

А.Н.Огурцов

## ФИЗИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ

### МАГНЕТИЗМ

*ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ*

**4**

<http://users.kpi.kharkov.ua/ogurtsov/lect4mag-7.pdf>

<http://www.ilt.kharkov.ua/bvi/ogurtsov/ln.htm>

## Магнитное поле

### 1. Основные особенности магнитного поля.

В 19 веке опытным путем были исследованы законы взаимодействия постоянных магнитов и проводников, по которым пропускался электрический ток. Опыты показали, что подобно тому, как в пространстве, окружающем электрические заряды, возникает электростатическое поле, так и в пространстве, окружающем токи и постоянные магниты, возникает силовое поле, которое называется **магнитным**.

Были установлены два экспериментальных факта:

- 1) *магнитное поле действует на движущиеся заряды;*
- 2) *движущиеся заряды создают магнитное поле.*

Этим магнитное поле существенно отличается от электростатического, которое действует как на движущиеся, так и на неподвижные заряды.

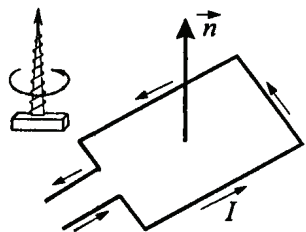
*Магнитное поле не действует на покоящиеся заряды.*

Опыт показывает, что характер воздействия магнитного поля на ток зависит от (1) *формы* проводника, по которому течет ток; от (2) *расположения* проводника и от (3) *направления* тока.

### 2. Рамка с током. Направление магнитного поля.

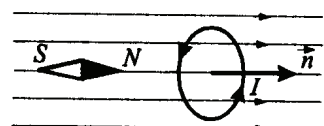
Аналогично тому, как при исследовании электростатического поля использовался точечный пробный заряд, при исследовании магнитного поля используется **замкнутый плоский контур с током (рамка с током)**, линейные размеры которого малы по сравнению с расстоянием до токов, образующих магнитное поле.

Ориентация контура в пространстве характеризуется направлением нормали  $\vec{n}$  к контуру.



В качестве **положительного направления нормали** принимается направление, связанное с током **правилом правого винта (правилом буравчика)**:

*За положительное направление нормали принимается направление поступательного движения правого винта, головка которого вращается в направлении тока, текущего в рамке.*



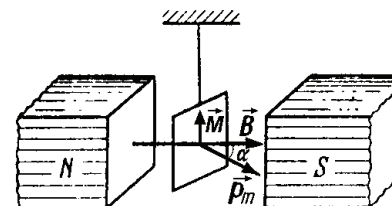
Магнитное поле оказывает на рамку с током ориентирующее действие, поворачивая её определенным образом. Это свойство используется для выбора **направления магнитного поля**.

**За направление магнитного поля в данной точке** принимается направление, вдоль которого располагается **положительная нормаль** к свободно подвешенной рамке с током, или направление, совпадающее с направлением силы, действующей на северный полюс (N) магнитной стрелки, помещенный в данную точку поля.

### 3. Вектор магнитной индукции.

Вращающий момент сил зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств рамки с током и определяется векторным произведением

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}],$$



где  $\vec{p}_m$  – **вектор магнитного момента** рамки с током,  $\vec{B}$  – **вектор магнитной индукции** – силовая характеристика магнитного поля. По определению векторного произведения скалярная величина момента

$$M = p_m B \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ .

Для плоского контура с током  $I$  магнитный момент определяется как

$$\vec{p}_m = IS\vec{n},$$

где  $S$  – площадь поверхности контура (рамки),  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности рамки. В этом случае вращающий момент  $\vec{M} = IS[\vec{n}, \vec{B}]$ .

Если в данную точку магнитного поля помещать рамки с различными магнитными моментами, то на них действуют различные вращающие моменты,

но отношение  $\frac{M_{\max}}{p_m}$  для всех контуров одно и то же.

Аналогично тому, как силовая векторная характеристика электростатического поля – напряженность – определялась как сила, действующая на пробный заряд, **силовая характеристика магнитного поля – магнитная индукция**  $\vec{B}$  – определяется максимальным вращающим моментом, действующим на рамку с магнитным моментом, равным единице, когда нормаль к рамке перпендикулярна направлению поля.

Графически магнитное поле, так же как электрическое, изображают с помощью **линий магнитной индукции** – линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\vec{B}$ .

**Линии магнитной индукции всегда замкнуты** и охватывают проводники с током, в то время как **линии электростатического поля – разомкнуты** (они начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах).

### 4. Макротоки и микротоки.

В дальнейшем мы будем различать **макроскопические токи**, т.е. электрические токи, протекающие по проводникам в электрических цепях и **микроскопические токи**, обусловленных движением электронов в атомах и молекулах.

Намагниченность постоянных магнитов является следствием существования в них **микротоков**.

Внешнее магнитное поле оказывает ориентирующее, упорядочивающее действие на эти микротоки. Например, если вблизи какого-то тела поместить проводник с током (**макроток**), то под действием его магнитного поля **микротоки** во всех атомах определенным образом ориентируются, создавая в теле **дополнительное** магнитное поле.

Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  характеризует *резльтирующее* магнитное поле, создаваемое *всеми макро- и микротоками*.

Поэтому, при одном и том же макротоке, вектор  $\vec{B}$  в различных средах будет иметь разные значения.

Магнитное поле макротока описывается **вектором напряженности магнитного поля  $\vec{H}$** .

В среде магнитное поле макротоков усиливается за счет поля микротоков среды.

#### 5. Связь между $\vec{B}$ и $\vec{H}$ .

Для однородной изотропной среды вектор магнитной индукции

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная (см. п.12),  $\mu$  – **магнитная проницаемость среды** (п.39), безразмерная величина, показывающая, во сколько раз магнитное поле макротоков  $\vec{H}$  усиливается за счет поля микротоков среды.

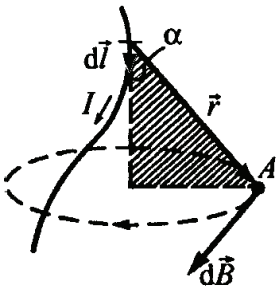
#### 6. Подобие векторных характеристик электростатического и магнитного полей.

Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  – *аналог* вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$ . Эти величины определяют силовые действия этих полей и зависят от свойств среды.

Аналогом вектора электрического смещения  $\vec{D}$  является вектор напряженности  $\vec{H}$  магнитного поля.

Для магнитного поля, как и для электрического, **справедлив принцип суперпозиции**: магнитная индукция результирующего поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме магнитных индукций полей, создаваемых каждым током или движущимся зарядом.

#### 7. Закон Био–Савара–Лапласа.



Элемент проводника  $d\vec{l}$  с током  $I$  создает в некоторой точке  $A$  индукцию поля

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3},$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из элемента  $d\vec{l}$  проводника в точку  $A$ .

Направление  $d\vec{B}$  перпендикулярно  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ , и совпадает с касательной к линии магнитной индукции. Модуль вектора  $d\vec{B}$  определяется выражением

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \sin \alpha}{r^2},$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

#### 8. Магнитное поле прямого тока.

Ток течет по прямому проводу бесконечной длины. В качестве постоянной интегрирования выберем угол  $\alpha$ .

Из рисунка  $r = \frac{R}{\sin \alpha}$ ,  $d\vec{l} = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha}$ .

Следовательно  $dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} \sin \alpha d\alpha$ .

Угол  $\alpha$  для всех элементов прямого провода изменяется от 0 до  $\pi$ . По принципу суперпозиции

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi R} I \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi R} 2I.$$

Если ток течет по отрезку провода (см. рисунок), то

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi R} I (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Эта формула переходит в формулу для бесконечного длинного проводника при  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi$ .

#### 9. Магнитное поле в центре кругового тока.

В данном случае сложение векторов можно заменить сложением их модулей, учитывая  $\sin \alpha = 1$  и  $r = R$ ,

$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R^2} d\vec{l}$ , откуда

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi R^2} I \int d\vec{l} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi R^2} I 2\pi R = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}$$

Можно показать, что на расстоянии  $r$  от центра витка вдоль оси витка

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{IR^2}{(\sqrt{R^2 + r^2})^3}.$$

Напряженность магнитного поля, создаваемого круговым током, на большом расстоянии от витка с током ( $r \gg R$ )

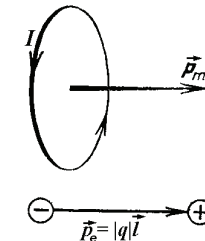
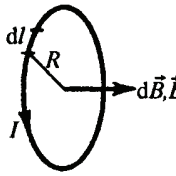
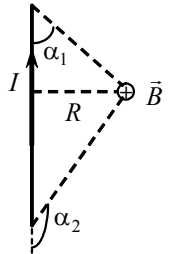
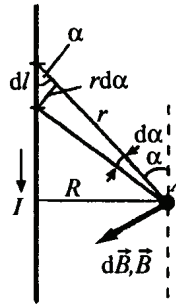
$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu} = \frac{IR^2}{2r^3} = \frac{IR^2 \cdot 2\pi}{2r^3 \cdot 2\pi} = \frac{2I \cdot \pi R^2}{4\pi r^3} = \frac{2IS}{4\pi r^3} = \frac{2p_m}{4\pi r^3},$$

где  $p_m = IS$  – магнитный момент витка с током.

Сравним эту формулу с формулой для электрического поля диполя (с электрическим дипольным моментом  $p_e$ ) на оси диполя (см. 3–п.13)

$$D = \epsilon_0 \epsilon E = \epsilon_0 \epsilon \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \frac{2p_e}{r^3} = \frac{2p_e}{4\pi r^3}.$$

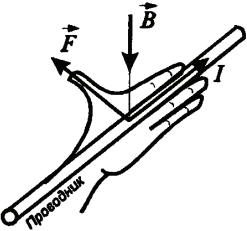
Очевидное подобие этих формул объясняет, почему часто говорят, что контур с током подобен "магнитному диполю", имеющему равный с контуром магнитный момент.



### 10. Закон Ампера.

Действие магнитного поля на рамку с током – это пример воздействия магнитного поля на проводник с током. Ампер установил, что сила  $d\vec{F}$ , с которой магнитное поле действует на элемент проводника  $d\vec{l}$  с током, находящегося в магнитном поле, равна

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}],$$



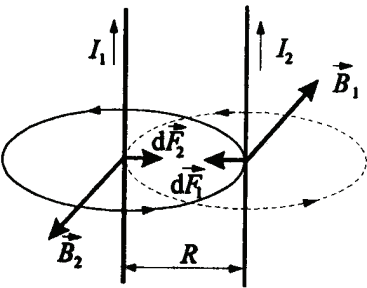
где  $d\vec{l}$  – вектор по модулю равный  $d\vec{l}$  и совпадающий по направлению с током,  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции.

Наглядно направление силы Ампера принято определять по **правилу левой руки**: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор  $\vec{B}$ , а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление силы Ампера.

### 11. Взаимодействие параллельных токов.

Закон Ампера применяется для определения силы взаимодействия двух токов.

Два параллельных проводника с токами  $I_1$  и  $I_2$  находятся на расстоянии  $R$  друг от друга. Направление сил  $d\vec{F}_1$  и  $d\vec{F}_2$ , с которыми поля  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  действуют на проводники с токами  $I_2$  и  $I_1$ , определяются по правилу левой руки.



$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1}{R}, \quad dF_1 = I_2 B_1 dl.$$

$$\text{Отсюда: } dF_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \text{ Аналогично}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_2}{R}, \quad dF_2 = I_1 B_2 dl,$$

$$dF_2 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad \text{Таким образом:}$$

$$dF_1 = dF_2 = dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl.$$

Проводники с токами *одинакового* направления *притягиваются*, с токами *разного* направления – *отталкиваются*.

### 12. Магнитная постоянная.

В системе СИ единица измерения силы тока – **ампер** – вместе с килограммом, метром и секундой является основной единицей. По определению "ампер есть сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 метра один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  ньютона на каждый метр длины".

В вакууме ( $\mu = 1$ ) сила взаимодействия на единицу длины проводника

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R}$$

при  $I_1 = I_2 = 1\text{А}$  и  $R = 1\text{м}$ :  $\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}$ . Отсюда

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}},$$

где **генри (Гн)** – единица индуктивности – будет определена позднее.

### 13. Единицы магнитной индукции и напряженности магнитного поля.

Пусть элемент проводника  $d\vec{l}$  с током  $I$  перпендикулярен направлению магнитного поля. Закон Ампера  $d\vec{F} = I\vec{B}d\vec{l}$ , откуда

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF}{dl}.$$

**Единица магнитной индукции  $B$  – тесла (Тл)** – магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1Н на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику проходит ток 1А:  $1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}$

Из формулы  $B = \mu_0 \mu H$  в вакууме ( $\mu = 1$ ) получим  $H = \frac{B}{\mu_0}$ .

**Единица напряженности магнитного поля  $H$  – ампер на метр (А/м)** – напряженность такого поля, индукция которого в вакууме равна  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Тл}$ .

### 14. Магнитное поле свободно движущегося заряда.

Проводник с током создает вокруг себя магнитное поле. Электрический ток – это упорядоченное движение электрических зарядов. Магнитное поле  $\vec{B}$  точечного заряда  $q$ , свободно движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью  $\vec{v}$  ( $v \ll c$ )

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}, \quad B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{qv}{r^2} \sin \alpha,$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из заряда  $q$  к точке наблюдения,  $\alpha$  – угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ .

### 15. Сила Лоренца.

Так же как и на проводник с током, магнитное поле действует и на отдельный заряд, движущийся в магнитном поле.

Сила, действующая на электрический заряд  $q$ , движущийся в магнитном поле  $\vec{B}$  со скоростью  $\vec{v}$ , называется **силой Лоренца**

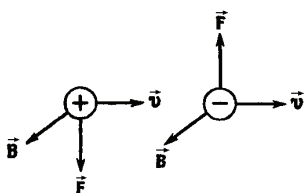
$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$$

$$\text{или } F = qvB \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Сводная таблица.

	Проводник с током	Свободно движущийся заряд
Магнитное поле	$\vec{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I[\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3}$ закон Био–Савара–Лапласа	$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$
Сила, действующая на	$\vec{d}\vec{F} = I[\vec{dl}, \vec{B}]$ сила Ампера	$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$ сила Лоренца



Направление силы Лоренца, так же как и силы Ампера, определяется по *правилу левой руки*. Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы. Поэтому она изменяет только направление этой скорости, не изменяя ее модуля. Следовательно, сила Лоренца работы не совершает.

Постоянное магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем заряженной частицей и кинетическая энергия этой частицы при движении в магнитном поле не изменяется.

Движение заряда, на который кроме магнитного поля с индукцией  $\vec{B}$  действует и электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ , описывается **формулой Лоренца**

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}].$$

### 16. Движение заряженных частиц в магнитном поле.

Считаем, что магнитное поле *однородно* и на частицы не действуют электрические поля. Рассмотрим три возможных случая:

1.  $\vec{v} \parallel \vec{B}$  – Заряженная частица движется в магнитном поле вдоль линий

магнитной индукции (угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  равен 0 или  $\pi$ ). Сила Лоренца равна нулю. Магнитное поле на частицу не действует, и она движется **равномерно и прямолинейно**.

2.  $\vec{v} \perp \vec{B}$  – Заряженная частица движется в магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции (угол  $\alpha = \pi/2$ ).

Сила Лоренца  $F = qvB$ : постоянна по модулю и нормальна к траектории частицы. **Частица будет двигаться по окружности** радиуса  $R$  с центростремительным ускорением  $a_n = \frac{v^2}{R}$ . Из второго закона Ньютона  $qvB = \frac{mv^2}{R}$

получаем радиус окружности  $R = \frac{mv}{qB}$  и период вращения  $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$ .

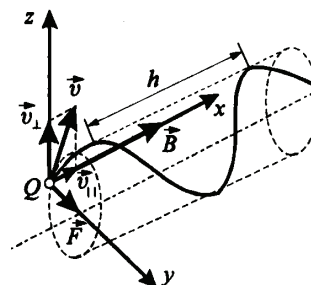
3. Заряженная частица движется под углом  $\alpha$  к линиям магнитной индукции.

Движение частицы можно представить в виде **суммы двух движений**:

1) равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha,$$

2) равномерного движения по окружности в плоскости, перпендикулярной полю.



Суммарное движение будет движением по спирали, ось которой параллельна магнитному полю. Шаг винтовой линии  $h = v_{\parallel} T = v T \cos \alpha$ , где

$$T = \frac{2\pi R}{v} \text{ – период вращения частицы, и } R = \frac{mv}{qB}$$

$$h = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}.$$

Если магнитное поле неоднородно и заряженная частица движется под углом к линиям магнитного поля в направлении возрастания

поля, то величины  $R$  и  $h$  уменьшаются с ростом  $\vec{B}$ . На этом основана фокусировка заряженных частиц магнитным полем.

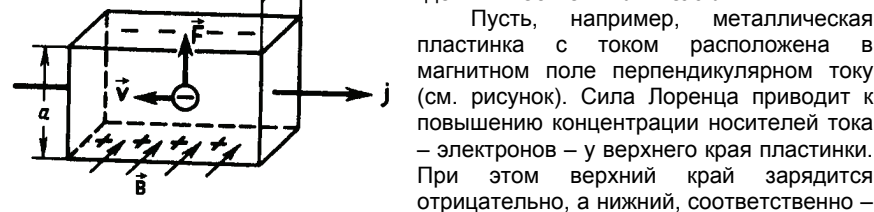
### 17. Эффект Холла.

**Эффект Холла** – это возникновение электрического поля в проводнике или полупроводнике с током при помещении его в магнитное поле.

Эффект Холла – следствие влияния силы Лоренца на движение носителей тока. В магнитном поле  $\vec{B}$  при протекании через проводник тока с плотностью  $\vec{j}$  устанавливается электрическое поле с напряженностью

$$\vec{E} = R[\vec{B}, \vec{j}],$$

где  $R$  – **постоянная Холла**.



Пусть, например, металлическая пластинка с током расположена в магнитном поле перпендикулярном току (см. рисунок). Сила Лоренца приводит к повышению концентрации носителей тока – электронов – у верхнего края пластинки. При этом верхний край зарядится отрицательно, а нижний, соответственно –

положительно. Стационарное распределение зарядов будет достигнуто, когда действие созданного таким образом электрического поля уравновесит силу Лоренца:  $eE = e \frac{\Delta \phi}{a} = evB$ , или  $\Delta \phi = vBa$ , где  $a$  – ширина пластинки,  $e$  –

заряд электрона,  $\Delta \phi$  – **поперечная (холловская) разность потенциалов**.

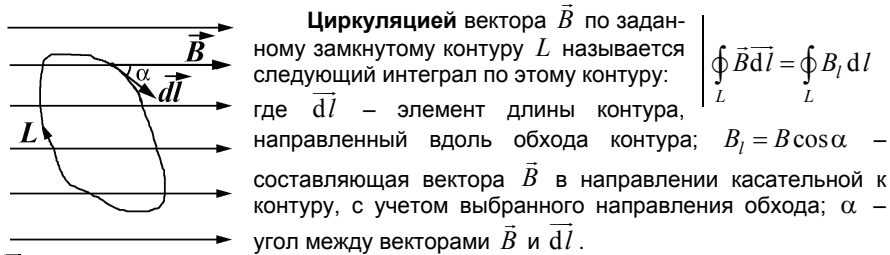
Поскольку сила тока  $I = jS = nevS$  ( $S = ad$  – площадь поперечного сечения пластинки толщиной  $d$  и шириной  $a$ ,  $n$  – концентрация электронов,  $v$  – средняя скорость упорядоченного движения электронов), то

$$\Delta \phi = \frac{I}{nead} Ba = \frac{1}{en} \frac{IB}{d} = R \frac{IB}{d}.$$

Знак постоянной Холла  $R = \frac{1}{en}$  совпадает со знаком носителей тока,

поэтому эффект Холла используют для определения природы носителей тока в веществах и определения их концентрации.

### 18. Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ .



**Теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  (закон полного магнитного поля в вакууме):** циркуляция вектора  $\vec{B}$  по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k,$$

где  $n$  – число проводников с токами, охватываемых контуром  $L$  произвольной формы.

Эта теорема справедлива *только для поля в вакууме*, поскольку для поля в веществе надо учитывать *молекулярные токи*. Каждый ток учитывается столько раз, сколько он охватывается контуром. Положительным считается ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру *правилом правого винта*.

**Пример:** магнитное поле прямого тока.

Замкнутый контур представим в виде окружности радиуса  $r$ . В каждой точке этой окружности вектор  $\vec{B}$  одинаков по модулю и направлен по касательной к окружности:

$$\oint_L B_l dl = \oint_L B dl = B \oint_L dl = B 2\pi r = \mu_0 I, \text{ отсюда } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Сравним выражения для циркуляций векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

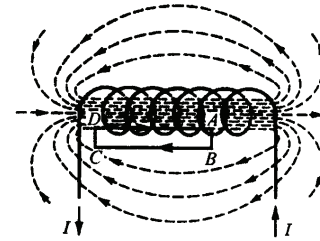
$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k.$$

Принципиальное различие между этими формулами в том, что циркуляция вектора  $\vec{E}$  электростатического поля *всегда равна нулю*. Такое поле является **потенциальным**. Циркуляция вектора  $\vec{B}$  магнитного поля *не равна нулю*. Такое поле называется **вихревым** или **соленоидальным**.

### 19. Магнитное поле соленоида.

**Соленоидом** называется свернутый в спираль изолированный проводник по которому течет электрический ток. Рассмотрим соленоид длиной  $l$ , имеющий  $N$  витков. Циркуляция вектора  $\vec{B}$  по замкнутому контуру  $ABCD$ , охватывающему все  $N$  витков, равна

$$\oint_{ABCD} B_l dl = \mu_0 NI.$$



На участках  $AB$  и  $CD$  контур перпендикулярен линиям магнитной индукции, следовательно  $B_l = 0$ . Можно показать, что вне бесконечного соленоида магнитное поле  $B = 0$  (удалив участок  $CB$  на бесконечность, где магнитное поле соленоида равно нулю, поскольку магнитное поле каждого витка соленоида уменьшается с расстоянием  $\sim r^{-3}$ ).

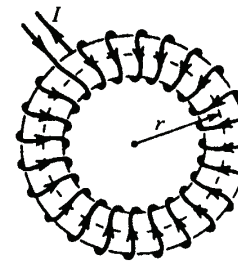
На участке  $DA$  контур совпадает с линией магнитной индукции, внутри соленоида поле однородно ( $B_l = B$ ), поэтому

$$\int_{DA} B_l dl = Bl = \mu_0 NI.$$

Магнитная индукция (бесконечного) соленоида в вакууме

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}.$$

### 20. Магнитное поле тороида в вакууме.



**Тороидом** – называется кольцевая катушка с витками, намотанными на сердечник, имеющий форму тора, по которой течет ток.

Магнитное поле отсутствует вне тороида, а внутри его оно является однородным.

Линии магнитной индукции, как следует из соображений симметрии, есть окружности, центры которых расположены на оси тороида.

В качестве контура выберем одну такую окружность радиуса  $r$ . По теореме о циркуляции  $B 2\pi r = \mu_0 NI$ , где  $N$  – число витков тороида. Отсюда

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

### 21. Поток вектора магнитной индукции.

**Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком)** через площадку  $dS$  называется *скалярная физическая величина*, равная

$$d\Phi_B = \vec{B} d\vec{S} = B_n dS,$$

где  $B_n = B \cos \alpha$  – проекция вектора  $\vec{B}$  на направление нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$ ,  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$ ,  $d\vec{S}$  – вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление совпадает с направлением нормали  $\vec{n}$  к площадке.

Поток вектора  $\vec{B}$  может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака  $\cos \alpha$ .

Поток вектора  $\vec{B}$  связывают с контуром по которому течет ток. Положительное направление нормали к контуру связано с направлением тока по правилу правого винта. Поэтому *магнитный поток, создаваемый контуром с током через поверхность, ограниченную им самим, всегда положителен*.



Поток вектора магнитной индукции через произвольную поверхность  $S$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS.$$

Если поле однородно и перпендикулярно ему расположена плоская поверхность с площадью  $S$ , то

$$\Phi_B = BS.$$

**Единица магнитного потока – вебер (Вб):** 1Вб – магнитный поток, проходящий сквозь плоскую поверхность площадью  $1\text{м}^2$ , расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1Тл (1 Вб=1 Тл·м<sup>2</sup>).

## 22. Теорема Гаусса для магнитного поля в вакууме

Поток вектора магнитной индукции сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Эта теорема отражает факт отсутствия магнитных зарядов, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала ни конца и являются замкнутыми.

## 23. Потокосцепление.

Магнитный поток через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, называется **потокосцеплением**  $\Psi$  этого **контюра**.

Потокосцепление контура, обусловленное магнитным полем тока в самом этом контуре, называется **потокосцеплением самоиндукции**.

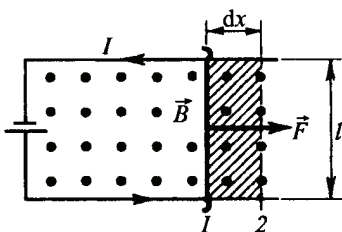
Например, найдем потокосцепление самоиндукции соленоида с сердечником с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Магнитный поток сквозь один виток соленоида площадью  $S$  равен  $\Phi_1 = BS$ . Полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида равен

$$\Psi = \Phi_1 N = BSN = \frac{\mu_0 \mu N I}{l} SN = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S.$$

Потокосцепление контура, обусловленное магнитным полем тока, идущего в другом контуре, называется **потокосцеплением взаимной индукции** этих двух контуров.

## 24. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.

Проводник длиной  $l$  (он может свободно перемещаться) с током  $I$  находится в однородном магнитном поле (см. рисунок). Поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка – из-за чертежа. Сила Ампера  $F = IBl$ .



Под ее действием проводник переместился из положения 1 в положение 2.

Работа, совершаемая магнитным полем:

$$dA = \vec{F} d\vec{x} = I d\vec{x} [\vec{l}, \vec{B}] = IB dx = IB dS = I d\Phi.$$

Использованы соотношения:

$dS = l dx$  – площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле;  $B dS = d\Phi$  – поток вектора магнитной

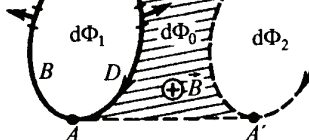
индукции, пронизывающий эту площадь. Таким образом,  $dA = I d\Phi$ .

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока на магнитный поток, пересеченный движущимся проводником.

## 25. Работа по перемещению контура с током в магнитном поле.

Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка – за чертеж. Работа  $dA$  сил Ампера при перемещении контура  $ABCD$  равна сумме работ по перемещению проводников  $ABC$  ( $dA_1$ ) и  $CDA$  ( $dA_2$ ), т.е.

$$dA = dA_1 + dA_2.$$



При перемещении участка  $CDA$  силы Ампера направлены в сторону перемещения (образуют с направлением перемещения острые углы), поэтому  $dA_2 > 0$

$$dA_2 = I(d\Phi_0 + d\Phi_2).$$

Силы, действующие на участок  $ABC$  контура, направлены против перемещения (образуют с направлением перемещения тупые углы), поэтому  $dA_1 < 0$

$$dA_1 = -I(d\Phi_0 + d\Phi_1).$$

В сумме

$$dA = I(d\Phi_2 - d\Phi_1), \text{ или } A = I\Delta\Phi, \text{ или } A = I(\Psi_2 - \Psi_1).$$

Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, сцепленного с контуром (или на его потокосцепление).

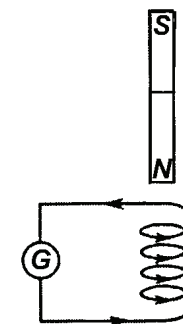
## Электромагнитная индукция.

## 26. опыты Фарадея.

### Опыт 1.

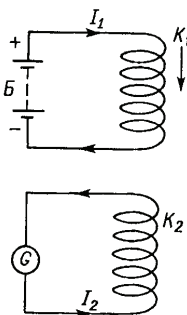
Соленоид подключен к гальванометру. Если в соленоид вдвигать (или выдвигать) постоянный магнит, то в моменты вдвигания (или выдвигания) наблюдается отклонение стрелки гальванометра, т.е. в соленоиде индуцируется ЭДС.

Направление отклонения стрелки при вдвигании и выдвигании противоположны. Если постоянный магнит развернуть так, чтобы полюса поменялись местами, то и направление отклонения стрелки изменится на противоположное. Отклонение стрелки гальванометра тем больше, чем больше скорость движения магнита относительно соленоида. Такой же эффект будет, если постоянный магнит оставить неподвижным, а относительно его перемещать соленоид.



**Опыт 2.**

Один соленоид ( $K_1$ ) подключен к источнику тока. Другой соленоид ( $K_2$ ) подключен к гальванометру. Отклонение стрелки гальванометра наблюдается в моменты включения или выключения тока, в моменты его увеличения или уменьшения или при перемещении катушек друг относительно друга. При включении и выключении стрелка отклоняется в разные стороны, т.е. знак индуцированной ЭДС в этих случаях различен. Такой же эффект – наведение в катушке  $K_2$  ЭДС различного знака – наблюдается при увеличении или уменьшении тока в катушке  $K_1$ ; при сближении или удалении катушек.



В опытах Фарадея было открыто **явление электромагнитной индукции**. Оно заключается в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток, получивший название **индукционного**.

Основные свойства индукционного тока:

1. Индукционный ток возникает всегда, когда происходит **изменение** сцепленного с контуром **потока магнитной индукции**.
2. Сила индукционного тока не зависит от способа изменения потока магнитной индукции, а определяется лишь **скоростью** его изменения.

Открытие явления электромагнитной индукции:

- 1) показало взаимосвязь между электрическим и магнитным полем;
- 2) предложило способ получения электрического тока с помощью магнитного поля.

**27. Закон Фарадея.**

Обобщая результаты опытов, Фарадей показал, что всякий раз, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции, в контуре возникает индукционный ток.

Возникновение индукционного тока указывает на наличие в цепи электродвижущей силы.

Эта ЭДС называется **электродвижущей силой электромагнитной индукции**.

**Закон Фарадея:** ЭДС электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром

$$\Theta_i = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Для замкнутого контура магнитный поток  $\Phi$  есть не что иное, как потокосцепление  $\Psi$  этого контура. Поэтому в электротехнике закон Фарадея часто записывают в форме

$$\Theta_i = - \frac{d\Psi}{dt}.$$

Направление индукционного тока определяется по **правилу Ленца**: При всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на замкнутый проводящий контур, в последнем возникает индукционный ток такого направления, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока.

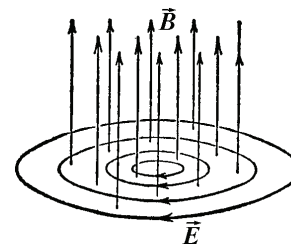
ЭДС электромагнитной индукции выражается в вольтах.

$$\left[ \frac{d\Phi}{dt} \right] = \frac{\text{Вб}}{\text{с}} = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \text{В}.$$

**28. ЭДС индукции в неподвижных проводниках.**

Согласно закону Фарадея, возникновение ЭДС электромагнитной индукции возможно и в случае **неподвижного** контура, находящегося в **переменном** магнитном поле. Однако сила Лоренца на неподвижные заряды не действует, поэтому в данном случае ею нельзя объяснить возникновение ЭДС индукции.

Кроме того, опыт показывает, что ЭДС индукции **не зависит** от рода вещества проводника, от состояния проводника, в частности, от его температуры, которая может быть неодинаковой вдоль проводника. Следовательно, сторонние силы, индуцируемые магнитным полем, **не связаны с изменением свойств проводника** в магнитном поле, а обусловлены самим магнитным полем.



Максвелл для объяснения ЭДС индукции в неподвижных проводниках предположил, что **переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле**, которое и является причиной возникновения индукционного тока в проводнике.

На рисунке приведен пример вихревого электрического поля, возникающего при возрастании магнитного поля.

**Вихревое электрическое поле не является электростатическим.**

Силовые линии **электростатического** поля всегда разомкнуты – они начинаются и заканчиваются на электрических зарядах. Именно поэтому напряжение по замкнутому контуру в электростатическом поле всегда равно нулю, это поле не может поддерживать замкнутое движение зарядов и, следовательно, не может привести к возникновению электродвижущей силы.

Напротив, **электрическое поле, возбуждаемое изменениями магнитного поля**, имеет непрерывные силовые линии, т.е. представляет собой вихревое поле. Такое поле вызывает в проводнике движение электронов по замкнутым траекториям и приводит к возникновению ЭДС – сторонними силами являются силы вихревого электрического поля.

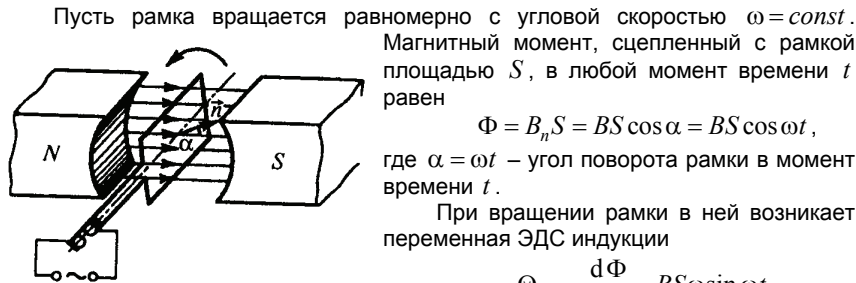
Циркуляция  $\vec{E}_B$  этого поля по любому контуру  $L$  проводника представляет собой ЭДС электромагнитной индукции

$$\Theta_i = \oint_L \vec{E}_B \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

**29. Вращение рамки в магнитном поле.**

Явление электромагнитной индукции применяется для преобразования механической энергии в энергию электрического тока. Для этой цели используются **генераторы**, принцип действия которых рассмотрим на примере плоской рамки, вращающейся в однородном ( $B = \text{const}$ ) магнитном поле.





Пусть рамка вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ . Магнитный момент, сцепленный с рамкой площадью  $S$ , в любой момент времени  $t$  равен

$$\Phi = B_n S = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t,$$

где  $\alpha = \omega t$  – угол поворота рамки в момент времени  $t$ .

При вращении рамки в ней возникает переменная ЭДС индукции

$$\Theta_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t.$$

Максимальное значение ЭДС индукции  $\Theta_{\text{max}} = BS\omega$ . Тогда

$$\Theta_i = \Theta_{\text{max}} \sin \omega t.$$

При равномерном вращении рамки в однородном магнитном поле в ней возникает переменная ЭДС, изменяющаяся по гармоническому закону.

Процесс превращения механической энергии в электрическую обратим. Если по рамке, помещенной в магнитное поле, пропускать электрический ток, то на нее будет действовать вращающий момент  $\vec{M} = IS[\vec{n}, \vec{B}]$  и рамка начнет вращаться. На этом принципе основана работа **электродвигателей**.

### 30. Вихревые токи (токи Фуко).

Индукционный ток возникает не только в линейных проводниках, но и в массивных сплошных проводниках, помещенных в переменное магнитное поле. Эти токи замкнуты в толще проводника и называются **вихревыми или токами Фуко**.

Токи Фуко также подчиняются правилу Ленца: их магнитное поле направлено так, чтобы противодействовать изменению магнитного потока, индуцирующему вихревые токи. Поэтому массивные проводники тормозятся в магнитном поле. Кроме того, вихревые токи вызывают сильное нагревание проводников. В электрических машинах, для того чтобы минимизировать влияние токов Фуко, сердечники трансформаторов и магнитные цепи электрических машин собирают из тонких пластин, изолированных друг от друга специальным лаком или оксидом.

Джоулево тепло, выделяемое токами Фуко, используется в индукционных металлургических печах.

Взаимодействие вихревых токов с высокочастотным магнитным полем приводит к неравномерному распределению магнитного потока по сечению магнитопроводов – вытеснение магнитного потока из объема в приповерхностные области проводника. Это явление называется **магнитным скин-эффектом**.

Вихревые токи возникают и в самом проводнике, по которому течет переменный ток, что приводит к неравномерному распределению тока по сечению проводника – вытеснение токов высокой частоты в приповерхностные области проводника. Это явление называется **электрическим скин-эффектом**.

### 31. Индуктивность контура.

Электрический ток, текущий в замкнутом контуре, создает вокруг себя магнитное поле, **индукция которого**, по закону Био-Савара-Лапласа

**пропорциональна току**. Поэтому **сцепленный с контуром** магнитный поток пропорционален току в контуре

$$\Phi = LI,$$

где коэффициент пропорциональности  $L$  называется **индуктивностью контура**.

Пример: индуктивность длинного соленоида.

Потокоосцепление соленоида (полный магнитный поток сквозь соленоид)

$$\Psi = BSN = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S, \quad \text{откуда:}$$

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l},$$

где  $N$  – число витков соленоида,  $l$  – его длина,  $S$  – площадь,  $\mu$  – магнитная проницаемость сердечника.

**Индуктивность** контура в общем случае зависит только от геометрической формы контура, его размеров и магнитной проницаемости той среды, в которой он находится.

В этом смысле **индуктивность контура** – **аналог** электрической емкости уединенного проводника, которая также зависит только от формы проводника, его размеров и диэлектрической проницаемости среды.

### 32. Самоиндукция.

При изменении силы тока в контуре будет изменяться и сцепленный с ним магнитный поток, а это, в свою очередь будет индуцировать ЭДС в этом контуре. Возникновение ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока называется **самоиндукцией**.

**Единица индуктивности – генри (Гн):** 1Гн – индуктивность такого контура, магнитный поток самоиндукции которого при токе в 1А равен 1Вб (1Гн=1Вб/А=1В·с/А).

$$\text{Из закона Фарадея ЭДС самоиндукции} \quad \Theta_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI).$$

Если контур не деформируется и магнитная проницаемость среды не изменяется, то  $L = \text{const}$  и ЭДС самоиндукции

$$\Theta_s = -L \frac{dI}{dt},$$

где знак минус, обусловленный правилом Ленца, показывает, что наличие индуктивности в контуре приводит к **замедлению изменения** тока в нем.

Если ток со временем возрастает, то  $\Theta_s < 0$ , т.е. ток самоиндукции направлен навстречу току, обусловленному внешним источником, и замедляет его возрастание.

Если ток со временем убывает, то  $\Theta_s > 0$ , т.е. ток самоиндукции имеет такое же направление, как и убывающий ток в контуре, и замедляет его убывание.

Таким образом, контур, обладая определенной индуктивностью, приобретает электрическую "инертность".

### 33. Токи при размыкании и замыкании цепи.

При всяком изменении силы тока в проводящем контуре возникает ЭДС самоиндукции, в результате чего в контуре появляются дополнительные токи, называемые **экстратоками самоиндукции**.

Пусть в цепи сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$  под действием внешней ЭДС  $\Theta$  течет постоянный ток  $I_0 = \Theta/R$ . В момент времени  $t = 0$  **выключим** источник тока. Возникает ЭДС самоиндукции  $\Theta_s = -L \frac{dI}{dt}$ , препятствующая уменьшению тока. Ток в цепи определяется законом

Ома  $IR = \Theta_s$ , или  $IR = -L \frac{dI}{dt}$ . Разделяем переменные:  $\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$ , и интегрируем по  $I$  (от  $I_0$  до  $I$ ) и по  $t$  (от 0 до  $t$ ):  $\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{Rt}{L}$ , или

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (\text{кривая 1})$$

где  $\tau = \frac{L}{R}$  – постоянная, называемая **временем релаксации** – время, в течение которого сила тока уменьшается в  $e$  раз.

Таким образом, при выключении источника тока сила тока убывает по экспоненциальному закону (а не мгновенно).

Оценим значение ЭДС самоиндукции при мгновенном увеличении сопротивления от  $R_0$  до  $R$

$$I = \frac{\Theta}{R_0} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right), \quad \text{откуда} \quad \Theta_s = -L \frac{dI}{dt} = \frac{R}{R_0} \Theta \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right).$$

Т.е. при **резком размыкании** контура ( $R \gg R_0$ ) ЭДС самоиндукции  $\Theta_s$  может во много раз превысить  $\Theta$ , что может привести к пробое изоляции и выводу из строя измерительных приборов.

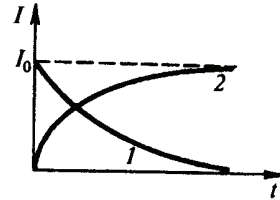
При **замыкании** цепи помимо внешней ЭДС  $\Theta$  возникает ЭДС самоиндукции  $\Theta_s = -L \frac{dI}{dt}$ , препятствующая возрастанию тока. По закону Ома,

$IR = \Theta + \Theta_s$ , или  $IR = \Theta - L \frac{dI}{dt}$ . Можно показать, что решение этого уравнения имеет вид

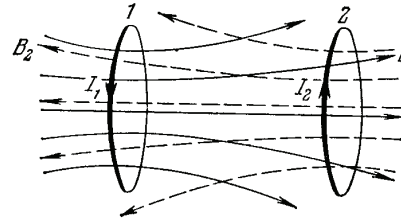
$$I = I_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right), \quad (\text{кривая 2})$$

где  $I_0 = \frac{\Theta}{R}$  – установившийся ток (при  $t \rightarrow \infty$ ).

Таким образом, при включении источника тока сила тока возрастает по экспоненциальному закону (а не мгновенно).



### 34. Взаимная индукция.



**Взаимной индукцией** называется явление возбуждения ЭДС электромагнитной индукции в одной электрической цепи при изменении электрического тока в другой цепи или при изменении взаимного расположения этих двух цепей.

Рассмотрим два неподвижных контура 1 и 2 с токами  $I_1$  и  $I_2$ , расположенных достаточно близко друг от друга. При протекании в контуре 1 тока  $I_1$  магнитный поток пронизывает второй контур

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1, \quad \text{аналогично} \quad \Phi_{12} = L_{12} I_2.$$

Коэффициенты пропорциональности  $L_{21}$  и  $L_{12}$  равны друг другу  $L_{12} = L_{21} = L$  и называются **взаимной индуктивностью контуров**.

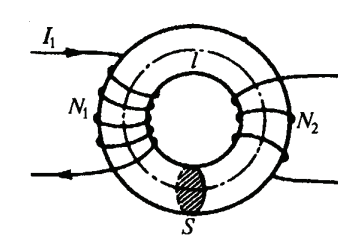
При изменении силы тока в одном из контуров, в другом индуцируется ЭДС

$$\Theta_{i2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L \frac{dI_1}{dt}, \quad \Theta_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L \frac{dI_2}{dt}.$$

Взаимная индуктивность контуров зависит от геометрической формы, размеров, взаимного расположения контуров и от магнитной проницаемости окружающей контуры среды.

Для примера рассчитаем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на тороидальный сердечник.

Первая катушка с числом витков  $N_1$  и током  $I_1$  создает поле



$B = \mu_0 \mu \frac{N_1 I_1}{l}$ . Магнитный поток сквозь один

виток второй катушки  $\Phi_2 = BS = \mu_0 \mu \frac{N_1 I_1}{l} S$ ,

где  $l$  – длина сердечника по средней линии. Тогда полный магнитный поток (потокосцепление) сквозь вторичную обмотку, содержащую  $N_2$  витков:

$\Psi = \Phi_2 N_2 = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S I_1$ . Поскольку поток  $\Psi$  создается током  $I_1$ , то

$$L = \frac{\Psi}{I_1} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

Данное устройство является примером трансформатора.

### 35. Трансформаторы.

Принцип действия трансформаторов, применяемых для повышения или понижения напряжения переменного тока, основан на явлении взаимной индукции. Переменный ток  $I_1$  создает в первичной обмотке переменное

магнитное поле. Это вызывает во вторичной обмотке появление ЭДС взаимной индукции. При этом

$$\Theta_2 = -\frac{N_2}{N_1} \Theta_1,$$

где  $N_1$  и  $N_2$  – число витков в первичной и вторичной обмотках, соответственно.

Отношение  $k = \frac{N_2}{N_1}$ , показывающее, во сколько раз ЭДС во вторичной

обмотке трансформатора больше (или меньше), чем в первичной, называется коэффициентом трансформации.

Если  $k > 1$ , то трансформатор – **повышающий**, если  $k < 1$  – **понижающий**.

### 36. Энергия магнитного поля.

Проводник, по которому протекает электрический ток, всегда окружен магнитным полем. Магнитное поле появляется и исчезает вместе с появлением и исчезновением тока. Магнитное поле, подобно электрическому, является носителем энергии. Энергия магнитного поля равна работе, которую затрачивает ток на создание этого поля.

Рассмотрим контур индуктивностью  $L$ , по которому течет ток  $I$ .

С данным контуром сцеплен магнитный поток  $\Phi = LI$ .

При изменении тока на  $dI$  магнитный поток изменяется на  $d\Phi = L dI$ .

Для такого изменения магнитного потока необходимо совершить работу

$$dA = I d\Phi = LI dI.$$

$$A = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}.$$

Тогда работа по созданию магнитного потока  $\Phi$  будет равна

$$A = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}.$$

**Энергия магнитного поля**, связанного с контуром,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

На примере однородного магнитного поля внутри длинного соленоида выразим энергию магнитного поля через величины, характеризующие это поле в окружающем пространстве.

Индуктивность соленоида  $L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}$ , следовательно,  $W = \frac{1}{2} \mu_0 \mu \frac{N^2 I^2}{l} S$ .

Магнитная индукция поля соленоида  $B = \frac{\mu_0 \mu NI}{l}$ , следовательно,  $I = \frac{Bl}{\mu_0 \mu N}$ .

По определению вектора напряженности магнитного поля  $B = \mu_0 \mu H$ .

Используя эти соотношения

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V = \frac{BH}{2} V,$$

где  $Sl = V$  – объем соленоида.

Магнитное поле длинного соленоида однородно и сосредоточено внутри него, поэтому энергия заключена в объеме соленоида и распределена в нем с **объемной плотностью**

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

Эти соотношения носят общий характер и справедливы и для неоднородных полей, но только для сред, для которых связь между  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  линейная (т.е. для пара- и диамагнетиков).

Выражение для объемной плотности энергии магнитного поля аналогично соответствующему выражению для объемной плотности энергии

электростатического поля:  $w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}$ , с той разницей, что

электрические величины заменены в нем магнитными.

## Магнитные свойства вещества.

### 37. Магнитные моменты электронов и атомов.

До сих пор влияние среды на магнитные явления учитывалось формально введением магнитной проницаемости  $\mu$ . Для того, чтобы разобраться в магнитных свойствах сред и их влиянии на магнитную индукцию, необходимо рассмотреть действие магнитного поля на атомы и молекулы вещества.

Все вещества, помещенные в магнитное поле, намагничиваются, поскольку в любом теле существуют **микроскопические токи** (микротоки), обусловленные движением электронов в атомах и молекулах.

Для многих целей, в том числе и для объяснения многих магнитных явлений, можно использовать *квазиклассическую модель*, в которой предполагается, что атом состоит из положительно заряженного ядра, вокруг которого обращаются электроны по круговым или эллиптическим орбитам, подобно планетам солнечной системы (планетарная модель атома).

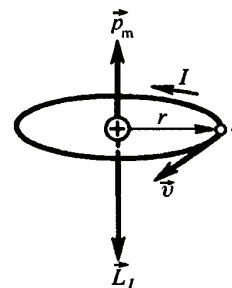
Такие электроны, обращающиеся по орбитам, представляют собой замкнутые электрические токи, и поэтому естественно предположить, что именно они являются микротоками (существование которых предполагал еще Ампер), ответственными за намагничивание вещества.

Если электрон совершает  $\nu$  оборотов в секунду, то сила тока  $I = e\nu$ . **Орбитальный магнитный момент электрона**, движущегося по круговой орбите, площадью  $S$

$$p_m = IS = e\nu S.$$

Если электрон движется по часовой стрелке, то ток направлен против часовой стрелки и вектор  $\vec{p}_m$  (в соответствии с правилом правого винта) направлен перпендикулярно плоскости орбиты электрона.

Так как электронам присущ не только заряд, но еще и масса, то каждый орбитально движущийся электрон обладает не только магнитным моментом (как и всякий замкнутый ток), но еще и определенным



механическим моментом импульса  $\vec{L}_l$ , т.е. подобен волчку

$$L_l = mvr = m\omega r^2 = 2mvS,$$

где  $\omega = 2\pi\nu$  – угловая скорость электрона,  $\pi r^2 = S$ . Вектор  $\vec{L}_l$  называется орбитальным механическим моментом электрона. Поскольку направление вектора  $\vec{L}_l$  также определяется по правилу правого винта, то направления  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}_l$  противоположны. Поэтому

$$\vec{p}_m = e\nu S = -\frac{e}{2m}\vec{L}_l = \Gamma \cdot \vec{L}_l,$$

где величина  $\Gamma = -\frac{1}{2}\left(\frac{e}{m}\right)$  называется гиромагнитным отношением

орбитальных моментов,  $\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг – удельный заряд электрона.

Кроме орбитальных моментов, электрон обладает собственным механическим моментом импульса  $\vec{L}_s$ , называемый спином.

Спину электрона соответствует собственный (спиновый) магнитный момент  $\vec{p}_{ms}$ . Проекция спина на направление вектора  $\vec{B}$  может принимать только одно из следующих двух значений

$$p_{msB} = \pm \frac{e\hbar}{2m_e} = \pm \mu_B,$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  ( $h$  – постоянная Планка),  $\mu_B$  – **магнетон Бора**, являющийся единицей магнитного момента электрона.

Общий магнитный момент атома или молекулы равен векторной сумме магнитных моментов (орбитальных и спиновых) входящих в атом (молекулу) электронов

$$\vec{p}_a = \sum \vec{p}_m + \sum \vec{p}_{ms}.$$

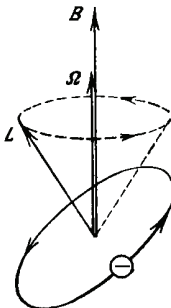
Магнитные моменты атомных ядер в тысячи раз меньше магнитных моментов электронов, поэтому ими как правило пренебрегают.

### 38. Диа- и парамагнетики.

Всякое вещество является **магнетиком**, т.е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться).

На вращающийся по орбите электрон, как на замкнутый ток, в магнитном поле действует вращающий момент сил. В результате электрон получает дополнительное равномерное вращение, при котором вектор  $\vec{L}$  будет описывать конус вокруг направления индукции  $\vec{B}$  с некоторой угловой скоростью  $\Omega$ . Такое движение называется **прецессией**.

**Теорема Лармора:** действие магнитного поля на электронную орбиту можно свести к сообщению этой орбите прецессии с угловой скоростью  $\Omega$ .



Прецессионное движение электронных орбит эквивалентно круговому микротoku. Так как этот микроток индуцирован внешним магнитным полем, то, согласно правилу Ленца, у атома появляется **магнитный момент**, направленный **против внешнего поля**.

Наведенные составляющие магнитных полей атомов складываются и образуют собственное магнитное поле вещества, ослабляющее внешнее магнитное поле. Этот эффект получил название диамагнитного эффекта, а вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле против направления поля, называются диамагнетиками (например, Ag, Au, Cu...).

Так как диамагнитный эффект обусловлен действием внешнего магнитного поля на электроны атомов вещества, то диамагнетизм свойствен всем веществам.

Наряду с диамагнитными веществами существуют и парамагнитные – вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле по направлению поля (пример: редкоземельные металлы, Pt, Al...).

У парамагнитных веществ при отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты электронов не компенсируют друг друга, и молекулы парамагнетиков всегда обладают магнитным моментом (такие молекулы называются полярными).

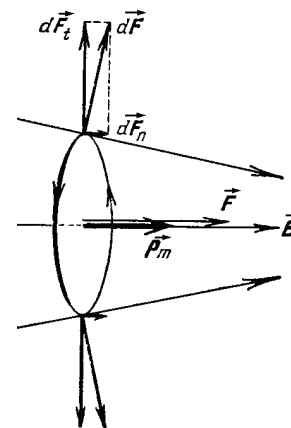
Вследствие теплового движения молекул их магнитные моменты ориентированы беспорядочно, поэтому, в отсутствие магнитного поля, парамагнитные вещества магнитными свойствами не обладают.

При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле устанавливается **преимущественная** ориентация магнитных моментов атомов (молекул) **по полю** (полной ориентации препятствует тепловое движение атомов).

Таким образом, парамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, **совпадающее по направлению с внешним полем** и усиливающим его.

Этот **эффект** называется парамагнитным. Если магнитный момент атомов (молекул) велик, то парамагнитные свойства преобладают над диамагнитными и вещество является парамагнетиком.

Пара- и диамагнетики по-разному ведут себя в неоднородных магнитных полях.



Рассмотрим малый виток с током в неоднородном магнитном поле (см. рисунок). Силы  $d\vec{F}$ , действующие на отдельные участки витка, перпендикулярны к току и к магнитному полю. Составляющие  $d\vec{F}_t$ , параллельные витку, создают усилия, растягивающие (или сжимающие) виток. Составляющие  $d\vec{F}_n$ , перпендикулярные к плоскости витка, складываясь, дадут некую силу  $\vec{F}$ , стремящуюся перемещать виток в магнитном поле. Если магнитный момент тока  $\vec{p}_m$  сонаправлен с вектором магнитной индукции  $\vec{B}$  (как изображено на рисунке), то виток будет втягиваться в область более сильного поля. Если же вектор  $\vec{p}_m$  противоположен вектору  $\vec{B}$ , то

виток будет выталкиваться и перемещаться в область более слабого поля.

Поэтому парамагнетики **втягиваются** в область сильного поля, в то время, как диамагнетики **выталкиваются** из этой области.

### 39. Намагниченность. Магнитное поле в веществе.

Подобно тому, как для количественного описания поляризации диэлектриков была введена поляризованность, для количественного описания намагничивания магнетиков вводят векторную величину – **намагниченность**, определяемую магнитным моментом единицы объема магнетика

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{\sum \vec{p}_a}{V},$$

где  $\vec{P}_m = \sum \vec{p}_a$  – магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул.

В несильных полях намагниченность пропорциональна напряженности  $\vec{H}$  поля, вызывающего намагничение. Поэтому, аналогично диэлектрической восприимчивости, можно ввести понятие магнитной восприимчивости вещества  $\chi$

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

$\chi$  – безразмерная величина.

Для диамагнетиков  $\chi$  **отрицательна** ( $\chi < 0$  поле молекулярных токов противоположно внешнему полю), для парамагнетиков – **положительна** ( $\chi > 0$  поле молекулярных токов совпадает с внешним).

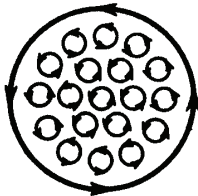
Абсолютное значение магнитной восприимчивости для диа- и парамагнетиков очень мало – порядка  $10^{-4} - 10^{-6}$ .

Магнитное поле  $\vec{B}$  в веществе складывается из двух полей: внешнего поля  $\vec{B}_0$ , создаваемого намагничивающим током в вакууме, и поля  $\vec{B}'$  намагниченного вещества

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}',$$

где  $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$ .

Для описания поля, создаваемого молекулярными токами, рассмотрим магнетик в виде кругового цилиндра сечения  $S$  и длины  $l$ , внесенного в



однородное внешнее магнитное поле с индукцией  $\vec{B}_0$  параллельное оси цилиндра. Если рассмотреть любое сечение цилиндра, перпендикулярное его оси, то во внутренних участках сечения магнетика молекулярные токи соседних атомов направлены навстречу друг другу и взаимно компенсируются. Нескомпенсированными будут лишь молекулярные токи, выходящие на поверхность цилиндра.

Магнитную индукцию тока  $I'$ , текущего по боковой поверхности цилиндра, вычислим (считая для простоты  $\mu = 1$ ) по формуле для соленоида с  $N = 1$  (соленоид из одного витка)

$$B' = \frac{\mu_0 I'}{l}.$$

Магнитный момент этого суммарного тока микротоков внутри магнетика

$$P = I'S = I' \frac{Sl}{l} = I' \frac{V}{l}, \text{ где } V - \text{объем магнетика.}$$

$$\text{Намагниченность магнетика } J = \frac{P}{V} = \frac{I'Sl}{Vl} = \frac{I'}{l}, \text{ следовательно,}$$

$$B' = \mu_0 J$$

или в векторной форме

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}.$$

Следовательно,

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}.$$

Безразмерная величина

$$\mu = 1 + \chi = \frac{B}{B_0}$$

называется **магнитной проницаемостью вещества**. Именно эта величина использовалась ранее в соотношении  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ .

**Для диамагнетиков  $\mu < 1$ , для парамагнетиков  $\mu > 1$ .**

### 40. Закон полного тока для магнитного поля в веществе.

Этот закон является обобщением закона полного тока для магнитного поля в вакууме (стр. 4-10).

*Циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости и молекулярных токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную*

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 (I + I'),$$

где  $I$  и  $I'$  – соответственно алгебраические суммы макротоков (токов проводимости) и микротоков (молекулярных токов), охватываемых произвольным замкнутым контуром  $L$ .

При этом циркуляция намагниченности  $\vec{J}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна алгебраической сумме *молекулярных токов*, а циркуляция вектора  $\vec{H}$  – сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром

$$\oint_L \vec{J} d\vec{l} = I', \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I.$$

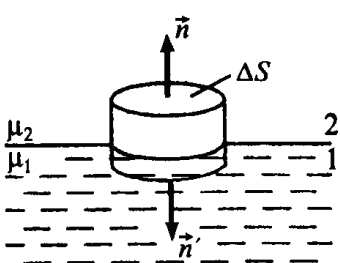
Последнее выражение представляет собой **теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$** .

С учетом того, что сила тока  $I$  сквозь поверхность  $S$ , охватываемую контуром  $L$ , является потоком вектора плотности тока через эту поверхность,  $I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$  (стр.3-22), теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$  будет иметь вид

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$



#### 41. Условия на границе раздела двух магнетиков.



Рассмотрим поведение векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  на границе раздела двух однородных магнетиков с магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  при отсутствии на границе тока проводимости.

Построим вблизи границы раздела магнетиков 1 и 2 прямой цилиндр ничтожно малой высоты, одно основание которого находится в первом магнетике, другое – во втором.

Считаем, что основания  $\Delta S$  цилиндра настолько малы, что в пределах каждого из них вектор  $\vec{B}$  неизменен.

По теореме Гаусса

$$B_{n2}\Delta S - B_{n1}\Delta S = 0,$$

(поскольку  $\vec{n}$  и  $\vec{n}'$  противоположны). С учетом соотношения  $B = \mu_0\mu H$ , нормальные составляющие

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad \frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Вблизи границы раздела магнетиков 1 и 2 построим небольшой замкнутый прямоугольный контур  $ABCD$  длиной  $l$ . Согласно теореме о циркуляции  $\vec{H}$

$$\oint_{ABCD} \vec{H} d\vec{l} = 0,$$

поскольку токов проводимости на границах нет. Отсюда

$$H_{\tau 2}l - H_{\tau 1}l = 0$$

(знаки интегралов по  $AB$  и  $CD$  разные, т.к. пути интегрирования противоположны, а интегралы по  $BC$  и  $DA$  бесконечно малы). Поэтому, тангенциальные составляющие

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}, \quad \frac{B_{\tau 1}}{B_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

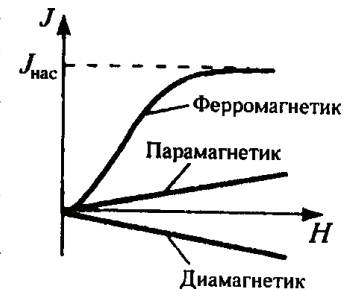
Таким образом, при переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора  $\vec{B}$  и тангенциальная составляющая вектора  $\vec{H}$  изменяются непрерывно, а тангенциальная составляющая вектора  $\vec{B}$  и нормальная составляющая вектора  $\vec{H}$  претерпевают скачок.

#### 42. Ферромагнетики и их свойства.

Помимо *слабмагнитных* веществ – диа- и парамагнетиков, существуют *сильномагнитные* вещества – **ферромагнетики** – вещества, обладающие *спонтанной намагниченностью*, т.е. они сохраняют намагниченность при отсутствии внешнего магнитного поля.

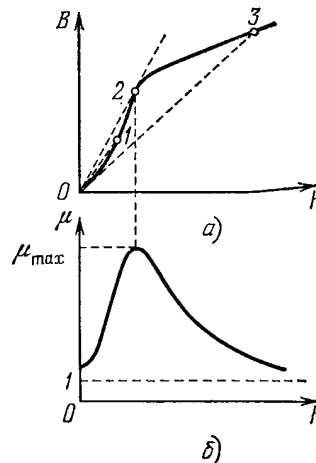
В отличие от слабмагнитных веществ, у которых намагниченность  $J$  линейно изменяется с ростом  $H$ , у ферромагнетиков, при увеличении  $H$ , намагниченность растет сначала быстро, а затем выходит на насыщение  $J_{\text{нас}}$ .

Магнитная проницаемость  $\mu$  ферромагнетиков достигает больших значений (для железа –  $\approx 5000$ , для сплава супермаллоя –  $\approx 800\,000$ ).



Магнитная проницаемость и магнитная индукция  $B$  ферромагнетиков зависит от  $H$ .

$B = \mu_0(H + J)$  в слабых полях растет быстро с ростом  $H$  (участок 0–1–2 на рисунке (а)), а в сильных полях, поскольку  $J = J_{\text{нас}}$ ,  $B$  растет с увеличением  $H$  линейно (участок 2–3).



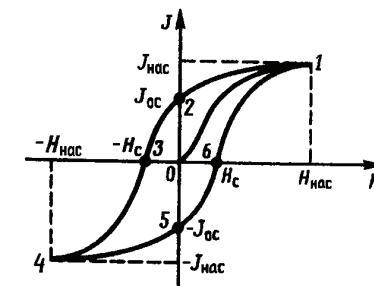
Соответственно  $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = 1 + \frac{J}{\mu_0 H}$  вначале

растет с ростом  $H$  (рисунок (б)), а затем, достигая максимума, начинает уменьшаться, стремясь в случае сильных полей к единице.

Зависимость намагниченности  $J$  от напряженности магнитного поля  $H$  в ферромагнетике определяется предысторией намагничивания. Это явление называется

#### магнитным гистерезисом.

Если ферромагнетик намагнитить до насыщения (кривая 0–1), а затем уменьшать  $H$  (кривая 1–2), то при  $H = 0$  в ферромагнетике останется **остаточная намагниченность**  $J_{\text{ос}}$ .



Это явление используют при изготовлении **постоянных магнитов**.

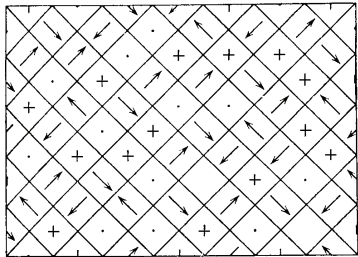
Для того чтобы уменьшить намагниченность до нуля, надо приложить противоположно-направленное поле (точка 3), с напряженностью  $H_c$ , которая называется **коэрцитивная сила**. При дальнейшем увеличении противоположного поля ферромагнетик перемагничивается (кривая 3–4), достигая насыщения (точка 4). Затем его можно опять размагнитить (кривая 4–5–6) и вновь перемагничить до насыщения (кривая 6–1).

Таким образом, изменение намагниченности описывается кривой 1-2-3-4-5-6-1, которая называется **петля гистерезиса**.

Для каждого ферромагнетика имеется определенная температура, называемая **точкой Кюри**, при которой он теряет свои магнитные свойства.

При нагревании выше точки Кюри ферромагнетик превращается в обычный парамагнетик.

Причина такого поведения в том, что при температурах ниже точки Кюри ферромагнетик разбивается на большое число микроскопических областей – **доменов**, самопроизвольно намагниченных до насыщения. Направление намагничивания домена определенным образом связано с расположением атомов в ряды и слои (на рисунке схематически показаны домены в кристалле железа). При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты отдельных доменов ориентированы хаотически и компенсируют друг друга. Поэтому суммарный магнитный момент ферромагнетика равен нулю и ферромагнетик не намагничен.



Внешнее поле **ориентирует** по полю не магнитные моменты отдельных атомов (как это имеет место в случае парамагнетиков), а **магнитные моменты целых областей** спонтанной намагниченности, причем домены поворачиваются по полю скачком.

Формирование доменов обусловлено квантовыми свойствами электронов. Ферромагнитными свойствами обладают вещества, в атомах которых есть **недостроенные** внутренние электронные оболочки с **нескомпенсированными** спинами. В этом случае могут возникать **обменные силы**, которые вынуждают спиновые магнитные моменты электронов ориентироваться **параллельно** друг другу. Это приводит к возникновению областей спонтанного намагничивания.

Существуют вещества, в которых обменные силы вызывают антипараллельную ориентацию спиновых моментов электронов. Такие вещества называются **антиферромагнетиками**. Для них также существует **антиферромагнитная точка Кюри (точка Нееля)**, выше которой разрушается магнитное упорядочение и антиферромагнетик превращается в парамагнетик.

### Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

#### 43. Вихревое электрическое поле.

Для объяснения возникновения индукционного тока в неподвижных проводниках (второй опыт Фарадея) Максвелл предположил, **что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле**, которое и является причиной возникновения индукционного тока в контуре (первое основное положение теории Максвелла).

Циркуляция вектора напряженности  $\vec{E}_B$  этого поля

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \oint_L E_{Bl} dl = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

По определению поток вектора  $\vec{B}$ :  $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ , откуда следует

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Здесь и в дальнейшем мы используем частную производную по времени, поскольку в общем случае электрическое поле может быть неоднородным, и может зависеть не только от времени, но и от координат.

Таким образом, циркуляция вектора  $\vec{E}_B$  не равна нулю, т.е. **электрическое поле  $\vec{E}_B$ , возбуждаемое переменным магнитным полем, как и само магнитное поле, является вихревым.**

Суммарное электрическое поле складывается из электрического поля, создаваемого зарядами  $\vec{E}_q$  и вихревого электрического поля  $\vec{E}_B$ . Поскольку циркуляция  $\vec{E}_q$  равна нулю, то циркуляция суммарного поля

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Это – первое уравнение системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

#### 44. Ток смещения.

Максвелл предположил, что аналогично магнитному полю и **всякое изменение электрического поля вызывает в окружающем пространстве вихревое магнитное поле** (второе основное положение теории Максвелла).

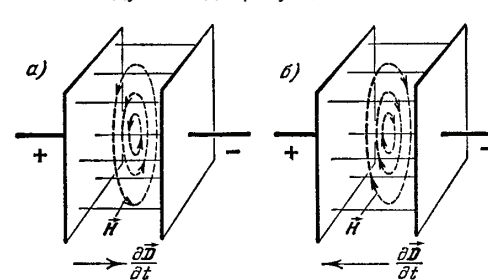
Поскольку магнитное поле есть основной, обязательный признак всякого тока, то Максвелл назвал переменное электрическое поле **током смещения**, в отличие от тока проводимости, обусловленного движением заряженных частиц.

Надо сказать, что термин **ток смещения** не является удачным. Он имеет некоторое основание в случае диэлектриков, так как в них действительно смещаются заряды в атомах и молекулах. Однако понятие тока смещения применяется и для полей в вакууме, где никаких зарядов, а следовательно и никакого их смещения нет. Тем не менее этот термин сохранился в силу исторических традиций.

**Плотность тока смещения**

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Следует подчеркнуть, что ток смещения определяется производной



вектора  $\vec{D}$ , но не самим вектором  $\vec{D}$ . Так, например, в поле плоского конденсатора вектор  $\vec{D}$  всегда направлен от положительной пластины к отрицательной. Но в случае, если электрическое поле возрастает, то  $\partial \vec{D} / \partial t$ , а следовательно и ток смещения направлены так, как показано на

рисунке (а). Если же электрическое поле убывает, то  $\partial \vec{D} / \partial t$  направлено от отрицательной пластины к положительной, и магнитное поле противоположно (рис. (б)) по сравнению с первым случаем.

Если в каком-либо проводнике имеется переменный ток, то внутри проводника существует переменное электрическое поле. Поэтому внутри проводника имеется и **ток проводимости**, и **ток смещения** и магнитное поле проводника определяется суммой этих двух токов.

Максвелл ввел понятие **полного тока**, равного сумме токов проводимости и смещения. **Плотность полного тока**

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Полный ток **всегда замкнут**. На концах проводников обрывается лишь ток проводимости, а в диэлектрике (или в вакууме) между концами проводника имеется ток смещения, который замыкает ток проводимости.

Из всех физических свойств, присущих току проводимости, Максвелл приписал току смещения лишь одно – способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле.

Максвелл обобщил теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$ , используя полный ток

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

**Обобщенная теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$**  представляет собой второе уравнение системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

#### 45. Полная система уравнений Максвелла.

Третье уравнение системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля это теорема Гаусса для поля  $\vec{D}$ . Для заряда, непрерывно распределенного внутри замкнутой поверхности с объемной плотностью  $\rho$ , это уравнение имеет вид

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV.$$

Четвертое уравнение Максвелла – это теорема Гаусса для поля  $\vec{B}$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Таким образом, **система уравнений Максвелла в интегральной форме**

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= \int_V \rho dV, \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} &= \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \\ \oint_S \vec{B} d\vec{S} &= 0. \end{aligned}$$

Для того, чтобы эта система уравнений была **полной** ее необходимо дополнить такими соотношениями, в которые входили бы величины, характеризующие индивидуальные свойства среды, в которой возбуждаются электрические и магнитные поля. Эти соотношения называются **материальными соотношениями**

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E},$$

где  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  – соответственно электрическая и магнитная постоянные,  $\epsilon$  и  $\mu$  – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости,  $\gamma$  – удельная проводимость вещества.

Из уравнений Максвелла следует, что

- **источниками** электрического поля являются либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля,
- **магнитные поля могут возбуждаться** либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями,
- переменное магнитное поле всегда **связано** с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным, т.е. электрическое и магнитное поля **неразрывно** связаны друг с другом – они образуют единое **электромагнитное поле**.

Для **стационарных полей** ( $E = \text{const}$  и  $B = \text{const}$ ) уравнения Максвелла имеют вид

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q; \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I; \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

В этом случае электрические и магнитные поля **независимы** друг от друга, что позволяет изучать **отдельно** постоянные электрическое и магнитное поле.

Воспользуемся известными из векторного анализа **теоремами Стокса и Гаусса** (см. стр.1-31)

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{A} d\vec{l} &= \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}, \\ \oint_S \vec{A} d\vec{S} &= \int_V \text{div } \vec{A} dV. \end{aligned}$$

По определению, **дивергенцией** и **ротором** векторного поля  $\vec{A}$  в данной точке  $M$  называют следующие производные по объёму

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A}(M) &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{A} d\vec{S}}{V}, & \text{rot } \vec{A}(M) &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_L [\vec{A}, d\vec{S}]}{V}, \end{aligned}$$

где интегралы  $\oint_S \vec{A} d\vec{S}$  и  $\oint_S [\vec{A}, d\vec{S}]$  есть, соответственно, **скалярный** и **векторный** потоки векторного поля через замкнутую поверхность  $S$ , которая окружает данную точку  $M$ , охватывая область с объёмом  $V$ .

Дивергенция есть мера **источников** поля. Если в некоторой области дивергенция равна нулю, то векторное поле в этой области свободно от

источников. Те точки поля в которых дивергенция положительна называются **источниками** поля, а в которых отрицательна – **стоками** векторного поля.

Используя теоремы Стокса и Гаусса, можно представить **полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме** (характеризующих поле в каждой точке пространства)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Уравнения Максвелла **не симметричны** относительно электрического и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных.

Так, например, уравнение  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$  явно демонстрирует, что источниками электрического поля являются положительные электрические заряды, а стоками – отрицательные электрические заряды. Уравнение  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  отражает тот факт, что не существует источников и стоков магнитного поля – "магнитных зарядов".

В случае если заряды и токи распределены в пространстве *непрерывно*, то обе формы уравнений Максвелла – интегральная и дифференциальная – *эквивалентны*. Однако если имеются *поверхности разрыва* – поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, то *интегральная форма уравнений является более общей*.

Для того чтобы эти уравнения Максвелла в дифференциальной форме были справедливы и на границах сред, где величины, входящие в уравнения, меняются скачкообразно, необходимо *дополнить* эти уравнения **граничными условиями**, которым должно удовлетворять магнитное поле на границе раздела двух сред. Эти соотношения были рассмотрены ранее:

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad E_{\tau1} = E_{\tau2}, \quad B_{n1} = B_{n2}, \quad H_{\tau1} = H_{\tau2}$$

(первое и последнее уравнения выведены для случая, когда на границе раздела нет ни свободных зарядов, ни токов проводимости).

*Уравнения Максвелла – наиболее общие уравнения для электрических и магнитных полей в покоящихся средах. Они играют в учении об электромагнетизме такую же роль, как законы Ньютона в механике.*