанная около треугольника ABC, а образом точки M' — точка T. Следовательно, M' — середина AT. По доказанному в задаче 9.3в треугольник ABC является автомедианным тогда и только тогда, когда точка M' совпадает с точкой M пересечения его медиан, что доказывает утверждение а). Утверждение б) равносильно утверждению а), так как $BM = \frac{2}{3}BB'$.

Другой возможный способ доказательства основан на том, что углы треугольника, составленного из медиан, соответственно равны углам данного треугольника (см. рис. 9.4б).

Задача 9.5. Рассмотрим окружность, проходящую через точки A', B' и C' — середины сторон треугольника ABC (см. рис. 9.5). Так как треугольники $A'B'C'$ и ABC подобны, $\angle A'B'C' = \angle ABC$. Пусть P — середина BM, тогда $C'P \parallel AM$ и $A'P \parallel CM$, значит, $\angle C'PA' = \angle AMC = \angle A'MC'$. Условие автомедианности треугольника ABC равносильно тому, что точки B, A', B' и M лежат на одной окружности (см. задачу 9.3в), что, в свою очередь, равносильно выполнению равенства $\angle ABC + \angle A'MC' = 180^\circ$. А это равенство равносильно условию $\angle A'B'C' + \angle C'P'A' = 180^\circ$, что, в свою очередь, равносильно тому, что точка P лежит на рассмотренной окружности.

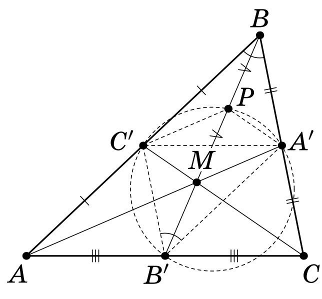


Рис. 9.5

Можно также использовать то, что четырёхугольники $BC'MA'$ и $B'A'PC'$ симметричны относительно середины медианы BB'.

Учитывая то, что окружность, проходящая через середины сторон треугольника, называется ***окружностью девяти точек***, доказанное утверждение можно сформулировать так: ***треугольник является автомедианным тогда и только тогда, когда середина отрезка, соединяющего вершину с точкой пересечения медиан, лежит на окружности девяти точек этого треугольника.***

Задача 9.6. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, R — радиус описанной окружности (см. рис. 9.6а). Предварительно докажем равенство, справедливое для любого треугольника: $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, где a, b и c — длины сторон треугольника. Для его доказательства используем тот факт, что $BH = 2OB'$ (см., например, задачу Д48 или задачу Д67б). Тогда если E — середина BH, то $OB'HE$ и $OB'EB$ — параллелограммы. Из параллелограмма $OB'HE$:

$$OH^2 + B'E^2 = 2(OB'^2 + OE^2). \tag{1}$$

Учитывая, что $B'E = OB = OC = R$, из треугольника $OB'C$ получим, что

$$OB'^2 = R^2 - \frac{1}{4}b^2. \tag{2}$$

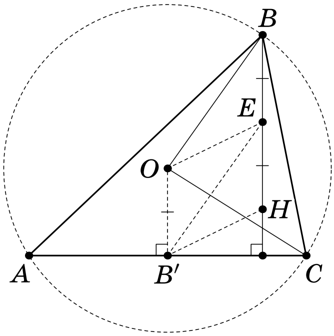


Рис. 9.6а

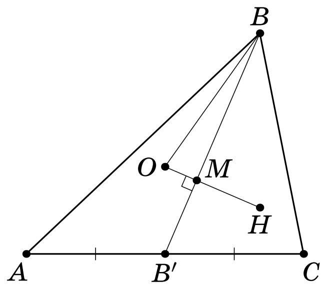


Рис. 9.6б

Из параллелограмма $OB'EB$: $OE^2+BB'^2 = 2(OB'^2+OB^2)$, следовательно, $OE^2 = 2\left(2R^2 - \frac{1}{4}b^2\right) - BB'^2$.

Так как $BB'^2 = \dfrac{2a^2+2c^2-b^2}{4}$, то

$$OE^2 = 4R^2 - \frac{2a^2+2c^2+b^2}{4} \qquad (3).$$

Подставив (2) и (3) в равенство (1), получим $OH^2 + R^2 = 2\left(R^2 - \frac{b^2}{4}\right) + 2\left(4R^2 - \frac{2a^2+2c^2+b^2}{4}\right)$. Упрощая, приходим к равенству $OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$.

Докажем теперь утверждение задачи. Условие перпендикулярности прямых OM и BB' равносильно тому, что треугольник BOM — прямоугольный (см. рис. 8.6б), что, в свою очередь, равносильно выполнению равенства $OB^2 = BM^2 + OM^2$ (*).

Воспользуемся равенством $OH = 3OM$, которое следует из гомотетичности треугольника и его «срединного» треугольника относительно точки M (см. задачу Д48 или задачу Д67б). Тогда

$$OM^2 = \frac{1}{9}OH^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}.$$

Кроме того, $BM^2 = \frac{4}{9}BB'^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{9}$, а $OB^2 = R^2$. Подставив эти выражения в равенство (*), получим равенство

$$R^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{9} + R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9},$$

которое равносильно равенству $b^2 = \frac{a^2+c^2}{2}$. То есть исходное утверждение равносильно тому, что треугольник ABC — автомедианный.

Прямая OM, на которой лежит также и точка H, называется ***прямой Эйлера*** треугольника ABC, поэтому доказанное утверждение можно было сформулировать иначе: ***треугольник является автомедианным тогда и только тогда, когда его прямая Эйлера перпендикулярна медиане.***

Можно также использовать задачи Д48, Д67б, Д69б–Д75.

Занятие 10

Взвешенное среднее арифметическое. Векторы и координаты

На этом занятии будут рассмотрены некоторые векторные соотношения, содержащие среднее арифметическое и взвешенное среднее арифметическое нескольких векторов. Рассматриваются также аналогичные координатные формулы, что позволяет выяснить геометрический смысл взвешенного среднего арифметического нескольких чисел. Приведён ряд геометрических задач, которые удобно решать векторными методами, при этом показано, как эффективно для этого использовать понятие ***центроида системы точек***.

На отрезке AB рассмотрим такую точку M, что $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{m}{n}$ (см. рис. 10.1). Рассмотрим также произвольную точку O на плоскости и выразим вектор $\overrightarrow{OM}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Для этого запишем условие задачи в векторной форме: $\dfrac{1}{m}\overrightarrow{MA} + \dfrac{1}{n}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.

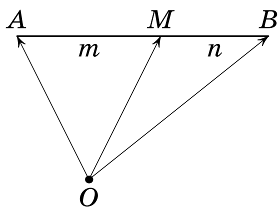


Рис. 10.1

Так как $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$, то

$$n(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) + m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} \quad (1)$$

Это утверждение можно также выразить и в координатной форме. Если O — начало координат, a_k, b_k и x_k — соответствующие координаты точек A, B и M, то

$$x_k = \frac{n \cdot a_k + m \cdot b_k}{m+n} \quad (1')$$

(*отметим, что это верно не только в декартовой, но и в любой аффинной системе координат и не зависит от количества координат точки, то есть от размерности пространства*).

Последнее равенство в точности совпадает с определением ***взвешенного среднего арифметического*** двух чисел и это не случайно. Действительно, если n и m — массы точек A и B соответственно, то точка M является центром масс системы, состоящей из этих точек, поскольку равенство $n \cdot AM = m \cdot AN$ выражает ***Архимедово правило рычага***!

В этом месте полезно также вспомнить условие и решение задачи 1.6.

По аналогии можно сформулировать в векторной форме и определение центра масс системы из n точек: ***точка*** M ***называется центром масс системы точек*** A_1, A_2, ..., A_n, ***массы которых равны*** m_1, m_2, ..., m_n ***соответственно, если для любой точки*** O ***выполняется равенство:***

$$\overrightarrow{OM} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \qquad (2)$$

Обобщением ***правила рычага*** будет равносильное равенство

$$m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{0}. \qquad (3)$$

Равносильность равенств (2) и (3) следует из того, что для любого k верно равенство

$$\overrightarrow{OA_k} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_k}.$$

Введение понятия центра масс системы точек позволяет решать некоторые геометрические задачи особым методом, который так и называется — ***метод масс***, а также ввести и использовать ***барицентрические координаты*** в пространстве. Подробно с этими методами можно познакомится в [1] и [3], а нас будет больше интересовать частный случай центра масс, который облегчает решение многих задач с помощью векторов.

Определение. ***Центроидом*** системы точек A_1, A_2, ..., A_n называется такая точка M, что

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{0}\,. \qquad (*)$$

Как было показано выше, можно сформулировать равносильное утверждение: точка M является ***центроидом*** системы точек A_1, A_2, ..., A_n тогда и только тогда, когда для любой точки O выполняется равенство

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}}{n}. \qquad (**)$$

Единственность ***центроида*** любой системы точек можно доказать методом от противного. Действительно, если K — ещё один центроид системы точек A_1, A_2, ..., A_n, то

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}}{n}.$$

Вычитая это равенство из равенства $(**)$, получим, что $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{0}$, то есть точки K и M совпадают.

Используя то, что модуль суммы векторов не превосходит суммы их модулей, можно получить также важное следствие равенства $(**)$:

$$|\overrightarrow{OM}| = \frac{|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}|}{n} \leqslant \leqslant \frac{|\overrightarrow{OA_1}| + |\overrightarrow{OA_2}| + \ldots + |\overrightarrow{OA_n}|}{n},$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда все векторы $\overrightarrow{OA_k}$ сонаправлены.

Рассмотрим задачу, являющуюся базовой для большинства задач, связанных с понятием центроида. Условимся при этом под ***центроидом многоугольника* (*многогранника*)** понимать ***центроид*** системы, состоящей из его вершин.

Задача 10.1. 1) Докажите, что: а) центроидом отрезка является его середина; б) центроидом треугольника является точка пересечения его медиан; в) центроидом тетраэдра является точка пересечения его медиан (отрезков, соединяющих вершины с центроидами противолежащих граней).

2) В каждом случае запишите формулы для вычисления координат центроида.

Решение. Пусть M — искомый центроид, x_k — его координата; тогда из определения $(*)$ следует, что:

а) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$, где A и B — концы отрезка. Это и означает, что точка M — середина отрезка AB. Если же использовать другую форму определения центроида, то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$. Геометрический смысл этого равенства виден из рис. 10.1а ($OBCA$ — параллелограмм). Тогда любая координата точки M находится по формуле $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, где a_k и b_k — соответствующие координаты точек A и B (см. равенство $(1')$).

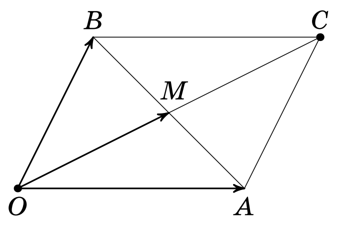


Рис. 10.1а

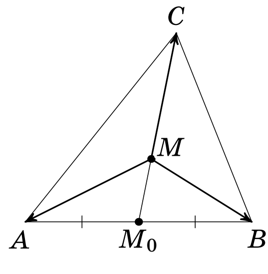


Рис. 10.1б

б) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. Учитывая, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MM_0}$, где M_0 — середина стороны AB треугольника ABC (см. рис. 10.1б), получим, что $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MM_0}$, то есть точка M делит медиану CM_0 в отношении $2:1$, считая от вершины C. Таким образом, M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

Отметим, что, проведя аналогичные рассуждения для середин сторон AB и AC, и используя единственность центроида треугольника, можно доказать основное свойство медиан треугольника векторным способом.

Применяя определение центроида в другой форме, получим равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, из которого следуют координатные формулы для точки пересечения медиан треугольника: $x_k = \dfrac{a_k + b_k + c_k}{3}$.

в) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0}$, где $ABCD$ — данный тетраэдр. Пусть Q — центроид грани ABC (см. рис. 10.1в), тогда $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MQ}$. Таким образом, $\overrightarrow{MD} = -3\overrightarrow{MQ}$, то есть точка M лежит на медиане DQ тетраэдра и делит её в отношении $3:1$, считая от вершины D. Проведя аналогичные рассуждения для центроидов остальных граней и используя единственность центроида тетраэдра, получим, что M — точка пересечения медиан тетраэдра.

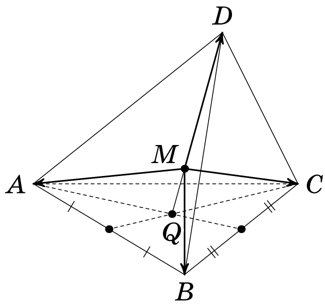


Рис. 10.1в

Применяя определение центроида в другой форме, получим равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$, из которого следуют координатные формулы для точки пересечения медиан тетраэдра: $x_k = \dfrac{a_k + b_k + c_k + d_k}{4}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 10.2. Докажите, что: а) из медиан треугольника можно составить треугольник; б) из медиан тетраэдра можно составить замкнутую ломаную.

Задача 10.3. Параллельной проекцией треугольника ABC на плоскость α, не пересекающую этот треугольник, является треугольник $A'B'C'$. Найдите расстояние между центроидами треугольников ABC и $A'B'C'$, если $AA' = a$; $BB' = b$; $CC' = c$.

Задача 10.4. Пусть M — точка пересечения диагонали AC' параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ и плоскости $A'BD$. Докажите, что M — центроид треугольника $A'BD$, и найдите, в каком отношении точка M делит диагональ AC'.

Задача 10.5. Сумма расстояний между серединами противолежащих сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру. Докажите, что этот четырёхугольник является параллелограммом.

Задача 10.6. Докажите, что: а) точка пересечения средних линий четырёхугольника (отрезков, соединяющих середины противолежащих сторон) является серединой отрезка, соединяющего середины его диагоналей; б) отрезки, соединяющие середины скрещивающихся рёбер тетраэдра, пересекаются в его центроиде и делятся точкой пересечения пополам.

Задача 10.7. Буратино зарыл клад в роще, где росло n деревьев. К месту клада он шёл так: сначала по прямой от первого дерева ко второму, пока не прошёл половину расстояния между этими деревьями; затем от этой точки он шёл в направлении третьего дерева, пока не прошёл треть расстояния от неё до дерева, оттуда повернул в сторону четвёртого дерева и прошел четверть расстояния до него, и так далее, пока не прошёл $\frac{1}{n}$ расстояния по направлению к n-му дереву и в этой точке выкопал яму. Беда в том, что Буратино забыл, каким образом пронумеровал деревья. Сколько ям должен выкопать Буратино, чтобы наверняка найти клад?

Ответы и решения

Задача 10.2. а) Пусть AD, BE и CF — медианы треугольника ABC, тогда выполняются равенства

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$
$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}),$$
$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

(см. задачу 10.1а). Следовательно,

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{0}.$$

Так как эти три вектора не коллинеарны, из отрезков AD, BE и CF можно составить треугольник.

б) Пусть AD, BE, CF и PQ — медианы тетраэдра $PABC$, тогда выполняются равенства:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP}), \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BP}),$$
$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CP}), \quad \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}).$$

(см. задачу 10.1б). Складывая почленно эти равенства, получим (аналогично п. а): $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$. Эти четыре вектора также не коллинеарны, поэтому из медиан тетраэдра можно составить замкнутую ломаную.

Отметим, что в обоих пунктах фактически доказаны более «сильные» утверждения, которые можно сформулировать так:

а) каков бы ни был треугольник, существует другой треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам первого;

б) каков бы ни был тетраэдр, существует замкнутая ломаная, звенья которой равны и параллельны медианам тетраэдра.

Задача 10.3. Пусть точки M и M' — центроиды треугольников ABC и $A'B'C'$ соответственно. Так как

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OM'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}),$$

вычитая эти равенства почленно, получим

$$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}).$$

Кроме того, $\overrightarrow{MM'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AA'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BB'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CC'}$, значит,

$$|\overrightarrow{MM'}| = \frac{|\overrightarrow{AA'}| + |\overrightarrow{BB'}| + |\overrightarrow{CC'}|}{3} = \frac{a+b+c}{3}$$

(см. следствие из равенства $(**)$).

Для решения задачи можно также использовать и метод координат. Если задать аффинную систему координат так, что M' — начало координат, две оси располагаются в плоскости α, а третья ось параллельна проектирующей прямой, то соответствующие вершины и центроиды треугольников будут различаться только третьими координатами, причём для всех точек треугольника $A'B'C'$ эта координата равна нулю, а для вершин и центроида треугольника ABC она равна данному и искомому расстояниям соответственно. Тогда искомая координата равна среднему арифметическому координат точек A, B и C (см. задачу 10.1б). При таком подходе задачу можно обобщить: если какая-то из точек A, B, C или M находится в другом полупространстве относительно плоскости α, то её координата берётся со знаком минус, тогда полученная формула остается верной при любом взаимном расположении треугольника ABC и плоскости α.

Задача 10.4. Ответ: $A'M : MC = 1:2$.

Пусть $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{c}$ (см. рис. 10.4). Тогда по правилу сложения векторов $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$. С другой стороны, для центроида M треугольника $A'BD$ выполняется равенство $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ (см. задачу 10.1б). Следовательно, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$, то есть центроид M треугольника $A'BD$ является точкой, указанной в условии, и $AM : MC = 1:2$.

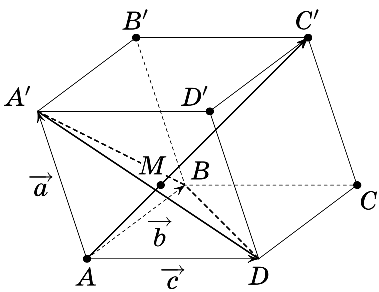


Рис. 10.4

Задача 10.5. Пусть K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно четырёхугольника $ABCD$ (см. рис. 10.5). Докажем, что $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$. Действительно,

$$\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right),$$

так как $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}$.

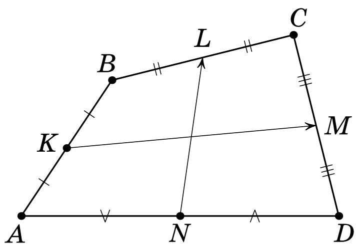


Рис. 10.5

Отметим, что доказанное равенство справедливо при любом взаимном расположении отрезков AD и BC.

Следовательно, $|\overrightarrow{KM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}| \leqslant \frac{|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{BC}|}{2}$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены. Аналогично доказывается, что

$$|\overrightarrow{NL}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| \leqslant \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|}{2}$$

(причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$). Складывая почленно два неравенства, получим

$$|\overrightarrow{KM}| + |\overrightarrow{NL}| \leqslant \frac{|\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2}.$$

По условию задачи в этом неравенстве должно достигаться равенство, поэтому $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм, что и требовалось доказать.

По ходу решения задачи также доказано, что длина отрезка, соединяющего середины двух противолежащих сторон четырёхугольника (длина средней линии четырёхугольника), не превосходит среднего арифметического длин двух других сторон.

Задача 10.6. а) Пусть K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно четырёхугольника $ABCD$, E и F – середины диагоналей AC и BD (см. рис. 10.6а). Пусть Q — середина отрезка KM. Тогда для любой точки O: $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, следовательно, $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Пусть Q_1 — середина отрезка LN, а Q_2 — середина отрезка EF. Рассуждая аналогично, получим

$$\overrightarrow{OQ_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}),$$
$$\overrightarrow{OQ_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}).$$

Таким образом, точки Q_1 и Q_2 совпадают с точкой Q, что равносильно утверждению задачи. *Также мы получили, что точка Q пересечения трёх указанных отрезков является центроидом четырёхугольника $ABCD$.*

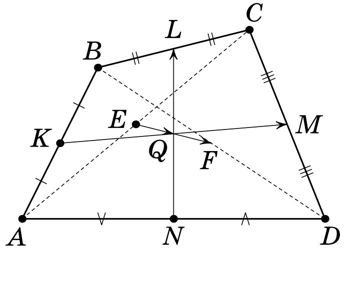


Рис. 10.6а

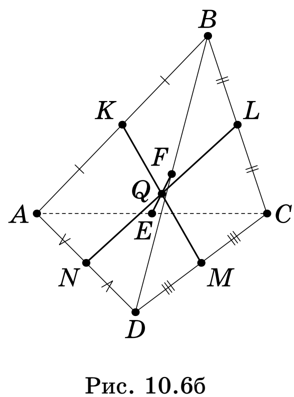


Рис. 10.6б

б) В приведённом решении п. а) никак не использовалось, что точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, поэтому доказанное утверждение допускает другую интерпретацию. Рассмотрим тетраэдр $DABC$ (см. рис. 10.6б), тогда отрезки KM, NL и EF соединяют середины его попарно скрещивающихся рёбер. Тем самым доказано что эти отрезки (которые называют ***бимедианами*** тетраэдра) пересекаются в одной точке — центроиде тетраэдра $ABCD$ и делятся в ней пополам!

Соотнеся полученный результат с решением задачи 10.1в, можно заметить, что центроид системы из четырёх точек можно находить двумя способами: 1) найти центроид любых трёх точек и разделить отрезок, соединяющий его с четвёртой точкой, в отношении 1 : 3; 2) произвольно разбить точки на две пары, найти центроиды каждой пары точек и разделить соединяющий их отрезок пополам. Этот метод поиска центроида можно обобщить (см. задачу Д79).

Задача 10.7. Ответ: одну яму.

Пусть A_1, A_2, ..., A_n — точки, в которых располагаются деревья. Докажем, что независимо от порядка обхода, Буратино окажется в центроиде этой системы точек, используя метод математической индукции. Действительно, при $n = 2$ Буратино окажется в середине отрезка A_1A_2 — его центроиде. Предположим, что при $n = k$ Буратино оказался в центроиде T системы точек A_1, A_2, ..., A_k, тогда $\overrightarrow{OT} = \dfrac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_k}}{k}$. Из точки T он проходит $\dfrac{1}{k+1}$ часть пути по направлению к точке A_{k+1} и попадает в точку M, следовательно,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{OA_{k+1}} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{OT} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{OA_{k+1}} + \frac{k}{k+1}\times$$
$$\times\frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_k}}{k} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_{k+1}}}{k+1},$$

то есть M — центроид системы точек A_1, A_2, ..., A_{k+1}.

Таким образом, утверждение верно при любом натуральном n.

Отметим, что некоторые из задач этого занятия можно решить, не используя векторы, например, 10.2, 10.3, 10.6.

Можно также использовать задачи Д46, Д76–Д84.

Приложение

Задачи для самостоятельного решения

Задача Д1. 150 стандартных теннисных мячей весят 3 кг. Сколько весят 19 мячей?

Задача Д2. Есть 10 яблок весом 50 г и 20 яблок весом 80 г. Каков средний вес яблока?

Задача Д3. Вася вычислил среднее арифметическое тридцати пяти целых чисел и получил 6,35. Докажите, что он ошибся.

Задача Д4. Турист сначала прошел 10 км по ровной дороге со скоростью 5 км/ч, затем 8 км в гору со скоростью 1,6 км/ч, а последний участок длины 6 км — под гору со скоростью 6 км/ч. Найдите среднюю скорость его движения.

Задача Д5. Средний возраст одиннадцати игроков футбольной команды — 22 года. Во время матча один из игроков получил травму и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21 году. Сколько лет футболисту, получившему травму?

Задача Д6. В лаборатории имеется два раствора серной кислоты с процентным содержанием кислоты 5% и 40%. Сколько раствора каждого из видов понадобится, для того чтобы получить 140 л 30% раствора кислоты?

Задача Д7. Делегация некоторой страны на Олимпийских играх будет состоять из спортсменов и чиновников. Средний возраст этих спортсменов на момент начала олимпиады составит 22 года, а чиновников — 47 лет. При этом средний возраст всех членов делегации окажется равным

41 году. Какова в этой делегации доля чиновников, выраженная в процентах?

Задача Д8. В футбольном турнире приняло участие десять команд. В среднем каждая из них набрала по 12 очков. Сколько матчей закончилось вничью? (Каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Победа — 3 очка, ничья — 1 очко, поражение — 0 очков.)

Задача Д9. Коля и Вася за ноябрь получили по 15 оценок: тройки, четвёрки и пятёрки. При этом Коля получил пятёрок столько же, сколько Вася четвёрок, четвёрок столько же, сколько Вася троек, а троек столько же, сколько Вася пятёрок. Оказалось, что средний балл за ноябрь у мальчиков одинаковый. Сколько троек получил Коля в ноябре?

Задача Д10. В классе не более тридцати учеников, и рост каждого из них выражается целым числом сантиметров. Средний рост всех, кроме самого высокого, равен $148\frac{3}{4}$ см, а средний рост всех, кроме самого низкого, равен $149\frac{4}{7}$ см. На сколько сантиметров самый высокий ученик этого класса выше самого низкого?

Задача Д11. В каждой из клеток прямоугольной таблицы с тремя строками и двумя столбцами записано число. Средние арифметические чисел, записанных в первой, второй и третьей строках, равны a, b и c соответственно, а среднее арифметическое чисел первого столбца равно d. Найдите среднее арифметическое чисел, записанных во втором столбце.

Задача Д12. На сколько увеличится средний возраст учеников класса через год?

Задача Д13. Пусть m — среднее арифметическое чисел a_1, a_2, ..., a_n. Найдите значение выражения

$$\frac{(a_1 - m) + (a_2 - m) + \ldots + (a_n - m)}{n}.$$

Задача Д14. В некотором соревновании участвовали 50 стрелков. Первый выбил 60 очков; второй — 80; третий — среднее арифметическое очков первых двух; четвёртый — среднее арифметическое очков первых трёх и так далее, то есть каждый следующий стрелок выбил среднее арифметическое очков всех предыдущих. Сколько очков выбил 42-й стрелок?

Задача Д15. В каждой клетке прямоугольной таблицы записано число. Может ли среднее арифметическое каждого столбца таблицы быть положительным, а среднее арифметическое каждой строки — отрицательным?

Задача Д16. Несколько учёных эмигрировали из страны P в страну A. Мог ли средний IQ в обеих странах возрасти?

Задача Д17. Одноклассницы Боба в среднем ниже, чем одноклассницы Вани, это же верно и для мальчиков-одноклассников. Может ли средний рост в классе Боба быть больше среднего роста в классе Вани?

Задача Д18. В каждой клетке шахматной доски записано число, равное среднему арифметическому своих соседей (по стороне). Докажите, что все записанные числа равны.

Задача Д19. Улитка проползает за каждый час 1 метр. Верно ли, что в любой момент времени её средняя скорость равна 1 метр в час?

Задача Д20. Может ли среднее арифметическое нескольких различных натуральных чисел равняться их наибольшему общему делителю?

Задача Д21. На доске выписано 100 различных чисел. Докажите, что среди них можно выбрать три числа так, что их среднее арифметическое не будет равно среднему арифметическому никаких четырёх из выписанных чисел.

Задача Д22*. На доске записано 100 чисел, при этом среднее арифметическое любых трёх из них уже записано. Докажите, что все числа равны.

Задача Д23*. В строчку записаны 100 чисел: a_1, a_2, ..., a_{100}, причём $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$, а каждое число, кроме двух крайних, не больше, чем среднее арифметическое двух его соседей. Докажите, что $a_{64} \leqslant 64$.

Задача Д24*. При каких значениях n все натуральные числа от 1 до n можно расставить в другом порядке так, чтобы среднее арифметическое любой группы из двух или более подряд стоящих чисел не было целым?

Задача Д25. а) Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 9 см и 4 см. б) Найдите ребро куба, если его объём равен объёму прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 2 дм, 9 дм и 12 дм.

Задача Д26. Половину пути лошадь двигалась налегке со скоростью 12 км/ч. Остальной путь она шла с возом, поэтому её скорость была 4 км/ч. С какой постоянной скоростью ей надо было двигаться, чтобы пройти тот же путь за такое же время?

Задача Д27. В кинофильме «Самогонщики» три друга гонят самогон. У Труса течёт жидкость крепостью $a\%$ и стандартная бутыль наполняется за a часов, у Балбеса течёт жидкость крепостью $b\%$ и такая же бутыль наполняется за b часов, а у Бывалого — $c\%$ и за c часов соответственно. Для ускорения процесса друзья направили трубки аппаратов в одну бутыль и наполнили её за сутки. Найдите крепость получившейся смеси. (*Крепость жидкости — это процент содержания в ней спирта.*)

Задача Д28. Аня прошла путь из пункта A в пункт B, а Боря — из пункта B в пункт A. Они вышли одновременно и шли с постоянными скоростями. После встречи Боря был в пути ещё час, а Аня — 4 часа. Сколько времени шёл каждый из них до места встречи?

Задача Д29. Малыш и Карлсон съели бочку варенья и корзину печенья, начав и закончив одновременно. Сначала Малыш ел печенье, а Карлсон — варенье, потом (в какой-то момент) они поменялись. Оказалось, что Карлсон съел в девять раз больше варенья, чем Малыш, а печенья они съели поровну. Любую сладость Карлсон ест быстрее Малыша в одно и то же количество раз. В какое именно?

Задача Д30. В магазин привезли три сорта конфет с разной ценой: 40, 60 и 120 рублей за килограмм. Конфет каждого сорта привезли при этом на одну и ту же сумму денег. Продавец стал продавать смесь этих конфет по 73 рубля 33 копейки за килограмм, но Ваня покупать не стал, так как решил, что цена завышена. Кто из них прав? (Восстановите логику обоих.)

Задача Д31. На доске в лаборатории записаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были записаны числа 5 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 2011-го дня.

Задача Д32. Вовочка сумел убедить учительницу повысить ему оценку за итоговую контрольную работу в первой четверти с двойки на тройку, после чего его средний балл за эту четверть увеличился на a. После того как он проделал то же самое во второй четверти, его средний балл за вторую четверть увеличился на b. На сколько в итоге увеличился его средний балл за первое полугодие?

Задача Д33. Определите отношение двух положительных чисел, если отношение их среднего арифметического к среднему геометрическому равно 25 : 24.

Задача Д34*. Равноускоренно движущийся автомобиль увеличивает свою скорость на прямолинейном участке дороги с v_1 до v_2. Найдите скорость автомобиля в середине этого участка.

Задача Д35. Из пункта A в пункт B ползут два жука и возвращаются обратно. Первый жук прополз в обе стороны с одинаковой скоростью. Второй полз в B в 1,5 раза быстрее, чем первый, а обратно в 1,5 раза медленней. Какой жук вернулся в пункт A раньше?

Задача Д36. Два катера, имеющие одинаковую скорость в стоячей воде, проходят по двум рекам одинаковые расстояния и возвращаются обратно. В какой из рек такое движение потребует меньше времени: с быстрым течением или с более медленным?

Задача Д37. Докажите, что среди всех прямоугольных треугольников с данной гипотенузой равнобедренный треугольник имеет и наибольшую площадь, и наибольший периметр.

Задача Д38. На окружности были последовательно выбраны точки A, B, C и D. Хорды AC и BD пересекаются в точке P. Найдите угол APB, если угловые величины дуг AB и CD равны α и β соответственно.

Задача Д39. Внутри угла расположены две окружности с центрами A и B. Они касаются друг друга и двух сторон угла. Докажите, что окружность с диаметром AB также касается сторон угла.

Задача Д40*. Из точки K — середины стороны BC треугольника ABC — восставлен перпендикуляр к этой стороне, который пересекает окружность, описанную около треугольника, в точке D (точки D и A лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC). Докажите, что $KD = \frac{r_b + r_c}{2}$, где r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон AC и AB.

Задача Д41. Докажите, что стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда котангенсы его половинных углов составляют арифметическую прогрессию.

Задача Д42. Докажите, что в разностном треугольнике средний по величине угол не больше чем 60°.

Задача Д43. Стороны треугольника связаны соотношением $b = \frac{a + c}{2}$. Докажите, что $ac = 6Rr$ (R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей этого треугольника соответственно).

Задача Д44. Стороны треугольника ABC связаны соотношением $AC = \dfrac{AB + BC}{2}$. Докажите, что сумма расстояний от любой точки биссектрисы B данного треугольника до его сторон равна высоте треугольника, проведённой к стороне AC.

Задача Д45. В египетском треугольнике ABC (угол C — прямой, BC — меньший катет) найдите угол BOI (точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей соответственно).

Задача Д46. Докажите, что длина медианы треугольника меньше среднего арифметического длин сторон, между которыми она проведена.

Задача Д47*. Четырёхугольник $ABCD$ — вписанный. Докажите, что если $AD = BD$, то $\dfrac{AC + BC}{2} < AD$.

Задача Д48*. Пусть H — ортоцентр (точка пересечения высот) остроугольного треугольника ABC, R — радиус окружности, описанной около этого треугольника. Докажите, что $\dfrac{AH + BH + CH}{3} \leqslant R$.

Задача Д49*. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ каждую из противолежащих сторон AB и CD разделили на три равные части и соответствующие точки деления соединили. Найдите площадь средней части, если $S_{ABCD} = Q$.

Задача Д50. Углы некоторого треугольника составляют арифметическую прогрессию. Докажите, что если стороны этого треугольника составляют а) арифметическую; б) геометрическую прогрессию, то этот треугольник — равносторонний.

Задача Д51. Определите острый угол ромба, в котором сторона равна среднему геометрическому его диагоналей.

Задача Д52. Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена высота CD. Точки E и

F — основания перпендикуляров, опущенных из точки D на катеты AC и BC соответственно. Докажите, что $CD = \sqrt[3]{AB \cdot AE \cdot BF}$.

Задача Д53. В угол C вписана окружность, касающаяся его сторон в точках A и B. Из точки P, лежащей на большей дуге AB окружности, опущены перпендикуляры PK, PM и PN на прямые AB, AC и BC соответственно. Докажите, что отрезок PK является средним геометрическим отрезков PM и PN.

Задача Д54. Из точки T провели к окружности касательную TA и секущую, пересекающую окружность в точках B и C. Биссектриса угла ATC пересекает хорды AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что отрезок AP является средним геометрическим отрезков PB и QC.

Задача Д55. Серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC треугольника ABC пересекают высоту CH (или её продолжение) в точках P и Q соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $CP = p$, $CQ = q$.

Задача Д56*. Через две вершины разностороннего треугольника и центр вписанной в него окружности проведена окружность. Докажите, что отрезок касательной, проведённой к этой окружности из третьей вершины, есть среднее геометрическое между сторонами треугольника, сходящимися в этой вершине.

Задача Д57. Дан четырёхугольник $ABCD$. Оказалось, что окружность, описанная около треугольника ABC, касается стороны CD, а окружность, описанная около треугольника ACD, касается стороны AB. Докажите, что диагональ AC не больше, чем расстояние между серединами сторон AB и CD.

Задача Д58*. Дан тупоугольный треугольник ABC. На стороне AC, лежащей против тупого угла, укажите такие точки D, что отрезок BD является средним геометрическим отрезков AD и CD.

Задача Д59. В треугольнике, длины двух сторон которого равны a и b, проведена высота к третьей стороне. При каком соотношении между a и b она может являться средним геометрическим двух других высот этого треугольника?

Задача Д60. Из точки D, лежащей на стороне AB треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум другим сторонам, которые пересекают стороны AC и BC в точках E и F соответственно. Найдите площадь треугольника CEF, если площади треугольников BDF и ADE равны S_1 и S_2.

Задача Д61. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, K — такая точка на высоте AD, что $\angle BKC = 90^\circ$. Докажите, что $S_{BKC} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{BHC}}$.

Задача Д62*. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Касательные к ней в точках A, B и C попарно пересекаются в точках M, K и L. Точки D, E и F — основания высот треугольника ABC. Докажите, что $S_{ABC} = \sqrt{S_{MKL} \cdot S_{DEF}}$.

Задача Д63. Докажите, что треугольник, составленный из высот треугольника ABC, является гармоническим тогда и только тогда, когда треугольник ABC является разностным.

Задача Д64. Квадрат вписан в треугольник ABC так, что две его вершины лежат на стороне BC, а две другие — на сторонах AB и AC. Найдите сторону квадрата, если известно, что $BC = a$, а высота треугольника, проведённая из вершины A, имеет длину h.

Задача Д65. Докажите, что биссектриса треугольника меньше среднего гармонического сторон, между которыми она проведена.

Задача Д66. Биссектриса AD треугольника ABC равна половине среднего гармонического сторон AC и BC. Найдите угол A треугольника.

Задача Д67. Докажите, что если ортоцентр H остроугольного треугольника ABC лежит на отрезке KL, соединяющем основания биссектрис, проведенных из вершин A и C, то: а) $\frac{1}{BH}=\frac{1}{AH}+\frac{1}{CH}$; б)* $\frac{1}{\cos\angle B}=\frac{1}{\cos\angle A}+\frac{1}{\cos\angle C}$.

Задача Д68. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят каждую боковую сторону на отрезки m и n, считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные сторонам треугольника. Найдите длины отрезков касательных, заключённых между сторонами треугольника.

Задача Д69. Докажите, что треугольник одновременно является: а) разностным и гармоническим; б) разностным и автомедианным; в) гармоническим и автомедианным тогда и только тогда, когда он равносторонний.

Задача Д70. Докажите, что в любом треугольнике отношение площади треугольника, составленного из его медиан, к площади самого треугольника равно $\frac{3}{4}$.

Задача Д71. Длина медианы, проведённой из вершины B треугольника ABC, равна m. Оказалось, что основание этой медианы, середины двух других медиан и точка пересечения медиан лежат на одной окружности. Найдите AC.

Задача Д72. В треугольнике ABC точки A' и C' — середины сторон BC и AB соответственно. Точки K и L — основания перпендикуляров, опущенных из A' на AB и AC, а точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных из C' на BC и AC. Докажите, что $KL = MN$ тогда и только тогда, когда треугольник ABC равнобедренный (с основанием AC) или автомедианный (со средней по длине стороной AC).

Задача Д73*. Две окружности пересекаются в точках P и Q, AB — их общая касательная (A и B — точки касания). Оказалось, что Q — точка пересечения медиан треугольника ABP. Докажите, что отрезок AB является средним квадратичным отрезков AP и BP.

Задача Д74. Докажите, что треугольник ABC является автомедианным (со средней по длине стороной AC) тогда и только тогда, когда $\cos 2\angle B = \dfrac{\cos 2\angle A + \cos 2\angle C}{2}$.

Задача Д75*. В плоскости треугольника ABC найдите геометрическое место точек X, для которых выполняется равенство $XB = \sqrt{\dfrac{XA^2 + XC^2}{2}}$.

Задача Д76. Рёбра PA, PB и PC тетраэдра $PABC$ имеют длины 1, 2 и 3. Может ли длина медианы PQ этого тетраэдра равняться двум?

Задача Д77. Точки D, E и F лежат на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC и делят их в одном и том же отношении (при одном направлении обхода). Докажите, что центроид треугольника DEF совпадает с центроидом треугольника ABC.

Задача Д78. Известно, что T_1 — центроид системы точек A_1, A_2, ..., A_n; T_2 — центроид системы точек B_1, B_2, ..., B_k; T — центроид системы точек A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_k. Докажите, что точка T лежит на отрезке T_1T_2 и $\dfrac{TT_1}{TT_2} = \dfrac{k}{n}$.

Задача Д79. Найдите положение центроида: а) четырёхугольной призмы; б) правильной n-угольной пирамиды.

Задача Д80. а) На берегу озера растут шесть сосен. Известно, что если взять два треугольника так, чтобы вершины одного из них находились в основаниях трёх сосен, а вершины другого — в основаниях трёх других сосен, то в середине отрезка, соединяющего точки пересечения медиан этих треугольников, на дне озера находится клад. Неизвестно только, каким образом разбивать данные шесть точек на две тройки. Сколько раз придётся опуститься на дно озера, чтобы наверняка отыскать клад?

б)* Ответьте на аналогичный вопрос, если известно, что озеро круглое, а клад находится в середине отрезка, соединяющего ортоцентры (*точки пересечения высот*) треугольников.

Задача Д81. Рассмотрим произвольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Точка N — центр симметрии его грани $DD'C'C$. В каком отношении плоскость $A'BD$ делит отрезок AN?

Задача Д82. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC равны a и b ($a > b$). Боковые стороны трапеции разделили на n равных частей и соответствующие точки деления соединили. Получившиеся отрезки пронумеровали числами от 1 до $n-1$ (считая от меньшего основания). Найдите длину отрезка с номером k.

Задача Д83. Дан параллелограмм $ABCD$ и плоскость α, не пересекающая его. Расстояния от вершин A, B и C до α равны соответственно a, b и c. Найдите расстояние от вершины D до плоскости α.

Задача Д84*. На трёх параллельных прямых выбраны сонаправленные векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$. Докажите, что объём выпуклого многогранника $ABCA_1B_1C_1$ можно вычислить по формуле $V = \dfrac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{3} \cdot S$, где S — площадь треугольника, вершины которого являются точками пересечения данных прямых и перпендикулярной им плоскости.

Задача Д85. В усечённом конусе проведено сечение, параллельное основаниям. Выразите радиус R этого сечения через радиусы R_1 и R_2 оснований конуса, если площадь сечения равна: а) среднему арифметическому; б) среднему гармоническому; в) среднему геометрическому; г) среднему квадратичному площадей оснований.

Задача Д86. В усечённом конусе проведено сечение, параллельное основаниям и разбивающее этот конус на два усечённых конуса равного объема. Найдите радиус сечения, если радиусы оснований данного конуса равны R_1 и R_2.

Указания к решениям задач и краткие решения

Д1. Ответ: 380 г.

Решение задачи полностью аналогично решению задачи 1.1.

Д2. Ответ: 70 г.

Решение задачи полностью аналогично решению задачи 1.2.

Д3. Из условия задачи следует, что сумма чисел, выбранных Васей, равна $6{,}35 \cdot 35$, то есть не целому числу, а сумма целых чисел должна быть целой.

Д4. Ответ: 3 км/ч.

Длина маршрута составляет $10+8+6=24$ (км). Время движения туриста равно $10:5+8:1{,}6+6:6=8$ (ч). Следовательно, его средняя скорость равна $24:8=3$ (км/ч).

Д5. Ответ: 32 года.

Сумма возрастов одиннадцати футболистов равна $11 \times 22 = 242$ года. После того, как один игрок ушёл, сумма возрастов стала $10 \cdot 21 = 210$ лет. Вычислив разницу, получим, что ушедшему игроку было 32 года (сравните с задачей 1.9).

Д6. Ответ: 40 л первого раствора и 100 л второго.

Решение задачи аналогично решению задачи 1.6.

Д7. Ответ: 76%.

Первый способ. Пусть делегация состоит из x спортсменов и y чиновников, тогда суммарный возраст всех спортсменов равен $22x$, а чиновников — $47y$. Делегация насчитывает $x+y$ человек, поэтому её суммарный возраст равен $41(x+y)$. Получим уравнение $22x+47y=41(x+y)$.

Упростив его, получим, что $6y = 19x$. Доля чиновников, выраженная в процентах, равна

$$\frac{y}{x+y} \cdot 100\% = \frac{6y}{6x+6y} \cdot 100\% = \\ = \frac{19x}{6x+19x} \cdot 100\% = \frac{19}{25} \cdot 100\% = 76\%.$$

Второй способ. Средний возраст всех членов делегации является взвешенным средним арифметическим чисел 22 и 47. Число 41 делит отрезок [22; 47] в отношении 19 : 6, считая от 22. Значит, отношение количества чиновников к количеству спортсменов будет обратным, то есть 6 : 19. Поэтому доля чиновников составляет $\frac{19}{25}$ от всех членов делегации, то есть 76% (*сравните с задачами* 1.6 *и* 1.12).

Д8. Ответ: 15 ничьих.

Общая сумма очков, набранных командами, равна $12 \times \times 10 = 120$. Всего в турнире было сыграно $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ матчей. Заметим, что в каждом матче в случае выигрыша одной из команд в общую сумму очков добавляется 3 очка, а в случае ничьей — 2 очка. Наибольшая сумма очков, которую могли набрать команды, равна $45 \cdot 3 = 135$. Так как команды набрали на $135 - 120 = 15$ очков меньше, 15 матчей закончились вничью.

Д9. Ответ: 5 троек.

Условие задачи удобно записать в виде таблицы:

Оценки	«3»	«4»	«5»
Вася	x	y	z
Коля	z	x	y

Тогда равенство средних баллов Васи и Коли (при одинаковом количестве оценок) означает, что $3x + 4y + 5z = = 3z + 4x + 5y$, следовательно, $x + y = 2z$. Так как $x + y + z = = 15$, то $3z = 15$, то есть $z = 5$.

Д10. Ответ: на 23 см.

Пусть рост самого высокого ученика класса равен x см, самого низкого — y см, а суммарный рост остальных учеников равен S см. Если количество учеников в классе равно $n+1$, то $\frac{S+y}{n} = 148\frac{3}{4}$ и $\frac{S+x}{n} = 149\frac{4}{7}$. Вычитая из второго уравнения первое и умножая обе части получившегося уравнения на n, получим $x-y = \frac{23n}{28}$. По условию числа x и y целые, значит, число $x - y$ также целое. Учитывая, что n — натуральное число, не превосходящее 30, получим, что $n = 28$, следовательно, $x - y = 23$.

Д11. Ответ: $\frac{2}{3}(a + b + c) - d$.

Пусть x — среднее арифметическое чисел, записанных во втором столбце. Так как в каждой строке записано одинаковое количество чисел, среднее арифметическое всех чисел в таблице равно $\frac{a+b+c}{3}$. В столбцах также поровну чисел, поэтому среднее арифметическое всех чисел в таблице равно также $\frac{d+x}{2}$. Из уравнения $\frac{d+x}{2} = \frac{a+b+c}{3}$ получим, что $x = \frac{2}{3}(a + b + c) - d$.

Д12. Ответ: на год.

Решение задачи полностью аналогично решению задачи 2.1.

Д13. Ответ: 0.

$$\frac{(a_1 - m) + (a_2 - m) + \ldots + (a_n - m)}{n} =$$
$$= \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - mn}{n} = \frac{mn - mn}{n} = 0.$$

Полученный результат можно сформулировать так: среднее отклонение от среднего арифметического равно нулю (так же как и сумма отклонений). Для двух чисел — см. рисунок к задаче 1.4. См. также комментарий к задаче 2.1.

Д14. Ответ: 70 очков.

Третий стрелок выбил $(60+80) : 2 = 70$ очков. Каждый следующий также выбил по 70 очков (см. задачу 2.9).

Д15. Ответ: нет, не может.

Предположим противное, тогда, вычислив сумму всех чисел таблицы исходя из столбцов, получим, что эта величина положительна, а вычислив ту же сумму исходя из строк, получим, что она отрицательна.

Вместо суммы всех чисел таблицы можно вычислять их среднее арифметическое (сравните с задачей Д11).

Д16. Ответ: да, мог.

Если IQ этих учёных был ниже, чем средний IQ в стране P, но выше, чем средний IQ в стране A, то так и произойдёт (сравните с задачей 2.3).

Д17. Ответ: да, мог.

Такое могло быть, например, если в классе Боба много мальчиков и мало девочек, а в классе Вани — наоборот и при этом средний рост одноклассников Боба больше, чем средний рост одноклассниц Вани.

Приведём числовой пример. Пусть в классе Боба 5 девочек, средний рост которых 140 см, и 20 мальчиков, средний рост которых 150 см, а в классе Вани 20 девочек, средний рост которых 142 см, и 5 мальчиков, средний рост которых 152 см. Тогда средний рост в классе Боба равен $(140 \cdot 5 + 150 \cdot 20) : 25 = 148$ (см), а средний рост в классе Вани равен $(142 \cdot 20 + 152 \cdot 5) : 25 = 144$ (см) (*сравните с задачей* 2.4).

Д18. *Решение задачи полностью аналогично решению задачи* 2.5. *Отметим также, что среднее арифметическое в условиях этих задач можно заменить на любое другое среднее.*

Д19. Ответ: нет, не верно.

Пусть, например, улитка двигается так: первые полчаса отдыхает, потом за полчаса проползает один метр, потом опять полчаса отдыхает и так далее. Рассмотрим первые 1,5 часа её движения. За это время она проползёт

1 метр, значит, её средняя скорость равна $\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$ метра в час (*сравните с задачей* 2.12).

Д20. Ответ: нет, не может.

Пусть это не так и n — наименьшее среди таких чисел. Так как среднее арифметическое различных чисел больше наименьшего из них, оно больше n, а наибольший общий делитель не превосходит n — противоречие.

Д21. Упорядочим выписанные числа по возрастанию: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{100}$. Пусть $m = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$, $k = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$, тогда $m < k$. Действительно, $m < a_3 < a_4$, значит, в набор из трёх чисел добавлено число a_4, большее, чем m — их среднее арифметическое, что приводит к увеличению среднего арифметического. Очевидно, что среднее арифметическое любого другого набора из четырёх записанных чисел, больше чем k.

Д22. Упорядочим записанные числа по возрастанию: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Будем двигаться слева направо по этой строке, до тех пор пока не дойдём до знака строгого неравенства (если такого нет, то все числа равны). Пусть, например, $a_{k-1} = a_k < a_{k+1}$, тогда среднее арифметическое этих трёх чисел больше, чем a_k, но меньше, чем a_{k+1}. Значит, среди записанных чисел его нет.

Остается рассмотреть случай, когда $a_1 < a_2 \leqslant a_3$. Если $a_2 = a_3$, то среднее арифметическое чисел a_1, a_2 и a_3 больше, чем a_1, но меньше, чем a_2, поэтому оно не может быть записано на доске. Значит, $a_1 < a_2 < a_3$, и среднее арифметическое этих чисел равно a_2. В этом случае рассмотрим средние арифметические двух троек чисел a_1, a_2, a_4 и a_1, a_3, a_4. Если $a_4 = a_3$, то среднее арифметическое первой тройки чисел равно a_2, а среднее арифметическое второй тройки чисел больше, чем a_2, но меньше, чем a_3, — противоречие с условием. Если же $a_3 < a_4$, то условие задачи может выполняться только в случае, когда у каждой из рассматриваемых троек чисел среднее арифметическое равно a_3, но это невозможно, так как среднее арифметическое второй тройки чисел больше, чем первой.

Таким образом, остается принять, что все записанные числа равны.

Д23. Докажем, что при всех натуральных k от 1 до 100 выполняется неравенство $a_k \leqslant k$ (из чего и следует утверждение задачи). Для этого рассмотрим числа вида $b_k = a_k - k$ и докажем, что среди них нет положительных чисел. Действительно, $b_1 = b_{100} = 0$, а для остальных значений k верно, что

$$b_k = a_k - k \leqslant \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} - k = \frac{(a_{k-1} - (k-1)) + (a_{k+1} - (k-1))}{2} = \frac{b_{k-1} + b_{k+1}}{2}.$$

Пусть среди таких чисел есть положительные, тогда выберем наибольшее из них — b_m и рассмотрим два соседних с ним числа: b_{m-1} и b_{m+1}. Каждое из этих чисел не превосходит b_m, но $\frac{b_{m-1} + b_{m+1}}{2} \geqslant b_m$, значит, $b_{m-1} = b_m = b_{m+1}$. Проводя аналогичное рассуждение и двигаясь таким образом к краю, получим противоречие.

Д24. Ответ: при чётных n.

Сумма всех натуральных чисел от 1 до n равна $\frac{(n+1)n}{2}$, а их среднее арифметическое равно $\frac{n+1}{2}$. Значит, в любой расстановке при нечётных значениях n среднее арифметическое всех чисел будет целым, то есть условие задачи выполняться не будет. Если же число n — чётное, то числа можно расставить так: $2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots, n, n-1$. Докажем, что предъявленная расстановка удовлетворяет условию задачи. Заметим, что числа, стоящие в ней на чётных местах, на 1 меньше своего номера, а числа, стоящие на нечётных местах — на 1 больше своего номера. Значит, сумма подряд стоящих чисел будет равна сумме номеров, если количество чисел чётно, и будет на 1 отличаться от суммы номеров, если количество чисел нечётно.

Но последовательность номеров — это натуральные числа от 1 до n, взятые в порядке возрастания. Среднее арифметическое k номеров подряд, начиная с номера m, равно $\frac{m+(m+k-1)}{2k}\cdot k=\frac{2m+k-1}{2}$. При чётном k оно полуцелое, и, ввиду равенства сумм, совпадает со средним арифметическим в предъявленной расстановке. При нечётном k среднее арифметическое номеров — целое, но сумма чисел отличается от суммы номеров на 1, поэтому среднее арифметическое в предъявленной расстановке отличается от целого числа на $\frac{1}{k}$, то есть опять-таки не является целым.

Д25. Ответ: а) 6 см (*среднее геометрическое чисел* 9 *и* 4); б) 6 дм (*среднее геометрическое чисел* 2, 9 *и* 12).

а) $x^2=9\cdot 4=6^2$, где x — длина стороны квадрата (*в общем виде* $x=\sqrt{ab}$); б) $x^3=2\cdot 9\cdot 12=6^3$, где x — длина ребра куба (*в общем виде* $x=\sqrt[3]{abc}$).

Д26. Ответ: 6 км/ч.

Пусть V км/ч — искомая скорость, S км — половина пути лошади, тогда $\frac{S}{12}+\frac{S}{4}=\frac{2S}{V}$, а значит, $V=6$ (*среднее гармоническое чисел* 4 *и* 12; *сравните с задачей* 3.2).

Д27. Ответ: 72%.

Первый способ («арифметический»). Представим себе, что из каждого аппарата идёт две трубки, из одной течёт чистый спирт, из другой — вода, а перемешивание происходит в конце. Пусть объём бутыли равен 100 стаканам. Крепость k означает, что чистого спирта налилось как раз k стаканов. Из условия задачи следует, что каждый из самогонных аппаратов Труса, Балбеса и Бывалого закачивает за 1 час ровно один стакан чистого спирта. Таким образом, за 24 часа три аппарата закачают в бутыль 72 стакана чистого спирта, а значит, крепость полученной жидкости (после смешивания с водой) будет 72%.

Второй способ («алгебраический»). Самогонный аппарат Труса наполняет за час $\frac{1}{a}$ часть бутыли, Балбеса —

$\frac{1}{b}$ часть бутыли, а Бывалого — $\frac{1}{c}$ часть бутыли. Поскольку вся бутыль наполнилась за сутки, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ составляет $\frac{1}{24}$ часть бутыли. При этом в жидкости, выработанной за 1 час, спирт будет составлять $\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{100}+\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{100}+\frac{1}{c}\cdot\frac{c}{100}=\frac{3}{100}$ от всей бутыли.

Следовательно, в итоговом продукте содержание спирта составит $\frac{3}{100}:\frac{1}{24}=\frac{72}{100}$ части бутыли, то есть крепость получившейся смеси равна 72%.

Отметим, что если не учитывать условие, что втроём друзья наполнили бутыль за сутки, то получим ответ

$$\frac{3}{100}:\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot 100=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{3abc}{ab+bc+ca}\ (\%),$$

то есть среднее гармоническое чисел a, b и c. В случае, когда a, b и c связаны условием $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{24}$, это выражение приводит к ответу 72%.

Д28. Ответ: 2 часа.

Пусть до встречи Аня и Боря шли t часов. Время, затраченное пешеходами на каждом из участков AC и BC (C — место встречи), обратно пропорционально их скоростям (*см. задачу* 3.6), поэтому, $t : 1 = V_B : V_A = 4 : t$, откуда $t = 2$ (*среднее геометрическое чисел* 1 *и* 4).

Д29. Ответ: в три раза.

Пусть Карлсон ест в n раз быстрее Малыша. Поскольку печенья они съели поровну, Малышу на то, чтобы съесть печенье, понадобилось в n раз больше времени, чем Карлсону. Поскольку они начали и закончили одновременно, а в какой-то момент поменялись, Карлсон ел варенье столько же времени, сколько Малыш — печенье, и наоборот. Значит, варенье Карлсон ел в n раз дольше, чем его ел Малыш. Следовательно, Карлсон съел варенья в $n\cdot n = n^2$ раз больше, чем Малыш. Таким образом, $n^2 = 9$, то есть $n = 3$ (*среднее геометрическое чисел* 9 *и* 1; *сравните с задачами* 3.6 *и* Д25).

Д30. Ответ: прав Ваня.

Продавец, по-видимому, нашёл среднее арифметическое цен: $(40 + 60 + 120) : 3 = 73\frac{1}{3}$ (руб.), но не учёл, что конфеты разного сорта войдут в смесь в разных количествах.

Ванина же логика такова: пусть S рублей — стоимость конфет каждого сорта, тогда всего конфет привезли $\frac{S}{40} + \frac{S}{60} + \frac{S}{120} = \frac{S}{20}$ (кг). Следовательно, 1 кг смеси должен стоить $3S : \frac{S}{20} = 60$ (руб.) — *среднее гармоническое чисел* 40, 60 *и* 120 (*сравните с задачей* 3.10).

Д31. Ответ: 10.

Заметим, что произведение чисел, записанных на доске, не изменяется. Действительно, если в какой-то день на доске записаны числа a и b, то на следующий день будут записаны числа $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{2ab}{a+b}$. При этом $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab$. Поэтому искомое произведение равно изначальному: $5 \cdot 2 = 10$.

Д32. Ответ: на $\frac{2ab}{a+b}$.

Пусть у Вовочки в первой четверти было m оценок, а во второй четверти — n оценок. Из условия задачи следует, что $a = \frac{1}{m}$, $b = \frac{1}{n}$. Следовательно, за полугодие средний балл Вовочки увеличился на $\frac{2}{m+n} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$ (*среднее гармоническое чисел* a *и* b).

Д33. Ответ: меньшее относится к большему как 9 : 16.

Пусть x и y — искомые числа. По условию

$$\frac{x+y}{2\sqrt{xy}} = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{25}{12}.$$

Сделав замену переменных $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = c$, получим квадратное уравнение $12c^2 - 25c + 12 = 0$, корнями которого являются числа $\dfrac{3}{4}$ и $\dfrac{4}{3}$. Следовательно, $x : y = 9 : 16$ или $x : y = 16 : 9$.

Д34. Ответ: $v = \sqrt{\dfrac{v_1^2 + v_2^2}{2}}$.

Пусть v — искомая скорость автомобиля в середине участка, t — время, за которое автомобиль преодолел половину пути, T — время, за которое он проделал весь путь. Далее рассмотрим два способа решения задачи: «физический» и «геометрический».

Первый способ («физический»). Рассмотрим координатную прямую, направление которой совпадает с направлением движения автомобиля, а начало отсчёта совпадает с началом рассматриваемого участка дороги. Тогда $v = v_1 + at$ и $v_2 = v_1 + aT$, где a — ускорение движения. Выражая из каждого уравнения время, получим $t = \dfrac{v - v_1}{a}$; $T = \dfrac{v_2 - v_1}{a}$.

Пусть S — длина половины участка, тогда $S = v_1 t + \dfrac{at^2}{2}$ и $2S = v_1 T + \dfrac{aT^2}{2}$. Выражая S и приравнивая получившиеся выражения, имеем $\dfrac{v_1 T}{2} + \dfrac{aT^2}{4} = v_1 t + \dfrac{at^2}{2} \Leftrightarrow 2v_1(T - 2t) = a(2t^2 - T^2)$. Подставляя в это уравнение найденные значения t и T, получим:

$$2v_1\left(\frac{v_2 - v_1}{a} - \frac{2v - 2v_1}{a}\right) = a\left(\frac{2(v - v_1)^2}{a^2} - \frac{(v_2 - v_1)^2}{a^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2v_1(v_2 + v_1 - 2v) = 2(v - v_1)^2 - (v_2 - v_1)^2 \Leftrightarrow v^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2}$$

Следовательно, $v = \sqrt{\dfrac{v_1^2 + v_2^2}{2}}$ — *среднее квадратичное данных скоростей.*

Второй способ («геометрический»). Рассмотрим график зависимости скорости автомобиля от времени на заданном участке, считая, что v_1 — начальная скорость автомобиля (см. рис. 1). Тогда путь, пройденный автомобилем в каждый момент времени, равен площади трапеции, ограниченной построенным графиком, осями координат и вертикальной прямой, соответствующей выбранному моменту времени.

Путь, пройденный за время t, в два раза меньше пути, пройденного за время T, то есть искомая скорость равна длине отрезка, параллельного основаниям трапеции и делящего её площадь пополам. Его длина равна среднему квадратичному длин оснований трапеции (*см. задачу* 5.2), то есть $v = \sqrt{\dfrac{v_1^2 + v_2^2}{2}}$.

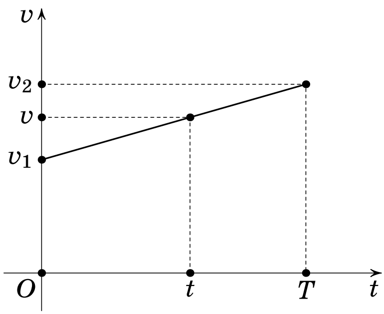


Рис. 1

Д35. Ответ: первый жук вернулся раньше.

Первый жук затратил на весь путь время $t_1 = \dfrac{2S}{V} = \dfrac{12S}{6V}$, тогда как второй жук затратил время $t_2 = \dfrac{2S}{3V} + \dfrac{3S}{2V} = \dfrac{13S}{6V}$; $t_1 < t_2$ (*сравните с задачей* 4.6).

Д36. Ответ: с более медленным течением.

Различные способы решения этой задачи аналогичны способам решения задачи 4.9.

Д37. *Решение задачи полностью аналогично решению задачи* 4.11.

Д38. Ответ: $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Проведём хорду AD (см. рис. 2), тогда угол APB — внешний для треугольника APD, значит, $\angle APB = \angle PDA + \angle PAD = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ — *среднее арифметическое данных величин.*

Отметим, что если точка P лежит вне окружности, то аналогично доказывается, что $\angle APB = \dfrac{|\alpha-\beta|}{2}$.

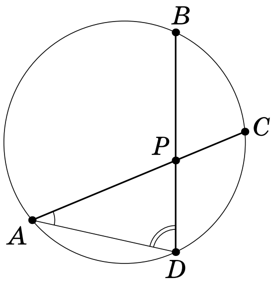


Рис. 2

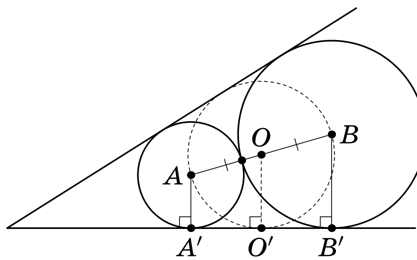


Рис. 3

Д39. Пусть радиусы данных окружностей равны r и R, тогда $AB = r + R$ (см. рис. 3). Центр O окружности с диаметром AB лежит на биссектрисе данного угла, значит, точка O равноудалена от сторон угла.

Пусть A', O' и B' — основания перпендикуляров, опущенных из точек A, O и B соответственно на одну из сторон угла, тогда, так как OO' — средняя линия трапеции $AA'B'B$, то $OO' = \dfrac{AA'+BB'}{2} = \dfrac{r+R}{2} = \dfrac{1}{2}AB$. Следовательно, окружность с центром O и радиусом, равным половине AB, касается сторон угла.

Д40. Пусть W — вторая точка пересечения прямой KD и описанной окружности, тогда DW — диаметр окружности, значит, $\angle DAW = 90^\circ$ (см. рис. 4). Кроме того, AW — биссектриса угла BAC, поэтому биссектрисы внешних углов треугольника при вершине A лежат на прямой AD, следовательно, на этой прямой лежат и центры O_b и O_c

указанных вневписанных окружностей. Опустим перпендикуляры O_cB_0 и O_bC_0 на прямую BC, тогда $O_cB_0 = r_c$, $O_bC_0 = r_b$. Таким образом, $O_bO_cB_0C_0$ — трапеция, и утверждение задачи равносильно тому, что отрезок KD является её средней линией.

Пусть O_cT — радиус вневписанной окружности, проведённый к стороне AB, N — точка касания этой стороны и окружности, вписанной в треугольник ABC, тогда $BB_0 = BT = AN = p - a$ ($BC = a$, p — полупериметр треугольника ABC). Аналогично получим, что $CC_0 = p - a = BB_0$. Кроме того, $BK = CK$, поэтому K — середина отрезка B_0C_0. Учитывая, что $KD \parallel O_cB_0 \parallel O_bC_0$, получим требуемое утверждение.

Отметим, что если треугольник ABC — равнобедренный ($AB = AC$), то точки A и D совпадают. В этом случае утверждение задачи также выполняется, так как $r_b = r_c = KD$.

Соотнеся доказанное утверждение с решением задачи 8.8, можно получить ещё один пример двух средних на одном чертеже.

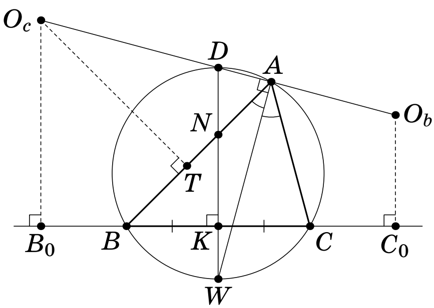


Рис. 4

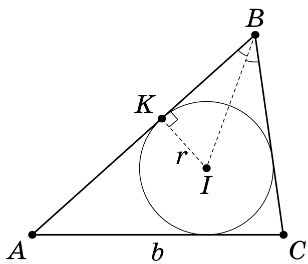


Рис. 5

Д41. Рассмотрим треугольник ABC и окружность с центром I и радиусом r, вписанную в него (см. рис. 5). Пусть K — точка касания этой окружности со стороной AB, тогда $BK = p - b$, где p — полупериметр треугольника ABC. Из прямоугольного треугольника BIK: $\operatorname{ctg}\dfrac{\angle B}{2} = \dfrac{p-b}{r}$. Аналогично $\operatorname{ctg}\dfrac{\angle A}{2} = \dfrac{p-a}{r}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\angle C}{2} = \dfrac{p-c}{r}$. Так как $\dfrac{p-a}{r} + \dfrac{p-c}{r} =$

$= \dfrac{2p-(a+c)}{r} = \dfrac{2p-2b}{r} \Leftrightarrow 2b = a+c$, числа a, b и c составляют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда числа $\dfrac{p-a}{r}$, $\dfrac{p-b}{r}$ и $\dfrac{p-c}{r}$ составляют арифметическую прогрессию.

Д42. Пусть стороны треугольника ABC связаны соотношением $b = \dfrac{a+c}{2}$, тогда средним по величине является угол B.

Первый способ. Так как $\operatorname{tg}\dfrac{\angle B}{2} = \dfrac{r}{p-b}$ (см. рис. 5) и $r = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{p} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, то $\operatorname{tg}\dfrac{\angle B}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$. По неравенству между средним геометрическим и средним арифметическим $\sqrt{(p-a)(p-c)} \leqslant \dfrac{p-a+p-c}{2} = \dfrac{b}{2}$. Учитывая, что в разностном треугольнике $p = \dfrac{3b}{2}$, получим $\sqrt{p(p-b)} = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$. Тогда $\operatorname{tg}\dfrac{\angle B}{2} \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, следовательно, $\dfrac{\angle B}{2} \leqslant 30^\circ$, то есть $\angle B \leqslant 60^\circ$.

Второй способ. Обозначим $a = b-d$, $c = b+d$ и вычислим косинус угла B, используя теорему косинусов:

$$\cos\angle B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{(b-d)^2+(b+d)^2-b^2}{2(b-d)(b+d)} = \\ = \frac{b^2+2d^2}{2b^2-2d^2} = \frac{1}{2} + \frac{3d^2}{2(b^2-d^2)} \geqslant \frac{1}{2},$$

так как второе слагаемое неотрицательно. Следовательно, $\angle B \leqslant 60^\circ$.

Д43. Используя то, что $r = \dfrac{1}{3}h_b$ (*см. задачу* 6.2) и формулы $S = \dfrac{1}{2}bh_b$ и $R = \dfrac{abc}{4S}$ (S — площадь данного треугольника), получим $6Rr = 6\cdot\dfrac{abc}{4S}\cdot\dfrac{h_b}{3} = ac\cdot\dfrac{bh_b}{2S} = ac$.

Отметим, что аналогичным образом доказывается и обратное утверждение, поэтому сформулированное в задаче условие является необходимым и достаточным условием того, чтобы треугольник ABC был разностным (см. занятие 6).

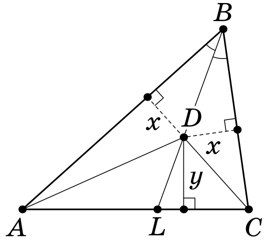


Рис. 6

Д44. Пусть D — произвольная точка биссектрисы BL треугольника ABC, тогда она равноудалена от сторон AB и BC. Пусть расстояния от точки D до сторон AB, BC и AC равны x, x и y соответственно (см. рис. 6).

Выразим двумя способами площадь треугольника ABC: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ADB} + S_{\triangle CDB} = \frac{1}{2}(AC \cdot y + AB \cdot x + BC \cdot x) = \frac{1}{2}AC \cdot h_b$. Из условия задачи следует, что $AB + BC = 2AC$, значит, $2x + y = h_b$, что и требовалось.

Отметим, что аналогичным образом доказывается и обратное утверждение, поэтому сформулированное в задаче условие является необходимым и достаточным условием того, чтобы треугольник ABC был разностным (см. занятие 6).

Д45. Ответ: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3} = \operatorname{arctg} 2$.

Поскольку египетский треугольник является разностным, точка I лежит на окружности с диаметром BO (*см. задачу* 6.5*а*), следовательно, $\angle BIO = 90^\circ$ (см. рис. 7). Так как BI — биссектриса угла ABC, то $\angle OBI = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, значит, $\angle BOI = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Получить ответ в более простом виде можно либо с помощью тригонометрических формул, либо вычисляя угол по-другому: если $BC = 3m$, $AC = 4m$, $AB = 5m$, то радиус вписанной окружности равен m (см. задачу 6.4). Пусть K — точка касания вписанной окружности и гипотенузы (см. рис. 7), тогда $OK = BO - BK = 0{,}5m$. Значит, $\operatorname{tg}\angle BOI = \operatorname{tg}\angle IOK = \frac{IK}{OK} = 2$.

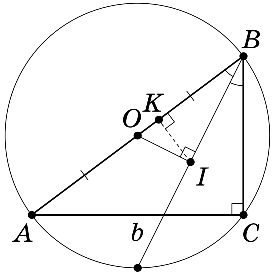


Рис. 7

Д46. Продлим медиану AM треугольника ABC на её длину и отметим точку D (см. рис. 8). Тогда $ABDC$ — параллелограмм (по признаку). Используя неравенство треугольника для треугольника ABD, получим $AD < AB + BD$. Учитывая, что $BD = AC$ и $AD = 2AM$, получим $AM < \dfrac{AB + AC}{2}$, что и требовалось доказать.

При решении можно также воспользоваться следствием из векторного равенства $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ (см. задачу 10.5).

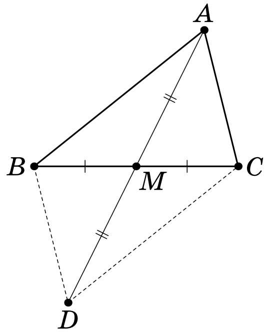


Рис. 8

Д47. *Первый способ.* Из равенства $AD = BD$ следует, что $\angle DBA = \angle DAB = \varphi$ (см. рис. 9а). Пусть точка B' симметрична точке B относительно прямой CD. Тогда $B'D = BD = AD$. Кроме того, если точка E лежит на продолжении стороны DC за точку C, то $\angle B'CE = \angle BCE = \varphi$ ($ABCD$ — вписанный). Следовательно, $\angle B'CB + \angle BCA = \angle B'CB + \angle BDA = 2\varphi + (180^\circ - 2\varphi) = 180^\circ$, то есть точка B' лежит на луче AC. В треугольнике $AB'D$: $AB' < AD + B'D$, значит, $\dfrac{AC + BC}{2} < AD$, что и требовалось.

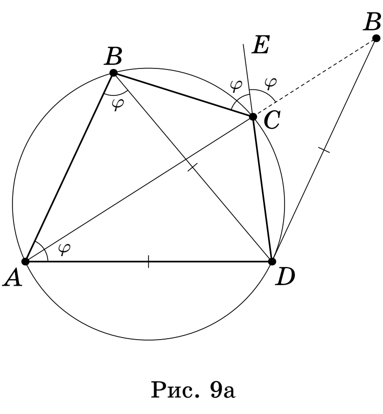


Рис. 9а

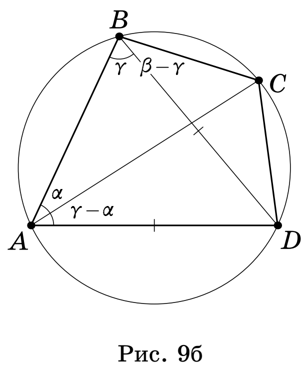


Рис. 9б

Второй способ. Пусть R — радиус данной окружности, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BAD = \angle ABD = \gamma$ (см. рис. 9б).

По следствию из теоремы синусов $BC = 2R\sin\alpha$, $AC = 2R\sin\beta$, $AD = 2R\sin\gamma$. Тогда доказываемое неравенство равносильно неравенству $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2} < \sin\gamma$. Так как $\beta - \gamma = \angle CBD = \angle CAD = \gamma - \alpha$, то $\frac{\alpha+\beta}{2} = \gamma$. Завершить доказательство можно по-разному:

1) $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\gamma\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} < \sin\gamma$, так как $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 1$;

2) учитывая, что углы α, β и γ лежат на интервале $(0; \pi)$ и график функции $y = \sin x$ расположен на этом промежутке выпуклостью вверх, получим, что $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2} < \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\gamma$ (***неравенство Йенсена***).

Доказанное неравенство можно интерпретировать следующим образом: если хорда AB окружности фиксирована, а точка C «бегает» по одной из дуг AB этой окружности, то периметр треугольника ABC будет наибольшим, если треугольник ABC — равнобедренный с основанием AB.

Д48. Докажем вспомогательное утверждение, которое называется ***формулой Карно***: в остроугольном треугольнике сумма расстояний от центра описанной окружности до сторон треугольника равняется сумме радиусов описанной и вписанной окружностей.

Воспользуемся двумя равенствами: 1) $M_1W = \frac{r_a - r}{2}$; 2) $M_1D = \frac{r_b + r_c}{2}$, где M_1 — середина стороны BC, W — точка пересечения биссектрисы угла BAC с окружностью, описанной около треугольника, D — точка, диаметрально противоположная точке W; r, r_a, r_b и r_c — радиусы вписанной и вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC и AB соответственно.

Докажем равенство 1). Пусть точки I и O_a соответственно — центры вписанной окружности и вневписанной окружности, касающейся стороны BC, K и P — точки касания этих окружностей с BC (см. рис. 10).

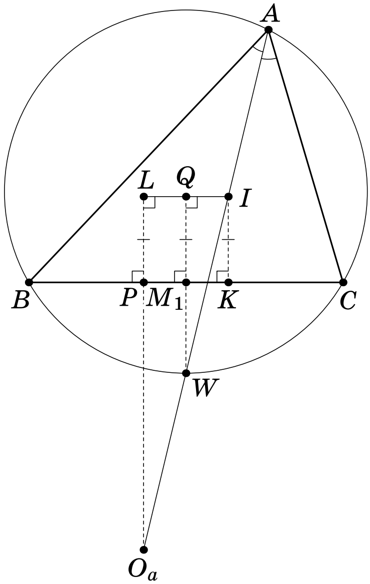


Рис. 10

Так как W — середина отрезка IO_a (следствие из теоремы «трилистника», *см. задачу* 6.1) и $WM_1 \parallel IK \parallel LO_a$, то WQ — средняя линия треугольника ILO_a (L и Q — проекции точек O_a и W на прямую, параллельную BC и проходящую через точку I). Следовательно, $WQ = \frac{1}{2}O_aL = \frac{r_a + r}{2}$, тогда $M_1W = WQ - M_1Q = \frac{r_a - r}{2}$.

Равенство 2) доказано в задаче Д40.

Из равенств 1) и 2) следует, что $\frac{r_a - r}{2} + \frac{r_b + r_c}{2} = 2R \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow r_a + r_b + r_c = r + 4R$. Обозначив через M_2 и M_3 середины сторон AC и AB и используя для этих точек равенства, аналогичные 1), получим

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 =$$
$$= \left(R - \frac{r_a - r}{2}\right) + \left(R - \frac{r_b - r}{2}\right) + \left(R - \frac{r_c - r}{2}\right) =$$
$$= 3R - \frac{r_a + r_b + r_c - 3r}{2} = 3R - \frac{r + 4R - 3r}{2} = R + r.$$

Далее используем равенство $AH = 2OM_1$ (*следует из того, что треугольник ABC гомотетичен своему «срединному» треугольнику с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом $k = -2$*). Аналогично $BH = 2OM_2$ и $CH = 2OM_3$. Тогда $AH + BH + CH = 2R + 2r \leqslant 3R$, так как в любом треугольнике $R \geqslant 2r$.

Следовательно, $\dfrac{AH + BH + CH}{3} \leqslant R$, что и требовалось.

Д49. Пусть отрезки NE и MF делят данный четырёхугольник $ABCD$ на три четырёхугольника (см. рис. 11). Проведём отрезки CN, EM и FA, а также опустим перпендикуляры NN', MM' и AA' на прямую CD. Эти перпендикуляры являются высотами в треугольниках CNE, EMF и FAD соответственно, проведёнными к равным сторонам. Пусть длины

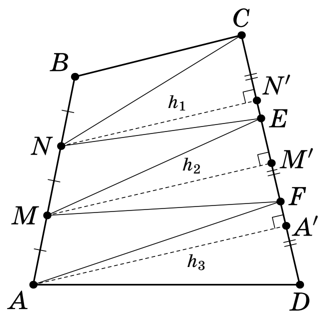


Рис. 11

этих высот равны h_1, h_2 и h_3 соответственно, тогда $S_{\triangle CNE} : S_{\triangle EMF} : S_{\triangle FAD} = h_1 : h_2 : h_3$. Отрезок MM' — средняя линия трапеции $ANN'A'$, поэтому $h_2 = \frac{1}{2}(h_1 + h_3)$. Следовательно, $(h_1;\ h_2;\ h_3)$ — арифметическая прогрессия, тогда $\left(S_{\triangle CNE};\ S_{\triangle EMF};\ S_{\triangle FAD}\right)$ — также арифметическая прогрессия. Аналогично доказывается, что $\left(S_{\triangle BCN};\ S_{\triangle NEM};\ S_{\triangle MFA}\right)$ — также арифметическая прогрессия. Поскольку сумма двух арифметических прогрессий является арифметической прогрессией, то и $\left(S_{BCEN};\ S_{NEFM};\ S_{MFDA}\right)$ — арифметическая прогрессия.

Следовательно, $S_{NEFM} = \frac{1}{2}\left(S_{BCEN} + S_{MFDA}\right) = \frac{Q}{3}$.

Отметим, что полученный в задаче результат можно обобщить: если каждую из двух противолежащих сторон выпуклого четырёхугольника разделить на n равных частей и соединить соответствующие точки деления, то площади образовавшихся четырёхугольников составляют арифметическую прогрессию.

Д50. Пусть углы α, β и γ треугольника таковы, что $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$, тогда, учитывая, что $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$, получим, что $\beta = 60^\circ$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, тогда $a \leqslant b \leqslant c$.

а) Обозначим $a = b - d$, $c = b + d$, тогда, по теореме косинусов $b^2 = (b+d)^2 + (b-d)^2 - 2(b+d)(b-d)\cos 60^\circ \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b^2 = 2b^2 + 2d^2 - b^2 + d^2 \Leftrightarrow d = 0$ (*сравните с решением задачи* Д.42.)

б) Обозначим $a = \dfrac{b}{q}$, $c = bq$, тогда по теореме косинусов $b^2 = b^2q^2 + \dfrac{b^2}{q^2} - 2bq \cdot \dfrac{b}{q} \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow q^2 + \dfrac{1}{q^2} = 2$. Учитывая, что $q > 0$, получим $q = 1$.

В обоих случаях треугольник — равносторонний.

Д51. Ответ: 30°.

Можно решать по аналогии с задачей 7.3, *но есть и другой способ*: пусть в ромбе $ABCD$ угол A — острый (см. рис. 12). Проведём высоту DH и выразим площадь ромба двумя способами: $AB \cdot DH = \dfrac{AC \cdot BD}{2}$. По условию $AB^2 = AC \cdot BD$, значит, $DH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}AD$. Из прямоугольного треугольника AHD получим, что $\angle BAD = 30^\circ$.

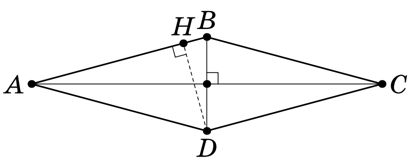


Рис. 12

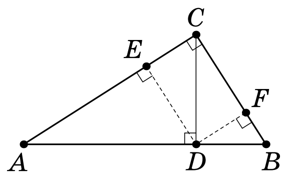


Рис. 13

Д52. Из прямоугольного треугольника ADC получим $AD^2 = AC \cdot AE$, значит, $AE = \dfrac{AD^2}{AC}$ (см. рис. 13). Аналогично из треугольника BDF: $BF = \dfrac{BD^2}{BC}$. Учитывая, что $AD \cdot BD = CD^2$ и $AC \cdot BC = AB \cdot CD$, получим:

$$AB \cdot AE \cdot BF = AB \cdot \frac{AD^2 \cdot BD^2}{AC \cdot BC} = \frac{AB \cdot CD^4}{AB \cdot CD} = CD^3.$$

Следовательно, $CD = \sqrt[3]{AB \cdot AE \cdot BF}$ (*среднее геометрическое трёх отрезков*).

На этом же чертеже можно также показать среднее геометрическое пяти и даже семи отрезков. Действительно, учитывая, что $CD^2 = AD \times BD$, получим, что $CD = \sqrt[5]{AB \cdot AD \cdot BD \cdot AE \cdot BF}$, а используя тот факт, что $CD^2 = AC \cdot CE = BC \cdot CF$, получим, что

$$CD = \sqrt[7]{AB \cdot AC \cdot BC \cdot AE \cdot CE \cdot BF \cdot CF}.$$

Д53. Проведём отрезки PA и PB (см. рис. 14). Из равенства вписанного угла ABP и угла MAP между касательной и хордой следует подобие прямоугольных треугольников PBK и PAM. Следовательно, $\frac{PK}{PM} = \frac{PB}{PA}$. Аналогично из подобия треугольников PBN и PAK получим, что $\frac{PN}{PK} = \frac{PB}{PA}$. Из полученных соотношений следует, что $PK^2 = PM \cdot PN$, что и требовалось.

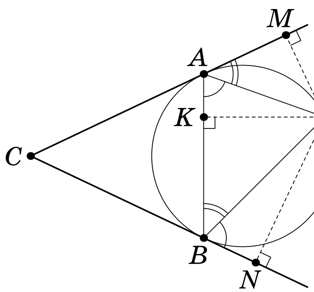


Рис. 14

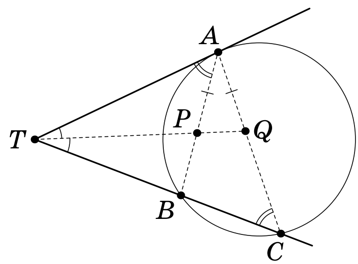


Рис. 15

Д54. Заметим сначала, что $AP = AQ$ (см. рис. 15). Действительно, из условия задачи следует, что $\angle PTA = \angle QTC$ и $\angle TAP = \angle TCQ$ (угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу). Но $\angle APQ = \angle PTA + \angle TAP$ (внешний угол треугольника TPA), $\angle AQP = \angle QTC + \angle TCQ$ (внешний угол треугольника TQC). Значит, $\angle APQ = \angle AQP$, то есть треугольник APQ — равнобедренный: $AP = AQ$. По основному свойству биссектрисы, применённому к треугольникам TAB и TAC, получим

$\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{TA}{TB}$ и $\dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{TA}{TC}$. Перемножив почленно эти равенства, получим, что $\dfrac{AP \cdot AQ}{PB \cdot QC} = \dfrac{TA^2}{TB \cdot TC}$. Используя теорему о касательной и секущей: $TA^2 = TB \cdot TC$ и учитывая, что $AP = AQ$, получим, что $\dfrac{AP^2}{PB \cdot PC} = 1$, значит, $AP = \sqrt{PB \cdot QC}$, что и требовалось.

Отметим, что существуют различные вариации приведённого способа решения. В частности, можно также использовать подобие треугольников APT и CQT (по двум углам).

Д55. Ответ: $\sqrt{pq}$.

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, A' и B' — середины сторон BC и AC (см. рис. 16). Рассмотрим окружность, описанную около треугольника OPQ. Так как $\angle OPQ = 90^\circ - \angle ACH = \angle BAC$ и $\angle COA' = \angle BAC$ (вписанный угол равен половине центрального), то $\angle COQ = \angle OPQ$, значит, CO — касательная к этой окружности. Тогда $CO^2 = CP \cdot CQ$, то есть $R = \sqrt{pq}$.

Можно обойтись и без вспомогательной окружности, используя подобие треугольников COQ и CPO.

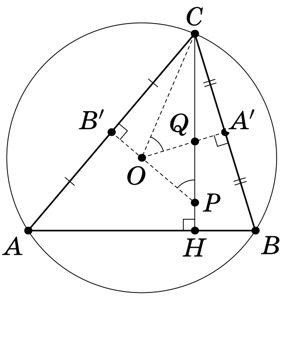


Рис. 16

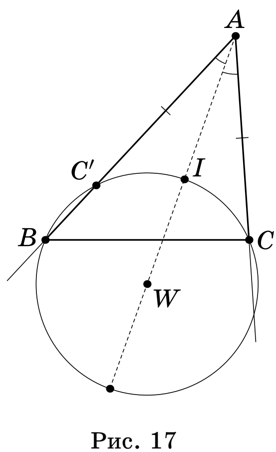


Рис. 17

Д56. Пусть ABC — данный треугольник, I — центр вписанной в него окружности (см. рис. 17). Тогда AI —

биссектриса угла BAC, и на ней, по теореме «трилистника» (см. занятие 6), лежит центр W окружности, проходящей через точки B, C и I. Пусть, например, $AB > AC$, тогда эта окружность вторично пересечёт отрезок AB в точке C'. Рассмотрим симметрию относительно прямой AW. При этой симметрии образом луча AC является луч AB, а окружность переходит в себя, поэтому образом точки C является точка C'. Следовательно, $AC' = AC$. Пусть AX — отрезок касательной, проведенной из вершины A к данной окружности (X — точка касания), тогда $AX^2 = AC' \cdot AB = AC \cdot AB$, что и требовалось.

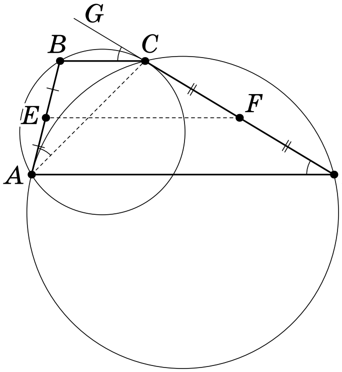


Рис. 18

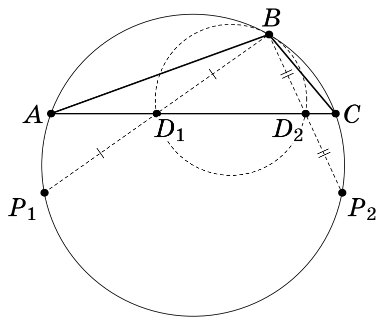


Рис. 19

Д57. На луче, дополнительном к лучу CD, отметим точку G (см. рис. 18). Дважды используя теорему о равенстве вписанного угла и угла между касательной и хордой, получим, что $\angle CDA = \angle CAB = \angle GCB$. Следовательно, $BC \parallel AD$, то есть $ABCD$ — трапеция (или параллелограмм). Тогда $\angle CAD = \angle BCA$, поэтому треугольники CAD и BCA подобны (по двум углам). Значит, $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{CA}$, то есть $AC = \sqrt{AD \cdot BC}$. Отрезок EF, соединяющий середины сторон AB и CD, является средней линией трапеции $ABCD$, следовательно, $EF = \frac{AD + BC}{2}$. (Если $ABCD$ — параллелограмм, то треугольники CAD и BCA равны, причём $AC = CB = AD = EF$.) По неравенству между средним геометрическим и средним арифметическим (см. занятие 4) $AC \leqslant EF$, что и требовалось.

Д58. Рассмотрим произвольную точку D отрезка AC. Эта точка окажется искомой, если $BD^2 = AD \cdot CD$. Проведём окружность, описанную около треугольника ABC, и продлим отрезок BD до пересечения с окружностью в точке P (см. рис. 19). Тогда, по свойству пересекающихся хорд окружности, $DB \cdot DP = AD \cdot CD$. Следовательно, должно выполняться равенство $BD = DP$. Поэтому для построения искомых точек достаточно построить образ описанной окружности при гомотетии с центром B и коэффициентом $k = 0{,}5$. Точки D_1 и D_2 пересечения полученной окружности со стороной AC и будут искомыми.

Этот же результат можно описать по-другому: D_1 и D_2 — точки пересечения AC с окружностью, которая получается из рассмотренной при гомотетии с центром B и коэффициентом $k = \dfrac{1}{2}$.

Д59. Ответ: $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < \dfrac{b}{a} < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Пусть $h_c^2 = h_a \cdot h_b$, тогда, учитывая, что высоты треугольника обратно пропорциональны сторонам, к которым они проведены, получим $\dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b}$, то есть $c = \sqrt{ab}$. Заметим, что если $a = b$, то треугольник — равносторонний и для него условие задачи выполняется. Пусть $a > b$, тогда $a > c = \sqrt{ab}$, значит, условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $b + \sqrt{ab} > a$. Разделив обе части неравенства на a и сделав замену $t = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$, получим неравенство $t^2 + t - 1 > 0$. Учитывая, что $t > 0$, получим $t > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Следовательно, $\dfrac{b}{a} > \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Случай $a < b$ аналогичен рассмотренному.

Д60. Ответ: $\sqrt{S_1 S_2}$.

Пусть площадь треугольника ABC равна S (см. рис. 20). Из подобия треугольников DBF и ABC следует, что

$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{BD}{BA}\right)^2$, а из подобия треугольников DAE и BAC следует, что $\frac{S_2}{S} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$. Тогда $\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{BD+AD}{AB} = 1$. Следовательно, $S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$, а так как $CFDE$ — параллелограмм, $S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}S_{CFDE} = \frac{1}{2}\left(S - S_1 - S_2\right) = \sqrt{S_1 S_2}$.

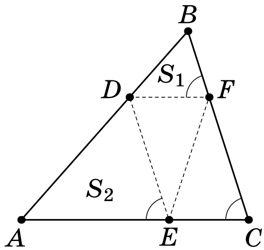


Рис. 20

Отметим, что из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует, что площадь параллелограмма $CFDE$ не превосходит суммы площадей треугольников BDF и ADE, то есть не превосходит половины площади треугольника ABC (равенство достигается, если D — середина AB). Полезно сравнить полученные результаты с результатами, полученными в задаче 7.8.

Д61. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC (см. рис. 21). Точка H', симметричная H относительно стороны BC, лежит на этой окружности. Из прямоугольного треугольника BKC получим $KD^2 = BD{\cdot}DC$. По теореме о произведении отрезков хорд $BD \cdot DC = AD \cdot DH' = AD \cdot DH$. Следовательно,

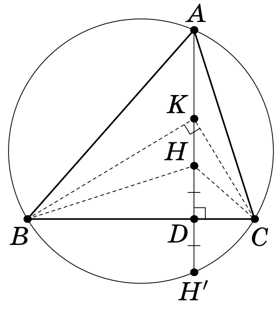


Рис. 21

$$S^2_{\triangle BKC} = \frac{1}{4}BC^2 \cdot KD^2 = \frac{1}{4}BC^2 \cdot AD \cdot DH = \\ = \left(\frac{1}{2}BC \cdot AD\right) \cdot \left(\frac{1}{2}BC \cdot DH\right) = S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle BHC},$$

что равносильно утверждению задачи.

Д62. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC (см. рис. 22). Докажем, что стороны треугольников DEF и MLK соответственно параллельны.

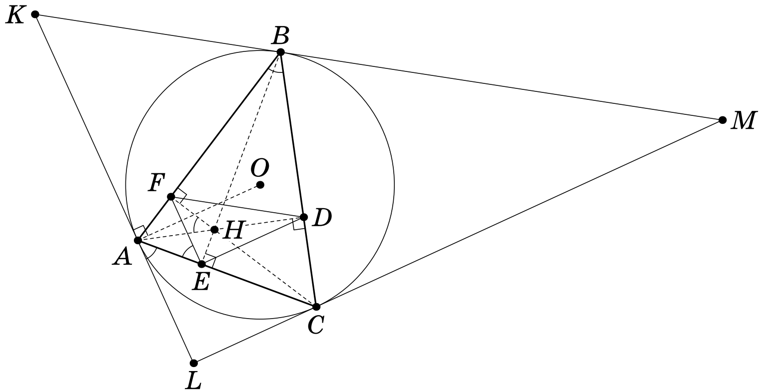


Рис. 22

Действительно, так как $\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$, точки A, E, H и F лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle AEF = \angle AHF = 90^\circ - \angle BAD = \angle ABC$. С другой стороны, $\angle ABC = \angle CAL$ (вписанный угол и угол между касательной и хордой). Таким образом, $\angle AEF = \angle CAL$, значит, $EF \parallel AL$. Аналогично доказывается параллельность других пар сторон, поэтому треугольники DEF и MLK подобны. Следовательно, $\dfrac{S_{\triangle MLK}}{S_{\triangle DEF}} = \dfrac{p^2_{MLK}}{p^2_{DEF}}$ (1), где p — полупериметр соответствующего треугольника. Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Так как для треугольника MLK эта окружность является вписанной, то $S_{\triangle MLK} = p_{\triangle MLK} \cdot R$ (2).

Докажем, что $S_{\triangle ABC} = p_{\triangle DEF} \cdot R$ (3). Действительно, соединив центр O окружности, описанной около треугольника ABC, с вершинами и основаниями высот этого треугольника, получим, что $S_{\triangle ABC} = S_{OEAF} + S_{OFBD} + S_{ODCE}$. Так как $OA \perp KL$ и $KL \parallel EF$, то $OA \perp EF$, значит, $S_{OEAF} = \dfrac{1}{2}EF \cdot QA = \dfrac{1}{2}EF \cdot R$. Получив аналогичные соотношения для четырёхугольников $OFBD$ и $ODCE$, приходим к равенству (3). Выразив из равенств (2) и (3) полупериметры и подставив их в равенство (1), после несложных преобразований получим требуемое равенство.

Доказанное утверждение можно сформулировать так: площадь треугольника есть среднее геометрическое площадей его ортоцентрического и тангенциального треугольников.

Д63. *Утверждение задачи является «двойственным» к утверждению задачи* 8.1а *и доказывается аналогично.*

Д64. Ответ: $\dfrac{ah}{a+h}$.

Пусть $KLMN$ — квадрат, вписанный в данный треугольник, x — длина его стороны, AH — высота треугольника, D — точка пересечения AH и LM (см. рис. 23). Из подобия треугольников LAM и BAC получим, что $\dfrac{LM}{BC} = \dfrac{AD}{AH}$, то есть $\dfrac{x}{a} = \dfrac{h-x}{h}$. Значит, $x = \dfrac{ah}{a+h}$ — *половина среднего гармонического* a *и* h (*сравните с задачей* 8.3).

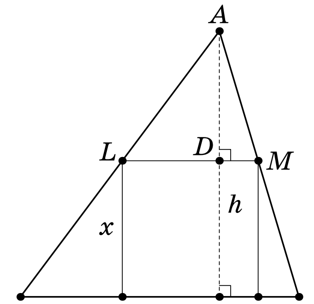


Рис. 23

Д65. *Утверждение задачи непосредственно следует из формулы для вычисления длины биссектрисы*:

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos\frac{\angle A}{2},$$

так как при $0 < \angle A < 180^\circ$ *верно неравенство* $\cos\dfrac{\angle A}{2} < 1$.

Д66. Ответ: 120°.

Если $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos\frac{\angle A}{2} = \frac{bc}{b+c}$, то $\cos\frac{\angle A}{2} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{\angle A}{2} = 60^\circ$, $\angle A = 120^\circ$.

Д67. а) Так как точка H принадлежит отрезку KL, расстояние от H до AC равно сумме расстояний от H до AB и BC (см. лемму из задачи 8.1б). Пусть D, E и F — основания высот, проведённых из вершин A, B и C треугольника ABC соответственно (см. рис. 24а), тогда $HE = HD + HF \Leftrightarrow \frac{HE \cdot BH}{BH} = \frac{HD \cdot AH}{AH} + \frac{HF \cdot CH}{CH}$. Докажем, что числители этих трёх дробей равны. Действительно, так как $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$, точки A, B, D и E лежат на одной окружности. По теореме о произведении отрезков хорд получим $AH \cdot HD = BH \cdot HE$. Аналогично, используя окружность, проходящую через точки B, C, E и F, получим, что $BH \cdot HE = CH \cdot HF$. Таким образом, $\frac{1}{BH} = \frac{1}{AH} + \frac{1}{CH}$, что и требовалось доказать.

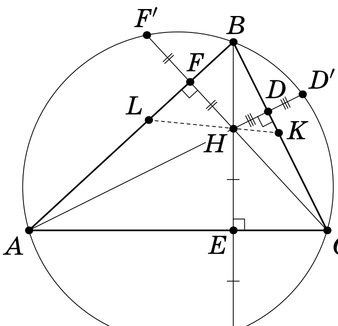


Рис. 24а

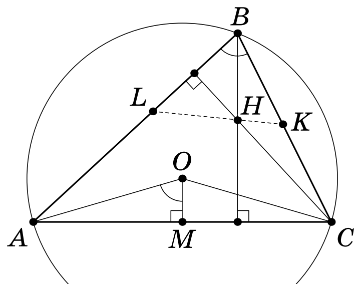


Рис. 24б

Равенство $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$ можно доказать иначе, рассмотрев две пары подобных треугольников: AHE и BHD; CHE и BHF, либо применив теорему о произведении отрезков хорд для описанной окружности, использовать тот факт, что точки D', E' и F', симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, лежат на этой окружности (см. рис. 24а).

б) Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, M — основание перпендикуляра, опущенного из O на BC (см. рис. 24б), тогда $\angle AOM = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle B$, $BH = 2OM$ (*следует из того, что треугольник ABC гомотетичен своему «срединному» треугольнику с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом $k = -2$, см. также задачу* Д48). Из треугольника AOM получим $OM = OA \cdot \cos\angle AOM$, следовательно, $BH = 2R \cdot \cos\angle B$. Аналогично $AH = 2R \cdot \cos\angle A$ и $CH = 2R \cdot \cos\angle C$. Подставив значения AH, BH и CH в равенство, полученное в п. а), получим $\frac{1}{\cos\angle B} = \frac{1}{\cos\angle A} + \frac{1}{\cos\angle C}$, что и требовалось доказать.

Отметим, что справедливы и утверждения, обратные доказанным, что можно показать, проведя аналогичные рассуждения.

Д68. Ответ: $\frac{n(m+n)}{m+2n}$; $\frac{n(m+n)}{m+2n}$; $\frac{2mn}{m+2n}$.

Пусть в треугольнике ABC ($AB = BC$) P, Q и T — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC и AC соответственно (см. рис. 25). Тогда $BP = BQ = m$, $AT = AP = CQ = CT = n$, $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 2(m + 2n)$. Пусть касательная к вписанной окружности, параллельная BC, пересекает стороны AB и AC в точках K и L соответственно и касается окружности в точке M. Для треугольника AKL данная окружность является вневписанной, поэтому, $P_{\triangle AKL} = AK + KM + AL + LM = AP + AT = 2n$.

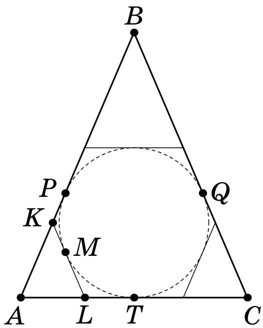


Рис. 25

Так как треугольники AKL и ABC подобны с коэффициентом $k = \frac{P_{\triangle AKL}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{n}{m+2n}$, то $\frac{KL}{BC} = \frac{n}{m+2n}$. Таким образом, $KL = \frac{n(m+n)}{m+2n}$ — *половина среднего гармонического отрезков $m + n$ и n (боковой стороны и половины осно-*

вания треугольника). Отрезок касательной, параллельной AB, равен KL, а третий отрезок вычисляется аналогичным образом и равен $\dfrac{2mn}{m+2n}$ — *половине среднего гармонического отрезков m и $2n$* (*отрезка BP и основания треугольника*).

Д69. *Утверждения задачи непосредственно следуют из того, что неравенства о средних для двух чисел обращаются в равенства тогда и только тогда, когда эти числа равны.*

Д70. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и проведём его медианы AA', BB' и CC'. Продлим отрезок MB' на его длину и отметим точку T (см. рис. 26). Тогда $AMCT$ — параллелограмм (*по признаку*), а сторонами треугольника AMT являются отрезки, составляющие $\dfrac{2}{3}$ от соответствующих медиан треугольника ABC. Следовательно, треугольник AMT подобен треугольнику, составленному из медиан, и $\dfrac{S_{\triangle AMT}}{S'} = \dfrac{4}{9}$ (S' — площадь треугольника, составленного из медиан). С другой стороны, $S_{\triangle AMT} = \dfrac{1}{2}S_{AMCT} = S_{\triangle AMC} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

Таким образом, $S' = \dfrac{9}{4}S_{\triangle AMT} = \dfrac{3}{4}S_{\triangle ABC}$.

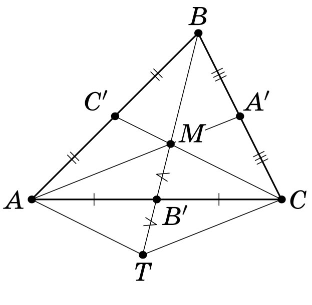


Рис. 26

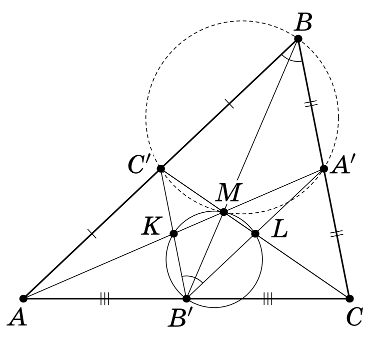


Рис. 27

Д71. Ответ: $\dfrac{2m\sqrt{3}}{3}$.

Пусть AA', BB' и CC' — медианы треугольника ABC, точки K и L — середины AA' и CC', M — точка пересечения медиан (см. рис. 27). Так как точки B', K, M и L лежат на одной окружности, $\angle KB'L + \angle KML = 180^\circ$. Так как точки K и L лежат на средних линиях $B'C'$ и $B'A'$ треугольника ABC, $\angle KB'L = \angle ABC$. Кроме того, $\angle KML = \angle C'MA'$, значит, $\angle ABC + \angle C'MA' = 180^\circ$, то есть точки B, A', C' и M лежат на одной окружности. Следовательно, треугольник ABC — автомедианный (*см. задачу* 9.3*в*). Тогда $\frac{BB'}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (*см. задачу* 9.1), то есть $AC = \frac{2m\sqrt{3}}{3}$.

Д72. Так как углы AKA' и ALA' — прямые (см. рис. 28), то точки A, K, A' и L лежат на окружности с диаметром AA'. Следовательно, $KL = AA' \cdot \sin\angle A$ (по следствию из теоремы синусов). Аналогично, $MN = CC' \cdot \sin\angle C$. Тогда $\frac{KL}{MN} = \frac{AA'}{CC'} \cdot \frac{\sin\angle A}{\sin\angle C} = \frac{AA'}{CC'} \cdot \frac{BC}{AB}$. Если ABC — равнобедренный треугольник (с основанием AC), то $AA' = CC'$, а если ABC — автомедианный (со средней по длине стороной AC), то $\frac{AA'}{AB} = \frac{CC'}{BC}$. В обоих случаях получим, что $KL = MN$.

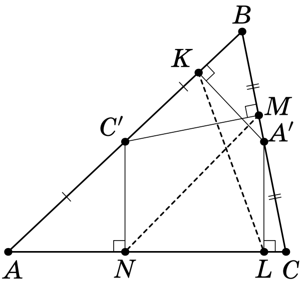


Рис. 28

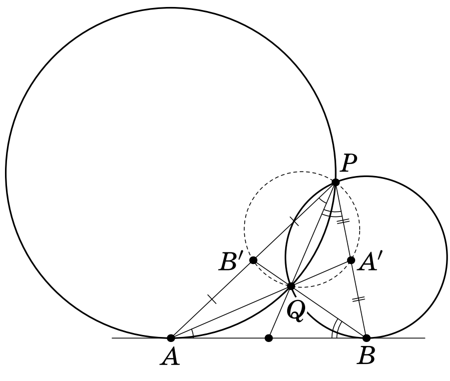


Рис. 29

В обратную сторону: если $KL = MN$, то $AA' \cdot BC = CC' \cdot AB$, то есть $(am_a)^2 = (cm_c)^2$. Тогда, воспользовавшись формулой для вычисления медианы треугольника, получим $a^2(2b^2+2c^2-a^2)=c^2(2a^2+2b^2-c^2) \Leftrightarrow a^4-c^4 = 2b^2(a^2-c^2)$. Таким образом, $a=c$ или $b^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}$, что и требовалось.

Д73. Пусть лучи AQ и BQ пересекают стороны BP и AP треугольника ABP в точках A' и B' соответственно (см. рис. 29). Из условия задачи следует, что A' и B' — середины этих сторон. Кроме того, из свойства вписанного угла и угла между касательной и хордой следует, что $\angle APQ = \angle BAQ$ и $\angle BPQ = \angle ABQ$. Тогда угол AQB' (внешний для треугольника ABQ) равен углу APB, поэтому точки P, Q, A' и B' лежат на одной окружности. Следовательно, треугольник ABP — автомедианный (*см. задачу* 9.3*в*), то есть $AB=\sqrt{\dfrac{AP^2+BP^2}{2}}$, что и требовалось доказать.

Отметим, что доказанное утверждение дополняет свойства конфигурации, рассмотренные в задаче 7.1.

Д74. Рассмотрим окружность с центром O и радиусом R, описанную около треугольника ABC (см. рис. 30). Условие автомедианности треугольника ABC равносильно выполнению равенства $2AC^2 = AB^2+BC^2$, которое можно записать в векторной форме и преобразовать:

$$2\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)^2 = \left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)^2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OC}^2 - 4\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - 2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2.$$

Учитывая, что $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = R$, получим

$$2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow 2\cos\angle AOC = \cos\angle AOB + \cos\angle BOC.$$

Заменяя каждый центральный угол окружности удвоенным вписанным, получим: $2\cos 2\angle B = \cos 2\angle A + \cos 2\angle C$, что и требовалось доказать.

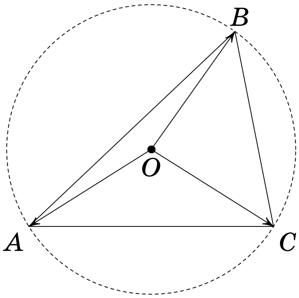


Рис. 30

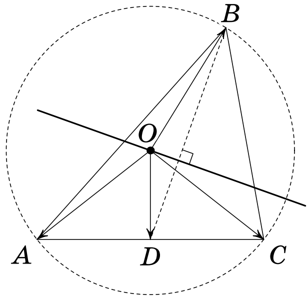


Рис. 31

Можно также было использовать теорему косинусов для треугольников AOB, BOC и AOC. При таком способе доказательства лучше начинать с равенства косинусов. Отметим, что доказанное утверждение можно сформулировать иначе: треугольник является автомедианным тогда и только тогда, когда косинус удвоенного угла треугольника равен среднему арифметическому косинусов двух других удвоенных углов этого треугольника.

Д75. Рассмотрим окружность с центром в точке O и радиусом R, описанную около треугольника ABC (см. рис. 31). Используя векторы, запишем цепочку равносильных равенств:

$$XB = \sqrt{\frac{XA^2 + XC^2}{2}} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{XB}^2 = \overrightarrow{XA}^2 + \overrightarrow{XC}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OX}\right)^2 = \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OX}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OX}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OB}^2 - 4\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OX} + 2\overrightarrow{OX}^2 =$$

$$= \overrightarrow{OA}^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OX}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OX}^2.$$

Учитывая, что $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = R$, получим

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OX} - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OX} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OX}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OB}\right) = 0.$$

Пусть D — середина AC, тогда $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)$. Таким образом, получим, что $\overrightarrow{OX}\left(2\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OB}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OX} \times$

$\times \overrightarrow{BD} = 0$. Значит, искомым геометрическим местом точек является прямая, проходящая через точку O и перпендикулярная медиане BD треугольника ABC (см. рис. 31).

Сравните с решением задачи Д74.

Д76. Ответ: нет, не может.

Так как $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)$ (см. задачу 10.1), а векторы $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{PC}$ — не коллинеарные, то

$$|\overrightarrow{PQ}| < \frac{1}{3}\left(|\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PB}| + |\overrightarrow{PC}|\right) = 2.$$

Д77. Пусть $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = \frac{m}{n}$ и M — центроид треугольника DEF (см. рис. 32). Тогда для любой точки O выполняется равенство $\overrightarrow{OD} = \frac{n\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC}}{m+n}$ (см. равенство (1) занятия 10). Аналогично $\overrightarrow{OE} = \frac{n\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OA}}{m+n}$ и $\overrightarrow{OF} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$. Складывая эти три равенства почленно, получим: $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, то есть $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, следовательно, M — центроид треугольника ABC, что и требовалось доказать.

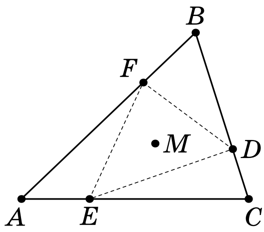


Рис. 32

Д78. Из условия задачи следует, что для любой точки O выполняются равенства

$$\overrightarrow{OT_1} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}\right);$$
$$\overrightarrow{OT_2} = \frac{1}{k}\left(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \ldots + \overrightarrow{OB_k}\right).$$

Тогда

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{n+k}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \overrightarrow{OB_k}\right) = \frac{1}{n+k}\left(n\overrightarrow{OT_1} + k\overrightarrow{OT_2}\right) = \frac{n\overrightarrow{OT_1} + k\overrightarrow{OT_2}}{n+k}.$$

Следовательно, точка T лежит на отрезке T_1T_2 и $\frac{TT_1}{TT_2} = \frac{k}{n}$ (*см. равенство* (1) *занятия* 10).

Д79. Ответ: а) середина отрезка, соединяющего центроиды оснований; б) точка, лежащая на высоте пирамиды и делящая её в отношении $n : 1$, считая от вершины.

а) Центроиды оснований — точки T_1 и T_2 пересечения их средних линий (*см. задачу* 10.6). Тогда центроид призмы — середина отрезка T_1T_2 (*см. задачу* Д78).

б) Докажем, что для любого n выполняется равенство $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}$. Действительно, повернём каждый вектор искомой суммы на угол, равный $\frac{180^\circ}{n} + 90^\circ$, тогда каждый вектор вида $\overrightarrow{OA_k}$ заменится на вектор $m\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$, причём коэффициент m будет одним и тем же. Так как $m\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_nA_1}\right) = \overrightarrow{0}$, то и $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}$. Тогда центроид пирамиды — точка отрезка PO (P — вершина пирамиды), которая делит его в отношении $n : 1$, считая от точки P (*см. задачу* Д78).

Д80. Ответ: в обоих случаях опуститься на дно озера придётся только один раз.

Пусть сосны растут в точках A, B, C, D, E и F; M и T — точки пересечения медиан треугольников ABC и DEF соответственно (см. рис. 33). Тогда:

а) M — центроид треугольника ABC, T — центроид треугольника DEF, следовательно, середина K отрезка MT — центроид системы данных шести точек, он — единственный, и его положение не зависит от способа их разбиения на тройки.

б) Пусть O — центр окружности озера, H и N — ортоцентры вписанных в эту окружность треугольников ABC и DEF соответственно, P — середина отрезка HN. Так как $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OT}$ (*теорема о прямой Эйлера, см. задачу* 9.6), то $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{ON}\right) = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OT}\right) = 3\overrightarrow{OK}$. Так как положение точек O и K не зависит от способа разбиения данных точек на тройки, и положение точки P также не зависит от этого способа разбиения.

Отметим, что для задачи п. а) расположение точек, в которых растут сосны, никак не связано с озером.

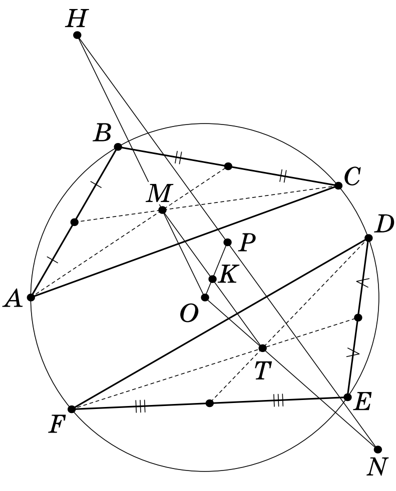


Рис. 33

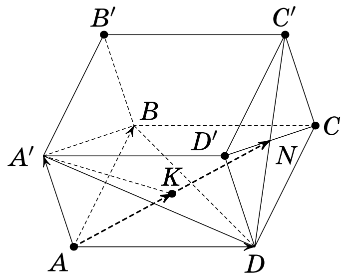


Рис. 34

Д81. Ответ: 1 : 1.

Пусть отрезок AN пересекает плоскость $A'BD$ в точке K (см. рис. 34). Обозначим $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{c}$ (*такие три некомпланарных вектора образуют базис пространства*).

Так как N — середина DC', то $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$. Вектор $\overrightarrow{A'K}$ лежит в одной плоскости с векторами $\overrightarrow{A'B}$ и $\overrightarrow{A'D}$, значит, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'K} = \overrightarrow{a} + x\overrightarrow{A'B} + y\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{a} + x(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) + y(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) = (1 - x - y)\overrightarrow{a} +$

$+\,x\vec{b}+y\vec{c}$ (*это равенство можно было получить иначе, используя векторное условие того, что $A'BD$ — треугольник*). Так как векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AN}$ коллинеарны, $\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AN} = \frac{\lambda}{2}\vec{a} + \frac{\lambda}{2}\vec{b} + \lambda\vec{c}$. Таким образом, мы выразили вектор $\overrightarrow{AK}$ двумя различными способами. Тогда, используя единственность разложения любого вектора по базису, получим, что

$$\begin{cases} 1 - x - y = \dfrac{1}{2}\lambda, \\ x = \dfrac{1}{2}\lambda, \\ y = \lambda \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2}, \\ x = \dfrac{1}{4}, \\ y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$, значит, K — середина отрезка AN.

Использованный метод рассуждений, приводящий к составлению «векторного» уравнения, применяется во многих геометрических задачах, в которых надо найти отношение частей, получившихся при пересечении каких-либо отрезков.

Д82. Ответ: $\dfrac{ka + (n-k)b}{n}$ (*взвешенное среднее арифметическое чисел a и b*).

Из условия задачи следует, что проведённые отрезки B_1C_1, B_2C_2, ..., $B_{n-1}C_{n-1}$ параллельны основаниям трапеции.

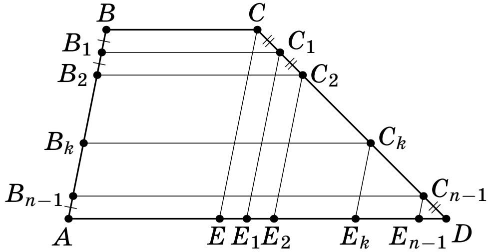


Рис. 35

Первый способ. Через вершину C и точки C_1, C_2, ..., C_{n-1} проведём отрезки, параллельные стороне AB и пересекающие основание AD в точках E, E_1, E_2, ..., E_{n-1} соответственно (см. рис. 35). Так как $ABCE$ — параллелограмм, то $DE = a - b$. В треугольнике CDE образовались отрезки, параллельные DE, длины которых соответственно равны x, $2x$, ..., kx, $\ldots$, $(n-1)x$, считая от вершины C (по теореме Фалеса). Так как $DE = nx$, то длина такого отрезка с концом C_k равна $\frac{a-b}{n}\cdot k$. Тогда $B_kC_k = b + \frac{a-b}{n}\cdot k = \frac{ka+(n-k)b}{n}$.

Второй способ. Так как $\frac{B_kB}{B_kA} = \frac{C_kC}{C_kD} = \frac{k}{n-k}$, то для любой точки O: $\overrightarrow{OB_k} = \frac{k}{n}\overrightarrow{OA} + \frac{n-k}{n}\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC_k} = \frac{k}{n}\overrightarrow{OD} + \frac{n-k}{n}\overrightarrow{OC}$ (см. равенство (1) занятия 10). Тогда

$$\overrightarrow{B_kC_k} = \overrightarrow{OC_k} - \overrightarrow{OB_k} = \frac{k}{n}\overrightarrow{AD} + \frac{n-k}{n}\overrightarrow{BC}.$$

Так как $\overrightarrow{B_kC_k} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$, то

$$|\overrightarrow{B_kC_k}| = \frac{k}{n}|\overrightarrow{AD}| + \frac{n-k}{n}|\overrightarrow{BC}| = \frac{ka+(n-k)b}{n}$$

(см. следствие из равенства $(**)$ занятия 10).

Полученный результат является аналогом координатной формулы $(1')$ занятия 10, где роль координат играют длины отрезков.

Д83. Ответ: $a + c - b$.

Пусть точки A', B', C' и D' — ортогональные проекции вершин данного параллелограмма A, B, C и D соответственно на плоскость α (см. рис. 36). Тогда $A'B'C'D'$ — также параллелограмм (в частности, «вырожденный» в отрезок), причём точка O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проектируется в точку O' пересечения диагоналей параллелограмма $A'B'C'D'$. Из условия задачи следует, что $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$, а $DD' = d$ — искомое расстояние. Так как OO' — общая средняя линия трапеций $AA'C'C$ и $BB'D'D$, $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2} \Leftrightarrow d = a + c - b$.

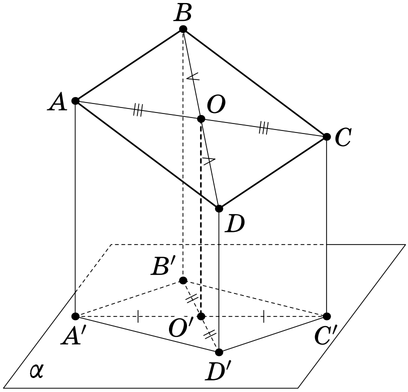


Рис. 36

Возможны также способы решения, использующие векторы или координаты (аналогичные решению задачи 10.3 и допускающие аналогичное обобщение).

Д84. Отложим $\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{AA_1}$ (см. рис. 37а). Тогда $AA_1B_2B_1$ — параллелограмм, поэтому, точка D пересечения его диагоналей делит их пополам. Следовательно, треугольники AA_1D и B_2B_1D равновелики, значит, тетраэдры C_1AA_1D и $C_1B_2B_1D$ также равновелики (имеют равные объёмы). Прикладывая эти тетраэдры по очереди к многограннику $ABCDB_1C_1$, соответственно получим равновеликие многогранники $ABCA_1B_1C_1$ и $ABCB_2C_1$. Аналогично, отложив $\overrightarrow{C_2C_3} = \overrightarrow{BB_1}$, получим, что $BB_2C_3C_1$ — параллелограмм, E — точка пересечения его диагоналей, и равновелики тетраэдры ABB_2E и AC_3C_1E. Прикладывая эти тетраэдры по очереди к четырёхугольной пирамиде $ABCC_1E$ (A — её вершина), соответственно получим равновеликие многогранники $ABCB_2C_1$ и C_3ABC. Следовательно, объём исходного многогранника $ABCB_2C_1$ равен объёму пирамиды C_3ABC. Рассмотрим эту пирамиду, и через вершину C_3 проведём плоскость, параллельную ABC. Пусть эта плоскость пересекает прямые AA_1 и BB_1 в точках A_3 и B_3 соответственно (см. рис. 37б).

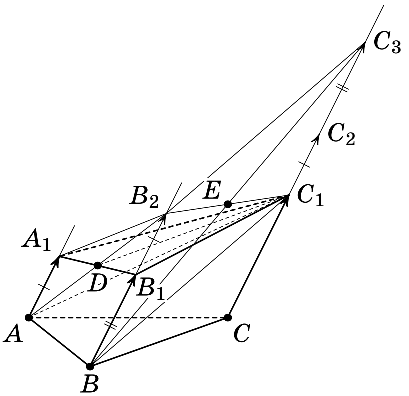


Рис. 37а

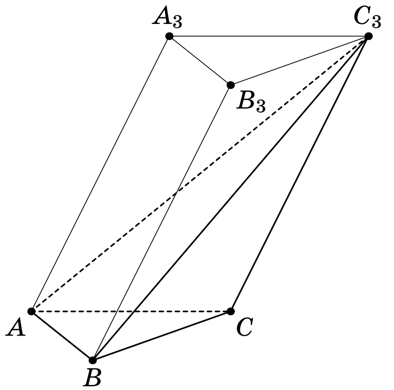


Рис. 37б

Тогда $ABCA_3B_3C_3$ — призма, объём которой равен произведению площади её перпендикулярного сечения и длины бокового ребра. Объём пирамиды C_3ABC в три раза меньше объёма этой призмы, так как у них одно и то же основание ABC и их высоты, проведенные к ABC, совпадают. Учитывая, что перпендикулярным сечением призмы является треугольник площади S, указанный в условии, а $CC_3 = AA_1 + BB_1 + CC_1$, получим, что объём V пирамиды C_3ABC, а значит, и данного многогранника, можно вычислить по формуле $V = \dfrac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{3} \cdot S$.

Д85. Ответ: а) $R = \sqrt{\dfrac{R_1^2 + R_2^2}{2}}$ (*среднее квадратичное данных радиусов*);

б) $R = \dfrac{R_1R_2\sqrt{2}}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}$;

в) $R = \sqrt{R_1R_2}$ (*среднее геометрическое данных радиусов*);

г) $R = \sqrt[4]{\dfrac{R_1^4 + R_1^4}{2}}$ (*среднее степенное данных радиусов*).

Так как площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, *данные в условии задачи зависимости между пло-*

щадями равносильны аналогичным зависимостям между квадратами радиусов (*сравните с задачей* 5.2).

Д86. Ответ: $\sqrt[3]{\frac{R_1^3+R_2^3}{2}}$ (*среднее степенное данных радиусов*).

Пусть O_1 и O_2 — центры оснований данного усечённого конуса, O — центр искомого сечения радиуса R, A_1A_2 — одна из образующих боковой поверхности конуса, A — точка пересечения этой образующей и сечения (см. рис. 38). Из условия задачи следует, что объём данного конуса в два раза больше объёма любой из получившихся частей, то есть $\frac{1}{3}H\left(R_2^2+R_2R_1+R_1^2\right)=\frac{2}{3}h\left(R^2+RR_1+R_1^2\right)$, где $H = O_2O_1$, $h = OO_1$.

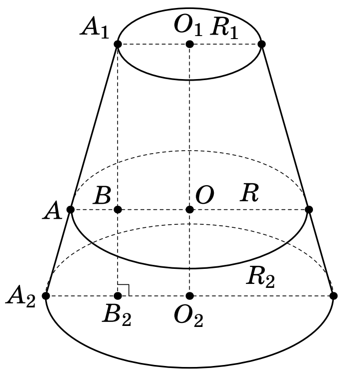


Рис. 38

Найдем отношение высот h и H. Для этого в осевом сечении конуса проведём $A_1B_2 \perp A_2O_2$ (B — точка пересечения A_1B_2 и AO). Из подобия треугольников A_1AB и $A_1A_2B_2$ получим $\frac{A_1B}{A_1B_2}=\frac{AB}{A_2B_2}$, то есть $\frac{h}{H}=\frac{R-R_1}{R_2-R_1}$. Следовательно,

$$\frac{R_2^2+R_2R_1+R_1^2}{R^2+RR_1+R_1^2}=\frac{2(R-R_1)}{R_2-R_1} \Leftrightarrow R_2^3-R_1^3=$$

$$=2R^3-2R_1^3 \Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\frac{R_1^3+R_2^3}{2}}.$$

Послесловие

Средние: что дальше ...

Проработав материал этой книжки, ученик станет «на ты» со средними, особенно в геометрии. Для него не будет проблемой доказать, что та или иная величина является средним указанного вида. Но кое-кто захочет пойти дальше и, вероятно, поставит такие вопросы: а) а можно ли заранее (до начала выкладок) догадаться, что величина C — это некоторое среднее двух данных величин x и y, и если да, то б) какое именно из средних? в) как использовать знание, что C — это такое-то среднее величин x и y?

Легче ответить на вопрос в). Во многих случаях из *алгебраического* равенства следуют чисто *геометрические* свойства — см., например, свойства разностных (занятие 6), гармонических (занятие 8) или автомедианных (занятие 9) треугольников. Вообще говоря, знание явной формулы для C никогда не повредит: её можно использовать в последующих уравнениях и неравенствах. В частности, можно доказывать геометрическое неравенство, сведя его к неравенству между средними (см., например, задачу Д57).

На вопросы а) и б) нет ответа, гарантирующего стопроцентный результат. Но есть несколько полезных соображений.

Проверка гипотез. Пусть возникла некоторая гипотеза (скажем, что величина C есть какое-то из средних для величин x и y или что C выражается через x и y такой-то формулой), но доказать эту гипотезу с ходу не удаётся. Тогда, прежде чем погружаться в выкладки, полезно эту гипотезу проверить.

а) **Свойства средних.** Гипотезу, что C есть какое-то среднее x и y, легче всего проверить через свойства средних. Выделим пять свойств, занумеровав их так, что чем меньше номер свойства, тем легче его проверять:

1) $C(kx, ky) = kC(x, y)$ при $k > 0$ (однородность, или одинаковая размерность).

2) $C = x \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow C = y$ (совпадение только при равенстве);

3) C зависит от x и y симметрично (исключением является взвешенное среднее);

4) C зависит только от x и y;

5) если $x < y$, то $x < C < y$ (среднее лежит между числами).

Доказательства этих свойств очевидны, но некоторые требуют пояснения.

Свойство 1 в геометрии означает (почти всегда), что x, y и C имеют одинаковую размерность, то есть либо все три величины это длины, либо они все — площади, либо они все — объёмы. Тогда при гомотетии все три величины умножаются на одинаковую степень коэффициента гомотетии. И наоборот, если x и y — величины одной размерности (например, длины), а предполагаемое среднее C — другой (например, площадь), то при гомотетии с коэффициентом $k \neq 1$ равенство, очевидно, нарушится.

Свойство 4 очевидно для конструкций, жёстко определяемых параметрами x и y (см, например, конструкцию задачи 5.1). Но такая жёсткость есть далеко не всегда. Так, в задаче 5.2 длины x и y оснований трапеции вовсе не задают однозначно длины её боковых сторон, диагоналей и т. д. Даже и длины параллельных основаниям отрезков с концами на боковых сторонах могут зависеть не только от x и y (например, «плохим» будет отрезок, делящий пополам периметр трапеции).

Увы, даже выполнение всех свойств не гарантирует, что верна одна из формул средних (например, когда в треугольнике со сторонами x и y и углом 60° между ними C — третья сторона). Но такое бывает очень редко.

б) **Отладка формулы.** Пусть у нас есть несколько вариантов формулы и мы хотим узнать, какой из этих вариантов верен (может быть, и никакой). Тут можно рассмотреть как можно более простые частные случаи и проверить, какая из формул подойдёт для них. Для средних полезен, например, случай $x = 0$. При этом, правда, некоторые фигуры могут вырождиться: отрезок может стать точкой, трапеция с основанием x превратится в треугольник, а её диагонали сольются с боковыми сторонами. Но часто условие остается осмысленным, а вычисление C упрощается. Посмотрим, например, на C в задаче 5.2а при $a = 0$.

1) Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, стал средней линией треугольника, $C = \frac{b}{2}$. Значит, подходит только среднее арифметическое.

2) Отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей совпал с верхним основанием, $C = 0$. Значит, подходят среднее геометрическое и среднее гармоническое.

3) Отрезок отсёк треугольник вдвое меньшей площади, $C = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Подходит только среднее квадратичное.

Для отрезка из п. 2 подберём ещё один частный случай, чтобы выбрать между двумя подходящими средними. Рассмотрим трапецию, отсечённую от треугольника средней линией, её основания x и $2x$. Диагонали трапеции — это медианы треугольника, выше их точки пересечения лежит $\frac{2}{3}$ третьей медианы, поэтому $C = 2 \cdot \frac{2x}{3}$. Подходит только среднее гармоническое.

Помимо прочего, «отладка» помогает точно выписать формулу, которую вы помните приблизительно, «с точностью до знаков и коэффициентов».

Раздаточный материал

Занятие 1. Вычисление среднего арифметического и взвешенного среднего арифметического

Задача 1.1. Сто яблок вместе весят 5 кг. Сколько весит «в среднем» одно яблоко? Сколько примерно весят 17 яблок?

Задача 1.2. В классе 10 девочек и 20 мальчиков. Средний рост девочки — 140 см, средний рост мальчика — 149 см. Найдите средний рост ученика в классе.

Задача 1.3. В магазин привезли три сорта конфет с разной ценой: 4 кг по цене 40 рублей за килограмм, 3 кг по цене 60 рублей за килограмм и 1 кг по цене 120 рублей за килограмм. По какой цене надо продавать смесь этих конфет?

Задача 1.4. Скорость моторной лодки по течению реки равна 21 км/ч, а против течения — 15 км/ч. Найдите её скорость в стоячей воде. Проанализируйте полученный результат.

Задача 1.5. Скорость моторной лодки по течению реки равна 21 км/ч, а против течения — 15 км/ч. Она проплыла некоторое время по течению реки и такое же время против течения.

а) Верно ли, что средняя скорость её движения равна среднему арифметическому её скоростей по течению и против течения?

б) Изменится ли ответ, если время движения по течению и против течения будет различным?

Задача 1.6. Из двух сплавов, содержащих 10% и 50% меди соответственно, требуется получить новый сплав. В каком отношении (по массе) требуется взять исходные сплавы, чтобы получить сплав, содержащий а) 30%; б) 40% меди? Проанализируйте полученный результат.

Задача 1.7. Смешали четыре раствора, содержание соли в которых составляло 10%, 20%, 30% и 40%. При этом в одну ёмкость было слито 10 г первого раствора, 20 г второго, 30 г третьего и 40 г четвёртого. Каково процентное содержание соли в полученном растворе?

Задача 1.8. Каждый из десяти судей оценил выступление фигуриста, и средняя оценка оказалась равна 4,2 балла. Согласно правилам, были отброшены самая большая из поставленных оценок — 6 баллов и самая маленькая — 2 балла, после чего опять подсчитали средний балл. Чему он равен? (*Средний балл — среднее арифметическое баллов.*)

Задача 1.9. Когда в комнату вошел четвёртый человек, средний возраст находящихся в ней людей увеличился с 11 до 14 лет. Сколько лет вошедшему?

Задача 1.10. Профессор Тестер проводит серию тестов, на основании которых он выставляет испытуемому средний балл. Закончив отвечать, Джон понял, что если бы он получил за последний тест 97 баллов, то его средний балл составил бы 90, а если бы он получил за последний тест всего 73 балла, то его средний балл составил бы 87. Сколько тестов в серии профессора Тестера?

Задача 1.11. Желая найти среднюю годовую оценку по математике у всех шестиклассников, завуч попросил учителей математики четырёх шестых классов вычислить средние оценки в каждом из классов и затем нашёл среднее арифметическое этих четырёх чисел. Правильно ли сделал завуч?

Задача 1.12. От дома до школы Петя обычно едет на велосипеде со средней скоростью 300 м/мин. Сегодня, выехав в то же самое время, он часть пути проехал со скоростью 240 м/мин, а затем увеличил скорость до 420 м/мин и приехал вовремя. Какую часть от времени, затраченного на дорогу, Петя ехал с одной скоростью, а какую часть — с другой?

Занятие 2. Свойства среднего арифметического

Задача 2.1. Компания друзей детства встретилась через 7 лет. Как за это время изменился средний возраст компании?

Задача 2.2. В школе было решено перейти с пятибалльной системы оценок на 40-балльную. Для этого каждую текущую оценку ученика умножили на 8. Как изменился средний балл ученика?

Задача 2.3. Баскетболист Джон перешёл из одной команды в другую. Мог ли в обеих командах вырасти средний рост?

Задача 2.4. Боб и Ваня соревнуются в изготовлении и употреблении сладких коктейлей. Боб смешал «пепси» с «фантой», а Ваня — лимонад с сиропом. Известно, что лимонад слаще «пепси», а сироп слаще «фанты». Могла ли смесь Боба оказаться слаще Ваниной? (Сладость — это доля сахара от общего веса.)

Задача 2.5. По окружности расставлены 100 чисел так, что каждое из них равно среднему арифметическому двух своих соседей. Докажите, что все числа между собой равны.

Задача 2.6. В последнюю неделю за любые три дня подряд Робин-Бобин в среднем съедал по 10 пончиков в день. Верно ли, что за эту неделю он в среднем съел 10 пончиков в день?

Задача 2.7. На сколько уменьшится средний возраст команды из 11 футболистов, если закончившего выступление 32-летнего игрока заменит игрок в возрасте 21 год?

Задача 2.8. Из команды ушёл баскетболист ростом 192 см, при этом средний рост команды не изменился. Чему он мог быть равен?

Задача 2.9. Тринадцать индюшат клевали зерно. Первый индюшонок склевал 40 зёрен; второй — 60, каждый следующий — среднее арифметическое зёрен, склёванных всеми предыдущими индюшатами. Сколько зерён склевал тринадцатый индюшонок?

Задача 2.10. Средний рост восьми баскетболистов равен 195 см. Какое наибольшее количество из этих игроков может быть ниже чем 191 см?

Задача 2.11. Говорят, что средний доход 10% самых богатых жителей города в 15 раз превосходит средний доход всех жителей этого города. Докажите, что это выдумки.

Задача 2.12. Пешеход шёл 3,5 часа, причём за каждый промежуток времени длиной один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость за всё время движения равна 5 км/ч?

Занятие 3. Среднее гармоническое и среднее геометрическое

Задача 3.1. Скорость моторной лодки по течению реки равна 21 км/ч, а против течения — 15 км/ч. Она проплыла некоторое расстояние по течению реки и такое же расстояние против течения. Найдите среднюю скорость её движения. Проанализируйте полученный результат.

Задача 3.2. Половину книги наборщик печатал со скоростью 6 страниц в час. Затем его сменил другой наборщик, который печатал со скоростью 12 страниц в час. С какой постоянной скоростью надо было печатать, чтобы набрать текст этой же книги за такое же время?

Задача 3.3. Теплоход, двигаясь по течению реки, прошёл расстояние между пристанями A и B за 10 часов. Обратно он прошёл это же расстояние за 15 часов. За сколько времени теплоход проплыл бы такое же расстояние по озеру?

Задача 3.4. Передние покрышки автомобиля «Антилопа–Гну» выходят из строя через 25000 км, а задние — через 15000 км. В какой момент Остап Бендер должен поменять местами покрышки, чтобы машина прошла наибольшее расстояние? Чему равно это расстояние?

Задача 3.5. Мальчик сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он пробежал по этому же эскалатору вверх и насчитал 150 ступенек. Сколько ступенек насчитал бы мальчик, если бы с такой же скоростью бежал по неподвижному эскалатору?

Задача 3.6. Два путника вышли на рассвете из пунктов A и B навстречу друг другу с постоянными скоростями и встретились в полдень. Первый пришёл в пункт B в 16.00, а второй пришёл в пункт A в 21.00. В какое время был рассвет?

Задача 3.7. Велосипедист должен попасть в место назначения к определённому сроку. Если он будет ехать со скоростью 15 км/ч, то приедет на час раньше, а если со скоростью 10 км/ч, то опоздает на один час. С какой скоростью должен ехать велосипедист, чтобы приехать вовремя?

Задача 3.8. Первая труба заполняет бассейн за 6 часов, а вторая — за 18 часов. Сколько времени потребуется для заполнения этого бассейна, если одновременно открыть обе трубы?

Задача 3.9. В магазине было два контейнера картофеля, в одном — по 20 рублей за килограмм, в другом — по 30 рублей за килограмм. Контейнеры были разного объёма, а их суммарная стоимость оказалась одинаковой. Весь имеющийся картофель смешали. По какой цене следует продавать килограмм смеси?

Задача 3.10. У Алёны есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или 210 часов ожидания.

Когда Алёна садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон разрядился.

Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алёна говорила по телефону ровно половину времени поездки?

Задача 3.11. Из пунктов A и B вышли навстречу друг другу два курьера с постоянными, но различными скоростями. После того как курьеры встретились, чтобы дойти до места своего назначения, первому потребовалось ещё 16 часов, а второму — ещё 9 часов. Сколько времени затратил каждый из курьеров на весь путь от A до B?

Занятие 4. Сравнение средних

Задача 4.1. Докажите, что среди всех прямоугольников с одинаковой площадью наименьший периметр имеет квадрат.

Задача 4.2. Теплоход прошёл путь от пункта A до пункта B по течению реки и обратно. Докажите, что собственная скорость теплохода больше, чем средняя скорость этого движения.

Задача 4.3. Два тракториста, работая вместе, могут вспахать поле за t дней. Если бы первый вспахал половину поля, а второй — другую половину, то на это потребовалось бы T дней. Докажите, что $\frac{T}{t} \geqslant 2$.

Задача 4.4. В двух племенах индейцев- разное количество мужчин. Все мужчины одного племени — «братья» (в частности, каждый мужчина — сам себе «брат»). Что больше: среднее количество мужчин в этих племенах или среднее количество «братьев» у каждого мужчины?

Задача 4.5. У продавца есть чашечные весы с неравными плечами и гири. Сначала он взвешивает товар на одной чашке, затем — на другой, и берёт среднее арифметическое двух показаний. Определите, в чью пользу такое «взвешивание»: продавца или покупателя?

Задача 4.6. От потолка комнаты вертикально вниз по стене поползли две мухи. Спустившись до пола, они поползли обратно. Первая муха ползла в оба конца с одной и той же скоростью, а вторая, хотя и поднималась вдвое медленней первой, но зато спускалась вдвое быстрее. Какая из мух раньше приползёт обратно?

Задача 4.7. Докажите, что среди всех прямоугольников с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

Задача 4.8. В летней школе два корпуса. В одном из них m комнат по m человек в каждой, а в другом — n комнат по n человек в каждой. Санитарному надзору надо сообщить среднее число школьников в корпусе, а пожарной инспекции — расчётное число, равное произведению среднего числа комнат в корпусе и среднего арифметического наибольшего и наименьшего количества школьников в комнате. Какое из этих чисел больше — истинное или расчётное?

Задача 4.9. В каком случае вертолёт, собственная скорость которого постоянна, пролетит быстрее из пункта A в пункт B и обратно: при отсутствии ветра или при ветре, постоянно дующем в направлении из A в B с одной и той же скоростью?

Задача 4.10. Два туриста вышли из пункта A в пункт B. Первый турист половину затраченного времени от начала движения шёл со скоростью V_1 км/ч, а затем шёл со скоростью V_2 км/ч. Второй турист первую половину пути шёл со скоростью V_1 км/ч, а вторую половину — со скоростью V_2 км/ч. Кто из них затратил меньше времени на путь из A в B?

Задача 4.11. Докажите, что среди всех прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, квадрат имеет и наибольший периметр, и наибольшую площадь.

Занятие 5. Построения классических средних на одном чертеже

Задача 5.1. (*пункты а) и б) взяты из трактата Паппа Александрийского*) На одной прямой последовательно отложены отрезки AD и DB с длинами a и b соответственно и построена полуокружность с диаметром $AB = a + b$. Из точки D восставлен перпендикуляр к AB до пересечения с полуокружностью в точке C. Затем проведены радиус OC полуокружности и перпендикуляр DM к этому радиусу.

а) Выполнив чертёж, найдите на нём отрезки, длины которых равны среднему арифметическому, среднему геометрическому и среднему гармоническому чисел a и b соответственно;

б) используя найденные отрезки, докажите неравенство для этих трёх средних;

в) проведя дополнительное построение, найдите отрезок, равный среднему квадратичному чисел a и b, и завершите доказательство неравенства о средних;

г) обоснуйте, в каком случае во всех рассмотренных неравенствах достигается равенство.

Задача 5.2. Рассмотрим трапецию, основания которой имеют длины a и b. а) Найдите отрезки, параллельные основаниям трапеции и равные четырём классическим средним чисел a и b; б) используя расположение найденных отрезков, докажите неравенства о средних и определите, когда достигаются равенства.

Задача 5.3. В равнобокую трапецию $ABCD$, основания которой BC и AD имеют длины a и b соответственно, вписана окружность. BH — высота трапеции, G — основание перпендикуляра, опущенного из точки H на сторону AB.

а) Докажите, что длины отрезков AB, BH и BG являются средним арифметическим, средним геометрическим и средним гармоническим чисел a и b соответственно;

б) используя эти отрезки, докажите неравенство для указанных средних величин и укажите, в каком случае достигается равенство.

Задача 5.4. На луче с началом D отложены отрезки $DA = a$ и $DB = b$, где $a < b$. Затем проведены окружность с диаметром AB и касательная DP к этой окружности. а) Выполнив чертёж и проведя дополнительные построения, найдите отрезки, длины которых равны четырём классическим средним чисел a и b; б) используя найденные отрезки, докажите неравенство для средних.

Задача 5.5. Две окружности с диаметрами a и b касаются внешним образом. а) Докажите, что отрезок их общей касательной, концами которого являются точки касания, равен среднему геометрическому чисел a и b; б) докажите, что расстояние от точки касания окружностей до общей касательной равно половине среднего гармонического чисел a и b.

Задача 5.6. Окружности с диаметрами a и b не имеют общих точек, а отрезок их общей внешней касательной, концами которого являются точки касания, равен среднему арифметическому диаметров. Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно среднему квадратичному диаметров.

Задача 5.7. Используя результаты, полученные в задачах 5.5 и 5.6, докажите неравенства о средних.

Занятие 6. Среднее арифметическое. Разностные треугольники

Задача 6.1. Докажите, что в любом треугольнике ABC выполняется равенство $WI = WA = WC$.

Задача 6.2. Докажите, что в разностном треугольнике ABC: а) $BI = IW$; б) $r = \frac{1}{3}h_b$.

Задача 6.3. Докажите, что треугольник ABC является разностным тогда и только тогда, когда:

а) прямая IM, где M — центр тяжести треугольника, параллельна стороне AC;

б) сторона AC пересекает отрезок IW в его середине;

в) середина стороны и основание высоты, проведённой к этой стороне, симметричны относительно точки касания этой же стороны и вписанной окружности;

г) высота треугольника равна радиусу вневписанной окружности, касающейся той стороны, к которой проведена высота;

д) точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника и основание высоты, проведённой к этой стороне, симметричны относительно основания биссектрисы, проведённой к этой же стороне.

Задача 6.4. Среди прямоугольных треугольников укажите все, являющиеся разностными, и докажите, что разностью арифметической прогрессии (a; b; c) является радиус вписанной в этот треугольник окружности.

Задача 6.5. Докажите, что в разностном треугольнике ABC:

а) вершина B, центры O и I описанной и вписанной окружностей и середины сторон AB и BC лежат на одной окружности;

б) прямая IM, где M — центр тяжести треугольника, является касательной к этой окружности.

Задача 6.6. Докажите, что в разностном треугольнике ABC центр I вписанной окружности является центром окружности, описанной около треугольника $A'LC'$, где L — основание биссектрисы, проведённой из вершины B, A' и C' — середины сторон BC и AB соответственно.

Задача 6.7. В разностном треугольнике ABC продолжение биссектрисы BL пересекает описанную окружность в точке W, T — основание перпендикуляра, опущенного из точки W на сторону AB. Докажите, что: а) $BT = AC$; б) $AL = \frac{1}{2}AB$.

Занятие 7. Среднее геометрическое

Задача 7.1. В треугольнике ABC: R_1 и R_2 — радиусы окружностей, проходящих через вершину C и касающихся прямой AB в точках A и B соответственно. а) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC. б) Пусть D — вторая точка пересечения данных окружностей. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABD.

Задача 7.2. В трапецию вписана окружность, точка касания которой с боковой стороной делит эту сторону на отрезки с длинами m и n. Найдите радиус окружности.

Задача 7.3. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, является средним пропорциональным его катетов. Найдите отношение катетов этого треугольника.

Задача 7.4. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка K. Прямая AK пересекает прямые BC и CD в точках L и M соответственно. Докажите, что отрезок AK является средним геометрическим отрезков LK и KM.

Задача 7.5. Продолжение биссектрисы BL треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке W. Докажите, что отрезок AW является средним геометрическим отрезков BW и WL.

Задача 7.6. В остроугольном треугольнике ABC на высоте AH выбрана точка O так, что окружность с центром O проходит через вершины A и B и пересекает сторону AC в некоторой точке D. Докажите, что сторона AB является средним пропорциональным отрезков AC и AD.

Задача 7.7. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию AD. Окружность проходит через точки C и D и касается отрезка AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $BC = a$, $AD = b$.

Задача 7.8. Трапеция $ABCD$ разделена диагоналями на четыре треугольника. Площади треугольников, прилежащих к основаниям, равны S_1 и S_2. Найдите площади двух других треугольников.

Занятие 8. Среднее гармоническое. Гармонические треугольники

Задача 8.1. Докажите, что треугольник ABC является гармоническим тогда и только тогда, когда: а) треугольник, составленный из его высот, является разностным; б) отрезок, соединяющий основания двух биссектрис треугольника, делит пополам медиану.

Задача 8.2. Докажите, что треугольник ABC является гармоническим тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

а) $l_b = b \cdot \cos\frac{\angle B}{2}$, где l_b — биссектриса треугольника, проведённая из вершины B;

б) $b \cdot BT = l_b \cdot BW$, где W — точка пересечения этой биссектрисы с окружностью, описанной около треугольника ABC, T — основание перпендикуляра, опущенного из точки W на прямую AB.

Задача 8.3. В треугольник вписан ромб так, что они имеют общий угол. Докажите, что полупериметр ромба равен среднему гармоническому сторон треугольника, на которых лежат стороны ромба.

Задача 8.4. Точки M и N — середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$; K — точка пересечения прямых AB и CD, O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что отрезок KO является средним гармоническим отрезков KM и KN.

Задача 8.5. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, а биссектриса внешнего угла при вершине A пересекает прямую BC в точке E. Докажите, что отрезок DE является средним гармоническим отрезков BE и CE.

Задача 8.6. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF. Лучи DF и DE пересекают прямую, проходящую через вершину A и параллельную BC, в точках M и N. Найдите MN, если $AC = b$, $AB = c$.

Задача 8.7. Из точки M пересечения медиан треугольника опущены перпендикуляры MK, ML и MN на его стороны. Докажите, что радиус r окружности, вписанной в этот треугольник, является средним гармоническим отрезков MK, ML и MN.

Задача 8.8. Пусть в треугольнике ABC: O_b и O_c — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон AC и AB соответственно, C_0 и B_0 — точки касания этих окружностей с прямой BC. Докажите, что прямые O_bB_0 и O_cC_0 пересекаются на середине высоты AH этого треугольника.

Занятие 9. Среднее квадратичное. Автомедианные треугольники

Задача 9.1. Найдите зависимость между сторонами треугольника, если треугольник, составленный из его медиан, ему подобен.

Задача 9.2. Докажите, что средний по величине угол автомедианного треугольника не превосходит 60°.

Задача 9.3. Докажите, что треугольник является автомедианным тогда и только тогда, когда: а) медианы этого треугольника, взятые в порядке возрастания, обратно пропорциональны его высотам, взятым в порядке убывания; б) одна из его медиан является средним квадратичным двух других; в) вершина, середины двух сторон треугольника, сходящихся в этой вершине, и точка пересечения медиан лежат на одной окружности.

Задача 9.4. Пусть медиана BB' треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке T. Докажите, что треугольник ABC — автомедианный тогда и только тогда, когда:

а) M — середина BT;

б) точки M и T симметричны относительно точки B'.

Задача 9.5. Докажите, что треугольник является автомедианным тогда и только тогда, когда середина отрезка BM лежит на окружности, проходящей через середины сторон треугольника ABC.

Задача 9.6. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC (отличного от правильного); M — точка пересечения его медиан. Докажите, что прямая OM перпендикулярна медиане BB' тогда и только тогда, когда треугольник ABC — автомедианный.

Занятие 10. Взвешенное среднее арифметическое. Векторы и координаты

Задача 10.1. 1) Докажите, что: а) центроидом отрезка является его середина; б) центроидом треугольника является точка пересечения его медиан; в) центроидом тетраэдра является точка пересечения его медиан (отрезков, соединяющих вершины с центроидами противолежащих граней).

2) В каждом случае запишите формулы для вычисления координат центроида.

Задача 10.2. Докажите, что: а) из медиан треугольника можно составить треугольник; б) из медиан тетраэдра можно составить замкнутую ломаную.

Задача 10.3. Параллельной проекцией треугольника ABC на плоскость α, не пересекающую этот треугольник, является треугольник $A'B'C'$. Найдите расстояние между центроидами треугольников ABC и $A'B'C'$, если $AA' = a$; $BB' = b$; $CC' = c$.

Задача 10.4. Пусть M — точка пересечения диагонали AC' параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ и плоскости $A'BD$. Докажите, что M — центроид треугольника $A'BD$, и найдите, в каком отношении точка M делит диагональ AC'.

Задача 10.5. Сумма расстояний между серединами противолежащих сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру. Докажите, что этот четырёхугольник является параллелограммом.

Задача 10.6. Докажите, что:

а) точка пересечения средних линий четырёхугольника (отрезков, соединяющих середины противолежащих сторон) является серединой отрезка, соединяющего середины его диагоналей;

б) отрезки, соединяющие середины скрещивающихся рёбер тетраэдра, пересекаются в его центроиде и делятся точкой пересечения пополам.

Задача 10.7. Буратино зарыл клад в роще, где росло n деревьев. К месту клада он шёл так: сначала по прямой от первого дерева ко второму, пока не прошёл половину расстояния между этими деревьями; затем от этой точки он шёл в направлении третьего дерева, пока не прошёл треть расстояния от неё до дерева, оттуда повернул в сторону четвёртого дерева и прошел четверть расстояния до него, и так далее, пока не прошёл $\frac{1}{n}$ расстояния по направлению к n-му дереву и в этой точке выкопал яму. Беда в том, что Буратино забыл, каким образом пронумеровал деревья. Сколько ям должен выкопать Буратино, чтобы наверняка найти клад?

Список литературы

1. А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. *Геометрия для 8–9 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики.* — М.: Просвещение, 1991.

2. А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. *Геометрия для* 10–11 *классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики.* — М.: Просвещение, 1992.

3. М. Б. Балк, В. Г. Болтянский. *Геометрия масс.* — М.: Физматлит, 1987.

4. А. Д. Блинков. «*Сценарии уроков математики* (6–11 *классы*)», *предметно-содержательный журнал «Современный урок»*, ОЦ «Педагогический поиск», 2007–2011.

5. Н. Я. Виленкин, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. *Математика. Учебник для* 6 *класса средней школы.* — СПб, Свет, 1996.

6. М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. *Сборник задач по алгебре для* 8–9 *классов. Учебное пособие для школ и классов с углублённым изучением математики.* — М.: Просвещение, 1992.

7. А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. *Числовые средние и геометрия.* Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №9, 1990.

8. Р. К. Гордин. *Геометрия. Планиметрия. Задачник для* 7–9 *классов.* — М.: МЦНМО, 2004.

9. С. И. Зетель. *Новая геометрия треугольника.* — М.: Учпедгиз, 1963.

10. С. И. Зетель. *Свойства треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию.* «Математическое просвещение», №5, 1936.

11. Д. В. Клименченко. *Задачи по математике для любознательных*. — М.: Просвещение, 1992.

12. И. А. Кушнир. *Возвращение утраченной геометрии*. — К.: Факт, 2000.

13. И. А. Кушнир. *Геометрия на баррикадах*. — К.: Факт, 2009.

14. *Московские математические регаты* / Сост. А. Д. Блинков, Е. С. Горская, В. М. Гуровиц. — М.: МЦНМО, 2007.

15. В. В. Прасолов. *Задачи по планиметрии*: в 2 ч. — М.: Физматлит, 1995.

16. В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. *Задачи по стереометрии*. — М.: Физматлит, 1989.

17. А. П. Савин, В. А. Сендеров. *Описанная трапеция и средние*. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №8, 1972.

18. З. М. Скопец. *Сравнение различных средних двух положительных чисел*. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №2, 1971.

19. *Энциклопедический словарь юного математика*. / Сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.

20. А. Х. Шень. *Дюжина задач о среднем арифметическом*. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №6, 2008.

Список веб-ресурсов

1. `http://problems.ru/` — база задач по математике.

2. `http://geometry.ru/olimp.htm` — сайт всероссийской олимпиады по геометрии имени И. Ф. Шарыгина.

3. `olympiads.mccme.ru/regata` — математические регаты.

Оглавление

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (495) 745-80-31; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: biblio.mccme.ru/shop/order

Книги в электронном виде: www.litres.ru/mcnmo

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

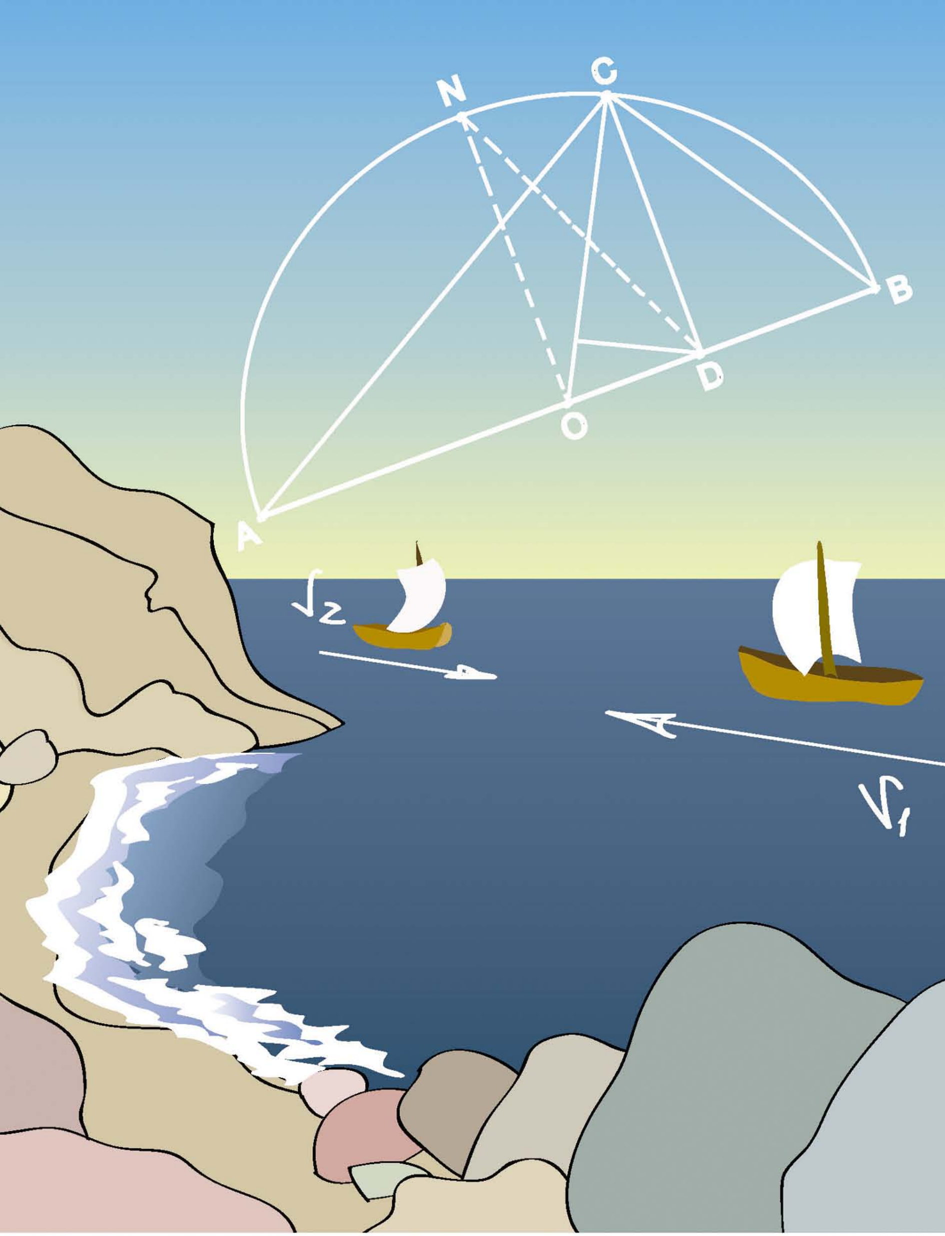
- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru



ISBN 978-5-4439-0931-8