Теоретическая справка к лекции 3

Механическая работа. Если на тело, движущееся по прямой, действует постоянная сила $\vec{F}$, то механической работой A этой силы на перемещении $\vec{s}$ называется произведение

$$A = Fs\cos\alpha = F_s s,$$

где α - угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{s}$, а F_s - проекция силы на перемещение.

При движении тела по криволинейной траектории или изменении силы в процессе движения работа силы численно равна площади под кривой зависимости проекции силы на перемещение F_s от пути l.

Мощность. Средняя мощность $N_{ср}$ силы $\vec{F}$ - отношение работы A, совершенной силой $\vec{F}$ за время t, к интервалу времени t

$$N_{ср} = \frac{A}{t}.$$

Мгновенная мощность N

$$N = Fv\cos\alpha = F_v v,$$

где α - угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{v}$, а F_v - проекция силы на скорость.

Кинетическая энергия. Кинетическая энергия материальной точки (или поступательного движения тела) определяется формулой

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

Изменение кинетической энергии тела на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на тело на том же перемещении

$$\Delta K = K_2 - K_1 = A_1 + A_2 + \ldots = A.$$

Сила называется консервативной, если ее работа A при перемещении тела из точки B в точку C не зависит от траектории движения тела, а определяется только начальным и конечным его положениями. Примеры консервативных сил – сила тяжести и сила упругости. Пример неконсервативной силы – сила трения.

Любой консервативной силе соответствует потенциальная энергия, зависящая только от расположения тела в пространстве или от относительного расположения его частей).

Потенциальная энергия в однородном поле силы тяжести для тела массой m определяется выражением

$$П = mgh,$$

где g - модуль ускорения свободного падения, h отсчитывается от произвольно выбранного «нулевого уровня». Для протяженного тела h - высота центра тяжести.

<u>Потенциальная энергия силы упругости</u> для пружины с жесткостью k равна

$$\Pi = \frac{kx^2}{2},$$

где x - деформация пружины.

<u>Механическая энергия системы тел</u> определяется как сумма кинетической энергии системы и потенциальной энергии взаимодействия всех тел системы

$$E = K + \Pi.$$

Механическая энергия замкнутой консервативной системы тел сохраняется.

<u>Изменение механической энергии</u> системы тел под действием внешних сил и внутренних неконсервативных сил равно суммарной работе этих сил

$$\Delta E = A_{внеш} + A_{неконс}.$$

Если система является замкнутой, то работа неконсервативных сил приводит к изменению внутренней энергии тел. При действии диссипативных сил (трение, неупругий удар) происходит увеличение внутренней энергии (выделяется теплота Q) за счет убыли механической энергии

$$E_1 = E_2 + Q, Q \geq 0.$$

<u>Абсолютно неупругий удар (неупругое взаимодействие).</u> После удара тела движутся вместе, как единое целое. Выполняется закон сохранения импульса в форме

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

или проекции импульса на направление, для которого равна нулю равнодействующая внешних сил.

Возможны ситуации, когда после неупругого удара скорости тел различны, например, пуля пробивает деревянный шар. В этом случае закон сохранения импульса следует записывать в виде

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2.$$

При <u>любом</u> неупругом ударе механическая энергия <u>не сохраняется</u>. Часть начальной механической энергии системы идет на изменение внутренней энергии системы

$$E_{мех,1} = E_{мех,2} + \Delta E_{вн},\ E_{мех,1} > E_{мех,2}.$$

Например, при столкновении двух кусков пластилина $\Delta E_{вн} = Q > 0$ - количество выделившейся теплоты, а при столкновении электрона и атома водорода $\Delta E_{вн}$ - изменение «внутренней» энергии атома водорода (атом водорода переходит в состояние с бóльшим значением «внутренней» энергии).

Упругий удар. При упругом столкновении выполняются законы сохранения механической энергии и импульса

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Центральный удар. Столкновение двух шаров называется центральным, если векторы скоростей шаров перед ударом параллельны линии, соединяющей центры шаров. После такого удара шары двигаются вдоль этой же линии.

Закон сохранения механической энергии можно применить и к ***течению жидкости***, если в последней пренебрежимо малы силы вязкого трения. Таким образом получают т.н. уравнение Бернулли для течения *идеальной несжимаемой* жидкости:

$$\frac{\upsilon^2}{2} + gh + \frac{P}{\rho} = const$$, где P –давление жидкости.

Гармонические колебания.

Механическими гармоническими колебаниями называются колебания, при которых координата x (или смещение) тела изменяется во времени по закону синуса (или косинуса)

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $A, (A > 0)$ - *амплитуда*, аргумент косинуса $\varphi = \omega t + \varphi_0$ - *фаза* (измеряется в радианах), а $\omega, (\omega > 0)$ - *циклическая (круговая) частота* колебаний (измеряется в рад/с). Величина φ_0 - начальная фаза колебаний. Период T и частота колебаний ν определяются выражениями

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Частоту ν измеряют в *герцах.*

Кинематика гармонических колебаний. Изменение во времени проекции скорости $v_x(t)$ и проекции ускорения $a_x(t)$ определяется следующим образом

$$v_x(t) = x'(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0),$$
$$a_x(t) = v_x'(t) = x''(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Амплитуды колебаний (максимальные значения) скорости и ускорения равны

$$v_{max} = \omega A, \quad a_{max} = \omega^2 A.$$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. При гармонических колебаниях ускорение тела и смещение связаны соотношением

$$x'' + \omega^2 x = 0,$$

которое называется *дифференциальным уравнением гармонических колебаний.*

Возвращающая сила определяется выражением

$$F_x = ma_x = mx'' = -m\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Максимальное значение возвращающей силы равно $F_{max} = m\omega^2 A$.

Пружинный маятник. Циклическая частота и период колебаний груза массой m на пружине жесткостью k определяется выражениями

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Математический маятник – материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити длиной l. Циклическая частота и период математического маятника, совершающего малые колебания в поле силы тяжести (g - ускорение свободного падения), определяется выражениями

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}},\ T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Определение частоты (или периода) гармонических колебаний. Для определения этих величин нужно сначала получить дифференциальное уравнение колебаний в виде, указанном выше. Тогда коэффициент перед x в полученном уравнении и будет являться квадратом циклической частоты колебаний.

Дифференциальное уравнение колебаний может быть получено из второго закона Ньютона («силовой» метод), либо из закона сохранения энергии («энергетический» метод).

Если механическая энергия E некоторой системы зависит от некоторого параметра x (например, смещение или угол) по закону

$$E = \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta(x')^2}{2} = const,$$

где x' - производная по времени, а α и β - некоторые константы, то параметр x будет изменяться по гармоническому закону с циклической частотой $\omega = \sqrt{\alpha/\beta}$.