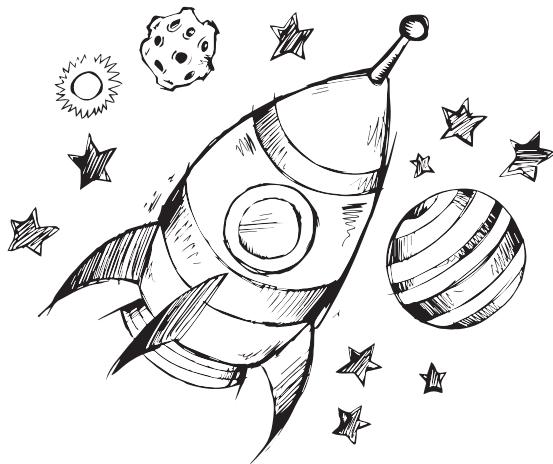


Астрапад

сборник теории по астрономии



2024

ББК 22.6
А 91
УДК 52

Рецензент:
учитель астрономии М. В. Кузнецов (МОУ Гимназия №1 г. о. Жуковский)

Редакторы:
выпускник Московского государственного университета А. В. Афанасьев,
магистр политехнического института Гренобля, магистр Московского физико-
технического института В. А. Сушко

А. С. Шепелев, С. А. Суглобов, С. Б. Борисов. Астрадъ — краткий
сборник теории по астрономии. 2024. — 247 с: 3-е изд. ISBN 978-5-
9909877-2-2

Астрадъ является учебным пособием по астрономии, рекомендованным для
школьников 7 – 11 класса. Сборник составлен неоднократными призерами меж-
дународных олимпиад по астрономии, членами астрономического кружка им. Е. П. Лев-
итана г. о. Жуковский.

Здесь читатель сможет найти необходимый минимум теории для участия
в различных олимпиадах школьников по астрономии. Также Астрадъ можно
использовать и для освоения школьной программы, потому что наряду со слож-
ными темами освещены и самые базовые вопросы астрономии.

Вёрстка: А. С. Шепелев

ISBN 978-5-9909877-2-2

© А. С. Шепелев, С. А. Суглобов,
С. Б. Борисов, 2024
© Астрономический кружок
им. Е. П. Левитана г. о. Жуковский, 2024

Предисловие

Приветствую тебя, дорогой читатель! Я, Шепелев Алексей Сергеевич, один из авторов данной книги, хочу познакомить тебя с Астрадью поближе и дать несколько рекомендаций по работе с ней. Да-да, именно работе, а не прочтению, так как материал, собранный в этой книге необходимо тщательно прорабатывать, чтобы извлечь из него максимальную пользу.

Исторический экскурс

Позволю себе отвлечься и рассказать о себе. В школе я увлекался астрономией, как и многие мои друзья, кто, собственно, стал ими благодаря этой науке. С кем-то мы вместе ходили в один кружок им. Е. П. Левитана под руководством Кузнецова Михаила Владимировича в небольшом подмосковном городе Жуковский, с кем-то познакомились на областных сборах, пройдя отбор на заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников (всеросс), а с кем-то уже на учебно-тренировочных сборах для призёров и победителей всеросса — кандидатов в сборную РФ по астрономии. А кто-то поддерживал меня перед наблюдательным туром Международной олимпиады школьников (IAO).

Вероятно, у тебя, читатель, возник вопрос: получается, ты, автор, добился всего, чего может пожелать олимпиадник в школьные годы? Возможно... Скажу одно, я точно был счастлив, видимо, поэтому вспоминаю те годы с таким трепетом и теплом.

Однако я так и не завоевал ни одной золотой медали на международных олимпиадах. Почему? Самое очевидное — недоработал. Жалею? Возможно. Но сейчас речь не об этом. Парадокс — я боялся читать книжки. Нет-нет, не шучу. Я боялся даже начать читать книжку, если она должна была стать сложной. Это и привело меня к написанию данного предисловия.

Впервые Астрадь была напечатана на обычном принтере уже в далеком 2013 году Борисовым Святославом Борисовичем тогда учеником 11 класса Гимназии №2 города Раменское и упомянутого выше астрономического кружка. Он сверстал её в MS Word, собрав в брошюре на 40 страниц самые важные и известные законы и формулы, знание которых могло пригодиться участнику олимпиады по астрономии. Он сделал это для друзей, которых подарила ему, как и мне, астрономия.

Спустя год, 8 апреля 2014 года, на всероссе в Великом Новгороде за завтраком я листал электронный вариант той, самой первой, Астради. Взгляд остановился на неизвестной мне тогда формуле относительного отверстия. Ровно через сутки стало известно, что я получил полный балл за решение задач теоретического тура, что произошло впервые за всю историю олимпиады. Кстати, там была задача про относительное отверстие.

В 2017 году появилась мысль сверстать Астрадь в \LaTeX , дополнить, но оставить оригинальный формат небольшой брошюры, которая не испугает даже самого юного читателя. Весной 2018 года перед всероссом было напечатано первое официальное издание Астради: в типографии, с ISBN кодом, тиражом 500 экземпляров. Участники всеросса 2018 года в Волгограде по достоинству оценили это достижение. Позже были исправлены найденные опечатки, и в декабре 2020 года было напечатано второе издание чуть меньшим тиражом.

Тогда помимо учебы в университете, я часто преподавал на учебных сборах по астрономии, в том числе на областных в Московской области. Где и узнал неприятный для себя факт: недобросовестные школьники не пытаются разобраться и понять формулы и соотношения, приведенные в Астради с весьма немногословными объяснениями, а лишь пробуют найти в книжке буквы, а правильнее сказать переменные, из условия задачи.¹

Это и побудило к пересмотру самой идеи Астради. Было решено добавить в неё вывод формул и полезных фактов, существенно увеличить объём, а повествование вести в более общих терминах, сместив фокус с частных случаев на разбор фактов в общем виде. Кроме этого хотелось приоткрыть дверь в науку, показать подходы, идеи и методы. Так появилась на свет книжка, которую ты держишь перед собой.

Инструкция

Как было сказано выше, это предисловие — попытка помочь тебе не испугаться объема книги, математических преобразований и функций, физических законов, моделей и приближений, встречающих с первой страницы.

¹Например, орбита с эксцентриситетом i и наклонением e из условия задачи имела бы в решении совершенно другую форму и ориентацию в пространстве.

Не бойся **преобразований**. Мы постарались изложить все настолько подробно, чтобы любое «очевидно, что» было действительно очевидно, конечно, только при условии внимательного изучения предыдущего материала. Не пропускай подробные выкладки, только проделав их самостоятельно, ты действительно прочувствуешь полученный результат.

Не бойся **сложных формул**. Любая сложная, может быть где-то страшная, запись — это лишь краткое представление какого-то факта. Читай и разбирайся в определениях, это приведёт к лучшему пониманию материала. Любой факт имеет частные случаи, особые формы при некоторых приближениях. Начинай с них, простых случаев, это поможет сэкономить время в критических ситуациях. Едва ли кто-то решает задачи в максимально общем виде, разве что суперкомпьютеры.

Не бойся **искать**. В книге приведены определения основных математических и физических понятий, но все-таки это книга по астрономии. Так что не бойся разбираться с каждым непонятным словом или математическим оператором, выходя за пределы Астради.

Не бойся **исследовать**. Астрадь стала больше, но она не стала учебником. Мы постарались упорядочить разделы в порядке зависимости одного от другого, но часто оказывается, что связь разделов имеет различное направление в зависимости от глубины погружения в тему. Поэтому вряд ли имеет смысл читать Астрадь по порядку от корки до корки. Советую тебе шаг за шагом открывать для себя новые разделы, проходя каждый не один и даже не два раза. Первое знакомство может быть поверхностным, лишь узнать ключевую формулу. Второе, например, поможет разобраться с выводом, получить понимание причинности используемой формулы. А, к примеру, в третий раз получится разобраться со следствиями уже знакомого закона.

Не бойся не запомнить — гораздо важнее **понять** и **ловить идею**. Не все выводы и факты необходимо знать наизусть, только самые важные. Цель авторов этого издания не только снабдить читателя необходимыми формулами и фундаментальными фактами, но и доступно показать возможные подходы к формализации законов природы порой далеко не школьным методами. Некоторые выводы и факты можно воспринимать, как решение некой абстрактной задачи.

Не бойся **изучать иллюстрации**. Не побоюсь громких слов, в иллюстрации вложена душа. И сотни часов работы, конечно. Иллюстраций много, они разнообразны: схемы, графики, диаграммы, модели, фотографии. Внимательно изучи каждую. Визуальная память — самая сильная среди всех видов памяти. Кроме этого иллюстрации помогают со-

здать визуальный образ, помогающий в решении задач и дальнейшем изучении астрономии, который удается хорошо и надолго запомнить.

Не бойся **читать статьи и другие книги**. Мы постарались наполнить Астрадь ссылками на всевозможные источники, где либо приведен оригинальный материал по теме, либо тема разобрана существенно глубже, чем это может позволить формат данной книги. Для твоего удобства список литературы снабжен QR кодами со ссылками на печатные версии упоминаемых источников. Часть статей на английском, большинство книг — университетские учебники. Но это не должно отталкивать тебя: нет никакой необходимости читать их полностью, попробуй разобраться в соответствующем разделе. Уверен, у тебя получится!

Удачи!
Алексей Шепелев

Содержание

1 Геометрическая астрономия	10
1.1 Расстояние и размеры	10
1.2 Параллактический эллипс	11
1.3 Кеплеровы элементы орбиты	13
1.4 Затмения	15
1.5 Конфигурации планет	23
1.6 Фазы планет и спутников	25
1.7 Собственное движение звёзд	26
1.8 Картографические проекции	28
2 Небесная механика	34
2.1 Закон всемирного тяготения	34
2.2 Круговое движение	36
2.3 Закон сохранения энергии	39
2.4 Теорема о вириале	40
2.5 Закон сохранения момента импульса	42
2.6 Эффективный потенциал	44
2.7 Момент инерции	45
2.8 Движение по орбите	46
2.9 Законы Кеплера	48
2.10 Задача двух тел	53
2.11 Типы орбит	55
2.12 Уравнение Кеплера	56
2.13 Гиперболическое уравнение Кеплера	59
2.14 Уравнение Баркера	60
2.15 Точки Лагранжа	61
2.16 Сфера действия, сфера Хилла	66
2.17 Гравитационный манёвр	70
2.18 Годограф	72
2.19 Приливные силы	73
2.20 Синодический период	75
2.21 Ретроградное движение и точки стояния	78
2.22 Прецессия	82
3 Конические сечения	83
3.1 Эллипс	83
3.2 Парабола	88
3.3 Гипербола	92
4 Астрофизика	97
4.1 Звёздные величины	97
4.2 Закон Стефана-Больцмана	99
4.3 Энергия излучения	101
4.4 Альbedo	102
4.5 Энергия и импульс фотона	103
4.6 Линии излучения и поглощения	103
4.7 Формула Планка	105
4.8 Количество фотонов. Средняя Энергия	106

4.9	Закон смещения Вина	107
4.10	Эффект Доплера. Красное смещение	108
4.11	Давление излучения	110
4.12	Предел Эддингтона	110
4.13	Гравитационное линзирование	111
4.14	Шкала электромагнитных волн	111
4.15	Оптическая толщина. Закон Бугера – Ламберта – Бера	112
4.16	Фотометрия. Показатель цвета	114
4.17	МКТ и термодинамика	115
4.18	Атмосфера Земли	117
4.19	Оптические атмосферные эффекты	120
4.20	Давление и температура в центре звезды	129
4.21	Теорема Гаусса	130
5	Специальная теория относительности	132
5.1	Аксиомы	132
5.2	Интервал	132
5.3	Преобразования Лоренца	134
5.4	Эффекты СТО	135
5.5	Закон сложения скоростей	135
5.6	Ускорение	136
5.7	Импульс	136
5.8	Энергия	137
5.9	Быстроота	138
5.10	Аберрация	139
5.11	Эффект Доплера	139
6	Космология	139
6.1	Кинематика	140
6.2	Динамика	142
6.3	Расстояния в космологии	147
7	Оптика	151
7.1	Телескоп	151
7.2	Виньетирование	153
7.3	Монтировки телескопов	154
7.4	Параметры телескопа	155
7.5	Формула тонкой линзы	157
7.6	Закон Снеллиуса	158
7.7	Аберрации в оптике	159
7.8	Дифракция	168
8	Сферическая астрономия	175
8.1	Системы небесных координат	176
8.2	Суточное вращение небесной сферы	179
8.3	Сферическая тригонометрия	180
8.4	Годичное движение Солнца	183
8.5	Солнечное время. Уравнение времени	185
8.6	Рефракция	188
8.7	Сумерки	189

9	Объекты космоса	190
9.1	Солнце	190
9.2	Спектральные классы звёзд	192
9.3	Переменные звёзды	194
9.4	Вырожденные звёзды	195
9.5	Чёрные дыры	196
9.6	Галактики	197
9.7	Рассеянные звёздные скопления	198
9.8	Шаровые звёздные скопления	200
9.9	Планетарные туманности	201
10	Магнетизм	203
10.1	Магнитное поле	203
10.2	Связь магнитных и электрических полей	204
10.3	Сила Ампера и сила Лоренца	205
11	Математика	206
11.1	Вектор	206
11.2	Системы координат	207
11.3	Матрица	209
11.4	Скалярное произведение	216
11.5	Векторное произведение	217
11.6	Смешанное произведение	218
11.7	Прямая	219
11.8	Плоскость	220
11.9	Производная	222
11.10	Интеграл	223
11.11	Телесный угол	225
11.12	Формулы приближенного вычисления	226
11.13	Дифференциальные уравнения	228
12	Практическая астрономия	230
12.1	Радиус дуги окружности	230
12.2	Метод наименьших квадратов	231
12.3	Погрешности	233
12.4	Построение графиков	235
	Приложение	243

1 Геометрическая астрономия

1.1 Расстояние и размеры

В астрономии наравне с единицами Международной системы единиц, СИ, используются внесистемные единицы измерения длины. Одна из них, **Астрономическая единица** — единица измерения расстояния в астрономии,

$$1 \text{ а. е.} = 149\,597\,870\,700 \text{ м} \simeq 1.5 \times 10^{11} \text{ м}, \quad (1.1)$$

величина которой близка к длине большой полуоси орбиты Земли. Точное значение было привязано к метру на Генеральной Ассамблее Международного Астрономического Союза в 2012 году [1].

Астрономическая единица используется для описания расстояний между объектами Солнечной системы и экзопланетных систем. Расстояния между звездами и размеры более крупных формирований имеют существенно большую величину, чем астрономическая единица, поэтому здесь она не используется.

Первым методом определения расстояния до звёзд был *годичный параллакс*, основанный на видимом движении звезды в результате орбитального движения Земли. **Годичный параллакс** p объекта — это угол, под которым отрезок длины 1 а. е. из окрестностей данного объекта, применяется к объектам вне Солнечной системы.

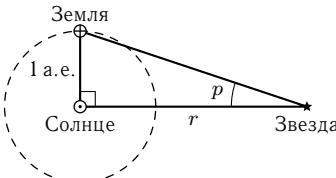


Рис. 1 – Схема годичного параллакса

$$\operatorname{tg} p = \frac{1 \text{ а. е.}}{r}, \quad (1.2)$$

где r — расстояние до объекта. Учитывая малость угла p , можно считать $\operatorname{tg} p \simeq p$ в (1.2), тогда

$$p \simeq \frac{1 \text{ а. е.}}{r}. \quad (1.3)$$

С помощью параллакса вводится ещё одна внесистемная единица длины, используемая в астрономии, — **парсек**. Это такое расстояние r , что, находясь на нём, произвольный объект имеет годичный параллакс $p = 1''$. Напомним,

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{10800'}{\pi} = \frac{648000''}{\pi} \simeq 206265'',$$

следовательно,

$$1 \text{ ПК} = \frac{648000}{\pi} \text{ а. е.} \simeq 3.085677581 \cdot 10^{16} \text{ м} \simeq 206265 \text{ а. е.} \quad (1.4)$$

В силу определение парсека, справедливо соотношение

$$r [\text{ПК}] = \frac{1 [\text{а. е.}]}{\pi ["]}. \quad (1.5)$$

Достаточно часть в астрономии имеет значение **угловой размер объекта** — угол, под которым видно объект. Для несимметричных объектов понимается некая средняя величина, для объектов с осевой симметрией, например галактик, указывается два размера вдоль каждой из осей. Для сферически симметричных объектов с радиусом R , угловой размер (диаметр) при наблюдении с расстояния r , см. Рис. 2, определяется как

$$\rho = 2 \arcsin \frac{R}{r}. \quad (1.6)$$

Рис. 2 – Угловой размер

В случае, когда $r \gg R$, можно считать, что $\sin \rho \simeq \rho$, тогда

$$\rho \simeq \frac{2R}{r}. \quad (1.7)$$

Для определения расстояния до объектов Солнечной системы также используется метод параллакса. Измеряемая величина p называется **горизонтальным параллаксом**, см. Рис. 3, — это угловой радиус Земли при наблюдении из окрестностей

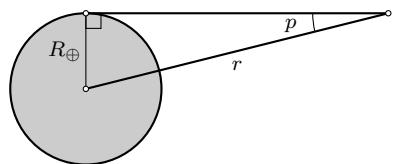


Рис. 3 – Горизонтальный параллакс объекта?

$$\sin p = \frac{R_{\oplus}}{r}. \quad (1.8)$$

Так, средний горизонтальный параллакс Луны $p_{\text{Л}}$ составляет около 1° , а Солнца — $p_{\odot} \approx 9''$.

1.2 Параллактический эллипс

Движение Земли по орбите вокруг Солнца сопровождается изменением видимого положения объектов вне Солнечной системы. Воспользуемся

приближением, что орбита Земли круговая, тогда ее проекция на произвольную плоскость — эллипс с большой полуосью, равной радиусу орбиты Земли a_{\oplus} .

Согласно определению, величина параллакса — это угловое расстояние между Солнцем и наблюдателем при наблюдении из окрестностей объекта. Для его получения достаточно спроектировать положение наблюдателя на картинную, относительно объекта, плоскость, проходящую через Солнце; найти расстояние x между проекцией и Солнцем; из отношения x и расстояния до объекта вычислить параллакс.

Рассмотрим объект с гелиоцентрическими эклиптическими координатами λ и β . Проекция орбиты Земли на картинную плоскость относительно такого объекта — эллипс с большой полуосью a_{\oplus} и малой b , где $b = a_{\oplus} \sin \beta'$, см. Рис. 4.

Угол β , как внешний угол треугольника, связан с углами β' и π_{β} соотношением $\beta = \beta' + \pi_{\beta}$, однако в силу малости угла π_{β} можно считать, что $\beta = \beta'$.

В приближении круговой орбиты движение Земли циклично, а значит, траектории объектов относительно геоцентрической системы координат также цикличны. Чтобы установить, что из себя представляют данные траектории необходимо спроектировать траекторию движения Земли на плоскость, перпендикулярную лучу зрения на объект.

Проекция окружности всегда эллипс, кроме вырожденного случая — отрезка, когда угол проекции составляет 90° . Так как проецирование с углом η между плоскостями — тоже самое, что сжатие с коэффициентом $1/\cos \eta$.

Траектория Земли для наблюдателя, находящегося в окрестности объекта — эллипс. Тогда понятно, что траектория объекта для наблюдателя на Земле также является эллипсом. Причем большая полуось этого эллипса равна параллаксу объекта $\pi = a_{\oplus}/r \equiv \pi_{\lambda}$, где r — гелиоцентрическое расстояние до объекта, а малая полуось

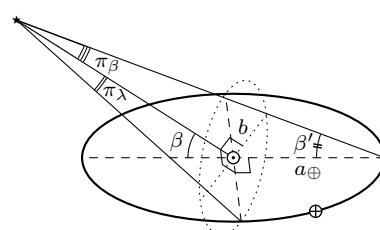


Рис. 4 – Схема построения параллактического эллипса

$$\pi_{\beta} = \frac{a_{\oplus} \cos \eta}{r}.$$

Траектория (эллипс) видимого годичного движения объектов называется **параллактическим эллипсом**, эксцентриситет которого

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi_\beta}{\pi_\lambda}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{r \cdot a_\oplus \cos \eta}{a_\oplus \cdot r}\right)^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \eta} = \sin \eta = \cos \beta,$$

где β — эклиптическая широта объекта.

1.3 Кеплеровы элементы орбиты

Кеплеровы элементы используют для описания положения в пространстве тел, находящихся на орбите вокруг заданного гравитирующего центра. Это шесть параметров: первые два из них определяют геометрию орбиты тела — это **большая полуось** (a) и **эксцентриситет** (e). Следующие три описывают положение орбиты в пространстве: **наклонение** (i), **аргумент перигея** (ω) и **долгота восходящего узла** (Ω). Последний — **истинная аномалия** (ν), задает положение тела на орбите.

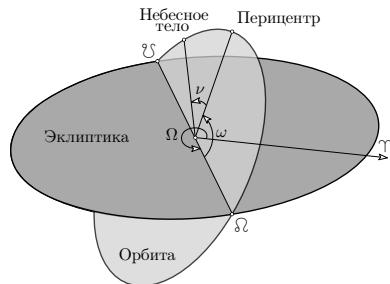


Рис. 5 – Кеплеровы элементы орбиты

Для использования кеплеровых элементов для описания положения тел первоначально необходимо задать систему отсчета — выбрать базовую плоскость, проходящую через гравитирующий центр и луч в этой плоскости, исходящий из него. Для описания положения тел Солнечной системы за базовую плоскость принимают плоскость эклиптики, а за луч — направление на точку весеннего равноденствия, при описании положения тел в околопланетном пространстве — плоскость экватора и луч, образованный пересечение экватора и нулевого меридиана.

Истинная аномалия тела, движущегося по орбите — угол в плоскости орбиты с вершиной в фокусе этой орбиты между направлениями на перигея орбиты и на тело. Возрастает в ходе орбитального движения, изменяется в промежутке $[0^\circ, 360^\circ]$.

Аргумент перигея — угол между направлениями на восходящий узел орбиты и на перигея при наблюдении из притягивающего центра (фокуса орбиты). Откладывается в сторону орбитального движения, может иметь значению в промежутке $[0^\circ, 360^\circ]$.

Наклонение — это угол между плоскостью орбиты небесного тела и плоскостью эклиптики. Принимает значения от 0° до 90° .

Долгота восходящего узла — угол в базовой плоскости между базовым направлением и направлением восходящий узел орбиты. Отсчитывается против часов стрелки при наблюдении из северного полупространства, лежит в промежутке $[0^\circ, 360^\circ]$.

Узлы орбиты — точки пересечения орбиты и базовой плоскости. *Восходящий узел* — точка, в которой тело пересекает базовую плоскость при движении в северном направлении, а *нисходящий* — в южном.

Кеплеровы элементы являются *углами Эйлера*, описывающими поворот абсолютно твердого тела в трёхмерном евклидовом пространстве. Введём прямоугольную декартову систему координат, связанную с орбитой тела: фокус — начало координат, направление наperiцентр — ось x , ось z — нормаль к плоскости орбиты в северном полупространстве. Ось y — луч в плоскости орбиты такой, чтобы направляющие вектора \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z образовывали правую тройку.

Найдём правила перехода из описанной системы координат в прямоугольную декартову систему координат, связанную с базовой плоскостью и лучом. Положение тела в орбитальной системе координат можно определить вектором $\mathbf{r} = (r \cos \nu, r \sin \nu, 0)$. Перейдем в систему координат, повернутую на угол $-\omega$ вокруг оси z :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= Z'_\omega \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \nu \\ r \sin \nu \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} r \cos \nu \cos \omega - r \sin \nu \sin \omega \\ r \cos \nu \sin \omega + r \sin \nu \cos \omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\nu + \omega) \\ r \sin(\nu + \omega) \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ось x текущей системы координат совпадает с направлением на восходящий узел орбиты. Перейдем в систему координат, повернутую на угол $-i$ вокруг оси x :

$$\mathbf{r}'' = X'_i \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos(\nu + \omega) \\ r \sin(\nu + \omega) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\nu + \omega) \\ r \sin(\nu + \omega) \cos i \\ r \sin(\nu + \omega) \sin i \end{pmatrix}.$$

Теперь ось z является нормалью к базовой плоскости. Повернём оси координат на угол $-\Omega$ вокруг оси z :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}''' &= Z'_\Omega \mathbf{r}'' = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos(\nu + \omega) \\ r \sin(\nu + \omega) \cos i \\ r \sin(\nu + \omega) \sin i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} r \cos(\nu + \omega) \cos \Omega - r \sin(\nu + \omega) \cos i \sin \Omega \\ r \cos(\nu + \omega) \sin \Omega + r \sin(\nu + \omega) \cos i \cos \Omega \\ r \sin(\nu + \omega) \sin i \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что координаты тела, находящегося на расстоянии r от фокуса, в базовой системе координат задаются соотношением

$$\mathbf{r}_0 = r Z'_\Omega X'_i Z'_{\omega+\nu} \mathbf{e}_x = r \begin{pmatrix} \cos(\nu + \omega) \cos \Omega - \sin(\nu + \omega) \cos i \sin \Omega \\ \cos(\nu + \omega) \sin \Omega + \sin(\nu + \omega) \cos i \cos \Omega \\ \sin(\nu + \omega) \sin i \end{pmatrix}.$$

1.4 Затмения

Тенью объекта называется область, откуда рассматриваемый источник света полностью не виден. **Полутенью** — область, откуда источник света виден частично, из чего следует, что понятие *полутени* не применимо к точечным источникам.

Рассмотрим тень, создаваемую сферическим объектом — ширмой, откуда не виден сферический источник света большего, чем ширма, размера, см. Рис. 6. Границу тени формируют общие касательные в точках, лежащих по одну сторону от прямой, проходящей через центры источника и ширмы. Легко понять, что в этом случае тень имеет конечные размеры. Определим, чему равна **длина тени** x — расстояние от её вершины до центра ширмы, см. Рис. 6.

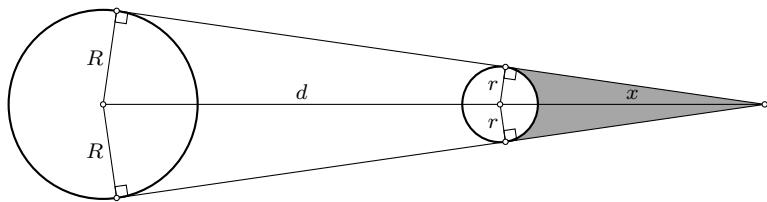


Рис. 6 – Тень от сферического объекта при сферическом источнике

Пусть R и r — радиусы источника и ширмы соответственно, а d — расстояние между их центрами. Тогда из подобия треугольников

$$\frac{R}{d+x} = \frac{r}{x},$$

откуда

$$x = \frac{rd}{R - r}. \quad (1.9)$$

Так, например, длина тени Земли — области откуда не видно Солнца, составляет около 1.4×10^6 км.

Солнечные затмения

Найдем теперь выражение для **размера тени** на поверхности — области поверхности, пересекающей тень, сферического объекта радиуса R , находящегося на расстоянии D от сферического источника света радиуса R_0 и расстоянии d от сферической ширмы радиуса r так, что центры всех трёх объектов лежат на одной прямой, см. Рис. 7.

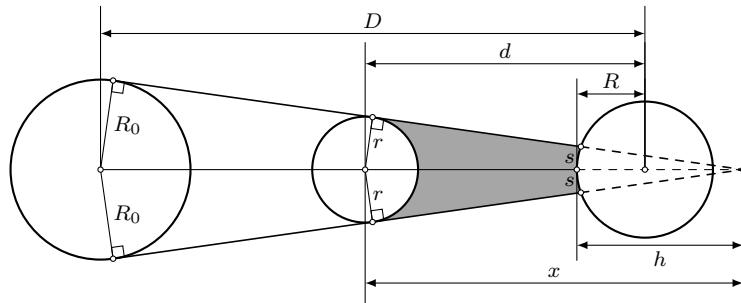


Рис. 7 – Схема формирования тени на поверхности объекта

Согласно (1.9), длина тени

$$x = \frac{r(D - d)}{R_0 - r}.$$

Следовательно, высота конуса тени, находящегося за пересечением тени с поверхностью объекта, $h = x - d + R$. Заметим, что при $x < d - R$ на поверхности объекта тени вообще не будет. Пусть $x > d - D$, тогда из подобия треугольников радиус тени на поверхности объекта

$$\begin{aligned} s &\stackrel{r \ll x}{\approx} \frac{rh}{x} = \frac{r(x - d + R)}{x} = \\ &= \frac{r(R_0 - r)}{r(D - d)} \cdot \frac{r(D - d) - (d - R)(R_0 - r)}{R_0 - r} = \\ &= \frac{r(D - R) - R_0(d - R)}{D - d}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Среднее значение этой величины для системы Солнце – Земля – Луна составляет около 200 км, максимальное — около 215 км. При нецентральном затмении максимальный диаметр тени Луны на поверхности Земли может достигать 270 км. Это даёт оценку на продолжительность затмения, равную 7.5 минутам. Большинство полных затмений делятся 2–4 минуты.

Далее, рассмотрим сферический объект E радиуса R , сферический источник света — S радиуса R_0 , находящийся на расстоянии D от центра E , и сферическую ширму — M радиуса r на расстоянии d от центра E . Определим максимальное угловое расстояние γ между источником S и ширмой M , при наблюдении из центра объекта E , чтобы на его поверхности могло наблюдаваться **полное затмение** источника S ширмой M , см. Рис. 8. То есть хотя бы одна точка поверхности E находится в *тени* M .

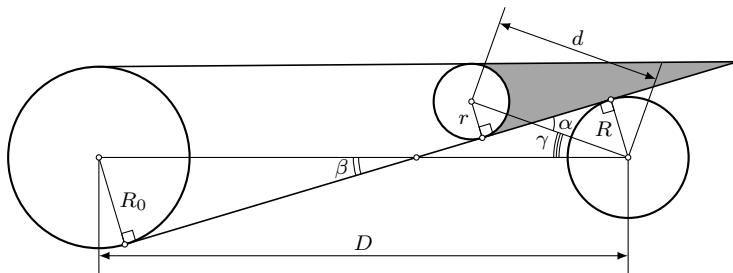


Рис. 8 – Схема расположение объектов в предельном для наблюдения полного затмения случае

Для этого найдем угол α . Это угол между общей касательной и прямой, проходящей через центры M и E . Из равенства вертикальных углов следует,

$$\alpha = \arcsin \frac{R+r}{d}, \quad (1.11)$$

из тех же соображений,

$$\beta = \arcsin \frac{R_0+R}{D}.$$

По рисунку легко понять, что α — внешний угол треугольника, в котором несмежными ему углами являются β и γ , откуда

$$\gamma = \alpha - \beta = \arcsin \frac{R+r}{d} - \arcsin \frac{R_0+R}{D}. \quad (1.12)$$

Для системы Солнце – Земля – Луна в приближении круговых орбит этот угол составляет около 1.21° .

Найдём теперь максимальное угловое удаление γ , при котором на поверхности объекта E может наблюдаться **частное затмение** источника S ширмой M . То есть хотя бы одна точка поверхности объекта E находится в *полутени* ширмы M .

Для этого обратимся к Рис. 9, из него видно, что нас интересует угол γ — внешний угол треугольника, в котором несмежными ему углами являются α и β , откуда $\gamma = \alpha + \beta$. Где угол α , как и в предыдущем случае, определяется выражением (1.11). А β — угловой радиус конуса тени, создаваемой объектом E , иначе, угол между общей касательной к E и прямой, проходящей через их центры.

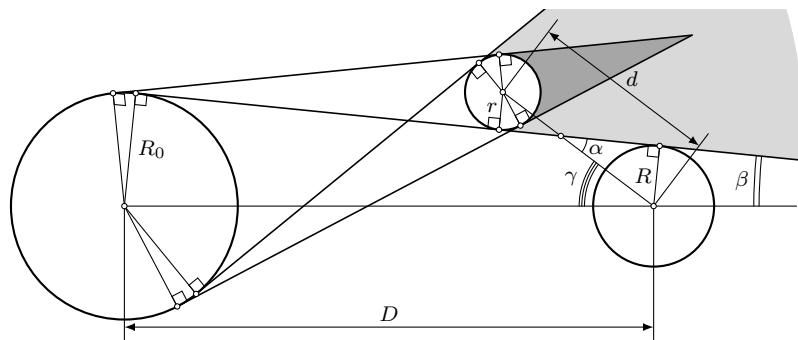


Рис. 9 – Схема расположение объектов в предельном для наблюдения частного затмения случае

Найдём выражение для β . Пусть x — длина тени от объекта E , тогда, используя выражение (1.9) для длины тени, можно записать, что

$$\beta = \arcsin \frac{R}{x} = \arcsin \frac{R_0 - R}{D}.$$

Воспользуемся полученными результатами для записи окончательного выражения для γ :

$$\gamma = \alpha + \beta = \arcsin \frac{R + r}{d} + \arcsin \frac{R_0 - R}{D}.$$

Для системы Солнце – Земля – Луна в приближении круговых орбит этот угол составляет около 1.47° .

Полученное выражение также может быть применено для определения возможности наблюдения прохождения внутренних планет по

диску Солнца или покрытия далёких звёзд Луной. Во втором случае значимым остается только первое слагаемое, так как второе стремится к нулю в силу того, что расстояние до звёзд много больше размеров звёзд и объектов солнечной системы.

Найденное выше максимальное угловое расстояние от центра ширмы до центра источника, при котором наблюдается частичное затмение, определяет ширину полосы вокруг эклиптики, см. Рис. 10, внутри которой должен оказаться центр Луны, чтобы была потенциальная возможность наблюдать солнечное затмение на Земле. Оказывается, что Луна должна располагаться не дальше, чем $l = \gamma / \sin i \simeq 16^\circ$ от узла своей орбиты², где i — угол наклона орбиты Луны к эклиптике.

Вернемся к случаю, когда конус тени не пересекает поверхность объекта, с которого ведётся наблюдение. Рассмотрим ту область полутиени, что является продолжением конуса тени. Отметим, что для наблюдателя в этой области угловой размер сферической ширмы меньше углового размера сферического источника света, при этом в проекции ширмы на небесную сферу полностью лежит на проекции источника. Такое событие называют **кольцеобразным затмением**. Максимальное угловое удаление γ ширмы от источника для наблюдения такого затмения можно найти аналогично рассмотренным ранее случаям, поэтому подробный вывод оставим читателю, а здесь приведём лишь результат в обозначениях, введённых ранее:

$$\gamma = \arcsin \frac{R - r}{d} + \arcsin \frac{R_0 - R}{D}.$$

В системе Солнце – Земля – Луна периодически наблюдаются кольцеобразные солнечные затмения. Во время которых Луна так расположена относительно Земли, что конус её тени не достигает поверхности планеты, и вокруг Луны можно наблюдать яркое кольцо незакрытой части солнечного диска.

При особом расположении Луны и Земли возможны **гибридные** затмения, когда в разных пунктах Земли наблюдаются либо *кольцеобразное*, либо *полное* затмение. Причиной такого явления является шарообразность Земли.

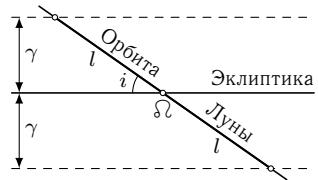
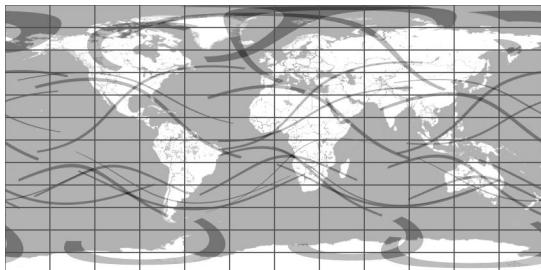


Рис. 10 – Область, в которой Луна должна находиться для того, чтобы наблюдать затмение

²в приближении круговых орбит



(a) – Карта полных фаз затмений в 20-ом веке



(b) – Карта затмения 11 августа 1999 года

Рис. 11

Рассмотрим подробнее процесс затмения в системе Солнце – Земля – Луна. Известно, Земля обращается вокруг Солнца в ту же сторону, что и Луна обращается вокруг Земли. При этом период обращения Луны вокруг Земли меньше периода обращения Земли вокруг Солнца. Отсюда следует, что Луна догоняет Солнце в видимом наблюдателю на Земле движении относительно далеких звёзд, а в момент новолуния — опережает его. Тогда и происходит солнечное затмение, если новолуние происходит в найденной выше полосе вокруг эклиптики, то есть вблизи узла орбиты Луны.

Представим себя наблюдателем в центре Солнца. Тогда во время солнечного затмения Земля догоняет Луну в видимом движении, при этом движется вперед «рассветным» терминатором. Отсюда следует, что если затмение происходит, то конус лунной тени впервые касается земной поверхности либо в точках рассветного терминатора, либо в крайних точках закатного, отстоящих от крайних точек рассветного не более, чем на угол наклона лунной орбиты к эклиптике.

Поэтому в большинстве случаев тень Луны движется по поверхности Земли с запада на восток. Однако в зависимости от ориентации Земной оси во время затмения, например в моменты солнцестояний, и точки первого касания, если это закатный терминатор, движение теневого пятна может происходить и с востока на запад. В любом случае это возможно не дальше $\varepsilon + i \simeq 28.6^\circ$ от полюсов Земли.

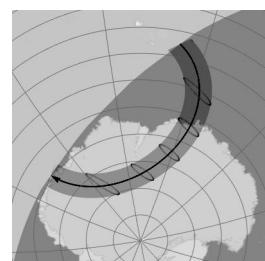


Рис. 12

Лунные затмения

В отличие от солнечных затмений здесь ширмой будет объект E радиуса R , и для простоты повествования будем считать, что R больше радиуса r объекта M .

Найдем максимальное угловое удаление γ объекта M от прямой, проходящей через центры источника S и ширмы E , при котором объект M все ещё полностью находится в тени E , см. Рис. 13.

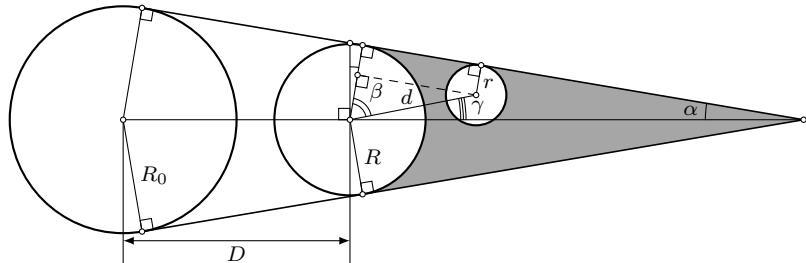


Рис. 13 – Схема расположение объектов в предельном для наблюдения полного лунного затмения случае

Пусть α — угловой радиус тени от ширмы E , тогда он определяется выражением (1.4). Для угла β справедливо,

$$\beta = \arccos \frac{R - r}{d}. \quad (1.13)$$

Отсюда,

$$\gamma = 90^\circ - \alpha - \beta = \arccos \frac{R_0 - R}{D} - \arccos \frac{R - r}{d}.$$

Для системы Солнце – Земля – Луна этот угол составляет около 0.4° , что дает оценку на максимальную продолжительность **полного лунного затмения** около 1.5 часов, во время которого Луна полностью находится в тени Земли.

Определим теперь максимальное угловое расстояние от той же прямой до объекта M , при котором он находится в полутени ширмы E , см. Рис. 14. Пусть теперь α — угол между другой парой общих касательных, тогда

$$\alpha = \arcsin \frac{R_0 + R}{D}.$$

Угол β также определяется выражением (1.13). Следовательно,

$$\gamma = 90^\circ + \alpha - \beta = \arcsin \frac{R_0 + R}{D} + \arcsin \frac{R - r}{d}.$$

Что для системы Солнце – Земля – Луна равно около 0.95° , что говорит о максимальной продолжительности **полутеневого лунного затмения** (от 2 до 4 контакта) порядка 3.8 часов.

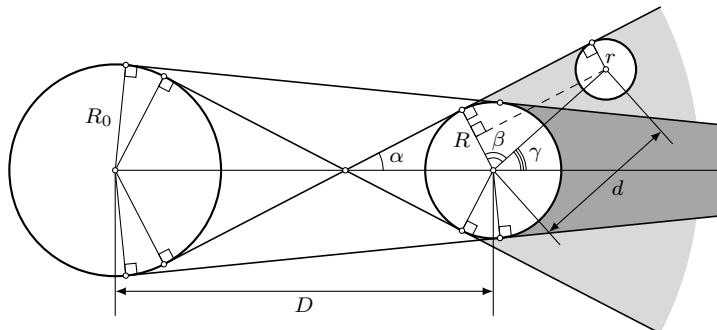


Рис. 14 – Схема расположение объектов в предельном для наблюдения полного полу-теневого лунного затмения случае

Лунное затмение, в отличие от солнечного, видно со всего ночного полушария Земли. Диаметр земной тени на расстоянии Луны превышает размер последней примерно в 2.5 – 3 раза. Бывают **частные**, когда лишь часть Луны попадает в земную тень, **полные** — Луна полностью погружается в тень Земли, и **полутеневые** — Луна проходит через полутень Земли, не затрагивая конус тени.

Синодический месяц — промежуток времени между одинаковыми фазами Луны, равен 29.53 суток.

Драконический месяц — промежуток времени между двумя последовательными прохождениями Луны через один и тот же узел орбиты, — 27.21 суток.

Сарос — промежуток времени, по прошествии которого солнечные и лунные затмения повторяются в прежнем порядке. Происходит это из-за того, что каждый сарос Луна, орбита Луны и Солнце возвращаются в прежнее положение относительно далёких звёзд. Сарос длится ровно 242 драконических месяца, или 223 синодических месяца, или 18 лет 11 дней 8 часов.

В процессе затмения выделяют до пяти важных моментов. Моменты начала и конца затмения, иначе, первый и четвертый контакты. Когда затмевающий объект касается затмеваемого внешним образом. например, в случае солнечного затмения. Или когда затмеваемый объект касается тени, в которую входит, например, во время лунное затмения начинается и заканчивается касанием Луны и тени Земли. Первый и

четвертый контакт — время любого затмения, кроме вырожденных, когда затмения по суть не происходит, лишь касание, тогда они совпадают.

Следующие два момента — начало и конец полной фазы затмения, второй и третий контакты, соответственно. В эти моменты затмевающий и затмеваемый объекты касаются внутренним образом. Во время частных затмений второго и третьего контактов не происходит.

Последний — момент максимальной фазы затмения. Применим ко всем типам затмения. Для частных в этот момент фаза меньше 1, для полных — больше.

Важной характеристикой любого затмения является его **фаза** — для *частных* и *кольцеобразных* затмений: отношение закрытой части x диаметра³ затмеваемого тела, проходящего через центр затмевающего тела, ко всему диаметру затмеваемого тела D ; для *полного*: единица плюс отношение расстояния⁴ между краями дисков затмеваемого и затмевающего тел к диаметру затмеваемого тела D .

$$\Phi_{\text{част}} = \frac{x}{D} < 1, \quad (1.14)$$

$$\Phi_{\text{полн}} = 1 + \frac{\min\{d_1, d_2\}}{D} > 1. \quad (1.15)$$

Иногда вводят такое понятие, как **площадная**

фаза затмения, т. е. отношение площади закрытой части диска затмеваемого тела к полной площади его диска. Чаще всего площадную фазу используют применительно к двойным звёздам, когда считают падение блеска при затмении одной звезды другой.

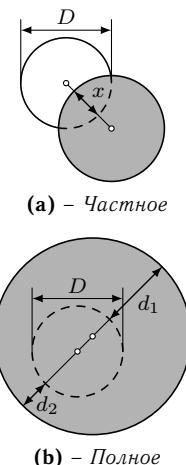


Рис. 15 – Схемы затмений

1.5 Конфигурации планет

Внутренними планетами называются планеты, большая полуось орбиты a которых меньше большой полуоси орбиты Земли a_{\oplus} . Отсюда следует, что для наблюдателя на Земле *внутренними* планетами являются лишь Венера и Меркурий, остальные относятся к **внешним** —

³Здесь имеется в виду *угловой* диаметр

⁴Расстояние между окружностями L_1 и L_2 — это $\min |L_1 L_2|$ по всем $L_1 \in l_1$ и $L_2 \in l_2$.

тем, у которых большая полуось орбиты больше большой полуоси орбиты Земли. Для таких планет выделяют три основные конфигурации: *верхнее соединение*, *нижнее соединение* и *максимальная элонгация*. Различают две максимальные элонгации — **восточную** и **западную**, когда планета наблюдается к востоку и к западу от Солнца соответственно.

Внутренняя планета находится в **верхнем соединении**, когда Земля, Солнце и планета лежат на одной прямой, при этом планета и Земля располагаются по разные стороны от Солнца. Если пренебречь наклоном орбит планет к плоскости эклиптики, для наблюдателя на Земле планета находится точно за Солнцем.

Нижнее соединение внутренней планеты происходит когда Земля, Солнце и планета, также как и в случае верхнего соединения, располагаются на одной прямой, но для нижнего соединения планета должна находиться между Солнцем и Землей. Если бы орбиты всех планет лежали в одной плоскости, тогда в момент каждого нижнего соединения внутренней планеты наблюдалось бы её прохождение по диску Солнца для наблюдателя на внешней планете.

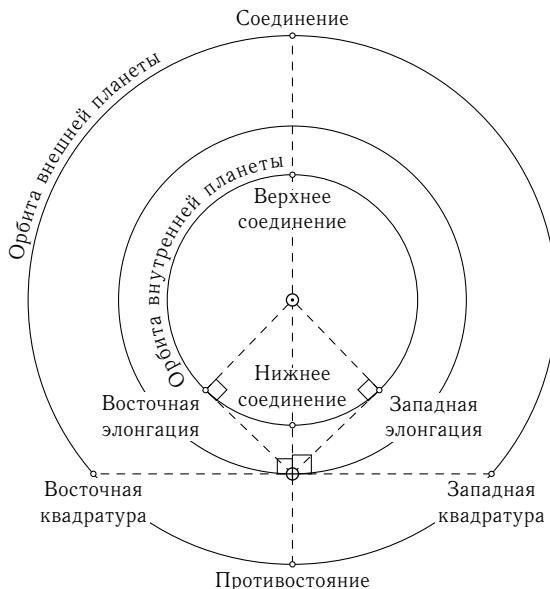


Рис. 16 – Схема конфигураций внутренней и внешней планеты со стороны северного полюса эллиптики

Элонгацией планеты называется угол Солнце – Земля – планета, отсюда очевидно, что *максимальная элонгация* внутренней планеты наблюдается в момент, когда прямая Земля – планета является касательной к орбите планеты, то есть угол Солнце – планета – Земля является прямым.

Внешними планетами называются планеты, большая полуось орбиты которых больше большой полуоси орбиты Земли. Для таких планет

также существуют три основные конфигурации: *соединение*, *противостояние* и *квадратура*. Квадратура бывает **западная** и **восточная**, в какой именно квадратуре находится внешняя планета определяется аналогично максимальной элонгации.

Соединение внешней планеты, подобно верхнему соединению внутренней планеты, наблюдается в момент, когда Солнце, Земля и планета находятся на одной прямой, при этом Солнце находится между планетой и Землей. В этот момент для наблюдателя на внешней планете Земля, являясь внутренней планетой, наблюдается в верхнем соединении.

Аналогично, когда планета, Солнце и Земля располагаются на одной прямой, но Солнце и планета лежат по разные стороны от Земли, считается, что внешняя планета находится в **противостоянии**. Земля же находится в нижнем соединении для наблюдателя на внешней планете, наблюдаемой в противостоянии.

Квадратурой называется конфигурация, когда угол между направлениями на планету и Солнце (угол *Солнце – Земля – планета*) является прямым. Стоит заметить, что для наблюдателя на планете Земля будет наблюдаться в максимальной элонгации, причем если планета с Земли наблюдалась в восточной квадратуре, тогда Земля будет в западной максимальной элонгации и наоборот.

1.6 Фазы планет и спутников

Фаза планеты (спутника) — отношение площади освещённой части видимого диска ко всей его площади. Фаза объекта может принимать значения от 0 до 1. Видимая граница между освещенной и неосвещенной частями поверхности объекта называется **терминатором**. Если лучи от источника считать параллельными, то терминатор является большим кругом на поверхности сферического объекта наблюдения. При этом для наблюдателя большой круг терминатора повернут вокруг оси, перпендикулярной лучу зрения, следовательно, проекция терминатора на картинную плоскость — эллипс. Напомним, что площади круга и эллипса с одинаковыми большими полуосами, равными a , относятся как a/b , где b — малая полуось эллипса. Отсюда следует, что для вычисления фазы достаточно рассмотреть от-

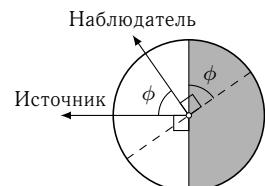


Рис. 17 – Проекция объекта на плоскость Источник – Объект – Наблюдатель

резки проекции большого круга на поверхности наблюдаемого объекта, лежащего в плоскости *Источник – Объект – Наблюдатель*, на картинную плоскость.

Однако сначала рассмотрим картину проходящего в проекции на плоскость *Источник – Объект – Наблюдатель*, см. Рис. 17. Пусть **фазовый угол** *Источник – Объект – Наблюдатель* равен ϕ . Тогда угол между плоскостью терминатора и картинной плоскостью наблюдателя также равен ϕ , а ширина проекции неосвещенной части объекта $s = R(1 - \cos \phi)$. Значит освещенной — $l = R(1 + \cos \phi)$, см. Рис. 18.

Теперь легко получить выражения для величины фазы через величину фазового угла:

$$\Phi = \frac{S_{\text{освещ}}}{S} = \frac{l}{D} = \frac{R(1 + \cos \phi)}{2R} = \frac{1 + \cos \phi}{2} = \cos^2 \frac{\phi}{2}. \quad (1.16)$$

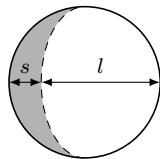


Рис. 18 – Проекция объекта на картинную плоскость наблюдателя

1.7 Собственное движение звёзд

Собственным движением называется изменение координат звёзд на небесной сфере, вызванное относительным движением звёзд и Солнца в пространстве, измеряется обычно в mas/год. Пусть v_τ — гелиоцентрическая (относительно Солнца) тангенциальная скорость звезды, d — расстояние до неё от Солнца, тогда её собственное движение

$$\mu = \frac{v_\tau}{d}. \quad (1.17)$$

Разделяют собственное движение по склонению — μ_δ и собственное движение по прямому восхождению — μ_α , для которых справедливы следующие выражения:

$$\mu_\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta(t + \Delta t) - \delta(t)}{\Delta t} = \delta'(t), \quad (1.18)$$

$$\mu_\alpha(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \alpha'(t). \quad (1.19)$$

Из определения видно, что μ_α является угловой скоростью по малому кругу, а значит, зависит от δ . Следовательно, полное собственное движение μ определяется выражением

$$\mu = \sqrt{\mu_\delta^2 + \mu_\alpha^2 \cos^2 \delta}, \quad (1.20)$$

потому что радиус малого круга, состоящего из точек со склонением δ , равен $R \cos \delta$, где R — радиус сферы, содержащей этот круг.

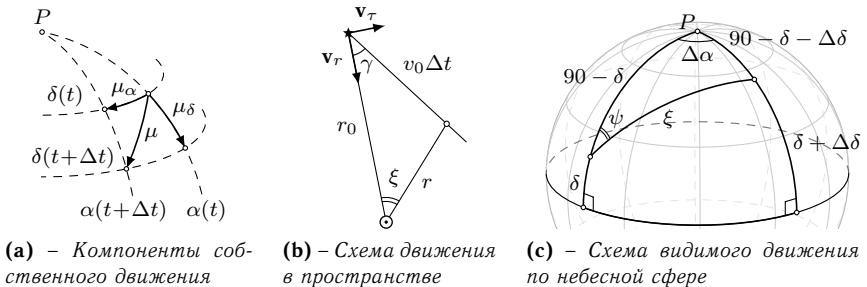


Рис. 19

Получим выражение для координат звезды через достаточно большой промежуток времени Δt . Пусть в начальный момент времени звезда имеет собственное движение $\mu = (\mu_\alpha, \mu_\delta)$, лучевую скорость v_r , параллакс π_0 и координаты (α, δ) . Найдем сначала тангенциальную скорость:

$$v_\tau = \mu r_0 = r_0 \sqrt{\mu_\delta^2 + \mu_\alpha^2 \cos^2 \delta} = \frac{a_\oplus \sqrt{\mu_\delta^2 + \mu_\alpha^2 \cos^2 \delta}}{\pi_0},$$

где $r_0 = a_\oplus / \pi_0$ — расстояние до звезды в начальный момент. Определим угол между лучом зрения и полной скоростью звезды, согласно Рис. 19b, имеем:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v_\tau}{v_r},$$

при этом полная скорость $v_0 = \sqrt{v_\tau^2 + v_r^2}$.

Снова обратимся к Рис. 19b. Из теоремы косинусов найдём расстояние от Солнца до звезды через время Δt :

$$r = \sqrt{r_0^2 + (v_0 \Delta t)^2 - 2r_0 v_0 \Delta t \cos \gamma}.$$

Далее из теоремы синусов получим угловое перемещения звезды:

$$\sin \xi = \frac{v_0 \Delta t \sin \gamma}{r}.$$

Через компоненты собственного движения нетрудно получить угол между направлением на полюс и вектором полного собственного движения

в начальный момент (см. Рис. 19c):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\mu_a \cos \delta}{\mu_\delta}.$$

Теперь с помощью сферической теоремы косинусов можно определить склонение звезды через время Δt :

$$\sin(\delta + \Delta\delta) = \cos \xi \sin \delta + \sin \xi \cos \delta \cos \psi.$$

Остается из сферической теоремы синусов получить выражение для изменения прямого восхождения за время Δt :

$$\sin \Delta\alpha = \frac{\sin \psi \sin \xi}{\cos(\delta + \Delta\delta)}.$$

1.8 Картографические проекции

1.8.1 Цилиндрическая равнопромежуточная проекция

Цилиндрическая равнопромежуточная проекция, иначе плоская прямоугольная проекция, является наиболее простой проекцией сферы на плоскость. При данной проекции искажаются как углы, так и площади, см. Рис. 23а. Неизменным остается только масштаб вдоль меридианов и экватора.

Пусть базисная точка для построения проекции имеет географические координаты (λ_0, φ_0) , тогда цилиндрическая равнопромежуточная проекция определяется правилом

$$\begin{cases} x = \lambda - \lambda_0, \\ y = \varphi - \varphi_0. \end{cases} \quad (1.21)$$

1.8.2 Цилиндрическая проекция Ламберта

Цилиндрическая проекция Ламберта (Рис. 23g) относится к семейству цилиндрических *равновеликих* проекций. Задается преобразованием

$$\begin{cases} x = \lambda - \lambda_0, \\ y = \sin \varphi. \end{cases}$$

Докажем **равновеликость** данной проекции, то есть, что она переводит элементарные площадки площасти dS в элементарные площадки такой же площасти. Для этого рассмотрим элементарную площасть с центром в точке (λ, φ) на единичной сфере. Её площасть $dS_{\text{сф}} = \cos \varphi d\varphi d\lambda$. Теперь найдём выражение для площасти её проекции — элементарной площасти с центром в точке (x, y) :

$$dS_{\text{пр}} = dx dy = d\lambda d(\sin \varphi) = \cos \varphi d\varphi d\lambda = dS_{\text{сф}}.$$

Полученное равенство завершает доказательство равновеликости цилиндрической проекции Ламберта.

1.8.3 Проекция Меркатора

Проекция Меркатора является конформной⁵ цилиндрической проекцией, см. Рис. 23с. Из циндринности проекции следует, связь $x = \lambda - \lambda_0$. Получим выражение для ординаты проекции из свойства равногольности — сохранения отношения масштабов по осям, которое можно записать как

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cos \varphi d\lambda}{d\varphi}. \quad (1.22)$$

Откуда, используя $dx = d\lambda$ и полагая константу интегрирования равной нулю, имеем следующее⁶:

$$\begin{aligned} y &= \int dy = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{1 - \sin^2 \varphi} \stackrel{t=\sin \varphi}{=} \\ &= \int \frac{dt}{1 - t^2} = \int \frac{dt}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{1+t} dt + \int \frac{1}{1-t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi} \right| = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \equiv \operatorname{lam} \varphi. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$\begin{cases} x = \lambda - \lambda_0, \\ y = \operatorname{lam} \varphi. \end{cases} \quad (1.23)$$

1.8.4 Ортографическая проекция

Ортографическая проекция — это географическая проекция, которая создает изображение Земли так, как она выглядит со стороны беско-

⁵равногольная — сохраняющая углы

⁶ $\operatorname{lam} x$ — ламбертиан x

нечно удаленного наблюдателя, см. Рис. 23е. Является прямоугольной проекцией точек сферы на плоскость. Приведём преобразование координат при проекции на плоскость, ортогональную вектору $(\lambda_0, 0)$:

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0), \\ y = \sin \varphi. \end{cases} \quad (1.24)$$

1.8.5 Стереографическая проекция

Стереографическая проекция — взаимооднозначное соответствие точек сферы и касательной к ней плоскости, устроенное следующим образом. Через точку N , диаметрально противоположную точке касания S , и произвольную точку $X \neq N$ на сфере проходит единственный луч, который имеет единственную точку X' пересечения с касательной плоскостью, называемую *стереографической* проекцией точки X с центром в точке S , см. Рис. 23д.

Из определения нетрудно понять, что $S = S'$, окрестность точки N проецируется на бесконечность, а сама точка N не имеет проекции и является выколотой точкой стереографической проекции.

Найдем правило преобразования координат при стереографической проекции. Для простоты рассуждений рассмотрим единичную сферу и её стереографическую проекцию с центром в точке $(0^\circ, -90^\circ)$ на плоскость, где введены полярные координаты (r, α) с центром в точке касания со сферой. Тогда очевидно, что $\alpha = \lambda - \lambda_0$, где λ_0 — долгота, соответствующая направлению $\alpha = 0^\circ$. Пусть O — центр сферы, тогда центральный угол $\angle SOX = 90^\circ + \varphi$, а угол $\angle SNX = \angle SOX/2 = (90^\circ + \varphi)/2$, как вписанный, см. Рис. 20. Следовательно, $r = 2 \operatorname{tg} \angle SNX$ и окончательно:

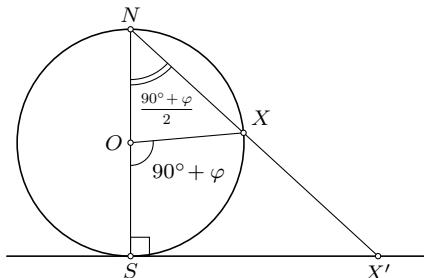


Рис. 20 – Схема построения стереографической проекции

$$\begin{cases} \alpha = \lambda - \lambda_0, \\ r = 2 \operatorname{tg} \frac{90^\circ + \varphi}{2}. \end{cases} \quad (1.25)$$

1.8.6 Гномоническая проекция

Гномоническая проекция — взаимооднозначное соответствие точек полусферы и касательной к ней плоскости, см. Рис. 23f. Устроена схожим со *стереографической* проекцией образом с отличием в том, откуда строятся лучи для проекции точек сферы. В стереографической проекции — это точка N , диаметрально противоположная точке касания S , а в случае *гномонической* — центр сферы O . В силу чего в определении фигурирует приставка «половинно-», так как лучи, проходящие через точки дальней от плоскости проекции полусферы не пересекают-ся с данной плоскостью.

Сформулируем свойства гномонической проекции. Во-первых, отметим, что точки большого круга, параллельного плоскости проекции проецируются на бесконечность. Во-вторых, можно заметить, что по определению гномонической проекции и большого круга лучи, формирующие проекцию второго, лежат в одной плоскости. По аксиоме стереометрии пересечение плоскости, сформированной этими лучами, с плоскостью проекции есть прямая. Следовательно, гномоническая проекция все большие круги отображает в прямые.

Исходя из Рис. 21, гномоническая проекция с центром в точке $(0^\circ, -90^\circ)$ задаётся преобразованием

$$\begin{cases} \alpha = \lambda - \lambda_0; \\ r = \operatorname{tg}(90^\circ + \varphi) = \operatorname{ctg} \varphi. \end{cases} \quad (1.26)$$

1.8.7 Проекция Робинсона

В 1963 году Артур Робинсон по заказу издательской компании Rand McNally разработал проекцию для создания карты всего мира общего назначения. *Проекция Робинсона* не является ни равновеликой, ни конформной, однако является хорошим ком-

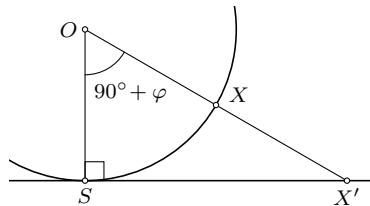


Рис. 21 – Схема построения гномонической проекции

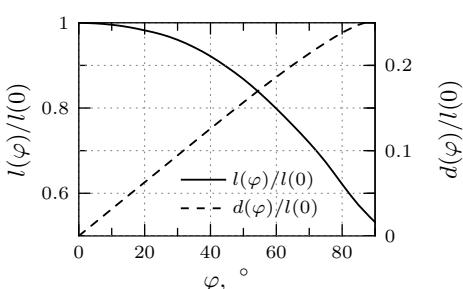
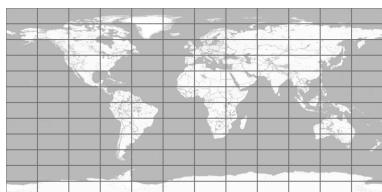


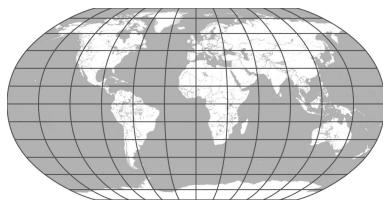
Рис. 22 – График зависимости длины параллели $l(\varphi)$ и её расстояния от экватора $d(\varphi)$ от широты φ

промиссом в решении вопроса отображения карты всей поверхности Земли на плоскость, см. Рис. 23б.

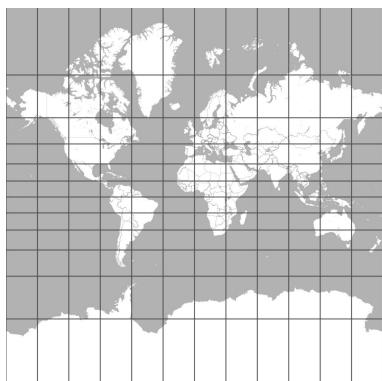
В 1974 Робинсон опубликовал данные для построения его проекции. Проекция задается набором параллелей — их длиной относительно длины экватора и расстоянием от него, см. Рис. 22.



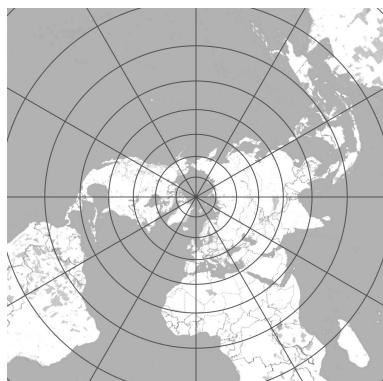
(а) – Плоская прямоугольная проекция



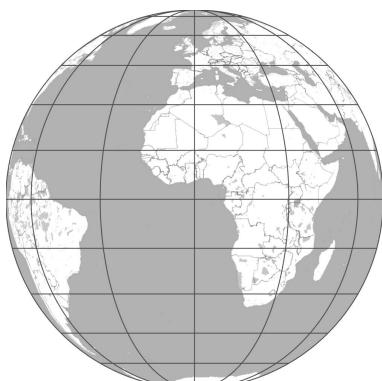
(б) – Проекция Робинсона



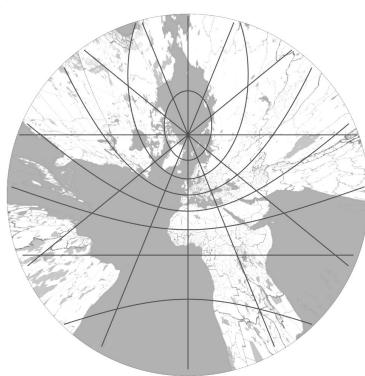
(с) – Проекция Меркатора



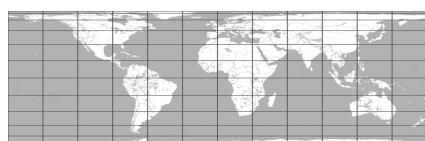
(д) – Стереографическая проекция



(е) – Ортографическая проекция



(ф) – Гномоническая проекция



(г) – Цилиндрическая проекция Ламберта

Рис. 23 – Картографические проекции

2 Небесная механика

2.1 Закон всемирного тяготения

Согласно *закону всемирного тяготения*, опубликованному в 1687 году Ньютона в его книге «Математические начала натуральной философии» [2][3], сила притяжения между двумя точечными телами с массами M и m , находящимися на расстоянии r , равна

$$F = \frac{GMm}{r^2}, \quad (2.1)$$

где $G \simeq 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ — **гравитационная постоянная**, действует вдоль прямой, соединяющей тела, и направлена в сторону гравитирующего тела.

Пусть радиус-вектор \mathbf{r} одного тела откладывается от второго, тогда в векторной форме сила, действующая на первое тело,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}. \quad (2.2)$$

Векторное поле $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ называется **потенциальным**, если существует такая функция $\varphi(\mathbf{r})$, что $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$. Рассмотрим векторное поле гравитационных сил (2.2), оно является сферически симметричным, так как зависит только от расстояния до гравитирующего тела, следовательно

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -m \frac{d\varphi(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Перейдём к скалярным величинам, разделим переменные и проинтегрируем левую и правую часть полученного равенства.

$$\begin{aligned} \int_{+\infty}^r \frac{F(r)}{m} dr &= \int_{+\infty}^r d\varphi(r), \\ -\frac{GM}{r} \Big|_{+\infty}^r &= \varphi(r)|_{+\infty}^r, \\ -\frac{GM}{r} + 0 &= \varphi(r) - \varphi(+\infty), \\ \varphi(r) &= -\frac{GM}{r} + \varphi(+\infty). \end{aligned}$$

Видно, что потенциал гравитационного поля определен с точностью до постоянной величины $\varphi(+\infty)$, которую для удобства полагают равной нулю. Окончательно, **потенциал** гравитационного поля

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{r}. \quad (2.3)$$

Потенциальная энергия $U(\mathbf{R})$ тела с массой m в гравитационном поле тела с массой M — энергия, необходимая, чтобы переместить первое тело с бесконечности на вектор \mathbf{R} от второго. Исходя из определения, потенциальная энергия определяется, как

$$U(\mathbf{R}) = \oint_{+\infty}^{\mathbf{r}} (\mathbf{F}(\mathbf{r}), d\mathbf{r}). \quad (2.4)$$

Здесь интегрирование ведется вдоль пути перемещения тела с бесконечности в точку \mathbf{r} . Снова воспользуемся сферической симметрией гравитационного поля:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{R}) &= - \oint_{+\infty}^{\mathbf{R}} (m \nabla \varphi(\mathbf{r}), d\mathbf{r}) = - \oint_{+\infty}^{\mathbf{R}} m \frac{d\varphi(r)}{dr} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}, dr \right) = \\ &= \int_{+\infty}^R m \frac{d\varphi(r)}{dr} dr = \int_{+\infty}^R m d\varphi(r) = -\frac{GMm}{R} = U(R). \end{aligned} \quad (2.5)$$

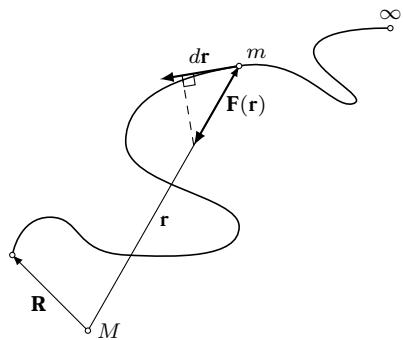


Рис. 24 – К выводу формулы потенциальной энергии

Напряженность гравитационного поля — отношение силы, действующей на точную пробное тело к массе этого тела, также называют **ускорением свободного падения** и обозначают за g . Ускорение свободного падения вычисляется по формуле

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}. \quad (2.6)$$

Следовательно, (2.1) можно записать как

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{g}(\mathbf{r}). \quad (2.7)$$

Найдём потенциальную энергию однородного шара массы M и радиуса R . Для этого разобьем его на концентрические сферы радиуса r , толщины dr и, следовательно, массы $dm = 4\pi r^2 \rho dr$, где ρ — плотность шара. На каждую такую сферу действует сила гравитации только от внутреннего шара, действие внешних слоев компенсируется в силу симметрии, см. Раздел 4.21. Проинтегрируем потенциальную энергию сфер по r от 0 до R , это и будет потенциальная энергия всего шара:

$$\begin{aligned} E_{\bullet} &= \int_0^R \varphi(r) dm = \int_0^R -\frac{4\pi r^3 \rho G}{3r} \cdot 4\pi r^2 \rho dr = \\ &= -\frac{16\pi^2 \rho^2 G}{3} \int_0^R r^4 dr = -\frac{16\pi^2 \rho^2 G}{3} \cdot \frac{R^5}{5} = -\frac{3GM^2}{5R}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Далее, в качестве упражнения получим выражение для потенциальной энергии сферы. Для этого рассмотрим элементарную площадку ds на сфере массы M и радиуса R , тогда масса площадки $dm = \sigma ds$, где σ — поверхностная плотность сферы. На рассматриваемую площадку действует вся сфера, поэтому площадка имеет гравитационный потенциал $\varphi = -GM/R$. Проинтегрируем потенциальную энергию элементарных площадок по всей поверхности сферы S , чтобы найти гравитационную энергию всей сферы:

$$E_{\circ} = \int_S \varphi dm = \int_S -\frac{GM ds}{RS} = -\frac{GM}{RS} \int_S ds = -\frac{GM \cdot 4\pi R^2}{RS} = -\frac{GM}{R}.$$

2.2 Круговое движение

2.2.1 Первая космическая скорость

Пусть тело движется по окружности радиуса R с постоянной скоростью v . Найдём, какое ускорение \mathbf{a} оно испытывает в ходе такого движения. Рассмотрим для этого малый промежуток времени dt , за который оно перемещается из точки A в точку B , см. Рис. 25. За это время тело проходит по орбите угол $\alpha = \omega dt$, где ω — угловая скорость движения тела по окружности, определяемая выражением

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \cdot v}{2\pi R} = \frac{v}{R},$$

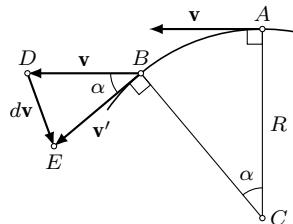


Рис. 25

где за T обозначен период движения тела по окружности.

С другой стороны за время dt вектор скорости \mathbf{v} изменяется на $d\mathbf{v}$ и становится равным \mathbf{v}' , причем $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'| = v$. Треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle BDE$ подобны, следовательно,

$$\frac{dv}{v} = \frac{|AB|}{R} \rightarrow \frac{v dt}{R} \text{ при } dt \rightarrow 0$$

А значит,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R},$$

причём вектор \mathbf{a} направлен вдоль радиуса окружности в сторону центра.

При круговом движении малого тела в гравитационном поле массивного тела массы M первое испытывает силу всемирного тяготения со стороны второго. А значит, оно испытает ускорение свободного падения \mathbf{g} (2.6). Приравняв которое к центростремительному ускорению \mathbf{a} , получим выражение для **первой космической** или **круговой скорости**.

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{v_1^2}{R},$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad (2.9)$$

где v_1 — первая космическая скорость — скорость малого тела на круговой орбите радиуса R вокруг тела массы M .

2.2.2 Геостационарные и геосинхронные спутники

Рассмотрим массивное тело массы M , вращающееся вокруг своей оси с периодом T . **Геостационарным** спутником такого тела называется спутник, находящийся постоянно над одной точкой поверхности этого тела. Другими словами, такой спутник, что его радиус-вектор является продолжением радиус-вектора одной из точек поверхности этого тела.

Заметим, что плоскость орбиты спутника всегда проходит через центр масс гравитирующего тела, а значит, совпадает с одним из больших кругов с центром в центре масс гравитирующего тела. Из этого факта и определения геостационарного спутника следует, что точка поверхности центрального тела также должна находиться в плоскости этого большого круга.

С другой стороны, только точки на экваторе тела движутся в плоскости большого круга, траектории других точек являются малыми кругами, так как их плоскость не содержит центра масс тела.

Из данных утверждений вытекает ограничение на расположение орбиты геостационарного спутника — она всегда находится в плоскости экватора центрального тела.

Кроме этого вращение тела происходит равномерно, следовательно, движение спутника также должно быть равномерно. Значит, орбита должна быть круговой. Далее будет показано, что угловая скорость тел на иных орbitах не постоянна.

Отсюда легко получить радиус орбиты геостационарного спутника: нужно лишь приравнять период вращения центрального тела к периоду обращения спутника по орбите с искомым радиусом $R_{\text{г.стаци.}}$:

$$T = \frac{2\pi R_{\text{г.стаци.}}}{v_1} = 2\pi \sqrt{\frac{R_{\text{г.стаци.}}^3}{GM}},$$

$$R_{\text{г.стаци.}} = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}. \quad (2.10)$$

Расширением понятия геостационарности является **геосинхронность**, когда спутник в один и тот же момент периода своего обращения находится над одной и той же точкой поверхности центрального тела.

Отсюда, также как и в случае геостационарности, следует, что период обращение по орбите совпадает с периодом вращения центрального тела. Значит, *большая полуось*⁷ орбиты $a_{\text{г.синх.}} = R_{\text{г.стаци.}}$ согласно третьему закону Кеплера⁸. При этом орбита может быть как наклоненной к экватору, так и вытянутой — эллиптичной.

В заключение данного раздела найдём большую полуось геосинхронной орбиты спутника Земли. Здесь важно учесть, что сидерический период вращения Земли вокруг своей оси составляет одни звёздные, а не солнечные сутки⁹, продолжительность которых $T_{\oplus} = 86164$ с. Отсюда,

$$a_{\text{г.синх.}\oplus} = \sqrt[3]{\frac{GM_{\oplus}T_{\oplus}}{4\pi^2}} \simeq 42164 \text{ км.}$$

⁷ см. Раздел 3.1

⁸ см. Раздел 2.9

⁹ см. Раздел 2.20

2.3 Закон сохранения энергии

Эмпирически установлено, что в замкнутой системе энергия не берётся из ниоткуда и не исчезает в никуда, а лишь переходит из одной формы в другую. Именно этот принцип и называется **законом сохранения энергии**. Так для замкнутой системы двух тел сохраняется полная механическая энергия системы E_0 — сумма потенциальной (Π) и кинетической (K) энергий.

Отсюда следует, что для движения тела с массой m в гравитационном поле тела с массой $M \gg m$ со скоростью v на расстоянии r от гравитационного центра справедливо следующее соотношение¹⁰:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = E_0, \quad (2.11)$$

данное равенство принято называть *законом сохранения энергии* тела, движущегося в поле консервативных (потенциальных) сил.

Определим, как знак полной механической энергии связан с характером движения пробного тела в гравитационном поле массивного. Пусть $E_0 < 0$, так как $v^2 \geq 0$, то $1/r > 0$, следовательно $r < \infty$, то есть движение ограничено (финитно).

При инфинитном движении в некоторый момент пробное тело удаляется бесконечно далеко от массивного, другими словами $r \rightarrow \infty$. В этом случае, согласно закону сохранения энергии, $E_0 = K \geq 0$, а значит, минимальное значение полной механической энергии, при котором движение неограниченно, равно нулю. При этом на бесконечном удалении от гравитирующего центра скорость пробного тела также будет равна нулю. Если же $E_0 > 0$, минимальная скорость пробного тела всегда больше нуля, а получение выражения для вычисления ее величины оставим читателю.

Вторая космическая скорость

Найдем минимальную скорость v_2 , необходимую пробному телу, чтобы удалиться от массивного тела бесконечно далеко. Как было показано выше, в этом случае $E_0 = 0$, следовательно,

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{GMm}{r},$$

¹⁰здесь не рассматривается вращательное движение тел

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (2.12)$$

Полученная скорость v_2 называется **второй космической** или **парabolicкой**¹¹ скоростью и является минимальной необходимой скоростью, чтобы покинуть зону влияния гравитации тела с массой M , находясь от него расстоянии r .

2.4 Теорема о вириале

Рассмотрим скалярную функцию механической системы, состоящей из N материальных точек:

$$V = \sum_{k=1}^N (\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k), \quad (2.13)$$

где \mathbf{r}_k — её радиус-вектор k -ой материальной точки, а \mathbf{F}_k — равнодействующая сила, действующая на неё. Функция V называется **вириалом** системы.

Теорема о вириале Для стабильной системы материальных точек с установленвшимся движением — положения точек и их скорости ограничены, удвоенная усредненная по времени полная кинетическая энергия равна усредненному по времени вириалу с обратным знаком:

$$2\langle T \rangle_\tau = -\langle V \rangle_\tau. \quad (2.14)$$

Приступим к доказательству, для удобства введем функцию Q :

$$Q = \sum_{k=1}^N (\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{r}_k),$$

где \mathbf{p}_k — импульс k -ой частицы. Продифференцируем Q по времени:

$$\dot{Q} = \sum_{k=1}^N (\dot{\mathbf{p}}_k \cdot \mathbf{r}_k) + \sum_{k=1}^N (\mathbf{p}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k) = \sum_{k=1}^N (\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k) + \sum_{k=1}^N m_k (\dot{\mathbf{r}}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k)$$

Нетрудно заметить, что первое слагаемое в правой части есть вириал, а второе — удвоенная кинетическая энергия, следовательно

$$\dot{Q} = 2T + V. \quad (2.15)$$

¹¹ причина такого названия ясна из раздела 2.11

Усредним \dot{Q} по времени:

$$\langle \dot{Q} \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \dot{Q} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau = \frac{Q(\tau) - Q(0)}{\tau}. \quad (2.16)$$

важно отметить, начало отсчёта времени здесь произвольно.

Функция Q линейно зависит от импульсов и координат точек. Напомним, система стабильна и движения в ней установившиеся. Это означает, что существуют некоторые \bar{Q} , \underline{Q} и момент времени τ_0 , такие что $\forall \tau > \tau_0 : \underline{Q} < Q(\tau) < \bar{Q}$.

Пусть момент начала отсчета времени $\tau = 0$ лежит после τ_0 . Тогда очевидно, что $Q(0) > \underline{Q}$, а $Q(\tau) < \bar{Q}$, следовательно, $Q(\tau) - Q(0) < \bar{Q} - \underline{Q}$, а значит, $|Q(\tau) - Q(0)| < |\bar{Q} - \underline{Q}|$, так как $\underline{Q} < \bar{Q}$.

Устремим в (2.16) τ к бесконечности, тогда величина $\langle \dot{Q} \rangle_\tau \rightarrow 0$, так как $\bar{Q} - \underline{Q} = \text{const}$, следовательно,

$$2\langle T \rangle_\tau = -\langle V \rangle_\tau. \quad (2.17)$$

Сам по себе вириал в физике встречается не часто. Выше была показана связь вириала с кинетической энергией, найдём теперь связь вириала с ещё одной универсальной величиной — потенциальной энергией U . [4]

Равнодействующая сила \mathbf{F}_k , действующая на k -ую точку является суммой сил \mathbf{F}_{ki} , действующих на k -ую точку со стороны всех остальных:

$$\mathbf{F}_k = \sum_{i \neq k} \mathbf{F}_{ki}.$$

Подставим полученное выражение в определение вириала (2.13):

$$V = \sum_{k=1}^N (\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k) = \sum_{k=1}^N \sum_{i < k} (\mathbf{F}_{ki} \cdot \mathbf{r}_k) + \sum_{k=1}^N \sum_{i > k} (\mathbf{F}_{ki} \cdot \mathbf{r}_k).$$

Воспользуемся III законом Ньютона: $\mathbf{F}_{ki} = -\mathbf{F}_{ik}$,

$$V = \sum_{k=1}^N \sum_{i < k} (\mathbf{F}_{ki} \cdot \mathbf{r}_k) - \sum_{k=1}^N \sum_{i > k} (\mathbf{F}_{ik} \cdot \mathbf{r}_k)$$

Рассмотрим подробнее второе слагаемое: суммирование ведется по всем k от 1 до N и $i > k$. Это значит, что $i = N$ попадет во все слагаемые

первой суммы, $i = N - 1$ — во все без одного и т. д. Следовательно, суммирование можно вести сначала по i от 1 до N , а затем по $k < i$. Используем полученный факт, а также поменяем обозначения $k \leftrightarrow i$:

$$V = \sum_{k=1}^N \sum_{i < k} (\mathbf{F}_{ki} \cdot \mathbf{r}_k) - \sum_{k=1}^N \sum_{i < k} (\mathbf{F}_{ki} \cdot \mathbf{r}_i) = \sum_{k=1}^N \sum_{i < k} (\mathbf{F}_{ki} \cdot (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)). \quad (2.18)$$

До этого момента не уточнялась природа и вид сил, действующих между частицами. Пусть силы потенциальны, а потенциальная энергия взаимодействия U зависит от расстояния степенным образом, $U = \gamma r^m$, тогда сила взаимодействия

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -U'_r \frac{\mathbf{r}}{r} = -mr^{m-1} \frac{\mathbf{r}}{r} = -mr^{m-2} \mathbf{r}.$$

Введем обозначение $\mathbf{r}_{ik} \equiv \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i$ и подставим полученное выражение для силы в (2.18):

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=1}^N \sum_{i < k} (\mathbf{F}_{ki} \cdot \mathbf{r}_{ik}) = \sum_{k=1}^N \sum_{i < k} -mr_{ik}^{m-2} (\mathbf{r}_{ik} \cdot \mathbf{r}_{ik}) = \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{i < k} -mr_{ik}^m = -m \sum_{k=1}^N \sum_{i < k} U_{ik} = -mU, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где U_{ik} — потенциальная энергия пары точек i и k . Последнее равенство верно, так как в суммировании каждая пара учитывает ровно один раз, а полная потенциальная энергия системы является суммой потенциальных энергий всех пар.

Используя (2.19), перепишем (2.17):

$$2\langle T \rangle_\tau = m\langle U \rangle_\tau,$$

для гравитационных сил $m = -1$, отсюда получается важное на практике соотношение,

$2\langle T \rangle_\tau = -\langle U \rangle_\tau.$

(2.20)

2.5 Закон сохранения момента импульса

Момент импульса (\mathbf{L}) — *псевдовекторная* величина, определяющая момент количества движения (импульса). Согласно этому определению момент импульса \mathbf{L} пробной массы зависит от её радиус-вектора

и импульса следующий образом:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]. \quad (2.21)$$

Из геометрического смысла векторного произведения ясно, что \mathbf{L} ортогонален векторам \mathbf{r} и \mathbf{p} . Отсюда же $|\mathbf{L}| \equiv L$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{r} и \mathbf{p} . Иными словами $L = rp_{\perp}$, что в свою очередь можно записать как $L = rps \sin \alpha$, где α — угол поворота от \mathbf{r} к \mathbf{p} , учитывая направление. Согласно свойству векторного произведения, направление \mathbf{L} определяется правилом правой руки — тройка векторов \mathbf{r} , \mathbf{p} и \mathbf{L} должна быть правой.

Для системы пробных масс¹², суммарный момент действия внешних сил на которую равен нулю, полный момент импульса сохраняется. Данное утверждение называется **законом сохранения момента импульса**.

Докажем его сначала в случае движения постоянной пробной массы m в гравитационном поле неподвижного массивного тела с массой M . Рассмотрим для этого производную по времени момента импульса данной пробной массы:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d[\mathbf{r} \times \mathbf{p}]}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} \right] + \left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right] = m \underbrace{[\mathbf{v} \times \mathbf{v}]}_0 + \left[\mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] = \\ &= m[\mathbf{r} \times \mathbf{a}] = m[\mathbf{r} \times \mathbf{g}(\mathbf{r})] = -\frac{GMm}{r^3} \underbrace{[\mathbf{r} \times \mathbf{r}]}_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Равенство нулю производной момента импульса доказывает его постоянство в рассматриваемом случае.

Обобщим теперь на случай произвольного конечного числа n пробных масс m_1, \dots, m_n :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{d[\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i]}{dt} \stackrel{m_i=\text{const}}{=} \sum_{i=1}^n \left[\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i \right] + \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{[\mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i]}_0 + \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i] = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{r}_i \times m_i \sum_{j=1}^n \frac{Gm_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \right] = \end{aligned}$$

¹²Здесь и далее в этом разделе под пробной массой имеется в виду точечная масса, чтобы не брать в рассмотрение момент импульса вращения тел.

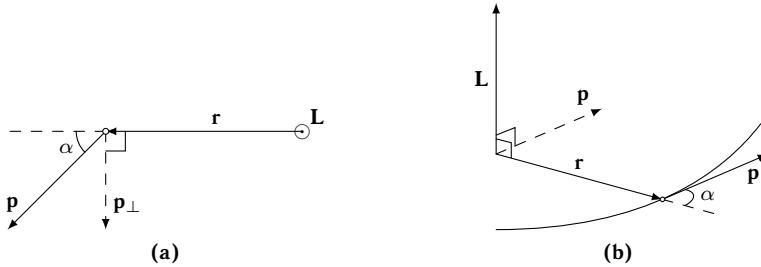


Рис. 26

$$= \sum_{i,j=1}^n \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} [\mathbf{r}_i \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)] = \sum_{i,j=1}^n \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} [\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j] \equiv \sum_{i,j=1}^n \mathbf{x}_{ij}.$$

Можно заметить, что $\mathbf{x}_{ij} = -\mathbf{x}_{ji}$, так как

$$\mathbf{x}_{ij} \equiv \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} [\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j] = -\frac{Gm_j m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} [\mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_i] \equiv -\mathbf{x}_{ji}.$$

Отсюда сразу следует равенство нулю производной по времени полного момента импульса, что завершает доказательство его сохранения.

2.6 Эффективный потенциал

Квадрат скорости тела на орбите массы m может быть выражен как сумма квадратов *лучевой* и *трансверсальной* скоростей. Запишем закон сохранения энергии в следующей форме:

$$\frac{m(v_r^2 + v_\perp^2)}{2} - \frac{GMm}{r} = E_0,$$

где E_0 — полная энергия тела на данной орбите. Вспомним выражение для модуля момента импульса:

$$L = rp_\perp = mrv_\perp. \quad (2.23)$$

Выразим v_\perp через L и подставим в ЗСЭ.

$$\frac{mv_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E_0. \quad (2.24)$$

Эффективным потенциалом системы $\tilde{U}(r)$ называется выражение

$$\tilde{U}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}. \quad (2.25)$$

Рассмотрим случай $v_r = 0$ (periцентр или апоцентр орбиты). В таких точках полная энергия тела в точности равна $\tilde{U}(r)$.

Исходя из Рис. 27 при $E_0 < 0$ существует две различных интересующих нас величины r . Решим уравнение $\tilde{U}(r) = E_0$, корнями которого являются r_π и r_α :

$$\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E_0$$

$$r^2 + \frac{GMm}{E_0}r - \frac{L^2}{2mE_0} = 0$$

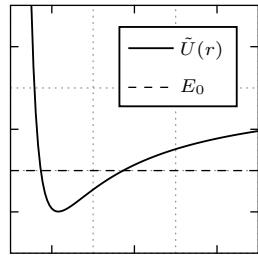


Рис. 27 – Эффективный потенциал

По теореме Виета для корней данного квадратного уравнения можно записать следующие соотношения:

$$\begin{cases} r_\pi + r_\alpha = 2a & = -\frac{GMm}{E_0} \\ r_\pi r_\alpha = b^2 & = -\frac{L^2}{2mE_0}. \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений, получим выражения для E_0 и L :

$$L = m\sqrt{GMr}, \quad (2.26)$$

$$E_0 = -\frac{GMm}{2a}. \quad (2.27)$$

2.7 Момент инерции

Момент инерции — скалярная¹³ величина, определяющая меру инертности тела во вращательном движении, подобна массе в поступательном. Момент инерции характеризует распределение массы в теле и определяется по формуле

$$I = \int_V r^2 dm, \quad (2.28)$$

где интегрирование ведется по всему объему тела, а r — расстояние до оси, относительно которой вычисляется момент инерции.

Так, например, момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр

¹³ В общем случае тензорная

$$\begin{aligned}
 I_{\text{ш}} &= \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} \int_0^{2\pi} r^3 \rho \, dr \, dh \, d\varphi = 2\pi\rho \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} r^3 \, dr \, dh = \\
 &= 4\pi\rho \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} \, dr \stackrel{x=R^2-r^2}{=} -2\pi\rho \int_{R^2}^0 (R^2 - x) \sqrt{x} \, dx = \\
 &= -2\pi\rho R^2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_{R^2}^0 + 2\pi\rho \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_{R^2}^0 = \frac{8}{15}\pi R^5 \rho = \frac{2}{5}mR^2.
 \end{aligned}$$

Пусть ω — вектор угловой скорости вращения тела вокруг выделенной оси, тогда секториальная скорость точек тела, расположенных на расстоянии r от оси, $\mathbf{s} = \omega r^2$. Следовательно, момент импульса вращения

$$\mathbf{L}_{\text{вр}} = \int_V \omega r^2 \, dm = I\omega.$$

Получаем простую аналогию между поступательным и вращательным движением: $m \mapsto I$, $\mathbf{v} \mapsto \omega$, $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{L}$, $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{M}$, где \mathbf{M} — момент силы, определяемый как $\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}]$.

2.8 Движение по орбите

Рассмотрим такую физическую величину, как **секториальная скорость** — это векторная величина, описывающая ориентированную площадь, заметаемую радиус вектором тела за единицу времени. Пусть в момент времени t тело находилось в точке $\mathbf{r}(t)$, а через промежуток времени dt — в точке $\mathbf{r}(t+dt)$. Обозначим перемещение тела за этот промежуток времени как $d\mathbf{r}$. Его можно выразить через скорость тела в момент времени t , считая её постоянной на промежутке от t до $t+dt$: $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$. Площадь, которую заметает радиус-вектор тела $\mathbf{r}(t)$ равна половине параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}(t)$ и $d\mathbf{r}$, то есть

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt],$$

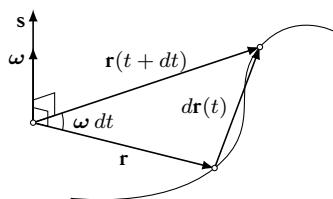


Рис. 28

следовательно, секториальная скорость

$$\sigma = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{1}{2}[\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \frac{\mathbf{L}}{2m} = \frac{\mathbf{l}}{2},$$

где \mathbf{l} — удельный (на единицу массы) момент импульса. Полученное выражение доказывает *второй закон Кеплера*.

С другой стороны, перемещение $d\mathbf{r}$ можно выразить через угловую скорость ω , как $d\mathbf{r} = [\mathbf{r} \times \omega dt]$. Тогда

$$\sigma = \frac{1}{2}[\mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times \omega]] = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\mathbf{r}(\mathbf{r}, \omega)}_0 - \omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \right) = \frac{r^2 \omega}{2}.$$

Получим еще одно важное соотношение — **интеграл энергии** — формулу для скорости тела на орбите с большой полуосью a в точке, удалённой на расстояние r от центрального тела с массой M . Для этого запишем ЗСЭ, а для полной энергии запишем выражение (2.27):

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a}.$$

Данное выражение можно переписать в следующем виде:

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}. \quad (2.29)$$

Полученное выражение и называется интегралом энергии. Согласно (2.29) и (3.7) для скорости тела в произвольной точке орбиты также справедливо выражение

$$v = \sqrt{\frac{GM}{p} \cdot (1 + 2e \cos \nu + e^2)}, \quad (2.30)$$

где ν — истинная аномалия, а p — фокальный параметр.

Установим зависимость скорости от эксцентрической аномалии E^{14} , для этого воспользуемся выражением (2.54) и подставим его в интеграл энергии (2.29),

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}}. \quad (2.31)$$

¹⁴см. Раздел 2.12

Найдем величину момента импульса пробной массы m на параболической орбите. В силу постоянства данной величины, можно выбрать любую точку орбиты для её поиска. Проще всего рассмотреть перигеев:

$$\begin{aligned} L = mv_q q &= mv_2(q)q = m\sqrt{\frac{2GM}{q}} \cdot q = \\ &= m\sqrt{2GMq} = m\sqrt{2GM \cdot \frac{p}{2}} = m\sqrt{GMp}. \end{aligned}$$

Момент импульса также можно записать в терминах эксцентрической аномалии. Из такого равенства можно получить зависимость угла между радиус-вектором и вектором скорости от эксцентрической аномалии. Записав L как $mv \sin \alpha$, а далее подставив (2.54) и (2.31)

$$\begin{aligned} ma(1 - e \cos E) \cdot \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}} \sin \alpha &= m\sqrt{GMa(1 - e^2)}, \\ \sin \alpha &= \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 E}}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.9 Законы Кеплера

I-ый закон *Все планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце.*

Запишем уравнение движения планеты в гравитационном поле Солнца — сила, действующая на планету, равна силе гравитационного притяжения. По второму закону Ньютона:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}. \quad (2.33)$$

Найдем выражение для $\ddot{\mathbf{r}}$ и решим данное векторное уравнение. Введем мгновенную ортонормированную систему отсчета $(\hat{r}, \hat{\theta})$. Вектор \hat{r} — единичный вектор в направлении \mathbf{r} , а $\hat{\theta}$ единичный вектор выбранный так, чтобы образовывать с \hat{r} правую пару.

Возьмём производные от орт:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{r} &= \Delta\theta\hat{\theta}, & \dot{\hat{r}} &= \omega\hat{\theta}, \\ \Delta\hat{\theta} &= -\Delta\theta\hat{r}, & \dot{\hat{\theta}} &= -\omega\hat{r}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

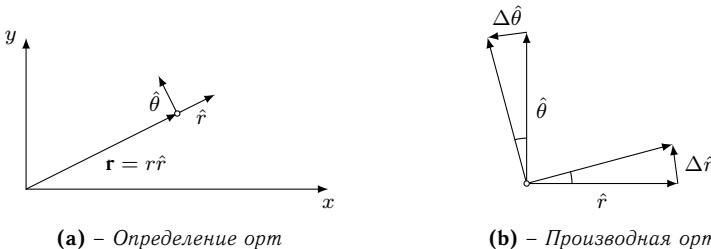


Рис. 29

Найдем производные от $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= (r\hat{r})' = \dot{r}\hat{r} + r\omega\hat{\theta}, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\dot{r}\hat{r} + r\omega\hat{\theta})' = \hat{r}(\ddot{r} - r\omega^2) + \hat{\theta}(2\dot{r}\omega + r\ddot{\theta}).\end{aligned}\quad (2.35)$$

Для данной системы выполняется ЗСМИ, рассмотрим производную от момента импульса

$$\dot{I} = (r^2\omega)' = 2r\dot{r}\omega + r^2\ddot{\theta} = (2\dot{r}\omega + r\ddot{\theta})r = 0.$$

Отсюда заключим, что

$$\ddot{\mathbf{r}} = \hat{r}(\ddot{r} - r\omega^2). \quad (2.36)$$

Вспомним выражение второго закона Ньютона (2.33) и перепишем выражение для $\ddot{\mathbf{r}}$:

$$\begin{aligned}m(\ddot{r} - r\omega^2)\hat{r} &= -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}, \\ m(\ddot{r} - r\omega^2) + \frac{GMm}{r^2} &= 0.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Теперь введём обозначение: $u \equiv 1/r$, используя его, запишем выражение для модуля момента импульса планеты:

$$L = 2m\sigma = mr^2\omega = \frac{m\omega}{u^2} = \frac{m}{u^2} \frac{d\theta}{dt},$$

где θ — угловая координата в полярной системе координат с центром в центре Солнца. Выразим dt из полученного выражения.

$$dt = \frac{m}{Lu^2} d\theta.$$

Найдем теперь первую производную длины радиус-вектора по времени в новых обозначениях:

$$\dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt},$$

подставим сюда выражение для dt :

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du \cdot Lu^2}{m d\theta} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}.$$

Далее получим выражение для второй производной:

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{L}{m} \frac{d^2 u}{dt d\theta},$$

снова воспользуемся выражением для dt ,

$$\ddot{r} = -\frac{L^2 u^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2}.$$

Подставим \ddot{r} и $mr^2\omega = L$ в (2.37) и получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} -\frac{L^2 u^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} &= -GMu^2 + \frac{L^2 u^3}{m^2}, \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= \frac{GMm^2}{L^2}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Общее решение полученного неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = 0$$

и частного решения неоднородного уравнения. В качестве частного решения возьмём

$$u(\theta) = \frac{GMm^2}{L^2} = \text{const.}$$

Однородное уравнение является уравнением гармонических колебаний, поэтому его решение можно представить в виде

$$u(\theta) = A \cos \theta,$$

где A — постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий. Общее решение неоднородного уравнения запишется, как

$$u(\theta) = \frac{GMm^2}{L^2} + A \cos \theta \equiv \frac{1}{r(\theta)}. \quad (2.39)$$

В качестве начальных условий рассмотрим: $r(0) = s$, $L = m\sqrt{GMh}$, где s и h пока только некоторые расстояния. Подставив выбранные начальные условия в решение (2.39) уравнения (2.38), получим, что

$$A = \frac{h - s}{sh}.$$

В итоге решение уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{h} + \frac{h - s}{sh} \cos \theta, \\ r &= \frac{sh}{s + (h - s) \cos \theta}, \\ r &= \frac{h}{1 + \frac{h - s}{s} \cos \theta}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Полученное уравнение является уравнением конического сечения в полярных координатах, где $(h - s)/s$ — эксцентриситет e , h — фокальный параметр p , а θ — истинная аномалия ν . Конкретный тип орбиты определяется величиной полной механической энергии, что будет рассмотрено ниже. Это завершает доказательство первого закона Кеплера. Для задачи двух тел доказательство аналогично, достаточно воспользоваться приведённой массой.

II-ой закон Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени замечает равные площади.

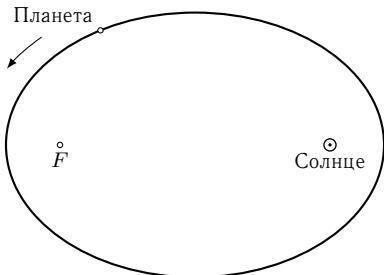
$$\frac{dS}{dt} = \sigma = \frac{L}{2m} = \text{const} = \frac{S_{\text{эл}}}{T} = \frac{\pi ab}{T}. \quad (2.41)$$

Второй закон Кеплера является прямым следствием закона сохранения момента импульса.

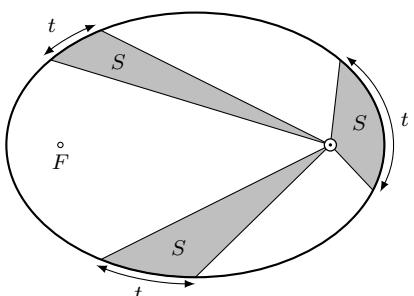
III-ий закон Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (2.42)$$

где a — большая полуось, T — период обращения.



(а) – Первый закон Кеплера



(б) – Второй закон Кеплера

Получим третий закон Кеплера, из второго. Для этого используем выражения для секториальной скорости через площадь эллипса

$$\sigma = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T}$$

и через момент импульса — рассмотрим точкуperiцентра:

$$\sigma = \frac{L}{2m} = \frac{m \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}} \cdot a(1-e)}{2m}.$$

Приравнивая их друг другу имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T} &= \frac{m \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}} \cdot a(1-e)}{2m}, \\ \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{T^2} &= a^2 (1 - e)^2 \cdot \frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e} \\ \frac{T^2}{a^3} &= \frac{4\pi^2}{GM}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Обобщённый Ньютона III-ий закон Кеплера имеет вид:

$$\frac{T_1^2(M_1 + m_1)}{T_2^2(M_2 + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \Leftrightarrow \frac{T^2(M + m)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G}, \tag{2.44}$$

где M_1 и M_2 — массы центральных тел, m_1 и m_2 — массы обращающихся вокруг них тел. Так как характерная масса планеты m много меньше массы звезды M , полагают $M + m \simeq M$.

2.10 Задача двух тел

В случае сравнимых масс законы Кеплера нуждаются в уточнении. Данная проблема называется **задачей двух тел**. Пусть в пространстве в некоторой произвольной системе отсчета существуют два тела с массами M_1 и M_2 с данными начальными координатами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , а также начальными скоростями \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 . Решение задачи двух тел заключается в поиске законов движения $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$.

Второй закон Ньютона в данной СО записывается как:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{12} &= M_1 \ddot{\mathbf{r}}_1, \\ \mathbf{F}_{21} &= M_2 \ddot{\mathbf{r}}_2.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Если сложить два данных уравнения, учитывая что по третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, можно получить частный случай *теоремы о движении центра масс*:

$$M_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + M_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = (M_1 + M_2) \ddot{\mathbf{R}} = 0,$$

где $\ddot{\mathbf{R}}$ — ускорение центра масс системы. Данное равенство следует напрямую из определения центра масс. Введем вектор \mathbf{r} как $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, тогда общее решение задачи можно найти как:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(t) &= \mathbf{R}(t) + \frac{M_2}{M_1 + M_2} \mathbf{r}(t), \\ \mathbf{r}_2(t) &= \mathbf{R}(t) - \frac{M_1}{M_1 + M_2} \mathbf{r}(t).\end{aligned}\quad (2.46)$$

Как уже было показано, в данной системе ускорение центра масс равно нулю, а его координаты и скорость находятся напрямую из начальных условий, поэтому сконцентрируемся на поиске выражения для $\mathbf{r}(t)$.

Поделим каждое из уравнений (2.45) на соответствующую массу и вычтем их друг из друга:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{M_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{M_2} = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}}{\mu}. \quad (2.47)$$

Тут мы опять воспользовались третьим законом Ньютона, чтобы обозначить $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Выражение с обратной суммой обратных масс называется **приведённой массой** системы.

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}. \quad (2.48)$$

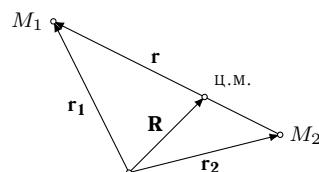


Рис. 31

Выражение (2.47) является аналогом второго закона Ньютона для задачи двух тел. Это уравнение можно решить аналогично обычной задаче Кеплера и свести его к аналогу уравнения (2.38):

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM_1 M_2}{\mu l^2}. \quad (2.49)$$

Решение данного уравнения — эллипс с фокальным параметром

$$p = \frac{\mu l^2}{GM_1 M_2} = \frac{l^2}{G(M_1 + M_2)}.$$

Таким образом тела будут двигаться по подобным эллипсам с коэффициентом подобия M_1/M_2 так, что центр масс системы будет двигаться без ускорения.

Найдем выражение для полной энергии в системе двух тел. По определению полная энергия есть сумма кинетической и потенциальной:

$$T + U = E_0$$

Из теоремы о вириале известно соотношение

$$2\langle T \rangle_\tau = -\langle U \rangle_\tau$$

Таким образом можно получить выражение для полной энергии через среднюю величину потенциальной энергии:

$$E_0 = \left\langle \frac{U}{2} \right\rangle_\tau$$

Гравитационный потенциал имеет форму $1/r$. Найдем по определению среднее по времени (средней аномалии) значение величины $1/r$ для тела на орбите:

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dM}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dE}{a} = \frac{1}{a}.$$

Тут мы воспользовались соотношением $dM = r dE$. Отсюда величина полной энергии

$$E_0 = -\frac{GM_1 M_2}{2a},$$

где a есть полуось эллипса образованного вектором \mathbf{r} .

2.11 Типы орбит

Вернемся к первому закону Кеплера, в частности к полученному уравнению орбиты (2.40). Определим, как знак полной механической энергии связан с видом орбиты.

Заметим, в принятых обозначениях s —periцентр орбиты, так как истинная аномалия отсчитывается от перицентра, то есть минимальное расстояние от тела до гравитирующего центра. Согласно закону сохранения энергии на минимальном расстоянии достигается максимальная скорость v_{\max} . Также из соображения минимальности расстояния, в это момент скорость перпендикулярна радиус вектору, следовательно момент импульса тела $L = m\sqrt{GMh} = ms v_{\max}$, то есть

$$v_{\max} = \frac{\sqrt{Gmh}}{s}.$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{mv_{\max}^2}{2} - \frac{GMm}{s} &= E_0, \\ \frac{GMmh}{2s^2} - \frac{GMm}{s} &= E_0, \\ E_0 &= GMm \cdot \frac{h - 2s}{2s^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, если движение финитно — $E_0 < 0$, то $h < 2s$ и эксцентрикитет

$$e = \frac{h - s}{s} < 1,$$

следовательно, орбита является эллипсом. Пусть теперь $E_0 = 0$, тогда $h = 2s$ и $e = 1$, откуда орбита — парабола. Остается рассмотреть случай $E_0 > 0$, тогда $h > 2s$, $e > 1$ и орбита является гиперболой.

Частным случаем эллиптической орбиты является окружность, когда $s = h \equiv r$ — радиус орбиты. В этом случае

$$E_0 = -\frac{GMm}{2r} = \frac{\Pi}{2},$$

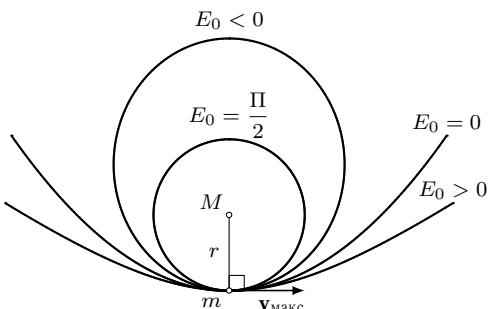


Рис. 32 – Типы орбит при различных значениях E_0

откуда $K = -\Pi/2$, следовательно,

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{GMm}{2r},$$

$$v_1 = \frac{GM}{r}. \quad (2.50)$$

Полученная скорость называется **первой космической** или **круговой** скоростью и является минимальной скоростью, чтобы оставаться на орбите вокруг гравитирующего центра массы M на расстоянии r от него.

2.12 Уравнение Кеплера

Рассмотрим эллиптическую орбиту o с центром в точке C , центральным телом в фокусе F и большой полуосью a . Обозначим за P periцентр данной орбиты, тогда $|CP| = a$. Рассмотрим также окружность c , с центром в точке в точке C и радиусом a , очевидно, эта окружность будет касаться эллипса внешним образом в точке P . Выберем на эллипсе произвольную точку B . Проведем через нее прямую, параллельную малой оси эллипса. Точку пересечения полученной прямой с окружностью c назовем A . Угол $E = \angle ACP$ называется **эксцентрической аномалией** точки B .

Получим связь средней аномалии M с эксцентрической — E [5]. Прежде всего напомним, что эллипс является результатом действия аффинного преобразования сжатия (вдоль малой оси) на окружность с радиусом a . И, наоборот, окружность под действием растяжения переходит в эллипс. В наших обозначениях будем считать, что окружность o под действием сжатия ξ с коэффициентом a/b переходит в эллипс o .

Найдем связь площадей секторов $\triangle AFP$ и $\triangle BFP$. Нетрудно заметить, что первый переходит во второй под действием ξ . Из свойств аффинного преобразования получаем:

$$\frac{\text{Area } \triangle BFP}{\text{Area } \triangle AFP} = \frac{b}{a}.$$

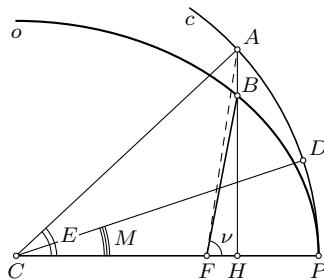


Рис. 33 – К выводу уравнения Кеплера

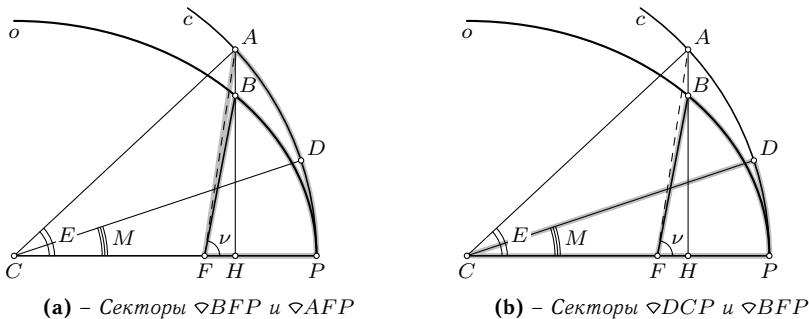


Рис. 34

Как известно, площадь эллипса $S = \pi ab$, а круга с той же большой полуосью — $S' = \pi a^2$. По второму закону Кеплера радиус-вектор тела \vec{FB} за равные промежутки времени заметает равные площади, то есть скорость заметания постоянна и равна $\sigma = \pi ab/T$. А из определения средней аномалии следует, что угловая скорость вектора \vec{CD} также постоянна и равна $\sigma' = \pi a^2/T$. Отсюда можно сделать вывод о соотношении между площадями секторов $\diamond BFP$ и $\diamond DCP$:

$$\frac{\text{Area } \diamond BFP}{\text{Area } \diamond DCP} = \frac{b}{a}.$$

Следовательно, $\text{Area } \diamond DCP = \text{Area } \diamond AFP$.

Как для площади центрального сектора, для $\text{Area } \diamond DCP$ верно

$$\text{Area } \diamond DCP = \frac{a^2}{2} M,$$

здесь угол M , конечно, в радианной мере. Аналогично для $\text{Area } \diamond ACP$:

$$\text{Area } \diamond ACP = \frac{a^2}{2} E.$$

С другой стороны $\diamond ACP = \diamond AFP + \triangle ACF$, а, значит,

$$\text{Area } \diamond ACP = \text{Area } \diamond AFP + \text{Area } \triangle ACF. \quad (2.51)$$

Найдем площадь треугольника $\triangle ACF$:

$$\text{Area } \triangle ACF = \frac{1}{2} |CF| \cdot |AC| \sin E = \frac{1}{2} ae \cdot a \sin E = \frac{a^2 e \sin E}{2}$$

Тогда из равенства $\text{Area} \diamond DCP = \text{Area} \diamond AFP$ и (2.51) получаем:

$$\frac{a^2}{2}E = \frac{a^2e \sin E}{2} + \frac{a^2}{2}M.$$

Отсюда получаем так называемое **уравнение Кеплера**, оно связывает среднюю и эксцентрическую аномалии

$$M = E - e \sin E. \quad (2.52)$$

Расстояние от фокуса как функция эксцентрической аномалии

Вспомним, что точка B принадлежит эллипсу o , следовательно, она удовлетворяет уравнению эллипса в декартовых координатах, значит

$$\frac{|CH|^2}{a^2} + \frac{|BH|^2}{b^2} = 1. \quad (2.53)$$

Далее, $|CH| = |AC| \cos E = a \cos E$, как прилежащий к углу $\angle E$ катет в прямоугольном треугольнике $\triangle AHC$. Выразим теперь $|BH|$ из (2.53):

$$|BH| = b \sqrt{1 - \frac{|CH|^2}{a^2}} = a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 - \frac{a^2 \cos^2 E}{a^2}} = a \sqrt{1 - e^2} \sin E.$$

Найдем $|FH|$:

$$|FH| = |CH| - |CF| = a \cos E - ae = a(\cos E - e).$$

Запишем теорему Пифагора для прямоугольного треугольника $\triangle BHF$:

$$\begin{aligned} |FB|^2 &= |FH|^2 + |BH|^2 = \\ &= a^2(\cos E - e)^2 + a^2(1 - e^2) \sin^2 E = \\ &= a^2(\cos^2 E + e^2 - 2e \cos E + \sin^2 E - e^2 \sin^2 E) = \\ &= a^2(1 - 2e \cos E + e^2(1 - \sin^2 E)) = a^2(1 - e \cos E)^2, \end{aligned}$$

где $|FB|$ — есть расстояние до фокуса. Отсюда,

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.54)$$

Связь эксцентрической и истинной аномалии

Приравняем полученное выражение для $|FB|$ и выражение через уравнение эллипса в полярных координатах:

$$|FB| = r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu},$$

$$1 - e \cos E = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \nu}. \quad (2.55)$$

Приведем (2.55) к более простому виду. Воспользуемся для этого формулой для косинуса двойного угла

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

подставим её в (2.55), приведем левую и правую части к общим знаменателям и введём обозначения $E' \equiv \operatorname{tg}^2(E/2)$ и $\nu' \equiv \operatorname{tg}^2(\nu/2)$:

$$\begin{aligned} \frac{1 + E' - e + eE'}{1 + E'} &= \frac{(1 - e^2)(1 + \nu')}{1 + \nu' + e - e\nu'}, \\ \frac{(1 - e) + (1 + e)E'}{1 + E'} &= \frac{(1 - e)(1 + e)(1 + \nu')}{(1 + e) + (1 - e)\nu'}. \end{aligned}$$

Разделим обе части на $1 + e$, сократим правую на $1 - e$, также введём обозначение $\varepsilon = (1 - e)/(1 + e)$:

$$\frac{\varepsilon + E'}{1 + E'} = \frac{1 + \nu'}{1/\varepsilon + \nu'}.$$

Перемножив члены пропорции и приведя подобные, получим

$$\begin{aligned} E' &= \varepsilon \nu', \\ \operatorname{tg} \frac{E}{2} &= \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Полученное равенство завершает систему уравнений для ν , E и M .

2.13 Гиперболическое уравнение Кеплера

Для гиперболы тоже есть свой вариант уравнения Кеплера. Для того, чтобы его получить запишем выражение для момента импульса и уравнение гиперболы в полярных координатах:

$$l = r^2 \dot{\nu} = \sqrt{GMp}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}.$$

Подставив одно уравнение в другое можно получить такое дифференциальное соотношение:

$$\sqrt{GMp} dt = \frac{p^2 d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2}.$$

Вспомнив значение для частоты из третьего закона Кеплера и интегрируя с обеих сторон получим:

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2} = \frac{\omega T}{\sqrt{(e^2 - 1)^3}}.$$

Далее сделаем замену в интеграле:

$$\cos \nu = \frac{e - \cosh H}{e \cosh H - 1}, \quad \sin \nu = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sinh H}{e \cosh H - 1}.$$

Дифференциал тогда:

$$\begin{aligned} -\sin \nu d\nu &= -\frac{(e^2 - 1) \sinh H}{(e \cosh H - 1)^2} dH = -\frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin \nu}{e \cosh H - 1} dH, \\ d\nu &= \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e \cosh H - 1} dH. \end{aligned}$$

После замены интеграл упрощается до:

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{e \cosh H - 1}{\sqrt{(e^2 - 1)^3}} dH = \frac{\omega T}{\sqrt{(e^2 - 1)^3}}.$$

Отсюда получаем **уравнение Кеплера для гиперболы**:

$$\omega T = M = e \sinh H - H. \quad (2.57)$$

2.14 Уравнение Баркера

Для того, чтобы связать истинную аномалию с некоторым временем при движении тела по параболе используют **уравнение Баркера**.

Вспомним выражение для периода тела на орбите из третьего закона Кеплера (2.43):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}},$$

Однако с учётом того, что расстояние доperiцентра $q = a(1 - e)$ и также вспомнив определение средней аномалии можно записать:

$$M = t \sqrt{\frac{GM(1 - e)^3}{q^3}}. \quad (2.58)$$

С другой стороны из уравнения Кеплера (2.52) и разложения синуса в ряд Тейлора (11.40) средняя аномалия

$$\begin{aligned} M &= E - e \sin E = E - e \left(E - \frac{E^3}{3!} + \frac{E^5}{5!} - \dots \right), \\ M &= E(1 - e) + e \left(\frac{E^3}{3!} - \frac{E^5}{5!} + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Теперь запишем формулу перехода от истинной аномалии к эксцентриситической (2.56):

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}.$$

Заметим, что при всех ν , исключая π , можно считать, что $E \ll 1$, так как для параболы $1 - e \ll 1$. Следовательно, поскольку $\operatorname{tg} x \simeq x$,

$$E = 2 \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}.$$

Подставим это в (2.58) с учётом (2.59):

$$M = t \sqrt{\frac{GM(1-e)^3}{q^3}} = \frac{2(1-e)^{3/2}}{\sqrt{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} + \frac{8(1-e)^{3/2}}{3! \cdot (1+e)^{3/2}} \operatorname{tg}^3 \frac{\nu}{2} + \dots$$

Сократив на $(1-e)^{3/2}$ и приведя выражение, получим *уравнение Баркера*

$$t = \sqrt{\frac{2q^3}{GM}} \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\nu}{2} \right). \quad (2.60)$$

2.15 Точки Лагранжа

Точки Лагранжа — точки во вращающейся системе из двух массивных тел, в которых третье тело с пренебрежимо малой массой, не испытывающее воздействие никаких других сил, кроме гравитационных со стороны двух первых тел, может оставаться неподвижным относительно этих тел. В данных точках гравитационные силы, действующие

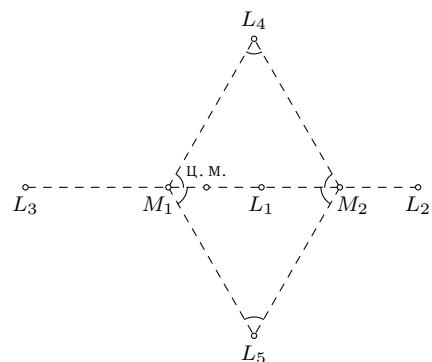


Рис. 35 – Точки Лагранжа

на малое тело, уравновешиваются силами инерции.

Точки L_1 , L_2 и L_3 лежат на одной прямой, соединяющей два массивных тела (см. Рис. 35). В системе Солнце – Земля точка L_1 находится между Землёй и Солнцем, L_2 — с противоположной стороны от Земли, а точка L_3 располагается за Солнцем. Точки L_4 и L_5 образуют равносторонние треугольники с массивными телами.

Получим выражения для расстояний от центра масс системы до точек Лагранжа. Проще всего это сделать для точек L_1 и L_2 . Пусть R — расстояние между телами, M_1 и M_2 — их массы. Будем искать расстояние r до точки L_1 от тела M_2 .

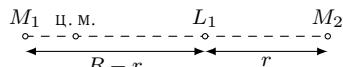


Рис. 36 – Расположение точки L_1

Из уравнения моментов сил тела с массой M_2 находится на расстоянии βR от центра масс, где $\beta \equiv M_1/(M_1 + M_2)$. Тело с массой M_1 , соответственно, — на расстоянии αR , где $\alpha \equiv M_2/(M_1 + M_2)$. Легко видеть, что $\alpha + \beta = 1$, данный факт будет использован ниже.

Запишем уравнение баланса сил, действующих на пробное тело в точке L_1 :

$$\frac{GM_1m}{(R-r)^2} = \frac{GM_2m}{r^2} + m\omega^2 \left(R \cdot \frac{M_1}{M_1 + M_2} - r \right), \quad (2.61)$$

где ω — угловая скорость вращения системы вокруг центра масс. Выразим её из обобщенного третьего закона Кеплера:

$$\frac{G(M_1 + M_2)}{R^3} = \frac{4\pi^2}{T^2} = \omega^2.$$

Подставим угловую скорость в (2.61):

$$\begin{aligned} \frac{GM_1m}{(R-r)^2} &= \frac{GM_2m}{r^2} + m \frac{G(M_1 + M_2)}{R^3} \left(R \cdot \frac{M_1}{M_1 + M_2} - r \right), \\ \frac{M_1}{(R-r)^2} &= \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_1 + M_2}{R^3} \left(R \cdot \frac{M_1}{M_1 + M_2} - r \right), \\ \frac{M_1}{(R-r)^2} &= \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_1}{R^2} - \frac{(M_1 + M_2)}{R^2} \cdot \frac{r}{R}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $M_2 \ll M_1$, тогда $r \ll R$, следовательно

$$\frac{M_1}{R^2} \left(1 + \frac{2r}{R} + o\left(\frac{r}{R}\right) \right) = \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_1}{R^2} - \frac{(M_1 + M_2)}{R^2} \cdot \frac{r}{R},$$

$$\begin{aligned}\frac{M_1}{R^2} \left(1 + \frac{2r}{R} - 1 + \frac{r}{R} + o\left(\frac{r}{R}\right) \right) &= M_2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right), \\ \frac{M_1}{R^2} \left(\frac{3r}{R} + o\left(\frac{r}{R}\right) \right) &= \frac{M_2}{r^2} \left(1 + o\left(\frac{r}{R}\right) \right), \\ \frac{M_1}{R^2} \cdot \frac{3r}{R} \simeq \frac{M_2}{r^2} &\Rightarrow r \simeq R \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}.\end{aligned}$$

Заметим, что уравнение для точки L_2 с точностью до знака перед r совпадает с (2.61). Следовательно, расстояние от центра масс системы до точек L_1 и L_2 определяется, как

$$R_{1,2} = R \left(1 \mp \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} \right). \quad (2.62)$$

Найдем теперь расстояние R_3 от центра масс до точки L_3 . Пусть точка L_3 находится на расстоянии $R - r$ от тела с массой M_1 . Будем искать расстояние r . Запишем баланс сил, предварительно сократив на Gm :

$$\frac{M_1}{(R-r)^2} + \frac{M_2}{(2R-r)^2} = \frac{M_1 + M_2}{R^3} \left(R - r + R \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2} \right). \quad (2.63)$$

Снова рассмотрим случай $r \ll R$, когда $M_2 \ll M_1$, тогда (2.63) будет выглядеть, следующий образом:

$$\begin{aligned}\frac{M_1}{R^2} \left(1 + \frac{2r}{R} \right) + \frac{M_2}{4R^2} \left(1 + \frac{r}{R} \right) &\simeq \frac{M_1}{R^2} + \frac{M_2}{R^2} - \frac{M_1}{R^2} \cdot \frac{r}{R} - \frac{M_2}{R^2} \cdot \frac{r}{R} + \frac{M_2}{R^2}, \\ \frac{r}{R} \left(\frac{3M_1}{R^2} + \frac{5M_2}{4R^2} \right) &\simeq \frac{7M_2}{4R^2} \Rightarrow r \simeq R \cdot \frac{7M_2}{12M_1}.\end{aligned}$$

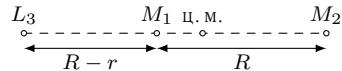
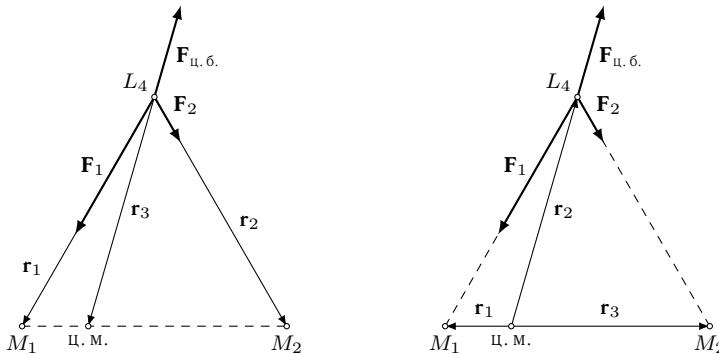


Рис. 37 – Расположение точки L_3

Следовательно, расстояние до точки L_3 от центра масс системы равно

$$R_3 \simeq R - r + R\alpha \simeq R \left(1 + \frac{5M_2}{12M_1} \right). \quad (2.64)$$

Остается найти координаты точек Лагранжа L_4 и L_5 , для этого рассмотрим Рис. 38а. Векторы \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и \mathbf{r}_3 — радиус-векторы соответственно тела с массой M_1 , тела с массой M_2 и центра масс относительно точки L_4 . В силу симметрии все рассуждения будут верны и для точки L_5 . Также на рисунке отмечены силы, действующие на тело, располагающееся в точке L_4 : \mathbf{F}_1 — сила гравитации от тела с массой M_1 , \mathbf{F}_2 —



(а) – Основной способ поиска координат точек L_4 и L_5 (б) – Альтернативный способ поиска координат точек L_4 и L_5

Рис. 38

с массой M_2 , сила инерции $\mathbf{F}_{\text{ц.б.}}$ — центробежная, коллинеарна вектору \mathbf{r}_3 .

Будем действовать также, как с точками L_1 , L_2 и L_3 — запишем уравнение баланса сил, сократив на массу пробного тела m :

$$\frac{GM_1}{|\mathbf{r}_1|^3}\mathbf{r}_1 + \frac{GM_2}{|\mathbf{r}_2|^3}\mathbf{r}_2 - \omega^2\mathbf{r}_3 = 0. \quad (2.65)$$

Из физического смысла радиус-вектора центра масс, что суммарная масса системы, помещенная в центр масс должна создавать такой же момент силы относительно произвольной точки, как вся система, справедливо следующее:

$$\mathbf{r}_3 = \frac{M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2}{M_1 + M_2}.$$

А так как $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = R$, то выражение для силы инерции принимает вид

$$\mathbf{F}_{\text{ц.б.}} = m\omega^2\mathbf{r}_3 = \frac{Gm(M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (2.66)$$

Подставляя (2.66) в уравнение баланса сил (2.65), получим:

$$\begin{aligned} \frac{GM_1}{|\mathbf{r}_1|^3}\mathbf{r}_1 + \frac{GM_2}{|\mathbf{r}_2|^3}\mathbf{r}_2 - \frac{GM_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}\mathbf{r}_1 - \frac{GM_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}\mathbf{r}_2 &= 0, \\ M_1 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_1|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) \mathbf{r}_1 + M_2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_2|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) \mathbf{r}_2 &= 0. \end{aligned}$$

В силу неколлинеарности векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 получаем, что

$$|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2|, \quad (2.67)$$

следовательно треугольник $\triangle M_1 L_4 M_2$ равносторонний. Значит в системе координат центра масс y -координата точек L_4 и L_5 равна $\pm R\sqrt{3}/2$. Найдем x -координату точки L_4 в системе координат центра масс:

$$x = -R\alpha + \frac{R}{2} = \frac{R}{2} \cdot \frac{-2M_2 + M_1 + M_2}{M_1 + M_2} = \frac{R}{2} \cdot \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}.$$

Окончательно для координат точек Лагранжа в системе отсчета центра масс, с осью x , направленной в сторону тела с массой M_2 , имеем следующее:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1,2} &= R \begin{pmatrix} 1 \mp \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{r}_3 = -R \begin{pmatrix} 1 + \frac{5M_2}{12M_1} \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{r}_{4,5} &= \begin{pmatrix} \frac{R}{2} \cdot \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \\ \pm \frac{\sqrt{3}R}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Разберем также второй способ найти координаты точек L_4 и L_5 . Рассмотрим Рис. 38б. Пусть положение тел с массами M_1 и M_2 , а также точки L_4 , относительно центра масс задается радиус-векторами \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и \mathbf{r}_3 соответственно. Выпишем координаты этих векторов, приняв расстояние между массивными телами за R :

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -R \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2} \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -R\alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} R \cdot \frac{M_1}{M_1 + M_2} \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} R\beta \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Координаты (x, y) ненулевого вектора \mathbf{r}_3 и предстоит найти. Суть данного способа заключается в проецировании сил, действующих на пробную массу, находящуюся в точке L_4 на радиальную относительно центра масс ось и тангенциальную. Направление радиальной оси задается вектором \mathbf{r}_3 , а тангенциальной — вектором ей ортогональным с координатами, например, $(y, -x)$. Обозначим его \mathbf{r}_3^\perp . Силы, принимаемые в расчет равны

$$\mathbf{F}_1 = \frac{GM_1 m}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) = \frac{GM_1 m}{[(R\alpha + x)^2 + y^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} -R\alpha - x \\ -y \end{pmatrix} \equiv \frac{GM_1 m}{A} \begin{pmatrix} -R\alpha - x \\ -y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{GM_2 m}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) = \frac{GM_2 m}{[(R\beta - x)^2 + y^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} R\beta - x \\ -y \end{pmatrix} \equiv \frac{GM_2 m}{B} \begin{pmatrix} R\beta - x \\ -y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{\text{ц.6}} = m\omega^2 \mathbf{r}_3 = \frac{G(M_1 + M_2)m}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \mathbf{r}_3 = \frac{G(M_1 + M_2)m}{R^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

Запишем уравнение баланса этих сил в проекции на ось \mathbf{r}_3^\perp , используя координатное представление скалярного произведения:

$$\frac{(\mathbf{r}_3^\perp, \mathbf{F}_1)}{|\mathbf{r}_3^\perp|} + \frac{(\mathbf{r}_3^\perp, \mathbf{F}_2)}{|\mathbf{r}_3^\perp|} = 0,$$

$$yF_1^x - xF_1^y + yF_2^x - xF_2^y = 0,$$

$$\frac{-yM_1(R\alpha + x) + xyM_1}{A} + \frac{yM_2(R\beta - x) + xyM_2}{B} = 0,$$

$$yR \left(-\frac{M_1\alpha}{A} + \frac{M_2\beta}{B} \right) + xy \underbrace{\left(\frac{M_1}{A} + \frac{M_1}{A} \cancel{-} \frac{M_2}{B} + \frac{M_2}{B} \right)}_0 = 0.$$

Подставим выражения для α и β :

$$\frac{yRM_1M_2}{M_1 + M_2} \left\{ \frac{1}{[(R\alpha + x)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(R\beta - x)^2 + y^2]^{3/2}} \right\} = 0,$$

$$\frac{[(R\beta - x)^2 + y^2]^{3/2} - [(R\alpha + x)^2 + y^2]^{3/2}}{[(R\alpha + x)^2 + y^2]^{3/2} [(R\beta - x)^2 + y^2]^{3/2}} = 0.$$

Заметим, полученное уравнение верно лишь при равенстве нулю числителя, что равносильно условию $R\beta - x = R\alpha + x$, следовательно,

$$x = \frac{R}{2}(\beta - \alpha) = \frac{R}{2} \cdot \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}.$$

Важно отметить, при полученном значении x выполняется равенство $A = B$, чем мы сейчас и воспользуемся. Найдём возможные значения y , при заданном значении x , полученном выше. Для этого запишем уравнения баланса сил \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 и $\mathbf{F}_{\text{ц.б}}$ на ось \mathbf{r}_3 :

$$\frac{(\mathbf{r}_3, \mathbf{F}_1)}{|\mathbf{r}_3|} + \frac{(\mathbf{r}_3, \mathbf{F}_2)}{|\mathbf{r}_3|} + \frac{m\omega^2(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_3|} = 0,$$

$$\frac{-xM_1(R\alpha + x) - y^2M_1}{A} + \frac{xM_2(R\beta - x) - y^2M_2}{B} + \frac{M_1 + M_2}{R^3} \cdot (x^2 + y^2) = 0,$$

$$(x^2 + y^2) \left(-\frac{M_1}{A} - \frac{M_2}{B} + \frac{M_1 + M_2}{R^3} \right) + xR \underbrace{\left(-\frac{M_1\alpha}{A} + \frac{M_2\beta}{B} \right)}_0 = 0,$$

$$(x^2 + y^2)(M_1 + M_2) \left(-\frac{1}{B} + \frac{1}{R^3} \right) = 0.$$

Случай $x = y = 0$ нарушает предположение $\mathbf{r}_3 \neq \mathbf{0}$, значит приведенное выше равенство выполняется только при условии $R^3 = B$, иначе,

$$(x - R\beta)^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

Полученные координаты совпадают с найденными ранее. Относятся, соответственно, к точкам L_4 и L_5 .

2.16 Сфера действия, сфера Хилла

Сфера действия — область пространства внутри которой возмущение от внешнего тела относительно планеты меньше, чем возмущение от

планеты относительно внешнего тела. То есть лёгкое отклонение от положения на орбите не должно приводить к уводу внешним телом. В первом приближении данная область — сфера. Приведем классический вывод её радиуса:

Для этого рассмотрим две точечные массы A и B расположенные в точках \mathbf{r}_A и \mathbf{r}_B , с массами M_A и M_B соответственно. Расстояние между объектами $R = |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|$. Введем третью безмассовую частицу C в точке \mathbf{r}_C . Далее для анализа динамики движения точки C мы можем рассматривать задачу как в системе отсчета точки A , так и точки B .

Рассмотрим систему отсчета связанную с точкой A . Точка B с силой гравитации которую мы обозначим как g_B будет возмущать точку C относительно гравитации g_A точки A . Вследствие закона всемирного тяготения, точка A будет притягиваться к точке B с ускорением

$$\mathbf{a}_A = \frac{GM_B}{R^3} (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A),$$

а значит данная система отсчета неинерциальна. Для того чтобы оценить эффекты возмущений в данной системе отсчета можно рассмотреть отношение величины данных возмущений к основному гравитирующему телу, то есть:

$$\chi_A = \frac{|g_B - a_A|}{|g_A|}.$$

Возмущающая сила $g_B - a_A$ также известна как приливная (45). Аналогичным образом строится χ_B для системы отсчета точки B , в выводе требуется лишь провести замену $A \leftrightarrow B$.

По приближении точки C к A , $\chi_A \rightarrow 0$ и $\chi_B \rightarrow \infty$, и в обратную сторону. Главным считается тот объект относительно которого отношение возмущающих сил меньше, чем относительно другого. Поверхность для которой $\chi_A = \chi_B$ разграничивает пространство на области влияния того или иного тела. В общем случае эта поверхность имеет сложную форму, однако в случае когда масса одного тела много больше другого, скажем $M_A \ll M_B$, возможно найти хорошую аппроксимацию этой разграничитывающей поверхности. В этом случае поверхность будет располагаться вокруг точки A , обозначим r расстояние от точки A до разграничитывающей поверхности.

Главное ускорение в системе отсчета точки A будет равно g_A :

$$g_A = \frac{GM_A}{r^2}.$$

Ускорение системы отсчета a_A по модулю равно:

$$a_A = \frac{GM_B}{R^2}.$$

Вторичное же ускорение равно:

$$g_B \simeq \frac{GM_B}{R^2} + \frac{GM_B}{R^3}r.$$

Приливные силы тогда как разность вторичного ускорения и ускорения системы отсчёта:

$$g_B - a_A \simeq \frac{GM_B}{R^3}r.$$

Заключая находим отношение χ_A :

$$\chi_A \simeq \frac{M_B}{M_A} \frac{r^3}{R^3}.$$

Аналогично для системы отсчёта точки B . Главным ускорением тут будет g_B , а вторичным g_A . Вследствие массивности тела B ($M_A \ll M_B$) ускорение системы отсчета можно принять равным 0:

$$a_B = \frac{GM_A}{R^2} \simeq 0,$$

тогда приливные силы равные $g_A - a_B$ будут численно равны g_A . Отсюда отношение χ_B равно:

$$\chi_B \simeq \frac{M_A}{M_B} \frac{R^2}{r^2}.$$

Расстояние до сферы действия должно удовлетворять равенству:

$$\frac{M_B}{M_A} \frac{r^3}{R^3} = \frac{M_A}{M_B} \frac{R^2}{r^2},$$

а отсюда мы можем записать выражение для радиуса сферы действия точки A :

$$\frac{r}{R} = \left(\frac{M_A}{M_B} \right)^{2/5}. \quad (2.69)$$

Сфера Хилла — одна из моделей расчета радиуса *сферы действия*. Имеет физический смысл области пространства вокруг некоторого объекта (планеты) в которой его собственное гравитационное влияние на

пробную массу больше, чем от внешних тел (Солнца). В первом приближении данная область — сфера, содержащая на себе точку L_1 (2.62) интересующей системы. В обозначениях предыдущей задачи её радиус будет выражаться как:

$$\frac{r}{R} = \sqrt[3]{\frac{M_A}{3M_B}}. \quad (2.70)$$

Часто про сферу Хилла можно услышать что она является областью пространства в которой объект может иметь собственный спутник, однако в реальности же на расстоянии равной сфере Хилла любое внешнее возмущение будет уводить спутник с орбиты и по-настоящему стабильные обриты имеют радиусы в 2-3 раза меньшие, чем сфера Хилла. График сравнения радиусов сферы действия и сферы Хилла для разных отношений масс M_A и M_B приведен правее. При отношении масс тел порядка 250 размеры сфер сравнимы между собой, однако же для малых тел для которых параметр $\lg(M_\odot/M) > 6$ сфера действия будет уже вдвое меньше сферы Хилла.

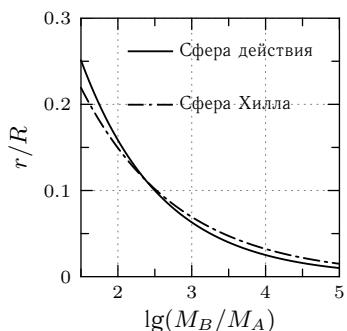


Рис. 39 – Сравнение радиусов сферы действия и сферы Хилла

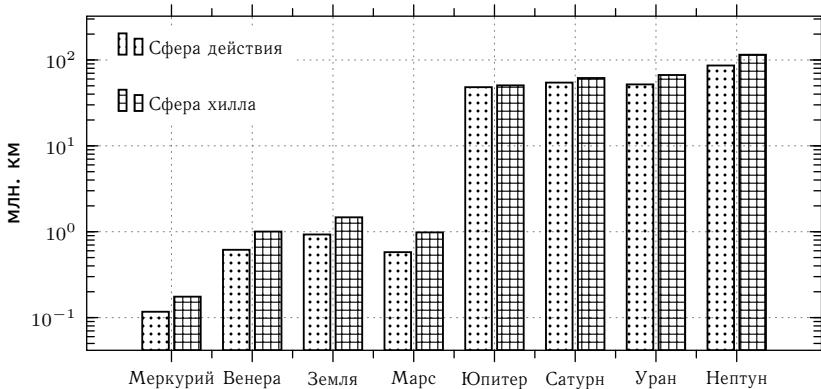


Рис. 40 – Радиусы сферы действия и сферы Хилла для разных планет

2.17 Гравитационный манёвр

Гравитационный манёвр — изменение направления и скорости движения космического аппарата, а как следствие и параметров орбиты, в результате гравитационного взаимодействия с массивным третьим телом. Может осуществляться с применением тяги двигателя и без.

В общем случае рассматривается незамкнутое движение аппарата вокруг третьего тела, иначе аппарат становится его спутником. Рассмотрим гравитационный маневр без двигателя подробнее и найдем максимальное достижимое в этом случае изменение скорости.

Пусть третье тело и аппарат в момент входа второго в область гравитационного влияния первого имеют гелиоцентрические скорости \mathbf{u} и \mathbf{v}_0 соответственно. Тогда скорость аппарата относительно третьего тела в момент входа в область его гравитационного влияния $\mathbf{v}'_0 = \mathbf{v}_0 - \mathbf{u}$. Обозначим $|\mathbf{v}'_0| \equiv v_\infty$.

Из закона сохранения энергии ясно, что максимальная скорость \mathbf{v}_{\max} достигается на минимальном расстоянии q от гравитирующего тела, а из минимальности расстояния следует перпендикулярность вектора скорости к радиус-вектору аппарата в этот момент. Исходя из этого, запишем законы сохранения для момента пересечения сферы влияния тела и момента максимального сближения с ним:

$$\text{ЗСМИ: } v_\infty b = q v_{\max},$$

$$\text{ЗСЭ: } \frac{v_\infty^2}{2} = \frac{v_{\max}^2}{2} - \frac{GM}{q}.$$

Откуда можно выразить максимальную скорость:

$$v_{\max} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2GM}{q}} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2v_1^2}{\rho}}, \quad \rho \equiv \frac{q}{R_{\text{пл}}} > 1,$$

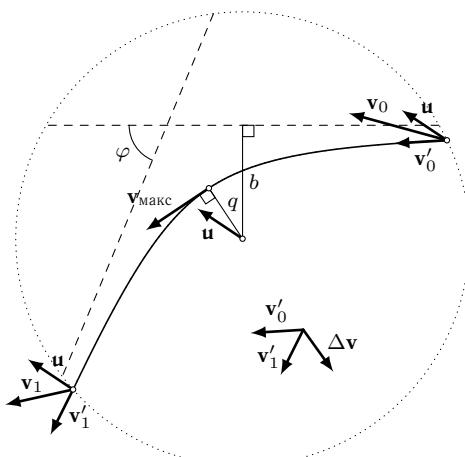


Рис. 41 – Схема гравитационного маневра

где v_1 — первая космическая скорость на поверхности тела. Далее, прицельный параметр гиперболической орбиты аппарата $b = a\sqrt{e^2 - 1}$, с другой стороны

$$b = q \frac{v_{\max}}{v_{\infty}} = a(e - 1) \sqrt{1 + \frac{2v_1^2}{\rho v_{\infty}^2}} = a\sqrt{e^2 - 1}.$$

Получаем уравнение на эксцентриситет:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} &= \sqrt{1 + \frac{2v_1^2}{\rho v_{\infty}^2}} = \sqrt{1 + \frac{2}{\rho\nu^2}}, \quad \nu \equiv \frac{v_{\infty}}{v_1} > 0; \\ e(\rho, \nu) &= \rho\nu^2 + 1. \end{aligned}$$

Далее находим зависимость угла поворота, что то же самое, угла между асимптотами орбиты, от входных параметров:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = 2 \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{e^2 - 1}}{a} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}, \\ \alpha(\rho, \nu) &= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{(\rho\nu^2 + 1)^2 - 1}, \\ \varphi(\rho, \nu) &= \pi - \alpha(\rho, \nu). \end{aligned}$$

В силу симметрии гиперболы и законов сохранения величина относительной скорости в момент выхода из области гравитационного влияния третьего тела $|v'_1| = v_{\infty}$. Остается с помощью теоремы косинусов определить Δv — величину приращения скорости, получаемого при гравитационном манёvre,

$$\begin{aligned} (\Delta v)^2 &= 2v_{\infty}^2 - 2v_{\infty}^2 \cos \varphi = 2v_{\infty}^2(1 + \cos \alpha), \\ \frac{\Delta v}{v_1} &= \nu \sqrt{2 \left[1 + \cos \left(2 \operatorname{arctg} \sqrt{(\rho\nu^2 + 1)^2 - 1} \right) \right]}. \end{aligned}$$

Для нахождения максимального приращения скорости необходимо решить задачу оптимизации, решение которой выходит за рамки этой книги, поэтому сразу приведем ответ:

$$(\rho_0, \nu_0) = \underset{\rho \geq 1, \nu \geq 0}{\operatorname{argmax}} \frac{\Delta v(\rho, \nu)}{v_1} = (1, 1).$$

Следовательно, максимальное приращение скорости при гравитационном маневре с выключенным двигателем составляет

$$(\Delta v)_{\max} = \Delta v(\rho_0, \nu_0) = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Важно понимать, полученная величина достигается только при определенной скорости входа в зону гравитационного влияния тела, а также при сверхблизком по меркам современной космонавтики пролёте. Поэтому в действительности гравитационные маневры добавляют лишь некоторую часть этой скорости, которая используется для ускорения, торможения или поворота.

Отличительной особенностью гравитационного манёвра с включением двигателя является возможное различие величины скорости входа и выхода из зоны влияния тела. Тем самым можно достичь произвольного изменения скорости, если это позволяют запасы топлива на борту аппарата.

2.18 Годограф

Рассмотрим разбиение эллипса на секторы равной инстинтной аномалии. Можно заметить, что из второго закона Кеплера время прохождения одного сектора пропорционально квадрату расстояния до фокуса, обозначим это время за Δt :

$$\Delta t \sim S \sim R^2.$$

Также из второго закона Ньютона известно соотношение:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \sim R^{-2}.$$

Отсюда можем заключить, что:

$$\Delta v \sim \Delta t \cdot R^{-2} \sim R^2 \cdot R^{-2} \sim \text{const.}$$

Значит при прохождении каждого сектора вектор скорости изменяется на некоторую постоянную величину, а также из-за того, что векторы силы и, соответственно, ускорения всегда направлены в сторону Солнца, при прохождении каждого сектора вектор скорости поворачивается на постоянный угол.

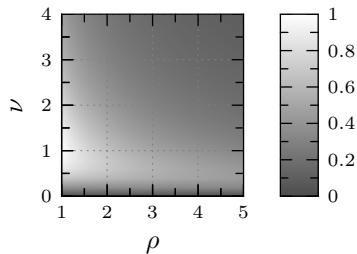


Рис. 42 – Зависимость величины приведения скорости $\frac{\Delta v}{v_1}$ от параметров ρ и ν

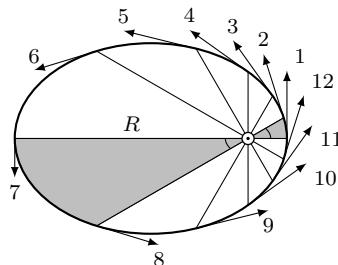


Рис. 43 – Разбиение на секторы

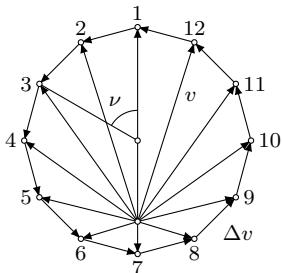


Рис. 44 – Годограф

Геометрически это означает, что вектор скорости будет описывать многоугольник у которого все стороны равны, а также между собой равны все внешние углы, значит этот многоугольник правильный. При устремлении количества секторов на бесконечность фигура будет сходиться к *окружности*. Годограф позволяет решать задачи в пространстве скоростей. Из факта центральности силы гравитации следует, что центральный угол на годографе напрямую соотносится с истинной аномалией, а также нетрудно показать, что при единичной нормировке размера годографа, расстояние между центром окружности и точкой начала отсчета векторов есть эксцентриситет орбиты для которой был построен годограф.

Рассмотрим краткий вывод геометрических свойств годографа. Радиус может быть оценен как полусуммаperiцентрической и апоцентрической скорости:

$$v_R = \frac{v_\pi + v_\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM}{a}} \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} + \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \right] = \frac{v_I}{\sqrt{1-e^2}}.$$

А центральное смещение как полуразность:

$$v_c = \frac{v_\pi - v_\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM}{a}} \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \right] = v_I \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} = ev_R.$$

2.19 Приливные силы

Приливы и отливы — периодические вертикальные колебания уровня океана, являющиеся результатом изменения положения Луны и Солнца. Хотя силы тяготения Солнца почти в 200 раз больше, чем силы тяготения Луны, приливные силы, порождаемые Луной, в 2.2 раза больше порождаемых Солнцем. Это происходит из-за того, что приливные силы зависят не от величины гравитационного поля, а от степени его неоднородности. Высота приливов зависит от взаимного расположения Луны и Солнца: наибольший — силы от Луны и от Солнца действуют вдоль одного направления, а наименьший — под прямым углом друг к другу.

Ускорение в центре Земли (T) определяется формулой (2.6):

$$a_T = \frac{GM}{r^2},$$

где M — масса возмущающего тела, r — расстояние между центрами Земли и данного тела. Аналогично, ускорения в точках A и B равны соответственно

$$a_A = \frac{GM}{(r - R)^2} \quad \text{и} \quad a_B = \frac{GM}{(r + R)^2}, \quad (2.71)$$

где R — радиус Земли или иного тела, подверженного воздействию приливных сил. Ускорение в точке A относительно точки T равно

$$a_A - a_T = GM \cdot \frac{r^2 - (r - R)^2}{r^2(r - R)^2} \xrightarrow{R \ll r} \frac{2GMR}{r^3}. \quad (2.72)$$

Под действием лунного притяжения водная оболочка Земли принимает форму эллипсоида, который вытянут по направлению к Луне. Близ точек A и B будет прилив, а в точках F и D — отлив (см. Рис. 45).

Если расстояние между телами будет достаточно мало, то одно из них из них может начать разрушаться вследствие приливных сил.

Предел Роша — радиус круговой орбиты спутника, обращающегося вокруг небесного тела, на котором приливные силы, вызванные гравитацией центрального тела, равны собственной силе гравитации спутника. На расстоянии равному пределу Роша любое малое возмущение на поверхности меньшего тела приведёт к его разрушению. Для того чтобы его найти требуется приравнять выражение для приливной силы (2.72) к ускорению свободного падения g на поверхности спутника:

$$g = \frac{Gm}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho_s R$$

Отсюда можно получить предел Роша:

$$r_{\text{crit}} = \sqrt[3]{\frac{3M}{2\pi\rho_s}} = R_c \sqrt[3]{\frac{2\rho_c}{\rho_s}}$$

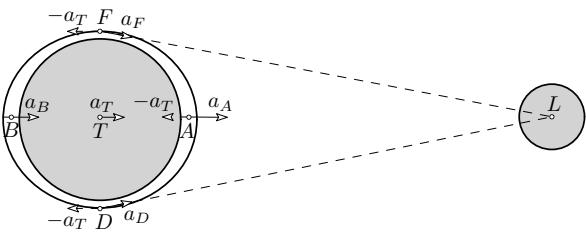


Рис. 45 — К объяснению приливных сил

Где M, R_c, ρ_c — соответствующие параметры центрального (возмущающего) тела и ρ_s — плотность спутника. Стоит отметить, что тут рассматривается случай твёрдого спутника, в случае жидкого спутника предел Рюша возрастает примерно в два раза.

2.20 Синодический период

Синодический период (период смены фаз) небесного тела — период относительного кругового движения.

В большинстве случаев имеется в виду относительное движение планет вокруг Солнца (А). Также может рассматриваться период смены фаз спутника планеты (Б) или период между последовательными пролетами спутника над одним и тем же меридианом планеты (В).

Важным понятием в определении синодического периода является *относительная угловая скорость* — скорость увеличения углового разделения двух рассматриваемых объектов. Так в случае (А) это скорость изменения угла «одна планета – Солнце – другая планета», в случае (Б) — угла «спутник – планета – Солнца», наконец, в случае (В) — угла между отрезком «центр планеты – спутника» и меридианом планеты.

Численно относительная скорость равна разности угловых скоростей двух рассматриваемых движений.

$$\omega_{\text{отн}} = \omega_1 - \omega_2.$$

Обозначим за S синодический период, тогда

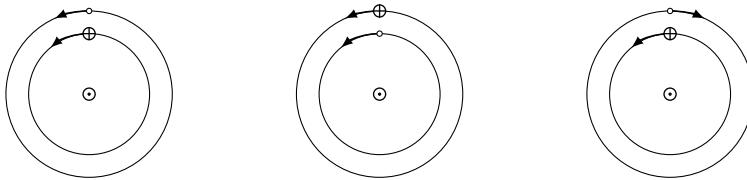
$$\frac{2\pi}{S} = |\omega_{\text{отн}}| = |\omega_1 - \omega_2| = \left| \frac{2\pi}{T_1} \pm \frac{2\pi}{T_2} \right|,$$

где выбор знака в последнем выражении зависит от взаимного направления векторов угловых скоростей, а значит от направления каждого из движений. Окончательно, для синодического периода верно,

$$\frac{1}{S} = \left| \frac{1}{T_1} \pm \frac{1}{T_2} \right|. \quad (2.73)$$

Для внешних и внутренних планет, соответственно, выражения принимают вид:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T_{\text{пл}}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\text{пл}}} - \frac{1}{T_\oplus}, \quad (2.74)$$



(а) – Схема относительного движения Земли и объекта на внешней орбите, движущегося в том же направлении, что и Земля

(б) – Схема относительного движения Земли и объекта на внутренней орбите, движущегося в том же направлении, что и Земля

(в) – Схема относительного движения Земли и объекта, движущегося в противоположном направлении, нежели Земля

Рис. 46

где S — синодический период, $T_{\text{пл}}$ — сидерический период планеты, T_{\oplus} — сидерический период обращения Земли.

В случае, если тела обращаются в противоположные стороны, связь их синодического периода с сидерическими очевидным образом принимает вид:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}. \quad (2.75)$$

На Рис. 47 изображены зависимости продолжительности синодического периода от отношения периодов планет. Важно обратить внимание на вертикальную асимптоту, к которой стремится график в случае движения планет в одну сторону вокруг Солнца. Она отражает отсутствие смены фаз в случае движения объектов по одной круговой орбите.

Горизонтальная асимптота является следствием стремления синодического периода к сидерическому периоду наблюдателя при стремлении сидерического периода объекта к бесконечности. При этом в случае сонаправленного движения синодический период приближается к сидерическому периоду наблюдателя сверху, а в случае встречного — снизу.

Рассмотрим подробнее описанные выше случаи на конкретных примерах.
(А) Относительное движение двух планет вокруг Солнца. Для анализа возьмем пару

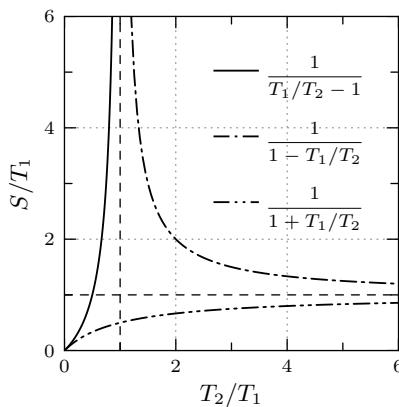


Рис. 47

Земля и Венера. Период Земли $T_{\oplus} = 1$ год, Венеры — $T_{\varphi} = 0.62$ года. Следовательно, синодический период (период смены фаз) Венера для земного наблюдателя, также синодический период Земли для наблюдателя на Венера, определяется как

$$\frac{1}{S_{\oplus\varphi}} = \left| \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{\varphi}} \right| = \frac{1}{T_{\varphi}} - \frac{1}{T_{\oplus}} = \frac{1}{0.62 \text{ года}} - \frac{1}{1 \text{ год}} = 0.61 \frac{1}{\text{год}} \Rightarrow S_{\oplus\varphi} = 1.63 \text{ года},$$

важно отметить, что здесь имеется в виду не календарный, а сидерический год Земли.

(Б) Период смены фаз спутника планеты. Найдём период смены фаз естественного спутника Земли — Луны. Движения, рассматриваемые в данном примере, это обращение Луны вокруг Земли с сидерическим периодом Луны $T_{\mathcal{D}} = 27.3$ суток и обращение Земли вокруг Солнца с сидерическим периодом Земли $T_{\oplus} \simeq 365$ суток. Следовательно, период смены фаз Луны

$$S_{\mathcal{D}} = \left| \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{\mathcal{D}}} \right|^{-1} = \left(\frac{1}{T_{\mathcal{D}}} - \frac{1}{T_{\oplus}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{27.3} - \frac{1}{365} \right)^{-1} = 29.5 \text{ суток}.$$

(В) Орбитальное движение и вращение вокруг своей оси. Несколько переиначим пример описанный выше: рассмотрим движение Земли вокруг Солнца и суточное вращение Земли вокруг своей оси, найдём продолжительность солнечных суток на Земле. Сидерический период Земли $T_{\text{орб}} \simeq 365$ суток (солнечных), а звёздные сутки $T_{\text{ос}} = 23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 4^{\text{s}}$. Отсюда,

$$T_{\text{сут}} = \left(\frac{1}{T_{\text{ос}}} - \frac{1}{T_{\text{орб}}} \right)^{-1} = 24 \text{ часа.}$$

Либрация

Термин **либрация** в астрономии используется для описания влияния неравномерности орбитального движения спутника его на видимое вращение, которое происходит в постоянной угловой скоростью. В случае синхронизации орбитального движения спутника и его вращения вокруг оси, например, Луна, либрация позволяет наблюдателю на Земле видеть более половины поверхности спутника.

Так как вращение спутника вокруг своей оси происходит с постоянной угловой скоростью, то оно линейным образом зависит от средней аномалии M спутника. При этом средняя аномалия связана с эксцентртической аномалией E уравнением

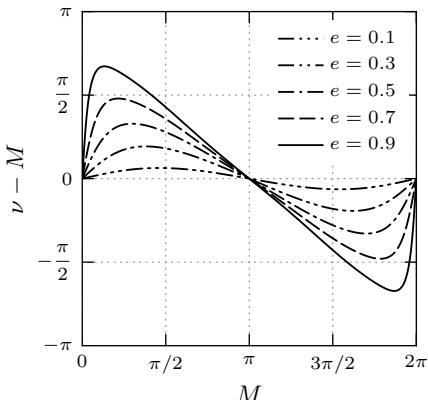


Рис. 48

Кеплера (2.56). Которая в свою очередь описывать истинную аномалию ν , определяющую положение тела на орбите и, соответственно, его поворот относительно наблюдателя в следствии орбитального движения.

Выразим эксцентрическую аномалию E как функцию от средней аномалии M . Для этого воспользуемся методом неподвижной точки [6]. Пусть $E_0 = 0$, а $E_{n+1} = e \sin E_n + M$, такая последовательность сходится, см. [6]. Не сложно получить, что

$$E_n = M + e \sin(M + e \sin(M + \dots)).$$

Далее преобразуем (2.56), чтобы получить выражение для ν :

$$\nu = 2 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{E}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \right).$$

Разность $\nu - M$ определяет разность между наблюдаемой ориентацией спутника и ориентацией в случае круговой орбиты. График зависимости $\nu - M$ от M или, что тоже самое, от части периода спутника приведем на Рис. 48 для различных величин эксцентриситета e .

2.21 Ретроградное движение и точки стояния

Рассмотрим характер движения планеты по небесной сфере в течение синодического периода. Пусть *наблюдатель* — условная точка, обращающаяся вокруг Солнца по некоторой круговой орбите, согласно законам Кеплера. Назовем *лучем зрения* прямую, проходящую через наблюдателя и наблюданную планету. Тогда угловая скорость планеты на небесной сфере наблюдателя $\omega = [(\mathbf{r}_\text{п} - \mathbf{r}_\text{н}) \times (\mathbf{u} - \mathbf{v})]$, где \mathbf{u} и \mathbf{v} — векторы орбитальных скоростей планеты и наблюдателя соответственно.

Пусть планета является внешней для наблюдателя, случай внутренней рассматривается аналогично. Найдём угловую скорость планеты в противостоянии и соединении:

$$\begin{aligned}\omega_\text{п} &= \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{a_\text{п} - a_\text{н}} < 0, \\ \omega_\text{с} &= \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{a_\text{п} + a_\text{н}} > 0,\end{aligned}$$

где в качестве положительного направления выбрано направления движения Солнца на небе наблюдателя.

Из геометрического смысла и определения угловой скорости очевидно, что это непрерывная функция, а значит, существуют такие моменты, когда планета меняет направление своего видимого движения по небесной сфере наблюдателя, такие точки называются **точками стояния**. А движение планеты в противоположную движению Солнца сторону — **ретроградным движением**. Причём внешние планеты находятся в ретроградном движении в окрестности противостояния, а внутренние — в окрестности нижнего соединения.

Получим выражение для размера петли ретроградного движения планеты. Для простоты изложения положим, что планета является внешней. В конце покажем, что полученное выражение справедливо и для внутренних планет.

Итак, пусть обиты планеты и наблюдателя круговые с радиусами $a_{\text{пп}}$ и $a_{\text{н}}$ соответственно, пусть также α — разность эквипараллических долгот наблюдателя и планеты, см. Рис. 49. Тогда расстояние r между ними можно найти из теоремы косинусов:

$$r = \sqrt{a_{\text{пп}}^2 + a_{\text{н}}^2 - 2a_{\text{пп}}a_{\text{н}} \cos \alpha}. \quad (2.76)$$

Пусть δ — угол Солнце — планета — наблюдатель, запишем теорему синусов:

$$\frac{a_{\text{н}}}{\sin \delta} = \frac{r}{\sin \alpha}. \quad (2.77)$$

Остается сказать, что обнуление видимой угловой скорости планеты происходит при равенстве проекций скоростей планеты и наблюдателя на нормаль к лучу зрения, что эквивалентно

$$v_{\text{н}} \cos(\alpha + \delta) = v_{\text{пп}} \cos \delta. \quad (2.78)$$

Найдём теперь α из системы уравнений (2.76) — (2.78). Для удобства изложения введём обозначение $b \equiv a_{\text{пп}}/a_{\text{н}} > 1$. И начнём с (2.77), откуда выразим $\sin \delta$:

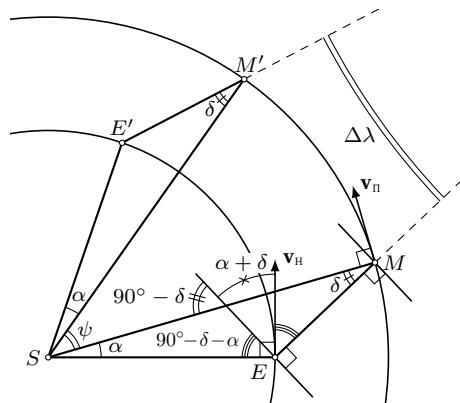


Рис. 49

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \frac{a_{\text{H}} \sin \alpha}{r} = \frac{a_{\text{H}} \sin \alpha}{\sqrt{a_{\text{H}}^2 + a_{\text{H}}^2 - 2a_{\text{H}} a_{\text{H}} \cos \alpha}} = \\ &= \frac{a_{\text{H}} \sin \alpha}{a_{\text{H}} \sqrt{1 + \frac{a_{\text{H}}^2}{a_{\text{H}}^2} - 2 \frac{a_{\text{H}}}{a_{\text{H}}} \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + b^2 - 2b \cos \alpha}}.\end{aligned}$$

Далее получим выражение для $\cos \delta$ из основного тригонометрического тождества:

$$\begin{aligned}0 < \cos \delta &= \sqrt{1 - \sin^2 \delta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + b^2 - 2b \cos \alpha}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 + b^2 - 2b \cos \alpha - 1 + \cos^2 \alpha}{1 + b^2 - 2b \cos \alpha}} = \frac{b - \cos \alpha}{\sqrt{1 + b^2 - 2b \cos \alpha}}\end{aligned}$$

Также вспомним, что

$$\frac{v_{\text{H}}}{v_{\text{H}}} = \frac{\sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_{\text{H}}}}}{\sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_{\text{H}}}}} = \sqrt{\frac{a_{\text{H}}}{a_{\text{H}}}} \equiv \sqrt{\frac{1}{b}}.$$

Остаётся раскрыть косинус суммы в (2.78):

$$\begin{aligned}v_{\text{H}}(\cos \alpha \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta) &= v_{\text{H}} \cos \delta, \\ \cos \alpha \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta &= \sqrt{\frac{1}{b}} \cos \delta, \\ \cos \delta \left(\cos \alpha - \sqrt{\frac{1}{b}} \right) &= \sin \alpha \sin \delta, \\ \frac{b - \cos \alpha}{\sqrt{1 + b^2 - 2b \cos \alpha}} \left(\cos \alpha - \sqrt{\frac{1}{b}} \right) &= \sin \alpha \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + b^2 - 2b \cos \alpha}}, \\ b \cos \alpha - \sqrt{b} - \cos^2 \alpha + \sqrt{\frac{1}{b}} \cos \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha, \\ \cos \alpha &= \frac{b + \sqrt{b}}{b\sqrt{b} + 1}. \tag{2.79}\end{aligned}$$

Вторая точка стояния определяется той же разницей долгот, что видно из Рис. 49, следовательно, ретроградное движение планеты происходит

на протяжении времени

$$t = \frac{2\alpha}{|\omega_{\text{н}} - \omega_{\text{n}}|} = \frac{2\alpha}{\left| \frac{2\pi}{T_{\text{н}}} - \frac{2\pi}{T_{\text{n}}} \right|} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{T_{\text{n}}}{\left| \frac{T_{\text{n}}}{T_{\text{н}}} - 1 \right|} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{T_{\text{n}}}{b\sqrt{b} - 1}.$$

А планета за это время проходит по орбите угол

$$\psi = t\omega_{\text{n}} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{T_{\text{n}}}{b\sqrt{b} - 1} \cdot \frac{2\pi}{T_{\text{n}}} = \frac{2\alpha}{b\sqrt{b} - 1}.$$

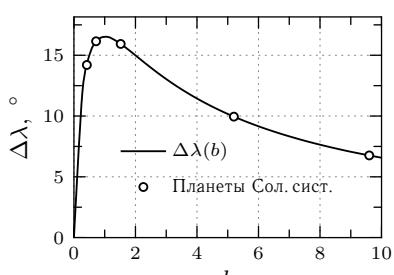
Остается отметить, размер петли попутного движения $\Delta\lambda = 2\delta - \psi$, что следует из Рис. 49. Чтобы получить аналитический вид данного выражения, найдем

$$\begin{aligned} \cos 2\delta &= 1 - 2 \sin^2 \delta = 1 - \frac{2(1 - \cos^2 \alpha)}{1 + b^2 - 2b \cos \alpha} = \\ &= \frac{1 + b^2 - 2b \cos \alpha - 2 + 2 \cos^2 \alpha}{1 + b^2 - 2b \cos \alpha} = \\ &= \frac{-1 + b^2 - 2b \cdot \frac{b + \sqrt{b}}{b\sqrt{b} + 1} + 2 \cdot \frac{b^2 + b + 2b\sqrt{b}}{b^3 + 1 + 2b\sqrt{b}}}{1 + b^2 - 2b \cdot \frac{b + \sqrt{b}}{b\sqrt{b} + 1}} \\ &= \frac{-1 + 2b + b^2 - 3b^3 + b^5}{(b\sqrt{b} + 1)(1 - b\sqrt{b} - b^2 + b^3\sqrt{b})} = \\ &= \frac{(b^2 - 1) - 2b(b^2 - 1) + b^3(b^2 - 1)}{(1 - b^3)(1 - b^2)} = \\ &= \frac{1 - 2b + b^3}{b^3 - 1} = \frac{b^2(b - 1) + b(b - 1) - (b - 1)}{(b - 1)(b^2 + b + 1)} = \frac{b^2 + b - 1}{b^2 + b + 1}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (2.79), размер петли

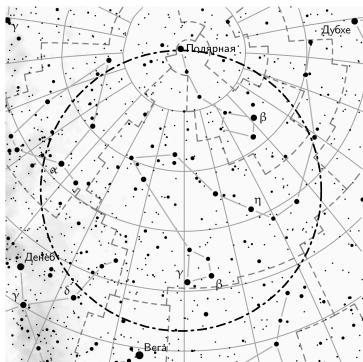
$$\Delta\lambda = \arccos \frac{b^2 + b - 1}{b^2 + b + 1} - \frac{2}{\left| b\sqrt{b} - 1 \right|} \cdot \arccos \frac{b + \sqrt{b}}{b\sqrt{b} + 1}. \quad (2.80)$$

Легко заметить, что для внутренней планеты результат будет тот же, стоит только поменять местами индексы наблюдателя и планеты в выкладках выше.



2.22 Прецессия

Под действием возмущающих сил ось вращения Земли совершает прецессионное движение: описывает вокруг оси эклиптики конус с углом раствора 23.5° с периодом около 25 765 лет. Из-за этого меняется положение полюса мира. Например, сейчас полюс мира практически совпадает с Полярной звездой (α UMi), а 15 000 лет назад роль полярной звезды играла Вега (α Lyg). Если считать, что величина прецессии постоянна, то полюсы мира описывают вокруг полюсов эклиптики малые круги с радиусом 23.5° . В действительности же величина прецессии меняется, поэтому путь полюсов мира представляет собой не окружность, а спираль.



Поворот оси Земли имеет различные последствия. Во-первых, меняется продолжительность тропического года, он становится примерно на 20 минут короче звёздного, во-вторых, меняется вид звёздного неба (см. Рис. 51).

Рис. 51 – Прецессионное движение северного полюса мира

3 Конические сечения

3.1 Эллипс

Эллипс — плоская замкнутая кривая, сумма расстояний от любой точки которой до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна.

$$|F_1M| + |F_2M| = \text{const} \quad (3.1)$$

Центром эллипса называется середина отрезка, соединяющего его фокусы.

Большая ось эллипса — прямая, проходящая через фокусы эллипса; малая ось — прямая ей перпендикулярная и проходящая через центр эллипса.

Главные отрезки эллипса: **большая полуось** (a) — расстояние от центра эллипса до его пересечения с большой осью; **малая полуось** (b) определяется дословно также, заменив большую ось на малую; **фокальное расстояние** (c) — расстояние от центра эллипса до одного из фокусов, что тоже самое, половина расстояния между фокусами.

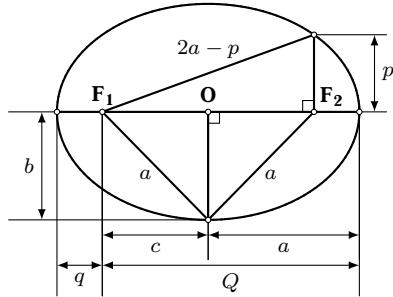


Рис. 52 – Эллипс

Рассмотрим крайнюю левую и крайнюю правую точки эллипса на Рис. 52, назовем их A и B соответственно, тогда сумма расстояний l от каждой из них до фокусов F_1 и F_2 равна:

$$AF_1 + AO + OF_2 = AF_1 + a + c = l = BF_2 + BO + OF_1 = BF_2 + a + c.$$

Откуда следует, что $AF_1 = BF_2$. Легко видеть, что $AB = 2a$, значит $l = AF_1 + AO + OF_2 = AO + OF_2 + F_2B = 2a$. Получается, сумма расстояний до фокусов от любой точки эллипса равна его удвоенной большой полуоси.

В силу равенства прямоугольных треугольников $\triangle F_1OC$ и $\triangle F_2OC$ равны их гипотенузы F_1C и F_2C , причем $F_1C = F_2C = l/2 = a$. Отсюда получается одно из основных соотношений в эллипсе:

$$b^2 + c^2 = a^2. \quad (3.2)$$

Эксцентриситет (e) — числовая характеристика, показывающая степень отклонения конического сечения от окружности. Для эллипса e лежит в интервале $(0, 1)$ и определяется формулой

$$e = \frac{c}{a}. \quad (3.3)$$

Апоцентр — наиболее удаленная от заданного фокуса точка эллипса. Расстояние Q до апоцентра от фокуса — сумма расстояний от фокуса, до центра эллипса и расстояния от центра до апоцентра, т. е.

$$Q = c + a = a(1 + e). \quad (3.4)$$

Перицентр — ближайшая точка эллипса к заданному фокусу. По аналогии с апоцентром, для расстояния q от фокуса эллипса до перицентра справедливо следующее:

$$q = a - c = a(1 - e). \quad (3.5)$$

Фокальный параметр (p) — длина перпендикуляра, проведенного из фокуса до точки пересечения с эллипсом. Найдем p из теоремы Пифагора для треугольника $\triangle F_1F_2P$:

$$\begin{aligned} p^2 &= (2a - p)^2 - (2c)^2, \\ p^2 &= 4a^2 - 4ap + p^2 - 4a^2e^2, \\ \therefore p &= a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a} = b\sqrt{1 - e^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Получим теперь выражение для расстояния от произвольной точки эллипса с **истинной аномалией** ν — угол *перицентр — фокус — заданная точка*, отсчитываемый в сторону движения по эллипсу. Для этого необходимо рассмотреть треугольник *перицентр — фокус — заданная точка* и записать для него теорему косинусов:

$$\begin{aligned} (2a - r)^2 &= r^2 + (2c)^2 - 2r \cdot 2c \cos(180^\circ - \nu), \\ 4a^2 - 4ar + r^2 &= r^2 + 4a^2e^2 + 4rae \cos \nu, \end{aligned}$$

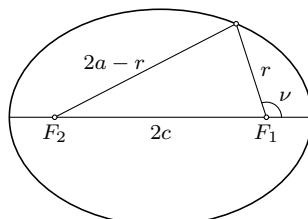


Рис. 53

$$\therefore r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + \cos \nu}.$$

Полученное выражение для длины радиус-вектора точки на эллипсе в зависимости от ее угла от перицентра называется **уравнением эллипса в полярных координатах**. Если же полюс системы координат расположить в другом фокусе, тогда полярный угол будет, очевидно, отсчитываться от точки апоцентра и в знаменателе уравнения будет знак «-». Окончательно,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e \cos \nu}. \quad (3.7)$$

Перейдем теперь в декартовы координаты, в которых $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $\cos \nu = x/r$, тогда:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} = \frac{a(1 - e^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} + ex}, \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= a(1 - e^2) - ex, \\ x^2 + y^2 &= a^2(1 - e^2)^2 + e^2x^2 - 2ae(1 - e^2)x, \\ (1 - e^2)x^2 + y^2 &= a^2(1 - e^2)^2 - 2ae(1 - e^2)x, \\ x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} &= a^2(1 - e^2) - 2aex. \end{aligned}$$

Сдвинем систему отсчета влево так, чтобы центр эллипса оказался в начале координат, тогда новая координата по оси x определяется, как $\xi = x + ae$, иначе $x = \xi - ae$, а $y = \eta$. Подставим полученное выражение в преобразованное уравнение:

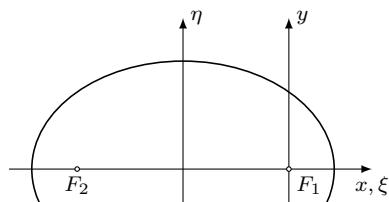


Рис. 54

$$\begin{aligned} \xi^2 + a^2e^2 - 2ae\xi + \frac{\eta^2}{1 - e^2} &= a^2(1 - e^2) - 2ae\xi + 2a^2e^2, \\ \xi^2 + a^2e^2 + \frac{\eta^2}{1 - e^2} &= a^2 - a^2e^2 + 2a^2e^2, \\ \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{a^2(1 - e^2)} &= 1, \\ \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} &= 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Данное уравнение называется **уравнением эллипса в декартовых координатах**.

Далее покажем, что любая точка плоскости, удовлетворяющая (3.7) принадлежит эллипсу с большой полуосью a и малой — b , чтобы доказать равносильность предыдущих переходов. Для этого выберем произвольную точку (x_0, y_0) , для которой выполняется (3.7), т. е.

$$y_0 = \pm b \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} = \pm \sqrt{1 - e^2} \sqrt{a^2 - x_0^2}. \quad (3.8)$$

Докажем, что множество точек (x_0, y_0) , для которых справедливо равенство (3.8) является эллипсом, а точки $(\pm ae, 0)$ — его фокусами:

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= |(x_0, y_0) - (\pm ae, 0)| = \sqrt{(x_0 \mp ae)^2 + y_0^2} = \\ &= \sqrt{x_0^2 \mp 2aex_0 + a^2e^2 + a^2(1 - e^2) - x_0^2(1 - e^2)} = \\ &= \sqrt{x_0^2 \mp 2aex_0 + a^2e^2 + a^2 - a^2e^2 - x_0^2 + e^2x_0^2} = \\ &= \sqrt{e^2x_0^2 \mp 2aex_0 + a^2} = \sqrt{(ex_0 \mp a)^2} = |ex_0 \mp a| = a \mp ex_0. \end{aligned}$$

Отсюда получается, что $r_1 + r_2 = 2a$, а значит рассмотренное множество точек, удовлетворяет определению эллипса. Это доказывает эквивалентность определений эллипса в виде (3.1), (3.7) и (3.7).

Теперь легко показать, что эллипс является образом афинного преобразования сжатия окружности с радиусом a . Для этого рассмотрим окружность, задаваемую уравнением $x^2 + y^2 = a^2$ и сжатие вдоль оси y с коэффициентом $1/\sqrt{1 - e^2}$. Тогда $x' \hookrightarrow x$, а $y' \hookrightarrow y\sqrt{1 - e^2}$. Следовательно для обратного преобразования $x \hookrightarrow x'$, а $y \hookrightarrow y'/\sqrt{1 - e^2}$. При этом прообраз сжатой окружности должен быть исходной окружностью, а значит, удовлетворять исходному уравнения, то есть

$$\begin{aligned} x'^2 + \frac{y'^2}{1 - e^2} &= a^2, \\ \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} &= 1. \end{aligned}$$

Получаем, что образ окружности под действием афинного преобразования сжатия является эллипсом.

Данный факт помогает легко найти **площадь эллипса** (S) — площадь части плоскости, ограниченной эллипсом. Так как под действием

сжатия площади уменьшаются пропорционально коэффициенту преобразования, что есть

$$S = S_{\text{окр}} \sqrt{1 - e^2} = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \pi ab. \quad (3.9)$$

Также из свойств афинного преобразования и параметрического уравнения окружности следует *параметрическое уравнение эллипса*, которое имеет такой вид:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t; \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi). \quad (3.10)$$

Кроме этого, эллипс обладает важным *оптическим свойством*, которое можно сформулировать так: свет от источника в одном из фокусов, отражается эллипсом так, что отражённые лучи пересекаются во втором фокусе или, что тоже самое, касательная к эллипсу в данной точке образует с фокальными радиусами в данной точке равные острые углы. Для его доказательства необходимо показать равенство углов между касательной в точке к эллипсу и направлениями на фокусы. Для этого получим сначала уравнение касательной к эллипсу в произвольной точке (x_0, y_0) , принадлежащей ему. Как было показано выше, эллипс можно представить объединением графиков двух функций (3.8). Найдем теперь производные от этих функций по x_0 :

$$(y_0)'_{x_0} = \pm \sqrt{1 - e^2} \cdot \frac{-x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}.$$

Так как значение производной в точке равно тангенсу угла наклона касательной, то направляющий вектор касательной можно представить в координатах:

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ (y_0)'_{x_0} \end{pmatrix} = \left(\mp \sqrt{1 - e^2} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right), \quad \text{где } \alpha \equiv \frac{x_0}{a}, \quad -1 \leq \alpha \leq 1.$$

При этом модуль направляющего вектора \mathbf{t} определяется, как

$$|\mathbf{t}| \equiv t = \sqrt{t_x^2 + t_y^2} = \sqrt{1 + (1 - e^2) \cdot \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}} = \sqrt{\frac{1 - e^2 \alpha^2}{1 - \alpha^2}}.$$

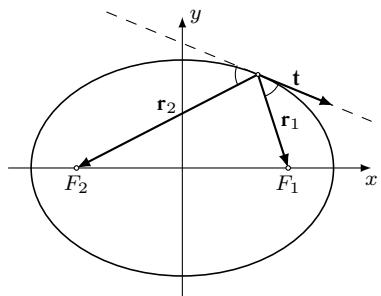


Рис. 55

Выпишем векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , от точки (x_0, y_0) до фокусов, имеющих координаты $(\pm ae, 0)$ соответственно:

$$\mathbf{r}_{1,2} = \begin{pmatrix} \pm ae - x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}.$$

Покажем теперь, что $\cos \widehat{\mathbf{r}_1 \mathbf{t}} = -\cos \widehat{\mathbf{r}_2 \mathbf{t}}$ для верхнего полуэллипса, что завершит доказательство оптического свойства эллипса, так как для нижнего доказательство аналогично:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{\mathbf{r}_{1,2} \mathbf{t}} &= \frac{(r_{1,2}, t)}{|\mathbf{r}_{1,2}| |\mathbf{t}|} = \\ &= \frac{(\pm ae - x_0) \cdot 1 + \left[-y_0 \cdot \left(-\sqrt{1 - e^2} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right) \right]}{\sqrt{(\pm ae - x_0)^2 + y_0^2} \cdot \sqrt{\frac{1 - e^2 \alpha^2}{1 - \alpha^2}}} = \\ &= \frac{(\pm ae - x_0) \cdot \sqrt{1 - \alpha^2} + \alpha y_0 \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{(\pm ae - x_0)^2 + y_0^2} \cdot \sqrt{1 - e^2 \alpha^2}}. \end{aligned}$$

Из параметрического уравнения эллипса можно получить, что $\sin t = x_0/a = \alpha$, тогда

$$y_0 = b \cos t = b \sqrt{1 - \sin^2 t} = b \sqrt{1 - \alpha^2} = a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Подставим данное выражение для y_0 в предыдущие выкладки:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{\mathbf{r}_{1,2} \mathbf{t}} &= \frac{a(\pm e - \alpha) \sqrt{1 - \alpha^2} + \alpha a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{1 - e^2}}{a \sqrt{(\pm e - \alpha)^2 + (1 - e^2)(1 - \alpha^2)} \cdot \sqrt{1 - e^2 \alpha^2}} = \\ &= \frac{(\pm e - \alpha + \alpha - e^2 \alpha) \sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{e^2 \mp 2e\alpha + \alpha^2 + 1 - \alpha^2 - e^2 + e^2 \alpha^2} \cdot \sqrt{1 - e^2 \alpha^2}} = \\ &= \frac{(\pm e - e^2 \alpha) \sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{\mp 2e\alpha + 1 + e^2 \alpha^2} \cdot \sqrt{1 - e^2 \alpha^2}} = \\ &= \frac{e(\pm 1 - e\alpha) \sqrt{1 - \alpha^2}}{|1 \mp e\alpha| \sqrt{1 - e^2 \alpha^2}} = \frac{e(\pm 1 - e\alpha) \sqrt{1 - \alpha^2}}{(1 \mp e\alpha) \sqrt{1 - e^2 \alpha^2}} = \pm \frac{e \sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{1 - e^2 \alpha^2}}. \end{aligned}$$

3.2 Парабола

Парабола — геометрическое место точек, равноудалённых от заданной прямой — **директрисы** параболы, и заданной точки — **фокуса** параболы.

Получим из определения параболы её уравнение в декартовых координатах. Пусть расстояние между фокусом и директрисой параболы равно p . Из определения ясно, что существует точка параболы P , расположенная в середине перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису. Расположим параболу так, чтобы эта точка оказалась в начале координат, директриса задавалась уравнением $x = -p/2$, а фокус имел координаты $(p/2, 0)$.

Приравняем расстояния от произвольной точки параболы с координатами (x, y) до директрисы и до фокуса:

$$\begin{aligned} x + \frac{p}{2} &= \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \\ x^2 + \frac{p^2}{4} + px &= x^2 + \frac{p^2}{4} - px + y^2, \\ y^2 &= 2px. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Полученное равенство является каноническим уравнением параболы в декартовых координатах. В силу симметрии данного уравнения, перпендикуляр, опущенный из фокуса на директрису, является **осью параболы**, а точка P — её **вершиной**.

Легко заметить, что длина перпендикуляра, опущенного из фокуса на параболу, равна p . Этот отрезок называется **фокальным параметром**, а его длина, как следует из вышесказанного, равна расстоянию от фокуса до директрисы.

Перенесем теперь фокус параболы в начало координат и получим уравнение параболы в полярных координатах. Для этого нужно сделать такую замену: $x' \leftrightarrow x - p/2$, значит $x \leftrightarrow x' + p/2$, а $y' \leftrightarrow y$. Запишем уравнение параболы в новых координатах:

$$y^2 = 2px,$$

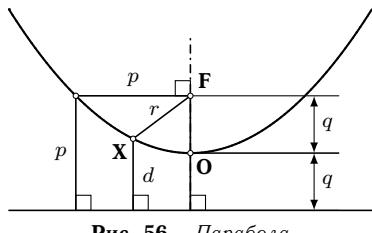


Рис. 56 – Парабола

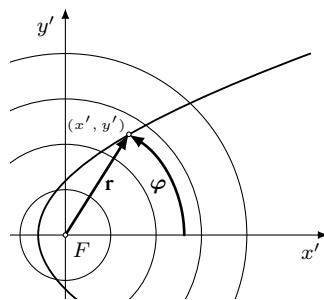


Рис. 57

$$(y')^2 = 2p \left(x' + \frac{p}{2} \right).$$

Перейдём в полярные координаты в полученном равенстве:

$$\begin{aligned} r^2 \sin^2 \varphi &= p^2 + 2pr \cos \varphi, \\ r^2 \cdot \sin^2 \varphi - r \cdot 2p \cos \varphi - p^2 &, \\ D &= 4p^2 \cos^2 \varphi + 4p^2 \sin^2 \varphi = 4p^2, \\ r &= \frac{2p \cos \varphi \pm 2p}{2 \sin^2 \varphi}, \quad r \geq 0, \\ r &= \frac{p(\cos \varphi + 1)}{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{p(\cos \varphi + 1)}{(1 - \cos \varphi)(1 + \cos \varphi)} = \frac{p}{1 - \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Если же параболу развернуть на 180° , в знаменателе будет знак плюс. Это завершает вывод уравнения параболы в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 \pm \cos \varphi}. \quad (3.11)$$

Как и все конические сечения, парабола обладает *оптическим свойством*, которое формулируется таким образом: пучок лучей, параллельных оси параболы, отражаясь в последней, собирается в её фокусе. И наоборот, свет от точечного источника, находящегося в фокусе, отражается параболой в пучок параллельных её оси лучей.

Аналогично доказательству оптического свойства эллипса рассмотрим случай только верхней ветви. Выберем на ней произвольную точку (x, y) . Тогда вектор, определяющий направление луча из фокуса в выбранную точку задается вектором $\mathbf{r} = (x - p/2, y)$. Направление, соответствующее оси параболы, зададим единичным вектором $\mathbf{x} = (1, 0)$, так как ось параболы с каноническим уравнением совпадает с осью абсцисс. Остается найти вектор \mathbf{t} касательной в точке (x, y) . Для верхней ветви параболы каноническое уравнение эквивалентно $y = \sqrt{2px}$. Найдем производную данной функции:

$$y' = \frac{2p}{2\sqrt{2px}} = \sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

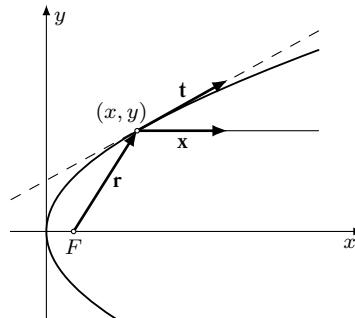


Рис. 58

Значит направляющий вектор касательной можно представить в виде

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ y'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{p}{2x}} \end{pmatrix}.$$

Остается проверить равенство косинусов углов между векторами \mathbf{r} и \mathbf{t} и векторами \mathbf{x} и \mathbf{t} :

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{t})}{|\mathbf{r}| |\mathbf{t}|} &= \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{t})}{|\mathbf{x}| |\mathbf{t}|}, \\ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{t}) &= |\mathbf{r}| (\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}), \\ \left(x - \frac{p}{2}\right) \cdot 1 + y \cdot \sqrt{\frac{p}{2x}} &= \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \left(1 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{\frac{p}{2x}}\right), \\ \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{y^2 p}{2x} + 2y \sqrt{\frac{p}{2x}} \left(x - \frac{p}{2}\right) &= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2, \\ 2\sqrt{\frac{p}{2x}} \left(x - \frac{p}{2}\right) &= y \left(1 - \frac{p}{2x}\right), \\ \sqrt{\frac{4x^2 p}{2x}} \left(1 - \frac{p}{2x}\right) &= y \left(1 - \frac{p}{2x}\right), \\ \sqrt{2xp} &= y. \end{aligned}$$

Получено уравнение верхней ветви параболы, которому, очевидно, координаты точки, принадлежащей параболе, удовлетворяют. Следовательно, оптическое свойство доказано.

Покажем, что парабола является коническим сечением. Для этого рассмотрим каноническое уравнение конической поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

и секущую плоскость, параллельную образующей конуса и задаваемую уравнением

$$z = \frac{c(x + d)}{a},$$

где коэффициенты a, b, c определяют вид поверхности, а d — положение плоскости. Подставим второе в первое:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 + d^2 + 2yd}{a^2},$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{d^2 + 2xd}{a^2},$$

$$y^2 = 2x \underbrace{\frac{b^2 d}{a^2}}_p + \frac{b^2 d^2}{a^2}.$$

С точностью до вертикального сдвига получено каноническое уравнение параболы, что подтверждает принадлежность параболы множеству конических сечений.

3.3 Гипербола

Гипербола — геометрическое место точек евклидовой плоскости, абсолютное значение разности расстояний от которых до двух выделенных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, постоянно.

$$| |F_1M| - |F_2M| | = \text{const}. \quad (3.12)$$

Ближайшие друг к другу точки двух ветвей гиперболы называются **вершинами** гиперболы, а середина отрезка, соединяющего её фокусы — **центром**. **Большая или действительная полуось** (a) гиперболы — расстояние от центра гиперболы до одной из вершин. **Фокальное расстояние** (c) — расстояние от центра гиперболы до одного из фокусов. **Эксцентриситетом** гиперболы (e), как и эллипса, является отношение фокального расстояния к большой полуоси, так как большая полуось гиперболы всегда меньше её фокального расстояния, эксцентриситет гиперболы больше единицы и согласно определению

$$e = \frac{c}{a} > 1. \quad (3.13)$$

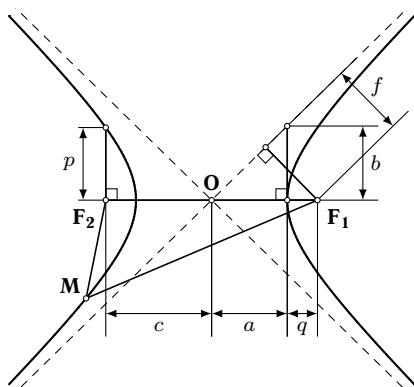


Рис. 59 – Гипербола

Перицентрическое расстояние (q) — расстояние от фокуса до ближайшей вершины гиперболы. Очевидно, центр гиперболы, её фокусы и

вершины лежат на одной прямой, являющейся осью симметрии гиперболы. Отсюдаperiцентрическое расстояние является разностью фокального расстояния и большой полуоси, то есть

$$q = c - a = a(e - 1). \quad (3.14)$$

Найдем модуль разности расстояний от вершины гиперболы до фокусов, тем самым найдем значение константы в определении гиперболы.

$$||F_1V| - |F_2V|| = |q - (c + a)| = |a(e - 1) - a(e + 1)| = |-2a| = 2a.$$

Получим уравнение гиперболы в декартовых координатах. Пусть фокусы гиперболы находятся в точках $(\pm c, 0)$, а эксцентриситет равен e . Рассмотрим точку A на гиперболе с координатами (x, y) . Подставим её координаты в определение гиперболы:

$$\begin{aligned} ||F_1A| - |F_2A|| &= 2a, \\ \left| \sqrt{(-c - x)^2 + y^2} - \sqrt{(c - x)^2 + y^2} \right| &= 2a, \\ (-c - x)^2 + y^2 + (c - x)^2 + y^2 - 2\sqrt{(-c - x)^2 + y^2}\sqrt{(c - x)^2 + y^2} &= 4a^2, \\ x^2 + c^2 + y^2 - \sqrt{(x^2 + c^2 + y^2 + 2cx)(x^2 + c^2 + y^2 - 2cx)} &= 2a^2, \\ x^2 + c^2 + y^2 - \sqrt{(x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2} &= 2a^2, \\ \xi^2 - 4c^2x^2 &= \xi^2 + 4a^4 - 4a^2\xi, \quad \xi \equiv x^2 + c^2 + y^2, \\ a^4 - a^2\xi + c^2x^2 &= 0, \\ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2} &= 0, \\ \frac{x^2}{a^2}(e^2 - 1) - \frac{y^2}{a^2} &= e^2 - 1, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} &= 1. \end{aligned}$$

Вводя обозначение $b \equiv a\sqrt{e^2 - 1}$, получаем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.15)$$

Найдем теперь асимптотическое поведение функции $y(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$, получив её из канонического уравнения гиперболы:

$$y(x) = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm x \cdot \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \simeq \pm x \cdot \frac{b}{a}, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Следовательно, ветви гиперболы асимптотически приближаются в прямые с коэффициентом наклона $\pm b/a$, проходящим через центр гиперболы (начало координат). Эти прямые называются **асимптотами** гиперболы.

Заметим, что длина отрезка перпендикуляра, проведенного к оси гиперболы через одну из её вершин, от вершины до точки пересечения с асимптотой равна b , так как $|y(\pm a)| = b$. Данный отрезок является **мнимальной полуосью** гиперболы. Важно отметить, что для длины минимальной полуоси выполняется равенство

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) = c^2 - a^2.$$

Прицельный параметр (f) — расстояние от фокуса до асимптоты гиперболы. Пусть угол наклона асимптоты равен α , тогда известно, что $\operatorname{tg} \alpha = b/a$, отсюда

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1,$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{e^2 - 1}{1 + (e^2 - 1)}} = \frac{b}{c}.$$

Значит прицельный параметр

$$f = c \sin \alpha = b. \quad (3.16)$$

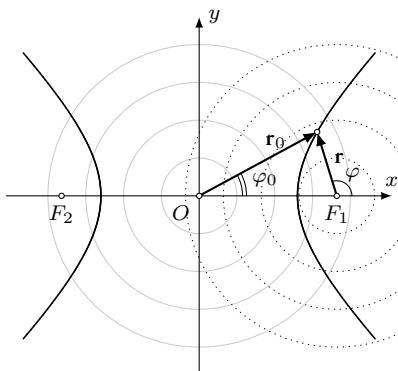
Фокальный параметр (p) — длина отрезка, перпендикулярного к действительной оси (оси симметрии), опущенного с гиперболы в точку её фокуса. Определяется формулой

$$p = |y(c)| = b \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = b \sqrt{e^2 - 1} = \frac{b^2}{a}. \quad (3.17)$$

Найдем уравнение гиперболы в полярных координатах. Для сделаем замены $x = r_0 \cos \varphi$ и $y = r_0 \sin \varphi$ в каноническом уравнении гиперболы:

$$\frac{r_0^2 \cos^2 \varphi}{a^2} - \frac{r_0^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1,$$

$$r_0^2(b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi) = a^2 b^2,$$



$$r_0^2((a^2 + b^2) \cos^2 \varphi - a^2) = a^2 b^2,$$

$$r_0 = \pm \frac{b}{\sqrt{e^2 \cos^2 \varphi - 1}}.$$

Проделаем тоже самое, только полюс полярных координат поместим в фокус с координатами $(c, 0)$. Для этого нужно сделать замену $x' \hookrightarrow x - c$, обратно, $x \hookrightarrow x' + c$. Остается перейти к полярным координатам: $x' = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, в каноническом уравнении гиперболы в декартовых координатах.

$$\begin{aligned} \frac{(r \cos \varphi + c)^2}{a^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} &= 1, \\ b^2 r^2 \cos^2 \varphi + 2b^2 r c \cos \varphi + b^2 c^2 - a^2 r^2 \sin^2 \varphi &= a^2 b^2, \\ (a^2 + b^2) r^2 \cos^2 \varphi + 2b^2 r c \cos \varphi + b^2 c^2 - a^2 r^2 &= a^2 b^2, \\ (rc \cos \varphi + b^2)^2 + b^2(c^2 - b^2) - a^2 r^2 &= a^2 b^2, \\ (rc \cos \varphi + b^2)^2 &= a^2 r^2, \\ rc \cos \varphi + b^2 &= -ar, \quad \text{т. к. } r(0) = -q, \\ r &= \frac{b^2}{-a - c \cos \varphi} = -\frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Можно считать, чтоperiцентр гиперболы достигается при $\varphi = 0$, то же самое, что повернуть ось отсчёта углов на угол π , тогда в знаменателе будет знак « $-$ ». Окончательно, каноническое уравнение гиперболы в полярных координатах принимает вид:

$$r = -\frac{p}{1 \pm e \cos \varphi}. \quad (3.18)$$

Также, как и остальные конические сечения, гипербола имеет своё *оптическое свойство*: свет от источника, находящегося в одном из фокусов гиперболы, отражается ветвями гиперболы таким образом, что продолжения отраженных лучей пересекаются во втором фокусе.

Для доказательства оптического свойства гиперболы положим, что фокусы имеют координаты $(\pm c, 0)$, где c — фокальное расстояние гиперболы, а произвольная точка гиперболы имеет координаты (x, y) принадлежит гиперболе. Будем для удобства считать, что $y > 0$, случай $y < 0$

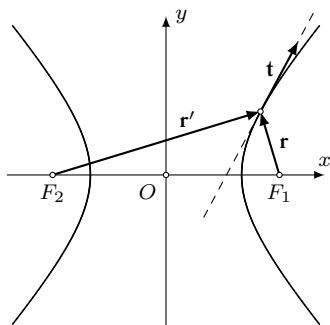


Рис. 61 – К доказательству оптического

рассматривается аналогично. Тогда каноническое уравнение гиперболы можно представить в виде функции $y(x)$. При этом направляющий вектор \mathbf{t} касательной к гиперболе в точке (x, y) , очевидно, можно представить, как

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} \end{pmatrix}.$$

Пусть источник находится в фокусе с координатами $(c, 0)$, тогда направляющий вектор луча, испущенного в точку (x, y) равен $\mathbf{r} = (x - c, y)$, а луча отраженного по предположению $\mathbf{r}' = (x + c, y)$. При этом из определения гиперболы следует, что $|\mathbf{r}'| = |r| + 2a$, чем мы воспользуемся ниже.

Остается показать, что углы $\hat{\mathbf{r}\mathbf{t}}$ и $\hat{\mathbf{r}'\mathbf{t}}$. Для этого достаточно обосновать равенство их косинусов, которые можно выразить с помощью скалярного произведения:

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{t})}{|\mathbf{r}||\mathbf{t}|} &= \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{t})}{|\mathbf{r}'||\mathbf{t}|}, \\ \frac{x - c + y'(x)y(x)}{|r|} &= \frac{x + c + y'(x)y(x)}{|r| + 2a}, \\ \frac{x - c + \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot \frac{b\sqrt{x^2 - a^2}}{a}}{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}} &= \frac{x + c + \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot \frac{b\sqrt{x^2 - a^2}}{a}}{\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + 2a}, \\ \frac{x - c + \frac{b^2x}{a^2}}{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}} &= \frac{x + c + \frac{b^2x}{a^2}}{\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + 2a}, \\ 2ax - 2c\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - 2ac + \frac{b^2x}{a^2} \cdot 2a &= 0, \\ \left(ax - ac + \frac{b^2x}{a}\right)^2 &= c^2 \left((x - c)^2 + \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2}\right). \end{aligned}$$

Приводя подобные слагаемые с учетом равенства $c^2 = a^2 + b^2$ несложно показать тождественность полученного равенства.

4 Астрофизика

4.1 Звёздные величины

Звёздная величина — безразмерная числовая характеристика яркости объекта. Принято, что увеличению светового потока в 100 раз соответствует уменьшение звёздной величины ровно на 5 единиц. Тогда уменьшение звёздной величины на одну единицу означает увеличение плотности светового потока в $\sqrt[5]{100} \approx 2.512$ раз, то есть звёздные величины являются логарифмической шкалой измерения плотности потока. Зависимость, связывающая отношение освещённостей E_1 и E_2 и разность звёздных величин m_1 и m_2 двух объектов, называется **формулой Погсона** и имеет вид

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{0.4(m_2 - m_1)} \quad \text{или} \quad m_2 = m_1 + 2.5 \lg \frac{E_1}{E_2}. \quad (4.1)$$

Широко используется понятие **абсолютной звёздной величины** M — это звёздная величина при наблюдении с установленного расстояния R_0 : для звёзд и объектов вне Солнечной системы — 10 пк, для тел Солнечной системы — 1 а.е., причем считается, что тело находится в 1 а.е. и от наблюдателя и от Солнца, а фаза равна единице, то есть можно считать, что наблюдатель находится в центре Солнца, а тело — в 1 а.е. от него.

Абсолютную звёздную величину объекта вне Солнечной системы можно получить по формуле Погсона (4.1) из наблюданной звёздной величины m и расстояния r до него

$$M = m + 2.5 \lg \frac{E}{E_{\text{абс}}} = m + 2.5 \lg \frac{L \cdot R_0^2}{r^2 \cdot L} = m + 5 \lg \frac{R_0}{r}. \quad (4.2)$$

Если принимать к рассмотрению межзвездное поглощение A , то формулу (4.2) необходимо уточнить:

$$M = m + 5 \lg \frac{R_0}{r} - Ar. \quad (4.3)$$

Важно определить понятие **болометрической звёздной величины** $m_{\text{пол}}$ — это звёздная величина, при расчёте которой учитывается полная мощность излучения источника во всем диапазоне длин электромагнитных волн.

Резолюция В2, принятая на Генеральной Асамблее Международного астрономического союза в 2015 году [7], определяет нуль-пункт звёздных величин. Так *абсолютную болометрическую звёздную величину*, равную 0^m имеет изотропный источник излучения с мощностью $L_0 = 3.0128 \cdot 10^{28}$ Вт. Данное значение выбрано таким образом, чтобы абсолютная болометрическая звёздная величина Солнца $M_{\text{Bol}\odot}$ составляла 4.74^m . Такому источнику излучения соответствует наблюдаемая плотность потока

$$E_0 = \frac{L_0}{4\pi R_0^2} = 2.518021002 \dots \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \quad (4.4)$$

Исходя из этого, используя *формулу Погсона*, можно определить болометрическую звёздную величину любого изотропного источника излучения, зная его светимость и расстояние до него.

Фотометрическая звёздная величина — звёздная величина источника в некотором фильтре ξ , для которого определена функция чувствительности приемника $S_\xi(\lambda) : [0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$. Определяется выражением

$$m_\xi = -2.5 \lg \frac{\int E(\lambda) S_\xi(\lambda) d\lambda}{E_0} + C_\xi, \quad (4.5)$$

где $E(\lambda)$ — плотность потока излучения от источника на длине волны λ , а C_ξ — нормировочная константа фильтра ξ . Несмотря на то, что интегралы определенные, звёздная величина в том или ином фильтре определяется с точностью до нормировки на определенный нуль-пункт.

Для стандартизации фотометрических звёздных величин описаны различные фотометрические системы, особенно распространена система, опубликованная в 1966 году [8], где авторы определяют 8 широкополосных фильтров $UBVRIJKL$ (позднее были добавлены фильтры M и N), параметры которых приведены в Таблице 1, а профили пропускания представлены на Рис. 62. Нуль-пунктом отсчета звездной величины в каждом из фильтров является блеск звезды спектрального класса $A0V$ — Веги (α Lyг), которой принимается равным 0.03^m в каждом из фильтров.

Фильтр	$\langle \lambda \rangle$, нм	FWHM, нм
U	365	66
B	445	94
V	551	88
R	658	138
I	806	149
Y	1020	120
J	1220	213
H	1630	307
K	2190	390
L	3450	472
M	4750	460
N	10500	2500

Таблица 1 – Параметры фильтров фотометрической системы Джонсона

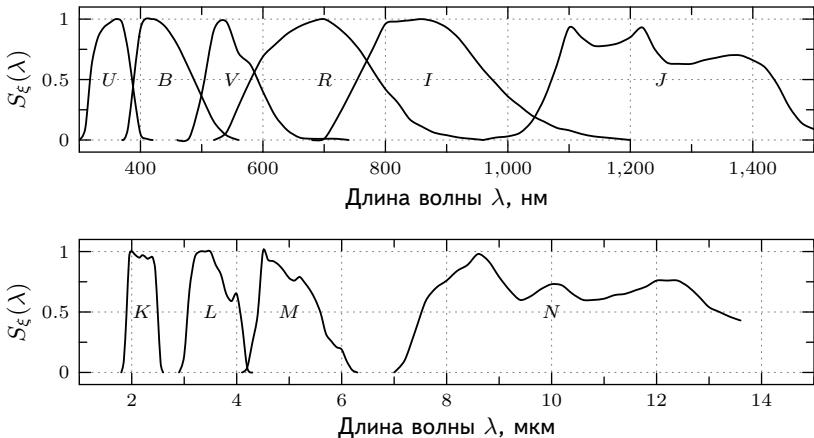


Рис. 62 – Профили пропускания фотометрических фильтров системы *UBVRIJKLMN*

Важно отметить, когда речь идёт звёздной величине без какой-либо конкретизации, обычно имеется в виду видимая звёздная величина, другими словами — звёздная величина в фильтре *V*, и обозначается как m_V или просто m .

Разность между болометрической и фотометрической звёздными величинами называется **болометрической поправкой** (В.С.), которая отличается для разных спектральных классов звёзд и разных фильтров. Болометрическая поправка для фильтра ξ может быть найдена из определения по формуле

$$\text{В.С.}_\xi = M_{\text{Bol}} - M_\xi = m_{\text{Bol}} - m_\xi = 2.5 \lg \frac{\int E(\lambda) S_\xi(\lambda) d\lambda}{\int E(\lambda) d\lambda} + C_\xi - C_{\text{Bol}}, \quad (4.6)$$

где $C_{\text{Bol}} = 0$, если C_ξ была определена с использованием стандарта E_0 .

4.2 Закон Стефана-Больцмана

Закон Стефана — Больцмана определяет зависимость плотности мощности излучения абсолютно чёрного тела от его температуры T :

$$u = \sigma T^4, \quad (4.7)$$

где σ — **постоянная Стефана-Больцмана**. Отсюда полная светимость абсолютно чёрного тела с площадью поверхности S равна

$$L = S\sigma T^4. \quad (4.8)$$

В действительности тела не являются абсолютно чёрными, и следующим приближением является **абсолютно серое тело**, спектр которого совпадает со спектром абсолютно чёрного тела, однако имеет меньшую интенсивность. Таким образом полная светимость абсолютно серого тела с площадью поверхности S можно написать как

$$L = \varepsilon S \sigma T^4, \quad (4.9)$$

где ε — **излучательная способность** серого тела, для абсолютно чёрного тела выполняется $\varepsilon = 1$.

В свою очередь величина $1 - \varepsilon$ называется отражательной способностью или **альбедо**.

Важно отметить, что закон Стефана-Больцмана — прямое следствие формулы Планка (4.26 – 4.27), так как, исходя из физического смысла формулы Планка, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sigma T^4 &= \int_0^\infty B(\lambda, T) d\lambda \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\theta = \pi \int_0^\infty B(\lambda, T) d\lambda = \\ &= \int_0^\infty B(\nu, T) d\nu \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\theta = \pi \int_0^\infty B(\nu, T) d\nu. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь интегрирование ведется в сферических координатах (φ, θ) по телесному углу $d\Omega = d\varphi \cos \varphi d\theta$. А $\sin \varphi$ во втором интеграле отвечает за проекцию единичной площадки на направление излучения. Вычислим данный интеграл, чтобы получить значение постоянной Стефана-Больцмана:

$$\sigma T^4 = \pi \int_0^\infty \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1} d\nu.$$

Сделаем замену $x = \frac{h\nu}{kT}$, так как $dx = \frac{h}{kT} d\nu$, то

$$\sigma T^4 = \frac{2\pi}{c^2} \int_0^\infty \underbrace{\frac{k^3 T^3}{h^2} x^3}_{h\nu^3} \cdot \frac{1}{e^x - 1} \cdot \underbrace{\frac{kT}{h}}_{d\nu} dx = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Значение табличного интеграла $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$ равно $\frac{\pi^4}{15}$, откуда

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}.$$

Для звёзд главной последовательности выполняется соотношение $L \sim M^\alpha$, где α — коэффициент пропорциональности, который зависит от массы звезды следующим образом:

$$\begin{aligned}\alpha &= 2.5, & M < 0.5M_\odot; \\ \alpha &= 4, & 0.5M_\odot < M < 8M_\odot; \\ \alpha &= 2.5, & M > 8M_\odot.\end{aligned}$$

Также существует примерная зависимость светимости звёзды от её радиуса, имеющая вид $L \sim R^{5.2}$.

4.3 Энергия излучения

Согласно ГОСТ 7601—78 **энергия излучения** — энергия, переносимая излучением, обозначается как Q_e . А **поток излучения** — мощность излучения, определяемая отношением энергии, переносимой излучением, ко времени переноса, значительно превышающему период электромагнитных колебаний, обозначается Φ_e и согласно определения вычисляется как

$$\Phi_e = \frac{\partial Q_e}{\partial t} = [\text{Вт}]. \quad (4.11)$$

Одним из параметров потока излучения является **спектральная плотность потока излучения** — величина потока излучения в расчёте на единицу длины или частоты:

$$\begin{aligned}\Phi_{e,\lambda} &= \frac{\partial \Phi_e}{\partial \lambda} = \frac{\partial^2 Q_e}{\partial t \partial \lambda} = [\text{Вт}/\text{м}], \\ \Phi_{e,\nu} &= \frac{\partial \Phi_e}{\partial \nu} = \frac{\partial^2 Q_e}{\partial t \partial \nu} = \frac{\lambda^2}{c} \Phi_{e,\lambda} = [\text{Вт}/\text{Гц}].\end{aligned}$$

В ГОСТ 26148—84 вводятся такие понятия, как **светимость** — физическая величина, определяемая отношением потока излучения, исходящего от малого участка поверхности, содержащего рассматриваемую точку, к площади этого участка:

$$M_e = \frac{\partial \Phi_e}{\partial S}, \quad (4.12)$$

здесь S — площадь поверхности объекта, испускающего энергию.

Освещенность (облученность) — величина, равная отношению светового потока, падающего на малый участок поверхности, к его площади — поверхностная плотность потока

$$E_e = \frac{d\Phi_e}{dS_2} \sim \frac{1}{r^2}, \quad (4.13)$$

здесь S_2 — площадь поверхности приёмника, r — расстояние от источника.

Яркость — световой поток, приходящийся на единичный телесный угол, в расчёте на единичную площадку проекции излучающей поверхности на картинную плоскость,

$$L_e = \frac{d^2\Phi_e}{d\Omega dS_1 \cos \varepsilon}, \quad (4.14)$$

где ε — угол между направлением потока излучения и нормалью к плоскости излучающей поверхности.

Интегральная яркость — интеграл яркости по видимой поверхности источника. Показывает количество энергии, пришедшее от источника за единицу времени.

$$\Lambda_e = \int_S L_e(\mathbf{r}) ds. \quad (4.15)$$

4.4 Альбедо

Альбедо (A) — характеристика отражательной способности поверхности какого-либо объекта. Альбедо является отношением отражённого светового потока к падающему на поверхность объекта. Тогда для нахождения поглощённой части излучения используется соотношение

$$E_{\text{п}} = E_0 \cdot (1 - A), \quad (4.16)$$

где $E_{\text{п}}$ — поглощённая часть излучения, E_0 — пришедшее излучение, A — альбедо. А для отражённой части излучения $E_{\text{отр}}$ можно использовать формулу

$$E_{\text{отр}} = A \cdot E_0. \quad (4.17)$$

Существует несколько видов альбедо: *геометрическое, сферическое и бондовское*. **Геометрическое альбедо** равно отношению освещённости у Земли, создаваемой планетой в полной фазе, к освещённости, которую создал бы плоский абсолютно белый экран того же размера, что и планета, расположенный на её месте перпендикулярно лучу

зрения и солнечным лучам. **Сферическое альbedo** определяется как отношение светового потока, рассеянного телом во всех направлениях, к потоку, падающему на это тело. Может быть определено как для некоторого диапазона длин волн, так и для всего спектра. Сферическое альbedo для всего спектра излучения называется **альбедо Бонда**.

4.5 Энергия и импульс фотона

Фотон — материальная, электрически нейтральная частица, квант электромагнитного поля (переносчик электромагнитного взаимодействия). В силу корпускулярно-волнового дуализма, фотон можно рассматривать либо как частицу, либо как волну. Фотон не имеет массы, однако обладает энергией

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (4.18)$$

и импульсом, определяемым как

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad (4.19)$$

где коэффициент пропорциональности $h = 6.63 \times 10^{-34}$ Дж · с называется *постоянной Планка*.

4.6 Линии излучения и поглощения

Планетарная модель атома (Резерфорда) описывает модель атома, состоящего из маленького ядра, в котором сосредоточена почти вся масса атома, и электронов, обращающихся по круговым орбитам вокруг ядра.

Модель атома Бора содержит в основе модель атома Резерфорда, но в данной модели электроны могут обращаться только по строго определённым орбитам.

Первый постулат Бора. Электроны в атоме могут двигаться только по определенным (стационарным) орбитам, находясь на которых они не излучают энергию. Причём, стационарными являются лишь те орбиты, при движении по которым момент количества движения электрона равен целому числу постоянных Планка:

$$m_e v r_n = \frac{n\hbar}{2\pi} \equiv n\hbar, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (4.20)$$

где m_e — масса электрона, v — скорость электрона, r_n — радиус n -ой орбиты, h — постоянная Планка.

Рассмотрим электрон, находящийся на произвольной орбите вокруг ядра некоторого атома. Запишем для него равенство центробежной и Кулоновской силы:

$$\frac{m_e v^2}{r_n} = \frac{Z^2 e^2}{4\pi \varepsilon_0 r_n^2}, \quad (4.21)$$

где Z — зарядовое число, e — заряд электрона, ε_0 — электрическая постоянная. Из данного уравнения и первого постулата Бора можно получить выражение для радиуса n -ой орбиты:

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi m_e Z^2 e^2}. \quad (4.22)$$

Отсюда можно получить значение боровского радиуса — радиус первой орбиты для атома водорода ($Z = 1$, $n = 1$). $a_0 \approx 5,291769241 \times 10^{-11}$ м.

Считая, что полная энергия электрона равна кинетической, взятой со знаком минус, можно получить выражение для полной энергии электрона на некоторой орбите:

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^2}{8n^2 h^2 \varepsilon_0}. \quad (4.23)$$

Посчитаем, как изменяется энергия электрона при переходе с уровня n на уровень m :

$$\Delta E_{n,m} = \frac{m_e Z^2 e^2}{8n^2 h^2 \varepsilon_0} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = h\nu. \quad (4.24)$$

Получается, что при переходе с нижнего уровня на верхний может поглотиться фотон с определенной частотой, а при обратном переходе — излучаться. Частоту фотона можно найти из следующего выражения:

$$\nu_{n,m} = \frac{\Delta E_{n,m}}{h} = \frac{m_e Z^2 e^2}{8n^2 h^3 \varepsilon_0} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = R Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (4.25)$$

где R — постоянная Ридберга (10973731 м $^{-1}$).

Из-за того, что энергетических уровней в атоме лишь счетное число, то и возможные длины частот поглощения и излучения принимают только счетное количество значений.

4.7 Формула Планка

Формула Планка — выражение для спектральной плотности мощности излучения абсолютно чёрного тела на интервале частот $[\nu, \nu + d\nu]$, распространяющегося в телесном угле $d\Omega$, которое было получено Максом Планком в 1900 году. Данное выражение имеет следующий вид:

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{Гц} \cdot \text{ср}} \right], \quad (4.26)$$

где ν — частота излучения, T — температура АЧТ, h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана, c — скорость света. Если записать закон излучения Планка (4.26) для длин волн, получится

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{ср}} \right]. \quad (4.27)$$

Стоит заметить, что при переходе к выражению формулы Планка через длину волны также меняется выражение для интервала, поэтому в результате изменяется степень переменной в знаменателе.

Формула Планка появилась, когда стало ясно, что формула Рэлея-Джинса удовлетворительно описывает излучение только в области больших длин волн, а с убыванием длин волн сильно расходится с реальными данными. Однако формулу Рэлея-Джинса используют и сейчас для описания спектра абсолютно чёрного тела в длинноволновой области.

Проделаем обратные действия: получим формулу Рэлея-Джинса из формулы Планка. Длинноволновая часть спектра характеризуется соотношением $h\nu \ll kT$, то есть

$$\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}.$$

Подставляя данное выражение в знаменатель (4.26), получим

$$B_\nu(\nu, T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{kT}{h\nu} = \frac{2\nu^2 kT}{c^2}.$$

Проделав те же действия для формулы Планка через длину волны, получим:

$$B(\lambda, T) \simeq \frac{2ckT}{\lambda^4}, \quad B(\nu, T) \simeq \frac{2\nu^2 kT}{c^2}. \quad (4.28)$$

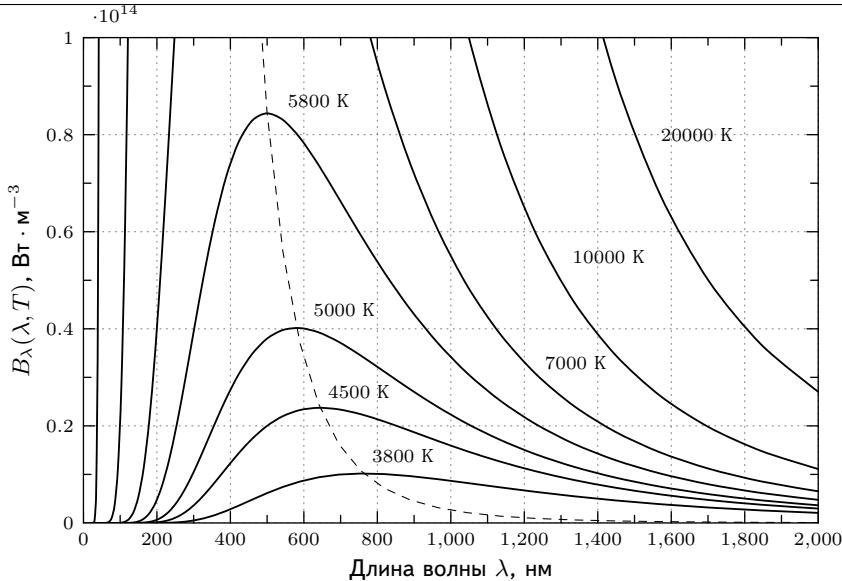


Рис. 63 – Кривые спектральной плотности мощности изотропного излучения АЧТ с разной температурой

В коротковолновой области, наоборот, $h\nu \gg kT$, следовательно, единица в знаменателе формулы Планка много меньше стоящей там экспоненты, то есть

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \approx \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} = \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right).$$

Отсюда получаются приближения, называемые приближениями Вина:

$$B(\lambda, T) \simeq \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right), \quad B(\nu, T) \simeq \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right). \quad (4.29)$$

4.8 Количество фотонов. Средняя Энергия

Если разделить спектральную плотность потока излучения из формулы Планка (4.27), получится функция плотности распределения количества фотонов по длине волны:

$$\frac{\pi B_\lambda}{E_\gamma} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} = f_\lambda.$$

Интегрируя данную функцию от 0 до ∞ , можно получить полное количество фотонов излучаемое АЧТ:

$$N = \int_0^\infty \pi f_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi c}{\lambda^4} \cdot \frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}.$$

Сделав замену $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ интеграл можно преобразовать в такую форму

$$N = \frac{2\pi k^3 T^3}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1}.$$

Последний интеграл вычисляется аналогично интегралу, что появляется при выводе закона Стефана-Больцмана (4.8) и равен $2\zeta(3)$, отсюда

$$N = \frac{4\pi k^3 \zeta(3)}{h^3 c^2} \cdot T^3 = \beta T^3, \quad (4.30)$$

где константа пропорциональности примерно равна $1.52 \cdot 10^{15}$. Разделив полную энергию, излучаемую абсолютно чёрным телом, на количество фотонов, получим **среднюю энергию чернотельного фотона**:

$$\overline{E}_\gamma = \frac{\sigma T^4}{\beta T^3} \simeq 2.7 kT. \quad (4.31)$$

4.9 Закон смещения Вина

Закон смещения Вина — закон, устанавливающий зависимость длины волны λ_{\max} , на которой спектральная плотность излучения $B_\lambda(\lambda, T)$ абсолютно чёрного тела достигает своего максимума, от температуры T этого тела:

$$\lambda_{\max} \approx \frac{b}{T} \equiv \frac{0.0029 \text{ м} \cdot \text{К}}{T}. \quad (4.32)$$

Закон следует из определения максимума функции Планка (4.7). Приведем исследование: найдем максимум. Для этого зафиксируем температуру чёрного тела и введем обозначения: $\alpha \equiv 2hc^2$ и $\beta \equiv hc/kT$. Тогда задача сводится к поиску экстремума функции

$$B(\lambda) = \frac{\alpha \lambda^{-5}}{\exp(\beta \lambda^{-1}) - 1}.$$

Для её решения продифференцируем $B(\lambda)$:

$$B'(\lambda) = \frac{-5\alpha \lambda^{-6}}{\exp(\beta \lambda^{-1}) - 1} + \frac{-\alpha \lambda^{-5}}{\left(\exp(\beta \lambda^{-1}) - 1\right)^2} \cdot \exp(\beta \lambda^{-1}) \cdot (-\beta \lambda^{-2}) =$$

$$= \frac{\alpha \lambda^{-7}}{(\exp(\beta \lambda^{-1}) - 1)^2} \left[-5\lambda \left(\exp \frac{\beta}{\lambda} - 1 \right) + \beta \exp \frac{\beta}{\lambda} \right].$$

Остается приравнять выражения в квадратных скобках к нулю, и найти корни получившегося уравнения.

$$\begin{aligned} \beta \exp \frac{\beta}{\lambda} - 5\lambda \left(\exp \frac{\beta}{\lambda} - 1 \right) &= 0; \\ \frac{\beta}{\lambda} \exp \frac{\beta}{\lambda} &= 5 \left(\exp \frac{\beta}{\lambda} - 1 \right), \quad \text{пусть } x = \frac{\beta}{\lambda}; \\ \frac{x e^x}{e^x - 1} &= 5. \end{aligned}$$

К сожалению решение полученного уравнения не выражается в элементарных функциях. Численные методы дают ответ: $x = 4.9651\dots$. Возвращаясь к исходным переменным, приходим к

$$\frac{hc}{kT\lambda} = x \approx 4.9651.$$

Выражая отсюда λ , окончательно получаем следующее:

$$\lambda \approx \frac{hc}{4.9651 kT} = \frac{2.898\dots \times 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}}{T} \approx \frac{0.0029 \text{ м} \cdot \text{К}}{T}.$$

4.10 Эффект Доплера. Красное смещение

Эффект Доплера — эффект изменения частоты и длины волны электромагнитного излучения, регистрируемого приёмником, вызванный относительным движением источника и приёмника (см. Рис. 64).

При $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ с большой точностью выполняется следующее важное соотношение:

$$\beta \equiv \frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}, \quad (4.33)$$

где λ_0 — лабораторная длина волны излучения источника, а λ — наблюдаемая. В действительности же имеет место более общий случай: *релятивистский эффект Доплера*, обусловленный проявлением СТО при $v \simeq c$, для которого формула (4.33)

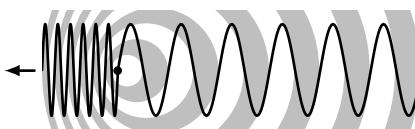


Рис. 64 – Эффект Доплера

усложняется и принимает вид

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cdot \cos \theta}, \quad (4.34)$$

где ν — частота, с которой наблюдатель принимает волны, ν_0 — частота, с которой источник испускает волны, v — скорость источника, θ — угол между направлением на источник и вектором его скорости в системе отсчёта приёмника. Если источник радиально удаляется от наблюдателя, то $\theta = 0$, если приближается, то $\theta = \pi$. Важно, что (4.33) прямую следует из (4.34) при $\beta \ll 1$.

Красное смещение — явление сдвига спектральных линий химических элементов в красную (длинноволновую) сторону, обусловленное относительным движение объектов. Параметр красного смещения определяется из наблюдаемой и лабораторной длин волн как

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}. \quad (4.35)$$

Доплеровское смещение длины волны в спектре источника, движущегося с лучевой скоростью v_r и полной скоростью v ,

$$z = \frac{1 + v_r/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.36)$$

Гравитационное красное смещение — проявление эффекта изменения частоты излучения, испущенного массивным объектом, таким как звезда или чёрная дыра. Наблюдаются как сдвиг спектральных линий в спектре источника в красную область спектра. Гравитационное красное смещение определяется из формулы, выведенной Эйнштейном,

$$z_G = \frac{GM}{c^2 R} - \frac{GM}{c^2 r}, \quad (4.37)$$

где M — масса гравитирующего тела, R — радиальное расстояние от центра масс тела до точки излучения (радиус источника), r — радиальное расстояние от центра масс источника до точки наблюдения. В случае, когда наблюдатель находится от источника много дальше его радиуса, т. е. выполняется соотношение $r \gg R$, выражение (4.37) можно упростить до

$$z_G \simeq \frac{GM}{c^2 R}. \quad (4.38)$$

4.11 Давление излучения

Давление электромагнитного излучения, падающего на поверхность тела, в отсутствии рассеяния выражается формулой

$$p = \frac{I}{c} \cdot (1 - k + A) \cdot \cos \beta, \quad (4.39)$$

здесь I — поток падающего излучения, c — скорость света, k — коэффициент пропускания, A — коэффициент отражения, а β — угол падения излучения.

Давление фотонного газа определяется соотношением

$$p_{\text{ф.г.}} = \frac{u}{3} = \frac{4\sigma T^4}{3c}, \quad (4.40)$$

где u — плотность энергии фотонного газа, T — температура фотонного газа.

Возможными областями применения являются солнечный парус, а в отдалённом будущем — фотонный двигатель.

4.12 Предел Эддингтона

Предел Эддингтона — величина мощности электромагнитного излучения, исходящего из недр звезды, при которой его давления достаточно для компенсации веса оболочек звезды, которые окружают зону термоядерных реакций, то есть звезда находится в состоянии равновесия: не сжимается и не расширяется.

Сила тяжести F_g , действующая со стороны тела массы M на протон, находящийся на расстоянии r от него, равна

$$F_g = \frac{GMm_p}{r^2}. \quad (4.41)$$

Поток излучения I от тела со светимостью L на расстоянии r выражается выражается, как

$$I = \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (4.42)$$

Тогда сила F_r , действующая на электрон вследствие томсоновского рассеяния фотонов на электронах,

$$F_r = \frac{I\sigma_T}{c}, \quad (4.43)$$

где σ_T — томсоновское сечение рассеяния фотона на электроне, равное

$$\sigma_T = \left(\frac{8\pi}{3}\right) \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 = 6.65 \times 10^{-29} \text{ м}^2. \quad (4.44)$$

Таким образом, так как $F_g = F_r$, то

$$L_{\text{ЭДД}} = \frac{4\pi G M m_p c}{\sigma_T} = \frac{M}{M_\odot} \times 10^{31} \text{ Вт}. \quad (4.45)$$

4.13 Гравитационное линзирование

Гравитационное линзирование — эффект, связанный с искривлением пути

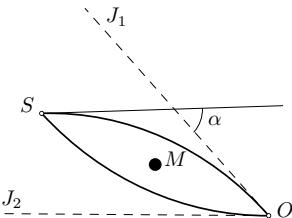


Рис. 65 — Гравитационное линзирование

распространения электромагнитного излучения гравитационным полем массивного тела или системы тел (галактик, скопления галактик, скопления тёмной материи).

На Рис. 65 показано, как происходит гравитационное линзирование: S — источник электромагнитных волн, O — наблюдатель, J_1 и J_2 — видимые положения источника, M — массивное тело массы M и радиуса R .

Для угла преломления лучей α в ходе гравитационного линзирования справедлива формула

$$\alpha = \frac{4GM}{Rc^2}. \quad (4.46)$$

4.14 Шкала электромагнитных волн

Гамма излучение возникает при радиоактивных распадах ядер, при торможении электронов энергией более 10^5 эВ и при других взаимодействиях элементарных частиц. Используются в гамма-дефектоскопии, при изучении свойств вещества.

Рентгеновские лучи излучаются при большом ускорении электронов, например при их торможении в металлах. Получают их при помощи рентгеновской трубы: электроны в вакуумной трубке ускоряются электрическим полем при высоком напряжении, достигая анода, при

соударении резко тормозятся. При торможении электроны движутся с ускорением и излучают электромагнитные волны с малой длиной.

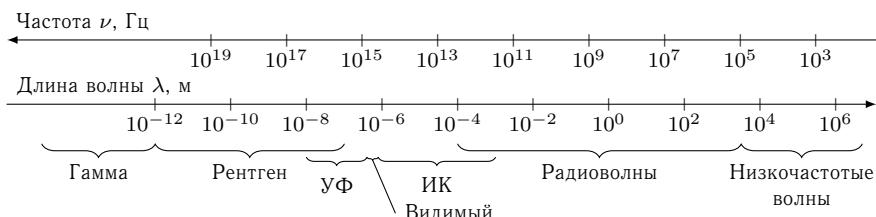


Рис. 66 – Шкала электромагнитных волн

Ультрафиолетовые лучи — излучение Солнца, ртутных ламп и т. п. Используются в ультрафиолетовой микроскопии, в медицине.

Видимое излучение — часть электромагнитного излучения, воспринимаемая глазом (от фиолетового до от красного).

Инфракрасное излучение — тепловое, излучается любым нагретым телом.

Радиоволны используются повсеместно в обычной жизни, это и сотовая связь, и радиолокация, и спутниковая связь, и Wi-Fi и многое другое.

Низкочастотные волны — диапазон, традиционно используемый в электротехнике. В промышленной электроэнергетике используется частота 50 Гц, на которой осуществляется передача электрической энергии по линиям и преобразование напряжений трансформаторными устройствами.

4.15 Оптическая толщина. Закон Бугера – Ламберта – Бера

Рассмотрим процесс прохождение электромагнитного излучения с интенсивностью I_0 через слой толщины L непрозрачных частиц со средней концентрацией n и сечением поглощения σ . Ясно, что интенсивность выходящего из слоя пыли излучения будет меньше начальной. Выясним, по какому закону падает

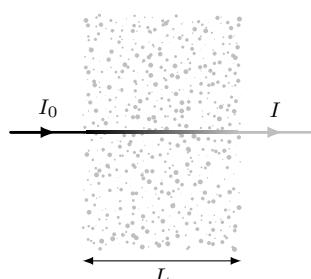


Рис. 67

интенсивность излучения в данном случае.

Для этого из всего слоя частиц выделим тонкий слой толщины dx . Пусть на входе в этот тонкий слой излучение имеет интенсивность I , а на выходе из слоя — $I - dI$. Часть излучения прошла сквозь тонкий слой, а часть поглотилась пылинками, общая площадь которых равна произведению их количества в этом слое на среднюю площадь поглощения. Здесь можно считать, что перекрытия частиц друг другом не происходит, так как рассматриваемый слой достаточно тонкий. Количество частиц dN в тонком слое зависит только от их концентрации и площади всего слоя, таким образом:

$$N = nS dx.$$

Тогда можно составить уравнение на изменение интенсивности излучения тонким слоем:

$$-\frac{dI}{I} = \frac{N\sigma}{S} = n\sigma dx.$$

Проинтегрируем левую и правую часть полученного уравнения:

$$\begin{aligned} - \int_{I_0}^I \frac{dI}{I} &= \int_0^L n\sigma dx, \\ - \ln I + \ln I_0 &= n\sigma L, \end{aligned}$$

$$I = I_0 e^{-n\sigma L}. \quad (4.46)$$

Оптическая толщина — безразмерная величина, характеризующая степень непрозрачности среды для проходящего сквозь неё излучения. В общем случае, конечно, концентрация частиц и их площадь сечения взаимодействия могут меняться от координаты, поэтому оптическая толщина определяется как

$$\tau = \int n(x)\sigma(x) dx. \quad (4.47)$$

Для случая постоянных n и σ , как было получено выше, $\tau = n\sigma L$.

Связь интенсивности I_0 на входе с интенсивностью I на выходе называется **Законом Бугера – Ламберта – Бера** и записывается в виде

$$I = I_0 e^{-\tau}. \quad (4.48)$$

Определим теперь среднюю длину пути $\langle l \rangle$ луча в слое до момента поглощения частицей. Будем в этом случае считать, что $L = \infty$. Вероятность поглощения луча слоем толщины dx в приближении постоянной концентрации и площасти эффективного сечения равна

$$p(x) = \frac{-dI(x)/dx}{I_0} = n\sigma e^{-n\sigma x}$$

Тогда средняя длина пути определяется как

$$\begin{aligned} \langle l \rangle &= \int_0^\infty xp(x) dx = \int_0^\infty xn\sigma e^{-n\sigma x} dx = \\ &= -xe^{-n\sigma x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-n\sigma x} dx = 0 + \frac{1}{n\sigma} \cdot e^{-n\sigma x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{n\sigma}. \end{aligned}$$

Величина $\langle l \rangle$ называется *средней длиной свободного пробега* или просто **длиной свободного пробега**.

4.16 Фотометрия. Показатель цвета

Фотометрическая система UVB — система, разработанная для классификации звезд в зависимости от их цвета. В этой системе измеряются звездные величины звезд на трех участках спектра: U (максимум чувствительности $\lambda_{\text{макс}}^U = 350$ нм), B ($\lambda_{\text{макс}}^B = 430$ нм) и V ($\lambda_{\text{макс}}^V = 550$ нм). Для звёзд спектрального класса A0V все три значения равны, поэтому такие звёзды являются фотометрическим стандартом. Одним из таких стандартов является яркая звезда северного неба Вега.

Показатель цвета ($B - V$) — разница блеска объекта в фильтрах B и V , измеряется в звёздных величинах. Существует эмпирическая зависимость, связывающая показатель цвета ($B - V$) и температуру объекта,

$$T = 4600 \cdot \left(\frac{1}{0.92(B - V) + 1.7} + \frac{1}{0.92(B - V) + 0.62} \right). \quad (4.49)$$

Избыток цвета $E(B - V)$ — разность между наблюдаемым показателем цвета звезды и нормальным, свойственным ее спектральному классу.

$$E(B - V) = (B - V) - (B - V)_0 = (B - B_0) - (V - V_0) = A_B - A_V, \quad (4.50)$$

величины A_B и A_V — поглощения на голубом и видимом участках спектра.

Межзвёздное поглощение — суммарный эффект рассеяния и истинного поглощения света пылевыми частицами в межзвёздной среде. Известно соотношение, связывающее межзвёздное поглощение с избытком цвета,

$$\frac{A_V}{E(B-V)} = R \approx 3.1. \quad (4.51)$$

4.17 МКТ и термодинамика

Молекулярно-кинетическая теория изучает процессы, происходящие в макроскопических телах, на основе предположения о том, что вещество состоит из частиц, движение которых подчиняется законам механики Ньютона.

Уравнение Менделеева-Клайперона является следствием этой теории и связывает давление (P), объём (V) и температуру (T) идеального газа:

$$PV = \nu RT, \quad (4.52)$$

здесь $R = 8.31 \text{ м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$ — универсальная газовая постоянная, а ν — количество вещества идеального газа. Иначе, можно записать

$$P = nkT = \frac{\rho}{\mu} RT, \quad (4.53)$$

где n — концентрация, k — постоянная Больцмана, ρ — плотность газа, μ — молярная масса.

Частицы газа имеют равномерное распределение в предоставленном пространстве и распределение Максвелла по энергиям, то есть вероятность, что частица обладает энергией E равна

$$f_E(E) = \frac{2\pi\sqrt{E}}{\sqrt{(\pi kT)^3}} \exp\left(\frac{-E}{kT}\right). \quad (4.54)$$

После некоторых математических преобразований несложно получить выражение для средней энергии $\langle E \rangle$ частиц идеального газа:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT, \quad (4.55)$$

следовательно, **среднеквадратичная скорость** определяется, как

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}. \quad (4.56)$$

Однако, исходя из распределения (4.54), *наиболее вероятная скорость* частиц

$$v_{\text{H.B.}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (4.57)$$

Первое начало термодинамики гласит:

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (4.58)$$

где δQ — подведенная теплота, dU — изменение внутренней энергии газа, δA — работа газа.

Внутренняя энергия газа определяется соотношением

$$U = \frac{i}{2}RT, \quad (4.59)$$

здесь i — количество степеней свободы частиц газа.

Теплоёмкость идеального газа — отношение количества сообщённой газу теплоты ΔQ , к произошедшему изменению температуры ΔT , в расчёте на один моль:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} \quad (4.60)$$

Изотермический процесс — при котором температура газа не изменяется:

$$PV = \text{const}, \quad C_T = +\infty, \quad (4.61)$$

индекс теплоёмкости соответствует величине, постоянной в течение процесса.

Изохорический процесс — когда объём, занимаемый газом, не изменяется:

$$\frac{P}{T} = \text{const}, \quad C_V = \frac{i}{2}R. \quad (4.62)$$

Изобарический процесс — тот, при котором давление газа не изменяется:

$$\frac{V}{T} = \text{const}, \quad C_P = \frac{i+2}{2}R = C_V + R. \quad (4.63)$$

Адиабатический процесс — процесс, в котором количество подведенной теплоты δQ равно нулю:

$$PV^\alpha = \text{const}, \quad C_Q = 0, \quad (4.64)$$

где $\alpha = C_P/C_V$ — показатель адиабаты.

4.18 Атмосфера Земли

Применим знания о МКТ для поиска характерной высоты атмосферы Земли в двух её моделях: изотермической и адиабатической атмосферах. Прежде, чем приступим к поиску, несколько фактов об атмосфере Земли. Давление у поверхности Земли в среднем составляет

$$p_0 = 1 \text{ атм} = 101325 \text{ Па} = 760 \text{ мм рт. ст.}$$

Наблюдаемые отклонения от среднего значения незначительны для последующих выкладок, так как составляют не более 5%.

Средняя температура воздуха у поверхности $T_0 \approx 12^\circ\text{C} = 285 \text{ К}$. Молярная масса воздуха, средневзвешенное молярных масс его компонент, $\mu_0 = 29 \text{ г/моль}$.

Изотермическая атмосфера Падение давления воздуха с увеличением высоты можно описать математически [9]. Для этого рассмотрим тонкий слой воздуха толщиной dh , выделим в нём фрагмент с площадью dS . Пусть масса воздуха в этом фрагменте равна dm . Представим, что воздух в выделенном фрагменте окружен невесомой тонкой оболочкой — не перемешивается с окружающим воздухом и находится в равновесии. Которое достигается благодаря равенству нулю равнодействующей трёх сил: силы давления воздуха снизу $F_\uparrow = p dS$, силы давления воздуха сверху $F_\downarrow = -(p + dp) dS$ и силы тяжести $F_g = -g dm$, действующей на выделенный слой. Здесь $dp < 0$, так как с высотой давления, очевидно, уменьшается, потому что все меньший столб воздуха оказывает давление на рассматриваемый слой. Итак,

$$\begin{aligned} F_\uparrow + F_\downarrow + F_g &= 0, \\ p dS - (p + dp) dS - g dm &= 0, \\ -dp dS &= g \rho dV = g \rho dh dS, \\ dp &= -g \rho dh. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Из уравнения состояния идеального газа (4.53), считая воздух таким, выражим плотность воздуха ρ :

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}.$$

Подставив полученное выражение в (4.65), получим,

$$dp = -\frac{\mu g}{RT} p dh. \tag{4.66}$$

Разделим переменные и проинтегрируем левую и правую часть от нуля до высоты h :

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^{p(h)} \frac{dp}{p} &= - \int_0^h \frac{\mu g}{RT} dh, \\ \ln p(h) - \ln p_0 &= - \frac{\mu gh}{RT}, \\ p(h) &= p_0 \exp \left[- \frac{\mu gh}{RT} \right]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Полученное равенство называется *барометрической формулой для изотермической атмосферы*. Из нее следует, что характерная (давление уменьшилось в e раз) высота изотермической атмосферы

$$H_{T=\text{const}} = \frac{RT}{\mu g} \simeq 8 \text{ км.}$$

Адиабатическая атмосфера Конечно, предположение об изотермичности атмосферы достаточно грубо. Рассмотрим модель, в рамках которой выполняется равенство $dQ = 0$ для выделенного тонкого слоя воздуха — адиабатическую модель атмосферы [10].

Такая модель хорошо описывает наблюдаемые в атмосфере процессы. Наибольший нагрев воздуха происходит у поверхности Земли, и чем выше, тем воздух холоднее. Это хорошо заметно в горах, где воздух холоднее, чем в нижележащих долинах. В ходе конвекции слои теплого воздуха поднимаются и расширяются, так как давление окружающего воздуха с высотой уменьшается. Работа газа по его расширению уменьшает его внутреннюю энергию — газ остывает.

Приступим к выводу барометрической формулы для адиабатической атмосферы. Начнем с выражений для работы газа и изменения его потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \delta A &= p dV, \\ dU &= C_V \nu dT. \end{aligned}$$

Запишем первое начало термодинамики для тонкого слоя воздуха:

$$\begin{aligned} dQ = 0 &= dU + \delta A = p dV + C_V \nu dT, \\ dT &= - \frac{p}{C_V \nu} dV. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Выразим объем из уравнения состояния идеального газа (4.52) и перейдем к дифференциалам:

$$dV = d\left(\frac{\nu RT}{p}\right) = \frac{\nu R}{p}dT - \frac{\nu RT}{p^2}dp. \quad (4.69)$$

Подставив (4.69) в уравнение (4.68), получим

$$\begin{aligned} dT &= -\frac{p}{C_V \nu} \left(\frac{\nu R}{p}dT - \frac{\nu RT}{p^2}dp \right), \\ \therefore \frac{dT}{T} &= \frac{R}{C_V + R} \frac{dp}{p} = \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p}. \end{aligned}$$

Воспользуемся выражением (4.66) для dp :

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\mu g}{C_P T} dh, \quad (4.70)$$

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\mu g}{C_P} \equiv \Gamma. \quad (4.71)$$

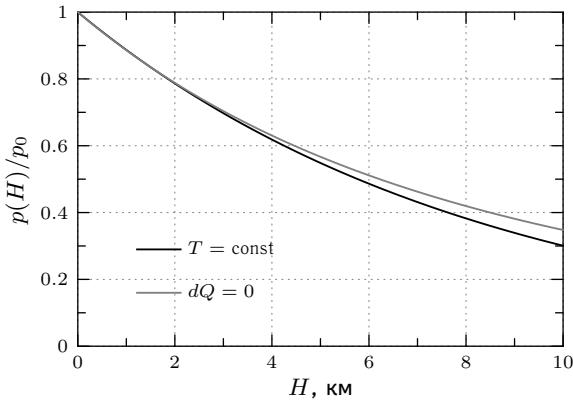
Выражение (4.71) показывает, что в случае адиабатической атмосферы градиент температуры Γ является постоянной величиной. Поэтому справедливо, температура воздуха $T(h) = T_0 + \Gamma h$, где T_0 – температура у поверхности. Молярная теплоёмкость воздуха при постоянном давлении $C_p = 29.15$ Дж/моль, поэтому градиент температуры Γ составляет -0.83 К на 100 м.

Вернемся к уравнению (4.66) и подставим в него полученное выражение для температуры, чтобы получить барометрическую формулу:

$$\begin{aligned} dp &= -\frac{p \mu g}{RT(h)} dh, \\ \int_{p_0}^{p(H)} \frac{dp}{p} &= -\frac{\mu g}{R} \int_0^H \frac{dh}{T_0 + \Gamma h} = -\frac{\mu g}{R \Gamma} \int_0^H \frac{d(T_0 + \Gamma h)}{T_0 + \Gamma h}, \\ \ln \frac{p(H)}{p_0} &= -\frac{\mu g}{R \Gamma} \ln \frac{T_0 + \Gamma H}{T_0}, \\ p(H) &= p_0 \left(1 + \frac{\Gamma H}{T_0}\right)^{-\mu g / R \Gamma} = p_0 \left(1 + \frac{\Gamma H}{T_0}\right)^{-C_p / R}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что характерная высота адиабатической атмосферы

$$H_{dQ=0} = \left(\exp \left[\frac{R}{C_p} \right] - 1 \right) \cdot \frac{T_0}{\Gamma} = 9.6 \text{ км.}$$



4.19 Оптические атмосферные эффекты

В этом разделе будут рассмотрены известные оптические эффекты, возникающие в атмосфере Земли. Их можно разделить на три группы по природе происхождения. Так, **радуга** (см. 4.19.1) формируется в ходе рефракции и отражения света в достаточно крупных каплях воды, распыленных в воздухе. Различные виды **гало** (см. 4.19.2) — 22° гало, зенитная дуга, округло-горизонтальная дуга и паргелий, формируются в результате прохождения света через кристаллы льда, находящиеся в воздухе. А такие эффекты как **глория**, **венец** (**корона**) и **радужные облака** формируются в ходе дифракции света на мелких каплях или кристаллах льда, или других частицах, например, частицы дыма или мелкий песок. [11]

4.19.1 Радуга

Радуга — событие проявления преломления (рефракции) и отражения солнечного света, в каплях воды, распыленных в воздухе. Наблюдается в виде ярких разноцветных колец, перпендикулярных прямой *Солнце — наблюдатель*, с центром на ней.

Стоит обратить внимание на возможность обобщения данной формулировки. Излучение может быть монохромным, тогда радуга будет также монохромна. Для появления радуги необязательно наличие воздуха. Данного эффекта можно достичь, распыляя воду в космосе — без атмосферы и гравитации. Также радуга может наблюдаться во взвеси

стеклянных шариков или капель любой другой прозрачной для рассматриваемого излучения жидкости.

Рассмотрим детальнее, как формируются радужные кольца. Для упрощения расчетов солнечный свет можно считать параллельным фронтом с выделенным направлением, а капли воды с достаточной точностью сферическими.

Представим такую каплю и отметим выделенное направление падения света пунктиром (см. Рис. 69). Рассмотрим луч, падающий на каплю на расстоянии $\rho \in [0, 1]$ радиусов капли от её оси. В таком случае угол падения луча на поверхность капли $\alpha = \arcsin \rho$. Пусть n — коэффициент преломления воды, тогда по закону Снеллиуса угол преломления

$$\beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{n} = \arcsin \frac{\rho}{n}.$$

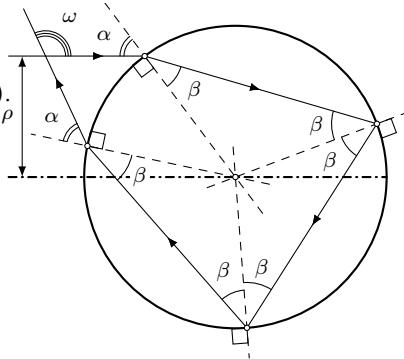


Рис. 68 – Схема следования луча в капле при $k = 2$

Так как β — угол между радиусом и преломленным лучем, то преломленный луч вновь пересечется с поверхностью капли на угловом расстоянии $180^\circ - 2\beta$ в сторону движения луча.

В точке пересечения преломленного луча с поверхностью капли часть света преломится и выйдет наружу, а остальная часть отразится от внутренней поверхности под углом β согласно закону отражения. И на угловом расстоянии $180^\circ - 2\beta$ вновь частично преломится и покинет каплю, а частично отразится и продолжит свой путь внутри капли.

Определим *порядок* радуги k как число отражений луча от внутренней поверхности капли. Тогда при формировании радуги k -ого порядка луч света, проходящий на расстоянии ρ радиусов капли от её оси с точностью до целого числа полных оборотов поворачивается на угол

$$\begin{aligned} \omega &= 2(\alpha - \beta) + k(\pi - 2\beta) = 2\alpha - 2\beta(k + 1) + \pi(k \bmod 2) = \\ &= 2 \arcsin \rho - 2(k + 1) \arcsin \frac{\rho}{n} + \pi(k \bmod 2). \end{aligned}$$

Радуга выделяется на фоне за счет своей яркости, которая достигается из-за увеличения плотности потока излучения, выходящего из капли после k отражения, в конкретном направлении. Что соответствует

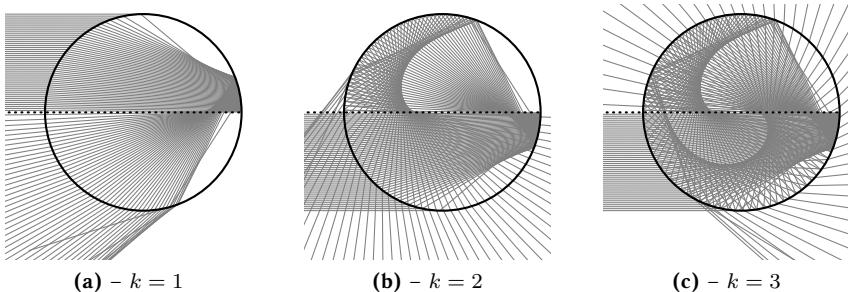


Рис. 69 – Схема хода лучей при формировании радуги k -ого порядка

равенству нулю производной $\partial\omega/\partial\rho$. Определим значение ρ , при котором это происходит, чтобы найти угловой радиус радуги k -ого порядка.

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho} = \frac{2}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{k+1}{\sqrt{n^2-\rho^2}} = 0, \quad \rho \in [0, 1];$$

$$\rho = \sqrt{\frac{(k+1)^2 - n^2}{(k+1)^2 - 1}}, \quad \rho \in [0, 1).$$

Коэффициент преломления воды в оптическом диапазоне зависит от длины волны практически линейно, принимая значения от $n_{\text{к}} = 1.331$ для красного света ($\lambda = 700$ нм) до $n_{\text{ф}} = 1.344$ для фиолетового ($\lambda = 400$ нм). Таким образом внешний край *первичной* радуги имеет радиус 42.4° и красный цвет, а внутренний — 40.5° и фиолетовый цвет, см. Рис. 70а. *Вторичная* радуга имеет размер от 50.4° для красного до 53.7° для фиолетового, см. Рис. 70б. Важно отметить, из-за дополнительного отражения цвета *вторичной* радуги идут в обратном порядке относительно *первичной*.

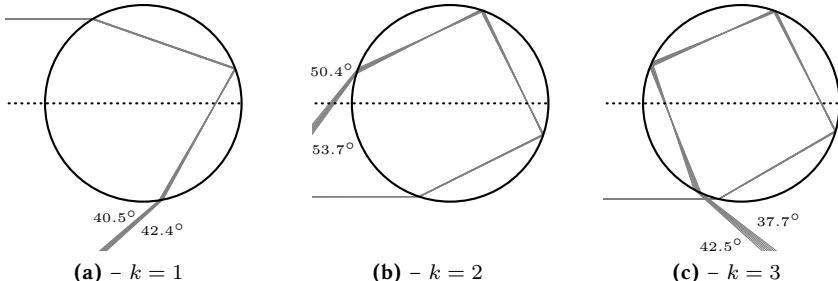


Рис. 70 – Схема дисперсии лучей при формировании радуги k -ого порядка

Обе радуги, несложно заключить, расположены напротив Солнца и их радиус отсчитывается от противосолнечной точки. Отсюда следует важное замечание, чем ниже Солнце расположено над горизонтом, тем выше радуги первого и второго порядков. Напротив, *третичная* радуга расположена со стороны Солнца на расстоянии от 37.7° для фиолетового до 42.5° для красного цветов, см. Рис. 70с.

В заключение необходимо объяснить применимость геометрической оптики в изложенных выше рассуждениях. Чаще всего радуга наблюдается до или после дождя, капли которого существенно больше капель тумана или облаков и достигают нескольких миллиметров в диаметре. Это больше характерной длины волны видимого глазом излучения на три–четыре порядка, что позволяет не учитывать волновые свойства света. В силу последних капли существенно меньшего размера могут вообще не сформировать радугу.

4.19.2 Гало

Как было сказано выше, различные виды *гало* наблюдаются в результате рефракции солнечного света в кристаллах льда, составляющих перистые облака. Эти облака в среднем находятся на высоте от 5 до 10 км, имеют температуру около -40°C , почему состоят исключительно из кристаллов льда.

В условия формирования перистых облаков кристаллы льда имеют шестиугольную симметрию и являются прямоугольными шестиугольными призмами. Их боковые грани могут иметь разные пропорции, но угол между соседними всегда составляет 60° . В дальнейшем будем разделять кристаллы на два вида: пластинчатые — размер оснований много больше высоты призмы, и колончатые — наоборот, высота призмы существенно больше размеров основания. [12]

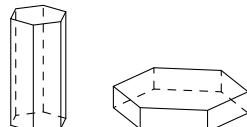
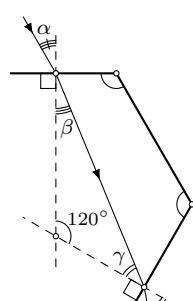


Рис. 71

22° гало Яркая окружность вокруг Солнца, угловой радиус которой оставляет около 22° в зависимости от длины волны излучения. Формируется в произвольно расположенных кристаллах в результате рефракции света на двух, следующих через одну, боковых гранях.



В зависимости от угла падения света на первую грань меняется угол итогового преломления, минимальная величина которого — примерно 22° . В силу экстремальности этого значения, наибольшее число кристаллов преломляют солнечный свет именно под этим углом.

Детально рассмотрим геометрию формирования 22° гало. Пусть α — угол падения луча на боковую грань \mathcal{A} в проекции на нормальную к оси кристалла плоскость, а n — коэффициент преломления льда. Тогда, исходя из закона Снеллиуса, угол преломления β определяется соотношением $\sin \alpha = n \sin \beta$. Выберем место падения луча и угол α такими, чтобы преломленный луч упал на несмежную и непротивоположную боковую грань \mathcal{B} . Обозначим угол падения на эту грань как γ . Учитывая геометрию кристаллов льда, несложно показать, что угол между нормалями к \mathcal{A} и \mathcal{B} составляет 120° , таким образом $\gamma = 60^\circ - \beta$. Снова применяя закон Снеллиуса, получаем, $\sin \delta = n \sin \gamma$. Окончательно, угол преломления исходного луча кристаллом льда $\rho = \alpha + \delta - 60^\circ$.

Из полученных соотношений имеем зависимость $\rho(\alpha)$. Максимум плотности излучения наблюдается близ экстремума данной функции, то есть при $\rho'(\alpha) = 0$. Что соответствует $\alpha_0 = 40.9^\circ$ и $\rho(\alpha_0) = 21.8^\circ$ при $n = 1.31$.

Паргелий Когда пластинчатые кристаллы дрейфуют вниз под действием силы тяжести, из-за сопротивления воздуха и своей формы они ориентируются определённым образом: их основания почти горизонтальны. Такая конфигурация стабильна, то есть небольшие отклонения создают корректирующие силы, возвращающие кристаллы в близкое горизонтальному положение. Таким образом у пластинчатых кристаллов только одна степень свободы — вращение в горизонтальную плоскости.

При небольшой высоте Солнца над горизонтом такие кристаллы увеличивают яркость 22° гало на высоте, равной высоте Солнца над горизонтом. Однако, начиная с некоторой высоты, торцевые грани располагаются под углом к лучам солнечного света, в силу чего происходят внутренние отражения от торцевых граней, и не достигается минимальный угол преломления — 22° . В такой ситуации *паргелий* наблюдается на большем угловом расстоянии от Солнца.

Паргелический круг Также в силу горизонтальной ориентации пластинчатых кристаллов происходит следующее. Солнечный свет, попадая в пластинчатый кристалл через верхнюю торцевую грань, один или более раз отражаясь от боковых граней, выходит из кристалла через нижнюю торцевую грань под тем же углом к горизонту, однако, имея отличное по азимуту направление. Таким образом равномерно распределенные в воздухе пластинчатые кристаллы отражают солнечный свет во всех направлениях в горизонтальной плоскости, сохраняя угол следования лучей к горизонту.

В результате описанных выше отражений при подходящих метеорологических условиях и высоте Солнца наблюдатель может увидеть полную окружность увеличения яркости, параллельную горизонту, проходящую через Солнце.

Тангенциальная дуга В то время как пластинчатые кристаллы ориентируются горизонтальная торцевыми гранями, колончатые ориентируются горизонтально главной осью. В силу чего также имеют две степени свободы для вращения: вертикальную и вокруг своей оси.

Тангенциальная дуга формируется в ходе различных преломлений солнченого света в горизонтально ориентированных колончатых кристаллах. Легко понять, что колончатые кристаллы, главная ось которых лежат в картинной плоскости — формируют верхнюю и нижнюю точки 22° гало. Поэтому *тангенциальная дуга* или две её части всегда касаются 22° гало в этих точках, а в момент, когда Солнца находится в зените — совпадает в ним.

Зенитная дуга Радужная дуга недалеко от зенита — результат рефракции солнечного света в пластинчатых кристаллах льда, расположенных над наблюдателем.

Получим зависимость зенитное расстояния дуги от высоты Солнца над горизонтом h_{\odot} . Обозначит угол преломления солнечных лучей как α , тогда закону Снеллиуса, $\cos h_{\odot} = n \sin \alpha$, откуда

$$\alpha = \frac{\cos h_{\odot}}{n},$$

где n — коэффициент преломления льда. Далее, так как пластинчатые кристаллы представляют собой правильные призмы, то угол между ос-

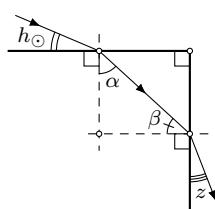


Рис. 74 – Схема хода лучей при формировании зенитной дуги

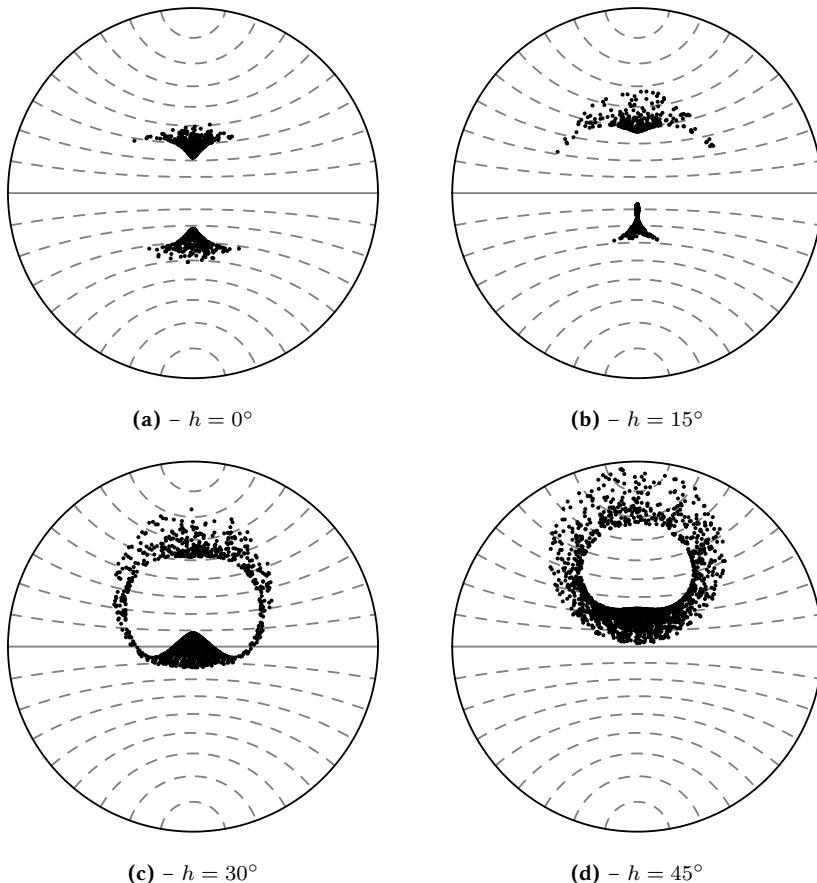


Рис. 73 – Результат компьютерного моделирования тангенциальной дуги при разных высотах Солнца над горизонтом в стереографической проекции

нованием и боковой гранью прямой, следовательно, угол падений лучей на боковую грань $\beta = 90^\circ - \alpha$. Отсюда вновь по закону Снеллиуса получаем зенитное расстояние зенитное дуги:

$$z = \arccos n \sin \beta = \arccos \left(n \cos \arcsin \frac{\cos h_\odot}{n} \right). \quad (4.72)$$

Откуда можно сделать вывод, что при высоте Солнца $h_{\odot} > h_{\odot}^{\max}$ зенитная дуга не наблюдается в силу полного внутреннего отражения

солнечного света в кристаллах льда, где

$$h_{\odot}^{\max} = \arccos \left(n \sin \arccos \frac{1}{n} \right) \simeq 32.2^\circ. \quad (4.73)$$

Округло-горизонтальная дуга Относительно редко наблюдаемое явление преломления солнечного света в пластинчатых кристаллах льда. Схожее по физике формирования с зенитной дугой явление, однако здесь свет попадает в кристалл через боковую грань, а выходит через основание. Отсюда не сложно понять, что для наблюдения данного явления Солнце должно располагаться на зенитном расстоянии $z_{\odot} < z_{\odot}^{\max} = h_{\odot}^{\max} = 32.2^\circ$, значение h_{\odot}^{\max} было получено в (4.73).

Исходя из рисунка Рис. 75, получим максимальную высоту h_{\max} , на которой может наблюдаться окологоризонтальная дуга. Для этого положим, что Солнце находится в зените. Понятно, что в этом случае яркость дуги будет нулевая. Однако рассчитаем высоту именно для этого случая, как для предельного. Так как $z_{\odot} = 0$, следовательно,

$$\beta = \arcsin \frac{1}{n},$$

тогда $\alpha = 90^\circ - \beta$ и

$$h_{\max} = \arccos \left(n \cos \arcsin \frac{1}{n} \right) = {}^{15}h_{\odot}^{\max} \simeq 32.2^\circ.$$

Солнечные столбы Это узкие столбы света, которые визуально исходят от Солнца вертикально вверх, а иногда и вниз. Их высота может достигать $5-10^\circ$, а иногда и больше. Солнечные столбы не являются вертикальными лучами, на самом деле они представляют собой отражение Солнца в миллионах кристаллов льда. Иногда они выглядят как несколько вертикально расположенных световых пятен, в зависимости от расположения облачных кристаллов.

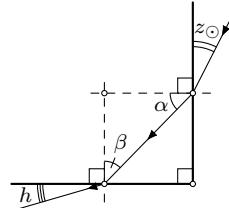


Рис. 75 – Схема хода лучей, формирующих окологоризонтальную дугу



Рис. 76 – Солнечные столбы на восходе

¹⁵ $\cos \arcsin x = \sin \arccos x = \sqrt{1 - x^2}$.

Солнечные столбы формируются пластинчатыми кристаллами, которые, дрейфуя в окологоризонтальном положении, отражают солнечный свет в вертикальной плоскости. Высота столбов определяется зависимостью коэффициента отражения от угла падения света на основания ледяных кристаллов и высотой Солнца над горизонтом, суть углом падения света на отражающую поверхность.

4.19.3 Дифракция света в атмосфере

Крошечные капельки воды в облаках и тумане создают интересные оптические эффекты, в основном это яркоокрашенные кольца или дуги. Геометрическая оптика имеет малое значение в этих эффектах, так как капли воды настолько малы, что дифракция и интерференция излучения преобладают над классическими законами прямолинейного распространения света.

Корона Результат дифракции прямого солнечного или отраженного Луной света на частицах в атмосфере Земли. Как известно из раздела 7.8, размер дифракционного пятна от круглого экрана диаметра d имеет радиус $1.22\lambda/d$, где λ — длина волны наблюдаемого излучения. Таким образом, чем меньше размер экрана или диафрагмы, тем больше диаметр дифракционного пятна и шаг дифракционных колец. Поэтому корона наблюдается только при наличии достаточно мелких частиц — капель воды, кристаллов льда, пыли, в атмосфере.

Оценим максимальных размер d_{\max} дифрагирующих частиц для наблюдения короны. Существенная часть энергии приходится на главный и вторичный дифракционные пики. Будем считать, что в случае наложения второго дифракционного пика на диск Солнца, корона не наблюдается, тогда

$$d_{\max} = \frac{2\lambda}{\rho_{\odot}} \simeq 250 \text{ мкм}$$

при $\lambda = 550$ мкм и угловом радиусе Солнца $\rho_{\odot} \simeq 0.25^\circ$. При меньшем размере частиц корона (второй дифракционный максимум короны) находится вне солнечного диска и, следовательно, корона может наблюдаться.

Также нужно отметить важность единообразия размеров частиц. При высокой дисперсии размеров частиц корона не наблюдается, так как дифракционные максимумы от частиц одного размера приходятся

на дифракционные минимумы от частиц другого размера и наоборот. В итоге волновой фронт выравнивается и корона не наблюдается. [13]

4.20 Давление и температура в центре звезды

В данном разделе найдем оценку для давления и температуры в центре звезды. Для этого рассмотрим такую модель, пусть звезда — однородное газовое облако радиусом R . Пусть плотность звезды равна ρ , а вещество — водородоподобная плазма, такое допущение справедливо для звёзд на главной последовательности. Тогда средняя масса частиц газа составляет примерно $m = 0.5m_p$, потому вещество состоит из одинакового числа протонов и электронов, так как в целом оно нейтрально, а $m_e \ll m_p$.

Аналогично поиску высоты атмосферы рассмотрим тонкий слой вещества высоты dr с площадью сечения dS на расстоянии r от центра звезды. Пусть его масса равна dm . На слой действуют три силы: сила давления газа снизу $F_\uparrow = p(r) dS$, сила давления газа сверху $F_\downarrow = -p(r+dr) dS$ и сила гравитационного притяжения $F_g = -GM(r)/r^2 dm$ от массы, находящейся внутри сферы радиуса r , так как суммарное воздействие от внешней оболочки равно нулю. Стационарность звезды обеспечивается балансом этих сил, значит

$$\begin{aligned} F_\uparrow + F_\downarrow + F_g &= 0, \\ p(r) dS - p(r+dr) dS - \frac{GM(r)}{r^2} dm &= 0, \\ p dS - (p + dp) dS - \frac{4\pi G \rho r^3}{3r^2} \cdot \rho dr dS &= 0, \\ \int_{p_0}^0 -dp &= \int_0^R \frac{4\pi G \rho^2}{3} \cdot r dr, \\ p_0 &= \frac{4\pi G \rho^2 R^2}{6} = \frac{GM\rho}{R}. \end{aligned}$$

Приняв вещество звезды за идеальный газ, получим:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{GM\rho}{R} = nkT_0, \\ T_0 &= \frac{GM\rho}{nkR} = \frac{GM\rho m}{\rho kR} = \frac{GMm_p}{2kR}. \end{aligned}$$

Для Солнца имеем $p_0 \sim 10^{14}$ Па, $T_0 \sim 10^7$. В действительности же давление в центре Солнца оценивается на два порядка большим значением, однако температуры рассмотренная модель дает похожий на действительность результат.

4.21 Теорема Гаусса

Пусть элементарная площадка имеет площадь dS , нормаль \mathbf{n} , определим вектор этой площадки, как $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$. Пусть напряженность гравитационного поля (ускорение свободного падения) постоянно в малой окрестности площадки, тогда поток напряженности поля через площадку равен $d\Phi = (\mathbf{g} \cdot d\mathbf{S}) = g dS \cos \theta$, где θ — угол поворота от вектора \mathbf{g} к вектору $d\mathbf{S}$.

Теорема Гаусса Пусть внутри замкнутой поверхности s заключена масса M , тогда полный поток напряженности гравитационного поля через поверхность s равен

$$\Phi = \oint_s (\mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}) = -4\pi GM. \quad (4.74)$$

Доказательство [14]. Начнем с самого простого случая — точечной массы M , а в качестве замкнутой поверхности s возьмём сферу, центр которой совпадает с положение точечной массы, радиусом R . Тогда в любой точке поверхности модуль вектора напряженности гравитационного поля будет равен $g = GM/R^2$, а направление \mathbf{g} будет противоположным направлению нормалей к сфере (считаем нормали внешними). Следовательно,

$$\Phi = \oint_s (\mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}) = - \oint_s \frac{GM}{R^2} dS = - \int_{4\pi} \frac{GM}{R^2} R^2 d\Omega = -4\pi GM.^{16}$$

Этот случай легко обобщается на несферические поверхности, потому что, как можно заметить, подынтегральное выражение не зависит от расстояния элементарной площадки от точечной массы.

Пусть теперь точечная масса M находится вне поверхности s . В таком случае суммарный поток через поверхность должен быть равен

¹⁶ см. раздел 11.11

нуль, потому как внутри поверхности нет никакой массы. Действительно, пусть луч из точечной массы через поверхность, ясно, луч пересечет поверхность дважды, причем первый раз нормаль к поверхности с вектором ускорения свободного падения будет образовывать острый угол ($\cos \theta > 0$), а во втором — тупой ($\cos \theta < 0$). Рассмотрим телесный угол $d\Omega$ вокруг этого направления и найдём вклад в суммарный поток от потоков через элементарные площадки в данном телесном углу:

$$d\Phi = d\Phi_+ + d\Phi_- = \frac{GM}{R_1^2} R_1^2 d\Omega - \frac{GM}{R_2^2} R_2^2 d\Omega = 0.$$

Так как вклад не зависит от выбора направления, то теорема в этом случае доказана.

До этого момента в расчет брались только выпуклые относительно точечной массы поверхности. Поступая аналогично предыдущему случаю, можно показать, что если масса находится внутри поверхности, то луч, пересекающий поверхность не один раз, обязательно пересекает её нечетное число раз. А значит, элементарные площадки, находящиеся в телесном углу $d\Omega$ дадут вклад $d\Phi = -GM d\Omega$. Следовательно, общий поток будет равен $\Phi = -4\pi GM$.

Остается обобщить полученные результаты на случай произвольного распределения масс. В силу принципа суперпозиции полей поток напряженности суммарного поля является суммой потоков полей элементарных масс. Пусть $\rho(\mathbf{r})$ — распределение плотности внутри поверхности. Тогда суммарный поток

$$\Phi = \int_V -4\pi G \rho(\mathbf{r}) dV = -4\pi GM.$$

Остается сказать, что приведенные выше выкладки не зависят от природы поля и подходят для любого поля, напряженность которого подчиняется закону C/r^3 . Так, для электрического поля $\Phi = 4\pi Q$, где Q — суммарный заряд внутри поверхности. На самом деле теорема Гаусса выполняется не только для полей, но и для функций, являющихся зависимостями вида C/r^2 , так, например, суммарный поток излучения проходящий через замкнутую поверхность равен L , где L — суммарная светимость источников внутри поверхности.

5 Специальная теория относительности

5.1 Аксиомы

СТО, как и всякая другая теория строится на определенных постулатах — утверждениях, принимаемых без доказательства:

1. Пространство однородно: его свойства и законы физики не зависят от точки в пространстве;
2. Пространство изотропно: в нем нет какого-либо выделенного направления;
3. Время однородно: все моменты времени равноправны, законы физики не меняются со временем;
4. Пространство плоское — это означает справедливость в пространстве законов евклидовой геометрии, в частности утверждения, что сумма углов треугольника равна 180° ;
5. Все инерциальные системы отсчета равноправны — законы физики одинаковы во всех ИСО;
6. Скорость света постоянна и не зависит от скорости движения источника и приемника света — принцип инвариантности скорости света.

Из первых трех приведенных выше утверждений следует, что при проведении любого эксперимента мы можем перенести экспериментальную установку в любое другое место, развернуть ее в произвольном направлении или провести эксперимент в другое время, при этом результаты эксперимента не должны измениться.

5.2 Интервал

Проведём мысленный эксперимент. Есть два наблюдателя в космическом пространстве, вдали от всех тел и не взаимодействующие с ними. Назовем их Алиса и Боб. Боб движется на своем космическом корабле относительно корабля Алисы с постоянной скоростью v ; в тот момент, когда Боб пролетает мимо Алисы, они синхронизируют свои часы, то есть, настраивают их так, чтобы они шли с одинаковой скоростью, и запускают в этот момент отсчет времени. Алиса посылает Бобу световой сигнал через время t после начала отсчета времени, который

дойдёт до Боба за время Δt по часам Алисы, при этом для расстояния, пройденного светом, можно записать соотношение:

$$v(t + \Delta t) = c\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{vt}{c - v}. \quad (5.1)$$

Приемник на корабле Боба регистрирует поступивший сигнал и сразу же испускает ответный. В системе отсчета Алисы сигнал будет идти одинаковое время в обе стороны, так как расстояние, пройденное светом одинаковое, в момент прихода ответного сигнала часы Алисы будут показывать время $t + 2\Delta t$. Пусть в момент приема сигнала часы Боба показывают некое время t' . Рассматривая передачу ответного сигнала в СО Боба, заметим, что она ничем не отличается от передачи первого сигнала при рассмотрении из СО Алиса. Тогда время испускания сигнала Бобом относится к времени приёма Алисой так же, как время испускания Алисой к времени приёма Бобом, иначе

$$\frac{t + 2\Delta t}{t'} = \frac{t'}{t} \rightarrow (t')^2 = t(t + 2\Delta t). \quad (5.2)$$

Из (5.1) можно получить что

$$t(t + 2\Delta t) = \frac{c + v}{c - v}t^2.$$

Отсюда получим соотношение между t' и t

$$t' = t\sqrt{\frac{c + v}{c - v}}.$$

Координата x Боба в момент приема сигнала в СО Алисы есть $v(t + \Delta t)$. Из (5.1) получим:

$$t + \Delta t = \frac{ct}{c - v}, \quad x = \frac{cvt}{c - v}.$$

Рассмотрим величину $c^2(t + \Delta t)^2 - x^2$:

$$c^2(t + \Delta t)^2 - x^2 = \frac{c^4t^2}{(c - v)^2} - \frac{c^2v^2t^2}{(c - v)^2} = c^2t^2\frac{c + v}{c - v} = c^2(t')^2. \quad (5.3)$$

Данное соотношение справедливо независимо от относительной скорости движения систем отсчета. Поэтому для двух различных систем отсчета можно записать:

$$c^2t_1^2 - x_1^2 = c^2t_2^2 - x_2^2 = c^2(t')^2.$$

Здесь t_1 и x_1 — время и расстояние между событиями в первой системе отсчета, а t_2 и x_2 — во второй. Но в силу однородности и изотропности пространства не важно, где выбирается начало отсчета и куда направлены координатные оси. Отсюда следует, что величина $c^2\Delta t^2 - \Delta r^2$, где Δt — промежуток времени между двумя событиями в заданной системе отсчета, а Δr — расстояние в пространстве между точками, в которых эти события наступили, одинакова во всех системах отсчета.

Величина $s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta r^2$ в СТО называется квадратом **интервала** между двумя событиями. При определении интервала используется разность квадратов координат (время в СТО также считается координатой). Поэтому пространство-время называется псевдоевклидовым пространством (в отличие от евклидова пространства, где квадрат расстояния между двумя точками равен сумме квадратов разностей координат). Также его называют пространством Минковского в честь Германа Минковского, который ввел его в рассмотрение.

5.3 Преобразования Лоренца

Обычно в СТО рассматриваются две инерциальные системы S и S' . Время и координаты некоторого события, измеренные относительно системы S , обозначаются как (t, x, y, z) , а координаты и время этого же события, измеренные относительно системы S' , как (t', x', y', z') . Удобно считать, что координатные оси систем параллельны друг другу, и система S' движется вдоль оси x системы S со скоростью v . Одной из задач СТО является поиск соотношений, связывающих (t', x', y', z') и (t, x, y, z) , которые называются *преобразованиями Лоренца*. Общий вид **преобразований Лоренца** в векторном виде, когда относительная скорость систем отсчета имеет произвольное направление:

$$t' = \gamma \cdot \left(t - \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{c^2} \right), \quad (5.4)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma \mathbf{v}t + (\gamma - 1) \cdot \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2}, \quad (5.5)$$

где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ — Лоренц фактор, являющийся коэффициентом масштабирования; \mathbf{r} и \mathbf{r}' — радиус-векторы события относительно систем отсчета S и S' .

Если сориентировать координатные оси по направлению относительного движения инерциальных систем и выбрать это направление в

качестве оси x , то преобразования Лоренца примут вид:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right), \quad x' = \gamma (x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (5.6)$$

При скоростях много меньше скорости света ($v \ll c$) преобразования Лоренца переходят в *преобразования Галилея*:

$$t' = t, \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (5.7)$$

Приведём далее вывод одномерных преобразований Лоренца

5.4 Эффекты СТО

5.5 Закон сложения скоростей

Еще один эффект СТО связан с изменением скоростей при переходе из одной СО в другую. Скорости нельзя просто складывать, так как скорость — это производная координаты по времени, а время в каждой системе отсчета свое. Однако можно найти закон, по которому скорости будут преобразовываться при переходе между системами отсчета. Пусть система отсчета F движется относительно СО F' со скоростью v вдоль оси Ox , скорость некоторого тела в СО F равна u , будем считать, что она направлена вдоль этой же оси Ox , найдем скорость этого же тела в СО F' .

Запишем преобразования Лоренца, приняв $x = ut$:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t(v + u)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ t' &= \frac{t + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t(1 + vu/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned}$$

v' будет по определению равно производной x' по времени t' :

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}. \quad (5.8)$$

Это и есть релятивистский закон сложения скоростей. Можно заметить, как просто он сводится к классическому если принять $uv \ll c^2$.

5.6 Ускорение

Рассмотрим релятивистски равноускоренное движение — такое, при котором ускорение тела в мгновенно сопутствующей ему системе отсчета остается постоянным. Это происходит, если на тело действует постоянная (по модулю и направлению) сила F . Пусть масса тела при этом m . Рассмотрим малое изменение скорости тела dv' в мгновенно сопутствующей ему СО. Тогда по определению

$$a' = \frac{F}{m} = \frac{dv'}{dt'} = \text{const.}$$

По закону сложения скоростей в лабораторной СО скорость тела изменится на dv :

$$dv = \frac{v + dv'}{1 + \frac{vdv'}{c^2}} - v = \frac{v + dv' - v - dv' \left(\frac{v^2}{c^2} \right)}{1 + \frac{vdv'}{c^2}} = dv' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

При этом из эффекта замедления времени

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Отсюда ускорение a в лабораторной СО соотносится с ускорением в сопутствующей СО как

$$a = \frac{dv}{dt} = a' \gamma^{-3}. \quad (5.9)$$

5.7 Импульс

По определению импульс с силой связывает уравнение:

$$F = \frac{dp}{dt}.$$

Рассмотрим малое изменение импульса в лабораторной СО, напомним что $F = ma'$:

$$dp = F dt = ma' dt = m a \gamma^3 dt = m \gamma^3 dv.$$

Тогда полный импульс тела p может быть получен как интеграл от 0 до v :

$$p = \int_0^p dp = \int_0^v m \gamma^3 dv = \int_0^v \frac{m dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}.$$

Для того чтобы найти данный интеграл, применим тригонометрическую подстановку:

$$\frac{v}{c} = \sin x, \quad dv = c \cdot \cos x dx, \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \cos x. \quad (5.10)$$

Тогда, подставляя в интеграл получим:

$$\int \frac{mc \cdot \cos x dx}{\cos^3 x} = mc \operatorname{tg} x = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Заметим что для начала мы взяли неопределенный интеграл, а далее по формуле Ньютона-Лейбница:

$$p = \left. \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right|_0^v = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mv.$$

5.8 Энергия

По аналогии с импульсом малое изменение кинетической энергии dK есть элементарная работа силы F на перемещении dx . Тогда, расписывая силу F через ускорение в лабораторной СО:

$$dK = Fdx = Fvdt = ma'vdt = ma\gamma^3vdt = m\gamma^3vdv.$$

Интегрируя от 0 до v , можно найти выражение для кинетической энергии тела

$$K = \int_0^E dK = \int_0^v m\gamma^3v dv = \int_0^v \frac{mv dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}.$$

Сделав замену переменной аналогично (5.10), можно получить

$$\int \frac{mc^2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^3 x} dx = mc^2 \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$$

Последний интеграл после замены $t = \cos x$ сводится к

$$\frac{mc^2}{\cos \alpha} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Далее по формуле Ньютона-Лейбница:

$$K = \left. \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right|_0^v = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = mc^2(\gamma - 1) \quad (5.11)$$

Помимо кинетической энергии тело обладает также и энергией покоя — той, которой оно обладает независимо от скорости движения, эта энергия зависит только от его массы. Её значение определяется формулой

$$E_0 = mc^2. \quad (5.12)$$

Полная энергия тела состоит из его энергии покоя и кинетической:

$$E = E_0 + K = \gamma mc^2. \quad (5.13)$$

Энергия фотона

Фотоны, кванты света — безмассовые частицы, следовательно их энергия покоя равна нулю, то есть их полная энергия равна кинетической. Но формула (5.11) для вычисления её значения не применима, так как $m = 0$, а $\gamma \rightarrow \infty$ при $v \rightarrow c$.

Энергия фотона в действительности зависит от его частоты и равна

$$E = h\nu, \quad (5.14)$$

где h — коэффициент пропорциональности, называемый *постоянной Планка*.

5.9 Быстрота

Рассмотрим подстановку:

$$\frac{u}{c} = \operatorname{th} x, \quad \frac{v}{c} = \operatorname{th} y. \quad (5.15)$$

И распишем выражение $c \cdot \operatorname{th}(x + y)$:

$$c \cdot \operatorname{th}(x + y) = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} = v'.$$

Мы получили закон сложения скоростей. Тогда преобразуем выражение далее как:

$$\operatorname{arcth} \frac{v'}{c} = x + y = \operatorname{arcth} \frac{u}{c} + \operatorname{arcth} \frac{v}{c}.$$

Мы получили величину, которую можно просто складывать вместо использования громоздкой формулы для релятивистского сложения скоростей. В случае, когда нужно несколько раз переводить скорости из

одной СО в другую, это бывает полезно. Такая величина называется быстротой, и обычно обозначается как

$$\vartheta \equiv \operatorname{arcth} \frac{v}{c}.$$

Выразим лоренц-фактор через быстроту:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sh}^2 \vartheta}{\operatorname{ch}^2 \vartheta}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 \vartheta - \operatorname{sh}^2 \vartheta}{\operatorname{ch}^2 \vartheta}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \vartheta}}} = \operatorname{ch} \vartheta.\end{aligned}\quad (5.16)$$

Выразим импульс тела через его массу и быстроту:

$$p = \gamma m v = \operatorname{ch} \vartheta \cdot m v = \frac{v}{c} \cdot \operatorname{ch} \vartheta \cdot m c = \operatorname{th} \vartheta \cdot \operatorname{ch} \vartheta \cdot m c = m c \operatorname{sh} \vartheta.\quad (5.17)$$

Запишем выражения для преобразований Лоренца через быстроту

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = (x - vt) \operatorname{ch} \vartheta = x \operatorname{ch} \vartheta - ct \operatorname{sh} \vartheta; \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = (t - vx/c^2) \operatorname{ch} \vartheta = \frac{1}{c}(ct \operatorname{ch} \vartheta - x \operatorname{sh} \vartheta).\end{aligned}$$

Для удобства запишем эти выражения через переменную τ :

$$\begin{aligned}x' &= x \operatorname{ch} \vartheta - \tau \operatorname{sh} \vartheta; \\ \tau' &= \tau \operatorname{ch} \vartheta - x \operatorname{sh} \vartheta.\end{aligned}$$

Заметим что последнюю систему можно выразить через произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} x' \\ \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \vartheta & -\operatorname{sh} \vartheta \\ -\operatorname{sh} \vartheta & \operatorname{ch} \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix}.\quad (5.18)$$

5.10 Аберрация

5.11 Эффект Доплера

6 Космология

Будем считать, что наша Вселенная не содержит каких-либо выделенных областей и направлений. Её глобальные характеристики однаковы во всех точках пространства в фиксированный момент времени.

Это составляет суть **космологического принципа**. Он подтверждается наблюдениями: распределение материи во Вселенной на масштабах более 100 Мпс можно считать однородным и изотропным, а относительные флуктуации температуры реликтового фона не превышают 10^{-5} . Также введём следующие обозначения: величины без индексов или с индексом «*e*» (от англ. *emit*) обозначают наблюдаемый объект, а с индексами «*0*» или «*o*» (от англ. *observe*) — наблюдателя.

6.1 Кинематика

Эволюция Вселенной соответствует *космологическому принципу*, если из состояния Вселенной в один момент времени, можно получить её состояние в любой другой момент путем только лишь масштабирования. Соответственно, расстояние D между двумя несвязанными объектами будет меняться по следующему закону:

$$D(t) = a(t)D_0, \quad (6.1)$$

где $a(t)$ — масштабный фактор, D_0 — а расстояние между этими объектами сейчас.

Масштабный фактор — это безразмерная величина, характеризующая эволюцию Вселенной. Во всех точках Вселенной в заданный момент времени масштабный фактор одинаков. В момент большого взрыва масштабный фактор принимают равным нулю, а единица соответствует текущему моменту.

Продифференцируем (6.1) по времени и разделим на себя:

$$\frac{1}{D} \frac{dD}{dt} = \frac{1}{aD_0} \frac{D_0 da}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} \equiv H(t). \quad (6.2)$$

Таким образом, мы получили величину, не зависящую от расстояния, и изменяющуюся только со временем. Параметр $H(t)$ называется **параметром Хаббла-Леметра**. А его значение сейчас, т. е. на данный момент t_0 — **постоянной Хаббла**, которая равна

$$H_0 = H(t_0) \approx 67 \dots \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}. \quad (6.3)$$

По сути, этот параметр определяет наклон касательной к графику $a(t)$ в какой-либо момент времени, то есть показывает, расширяется Вселенная, или нет. Вторая производная *масштабного фактора* по времени

определяется **параметром замедления** $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -qH^2. \quad (6.4)$$

Из (6.4) видно, что при отрицательном значении q Вселенная эволюционирует с ускорением, а при положительном — с замедлением. Судя по наблюдениям, наша Вселенная ускоренно расширяется.

Так как выделенного направления в расширении Вселенной нет, то при отсутствии пекулярных скоростей, все объекты, подверженные расширению будут удаляться от наблюдателя радиально. Напрямую из (6.1) следует $\dot{D}/D = \dot{a}/a = H$, то есть **закон Хаббла**:

$$v_r = HD \quad (6.5)$$

Запишем *эффект Доплера*:

$$\frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = z \simeq \frac{v_r}{c}. \quad (6.6)$$

Здесь λ_o — длина волны принимаемого света, а λ_e — излучаемого. Стоит заметить, что **красное смещение** z может быть больше 1, а последнее равенство выполняется только для $v_r \ll c$.

Рассмотрим теперь объект на небольшом расстоянии $D = cdt$ от наблюдателя таком, что $v_r/c = d\lambda/\lambda \ll 1$. Используя закон Хаббла, получаем:

$$\frac{v_r}{c} = \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{D\dot{a}}{ca} = dt \frac{\dot{a}}{a} = \frac{da}{a}. \quad (6.7)$$

$$\int_{\lambda_e}^{\lambda_o} \frac{d\lambda}{\lambda} = \int_a^1 \frac{da}{a} \Rightarrow \ln \lambda_o - \ln \lambda_e = \ln 1 - \ln a \Rightarrow \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{1}{a} \quad (6.8)$$

Чтобы получить связь между *масштабным фактором* и *красным смещением*, используем *эффект Доплера*. Из него следует равенство $\lambda_o/\lambda_e = z + 1$. После подстановки в (6.8) получаем зависимость $a(z)$:

$$a = (1 + z)^{-1} \quad (6.9)$$

Последнее уравнение очень важно в современной космологии. Оно показывает зависимость *масштабного фактора*, величины, не имеющей явного физического смысла, от *красного смещения*, которое можно просто измерить.

Теперь продифференцируем (6.9) по времени:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{(1+z)^2} \frac{dz}{dt} = -\frac{a}{1+z} \frac{dz}{dt}, \quad (6.10)$$

разделим на a :

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{d \ln(a)}{dt} = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}, \quad (6.11)$$

6.2 Динамика

В этом разделе будут приведены *иллюстрации* выводов некоторых основных уравнений в динамике эволюции плоской, однородной и изотропной Вселенной, заполненной материей, излучением (включая релятивистские нейтрино и т. п.) и тёмной энергией.

6.2.1 Вселенная, заполненная материей.

Выделим небольшую сферу радиусом $R(t) = R_0 a(t) \ll D_{H_0}$, массой M и средней плотностью $\rho = M / \frac{4}{3}\pi R^3$. В силу изотропности Вселенной пространство вокруг выбранной нами области гравитационно на неё не действует. Запишем выражение для ускорения свободного падения на границе этой сферы. По закону Всемирного тяготения

$$g = \ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} = -\frac{4\pi G\rho R^3}{3R^2} = -\frac{4\pi}{3}G\rho R. \quad (6.12)$$

Таким образом мы получили **уравнение движения** для нашей Вселенной. Проинтегрируем его один раз.

$$\ddot{R} = \frac{d}{dt} \dot{R} = \frac{d\dot{R}}{dR} \frac{dR}{dt} = \frac{d\dot{R}}{dR} \dot{R} \quad (6.13)$$

Подставим эту замену в (6.12):

$$\dot{R} \frac{d\dot{R}}{dR} = -\frac{GM}{R^2} \quad (6.14)$$

После интегрирования получаем

$$\frac{1}{2} \dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = C \quad (6.15)$$

Это выражение по своему виду является законом сохранения энергии. Определим теперь вид константы C . Будем считать известными значения H_0 , R_0 и ρ_0 в данный момент времени t_0 . По закону Хаббла $(dR/dt)_{t=t_0} = R_0 H_0$. Также $M = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_0$. Подставим эти выражения в (6.15):

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)_{t=t_0} - \frac{4\pi G \rho_0 R_0^3}{R_0} = \\ &= \frac{1}{2} R_0^2 H_0^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho_0 R_0^2 = \frac{1}{2} R_0^2 H_0^2 \left(1 - \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2} \right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Соотношение $3H^2/8\pi G = \rho_c$ называется **критической плотностью** Вселенной. Перепишем выражение для константы в более простом виде:

$$C = \frac{R_0^2 H_0^2}{2} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{c,0}} \right). \quad (6.17)$$

Тогда уравнение (6.15) принимает следующий вид:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G R_0^3 \rho_0}{3R} + R_0^2 H_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{c,0}} \right). \quad (6.18)$$

Наиболее популярным и простым является сценарий развития Вселенной, при котором её плотность равна критической. В этом случае $C \equiv 0$ и уравнение (6.18) принимает вид

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G R_0^3 \rho_0}{3R}} = H_0 \sqrt{\frac{8\pi G R_0^3 \rho_0}{3H_0^2 R}} = H_0 \sqrt{\frac{R_0^3 \rho_0}{R \rho_{c,0}}} = H_0 \sqrt{\frac{R_0^3}{R}}. \quad (6.19)$$

Решая его, получаем

$$\left(\frac{R}{R_0} \right)^{3/2} = a^{3/2} = \frac{3}{2} H_0 t; \quad t_0 = \frac{2}{3H_0}, \quad (6.20)$$

Где t — возраст Вселенной на *масштабном факторе* a , а t_0 — возраст Вселенной сейчас.

Постоянная Хаббла в этом случае эволюционирует по следующему закону:

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R} = H_0 \sqrt{\frac{R_0^3}{R}} \cdot \frac{1}{R} = H_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3/2} = \frac{2}{3t}, \quad (6.21)$$

а плотность вещества, равная критической:

$$\rho(t) = \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (6.22)$$

6.2.2 Учёт давления. Тёмная энергия.

Пусть теперь помимо холодной материи в нашей Вселенной есть излучение и релятивистские частицы плотностью энергии ε_r . Будем рассматривать их как фотонный газ. Выполняется следующее уравнение:

$$\varepsilon = \rho c^2, \quad (6.23)$$

Где ρ — плотность, выраженная в kg/m^3 (плотность массы), а c — скорость света. Если излучение находится в термодинамическом равновесии, то $\varepsilon_r = \rho c^2$. Давление фотонного газа задается формулой:

$$P = \frac{\varepsilon_r}{3} = \frac{\rho_r c^2}{3}$$

Добавим плотность излучения к плотности вещества в (6.12) и получим *уравнение движения* для Вселенной с излучением:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3}GR \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right). \quad (6.24)$$

Оно совпадает с *уравнением движения* из ОТО. Здесь стоит оговориться, что излучение в силу (6.24) вносит вклад как в плотность массы, так и в давление, а *холодная* материя давления не оказывает. Добавим теперь в нашу Вселенную тёмную энергию.

Космологическая постоянная Λ , отвечающая за тёмную энергию, была введена А. Эйнштейном в уравнения ОТО для получения статичной Вселенной при их решении. Однако после решения уравнений А. Фридманом оказалось, что с *космологической постоянной* возможны как статические, так и нестатические решения.

Из уравнений ОТО следует, что плотность *тёмной энергии* постоянна:

$$\varepsilon_\Lambda = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G}, \quad (6.25)$$

а давление

$$P_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda = -\frac{c^4 \Lambda}{8\pi G}. \quad (6.26)$$

Теперь окончательно в (6.24) имеем:

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda; \quad P = P_r + P_\Lambda = \frac{\varepsilon_r}{3} - \varepsilon_\Lambda$$

Преобразуем скобку в (6.24):

$$\rho + \frac{3P}{c^2} = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + \frac{\varepsilon_r}{c^2} - 3\frac{\varepsilon_\Lambda}{c^2} = \rho_m + 2\rho_r - 2\rho_\Lambda$$

После подстановки в *уравнение движения* получаем:

$$\begin{aligned}\ddot{R} &= -\frac{4\pi}{3}GR(\rho_m + 2\rho_r - 2\rho_\Lambda) = \\ &= -\frac{4\pi}{3}GR\left(\rho_m + 2\rho_r - \frac{c^2\Lambda}{4\pi G}\right) = \\ &= -\frac{4\pi}{3}GR(\rho_m + 2\rho_r) + \frac{\Lambda c^2}{3}R.\end{aligned}\quad (6.27)$$

Данный вид *уравнения движения* наиболее удобен для интегрирования. Обычно под ρ и R подразумевают вклады только материи и излучения в плотность и давление соответственно. Учитывая, что $R(t) = a(t)R_0$, перепишем (6.27) в наиболее известном виде:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}.\quad (6.28)$$

Для интегрирования уравнения (6.27) нам необходимо знать, как плотности материи и излучения эволюционируют с изменением *масштабного фактора*, или размера выделенной области.

Сначала рассмотрим эволюцию плотности материи. Так как масса M , заключённая внутри области радиуса R всегда остаётся внутри него, плотность этой области будет падать как куб радиуса:

$$\rho_m = \frac{3M}{4\pi}R^{-3} = \frac{3M}{4\pi R_0^3}a^{-3} = a^{-3}\rho_{m,0}\quad (6.29)$$

Плотность излучения эволюционирует по следующему закону:

$$\rho_r = a^{-4}\rho_{r,0}.\quad (6.30)$$

Вид (6.30) можно объяснить эффектом Доплера, который испытывают фотоны, догоняя удаляющегося наблюдателя. Пространственная концентрация фотонов в выделенной области будет падать, как и плотность материи, обратно пропорционально объёму области. Также из-за эффекта Доплера (см. 6.8), энергия каждого фотона будет уменьшаться обратно пропорционально *масштабному фактору*: $\epsilon = hc/\lambda \sim a^{-1}$. Совокупность этих эффектов даёт нам (6.30).

Получить это выражение более формально можно, рассматривая излучение как идеальный газ, расширяющийся адиабатически. Запишем его работу:

$$dA_r = d\varepsilon_r V = -PdV = -\frac{\varepsilon_r}{3}dV.\quad (6.31)$$

Раскроем $d\varepsilon_r V$ как приращение произведения двух функций:

$$d\varepsilon_r V = \varepsilon_r dV + V d\varepsilon_r,$$

подставим в (6.31):

$$\begin{aligned} V d\varepsilon_r &= -\frac{\varepsilon_r}{3} - \varepsilon_r dV = -\frac{4}{3} \varepsilon_r dV \\ -\frac{3}{4} \frac{d\varepsilon_r}{\varepsilon_r} &= \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

После интегрирования получаем:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_{r,0}} \right)^{-3/4} &= \ln \frac{V}{V_0} \\ \varepsilon_r &= \varepsilon_r \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-4/3} = \varepsilon_{r,0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-4} = a^{-4} \varepsilon_{r,0} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Заменяя плотность энергии на плотность массы с помощью (6.23), получаем (6.30).

Итак, подставим (6.29) и (6.30) в *уравнение движения*:

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= -\frac{4\pi}{3} G a \left(a^{-3} \rho_{m,0} + 2a^{-4} \rho_r \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} a = \\ &= -\frac{4\pi G}{3} a^{-2} \rho_{m,0} - \frac{8\pi G}{3} a^{-3} \rho_{r,0} + \frac{\Lambda c^2}{3} a. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Проинтегрируем это уравнение с помощью замены $\ddot{a} = \dot{a} \frac{d\dot{a}}{da}$ (см. 6.13):

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 = \frac{4\pi G}{3} a^{-1} \rho_{m,0} + \frac{1}{2} \frac{8\pi G}{3} a^{-2} \rho_{r,0} + \frac{1}{2} \frac{\Lambda c^2}{3} a^2 + C_1 \quad (6.34)$$

Разделим на a^2 и умножим на 2:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} a^{-3} \rho_{m,0} + \frac{8\pi G}{3} a^{-4} \rho_{r,0} + \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{C_2}{a^2}. \quad (6.35)$$

Из ОТО известно, что константа C_2 равна $-kc^2$, где k может принимать значения $-1, 0$ и 1 и называется кривизной пространства (при $k = 0$ пространство евклидово). Далее везде будем считать $k \equiv 0$. Вынесем $8\pi G/3$ за скобки:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (6.36)$$

Это равенство называется **уравнением энергии**. Приведём здесь ещё одну форму этого уравнения, тоже достаточно известную.

Преопразуем $\Lambda c^2/3$ (т. н. Λ -член) в (6.35):

$$\frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3} \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda.$$

В левой части *уравнения энергии* стоит не что иное как *параметр Хаббла!* Разделим обе части уравнения на H_0^2 :

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3H_0^2} a^{-3} \rho_{m,0} + \frac{8\pi G}{3H_0^2} a^{-4} \rho_{r,0} + \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_\Lambda \quad (6.37)$$

Вспомним, что отношение $3H_0^2/8\pi G$ — критическая плотность Вселенной сейчас. Также введём обозначения удельной плотности: $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$.

Перепишем *уравнение энергии*.

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = a^{-3} \Omega_{m,0} + a^{-4} \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0}. \quad (6.38)$$

Впоследствие мы часто будем использовать отношение H/H_0 , поэтому введём для него специальное обозначение:

$$\frac{H}{H_0} = E(a) = \sqrt{a^{-3} \Omega_{m,0} + a^{-4} \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0}}. \quad (6.39)$$

Иногда *уравнение энергии* удобнее записывать, выражая *масштабный фактор* через *красное смещение*. Так как $a = (1+z)^{-1}$,

$$E(z) = \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0}}. \quad (6.40)$$

6.3 Расстояния в космологии

Представим, что невдалеке от нас стоит уличный фонарь. Мы хотим узнать, на каком расстоянии он от нас находится. Как же можно это расстояние измерить?

1. Проще всего измерить расстояние линейкой или каким-то жестким объектом известной длины.
2. Мы можем определить расстояние по времени, которое требуется свету, чтобы дойти от фонаря до нас.

3. Зная реальный размер самого фонаря, можно измерить расстояние до него по его угловому размеру.
4. Можно измерить плотность потока излучения от фонаря и по ней определить расстояние.

В случае с обычным уличным фонарём все эти способы дадут одинаковый результат, равный расстоянию, измеренному линейкой. Пусть теперь наш уличный фонарь — это далёкая галактика, не связанная с нами гравитационно и не имеющая пекуллярной скорости. Попробуем определить расстояние до неё предложенными выше способами.

6.3.1 Сопутствующие координаты

Представим сетку координат, которая расширяется вместе с Вселенной. В таких координатах любая точка Вселенной, не имеющая пекуллярной скорости, неподвижна относительно сетки. Следовательно, разность координат объекта и наблюдателя в данной системе не зависит от времени.

Сопутствующее расстояние

По сути, эта разность координат определяется количеством узлов сетки, расположенных между наблюдателем и объектом. Предположим теперь, что в данный момент времени t_0 количество узлов равно N , а расстояние между соседними — $l(t_0) = l_0$. Следовательно, расстояние между наблюдателем и объектом равно $D = Nl_0$. Поскольку наша Вселенная масштабируема, мы можем вычислить l для любого другого момента времени t : $l(t) = l_0a(t)$ (вспомните уравнение (6.1)). Напомним, что $a(t_0) \equiv 1$.

Если расстояние между соседними узлами $l(t)$ устремить к нулю, то D будет вычисляться посредством интегрирования по dl_0 . Так как $dl_0 = dl(t)/a(t)$, а приращение расстояния $dl(t) = cdt$, где c — скорость света,

$$D \equiv D_C = \int dl_0 = \int \frac{cdt}{a}. \quad (6.41)$$

Величина D_C называется сопутствующим расстоянием. Приведём его к более удобному для вычислений виду. Для этого домножим и разделим

подынтегральное выражение на $d \ln(a)$.

$$D_C = c \int_t^{t_0} \frac{dt}{d \ln(a)} \frac{d \ln(a)}{a} = c \int_a^1 \frac{d \ln(a)}{a H(a)} = c \int_a^1 \frac{da}{a^2 H(a)}$$

Вспомним, что $da = -dz/(1+z)^2$ (см. (6.10)) и $a = (1+z)^{-1}$. При замене масштабного фактора на красное смещение интеграл принимает следующий вид:

$$-c \int_z^0 \frac{dz}{(1+z)^2} \frac{(1+z)^2}{H(z)} = c \int_0^z \frac{dz}{H(z)}$$

Воспользуемся выводами, полученными в прошлом разделе:

$$D_C = D_{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \quad (6.42)$$

Поскольку сопутствующее расстояние — это расстояние между наблюдателем и объектом в данный момент времени, то взяв интеграл (6.42) в пределах от $z = 0$ до $z = \infty$, мы получим нынешний размер Вселенной. Будем считать, что относительная плотность тёмной энергии $\Omega_{\Lambda,0} \simeq 0.69$, а вкладом излучения из-за его малости пренебрежём.

$$R_{0,C} = D_{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{E(z)} \approx 3.24 D_{H_0} \approx 13.9 \text{ Gpc.} \quad (6.43)$$

6.3.2 Световое расстояние

Пусть мы наблюдаем некоторый объект на красном смещении z . Расстояние до него равно D_C , однако из-за расширения вселенной оно не будет равно тому расстоянию, которое пройдёт свет от объекта да наблюдателя. Световое расстояние складывается из небольших отрезков cdt , то есть, чтобы его найти, нужно вычислить следующий интеграл:

$$D_L = \int_{t_e}^{t_0} c dt = c \int_{a_e}^1 \left(\frac{dt}{d \ln(a)} \right) d \ln(a)$$

Так как $d \ln(a)/dt = H$, то

$$D_L = c \int_{a_e}^1 \frac{da}{a H(a)} = D_{H_0} \int_{a_e}^1 \frac{da}{a E(a)}. \quad (6.44)$$

Или же, выражая через z :

$$D_L = -c \int_0^{z_e} \left(\frac{dt}{dz} \right) dz = D_{H_0} \int_0^{z_e} \frac{dz}{(1+z) E(z)}. \quad (6.45)$$

6.3.3 Расстояние по угловому размеру

Предположим, что некоторый небольшой объект размера l располагается перпендикулярно нашему лучу зрения на красном смещении z и имеет наблюдаемый угловой размер $\theta \ll 1$. Для него можно ввести расстояние: $D_A = l/\theta$. Выясним, как оно связано сопутствующим. Пока свет шёл от объекта до нас, Вселенная успела расширяться. Объект сохранил свой размер, но стал занимать меньше места. Сопутствующее расстояние будет равно l_0/θ , где l_0 — разность координат между концами объекта на момент испускания видимого света (то есть, на эпоху z). Получается, что $l_0 = l(1+z)$, а расстояние по угловому размеру выражается через сопутствующее следующим образом:

$$D_A = \frac{D_C}{1+z}. \quad (6.46)$$

6.3.4 Фотометрические расстояния

Для изотропного источника с известной светимостью L можно определить фотометрическое расстояние:

$$F = \frac{L}{4\pi D_L^2},$$

где F — измеренная плотность потока излучения от источника. Однако фотометрическое расстояние не равно сопутствующему. Если наблюдаемый объект находится на красном смещении z , то длина волны каждого принятого фотона не равна длине волны излученного: $\lambda_0 = \lambda_e(1+z)$. Следовательно, энергия фотона ($E = hc/\lambda$) тоже будет меняться: $E_0 = E_e/(1+z)$, как и F . Расстояние между фотонами будет увеличиваться пропорционально $1+z$, как и λ . Увеличение расстояния между фотонами уменьшает частоту их детектирования (в сравнении с частотой испускания), а следовательно, и плотность потока в $1+z$ раз. Поскольку плотность потока, не подверженная этим изменениям, — это просто $L/4\pi D_C^2$, можно связать сопутствующее и фотометрическое расстояния:

$$\frac{L}{4\pi D_L^2} = \frac{L}{4\pi D_C^2} \frac{1}{(1+z)^2},$$

из чего следует, что

$$D_L = D_C(1+z). \quad (6.47)$$

7 Оптика

7.1 Телескоп

Телескоп — устройство для наблюдения удаленных объектов. На данный момент существуют телескопы для наблюдения во всех диапазонах электромагнитного излучения. По наблюдаемому диапазону телескопы делят на *оптические телескопы, радиотелескопы, рентгеновские телескопы и гамма-телескопы*. Каждый из классов в свою очередь содержит множество подклассов. Поговорим подробнее про оптические телескопы.

Оптические телескопы по своей схеме делятся на три типа: *рефлекторы* (диоптрические), *рефракторы* (катаптрические) и *катадиоптрические*.

Оптический телескоп, в котором для сбиивания света используется система линз называется **рефрактором** (*зеркальным телескопом*). Апертура телескопа определяется диаметром главной линзы. Существует две оптические схемы телескопов-рефракторов.

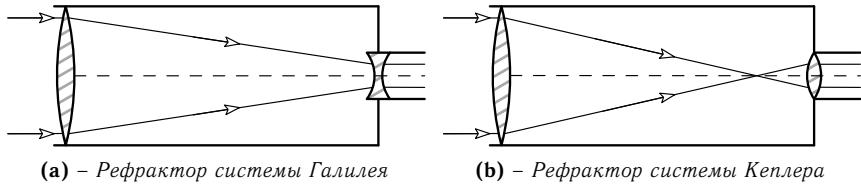


Рис. 77 – Оптические схемы телескопов рефракторов

Система Галилея — окуляр является рассеивающей линзой и располагается перед фокусом главной линзы, изображение прямое. И *система Кеплера* — окуляром является положительная (собирающая) линза, находящаяся за главным фокусом, следовательно, телескоп такой схемы дает перевернутое изображение.

Оптический телескоп, в котором светособирающими элементами являются зеркала называется **рефлектором** (*зеркальным телескопом*). Апертура определяется диаметром главного зеркала. В силу удобства изготовления рефлекторов, они пользуются большой популярностью за счёт невысокой относительно рефракторов цены. Кроме того использование зеркал в оптической схеме позволяет сильно её разнообразить. Зеркально-линзовый телескоп называется **катадиоптрическим** — телескоп, в котором используется как система линз, так и зеркал. В обиходе

часто не различают рефлекторы и катадиоптрики, обращая внимание лишь на тип главного собирающего элемента.

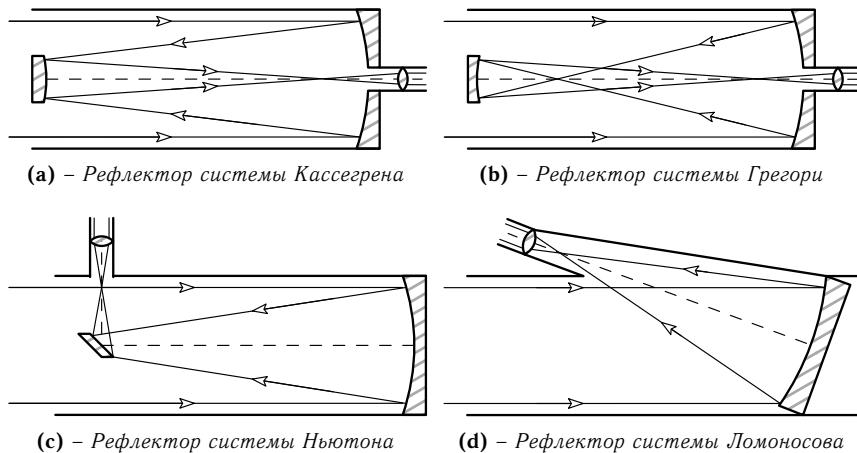


Рис. 78 – Оптические схемы телескопов рефлекторов

Первый телескоп телескоп-рефлектор был построен Ньютоном по его же схеме в 1668 году. Главное зеркало параболическое, вторичное — плоское, наклонено под 45° к оптической оси. Вторичное зеркало в схеме Ньютона поворачивает оптическую ось и выносит фокус из трубы. Изображение получается перевернутым, так как окуляр, как и для всех телескопов рефлекторов, являясь собирающей линзой, располагается за фокусом.

Несмотря на то, что Ньютон построил первый телескоп-рефлектор, первую схему телескопа предложил не он, а Грегори, и сделал он это в 1663 году. В его схеме все зеркала расположены соосно, главное — параболическое, вторичное — эллиптическое. Первый главный фокус в системе Грегори расположен до вторичного зеркала, именно это и позволяет использовать эллиптическое зеркало в качестве вторичного. После вторичного зеркала находится второго главный фокус, а значит, телескоп с такой схемой строит прямое изображение.

В 1672 году Кассегрен предложил модификацию системы Грегори. В качестве вторичного зеркала он предложил использовать выпуклое гиперболическое, вместо вогнутого эллиптического, как было в Грегори. Это позволяет избавиться от второго главного фокуса и сократить размер трубы телескопа. А также такое вторичное зеркало приводит к меньшему экранированию главного, что улучшает проникающую способность. В последствие многие ученые модифицировали систему Кас-

сегрена: добавляли различные апертурные корректоры, меняли форму зеркал. Самыми популярными, а потому и известными стали системы Максутова – Кассегрена, Шмидта – Кассегрена и Ричи – Кретьена.

Описанные выше схемы телескопов обладают важным недостатком: вторичное зеркало затеняет центральную область главного зеркала, причём чем больше относительное отверстие, тем больше затеняемая площадь. В 1762 году М. В. Ломоносов реализовал схему телескопа-рефлектора без вторичного зеркала. Главное зеркало в его схеме – внеосевой параболоид, фокус которого находится за пределами трубы. К сожалению данная оптическая схема не получила распространения из-за сильной комы.

7.2 Виньетирование

Виньетирование (от франц. vignette – заставка), явление частично-го ограничения (затенения) различными диафрагмами оптической системы наклонных (по отношению к оптической оси) пучков световых лучей.¹⁷

В однолинзовых рефракторах перекрытия световых пучков не происходит, однако виньетирование наблюдается. Связано это с изменение эффективной площадью S' собирающей поверхности в зависимости от угла α между центральным лучом пучка и оптической осью. Пусть площадь линзы равна S , тогда $S' = S \cos \alpha$. Отсюда получаем зависимость яркости изображения от линейного расстояния x от оптическое оси в фокальной плоскости:

$$\frac{I}{I_0} = \cos \frac{x}{F},$$

где F – фокусное расстояние линзы, а I_0 – яркость на оптической оси.

Однако в телескопах-рефракторах этот эффект ничтожно мал в силу малости поля зрения, а значит, и угла α . Так как при $\alpha \ll 1$ с хорошей точностью справедливо приближение $\cos \alpha \simeq 1$. С другой стороны виньетирование сильно проявляется в широкоугольных объективах, угол α там может быть вплоть до 90° . Поэтому, но не только, фотографические объективы состоят из большого числа линз.

¹⁷Фото и кинотехника: «Советская энциклопедия», 1981.

7.3 Монтировки телескопов

Монтировки телескопов разделяют на два основных вида: экваториальная и альтазимутальная монтировка (см. Рис. 79).

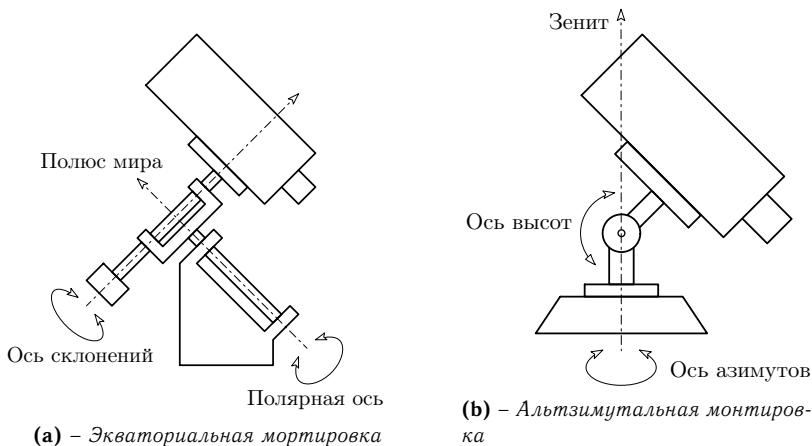


Рис. 79 – Виды монтиrovок

Экваториальная монтировка — монтировка, одна ось которой направлена на полюс мира (полярная ось), а другая параллельна небесному экватору (ось склонения). Для гидирования на такой монтировке, нужно лишь поворачивать её с постоянной угловой скоростью вокруг полярной оси в направлении роста часового угла. Важно отметить, что существует несколько разновидностей экваториальных монтировок: немецкая, английская, американская монтировки и монтировка с рамой.

Альтазимутальная монтировка — монтировка телескопа, имеющая вертикальную и горизонтальную оси вращения, позволяющая поворачивать телескоп по высоте и по азимуту. Для слежения за небесными объектами, перемещающимися по небесной сфере вследствие суточного вращения Земли, телескоп нужно поворачивать одновременно вокруг обеих осей с разными переменными скоростями.

7.4 Параметры телескопа

Из геометрической оптики известно, что лучи, проходящие через оптический центр линзы, не преломляются. Отсюда следует важное соотношение для линейного размера l изображения объекта с угловым размером ρ в фокальной плоскости:

$$l = \rho F, \quad (7.1)$$

здесь F — фокусное расстояние используемого телескопа. Так как при помощи окуляра наблюдатель фактически смотрит на фокальную плоскость с расстояния f — фокусного расстояния окуляра, то угловой размер изображения, которое видит наблюдатель равно

$$\alpha = \frac{l}{f}. \quad (7.2)$$

Следовательно, **увеличение телескопа** Γ — отношение наблюдаемого и реального угловых размеров объекта равно отношению фокусных расстояний телескопа и окуляра. Из подобных треугольников также следует, что

$$\Gamma = \frac{F}{f} = \frac{D}{d}, \quad (7.3)$$

где D — диаметр входного зрачка (телескопа), d — диаметр выходного зрачка (окуляра). Важно отметить, что диаметры выходного и входного зрачка — диаметры пучков света, а не самих линз.

Увеличение называется *равнозрачковым*, если диаметр выходного зрачка равен диаметру глазного зрачка наблюдателя, то есть

$$\Gamma_{\text{р.з.}} = \frac{D}{d_{\text{г}}}, \quad (7.4)$$

где $d_{\text{г}}$ — диаметр человеческого зрачка, обычно в тёмное время суток принимается за 6 мм.

Однако при росте увеличения детальность наблюдаемого изображения не улучшается. Происходит это в силу волновой природы света и, как следствие, явления *дифракции* на входном отверстии телескопа. Наименьший угловой размер ещё различимых деталей определяется **разрешающей способностью** телескопа — это наименьшее угловое расстояние между двумя точечными объектами, при котором в телескоп ещё можно различить их раздельно. Предельное разрешение телескопа определяется формулой

$$\beta = \frac{1.22\lambda}{D}, \quad (7.5)$$

где λ — длина волны наблюдений, при визуальных наблюдениях $\lambda \approx 550$ нм.

Кроме того, чем больше увеличение, тем меньше **поле зрения** — множество направлений, доступных для наблюдения. Из соотношений (7.2) и (7.3) следует зависимость *поле зрения телескопа* α_t от *поля зрения окуляра* α_{ok} :

$$\alpha_t = \frac{\alpha_{ok}}{\Gamma}, \quad (7.6)$$

поле зрения стандартного окуляра составляет 45° .

Также, поле зрения телескопа можно вычислить, зная время τ , за которое звезда со склонением δ пересекает поле зрения через его центр:

$$\alpha_t = \frac{\tau \cos \delta}{4}. \quad (7.7)$$

Масштаб — отношение углового размера объекта к линейному размеру его изображения на фокальной плоскости, следовательно

$$\mu = \frac{\rho}{l} = \frac{\rho}{\rho F} = \frac{1}{F} = \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right]. \quad (7.8)$$

Относительное отверстие — геометрический параметр телескопа, равный отношению диаметра телескопа к его фокусному расстоянию

$$\forall = \frac{D}{F}. \quad (7.9)$$

Светосила — отношение освещенностей входного отверстия и фокальной плоскости, равна квадрату относительного отверстия.

$$A = \forall^2 = \frac{D^2}{F^2}. \quad (7.10)$$

Пожалуй, самой важной характеристикой телескопа является то, насколько слабые объекты можно зафиксировать с его помощью. Эта величина называется **проницающей способностью телескопа** — это предельная звёздная величина объектов, которые доступны для наблюдения в данный телескоп. Чаще всего проницающая способность определяется из формулы Погсона (4.1) в ходе сравнения телескопа с глазом ($m_r \simeq 6^m$), однако здесь нужно учесть:

1. Отношение площадей собирающих поверхностей.

2. Диаметр выходного пучка может быть больше размера приёмника, тогда часть света теряется.
3. Отношение времён экспозиций (выдержка глаза составляет около 0.3 сек).
4. Отношение квантовых эффективностей¹⁸.
5. Прочие эффекты, возникающие в ходе фотографических наблюдений.

При учёте только первых двух пунктов проникающая способность равна

$$m_t = m_r + 5 \lg \frac{D}{d_r} - 5 \lg \max \left\{ \frac{d}{d_r}, 1 \right\}. \quad (7.11)$$

7.5 Формула тонкой линзы

Выведем формулу для связи расстояния от объекта до линзы, расстояния до изображения и фокусным расстоянием линзы. Введем обозначения: $F = OF_1 = OF_2$ — фокусное расстояние линзы, $d = OA = BB''$ — расстояние до объекта, $f = OA'$ — расстояние до изображения.

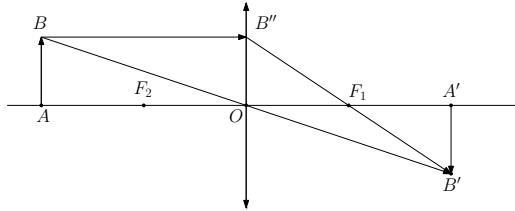


Рис. 80 – Схема лучей в тонкой линзе

$$\Delta ABO \sim \Delta A'B'O \Rightarrow \frac{d}{f} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} \quad (7.12)$$

$$\Delta OB''F_1 \sim \Delta A'B'F_1 \Rightarrow \frac{f - F}{F} = \frac{F_1B'}{OF_1} = \frac{A'B'}{OB''} = \frac{A'B'}{AB} \quad (7.13)$$

$$\frac{f}{d} = \frac{f - F}{F} \Rightarrow \frac{1}{d} = \frac{1}{F} - \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d} \quad (7.14)$$

Полученная формула называется формулой тонкой линзой.

¹⁸Квантовая эффективность — отношение мощности регистрируемого излучения к мощности подающего для единицы площади приемника.

7.6 Закон Снеллиуса

Рассмотрим плоскую *границу раздела* двух сред и луч, падающий на нее. Прямая, нормальная к плоскости раздела и проходящая через точку падения называется *нормалью*. **Угол падение** — угол между нормалью и падающим лучем. В общем случае часть падающего излучения отражается от границы раздела, а часть проходит во вторую среду. **Углом отражения** называется угол между нормалью и отраженным лучем, а **углом преломления** — угол между нормалью и преломленным лучем.

Оптически прозрачная среда характеризуется скоростью распространения электромагнитного излучения (скоростью света) в ней. Скорость света в прозрачной среде определяется как

$$c = \frac{c_0}{n}, \quad (7.15)$$

где c_0 — скорость света в вакууме, а n — коэффициент преломления среды.

Преломление — изменение направления распространения волн (лучей) электромагнитного излучения, возникающее на границе раздела двух прозрачных для этих волн сред. Преломление света на границе двух сред даёт парадоксальный зрительный эффект: пересекающие границу раздела прямые предметы в более плотной среде ($n_1 > n_2$) выглядят образующими больший угол с нормалью к границе раздела (то есть преломлёнными «вверх»); в то время как луч, входящий в более плотную среду, распространяется в ней под меньшим углом к нормали (то есть преломляется «вниз»). Этот же оптический эффект приводит к ошибкам в визуальном определении глубины водоёма, которая всегда кажется меньше, чем есть на самом деле.

Преломление света в атмосфере Земли приводит к тому, что мы наблюдаем восход Солнца несколько раньше, а закат несколько позже, чем это имело бы место при отсутствии атмосферы. По той же причине вблизи горизонта диск Солнца выглядит заметно сплющенным вдоль вертикали.

Закон преломления называется **законом Снеллиуса**. Оставим его

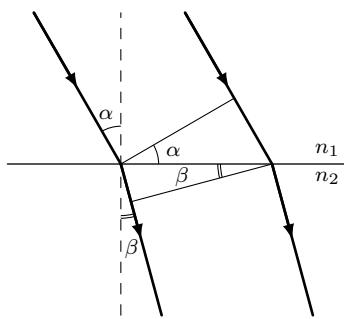


Рис. 81 — Ход лучей при прохождении границы раздела двух сред в направлении из оптически менее плотной в оптически более плотную среду

без доказательства в силу необходимой для этого теории, выходящей за рамки данной книги. Формулируется закон Снеллиуса так:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta, \quad (7.16)$$

где α — угол между лучем и нормалью в среде 1, β — в среде 2.

Из (7.16) видно, что для некоторых n_1 и n_2 таких, что, например $n_2 > n_1$, и достаточно большом угле β должно выполняться неравенство $\sin \alpha > 1$, что, очевидно, невозможно. Данная ситуация называется *полным внутренним отражением* — всё излучение, падающее из более оптически более плотной среды, отразится от границы раздела.

Углом полного внутреннего отражения называется такой минимальный угол β , при котором наблюдается полное внутреннее отражение. Положив $\sin \alpha = 1$, получаем, что

$$\sin \beta_{\min} = \frac{n_1}{n_2}, \quad n_1 < n_2. \quad (7.17)$$

7.7 Аберрации в оптике

Хроматическая аберрация Пожалуй главным недостатком оптических схем, содержащий преломляющие оптические элементы (линзы; призмы, за исключением использования их для спектроскопии) является *хроматические aberrации*. Дело в том, что показатель преломления материала линзы зависит от длины волны падающего излучения. Это приводит к тому, что положения фокуса оптической системы зависит от длины волны излучения. При наблюдениях это проявляется как раздужный ореол вокруг объектов, ухудшающий качество изображения.

Найдем зависимость величины хроматической аберрации от величины дисперсии материала линзы. В качестве линзы рассмотрим плосковыпуклую линзу из оптического стекла — *крона* (BK7). Зависимость $n(\lambda)$ её показателя преломления n от длины волны λ проходящего излучения представлена на графике (см. Рис. 82). Важно отметить, здесь нельзя считать линзу тонкой, так как само по себе понятие тонкой линзы подразумевает отсут-

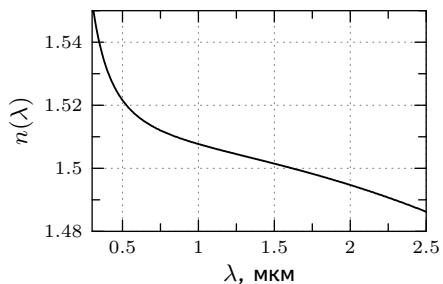


Рис. 82 – Зависимость показателя преломления крона (BK7) от длины волны излучения

ствие разного рода aberrаций и условие фокусировки лучей в одной точке (фокусе), чего не происходит на практике.

Итак, пусть радиус кривизны выпуклой поверхности рассматриваемой плоско-выпуклой линзы равен R . Рассмотрим луч, параллельный оптической оси линзы, идущий на расстоянии d от неё (см. Рис. 83).

Так как передняя поверхность линзы плоская, луч, попадая в линзу, не преломляется. Преломление происходит на выходе из линзы. Нетрудно показать, что для угла падения луча на заднюю поверхность линзы α справедливо равенство $\sin \alpha = d/R$. По закону Снеллиуса угол преломления β рассматриваемого луча определяется соотношением $\sin \beta = n \sin \alpha$. Так как угол между нормалью к выпуклой поверхности линзы и её оптической осью равен α , то угол γ между преломленным лучем и оптической осью линзы равен $\beta - \alpha$.

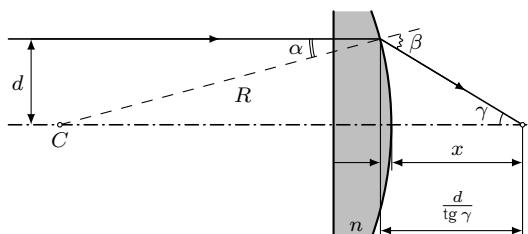


Рис. 83 – Схема прохождения луча света через плоско-выпуклую линзу

Расстояние до точки пересечения преломлённого луча с оптической осью линзы будем отсчитывать от вершины выпуклой поверхности линзы. Расстояние h между проекцией точки преломления на оптическую ось и вершиной найдём из теоремы Пифагора:

$$h = R - \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Получим, координата фокуса для лучей на расстоянии d от оптической оси равна

$$x = \frac{d}{\operatorname{tg} \gamma} - h = \frac{d}{\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{nd}{R} - \arcsin \frac{d}{R} \right)} - \left(R - \sqrt{R^2 - d^2} \right). \quad (7.18)$$

Введём обозначение $\delta \equiv d/R$ и разделим обе части полученного равенства на R , чтобы перейти к относительным единицам:

$$\frac{x}{R} = \frac{\delta}{\operatorname{tg} (\arcsin n\delta - \arcsin \delta)} - 1 + \sqrt{1 - \delta^2} \xrightarrow{\delta \ll 1} \frac{1}{n-1} - \frac{\delta^2 n^2}{2(n-1)}.^{19}$$

¹⁹ Вывод приближения:

Найдём область определения функции $x(\delta)$. Прежде всего учтём, что $\delta \geq 0$, потому что d — это расстояние от оптической оси, которое не может быть отрицательным. С другой стороны, радиус линзы не может быть больше радиуса кривизны ее поверхности, следовательно, $\delta < 1$.

Однако есть ещё одно условие, ограничивающее δ сверху. Это эффект полного внутреннего отражения. Действительно, $\sin \beta$ не может быть больше единицы, следовательно, $\sin \alpha < n^{-1}$, а значит, $\delta < n^{-1}$. Для стекла, коэффициент преломления которого $n \approx 1.5$, имеем, $\delta \in [0, 2/3)$.

Как будет показано ниже, во избежании проявления *сферической aberrации*, используют линзы с маленьким относительным отверстием ($\forall \ll 1$). Следовательно, и $\delta \ll 1$, возьмем для примера значение $\delta = 0.1$. Для него, очевидно, можно использовать приближение для x , поэтому выражение для x принимает вид:

$$\frac{x(\lambda)}{R} \Big|_{\delta=0.1} = \frac{1}{n-1} - \frac{0.01n^2}{2(n-1)}.$$

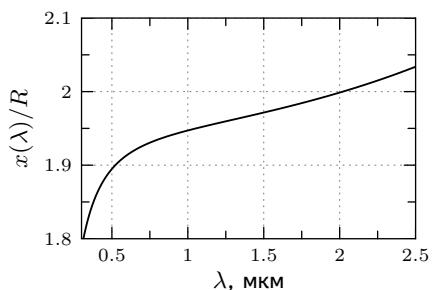


Рис. 84 – График зависимости положения фокуса от длины волны излучения, $\delta = 0.1$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\operatorname{tg}(\arcsin n\delta - \arcsin \delta)} - 1 + \sqrt{1 - \delta^2} &= \\ &= \frac{\delta}{\operatorname{tg}\left[n\delta + \frac{n^3\delta^3}{6} - \delta - \frac{\delta^3}{6} + o(\delta^3)\right]} - 1 + \left(1 - \frac{\delta^2}{2} + o(\delta^2)\right) = \\ &= \frac{\delta}{\operatorname{tg}\left[\delta(n-1) + \frac{(n^3-1)\delta^3}{6} + o(\delta^3)\right]} - \frac{\delta^2}{2} + o(\delta^2) = \\ &= \frac{\delta}{\delta(n-1) + \frac{(n^3-1)\delta^3}{6} + \frac{\delta^3}{3}(n-1)^3 + o(\delta^3)} - \frac{\delta^2}{2} + o(\delta^2) = \\ &= \frac{1/(n-1)}{1 + \frac{\delta^2}{6}(n^2+n+1) + \frac{\delta^2}{3}(n-1)^2 + o(\delta^2)} - \frac{\delta^2}{2} + o(\delta^2) = \\ &= \frac{1}{n-1} \left[1 - \frac{\delta^2}{6}(3n^2-3n+3)\right] - \frac{\delta^2}{2} + o(\delta^2) \simeq \frac{1}{n-1} - \frac{\delta^2 n^2}{2(n-1)}. \end{aligned}$$

Как видно из графика данной зависимости (см. Рис. 84), для оптического диапазона $x(\lambda)$ принимает значения от примерно 1.85 для коротковолновой (фиолетовой) части до примерно 1.95 для красного цвета.

Чтобы компенсировать такой разбег совместно с собирающей линзой используют рассеивающую — из другого материала. Объективы, где исправлена хроматическая аберрация для двух цветов и частично исправлена сферическая аберрация называют **ахроматами**; где хроматическая аберрация исправлена для трёх цветов, а также полностью исправлена сферическая аберрация — **апохроматами**; с более полной геометрической коррекцией — **апланатами**.

Сферическая аберрация В оптических системах, содержащих сферические поверхности (линзы, зеркала) может наблюдаться *сферическая аберрация*. Суть такой аберрации состоит в том, что лучи, параллельные оптической оси, идущие на разном расстоянии от неё, собираются в разных её точках. Это приводит к размытию изображений точечных источников.

Покажем наличие сферической аберрации у плоско-выпуклой линзы. Для этого рассмотрим полученное выше выражение (7.18) и его приближение при $\delta \ll 1$. Зафиксируем в них $n = 3/2$ — характерное значение показателя преломления для стекла. Графики получаемых при этом зависимостей представлены на Рис. 85. Как видно из

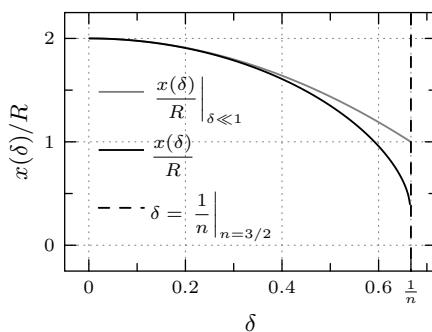


Рис. 85 — График зависимости положения фокуса от расстояния до оптической оси от линзы, её параллельного

Чтобы показать важность сферических аберраций, рассмотрим небольшой телескоп-рефрактор с диаметром плоско-выпуклого стеклянного ($n \approx 3/2$) объектива $D = 50$ мм. Характерная точность фокусировки Δx для таких маленьких телескопов составляет около 1 мм. Установим, при каком фокусном расстоянии такого телескопа точность фокусировки нивелирует сферическую аберрацию.

При отсутствии сферической аберрации фокусное расстояние плоско-выпуклого объектива $F = R/(n - 1) = 2R$. Максимальное значение

ние δ , для объектива, достигается для лучей, проходящих через край объектива. Следовательно, $\delta \leq D/(2R)$. Теперь, используя приближение, можно записать выражение для требуемого Δx , чтобы найти необходимое для этого относительное отверстие \forall :

$$\Delta x = F - x(\delta) = F - x \left(\frac{D}{2R} \right),$$

$$\Delta x = F - R \left(2 - \frac{D^2}{4R^2} \cdot \frac{9}{4} \right),$$

$$\Delta x = \frac{9D^2}{16R} = \frac{9D^2}{8F} = \frac{9}{8}D\forall;$$

$$\therefore \forall = \frac{\Delta x \cdot 8}{9D} = 0.019 \approx \frac{1}{50}.$$

Найдем теперь величину aberrации сферического зеркала. Пусть R — радиус кривизны зеркала. Рассмотрим луч, идущий параллельно оптической оси зеркала на расстоянии d от неё, см. Рис. 86. Он падает на зеркало под углом α , где $\sin \alpha = d/R$. В силу закона отражения: угол падения равен углу отражения, то есть угол отражения также равен α . Кроме того, угол между нормалью к зеркалу в точке отражения и оптической осью зеркала тоже равен α , как вертикальный. Следовательно, треугольник центр кривизны зеркала (C) — точка отражения (A) — точка пересечения отраженного луча с оптической осью (F) является равнобедренным. Значит расстояние $x_F(d)$ от центра зеркала до «фокуса» F можно найти как

$$x_F(d) = R - \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = R - \frac{R}{2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = R - \frac{R}{2\sqrt{1 - \frac{d^2}{R^2}}};$$

$$\frac{x_F(d)}{R} \Big|_{d \ll R} \simeq 1 - \frac{1}{2 \left(1 - \frac{d^2}{2R^2} \right)} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{d^2}{2R^2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{d^2}{4R^2}.$$

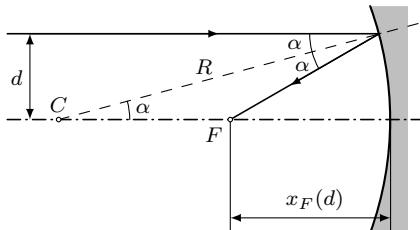


Рис. 86 — Схема отражения луча, параллельного оптической оси, в сферическом зеркале

Отсюда получается, что фокус сферического зеркала находится ровно между центром зеркала и центром его кривизны. Однако в силу сферической aberrации возникает ошибка фокусировки порядка d^2/R^2 ,

которая размывает изображение. Причём при $d > R/\sqrt{2}$ лучи не «разворачиваются», следовательно, не вносят вклада в изображение, так как приходят на приемник с другой стороны.

Для компенсации сферической aberrации используют различные линзы-корректоры, однако они помогают лишь частично избавиться от неё. Поэтому в современных рефлекторах используются параболические зеркала, не подверженные сферическим aberrациям.

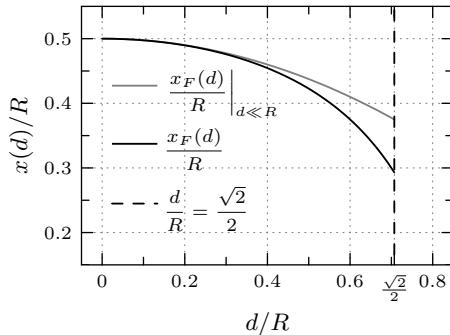


Рис. 87 – График зависимости положения фокуса от расстояния до оптической оси от лука, её параллельного

Астигматизм Ещё один вид aberrаций оптических систем, состоящий в разности радиусов кривизны оптических элементов в двух перпендикулярных направлениях. Такое возможно, например, в случае большой массы линзы или зеркала. Когда такой оптический элемент долгое время находится в вертикальном положении (оптическая ось горизонтальна), он деформируется: вдоль горизонтали радиус кривизны сохраняется, а по вертикали, из-за сжатия, — уменьшается.

Астигматизм проявляется так, что параллельный пучок лучей после прохождения через оптическую систему собирается не в одной точке, а на двух взаимно перпендикулярных отрезках, расположенных на некотором удалении друг от друга. Промежуточные сечения в этом случае имеют форму эллипсов.

Кома Один из видов aberrаций оптических систем — aberrация широкого пучка световых лучей, проходящий наклонно к оптической оси системы, как и *сферическая aberrация*, обусловлена неодинаковым преломлением световых лучей различными участками линзовых компонент системы. Кома приводит к нарушению центрированности светового пучка. В

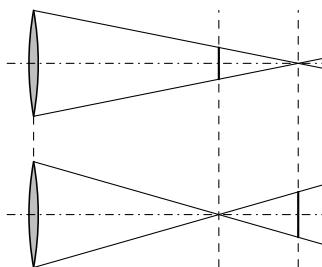


Рис. 88 – Схема формирования изображения при астигматизме, вид в двух перпендикулярных плоскостях. Пунктиром отмечено (слева направо): плоскость линзы, плоскости формирования изображения по двум разным осям

результате такой aberrации изображение точки имеет вид несимметричного пятна (см. Рис. 89), по форме напоминающего запятую (англ. *comma*).

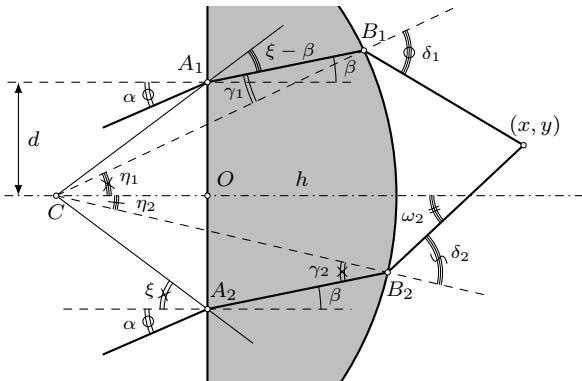


Рис. 90 – Схема хода лучей в толстой плосковыпуклой линзе



Рис. 89 – Изображение «хвоста»
Большой Медведицы, полученное
с помощью широкоугольного объектива,
страдающего ярко выраженной комой.

Найдем положение фокуса светового пучка, идущего под углом α к оптической оси. Для этого рассмотрим два луча из него, вместе с оптической осью лежащих в одной плоскости, таких, что точки преломления их передней (плоской) поверхностью линзы A_1 и A_2 лежат на расстоянии d от оптической оси линзы (см. Рис. 90).

Пусть толщина линзы — расстояние вдоль оптической оси от вершины выпуклой поверхности, до центра плоской поверхности O , равна h . А радиус кривизны выпуклой поверхности равен R . Тогда расстояние l от центра кривизны задней (выпуклой) поверхности линзы до точек A_1 и A_2 можно найти из теоремы Пифагора для треугольника $\triangle COA_{1,2}$:

$$l = \sqrt{(R - h)^2 + d^2}.$$

Равные углы $\angle A_{1,2}CO$ обозначим за ξ , где

$$\xi = \arcsin \frac{d}{l}.$$

Угол падения рассматриваемых лучей на плоскую поверхность линзы равен α , следовательно, по закону Снеллиуса угол преломления β определяется выражением

$$\beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{n},$$

где n — показатель преломления линзы. Обозначим углы падения верхнего и нижнего луча на заднюю поверхность линзы $\gamma_{1,2}$ соответственно. А точки преломления лучей задней поверхностью соответственно $B_{1,2}$. Запишем теорему синусов для треугольников $\Delta CA_{1,2}B_{1,2}$, чтобы найти углы $\gamma_{1,2}$ соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{R}{\sin(180^\circ - (\xi \mp \beta))} &= \frac{l}{\sin \gamma_{1,2}}, \\ \therefore \gamma_1 &= \arcsin \frac{l \sin(\xi \mp \beta)}{R}. \end{aligned}$$

Чтобы найти координаты точек $B_{1,2}$, определим сначала углы $\eta_{1,2} \equiv \angle B_{1,2}CO$:

$$\eta_{1,2} = \xi - [180^\circ - \gamma_{1,2} - (180^\circ - (\xi \mp \beta))] = \gamma_{1,2} \pm \beta.$$

Введем теперь декартову систему координат, за начало отсчета примем центр кривизны выпуклой поверхности линзы, ось x направим вдоль оптической оси вправо, ось y перпендикулярно вверх. В такой системе координаты точки $B_{1,2}$ задаются векторами

$$\begin{pmatrix} x_{1,2} \\ y_{1,2} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos \eta_{1,2} \\ \pm \sin \eta_{1,2} \end{pmatrix}.$$

Остается воспользоваться законом Снеллиуса для определения углов $\delta_{1,2}$:

$$\delta_{1,2} = \arcsin(n \sin \gamma_{1,2}).$$

Поиск координат (x, y) точки пересечения лучей, вышедших из линзы начнем с поиска абсциссы. Можно заметить, что она должно удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} (x - x_1) \operatorname{tg} \omega_1 + (x - x_2) \operatorname{tg} \omega_2 &= y_1 - y_2, \\ \therefore x &= \frac{y_1 - y_2 + x_1 \operatorname{tg} \omega_1 + x_2 \operatorname{tg} \omega_2}{\operatorname{tg} \omega_1 + \operatorname{tg} \omega_2}; \end{aligned}$$

где $\omega_1 = \delta_1 - \eta_1$, а $\omega_2 = \delta_2 - \eta_2$. Теперь не сложно найти координату y «фокуса»:

$$y = y_1 - (x - x_1) \operatorname{tg} \omega_1 = y_2 + (x - x_2) \operatorname{tg} \omega_2.$$

Продемонстрируем полученные зависимости (см. Рис. 91), при следующих параметрах: $R = 1$, $h = 0.3$, $\alpha = 50^\circ$, $n = 1.5$.

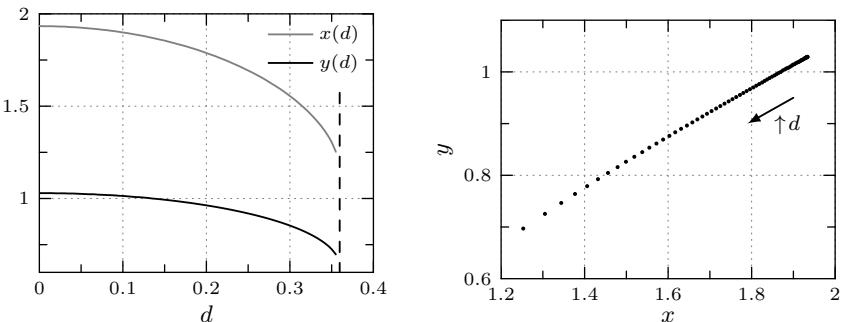
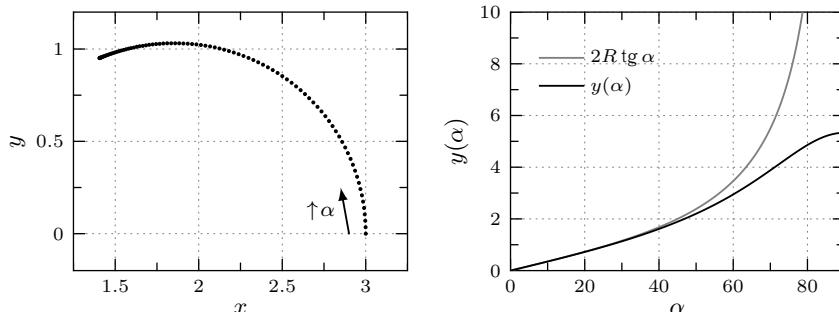


Рис. 91 – Графики положения фокуса в зависимости от расстояния до оптической оси от точки падения луча на плоскую поверхность линзы

Понятно, что смещение положение фокуса вдоль оси x обусловлено *сферической aberrацией*, однако смещение вдоль ось y есть проявление *абберрации кома*.

Дисторсия и кривизна фокальной поверхности Для тонкой линзы выполняется правило, что лучи, проходящие через оптический центр не преломляются. А световые пучки, идущие под различными углами фокусируются на фокальной плоскости, перпендикулярной оптической оси. Отсюда следует, что параллельные пучки, идущие под углом α к оптической оси и проходящие через оптический центр тонкой линзы, фокусируются на расстоянии $F \operatorname{tg} \alpha$ от оптической оси.

Легко догадаться, что для толстой линзы это не выполняется. На рисунке Рис. 92а показаны координаты точек фокусировки бесконечно узких пучков, падающих под углом $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$ к оптической оси на центр передней поверхности рассмотренной выше плосковыпуклой линзы: ($R = 1$, $h = 0.3$, $n = 1.5$, шаг составляет 1°). Отсюда ясно, что фокальная «плоскость» является таковой только в очень узком диапазоне направлений вокруг оптической оси. В остальной области фокальная поверхность является выпуклой в сторону от линзы.

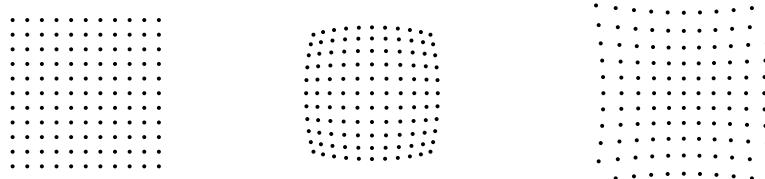


(а) – График зависимости положения фокуса от угла α между оптической осью и лучом

(б) – График зависимости удаления фокуса от оптической оси в зависимости от угла α между оптической осью и лучом для тонкой и толстой линз

Рис. 92

А на рисунке Рис. 92б показана зависимость y -координаты точки фокуса от угла падения на линзу в сравнение с функцией $F \operatorname{tg} \alpha = 2R \operatorname{tg} \alpha$. Нелинейность данной зависимости от $R \operatorname{tg} \alpha$ проявляется в неравномерности увеличения изображения по полю зрения: чем дальше от центра, тем меньше увеличение. Такой эффект называется **дисторсией**, в данном случае — **бочкообразной**, от схожести с видом деревянных бочек. Также возможна ситуация, когда $y(\alpha)$ растет быстрее $F \operatorname{tg} \alpha$, тогда дисторсия имеет противоположный знак и называется **подушкообразной** (достаточно вспомнить, как выглядит плотно набитая подушка).



(а) – Без дисторсии

(б) – Дисторсия «бочка»

(в) – Дисторсия «подушка»

Рис. 93 – Виды дисторсии

7.8 Дифракция

Электромагнитное излучение берет свое название из принципа переноса энергии, который происходит в следствие колебаний электрического

и магнитного полей. В случае одномерных гармонических колебаний уравнения Максвелла имеют такое решение:

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_0),$$

$$\mathbf{H}(x, t) = \mathbf{H}_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_0).$$

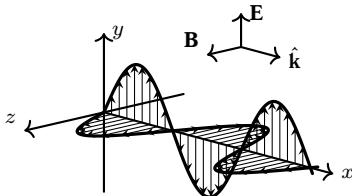


Рис. 94

Здесь $\mathbf{E}(x, t)$ и $\mathbf{H}(x, t)$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей соответственно с точкой пространства с координатой x в момент времени t . E_0 и H_0 — амплитуды волн, которые связывает соотношение $\sqrt{\epsilon}E_0 = \sqrt{\mu}H_0$. Остановимся на рассмотрении случая распространения излучения только в вакууме,

тогда в СГС $E_0 = H_0$, так как в отсутствие среды $\epsilon = \mu = 1$. Круговая частота колебаний ω связана с обычной частотой колебаний ν соотношением $2\pi\nu = \omega$. А коэффициент k — *волновое число*, определяемое, как $k = 2\pi/\lambda$.

Такие волны, когда фаза волны в фиксированный момент времени зависит лишь от одной координаты, называют *плоскими*. Остановимся на рассмотрении только таких волн.

Плотность потока энергии в электромагнитной волне определяется *вектором Пойнтинга*:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (7.20)$$

Среднее значение вектора Пойнтинга называется *интенсивностью излучения*:

$$\mathbf{I} = \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \rangle. \quad (7.21)$$

Для плоской волны в вакууме интенсивность равна

$$I = \frac{c}{8\pi} E_0^2. \quad (7.22)$$

Принцип Гюйгенса-Френеля Каждый элемент волнового фронта является центром возмущения, порождающего вторичные сферические волны, результат интерференции которых есть итоговое поле в каждой точке пространства.

Воспользуемся данным принципом, чтобы найти поле от плоской волны после прохождения тонкой щели, то есть такой, что её ширина

много меньше её длины. Пусть ширина щели равна b . Согласно принципу Гюйгенса-Френеля поле зависит только от угла между рассматриваемым направлением распространения излучения и осью щели. Пусть амплитуда падающей волны равна A_0 . Тогда амплитуда от элемента ширины dx в направлении θ определяется, как

$$dA = A_0 \cos(kx \sin \theta) \frac{dx}{b}.$$

Пусть $u \equiv k \sin \theta$, тогда суммарная амплитуда в направлении θ равна

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \int dA = \frac{A_0}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \cos ux dx = \\ &= \frac{A_0}{b} \left. \frac{\sin ux}{u} \right|_{-b/2}^{b/2} = \frac{A_0}{bu} \cdot 2 \sin \frac{bu}{2} = A_0 \left[\sin \left(\frac{bu}{2} \right) \middle/ \frac{bu}{2} \right], \end{aligned}$$

следовательно, интенсивность определяется выражением

$$I(\theta) = A^2(\theta) = A_0^2 \left[\sin \left(\frac{bu}{2} \right) \middle/ \frac{bu}{2} \right]^2. \quad (7.23)$$

Минимум данной функции достигается в точках, где обнуляется синус, то есть

$$\begin{aligned} \frac{bu}{2} &= \pi m, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ k \sin \theta &= u = \frac{2\pi m}{b}, \\ \sin \theta &= \frac{2\pi m}{bk} = \frac{2\pi m \lambda}{2\pi b}, \\ \theta &\simeq \sin \theta = \frac{m\lambda}{b}. \end{aligned}$$

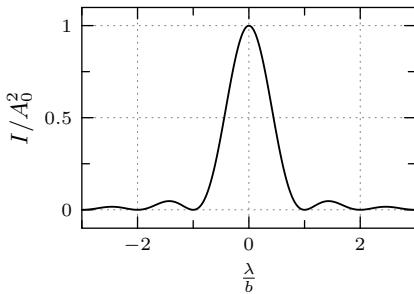


Рис. 95 – Профиль дифракционной картины от узкой щели

Значит первый минимум находится на $\theta = \lambda/b$.

Аналогичные рассуждения можно провести для дифракции на круглом отверстии диаметра D . В силу их сложности приведём лишь результат: интенсивность дифракционной картины описывается выражением

$$I(\theta) = 4A_0^2 \left(\frac{\lambda J_1(\theta)}{\pi D \theta} \right)^2,$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода²⁰, и не зависит от направления в силу симметричности круглого отверстия. Первый минимум данной функции достигается при $\theta = 1.22\lambda/D$. Дифракционная картина от одного источника и её профиль приведены на Рис. 98а. Данная картина получила название **диска Эйри** в честь Джорджа Бидделя Эйри, который первым провёл полных теоретический анализ дифракции на круглой апертуре [15].

Отсюда следует, что у любого оптического прибора существует некий предел, и невозможно разрешить (увидеть раздельно) два точечных источника света, находящихся на угловом удалении меньше этого предела.

Британский физик и механик Рэлей показал, что если центральное световое пятно дифракционной картины одного источника света удалено от центрального светового пятна другого источника света на расстояние не менее радиуса первой темной дифракционной полосы, то мы начинаем воспринимать два источника света раздельно.

Этот **критерий** получил имя **Релея** и в используемых терминах формулируется так: два точечных источника разрешимы, если находятся друг от друга на угловом расстоянии более

$$\theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{D}. \quad (7.24)$$

Причем в случае удаления ровно на θ_{\min} интенсивность изображения посередине между центрами дифракционных пятен составляет $I' = 2I(\theta_{\min}/2) \simeq 0.73A_0^2$.

На Рис. 96 и Рис. 97 приведены дифракционные картины от двух точечных источников на угловом расстоянии θ_{\min} в разных шкалах отображения интенсивности и их профили. А на Рис. 98 изображены дифракционные картины от двух точечных источников на различных угловых расстояниях.

Согласно критерию Релея разрешающая способность невооруженного человеческого глаза составляет около $30''$. Однако на практике даже очень зоркие люди не обладают разрешающей способностью меньше $1' - 2'$. Это объясняется строением сетчатки,

²⁰ $J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$

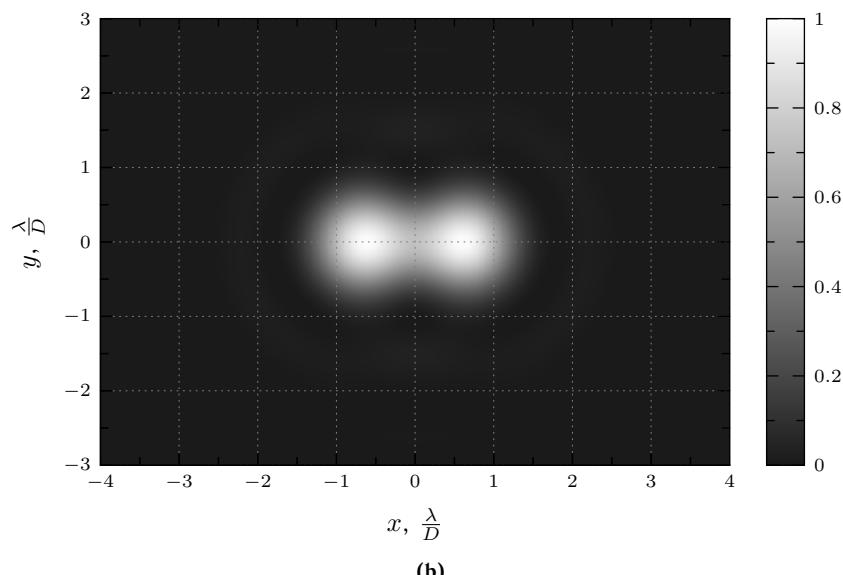
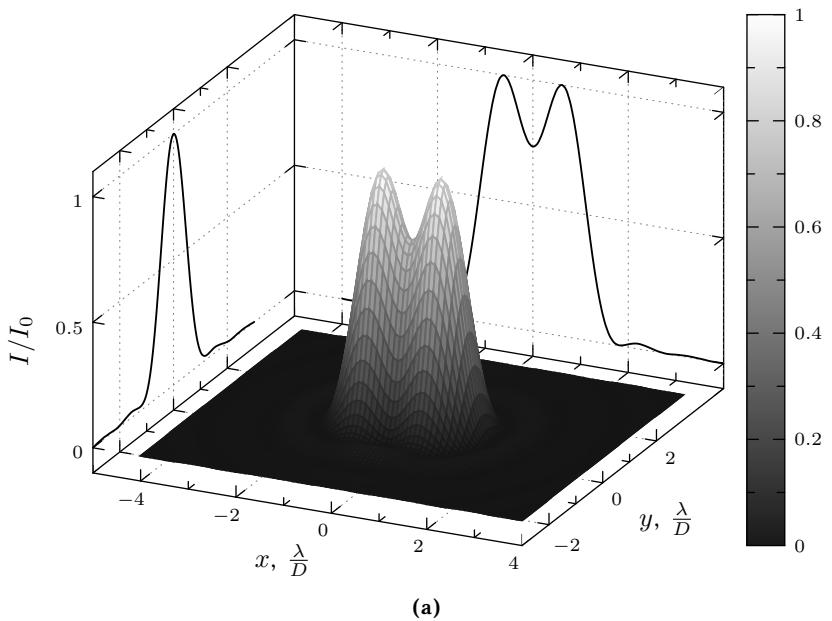


Рис. 96

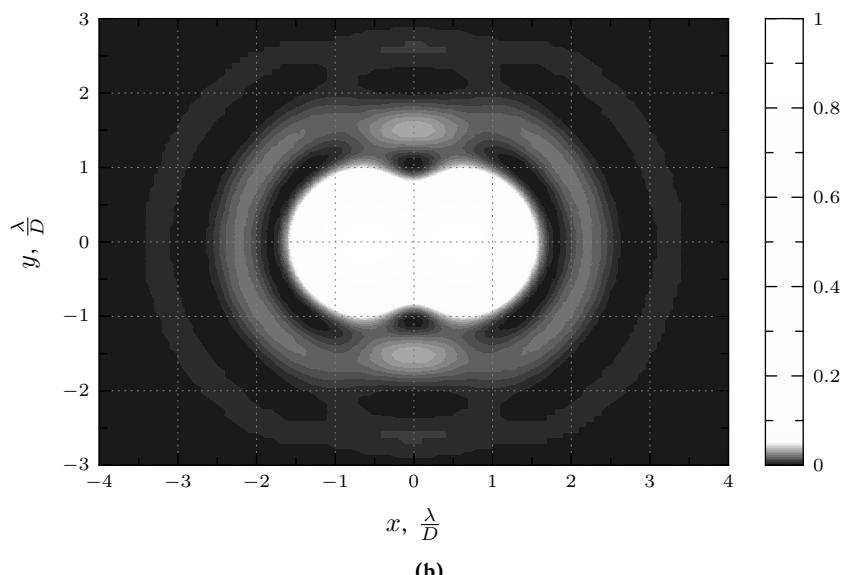
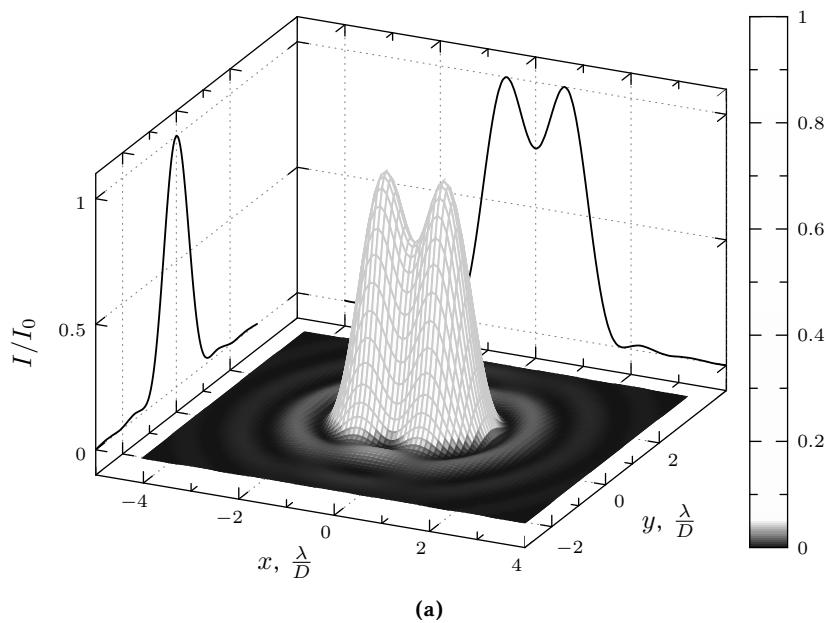
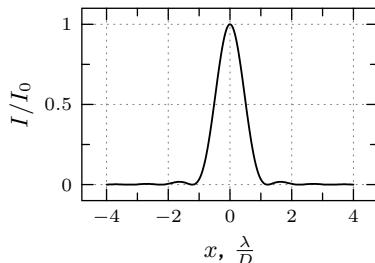
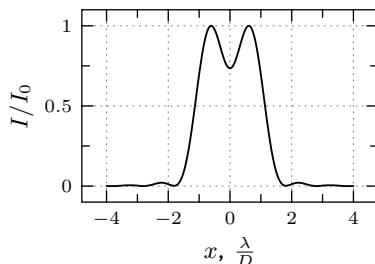
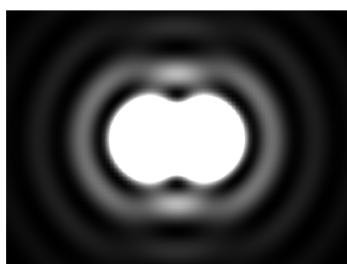


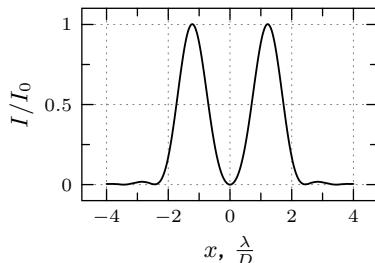
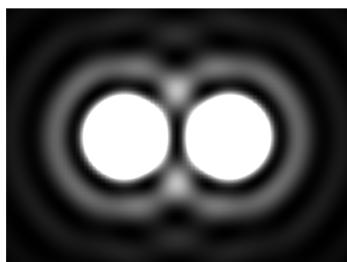
Рис. 97



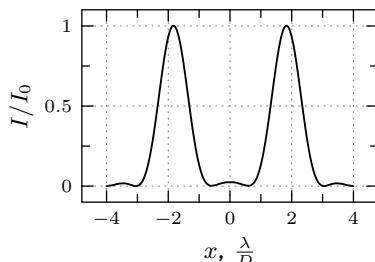
(а) – Дифракционное изображение от одного источника



(б) – Дифракционное изображение от двух источников с разделением $1.22\lambda/D$



(с) – Дифракционное изображение от двух источников с разделением $2 \cdot 1.22\lambda/D$



(д) – Дифракционное изображение от двух источников с разделением $3 \cdot 1.22\lambda/D$

Рис. 98

8 Сферическая астрономия

Раздел сферической астрономии или небесной сферы собирает в себе темы, связанные с положением и движением небесных тел по небесной сфере в результате суточного и годичного движения Земли. Для дальнейшего повествования определим некоторые термины, на которых оно будет построено.

Большой круг сферы — окружность на поверхности сферы, центр которого совпадает с центром сферы.

Здесь и далее *осью вращения* будем называть неподвижную ось вращения сферы, проходящую через ее центр.

Экватор — большой круг, перпендикулярный оси вращения. Точки пересечения оси вращения со сферой называются **полюсами**.

Малый круг сферы — произвольная окружность на поверхности сферы. **Параллель** — малый круг, параллельный экватору.

Большой круг, перпендикулярный экватору, называется **меридианом**. Угловое расстояние между заданной точкой A и точкой пересечения меридиана, проходящего через точку A , с экватором называется **широтой** точки A . Широта обозначается греческой буквой φ . В северном полушарии $\varphi > 0$, в южном — $\varphi < 0$. Очевидно, $\varphi \in [-90; 90]$. **Полярное расстояние** r — угловое расстояние между рассматриваемой точкой и точкой северного полюса. $r + \varphi = 90^\circ$.

Теперь можно перейти от геометрии к астрономии.

Наблюдатель — материальная точка на поверхности сферы (Земли). **Небесная сфера** — воображаемая сфера произвольного (бесконечного) радиуса с центром в наблюдателе. **Точка небесной сферы** — воображаемая точка на небесной сфере, на самом деле являющаяся некоторым лучом с заданным направлением.

Математический горизонт — касательная плоскость к поверхности сферы в наблюдателе. Чаще математическим горизонтом называют большой круг небесной сферы — пересечение вышеописанной плоскости с небесной сферой.

Зенит Z — (точка небесной сферы) луч, исходящий из наблюдателя от, перпендикулярный математическому горизонту, направлен от центра сферы. Эквивалентично определяется точка **надира** Z' , противоположная точке зенита.

Полярная ось — ось вращения небесной сферы, параллельная оси вращения Земли. **Полюс мира** (северный) P — точка пересечения полярной оси с небесной сферой со стороны северного полюса Земли. Южный полюс мира P' — точка, противоположная северному полюсу мира.

Здесь возникает проблема: Земля вращается, а значит наблюдатель движется, и небесная небесная сфера смещается. То есть положения на небесной сфере неподвижных в пространстве звезд меняются. Это называется параллаксом, а котором говорилось в Разделе ??.

В силу малости горизонтального параллакса можно сделать вывод, что для далеких небесных объектов можно им пренебречь и считать их неподвижными. Также в большинстве задач сферической астрономии пренебрегают и годичным параллаксом, хотя его величина уже не исчезающе мала.

Однако из этого всего не следует, что нужно совсем забывать про явления параллакса. Важно при решении каждой задачи на сферическую астрономию проверять необходимость учета этого явления.

Так или иначе, пренебрегая размером Земли, можно считать, что наблюдатель находится в центре Земли. А плоскостью математического горизонта, все также проходит через наблюдателя и параллельна изначальной.

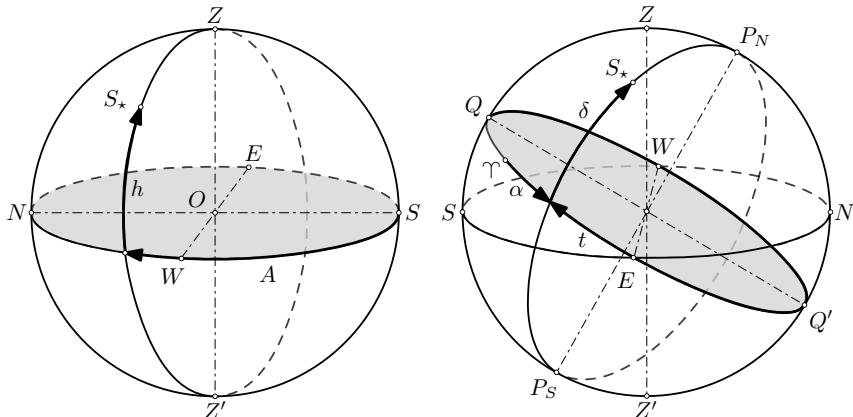
Небесный экватор — большой круг небесной сферы, перпендикулярный полярной оси. **Суточная параллель** — путь неподвижного небесного объекта в течение суток по небесной сфере, является малым кругом, эквивалент — параллель.

Север N и **юг** S — точки небесной сферы на математическом горизонте, лежащие на одном луче с проекциями соответствующих полюсов мира на математический горизонт.

Нетрудно показать, что точки P — северный полюс мира, P' — южный полюс мира, Z — зенит, Z' — надир, N — север и S — юг лежат на одном большом круге. Этот круг называется **небесным меридианом**.

8.1 Системы небесных координат

Каждая из систем небесных координат является сферической системой координат, в которой радиус не имеет значения, так как параллакс не учитывается, а объекты считаются бесконечно удалёнными от наблюдателя.



(а) – Горизонтальная система координат (б) – Экваториальная система координат

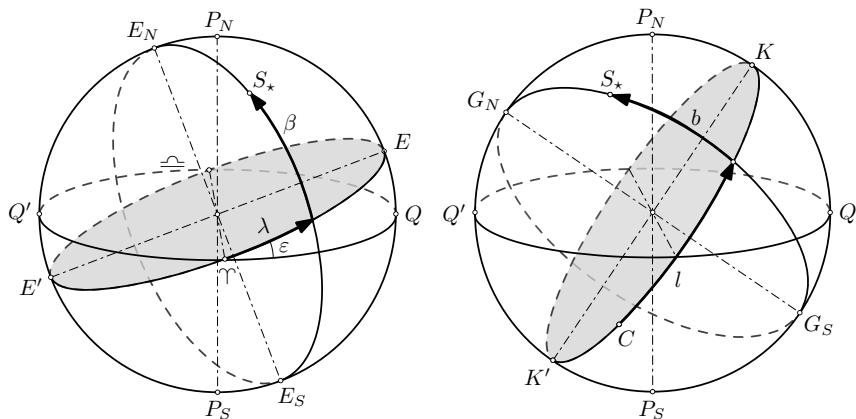
Рис. 99 – Системы координат I

Горизонтальная система координат — система координат, в которой основной плоскостью является плоскость математического горизонта, а полюсами — **зенит** и **надир** — точки небесной сферы, расположенные ровно над наблюдателем и под ним соответственно. Одной координатой является либо **высота** светила h — угловое расстояние между светилом и математическим горизонтом, отсчитываемое в сторону зенита, либо его **зенитное расстояние** z — угловое расстояние между зенитом и светилом. Другой координатой является **астрономический азимут** A — угол SZS_* , отсчитываемый в сторону запада. Половина большого круга, перпендикулярного горизонту, — ZS_*Z' называется **вертикалом** объекта.

Первая экваториальная система координат — система координат, основной плоскостью которой является плоскость небесного экватора $QEQ'W'$. Одной координатой при этом является **склонение** δ — угловое расстояние между светилом и плоскостью небесного экватора, отсчитываемое в сторону севера. Половина большого круга, вдоль которой отсчитывается склонение, перпендикулярна небесному экватору и называется **кругом склонений** или **кругом равных часовых углов (прямых восхождений)**. Наряду со склонением используется **полярное расстояние** r — угловое расстояние между светилом и полюсом мира. Другой координатой является **часовой угол** t — дуга небесного экватора от верхней точки небесного экватора до круга склонения светила в сторону запада, или угол между небесным меридианом и кругом скло-

нения светила. Υ и \ominus — точки весеннего и осеннего равноденствия соответственно.

Вторая экваториальная система координат — система, аналогичная предыдущей. Одной координатой по прежнему является **склонение** δ . А другой координатой является **прямое восхождение** α — угловое расстояние между точкой весеннего равноденствия и кругом склонений светила в сторону годичного движения Солнца.



(а) – Эклиптическая система координат (б) – Галактическая система координат

Рис. 100 – Системы координат II

Эклиптическая система координат — система координат, основной плоскостью которой является плоскость эклиптики $E\ominus E'\Upsilon$. Одной координатой при этом является **эклиптическая широта** β — угловое расстояние между светилом и плоскостью эклиптики, отсчитываемое в сторону северного полюса мира, а другой — **эклиптическая долгота** λ — угловое расстояние между точкой весеннего равноденствия и кругом эклиптической широты светила. Полюса эклиптики E_N и E_S имеют координаты $(18^h, 90^\circ - \varepsilon)$ и $(6^h, -90^\circ + \varepsilon)$.

Галактическая система координат — система координат, основной плоскостью которой является плоскость нашей галактики, которая наклонена к плоскости небесного экватора под углом 62.6° . Одной координатой при этом является **галактическая широта** b — угол между плоскостью галактического экватора и направлением на светило, а другой — **галактическая долгота** l — угол между направлением на точку начала отсчёта C и плоскостью круга галактической широты светила. Точка C является направлением на центр галактики и имеет координа-

ты: $\alpha = 17^h 45.6^m$, $\delta = -28^\circ 56.2'$. CKK' — плоскость галактического экватора; G_N , G_S — северный и южный полюса галактики соответственно.

8.2 Суточное вращение небесной сферы

Вследствие вращения Земли вокруг своей оси для наблюдателя на поверхности небесные объекты совершают суточное движение параллельно небесному экватору, плоскость которого совпадает с плоскостью экватора Земли. Очевидно, в ходе такого движения высота светил постоянно меняется и в некоторые моменты времени достигает своего максимального и минимального значения.

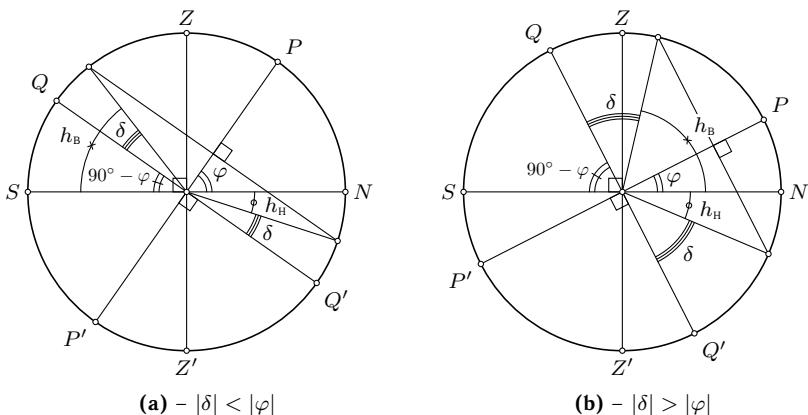


Рис. 101 – Схемы кульминаций в проекции на плоскость небесного меридиана

Верхняя и нижняя кульминация — моменты пересечения светилом небесного меридиана, причём при верхней кульминации светило имеет наибольшую высоту, а при нижней — наименьшую.

Высота светила в верхней и нижней кульминации со склонением $|\delta| < |\varphi|$ (Рис. 101a), соответственно:

$$h_B = 90^\circ - \varphi + \delta, \quad h_H = -90^\circ + \varphi + \delta. \quad (8.1)$$

Если же светило имеет склонение $|\delta| > |\varphi|$ (Рис. 101b), то высота в верхней и нижней кульминации вычисляется так:

$$h_B = 90^\circ + \varphi - \delta, \quad h_H = -90^\circ - \varphi - \delta. \quad (8.2)$$

Из формул для высоты в нижней кульминации вытекает условие, определяющее, пересекает ли звезда горизонт:

$$\begin{cases} h_{\text{в}} = +90^\circ - |\varphi - \delta| > 0^\circ, \\ h_{\text{н}} = -90^\circ + |\varphi + \delta| < 0^\circ; \end{cases} \iff |\delta| < 90^\circ - |\varphi|. \quad (8.3)$$

Используя формулы сферической тригонометрии (см. 8.3), можно выразить зависимость часового угла светила от его зенитного расстояния:

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}. \quad (8.4)$$

Отсюда следует, что для часового угла захода и восхода светила справедливо равенство:

$$\cos t_{\uparrow\downarrow} = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta. \quad (8.5)$$

Аналогично, для вычисления азимута светила верна формула

$$\cos A = \frac{\cos \delta \cos t - \cos \varphi \cos z}{\sin \varphi \sin z}. \quad (8.6)$$

Следовательно, азимуты точек восхода и захода

$$A_{\uparrow} = \arccos \left(-\frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \right) \quad \text{и} \quad A_{\downarrow} = -A_{\uparrow}. \quad (8.7)$$

Звёздное время z — часовой угол точки весеннего равноденствия. Из определений прямого восхождения и часового угла следует справедливость равенства

$$z = \alpha + t. \quad (8.8)$$

8.3 Сферическая тригонометрия

Для решения некоторых задач астрономии, связанных с видимыми положениями небесных тел, требуются знания о сферической тригонометрии. *Сферический треугольник* — фигура на поверхности сферы, состоящая из трёх точек и трёх дуг больших кругов, соединяющих эти точки. Пусть A, B и C — углы сферического треугольника, а a, b и c — его стороны.

Сферические треугольники обладают следующими свойствами:

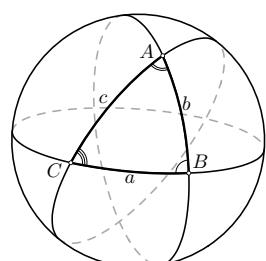


Рис. 102 — Сферический треугольник

1. Два сферических треугольника равны, если они подобны.
2. Каждая сторона меньше суммы двух других сторон и больше их разности.
3. Сумма всех сторон $a + b + c$ всегда меньше 2π .
4. Сумма углов сферического треугольника $\pi < A + B + C < 3\pi$.
5. Разность суммы двух углов и третьего угла меньше π

Площадь сферического треугольника определяется по формуле:

$$S = R^2(A + B + C - \pi), \quad (8.9)$$

где $A + B + C - \pi$ — *сферический избыток*.

Рассмотрим сферический треугольник ABC , радиус векторы вершин соответственно \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} . Причем из определения сферы $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = r$. Пусть против вершин A , B и C лежат стороны с угловой мерой a , b и c соответственно. Повернем сферические координаты и нормируем так, чтобы $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (\sin c, 0, \cos c)$, тогда $\mathbf{c} = (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$.

Теперь запишем выражение для $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$:

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \cos a = \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b. \quad (8.10)$$

Аналогично,

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = \cos b = \sin a \sin c \cos B + \cos a \cos c, \quad (8.11)$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \cos c = \sin a \sin b \cos C + \cos a \cos b. \quad (8.12)$$

Выразим отсюда $\cos A$:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin c \sin b}. \quad (8.13)$$

Формулы (8.10) – (8.13) называются **сферической теоремой косинусов** для стороны (8.10) – (8.12) и, соответственно для угла (8.13).

Из основного тригонометрического тождества имеем:

$$\begin{aligned} \sin^2 A &= 1 - \cos^2 A = 1 - \left[\frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin c \sin b} \right]^2 = \\ &= \frac{\sin^2 c \sin^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cos c \cos b - \cos^2 c \cos^2 b}{\sin^2 c \sin^2 b} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(1 - \cos^2 c)(1 - \cos^2 b) - \cos^2 a + 2 \cos a \cos c \cos b - \cos^2 c \cos^2 b}{\sin^2 c \sin^2 b} = \\
 &= \frac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b + \cos^2 c \cos^2 b - \cos^2 a}{\sin^2 c \sin^2 b} + \\
 &\quad + \frac{2 \cos a \cos c \cos b - \cos^2 c \cos^2 b}{\sin^2 c \sin^2 b} = \\
 &= \frac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cos c \cos b}{\sin^2 c \sin^2 b}.
 \end{aligned}$$

Извлекая квадратный корень из левой и правой части и деля их на $\sin a$ имеем

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cos c \cos b}}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Заметим, что правая часть равенства циклична по переменным a , b и c , следовательно, **сферическая теорема синусов** имеет вид

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}. \quad (8.14)$$

Далее получим **формулу пяти элементов**. Для этого запишем теорему косинусов в выражении в ней один из косинусов, применяя ее же:

$$\begin{aligned}
 \cos a &= \sin c \sin b \cos A + \cos c \cos b, \\
 \cos a &= \sin c \sin b \cos A + (\sin a \sin b \cos C + \cos a \cos b) \cos b, \\
 \cos a - \cos a \cos^2 b &= \sin c \sin b \cos A + \sin a \sin b \cos b \cos C, \\
 \cos a \sin^2 b &= \sin c \sin b \cos A + \sin a \sin b \cos b \cos C, \\
 \cos a \sin b &= \sin a \cos b \cos C + \sin c \cos A. \quad (8.15)
 \end{aligned}$$

Параллактический треугольник — треугольник на небесной сфере, образованный пересечением небесного меридиана, вертикального круга и часового круга светила. **Вертикальный круг** — большой круг небесной сферы, проходящий через надир, зенит и светило. **Часовой круг** — большой круг небесной сферы, проходящий через полюса мира и наблюдаемое светило.

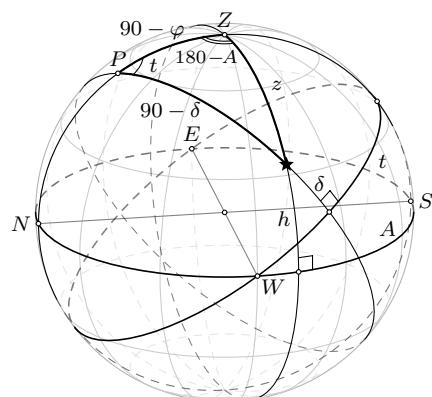


Рис. 103 – Параллактический треугольник

Применяя теоремы синусов и косинусов к параллактическому треугольнику, нетрудно получить следующие соотношения:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \quad (8.16)$$

$$\sin z \sin A = \cos \delta \sin t \quad (8.17)$$

$$\sin z \cos A = -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t \quad (8.18)$$

Напоследок, используя сферическую теорему косинусов, получим **уравнение большого круга**. Пусть на сфере заданы сферические координаты (λ, φ) , где λ — угол проекции вектора на плоскость Oxy с осью Ox , см. Раздел 11.2, а φ — угол между вектором в плоскостью Oxy . Найдем уравнение большого круга с наклонением i , восходящий узел которого находится в точке $(\lambda_0, 0)$.

Для этого рассмотрим произвольную точку $G(\lambda, \varphi)$ на большом круге с полюсом $P'(\lambda_0 - 90^\circ, 90^\circ - i)$. По определению большого круга каждая его точка отстоит от полюса на 90° . Обозначим разность первых координат P' и G — $\lambda - (\lambda_0 - 90^\circ)$, за $\Delta\lambda$ и запишем сферическую теорему косинусов для $\triangle PP'G$, где P — полюс заданной системы координат:

$$\begin{aligned} \cos 90^\circ &= \cos i \cos(90^\circ - \varphi) + \sin i \sin(90^\circ - \varphi) \cos \Delta\lambda, \\ 0 &= \cos i \sin \varphi - \sin i \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0), \\ \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} i} &= \sin(\lambda - \lambda_0), \end{aligned} \quad (8.19)$$

полученное уравнение является *уравнением большого круга*.

8.4 Годичное движение Солнца

В течение сидерического года Земля совершает полный оборот вокруг Солнца. Вследствие



Рис. 104 — Произвольная точка

(λ, φ) на большом круге с полюсом

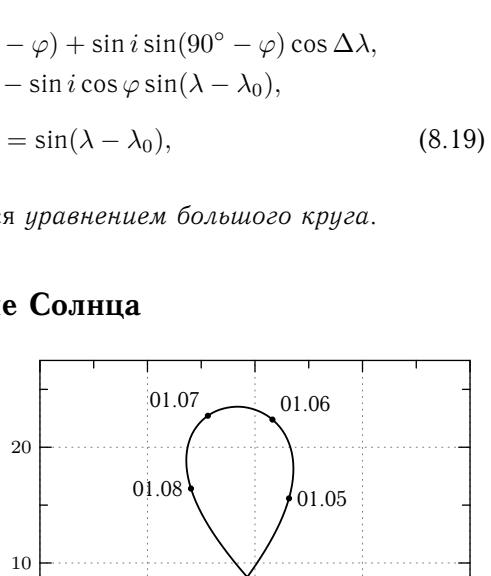
$P'(\lambda_0 - 90^\circ, 90^\circ - i)$. По определению

большого круга каждая его точка отстоит от полюса на 90° .

Обозначим разность первых координат P' и G — $\lambda - (\lambda_0 - 90^\circ)$, за

$\Delta\lambda$ и запишем сферическую теорему косинусов для $\triangle PP'G$, где P —

полюс заданной системы координат:



этого Солнце движется относительно далёких звёзд для наблюдателя на Земле. Это движение совершается по большому кругу небесной сферы — **эклиптике** — проекции орбиты Земли на небесную сферу.

Однако, в силу прецессии земной оси, период такого движения равен **тропическому году**, который короче сидерического года примерно на 20 мин 25 сек.

В моменты, когда Солнце находится в *точке весеннего равноденствия* Υ (20 марта, реже 21) его координаты: $\alpha = 0^h$, $\delta = 0^\circ$. Во время прохождения этой точки обе координаты Солнца растут. Так происходит до момента, пока Солнце не пройдет *точку летнего солнцестояния* (21 июня, реже 20), координаты которой — $\alpha = 6^h$ и $\delta = \varepsilon$. После этого склонение Солнца начинает убывать. В момент прохождения *точки осеннего равноденствия* Σ (22 или 23 сентября), координаты Солнца составляют $\alpha = 12^h$, $\delta = 0^\circ$. После прохождения *точки зимнего солнцестояния* с координатами $\alpha = 18^h$, $\delta = -\varepsilon$ (22 или 21 декабря) склонение Солнца начинает увеличиваться.

Найдём выражение для прямого восходления Солнца α через переменные λ и ε , где $\varepsilon = 23.44^\circ$ — угол наклона экватора Земли к эклиптике. Для этого рассмотрим формулу пяти элементов (8.15) для прямоугольного сферического треугольника, представленного на рисунке Рис. 106:

$$\sin \delta \cos 90^\circ = \cos \lambda \sin \alpha - \sin \lambda \cos \alpha \cos \varepsilon,$$

$$\cos \lambda \sin \alpha = \sin \lambda \cos \alpha \cos \varepsilon,$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \lambda} = \cos \varepsilon. \quad (8.20)$$

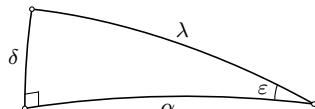


Рис. 106

Из аналогичных рассуждений несложно получить, что прямое восхождение Солнца связано со склонением формулой. Рассмотрим формулу пяти элементов (8.15),

$$\begin{aligned}\cos \delta \sin \alpha &= \sin \delta \cos \alpha \cos 90^\circ + \sin \lambda \cos \varepsilon, \\ \cos \delta \sin \alpha &= \sin \lambda \cos \varepsilon.\end{aligned}$$

Выразим $\sin \lambda$ из теоремы синусов (8.14):

$$\sin \lambda = \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon}.$$

и подставим в полученное выше равенство:

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varepsilon}. \quad (8.21)$$

8.5 Солнечное время. Уравнение времени

Истинные солнечные сутки — промежуток времени между двумя последовательными одноимёнными кульминациями Солнца.

Истинное солнечное время — промежуток времени между нижней кульминацией Солнца и его текущим положением. Рассчитывается по формуле

$$T_{\text{ист}} = t_{\text{сол}} + 12^h, \quad (8.22)$$

где $t_{\text{сол}}$ — часовой угол Солнца.

Среднее Солнце — точка небесной сферы, которая равномерно движется по небесному экватору с угловой скоростью, равной средней скорости изменения прямого восхождения Солнца.

Среднее солнечное время ($T_{\text{ср}}$) — время, прошедшее с последней нижней кульминацией *среднего Солнца*. Зная долготу наблюдателя, нетрудно вычислить среднее солнечное время:

$$T_{\text{ср}} = \text{UTC} + \frac{\lambda}{15^\circ/\text{час}},$$

где UTC — *всемирное время* — среднее солнечное время на нулевом меридиане (меридиан с долготой $\lambda = 0^\circ$).

Поясное или гражданское время — среднее солнечное время на срединном меридиане географического часового пояса. В России также установлено декретное время, которое на 1 час больше поясного.

Уравнение времени — разница между истинным солнечным временем и средним солнечным временем, возникающая по причине неравномерности движения Земли по орбите и наклона земного экватора к плоскости эклиптики (см. Рис. 107).

Получим приближенное выражение для величины уравнения времени. Для этого вспомним величину эксцентриситета орбиты Земли $e_{\oplus} = 0.017 \ll 1$, и рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}\sin E &= \sin(E - M + M) = \\ &= \underbrace{\sin(E - M)}_{\approx E - M} \cos M + \underbrace{\cos(E - M)}_{\approx 1} \sin M \simeq \\ &\simeq (E - M) \cos M + \sin M, \quad (8.23)\end{aligned}$$

так как $E - M \sim e$. Применим метод последовательных приближений, чтобы получить зависимость $E(M)$. Используем уравнение Кеплера (2.52) и полученное выражение для $\sin E$ (8.23) для первого приближения:

$$E_1 = M + e \sin E = M + e((E - M) \cos M + \sin M) \simeq M + e \sin M.$$

Воспользуемся полученным приближением, чтобы точнее оценить E ,

$$E = M + e((E_1 - M) \cos M + \sin M) = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M. \quad (8.24)$$

Теперь запишем первые три члена многочлена Тейлора формулы перехода от истинной аномалии к эксцентрической (2.56):

$$\nu = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \right) \simeq E + e \sin E + \frac{e^2}{4} \sin 2E.$$

Подставим сюда выражение (8.24) для $E(M)$ и воспользуемся формулой для разложения синуса суммы:

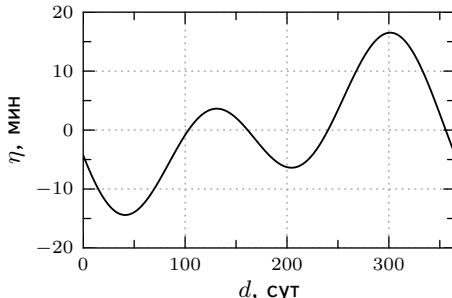


Рис. 107 – График уравнения времени

$$\begin{aligned}
 \nu &\simeq M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \\
 &+ e \left(\underbrace{\sin M \cdot \cos(e \sin M + \dots)}_{\simeq 1} + \cos M \cdot \underbrace{\sin(e \sin M + \dots)}_{\simeq e \sin M} \right) + \\
 &+ \frac{e^2}{4} \left(\underbrace{\sin 2M \cdot \cos(2e \sin M + \dots)}_{\simeq 1} + \cos 2M \cdot \underbrace{\sin(2e \sin M + \dots)}_{\ll 1, \text{ с уч-м коэф-та}} \right) \simeq \\
 &\simeq M + 2e \sin M + \frac{5e^2}{4} \sin 2M.
 \end{aligned}$$

Обозначим как $\omega = 103^\circ$ эклиптическую долготу перицентра, тогда эклиптическая долгота Солнца $\lambda = \nu + \omega$.

Теперь запишем формулу тангенса половинного угла для $\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}$ и воспользуемся выражением (8.20) для $\cos \varepsilon$:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}^2 \frac{\varepsilon}{2} &= \frac{1 - \cos \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon} \equiv y, \\
 1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \lambda} &= y \cdot \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \lambda} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin \lambda \cos \alpha - \cos \lambda \sin \alpha &= y \cdot (\sin \lambda \cos \alpha + \cos \lambda \sin \alpha), \\
 \sin(\lambda - \alpha) &= y \sin(\alpha + \lambda), \\
 \alpha &= \lambda - \arcsin(y \sin(\alpha + \lambda)).
 \end{aligned}$$

Отметим, при $\varepsilon = 0$ выполняется $\alpha = \lambda$. Следовательно, можно сделать нулевое приближение $\alpha_0 = \lambda$. Воспользуемся методом последовательных приближений для получения более точного выражения для $\alpha(\lambda, \varepsilon)$.

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \lambda - \arcsin(y \sin(\alpha_0 + \lambda)) \stackrel{\varepsilon \ll 1}{\simeq} \lambda - y \sin 2\lambda, \\
 \alpha_2 &= \lambda - \arcsin(y \sin(\alpha_1 + \lambda)) \stackrel{\varepsilon \ll 1}{\simeq} \lambda - y \sin 2\lambda + \frac{y^2}{2} \sin 4\lambda.. \quad (8.25)
 \end{aligned}$$

Используем (8.25) для записи уравнения времени:

$$\begin{aligned}
 \eta &= t_{\text{ист}} - t_{\text{ср}} = \alpha_2 - (M + \omega) = \\
 &= \lambda - y \sin 2\lambda + \frac{y^2}{2} \sin 4\lambda - M - \omega = \\
 &= \nu - y \sin(2\nu + 2\omega) + \frac{y^2}{2} \sin(4\nu + 4\omega) - M \simeq \\
 &\stackrel{\varepsilon \ll 1, e \ll 1}{\simeq} \underbrace{2e \sin M}_{\text{эксп-т орб.}} - \underbrace{\frac{5e^2}{4} \sin 2M}_{\text{наклон орбиты}} - \underbrace{\operatorname{tg}^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin(2M + 2\omega)}_{\text{ }}. \quad (8.26)
 \end{aligned}$$

Подставим в (8.26) параметры орбиты Земли:

$$e = 0.0167, \varepsilon = 23.44^\circ, \omega = 102.9^\circ,$$

чтобы получить уравнение времени в минутах, см. Рис. 107:

$$\eta = t_{\text{ист}} - t_{\text{ср}} = -7.65 \sin \frac{2\pi d}{P} + 9.86 \sin 2 \left(1.80 + \frac{2\pi d}{P} \right) \text{ мин}, \quad (8.27)$$

где $P = T_{\text{сид}}$ — сидерический год (здесь не учитываются поправки, связанные с прецессией Земной оси), а d — время от момента прохождения точкиperiцентра (в современную эпоху это происходит в период со 2 по 5 января).

8.6 Рефракция

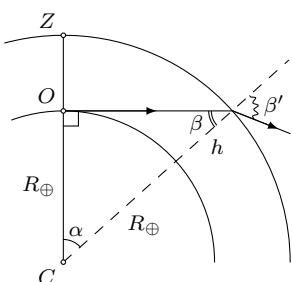
Рефракция — явление преломления световых лучей, приходящих от небесных светил, в атмосфере планеты. Вследствие рефракции для наблюдателя на поверхности планеты с атмосферой видимая высота светила отличается от истинной на некоторый угол — величину рефракции.

Для зенитного расстояния $z < 70^\circ$ величину рефракции можно определить по формуле

$$\rho = 60.25'' \cdot \operatorname{tg} z' \cdot \frac{p}{760} \frac{273^\circ}{273^\circ + t^\circ}, \quad (8.28)$$

где t° — температура воздуха в градусах Цельсия, p — атмосферное давление в мм рт. ст., z' — видимое зенитное расстояние. При н. у.: $p = 760$ мм рт. ст. и $t = 0^\circ\text{C}$, формула (8.28) принимает вид

$$\rho = 60.25'' \cdot \operatorname{tg} z'. \quad (8.29)$$



Однако для расчета рефракции у горизонта данная формула не подходит. Получим оценку на величину рефракции у горизонта, считая атмосферу Земли однородной, положив её высоту h равной 8 км.

Рассмотрим луч зрения, лежащий в плоскости математического горизонта наблюдателя. Найдём угол между лучом

Рис. 108

и нормалью к верхней границе атмосферы в точке выхода луча из атмосферы (см. Рис. 108):

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \arccos \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h} = 87.13^\circ.$$

Для любой другой высоты атмосферы и радиуса планеты расчёт производится ровно также с соответствующими параметрами.

Коэффициент преломления воздуха n_b при давлении $p = 1$ атм и температуре $t = 0^\circ\text{C}$ равен $1 + 2.9 \times 10^{-4}$. Следовательно угол преломления будет равен $\beta' = \arcsin n_b \sin \beta = 87.48^\circ$. Величина отклонения луча есть рефракция, то есть $\rho = \beta' - \beta = 0.35^\circ$.

Реальное же значение рефракции ρ_0 у горизонта составляет около 0.5° .

8.7 Сумерки

Сумерки — время суток, когда Солнце находится неглубоко под горизонтом. В зависимости от высоты Солнца под горизонтом различают *гражданские* (от 0° до -6°), *навигационные* (от -6° до -12°) и *астрономические* (от -12° до -18°) сумерки. Когда Солнце опускается ниже -18° , наступает ночь.

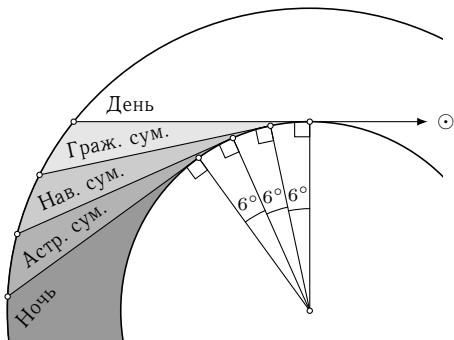


Рис. 109 – Сумерки

9 Объекты космоса

9.1 Солнце

Солнце — центральное тело Солнечной системы, в нём сосредоточено 99,866% всей массы. Водород составляет 73% общей массы Солнца, гелий — 25%. Остальные элементы: кислород, углерод, азот, магний, кремний, железо, сера, алюминий, натрий, кальций, никель и другие дают вклад всего 2%.

По спектральной классификации Солнце — звезда типа G2V (жёлтый карлик на главной последовательности). Температура поверхности Солнца составляет 5778 К, поэтому Солнце светит почти в белом свете, но прямой свет Солнца у поверхности Земли приобретает жёлтый оттенок из-за рассеяния и поглощения коротковолновой части спектра в атмосфере.

Солнце вырабатывает энергию путём термоядерного синтеза. Каждую секунду в ядре около 4 млн. тонн вещества превращается в лучистую энергию.

Строение Солнца. В центре Солнца находится ядро с радиусом 150 – 180 тыс. км, где идут термоядерные реакции. Плотность ядра около 1.5×10^5 кг/м³, а температура в его центре достигает 1.5×10^7 К.

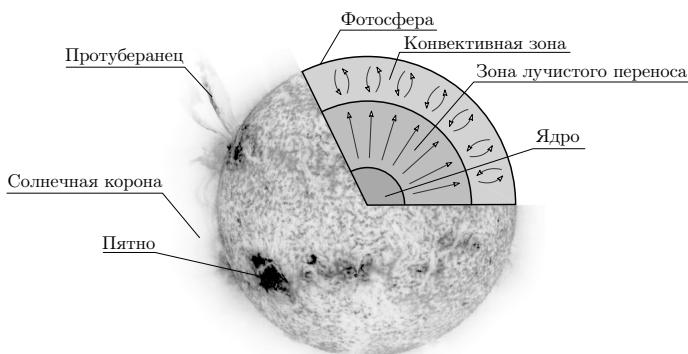


Рис. 110 – Строение Солнца. Фотография со спутника SOHO в фильтре H_{α} (негатив)

Над ядром, на расстояниях примерно от $0.25R_{\odot}$ до $0.7R_{\odot}$ от его центра, находится зона лучистого переноса. В этой зоне перенос энергии

происходит главным образом с помощью излучения и поглощения фотонов. Температура в этой зоне лежит в интервале от 2×10^6 К сверху до 7×10^6 К снизу.

Над зоной лучистого переноса (радиоактивная зона) находится *конвективная зона*. Это слой толщиной примерно 2×10^5 км, в котором перенос энергии к поверхности совершается движением самого вещества. При приближении к поверхности конвективной зоны температура падает до 5800 К.

Фотосфера — видимая поверхность Солнца, по которой определяется размер Солнца. Эффективная температура фотосферы $T_{\odot} = 5778$ К.

Хромосфера — внешняя оболочка Солнца толщиной около 2000 км, окружающая фотосферу. Из хромосферы происходят горячие выбросы вещества — *спикулы*. Температура хромосферы увеличивается с высотой до 2×10^4 К.

Солнечная корона — последний внешний слой Солнца, который состоит из протуберанцев и энергетических извержений, образующих солнечный ветер. Средняя температура короны 2×10^6 К, а в некоторых частях достигает и 20×10^6 К. Столь высокая температура обусловлена процессами, происходящими в магнитном поле звезды. Однако, несмотря на столь высокую температуру, корона видна лишь во время солнечных затмений, так как плотность её очень мала.

Вращение Солнца происходит не твердоцельно — угловая скорость на разных широтах отличается, при удалении от экватора она уменьшается. Период вращения Солнца на разных широтах можно найти, наблюдая за солнечными пятнами и другими образованиями в фотосфере звезды. На экваторе период вращения составляет 25.05 суток, к полюсу он увеличивается до 34 суток. По наблюдениям за пятнами в течение длительного периода при помощи метода наименьших квадратов можно найти зависимость углового перемещения пятна за сутки от гелиографической широты:

$$\Delta\lambda = 14.37^\circ - 2.7^\circ \sin^2 \varphi, \quad (9.1)$$

где $\Delta\lambda$ — угловое перемещение пятна, φ — гелиографическая широта. Данная зависимость верна только для широт $\varphi < 40^\circ$.

Класс	T, K	Цвет	M, M _⊙	R, R _⊙	L, L _⊙
O	$3 \times 10^4 - 6 \times 10^4$	Голубой	60	15	1.4×10^6
B	$1 \times 10^4 - 3 \times 10^4$	Бело-голубой	18	7	2×10^4
A	$7.5 \times 10^3 - 1 \times 10^4$	Белый	3.1	2.1	80
F	$6 \times 10^3 - 7.5 \times 10^3$	Жёлто-белый	1.7	1.3	6
G	$5 \times 10^3 - 6 \times 10^3$	Жёлтый	1.1	1.1	1.2
K	$3.5 \times 10^3 - 5 \times 10^3$	Оранжевый	0.8	0.9	0.4
M	$2 \times 10^3 - 3.5 \times 10^3$	Красный	0.3	0.4	0.04

Таблица 2 – Современная спектральная классификация звёзд

9.2 Спектральные классы звёзд

Звёзды в зависимости от своего цвета делятся на *спектральные классы*, основные из них представлены в Таблице 2. Масса, радиус и светимость приведены средних представителей спектрального класса, лежащих на главной последовательности (V).

Запись спектрального класса представляет собой латинскую букву, арабское число и римское число, например, спектральный класс Солнца – G2V. арабское число показывает к какой именно части спектрального класса относится звезда: к более синей (число меньше) или к красной (число больше). Так, G10V – это тоже самое, что K0V. Спектральный класс (показатель цвета) и абсолютная звёздная величина задают положение звезды на *Диаграмме Герцшпрунга-Рассела*.

Диаграмма Герцшпрунга-Рассела показывает зависимость светимости или абсолютной звёздной величины от спектрального класса, показателя цвета ($B - V$) или эффективной температуры фотосфера звезды.

Была предложена примерно в 1910 году независимо Эйнаром Герцшпрунгом и Генри Расселом. Диаграмма используется для классификации звёзд и соответствует современным представлениям о звёздной эволюции.

Около 90% звёзд находятся на главной последовательности. Их светимость обусловлена термоядерными реакциями превращения водорода в гелий. Выделяется также несколько ветвей проэволюционировавших звёзд-гигантов, в которых происходит горение гелия и более тяжёлых элементов. В левой нижней части диаграммы находятся полностью проэволюционировавшие белые карлики.

Мнемонические правила для запоминания спектральных классов: «**O**h **B**e **A** Fine **G**irl, **K**iss **M**e **R**ight **N**ow **S**weet**h**eart.» и «**В**ообразите: **О**дин **Б**ритый **А**нгличанин **Ф**иники **Ж**евал **К**ак **М**орковь — **Р**азве **Н**е **С**мешно?» Помимо основных спектральных классов звёзд существу-

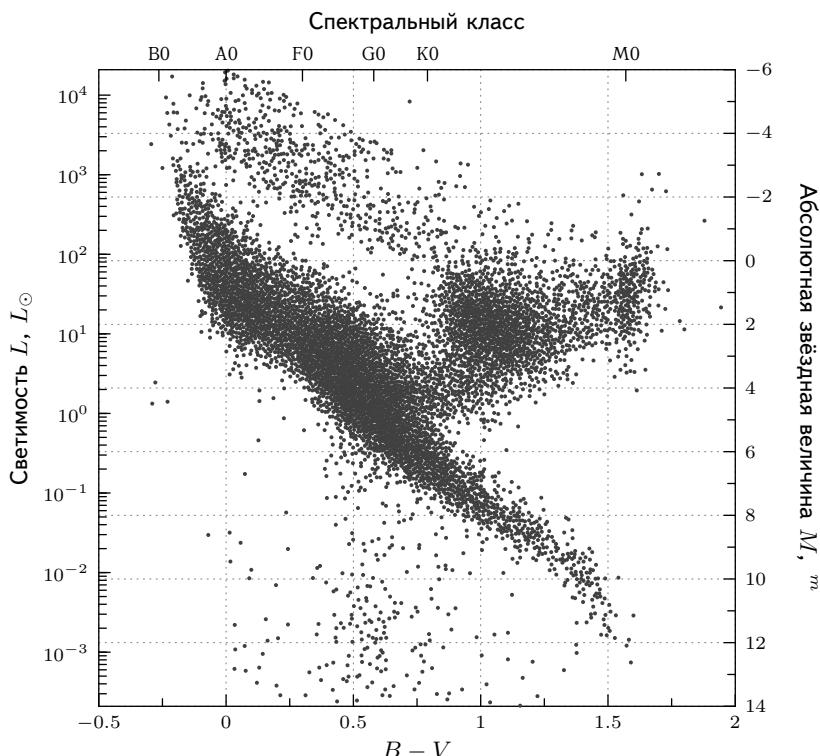


Рис. 111 – Диаграмма Герцспрунга–Рассела

ют дополнительные: W — звёзды Вольфа-Райе, очень тяжёлые яркие звёзды с температурой порядка 70000 К и интенсивными эмиссионными линиями спектра; L — звёзды или коричневые карлики с температурой 1500–2000 К и соединениями металлов в атмосфере; T — метановые коричневые карлики с температурой 700–1500 К; Y — очень холодные (метано-аммиачные) коричневые карлики с температурой ниже 700 К; C — углеродные звёзды, гиганты с повышенным содержанием углерода. Ранее относились к классам R и N.

9.3 Переменные звёзды

Переменные звёзды — звёзды, у которых наблюдаются колебания блеска. Для отнесения звезды к разряду переменных достаточно, чтобы блеск звезды хотя бы однажды претерпел изменение.

Переменные звёзды делятся на две большие группы: *затменные* и *физические*, причём физические подразделяются на *пульсирующие* и *эруптивные*.

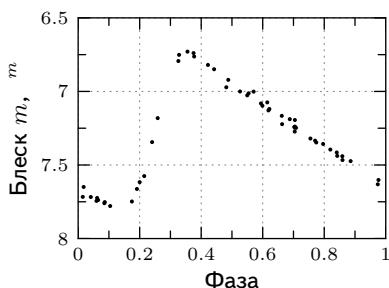


Рис. 112 – Кривая блеска переменной типа δ Сер

К **пульсирующим** переменным относят те звёзды, переменность которых вызвана процессами, происходящими в их недрах. Эти процессы приводят к периодическому изменению температуры поверхности и радиуса фотосферы, а вместе с тем и блеска звезды. Период переменности варьируется в пределе от долей суток до нескольких лет в зависимости от типа переменной.

Классический пример пульсирующих переменных звёзд — *цефеиды*, названные в честь первой открытой переменной данного типа — δ Сер. Абсолютную звёздную величину M и период T (в сутках) цефеид связывает соотношение

$$M = -1.43^m - 2.81 \lg T. \quad (9.2)$$

Ещё один класс пульсирующих переменных звёзд — *переменные типа RR Lyr*, прототипом которого стала звезда RR Лир. Такие звёзды довольно стары и мало-массивны. Они являются гигантами спектрального класса A, лежащими на горизонтальной ветви диаграммы Герцшпрунга – Рассела. Светимости этих звёзд различаются слабо и составляют порядка $40L_{\odot}$. Поэтому они, как и цефеиды, используются в качестве стандартных свеч.

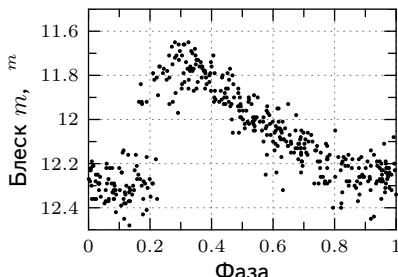


Рис. 113 – Кривая блеска переменной типа RR Lyr

К **эруптивным** переменным звёздам относятся звёзды, меняющие свой блеск нерегулярно или единожды за время наблюдений. Все из-

менения блеска эруптивных звёзд связывают с бурными процессами и вспышками в их хромосферах и коронах. К таким, например, относятся *новые* и *сверхновые*.

Затменно-переменные звёзды — системы из двух звёзд, суммарный блеск которых периодически изменяется с течением времени. Причиной изменения блеска могут быть затмения звёзд друг другом, или изменение их формы взаимной гравитацией в тесных системах. На Рис. 114 – 116 представлены кривые блеска затменно-переменных звёзд трёх основных типов.

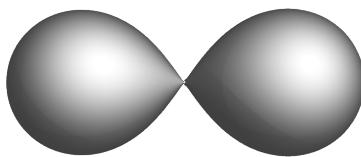
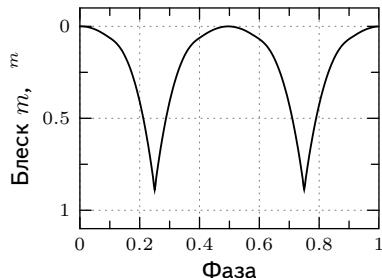


Рис. 114 – Кривая блеска переменной типа W UMa

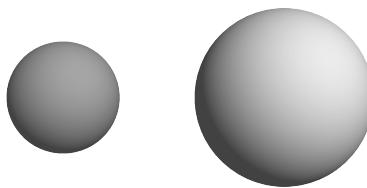
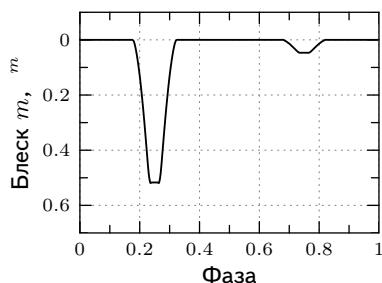


Рис. 115 – Кривая блеска переменной типа β Per

9.4 Вырожденные звёзды

Вырожденные звезды — звезды, в которых силам гравитации противостоят силы давления вырожденного газа. К таким относятся *белые карлики* и *нейтронные звезды*.

Белые карлики — проэволюционировавшие звёзды лишённые собственных источников термоядерной энергии и светящие за счёт остыивания. Масса белого карлика находится в диапазоне от $0.6M_{\odot}$ до $1.44M_{\odot}$.

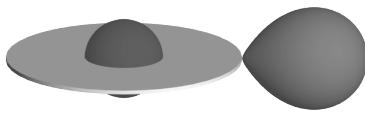
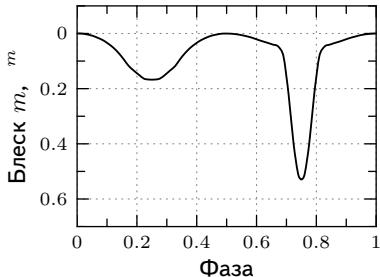


Рис. 116 – Кривая блеска переменной типа β Lyr

Верхняя границы массы белого карлика называется пределом Чандraseкара, звезда с массой больше данного предела не может существовать как белый карлик. Радиус белых карликов примерно в 10^2 раз меньше солнечного, т.е. можно считать, что $R_{БК} \simeq R_\oplus$. Плотность белых карликов лежит в диапазоне $10^7 - 10^{10}$ кг/м³.

Нейтронная звезда — сверхплотная звезда, образующаяся в результате взрыва Сверхновой. Вещество нейтронной звезды состоит в основном из нейтронов. Масса нейтронной звезды лежит в пределах от $0.1M_\odot$ до $2 - 2.8M_\odot$ (предел Оппенгеймера-Волкова). Размер данной звезды составляет лишь 10–20 км, а плотность составляет $10^{16} - 10^{18}$ кг/м³. Дальнейшему гравитационному сжатию нейтронной звезды препятствует давление ядерной материи, возникающее за счёт взаимодействия нейтронов. Так как нейтронные звёзды образуются в результате коллапса массивных звёзд, то из-за сохранения момента импульса скорость их вращения может достигать 10^5 км/с. При наличии сильного магнитного поля и быстром вращении нейтронная звезда может наблюдаться с Земли как **пульсар**.

9.5 Чёрные дыры

Чёрная дыра (ЧД) — область пространства-времени с массой M , гравитационное притяжение которой настолько велико, что покинуть её не могут даже объекты, движущиеся со скоростью света c . Граница этой области называется *горизонтом событий*, а её характерный размер R_G — *гравитационным радиусом*, для величины которого справедливо равенство

$$R_G = \frac{2GM}{c^2}. \quad (9.3)$$

Минимальная масса ЧД составляет около $2.5M_{\odot}$. А плотность ЧД определяется отношением ее массы M к объему V , следовательно

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3c^6}{32\pi M^2 G^3}. \quad (9.4)$$

Эффект излучения (испарения) Хокинга — эффект, при котором гравитационное поле черной дыры поляризует вакуум, в результате чего возможно образование не только виртуальных, но и реальных пар частица –античастица. Одна из частиц, оказавшаяся чуть ниже горизонта событий, падает внутрь чёрной дыры, а другая, оказавшаяся чуть выше горизонта, улетает, унося энергию (то есть часть массы) чёрной дыры. Для мощности излучения ЧД справедлива формула

$$L = \frac{hc^6}{30720\pi^2 G^2 M^2}, \quad (9.5)$$

где h — постоянная Планка. Спектр хокинговского излучения для безмассовых полей оказался строго совпадающим с излучением абсолютно чёрного тела, что позволило приписать ЧД температуру, равную

$$T = \frac{hc^3}{16\pi^2 kGM}, \quad (9.6)$$

где k — постоянная Больцмана.

9.6 Галактики

Морфологическая классификация галактик — система разделения галактик на группы по визуальным признакам, используемая в астрономии. Наиболее известной является классификация, разработанная Хабблом и дополненная другими учеными. [16]

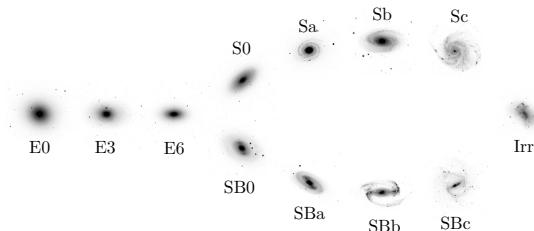


Рис. 117 – «Вилка Хаббла»

Согласно данной классификации галактики делятся на 4 типа:

- Эллиптические галактики** имеют гладкую эллиптическую форму без отличительных деталей с равномерным уменьшением яркости от центра к периферии. Обозначаются буквой Е с индексом. Индекс можно рассчитать по формуле

$$i = 10 \cdot \left(1 - \frac{b}{a}\right), \quad (9.7)$$

где a и b — большая и малая полуоси видимого эллипса.

К эллиптическим галактикам с абсолютной звёздной величиной меньше -18^m применимо соотношение Фабер-Джексона [17][18]:

$$\begin{cases} L \propto \sigma^{3.1} & \text{при } M > -21^m, \\ L \propto \sigma^{15.0} & \text{при } M < -21^m, \end{cases} \quad (9.8)$$

где σ — дисперсия скоростей вещества в галактике, а M — абсолютная звездная величина галактики

- Сpirальные галактики** состоят из уплощенного диска из звёзд и газа, в центре которого находится сферическое уплотнение, называемое балджем, а также обширного сферического гало. Спиральные галактики обозначаются SB при наличии бара (перемычки между рукавами) или S при отсутствии бара. В зависимости от размеров ядра и балджа галактики делят на 3 группы: a, b и c. Для галактик Sa характерен большой балдж, для галактик Sc — маленький. Галактики Sb представляют собой нечто среднее между галактиками Sa и Sc.

Светимость спиральных галактик L связана с максимальной скоростью вращения v_{\max} вещества в них эмпирическим **соотношением Талли-Фишера** [19][20]:

$$L \propto v_{\max}^4. \quad (9.9)$$

Абсолютная звёздная величина Млечного пути $M_{\mathrm{MW}} \simeq -21^m$.

- Неправильные или иррегулярные галактики** — галактики, лишенные как вращательной симметрии, так и значительного ядра. Обозначение: Irr.
- Линзовидные галактики** — галактики, являющиеся переходными между спиральными и эллиптическими. Обозначения: S0, SB0.

9.7 Рассеянные звёздные скопления

Рассеянное звёздное скопление — слабо связанный группой из сотен или тысяч звёзд, сформировавшихся из одного гигантского *молекулярного облака* в одно время, как следствие, имеющих один возраст. Причиной формирования рассеянного звёздного скопления могут служить ударные волны от близких сверхновых, гравитационные взаимодействия внутри облака или столкновение с другим облаком. В силу природы своего образования рассеянные звёздные скопления встречаются только в тонком диске Галактики, где происходят процессы звёздаобразования. Их типичный диаметр — несколько парсек.

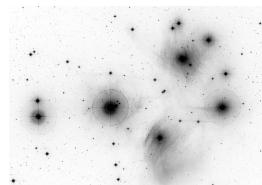


Рис. 118 – Рассеянное звёздное скопление *M45* (негатив)

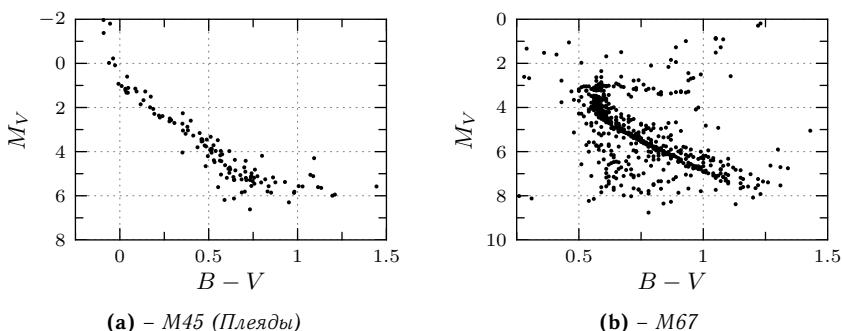


Рис. 119 – Диаграммы Герцшпрунга–Рассела рассеянных звёздных скоплений

Рассеянные скопления молоды: из-за слабого гравитационного взаимодействия между звёздами они быстро разрушаются. Поэтому они показывают нам, как происходит эволюция звёзд первые несколько сотен миллионов лет. Только очень тяжелые звёзды из этих скоплений успевают сойти с главной последовательности. И направиться по диаграмме Герцшпрунга–Рассела в область красных гигантов. Таким образом, диаграммы рассеянных скоплений показывают, как эволюционируют звезды, более массивные, чем Солнце.

На Рис. 119а видно, что даже самые яркие звёзды молодого рассеянного звёздного скопления Плеяды все ещё находятся на главной последовательности. В то время как в старейшем рассеянном звёздном скоплении *M67* звёзды с показателем цвета меньше 0.5^m уже стали красными гигантами, см. Рис. 119б. На диаграмме видна характерная точка поворота в области абсолютной звёздной величины $3^m - 4^m$ и

$B - V = 0.5^m$, что дает оценку на возраст скопления в районе 4 миллиардов лет.

9.8 Шаровые звёздные скопления

Шаровое звёздное скопление — скопление звёзд, состоящее из нескольких сотен тысяч светил, тесно связанных гравитацией между собой. Обладают сферически симметричной формой, наблюдается увеличение концентрации звёзд ближе к центру скопления. Диаметр шаровых скоплений составляет 20–60 пк, а массы варьируются от 10^4 – 10^6 солнечных.

В галактике Млечный путь насчитывается всего около 160 шаровых звёздных скоплений.

В отличие от рассеянных звёздных скоплений, шаровые располагаются не в плоскости галактического диска, а в гало.

Шаровые звёздные скопления гораздо старше рассеянных. Диаграммы Герцшпрunga–Рассела демонстрируют, что яркие звёзды вплоть до звёзд, похожих на Солнце, уже сошли с главной последовательности, см. Рис. 121, что даёт оценку на возраст таких скоплений порядка 10 миллиардов лет.

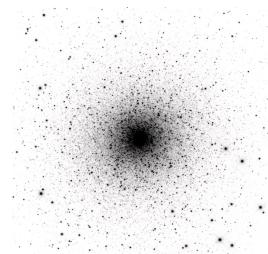
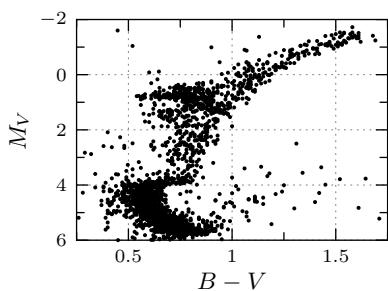
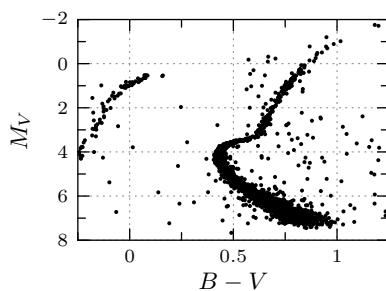


Рис. 120 – Шаровое скопление M13 (негатив)



(а) – 47 Tuc



(б) – M13

Рис. 121 – Диаграммы Герцшпрunga–Рассела шаровых звёздных скоплений

Помимо диаграммы Герцшпрunga–Рассела о внушительном возрасте говорит температура самых холодных белых карликов. Так возраст шарового звёздного скопления M4 оценивается в 12.7 миллиардов лет [21].

Внимательный читатель мог заметить, что, согласно Рис. 121b, в шаровом звёздном скоплении M13 присутствует некоторое количество горячих ярких звёзд, возраст которых должен быть сильно меньше оценок возраста скоплений. Такие звёзды называются **голубыми отстающими**, они формируются в результате слияния звёзд или перетекания вещества между звёздами в центре скоплений, где звёзды располагаются наиболее плотно.

9.9 Планетарные туманности

Планетарная туманность — финальная стадия эволюции звезды средней массы, от $0.8M_{\odot}$ до $8M_{\odot}$. В процессе эволюции такие звезды становятся красными гигантами, в запускается процесс термоядерного синтеза более тяжёлых элементов — углерода и кислорода из гелия, но масса не достаточно, чтобы этот процесс был стабилен. И в итоге мощных пульсаций значительная масса вещества звезды выбрасывается в космическое пространство. Но температуры ядра все ещё достаточно, чтобы ионизировать это вещество и заставить его излучать. Так облако выброшенного вещества становится планетарной туманностью.

Выброшенное вещество разлетается со скоростью несколько десятков километров в секунду. В то время, как оставшаяся звезда постепенно остывает, переставая ионизировать облако сброшенного вещества, и становится белым карликом. Облако рекомбинирует — становится нейтральным и перестает излучать. От момента взрыва звезды до рекомбинации проходит порядка 10000 лет, откуда несложно оценить, что характерный размер планетарной туманности составляет порядка 1 светового года.

Спектр планетарной туманности состоит из эмиссионных линий тех элементов, из которых она состоит. Как было сказано выше, звезда сбрасывает оболочку уже после запуска синтеза тяжелых элементов из гелия. Одним из путей такого синтеза является СНО-цикл, на различных стадиях которого образуется, соответственно, углерод, азот и кислород. Ионизационное излучение которых можно наблюдать на спектре, например, см. Рис. 123.

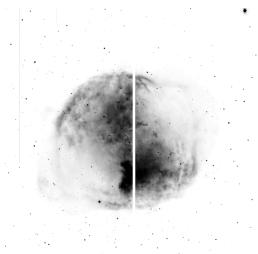


Рис. 122 – Планетарная туманность M27 (негатив). КГО, 2,5-метровый телескоп. Фильтры B , $OIII$ и H_{α} . Чёрная полоса — артефакт матрицы, состоящей из двух чипов

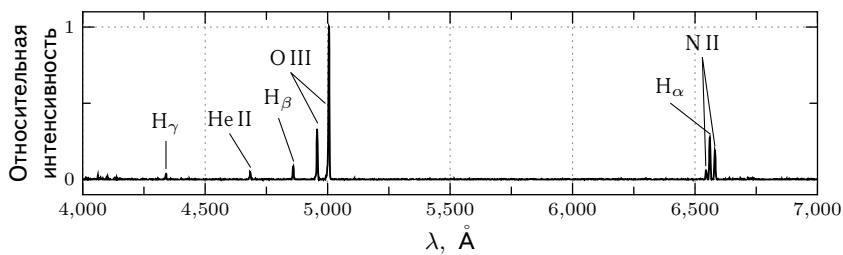


Рис. 123 – Спектр планетарной туманности M27. Данные britastro.org

10 Магнетизм

10.1 Магнитное поле

Вектор **магнитной индукции** в точке вводится как векторное произведение вектора направления электрического тока и радиус-вектора данной точки.

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (10.1)$$

где константа $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{T}\cdot\text{м}}{\text{А}}$. Линии магнитного поля идут от северного полюса к южному. Магнит поворачивается во внешнем магнитном поле так, чтобы его собственное поле совпадало с внешним. Соответственно стрелка компаса поворачивается в соответствии с магнитным полем Земли. В общем-то говоря точная причина симметрии земного магнитного поля до сих пор неизвестна.

Поток магнитного поля вводится как:

$$d\Phi = \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (10.2)$$

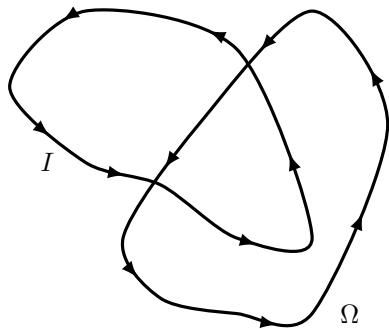
В силу отсутствия в мире магнитных зарядов можно записать упрощенный вариант теоремы Гаусса:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (10.3)$$

Из курса электростатики известно, что электростатическое поле консервативно. То есть интергал поля по произвольному замкнутому контуру равен 0:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Для произвольной геометрической кривой с выбранным направлением обхода и произвольного контура тока справедлива теорема о циркуляции:



$$\oint_{\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

Теорема о циркуляции

Знак I выбирается по знаку скалярного произведения \mathbf{n} и направления под которым ток пересекает плоскость контура. Пользоваться теоремой следует аналогично теореме Гаусса, выбирая удобный для решения контур.

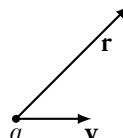
10.2 Связь магнитных и электрических полей

Запишем закон Био-Савара-Лапласа для электрона:

Для тока I можно записать

$$I = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = q \cdot n \cdot v \cdot dS$$

Где \mathbf{j} – плотность тока, $d\mathbf{S}$ – поперечное сечение проводника, e, n, v : заряд, концентрация и скорость электронов. Тогда закон Био-Савара-Лапласа:



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 e n v S [d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3}, \quad d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 e \frac{dN}{n S d\ell} [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3}$$

Отсюда, если принять $dN = 1$, поле одного заряда:

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \cdot \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{r^3}} \quad (10.4)$$

Вспомним формулу для величины напряженности электрического поля:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}$$

Заметим, что если загнать скаляры в векторное произведение $\mathbf{B} = \left[\mathbf{v} \times \frac{\mu_0 q \mathbf{r}}{4\pi r^3} \right]$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] \implies \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c^2 \implies \boxed{\mathbf{B} = \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{E}]}{c^2}}$$

Отсюда связь магнитного и электрического поля.

10.3 Сила Ампера и сила Лоренца

Связывающим компонентом между магнитными полями и токами является сила Ампера:

$$d\mathbf{F}_A = I[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]. \quad (10.5)$$

Записав выражение силы Ампера для электрона можно получить так называемую силу Лоренца

$$\mathbf{F}_A = e v S [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}].$$

Однако учитывая единичность электрона $nSdl = 1$ и что векторы $d\mathbf{l}$ и \mathbf{v} сонаправлены, получим:

$$\mathbf{F}_A = e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (10.6)$$

Отсюда следует, что в однородном магнитном поле заряженные частицы будут двигаться по окружностям. Получим радиус кривизны траектории, приравняв силу Лоренца к центробежной:

$$\begin{aligned} \frac{m_e v^2}{R} &= evB, \\ R &= \frac{m_e v}{eB}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Отсюда период движения электрона

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m_e}{eB}, \quad (10.8)$$

откуда частота

$$f = \frac{eB}{2\pi m_e}, \quad (10.9)$$

данная частота называется **циклотронной**. А излучение, создаваемое заряженными частицами, движущимися в магнитном поле — **циклотронным**.

11 Математика

11.1 Вектор

Вектором называется *направленный отрезок* или упорядоченная пара точек. Уточним это понятие: **вектором** будем называть класс эквивалентности направленных отрезков, то есть все такие направленные отрезки, коллинеарные и равные по длине друг другу.

Векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ называются **линейно зависимыми**, если найдётся такой набор констант $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, что $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \neq 0$ и $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$. Иными словами векторы линейно зависимы, когда существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору.

С другой стороны, векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ называются **линейно независимыми**, если из условия $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ следует, что $\forall i : \alpha_i = 0$.

Нетрудно догадаться, что размер линейно независимой системы векторов, ограничен. *Максимальной линейно независимой системой векторов* $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ принято называть такую линейно независимую систему векторов \mathcal{L} , что любой вектор $\mathbf{v} \notin \mathcal{L}$ можно представить в виде $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{x}_n$, а сами векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, очевидно, линейно независимы.

Здесь важно, что такое разложение единственno. Действительно, предположим, что также верно представление $\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{x}_1 + \dots + \beta_n\mathbf{x}_n$, но тогда $\mathbf{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{x}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{x}_n$, а так как векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ линейно независимы, то $\forall i : \alpha_i = \beta_i$, следовательно разложение единственno.

Упорядоченную максимальную линейно независимую комбинацию векторов $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ называют **базисом**. Так как разложение вектора по линейно независимой системе векторов единственno, а базисные векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ упорядочены, то коэффициенты разложения $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ однозначно определяют вектор и называются его *компонентами* или *координатами*.

Углубимся в математику. **Полем** F называется такое множество с введенными на нем операциями сложения $+ : F \times F \rightarrow F$ и умножения $\cdot : F \times F \rightarrow F$, что выполнены следующие свойства:

1. $\forall a, b \in F : a + b = b + a;$
2. $\forall a, b, c \in F : (a + b) + c = a + (b + c);$

3. $\exists 0 \in F \quad \forall a \in F : a + 0 = 0 + a = a;$
4. $\forall a \in F \quad \exists (-a) \in F : a + (-a) = 0;$
5. $\forall a, b \in F : a \cdot b = b \cdot a;$
6. $\forall a, b, c \in F : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$
7. $\exists 1 \in F \quad \forall a \in F : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a;$
8. $\forall a \in F, a \neq 0 \quad \exists a^{-1} \in F : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1;$
9. $\forall a, b, c \in F : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$

Векторное (линейное) пространство $V(F)$ над полем F — упорядоченная четверка $(V, F, +, \cdot)$, где определены операции сложения векторов $+ : V \times V \rightarrow V$ и умножения на скаляр $F \times V \rightarrow V$ такие, что

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x};$
2. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V : (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z});$
3. $\exists \mathbf{0} \in V \quad \forall \mathbf{x} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x};$
4. $\forall \mathbf{x} \in V \quad \exists (-\mathbf{x}) \in V : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0};$
5. $\forall \alpha, \beta \in F \quad \forall \mathbf{x} \in V : \alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x};$
6. $\forall \mathbf{x} \in V : 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x};$
7. $\forall \alpha, \beta \in F \quad \forall \mathbf{x} \in V : (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x};$
8. $\forall \alpha \in F \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V : \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}).$

Размерность векторного пространства $\dim V$ равна размеру базиса в нем. Важно, что нет различия в том, размер какого именно базиса принять за размерность пространства. Действительно, если размер базиса \mathcal{L}_1 строго меньше размера базиса \mathcal{L}_2 , значит базис \mathcal{L}_1 не является максимальной линейно независимой системой векторов, либо векторы из \mathcal{L}_2 линейно зависимы, так как размер \mathcal{L}_2 больше размера базиса \mathcal{L}_1 . Полученное противоречие доказывает, что размеры всех базисов векторного пространства равны между собой, а значит, определение корректно.

11.2 Системы координат

Зафиксируем точку O в пространстве и рассмотрим произвольную точку M . Вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ называется радиус-вектором точки M . Пусть в рассматриваемом пространстве также выбран базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, тогда совокупность точки O и базиса называется **декартовой системой координат**.

Причем точка O — начало координат, а базисные векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ задают координатные оси, см. Рис. 124.

Однако пользоваться представлением векторов в произвольном базисе довольно сложно, поэтому рассмотрим специальный тип — **ортонормированный базис** — это такой базис, базисные векторы которого попарно ортогональны, и длина каждого равна единице, см. Рис. 125.

Прямоугольной декартовой системой координат (ПДСК) называют декартову систему координат с ортонормированным базисом. В практических задачах использовать ПДСК не всегда удобно, поэтому также рассмотрим другие системы координат.

На плоскости, то есть в пространстве \mathbb{R}^2 , имеющем размерность два, часто применяется **полярная система координат**, см. Рис. 126. В ней координатами точки является длина радиус-вектора r — расстояние до точки от начала отсчета, и угол радиус-вектора с начальной осью φ .

Пусть (x, y) — координаты некоторого вектора в ПДСК на \mathbb{R}^2 , тогда не сложно получить, что его координаты в полярной системе координат (начальная ось совпадает с осью Ox) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin \varphi = y/r, \\ \cos \varphi = x/r. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (11.1)$$

Теперь пусть (x, y, z) — координаты некоторого вектора в ПДСК на \mathbb{R}^3 . Обозначим за h — длину проекции этого вектора на ось z , r — длину его проекции на плоскость Oxy , φ — угол между проекцией на

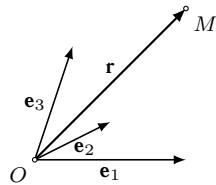


Рис. 124

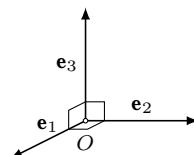


Рис. 125

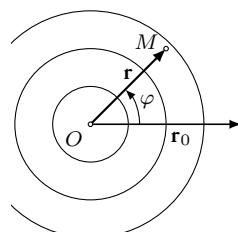
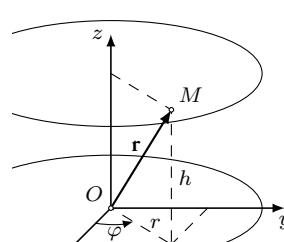


Рис. 126



плоскость Oxy и осью Ox , см. Рис. 127. Тогда тройка (r, φ, h) — координаты рассматриваемого векторов в **цилиндрической системе координат**, и верно представление

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin \varphi = y/r, \\ \cos \varphi = x/r, \\ h = z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = h. \end{cases} \quad (11.2)$$

Остается рассмотреть **сферическую систему координат**. Здесь координатами точки будет длина r радиус-вектора \mathbf{r} и два угла: θ — угол между радиус-вектором и плоскостью Oxy , и φ — угол между проекцией радиус-вектора на плоскость Oxy и осью Ox , см. Рис. 128. Справедливы формулы перехода:

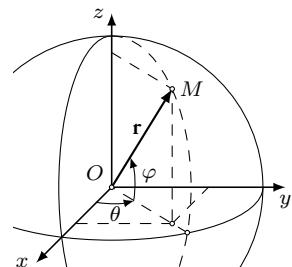


Рис. 128

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \arcsin z/r, \\ \sin \varphi = y/r, \\ \cos \varphi = x/r. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi, \\ y = r \cos \theta \sin \varphi, \\ z = r \sin \theta. \end{cases} \quad (11.3)$$

11.3 Матрица

На практике часто оказывается полезным матричное исчисление. **Матрицей** размера $m \times n$ над полем F называется nm элементов из F , которые удобно представлять в виде

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv (a_{ij}). \quad (11.4)$$

К матрицам применимы следующие простейшие операции при условии подходящих размеров:

$$\underset{m \times n}{A} + \underset{m \times n}{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}; \quad (11.5)$$

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times l}{B} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{il} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{il} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{il} \end{pmatrix} = \underset{m \times l}{C}, \quad (11.6)$$

легко видеть, что в общем случае $AB \neq BA$. Кроме этого определена операция умножения матрицы на число: $\alpha A = (\alpha a_{ij})$.

11.3.1 Линейные отображения

Пусть V и W – два пространства над полем F , тогда отображение $f : V \rightarrow W$ называется **линейным**, если $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V : f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ и $\forall \alpha \in F \forall \mathbf{x} \in V : f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$. В случае $V = W$ отображение линейное отображение f называется **линейным преобразованием** или **линейным оператором**.[22]

Рассмотрим умножение вектор-столбца размерности l на матрицу слева: $\mathbf{v}' = \underset{n \times l}{B} \mathbf{v}$, его можно записать, как

$$v'_i = \sum_{j=1}^l b_{ij} v_j.$$

Отсюда видно, что умножение вектора на матрицу суть действие некоторого *линейного отображения*, а матрица – лишь одно из его представлений. Домножим полученный вектор \mathbf{v}' слева на матрицу $\underset{m \times n}{A}$, получим,

$$v''_k = \sum_{i=1}^n a_{ki} v'_i = \sum_{i=1}^n a_{ki} \sum_{j=1}^l b_{ij} v_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l a_{ki} b_{ij} v_j =$$

$$= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ij} v_j = \sum_{j=1}^l (AB)_{kj} v_j.$$

Откуда следует, что композиция действия линейных отображений на вектор есть произведение матриц, представляющих эти отображения.

11.3.2 Матрица перехода

При работе с векторными пространствами, бывает удобно использовать несколько базисов. Для этого необходимо иметь удобный инструмент для перевода координат векторов из одного базиса в другой — **матрицу перехода**. Так как преобразование осуществляется между *базисами* одного и того же пространства, то размерность векторов не меняется. Следовательно *матрица перехода* — квадратная.

Рассмотрим логику построения матрицы перехода на примере двумерного пространства, для других пространств механизм аналогичен. Пусть \mathbf{x} и \mathbf{y} — векторы первого базиса, а \mathbf{x}' и \mathbf{y}' — другого. Зафиксируем произвольный вектор \mathbf{v} в первом базисе, обозначим как \mathbf{v}' его представление во втором базисе. Найдем матрицу перехода от первого базиса к второму, то есть такую матрицу A , что $\mathbf{v}' = A\mathbf{v}$.

Пусть $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$, а направляющие векторы первого базиса раскладываются по векторам второго следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= a_{xx}\mathbf{x}' + a_{xy}\mathbf{y}', \\ \mathbf{y} &= a_{yx}\mathbf{x}' + a_{yy}\mathbf{y}'.\end{aligned}$$

Тогда можно записать

$$\mathbf{v} = \alpha(a_{xx}\mathbf{x}' + a_{xy}\mathbf{y}') + \beta(a_{yx}\mathbf{x}' + a_{yy}\mathbf{y}') = \mathbf{x}'(\alpha a_{xx} + \beta a_{yx}) + \mathbf{y}'(\alpha a_{xy} + \beta a_{yy}),$$

что в матричном виде записывается как

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{yx} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что столбцы матрицы перехода A являются координатными представлениями направляющих векторов первого базиса во втором.

Однако не всегда бывает удобно искать координаты старого базиса в новом. Рассмотрим переход от второго базиса к первому (обратный

переход). Пусть он задается матрицей B , то есть $\mathbf{v} = B\mathbf{v}'$. Найдём связь между матрицами переходов A и B .

Для этого определим **обратную матрицу** A^{-1} к квадратной матрице A так, что $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, где I — единичная матрица. Вернемся к равенству $\mathbf{v}' = A\mathbf{v}$ и домножим обе части на A^{-1} слева. Получим, что $A^{-1}\mathbf{v}' = A^{-1}A\mathbf{v} = I\mathbf{v} = \mathbf{v}$, значит $A^{-1} \equiv B$ — матрица обратного перехода. Получается, поиск матрицы обратного преобразования сводится к поиску обратной матрицы.

Рассмотрим вспомогательные матрицы

$$\mu(m_1, \dots, m_n) = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix},$$

$$\sigma(s_1, \dots, s_{k-1}, 1, s_{k+1}, \dots, s_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ s_1 & \cdots & 1 & \cdots & s_n \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

матрица μ при умножении на неё слева умножает i -ую строку на m_i , а σ — прибавляет к k -ой строке остальные строки с соответствующими коэффициентами. Данными операциями не сложно привести исходную произвольную матрицу A к верхнетреугольному виду, затем к диагональному и к единичной матрице, получив композицию преобразований $\mu(\dots)\sigma(\dots)\dots\mu(\dots) \equiv \Lambda$. Причем $\Lambda A = I$. Домножим справа на A^{-1} , тогда слева получим Λ , а справа — $IA^{-1} = A^{-1} = A^{-1}I$. Отсюда получаем, что при выполнении операций, описываемых матрицами μ и σ , для приведения A к I параллельно над матрицами A и I , матрица I приводится к искомой матрице A^{-1} .

Заключительно, пусть A матрица, столбцы которой являются координатными представлениями направляющих векторов нового базиса в старом, тогда A^{-1} матрица перехода из старого базиса в новый.

В качестве иллюстрации найдём матрицу перехода R_α из ортонормированного базиса на плоскости, в такой же ортонормированный базис, повёрнутый на угол α . В этом случае направляющие ветокры но-

вого базиса имеют координаты

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix},$$

значит матрица обратного перехода или обратная матрица

$$R_{\alpha}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Приведём её к единичной параллельно с I :

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc} \cos \alpha & -\sin \alpha & 1 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mu\left(\frac{1}{\cos \alpha}, \frac{1}{\cos \alpha}\right)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\operatorname{tg} \alpha & \frac{1}{\cos \alpha} & 0 \\ \operatorname{tg} \alpha & 1 & 0 & \frac{1}{\cos \alpha} \end{array} \right) \xrightarrow{\sigma\left(1, -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)} \\ \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \frac{1}{\cos \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 \alpha} & -\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} & \frac{1}{\cos \alpha} \end{array} \right) \xrightarrow{\sigma\left(\sin \alpha \cos \alpha, \cos^2 \alpha\right)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 1 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right), \end{array}$$

интересно заметить, что $R_{\alpha}^{-1} = R_{-\alpha}$.

11.3.3 Определитель

Возвращаясь к вопросу линейной (не)зависимости набора из векторов $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ в пространстве размерности n , было бы удобно иметь некоторую функцию D — индикатор линейной зависимости векторов. На аргументы этой функции удобно смотреть как на строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Предъявим к искомой функции следующие требования:

1. Полилинейность, то есть

$$\begin{aligned} D(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_n) &= D(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) + D(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_n) \\ D(\mathbf{v}_1, \dots, \lambda \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) &= \lambda D(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

2. $D(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, если $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ линейно зависимы.

3. $D(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = D(I) = 1.$

Отсюда получаем, что $D(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$, так как векторы, среди которых два равных, линейно зависимы.

Из этого свойства и полилинейности вытекает *кососимметричность*²¹. Действительно, легко заметить, что к аргументам D можно прибавлять другие аргументы к некоторыми ненулевыми коэффициентами, при этом значение D не изменится. А этого и второй части полилинейности достаточно, чтобы поменять два аргумента местами. Внимательно проследив цепочку преобразований, можно увидеть что значение D в этом случае поменяло знак:

$$\begin{aligned} D(\dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots) &= D(\dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j, \dots) = \\ &= -D(\dots, -\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j, \dots) = -D(\dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j, \dots) = \\ &= -D(\dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots). \end{aligned}$$

Обозначим множество как S_n всех перестановок длины n . Чётностью перестановки σ называется чётность числа инверсий $\pi(\sigma)$ в этой перестановке. Знак перестановки $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\pi(\sigma)}$.

Рассмотрим, чему равна D на некотором наборе $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) &= D(a_{11}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{1n}\mathbf{e}_n, \dots, a_{n1}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{nn}\mathbf{e}_n) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} D(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} D(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}. \quad (11.7) \end{aligned}$$

Полученная функция называется **определителем** квадратной матрицы $\det(X) : \underset{n \times n}{\text{Mat}} \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначается как $\det(A)$, $\det A$ или $|A|$.

Преобразуем (11.7). Для этого рассмотрим перестановку $\xi \in S_{n-1}$ множества $\{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$, результат применения ξ данному

²¹Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ **кососимметрична**, если $\forall 1 \leq i, j \leq n$: $f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$.

множеству назовем *подстановкой*. Добавим число j в начало подстановки. В результате получим перестановку $\sigma \in S_n$, причем $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{j-1} \operatorname{sgn} \xi$. Так как в подстановке ровно $j - 1$ элементов меньше j , следовательно, число инверсий в σ ровно на $j - 1$ больше числа инверсий в ξ . Применим полученный результат:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} &= \\ = \sum_{j=1}^n \sum_{\xi \in S_{n-1}} (-1)^{j-1} \operatorname{sgn}(\xi) \cdot a_{1j} \cdot a_{2\xi(1)} \cdots a_{n\xi(n-1)} &= \\ = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_{1j} M_{1j}, \quad (11.8) \end{aligned}$$

где $\xi(i)$ — i -ый элемент *подстановки*, а M_{hk} — *дополнительный минор* — определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием h -й строки и k -го столбца.

Определитель двумерной матрицы

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

выражает ориентированную площадь параллелограмма, построенного на векторах, составляющих матрицу, см. Рис. 129. Действительно, $(a + c)(b + d) - 2bc - ab - cd = ad - bc$.

Определитель матрицы третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - bdi - afh + bfg + cdh - ceg \quad (11.9)$$

равен ориентированному объему параллелепипеда, построенного на векторах, составляющих матрицу. Доказательство этого факта изложено в Разделе 11.6, а мнемоническое правило для формулы (11.9) приведено на Рис. 130: произведения троек, выделенных чёрным, берутся со знаком +, а серым — со знаком -.

Определители матриц более высокого порядка также выражают «объемный» коэффициент преобразования в пространстве соответствующей размерности.

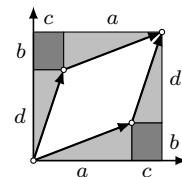


Рис. 129 — Параллелограмм на векторах $(a \ b)^T$ и $(c \ d)^T$

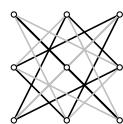


Рис. 130 — Мнемоническое правило для вычисления определителя матрицы третьего порядка

11.4 Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов называется билинейная операция над ними, зависящая только от длин этих векторов и угла между ними, результатом которой является скаляр. Скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} выражается следующим образом:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \widehat{\mathbf{ab}}. \quad (11.10)$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n. \quad (11.11)$$

Докажем эквивалентность (11.10) и (11.11). Пусть в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ векторы имеют следующие представления:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{e}_i. \quad (11.12)$$

Заметим, что $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i) = |\mathbf{a}| |\mathbf{e}_i| \cos \theta_i = |\mathbf{a}| \cos \theta_i = a_i$, где θ_i — угол вектора \mathbf{a} с i -м базисным вектором \mathbf{e}_i . Тогда

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \left(\mathbf{a} \cdot \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n b_i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \mathbf{a}^T \mathbf{b}. \quad (11.13)$$

Из (11.10) и (11.11) очевидна билинейность и симметричность скалярного произведения, то есть

$$((\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d})) = ((\mathbf{c} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}). \quad (11.14)$$

Практическое применение скалярное произведение находит в вопросах проверки ортогональности векторов (как частный случай нахождения угла между векторами), потому что $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$, так как

$$\cos \widehat{\mathbf{ab}} = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}. \quad (11.15)$$

Отсюда также получается выражение для проекции вектора \mathbf{a} на прямую с направляющим вектором \mathbf{l} :

$$\text{pr}_{\mathbf{l}} \mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{l})}{|\mathbf{l}|^2} \mathbf{l}. \quad (11.16)$$

Используя скалярное произведение, получим важную утверждение теоремы косинусов из планиметрии: пусть $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, то есть имеем треугольник со сторонами $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ и $|\mathbf{c}|$. Рассмотрим скалярное произведение вектора \mathbf{c} самого на себя:

$$\begin{aligned} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) &= ((\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})) = (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})) - (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})) = \\ &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (11.17)$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}} \quad (11.18)$$

11.5 Векторное произведение

Тройку векторов будем называть *правой*, если для наблюдателя, находящегося в конце третьего вектора, кратчайший поворот от первого вектора ко второму осуществляется против часовой стрелки, иначе левой.

Рассмотрим еще одну операцию над векторами — **векторное произведение** $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — антисимметричную и билинейную, задаваемую по правилу:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n}, \quad (11.19)$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к плоскости, построенной на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} , направление которой определяется таким образом, чтобы тройка векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n}\}$ была правой. Из определения понятно, что модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} .

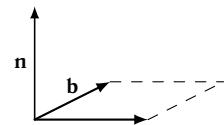


Рис. 131

Так как площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} равна удвоенной площади треугольника, построенного на этих же векторах, то

$$|[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]| = |[\mathbf{a} \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})]| = |[\mathbf{b} \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})]| \quad (11.20)$$

$$ab \sin C = ac \sin B = bc \sin A \Rightarrow \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}. \quad (11.21)$$

Последнее двойное равенство называется теоремой синусов.

Рассмотрим выражение для векторного произведения в координатной форме:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] &= \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= [(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \times (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3)] = \\
 &= a_1b_1\mathbf{0} + a_1b_2\mathbf{e}_3 - a_1b_3\mathbf{e}_2 - a_2b_1\mathbf{e}_3 + a_2b_2\mathbf{0} + a_2b_3\mathbf{e}_1 + a_3b_1\mathbf{e}_2 - a_3b_2\mathbf{e}_1 + a_3b_3\mathbf{0} = \\
 &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_1 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 = \\
 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (11.22)
 \end{aligned}$$

11.6 Смешанное произведение

Векторное произведение определяет вектор площади параллелограмма, построенного на двух векторах, а скалярное произведение — величину проекции одного вектора на другой. Рассмотрим такую операцию:

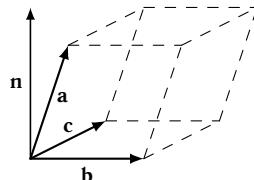


Рис. 132

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]). \quad (11.23)$$

Разберем, что является результатом данной операции: $[\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{n}$ — вектор нормали к плоскости векторов \mathbf{b} и \mathbf{c} такой, что $|\mathbf{n}| = |\mathbf{b}||\mathbf{c}| \sin \widehat{\mathbf{b}\mathbf{c}} \equiv S$ — площадь параллелограмма.

Идём дальше, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) = |\mathbf{a}||\mathbf{n}| \cos \widehat{\mathbf{a}\mathbf{n}}$ — произведение длины вектора \mathbf{n} на длину проекции $\text{pr}_{\mathbf{n}} \mathbf{a}$. Значит величина смешанного произведения есть объем параллелепипеда, построенного на них.

В матричной форме смешанное произведение можно записать, как

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \\ \mathbf{c}^T \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (11.24)$$

то есть определитель матрицы $n \times n$ — ориентированные объем n -мерного параллелепипеда, построенного на n векторах.

Практическое значение смешанного произведения основано на его свойстве: если проекция вектора \mathbf{a} на вектор \mathbf{n} — $\text{pr}_{\mathbf{n}} \mathbf{a} = 0$, значит, векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} лежат в одной плоскости, либо хотя бы один из них

нулевой, что также означает, что эти три вектора лежат в одной плоскости.

Отсюда можно сделать вывод, что равенство нулю смешанного произведения трех векторов означает их компланарность или, что тоже самое, равенство нулю объема параллелепипеда, построенного на них.

11.7 Прямая

Рассмотрим необходимое условие, чтобы произвольная точка P с радиус-вектором \mathbf{r} лежала на прямой l , проходящей через точку O с радиус вектором \mathbf{r}_0 (см. Рис. 133). Пусть $\mathbf{a} = (a_1 \dots a_n)^T$ — направляющий вектор прямой l , то есть l параллельна прямой, содержащей вектор \mathbf{a} , тогда формально данное условие можно записать так:

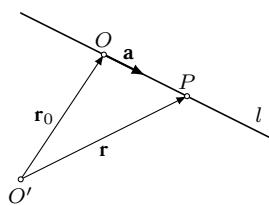


Рис. 133

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (11.25)$$

Конкретизируем для случая векторов из \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \lambda \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - x_0 = \lambda x_a, \\ y - y_0 = \lambda y_a. \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений, получим, что

$$\lambda = \frac{x - x_0}{x_a} = \frac{y - y_0}{y_a}.$$

преобразуем второе равенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_a} \cdot x + \left(-\frac{1}{y_a} \right) \cdot y + \left(\frac{y_0}{y_a} - \frac{x_0}{x_a} \right) &= 0, \\ y_a x + (-x_a) y + (x_a y_0 - y_a x_0) &= 0, \end{aligned}$$

Сделав замену $y_a \equiv A$, $-x_a \equiv B$, $x_a y_0 - y_a x_0 \equiv C$, получим каноническое уравнение прямой на плоскости в декартовых координатах:

$$Ax + By + C = 0. \quad (11.26)$$

Заметим, что

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \equiv \left(\mathbf{a} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) = x_a y_a - y_a x_a = 0,$$

значит, $\mathbf{n} \perp \mathbf{a}$, то есть вектор \mathbf{n} есть вектор нормали к прямой с направляющим вектором \mathbf{a} , так как коэффициенты A и B не зависят от фиксированной точки O .

11.8 Плоскость

Аналогично предыдущему разделу, рассмотрим условие принадлежности точки P с радиус-вектором \mathbf{r} плоскости Π в \mathbb{R}^3 . Пусть неколлинеарные ($[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \neq 0$) векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} — направляющие векторы плоскости Π , а точка O с радиус-вектором \mathbf{r}_0 такова, что $\mathbf{r}_0 \in \Pi$. Тогда

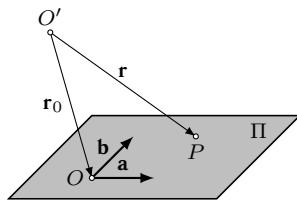


Рис. 134

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = \lambda x_a + \mu x_b, \\ y - y_0 = \lambda y_a + \mu y_b, \\ z - z_0 = \lambda z_a + \mu z_b; \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (11.27)$$

Преобразуем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x - x_0 - \mu x_b}{x_a}, \\ y - y_0 = \frac{x - x_0 - \mu x_b}{x_a} \cdot y_a + \mu y_b, \\ z - z_0 = \lambda z_a + \mu z_b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x - x_0 - \mu x_b}{x_a}, \\ y - y_0 = (x - x_0) \cdot \frac{y_a}{x_a} + \mu \left(y_b - \frac{x_b y_a}{x_a} \right), \\ z - z_0 = \lambda z_a + \mu z_b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x - x_0 - \mu x_b}{x_a}, \\ \mu = \frac{x_a y - x_a y_0 - (x - x_0) \cdot y_a}{x_a y_b - x_b y_a}, \\ z - z_0 = \lambda z_a + \mu z_b. \end{cases}$$

Подставим выражения для λ и μ в третье уравнение:

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \frac{x - x_0 - \mu x_b}{x_a} \cdot z_a + \mu z_b = (x - x_0) \cdot \frac{z_a}{x_a} + \mu \left(z_b - \frac{x_b z_a}{x_a} \right) = \\ &= (x - x_0) \cdot \frac{z_a}{x_a} + \frac{x_a y - x_a y_0 - (x - x_0) \cdot y_a}{x_a y_b - x_b y_a} \cdot \left(z_b - \frac{x_b z_a}{x_a} \right) \end{aligned}$$

Приведя подобные слагаемые с x , y и z , получим:

$$\begin{aligned} z &= x \cdot \underbrace{\left(\frac{z_a}{x_a} - \frac{y_a}{x_a y_b - x_b y_a} \left(z_b - \frac{x_b z_a}{x_a} \right) \right)}_A + \\ &\quad + y \cdot \underbrace{\frac{x_a}{x_a y_b - x_b y_a} \cdot \left(z_b - \frac{x_b z_a}{x_a} \right)}_B + \\ &\quad + z_0 - \underbrace{\frac{x_0 z_a}{x_a} - \frac{x_a y_0 - x_0 y_a}{x_a y_b - x_b y_a} \cdot \left(z_b - \frac{x_b z_a}{x_a} \right)}_D. \end{aligned}$$

Сделаем замену:

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{z_a}{x_a} - \frac{y_a}{x_a y_b - x_b y_a} \left(z_b - \frac{x_b z_a}{x_a} \right) = \\ &= \frac{x_a y_b z_a - x_b y_a z_a}{x_a (x_a y_b - x_b y_a)} - \frac{x_a y_a z_b - x_b y_a z_a}{x_a (x_a y_b - x_b y_a)} = \frac{y_b z_a - y_a z_b}{x_a y_b - x_b y_a}, \\ B &\equiv \frac{x_a}{x_a y_b - x_b y_a} \cdot \left(z_b - \frac{x_b z_a}{x_a} \right) \frac{x_a z_b - x_b z_a}{x_a y_b - x_b y_a}, \\ D &\equiv z_0 - \frac{x_0 z_a}{x_a} - \frac{x_a y_0 - x_0 y_a}{x_a y_b - x_b y_a} \cdot \left(z_b - \frac{x_b z_a}{x_a} \right). \end{aligned}$$

В результате такой замены получим уравнение

$$Ax + By - z + D = 0. \tag{11.28}$$

Домножим в нём обе части на $\xi \equiv x_a y_b - x_b y_a$ и сделаем ещё одну замену:

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

где $D' = \xi D$, а

$$\begin{cases} A' = y_b z_a - y_a z_b = \det \begin{pmatrix} y_b & z_b \\ y_a & z_a \end{pmatrix} \\ B' = x_a z_b - x_b z_a = \det \begin{pmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{pmatrix} \\ C' = x_b y_a - x_a y_b = \det \begin{pmatrix} x_b & y_b \\ x_a & y_a \end{pmatrix} \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} = [\mathbf{b} \times \mathbf{a}] \equiv \mathbf{n}. \quad (11.29)$$

Из свойств векторного произведения вектор \mathbf{n} является *вектором нормали* к плоскости Π .

Теперь самое первое условие можно записать так:

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{r}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -D' = (\mathbf{r}_0, \mathbf{b}, \mathbf{a}). \quad (11.30)$$

11.9 Производная

Производная $f'(x_0)$ функции f в точке x_0 — предел отношения приращения функции $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению её аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$, если такой предел существует. Иначе,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (11.31)$$

Значение производной в точке равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке. Следовательно, точки, где производная обнуляется, являются локальными минимумами и максимумами функции.

Общепринятые обозначения для производной функции f в точке x_0 :

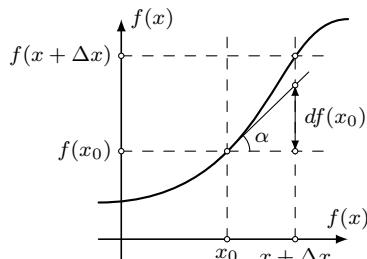


Рис. 135

$$f'(x_0) = f'_x(x_0) = Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \dot{f}(x_0). \quad (11.32)$$

Используя определение и операции с пределами, несложно получить следующие правила дифференцирования:

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g'; & \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2}; \\ (Cf)' &= Cf'; & & \\ (fg)' &= f'g + fg'; & \frac{d}{dx} f(g(x)) &= \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx}. \end{aligned}$$

И таблицу производных наиболее распространенных функций:

$$\begin{aligned} (x^a)' &= ax^{a-1}; & (\cos x)' &= -\sin x; & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \\ (a^x)' &= a^x \ln a; & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}; & (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}; \\ (\sin x)' &= \cos x; & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; & (\operatorname{arcctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}; \\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})' &= (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}'); & [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]' &= [\mathbf{a}' \times \mathbf{b}] + [\mathbf{a} \times \mathbf{b}']; \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})' &= (\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}', \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}'). \end{aligned}$$

11.10 Интеграл

Первообразной функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$ на всей области определения $f(x)$. Из определения легко понять, что первообразные функции $f(x)$ образуют целое семейство первообразных $G(x) = F(x) + C$, где C — константа, определяющая конкретную первообразную. Это семейство называется **неопределенным интегралом** функции $f(x)$,

$$F(x) = \int f(x) dx + C, \quad F'(x) = f(x). \quad (11.33)$$

Определенный интеграл характеризуется верхним и нижним пределом интегрирования. Значение определенного интеграла численно равно площади под графиком функции на данном промежутке и вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница:

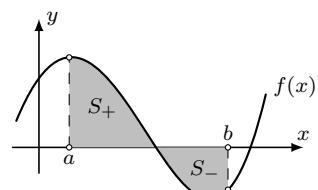


Рис. 136

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (11.34)$$

Правила интегрирования:

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx; \quad \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C;$$

$$\int f dg = fg - \int g df; \quad \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx;$$

Таблица интегралов:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \quad \int \frac{dx}{-\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos \frac{x}{a} + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{|x-a|}{|x+a|} \right| + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C.$$

Рассмотрим пример использования интеграла — получим формулу для нахождения объема шара с радиусом R . Сначала получим вспомогательную формулу площади круга радиуса R . Для этого рассмотрим тонкое кольцо радиуса r и ширины dr , его площадь составляет $2\pi r dr$. Следовательно, интегрируя площадь таких колец по радиусу r от 0 до R , получим площадь круга

$$S = \int_0^R 2\pi r dr = 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^R = \pi R^2.$$

Теперь, используя полученное выражение для площади круга, легко найти объем шара. Рассмотрим тонкий слой толщины dx на расстоянии x от центра шара, его радиус равен $\sqrt{R^2 - x^2}$. Проинтегрируем объем таких слоев по x от $-R$ до R :

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - x^2) dx = \pi \left(xR^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \pi \left(2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

В заключение нужно отметить, что интегрирование может вестись не только вдоль координатных осей той или иной системы координат, но и вдоль произвольной кривой в пространстве, по произвольной

поверхности в пространстве или, например, произвольной области пространства. В таком случае вместо пределов интегрирования указывают кривую, поверхность или область, по которой ведется интегрирование. Однако за сложной записью в любом случае кроется кратный интеграл, кратность которого определяется размерностью пространства, в котором определена область интегрирования.

11.11 Телесный угол

Телесный угол — часть пространства, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность (которая называется поверхностью, стягивающей данный телесный угол). Телесный угол измеряется в стерадианах и равен отношению площади сферы, которую вырезает данный угол, к квадрату радиуса данной сферы.

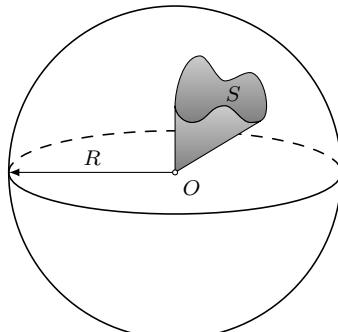


Рис. 137

$$\Omega = \frac{S}{R^2} \quad (11.35)$$

Телесный угол полной сферы равен 4π . Величину телесного угла, образованного конусом с углом раствора α можно определить по формуле

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right). \quad (11.36)$$

Телесный угол, соответствующий сегменту высоты h сферы радиуса R , равен

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right). \quad (11.37)$$

Для сферического треугольника с углами α , β и γ справедливо соотношение

$$\Omega = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \quad (11.38)$$

Докажем формулу (11.38). Для этого сначала определим формулу для телесного угла *двухугольника* — одной из четырех частей сферы,

образованных делением последней двумя различными большими кругами. Как легко догадаться из названия, у двуугольника два угла, равных между собой в силу свойств больших кругов сферы, также отсюда следует, что углы двуугольника лежат в противоположных точках сферы. Иначе, двуугольник — это «долька» сферы.

Из определения очевидно, что площадь двуугольника это $\alpha/2\pi$ площади сферы, которой он принадлежит, здесь α — величина углов двуугольника. Следовательно, телесный угол двуугольника с углом α равен

$$\Omega = \Omega_{\text{сф}} \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha.$$

Заметим, что сферический треугольник с углами α , β и γ образован пересечением трёх двуугольников с углами, соответственно, α , β и γ . При этом вертикальные, по углами, двуугольники этим двуугольникам в пересечении образуют равный исходному сферический треугольник.

Можно заметить, что все шесть двуугольников полностью покрывают сферу, пересекаясь лишь на двух равных сферических треугольниках. Учитывая тройной счёт сферических треугольников, запишем выражение для телесного угла сферы:

$$4\pi = 2 \cdot (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) - 2 \cdot 2\Omega_\Delta \Rightarrow \Omega_\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

11.12 Формулы приближенного вычисления

Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет производную n -ого порядка в точке x_0 — $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, тогда равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x) \quad (11.39)$$

называется **формулой Тейлора** функции f в точке x_0 . При этом первое слагаемое называется *многочленом Тейлора*, а второе — *остаточным членом*.

Докажем, что остаточный член $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$.²² Пусть существует $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, пусть также $P_n(x)$ — многочлен Тейлора функции f . Тогда $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $0 \leq k \leq n$.²³ Поэтому для

²² $g(x - x_0) = o(h(x - x_0))$ при $x \rightarrow x_0$ означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x - x_0)/h(x - x_0) = 0$.

²³ Подробное доказательство этого факта оставим читателю

остаточного члена $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ выполняется $r_n(x_0) = r'_n(x_0) = \dots = r_n^{(n)}(x_0) = 0$. Используя правило Лопитала, получим

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)},$$

а по определению производной в точке, последнее выражение равно $r^{(n)}(x_0)/n! = 0$. Следовательно, $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$.

Если функция f имеет в точке x_0 производные всех порядков, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (11.40)$$

называется **рядом Тейлора** функции f в точке x_0 . При $x_0 = 0$ этот ряд также называют **рядом Маклорена**.

В реальных задачах астрономии и физики редко возникает необходимость в использовании ряда Тейлора (11.40). Наиболее применима формула Тейлора (11.39) при $x_0 = 0$. Откуда можно получить следующие формулы приближенного вычисления при $x \ll 1$:

$$\begin{aligned} \sin x &\simeq x - \frac{x^3}{6} \simeq x, & \cos x &\simeq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \simeq 1 - \frac{x^2}{2}, \\ \operatorname{tg} x &\simeq x + \frac{x^3}{3} \simeq x, & \ln(1+x) &\simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \simeq x, \\ (1+x)^\alpha &\simeq 1 + \alpha x, & e^x &\simeq 1 + x + \frac{x^2}{2} \simeq 1 + x, \\ \sin(\theta + x) &\simeq \sin \theta + x \cos \theta, & \cos(\theta + x) &\simeq \cos \theta - x \sin \theta. \end{aligned}$$

При необходимости более точного приближения всегда можно выписать следующие несколько членов многочлена Тейлора.

По аналогии, последовательно применяя формулу Тейлора и принимая различные переменные за аргумент функции, можно получить формулу для нескольких малых переменных:

$$(1+a)^\alpha(1+b)^\beta \dots \simeq 1 + \alpha a + \beta b + \dots$$

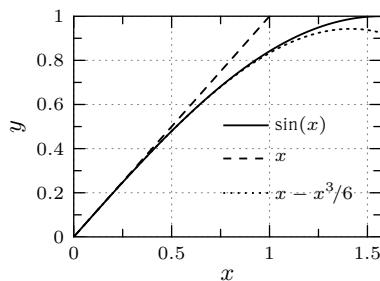


Рис. 138

11.13 Дифференциальные уравнения

Под **дифференциальными уравнениями** понимаются любые алгебраические или трансцендентные нетривиальные равенства, содержащие дифференциалы или производные. Существует большое число различных видов дифференциальных уравнений, изучение которых занимает не один семестр университетской программы. В рамках текущего по-вествования рассмотрим только два простейших из них для создания общего представления о дифференциальных уравнениях.

11.13.1 Уравнения с разделяющимися переменным

Рассмотрим уравнение $P(t, x) dt + Q(t, x) dx = 0$, где P и Q — некоторые непрерывные в некоторой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ функции. Если их можно представить в виде $P(t, x) = T_p(t)X_p(x)$ и $Q(t, x) = T_q(t)X_q(x)$, то это уравнение с **разделяющимися переменными**. Его можно записать как

$$T_p(t)X_p(x) dt + T_q(t)X_q(x) dx = 0.$$

Отдельно необходимо рассмотреть случаи, когда $X_p(x) = 0$ или $T_q(t) = 0$, а общее решение можно найти, разделив обе части уравнения на $X_p(x)T_q(t)$. В таком случае уравнение примет вид

$$\frac{T_p(t)}{T_q(t)} dt = -\frac{X_q(x)}{X_p(x)} dx,$$

интегрируя левую и правую часть, получим,

$$\int \frac{T_p(t)}{T_q(t)} dt = - \int \frac{X_q(x)}{X_p(x)} dx + C,$$

где константа интегрирования C определяется из начальных условий. Примеры использования и решения таких уравнений можно найти в разделах 2.1 и 4.18.

11.13.2 Уравнения гармонического консервативного осциллятора

Гармонические колебания материальной точки совершаются под действием сил, пропорциональных смещению колеблющейся точки от положения равновесия и направленной противоположно этому смещению. Примерами гармонических колебаний могут служить математический и пружинный маятники.

Рассмотрим материальную точку массы m и возвращающую силу $F = -kx$, где x — смещение материальной точки от точки равновесия, где сила F на неё не действует, а k — некая постоянная, определяющая величину силы F .

Тогда по второму закону Ньютона ускорение a материальной точки можно записать как

$$\frac{d^2x}{dt^2} \equiv a = -\frac{k}{m}x.$$

Обозначим k/m как ω^2 , а вторую производную смещения по времени как \ddot{x} , получим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (11.41)$$

Это уравнение описывает поведение консервативного гармонического осциллятора (*гармонических колебаний* без затухания). Его общее решение имеет вид

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t = C_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (11.42)$$

где C_0 , C_1 и C_2 — некоторые константы, определяющие амплитуду колебаний, а φ_0 — начальная фаза колебаний. Все параметры колебаний устанавливаются из начальных условий.

Из (11.42) видно, что для периода колебаний справедливо выражение

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (11.43)$$

Величину ω называют круговой частотой, так как измеряется она в радианах в секунду. Частота f в Гц связана в круговой частотой соотношением $\omega = 2\pi f$.

12 Практическая астрономия

12.1 Радиус дуги окружности

Самый простой и быстрый способ определения радиуса дуги окружности состоит в следующем. Необходимо построить хорду AB максимальной длины: при угловой мере дуги меньше 180° — просто соединить концы дуги, больше — оптимальным будет провести хорду, близкую к диаметру. Затем, нужно провести серединный перпендикуляр HH' к уже построенной хорде.

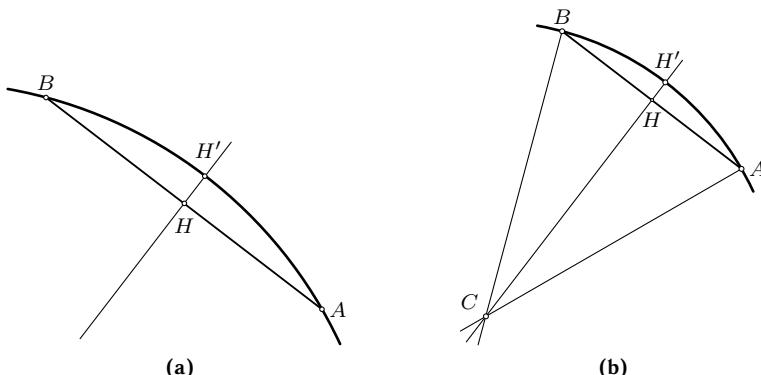


Рис. 139

С помощью линейки можно измерить длину l хорды AB — и длину h отрезка перпендикуляра HH' , соединяющего H — точку пересечения с хордой, и H' — точку пересечения с окружностью (см. Рис. 139а). Если мысленно продолжить серединный перпендикуляр, то он, очевидно, пройдет через центр окружности C , а значит, в одной точке (в центре) пересечется с радиусами AC и BC , проведенными в концы хорды (см. Рис. 139б). Пусть r — искомый радиус дуги, тогда из теоремы Пифагора получаем следующее:

$$\begin{aligned} (r - h)^2 &= r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2, \\ r^2 - 2rh + h^2 &= r^2 - \frac{l^2}{4}, \\ r &= \frac{4h^2 + l^2}{8h}. \end{aligned}$$

Аналогичный результат можно получить из теоремы об отрезках секущих, из которой следует, что

$$\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = (2r - h) \cdot h.$$

Однако для некоторых задач недостаточно величины радиуса дуги, необходимо знание положения центра окружности данной дуги. Для этого, например, можно воспользоваться предыдущим методом и найти радиус окружности, а потом отложить отрезок данной длины вдоль серединного перпендикуляра от точки пересечения с окружностью.

Но существует и другой способ. Можно провести две непараллельные хорды окружности и построить их серединные перпендикуляры. Так как они обязательно проходят через центр окружности — значит он будет точкой пересечения серединных перпендикуляров к хордам. В связи с возможными погрешностями при построениях рекомендуется строить не две, а три или четыре хорды и серединные перпендикуляры к ним (см. Рис. 140). Критерием правильности и достаточной точности всех построений будет служить тот факт, что все серединные перпендикуляры к хордам пересеклись в одной точке.

Используя данный метод, очевидно, можно найти и радиус дуги (окружности), измерив расстояние от найденного центра до произвольной точки на дуге (окружности) с помощью линейки.

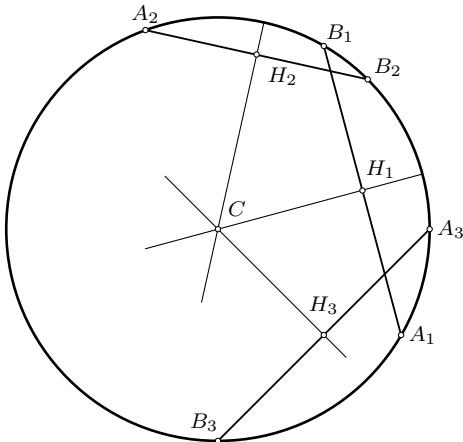


Рис. 140

12.2 Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов — математический метод, применяемый для решения различных задач, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомых переменных. Данный метод помогает найти функцию, на которую лучшим образом ложатся точки на графике. Для этого определяется функция f , сумма

квадратов отклонений e_i которой от заданных точек (x_i, y_i) , минимальна.

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 = \min_{g(x)} \sum_{i=1}^n [y_i - g(x_i)]^2 \quad (12.1)$$

Выход формул для коэффициентов линейной функции $f(x) = ax + b$ по МНК:

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 \rightarrow \min_{a, b} .$$

Условие (12.1) выполняется при равенстве нулю обеих частных производных функции $F(a, b)$, то есть

$$\begin{cases} \frac{\partial F(a, b)}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] x_i = 0; \\ \frac{\partial F(a, b)}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] = 0. \end{cases}$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i;$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + b = \sum_{i=1}^n y_i.$$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (12.2)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} = \langle y \rangle - a \langle x \rangle \quad (12.3)$$

Погрешности найденных коэффициентов определяются выражениями

$$\sigma_a \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - b^2}, \quad (12.4)$$

$$\sigma_b = \sigma_a \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \quad (12.5)$$

12.3 Погрешности

Погрешность — величина, характеризующая точность измерений. Стого говоря, численное значение чего-либо без указанной величины погрешности не несёт никакой информации, потому что *относительная погрешность* может быть как 0.01%, так и 30%. Погрешность отражает достоверность результата. Однако в задачах указывать погрешность не принято, но следить за ней нужно. При представлении ответа в стандартной форме последний знак в множителе должен соответствовать последнему значащему знаку и по порядку совпадать с *абсолютной погрешностью* результата.

Абсолютная погрешность — разность между найденным на опыте и истинным значением физической величины:

$$\Delta x = x_{\text{изм}} - x_{\text{ист.}} \quad (12.6)$$

Относительная погрешность — отношение абсолютной погрешности к значению измеряемой величины:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}} = \frac{x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}}{x_{\text{ист}}}. \quad (12.7)$$

Качество измерений обычно определяется относительной, а не абсолютной погрешностью, потому что одна и та же абсолютная погрешность может составлять как тысячные доли, так и несколько процентов от измеряемой величины. [23]

Грубые ошибки возникают вследствие ошибки экспериментатора или неисправности аппаратуры. Если установлено, что в каких-то измерениях присутствуют грубые ошибки, то такие изменения следует отбросить.

Систематические ошибки — ошибки, которые сохраняют свою величину и знак во время эксперимента. Такие ошибки могут быть связаны с погрешностью прибора или с постановкой опыта. Измерения, полученные с такими ошибками, следует корректировать на величину ошибки, которую можно получить опытным путем.

Случайные ошибки — ошибки, которые меняют знак и значение от опыта к опыту. Случайные ошибки подчиняются теории вероятности, а также обладают определенными закономерностями:

1. При большом числе измерений ошибки одинаковых величин, но разного знака встречаются одинаково часто.

2. Частота появления ошибок уменьшается с ростом величины ошибки. Иначе говоря, большие ошибки наблюдаются реже, чем малые.
3. Ошибки измерений могут принимать непрерывный ряд значений.

В качестве наилучшего значения для измеряемой величины обычно принимают среднее арифметическое из всех полученных результатов:

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (12.8)$$

Величина σ характеризует точность измерений. Значение $x = x_0 \pm \sigma$ означает, что величина x с вероятностью 0.68 лежит в данном интервале. $x = x_0 \pm 2\sigma$ с вероятностью 0.95 лежит в данном промежутке. При $x = x_0 \pm 3\sigma$ данная вероятность равна 0.997.

$$\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{\text{ср}})^2} \quad (12.9)$$

величина $\sigma_{\text{отд}}$ называется *среднеквадратичным отклонением*.

В действительности, погрешность одного вычисления не так интересна, как погрешность $\sigma_{\text{ср}}$ среднего результата

$$x = x_{\text{ср}} \pm \sigma_{\text{ср}}, \quad \text{где } \sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_{\text{отд}}}{\sqrt{n}}. \quad (12.10)$$

Случайные и систематические погрешности складываются по формуле

$$\sigma_{\text{полн}}^2 = \sigma_{\text{систем}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2 \quad (12.11)$$

Ошибки при косвенных измерениях. Если исследуемая величина представляет собой сумму или разность двух измеренных величин, иначе, $a = b \pm c$, то наилучшее значение величины a равно сумме (или разности) наилучших значений слагаемых:

$$a_{\text{наил}} = b_{\text{наил}} \pm c_{\text{наил}} = \langle b \rangle \pm \langle c \rangle, \quad (12.12)$$

погрешность в этом случае определяется по формуле

$$\sigma_a = \sqrt{\sigma_b^2 + \sigma_c^2}. \quad (12.13)$$

Если искомая величина равна произведению или частному двух других, то есть $a = bc^{\pm 1}$, тогда

$$a_{\text{наил}} = \langle b \rangle \langle c \rangle^{\pm 1} \quad (12.14)$$

$$\frac{\sigma_a}{a} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2} \quad (12.15)$$

В случае $a = b^\beta c^\gamma e^\varepsilon \dots$ для погрешности справедлива формула

$$\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 = \beta^2 \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\sigma_e}{e}\right)^2 + \dots \quad (12.16)$$

И наконец, формула для общего случая $a = f(b, c, e, \dots)$:

$$a_{\text{наил}} = f(b_{\text{наил}}, c_{\text{наил}}, e_{\text{наил}} \dots) \quad (12.17)$$

$$\sigma_a^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial e}\right)^2 \sigma_e^2 + \dots \quad (12.18)$$

12.4 Построение графиков

*В основу этого раздела вошли:
стандарты из ГОСТ 2.319-81, ГОСТ 3.1128-93 ЕСТД
и метод. пособие «Культура построения графиков», Замятин М. Ю.*

График — это визуальное представление данных, которое позволяет наглядно отобразить связь между двумя или более переменными. Наиболее наглядны графики связи двух переменных, так как удобно изображаются на плоскости. Рассмотрим подробнее нормы и принятые правила построения таких графиков.

Наиболее распространены графики в прямоугольных координатах, где одна ось — горизонтальная, и возрастание откладываемой величины происходит слева на право; а вторая — вертикальная, и возрастание происходит снизу вверх.

Реже применяются графики в полярных координатах, так как в этом случае *независимая переменная* обязательно является угловой мерой. В этом случае возрастание независимой переменной происходит против часовой стрелки, а ось отсчета *наблюдаемой величины* располагается горизонтально, направлена вправо и соответствует началу отсчета угловой меры.

Одна из переменных является **независимой**, её значения определяются условиям эксперимента и возможностями инструментов. Например, моменты времени измерения яркости объекта для построения его кривой блеска, длина волны излучения для построения кривой пропускающей фильтра или спектра наблюдаемого объекта. Независимая переменная всегда откладывается по горизонтальной оси.

Другая переменная называется **зависимой** или **наблюдаемой**. Для примеров выше это плотность потока излучения во всех трёх случаях. Наблюдаемая переменная всегда откладывается по вертикальной оси, чтобы график отражал поведения зависимости наблюдаемой величины от независимой.

При построении графиков важно помнить, что прежде всего график должен быть удобным: значения — легко считываться, характер зависимости — очевиден, характерные точки — видны. Для достижения описанных свойств достаточно придерживаться простых правил:

1. Построение графика начинается с таблицы, куда заносятся значения независимой величины и соответствующие им измеренные значения наблюдаемой. В заголовке таблица обязательно должны быть указаны названия величин и единицы измерения.
2. Далее определяется удобный для построения масштаб. Для этого нужно определить максимальный размер графика, исходя из размеров бумаги и правил, описанных ниже. А из таблицы — диапазон значений величин.
3. Исходя из выбранного масштаба и значений, указанных в таблице, на бумаге наносятся, градуируются и оцифровываются оси. Для удобства исправления возможных ошибок чертить оси и выполнять оцифровку лучше ручкой, лучше черного цвета, чтобы при работе ластиком не повредить оси.
4. После осей на график наносятся точки, уже описанные в таблице. Для большей точности отмечать точки лучше крестами (\times , при налобии двух зависимостей на одном графике допустимо использовать $+$), так точку будет хорошо видно, при этом сохранится точность её положения. Рекомендуется использовать кресты размером 2 мм на 2 мм.
5. В конце, при необходимости, наносится кривая измеряемой зависимости. Здесь важно использовать имеющиеся знания о зависимости: если это прямая — сглаживающая кривая должна быть прямой, если

экспонента — экспонентой и т. д. Кривую лучше наносить карандашом, чтобы иметь возможность перерисовать в случае ошибки, не отрывая руки, для большей эстетичности графика.

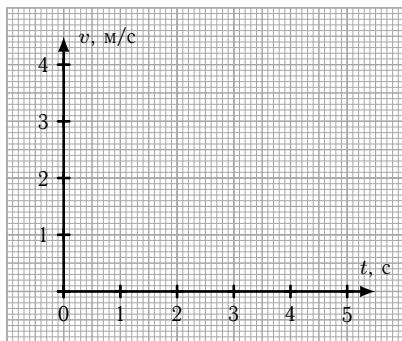
Далее будут приведены общепринятые нормы и правила оформления графиков.

- График лучше ориентировать горизонтально.
- Для упрощения оцифровки и большего удобства оси необходимо располагать не ближе 1 см от края бумаги.
- Удобно использовать график, где оси пересекаются в точке (0, 0). Для лучшей детализации допускается смещать точку пересечения по обеим осям. Однако не стоит забывать, что точка (0, 0) является ключевой для некоторых зависимостей. См. Рис. 141 и Рис. 142.
- Оси обязательно должны быть подписаны. Достаточно указания переменной или формулы и, через запятую, единицы измерения, возможно, с общим множителем. Подписи выполняются горизонтально.
- Для качественных графиках допустимо не указывать масштаб, единицы измерения указывать только у характерных значений. См. Рис. 143 и Рис. 144
- Выбор масштаба необходимо осуществлять таким образом, чтобы график занимал не менее 70% процентов области построения, см. Рис. 145.
- Штрихи (основные и дополнительные, оцифрованные и нет) наносятся **только** через равные промежутки. Исключением являются нелинейные шкалы, например, логарифмическая.
- Оцифровка осей производится равномерно, не чаще 2–3 см, всегда горизонтально. Если значения содержат много нулей, общий множитель выносится в подпись оси.
- Если оси пересекаются в точке (0, 0), ноль подписывается только у одной шкалы.
- При оцифровке осей следует использовать только десятичные числа из следующий «разрешенных» рядов:

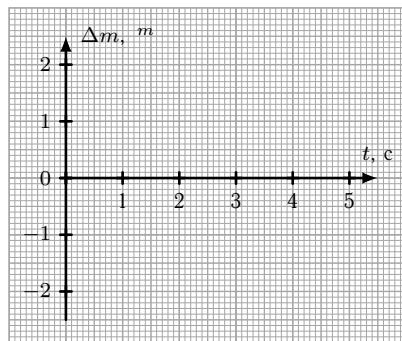
$$\dots, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots;$$

$$\dots, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots;$$

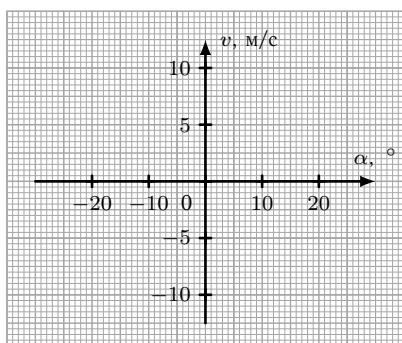
$$\dots, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \dots$$



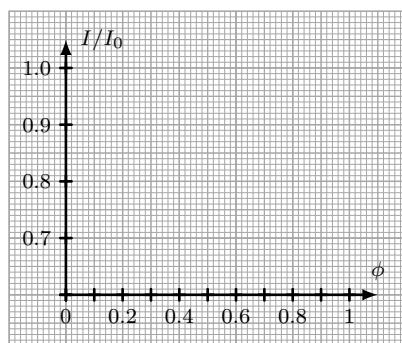
(а) – Обе величины принимают только положительные значения



(б) – Зависимая величина принимает в том числе отрицательные значения



(с) – Обе величины принимают и положительные и отрицательные значения



(д) – Смещено пересечение осей для лучшей детализации

Рис. 141 – Примеры *хорошего* расположения координатных осей

или рядов, полученных умножением «разрешенных» на 10^n . Допустимы исключения для значений временных и угловых величин. Числа необходимо округлять с одинаковой точностью.

- При построении экспериментальных зависимостей точки, указанные в таблице, должны быть видны, даже после проведения линии графика. Для большей точности лучше использовать символ \times или $+$.
- Линии, отражающие теоретические зависимости, напротив, должны поглощать точки, отчего не важно, по каким именно точкам строить такие зависимости.

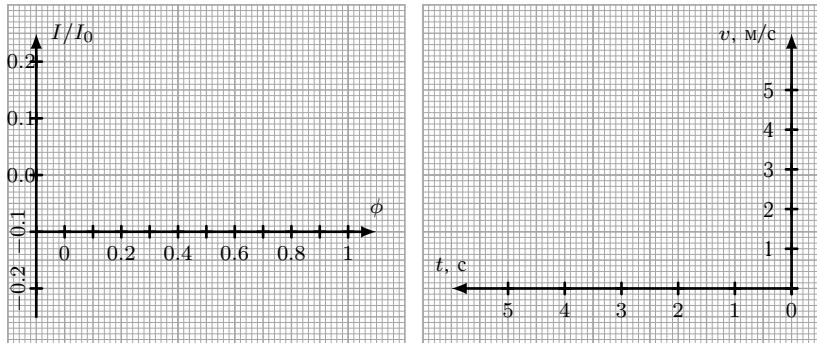


Рис. 142 – Примеры плохого расположения координатных осей

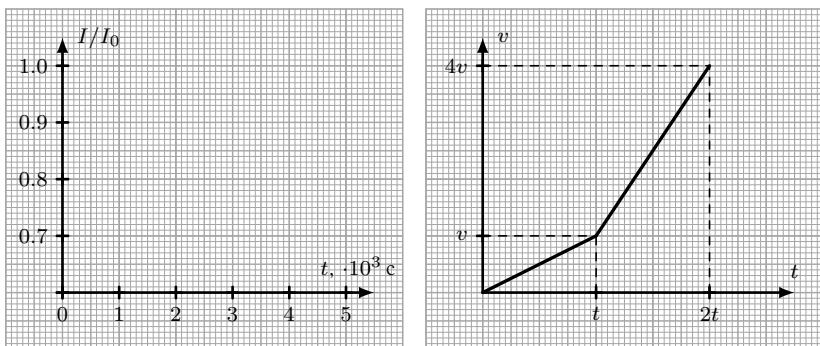
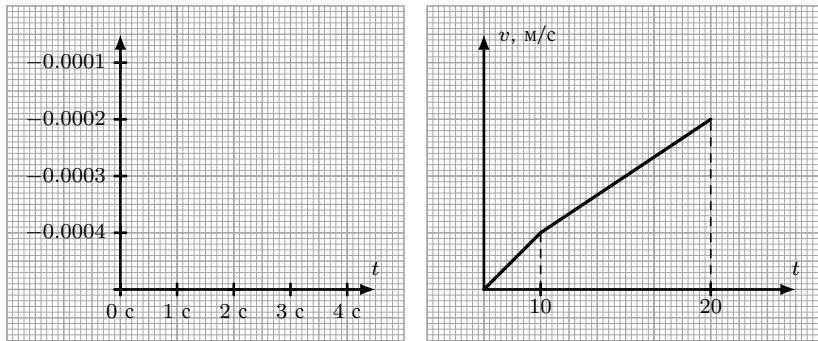


Рис. 143 – Примеры хороших подписей координатных осей

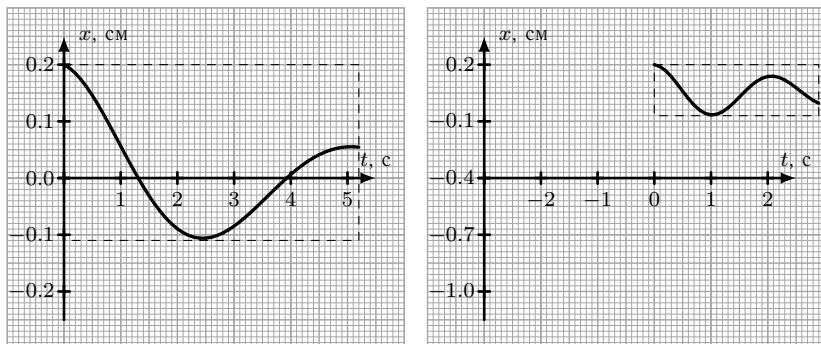
- Значения наблюдаемых и измеряемых величин неизбежно содержат в себе некоторую погрешность, поэтому линия графика экспериментальной зависимости не обязана проходить через них.
- Однако при указании усов погрешностей, кране желательно располагать линию таким образом, чтобы она пересекала максимальное число доверительных областей.



(а) – По горизонтальной оси не вынесены единицы измерения. Не подписьана вертикальная ось. Не вынесен общий множитель значений по вертикальной оси.

(б) – Указаны единицы изменения у неоцифрованной вертикальной оси. Нет единиц измерения у оцифрованной горизонтальной оси. Несоблюдение пропорциональности в расположении характерных точек.

Рис. 144 – Примеры плохих подписей координатных осей

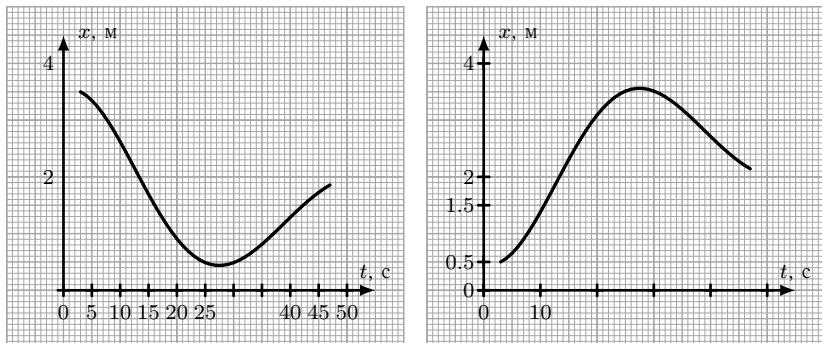


(а) – Хороший график. Занимает около 70% площади.

(б) – График занимает существенно меньше 70% области построения, выходит за пределы области построения – вылезает за край горизонтальной оси.

Рис. 145 – Пример хорошего и плохого расположения графика за счет выбора масштаба осей и точки их пересечения.

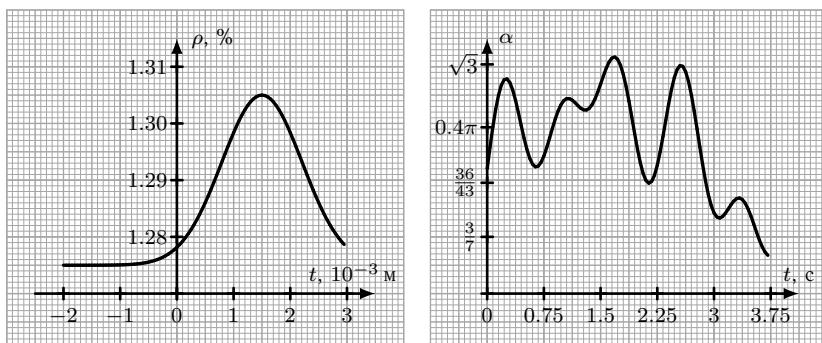
- Она должна быть максимально гладкой, не иметь изломов, лишних перегибов, в зависимости от типа зависимости, может быть прямой. Быть аккуратной и яркой, при этой достаточно тонкой и однородной.



(а) – Слишком частая и неравномерная оцифровка горизонтальной оси. Слишком редкая оцифровка вертикальной оси. На вертикальной оси отсутствуют штрихи.

(б) – Отсутствует оцифровка горизонтальной оси. Повторение нуля. Неравные деления по вертикальной оси.

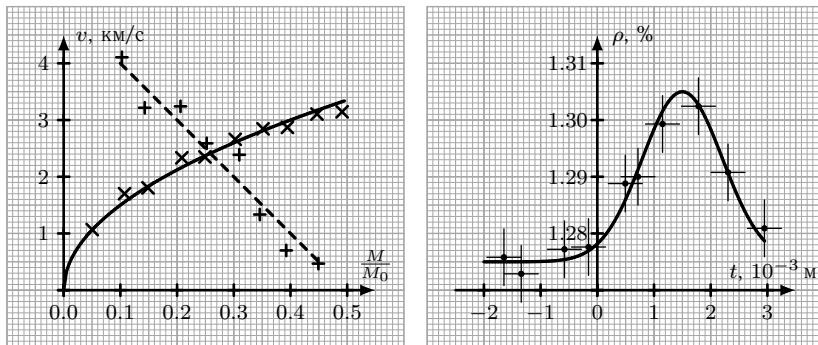
Рис. 146 – Примеры плохой оцифровки и разметки осей



(а) – Разрешенные ряды. Общий множитель оцифровки горизонтальной оси вынесен в подпись оси. Числа оцифровки вертикальной оси приведены с одинаковой точностью.

(б) – Запрещенные ряды. Числа оцифровки горизонтальной оси указаны с разной точностью. По вертикальной оси штрихи и оцифровка сделаны через разные промежутки.

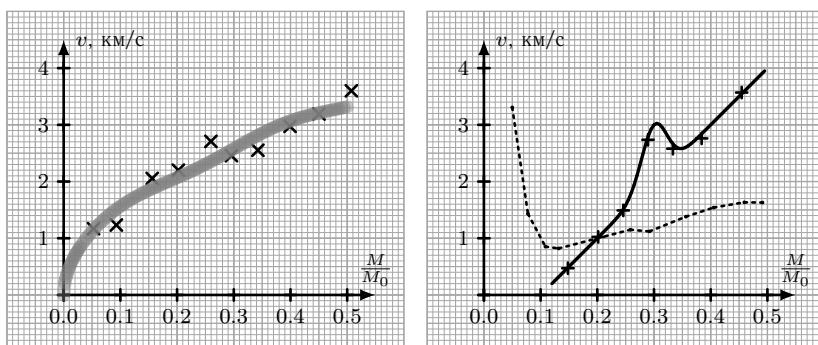
Рис. 147



(а) – Две экспериментальные зависимости.

(б) – Экспериментальная зависимость с усами погрешностей.

Рис. 148 – Примеры *хороших* графиков экспериментальных зависимостей



(а) – Негладкая, неаккуратная, толстая, неяркая линия, поглощающая экспериментальные точки.

(б) – Сплошная линия имеет ярко выраженный изгиб под одну точку, скорее всего это выброс, и его нужно проигнорировать. Пунктирная линия – ломаная, кроме этого за ней не видно экспериментальные точки.

Рис. 149 – Примеры *плохих* графиков экспериментальных зависимостей

Приложение

Объект	Большая полуось a , а.е.	Сидерический период T , год	Эксцентриситет e	Наклонение i , $^\circ$	Долгота восходящего узла, $^\circ$	Аргумент перигея ω , $^\circ$
Меркурий	0.387	0.241	0.206	7.00	48.3	29.1
Венера	0.723	0.615	0.007	3.39	76.7	54.9
Земля	1.000	1.000	0.017	0.00	348.7	114.2
Марс	1.524	1.881	0.093	1.85	49.6	286.5
Церера	2.765	4.601	0.079	10.6	80.4	2.83
Юпитер	5.204	11.86	0.048	1.31	100.6	275.1
Сатурн	9.582	29.46	0.056	2.49	113.6	336.0
Уран	19.23	84.01	0.044	0.77	74.0	96.5
Нептун	30.06	164.8	0.011	1.77	131.8	265.6
Плутон	39.48	247.9	0.249	17.1	110.2	113.8

Таблица 3 – Параметры орбит больших тел Солнечной системы

Объект	Символ	Масса M , кг	Радиус R , м	Период T , ч	Наклон оси i , $^\circ$
Солнце	\odot	1.99×10^{30}	6.97×10^8	609.1	7.25
Меркурий	☿	3.33×10^{23}	2.44×10^6	1408.	0.035
Венера	♀	4.87×10^{24}	6.05×10^6	5833.	177.4
Земля	\oplus	5.97×10^{24}	6.37×10^6	23.93	23.44
Луна	☽	7.35×10^{22}	1.74×10^6	655.7	1.54
Марс	σ	6.42×10^{23}	3.39×10^6	24.62	25.19
Церера		9.39×10^{20}	4.63×10^5	9.077	3
Юпитер	♃	1.90×10^{27}	7.00×10^7	9.925	3.13
Сатурн	♄	5.68×10^{26}	5.82×10^7	10.53	26.73
Уран	δ	8.68×10^{25}	2.54×10^7	17.24	97.77
Нептун	♆	1.02×10^{26}	2.46×10^7	15.97	28.32
Плутон	♇	1.30×10^{22}	1.19×10^6	153.3	119.6

Таблица 4 – Физические характеристики больших тел Солнечной системы

Светимость Солнца L_\odot	3.828×10^{26} Вт
Видимая звёздная величина Солнца m_\odot	-26.74^m
Абсолютная звёздная величина Солнца M_\odot	$+4.83^m$
Показатель цвета Солнца $(B - V)_\odot$	$+0.67^m$
Эффективная температура Солнца T_\odot	5778 К

Большая полуось орбиты Луны $a_{\mathbb{D}}$	384399 км
Эксцентриситет орбиты Луны $e_{\mathbb{D}}$	0.055
Наклонение плоскости орбиты Луны к эклиптике $i_{\mathbb{D}}$	5.15°
Сидерический период Луны $T_{\mathbb{D}}$	27.3217 сут
Геометрическое альбено Луны $A_{\mathbb{D}}$	0.12
Видимая звёздная величина Луны в полнолунии m_{\odot}	-12.7 ^m
Геометрическое Альбено Земли A_{\oplus}	0.37
<hr/>	
Заряд электрона e	-1.6×10^{-19} Кл
Постоянная Планка h	6.626×10^{-34} Дж · с
Постоянная Стефана-Больцмана σ	5.670×10^{-8} Вт · м ⁻² · К ⁻⁴
Гравитационная постоянная G	6.672×10^{-11} м ³ · с ⁻² · кг ⁻¹
Постоянная Больцмана k	1.381×10^{-23} Дж · К ⁻¹
Постоянная Хаббла H	67 км · с ⁻¹ · Мпк ⁻¹

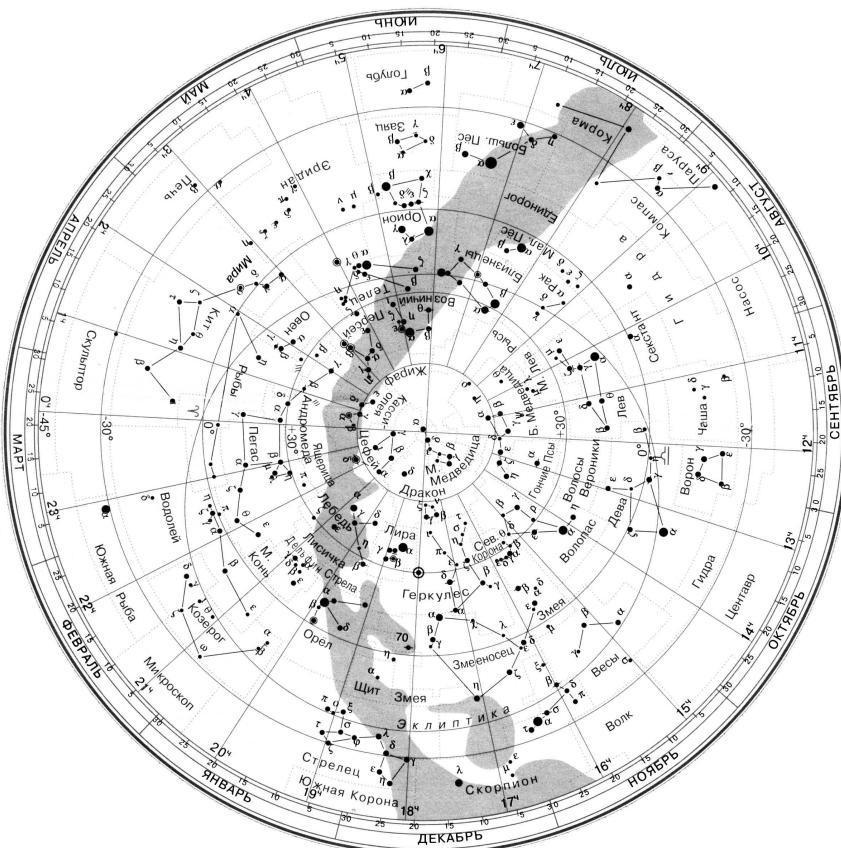


Рис. 150 – Карта звёздного неба до -45° по склонению

Список литературы

- [1] IAU 2012 Resolution B2 on the re-definition of the astronomical unit of length. 2012. 
- [2] I. Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. J. Societatis Regiae ac Typis J. Streater, 1687. 
- [3] I. Newton, A. Motte и N. W. Chittenden. *The mathematical principles of natural philosophy*. New-York, 1848. 
- [4] Frode Kristian Hansen. *AST1100 Lecture Notes. 5 The virial theorem*. 2014. 
- [5] A.E. Roy. *Orbital Motion*. University of Glasgow: CRC Press, 2004, с. 108. 
- [6] В. Балк. *Элементы динамики космического полёта*. Москва: Издательство "Наука", 1965, с. 114—116. 
- [7] E. E. Mamajek и др. IAU 2015 Resolution B2 on Recommended Zero Points for the Absolute and Apparent Bolometric Magnitude Scales. 2015. doi: 10.48550/ARXIV.1510.06262. 
- [8] H. L. Johnson и др. “UBVRIJKL Photometry of the Bright Stars”. B: *Communications of the Lunar and Planetary Laboratory* (1966). 
- [9] *Derivation of the barometric formula (isothermal atmosphere)*.
<https://www.tec-science.com/mechanics/gases-and-liquids/barometric-formula-for-an-isothermal-atmosphere/>. 

- [10] *Derivation of the barometric formula (adiabatic atmosphere).*
<https://www.tec-science.com/mechanics/gases-and-liquids/barometric-formula-for-an-adiabatic-atmosphere/>.

- [11] *Atmospheric Optics.* <https://old.atoptics.co.uk>.

- [12] J A Champion. “Rainbows, Halos and Glories”. B: *Physics Bulletin* (1981).

- [13] Les Cowley, Philip Laven и Michael Vollmer. “Rings around the sun and moon: coronae and diffraction”. B: *Physics Education* (2005).

- [14] Н. А. Кириченко. *Электричество и магнетизм: учебное пособие для вузов по направлению "Прикладные математика и физика"*. МФТИ, 2011, с. 19–23.

- [15] G. B. Airy. “On the Diffraction of an Object-glass with Circular Aperture”. B: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* (1835).

- [16] E. P. Hubble. “Extragalactic nebulae.” B: (1926). doi: 10.1086/143018.

- [17] S. M. Faber и R. E. Jackson. “Velocity dispersions and mass-to-light ratios for elliptical galaxies.” B: (1976). doi: 10.1086/154215.

- [18] Donald H. Gudehus. “Systematic Bias in Cluster Galaxy Data, Affecting Galaxy Distances and Evolutionary History”. B: (1991). doi: 10.1086/170687.

- [19] R. B. Tully и J. R. Fisher. “A new method of determining distances to galaxies.” B: (1977).


- [20] Stacy S. McGaugh. “The Baryonic Tully-Fisher Relation of Gas Rich Galaxies as a Test of LCDM and MOND”. B: *The Astronomical Journal* (2012). doi: 10.1088/0004-6256/143/2/40.



- [21] Brad M. S. Hansen и др. “The White Dwarf Cooling Sequence of the Globular Cluster Messier 4”. B: *The Astrophysical Journal* 574.2 (2002).



- [22] Эрнест Борисович Винберг. *Курс алгебры*. 2-е изд., испр. и доп. М.: Факториал Пресс, 2001.



- [23] А.Д. Гладун и др. *Лабораторный практикум по общей физике. Том 1. Механика*. МФТИ, 2004, с. 17–29.



Подписано в печать 22.12.2020.

Формат 84×108/32. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Тираж 500 экз.

Отпечатано в ГУП МО «Коломенская типография».
140400, г. Коломна, ул. III Интернационала, д. 2а