
О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
1. Что в геометрии означает „построить“	5
2. Правда и вымысел	7
3. Двухтысячелетние поиски решения	9
4. Завершение поисков	13
5. Квадратура круга и потребности практики	17
6. Десять задач	19
7. Ответы и указания	22

Ответственный редактор В. А. КАМСКИЙ.

Набор и матрицы изготовлены в Типография № 1
им. Володарского, управление издательств и поли-
графии исполкома Ленгорсовета, Л-град, Фонтанка, 57.
М 49584. Подп. к печати 16/IV 1941 г. Заказ № 4021
Тираж 50.000 экз.

Отпечатано с матриц в тип. „Печатный Труд“.
Ленинград, В. О., 11 лин., д. 40. Зак. 2306

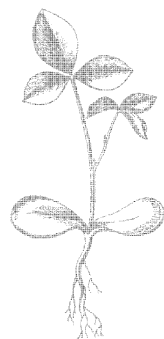




ДОМ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ НАУКИ

КВАДРАТУРА КРУГА

СОСТАВИЛ
Я. И. ПЕРЕЛЬМАН



Scan AAW

ЛЕНИНГРАД
1941

ПРЕДИСЛОВИЕ, КОТОРОЕ СЛЕДУЕТ ПРОЧЕСТЬ

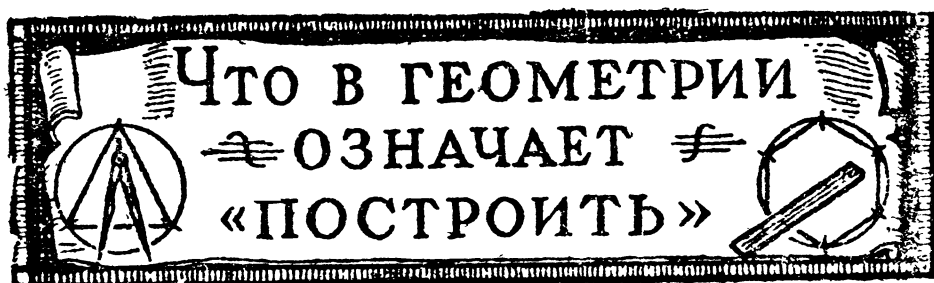
Из геометрических задач, поставленных математиками древности, выделяются три, замечательные тем, что они получили чрезвычайно широкую известность даже среди не-математиков. Задачи эти кратко формулируются так:

„Удвоение куба“: построить ребро куба, объем которого ввое больше объема данного куба.

„Трисекция угла“: разделить данный угол на три равные части.

„Квадратура круга“: построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга.

В нашей брошюре подробно рассматривается только третья, самая знаменитая из перечисленных задач — квадратура круга, вошедшая в поговорку. Читатель узнает, почему многовековые усилия решить эту задачу не приводили к успеху и почему нет никакой надежды разрешить ее когда-нибудь в будущем: квадратура круга (как и остальные две задачи нашего перечня) принадлежит к числу неразрешимых задач.



Прежде всего следует правильно уяснить себе требование задачи. Обратим внимание на то, что искомый квадрат предлагается „построить“. Это означает, что решение должно быть получено в результате пересечения прямых линий между собой, окружностей между собой или прямых с окружностями. Как бы сложно ни было геометрическое построение, оно должно расчленяться на ряд простейших операций двоякого рода. А именно:

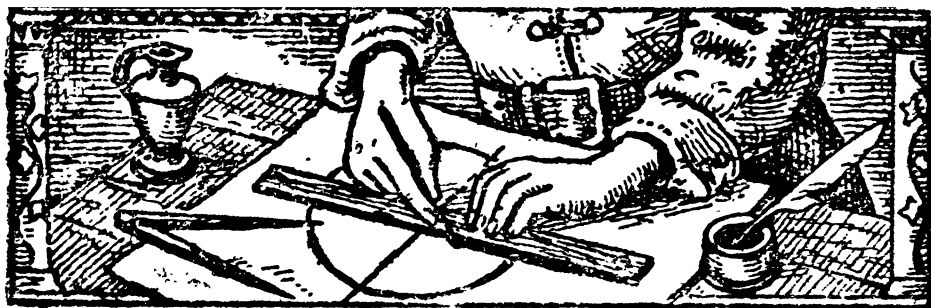
- 1) проведение прямой линии через две данные точки,
- 2) проведение окружности (или ее части, т. е. дуги) данным радиусом около данной точки, как центра.

Первый род операций выполняется помощью чертежной линейки; второй — циркулем. Поэтому рассматриваемое требование нередко высказывают в такой форме: задача должна быть решена „циркулем и линейкой“, подразумевая, что эти чертежные принадлежности употребляются только указанными

сейчас способами; никакое другое употребление линейки и циркуля при решении геометрических задач не допускается. Нельзя, например, пользоваться линейкой с делениями и вообще какими-либо метками, сделанными на линейке. Кроме того, ряд отдельных операций не должен быть бесконечен: построение, состоящее из бесконечного числа элементарных операций, не считается правильным решением задачи на построение.

Таковы требования, которым должно удовлетворять решение задачи о квадратуре круга.

Предпочтение, которое древние геометры при построениях отдавали прямой линии и окружности перед другими линиями, объясняется, по мнению Ньютона, тем, что прямые и окружности легче чертить, нежели все иные линии. Таким образом, условия, выдвинутые казалось бы чистой теорией, на самом деле имеют глубокие практические корни.



ПРАВДА И ВЫМЫСЕЛ

Условия, уточняющие требования задачи о квадратуре круга, известны только специалистам-математикам. В широких кругах любителей о них в большинстве случаев даже не подозревают. Преобладающая масса не-математиков приступает к решению этой задачи, понимая ее по-своему, упрощенно.

Чем, однако, объясняется чрезвычайная популярность задачи о квадратуре круга среди не-математиков и их настойчивые попытки отыскать ее решение?

Причиной является прежде всего кажущаяся простота содержания задачи. Даже не изучавшие геометрию знают, что такое квадрат и круг. Каждому представляется также известным, что надо разуместь под площадью фигуры. Отсюда возникает уверенность, что задача о квадратуре круга под силу и не присяжному математику. А то, что в продолжении ряда веков ее не могли разрешить подлинные математики, только подзадоривало самонадеянных искателей славы.

Но не одно честолюбие побуждало профанов браться за эту задачу. С древних времен сложилось ложное убеждение, будто квадратура круга является ключом ко многим тайнам природы и что ее разрешение должно повлечь за собой ряд новых открытий. Кроме того, распространен был слух.

будто английский парламент и правительство Голландии, назначившие премию за лучший способ определения географической долготы на море, обещали крупную награду также и за разрешение квадратуры круга. Верили почему-то в тесную связь обеих задач.

Ложные представления, связанные с квадратурой круга, способствовали широкой известности этой задачи и придали ей чрезвычайную заманчивость в глазах людей, недостаточно сведущих в математике. В этом отношении с нею могут сравниться лишь такие проблемы, как составление „жизненного эликсира“, отыскание „философского камня“ *) или изобретение „вечного двигателя“.

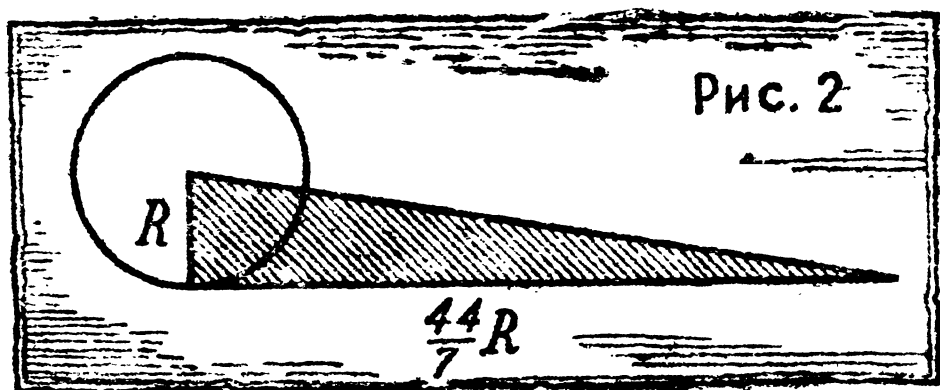
Число воображаемых решений квадратуры круга и других неразрешимых задач было встарину настолько велико, что Парижская академия наук еще в 1775 г. принуждена была выступить со следующим заявлением:

„Академия постановила не рассматривать отныне представляемых ей решений задач удвоения куба, трисекции угла, квадратуры круга, а также машин, долженствующих осуществить вечное движение“.

*) „Жизненный эликсир“ — напиток, будто бы дающий бессмертие. „Философский камень“ — вещество, которое, как верили алхимики, способно превращать дешевые металлы в золото.

ДВУХТЫСЯЧЕЛЕТНИЕ ПОИСКИ РЕШЕНИЯ

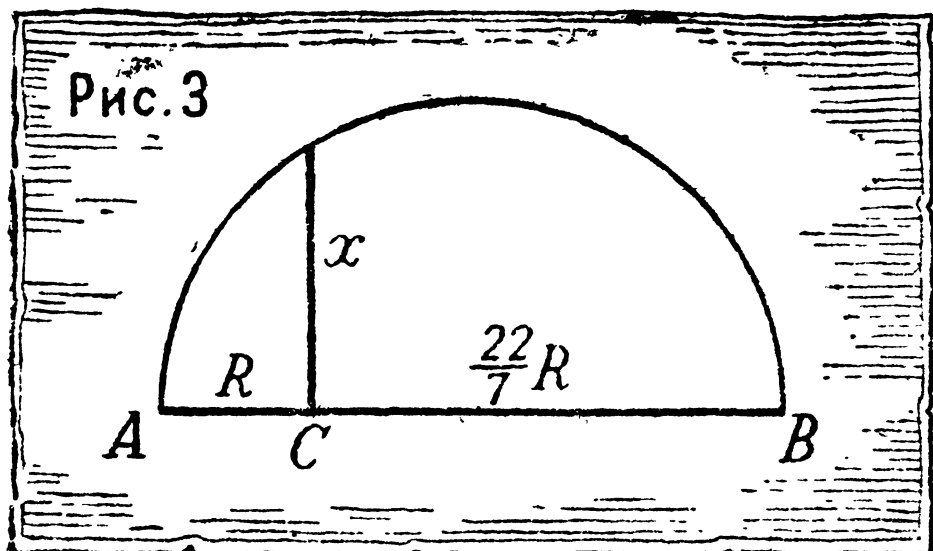
Великий математик древнего мира Архимед (III век до нашей эры) первый поставил задачу о квадратуре круга на научную основу. В сочинении „Измерение круга“ он доказал, что круг равновелик прямоугольному треугольнику, один катет которого есть радиус круга, а другой — выпрямленная окружность (рис. 2). Способ выпрямления окружности указан Архимедом в том же сочинении: длина окружности меньше $3\frac{1}{7}$ диаметра, но больше, чем $3\frac{10}{71}$ диаметра. Другими словами, Архимед доказал, что отношение длины окружности к ее диаметру, т. е. число, которое принято теперь обозначать греческой буквой π (ПИ), заключается между $3\frac{10}{71}$ и $3\frac{1}{7}$. Высший предел, $3\frac{1}{7}$, настолько близок к истинной величине, что



им часто пользуются на практике еще в наши дни; его называют „Архимедовым числом“.

Вытекающий из сказанного способ приближенного решения задачи о квадратуре круга весьма несложен. Построив прямоугольный треугольник с катетами

R и $\frac{44}{7} R$ (здесь R — радиус круга),



превращают его в равновеликий квадрат. Построение стороны x этого квадрата можно выполнить различными способами. Способ, показанный на рис. 3, основан на том, что перпендикуляр, опущенный из точки полуокружности на ее диаметр, есть среднепропорциональная между отрезками диаметра. Отложив на прямой последовательно $AC=R$ и $CB=\frac{22}{7} R$, строим на сумме этих отрез-

ков, как на диаметре, полуокружность; перпендикуляр в точке C есть искомая сторона x квадрата. В самом деле, из рис. 3 имеем

$$R : x = x : \frac{22}{7} R$$

откуда

$$x^2 = \frac{22}{7} R^2$$

т. е. площадь квадрата со стороною x приближенно равна площади круга.

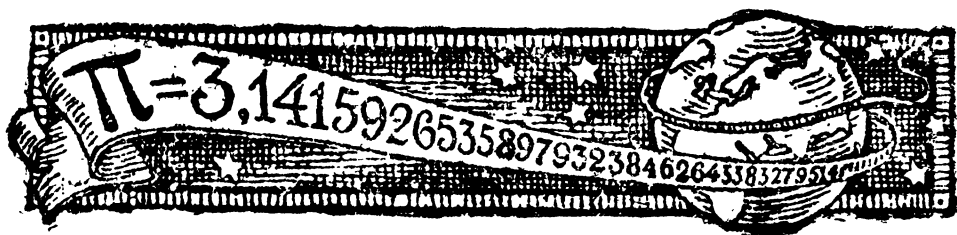
Чем точнее известно значение π , тем, очевидно, точнее может быть выполнено такое построение. Естественно поэтому, что позднейшие работы математиков над квадратурой круга были тесно связаны с получением возможно более точного π . В течение почти двух тысячелетий после Архимеда нахождение π велось по методу великого математика древности; способ Архимеда заключался в том, что площадь круга сравнивалась с площадями вписанных и описанных правильных многоугольников, число сторон которых последовательно удваивается. Совершенствуя метод Архимеда, позднейшие математики получали для π все более и более точные значения. Представленное в виде десятичных дробей, значение π выражалось десятками цифр. Так, голландский математик Лудольф ван-Цейлен, пользуясь методом Архимеда, вычислил (в

1615 г.) π с 31 верным десятичным знаком:
 $\pi = 3,1415926535897932384626433832795$.

(Эта дробь называется „Лудольфовым числом“). Оставалось, однако, неизвестным, имеет ли этот все удлиняющийся ряд цифр конец, или же он бесконечен.

Когда, во второй половине XVII века, открыто было исчисление бесконечно малых, эта отрасль высшей математики нашла более быстрые и удобные приемы вычисления π , нежели те, которыми располагает элементарная математика. Открыты были весьма важные для теории соотношения между числом π и другими математическими величинами. Наконец, выявлены были замечательные особенности числа π , бросившие новый свет на старинную задачу о квадратуре круга.

До настоящего времени известно 707 цифр в числе π . Они были вычислены в 1874 г. английским математиком Шенксом. Это „самое длинное π “ изображено под потолком зала математических развлечений Дома Занимательной Науки в Ленинграде, вдоль четырех стен помещения.



ЗАВЕРШЕНИЕ ПОИСКОВ

Каким бы путем ни приступать к задаче о квадратуре круга, она приводит к необходимости построить отрезок x , удовлетворяющий уравнению

$$x^2 = \pi R^2;$$

иначе говоря, задача приводит к построению формулы $x = R\sqrt{\pi}$. Чтобы установить, выполнимо ли это построение, нужно выяснить, какие вообще выражения могут быть построены циркулем и линейкой. В высшей математике (в той ее отрасли, которая называется аналитической геометрией) доказывается, что циркулем и линейкой могут быть построены только такие выражения, в состав которых входят действия сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения квадратного корня и никакие другие; при этом число перечисленных операций не должно быть бесконечно велико. Тем же условиям должны удовлетворять и числа, входящие в формулу: если они не даны прямо, они должны получаться в результате только перечисленных действий.

Так, например, следующая формула

$$\frac{2 + \sqrt{5(5 - 2\sqrt{5})}}{5}$$

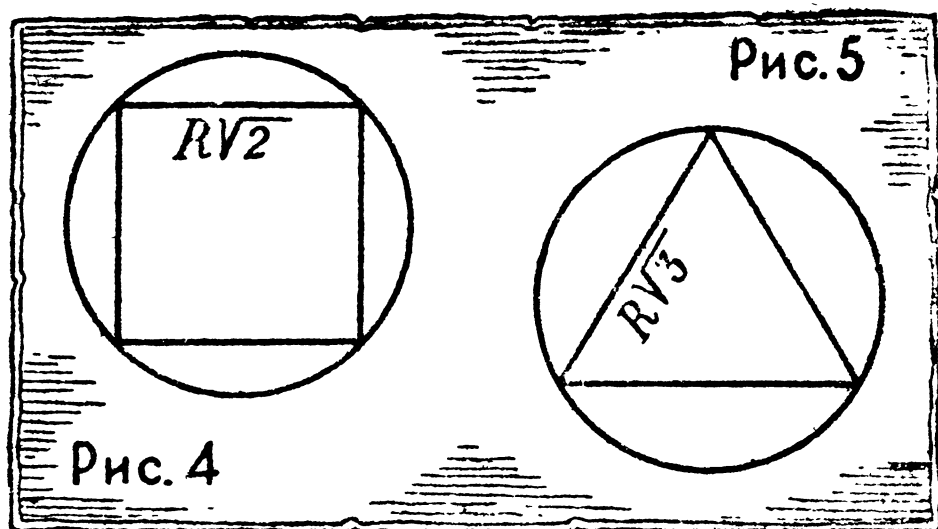
может быть построена (это — сторона правильного описанного десятиугольника). Напротив, простая на вид формула удвоения куба

$$a \sqrt[3]{2}$$

не может быть построена.

Обращаясь к формуле квадратуры круга, $x = R \sqrt{\pi}$, мы видим, что она включает только действия умножения и извлечения квадратного корня, т. е. операции, позволяющие выполнить построение. Однако, в формулу входит число π , и надо установить, допускает ли формула, содержащая это число, выполнение построения. Немецкий математик Ламберт доказал в 1766 г., что число π принадлежит к роду чисел, называемых несоизмеримыми (или иррациональными); такие числа не могут быть точно выражены конечным рядом цифр. Среди не-математиков распространено мнение, что неразрешимость квадратуры круга обусловлена несоизмеримостью числа π , так как нельзя будто бы построить число, выражающееся бесконечным рядом цифр. Это обоснование неправильно. Существует такой род несоизмеримых чисел, которые могут быть

построены. В качестве примеров укажем числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; они выражаются десятичными дробями с бесконечным рядом цифр после запятой, и тем не менее их легко построить: первое — как сторону вписанного квадрата (рис. 4), второе — как сторону вписанного равностороннего треугольника (рис. 5).



Вообще, все те числа, которые получаются путем однократного или повторного (но не бесконечного) извлечения квадратного корня, могут быть строго геометрически построены.

К этому роду несоизмеримых чисел π не принадлежит. В 1882 г. немецкий математик Линдеман опубликовал исследование, из которого вытекает, что число π не может

быть получено в результате конечного ряда извлечений квадратного корня. Тем самым устанавливается невозможность построения формулы квадратуры круга, а следовательно, и неразрешимость этой задачи.

Доказательство неразрешимости какой-либо задачи рассматривается в математике как своего рода решение проблемы, потому что такое утверждение дает вполне исчерпывающий ответ на поставленный вопрос. В этом смысле доказательство Линдемана можно считать решением задачи о квадратуре круга, решением, полагающим конец двухтысячелетней работе над этой проблемой. Продолжают искать другого решения задачи только малосведущие любители. „Таких искателей — писал еще в 18-м столетии математик Ламберт — всегда будет достаточно, и если судить о будущих по их предшественникам, то это будут по большей части люди, мало смыслящие в геометрии и лишенные возможности правильно оценивать свои силы. Там, где им не хватает знания и понимания, где они не могут ничего сделать с помощью правильных последовательных выводов, там жажда славы и денег создает софизмы, которые чаще всего не отличаются ни особой тонкостью, ни особой замысловатостью“

КВАДРАТУРА КРУГА И ПОТРЕБНОСТИ ПРАКТИКИ

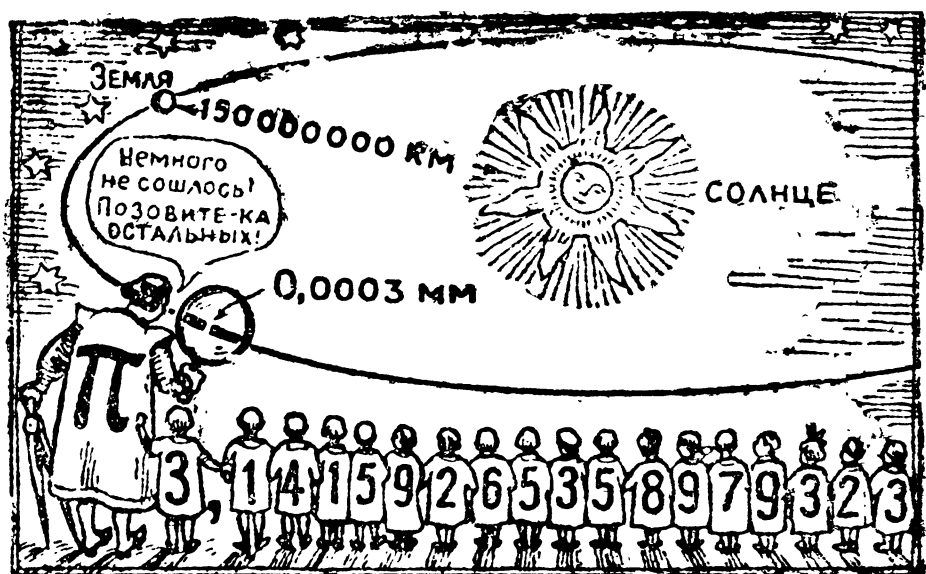
Остается рассмотреть еще вопрос: нужно ли точное решение квадратуры круга для практических расчетов? Оказывается, необходимости в точном решении этой задачи никогда практически не возникает. Достаточно располагать таким решением, которое давало бы приближенный результат с желаемой степенью точности; а этого можно достичь, пользуясь даже частью известных уже цифр в выражении π .

Какую точность можно получить этим путем, видно из слов знаменитого французского астронома прошлого века Франсуа Араго. В своей „Общепонятной астрономии“ (1849) он писал:

„Посмотрим, с какою точностью возможно, пользуясь цифрами π , вычислить длину окружности, радиус которой равен среднему расстоянию Земли от Солнца (150 000 000 км).

„Если для π взять 18 цифр, то ошибка на одну единицу в последней цифре повлечет за собой в длине вычисляемой окружности погрешность в 0,0003 миллиметра; это гораздо меньше толщины волоса. *)

*) „А площадь этого круга, — говорит Араго в другом месте книги, — можно вы-



„Мы взяли 18 цифр π . Легко представить себе, какую невообразимо малую погрешность сделали бы, при огромности вычисляемой окружности, если бы воспользовались для π всеми известными его цифрами.

„Из сказанного ясно, как заблуждаются те, которые думают, будто науки изменили бы свой вид, и их применения много выиграли бы от нахождения точного π , если бы оно существовало“.

Итак, даже для астрономии, — науки, прибегающей к наиболее точным вычислениям, — не требуется вполне точного решения квадратуры круга.

числить с точностью до величины пространства, занимаемого мельчайшей пылинкой“.



1. В старину при определении площади круглого участка землемеры часто поступали так: считали круг равновеликим квадрату, периметр которого равен длине окружности измеряемого участка. Какую относительную ошибку (в процентах) они при этом делали, если принять $\pi = 3,14$? (Этот способ восходит к временам древнего Египта: он указан, наряду с другими, в папирусе Ринда. В средние века он был широко распространен также в Европе).

2. В древней египетской рукописи (в „папирусе Ринда“) находим следующее правило для определения площади круга: она равна площади квадрата, сторона которого составляет $\frac{8}{9}$ диаметра круга. Определите относительную ошибку такого расчета в $\frac{0}{0}$, принимая $\pi = 3,14$.

3. У нас встарину употреблялся сходный с древнеегипетским (см. предыдущую задачу) прием вычисления площади круга, рекомендуемый старинными русскими руководствами по землемерному делу: площадь круга приравнивалась площади квадрата со

сторонами, равными $\frac{7}{8}$ диаметра. Какой способ точнее — этот или древнеегипетский?

4. Валлис нашел (1656 г.) для вычисления π следующий ряд

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot$$

и т. д.

Лейбниц вывел (1674) такое равенство:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ и т. д.}$$

Почему этими равенствами нельзя воспользоваться для точной квадратуры круга?

5. Индусский математик Брамагупта (VII век) предложил для π следующее приближенное выражение:

$$\pi = \sqrt{10}$$

Как помощью этого выражения приближенно решить задачу о квадратуре круга?

6. Проверьте следующее приближенное равенство:

$$\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Как воспользоваться этим соотношением для приближенной квадратуры круга?

7. Проверьте приближенное равенство

$$\pi = 1,8 + \sqrt{1,8}$$

Как воспользоваться им для приближенной квадратуры круга?

8. Проверьте следующее соотношение: периметр прямоугольного треугольника с катетами в $1 \frac{1}{5}$ и $\frac{3}{5}$ диаметра круга, приближенно равен длине окружности этого круга.

Как помощью этого соотношения приближенно решить задачу о квадратуре круга?

9. Голландский инженер Петр Меций нашел (в 1585 г.) для π легко запоминаемое выражение $\frac{355}{113}$. Представив его в виде десятичной дроби, установите, сколько в ней верных цифр.

10. Придумайте самостоятельно какое-нибудь правило, практически удобное для быстрого приближенного вычисления площади круга.



ОТВЕТЫ и УКАЗАНИЯ

1. Если радиус круга K , то площадь его πR^2 , а длина окружности $2\pi R$. Квадрат, площадь которого старинное правило принимает равной площади круга, имеет сторону длиною $\frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}$. Площадь такого квадрата равна

$$\left(\frac{\pi R}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2 R^2}{4}$$

Отношение

$$\frac{\pi^2 R^2}{4} : \pi R^2 = 0,785$$

показывает, что старинное правило дает преуменьшение почти на 22%.

2. Из отношения

$$\left(\frac{8}{9} \cdot 2R\right)^2 : \pi R^2$$

легко установить, что изложенное в задаче правило дает преувеличение примерно на 0,6%.

3. Правило дает преуменьшение примерно на 21/2%.

4. Оба выражения не решают задачи о квадратуре круга, потому что они не могут быть найдены помощью конечного числа математических операций.

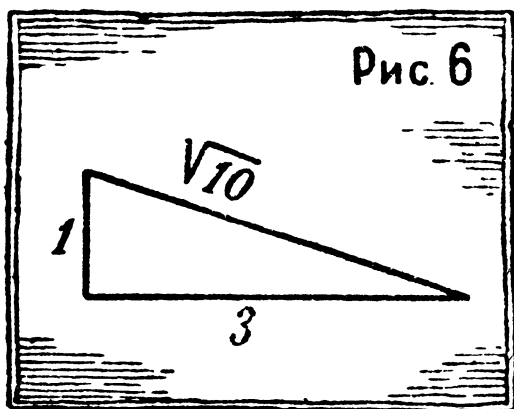
5. Построив (рис. 6) прямоугольный треугольник с катетами в 1 и 3 единицы длины, получаем гипотенузу длиной в $\sqrt{1+9}$, т. е. $\sqrt{10}$ тех же единиц. Этот отрезок приблизительно выражает длину окружности, диаметр которой равен взятой единице длины. Зная это, можно построить прямоугольник, приблизительно равновеликий кругу; таким прямоугольником будет, например, прямоугольник со сторонами в 1 и

$$\frac{1}{2} \sqrt{10}$$

единиц длины.

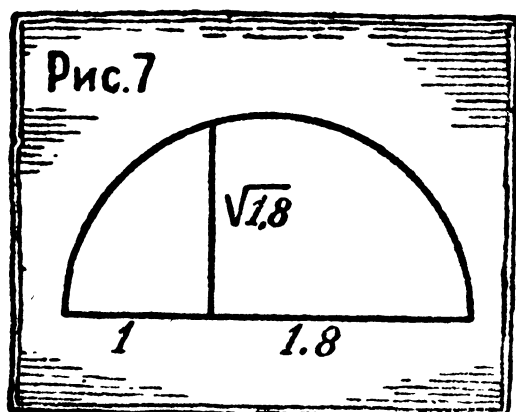
Построенный прямоугольник легко превратить в равновеликий квадрат.

(См. рис. 3 и относящийся к нему текст).



6. Сумма $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1,414 + 1,732 = 3,146$. Зная, что при радиусе, равном единице длины, $\sqrt{2}$ есть сторона вписанного квадрата (рис. 4), а $\sqrt{3}$ —сторона вписанного равностороннего треугольника (рис. 5), легко построить отрезок, приблизительно равный длине полуокружности. Дальнейший ход построения читатель найдет сам, руководствуясь указаниями, данными выше.

7. Сумма $1,8 + \sqrt{1,8} = 1,8 + 1,342 = 3,142$. Для построения отрезка в $1,8 + \sqrt{1,8}$ единиц длины, надо уметь построить отрезок равный $\sqrt{1,8}$ единиц длины. Построение может быть



выполнено, как нахождение средне-пропорционального между отрезками в 1 и 1,8 ед. длины (рис. 7). Далее — см. решения предыдущих задач.

8. Так как выражение

$$1\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \sqrt{\left(1\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

равно $1,8 + \sqrt{1,8}$, то задача является видоизменением предыдущей.

9. Семь верных цифр.

10. Подобных правил можно предложить много. Вот одно из возможных: площадь круга приблизительно равна $\frac{3}{4}$ площади описанного квадрата плюс половина десятой доли этой величины. Легко видеть, что здесь π принимается равным 3,15 — приближение достаточное для многих практических целей.