

Логика для всех:
от пиратов
до мудрецов

И. В. Раскина

Школьные
Математические
Кружки

Инесса Раскина

**Логика для всех. От
пиратов до мудрецов**

«МЦНМО»

2016

Раскина И. В.

Логика для всех. От пиратов до мудрецов / И. В. Раскина —
«МЦНМО», 2016 — (Школьные математические кружки)

Четырнадцатая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена логическим задачам и является продолжением ранее вышедшей книжки И. В. Раскиной и Д. Э. Шноля «Логические задачи» (выпуск 11). В книжку вошли разработки десяти занятий математического кружка с примерами задач различного уровня сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для учителя. Приведен также большой список дополнительных задач. Ко всем задачам приведены ответы и подробные решения или указания к решениям. Особенностью книжки является наличие игровых сценариев к отдельным задачам и целому занятию, реализация которых поможет лучшему освоению материала. Для удобства использования заключительная часть книжки сделана в виде раздаточных материалов. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям логики.

УДК 51(07)
ББК 22.1

© Раскина И. В., 2016
© МЦНМО, 2016

Содержание

Предисловие	5
Занятие 1	7
Занятие 2	12
Занятие 3	18
Занятие 4	23
Занятие 5	31
Занятие 6	38
Занятие 7	45
Занятие 8	51
Занятие 9	56
Занятие 10	61
Приложение к занятию 10 Продолжаем играть в мудрецов	66
Дополнительные задачи	72
Решения задач	79
Занятие 1	79
Занятие 2	81
Занятие 3	84
Занятие 4	86
Занятие 5	90
Занятие 6	92
Занятие 7	94
Занятие 8	96
Занятие 9	98
Ответ. 1001	100
Занятие 10	101
Дополнительные задачи	103
Авторы задач	116
Литература	117
Раздаточный материал	118
Занятие 1. Легко ли быть рыцарем, или Высказывания и их отрицания	118
Занятие 2. Урок русского языка, или «Все», «некоторые» и отрицание	120
Занятие 3. Вдоль по Африке, или Примеры для некоторых и контрпримеры для всех	122
Занятие 4. Пиратская логика, или Высказывания с союзами «и», «или»	124
Занятие 5. Можно ли дышать на Луне, или Следствие и обратные высказывания	127
Занятие 6. «...И чушь прекрасную несли», или Как рассуждать логично, не вдумываясь в смысл высказываний	129
Занятие 7. Доказательство от противного	131
Занятие 8. Равносильность	133

И. В. Раскина

Логика для всех: от пиратов до мудрецов

Предисловие

*– Когда я беру слово, оно означает то, что я хочу, не больше и не меньше, – сказал Шалтай презрительно.
Льюис Кэрролл. «Алиса в Зазеркалье»*

Этот выпуск является продолжением книги «Логические задачи», изданной ранее в серии «Школьные математические кружки». Он состоит из десяти занятий, различных по цели, форме и уровню сложности.

Первые пять, а также восьмое занятие представляют собой элементарное введение в формальную логику. Тематика стандартна: высказывания (в том числе общие и частные) и их отрицания, закон исключенного третьего, союзы «и» и «или», следствие и равносильность. Уровень сложности и стиль изложения первых пяти и большей части восьмого занятий рассчитан в первую очередь на учеников 5–7 классов. Почти во все занятия (кроме второго) включены задачи, связанные с другими разделами математики. Особое внимание уделяется умению отличать решенную задачу от нерешенной, в частности, применимости примера и контрпримера. Активно используются графические иллюстрации. Отдельные задачи, требующие от пятиклассников дополнительных знаний (например, признаков делимости), могут быть ими пропущены или заменены аналогичными из раздела дополнительных задач.

Надеемся, что материалы первой части книжки кому-то из учителей пригодятся при подготовке уроков для всего класса, а не только занятий кружка.

Вторая половина книжки построена на решении постепенно усложняющихся задач и адресована кружковцам второго и более года обучения.

Шестое занятие развивает навык рассуждать в соответствии с законами логики, сформулированными на предыдущих занятиях. Его можно проводить после них, а для подготовленных учащихся – и вместо них.

Седьмое занятие посвящено доказательству от противного. Многие школьники впервые встречаются с методом от противного на уроках геометрии. Результат известен: метод усваивается на уровне магического заклинания, применяемого для умиротворения учителя этого бессмысленного и беспощадного предмета. Хотелось бы надеяться, что встреча с методом от противного в предложенном мини-курсе логики окажется более естественной и плодотворной. Рекомендуем провести такое занятие в конце шестого класса или в начале седьмого, незадолго до первого применения метода в геометрии или хотя бы вскоре после него. Следующий подходящий момент связан с доказательством иррациональности квадратного корня из 2 в восьмом классе. Предложенные задачи не слишком просты и для большинства восьмиклассников.

Последние три занятия посвящены метаголоволомкам (т. е. головоломкам о головоломках). В девятом занятии представлены разнообразные метаголоволомки. В десятом занятии и приложении к нему – игровые сценарии на основе задач о мудрецах. Когда мудрецы и колпаки настоящие, рассуждать не только веселее, но и гораздо проще.

Потребность детей в игре, движении, самовыражении можно также реализовать, предложив им разыграть отдельные сценки из вступлений к третьему, четвертому и пятому заня-

тиям. Вступления к занятиям первой части – особенность этой книжки; они помогут читателю-школьнику самостоятельно разобраться с теорией, а учителю – построить вводную беседу. В остальном форма выпуска продолжает традиции серии «Школьные математические кружки»: каждое занятие предваряется методическими рекомендациями, ко всем задачам приведены ответы и решения, к некоторым – подсказки, обсуждения и комментарии. Завершают книжку дополнительные задачи, не вошедшие в занятия, а также раздаточный материал.

В большинство занятий включены соответствующие теме парадоксы – и классические, занимавшие умы философов всех времен, и придуманные недавно и связанные с трудностями перевода одной и той же мысли на разные языки: русский, английский, графический, формальный.

Возникает вопрос: а зачем вообще учить детей формальному языку даже на уровне таблиц истинности? Разве логические операции не соответствуют привычным словам родного языка? В том-то и дело, что соответствие это отнюдь не однозначное. Мы постарались затронуть на занятиях именно те места, где разница особенно заметна, а бытовая речь нелогична. Приведем пример. Допустим, сын никак не может найти ключи, а мама его ругает: «Если разбрасывать вещи где попало, потом ничего не найдешь!» С формальной точки зрения она делает две ошибки. Во-первых, путает следствие и равносильность, не уточняя, что если класть вещи на место, то найти их потом легко. Во-вторых, ее слова легко опровергнуть, найдя хотя бы одну вещь. Тем не менее, сын прекрасно понимает, что имела в виду мама. Он привыкает к соответствующей речи и с этим опытом приходит в школу.

Неудивительно, что школьники часто не отличают свойство от признака (и вообще прямую теорему от обратной), подменяют доказательство рассмотрением частного случая и делают другие логические ошибки. Удивительно скорее, когда учителей это удивляет. Мы так давно привыкли к правилам игры и считаем их настолько очевидными, что детям даже и сообщать их в соответствии с программой не требуется: пусть сами догадаются! И наиболее склонные к абстрактному мышлению дети действительно догадываются. А наиболее склонные к честной игре учителя считают своим долгом своевременно познакомить всех участников с ее правилами и терпеливо приучают не нарушать их. В помощь таким учителям и написана эта книга.

Автор благодарит К. А. Кнопа, А. В. Шаповалова и Э. Шноля за предложенные задачи, методические идеи подробные содержательные обсуждения.

Занятие 1

Легко ли быть рыцарем, или Высказывания и их отрицания

- В теперешнее время полезнее всего отрицание – мы отрицаем.
- Всё?
- Всё.

И. С. Тургенев. «Отцы и дети»

На этом занятии вводятся понятия высказывания и его отрицания, а также формулируется закон исключенного третьего.

Его можно проводить на кружке с разнородным составом. Большинство заданий доступны абсолютно всем и интересуют в том числе и ребят с гуманитарным складом ума. А те кружковцы, для которых эти задания очевидны, смогут вдоволь поломать голову над вопросами со звездочкой.



Текст о трудных вопросах для рыцаря предлагаем использовать для беседы с учениками-«рыцарями». При обсуждении задачи 1.1 интересно сравнить для случаев 3, 4 и 5 степень незнания: «я пока не знаю, но могу узнать», «никто пока не знает и неизвестно, узнает ли когда-либо» и «принципиально нельзя однозначно ответить на вопрос».

Сюжет о пляже на острове рыцарей и лжецов можно разыграть с помощью двух участников кружка, выдав им записки с репликами Боба и Доба и попросив сыграть поартистичнее. Имена можно поменять на имена реальных ребят.

Стоит ли записывать и учить определения и «правила»? Заметим, что понятие высказывания – неопределяемое, подчеркнутые в тексте слова лишь поясняют его. Дать строгое определение отрицанию несложно, но на этом уровне незачем. А вот законом исключенного третьего мы еще не раз воспользуемся, его не вредно и на доске записать.

После задачи 1.3 можно честно спросить у ребят: «Вам не кажется, что мы тут ерундой занимаемся и зачем-то формулируем очевидные вещи?» Потом дружно «доказать», что Земля имеет форму чемодана (см. задачу 1.4). А после разрешения парадокса заметить, что

иногда именно так и развивается математика: интуитивно верные рассуждения приводят к абсурду, приходится рассуждать более строго, создавая тем самым новую теорию.

Задачи 1.5–1.8 – простые упражнения на закрепление пройденного. Задача 1.9 связана с законом двойного отрицания. Если она вызывает сложности, то можно предложить вопрос, где этот закон не так хитро прячется за разнообразными словами. Например, истинно ли высказывание «Неверно, что неверно, что сегодня пятница»? Задача 1.10 аналогична 1.4 и очень известна: ее условие знают все, а решение мало кто. Задача 1.11 – это 6 задач по математике. Первые две очевидны, но сама формулировка отрицания может вызвать сложности; их преодолению уделяется значительное внимание на втором занятии. В большинстве остальных очевидна формулировка отрицания, зато возрастает сложность самих задач. Это удобно, чтобы в конце занятия самые быстрые кружковцы не скучали без дела. Разбирать задачу 1.11 (п. 5) на этом занятии вряд ли стоит, лучше вернуться к ней при изучении принципа Дирихле. Зато демонстрация решения задачи 1.11 (п. 6) может стать веселым финалом.

Легко ли быть рыцарем? Нет, не средневековым воином в доспехах, а всего лишь абсолютно честным жителем острова рыцарей и лжецов. Кто думает, что легко, пусть попробует честно ответить на такие вопросы:

1. Какого цвета небо?

2. Ты сильный?

3. Верно ли, что любое четное число, не меньшее 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел?

Первый вопрос трудный, потому что небо бывает разным. Кто думает, что небо голубое, пусть посмотрит на него во время дождя, на закате или ночью. Так что в реальной жизни на такой вопрос однозначно ответить нельзя. Но в математике принято упрощать жизнь. Например, настоящий пешеход нуждается в отдыхе, а в задаче на движение может идти много часов с постоянной скоростью. Поэтому и цвет неба можно считать постоянным. Давайте договоримся считать его голубым.

Второй вопрос трудный, потому что всякая сила относительна. Если сильный тот, кто может 5 раз подтянуться на турнике, то да. А если сильный тот, кто может поднять 50-килограммовую штангу, то нет. Чтобы рыцарь мог ответить на подобный вопрос, надо сначала четко сформулировать, какой человек считается сильным.

Третий вопрос поставлен абсолютно четко (в отличие от вопроса про силу), и на него есть однозначный ответ «да» или «нет» (в отличие от вопроса про небо). Только вот найти этот ответ математики безуспешно пытаются уже третий век. Вопрос этот называется проблемой Гольдбаха. Для ее решения простых договоренностей и объяснений явно недостаточно.

Чтобы избежать недоразумений, мы в этой книге постараемся не задавать рыцарю вопросов, на которые он не может ответить. И будем ставить вопрос об истинности только *таких утверждений, про которые можно ясно сказать, истинны они или ложны*. Такие утверждения в логике называются *высказываниями*.

Задача 1.1. Являются ли высказываниями следующие предложения?

1. Семеро одного не ждут.

2. У кошки четыре ноги.

3. 1 января 2001 года был вторник.

4. Любое четное число, не меньшее 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел

Это утверждение истинно.

Решение. 1. Нет. Не зная, о каких семерых, о каком одном и о каком моменте идет речь, определить истинность этого утверждения нельзя.

2. Да. Это истинное высказывание. Возможное замечание о несчастных трехногих кошках – излишняя придирка.

3. Да, это высказывание. Желаящие определить его истинность могут обратиться к календарю или потратить несколько минут на расчеты. Автор готов сэкономить вам эти минуты: высказывание ложное, 1 января 2001 года был понедельник.

4. Да, это высказывание. Желаящие определить его истинность могут потратить годы на изучение теории чисел. Успех не гарантирован. Автор не в силах вам помочь.

5. Нет. Про это утверждение нельзя ясно сказать, истинно оно или ложно: если это утверждение истинно, то оно истинно, а если ложно, то ложно. В логике вообще стараются не допускать утверждений, говорящих об истинности себя самих.

А теперь представим, что путешественник, находясь на острове рыцарей и лжецов, захотел искупаться. По дороге он встретил двух местных жителей, Боба и Доба, и спросил, на каком расстоянии в этом направлении находится пляж.

– Два километра, – хмуро буркнул Боб.

– Всего лишь 200 метров, – с любезной улыбкой возразил ему Доб.

Путешественник обрадовался, поскольку знал, что Боб лжец. «А раз Доб возразил лжецу, – подумал путешественник, – то он рыцарь». Какого же было удивление путешественника, когда ни через 200 метров, ни через 2 километра пляжа не оказалось! А через 5 километров он дошел до скалистого берега с табличкой «Купаться запрещено!» И Боб, и Доб оказались лжецами.

Впрочем, если бы путешественник получше разбирался в логике, он бы не удивлялся. Высказывания «Пляж находится в 200 метрах отсюда» и «Пляж находится в двух километрах отсюда» не являются противоположными. В описанном случае они оба оказались ложными. При других условиях они могли бы и одновременно оказаться истинными (вдоль дороги может находиться сколько угодно пляжей).

А может ли рыцарь так возразить лжецу, чтобы не было никаких сомнений в его правдивости? Может. Например, если лжец говорит: «В двух километрах отсюда есть пляж», достаточно сказать: «Неверно, что в двух километрах отсюда есть пляж». Или выразить ту же мысль короче: «В двух километрах отсюда нет пляжа». Никаких сомнений не возникнет: либо пляж есть, либо его нет. Из двух высказываний:

1) в двух километрах отсюда есть пляж;

2) в двух километрах отсюда нет пляжа одно обязательно истинно, а второе ложно.

Подведем итог:

- К каждому высказыванию существует *противоположное*. Для его построения перед любым высказыванием можно добавить слова «Неверно, что...». Есть и другие способы, о них поговорим на этом и следующих занятиях.

- Высказывание, противоположное данному, называют его *отрицанием*.

- Из двух противоположных высказываний всегда одно является истинным, а другое ложным. Другими словами, всегда *истинно либо само высказывание, либо его отрицание* (но не то и другое одновременно).

Последнее предложение называется *законом исключенного третьего*. Его часто проносят в виде афоризма «третьего не дано».

Задача 1.2. Являются ли противоположными высказывания:

1) «Вчера светило солнце» и «Вчера шел дождь»;

2) «Я умею прыгать через лужи» и «Я не умею прыгать через лужи»?

Решение. 1) Нет. Возможно, вчера было пасмурно, но без осадков (или шел снег). С другой стороны, в один и тот же день вполне мог идти дождь и светить солнце.

2) Да. Можно либо уметь что-либо делать, либо не уметь.

Задача 1.3. Постройте отрицания к высказываниям, не пользуясь оборотом «Неверно, что...»:

- 1) Я встретил Вас.
- 2) Трудно быть богом.

Решение. 1) Построить отрицание помогает частица «не». Получается высказывание «Я не встретил Вас», противоположное исходному. Подумайте, почему высказывания «Не я встретил Вас» и «Я встретил не Вас» отрицаниями не являются.

2) Во втором лучше слово «трудно» заменить антонимом, получится, что «Богом быть легко».

Задача 1.4*. Британские ученые нашли древнюю рукопись, содержащую всего два утверждения:

- 1) Оба утверждения этой рукописи ложны.
 - 2) Земля имеет форму чемодана.
- Какой вывод можно сделать из этой рукописи?



Обсуждение. Пусть первое утверждение истинно. Тогда оно ложно. Противоречие. Значит, первое утверждение ложно, то есть хотя бы одно из утверждений рукописи истинно. Но в ложности первого мы уже убедились. Следовательно, истинно второе: британские ученые доказали, что Земля имеет форму чемодана.

Решение. Разумеется, «доказательство» содержит ошибку. Но какую? Рукописи не существует? Ну и что, ее не поздно и сейчас написать. Дело в другом. В первом утверждении говорится о ложности его самого. Как сказано в решении задачи 1.1 (п. 5), в логике не рассматриваются высказывания, говорящие о своей истинности или ложности. В частности, к ним нельзя применять закон исключенного третьего.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.5. Объясните, почему данные предложения не являются высказываниями. Можете ли вы сконструировать аналогичные по смыслу высказывания? Как вы думаете, истинны ли они?

1. Семь раз отмерь, один раз отрежь.

2. Что нам стоит дом построить: нарисуем – будем жить.

3. Шел дождь.

Задача 1.6. Придумайте несколько высказываний и несколько предложений, не являющихся высказываниями.

Задача 1.7. Являются ли противоположными высказывания:

1) «Нельзя пользоваться калькулятором на уроках математики» и «На уроках математики можно пользоваться калькулятором»;

2) «Андрей выше Мити» и «Митя выше Андрея»?

Задача 1.8. Постройте отрицания к высказываниям, не пользуясь оборотом «Неверно, что...»:

1) Завтра дальняя дорога выпадает королю.

2) У него деньжонок много.

3) А я денежки люблю.

Задача 1.9. 1) Директор школы категорически возражает против отмены контроля за прическами. Может ли Степа безнаказанно покрасить волосы в малиновый цвет?

2) Директор школы категорически возражает против отмены решения о запрете контроля за прическами. Может ли Степа безнаказанно покрасить волосы в малиновый цвет?

Задача 1.10*. Житель острова Крит говорит: «Все критяне лжецы». Истинно или ложно это высказывание? (В этой задаче Крит считается островом рыцарей и лжецов.)

Задача 1.11. К каждому из высказываний сформулируйте отрицание. Определите, что верно: утверждение или его отрицание.

1) Сумма двух двузначных чисел – двузначное число.

2) Сумма двух четных чисел – четное число.

3) Прямоугольник размером 20 x 15 можно разрезать на прямоугольники размером 3x5.

4) Квадрат размером 2015 x 2015 можно разрезать на прямоугольники размером 20 x 15.

5) В нашей школе найдутся два ученика, имеющие одинаковое число друзей среди учеников нашей школы.

6) * Через отверстие, прорезанное в листке из школьной тетради, человек пролезть не может.

Занятие 2

Урок русского языка, или «Все», «некоторые» и отрицание

...о великий, могучий, правдивый и свободный русский язык!
И. С. Тургенев. «Русский язык»

Предмет этого занятия – общие и частные высказывания. В формальной логике для их записи используют всего два квантора (квантор общности \forall и квантор существования \exists). А в бытовом языке вместо кванторов используют самые разные слова, что порой приводит к недоразумениям. Задачи 2.1, 2.2 и 2.13 помогают разобраться в способах передачи кванторов общности и существования средствами русского языка.



Смысл общих и частных высказываний удобно иллюстрировать с помощью кругов Эйлера. Рекомендуем их использовать при обсуждении задач 2.3, 2.11, 2.12, 2.16, несмотря на то что для решения предложенных задач часть учеников в иллюстрациях не нуждается. Во-первых, другой части учеников картинка может существенно помочь. Во-вторых, навык работы с кругами Эйлера еще никому не повредил. Надеемся, что в задаче 2.16 удобство трех кругов оценят и те, кому два круга в предыдущих задачах казались излишним «наворотом». В-третьих, использование кругов Эйлера позволяет почувствовать родство логики и теории множеств.

Задачи 2.4–2.10, 2.14, 2.15 связаны с построением отрицания к общим и частным высказываниям. Меньше всего нам бы хотелось, чтобы итогом занятия стала формулировка соответствующей пары правил, которое дети будут потом применять в задачах. А больше всего – чтобы они грамотно строили отрицания, не задумываясь о правилах. Если на этом занятии дети много ошибаются, продолжайте предлагать на последующих занятиях аналогичные упражнения (в том числе из раздела дополнительных задач) до победного конца.

Можно ли одну и ту же мысль выразить по-разному? Насколько сильно зависит смысл русского предложения от порядка слов? Всегда ли одинаково следует понимать одни и те же слова? Не будем пытаться на одном занятии изучить весь русский язык. Ограничимся несколькими словами и выражениями: «все», «каждый (любой)», «некоторые», «существует», «хотя бы один».

Задача 2.1. 1) Серый Волк заинтересовался цветом шапочек. Однажды он встретил Красную Шапочку. Помогите Волку сделать правильный вывод. Придумайте несколько вариантов.

2) Выразите другими словами мысль «Все шапочки красные».

Решение. 1) Можно сказать: «Некоторые шапочки красные». Но можно и по-другому. Например, так:

Шапочки бывают красные.

Иногда встречаются красные шапочки и т. п.

Математики любят говорить точно: «Существует хотя бы одна красная шапочка».

2) «Шапочки всегда красные», «Любая шапочка красная» или «Каждая шапочка красная».

Задача 2.2. Вася говорит, что слова «для всех» и «для каждого» означают одно и то же. Прав ли Вася?

Решение. Вопрос скорее лингвистический, чем математический. Часто смысл предложения действительно не меняется при замене «для всех» на «для каждого» и соответствующих изменениях формы слов. Например, «Для всех принцесс горошины под периной невыносимы» означает то же, что и «Для каждой принцессы горошина под периной невыносима». Но вот если вместо «Выдать зимовщикам для всех одну пару валенок» попросить «Выдать зимовщикам для каждого одну пару валенок», зимовщики наверняка заметят разницу.

Задача 2.3. 1) Означают ли одно и то же высказывания: «Некоторые сантехники любят рэп» и «Некоторые любители рэпа – сантехники»?

2) Означают ли одно и то же высказывания: «Все сантехники любят рэп» и «Все любители рэпа – сантехники»?

Ответ. 1) Да. **2)** Нет.



Рис. 1

Решение. 1) Чтобы лучше разобраться в смысле высказываний, изобразим их с помощью кругов Эйлера (см. рис. 1). Пусть в одном круге находятся сантехники, в другом – любители рэпа. Если первое высказывание истинно, то круги непременно пересекаются, и в пересечении кругов располагается хотя бы один сантехник, любящий рэп. Но ровно это же требуется и для истинности второго утверждения. Поэтому они означают одно и то же.

2) Снова разместим сантехников и рэперов в пересекающихся кругах. В пересечении кругов, как и прежде, расположены сантехники, любящие рэп. Сантехники, НЕ любящие рэп, окажутся в серой части рисунка 2. Если таковых нет (т. е. все сантехники любят рэп), то серая часть пуста.

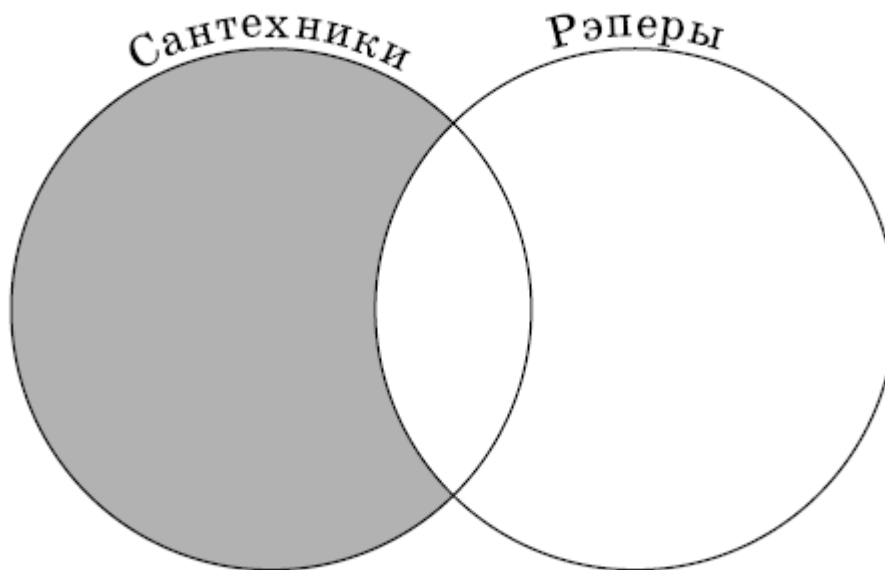


Рис. 2

Чтобы показать это на рисунке, принято изображать круг сантехников внутри круга рэперов (см. рис. 3).

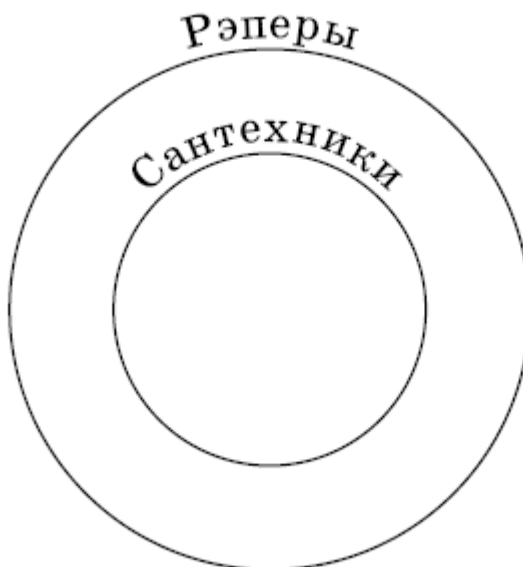


Рис. 3

Сравнение рисунков 3 и 4 помогает понять, почему смысл высказываний «Все сантехники любят рэп» и «Все любители рэпа – сантехники» разный.

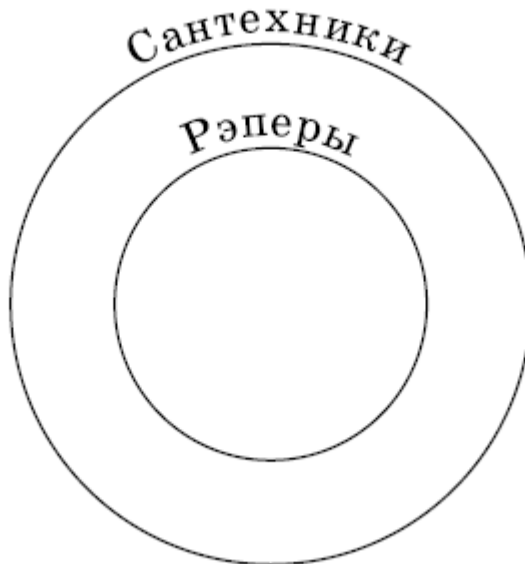


Рис. 4. Все любители рэпа – сантехники

Задача 2.4. Лжец сказал: «В этой корзине все грибы съедобны». Значит ли это, что все грибы в этой корзине ядовиты? (Для простоты забудем об условно съедобных грибах и будем каждый гриб считать либо съедобным, либо ядовитым.)

Ответ. Нет, не значит. В корзине могут лежать одновременно и съедобные, и ядовитые грибы.

Обсуждение. Неверно, что все грибы съедобны. Значит, съедобны НЕ ВСЕ грибы. То есть ХОТЯ БЫ ОДИН из грибов ядовит.

Задача 2.5. Рассмотрим два утверждения. Сколько из них могут быть верными?

- 1) В этой корзине все грибы съедобные.
- 2) В этой корзине есть хотя бы один ядовитый гриб.

Ответ. Верно ровно одно утверждение.

Решение. Начнем внимательно перебирать грибы по одному. Первый же найденный нами ядовитый гриб окажется одновременно и контрпримером, опровергающим первое высказывание, и примером, подтверждающим второе. А если, перебрав всю корзину, ядовитого гриба мы так и не найдем, то верным окажется только первое утверждение. В любом случае одно из двух утверждений истинно, а другое ложно.

Комментарий. Почему так получилось? Потому что утверждения «В этой корзине все грибы съедобные» и «В этой корзине есть хотя бы один ядовитый гриб» противоположны, то есть одно из них является отрицанием другого. А по закону исключенного третьего в этом случае как раз и верно ровно одно из двух.

Итак, чтобы построить отрицание к высказыванию про всех, надо заменить:

- «всех» на «некоторых»;
- свойство на противоположное (например, «ядовитое» на «съедобное»).

Задача 2.6. Лжец сказал: «В этой корзине некоторые грибы ядовитые». Что можно узнать из этого высказывания?

Решение. Если бы в корзине был хотя бы один ядовитый гриб, лжец был бы прав. Поэтому ядовитых грибов в корзине нет. Другими словами, все грибы в этой корзине съедобны.

Итак, чтобы построить отрицание к высказыванию про некоторых, надо заменить:

- «некоторых» на «всех»;
- свойство на противоположное (например, «ядовитое» на «съедобное»).

Задача 2.7. Дано утверждение: «Все малышки хорошо поют». Незнайка сформулировал к нему отрицание: «Все малышки поют отвратительно».

- 1) Как с помощью закона исключенного третьего убедить Незнайку, что он ошибся?
- 2) Сформулируйте отрицание правильно.

Решение. 1) По закону исключенного третьего верно ровно одно из двух: либо утверждение, либо его отрицание. Найдя двух малышей, одна из которых поет хорошо, а вторая плохо, мы убедимся, что неверно ни само утверждение, ни его «отрицание», придуманное Незнайкой.

2) «Существует хотя бы одна малышка, которая поет плохо». Или «Некоторые малышки поют плохо».

Задача 2.8. Постройте отрицания к каждому утверждению, не используя частицу «не». Где сможете, укажите, что верно: утверждение или его отрицание. Где сможете, обоснуйте свое мнение примером или контрпримером.

- 1) На Земле существует хотя бы одна гора выше 10000 м над уровнем моря.
- 2) Существует хотя бы один вулкан с высотой более 10000 м относительно своего основания.
- 3) Любой жук помещается в спичечном коробке.
- 4) Некоторые горные реки быстрые.
- 5) Бутерброд всегда падает маслом вниз.

Ответ. 1) Верно отрицание: любая гора на Земле не выше 10000 м над уровнем моря. Обосновать утверждение такого типа примером нельзя, знание высоты Эвереста (8848 м) не доказывает, что более высоких гор нет.

2) Верно утверждение. Пример – вулкан Мауна-Кеа на Гавайских островах с высотой 10203 м от основания (и «всего» 4205 м над уровнем моря). Последний раз этот вулкан извергался несколько тысяч лет назад. А самый высокий вулкан Солнечной системы – гора Олимп на Марсе имеет высоту 21,2 км от основания.

3) Верно отрицание: существует хотя бы один жук, не помещающийся в спичечном коробке. Пример – жук-голиаф из подсемейства бронзовки, обитающий в Африке. Длина его тела достигает 11 см.

4) Верно утверждение. Примером служит любая горная река.

5) Не стоит относиться к этой задаче всерьез. Для точного построения отрицания потребуется сначала строго определить, что такое бутерброд. Например, может ли он вообще не содержать масла? Мы предполагаем, что при любом определении верным окажется отрицание, но для приведения примера может потребоваться тренировка.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.9. Рассмотрим два утверждения:

А: В этой корзине все грибы съедобные.

Б: В этой корзине есть хотя бы один съедобный гриб.

Могут ли быть верными: 1) оба утверждения; 2) ровно одно из них; 3) ни одного?

Задача 2.10. Является ли высказывание «В этой корзине некоторые грибы съедобные» отрицанием высказывания «В этой корзине некоторые грибы ядовитые»?

Задача 2.11. Нарисуйте с помощью кругов Эйлера иллюстрацию к каждому высказыванию. Есть ли среди иллюстраций одинаковые? Одинаков ли смысл соответствующих высказываний?

1. Все хоббиты живут в норах.
2. Все жители нор – хоббиты.
3. Некоторые кошки серые.
4. Некоторые серые существа – кошки.

Задача 2.12. Когда учительница ругала Дениса за плохой почерк, он сказал: «У всех великих людей был плохой почерк, значит, я великий человек». Прав ли он?

Задача 2.13. Шерлок Холмс допросил Зайца, Волка и Лису по делу о съедении Колобка. Подозреваемые заявили:

Заяц: «Хотя бы один из нас съел Колобка».

Волк: «Хотя бы один из нас не ел Колобка».

Лиса: «Хотя бы один из нас сказал правду».

Как известно, Колобка съела Лиса. Кто сказал правду, а кто солгал?

Задача 2.14. Комиссия посетила больницу и составила отчет, в котором не было ни одного правдивого утверждения.

«Все врачи имеют достаточный опыт. Некоторые врачи никогда еще не ставили неправильного диагноза. Никто из врачей не опаздывает на работу. Все пациенты довольны лечением. Ни один из них не жалуется на бытовые условия. Некоторые пациенты выздоравливают за один день».

Напишите, как выглядел бы честный отчет.

Задача 2.15. В комнате собрались несколько жителей острова рыцарей и лжецов. Трое из них сказали следующее:

- Нас тут не больше трех человек. Все мы лжецы.
- Нас тут не больше четырех человек. Не все мы лжецы.
- Нас тут пятеро. Лжецов среди нас не меньше трех.

Сколько в комнате человек и сколько из них лжецов?

Задача 2.16. Предположим, что справедливы следующие утверждения:

- Среди людей, имеющих телевизоры, не все являются малярами.
- Люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли отсюда, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

Занятие 3

Вдоль по Африке, или Примеры для некоторых и контрпримеры для всех

*Но папочка и мамочка уснули вечерком,
А Танечка и Ванечка – в Африку бегом, —
В Африку!
В Африку!*

К. И. Чуковский

Школьники часто начинают решение задачи с поиска подходящего примера. Но тут встают три вопроса. Как такой пример подобрать? В каких случаях достаточно привести один пример для полного решения задачи? Что делать в остальных случаях? На этом занятии мы постараемся научиться отвечать на самый простой вопрос, но от этого не менее важный: на второй. Умение отличать решенную задачу от нерешенной – основа математической культуры. Отвечать на первый вопрос помогут другие выпуски нашей серии, а на третий – только годы занятий.



При составлении этого занятия мы вновь постарались учесть интересы разнородного по составу кружка. Вопрос применимости примеров и контрпримеров актуален прежде всего для начинающих, сложность задач для самостоятельного решения на приведение примера разнообразна, а рассуждения про пустое множество и парадоксы про Деда Мороза достаточно сложны. Чисто логические вопросы можно разбавить конструктивами по вкусу.

Во введении обсуждается применимость примеров (в том числе контрпримеров) к доказательству и опровержению частных и общих высказываний. Истинность таких высказываний предлагается определить и в большинстве задач. Но мы сознательно нарушили

чистоту жанра, включив в занятие задачи 3.6 и 3.7 с вопросом «можно или нельзя?», в которых фактически требуется определить, что верно: частное высказывание или его отрицание.

Надеемся, что пяти- и шестиклассникам будет интересно разыграть сценку с Танечкой и Ванечкой в начале занятия. Текст четверем «артистам» стоит выдать заранее, но учить его наизусть незачем, пусть подглядывают в шпаргалки. Таблицу рекомендуем изобразить на доске, можно с сокращениями.

Более опытных кружковцев могут заинтересовать два сюжета. Первый связан с гипотезами Гольдбаха (задача 3.2). Это уникальный случай, когда формулировка совсем недавнего выдающегося математического достижения понятна школьнику. Участники кружка могут совместными усилиями проверить гипотезу Гольдбаха для чисел из первой сотни (если каждому поручить свой отрезок числового ряда), осознать необходимость доказательства, а затем узнать историю проблемы и вместе порадоваться успеху Хельфготта.

Второй тонкий вопрос – это истинность любого общего высказывания об элементах пустого множества (задачи 3.3–3.5 и 3.12). В школьной программе он игнорируется из-за несоответствия формального и житейского подхода к нему. Это приводит к неоднозначному толкованию условия некоторых задач (в частности, с параметром). Несложная задача 3.11 служит для повторения материала предыдущего занятия, а ее сюжет связан с гораздо более сложной следующей задачей-парадоксом 3.12.

Задача 3.13 позволяет эффектно завершить занятие. Она не имеет отношения к его теме, содержательно в ней развивается наиболее сложная идея первого занятия, а сюжетно – линия Деда Мороза. Можно в начале занятия не выдавать ее вместе с другими задачами, а дать «на сладкое» двум кружковцам, решившим другие задачи быстрее остальных. В задаче 3.12 обсуждается существование Деда Мороза. После этого самое время выпустить «на сцену» двух «артистов», которые неопровержимо докажут существование Деда Мороза!

Однажды Танечка и Ванечка слышали про Африку. И подумали, что в Африке водятся большие звери. Они дождались, когда мама с папой уснули, и убежали в Африку. Там Танечка успела увидеть только мартышку, а Ванечка бегемота. Тут как раз проснулись родители. Они обо всем догадались и забрали детей из Африки домой. На обратном пути дети заспорили.

– Правда, африканские звери большие? Я же сам видел! – спросил у папы Ваня.

– Нет, африканские звери маленькие, – не соглашалась Таня. – Я тоже сама видела. Вот скажи, папа, кто из нас прав?

– А это смотря как понимать вопрос, – начал папа. – Можно так: «Верно ли, что НЕКОТОРЫЕ африканские звери большие?»

– Да, верно! – торжествуя посмотрел на сестру Ваня. – Например, бегемот, которого я видел.

– Молодец, – похвалил папа. – Для ответа «Да» на вопрос про некоторых достаточно привести один пример.

– А если бы я не увидел бегемота? – забеспокоился Ваня. – Тогда из-за Танькиной мартышки ответ был бы «Нет, неправда»?

– Ну что ты! – успокоил его папа. – Размеры животных не зависят от того, видишь ли ты их. Даже если встретишь тысячу маленьких мартышек, отвечать «Нет» еще рано. Понимаешь почему?

– Понимаю, – сказал Ваня. – Бегемот или другой пример мог просто хорошо спрятаться!

– Поэтому ответ «Нет» на вопрос про некоторых объяснить бывает непросто, – вздохнула мама. – Для этого требуется настоящее доказательство.

А папа продолжил:

– Но ваш вопрос можно понять и совсем по-другому: «Верно ли, что ВСЕ африканские звери большие?».

– Откуда мы знаем? Мы же не успели увидеть всех зверей, – начал было Ваня, но Танечка его перебила:

– А вот и знаем! Не все. Ведь я же видела маленькую мартышку!

– Хорошо, что ты ее увидела, – похвалил папа. – Твоя мартышка – прекрасный...

– Пример! – перебила Танечка.

– Почти, – согласился папа. – Только пример, который помогает опровергнуть предположение, называется КОНТРИПРИМЕР. И для ответа «Нет» на вопрос про всех достаточно привести один контрпример.

– А если ответ был бы «Да»? – хором спросили дети. – Как называется нужный пример?

– Никак не называется, – ответил папа. – Потому что его нет. Никакими примерами не убедишь, что где-нибудь ВСЕ звери большие.

– Поэтому ответ «Да» на вопрос про всех объяснить бывает непросто, – вздохнула мама. – Для этого требуется настоящее доказательство.

– А если ты уже тысячу зверей встретил и все они большие? – с надеждой спросил Ванечка.

– Ну и что! – победно вскричала Танечка. – Хоть миллион! Моя маленькая мартышка тем более могла спрятаться! Еще лучше твоего бегемота!

Пока Танечка и Ванечка выясняют, кто лучше прячется, опишем с помощью таблицы два типа утверждений:

О чем речь?	О некоторых	Обо всех
Пример утверждения	НЕКОТОРЫЕ африканские звери большие	ВСЕ африканские звери большие
Как доказать	Привести пример (найти бегемота)	???
Как опровергнуть	???	Привести контрпример (найти мартышку)

Там, где стоят знаки вопроса, общего рецепта нет, для каждой задачи приходится искать свое доказательство.

Задача 3.1. Определите, какие из утверждений верны. Где можно, подтвердите свой ответ примером (контрпримером). В остальных случаях обоснуйте его по-другому.

1. Все нечетные числа простые.
2. Все простые числа нечетные.
3. Некоторые нечетные числа простые.
4. Некоторые простые числа нечетные.
5. Все четные числа составные.
6. Все числа вида $p + 7$, где p – простое, являются составными.

Ответ. Верны утверждения 3, 4, 6.

Решение. Привести контрпримеры к утверждениям 1, 2, 5 и примеры к утверждениям 3, 4 предоставляем читателю. Для доказательства утверждения 6 рассмотрим два случая. Если $p = 2$, то число $p + 7 = 9$ – составное. Если простое число $p \neq 2$, то оно нечетное, поэтому $p + 7$ – четное и больше 2, следовательно, составное.

Задача 3.2. Верно ли высказывание: «Любое нечетное число, большее 5, можно представить в виде суммы трех простых чисел»?

Обсуждение. На первый взгляд это утверждение мало отличается от сформулированных в предыдущем задании. Попробуем рассуждать так же. Для начала поищем контрпример (как в пунктах 1, 2 и 5 предыдущей задачи): $7 = 2 + 2 + 3$, $9 = 3 + 3 + 3$, $11 = 3 + 3 + 5$ и т. д. Не получается? Что ж, попытаемся доказать, что утверждение верно (как в пункте 6). Тоже не получается? Не огорчайтесь, вы не одиноки! Еще в 1742 году Кристиан Гольдбах предложил эту задачу Леонарду Эйлеру. Позже она получила название тернарной проблемы Гольдбаха. Ей занимались многие математики, но лишь в 2013 году американский математик Харальд Хельфготт окончательно доказал, что гипотеза Гольдбаха верна. А бинарная проблема Гольдбаха, упоминавшаяся на первом занятии, не решена до сих пор.

Задача 3.3*. Верно ли утверждение: «Все дожившие до наших дней тираннозавры умеют вышивать крестиком»?

Обсуждение. Утверждение звучит странно и на первый взгляд кажется неверным. Что ж, попробуем его опровергнуть. Для этого нужно привести контрпример – то есть дожившего до наших дней тираннозавра, не умеющего вышивать крестиком. Поскольку его не существует, то утверждение верно.

Ответ. Да, верно.

Комментарий 1. Сравним две последние задачи. Поиск контрпримера в обеих оказался затруднительным. Но эти затруднения разного характера. Контрпример к проблеме Гольдбаха мы найти не могли, но не были уверены, что его не сможет найти кто-то более умный или терпеливый. Поэтому вывода сделать не могли (а Харальд Хельфготт смог!). А вот живого тираннозавра не только мы с вами не можем найти, но и уверены, что никто другой не найдет.

Комментарий 2. Аналогично можно верно высказываться не только о живых тираннозаврах, но вообще обо всем, чего на самом деле нет. Например, все кролики, проглотившие удава, остались голодными. (Не верите? Тогда найдите кролика, проглотившего удава, и поинтересуйтесь, сыт ли он.) А все четные числа, оканчивающиеся на 5, оканчиваются на 7. С точки зрения формальной логики любое высказывание обо всех элементах пустого множества верно, потому что к нему не может быть приведен контрпример.

Есть и другая причина считать верными высказывания о современных тираннозаврах и прочих несуществующих объектах. Начнем с несомненно истинного высказывания «Все числа, кратные 12, четны». Дополнив условие, мы получим следствие из него, которое тоже должно быть истинным. Например, «Все трехзначные числа, кратные 12, четны». Или «Всякое число с суммой цифр 30, кратное 12, четно». Или «Всякое число с суммой цифр 100, кратное 12, четно». А теперь заметим, что числа с суммой цифр 100, кратные 12, – такие же несуществующие объекты, как и современные тираннозавры.

Задача 3.4*. Рассмотрим два высказывания:

А: Некоторым Мишиным одноклассникам 12 лет.

Б: Всем Мишиным одноклассникам 12 лет.

Можно ли, ничего не зная про Мишу, утверждать, что:

1) если верно А, то верно и Б;

2) если верно Б, то верно и А?

Обсуждение. Если бы речь шла об одном конкретном Мише, вопрос был бы неинтересен. Например, Миша учится в шестом классе, у него двадцать одноклассников и всем им по 12 лет; тогда оба высказывания, А и Б, истинны. Однако в задаче требуется понять, может ли для какого-нибудь Миши первое высказывание оказаться верным, а второе нет (т. е. возможен ли контрпример).

Решение. 1) Нельзя. Контрпример очевиден: пусть у Миши 5 (или любое другое натуральное число) одноклассников, которым двенадцать лет, и 20 (или любое другое натуральное число) тринадцатилетних одноклассников. Тогда А истинно, а Б ложно.

2) Как ни странно, тоже нельзя! Для построения контрпримера предположим, что Мише три года, и никаких одноклассников у него вообще нет. Верно ли утверждение Б? Верно! Кто не согласен, пусть предъявит контрпример – Мишиного одноклассника другого возраста. А утверждение А, означающее, что существует хотя бы один Мишин двенадцатилетний одноклассник, неверно.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.5. Землянин Вася сказал: «Все марсиане лжецы». Прав ли Вася?

Задача 3.6. Есть 30 гирек, которые весят 1 г, 2 г, 3 г, ..., 30 г. Можно ли разложить их: 1) на две кучки одинакового веса; 2) на три кучки одинакового веса?

Задача 3.7. 1) Можно ли заполнить таблицу 3х3 натуральными числами так, чтобы сумма чисел в каждой строке была четным числом, а в каждом столбце – нечетным? 2) А таблицу 4х4?

Задача 3.8. Верно ли, что периметр любого четырехугольника, целиком находящегося внутри данного квадрата, меньше периметра этого квадрата?

Задача 3.9. Верно ли, что все числа вида $2^n + 15$, где n – натуральное число, простые?

Задача 3.10. Рассмотрим натуральные числа, в записи которых нет нулей.

1) Найдется ли среди них десятизначное число, делящееся на сумму своих цифр?

2) А стозначное?

Задача 3.11. 1) Какие из высказываний А – Д означают одно и то же?

2) Будем считать высказывание А истинным. Какие из других высказываний в таком случае наверняка истинны?

А: Дед Мороз – волшебник.

Б: Существует хотя бы один дед-волшебник.

В: Существует ровно один дед-волшебник.

Г: Некоторые деда – волшебники.

Д: Некоторые волшебники – деда.

Задача 3.12*. Найдите ошибку в рассуждениях.

«Рассмотрим три высказывания:

А: Существует хотя бы один дед-волшебник.

Б: Дед Мороз – волшебник.

В: Все деда – волшебники.

Можно ли утверждать, что если верно В, то верно и А? Нет: контрпримером является ситуация, когда множество дедов пусто (аналогично задаче про Мишиных одноклассников).

С другой стороны, если верно В, то верно и Б (иначе Дед Мороз служил бы контрпримером к высказыванию В). Но если верно Б, то верно и А (для доказательства существования достаточно привести пример, в данном случае Дед Мороз – пример). Итак, если верно В, то верно и А».

Задача 3.13 Прокомментируйте доказательство существования Деда Мороза, изложенное в виде диалога двух логиков.

Первый: «Если я не ошибаюсь, Дед Мороз существует».

Второй: «Разумеется, Дед Мороз существует, если вы не ошибаетесь».

Первый: «Следовательно, мое утверждение истинно». Второй: «Разумеется!»

Первый: «Итак, я не ошибся, а вы согласились с тем что если я не ошибаюсь, то Дед Мороз существует. Следовательно, Дед Мороз существует».

Занятие 4

Пиратская логика, или Высказывания с союзами «и», «или»

*Пираты!
Ни пуха, ни пера!*

Юлий Ким

На этом занятии кружковцы научатся строить отрицания к высказываниям с союзами «и» и «или». На нем продолжается работа с понятием отрицания и законом исключенного третьего, а также с кругами Эйлера в качестве иллюстраций. Появляются таблицы истинности, которые пригодятся на пятом занятии. Однако при желании его можно с минимальными изменениями провести и независимо от других занятий книжки, поскольку уровень сложности рассчитан на начинающих.



Но вот парадокс: дети сравнительно легко справляются с предложенными задачами. Если кто-то ошибся, он быстро исправляется. Но через некоторое время многие ошибутся в аналогичном месте. Почему?

Как указано в предисловии, основные трудности учащиеся испытывают там, где формальный смысл высказывания отличается от разговорной практики. Одно из таких отличий связано с тем, что если два простых предложения объединить союзом «и» в сложносочиненное, смысл сказанного на бытовом уровне не изменится. Какая, казалось бы, разница, как сказать: «Беня врал. И Веня врал» или «Беня и Веня оба вруны»? Если это говорит правдивый человек, действительно, никакой. А вот если лгун – разница есть (см. задачу 4.8). Другое отличие связано с разделительным и неразделительным пониманием союза «или»

и описано в замечаниях между задачами 4.2 и 4.3 и в задаче 4.4. Чтобы такого рода трудности преодолеть, недостаточно сообщить таблицу истинности и решить одну задачу. Для большинства учащихся и одного занятия будет недостаточно. Рекомендуем руководителю кружка часть предложенных здесь задач оставить «на потом». Для закрепления можно брать дополнительные задачи, а можно и придумывать в необходимом количестве задачи, аналогичные задачам 4.2, 4.3, 4.6.

Четыре молодых пирата, Арчи, Бен, Вилли и Глен, зарыли на острове клад. Каждый запомнил место: от старой пальмы 100 футов на восток, потом 100 футов на север. Через много лет четыре старых пирата вернулись на остров за кладом. Как ни странно, старая пальма до сих пор уцелела! Впрочем, то, что до сих пор уцелели все четыре морских разбойника, следует признать еще более странным. Правда, несоблюдение режима дня и злоупотребление спиртными напитками не лучшим образом сказались на их памяти. И если стороны света настоящий пират не перепутает до самой смерти, то вот с числами дело обстоит куда хуже. Вот что думал каждый пират про место расположения клада:

Арчи: от пальмы 30 футов на восток, потом 120 футов на север;

Бен: от пальмы 100 футов на восток, потом 120 футов на север;

Вилли: от пальмы 30 футов на восток, потом 100 футов на север;

Глен: от пальмы 100 футов на восток, потом 100 футов на север.

Каждый отправился рыть свою яму. Пока пираты занимаются земляными работами, сравним их мнения. С одной стороны, Бен и Вилли ошиблись меньше, чем Арчи: каждый из них верно вспомнил одно из двух чисел. И, возможно, школьный учитель поставил бы Глену 5, Арчи 2, а Бену и Вилли 3 за частично верный ответ. Но при поисках клада место не может быть «частично верным»: оно указано либо верно, либо нет. И в результате Глен найдет клад, а Арчи, Бен и Вилли не найдут.

Математическая логика больше напоминает поиски клада, чем школьные оценки. Она не признает полуправды: *всякое высказывание либо истинно, либо ложно*. В нашем случае истинно лишь мнение Глена. Утверждения же трех пиратов, не нашедших клад, следует признать ложными.

Вообще, если высказывание составлено из двух простых высказываний, соединенных союзом «и» (или союзами «а», «а также», «но» или просто запятой), то оно:

- истинно, если истинны оба простых высказывания;
- ложно, если хотя бы одно из двух простых высказываний ложно.

Обозначив простые высказывания как А и Б, можно кратко записать это правило в виде таблицы истинности высказывания «А и Б». В этой таблице буква И означает истину, а Л — ложь.

А	Б	А и Б
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Задача 4.1. Подберите подходящую строку в таблице истинности для высказываний каждого из 4 пиратов.

Ответ: Высказыванию Арчи соответствует четвертая строка, Бена – вторая, Вилли – третья, Глена – первая.

Задача 4.2. Какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны?

- 1) Утка умеет плавать и летать.
- 2) Курица умеет плавать и летать.
- 3) Камбала умеет плавать и летать.

Решение: 1) Высказывание истинно, так как составлено с помощью союза «и» из двух истинных высказываний: «Утка умеет плавать» и «Утка умеет летать». Оно соответствует первой строке таблицы истинности.

2) Высказывание ложно, так как составлено с помощью союза «и» из двух ложных высказываний: «Курица умеет плавать» и «Курица умеет летать». Оно соответствует четвертой строке таблицы истинности.

3) Высказывание ложно, так как составлено с помощью союза «и» из истинного высказывания «Камбала умеет плавать» и ложного «Камбала умеет летать». Оно соответствует второй строке таблицы истинности.

Комментарий. Изобразим ситуацию с помощью кругов Эйлера (см. рис. 5). Поместим в первый круг умеющих плавать, во второй – умеющих летать. Высказывание «...умеет плавать и летать» истинно для существ, находящихся в пересечении кругов, и ложно для всех остальных.

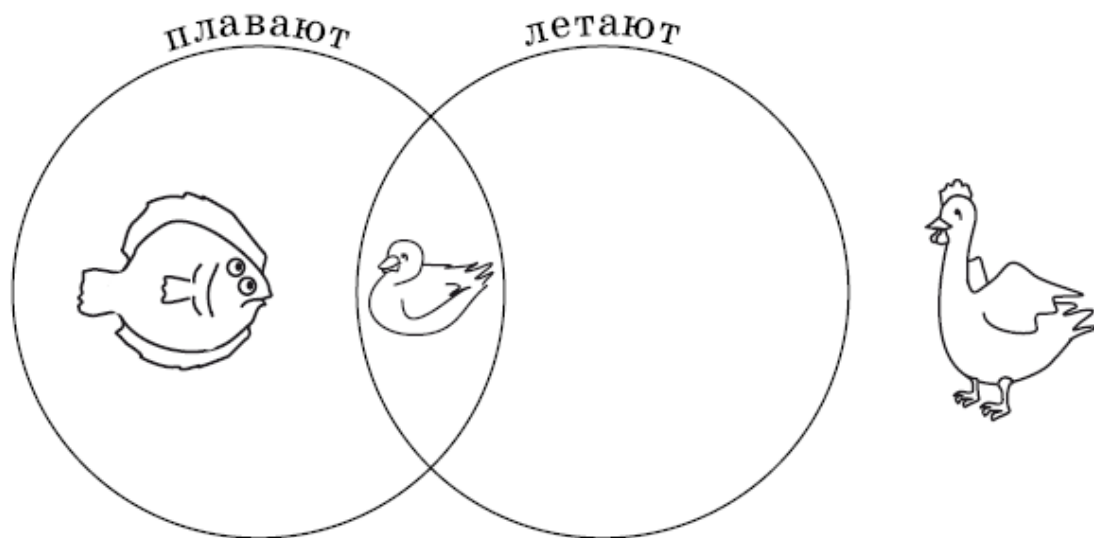


Рис. 5

Но не стоит покидать пиратов надолго. Пора вернуться на остров и посмотреть, чем они заняты. Клад пока не найден. Трое продолжают копать. И только самый сильный из них, Арчи, задумчиво сидит под пальмой. Он копал гораздо быстрее остальных и уже успел убедиться в своей ошибке. Теперь он знает, что высказывание «Клад находится в 30 футах к востоку и в 120 футах к северу от пальмы» ложно. Это означает, что ложно хотя бы одно из двух составляющих его простых высказываний. То есть клад находится от пальмы не в 30 футах к востоку или не в 120 футах к северу.

Замечание 1. Если говорить точнее, то клад находится от пальмы либо не в 30 футах к востоку, либо не в 120 футах к северу, либо и не в 30 футах к востоку, и не в 120 футах к северу.

северу. Звучит длинно и малопонятно. Для удобства математики договорились вместо «Либо А, либо Б, либо то и другое вместе» говорить короче: «А или Б». При этом подразумевается, что случай «А и Б оба выполняются» тоже возможен.

Таким образом, высказывание «А или Б»:

- истинно, если истинно хотя бы одно из составляющих его простых высказывания;
- ложно, если ложны оба составляющих его простых высказывания.

Составим для высказывания «А или Б» таблицу истинности:

А	Б	А или Б
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Замечание 2. На самом деле значение союза «или» не всегда одинаково. Например, высказывание «Каждый сотрудник отеля владеет английским или русским языком» вполне допускает, что кто-то из сотрудников владеет обоими языками, что согласуется с таблицей истинности союза «или». А высказывание «Анкета заполняется на английском или русском языке» предполагает использование одного из двух языков, но не обоих сразу. Чтобы не путаться, при перечислении исключających друг друга случаев договоримся вместо союза «или» использовать его синоним «либо... либо». Таблица истинности для высказывания «либо А, либо Б» выглядит так:

А	Б	Либо А, либо Б
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Задача 4.3. Какие из следующих шести высказываний истинны, а какие ложны?

- 1) Береза – это куст или дерево. Береза – это либо куст, либо дерево.
- 2) Собака – животное или камбала – рыба. Либо собака – животное, либо камбала – рыба.
- 3) Собака – это птица или рыба. Собака – это либо птица, либо рыба.

Решение: 1) Из двух простых высказываний «Береза – это куст» и «Береза – это дерево» первое истинно, а второе ложно. Поэтому высказывания и с союзом «или», и с союзом «либо... либо» в целом истинны, что соответствует второй строке таблицы истинности.

2) Оба простых высказывания истинны, поэтому истинно и высказывание с союзом «или». А с союзом «либо... либо» ложно: именно первыми строками и различаются их таблицы истинности.

3) Оба простых высказывания ложны, поэтому ложны и оба составных высказывания.

Задача 4.4. 1) В сказке Ганса Христиана Андерсена «Новое платье короля» обманщики пообещали, что «платье... обладает чудесным свойством становиться невидимым для всякого человека, который не на своем месте сидит или непроходимо глуп». Изобразите с помощью кругов Эйлера тех, для кого платье должно стать невидимым.

2) Вот отрывок из «Песни ткачей» Владимира Васильева:

Мы не напрасно взялись ткать,
Чтоб мог народ, в конце концов,
О короле сказать:

«Либо он дурак – либо не на месте,
Либо не на месте – либо он дурак,
Либо он дурак – либо не на месте,
Либо не на месте и дурак!»

Представим, что три представителя народа высказались о короле. Первый: «Либо он дурак – либо не на месте»; второй: «Либо не на месте – либо он дурак»; третий: «Либо он дурак, либо не на месте, либо не на месте и дурак». Одинаков ли смысл трех высказываний? Какое из них наиболее точно соответствует сказке?

Ответ. 1) Область выделена на рисунке 6 серым.

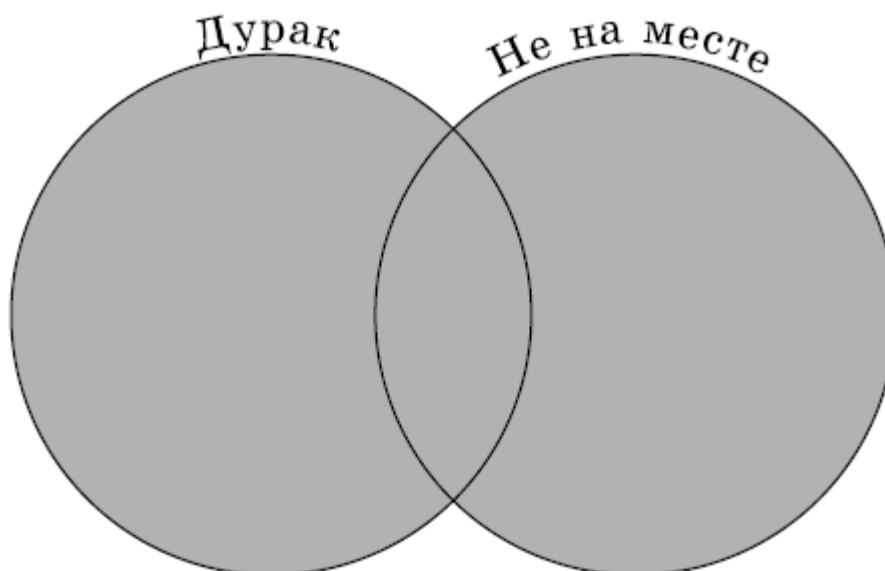


Рис. 6

2) Первые двое сказали одно и то же. А третье высказывание равносильно такому: «Он дурак или не на месте». Именно оно соответствует тексту Андерсена.

А что же пираты? Клад пока не найден. Но уже ясно, как определять истинность высказываний «А и Б» и «А или Б». Можно ли научиться с помощью флибустьеров еще чему-нибудь полезному? О да! Например, строить к таким высказываниям отрицания. Собственно говоря, отрицание к высказыванию Арчи уже построено. Сравним получившиеся противоположные высказывания:

(1) Клад находится в 30 футах к востоку и в 120 футах к северу от пальмы.

(2) Клад находится от пальмы не в 30 футах к востоку или не в 120 футах к северу.

Все просто: каждое простое высказывание заменено противоположным, а связка «и» заменена на «или».

Вообще, *отрицанием к высказыванию «А и Б» служит высказывание «не А или не Б».*

Отрицанием к высказыванию «А или Б» служит высказывание «не А и не Б».

Последние два предложения называются законами де Моргана. Но названы они так вовсе не в честь самого знаменитого пирата Карибского моря Генри Моргана, а в честь жившего на два века позже шотландского математика Огастеса де Моргана.

Задача 4.5. Постройте отрицания к высказываниям Бена, Вилли и Глена. Какие из этих отрицаний истинны?

Решение. Сразу можно сказать, что отрицания к ложным высказываниям Бена и Вилли сами будут истинными высказываниями, а отрицание к истинному высказыванию Глена будет ложным. Вот эти отрицания:

Бен: Клад находится от пальмы не в 100 футах к востоку или не в 120 футах к северу.

Вилли: Клад находится от пальмы не в 30 футах к востоку или не в 100 футах к северу.

Глен: Клад находится от пальмы не в 100 футах к востоку или не в 100 футах к северу.

Задача 4.6. Замените высказывания на противоположные:

1) Но с ветром худо и в трюме течи.

2) Ни Бог, ни дьявол не помогут ему спасти свои суда.

3) Случился штиль иль просто ветер встречный.

4) Вода и ветер сегодня злы, и зол, как черт, капитан.

Ответ. 1) С ветром все в порядке или трюм не течет.

2) Бог или дьявол помогут ему спасти его суда.

3) Не случилось ни штиля, ни встречного ветра.

4) Хотя бы один из трех: вода, ветер, капитан – сегодня добр.

Вот, пожалуй, и все, чему стоило поучиться у пиратов. Больше возвращаться на остров незачем: Глен вот-вот найдет клад, а на то, что произойдет после этого, детям до 18 лет смотреть не стоит. Как, впрочем, и взрослым. Вместо клада нас ждут...

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.7. В ансамбль приглашают всех, кто хорошо поет или танцует. Наташа хорошо и поет, и танцует. Пригласят ли ее в ансамбль?

Задача 4.8. Каждый из четырех гномов: Бенья, Сеня, Веня и Женя – либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Мы услышали такой разговор:

Бенья – Веня: «Ты врун».

Женя – Бенья: «Сам ты врун!»

Сеня – Женя: «Да оба они вруны!» Подумав, он добавил: «Впрочем, ты тоже».

Кто из гномов говорит правду?

Задача 4.9. Математик с тремя детьми пришел в пиццерию.

– Хочу, чтобы в пицце были помидоры или грибы, – потребовала Аня.

– Пиццу с помидорами и грибами я есть не буду, – заявил Боря.

– Если будут помидоры, а грибов не будет, то я не буду есть, – добавил Ваня.

– Отлично! – воскликнул математик. – Сделайте нам, пожалуйста, пиццу с...

Так какую же пиццу заказал математик, чтобы все дети ее ели?

Задача 4.10. Андрей является участником шоу-викторины. Главный приз спрятан в одном из ящиков. Андрей получает 4 подсказки:

1. Приз находится в синем или зеленом ящике.
2. Приз находится в красном или желтом ящике.
3. Приз находится в зеленом ящике.
4. В желтом ящике приза нет.

Три подсказки ошибочны и только одна правильная. Андрей поразмыслил и открыл правильный ящик. Ящик какого цвета он выбрал?

Задача 4.11. В доме 300 квартир. В квартиры, номера которых кратны 4 или 6, Дед Мороз принес шоколадку. А в квартиры, номера которых кратны 4 и 6, – айфон. Чего Дед Мороз принес в дом больше – айфонов или шоколадок? Во сколько раз?

Задача 4.12. Зайчишка-хвастунишка залез на пенек и громко закричал: «Во всем лесу нет никого меня смелее, нет никого меня умнее!». Он, конечно же, соврал. Какой из пяти выводов можно сделать?

- (А) Все в лесу умнее и смелее его.
- (Б) В лесу есть кто-то и умнее его, и смелее.
- (В) В лесу есть кто-то его умнее.
- (Г) В лесу есть кто-то его смелее.
- (Д) В лесу есть кто-то умнее или смелее его.

Задача 4.13. Король подвел узника к двум дверям, ведущим в две комнаты. В каждой из них может находиться принцесса или тигр. При этом не исключено, что в обеих комнатах находятся принцессы или в обеих – тигры. Узник должен войти в одну из комнат. Если там окажется принцесса, то узник женится на ней. Если тигр – то он растерзает узника. На дверях висят таблички с надписями:

I. В этой комнате находится принцесса,
а во второй сидит тигр

II. В одной из комнат находится
принцесса, а в другой сидит тигр

Король любезно сообщил, что на одной из табличек написана правда, а на другой – нет. Какую комнату вы посоветуете выбрать?

Задача 4.14. Другого узника ожидало похожее испытание. Но на этот раз король сказал, что утверждения на обеих табличках одновременно либо истинны, либо ложны. А написано было вот что:

I. В этой комнате тигр или
в другой — принцесса

II. Принцесса в другой комнате

В какую дверь следует идти узнику?

Задача 4.15. Для третьего узника король повесил на обе двери одинаковые таблички:

В обеих комнатах находятся принцессы

А сказал так: «Если в левой комнате находится принцесса, то утверждение на табличке истинно, если же тигр, то ложно. В правой же комнате все наоборот: утверждение ложно, если там находится принцесса и истинно, если тигр». Куда лучше идти узнику?

Задача 4.16. Один из пяти братьев испек маме пирог.

Никита сказал: «Это Глеб или Игорь».

Глеб сказал: «Это сделал не я и не Дима».

Игорь сказал: «Вы оба шутите».

Антон сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой обманул».

Дима сказал: «Нет, Антон, ты не прав».

Мама знает, что трое из ее сыновей всегда говорят правду. Кто испек пирог?

Задача 4.17. Четверо детей сказали друг о друге так:

Маша: «Саша, Наташа и Гриша умеют сидеть на стуле».

Саша: «Маша, Наташа и Гриша не умеют сидеть на стуле».

Наташа: «Маша и Саша солгали».

Гриша: «Маша, Саша и Наташа сказали правду».

Сколько детей на самом деле сказали правду?

Задача 4.18. «Хоп!» – это игра на внимательность. Игроки по очереди называют натуральные числа в порядке возрастания. Если число кратно 3 или содержит в записи цифру 3, то вместо него надо сказать «Хоп!». Если не ошибаться, получится ряд: 1, 2, хоп, 4, 5, хоп, 7, 8, хоп, 11, хоп, хоп, 14 и т. д. Кто по ошибке назовет запрещенное число, выходит из круга. Побеждает последний оставшийся игрок.

Пять ребят играли в «Хоп!». Известно, что числа 1 и 23 назвал Петя, 2 и 20 – Вася, а 5 и 15 – Таня. Сколько раз победитель сказал «Хоп!»?

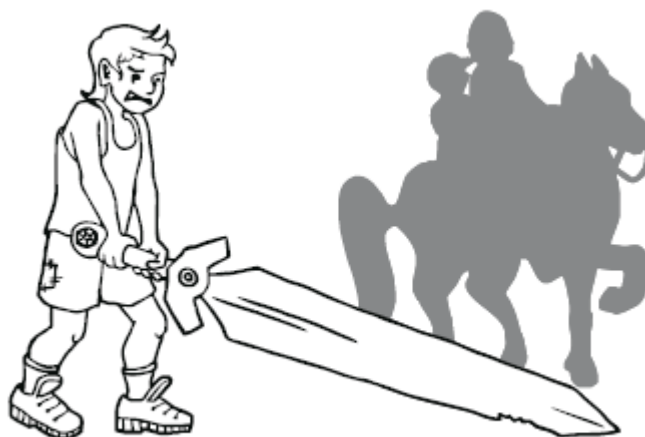
Занятие 5

Можно ли дышать на Луне, или Следствие и обратные высказывания

Единожды солгавши, кто тебе поверит?
Козьма Прутков

На этом занятии ребята знакомятся с понятием следствия. Они должны осознать два факта:

- Высказывания $A \# B$ и $B \# A$ имеют разный смысл и могут быть истинными или ложными независимо друг от друга (а называются они обратными).
- Высказывание $A \# B$ ничего не утверждает в случае ложности A .



Первый факт воспринимается гораздо легче второго, так как хорошо согласуется со здравым смыслом и повседневной речью. Одним кружковцам различие взаимно обратных высказываний понятно интуитивно, для других прояснится с помощью таблицы истинности, для третьих – с помощью кругов Эйлера. Мы рекомендуем продемонстрировать все способы рассуждения, посмотреть, какой из них наиболее понятен большинству, и в дальнейшем отдавать ему предпочтение. А при самостоятельном решении задач предоставлять рассказчику право опираться на какие угодно верные соображения и ни в коем случае не считать умение применять таблицы истинности или круги Эйлера самоцелью на этом занятии. Более того, если учитель считает один из подходов неуместным для своих учеников, можно его спокойно игнорировать и обходиться другими. Если же занятие проводится в полном объеме, рекомендуем не стирать с доски ни таблицы истинности, ни изображения их с помощью кругов Эйлера, и обращаться к одним и тем же иллюстрациям при решении разных задач. В частности, после рассказа кем-то из ребят решения задачи 5.4 предложить желающим «объяснить по-другому».

Второй факт при первом знакомстве вызывает недоумение, связанное с противоречием между формальной логикой и речевой традицией.

Предлагаем начать с задачи 5.3, имеющей «двойное дно». С одной стороны, в ней закрепляется понятие обратных высказываний. Надеемся, что ребята легко и с удоволь-

ствием приведут примеры двух связанных по смыслу высказываний А и Б. После этого учитель может привести свой пример иного типа, подобный предложенному в обсуждении этой задачи, и спросить ребят, подходит ли он. Развитию понимания того, что из лжи следует что угодно, служат задача 5.5, история про Рассела и задача 5.10. Если школьникам трудно это осознать, не пожалейте времени на совместное придумывание аналогичных высказываний. Может вызвать интерес и доказательство предложенных участниками кружка неверных утверждений исходя из неверного условия, аналогично рассуждениям Рассела о Папе Римском.

Убедительность контрпримера для отрицания следствия и неубедительность примера для его подтверждения обсуждается в задачах 5.4, 5.5, 5.9 и в комментарии к задаче 5.6. Эта идея уже выделялась на третьем занятии, но она заслуживает быть упомянутой более одного раза.

Простую забавную задачу 5.8 мы предлагаем для самостоятельного решения. Но потом она заслуживает общего обсуждения: понимание следствия как правила, применяющегося лишь при определенных условиях, поможет ребятам осознать, почему из ложного утверждения следует что угодно. После этого можно обратить внимание, что и утверждения предыдущих задач можно считать правилами.

Задачу 5.14 имеет смысл подробно обсуждать, если кружковцы уверенно различают прямое и обратное высказывания и интересуются лингвистикой. В других случаях можно ограничиться разбором понятного и смешного примера Шляпы. Можно предложить эту задачу в качестве домашнего задания, посоветовав обсудить ее с родителями и учителями русского и английского языков.

Ехал как-то рыцарь по своим рыцарским делам. И встретил двух мальчиков.

– Дяденька, покатай на лошадке! – попросили дети.

– Ну что ж, – усмехнулся рыцарь, – если кто-то из вас сможет удержать в руках мой меч, то я его покатаю.

Старший, Том, удержал меч, а его младший брат Тим даже приподнять его не смог. Но добрый рыцарь все же покатал обоих.

– Надо было только меня покатавать! – возмутился Том. – Ты же рыцарь и не можешь лгать.

– А я сказал чистую правду, – объяснил рыцарь. – Ты удержал меч, я обещал за это покатавать на коне и сдержал слово. Но я вовсе не обещал не катать того, кто меч не удержит!

Объяснение рыцаря соответствует законам формальной логики. Высказывания типа «Если А, то Б» можно обозначать «А # Б» (читается «из А следует Б»). Здесь А – причина, а Б – следствие. Такое высказывание считается ложным лишь в одном случае: А истинно, а Б ложно (мальчик удержал меч, но рыцарь его НЕ покатавал). В остальных трех случаях оно истинно:

- 1) А и Б оба истинны (мальчик удержал меч, рыцарь его покатавал);
- 2) А и Б оба ложны (мальчик НЕ удержал меч, рыцарь его НЕ покатавал);
- 3) А ложно, а Б истинно (мальчик НЕ удержал меч, но рыцарь его покатавал).

В нашей истории для Тима имел место последний случай, так что рыцарь сказал правду.

Запишем в общем виде таблицу истинности высказывания «А # Б», обозначая истинное высказывание буквой И, а ложное – буквой Л.

А	Б	$A \Rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Проиллюстрируем таблицу с помощью кругов Эйлера (рис. 7). В первый круг (А) поместим всех мальчиков, которые удержали меч. Во второй (Б) – тех, кого рыцарь покатал на лошадке. Область истинности высказывания « $A \# B$ » (т. е. место для мальчиков, для которых высказывание рыцаря истинно) выделена серым. В ней находятся высказывания и про Тома, и про Тима.

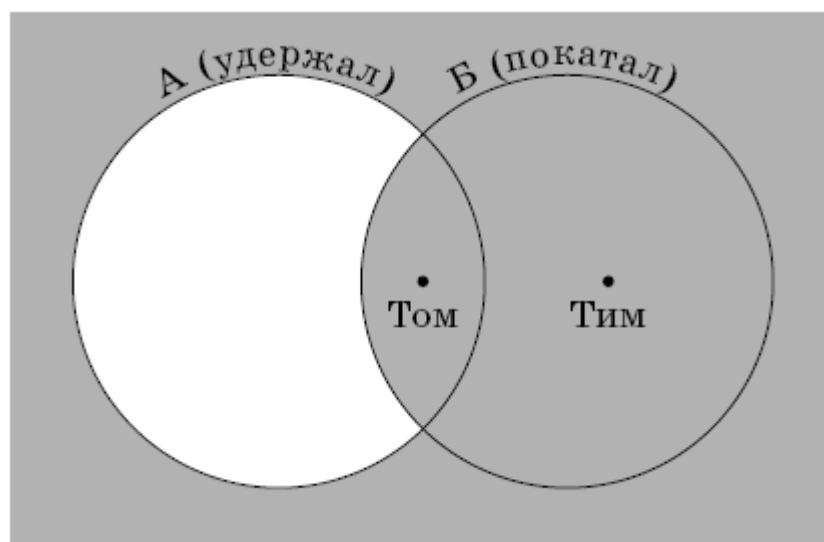


Рис. 7

Про мальчика, не удержавшего меч, рыцарь НИЧЕГО НЕ ОБЕЩАЛ. Другими словами, если А ложно (то есть мальчик не удержал меч), то высказывание $A \# B$ истинно независимо от истинности Б (то есть от катания на лошадке).

Задача 5.1. Перед перекрестком папа остановил машину. «У нас мотор сломался!» – испуганно закричал Ваня. «С чего ты взял?» – удивился папа. «Но ты же сам говорил, что если мотор сломался, то машина не едет», – объяснил Ваня. Правильно ли он рассуждал?

Решение. Папа ничего не говорил о поведении машины с исправным мотором. Она может как ехать, так и стоять (например, на красный свет или просто в гараже). В обоих случаях:

- мотор исправен и машина едет;
- мотор исправен, машина не едет

утверждение «если мотор сломался, то машина не едет» является истинным.

Ванина ошибка в том, что он поменял местами причину и следствие. При этом вместо верного утверждения «Если мотор сломался, то машина не едет» получилось неверное «Если машина не едет, то мотор сломался».

Высказывания « $A \# B$ » и « $B \# A$ » означают не одно и то же (см. рис. 8). Высказывания, в которых причина и следствие поменялись местами, называются обратными друг другу. Высказывание, обратное к истинному, может оказаться как истинным, так и ложным.

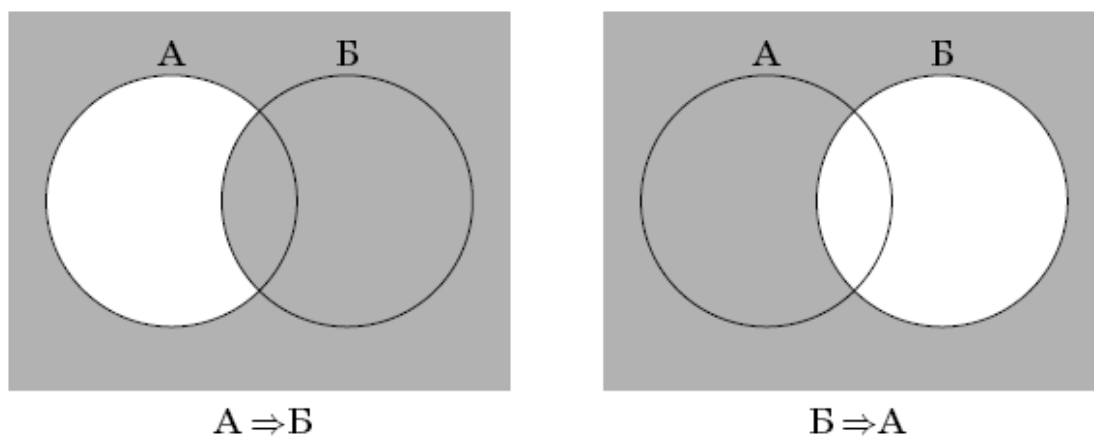


Рис. 8

Задача 5.2. Постройте высказывание, обратное данному. Истинно ли данное высказывание? А обратное ему?

- 1) Если последняя цифра натурального числа – 0, 2, 4, 6 или 8, то оно четное.
- 2) Если натуральное число делится на 6, то оно четное.
- 3) Если натуральное число делится на 3, то оно делится и на 5.

Ответ. 1) Обратное утверждение: если натуральное число четное, то его последняя цифра – 0, 2, 4, 6 или 8. Оба высказывания истинны.

2) Данное высказывание истинно. Обратное – если натуральное число четное, то оно делится без остатка на 6 – ложно.

3) Ложно и данное высказывание, и обратное ему: если число делится на 3, то оно делится и на 5.

Задача 5.3. «Вырежем» из составного высказывания задачи 5.2 (п. 2) простые высказывания. А: «Число делится на 6», Б: «Число четное». Как мы убедились, для них высказывание « $A \# B$ » истинно, а обратное ему высказывание « $B \# A$ » – ложно. Приведите другие примеры высказываний А и Б с тем же свойством.

Обсуждение. Таких пар высказываний сколько угодно. Их можно условно разделить на два типа. Во-первых, высказывания А и Б могут быть связаны между собой по смыслу так, что из А действительно принято делать вывод Б (но не наоборот). Например:

А: Карл украл у Клары кораллы.

Б: Карл – вор.

Очевидно, что из А следует Б. А вот из того, что Карл – вор, еще не следует, что именно он украл кораллы.

Во-вторых, А может быть заведомо ложным высказыванием, а Б – истинным, при этом смысловая связь между А и Б может вообще отсутствовать. Например,

А: Новый год отмечается 31 июня.

Б: Волга впадает в Каспийское море.

Последний пример звучит непривычно. Но с точки зрения формальной логики высказывание «Если Новый год отмечается 31 июня, то Волга впадает в Каспийское море» истинно так же, как и «Если Карл украл у Клары кораллы, то Карл – вор». Убедиться в этом можно с помощью таблицы истинности.

Задача 5.4. Будем считать истинной пословицу «Кто не работает, тот и не ест».

- 1) Известно, что Иван ест. Обязательно ли он работает?
- 2) Известно, что Семен работает. Обязательно ли он ест?

Ответ. 1) Да; 2) нет.

Решение 1. 1) Высказывание «Если Иван не работает, то Иван не ест» истинно, а его вторая часть «Иван не ест» ложна. В соответствии с таблицей истинности такое возможно, только если первая часть «Иван не работает» тоже ложна. Следовательно, Иван работает. 2) Высказывание «Если Семен не работает, то Семен не ест» истинно, а его первая часть «Семен не работает» ложна. В соответствии с таблицей истинности такое возможно независимо от истинности второй части, т. е. от того, ест ли Семен.

Решение 2. На рисунке 9 серым выделена область истинности пословицы. Поэтому в белой части 1 никого нет. Иван может находиться только в части 4 (т. е. он и работает, и ест). Семен может находиться как в части 3 (тогда он работает, но не ест), так и в части 4 (и тогда он работает и ест).

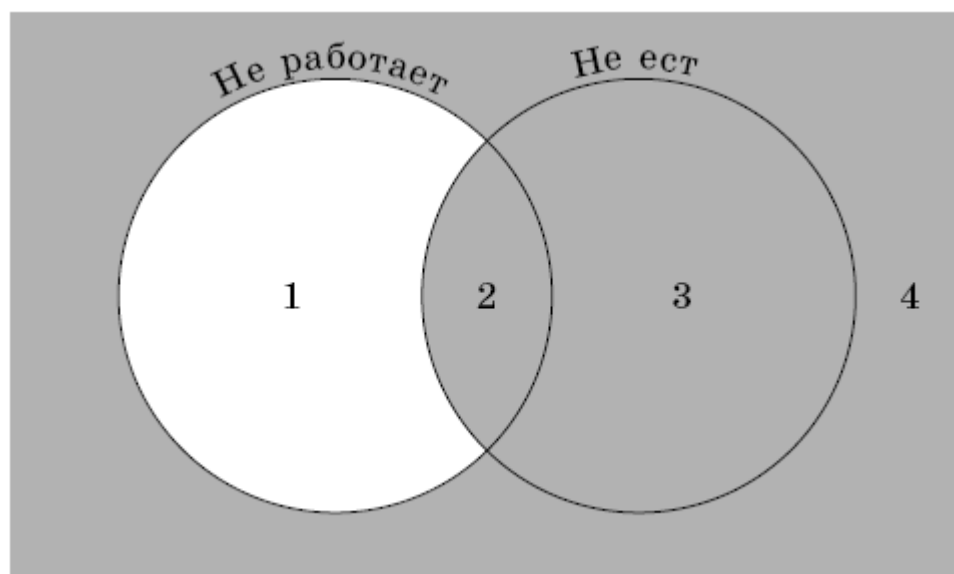


Рис. 9

Решение 3. 1) Предположим, что Иван не работает. Тогда он не работает, но ест, и поэтому служит контрпримером к пословице. Пришли к противоречию с условием, значит, предположение неверно, и Иван работает. Заметим, что аналогичное «решение» для пункта 2 неубедительно, так как если мы не нашли противоречия, это еще не значит, что его нет.

Задача 5.5. Верно ли высказывание «Если человек допрыгнет с Земли до Луны, то он сможет там дышать»?

Ответ. Да.

Обсуждение. На первый взгляд, сказана двойная глупость. Ни допрыгнуть до Луны, ни дышать на ней ни один человек не сможет. То есть и высказывание А (человек может допрыгнуть до Луны), и высказывание Б (человек сможет дышать на Луне) ложны. Но поскольку условие А ложно, высказывание $A \rightarrow B$ истинно независимо от истинности заключения Б. Если вам все же трудно поверить в истинность высказывания «Если человек допрыгнет с Земли до Луны, то он сможет там дышать», то подумайте, кто мог бы его опровергнуть. Только человек, допрыгнувший до Луны!

Комментарий 1 (исторический). В некотором смысле такой человек был. Перед тем, как 20 июля 1969 года сделать шаг с трапа на поверхность Луны, американский астронавт Нил Армстронг сказал: «Это маленький шаг для человека, но огромный прыжок для челове-

чества». Но даже если считать достижение Армстронга прыжком с Земли, наше утверждение он, к счастью, не опроверг и благополучно вернулся домой.

Комментарий 2 (математический). С подобной ситуацией мы уже сталкивались на первом занятии при обсуждении живых тираннозавров, вышивающих крестиком. Аналогия не случайна: высказывания про всех и следствия могут быть переделаны друг в друга.

Задача 5.6. 1) Сформулируйте высказывание, начинающееся со слова «все», имеющее тот же смысл, что высказывание «Если человек допрыгнет с Земли до Луны, то он сможет там дышать».

2) Сформулируйте высказывание с союзом «если... то», имеющее тот же смысл, что высказывание «Все дожившие до наших дней тираннозавры умеют вышивать крестиком».

Ответ. 1) Все люди, допрыгнувшие до Луны, смогут там дышать. 2) Если тираннозавр дожил до наших дней, то он умеет вышивать крестиком.

Комментарий. Теперь ясно, что истинность обоих высказываний – и про тираннозавров, и про допрыгнувших до Луны – можно доказать двумя способами. Во-первых, для элементов пустого множества верно любое утверждение, так как контрпримера заведомо нет. Во-вторых, из ложного условия можно делать какое угодно заключение.

Сказанное в обсуждении задачи 5.5 можно обобщить: из ложного утверждения следует ЛЮБОЕ другое утверждение, в том числе и ложное. Другими словами, допустив одну ложь, пусть даже «самую маленькую», можно логически доказать что угодно! В это трудно поверить. Узнав об этом от Бертрана Рассела, один философ был потрясен и спросил: «Вы серьезно считаете, что из неверного утверждения „Два плюс два – пять“ следует, что вы – Папа Римский?» Рассел в ответ привел такое доказательство: «Пусть $2 + 2 = 5$. Известно также, что $2 + 2 = 4$. Следовательно, $4 = 5$. Вычитая 3, получаем, что $1 = 2$. Я и Папа Римский – два человека. Следовательно, я и он – это один человек».

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.7. 1) Верно ли, что если Женя – Борин брат, то Боря – Женин брат?

2) Составьте обратное высказывание. Верно ли оно?

Задача 5.8. На планете Плюк действует правило: увидев чатланина, житель планеты должен сказать «Ку». В суд поступили дела пяти обвиняемых в нарушении этого правила:

1) Первый сказал «Ку» облезлой кошке.

2) Землянин Второй ничего не сказал при встрече с главным чатланином.

3) Часовой Третий спал на посту, не заметил подошедшего чатланина и ничего ему не сказал.

4) Четвертый сказал чатланину: «Ку. Как противно приветствовать такого мерзавца!»

5) Пятый не знал, что Шестой – чатланин, поэтому при встрече сказал ему: «Здравствуйте, уважаемый!»

Кто, с вашей точки зрения, нарушил данное правило, а кто нет?

Задача 5.9. Пусть на клетчатой бумаге нарисован многоугольник, составленный из целых клеточек. Рассмотрим два утверждения:

1) Если многоугольник можно разрезать на доминошки (прямоугольники 1×2), то количество клеточек четно.

2) Если количество клеточек четно, то многоугольник можно разрезать на доминошки.

Верны ли эти утверждения? Можно ли их доказать (опровергнуть) с помощью примера (контрпримера)?

Задача 5.10. Говорят, что если человек сорвет цветок папоротника, то станет понимать язык животных. Правду ли говорят?

Задача 5.11. Из утверждений «Число a делится на 2», «Число a делится на 4», «Число a делится на 12» и «Число a делится на 24» три верных, а одно неверное. Какое? Найдите три таких числа a .

Задача 5.12. На столе лежат четыре карточки, на которых сверху написано: «А», «Б», «4», «5». Известно, что на одной стороне каждой карточки написана буква, на другой – натуральное число. Какое наименьшее число карточек надо перевернуть, чтобы проверить истинность утверждения: «Если на одной стороне карточки написано четное число, то на другой – гласная буква»?

Задача 5.13. На вопрос, какая завтра будет погода, синоптик верно ответил:

- (1) «если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя»;
- (2) «если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра»;
- (3) «если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра».

Определите погоду на завтра.

Задача 5.14*. Прочитайте отрывок из сказки Льюиса Кэрролла «Алиса в стране чудес» в переводе Бориса Заходера. Алиса путает высказывания «А # Б» и «Б # А», а ее собеседники поясняют, почему это не одно и то же. Все ли их примеры удачны?

«– Так бы и сказала! – укоризненно сказал Заяц. – Надо говорить то, что думаешь!»

– Я всегда так и делаю! – выпалила Алиса, а потом, чуточку подумав, честно прибавила: – Ну, во всяком случае... во всяком случае, что я говорю, то и думаю. В общем, это ведь одно и то же!

– Ничего себе! – сказал Шляпа. – Ты бы еще сказала: „я вижу все, что ем“, и „я ем все, что вижу“ – это тоже одно и то же!

– Ты бы еще сказала, – подхватил Заяц, – „я учу то, чего не знаю“ и „я знаю то, чего не учу“ – это тоже одно и то же!

– Ты бы еще сказала, – неожиданно откликнулась Соня, не открывая глаз, – „я дышу, когда сплю“ и „я сплю, когда дышу“ – это тоже одно и то же...»

Занятие 6

«...И чушь прекрасную несли», или Как рассуждать логично, не вдумываясь в смысл высказываний

На одну здоровую пару посылок... встретившуюся вам при чтении газеты или журнала, приходится по крайней мере пять пар, из которых вообще нельзя вывести никаких заключений. Кроме того, даже исходя из здоровых посылок, автор приходит к правильному заключению лишь в одном случае, в десяти же он выводит из правильных посылок неверное заключение.

Льюис Кэрролл. «Логическая игра»

Логические задачи для начинающих фактически являются задачами на здравый смысл, при их решении законы формальной логики и бытовая логика работают одинаково. На следующем уровне становится интересно решать задачи, само условие которых абсурдно, и рассуждения об истинности составных высказываний не могут опираться на истинность или ложность составляющих их простых высказываний. Богатая коллекция таких задач, развивающих умение работать с общими и частными высказываниями, содержится в книге Льюиса Кэрролла «Логическая игра». Как пишет Ю. Данилов в предисловии к этой книге, «не велика хитрость идти по видимым ориентирам – выводить правильное заключение из суждений, не противоречащих здравому смыслу. В этом случае правильный ответ можно получить, даже если рассуждать неверно: выручит интуиция, опыт... Если рассуждение противоречит здравому смыслу... мы уподобляемся мореходу, ведущему свое судно вдали от берега по счислению».



Организовать самостоятельное решение задач на этом занятии может оказаться непросто: дети будут моментально и одновременно придумывать вперемешку верные и неверные решения, и учитель не успеет их проконтролировать. Тут есть два совета. Во-первых, можно настаивать на записи выводов в задаче 6.10 и рассуждений в задаче 6.11 (это удобно не только для контроля, но и для самоконтроля). Во-вторых, послушав решения у нескольких первых ребят, можно назначить каждого из них «экспертами» по одной или нескольким задачам и доверить им прием задач у других участников кружка.

Занятие небольшое по объему. Это сделано сознательно: предлагать много подобных задач подряд автору кажется столь же ненужным, как и много сладостей на полдник. Лучше иногда возвращаться к ним, используя дополнительные задачи или непосредственно «Логическую игру» Кэрролла.

Задача 6.1. Верно ли сделаны выводы?

1) Все металлы проводят электричество. Ртуть – металл. Следовательно, ртуть проводит электричество.

2) Все арабы смуглы. Ахмед смугл. Следовательно, Ахмед – араб.

Решение. 1) Ртуть находится внутри круга металлов, который в свою очередь находится внутри большего круга проводников электричества (рис. 10). Значит, ртуть проводит электричество. Вывод верен.

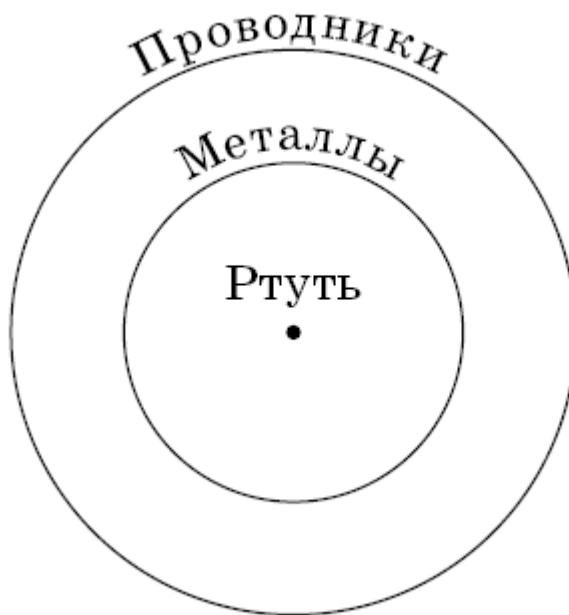


Рис. 11

2) Ахмед заведомо находится внутри внешнего круга. А вот внутри или снаружи внутреннего – неизвестно. Поэтому вывод о том, что Ахмед – араб, неверен. Это не значит, что Ахмед не может быть арабом. По данным задачи никакого вывода о национальности Ахмеда сделать нельзя (рис. 11).

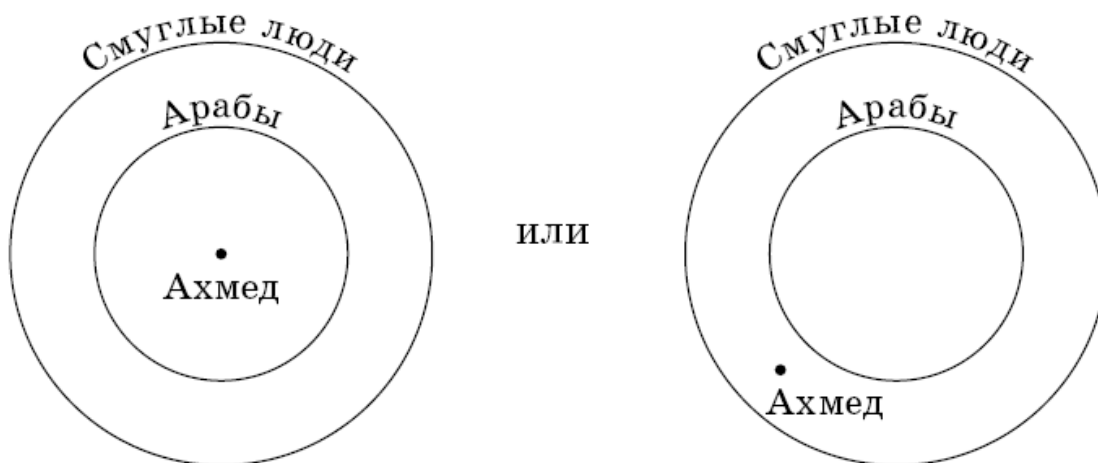


Рис. 11

В первой задаче мы считали исходные утверждения истинными, поэтому могли полагаться не только на формальные рассуждения и их графические иллюстрации, но и на здравый смысл. Попробуем теперь поиграть в игру с необычными правилами. Не будем бояться неверных утверждений. Более того, вообще не будем интересоваться истинностью высказываний. Несмотря на это, постараемся разобраться, насколько логичны переходы от одних высказываний к другим. Помогут нам в этом круги Эйлера, а в случае неверных выводов еще и контрпримеры.

Задача 6.2. Все вороны собирают картины. Некоторые вороны сидят в птичьей клетке. Следует ли из этого, что некоторые собиратели картин сидят в птичьей клетке?

Ответ. Да.

Решение. Сначала нарисуем, что все вороны собирают картины (рис. 12). Теперь нарисуем, что некоторые вороны сидят в птичьей клетке (рис. 13). Тут возможны две ситуации, но в любом случае существует ворона, собирающая картины и сидящая в птичьей клетке.



Рис. 12

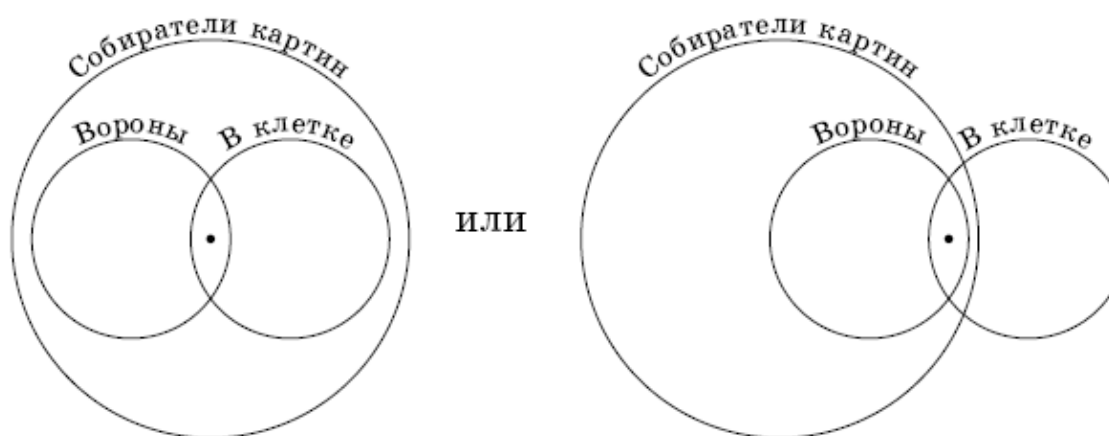


Рис. 13

Задача 6.3. Все вороны собирают картины. Некоторые собиратели картин сидят в птичьей клетке. Следует ли из этого, что некоторые вороны сидят в птичьей клетке?

Ответ. Нет.

Решение 1. То, что все вороны собирают картины, выглядит так же, как и в предыдущей задаче. По условию круг собирателей картин пересекается с кругом сидящих в птичьей клетке. А вот пересекается ли он с кругом ворон – неизвестно (см. рис. 14).

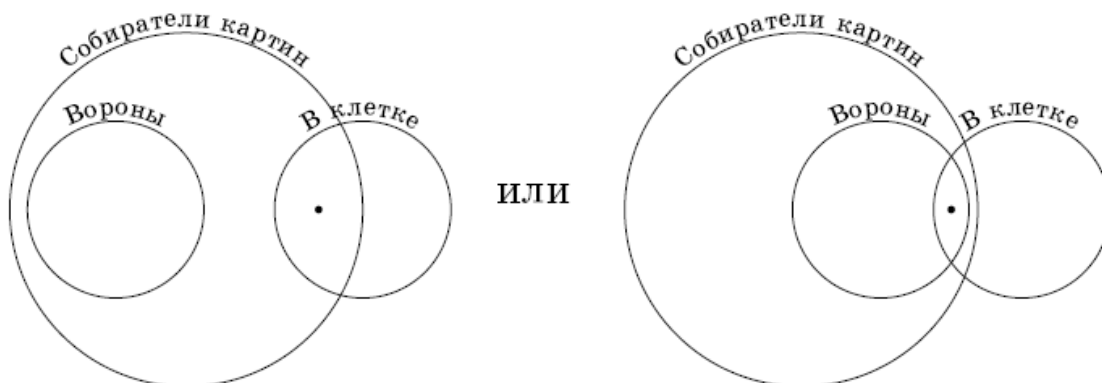


Рис. 14

Решение 2. Приведем контрпример. Пусть есть всего одна ворона А. Она собирает картины, но не сидит в клетке. Еще есть попугай В, который собирает картины и сидит в птичьей клетке. Тогда оба условия выполнены, но никакая ворона не сидит в птичьей клетке.

Замечание. Конечно, с точки зрения здравого смысла приведенный пример абсурден – но не более, чем условие задачи. Логика лишь учит нас правильно делать выводы из исходных утверждений. Ничего удивительного нет в том, что из странных утверждений получаются странные выводы.

До сих пор мы обсуждали только утвердительные высказывания. Чтобы делать выводы из отрицательных высказываний, иногда проще всего заменить их на утвердительные высказывания того же смысла. Например, вместо высказывания «Ни одно доброе дело не остается безнаказанным» можно рассматривать такое: «За любое доброе дело наказывают». Но можно нарисовать и исходное высказывание (рис. 15).

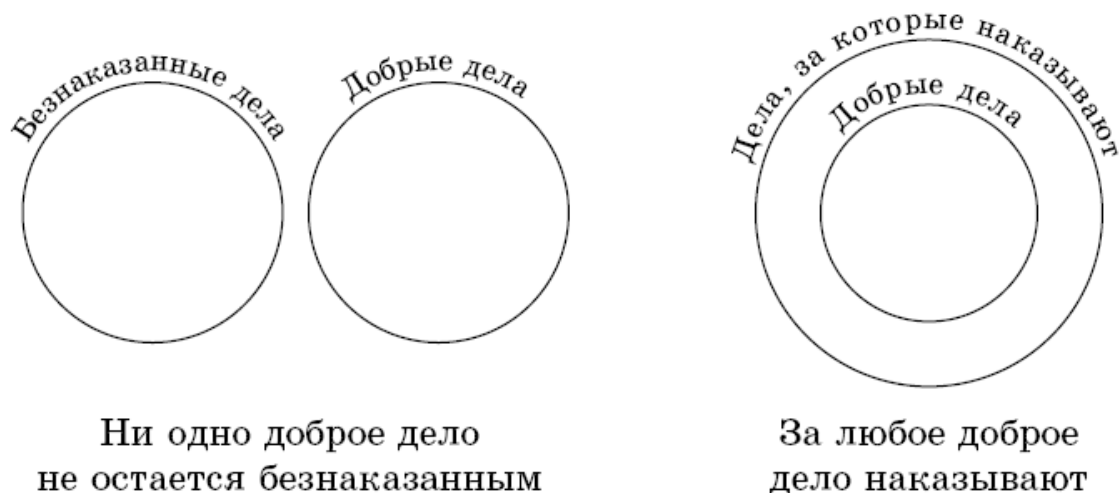


Рис. 15

Задача 6.4. Ни одна кочерга не мягкая. Все подушки мягкие. Какой можно сделать вывод?

Решение. Нарисовав высказывания, видим, что никакой предмет не является кочергой и подушкой одновременно. Сформулировать это можно двумя способами: «Ни одна кочерга не является подушкой» или «Ни одна подушка не является кочергой» (рис. 16).

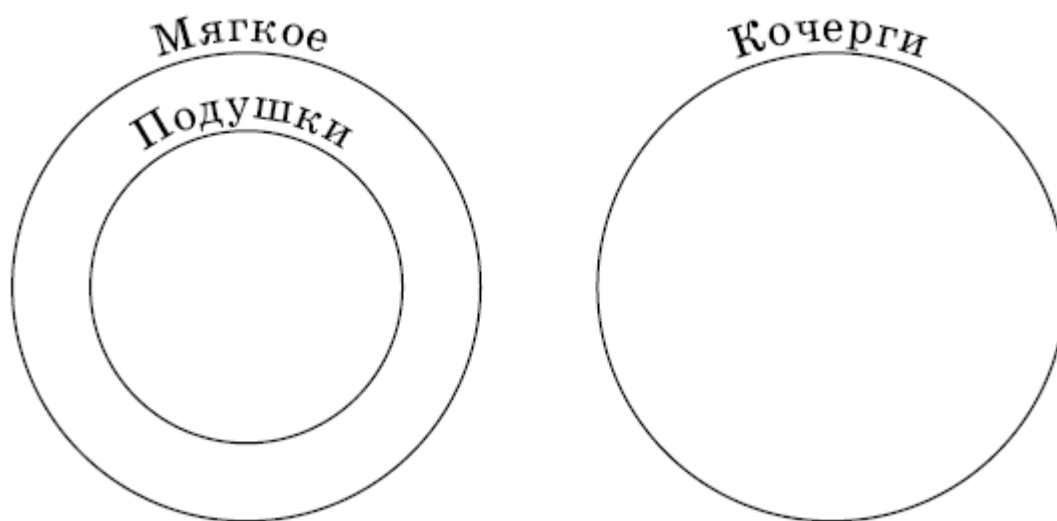


Рис. 16

Зачем математику уметь работать с абсурдными утверждениями? В естественно возникающих задачах вряд ли могут встретиться вороны, собирающие картины. Однако с посылками сомнительной истинности приходится сталкиваться постоянно. И бывает полезно заранее понять, имеет ли смысл их доказывать или опровергать. Скажем, в условии задачи дано А и требуется определить, верно ли В. Пусть нам ясно, что В следует из А, но неизвестно, верно ли В. Стоит ли пытаться вывести В из А? Да, стоит: если $A \rightarrow B$, то В верно. Но если окажется, что В не следует из А, то никакого вывода об истинности В сделать пока не удастся. Рассмотрим пример подобных рассуждений.

Задача 6.5. Является ли точным квадратом число:

а) 1234567; б) 10101... 01 (всего 2015 единиц и 2014 нулей); в) 20122013201420152016?

Ответ, а), б), в) Нет.

Решение, а) Ни одно натуральное число, оканчивающееся на 7, не является квадратом натурального числа. Число 1234567 оканчивается на 7. Следовательно, оно не является квадратом.

Комментарий. Логически решение безупречно, но верно оно, только если верны обе посылки. Истинность второй не вызывает сомнений. Чтобы убедиться в истинности первой, достаточно поочередно возвести в квадрат все однозначные числа. А то, что последняя цифра числа полностью определяет последнюю цифру его квадрата, ясно каждому, кто умеет умножать в столбик.

б) Попробуем действовать так же и подумаем, верно ли высказывание: «Ни одно натуральное число, оканчивающееся на 1, не является точным квадратом». К сожалению, неверно. Контрпримерами служат, в частности, 1 и 81. К еще большему сожалению, из этого нельзя сделать никакого вывода, кроме того, что надо решать задачу по-другому. Рассмотрение двух последних цифр столь же бесполезно, квадрат числа вполне может оканчиваться на 01, например, $101^2 = 10201$. Но что такое последняя цифра? Остаток от деления на 10 (а две последние цифры – от деления на 100). Рассматривая остатки от деления на 3, приходим к такому короткому решению:

Сумма цифр данного числа равна 2015, поэтому оно дает остаток 2 при делении на 3. Но квадраты всех натуральных чисел делятся на 3 либо без остатка, либо с остатком 1. Значит, данное число не является точным квадратом.

в) В этом числе сумма цифр сразу не видна, но ее можно вычислить. Прежде чем вычислять, подумаем, зачем это надо. Если она делится на 3 с остатком 2, то схема решения та же, что и в предыдущем пункте. Нетрудно убедиться, что так оно и есть; точно вычислять сумму необязательно.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.6. Каждый англичанин любит играть в гольф. Майкл любит играть в гольф. Можно ли наверняка утверждать, что он англичанин?

Задача 6.7. Докажите с помощью контрпримера, что вывод сделан неверно.

1) Все мои друзья – болельщики «Спартака». А некоторые болельщики «Спартака» занимаются спортом. Следовательно, некоторые мои друзья занимаются спортом.

2) Некоторые кочаны капусты – паровозы. Некоторые паровозы играют на рояле. Значит, некоторые кочаны капусты играют на рояле.

Задача 6.8. Покажите с помощью рисунка, что рассуждение верное.

1) Все крокодилы умеют летать. Все великаны являются крокодилами. Значит, все великаны могут летать.

2) Некоторые сны ужасны. Ни один ягненок не способен вызвать ужас. Следовательно, некоторые сны не ягнята.

Задача 6.9. Определите, какие из приведенных рассуждений истинны, а какие ложны.

1) Все англичане любят пудинг. Ни один француз не любит пудинг. Следовательно, ни один француз не англичанин.

2) Ни один лентяй не достоин славы. Некоторые художники – не лентяи. Следовательно, некоторые художники достойны славы.

Задача 6.10. Сделайте вывод, если это возможно:

1) Сахар сладкий. Некоторые сладкие вещи очень нравятся детям.

2) Некоторые горные кручи непреодолимы. Все заборы вполне преодолимы.

3) Гусеницы не отличаются красноречием. Джон красноречив.

4) Все шутки придуманы для того, чтобы смешить людей. Ни один закон не шутка.

5) Музыка, которую слышно, вызывает колебания воздуха. Музыка, которую не слышно, не стоит того, чтобы за нее платили деньги.

Задача 6.11. Придумайте свои примеры верных и неверных рассуждений про всех и некоторых.

Задача 6.12. В следующем рассуждении истинность исходных высказываний не вызывает сомнения. Верен ли вывод? Почему?

Все сочинения Пушкина нельзя прочитать за одну ночь. «Сказка о рыбаке и рыбке» – сочинение Пушкина. Следовательно, «Сказку о рыбаке и рыбке» нельзя прочитать за одну ночь.

Занятие 7

Доказательство от противного

Этого не может быть никогда, потому что если бы люди жили на луне, то заслоняли бы для нас магический и волшебный свет ее своими домами и тучными пастбищами.

А. П. Чехов. «Письмо к ученому соседу»

С методом доказательства от противного каждый школьник неизбежно сталкивается (неожиданно, и поэтому, порой, жестко) на уроках геометрии. Надеемся, что ученик, разобравшийся с материалом предыдущих занятий, воспримет метод от противного как естественное продолжение знакомства с логикой и будет избавлен от неуместных формальных трудностей при изучении геометрии.



Задача 7.1 служит вводным упражнением, показывающим логическую основу метода от противного. С формальной точки зрения он состоит в замене доказательства того, что из А следует Б, на доказательство того, что из «не Б» следует «не А». Как показывает задача 7.2, иногда такой простой трюк существенно облегчает задачу.

Однако настоящая мощь метода от противного проявляется при более широком его понимании. Пусть дано А, а доказать требуется Б. Предположив противное, мы получим уже два условия: А и «не Б», а с двумя условиями работать легче, чем с одним. Из них требуется получить два любых противоречащих друг другу высказывания: В и «не В». Задачи 7.2, 7.3 и 7.4 демонстрируют, что В может как совпадать с одним из условий А или Б, так и быть новым утверждением.

Иногда метод от противного удается применить при решении задач, в формулировке которых условия А и Б явно не выделены (см. задачу 7.6 и комментарий к ней). Достаточно усвоить идею «Предположим противное и поищем противоречие».

Задача на доказательство не всегда содержит слово «докажите». Иногда решающий должен сам выбрать верный ответ на вопрос типа «Можно ли...», «Существует ли...» ит. п., а потом доказать правильность ответа. Если ответ отрицательный, часто бывает удобно предположить, что он положительный, а затем прийти к противоречию. Такое рассуждение от противного применяется в задачах 7.6 и 7.11, а также ДЗ3 и ДЗ6.

Немного рекламы.

1) Доказательство от противного порадует любителей перебора: мы просто рассматриваем все случаи (часто их всего два, но может быть и больше), исключаем приводящие к противоречию и делаем вывод, какой из случаев выполняется.

2) «Противное» часто оказывается хорошим. От противного удобно доказывать «отрицательные» качества: неделимость, иррациональность, бесконечность. А предположив противное, мы сразу получим что-то хорошее, с дополнительными свойствами (делимость на простое число, числитель и знаменатель рациональной дроби, размер конечного множества).

3) Метод от противного не помешает даже там, где он не нужен. Пусть дано A , и из этого без всякого «противного» можно доказать B . Но мы этого не заметили и зачем-то предположили «не B ». И только после этого из A (без использования «не B ») получили B . Вот и хорошо! B и «не B » противоречат друг другу, метод от противного сработал.

А теперь антиреклама.

1) Если метод от противного сработал описанным только что образом, самое время упростить доказательство и выбросить из него «противную» оболочку.

2) Недостаток логической культуры может привести к некорректному «доказательству» от противного. Одна из целей этого занятия, да и всей книжки – научить, как таких ошибок избегать. В частности, задача 7.5 еще раз напоминает о неравносильности обратных друг другу высказываний.

3) Одно дело – понять, что надо искать противоречие, и совсем другое – уметь его находить. Поиск противоречия часто связан с владением специфической техникой (подсчет двумя способами, инварианты, раскраски, свойства делимости, принцип Дирихле, неравенства и оценки и т. д.). Мы постарались включить в занятие задачи, которые можно решить (а отмеченную звездочкой хотя бы понять) без специальной подготовки.

Задача 7.1. Если рыцарь встречает дракона, то рыцарь вступает в бой.

1) Составьте к этому высказыванию обратное, противоположное и противоположное обратному.

2) Известно, что рыцарь вступил в бой. Означает ли это, что он встретил дракона?

3) Рыцарь не вступил в бой. Означает ли это, что он не встретил дракона?

Ответ. 1) Обратное: если рыцарь вступает в бой, то рыцарь встречает дракона. Противоположное: если рыцарь не встречает дракона, то рыцарь не вступает в бой. Противоположное обратному: если рыцарь не вступает в бой, то рыцарь не встречает дракона.

2) Не означает. Рыцарь мог вступить в бой не только с драконом. Например, с ветряными мельницами. Как мы не раз убеждались, истинность прямого и обратного высказывания никак не связаны.

3) Означает. Ведь если бы он встретил дракона, то вступил бы в бой, что противоречит условию. То есть истинному прямому высказыванию соответствует истинное высказывание, противоположное обратному. А это значит, что их можно заменять друг на друга.

Задача 7.2. Многочисленное число не содержит повторяющихся цифр. Докажите, что оно не может быть произведением двух меньших чисел, состоящих только из единиц и нулей.

Обсуждение. Как подступиться к этой задаче? Чисел без повторяющихся цифр много, и общие выводы делать о них затруднительно. Попробуем вместо прямой задачи решить

противоположную обратной: докажем, что число, являющееся произведением двух чисел, состоящих только из единиц и нулей, содержит повторяющиеся цифры.

Решение. Предположим, что число является произведением двух чисел, состоящих только из единиц и нулей. Что может быть его последней цифрой? Только 1 или 0. А последней ненулевой цифрой? Только 1 (потому что произведение последних ненулевых цифр сомножителей – это произведение двух единиц). А что может быть первой цифрой? Тоже только 1. Однако по условию число не может содержать двух единиц. Значит, первая единица и является последней ненулевой цифрой. В таком случае в каждом из сомножителей только одна единица в записи. Но так как оба числа больше 1 (иначе другое равно произведению), оба они заканчиваются на 0, и в произведении найдутся два нуля.

Комментарий. Задача решена методом от противного: мы предположили, что доказываемое утверждение неверно, и пришли к противоречию. Одно из противоречащих друг другу утверждений – условие (число не содержит повторяющихся цифр), а другое – его отрицание.

Задача 7.3. Двое играют в «крестики-нолики» на бесконечной доске. Крестики ходят первыми. Выигрывает тот, кто смог поставить пять своих значков подряд по вертикали, горизонтали или диагонали. Докажите, что крестики могут как минимум не проиграть.

Обсуждение. Поясним, что значит «могут не проиграть». Вдруг крестики – первоклассник, а нолики – выпускник, игравший в «крестики-нолики» на всех уроках в течение одиннадцати лет? Однако в подобных задачах рассматривается игра не реальных людей, а идеальных игроков, способных просчитывать игру на какое угодно число ходов вперед. Исход партии между такими игроками предreshen правилами игры и не зависит от их настроения и самочувствия. Либо у идеальных крестиков есть беспроигрышная стратегия (т. е. возможность ходить так, чтобы не проиграть при любых действиях ноликов) – и тогда он ей непременно воспользуется и сможет не проиграть, либо нет, т. е. у ноликов есть возможность выигрывать всегда, независимо от ходов первого (то есть выигрышная стратегия).

Решение. Предположим противное. Пусть у первого игрока – крестиков – нет беспроигрышной стратегии. Это означает, что у второго есть выигрышная стратегия. В таком случае крестики могут сделать первый ход куда угодно, а затем руководствоваться выигрышной стратегией второго игрока. Если эта стратегия говорит ему поставить крестик туда, где он уже стоит, надо просто поставить его куда угодно, от этого хуже не будет. Таким образом, если выигрышная стратегия есть у ноликов, то она есть и у крестиков. Но у них не может быть одновременно выигрышных стратегий. Полученное противоречие показывает, что предположение неверно, и крестики при безошибочной игре не проиграют.

Комментарий. В этой задаче одно из противоречащих друг другу утверждений – то, что требуется доказать (крестики могут как минимум не проиграть), а второе – его отрицание (нолики могут выиграть).

Задача 7.4. В клетках шахматной доски как-то расставлены все натуральные числа от 1 до 64. Докажите, что найдутся две соседние по стороне или по вершине клетки, числа в которых отличаются не меньше чем на 9.

Решение. *Предположим противное:* разность между числами, стоящими в любых двух соседних по стороне или вершине клетках, не превышает 8. Заметим, что расстояние между любыми двумя клетками не превышает семи королевских ходов. Поэтому разность между числами в любых двух клетках по предположению не превышает $7 \cdot 8 = 56$. Но разность $64 - 1 = 63 > 56$. *Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно* и найдутся два числа в соседних клетках, отличающиеся не менее чем на 9.

Комментарий. В этой задаче метод от противного применен в широком понимании: противоречащие друг другу утверждения («Числа в любых двух клетках отличаются не

более чем на 56» и «Существуют две клетки, числа в которых отличаются на 63») не сформулированы явно ни в условии задачи, ни в предположении, а получены из них.

Задача 7.5. Острова архипелага связаны мостами так, что с каждого острова можно дойти до любого другого. Не более чем с двух островов ведет нечетное число мостов, а с остальных – четное. «Докажем», что можно обойти архипелаг, пройдя по каждому мосту ровно один раз.

«Доказательство». Предположим противное: хотя бы с трех островов ведет нечетное число мостов. Заходя на остров, мы «тратим» два моста: по одному вошли, по другому вышли. Поэтому мосты, выходящие с каждого острова, можно объединить в пары. Нечетное число мостов может быть только на самом первом острове (мы с него вышли первый раз, не заходя перед этим) и на последнем (зашли, но не вышли). Если островов с нечетным числом мостов хотя бы три, приходим к противоречию, и пройти по всем мостам ровно один раз нельзя. А если таких островов не более двух, то можно.

Верно ли это «доказательство»?

Решение. Обозначим данное в задаче условие буквой А: «Не более чем с двух островов ведет нечетное число мостов, а с остальных – четное». То, что требуется доказать, обозначим как Б: «Можно прогуляться по архипелагу, пройдя по каждому мосту ровно один раз». Итак, требуется доказать $A \# B$. А что доказано? Что если «нечетных» островов хотя бы три, то обойти архипелаг, пройдя по разу по каждому мосту, нельзя. То есть доказано (вполне, кстати, верно) «не А» $\#$ * «не Б» – противоположное утверждение, которое, как уже обсуждалось в задаче 6.1, отнюдь не равносильно нужному. И неверна в доказательстве именно последняя фраза: «А если таких островов не более двух, то можно». Вот $B \# A$ действительно равносильно «не А» $\#$ «не Б».

Комментарий. 1) Итак, слова «предположим противное» и «пришли к противоречию» сами по себе не являются магическим заклинанием. Распространенная ошибка – вместо требуемого утверждения доказать обратное ему. **2)** Само утверждение про архипелаг верно, но доказывается сложнее, чем обратное.

Задача 7.6*. Конечно или бесконечно множество простых чисел?

Обсуждение. Не правда ли, вопрос естественный? Недаром его еще древние греки поставили. И он кажется очень сложным, не так ли? Во всяком случае, конечно ли множество пар простых чисел-близнецов (т. е. отличающихся друг от друга на 2), неизвестно до сих пор. Как не найдено и никакой формулы, позволяющей бесконечно вычислять одно простое число за другим. А некоторые простые по формулировке вопросы теории чисел решены весьма сложными современными методами (например, великая теорема Ферма или тернарная проблема Гольдбаха). Но вот вопрос о бесконечности множества простых чисел древние греки смогли не только поставить, но и решить. Приведем удивительное по красоте и простоте доказательство от противного, восходящее к «Началам» Евклида.

Решение. Пусть множество простых чисел конечно. Тогда можно выписать все простые числа: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Произведение всех этих чисел делится на каждое из них. А если его немножко «испортить», прибавив 1, то полученное число: $p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$ не будет делиться ни на одно из простых чисел $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Можно ли это число разложить на простые множители? Если можно, то среди этих простых множителей нет известных нам чисел $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ (то есть мы выписали не все простые числа!). А если нельзя, то это число само простое, причем большее всех выписанных нами чисел. В любом случае выписать все простые числа не удалось. Значит, их множество бесконечно.

Комментарий. Является ли приведенное доказательство доказательством от противного? Если да, то требовалось бы доказать, что из А следует Б. А мы вместо этого доказывали бы, что из «не Б» следует «не А». Но где же условие А? В задаче вообще ничего не дано!

Условие А появится, если переформулировать задачу так: «Пусть дано множество всех простых чисел. Доказать, что оно бесконечно». Предположив, что множество простых чисел конечно, мы убедились, что рассмотрели не все простые числа.

Метод от противного оказался эффективен, потому что помог от бесконечного количества, с которым непонятно что делать, перейти к конечному, которое можно перечислить. А затем придумать, как по любому конечному набору простых чисел указать еще одно простое число. Теперь, когда решение придумано, его можно изложить и без характерных для метода от противного слов: возьмем произвольный набор простых чисел, к ним можно добавить еще одно, затем еще одно и т. д. Так можно делать сколько угодно раз, поэтому простых чисел бесконечно много. Еще раз убеждаемся, что сила метода от противного не в магических заклинаниях: он и без них работает!

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.7. Петя сказал: «Если кот шипит, то рядом собака, и наоборот, если собаки рядом нет, то кот не шипит». Не сказал ли он что-то лишнее?

Задача 7.8. Все знают: когда Петя готов к уроку, он всегда поднимает руку. И вдруг...

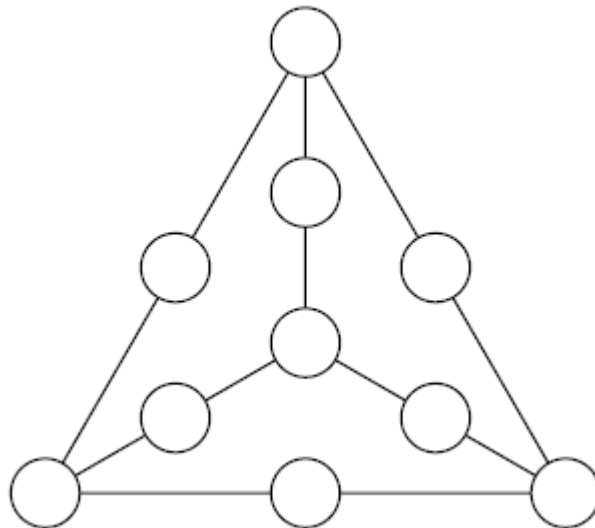
1) Двоечник Вася точно знает, что сегодня Петя не готов к уроку. «Значит, он не будет поднимать руку», – думает Вася. Верно ли он рассуждает?

2) Марья Ивановна видит, что Петя не поднимает руку. «Ага, значит, он к уроку не готов. Вот сейчас вызову и двойку поставлю!» – думает коварная Марья Ивановна. Верно ли она рассуждает?

Задача 7.9. В вершинах куба расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Докажите, что есть ребро, числа на концах которого отличаются не менее чем на 3.

Задача 7.10. Десять друзей послали друг другу праздничные открытки, так что каждый послал пять открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.

Задача 7.11. Можно ли в кружочках расставить все цифры от 0 до 9 так, чтобы сумма трех чисел на каждом из шести отрезков была бы одной и той же?



Задача 7.12. Двое играют в игру «Щелк!». У них есть прямоугольная шоколадка, разделенная на дольки. Левая нижняя долька отравлена. Ходят по очереди. За ход можно съесть произвольную дольку и все находящиеся справа и сверху от нее. Съевший отравленную дольку проигрывает. Докажите, что у первого игрока есть выигрышная стратегия на любой

прямоугольной шоколадке, в которой больше одной дольки (предъявлять стратегию не обязательно).

Задача 7.13. Круг разбит на 25 секторов, пронумерованных в произвольном порядке числами от 1 до 25. В одном из секторов сидит кузнечик. Он прыгает по кругу, каждым своим прыжком перемещаясь по часовой стрелке на количество секторов, равное номеру текущего сектора. Докажите, что в некотором секторе кузнечик не побывает никогда.

Задача 7.14. 1) Несколько мальчиков стали в ряд, при этом разница в росте между двумя соседними не более 10 см. Потом их построили по росту. Докажите, что и теперь разница в росте между двумя соседними мальчиками не более 10 см.

2) На уроке танцев 15 мальчиков и 15 девочек построили двумя параллельными колоннами, так что образовалось 15 пар. В каждой паре измерили разницу роста мальчика и девочки (разница берется по абсолютной величине, то есть из большего вычитают меньшее). Максимальная разность оказалась 10 см. В другой раз перед образованием пар каждую колонну предварительно построили по росту. Докажите, что максимальная разность будет не больше 10 см.

Задача 7.15. Найдите ошибку в рассуждении.

Докажем от противного, что ленивых учеников больше, чем прилежных. Предположим, что прилежных не меньше, чем ленивых. Несомненно, ленивых учеников больше, чем надо. Значит, получается, что прилежных учеников тем более больше, чем надо?! С этим мы, учителя, согласиться никак не можем. Получили противоречие, значит, исходное предположение было неверно, и на самом деле ленивых учеников больше, чем прилежных.

Занятие 8

Равносильность

*Знаю – один
Мне равносильен.*

М. Цветаева

Это занятие разнообразно как по тематике, так и по сложности задач. Первый уровень образуют задачи 8.1–8.3 и 8.6–8.9, с помощью которых ребята знакомятся с понятием равносильности высказываний и продолжают работать со следствием.



Как и при изучении следствия, использование таблиц истинности и кругов Эйлера является не самоцелью, а средством решения задач и не должно быть чрезмерным. При обсуждении задачи 8.1 лучше просить ребят привести свои примеры высказываний и совместно прийти к выводу, что во втором пункте этого достаточно для полного решения задачи, а в первом и третьем примеры могут лишь помочь угадать ответ. Задача 8.3 служит для повторения материала второго занятия (про всех и некоторых), а также важных фактов, связанных с делимостью. Задачи 8.2, 8.9 и 8.10 полезны для повторения метода от противного.

Ко второму уровню сложности можно отнести задачи 8.4, 8.5 и 8.10, в которых ставится вопрос о доказательстве равносильности нескольких утверждений. В задачах 8.5 и 8.10 значение имеет уже не только логическая структура доказательства, но и математическое содержание самих высказываний. Задача 8.11 не столько логическая, сколько комбинаторная; ее последний пункт существенно сложнее остальных задач занятия.

Рассмотрим два высказывания. А: «Число кратно 9», Б: «Сумма цифр числа кратна 9». Для каждого конкретного натурального числа эти высказывания *либо одновременно истинны, либо одновременно ложны*, поскольку натуральное число делится на 9 *тогда и только тогда*, когда сумма его цифр делится на 9. Другими словами, высказывания А и Б *равносильны*. Записывается это так: $A \# B$.

Таблица истинности показывает, когда высказывание « $A \# B$ » истинно, а когда ложно:

А	Б	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Изобразим область истинности равносильных высказываний. Если те объекты, для которых истинно высказывание А, находятся в первом круге, а те, для которых истинно высказывание Б, во втором, то те, для которых истинно высказывание $A \# B$, находятся в серой области (рис. 17).

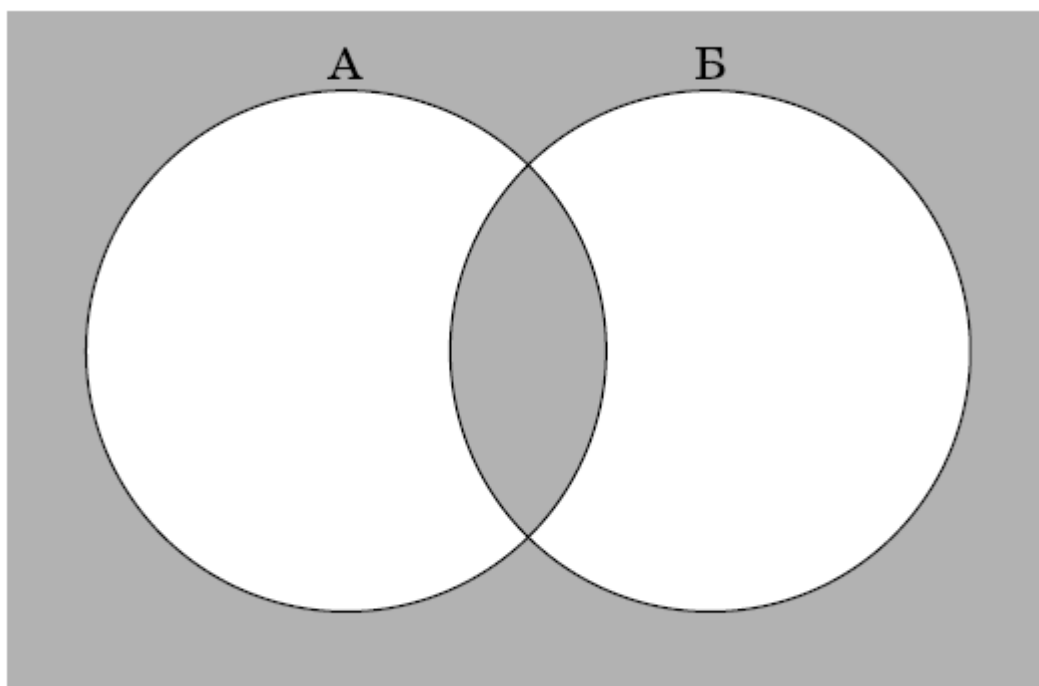


Рис. 17

Заметим, что в рассмотренном выше примере все натуральные числа находятся в закрашенной серой области истинности высказывания $A \# B$. Это и означает, что оно истинно для всех натуральных чисел.

Задача 8.1.1) Известно, что высказывание $A \# B$ истинно. Что можно сказать об истинности высказываний $A \# B$ и $B \# A$?

2) Известно, что высказывание $A \# B$ истинно. Можно ли что-то сказать об истинности высказывания $A \# B$?

3) Известно, что высказывание $A \# B$ ложно. Можно ли что-то сказать об истинности высказывания $A \# B$?

Приведите для каждого случая примеры подходящих высказываний.

Ответ. 1) Оба высказывания истинны; 2) нет, высказывание $A \# B$ может быть как истинным (в случаях, если A и B одновременно истинны или одновременно ложны), так и ложным (в случае, если A ложно, а B истинно); 3) да, высказывание $A \# B$ ложно, поскольку A истинно, а B ложно.

Решение. Ответить на все три вопроса можно разными способами.

Первый способ: посмотрим на таблицы истинности для $A \# B$, $B \wedge A$ и $A < B$. Для удобства приведем общую таблицу. 1) $A \# B$ истинно для первой и четвертой строк, для этих строк и $A \# B$ и $B \# A$ оба истинны. 2) и 3) решаются аналогично.

А	Б	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л
Л	И	И	Л	Л
Л	Л	И	И	И

Второй способ: посмотрим на иллюстрации высказываний $A \# B$, $B \# A$ и $A \# B$ с помощью кругов Эйлера.

1) Область истинности высказывания $A \# B$ входит целиком в области истинности высказываний $A \# B$ и $B \# A$.

2) Область истинности высказывания $A \# B$ частично входит в область истинности высказывания $A \# B$, а частично находится за ее пределами. 3) В той области, где высказывание $A \# B$ ложно, высказывание $A \# B$ тоже ложно.

Третий способ пригоден только для пункта 2 и опирается на приведение конкретных примеров высказываний (например, из задач 5.2 (п. 1) и 5.2 (п. 2)). А вот то, что мы не можем подобрать всевозможных подходящих примеров в пунктах 1 и 3, еще не доказывает, что таких примеров и вовсе нет.

Задача 8.2. Бабушка печет пирог в те и только те дни, когда ждет гостей.

1) Бабушка печет пирог. Можно ли утверждать, что она сегодня ждет гостей?

2) Бабушка не печет пирог. Можно ли утверждать, что сегодня она не ждет гостей?

Ответ. 1) Да; 2) да.

Решение. Рассмотрим два высказывания. A : «Бабушка сегодня печет пирог», B : «Бабушка сегодня ждет гостей». Тогда условие означает $A \# B$. В предыдущей задаче получено, что тогда истинно и $A \# B$, откуда ясен ответ в пункте 1. Кроме того, истинно и $B \# A$. А значит, и «не A » $\#$ «не B », что мы и используем для доказательства от противного в пункте 2.

Задача 8.3. Равносильны ли высказывания A и B ? Если нет, то следует ли хотя бы одно из них из другого?

1) A : «Некоторые принцессы – красавицы»; B : «Некоторые красавицы – принцессы».

2) A : «Все принцессы – красавицы»; B : «Все красавицы – принцессы».

3) A : «Число N кратно 11»; B : «Сумма цифр числа A , стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах».

4) A : «Число N является квадратом натурального числа»; B : «У числа N нечетное число делителей».

5) А: «У любой девочки из 6 „А“ больше друзей среди одноклассников, чем у любого мальчика из 6 „А“ среди одноклассниц»; Б: «В 6 „А“ мальчиков больше, чем девочек».

Ответ. 1) Равносильны; 2) нет; 3) нет, но $B \# A$; 4) равносильны; 5) нет, но $A \# B$.

Решение. Пункты 1 и 2 уже обсуждались в задачах 2.3 и 2.11.

3) Утверждение $A \# B$ следует из признака делимости на 11; обратное неверно, например, 803 кратно 11, но суммы цифр на четных и нечетных местах не равны друг другу.

4) Объединим делители числа N в пары так, чтобы произведение двух чисел в паре равнялось N . Ясно, что $N = n^2$ равносильно существованию числа n , которое является парным самому себе, при этом число делителей нечетно.

5) Поставим в соответствие каждому шестикласснику количество его друзей противоположного пола. Сумма этих чисел у всех девочек такая же, как и у всех мальчиков, и равна количеству дружб между мальчиком и девочкой. Так как все слагаемые для девочек больше, чем для мальчиков, у мальчиков должно быть больше слагаемых. Поэтому $A \# B$. Обратное неверно, для доказательства достаточно любого контрпримера. Например, в классе одна девочка и два мальчика, и никто из них ни с кем не дружит.

Задача 8.4. Чтобы доказать равносильность двух утверждений А и Б, необходимо доказать две теоремы: $A \# B$ и $B \# A$. А какое наименьшее число теорем надо доказать, чтобы убедиться в равносильности: а) трех утверждений;

б) десяти утверждений?

Ответ, а) Три; б) десять.

Решение. Чтобы доказать, что из любого утверждения следует любое другое, достаточно получить их друг из друга по кругу (для трех утверждений $A \# B \# B \# A$, для десяти аналогично), при этом число теорем равно числу утверждений.

С другой стороны, теорем не может получиться меньше, чем утверждений. Действительно, для каждого утверждения должна быть теорема, где оно стоит справа от знака « $\#$ », иначе оно ни из чего не следует.

Доказательство по кругу не всегда оказывается самым удобным. Иногда доказывают не минимальное количество теорем, а больше, зато каждая из них достаточно проста. Убедимся в этом, решив следующую задачу.

Задача 8.5*. В лифте многоэтажного дома работают только две кнопки: одна поднимает лифт на x этажей, вторая опускает на y этажей (если это возможно при данном положении лифта), где натуральные числа x и y меньше количества этажей в доме. Рассмотрим три утверждения:

(1) С любого этажа можно попасть на любой другой.

(2) С любого этажа, кроме последнего, можно подняться на следующий.

(3) С любого этажа, кроме первого, можно спуститься на предыдущий.

1) Покажите, что в зависимости от значений x и y каждое утверждение может быть как верным, так и неверным.

2) Между какими из этих утверждений можно поставить знак следствия и получить верное высказывание? Есть ли среди данных трех утверждений равносильные?

Решение. 1) При $x = y = 1$ все утверждения верны, при $x = y = 2$ неверны, так как нельзя поменять четность этажа.

2) Очевидно, что $(1) \# (2)$, $(1) \# (3)$. Кроме того, из одновременной истинности (2) и (3) следует (1). Докажем, что $(2) \# (3)$. Пусть лифт находится на n -м этаже. Если $n - y > 0$, то сначала опустимся на y этажей, а потом $y - 1$ раз поднимемся на 1 этаж и окажемся на $(n - 1) - m$ этаже. Если $n - y \leq 0$, то $n < y + 1$, поэтому можно, прибавляя по этажу, постепенно подняться до $(y + 1) - m$ этажа, затем спуститься на y этажей до первого, а потом постепенно подняться на $(n - 1) - m$ этаж. Аналогично доказывается и $(3) \# (2)$, что завершает доказательство равносильности всех трех утверждений.

Ответ. Все утверждения равносильны.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.6. Иа-Иа считает, что у Винни-Пуха хорошее настроение бывает тогда и только тогда, когда Винни-Пух хорошенько подкрепился. Съев всё, что было у Кролика, Винни-Пух застрял в норе, и его настроение сразу испортилось. Прав ли Иа-Иа?

Задача 8.7. Будем считать, что трава зеленая, а небо голубое. Определите, какие из данных высказываний истинны, а какие ложны:

- 1) Если трава зеленая, то небо голубое.
- 2) Если трава зеленая, то небо оранжевое.
- 3) Если трава оранжевая, то небо зеленое.
- 4) Если трава оранжевая, то небо голубое.
- 5) Трава зеленая тогда и только тогда, когда небо голубое.
- 6) Трава зеленая тогда и только тогда, когда небо оранжевое.
- 7) Трава оранжевая тогда и только тогда, когда небо зеленое.
- 8) Трава оранжевая тогда и только тогда, когда небо голубое.

Задача 8.8. В лесу живут только ляпустики и мордасики. Равносильны ли для обитателей леса три утверждения:

- (1) все ляпустики кузявые;
- (2) если кто-то некузяв, то он мордасик;
- (3) никто, кроме мордасиков, не может быть некузявым?

Задача 8.9. Объект охраняют пятеро часовых: **А, Б, В, Г** и **Д**. При этом справедливы следующие утверждения:

- 1) Если **А** спит, то и **Б** спит.
- 2) Хотя бы один из **Г** и **Д** спит.
- 3) Ровно один из **Б** и **В** спит.
- 4) **В** спит тогда и только тогда, когда спит **Г**.
- 5) Если **Д** спит, то **А** и **Г** тоже спят.

Перечислите всех спящих часовых.

Задача 8.10! Трех братьев пригласили на день рождения. Всего ожидалось 17 человек. «Вот бы мальчиков было больше, чем девочек», – захотел первый. «Вот бы при любой рассадке по кругу нашлось два мальчика рядом», – захотел второй. «Вот бы при любой рассадке по кругу нашелся гость, сидящий между двумя мальчиками», – захотел третий. Докажите, что все трое хотят одного и того же.

Указание. Докажите равносильность трех утверждений по кругу: $1 \# 2 \# 3 \# 1$.

Задача 8.11*. У профессора есть n утверждений A_2, \dots, A_n . О том, что все эти утверждения равносильны, знает только он. Профессор по очереди дает ученикам для доказательства такие теоремы: $A_i \# A_j$. Нельзя давать теорему, если она следует из ранее доказанных. Какое наибольшее число теорем могут доказать ученики, если: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) в общем случае?

Занятие 9

Метаголоволомки

Ничего не найдено, – опять говорил себе Пьер, – ничего не придумано. Знать мы можем только то, что ничего не знаем. И это высшая степень человеческой премудрости.

Лев Толстой. «Война и мир»

В большинстве задач для школьников требуется найти ответ на вопрос, пользуясь данными задачи. В современных задачах теории информации ставится вопрос о вопросе: возможно ли по имеющейся информации ответить на данный вопрос?

С такой постановкой задачи мы встречаемся при определении минимального количества взвешиваний (вопросов), необходимых для нахождения фальшивой монеты (задуманного числа). Интерес в таких задачах обычно представляет конструктивная часть, а для доказательства минимальности найденного числа взвешиваний достаточно сравнить количество возможных вариантов ответа (монет, пар монет и т. п.) с количеством информации, полученной в результате определенного числа взвешиваний. Задачам на взвешивание посвящен отдельный выпуск нашей серии.

Основу же нашего занятия составляют метаголоволомки, т. е. головоломки о головоломках. В их условии сообщается, что некто по имеющейся информации может или не может установить истину. Совсем простая задача 9.1 демонстрирует, насколько информативным может быть факт неоднозначности ответа. В задаче следующего уровня 9.2 количество информации постепенно увеличивается, и ранее неотличимые ситуации становятся отличимыми.

Большинство метаголоволомок довольно сложны. Как к ним подступаться? Для начала можно поставить себя на место решающего головоломку и поразбираться с частными случаями. В обсуждении задачи 9.3 явно описано, с какими именно; в задаче 9.7 можно как попало поставить рыцарей и лжецов и записать их ответы и т. п. А затем полезно задать себе вопросы: «Почему имевшейся информации оказалось (не)достаточно? Что нового в такой-то информации?» Если вариантов немного, бывает проще всего полностью их перебрать (в задаче 9.2 рассмотрены все разложения числа 36 на три множителя, в задаче 9.6 – все возможности племенной принадлежности двух островитян, в задаче 9.8 – все возможные ответы на вопрос).

К метаголовололкам можно отнести и задачи о мудрецах, поочередно сообщающих, могут ли они определить цвет своего колпака, число на карточке и т. п. Дополнительная сложность этих задач заключается в возрастающей с каждым высказыванием глубине рекурсии (А знает, что Б знает, что В не знает...), им посвящено следующее занятие. Задача 9.4 их напоминает лишь сюжетом, так как мудрец в ней высказался всего один раз. А вот мирные жители в задаче 9.11 хоть и не названы мудрецами, ими являются, и сложность именно в том, что приходится анализировать, кто что знает в момент произнесения очередной реплики.

Две последние задачи занятия не являются метаголовололками. Задача 9.10 служит мостиком от задачи 9.1 к задачам с неоднозначными данными, в которых предлагается определить, можно ли по имеющейся информации однозначно ответить на некоторый вопрос. Подборку таких задач, составленную А. В. Шаповаловым для подготовки московских школьников к заключительному этапу Всероссийской олимпиады, можно найти по ссылке <http://www.ashap.info/Uroki/Mosbory/2014v/index.html>. Задача 9.11 – мостик к следующему занятию о мудрецах.

Задача 9.1. Из чисел 1,2, 3,4, 5, 6, 7 Незнайка задумал два числа и сообщил Знайке их произведение. Знайка не смог отгадать задуманные числа. Какое произведение мог сообщить Незнайка?

Ответ. 6 или 12. Решение. Каждое из названных произведений можно получить двумя способами: $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$, $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$. Отсутствие других ответов проверяется перебором всевозможных произведений. Его можно сократить до минимума, если учесть, что простые множители 5 и 7 входят только в одноименные числа.

Задача 9.2. Встретились как-то два математика и разговорились:

А: «У меня трое сыновей».

Б: «Сколько им лет?»

А: «Произведение их возрастов равно 36. А сумма их возрастов равна номеру твоего дома».

Б: «Я все равно не знаю, сколько лет каждому».

А: «Мой старший сын рыжий».

После этого Б смог определить, сколько лет сыновьям А. Сколько же?

Обсуждение. Конец задачи звучит парадоксально. Цвет волос старшего сына никак не связан с его возрастом! Но поскольку после последней фразы первого математика второй смог определить возраста сыновей, какая-то информация в ней все же была. Какая? Существование старшего среди трех сыновей.

Ответ. 2, 2 и 9 лет.

Решение. Перечислим тройки натуральных чисел с произведением 36: 1, 1, 36; 1, 2, 18; 1, 3, 12; 1, 4, 9; 1, 6, 6; 2, 2, 9; 2, 3, 6; 3, 3, 4. Суммы чисел в этих тройках равны соответственно 38, 21, 16, 14, 13, 13, 11, 10. Если бы номер дома встречался среди сумм единственный раз, второй математик сразу бы определил возраста сыновей. Но он не смог этого сделать, поэтому номер его дома 13, а возможные возраста сыновей – 1, 6 и 6 лет или 2, 2 и 9 лет. Только во втором случае среди сыновей есть старший, поэтому им 2, 2 и 9 лет.

Комментарий. Подумайте, изменятся ли решение и ответ от такой перестановки реплик:

А: «Произведение их возрастов равно 36».

Б: «Я все равно не знаю, сколько лет каждому».

А: «Сумма их возрастов равна номеру твоего дома. Мой старший сын рыжий».

Задача 9.3. За столом сидело несколько жителей острова рыцарей и лжецов. Путешественник спросил каждого про его ближайших соседей. Каждый ответил: «У меня оба соседа – лжецы». Путешественник сказал: «Если бы вас было на одного больше или на одного меньше, я бы смог узнать, сколько среди вас рыцарей. А так не могу». Сколько человек было за столом?

Обсуждение. Обычно в задачах про рыцарей и лжецов известно количество участников и требуется только определить, кто есть кто. Попробуем и на этот раз для начала разобраться, как могли сидеть рыцари и лжецы, для небольшого количества сидящих. Ясно, что за столом сидело не менее трех человек. Как могли сидеть трое? А четверо? Пятеро? Шестеро? Семеро? Рано или поздно становится понятно, почему при достаточно большом количестве сидящих количество рыцарей может быть различным.

Ответ. 6.

Решение. Рыцари могут сидеть за столом только по одному между двумя лжецами, а лжецы – либо по одному, либо по двое. Поэтому трое, четверо и пятеро сидящих могут расположиться единственным образом (см. рис. 18).

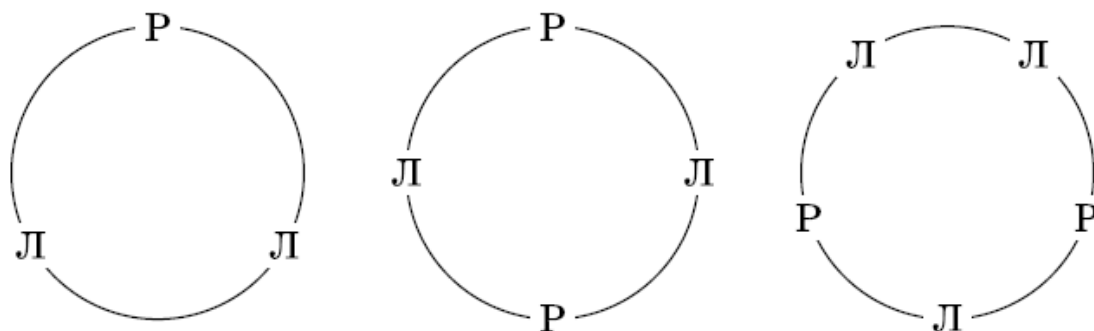


Рис. 18

Шестеро сидящих могут расположиться двумя способами (см. рис. 19), семеро – единственным (см. рис. 20).

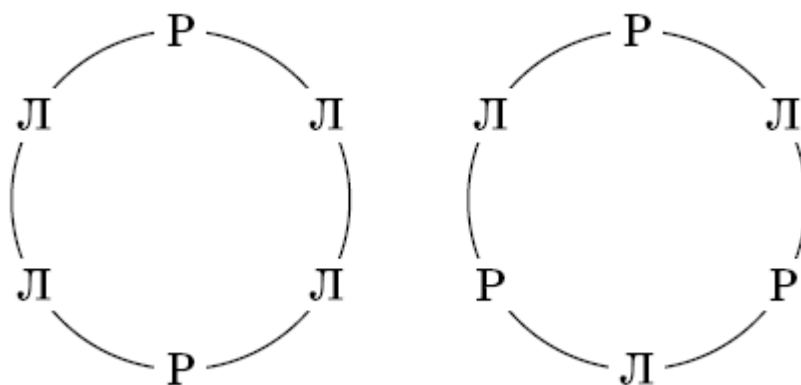


Рис. 19

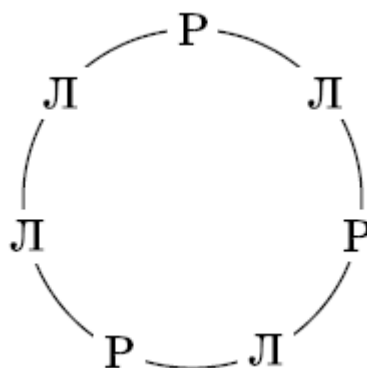


Рис. 20

Восемь и более сидящих можно расположить не менее чем двумя способами с различным числом рыцарей: группу из 7 человек РЛРЛРЛР можно заменить на РЛЛРЛЛР, а остальные сидящие с лжецами по краям легко подбираются при любом их числе: Л, ЛЛ, ЛРЛ, ЛЛРЛ, ЛЛРЛЛ и т. д.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 9.4. Два мудреца написали на семи карточках числа от 5 до 11. После этого они перемешали карточки, первый мудрец взял себе три карточки, второй взял две, а две оставшиеся карточки они не глядя спрятали в мешок. Изучив свои карточки, первый мудрец сказал второму: «Я знаю, что сумма чисел на твоих карточках четна!» Какие числа написаны на карточках первого мудреца?

Задача 9.5. Один из двух братьев-близнецов по имени Джон совершил преступление. Известно, что по крайней мере один из близнецов всегда лжет. Судья спросил у братьев по очереди: «Вы – Джон?» Первый ответил: «Да». Второй тоже что-то ответил. После этого судья смог определить, кто из них на самом деле Джон. Определите это и вы.

Задача 9.6. На острове живут два племени: рыцарей и лжецов. Путешественник встретил двух островитян и спросил одного из них: «Вы оба рыцари?» Тот ответил «да» или «нет». Путешественник не смог определить, кто перед ним, и спросил у того же человека: «Вы из одного племени?» Тот ответил «да» или «нет», и теперь путешественник понял, из какого племени каждый из островитян. Кого он встретил?

Задача 9.7. Путешественник посетил деревню, каждый житель которой либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Все жители деревни встали в круг лицом к центру, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив ли тот. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют лжецы. Определите и вы, чему она равна.

Задача 9.8. Путешественник на острове рыцарей и лжецов пришел в гости к своему знакомому рыцарю и увидел его за круглым столом с пятью гостями.

– Интересно, а сколько среди вас рыцарей? – спросил он.

– А ты задай каждому какой-нибудь вопрос и узнай сам, – посоветовал один из гостей.

– Хорошо. Пусть каждый ответит на вопрос: кто твои соседи? – спросил путешественник.

На этот вопрос все ответили одинаково.

– Данных недостаточно! – сказал путешественник.

– Но сегодня день моего рождения, не забывай об этом, – сказал один из гостей.

– Да, сегодня день его рождения! – сказал его сосед. И путешественник смог узнать, сколько за столом рыцарей.

Сколько же их?

Задача 9.9. Саша и Маша загадали по натуральному числу и сказали их Васе. Вася написал на одном листе бумаги сумму загаданных чисел, а на другом – их произведение, после чего один из листов спрятал, а другой (на нем оказалось написано число 2002) показал Саше и Маше. Увидев это число, Саша сказал, что не знает, какое число загадала Маша. Услышав это, Маша сказала, что не знает, какое число загадал Саша. Какое число загадала Маша?

Задача 9.10. Есть 9 карточек с цифрами 1, 2, ..., 9. Их перетасовали, отдали четыре Ивану, четыре Василисе и одну Бабе-Яге. Иван сообщил вслух, что сумма цифр на его карточках оканчивается на 7.

1) Знает ли теперь Василиса карточку Бабы-Яги?

2) Знает ли теперь Баба-Яга набор карточек Василисы?

3) Может ли случиться, что про какую-то карточку, кроме своей, Баба-Яга знает, у кого она находится?

Задача 9.11. Пять мудрецов играют в мафию. Среди них два мафиози, два мирных жителя и комиссар. Мафиози знают друг друга, комиссар знает все, мирные жители незна-

чально ничего не знают. Мафиози могут говорить что угодно. Остальные говорят только то, в чем сами уверены. Состоялся разговор:

А: «Д – мирный житель».

Б: «Нет, Д – мафиози».

В: «Д не знает, кто я».

Г: «Д знает, кто я».

Д: «Б – мафиози».

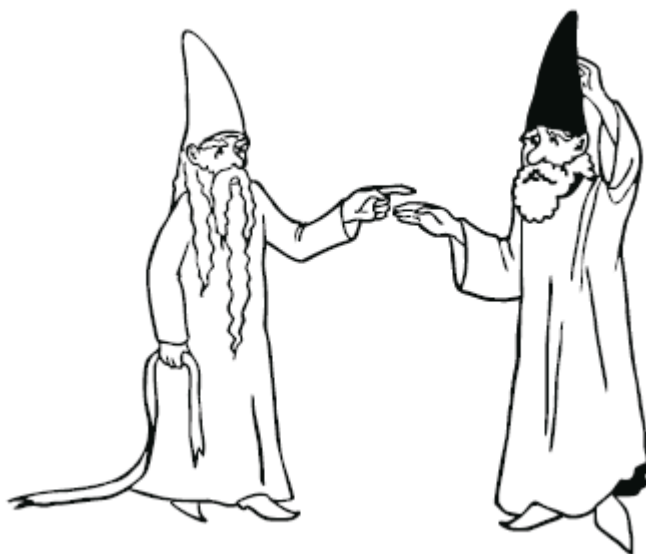
Определите роли тех игроков, для кого это возможно.

Занятие 10

Околпаченные мудрецы

Три логика зашли в бар. На вопрос, все ли будут пить, первый ответил «Не знаю», второй – «Не знаю», а третий – «Да».

Это занятие составлено в форме вариаций на тему известной задачи о трех мудрецах. Его содержание в значительной степени позаимствовано из статьи М. Милга «Что сказал проводник?», опубликованной в журнале «Квант» (1973 г., № 8, стр. 38).



Задачи о мудрецах и колпаках сложнее большинства метаголоволомок предыдущего занятия по двум причинам.

Во-первых, одну задачу можно рассматривать как серию задач возрастающей сложности: каждый мудрец делает вывод на основании вывода предыдущего, который анализировал высказывание предыдущего, который анализировал... Чем выше уровень рекурсии, тем сложнее рассуждать за соответствующего мудреца. Во-вторых, вопрос «Что нового содержалось в такой-то информации?» на предыдущем занятии принимал форму подсказки, а на этом – парадокса.

Доступность столь непростого материала можно значительно повысить с помощью ролевой игры. Преимущество не столько в том, что детям нравится выходить к доске и играть роли мудрецов, сколько в абсолютной наглядности: утверждение «Когда на Ане был белый колпак, Сережа смог определить цвет своего колпака» понятнее, чем «Третий мудрец думает, что если бы на втором был белый колпак, то первый смог бы определить цвет своего колпака». Важно объявить, что мудрецы никогда не пытаются угадать ответ, а при недостатке информации честно отвечают «Не знаю». Можно предупредить, что за правильный ответ мудреца всего лишь похвалят, а за неправильный немедленно отрубят голову (обычно после пары «отрубленных» голов дети перестают отвечать наобум).

Заранее требуется подготовить колпаки двух цветов (в самом простом варианте для этого достаточно цветной бумаги формата А4, степлера и нескольких минут). В начале занятия не нужно раздавать детям отпечатанные условия задач. Вместо этого сначала разыгрыва-

ется как мини-спектакль условие задачи 10.1: руководитель приглашает «на сцену» нескольких участников кружка, завязывает им глаза и надевает колпаки в соответствии с условием и рекомендациями в обсуждении. Затем задает им указанные там же вопросы. Если «мудрец» верно отвечает на вопрос, он объясняет, как ему это удалось. Если «мудрец» не может назвать цвет своего колпака или не может обосновать случайно угаданный ответ, учитель обсуждает со зрителями, в чем дело; при этом можно на глазах у зрителей поменять цвет колпака и спросить: «А если бы было так?». Условие задачи 10.2 разыгрывается как продолжение последней ситуации задачи 10.1. Когда две первые задачи будут разобраны, следует сформулировать в виде вопроса комментарий ко второй задаче и коллективно найти ответ. Он необходим для понимания дальнейшего.

Если первые две задачи вызвали затруднения, третью лучше тоже разыграть аналогичным образом под руководством учителя с теми же или новыми «артистами». Если все прошло легко, можно выдать кружковцам условия и предложить каждому задачу 10.3 для самостоятельного обдумывания.

Задачу 10.4 можно считать основной задачей этого занятия для учащихся средней подготовки. Как ее разыгрывать, подробно написано в обсуждении. Желательно, чтобы все кружковцы в итоге хорошо в ней разобрались, не стоит жалеть на это времени. В зависимости от состава кружка можно разыграть все предложенные ситуации или только часть из них, сделать это по одному разу или повторять с разными «артистами».

Задача 10.5 может оказаться наиболее интересной для одних и непонятной даже после разбора для других. В зависимости от хода занятия учителю предлагается определить, ставить ли ее вообще и насколько подробно обсуждать.

Вероятно, и в задачах для самостоятельного решения ребятам потребуется помощь.

При решении задачи 10.6 можно разделить детей на группы по четыре человека (один будет надевать колпаки на трех других, потом перемена ролей) и предложить им самим выбрать количество колпаков и разобраться, сможет ли третий мудрец определить цвет своего колпака, а через некоторое время разыграть перед всеми участниками наиболее удачные сюжеты.

Задачу 10.7 легче понять, если вновь посадить тех же самых трех мудрецов «на сцене», а четвертого назначить из сидящих «в зале». Тогда он сможет рассуждать, опираясь на только что разобранный задачу о трех мудрецах. Затем попросить его перейти «на сцену» и назначить «в зале» пятого «мудреца».

Для разбора задачи 10.8 можно снова использовать ролевую игру. «На сцене» устанавливается стул, на него садится один ученик – «мудрец». Учитель – «проводник» сообщает ему, что в купе есть испачкавшиеся. Потом объявляет станцию. Ясно, что мудрец должен пойти умыться. Затем ставится второй стул для второго «мудреца», и ситуация разыгрывается заново и т. д.

Задачи 10.7 и 10.8 полезны и как подготовка к изучению в дальнейшем метода математической индукции. Стоит обратить внимание кружковцев на то, как полезно заменить утверждение для большого числа (или общее утверждение) цепочкой задач, следующих одна из другой, начиная с самой простой. А если кружок сильный, обратить также внимание на то, что слова «и так далее...» звучат недостаточно строго, а при изучении индукции вернуться к этим задачам.

Задачу 10.11 можно предложить в качестве домашнего задания, при этом приведенное в книге или подобное ему решение лучше разобрать заранее для полного понимания условия. А можно, наоборот, не решать сравнительно сложные задачи 10.6—10.10 и перейти к задаче 10.11 сразу после разбора задачи о трех мудрецах.

При желании можно разыгрывать в лицах и другие задачи о мудрецах, имеющиеся в следующей главе и в разделе дополнительных задач.

Задача о двух мудрецах

Задача 10.1. Двум мудрецам принесли один белый и два черных колпака. Затем им завязали глаза и надели каждому на голову по колпаку, а третий спрятали. После этого мудрецам развязали глаза, и каждый смог увидеть, какой колпак на голове у другого. Затем у первого мудреца спросили, какой колпак на голове у него самого, и он ответил правильно. Какие колпаки надели на головы мудрецам?

Обсуждение. Предлагается выбрать среди детей двух мудрецов и разыграть по очереди три ситуации:

- 1) Первому мудрецу надели черный колпак, а второму – белый.
- 2) Первому мудрецу надели белый колпак, а второму – черный.
- 3) Обоим мудрецам надели черные колпаки.

В первом случае «мудрец» должен объяснить всем, как он смог определить цвет своего колпака. Два других случая неотличимы с точки зрения первого мудреца (если первый «мудрец» ошибся, ему надо «отрубить голову», а если случайно угадал ответ, учитель может на глазах у зрителей подменить его колпак и сказать: «Могло быть и так, и тогда тебе отрубили бы голову»). В итоге дети должны сделать вывод: определить цвет своего колпака первый мудрец сможет, если видит на втором белый колпак, и не сможет, если видит черный.

Ответ. На первом мудреце черный колпак, а на втором – белый.

Задача 10.2. Двум мудрецам принесли один белый и два черных колпака. Затем им завязали глаза и надели каждому на голову по черному колпаку, а белый спрятали. Когда им развязали глаза, у первого мудреца спросили, какой колпак на голове у него самого. Что он ответил? Когда после этого тот же вопрос задали второму мудрецу, он ответил правильно. Как он догадался?

Обсуждение. Имеет смысл разыграть эту задачу как продолжение третьей ситуации предыдущей задачи, с теми же «актерами». Тогда всем понятно, что первый мудрец ответит «Не знаю». Если второй «мудрец» сам не догадается, какой на нем колпак, стоит напомнить ему про первые две ситуации: «Помнишь, когда на тебе был белый колпак, он мог ответить? А когда черный?»

Комментарий. Казалось бы, информация у двух мудрецов одна и та же, но отвечают они по-разному. Значит, второй знает что-то такое, чего не знал первый. Подумаем, что именно. Он слышал ответ первого и из этого ответа заключил, что первый не может определить цвет своего колпака.

Задача 10.3. Изменится ли решение предыдущей задачи, если вначале принесли: а) один белый и три черных колпака; б) два белых и два черных колпака?

Решение, а) Нет, не изменится. Количество белых колпаков то же, а черных неважно сколько именно, а важно только, что на всех хватает, б) На этот раз ни один из мудрецов не сможет определить цвет своего колпака. Первый – очевидно, а про второго можно понять, разыграв такие ситуации:

- 1) Обоим надели черные колпаки. Убеждаемся, что первый скажет «Не знаю».
- 2) Первому надели черный колпак, а второму белый. Убеждаемся, что первый скажет «Не знаю».

Итак, первый в любом случае говорит «Не знаю», и второй по этим словам не может делать никакого вывода.

Задача о трех мудрецах

Задача 10.4. Трем мудрецам принесли два белых и три черных колпака. Затем им завязали глаза и надели каждому на голову по черному колпаку, а белые спрятали. Когда им развязали глаза, у первого мудреца спросили, знает ли он, какой колпак на голове у него самого.

а) Что он ответил?

б) Тот же вопрос задали второму мудрецу. Что ответил второй?

в) Наконец, спросили третьего мудреца, и он правильно назвал цвет своего колпака. Как он рассуждал?

Обсуждение. Для начала можно разыграть с новыми «артистами» четыре ситуации, задавая вопрос только первому мудрецу:

1) Мудрецам надели два белых колпака и один черный. Спрашивают у того, на котором черный.

2) Мудрецам надели два белых колпака и один черный. Спрашивают у того, на котором белый.

3) Мудрецам надели два черных колпака и один белый. Спрашивают у того, на котором белый.

4) Мудрецам надели два черных колпака и один белый. Спрашивают у того, на котором черный.

Убеждаемся, что первый мудрец может определить цвет своего колпака только в том случае, если видит перед собой два белых колпака. Теперь продолжим с теми же «артистами» последнюю ситуацию и зададим вопрос второму мудрецу с черным колпаком. Если он затрудняется ответить, напомним ему первую ситуацию: «Когда на тебе был белый колпак, он мог определить цвет своего колпака? Почему же сейчас не смог?»

И лишь теперь воспроизведем в ролях условие задачи полностью. Если первый мудрец попытается угадывать цвет своего колпака, ему можно напомнить третью ситуацию и «отрубить голову».

Второму трудно понять, есть ли у него шанс догадаться. Помочь можно вопросами: если на тебе белый колпак, то что первый видит? Может ли он тогда догадаться? (Нет, во второй и четвертой ситуациях первый мудрец видел колпаки разного цвета и догадаться не мог.) А если на тебе черный, то что первый видит? Может ли он тогда догадаться? (Нет, в третьей ситуации первый мудрец видел два черных колпака и догадаться не мог.) Задавая вопросы, желательно не подсказывать третьему «мудрецу» цвет его колпака.

Роль третьего «мудреца» сложная, ему можно помочь, напомним четвертую ситуацию с продолжением: «Помнишь, когда на тебе был белый колпак, а ни них черные? Тогда первый мудрец не смог, зато второй смог определить цвет своего колпака! Почему же сейчас не смог?»

Задача 10.5! Парадокс трех мудрецов. В задаче о трех мудрецах первый смог бы определить цвет своего колпака лишь в одном случае: если бы видел перед собой двух мудрецов в белых колпаках. Но и второй, и третий мудрецы знают, что это не так: они же видят черные колпаки друг на друге. Поэтому ответ «Не знаю», произнесенный первым мудрецом, для каждого из них очевиден и не содержит никакой информации.

С другой стороны, если первому мудрецу не задавать вопроса, то второй окажется в положении первого, а третий – в положении второго, и не сможет ответить на вопрос. Но третий ответил, значит, информация в ответе первого все же была! Какая же?

Обсуждение. Вопрос очень сложный. Чтобы разобраться в нем, попробуем еще раз разыграть полностью задачу о трех мудрецах, но во время ответа первого второй закроет уши. После этого второй, конечно, не сможет определить цвет своего колпака (он и с открытыми-то ушами не мог!). А третий должен подумать так: если на мне белый колпак, то второй видит два колпака разного цвета и, не услышав ответа первого, определить цвет своего не может. А если на мне черный, то тем более не может (он и с открытыми ушами не мог в прошлый раз). Так что от ответа второго никакого толку, и определить цвет своего колпака я не могу.

Ответ. Ответ первого нужен для того, чтобы третий знал, что второй знает, что первый не может определить цвет своего колпака. Другими словами, информация от первого второму не помогает, но тот факт, что она ему не помогает, важен для третьего.

Комментарий. С сильным кружком в затыкание ушей можно поиграть подольше. Что будет, если во время ответа первого мудреца заткнуть уши не второму, а третьему? Тогда третий будет знать, что второй слышал ответ первого и все равно не может определить цвет своего колпака. Какой именно ответ второй слышал, третий и так знает, для этого не нужны уши, достаточно глаз и мозгов. Так что в этом случае третий сможет определить цвет своего колпака. А что будет, если заткнуть уши третьему во время ответа второго? На этот раз он определить цвет своего колпака не сможет, так как окажется в роли второго мудреца из основного варианта задачи.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 10.6. Как можно изменить количество колпаков в задаче о трех мудрецах, чтобы решение всех пунктов в точности сохранилось?

Задача 10.7*. Придумайте задачу, аналогичную задаче о трех мудрецах, для большего количества мудрецов. Решите задачу для четырех и для пяти мудрецов.

Задача 10.8*. В купе поезда собрались 7 мудрецов. Окно было открыто. Поезд въехал в тоннель, и лица всех мудрецов оказались испачканы сажей. Каждый видел, что и другие испачканы, но себя не видел и спокойно продолжал беседу. В купе вошел проводник и сказал: «Господа, среди вас есть люди с грязными лицами. В поезде воды нет. Зато на каждой станции поезд стоит достаточно долго, так что рекомендую испачкавшимся пойти и умыться». Несколько станций никто из мудрецов не реагировал на это замечание, но на некоторой станции все одновременно встали и пошли умываться.

1) На какой по счету станции мудрецы поняли, что следует умыться?

2) *Парадокс проводника.* Если бы проводник промолчал, каждый бы по-прежнему считал себя чистым и умываться не пошел бы. Но ведь каждый видел, что среди них есть испачкавшиеся, так что проводник, казалось бы, ничего нового не сказал. Так что же сказал проводник?

Задача 10.9. Установим соответствие между задачами о колпаках и о проводнике (при одинаковом количестве мудрецов). Будем считать, что на мудреце с грязным лицом надет черный колпак, а иначе – белый. Тогда ответу «Не знаю» в задаче о колпаках соответствует нежелание умываться в задаче о проводнике. Как перевести слова проводника на язык задачи о колпаках?

Задача 10.10. Три дамы сидят в купе с испачканными лицами и смеются. Вдруг А думает: «Почему Б не понимает, что В смеется над ней? О Боже! Они смеются надо мной!» Что в этой задаче играет роль проводника?

Задача 10.11. Фразы типа «Это верно», «А знает, что это верно», «Б знает, что А знает, что это верно», «В знает, что Б знает, что А знает, что это верно» можно продолжать до бесконечности, и все они имеют разный смысл, но разницу эту с каждым «витком» улавливать все труднее. Придумайте подобные цепочки, где эта разница заметна.

Приложение к занятию 10

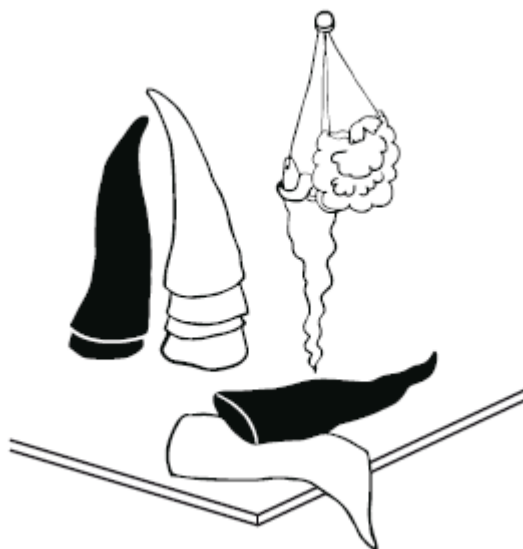
Продолжаем играть в мудрецов

– Кто больше знает, дурак или мудрец?

– Дурак. Мудрец во всем сомневается.

Из к/ф «Табор уходит в небо»

Если игра в мудрецов и колпаки вызвала интерес, подобную деятельность можно продолжить. Предлагаем еще три сюжета о мудрецах с возможными сценариями. Первые два сюжета требуют различного реквизита, но математически близки и могут быть разыграны как на разных занятиях, так и на одном и том же. Склеивать же все три в одно тематическое занятие вряд ли целесообразно.



Важно, чтобы все участники осознали, что мудрецы по правилам игры никогда не действуют наобум, а говорят только то, в чем уверены. Если школьник-«мудрец» случайно верно называет цвет своего колпака (или число), хотя по-честному следовало сказать «Не знаю», надо показать, что колпак (число) мог быть и другим, и «казнить» «мудреца».

Предложено два порядка обсуждения задачи о пяти мудрецах и трех цветах. Первый вариант уместен для сильного и многочисленного кружка: первая ситуация сложная, зато разбирается совместно; с более простыми ребята должны справиться сами. В упрощенном варианте те же ситуации разыгрываются и обсуждаются всем кружком вместе с руководителем. Одна и та же ситуация рассматривается в нескольких вариациях, математически аналогичных, но на первый взгляд кажущихся различными. Ситуации не отличаются принципиально от рассмотренных в первом варианте, поэтому мы ограничились ответами без обоснований. Этот вариант более игровой и динамичный и больше подходит для сообразительных ребят, мало занимавшихся математикой и не склонных к формальным доказательствам.

Все цвета радуги

Задача 10.12. Пяти мудрецам принесли колпаки всех семи цветов радуги и восьмой, белый, колпак. Затем мудрецов построили в затылок друг другу и надели каждому по колпаку. Каждый мудрец видит колпаки всех стоящих перед ним, но не видит ни своего колпака, ни колпаки стоящих сзади. Мудрецам сообщили, что белый колпак на кого-то надет. Затем по очереди, начиная с последнего, стали спрашивать каждого, знает ли он цвет своего колпака. Как только кто-то верно назовет цвет своего колпака, всем дадут по конфете. Но если он ошибется, всех казнят. Чем закончится эта история?

Сценарий. Руководитель кружка приглашает для инсценировки пятерых ребят и показывает всем восемь разноцветных колпаков. Количество «артистов» может быть иным, лишь бы колпаков оказалось больше. Затем рассказывает условие задачи, строит ребят и надевает на них колпаки, после чего спрашивает всех по порядку, начиная с последнего, о цвете его колпака. На первый раз лучше надеть белый колпак на достаточно сообразительного кружковца, стоящего ближе к началу, чтобы спросить его попозже. После того как ребята получают конфеты (или будут «казнены»), можно пригласить и других детей, чтобы в итоге каждый получил по конфете, а затем кто-то из обладателей белого колпака объяснит, как он догадался, а кто-то другой – почему он не мог угадать цвет своего колпака.

Ответ. Носитель белого колпака назовет его цвет, и каждый мудрец получит конфету.

Решение. Если последний мудрец видит перед собой кого-то в белом колпаке, он ответит «Не знаю», а если не видит, то скажет, что на нем белый колпак. Так же поведут себя и другие мудрецы, пока очередь не дойдет до того, на котором надет белый колпак. Он поймет: раз все говорили «Не знаю», значит, они видели кого-то в белом колпаке. Но я-то его не вижу. Значит, я сам в белом колпаке.

Пять мудрецов и три цвета

Задача 10.13. Пяти мудрецам принесли шесть колпаков: два желтых, два красных и два зеленых. Мудрецов построили в затылок друг другу и надели каждому по колпаку. Каждый мудрец видит колпаки всех стоящих перед ним, но не видит ни своего колпака, ни колпаков стоящих сзади. Затем по очереди, начиная с последнего, стали спрашивать каждого, знает ли он цвет своего колпака.

1) На мудрецов надеты колпаки в таком порядке: красный, желтый, зеленый, красный, желтый (а второй зеленый спрятан). Что ответят мудрецы?

Сценарий. Учитель может пригласить к доске пятерых мудрецов и надеть им колпаки указанных цветов. Если мудрец называет цвет своего колпака, он должен объяснить, как он рассуждал. Если он затрудняется, то зрителям хочется подсказать. Но просто назвать цвет колпака (который зритель видит) неинтересно, надо встать на место мудреца и порассуждать за него. Чтобы не забыть, кто что говорил, ответы можно писать на доске.

Решение. Пятый (последний) не знает, желтый на нем колпак или зеленый, и должен сказать «Не знаю». Четвертый видит перед собой колпаки трех разных цветов и не имеет никаких оснований «предпочесть» для себя один из них. Он тоже должен сказать «Не знаю». А вот третий знает, что колпаки всех трех цветов использованы (так как колпаков двух цветов всего четыре, а мудрецов пять). Но не видит перед собой зеленого колпака. И думает так: «Пятый мудрец, как и я, знал, что зеленый колпак на кого-то надет. Почему он не сказал, что на нем зеленый колпак? Потому что видел его на ком-то другом. Причем не на первом и не на втором. Может быть, зеленый колпак только у четвертого мудреца? Но тогда четвертый мудрец, не видя перед собой ни одного зеленого колпака, догадался бы, что на нем зеленый колпак. Так что про четвертого мудреца не знаю, а вот на мне точно зеленый колпак». Поэтому он скажет «Зеленый».

Второй, аналогично, знает, что желтый колпак на кого-то надет. Более того, он понимает, что это знали и другие мудрецы и думает так: «Почему пятый не сказал, что на нем

желтый колпак? Потому что видел его на ком-то другом. Причем не на первом (на первом красный колпак). И не на третьем, который сказал «Зеленый». Может быть, на четвертом? Но если бы четвертый не видел перед собой желтого колпака, он бы догадался, что желтый на нем. Значит, четвертый и пятый видели желтый колпак на мне». Итак, второй угадывает, что на нем желтый колпак.

Аналогично и первый угадывает, что у него красный колпак.

Сценарий. Когда кто-то из детей догадается до решения и расскажет его, можно надеть колпаки на первый взгляд по-другому, а по сути так же: три первых колпака разных цветов, затем два любых разных колпака. Например, желтый, красный, зеленый, зеленый, желтый. Так можно делать, пока все не поймут, почему три первых мудреца могут определить свой цвет, а два последних нет.

После этого можно продолжать поочередно разыгрывать ситуации, меняя артистов и зрителей местами. Если ребят на кружке много, их можно разделить на группы: в каждой по пять мудрецов и хотя бы один человек, надевающий на них колпаки. Пусть каждая группа попробует экспериментально разобраться с пунктом 2. Те, кто справится быстрее, успеют подумать и про пункт 3 и рассказать решение всем. После этого каждой группе предлагается подобрать пример для пункта 4 и для начала проверить его в своей группе, а затем предложить на суд всего кружка. Точно так же, группа, решившая пункт 6, предлагает эту ситуацию другим группам. Придумать подходящий пример легче после решения пункта 5.

2) На мудрецов надеты колпаки в таком порядке: красный, красный, желтый, желтый, зеленый (а второй зеленый спрятан). Что ответят мудрецы?

Решение. Пятый мудрец понимает, что на ком-то есть зеленый колпак. Поскольку перед собой он видит только желтые и красные колпаки, то ответит: «На мне зеленый». Отсюда остальные мудрецы поймут, что пятый видит два желтых и два красных колпака (иначе он сказал бы «Не знаю») и что не использован зеленый колпак. А поскольку цвета остальных колпаков им известны (либо видны, либо верно названы другими мудрецами), то все по очереди верно назовут цвета своих колпаков.

3) Стоявший сзади мудрец верно ответил на вопрос. Докажите, что и остальные смогут определить цвета своих колпаков.

Решение. Как показано в предыдущем пункте, все мудрецы поймут, что спрятан колпак того же цвета, что и колпак, надетый на последнего мудреца. А поскольку цвета остальных колпаков им известны (либо видны, либо верно названы другими мудрецами), то все по очереди верно назовут цвета своих колпаков.

4) Один из мудрецов верно ответил на вопрос. Обязательно ли остальные после этого тоже смогут определить цвета своих колпаков?

Решение. Нет. Пусть, например, на мудрецов надеты красный, желтый, красный, зеленый, зеленый колпаки. Тогда пятый мудрец не сможет понять, зеленый или желтый колпак на нем, и скажет «Не знаю». Четвертый после этого поймет, что на нем не желтый колпак. Но и не красный, поскольку два красных он видит. Поэтому четвертый скажет «Зеленый». Но для третьего желтый и красный цвета останутся равноправны.

5) Докажите, что не менее трех мудрецов правильно определяют цвет своего колпака.

Решение. Все мудрецы знают, что хотя бы один из них в желтом колпаке. Если последний мудрец не видит перед собой желтого колпака, то он скажет: «На мне желтый колпак». Если он назвал другой цвет или не смог определить цвет своего колпака, то он видит перед собой хотя бы одного мудреца в желтом колпаке. Тогда если предпоследний мудрец не видит перед собой желтого колпака, то он скажет: «На мне желтый колпак». Аналогичные рассуждения верны и для следующих мудрецов. Поэтому рано или поздно кто-то скажет, что желтый колпак на нем. Точно так же доказывается, что каждый из трех цветов будет назван хотя бы одним мудрецом.

6) Придумайте ситуацию, в которой верно ответить на вопрос смогут четыре из пяти мудрецов.

Решение. Например, колпаки надеты в таком порядке: желтый, желтый, красный, зеленый, зеленый (а второй красный спрятан). Пятый мудрец не может отличить, красный на нем колпак или зеленый, и ответит «Не знаю». Четвертый видит перед собой два желтых колпака и понимает, что на нем не желтый. А еще он видит красный колпак третьего мудреца и понимает, что если бы на нем тоже был красный колпак, то пятый бы без труда определил цвет своего зеленого колпака. Итак, четвертый понимает, что на нем зеленый колпак, и сообщает об этом.

Третий понимает, что если бы на нем тоже был зеленый колпак, то пятый бы определил цвет своего красного колпака. Третий также видит желтые колпаки первых двух и делает вывод, что на нем красный колпак.

Второй думает: «Если на мне красный колпак, то третий видит перед собой желтый и красный колпаки, а слышал до этого ответы „Не знаю“ и „Зеленый“». Как же третий мог различить, желтый или красный на нем колпак? А если на мне зеленый, то четвертый видел перед собой три разных колпака и слышал от пятого „Не знаю“. Как же он определил цвет своего колпака?» Итак, второй методом исключения тоже поймет, что на нем желтый колпак.

Первый думает: «Пусть на мне красный колпак. Тогда третий видел перед собой желтый и красный колпаки, а слышал до этого ответы „Не знаю“ и „Зеленый“». В таком случае желтый и красный цвета с точки зрения третьего равноправны. Как же он сделал выбор? Значит, на мне не красный колпак. Пусть на мне зеленый колпак. Тогда четвертый видел перед собой три колпака разных цветов, а слышал только ответ „Не знаю“. Как же он мог сделать выбор? Значит, на мне и не зеленый колпак. Остается желтый».

Упрощенный вариант

Сценарий. Обсуждается та же задача 10.13. Учитель приглашает пятерых «мудрецов», просит их закрыть глаза и надевает им пять колпаков, а шестой прячет. Затем мудрецы открывают глаза и, начиная с последнего, либо называют цвет своего колпака, либо говорят «Не знаю». Все ошибки предлагается исправлять на месте с помощью зрителей или учителя. Например, если «мудрец» должен был сказать «Не знаю», но вместо этого случайно верно назвал цвет своего колпака, можно достать спрятанный колпак и сказать: «Но ведь могло быть и так!», после чего «отрубить голову». А если «мудрец» мог бы догадаться, но говорит «Не знаю», подсказать примерно так: «Представь, что на тебе желтый колпак. Что бы тогда видел стоящий за тобой? И что бы он сказал? Почему же он сказал „Не знаю“? Так какой же на тебе колпак?» Если какая-то ситуация пошла с трудом, можно повторить ее, поменяв, например, все желтые колпаки на красные, а красные – на желтые.

Колпаки на мудрецах такие:

1) Красный, красный, желтый, желтый, зеленый (а второй зеленый спрятан).

Ответ. Определить цвет своего колпака могут все.

2) Желтый, зеленый, желтый, зеленый, красный.

Ответ. Определить цвет своего колпака могут все.

3) Красный, желтый, желтый, красный, зеленый.

Ответ. Определить цвет своего колпака могут все.

4) Желтый, красный, зеленый, желтый, красный.

Ответ. Два последних скажут «Не знаю», а три первых назовут цвет.

5) Зеленый, желтый, красный, красный, зеленый.

Ответ. Два последних скажут «Не знаю», а три первых назовут цвет.

6) Желтый, желтый, красный, зеленый, зеленый.

Ответ. Последний скажет «Не знаю», а остальные назовут свой цвет.

7) Красный, желтый, красный, зеленый, зеленый.

Ответ. Пятый и третий скажут «Не знаю», а остальные назовут свой цвет.

Два мудреца и последовательные числа

Задача 10.14. 1) Двум мудрецам написали на лбу по натуральному числу и сообщили, что эти числа последовательные. Когда мудрецы посмотрели друг на друга, между ними состоялся такой диалог:

А: «Я не знаю моего числа».

Б: «А я знаю мое число».

Какие числа были написаны?

Решение. Если бы А увидел число 1, то он бы понял, что у него на лбу число 2. То есть А фактически сообщил Б, что у него не 1. Если Б увидел число 2, то он сделал вывод, что у него самого – 3. Если Б увидел 1, то он независимо от слов А понял, что у него самого 2. А если бы Б увидел другое число, он не смог бы определить свое число.

Ответ. Либо у А написано число 2, а у Б – число 3, либо у А – число 1, а у Б – число 2.

Сценарий. После разбора этой задачи можно поиграть с числами чуть побольше (3 и 4, 4 и 5, 5 и 6). Рисовать каждый раз на лбу необязательно, можно использовать наклейки на лоб, а чтобы зрителям было труднее, можно писать числа на бумажках. Двум школьникам дают написанные на бумажках последовательные числа (причем делать это могут зрители), а они по очереди говорят, знают ли они, что написано на бумажке у второго «мудреца». Когда один из них скажет «Знаю», зрители должны догадаться, какие у них числа, и проверить, не ошибся ли кто-то из «мудрецов». Интересно сравнить, как изменится диалог, если дать мудрецам те же числа, но в обратном порядке. Экспериментируя, школьники могут заметить, что первым догадывается о числе партнера тот из мудрецов, кто видит меньшее число. После этого можно предложить исследовать ситуацию в общем виде.

2) Каждому из двух мудрецов дали бумажку с написанным на ней натуральным числом и сообщили, что эти числа последовательные. Когда мудрецы посмотрели на числа, между ними состоялся такой диалог:

А: «Я не знаю твое число».

Б: «И я не знаю твое число».

А: «И я не знаю твое число».

...

а) Докажите, что рано или поздно кто-то из мудрецов сможет сказать: «Теперь я знаю твое число».

б) От чего (от написанных чисел или от того, кто начал диалог) зависит, кто из мудрецов первым узнает число другого?

в) Докажите, что второй мудрец сможет сказать в ответ: «И я теперь тоже знаю твое число».

Решение. а) Произнося по очереди «Я не знаю твое число», мудрецы сообщают друг другу следующую информацию:

А: «У меня не 1»;

Б: «У меня не 1 и не 2»;

А: «У меня не 1, не 2 и не 3» и так далее, прибавляя по одному числу с каждым новым высказыванием.

Ясно, что это не может продолжаться бесконечно.

б) Пусть одному из мудрецов (неважно, А или Б) написали меньшее число n , а второму – большее число $n + 1$. До $(n - 1)$ – го высказывания никто из них не знает, какое число у партнера. Если $(n - 1)$ – е высказывание делает второй, то первый поймет, какое у него число, и скажет об этом. Если $(n - 1)$ – е высказывание делает первый, то второй не сможет

сразу определить, какое число у первого, n или $n + 2$, и сделает n -е высказывание: «И я не знаю твое число». А первый теперь все поймет.

в) Как выяснилось в предыдущем пункте, сказав «Теперь я знаю твое число», первый мудрец фактически сообщает: «Мое число меньше твоего». Второму мудрецу остается лишь отнять 1 от своего числа.

3) Каждому из двух мудрецов дали бумажку с написанным на ней натуральным числом и сообщили, что эти числа последовательные. Когда мудрецы посмотрели на числа, между ними состоялся такой диалог:

А: «Я не знаю твое число».

Б: «И я не знаю твое число».

А: «И я не знаю твое число».

Б: «И я не знаю твое число».

После того как каждый сообщил о своем незнании 10 раз, мудрец А сказал: «Теперь я знаю твое число». Какие числа были написаны на бумажках?

Ответ. Либо у А число 20, а у Б число 21, либо у А число 21, а у Б число 22.

Решение. После первой реплики А мудрец Б понимает, что у А не число 1. Если бы у Б было число 2, он бы понял, что у А число 3. По его первой реплике ясно, что это не так (а также что у Б не 1), и мудрец А делает вывод, что у Б не 1 и не 2. Рассуждая аналогично, делаем два вывода. Во-первых, после десятой реплики А мудрец Б понимает, что у А не числа от 1 до 19 включительно. Во-вторых, после десятой реплики Б мудрец А понимает, что у Б не числа от 1 до 20 включительно. Понять после этого, какое у Б число, мудрец А мог в двух случаях: если у него самого число 20, то у Б число 21, а если у А число 21, то у Б – 22.

Дополнительные задачи

Трудные задачи решаем немедленно, невозможные – чуть погодя.

«Все» и «некоторые»

Задача Д1. На крыльце дома сидят рядом мальчик и девочка. Саша говорит: «Я мальчик». Женя говорит: «Я девочка». Хотя бы один из них врет. Кто мальчик, а кто девочка?

Задача Д2. В некоем конгрессе заседают 100 политических деятелей. Каждый из них либо продажен, либо честен. Известно, что:

- 1) по крайней мере один из конгрессменов честен;
- 2) из каждой произвольно выбранной пары конгрессменов по крайней мере один продажен.

Сколько честных политических деятелей в этом конгрессе?

Задача Д3. Из трех мальчиков, которых зовут Антон, Ваня и Саша, только один всегда говорит правду. Антон сказал: «Ваня не всегда говорит правду», Ваня сказал: «Я не всегда говорю правду», а Саша сказал: «Антон не всегда говорит правду». Кто же из них всегда говорит правду, если известно, что по крайней мере один из них солгал?

Задача Д4. Истинно или ложно высказывание «Нет правил без исключения»? (Данное высказывание тоже является правилом.)

Задача Д5. Сформулируйте отрицание к утверждению: «Каждый охотник желает знать, где сидит фазан». Предложите несколько вариантов.

Задача Д6. Встретились несколько жителей острова рыцарей и лжецов, и каждый заявил всем остальным: «Вы все – лжецы». Сколько рыцарей было среди них?

Задача Д7. Какие из четырех утверждений верны, а какие нет? Почему?

- 1) Все прямоугольники – квадраты.
- 2) Все квадраты – прямоугольники.
- 3) Некоторые прямоугольники – квадраты.
- 4) Некоторые квадраты – прямоугольники.

Задача Д8. 1) Неверно, что все друзья моего друга – мои друзья. Что тогда верно?

2) Неверно, что все ананасы неприятны на вкус. Что тогда верно?

3) Неверно, что некоторые волки – оборотни. Что тогда верно?

Задача Д9. Во всех зоопарках, где есть гиппопотамы и носороги, нет жирафов. Во всех зоопарках, где есть носороги и нет жирафов, есть гиппопотамы. Наконец, во всех зоопарках, где есть гиппопотамы и жирафы, есть и носороги. Может ли существовать такой зоопарк, в котором есть гиппопотамы, но нет ни жирафов, ни носорогов?

Союзы «и», «или»

Задача Д10. Аня просит купить яблоки и сливы, Боря – яблоки или абрикосы, Витя – абрикосы или персики, Галя – яблоки и персики. Денег у мамы хватает только на 3 вида фруктов. Как ей выполнить пожелания всех детей?

Задача Д11. Замените высказывания барона Мюнхгаузена на противоположные:

- 1) Луна сделана из сыра, а Солнце из масла.
- 2) Я видел медведя, а он меня – нет.
- 3) Я не боюсь ни львов, ни крокодилов.
- 4) Лошадь заблудилась или ее засыпало снегом.
- 5) Я отправился в разведку на коне или на ядре.

Задача Д12. Первого апреля кто-то поменял таблички

на дверях в учительскую, столовую и спортзал. Ни одна из трех новых табличек: «Столовая», «Спортзал», «Столовая или спортзал» не соответствует действительности. Куда ведет дверь с табличкой «Спортзал»?

Задача Д13. Судья допрашивает трех свидетелей. Жан утверждает, что Жак лжет, Жак обвиняет во лжи Руссо, а Руссо уговаривает не верить ни Жану, ни Жаку. Кто из свидетелей говорит правду?

Задача Д14. Перед нами два жителя острова рыцарей и лжецов, А и Б. А говорит: «Я лжец, а Б рыцарь». Кто А и кто Б?

Задача Д15. Как-то встретились три жителя острова рыцарей и лжецов: Ах, Ох и Ух. Один из них сказал: «Ах и Ох – оба лжецы», другой сказал: «Ах и Ух – оба лжецы» (но кто именно что сказал – неизвестно). Сколько всего лжецов среди этих трех аборигенов?

Задача Д16. Житель острова рыцарей и лжецов А в присутствии другого жителя этого острова Б сказал: «По крайней мере один из нас лжец». Кто такой А и кто такой Б?

Задача Д17. На острове живут рыцари, лжецы и хитрецы, которые могут как говорить правду, так и лгать. Путешественник встретил двух островитян. На вопрос «Вы оба лжецы?» каждый ответил «Да». Что можно узнать по этому ответу?

Задача Д18. Среди трех человек, А, Б и В, есть рыцарь, лжец и хитрец. Они сказали:

А: «Я хитрец».

Б: «И А, и В иногда говорят правду».

В: «Б хитрец».

Кто из них рыцарь, кто лжец, а кто хитрец?

Задача Д19. Девять школьников, остававшихся в классе на перемене, были вызваны к директору. Один из них разбил окно в кабинете. На вопрос директора, кто это сделал, были получены следующие ответы:

Володя: «Это сделал Саша».

Аня: «Володя лжет!»

Егор: «Маша разбила».

Саша: «Аня говорит неправду!»

Роман: «Разбила либо Маша, либо Нина».

Маша: «Это я разбила!»

Нина: «Маша не разбивала!»

Коля: «Ни Маша, ни Нина этого не делали».

Олег: «Нина не разбивала!»

Кто разбил окно, если известно, что из этих девяти высказываний истинны только три?

Задача Д20. Незнайка лжет по понедельникам, вторникам и пятницам, а в остальные дни недели говорит правду. В какие дни недели Незнайка может сказать: «Я лгал позавчера и буду лгать послезавтра»?

Задача Д21. На заседании Государственной думы на острове рыцарей и лжецов часть депутатов утверждала, что и во фракции рыцарей, и во фракции лжецов четное число депутатов. Остальные же доказывали, что и в той, и в другой фракции нечетное число депутатов. Подводя итоги, спикер заметил, что всего в думе 213 депутатов. Кто он – рыцарь или лжец?

Следствие

Задача Д22. Если волк встретит зайца, то сразу съест его. Волк, съевший зайца, радуется. По лесу идет радостный волк. Означает ли это, что он встретил зайца?

Задача Д23. Известно, что:

- Если Иван – брат или сын Марьи, то Иван и Марья – родственники.
- Иван и Марья – родственники.
- Иван – не сын Марьи.

Можно ли вывести следствие, что Иван – брат Марьи?

Задача Д24. Житель острова рыцарей и лжецов сказал, показав на другого жителя: «Если я рыцарь, то он – лжец». Можете ли вы определить, кто есть кто?

Задача Д25. У одного из трех друзей: Львова, Волкова и Щукина – дома живет кошка, у другого собака, а третий разводит рыбок. Если у Щукина собака, то у Волкова кошка. Если у Щукина кошка, то у Волкова аквариум. Если у Волкова нет собаки, то и у Львова нет собаки. Если у Львова рыбки, то у Щукина – кошка. Кто у кого живет?

Задача Д26. Серый волк позвонил на Бейкер-стрит и заявил, что у него украли очень ценную вставную челюсть, инкрустированную бриллиантами. Подозреваемые – Ниф-Ниф, Нуф-Нуф и Наф-Наф. Известно, что:

1) каждый из троих подозреваемых в день кражи был у волка и никто другой в краже не участвовал;

2) если Ниф-Ниф виновен, то у него был ровно один сообщник;

3) если Нуф-Нуф невиновен, то невиновен также и Наф-Наф;

4) если Наф-Наф невиновен, то невиновен также и Нуф-Нуф;

5) если виновны двое, то Ниф-Ниф – один из них.

Кому Шерлок Холмс предъявит обвинение?

Задача Д27. У Кролика украли бочонок меда. Кролик подозревает в краже ослика Иа-Иа, Винни-Пуха, Тигра и Пятачка. Неопровержимыми уликами доказано, что:

1) кто-то из них обязательно виновен;

2) никто больше не мог польститься на мед;

3) Пятачок всегда действует только вместе с Винни;

4) если Иа-Иа виновен, то у него было ровно два соучастника;

5) если виновен Тигра, то у него был ровно один соучастник.

Чья вина не вызывает сомнения?

Задача Д28. В строку записано 9 чисел.

1) Верно ли, что если сумма любых четырех соседних чисел положительна, то и сумма всех девяти чисел положительна?

2) Верно ли, что если сумма любых четырех из них положительна, то и сумма всех девяти чисел положительна?

Выводы

Задача Д29. Определите, какие из приведенных рассуждений истинны, а какие ложны.

1) Некоторые улитки являются горами. Все горы любят кошек. Значит, все улитки любят кошек.

2) Две поляны никогда не похожи одна на другую. Сосны и ели выглядят совершенно одинаково. Значит, сосны и ели не являются двумя полянами.

Задача Д30. Сделайте вывод (наиболее полный), если это возможно.

1) Ни у одного ископаемого животного не может быть несчастной любви. У устрицы может быть несчастная любовь.

2) Это свыше моего терпения! Со мной никогда не случилось ничего, что было бы свыше моего терпения.

3) Ни один император не стоматолог. Всех стоматологов боятся дети.

4) Дети нелогичны. Тот, кто управляет крокодилами, достоин уважения. Нелогичные персоны не достойны уважения.

5) Мои кастрюли – это единственное, что сделано из олова. Я считаю, что все твои подарки довольно полезны. Мои кастрюли – самые бесполезные вещи в доме.

Задача Д31. В магазине продаются два вида булочек: с изюмом и с джемом. Известно, что булочки с изюмом всегда мягкие; некоторые мягкие булочки привезены сегодня утром; все мягкие булочки вкусные.

Следует ли из этого, что:

- 1) все мягкие булочки – это булочки с изюмом;
- 2) все булочки с изюмом вкусные;
- 3) все булочки с джемом жесткие;
- 4) некоторые вкусные булочки привезены сегодня утром;
- 5) некоторые булочки с изюмом привезены сегодня утром;
- 6) все вкусные булочки мягкие;
- 7) все жесткие булочки невкусные;
- 8) сегодня утром не привозили булочек с джемом?

Задача Д32. Верно ли сделаны выводы? В чем разница между задачами?

1) Гоголь написал «Мертвые души». На стене висит портрет Гоголя. Вывод: на стене висит портрет автора «Мертвых душ».

2) Какой-то человек изобрел самовар. На стене висит портрет какого-то человека. Вывод: на стене висит портрет изобретателя самовара.

Доказательство от противного

Задача Д33. Существует ли наименьшее положительное рациональное число?

Задача Д34. Каждый месяц Папа Карло зарабатывал разное число золотых и за год заработал всего 60 золотых. Докажите, что в какой-то из месяцев он заработал нецелое число золотых.

Задача Д35. По кругу написаны все целые числа от 1 до 2010 в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочередно то возрастают, то убывают. Докажите, что какие-то два четных числа стоят рядом.

Задача Д36! Можно ли бумажный круг разрезать на несколько частей по прямым линиям и дугам окружностей и составить из них квадрат той же площади?

Задача Д37! Каждый из голосующих на выборах вносит в избирательный бюллетень фамилии 10 кандидатов. На избирательном участке находится 11 урн. После выборов выяснилось, что в каждой урне лежит хотя бы один бюллетень и при всяком выборе 11 бюллетеней по одному из каждой урны найдется кандидат, фамилия которого встречается в каждом из выбранных бюллетеней. Докажите, что по крайней мере в одной урне все бюллетени содержат фамилию одного и того же кандидата.

Равносильность

Задача Д38. Каково наибольшее число утверждений из приводимых ниже, которые одновременно могут быть истинными?

- 1) Джо ловкач.
- 2) Джо не везет.
- 3) Джо везет, но он не ловкач.
- 4) Если Джо ловкач, то ему не везет.
- 5) Джо является ловкачом тогда и только тогда, когда ему везет.
- 6) Либо Джо ловкач, либо ему везет, но не то и другое одновременно.

Метаголоволомки

Задача Д39. Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алеше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотых и 3 серебряных. Каждому досталось по две монеты. Илья Муромец

не знает, какие монеты достались Добрыне, а какие Алеше, но знает, какие монеты достались ему самому. Придумайте вопрос, на который Илья Муромец ответит «да», «нет» или «не знаю» и по ответу на который вы сможете понять, какие монеты ему достались.

Задача Д40. Мудрец встретил трех человек. Он знал, что среди них есть рыцарь, хитрец и лжец. Мудрец спросил первого: «Вы кто?» Тот ответил. «По такому ответу я не могу узнать, кто он», – подумал мудрец. Тогда он спросил о том, кем является первый, остальных двух. Они ответили, и все три ответа оказались разными по смыслу. Тогда мудрец подумал и сказал: «Теперь понятно». Кто же был этот первый?

Задача Д41. Судье известно, что из двух подозреваемых А и Б один – рыцарь, а другой – шпион, который может как лгать, так и говорить правду. Судья спросил у А, шпион ли Б. После ответа А он сразу понял, кто шпион. Кто же?

Задача Д42*. Перед судом предстали трое обвиняемых: А, Б и В. Суду было известно, что один из них рыцарь, другой лжец, а третий шпион (способный как говорить правду, так и лгать). Но кто есть кто, суд не знал.

Подсудимого А судья спросил:

– Вы шпион?

А ответил односложно («да» или «нет»). Тогда судья спросил обвиняемого Б:

– Сказал ли А правду?

Ответил Б также односложно («да» или «нет»). В этот момент А заявил:

– Обвиняемый В не шпион.

Судья ответил:

– Я и раньше знал это, а теперь я знаю, кто шпион.

1) Кто шпион?

2) Что сказал Б?

Задача Д43*. В некотором королевстве живут граждане трех типов: а) дурак считает всех дураками, а себя умным; б) скромный умный про всех знает правильно, а себя считает дураком; в) уверенный умный про всех знает правильно, а себя считает умным. В думе 200 депутатов. Премьер-министр провел анонимный опрос думцев: сколько умных в этом зале сейчас находится? По результатам опроса он не смог понять ответ. Но тут из поездки вернулся единственный депутат, не участвовавший в опросе. Он ответил на вопрос про всю думу, включая себя, и, увидев этот ответ, премьер-министр всё понял. Сколько умных в думе могло быть (включая путешественника)?

Задача Д44*. Из колоды вынули 7 карт, показали всем, перетасовали и раздали Грише и Леше по 3 карты, а оставшуюся карту

1) спрятали;

2) отдали Коле.

Гриша и Леша могут по очереди сообщать вслух любую информацию о своих картах. Могут ли они сообщить друг другу свои карты так, чтобы при этом Коля не смог вычислить местонахождение ни одной из тех карт, которых он не видит? (Гриша и Леша не договаривались о каком-либо особом способе общения; все переговоры происходят открытым текстом.)

Задача Д45*. Петя, Дима, Миша, Саша и Илья играют в мафию. Среди них два мафиози, два мирных жителя и комиссар. Мафиози знают только друг друга, комиссар знает роль каждого, мирные жители не знают роли других игроков. Мафиози всегда лгут. Комиссар и мирные жители говорят правду. Мальчики сделали следующие заявления (в указанном порядке):

Петя: «Я не знаю, кто Дима».

Дима: «Я знаю, кто комиссар».

Миша: «Я знаю, кто Петя».

Саша: «Я знаю, что Миша – комиссар».

Кто Илья?

Задача Д46*. Трое гусаров ехали по улице друг за другом. Каждому в руки упало по цветку от девушек на балконе. Гусары знают, кто был в строю, но каждый видел только, кто и в каком порядке ехал впереди него и кто им бросал цветы (а кто бросил ему самому – не знает). Полковник видел только то, что его дочь бросила цветок ровно одному из этих гусаров, и гусары тоже это знают. Полковник знает, кто именно ехал, но в каком порядке – не знает. Он может вызывать гусаров поодиночке и задавать им вопросы, на которые те честно отвечают «Так точно», «Никак нет» или «Не могу знать». Как полковнику за три вопроса узнать, кому из них бросила цветок его дочь?

Задача Д47*. Хватит ли полковнику из предыдущей задачи четырех вопросов, чтобы узнать, кому из четырех гусаров бросила цветок его дочь? А десяти вопросов, если гусаров было десять?

Мудрецы и колпаки

Во всех задачах этого и следующего разделов считается, что мудрецы рассуждают быстро и безошибочно. Каждому известно, что остальные участники – тоже мудрецы. Если мудрец может точно ответить на заданный вопрос, он всегда честно отвечает. Если не может, то не пытается угадать, а говорит «Не знаю». Мудрецы, стоящие в колонне (в затылок друг другу), видят колпаки всех стоящих впереди, но не видят ни своего колпака, ни колпаков стоящих сзади мудрецов. Все мудрецы слышат ответы других мудрецов.

Задача Д48. Двум мудрецам принесли два черных и один белый колпак. Затем их поставили в затылок друг другу и надели на каждого по колпаку. После этого спросили сначала второго, а потом первого, знает ли он, какого цвета колпак на его голове. Второй мудрец сказал, что не знает. А первый правильно назвал цвет своего колпака. Какой именно?

Задача Д49. Трем мудрецам принесли три черных и два белых колпака. Затем их построили в затылок друг другу, после чего надели на каждого по черному колпаку. После этого стали по очереди спрашивать каждого мудреца, начиная с последнего, какого цвета у него колпак. На это мудрецы либо отвечают «Не знаю», либо называют цвет. Что будут отвечать мудрецы?

Задача Д50 Десяти мудрецам принесли по три желтых, синих, красных и зеленых колпака. Мудрецов построили в затылок друг другу и надели каждому по колпаку, а два оставшихся колпака спрятали. Затем по очереди, начиная с последнего, стали спрашивать каждого, какого цвета у него колпак. На это мудрецы либо отвечают «Не знаю», либо называют цвет.

1) Докажите, что кто-то из мудрецов назовет цвет.

2) Докажите, что назовут цвет не менее четырех мудрецов.

Задача Д51*. Двадцати мудрецам принесли 10 белых и 50 черных колпаков. Затем им завязали глаза и надели каждому на голову по черному колпаку, а все ненадетые колпаки спрятали. После этого им развязали глаза и стали у каждого по очереди спрашивать, какого цвета колпак у него на голове. Какой по счету мудрец сможет назвать цвет? Что будут говорить следующие?

Задача Д52*. Султан пригласил шестерых мудрецов в комнату с тремя дверьми: белой, красной и синей – и достал 4 белых, 3 красных и 2 синих колпака. Мудрецы сели в круг и крепко зажмурились. После этого султан надел троим мудрецам белые колпаки, двоим красные и одному синий. Открыв глаза, мудрецы получили возможность видеть цвета колпаков у всех остальных, но не у себя. Каждую минуту раздается удар гонга, после которого все мудрецы, знающие цвет своего колпака, должны выйти в дверь соответствующего цвета. Сколько мудрецов смогут покинуть комнату?

Мудрецы и числа

Задача Д53. Каждому из двух мудрецов дали бумажку с написанным на ней натуральным числом и сообщили, что одно число вдвое больше другого. Когда мудрецы посмотрели на числа, между ними состоялся такой диалог:

А: «Я не знаю твое число».

Б: «И я не знаю твое число».

А: «И я не знаю твое число».

...

Докажите, что рано или поздно кто-то из мудрецов сможет сказать: «Теперь я знаю твое число».

Задача Д54*. Султан вызвал 10 умнейших своих мудрецов и огласил правила нового испытания. Каждому мудрецу сообщат число от 1 до 1000 включительно, одно из чисел строго больше остальных. Затем каждого мудреца по очереди будут спрашивать, не у него ли максимальное число. Он может ответить «Не знаю» либо «У меня». После ответа «Не знаю» испытание продолжается, вопрос задают следующему мудрецу. Если последний мудрец ответил «Не знаю», вопрос опять задают первому мудрецу и так далее. После ответа «У меня» испытание заканчивается. Если мудрец ответил правильно, всех мудрецов отпускают, если неправильно – всех мудрецов казнят.

Мудрецам запретили не только обмениваться какой-либо информацией во время испытания, но даже договариваться о чем-либо заранее. Испытание началось. Королевский палач сто раз обошел всех мудрецов, и сто раз каждый из них ответил «Не знаю». Наконец, палач в сто первый раз спросил первого мудреца, не у него ли максимальное число.

«У меня!» – ответил мудрец. Конечно, ответ был правильный, всех мудрецов отпустили. Какое число было у первого мудреца?

Задача Д55 Математик В предложил математикам А и Б такую загадку:

– Я задумал три попарно различных натуральных числа, произведение которых не превосходит 50. Сейчас я конфиденциально сообщу А это произведение, а Б – сумму задуманных чисел. Попробуйте отгадать эти числа.

Узнав произведение и сумму соответственно, А и Б вступили в диалог:

А: «Я не знаю этих чисел, но если бы мое число было суммой, я бы их знал».

Б: «Я все равно не знаю их».

Докажите, что теперь А сможет определить числа.

Задача Д56*. В одиночных камерах сидят 4 друга-математика. Каждому из них сообщили, что их номера в списке различны, двузначны и один из этих номеров равен сумме трех других. Но, даже узнав номера троих других, никто из них не смог вычислить свой номер. Так какие же у них были номера?

Задача Д57*. Каждому из трех логиков написали на лбу натуральное число, причем одно из этих чисел являлось суммой двух других, и сообщили им об этом. Логик не видит, что написано у него на лбу, но видит, что написано у других. Первый логик сказал, что не может догадаться, какое число написано у него на лбу. После этого то же самое сказал второй логик, а затем и третий. Тогда первый сказал: «Я знаю, что у меня на лбу написано число 50». Какие числа написаны у двух остальных?

Решения задач

Занятие 1

1.5. 1) Это не только не высказывание, но и вообще не утверждение. Данное предложение побудительное, а высказывание всегда является повествовательным предложением. Например, «Все умные люди перед тем, как что-либо отрезать, проводят семикратные измерения». Истинность такого высказывания весьма сомнительна.

2) Грамматическая структура этого предложения слишком сложна. При желании можно превратить поэтическую истину в аналогичное по смыслу ложное высказывание «Для того чтобы жить в доме, достаточно его нарисовать». Только зачем?

3) Чтобы превратить это утверждение в высказывание, надо точно указать время и место.

1.7. 1) Да. 2) Нет. Митя и Андрей могут иметь одинаковый рост.

1.8. 1) Достаточно ли заменить дальнюю дорогу на ближнюю? Нет, поскольку завтра королю вообще может быть не суждено никакой дороги. Можно поставить перед глаголом частицу «не»: «Завтра королю не выпадает дальняя дорога». Или сказать так: «Завтра королю либо выпадает ближняя дорога, либо вообще не выпадает дороги».

2) Использование антонима («У него деньжонок мало») вновь приводит к ошибке: денег у него может и вовсе не быть. Спасительное «не» не спасает. Правильное отрицание звучит так: «У него деньжонок мало или совсем нет».

3) Тут все ясно. Любовь либо есть, либо ее нет. Отрицание: «Я денежки не люблю».

1.9. 1) Если контроль за прическами есть, то красить волосы нельзя. Если его отменяют, то можно. Но директор возражает против отмены – значит, все же нельзя.

Ответ. Нельзя.

Комментарий. Это утверждение является двойным отрицанием (другими словами, отрицанием отрицания). Истинному утверждению соответствует ложное отрицание и снова истинное двойное отрицание.

2) Если контроль за прическами есть, то красить волосы нельзя. Если решили его запретить, то можно. Если это решение отменить, то снова нельзя. Но директор возражает против отмены – значит, все же можно.

Ответ. Можно.

Комментарий. Здесь отрицание встречается трижды (возражает, отмена, запрет) – т. е. нечетное число раз. Так как пары отрицаний «нейтрализуют» друг друга, то можно считать, что контроль просто отрицается.

1.10. Решение 1. Если бы данное высказывание было истинным, этот критянин был бы лжецом и не мог делать истинных утверждений. Если оно ложное, противоречия нет: этот критянин лжет, но на острове есть другие критяне, которые говорят правду.

Ответ 1. Ложно.

Решение 2. Как доказано в первом решении, эта фраза не является истинным высказыванием. А теперь представьте, что фразу «Все критяне лжецы» сказали все критяне одновременно (например, что говоривший – единственный житель острова). Если это ложное высказывание, то все критяне солгали, что делает каждое высказывание истинным.

Ответ 2. Фразу «Все критяне лжецы», сказанную критянином, вообще нельзя считать высказыванием и обсуждать ее истинность.

Комментарий. В задаче изложен парадокс Эпименида – вариант знаменитого парадокса лжеца. Считается, что греческий философ Филит Косский умер от истощения и бес-

сонницы, пытаясь его разрешить. Чтобы не последовать его примеру, мы избрали простейший путь – исключили из рассмотрения утверждения, говорящие о своей истинности. Более сложная точка зрения изложена в главе о парадоксах книги Рэймонда М. Смаллиана «Как же называется эта книга?».

1.11. 1) Верно отрицание: «Сумма двух двузначных чисел может не быть двузначной». В ошибочности формулировки отрицания «Сумма двух двузначных чисел – не двузначное число» поможет убедиться закон исключенного третьего.

2) Утверждение верно. Его отрицание – «Сумма двух четных чисел может не быть четным числом». Ребята скорее всего скажут «Сумма двух четных чисел может быть нечетным числом». Признаем и такую формулировку допустимой, считая заранее известным, что сумма целых чисел – целое число и что все целые числа либо четные, либо нечетные.

3), 4) Для получения отрицания достаточно заменить «можно» на «нельзя» или «невозможно». В пункте 3 верно утверждение. Например, можно сторону 20 разделить на 4 равных части, а сторону 15 – на 5 равных частей и провести через точки деления прямые, параллельные сторонам. В пункте 4 верно отрицание: площадь исходного квадрата нечетна, а предполагаемых частей – четна.

5) Пусть в школе n учеников. Каждый может иметь от 0 до $n - 1$ друга – всего n вариантов. Но все эти варианты одновременно реализоваться не могут: если у кого-то $n - 1$ друг (т. е. он дружит со всеми остальными учениками), то никто другой не может вообще не иметь друзей. Поэтому вариантов меньше, чем учеников, и какой-то вариант соответствует хотя бы двум ученикам.

6) Для формулировки отрицания убрать «не» недостаточно. Если уточнить: «Через любое отверстие...», то ясно, что это общее высказывание, к которому отрицание строится так: «В листке из школьной тетради можно прорезать такое отверстие, через которое может пролезть человек». С такими высказываниями мы еще встретимся на втором занятии. Как ни странно, верно именно отрицание. На рис. 21 показано, как вырезать подходящее отверстие. Чем чаще разрезы, тем более длинная и узкая «змейка» будет его ограничивать.

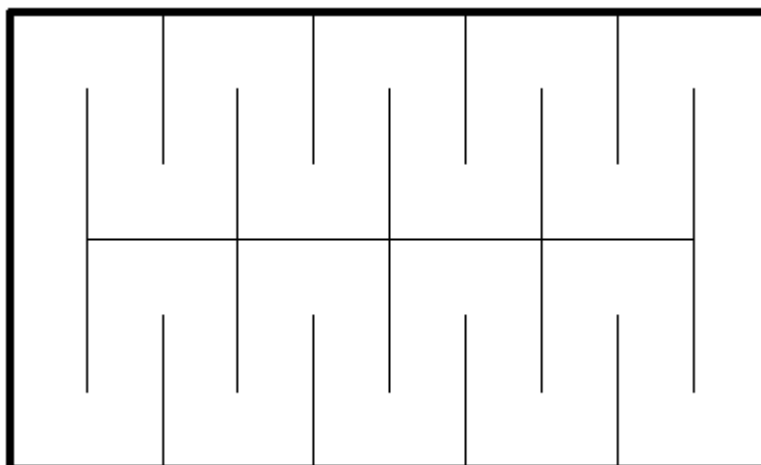


Рис. 21

Занятие 2

2.9. 1) Да, могут. Если все грибы съедобны. 2) Да, могут. Если в корзине есть и съедобные, и несъедобные грибы. 3) Да, могут. Если съедобных грибов вообще нет.

2.10. Нет, не является. Эти высказывания вполне могут выполняться одновременно.

2.11. Иллюстрации изображены на рисунке 22. Одинаковый смысл имеют третье и четвертое высказывания.

2.12. Денис не прав. Он путает высказывания «У всех великих людей плохой почерк» и «Все люди с плохим почерком — великие» (см. рис. 23).

2.13. Правду сказали все трое.

Комментарий. «Хотя бы один» означает «Ровно один или больше одного». В данном случае у Зайца «хотя бы один» означает «ровно один», у Волка — «двое», у Лисы — «все трое».

2.14. «Некоторые врачи имеют недостаточный опыт. Каждый врач хоть когда-нибудь ставил неправильный диагноз. Некоторые врачи опаздывают на работу. Некоторые пациенты недовольны лечением. Некоторые пациенты жалуются на бытовые условия. Никто не выздоравливает за один день».

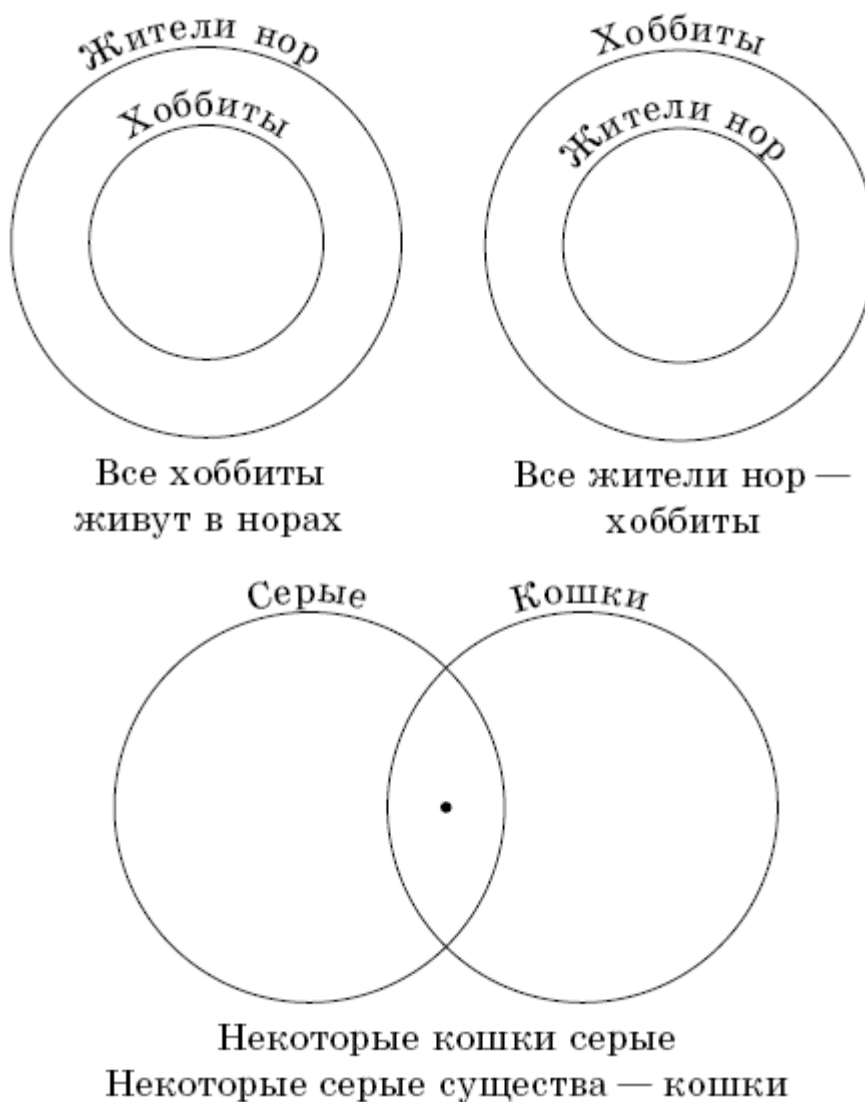


Рис. 22

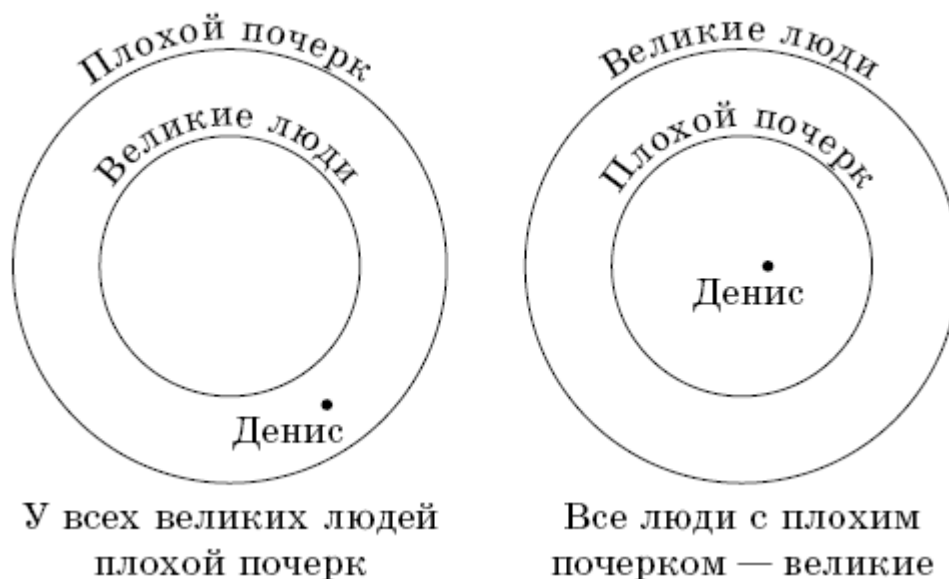


Рис. 23

2.15. Рыцарь не может сказать «Все мы лжецы», поэтому первый – лжец. Второй сказал правду: «Не все мы лжецы», поэтому он – рыцарь. В комнате больше трех человек (так как первый солгал), но не больше четырех (так как второй сказал правду), то есть ровно четыре. Поэтому третий солгал, и лжецов среди них меньше трех. А двух лжецов мы уже знаем – это первый и третий.

Ответ. Всего в комнате четверо. Лжецов из них двое: первый и третий.

2.16. Заведем на каждого человека досье:

Если у человека есть телевизор, будем писать Т, если нет—Т.

Если человек является маляром, будем писать М, если нет—М.

Если человек каждый день купается в бассейне, будем писать Б, если нет—Б.

Например, про человека, не являющегося маляром, имеющего телевизор и каждый день купающегося в бассейне, напомним ТМБ. По этим трем признакам все люди делятся на 8 групп:

1) ТМБ; 2) ТМБ; 3) ТМБ; 4) ТМБ;

5) ТМБ; 6) ТМБ; 7) ТМБ; 8) ТМБ.

Условие «Среди людей, имеющих телевизоры, не все являются малярами» означает, что хотя бы в одной из двух групп, третьей и четвертой, есть хотя бы один человек. Условие «Люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров» означает, что третья группа людей пуста. Значит, в четвертой группе кто-то есть. И эти люди (или человек) владеют телевизорами, но не каждый день купаются в бассейне.

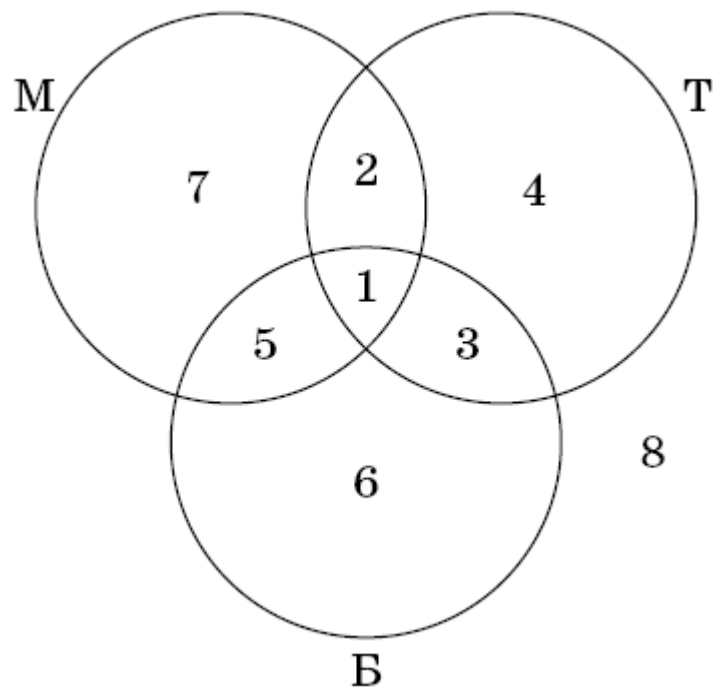


Рис. 24

Этому решению можно придать более наглядный вид (рис. 24). Вместо таинственных трехбуквенных кодов нарисуем три круга. В один поместим всех владельцев телевизоров, в другой – маляров, в третий – ежедневно посещающих бассейн. Людей, удовлетворяющих всем трем условиям, попросим разместиться на пересечении всех трех кругов, помеченном цифрой 1. Такие люди относятся к первой группе ТМБ. Люди из других групп тоже окажутся на территориях с прежними номерами. Восьмой группе предоставим территорию за пределами всех трех кругов. Дальнейшие рассуждения ничем не отличаются от предыдущей версии.

Ответ. Да, следует.

Занятие 3

3.5. Прав, если считать, что марсиан не существует: ведь любое утверждение обо всех элементах пустого множества истинно.

3.6. 1) Нельзя, так как сумма масс $1 + 2 + \dots + 30 = 31 \times 15$ – нечетное число. 2) Можно. Пример можно построить, например, так. Сначала сформируем пятнадцать пар гирек веса 31: $1 + 30$, $2 + 29$ и т. д. Затем возьмем в каждую из трех куч по пять любых пар.

3.7. 1) Предположим, что таблицу заполнить удалось. Если найти сумму чисел во всех строках, то она окажется четным числом, а если во всех столбцах – то нечетным. Но это одно и то же число.

Ответ. Нельзя.

2) Для приведения примера достаточно заполнить первую строку двойками, а остальные – единицами. Заметим, что если заполнить квадрат 3×3 как попало, а остальные числа ставить в соответствии с условием, пример не может не получиться!

Ответ. Можно.

3.8. Нет. Контрпример изображен на рис. 25.

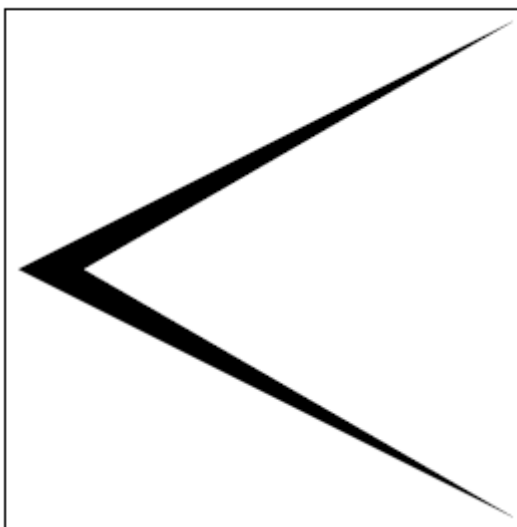


Рис. 25

3.9. Нет. Контрпример: $2^7 + 15 = 128 + 15 = 143 = 11 \cdot 13$.

Комментарий. В настоящее время неизвестно ни одной формулы для вычисления простых чисел.

3.10. Приведем несколько из многих возможных примеров:

1) 1111111212 делится на 12, 1111111125 делится на 15, 1111111432 делится на 16.

2) 111... 1151121792 делится на 128 (все пропущенные цифры – единицы), 222... 22399925 делится на 225 (все пропущенные цифры – двойки).

Ответ. Да.

Комментарий. Для проверки примеров достаточно выполнить деление в столбик. А придумать их можно с помощью признаков делимости: для делимости на 12 надо обеспечить делимость на 3 и 4, для делимости на 15 – на 3 и 5, на 225 – на 9 и 25. Но при сумме цифр 12 или 15 число заведомо кратно 3, а при сумме цифр 225 – кратно 9. Поэтому достаточно с помощью последних цифр обеспечить делимость соответственно на 4, 5 и 25, а затем

лишь подобрать нужную сумму цифр. Кроме того, признаки делимости на 2 и 4 можно обобщить: число делится на n -ю степень двойки тогда и только тогда, когда на нее делится число, составленное из n последних цифр исходного. В частности, делимость на 16 проверяется по четырем последним цифрам, а на 128 – по семи. Остальные цифры многозначного числа выбираем любые, лишь бы сумма их была соответственно 16 или 128. Предлагаем читателю самостоятельно составить стозначное число с суммой цифр 144, делящееся на 144.

3.11. 1) Высказывания Б, Г и Д равносильны. Они означают одно и то же: множества дедов и множество волшебников имеют хотя бы один общий элемент (см. рис. 26).

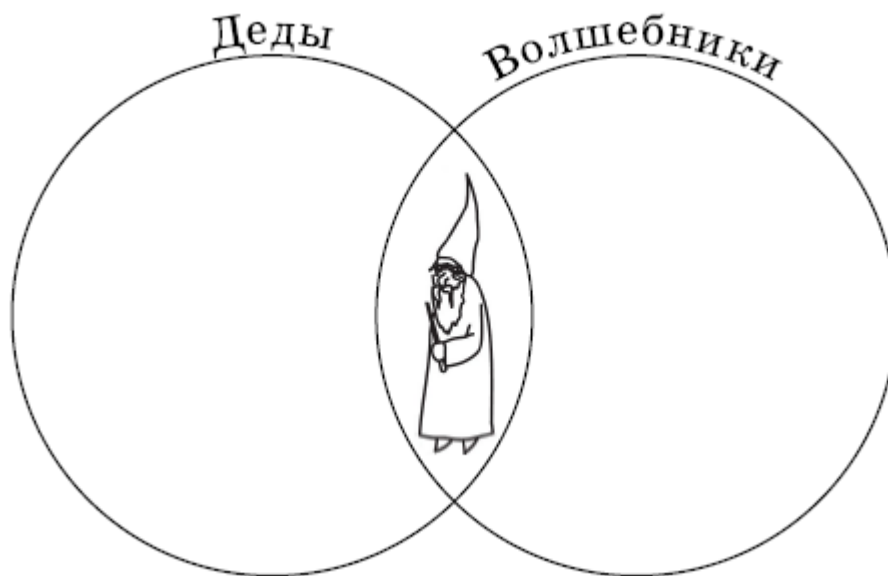


Рис. 26

2) Если А истинно, то истинны и высказывания Б, Г и Д (для них Дед Мороз является подтверждающим примером). А вот В может быть как истинным, так и ложным.

3.12. Подсказка. Верите ли **вы** в Деда Мороза?

Решение. Парадокс связан с различным пониманием высказывания «Дед Мороз – волшебник».

Первый вариант: существование Деда Мороза считается заранее известным, а в В утверждается лишь, что он является волшебником. Тогда если верно В, то верно и Б, а если верно Б, то верно и А. В таком случае, действительно, если верно В, то верно и А, никакого контрпримера и противоречия здесь нет: раз мы договорились верить в существование Деда Мороза, то множество дедов не может быть пустым.

Второй вариант: заранее ничего не известно; в Б утверждается, что существует Дед Мороз, являющийся волшебником. Тогда если Б верно, то и А верно. Но утверждать, что если верно В, то верно и Б, нельзя (контрпримером является ситуация, когда множество дедов пусто), поэтому вывод «если верно В, то верно и А» делать тоже нельзя.

3.13. Обсуждение. Что останется, если убрать театрализацию? Утверждение «Если это утверждение истинно, то Дед Мороз существует». Истинно ли оно? Если да, то Дед Мороз существует. Но именно это в нем и сказано, то есть оно истинно. А раз оно истинно, то Дед Мороз существует.

Ответ. Проблема в том же месте, что и в задачах 1.4 и 1.10 первого занятия: классическая логика избегает утверждений, связанных с истинностью их самих: их нельзя считать ни истинными, ни ложными.

Занятие 4

4.7. Пригласят.

Комментарий. Изобразим ситуацию с помощью кругов Эйлера (см. рис. 27). Начертим два пересекающихся круга. В первый круг пригласим тех, кто хорошо поет, во второй – всех, кто хорошо танцует. В ансамбль пригласят тех, кто оказался хотя бы в одном из кругов (на рисунке эта область выделена серым), в том числе и Наташу, находящуюся в пересечении кругов.



Рис. 27

4.8. Предположим, Сеня говорит правду. Тогда, согласно его словам, три остальных гнома – вруны. И, тем самым, фраза Бени является правдой. Значит, предположение приводит к противоречию, поэтому Сеня – врун, и его утверждение, что Женя – врун, является ложным. Отсюда заключаем, что Женя говорит правду. Тем самым, Бенья – врун, а Веня говорит правду.

Замечание. Фраза Сени «Да оба они вруны» (относительно Бени и Вени) является ложной (несмотря на то, что Бенья действительно врун), поскольку Веня – не врун.

Ответ. Женя и Веня.

4.9. Чтобы Аня и Боря были довольны, в пицце должен быть ровно один из ингредиентов: либо помидоры, либо грибы. С учетом вкусов Вани это должны быть грибы.

Ответ. С грибами.

4.10. Решение 1. Верна ровно одна из двух первых подсказок. Поэтому третья и четвертая неверны. Приз в желтом ящике.

Решение 2. Рассмотрим 4 случая. Если приз в синем ящике, то верны подсказки 1 и 4. Если в зеленом – то 1, 3 и 4. Если в красном – то 2 и 4. Если в желтом – то только 2. Так как верна ровно одна подсказка, то приз находится в желтом ящике.

Ответ. Желтый.

4.11. Дед Мороз принес айфоны в квартиры, номера которых кратны 12. А шоколадки – в квартиры, номера которых при делении на 12 дают остатки 4, 6, 8 или делятся нацело. Так как 300 делится на 12 нацело, таких квартир ровно четверо больше.

Ответ. Шоколадок больше в 4 раза.

4.12. Д.

4.13. Если на первой табличке написана правда, то и вторая табличка тоже правдива. Но обе таблички одновременно правдивыми быть не могут. Поэтому правда написана на второй табличке, а на первой – ложь. Значит, в первой комнате находится тигр, а во второй – принцесса.

Ответ. Вторую.

4.14. Кто сидит в первой комнате? Если тигр, то утверждение на первой табличке истинно. Если принцесса, то истинно утверждение на второй табличке. Таким образом, ситуация, когда обе таблички лгут, исключена. Значит, на обеих написана правда. Из второй таблички следует, что в первой комнате сидит принцесса. Поэтому первая часть высказывания на первой табличке неверна, и все высказывание в целом истинно, только если и в другой комнате сидит принцесса.

Ответ. В любую.

4.15. Утверждение «В обеих комнатах находятся принцессы» либо истинно, либо ложно. Если истинно, то в соответствии со словами короля в левой комнате должна находиться принцесса, а в правой – тигр. Но это противоречит истинности утверждения про двух принцесс. Следовательно, оно ложно, и в соответствии со словами короля в левой комнате находится тигр, а в правой – принцесса.

Ответ. В правую комнату.

4.16. Решение 1. Рассмотрим высказывания Никиты и Глеба. Если они оба ложные, то высказывание Антона тоже ложно, а правы только Игорь и Дима. Это противоречит маминому знанию о том, что трое из ее сыновей всегда говорят правду. Если из этих высказываний ложно ровно одно, то ложны и высказывания Игоря и Димы, что также противоречит маминому знанию. Значит, истинны оба первых высказывания (а также и высказывание Димы). По словам Никиты пирог испек Глеб или Игорь. Но по словам Глеба он не пек пирог. Значит, это сделал Игорь.

Решение 2. Составим таблицу, озаглавив ее строки и столбцы первыми буквами имен мальчиков. Будем по очереди предполагать про каждого, что пирог испек именно он, и заполнять его столбец. Если при таком предположении высказывание кого-то из братьев оказывается истинным, ставим в его строке плюс, а если ложным, то минус. По условию задачи в столбце того мальчика, который испек пирог, должно быть не менее трех плюсов.

	Н	Г	И	А	Д
Н					
Г					
И					
А					
Д					

Пусть пирог испек Никита. Тогда Никита солгал (ставим минус в левой верхней клетке), Глеб сказал правду (ставим плюс на клетку ниже), Игорь солгал (ставим минус на клетку ниже), Антон сказал правду (ставим плюс), а Дима солгал (ставим минус).

	Н	Г	И	А	Д
Н	–				
Г	+				
И	–				
А	+				
Д	–				

Заполнив первый столбец, видим, что в этом случае трое братьев сказали неправду, чего быть не может. Считая, что пирог испек Глеб, заполним второй столбец и т. д.

	Н	Г	И	А	Д
Н	–	+	+	–	–
Г	+	–	+	+	–
И	–	–	–	–	+
А	+	+	–	+	–
Д	–	–	+	–	+

Теперь видно, что пирог испек Игорь.

Ответ. Игорь.

4.17. Решение. Если Маша говорит правду, то Наташа и Гриша умеют сидеть на стуле, поэтому Саша лжет. При этом лгут и Гриша с Наташей, а всего лгут трое.

Если Маша лжет, то Саша может как лгать, так и говорить правду. В первом случае Наташа говорит правду, а Гриша лжет, всего лгут трое. Во втором случае Наташа лжет, лжет и Гриша, и всего снова трое лжецов.

Ответ. Один.

Комментарий. В этой задаче нельзя определить ни кто именно сказал правду, ни кто из детей на самом деле умеет сидеть на стуле. Ясно только, что Гриша солгал.

4.18. Из условия следует, что первым ходил Петя, вторым Вася, а пятой Таня. И что до того, как Таня назвала 15 (вылетев из игры), ни она, ни Петя, ни Вася не ошибались. Предположим, что третий игрок назвал число 3 и вылетел из игры. Тогда 6 досталось Пете

(и он сказал «Хоп!»), 9 – Тане (она тоже сказала «Хоп!»), 13 – тоже Тане, но тогда она не могла назвать еще и 15.

Значит, вместо числа 3 игрок сказал «Хоп!», и на первом круге (от 1 до 5) никто не вышел из игры. Поэтому на втором круге очередность ходов не изменилась, и Тане досталось число 10. Если бы четвертый игрок назвал число 9 и вылетел из игры, очередность на третьем круге нарушилась бы, и число 15 не досталось бы Тане. Так как Таня назвала 15, на втором круге (от 6 до 10) снова никто не вылетел. Если бы и от 11 до 14 никто не ошибся, то 20 должен был бы назвать вместо вышедшей из игры Тани Петя, начинавший игру. Но 20 сказал Вася. Кто мог ошибиться, назвав число между 11 и 14? Не Вася, который вместо 12 сказал «Хоп!», а третий игрок, назвавший 13.

Таня и третий игрок вышли. Петя и Вася назвали 16 и 17. Говорить «Хоп!» вместо 18 полагалось четвертому игроку. Если бы он так и сделал, к числу 23 подошла бы Васина очередь. Но это число досталось Пете. Почему? Потому что четвертый игрок назвал 18 и вылетел из игры. Остались Петя с Васей. Когда Петя назвал 23, Вася стал победителем. Он успел сказать «Хоп!» только один раз, вместо числа 12.

Ответ. 1 раз.

Занятие 5

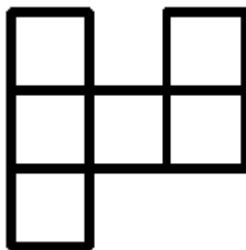
5.7. 1) Верно. 2) Обратное высказывание «Если Боря – Женин брат, то Женя – Борин брат» неверно: Женя может быть Бориной сестрой.

5.8. С точки зрения логики правила можно рассматривать как высказывания « $A \# B$ ». Нарушение правила означает ложность этого высказывания. В данном правиле A означает «Житель планеты увидел старшего по рангу». В первых трех случаях A ложно, поэтому высказывание « $A \# B$ » заведомо истинно. В четвертом случае истинны и A , и B . А вот в пятом A истинно, а B ложно.

Ответ. Нарушил правило только Пятый.

Комментарий. Точка зрения плюканского суда может не согласовываться с математической логикой. Но мы спрашивали про вашу точку зрения!

5.9. Первое утверждение верно. Но убедиться в этом не поможет ни один, ни сто примеров многоугольников, требуется общее доказательство. Оно несложно: количество клеточек равно удвоенному количеству доминошек, следовательно, оно четно. Второе утверждение неверно; чтобы это доказать, достаточно привести любой контрпример. Один из них



изображен на рисунке справа.

Комментарий. Истинные высказывания в форме следствия доказать на примере нельзя, зато ложные опровергаются с помощью контрпримера. Это неудивительно: ведь следствия могут быть переформулированы как высказывания про всех.

5.10. С точки зрения формальной логики – да, правду. Ведь папоротник не цветет, поэтому утверждение «Человек сорвет цветок папоротника» заведомо ложно. Сложное же высказывание «Если A , то B » при ложном A истинно независимо от истинности B .

5.11. Заметим, что из каждого утверждения следует предыдущее (в порядке перечисления). Поэтому если утверждение «Число a делится на 24» верно, то верны и все остальные. Значит, только оно может оказаться единственным неверным из четырех. В качестве примеров подойдут числа, делящиеся на 12, но не делящиеся на 24: 12, 36, 60 и т. д.

5.12. Утверждение «Если на одной стороне карточки написано четное число, то на другой – гласная буква» является ложным лишь в одном случае: если на одной стороне карточки четное число, а на другой – согласная буква. Поэтому надо перевернуть 2 карточки: с числом 4 (на обороте должна быть гласная буква) и с буквой Б (на обороте должно быть нечетное число).

Ответ: 2 карточки.

5.13. **Решение 1.** В (1) сказано, что если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя. Но в (3) сказано, что пасмурной погоды без дождя не будет. Значит, будет ветрено. По условию (2) в случае дождя ветра не было бы. Значит, дождя не будет. А по условию (3) и в случае пасмурной погоды не было бы ветра. Значит, будет солнечно.

Ответ. Будет солнечно, ветрено, но без дождя.

Комментарий. Разобравшись, в каком порядке использовать условие, удалось решить задачу коротко. Можно прийти к ответу и менее творчески, методом полного перебора.

Решение 2. Выпишем все 8 возможных (в этой задаче) типов погоды: СВД, СВД, СВД, СВД, €ВД, €ВД, €ВД, €ДД. В этой записи С означает солнце, В – ветер, а Д – дождь; если буква зачеркнута, то такого не будет. Например, €ВД означает погоду пасмурную, безветренную и с дождем. Вычеркнем сочетания, противоречащие первому прогнозу: СВД, СВД, €ВД. Остались СВД, СВД, €ВД, €ВД, €ВД. Вычеркнем из них противоречащие второму прогнозу: СВД, €ВД. Остались СВД, €ВД, €ВД. Наконец, вычеркнем €ВД и €ВД, противоречащие третьему прогнозу. Остался прогноз СВД: солнечно, ветрено, но без дождя.

5.14. Примеры Шляпы и Сони действительно показывают разницу между «А # Б» и «Б # А». Чтобы в этом убедиться, можно каждую фразу построить более формально, например, «Если я что-то ем, то я это вижу» и т. п.

Пример Зайца можно понимать по-разному. Первое его высказывание может означать «Если я что-то учу, то я этого не знаю» (А # «не Б»), тогда второе следует понимать как «Если я что-то знаю, то я этого не учу». (Б # «не А»). Но оба эти высказывания истинны при одном и том же условии: А и Б не должны выполняться одновременно. А это значит, что высказывания «А # „не Б“» и «Б # „не А“» равносильны. Иное возможное толкование первого высказывания «Если я чего-то не знаю, то я это учу» («не А» # Б) соответствует пониманию второго как «Если я чего-то не учу, то я это знаю» (не Б # А). Эти высказывания также равносильны, поскольку оба оказываются истинными во всех случаях, кроме одного: А и Б оба ложны. Итак, с формальной точки зрения высказывания «Я учу то, чего не знаю» и «Я знаю то, чего не учу» действительно означают одно и то же, и пример Зайца неубедителен. А с точки зрения здравого смысла? «Я учу то, чего не знаю» говорит о любознательности, а «Я знаю то, чего не учу» – о глупой самонадеянности. В чем секрет? Во временах глаголов! «Я учу то, чего не знаю» мы понимаем как «Я сейчас учу то, чего не знал раньше», а «Я знаю то, чего не учу» – как «Я сейчас знаю то, чего не учил раньше». Никаких одинаковых простых высказываний А и Б не наблюдается, и говорить о равносильности составных нет причин.

Комментарий. В оригинальном английском тексте высказывание Зайца, связанное со свободным употреблением времен глаголов в русском языке, отсутствует. Нет его и в переводах на русский язык В. Набокова и Н. Демуровой.

Занятие 6

6.6. Нет.

6.7. 1) Пусть у меня есть единственный друг Петя. Он болеет за «Спартак», но не занимается спортом. А у «Спартака» кроме Пети есть еще один болельщик, Вася, который спортом занимается. Тогда оба условия верны, а вывод – нет.

2) Пусть есть два паровоза, зеленый и красный. Зеленый является кочаном капусты, но не играет на рояле. А красный, наоборот, кочаном капусты не является, зато на рояле играет. И никаких других кочанов капусты, кроме зеленого паровоза, на свете нет. Тогда оба условия верны, а вывод – нет.

6.8. 1) См. рис. 28.

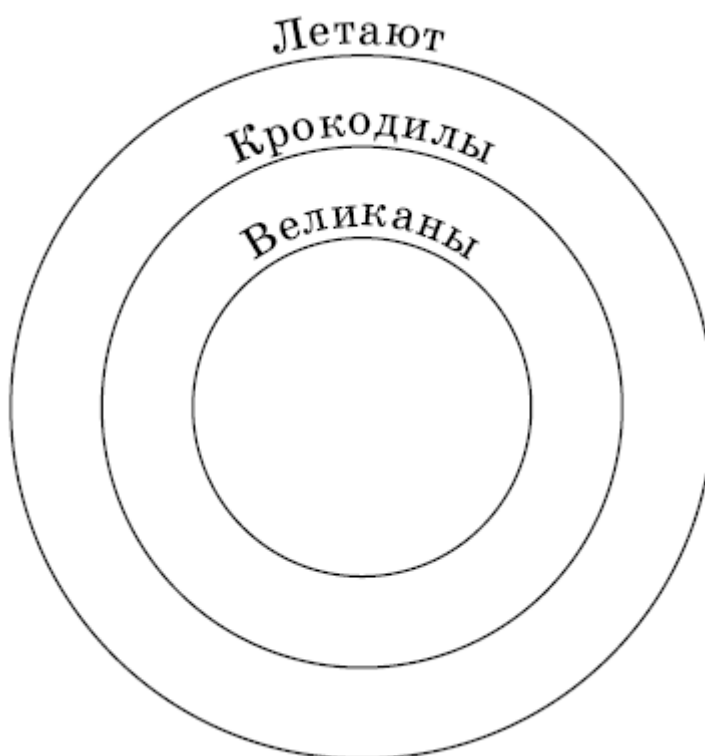


Рис. 28

2) См. рис. 29.



Рис. 29

6.9. Первое рассуждение верное, так как все англичане входят в круг любителей пудинга, а французы находятся вне его. Второе неверно. Чтобы в этом убедиться, представьте себе, например, что никто вообще не достоин славы.

6.10. 1) Вывод сделать нельзя. 2) Некоторые горные кручи не являются заборами. 3) Джон – не гусеница. 4) Вывод сделать нельзя. 5) Музыка, не вызывающая колебаний воздуха, не стоит того, чтобы за нее платили деньги.

6.12. Эта задача не столько логическая, сколько лингвистическая. Если первое высказывание понимать как «Любое сочинение Пушкина обладает свойством: его нельзя прочесть за одну ночь», то рассуждение становится логически безупречным. Но на самом деле здесь речь идет обо всех сочинениях Пушкина как о едином целом. И такое высказывание никак не связано со вторым высказыванием об одном из этих сочинений.

Ответ. Вывод неверен.

Занятие 7

7.7. Утверждение «Если собаки рядом нет, то кот не шипит» противоположно обратному к утверждению «Если кот шипит, то рядом собака». Поэтому они равносильны, и достаточно было бы произнести любое из них.

Ответ. Сказал.

7.8. 1) Неверно, про Петино поведение при несделанных уроках никаких данных нет. Он мог, скажем, поднять руку, чтобы задать вопрос. 2) К сожалению, верно. Это можно доказать от противного: если бы Петя был готов к уроку, он бы поднял руку.

7.9. Решение 1. Предположим противное: числа на концах любого ребра отличаются не более чем на 2. Рассмотрим вершину, в которой расположено число 1. В соседних с ней вершинах могут располагаться лишь 2 и 3. Но у каждой вершины куба есть три соседних. Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно, и числа на концах хоть какого-нибудь ребра должны отличаться не менее чем на 3.

Решение 2. Предположим противное: числа на концах любого ребра отличаются не более чем на 2. От одной вершины до любой другой вершины можно добраться по одному, двум или трем ребрам. Поэтому числа в вершинах куба отличаются друг от друга не более чем на 6. Однако среди них есть 1 и 8, отличающиеся на 7. Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно, числа на концах хоть какого-нибудь ребра должны отличаться не менее чем на 3.

7.10. Решение 1. Предположим, что нет двух друзей, которые послали открытки друг другу. Тогда каждый мог получить не более четырех открыток – только от тех, кому сам не посылал. И даже если все открытки дошли, каждый получил меньше открыток, чем послал. Поэтому и общее число отправленных открыток больше числа полученных. Противоречие.

Решение 2. Предположим, что нет двух друзей, которые послали открытки друг другу. Тогда послано не более $10 \cdot 9 : 2 = 45$ открыток, но по условию их было послано $5 \cdot 10 = 50$. Противоречие.

7.11. Допустим, что это возможно. Пусть сумма чисел, стоящих в концах отрезков, равна A , сумма чисел, расположенных в серединах отрезков, равна B , а сумма трех чисел вдоль каждого отрезка равна C . Ясно, что $A + B = 0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$. Каждая концевая точка принадлежит ровно трем отрезкам, а все середины различны. Поэтому, сложив суммы чисел на всех шести отрезках, получим: $3A + B = 6C$. Отсюда $2A + 45 = 6C$. Получили противоречие, так как слева нечетное число, а справа четное.

Ответ. Нельзя.

7.12. Вничью игра закончиться не может. Это означает, что ровно у одного из игроков есть выигрышная стратегия. Предположим, что такая стратегия есть у второго игрока. Долька, находящаяся в правом верхнем углу, съедена в любом случае после первого хода. Если у второго есть выигрышная стратегия, то у него есть выигрышный ответный ход на ход первого, состоящий в поедании только правой верхней дольки. Но этот выигрышный ход первый может с тем же успехом сделать сам с самого начала, а далее воспользоваться выигрышной стратегией второго.

7.13. Обсуждение. Задача кажется неприступной. Прежде чем нащупать «узкое место», хочется поэкспериментировать. Но как тут экспериментировать, когда секторов 25, да еще и порядок произвольный? А если секторов поменьше? Если секторов три, их все посетить не удастся, это доказывается коротким перебором. Если четыре, то их все можно посетить. Если пять – снова не удастся. Здесь полный перебор уже затруднителен, зато видны две особенности сектора номер пять: если попадешь в пятерку, оттуда никуда не уйдешь; если удастся пройти почти все числа, то именно пятерка всегда остается. Интересно, почему?

Решение. Предположим, что кузнечик побывал во всех секторах. Тогда сектор с номером 25 был последним, так как из него кузнечик не сможет переместиться в иной сектор. До этого кузнечик не мог побывать дважды в одном секторе, иначе бы его путь заиклился, и в 25-й сектор он бы не попал. А побывав во всех секторах по разу, кузнечик переместился бы на $1 + 2 + \dots + 24 = 300$ секторов, то есть на число, кратное 25. Значит, он начал свое путешествие в 25-м секторе, что невозможно.

7.14. 1) Предположим, что после построения по росту Вася выше стоящего сразу за ним Никиты более чем на 10 см. Назовем Васю и стоящих перед ним мальчиков высокими, а Никиту и стоящих после него мальчиков низкими. Разница в росте между любым высоким и любым низким мальчиком больше 10 см. Но при первоначальном построении, идя вдоль строя от Васи к Никите, мы на каком-то шаге перейдем от высокого к низкому. Эти два мальчика стояли рядом, поэтому разница в росте между ними не превышает 10 см. Противоречие.

2) Пусть мальчики и девочки построены в пары в порядке убывания роста. Предположим, что в одной из пар мальчик Ваня выше девочки Маши более, чем на 10 см. Тогда рост каждого мальчика, стоящего до Вани, отличается от роста каждой девочки, стоящей после Маши, еще сильнее. Поэтому при первом построении каждый из этих мальчиков, включая Ваню, мог стоять только с кем-то из девочек, стоящих перед Машей, но таких девочек на одну меньше, чем требуется. Противоречие. Если Маша выше Вани, рассуждения аналогичны.

7.15. Слово «надо» употребляется в разных смыслах. Сначала подразумевается «нужное количество ленивых учеников», а потом – «нужное количество прилежных учеников».

Занятие 8

8.6. **Обсуждение.** Пусть А: «У Винни-Пуха хорошее настроение»; Б: «Винни-Пух хорошенько подкрепился». В какую строчку таблицы истинности надо посмотреть? **Ответ.** Не прав.

8.7. Истинны высказывания в пунктах 1, 3, 4, 5, 7. Ложны высказывания 2, 6, 8.

8.8. Все три высказывания означают, что некузявых ляпусиков не бывает.

Ответ. Равносильны.

8.9. Пусть Д спит. Тогда А и Г спят (из 5). Тогда Б спит (из 1), поэтому В не спит (из 3). Но это противоречит 4.

Значит, Д не спит. Тогда спят Г (из 2) и В (из 4), а Б не спит (из 3). Поэтому А не спит (из 1).

Ответ. В и Г.

8.10. Пусть мальчиков больше, чем девочек. Докажем от противного, что при любой рассадке по кругу найдутся два мальчика рядом. Предположим, что это не так, и рассмотрим произвольную рассадку. По предположению справа от каждого мальчика сидит девочка. То есть детей можно разбить на пары «мальчик и девочка справа от него», при этом могут остаться без пары только девочки. Поэтому их не меньше, чем мальчиков. Пришли к противоречию.

Пусть при любой рассадке по кругу найдутся два мальчика рядом. Рассмотрим произвольную рассадку и занумеруем детей по кругу по часовой стрелке. А затем посадим детей в таком порядке: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16. По условию после этого найдутся два мальчика рядом. Но раньше они сидели через одного, т. е. в исходном положении был гость, сидевший между ними.

Пусть при любой рассадке по кругу найдется гость, сидящий между двумя мальчиками. Докажем от противного, что мальчиков больше, чем девочек. Действительно, если бы девочек было больше, детей можно было бы рассадить так: ДДГГДДГГДДГГДДГГД, где буква Д означает девочку, а буква Г – гостя любого пола, и никто бы не сидел между двумя мальчиками.

8.11. 1) Всего существует 6 теорем указанного вида. Если дать их все, то последняя будет следовать из предыдущих. А 5 можно дать в таком порядке: 1 # 2, 1 # 3, 2 # 3, 3 # 2, 3 # 1.

2) Всего существует 12 таких теорем. Как отмечено в предыдущем пункте, с участием утверждений 1, 2 и 3 нельзя давать все 6 возможных теорем. Без ограничения общности можно исключить теорему 2 # 1. Но с участием утверждений 2, 3 и 4, а также 1, 3 и 4 тоже нельзя давать все 6 возможных теорем. Если пытаться решить обе проблемы исключением лишь одной теоремы, исключать надо 3 # 4 или 4 # 3. В любом из случаев остается цепочка из восьми теорем 1 # 3 # 2 # 4 # 1, из которой придется исключить как минимум одну теорему, и останется не более 9 теорем. Пример на 9 теорем: 1 # 2, 1 # 3, 1 # 4, 2 # 3, 2 # 4, 3 # 4, 4 # 3, 4 # 2, 4 # 1.

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

3) Пример на $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ теорем:

1 # 2, 1 # 3..., 1 # n,

2 # 3, 2 # > 4..., 2 # n,

n — 1 # n,

n # n — 1, n # n — 2..., n # 1.

Доказательство максимальности удобно изложить на языке графов. Будем считать утверждения вершинами, а теоремы – ориентированными ребрами. Оставим только ребра, ориентированные в обе стороны. Если бы они образовали цикл, то последняя доказанная в этом цикле теорема следовала бы из предыдущих теорем цикла. Значит, циклов нет. Тогда «двойных» ребер – не более $n - 1$, поэтому всего доказано не более

$$\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 = \frac{(n+2)(n-1)}{2} \quad \text{теорем.}$$

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Ответ. 1) 5; 2) 9; 3)

Занятие 9

9.4. На семи карточках написаны три четных и четыре нечетных числа. Судить о четности суммы двух чисел из четырех можно лишь тогда, когда все четыре числа имеют одинаковую четность. Значит, все три четных числа на карточках первого мудреца.

Ответ. 6, 8, 10.

9.5. Если бы оба ответили «Да», у судьи не было бы никаких оснований считать одного из близнецов Джоном. Значит, второй близнец ответил: «Нет». Если Джон – первый, то оба сказали правду, что противоречит условию. Значит, Джон второй. При этом оба брата солгали.

Ответ. Джон – второй.

Комментарий. Почему эта задача является метаголоволомкой? Потому что важным условием является тот факт, что судья смог определить, кто из братьев Джон.

9.6. Рассмотрим четыре случая:

- 1) оба рыцари;
- 2) говоривший – рыцарь, а его спутник – лжец;
- 3) говоривший – лжец, а его спутник – рыцарь;
- 4) оба лжецы.

Во втором случае на первый вопрос был бы ответ «Нет», а в остальных – «Да». Поскольку путешественник не смог сделать вывод, второй случай исключен. На второй вопрос ответ «Да» был бы в первом и третьем случае, и различить их нет никакой возможности. А ответ «Нет» – во втором и четвертом случаях. Путешественник уже исключил второй случай, остается только четвертый.

Ответ. Двух лжецов.

9.7. Всех стоящих в кругу жителей деревни можно мысленно разбить на группы стоящих подряд правдивых людей и группы стоящих подряд лжецов (возможно, состоящие из одного человека). Крайние справа в своих группах назовут своих правых соседей лжецами, а остальные жители назовут своих правых соседей правдивыми. Из ответов всех жителей следует, что выполняется один из двух вариантов: истинный и соответствующий ему «с точностью до наоборот». Если истинная доля лжецов равна x , то во втором варианте она равна $1-x$. Так как путешественник смог определить долю лжецов, то $x = 1 - x$, откуда $x = 1/2$.

Ответ. 1/2.

9.8. Какую информацию можно извлечь из упоминания о дне рождения? Такую, что два соседа утверждают одно и то же, поэтому либо они оба рыцари, либо оба лжецы. Рассмотрим теперь все возможные ответы на вопрос «Кто твои соседи?». Если на него все ответили: «Два рыцаря», то все они могли быть как рыцарями, так и лжецами, и даже после упоминания о дне рождения нельзя эти ситуации различить. Если все ответили: «Рыцарь и лжец», то они могли быть все лжецами. А могли сидеть и так: РР-ЛРРЛ. Эти ситуации также нельзя различить после упоминания о дне рождения. Если все ответили «Два лжеца», то среди них был хотя бы один рыцарь (иначе лжецы сказали бы правду), вокруг которого действительно сидят два лжеца. Если рядом с лжецом сидит еще один рыцарь, то после него снова лжец, а шестой сидящий говорит правду, и поэтому является рыцарем. Но чередоваться рыцари и лжецы не могут из-за одинаковых высказываний двух соседей о дне рождения. Значит, рядом с лжецом сидит еще один лжец. После него может сидеть только рыцарь (иначе лжец говорил правду). Тогда после рыцаря сидит лжец. В расстановке РЛЛРЛЛ есть два соседа-лжеца, которые могли высказаться одинаково про день рождения. Она и является единственно возможной в этой задаче.

Ответ. Два рыцаря.

9.9. Оба загадали делители числа 2002 (иначе кто-то понял бы, что 2002 – сумма заданных чисел, и определил бы второе число). Однако, даже зная, что Саша загадал делитель, Маша не может исключить, что 2002 – сумма. Но сумма делителей равна 2002 только в случае $1001 + 1001$ (другие делители равны 2002 либо меньше 1001). Значит, Маша загадала 1001 (а Саша – 2 или 1001, и тогда оба действительно не могли узнать числа друг друга).

Ответ. 1001

9.10. 1) Василиса может найти последнюю цифру суммы цифр на своих карточках. Прибавив к ней 7, она узнает последнюю цифру суммы цифр на всех карточках, кроме карточки Бабы-Яги. Остается вычесть результат из 5 (или из 15), так как сумма цифр на всех карточках равна 45.

Ответ. Знает.

2) Выпишем все суммы четырех ненулевых чисел, оканчивающиеся на 7:

$1 + 2 + 5 + 9, 1 + 2 + 6 + 8, 1 + 3 + 4 + 9, 1 + 3 + 5 + 8,$
 $1 + 3 + 6 + 7, 1 + 4 + 5 + 7, 2 + 3 + 4 + 8, 2 + 3 + 5 + 7,$
 $2 + 4 + 5 + 6, 3 + 7 + 8 + 9, 4 + 6 + 8 + 9, 5 + 6 + 7 + 9.$

Какая бы цифра ни была у Бабы-Яги, среди выписанных сумм найдутся две, не содержащие этой цифры. Каждая из них могла получиться из цифр Ивана, а Василисе достались бы остальные цифры.

Ответ. Не знает.

3) Пусть, скажем, у Бабы-Яги карточка 1. Тогда цифры Ивана образуют одну из сумм, не содержащих 1:

$2 + 3 + 4 + 8, 2 + 3 + 5 + 7, 2 + 4 + 5 + 6,$
 $3 + 7 + 8 + 9, 4 + 6 + 8 + 9, 5 + 6 + 7 + 9.$

Для любой цифры, отличной от 0 и 1, среди выписанных найдется как сумма, содержащая эту цифру, так и сумма, не содержащая ее. Аналогично разбираются случаи всех остальных карточек Бабы-Яги.

Ответ. Не может.

Комментарий 1. Если бы Иван назвал вместо 7 любую другую цифру, ответы и решения остались бы прежними с точностью до конкретных выписанных сумм.

Комментарий 2. Разобранный пример показывает возможность вслух сообщить информацию так, чтобы партнер, владеющий дополняющей информацией, понял все, а случайный слушатель – ничего. Подобным образом происходят электронные платежи – банк должен узнать клиента, при этом доступ к чужому счету для жуликов должен быть максимально затруднен. Доказательствами без разглашения занимается прикладная криптография.

9.11. Участник А не может быть мирным жителем, так как в этом случае он ничего не знал бы про Д. Если бы Б был мирным жителем, то к моменту своего высказывания он знал бы только то, что А не мирный житель, и свою роль в игре. Этого недостаточно, чтобы утверждать, что Д – мафиози. Если В – мирный житель, то у него нет оснований исключать, что А и Б – мафиози, а Д – комиссар, и тогда Д знает, кто он. Поэтому и В не мирный житель. Получается, что мирные жители – Г и Д. Они оба это к моменту высказывания Г понимают, так что Г говорит правду. Участник Б лжет, поэтому он – мафиози. Кто из А и В комиссар, а кто второй мафиози, определить невозможно, оба варианта не противоречат высказываниям всех игроков.

Ответ. Б – мафиози, Г и Д – мирные жители.

Занятие 10

10.6. Если белых колпаков по-прежнему два, а черных более трех (например, 4 или 5), то все рассуждения останутся в силе. А вот если мудрецам принести три белых и три черных колпака и надеть на каждого черный колпак, третий мудрец тоже не сможет определить цвет своего колпака, но доказать это непросто. Заметим, что в таком случае после того, как все три мудреца по очереди скажут «не знаю», первый уже сможет определить цвет своего колпака.

10.7. Сначала сформулируем общую задачу.

По кругу сидят n мудрецов, они могут видеть и слушать друг друга. Им принесли n — 1 белый и n черных колпаков. Затем завязали глаза, надели всем черные колпаки, а белые спрятали. После этого мудрецам развязали глаза и стали поочередно спрашивать: «Знаешь ли ты цвет своего колпака?» Почти все ответили: «Не знаю», а последний сказал: «Знаю. Черный». Как он рассуждал?

Приведем рассуждения четвертого мудреца для $n = 4$. «Если на мне белый колпак, то остались два белых и четыре черных колпака. Но в таком случае третий мудрец смог бы определить, что у него черный колпак (для этого ему пришлось бы всего лишь решить предыдущую задачу). Раз он сказал, что не знает, на мне черный колпак».

Рассуждения последующих мудрецов аналогичны. Строгое решение задачи о мудрецах в общем виде можно изложить с помощью метода математической индукции.

10.8. Подсказка. Решите сначала задачу для одного мудреца, затем постепенно увеличивайте их количество.

Решение. 1) Если бы грязный мудрец был один, он вышел бы на первой станции.

Если грязных мудрецов двое, то на первой станции каждый понадеется, что грязный другой, поэтому никто не выйдет. После этого первый мудрец подумает: «Если бы я был чист, второй мудрец догадался бы, что он грязный, и вышел бы на первой станции. Но он не вышел, следовательно, я испачкался». Так же подумает и второй мудрец, и оба выйдут на второй станции.

Если грязных мудрецов трое, то на первых двух станциях никто не выйдет. А перед третьей третий мудрец подумает: «Если мое лицо чистое, то двое оставшихся мудрецов должны вести себя так, словно меня нет. Но в таком случае они вышли бы на второй станции. Раз они не вышли, мое лицо грязное». Так же подумают и два первых мудреца, и все трое выйдут на третьей станции.

Рассуждая аналогично, получаем, что все семь мудрецов выйдут на седьмой станции.

2) Снова начнем с простых случаев. Если мудрец один, то от проводника он узнал, что кто-то испачкался. Если мудрецов двое, то каждый и без проводника знал, что кто-то испачкался. Но из слов проводника он понял, что и другой знает, что кто-то испачкался.

Пусть мудрецов трое. Третий видел грязные лица первого и второго и понимал, что первый и второй знают, что кто-то испачкался. Но вот знает ли второй, что первый знает, что кто-то испачкался? Знает, но это стало известно третьему лишь после слов проводника. Это же можно сказать и о других мудрецах. Итак, все мудрецы узнали, что все знают, что все знают, что кто-то испачкался.

Рассуждая аналогично, добираемся до семи мудрецов. Из слов проводника все узнали, что все знают, что все знают, что все знают, что все знают, что все знают, что кто-то испачкался. Заметим, что глагол «знать» повторяется столько же раз, сколько было мудрецов и станций.

10.9. «Среди вас есть испачкавшиеся» означает, что на ком-то надет черный колпак. Никто не сообщал это мудрецам словами. Но зато они видели, что белых колпаков на один меньше, чем мудрецов.

Комментарий. А если бы их было на два меньше? Тогда как минимум на двух мудрецах были бы черные колпаки. Это бы соответствовало словам проводника «Среди вас как минимум двое испачкались». В таком случае мудрецы бы вышли на одну станцию раньше (а в задаче про колпаки цвет своего колпака назвал бы предпоследний мудрец).

Заметим, что для полного соответствия задач следовало не спрашивать мудрецов поочередно, а всех мудрецов одновременно просить написать, знают ли они цвет своего колпака, а затем показывать записки друг другу.

10.10. Смех.

10.11. Приведем возможный пример.

1. Вор Карл украл кораллы.
2. Его друг Фридрих знает, что Карл украл кораллы (но не доносит).
3. Следователь Шерлок знает, что Фридрих знает, что Карл украл кораллы (и хочет арестовать Фридриха).
4. Клара знает, что Шерлок знает, что Фридрих знает, что Карл украл кораллы (и предупреждает Фридриха, что ему надо скрыться).
5. Шерлок знает, что Клара знает, что Шерлок знает, что Фридрих знает, что Карл украл кораллы (и хочет допросить Клару).
6. Клара знает, что Шерлок знает, что Клара знает, что Шерлок знает, что Фридрих знает, что Карл украл кораллы (и благополучно скрывается вместе с Фридрихом).

Дополнительные задачи

Д1. Если Саша мальчик, а Женя девочка, то оба ребенка говорят правду. Противоречие. Если Саша девочка, а Женя мальчик, то оба ребенка врут, что не исключается условием «хотя бы один из них врет».

Ответ. Саша – девочка, а Женя – мальчик.

Д2. Рассмотрим честного конгрессмена в паре со всеми остальными по очереди. По условию 2 второй в паре всегда продажен.

Ответ. Один.

Д3. 1) Легко видеть, что Ваня говорит правду (если предположить, что он лжет и высказывание «Я не всегда говорю правду» не является правдой, то правдой будет: «Я всегда говорю правду», т. е. получится противоречие).

2) Так как смысл высказывания Антона такой же, то Антон тоже говорит правду.

3) По условию, один из мальчиков солгал, значит, это – Саша.

4) Саша сказал: «Антон не всегда говорит правду» – и при этом солгал, значит, Антон всегда говорит правду.

Ответ: Антон.

Д4. В этом утверждении говорится об истинности его самого. Поэтому его нельзя считать не истинным, ни ложным, то есть оно вообще не является высказыванием.

Комментарий. Рассмотрим такое решение. «Если это высказывание истинно, т. е. правил без исключения нет, то и из этого правила есть исключения, и правила без исключения все-таки есть. Пришли к противоречию. Значит, высказывание ложно, и существует хотя бы одно правило без исключения (хотя и не это)». Ошибка выходит на поверхность, если предположить, что это правило единственное. И тогда правилу без исключения взяться неоткуда. Если же заранее договориться, что существуют хотя бы два правила, то эту фразу можно считать ложным высказыванием. Аналогично, если считать, что на Крите есть хотя бы два жителя, и только один из них сказал «Все критяне лжецы», парадокс Эпименида перестает быть парадоксом.

Д5. 1) Не каждый охотник желает знать, где сидит фазан. 2) Существует хотя бы один охотник, не желающий знать, где сидит фазан. 3) Некоторые охотники не желают знать, где сидит фазан.

Д6. Все лжецами быть не могли (в таком случае сказанное каждым оказалось бы правдой), был хотя бы один рыцарь. Он сказал правду, поэтому все остальные были лжецами.

Ответ. Один.

Д7. Первое можно опровергнуть контрпримером (начертив прямоугольник с неравными сторонами), третье и четвертое доказать примером (начертив любой квадрат), а доказать второе помогут определения прямоугольника и квадрата.

Ответ. Первое утверждение ложно, а остальные истинны.

Д8. 1) Некоторые друзья моего друга не являются моими друзьями. 2) Некоторые ананасы приятны на вкус. 3) Ни один волк не является оборотнем.

Д9. Чтобы разобраться в трех замысловатых условиях, удобно для начала перечислить все возможные виды зоопарков с точки зрения наличия жирафов, носорогов и гиппопотамов. Их всего восемь:

- 1) ЖНГ; 2) ЖНГ; 3) ЖНГ; 4) ЖНГ;
- 5) ЖНГ; 6) ЖНГ; 7) ЖНГ; 8) ЖНГ.

Здесь запись ЖНГ, например, означает, что в зоопарке есть жирафы, нет носорогов и есть гиппопотамы. В силу первого условия вычеркиваем зоопарки вида 1, в силу второго – вида 7, в силу третьего – вида 2. Теперь видно, что ничто не противоречит существованию зоопарков вида 6.

Эти рассуждения могут быть изображены с помощью кругов Эйлера. Области на рис. 30 пронумерованы в соответствии с приведенным списком. Зоопарки, запрещенные условием, закрашены серым. Зоопарки, соответствующие остальным областям, могут существовать, в том числе и соответствующие шестой области.

Ответ. Да.

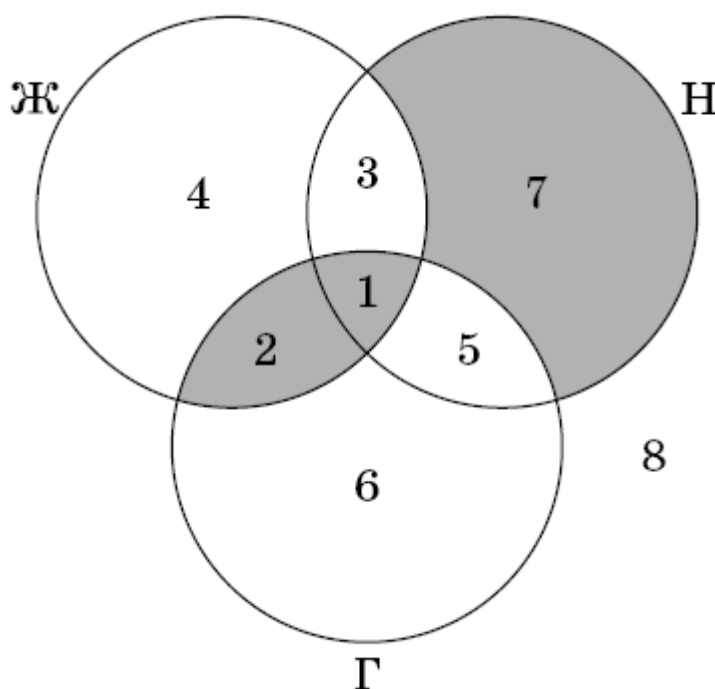


Рис. 30

Д10. Чтобы выполнить пожелание Ани, необходимы и яблоки, и сливы. Чтобы порадовать Галю, нужны еще и персики. Остается лишь проверить, что Боря и Витя при этом тоже будут довольны.

Ответ. Надо купить яблоки, сливы и персики.

Д11. 1) Луна сделана не из сыра или Солнце не из масла.

2) Я не видел медведя или он видел меня.

3) Я боюсь львов или крокодилов.

4) Лошадь не заблудилась и ее не засыпало снегом.

5) Я не отправился в разведку ни на коне, ни на ядре.

Д12. Третья дверь может вести только в учительскую. Значит, за дверью с табличкой «Спортзал» не спортзал и не учительская, т. е. столовая.

Ответ. В столовую.

Д13. Если Руссо прав, то Жан и Жак оба лгут, чего не может быть (вспомните, что говорит Жан). Значит, Руссо лжет. Поэтому Жак прав. А тогда Жан лжет.

Ответ. Правду говорит только Жак.

Д14. Если А – рыцарь, то ОБЕ части его высказывания правдивы. Но в одной из них сказано, что он лжец. Противоречие. Значит, А – лжец. Первая часть его высказывания истинна,

поэтому ложной должна быть вторая часть (тогда и все высказывание ложно). Поэтому Б тоже лжец.

Ответ. Оба лжецы.

Д15. Решение 1. Все трое рыцарями быть не могли (в таком случае они не стали бы называть друг друга лжецами).

Два рыцаря и один лжец тоже быть не могли (в таком случае оба утверждения ложны, а лжец только один).

Два лжеца быть могли. Например, Ох и Ух, которые и сделали ложные утверждения, так как Ах – рыцарь.

Все трое лжецами быть не могли, так как в таком случае оба утверждения истинны.

Решение 2. Если оба ответа ложны, то среди троих двое солгали и есть хотя бы один рыцарь, то есть лжецов ровно двое. Если же среди ответов есть верный, то его дал рыцарь, а двое им названных – лжецы. Пример: рыцарь Ух сказал, что Ах и Ох лжецы.

Ответ. Двое.

Д16. Если бы А был лжецом, его высказывание оказалось бы истинным. Поэтому он рыцарь. В таком случае он говорит правду, и Б – лжец.

Комментарий. Задача напоминает парадокс лжеца: здесь также сказанное имеет отношение к его истинности. Но наличие второго островитянина Б превращает парадокс в задачу с однозначным ответом.

Д17. Среди них нет рыцарей, и оба они не могут быть лжецами, потому что тогда они бы сказали правду. Значит, либо оба они хитрецы, либо один хитрец, а другой лжец.

Д18. Решение 1. Посмотрим, кто может быть рыцарем. Это не А, называющий себя хитрецом. И не Б, так как в этом случае никто не мог бы быть лжецом. Значит, рыцарь – В. Он говорит правду, поэтому Б – хитрец. Тогда А – лжец. Заметим, что высказывание хитреца Б ложно.

Решение 2. Предположим, что А сказал правду и он действительно хитрец, тогда В солгал и он лжец. В этом случае Б должен быть рыцарем. Но его высказывание неверно, так как В никогда не говорит правду. Получили противоречие. Предположим теперь, что А солгал, тогда он лжец, и, следовательно, высказывание Б ложно. Значит, Б – солгавший хитрец, а В – рыцарь, что подтверждается его верным высказыванием.

Ответ. А – лжец, Б – хитрец, В – рыцарь.

Д19. Высказывания Ромы и Коли противоположны, поэтому истинно ровно одно из них. Это же можно сказать о высказываниях Маши и Нины. Кроме того, из высказывания Саши следует, что либо он говорит правду, либо Аня. Значит, из высказываний Ани и Саши истинно тоже ровно одно. Поскольку истинных высказываний ровно три, оставшиеся высказывания (Володи, Егора и Олега) ложные. Окно разбила Нина.

Ответ. Нина.

Д20. В понедельник, вторник, среду, пятницу и воскресенье.

Д21. Если в думе есть хоть один рыцарь, то всего в ней четное число депутатов, и спикер – лжец. А если нет ни одного рыцаря, то он тем более лжец!

Ответ. Лжец.

Д22. Формально: см. третью строку таблицы истинности высказывания «А # Б». Неформально: у волка есть и другие причины для радости.

Ответ. Нет.

Д23. Достаточно привести любой пример, в котором все три высказывания верны, но Иван не является братом Марьи. Иван может приходиться Марье отцом, дядей, племянником и т. д.

Ответ. Нет.

Комментарий. К ошибочному выводу можно было бы прийти, перепутав в первом высказывании причину и следствие и ошибочно заменив его на обратное: «Если Иван и Марья – родственники, то Иван – брат или сын Марьи».

Д24. Если этот житель рыцарь, то он сказал правду, и его друг действительно лжец. А если он сам лжец? Тогда любое утверждение, начинающееся со слов «Если я рыцарь...» оказывается истинным и просто не может быть произнесено лжецом!

Ответ. Да; он – рыцарь, а его друг лжец.

Д25. Если у Волкова нет собаки, то ее нет и у Львова, тогда собаку держит Щукин. В таком случае у Волкова кошка, а у Львова рыбки. Но по последнему условию если у Львова рыбки, то у Щукина кошка. Полученное противоречие показывает, что у Волкова есть собака. Если бы кошка жила у Щукина, то у Волкова был бы аквариум. Значит, кошку держит Львов, а рыбок – Щукин.

Ответ. У Львова кошка, у Волкова собака, а у Щукина рыбки.

Д26. Из третьего и четвертого условий Нуф-Нуф и Наф-Наф либо оба виновны, либо оба невиновны. Поэтому по второму условию Ниф-Ниф невиновен. Поэтому и Нуф-Нуф с Наф-Нафом невиновны (из пятого условия). Итак, никто челюсть украсть не мог, а обвинение в лжесвидетельстве Шерлок Холмс предъявит Серому волку.

Д27. Иа-Иа не мог участвовать в краже одновременно с Тигрой (так как им требуется различное число соучастников). Поэтому если Тигра виновен, то вместе с ним был либо Пятачок (а тогда и Винни-Пух), либо только Винни-

Пух. Если виновен Иа-Иа, то два его соучастника – Пятачок и Винни-Пух. А если ни Тигра, ни Иа-Иа ни при чем, то мед украл либо Пятачок (а тогда он был вместе с Винни-Пухом), либо только Винни-Пух.

Ответ. Винни-Пуха.

Д28. 1) Приведем контрпример: —5; 2; 2; 2; —5; 2; 2; 2; -5.

Ответ. Нет.

2) Возьмем произвольные четыре числа. Их сумма положительна, поэтому положительно хотя бы одно из этих чисел. Возьмем его, а остальные восемь чисел разобьем на две четверки чисел, сумма которых положительна.

Ответ. Да.

Комментарий. Для обоснования отрицательного ответа в первом случае достаточно одного контрпримера. Для обоснования положительного ответа во втором случае необходимо доказательство.

Д29. 1) Ложно. Можно сделать лишь вывод о том, что некоторые улитки любят кошек.

2) Истинно.

Д30. 1) Устрица не является ископаемым животным.

2) Со мной никогда не случалось этого.

3) Вывод сделать нельзя.

4) Дети не управляют крокодилами.

5) Ни один из твоих подарков не сделан из олова.

Д31. Из условия следуют только два утверждения – второе и четвертое.

Д32. Это задача-шутка. Первый вывод в бытовой речи допустим, хотя автор «Мертвых душ» – не единственный носитель фамилии Гоголь, и нельзя исключать наличие портрета другого Гоголя. Второй вывод явно неверен. Отличие в употреблении неопределенного местоимения «какой-то». Фразам с неопределенными местоимениями в логике соответствуют не высказывания, а предикаты; их серьезное изучение выходит за рамки данной книжки.

Д33. Если бы такое число существовало, то вдвое меньшее число тоже было бы рациональным и положительным.

Ответ. Нет.

Д34. Предположим, что заработок Папы Карло каждый месяц был целым. Перечислим месяцы в порядке возрастания заработка. Тогда за первый месяц Папа Карло заработал не менее нуля золотых, за второй не менее одного..., за двенадцатый не менее одиннадцати. Всего он заработал не менее $0 + 1 + 2 + \dots + 11 = 66$ золотых, что противоречит условию. Значит, предположение неверно, и какой-то из заработков не был целым.

Д35. На круге чередуются группы подряд идущих четных чисел с группами подряд идущих нечетных. Предположим, что нет двух четных чисел рядом. Если в каждой «четной» группе – ровно одно число, то таких групп 1005. Значит, и «нечетных» групп 1005, то есть столько, сколько нечетных чисел. Тогда и в каждой «нечетной» группе – по одному числу, то есть четные и нечетные числа строго чередуются. Но это значит, что либо каждое четное число больше обоих соседних нечетных, либо каждое четное число меньше обоих соседних нечетных. В первом случае не найдется места для числа 2, а во втором – для числа 2010. Противоречие.

Д36. **Обсуждение.** С чего начать, ясно. Надо предположить, что разрезание возможно, и прийти к противоречию. Но к какому? Подумаем, в чем сложность разрезания: надо куда-то деть круглые куски с границы круга. Для этого нужно вырезать подходящие круглые дополнения, но при их вырезании получится что? Тришкин кафтан! Остается только толково пояснить, чем отличаются «плохие» круглые участки от «хороших».

Решение. Предположим, что такое разрезание возможно. Рассмотрим кусочки, составляющие квадрат. Выберем из них все те, в границу которых входят дуги, которые составляли границу круга или являются дугами того же радиуса r . В квадрате суммы длин этих дуг, к которым кусочки примыкают «изнутри» и «снаружи» (с вогнутой и выпуклой сторон), равны. А в круге разность между теми и другими должна равняться длине окружности $2\pi r$. Противоречие.

Ответ. Нельзя.

Д37. Возьмем произвольный бюллетень из 11-й урны. Пусть там написаны десять фамилий: Первый, Второй, Третий..., Десятый. Предположим, что ни для одной из урн нет кандидата, фамилия которого написана во всех бюллетенях из этой урны. Тогда в первой урне найдется бюллетень без упоминания Первого, во второй найдется бюллетень без Второго и т. д. Возьмем 10 таких бюллетеней. Вместе со взятым вначале бюллетенем из 11-й урны получим набор, противоречащий условию задачи.

Д38. Каждым из двух качеств (ловкость и везение) Джо может обладать или не обладать. Рассмотрим все 4 варианта. Первый: Джо ловкач и ему везет. Тогда верны высказывания 1 и 5. Второй: Джо ловкач и ему не везет. Тогда верны высказывания 1, 2, 4, 6. Третий: Джо не ловкач и ему везет. Тогда верны высказывания 3, 4 и 6. Четвертый: Джо не ловкач и ему не везет. Тогда верны высказывания 2, 4 и 5. Наибольшее число высказываний верно во втором случае.

Ответ. 4.

Д39. Годаются различные вопросы. Например, можно спросить: «Правда ли, что у тебя золотых монет больше, чем у Алеши Поповича?» Если у Ильи Муромца две золотые монеты, он скажет «Да», если обе монеты у Ильи серебряные, то «Нет», а если ему достались разные монеты, то он ответит «Не знаю».

Другой вариант: «Досталась ли Алеше хотя бы одна золотая монета?». Если у Ильи обе монеты серебряные, он ответит «Да», если обе золотые, он ответит «Нет», а если одна золотая, а другая серебряная, он ответит «Не знаю».

Возможны также вопросы:

– Правда ли, что одному из двух других богатырей достались две серебряные монеты?

– Верно ли, что два других богатыря получили хотя бы по одной золотой монете каждый?

– Если я заберу у тебя одну монету и дам вместо нее золотую, станет ли у тебя больше золотых?

Д40. Если бы первый назвался лжецом, мудрец понял бы сразу, что тот хитрец. А вот рыцарем себя мог назвать любой из них. И в этом случае даже после ответов остальных мудрец не смог бы определить, кто первый на самом деле. Действительно, он мог бы и вправду быть рыцарем (лжец и хитрец могли назвать его лжецом и хитрецом в любом порядке). Но мог бы быть и лжецом (при этом рыцарь назвал бы его лжецом, а хитрец мог и хитрецом). А мог и хитрецом (рыцарь назвал бы его хитрецом, а лжец – лжецом).

Если же первый назвался хитрецом, то сразу можно понять только, что он не рыцарь. Поэтому не рыцарь и тот, кто назвал его рыцарем. Кто же рыцарь? Тот, кто назвал первого лжецом. Поэтому первый – лжец.

Ответ. Лжец.

Д41. Возможны три случая:

- 1) А – рыцарь;
- 2) А – шпион, и он сказал правду;
- 3) А – шпион, и он солгал.

В первом случае А скажет «да», во втором – «нет», в третьем – «да». Поэтому по его ответу можно делать вывод только во втором случае. Итак, А – шпион, зачем-то сказавший правду.

Д42. 1) Если бы на вопрос «Вы шпион?» А ответил «нет», то он мог бы быть рыцарем или шпионом, а если «да», то он мог бы быть лжецом или шпионом. В первом случае то, что А сказал правду про В, не позволило бы судье понять, кто В, а во втором позволило бы. Значит, А сказал «да», и он шпион.

Ответ. А – шпион.

2) Мы уже выяснили, что А сказал «Да». Если бы Б сказал «Нет», то судья не понимал бы еще, что В – не шпион, а должен был допускать три возможности: 1) А – лжец, Б – рыцарь, В – шпион; 2) А – лжец, Б – шпион (сказавший правду), В – рыцарь; 3) А – шпион (сказавший правду), Б – лжец, В – рыцарь. Но судья понял, что В – не шпион. Значит, Б тоже сказал «Да». В таком случае судья должен допускать две возможности: 1) А – лжец, а Б – шпион (солгавший); 2) А – шпион (сказавший правду), а Б – рыцарь. В обоих случаях он действительно понимает, что В – не шпион. А когда А сказал, что В – не шпион, судья понимает и то, что А – не лжец, и реализуется второй из двух случаев: А – шпион, Б – рыцарь, В – лжец.

Ответ. «Да».

Д43. **Обсуждение.** Чтобы лучше почувствовать задачу, попробуем для начала действовать наугад. Предположим, например, что дураков и умных в думе по 100. Тогда умные дадут ответы от 98 до 100 (в зависимости от скромности и от того, кто именно уехал), а все дураки скажут «Один», и премьер-министр легко отличит умного от дурака. Почему же он не смог понять ответ? Потому что умные отвечали так же, как дураки, то есть их было мало.

Решение. Заметим, что все дураки дадут ответ: «Один». Если бы умных в думе было три или больше, то они дали бы ответ: «Два (или больше)» и премьер-министр всё бы понял. Значит, умных могло быть 0, 1 или 2.

Рассмотрим все эти случаи. Если умных не было, то все сказали: «Один». Если был один умный уверенный, то он тоже сказал: «Один», и ситуация неотличима от предыдущей. Если был умный скромный, то он сказал: «Ни одного», и эта ситуация отличима. Если было два скромных умных, они сказали: «Один», и ситуация неотличима от предыдущей. Если бы было два уверенных умных, они сказали бы: «Два», и ситуация была бы отличима. Наконец,

если бы были один уверенный и один скромный умный, то уверенный сказал бы: «Два», и ситуация также была бы отличима.

Таким образом, возможны три неразличимых варианта: нет умных, один уверенный умный и два скромных умных. Во всех этих случаях все участники опроса ответят: «Один».

Посмотрим, какие ответы даст опоздавший думец в каждой из этих ситуаций в зависимости от его ума и скромности:

	0 уверенных у. 0 скромных у.	1 уверенный у. 0 скромных у.	0 уверенных у. 2 скромных у.
Дурак	1	1	1
Уверенный у.	1	2	3
Скромный у.	0	1	2

Видно, что ответы «1» и «2» встречаются в нескольких клетках, т. е. такие ответы не помогли бы различить ситуации. Зато ответы «0» и «3» встречаются в таблице по одному разу и позволяют сделать однозначный вывод. Значит, опоздавший дал один из этих ответов. В первом случае в думе один умный, во втором – три.

Ответ. 1 или 3.

Д44. 1) Занумеруем карты от 0 до 6. Можно считать, что у Гриши карты 1, 2 и 3. Пусть он скажет: «У меня либо набор 1, 2, 3, либо набор 4, 5, 6». Поскольку у Леша на руках как минимум две карты из набора 4, 5, 6, он понимает, что у Гриши набор 1, 2, 3, и знает, какая карта спрятана. Теперь Леша должен сообщить Грише свои карты. Возможны два случая.

1. У Леша набор 4, 5, 6 (а спрятана карта 0). Леша говорит: «У меня либо набор 4, 5, 6, либо 1, 2, 0».

2. У Леша другой набор, скажем, 4, 5, 0 (а спрятана карта 6). Леша говорит: «У меня либо набор 4, 5, 0, либо 1, 2, 3».

В обоих случаях названный Лешей «не свой» набор пересекается с Гришиным как минимум по двум картам, поэтому Гриша тоже узнает, какой на самом деле набор у Леша. Докажем, что Коле ничего не ясно. Действительно, и в том, и в другом случае названо три набора карт: *A*, *B* и *C*. Наборы *B* и *C* пересекаются по двум картам, Гриша сказал: «У меня либо *A*, либо *B*», Леша сказал: «У меня либо *A*, либо *C*». Это означает, что либо у Гриши набор *A*, а у Леша – *C*, либо у Гриши – *B*, а у Леша – *A*. Поэтому три карты из набора *A* и две карты из пересечения наборов *B* и *C* могут оказаться как у Гриши, так и у Леша (в нашем примере это карты 1, 2, 3, 4 и 5). А из остальных двух карт наборов *B* и *C* (в нашем примере 6 и 0) одна закрытая, другая – у одного из игроков. Поэтому местоположение никакой из карт Коля вычислить не может.

2) Заметим, что предыдущий способ не работает: зная закрытую карту, Коля может всё определить.

Пусть Гриша занумерует карты числами от 0 до 6 (и объявит об этом вслух). Затем пусть Гриша и Леша по очереди назовут остатки от деления суммы номеров своих карт на 7. Тогда они узнают расклад: ведь остаток суммы Гриши плюс остаток суммы Леша плюс номер спрятанной карты должны давать $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 0 \pmod{7}$. Так, например, если у Леша карты 1, 3, 4, а Гриша назвал остаток 4, то спрятана карта $-4 - (1 + 3 + 4) = 2 \pmod{7}$, значит, у Гриши карты 0, 5, 6.

Проверим, что Коля ничего не узнал. Его информация исчерпывается Гришиной суммой *g* и Колиной картой *k* (а Лешину сумму теперь Коля и сам может вычислить). Рассмотрим

рим любую другую карту, пусть ее номер x . Покажем, что она входит в какой-нибудь набор из трех карт с суммой g , не содержащий k . Для этого дополним x парой карт с суммой номеров $g - x$. Таких пар ровно три при любом значении $g - x$ (доказательство см. ниже). Из них две, возможно, не подходят из-за того, что туда входит карта с номером s или k , но как минимум одна пара остается. С ее помощью мы и создадим набор для Гриши (а набор для Леши получится автоматически). Например, если $x = 3$, то в нашем случае при $g = 4$ надо найти пару с суммой $4 - 3 = 1$. Таких пар три: $1 = 0 + 1 = 2 + 6 = 3 + 5 \pmod{7}$. Из них подходит только $(0, 1)$, то есть у Гриши мог быть набор $0, 1, 3$.

Итак, любая карта могла оказаться у Гриши. Такие же рассуждения показывают, что любая карта могла оказаться и у Леши. Поэтому местоположение никакой из карт Коля вычислить не может.

Осталось доказать, что неупорядоченных пар с нужной суммой s всегда три. Есть семь упорядоченных пар $(0, s), (1, s - 1), \dots, (6, s - 6)$. Из них ровно в одной оба остатка одинаковы, поскольку уравнение $2x = s$ имеет, ввиду взаимной простоты чисел 2 и 7, ровно одно решение. Из неупорядоченной пары с разными остатками получается ровно две упорядоченных, поэтому неупорядоченных пар вдвое меньше, чем упорядоченных, то есть ровно 3.

Ответ. Могут в обоих случаях.

Д45. Из Петиних слов следует, что он не комиссар. Возможны два случая:

1) Петя – мафиози. Тогда он лжет и на самом деле знает, кто Дима, поэтому Дима – второй мафиози.

2) Петя – мирный житель.

Информации, которую Дима мог бы извлечь из Петиних высказывания, недостаточно, чтобы догадаться, кто комиссар. Поэтому если Дима говорит правду, то он сам и есть комиссар. А если лжет, то он – мафиози.

Если бы Миша был мирным жителем, он к этому моменту еще не мог понять, кто Петя: мирный житель или мафиози. Если Петя и Дима – два мафиози, то Миша комиссар; если Петя – мирный житель, а Дима – комиссар, то Миша – мафиози; если Петя – мирный житель, а Дима – мафиози, то Миша – комиссар или мафиози.

Теперь видно, что Саша, будучи мирным жителем, не может быть уверен, что Миша – комиссар. А комиссар никого другого назвать комиссаром не может. Значит, Саша – мафиози.

Теперь ясно почти все: Петя – мирный житель, Саша – первый мафиози, Дима и Миша – комиссар и второй мафиози (в произвольном порядке), а Илья – мирный житель.

Ответ. Мирный житель.

Д46. **Обсуждение.** Пусть дочь полковника звали Кити, а гусаров – Алексей, Борис и Виктор. О чем имеет смысл спрашивать гусаров? Либо сразу о том, кто кому бросал цветок, либо для начала о том, в каком порядке они ехали (ведь последний знает про всех, кроме себя). Оба пути приводят к верному решению. Только надо понимать, что на прямой вопрос «Кто ехал последним?» гусар не может ответить (все три ответа «Так точно», «Никак нет» и «Не могу знать» не подходят).

Решение 1. Сначала спросим Алексея: «Ехал ли Борис впереди Виктора?» Ответ однозначно определяет, кто передний: «Так точно» – Борис, «Никак нет» – Виктор, «Не могу знать» – Алексей.

Рассмотрим случай, когда информации минимум – то есть передний Алексей. Спросим у Бориса, бросила ли Кити цветок Виктору. При ответе «Так точно» цветок от Кити у Виктора. При ответе «Никак нет» полковник спрашивает Бориса, бросила ли Кити цветок Алексею. При ответе «Так точно» цветок от Кити у Алексея, при ответе «Никак нет» – у Бориса.

Если же на второй вопрос Борис ответил «Не могу знать», то Виктор ехал позади Бориса и Алексей получил цветок не от Кити. Тогда спросим у Виктора, бросала ли Кити цветок Борису. При ответе «Так точно» цветок от Кити у Бориса, «Никак нет» – у Виктора.

Решение 2. Сначала полковник спрашивает у Алексея, бросила ли Кити цветок Борису. При ответе «Так точно» всё ясно. При ответе «Никак нет» Борис вне подозрений, и полковник спрашивает у Алексея, бросила ли Кити цветок

Виктору. При ответах «Так точно» и «Никак нет» на этот вопрос всё ясно (в первом случае цветок брошен Виктору, во втором – Алексею), а ответ «Не могу знать» означает, что Виктор ехал последним. Осталось спросить Виктора, бросила ли Кити цветок Алексею.

Ответ «Не могу знать» на первый вопрос означает, что Борис ехал позади Алексея. Тогда полковник спрашивает Бориса, бросила ли Кити цветок Виктору. При ответе Бориса «Так точно» всё ясно. При ответе «Никак нет» Виктор вне подозрений, а Борис ехал последним. Осталось спросить Бориса, бросила ли Кити цветок Алексею.

Ответ Бориса «Не могу знать» означает, что Виктор ехал последним. Вне подозрений Алексей (если бы цветок достался ему, Борис ответил бы «Никак нет»). Осталось спросить Виктора, бросила ли Кити цветок Борису.

Д47. Решение. Попробуем задавать те же вопросы, что и во втором решении задачи про трех гусаров. Спросим у Алексея, бросила ли Кити цветок Борису. Если Алексей ответит «Так точно», все ясно. Если Алексей ответит «Никак нет», можно вычеркнуть Бориса из списка. Разбираться с оставшимися тремя гусарами с помощью трех оставшихся вопросов мы уже умеем.

Если же Алексей скажет «Не могу знать», спросим Бориса, бросила ли Кити цветок Виктору. При ответе Бориса «Так точно» все ясно. При ответе Бориса «Никак нет» вычеркиваем Виктора из списка. Остались три гусара и, казалось бы, всего два вопроса. Но вспомним, что Алексей уже ответил «Не могу знать» на вопрос, бросила ли Кити цветок Борису. А вместе с этим вопросом получается три вопроса, и задача вновь сводится к уже решенной задаче о трех гусарах.

Кого же вычеркивать из списка, если Борис, как и Алексей, ответит «Не могу знать»? Алексея! Ибо он ехал впереди Бориса (раз не знает, бросила ли Кити цветок

Борису). Поэтому если бы Кити бросила цветок Алексею, Борис бы это видел и знал бы, что цветок брошен не Виктору. На трех гусаров остались снова два вопроса, но третьим можно считать вопрос «Бросила ли Кити цветок Виктору?», на который Борис уже ответил «Не могу знать».

Итак, в любом случае задача про четырех гусаров сводится к уже решенной задаче о трех гусарах.

Заметим, что в своих рассуждениях мы нигде не использовали, что гусаров именно четверо. Вместо этого показано, что если разрешено задавать больше на один вопрос, то на один увеличивается и число гусаров, с которыми сможет разобраться полковник. Поэтому ему хватит десяти вопросов, чтобы выяснить, кому из десяти гусаров бросила цветок его дочь.

Комментарий. Строго излагать это решение удобно с помощью метода математической индукции. При этом в качестве базы индукции достаточно решить задачу о двух гусарах и двух вопросах.

Д48. Если бы на голове первого мудреца был белый колпак, то второй бы догадался, что на его голове черный колпак. Поэтому на голове первого черный колпак.

Д49. Третий мудрец видит два черных колпака и не знает, черный на нем колпак или белый. Поэтому он ответит «Не знаю». Если бы на втором мудреце был белый колпак, то третий все равно не смог бы определить цвет своего колпака. Поэтому второй мудрец тоже ответит «Не знаю». А третий подумает так: «Если на мне и на втором белые колпаки, то третий бы определил цвет своего колпака. Второй это понимает не хуже меня. Поэтому если на мне белый, а на втором черный, то по ответу третьего «Не знаю» второй бы определил

цвет своего колпака. А раз они оба сказали «Не знаю», на мне черный колпак. Итак, первый скажет: «На мне черный колпак».

Ответ. Третий и второй скажут «Не знаю». Первый скажет «На мне черный колпак».

Комментарий. Условие этой задачи слегка отличается от условия задачи 10.4: не все мудрецы видят друг друга. Но это не влияет ни на решение, ни на ответ.

Д50. 1) Так как мудрецов десять, а колпаков каждого цвета по три, колпаки всех четырех цветов на кого-то надеты. Поэтому если последний мудрец не видит перед собой никого в желтом колпаке, он ответит: «На мне желтый». А если он этого не скажет, то все поймут, что он видел перед собой кого-то в желтом колпаке. Если предпоследний мудрец не увидит никого перед собой в желтом колпаке, то он догадается, что желтый колпак на нем. А если он не скажет «На мне желтый колпак», все поймут, что он тоже видел перед собой кого-то в желтом колпаке. Первый из мудрецов, перед которым нет никого в желтом колпаке (и который не слышал ни от кого слов «На мне желтый колпак»), поймет, что желтый колпак как раз на нем.

2) Как показано в предыдущем пункте, как минимум один мудрец определит, что на нем желтый колпак, как минимум один – что на нем красный колпак, как минимум один – синий и как минимум один – зеленый.

Замечание. При «удачных» расстановках смогут назвать цвет своего колпака более четырех мудрецов. В частности, если два колпака какого-то цвета спрятаны, а третий надет на самого последнего мудреца, то он сможет определить цвет своего колпака. Отсюда остальные мудрецы догадаются, что этого цвета больше ни на ком нет, поэтому определить цвет своего колпака сможет каждый.

Д51. **Подсказка.** Рассмотрите сначала случаи попроще: белых колпаков не принесли совсем, принесли только один, только два и т. д.

Решение. Вместо одной задачи решим целую цепочку задач, начиная с совсем простых:

Задача 0. Если бы белых колпаков не было, то каждый мудрец смог бы определить, что на нем черный колпак.

Задача 1. Если белый колпак один, то первый мудрец ответить бы не смог, а остальные сказали бы, что на них черные колпаки, подумав так: если бы на мне был белый колпак, то первый бы его видел и смог бы понять, что на нем черный колпак (так как он умеет решать задачу 0), но он промолчал.

Задача 2. Если белых колпаков два, то первый мудрец, конечно же, промолчал бы. Второй бы подумал: независимо от цвета моего колпака остались еще и черные, и белые, поэтому первый мудрец в любом случае промолчал бы, и я тоже ничего не могу определить. Третий бы подумал: если бы на мне был белый колпак, то второй бы понимал, что белый остался только один и определил бы цвет своего колпака (так как задачу 1 он решать умеет), поэтому на мне черный колпак. Так же подумали бы и остальные и назвали бы цвета своих колпаков.

Задача 3. Если белых колпаков три, то цвет своего колпака смог бы определить четвертый мудрец (и все последующие). Ведь если бы на нем был белый колпак, то третьему мудрецу пришлось бы решать задачу 2, а это он делать умеет. Раз третий промолчал, четвертому все ясно.

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что определить цвет своего колпака смогут все мудрецы, начиная с одиннадцатого.

Более строго решение может быть изложено с помощью метода математической индукции.

Д52. Решим для начала более простую задачу. Пусть есть только 3 красных и 2 синих колпака, мудрецов всего трое, и султан надел на головы первому и второму мудрецам крас-

ные колпаки, а третьему – синий. Через одну минуту никто не выйдет, после чего первый мудрец подумает: «Если на мне синий колпак, то второй видит два синих колпака и понимает, что на нем красный. Почему же он не вышел? Потому что на мне красный колпак!» Аналогично сможет на второй минуте определить цвет своего колпака и второй мудрец. Третий мудрец ничего понять пока не сможет: если на нем был бы красный колпак, то каждый из двух остальных на первом шаге видел два красных колпака и все равно не мог бы ничего определить. Но за третью минуту он поймет: раз другие мудрецы раньше меня догадались о цвете своих колпаков, они видели не то же самое, что и я. Я видел два красных колпака, а они – красный и синий. Итак, на мне синий колпак».

Вернемся к нашей задаче. Перенумеруем мудрецов: у первого, второго и третьего белые колпаки, у четвертого и пятого красные и у шестого – синий. Если бы на первом был синий колпак, то через одну минуту все бы оставались на местах, а на второй минуте второй мудрец подумал бы: «Я вижу оба синих колпака. Если на мне красный, то третий мудрец видит все красные и все синие колпаки и должен был сразу понять, что на нем белый (здесь тонкость, разберемся позже). Почему же он не вышел? Потому что на мне белый колпак!»

Если бы на первом был красный колпак, второй мудрец рассуждал бы аналогично: «Я вижу все три красных колпака. Если на мне синий, то третий мудрец видит все красные и все синие колпаки и должен был сразу понять, что на нем белый. Почему же он не вышел? Потому что на мне белый колпак!»

Но на первом не синий и не красный колпак. Поэтому через две минуты второй мудрец останется на месте (аналогичная тонкость, ее тоже отложим на потом). Первый мудрец рассуждает не хуже нас с вами и из того, что второй никуда не ушел через две минуты, поймет к концу третьей минуты, что ему надо выйти в белую дверь. Вместе с ним выйдут находящиеся в таком же положении второй и третий мудрецы.

После этого каждый из трех оставшихся мудрецов подумает: «Если бы на мне был белый колпак, то я был бы точно в том же положении, что и первые трое. Но они уже определили цвет своего колпака, а я еще нет. Почему же? Потому что я не в белом колпаке!» И тут же продолжит: «Два других мудреца, пока не угадавших цвет своих колпаков, тоже только что поняли про себя, что колпаки на них не белые. Мы все теперь можем исключить из рассмотрения четыре белых колпака и ушедших мудрецов. Задача сведена к предыдущей». Как уже показано, после этого мудрецы в красных колпаках потратят еще две минуты на определение цвета своих колпаков, а за третью минуту разберется и мудрец в синем колпаке.

Вот теперь обсудим тонкие места. Мы воспользовались тем, что на второй минуте третий и второй мудрецы еще не могли определить цвет своего колпака. А вдруг могли, просто мы не настолько мудры, чтобы понять, как именно? К счастью, даже если бы и могли, на ответ это бы не повлияло. Ведь это значило бы просто, что все мудрецы в белых колпаках определили их цвет на минуту раньше, чем мы думаем. Ну и прекрасно: определили же! Заметим также, что если мудрецы в красных и синем колпаках тоже могли бы как-то определить цвета своих колпаков раньше, чем описано в нашем решении, это по аналогичной причине не повлияло бы на ответ: «белые» мудрецы в своих размышлениях не используют сидение на месте «красных» и «синего», а «красные» – сидение «синего».

Д53. Если у одного из мудрецов нечетное число, то он сразу скажет: «Я знаю твое число». Поэтому первое утверждение «Я не знаю твоего числа» следует понимать как «Мое число четное».

Если число второго мудреца не кратно четырем, то он из этого сделает вывод, что у первого мудреца число вдвое больше, и определит его. Иначе он тоже скажет: «Я не знаю твоего числа», что будет означать «Мое число кратно четырем».

Если число первого мудреца не кратно 8, то он сможет определить число партнера, умножив на 2 свое число. Иначе он тоже скажет: «Я не знаю твоего числа», что будет означать «Мое число кратно восьми» и т. д.

Поскольку числа, данные мудрецам, не могут делиться на сколь угодно большую степень двойки, рано или поздно этот процесс прекратится.

Д54. Подсказка. Чтобы лучше разобраться в этой довольно сложной задаче, решим для начала аналогичную для трех мудрецов и чисел от 1 до 10. Пусть палач обошел всех по три раза, а в начале четвертого обхода первый мудрец сказал, что наибольшее число у него.

Запишем по порядку утверждения про числа, соответствующие высказываниям мудрецов.

1 мудрец: «У меня не 10».

2 мудрец: «У меня не 10».

3 мудрец: «У меня не 10 и не 9».

1 мудрец: «У меня не 9».

2 мудрец: «У меня не 9 и не 8».

3 мудрец: «У меня не 8».

1 мудрец: «У меня не 8 и не 7».

2 мудрец: «У меня не 7».

3 мудрец: «У меня не 7 и не 6».

1 мудрец: «У меня 6, и это самое большое число».

Решение. До того, как первый мудрец сказал, что его число максимальное, мудрецы успели сделать 1000 высказываний. В первых 9 утверждалось только, что у соответствующего мудреца не 1000, в следующих 9 – что не 999 (при этом в первом из этих следующих дополнительно утверждалось, что и не 1000), в следующих 9 – что не 998 (при этом в первом из этих следующих дополнительно утверждалось, что и не 999). Разделим 1000 на 9, получим в частном 111 и в остатке 1. Это означает, что в 999-м высказывании девятый мудрец утверждал, что у него не 890, в 1000-м десятый мудрец сообщил, что у него не 890 и не 889. До этого остальные уже успели сказать, что у них не 890. Поскольку этого как раз хватило первому мудрецу, чтобы понять, что его число – максимальное, этим числом было 889.

Ответ. 889.

Д55. Какие выводы можно сделать из первой фразы А? Во-первых, известное ему произведение P не является произведением двух простых чисел p_1 и p_2 (иначе разложение $1 \cdot p_1 \cdot p_2$ было бы единственным). Во-вторых, если произведение трех различных натуральных чисел не превосходит 50, то их сумма не превосходит $1 + 2 + 25 = 28$. А раз число, которое сообщили математику А, могло бы быть и суммой трех чисел, оно не больше 28. С другой стороны, P не меньше 21. Действительно, если бы P было меньше 21, то были бы возможны как минимум два варианта троек чисел с суммой P : $1 + 2 + (P - 3)$ (произведение не больше $1 \cdot 2 \cdot 17 = 34$) и $1 + 3 + (P - 4)$ (произведение не больше $1 \cdot 3 \cdot 16 = 48$).

Есть только два числа, соответствующие первой фразе А: 24 и 28.

$24 = 1 + 2 + 12 = 1 + 3 + 8 = 1 + 4 + 6 = 2 + 3 + 4$ (суммы соответственно 15, 12, 11 и 9);

$28 = 1 + 2 + 14 = 1 + 4 + 7$ (суммы соответственно 17 и 12).

Ответ Б «Я все равно не знаю их» означает, что известная ему сумма встречается среди этих вариантов более одного раза, т. е. равна 12. Если А сообщили число 24, то он сделает вывод, что задуманы числа 1, 3 и 8. А если ему сообщили число 28, то он поймет, что задуманы числа 1, 4 и 7.

Д56. Зная номера троих других $a < b < c$, математик понимает, что его номер равен либо $a + b + c$, либо $c - a - b$. Раз математик не смог определить свой номер, оба этих выражения должны давать двузначное число (то есть лежать в пределах от 10 до 99) и не совпадать с другими номерами.

Пусть $10 \leq x < y < z < t \leq 99$ —искомые номера, тогда $t = x + y + z$. Поскольку математик с номером t знает числа $x < y < z$, число $z - x - y$ двузначно и отлично от x и y . Но тогда $z = x + y + (z - x - y) \geq 10 + 11 + 12 = 33$. Заметим еще, что $t = z + y + x \geq z + 11 + 10$, то есть $t \geq z + 21$. Математик с номером x знает числа $y < z < t$, значит, $y + z + t \leq 99$. Сложив это неравенство с неравенствами $11 \leq y$ и $z + 21 \leq t$, получим $2z \leq 67$, откуда $z \leq 33$. Значит, $z = 33$. Далее, $t = x + y + z > 10 + y + 33 = 43 + y$, поэтому $99 > y + z + t > y + 33 + (43 + y) = 76 + 2y$. Отсюда $2y \leq 23$, то есть $y \leq 11$. Значит, $y = 11$, $x = 10$, $z = 33$ и $t = 10 + 11 + 23 = 54$. Нетрудно убедиться, что этот набор удовлетворяет условию.

Ответ. 10, 11, 33 и 54.

Д57. Пусть x, y, z — числа, написанные на лбу первого, второго и третьего логика соответственно.

Вначале с точки зрения первого логика возможны варианты $x = y + z$ и $x = |y - z|$. Поэтому первый логик сможет догадаться, какое у него число, только если $y = z$. Значит, после первого высказывания все знают, что $y \neq z$.

Теперь с точки зрения второго логика возможны такие варианты: $y = x + z$ и $y = |x - z|$, причем $y \neq z$. Поэтому второй логик сможет догадаться, какое у него число, только если $x = z$ или $x = 2z$. Значит, после второго высказывания все знают, что $x \neq z$ и $x \neq 2z$.

Тогда с точки зрения третьего логика возможны такие варианты: $z = x + y$ и $z = |x - y|$, причем z не равно ни одному из чисел y, x или $x/2$. Поэтому третий логик сможет догадаться,

какое у него число, только если $x \in \{y, 2y, y/2, 2y/3\}$. Значит, после третьего высказывания все знают, что $x \notin \{y, 2y, y/2, 2y/3\}$.

Теперь с точки зрения первого логика возможны варианты $x = y + z$ и $x = |y - z|$. При этом известно, что $x \notin \{y, 2y, y/2, 2y/3, z, 2z\}$ и $y \neq z$. Поэтому первый логик сможет догадаться, какое у него число, только если $y + z$ или $|y - z|$ равно одному из чисел $y, 2y, y/2, 2y/3, z, 2z$ и $y \neq z$. Это возможно, только если $y - z$ равно одному из чисел $y/2, 2y/3, z, 2z, -y, -2y, -y/2, -2y/3$. В этих случаях $x = y + z$ и равно $3y/2, 4y/3, 3z, 4z, 3y, 4y, 5y/2, 8y/3$ соответственно. Поскольку 50 не делится ни на 3, ни на 4, то имеет место случай $x = 5y/2$. Тогда $y = 20, z = 30$.

Ответ. У второго 20, у третьего 30.

Авторы задач

Заметная часть вошедших в этот выпуск задач являются по сути техническими упражнениями, придуманными специально для данного занятия. Другие, напротив, так давно вошли в математический фольклор, что их авторство установить затруднительно. Ниже указаны известные нам авторы задач, позаимствованных из классической литературы и математических соревнований.

М. Гарднер: 7.12.

А. В. Грибалко: 7.13.

С. В. Грибок: Д54.

К. А. Кноп: 10.12, Д52, Д55.

А. Н. Печковский: 7.14.

И. В. Раскина: 4.18, 9.11.

А. И. Сгибнев Д43.

Р. М. Смаллиан: 4.13, 4.14, 4.15, 9.5, 9.6.

В. А. Уфнаровский, А. Я. Канель-Белов: Д36.

Б. Р. Френкин: Д35.

А. С. Чеботарев: Д39.

А. В. Шаповалов: 8.10, 9.10, Д44, Д46, Д47, Д56, Д57.

Д. Э. Шноль: 9.3, 9.8, Д43.

Литература

1. Р. М. Смаллиан. Как же называется эта книга? – М.: Издательский дом Мещерякова, 2008.
2. Р. М. Смаллиан. Принцесса или тигр? – М.: Мир, 1985.
3. Л. Кэрролл. Логическая игра. – М.: Наука, 1991.
4. М. Милг. Что сказал проводник? // Квант. – 1973. – № 8. – С. 38.

Раздаточный материал

Занятие 1. Легко ли быть рыцарем, или Высказывания и их отрицания

Задача 1. Являются ли высказываниями следующие предложения?

1. Семеро одного не ждут.

2. У кошки четыре ноги.

3. 1 января 2001 года был вторник.

4. Любое четное число, не меньшее 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел

5*. Это утверждение истинно.

Задача 2. Являются ли противоположными высказывания:

1) «Вчера светило солнце» и «Вчера шел дождь»;

2) «Я умею прыгать через лужи» и «Я не умею прыгать через лужи»?

Задача 3. Постройте отрицания к высказываниям, не пользуясь оборотом «Неверно, что...»:

1) Я встретил Вас.

2) Трудно быть богом.

Задача 4*. Британские ученые нашли древнюю рукопись, содержащую всего два утверждения:

1) Оба утверждения этой рукописи ложны.

2) Земля имеет форму чемодана.

Какой вывод можно сделать из этой рукописи?

Задача 5. Объясните, почему данные предложения не являются высказываниями. Можете ли вы сконструировать аналогичные по смыслу высказывания? Как вы думаете, истинны ли они?

1. Семь раз отмерь, один раз отрежь.

2. Что нам стоит дом построить: нарисуем – будем жить.

3. Шел дождь.

Задача 6. Придумайте несколько высказываний и несколько предложений, не являющихся высказываниями.

Задача 7. Являются ли противоположными высказывания:

1) «Нельзя пользоваться калькулятором на уроках математики» и «На уроках математики можно пользоваться калькулятором»;

2) «Андрей выше Мити» и «Митя выше Андрея»?

Задача 8. Постройте отрицания к высказываниям, не пользуясь оборотом «Неверно, что...»:

1) Завтра дальняя дорога выпадает королю.

2) У него деньжонок много.

3) А я денежки люблю.

Задача 9. 1) Директор школы категорически возражает против отмены контроля за прическами. Может ли Степа безнаказанно покрасить волосы в малиновый цвет?

2) Директор школы категорически возражает против отмены решения о запрете контроля за прическами. Может ли Степа безнаказанно покрасить волосы в малиновый цвет?

Задача 10*. Житель острова Крит говорит: «Все критяне лжецы». Истинно или ложно это высказывание? (В этой задаче Крит считается островом рыцарей и лжецов.)

Задача 11. К каждому из высказываний сформулируйте отрицание. Определите, что верно: утверждение или его отрицание.

- 1) Сумма двух двузначных чисел – двузначное число.
- 2) Сумма двух четных чисел – четное число.
- 3) Прямоугольник размером 20×15 можно разрезать на прямоугольники размером 3×5 .
- 4) Квадрат размером 2015×2015 можно разрезать на прямоугольники размером 20×15 .
- 5) В нашей школе найдутся два ученика, имеющие одинаковое число друзей среди учеников нашей школы.
- 6) * Через отверстие, прорезанное в листке из школьной тетради, человек пролезть не может.

Занятие 2. Урок русского языка, или «Все», «некоторые» и отрицание

Задача 1. 1) Серый Волк заинтересовался цветом шапочек. Однажды он встретил Красную Шапочку. Помогите Волку сделать правильный вывод. Придумайте несколько вариантов.

2) Выразите другими словами мысль «Все шапочки красные».

Задача 2. Вася говорит, что слова «для всех» и «для каждого» означают одно и то же. Прав ли Вася?

Задача 3. 1) Означают ли одно и то же высказывания: «Некоторые сантехники любят рэп» и «Некоторые любители рэпа – сантехники»?

2) Означают ли одно и то же высказывания: «Все сантехники любят рэп» и «Все любители рэпа – сантехники»?

Задача 4. Лжец сказал: «В этой корзине все грибы съедобны». Значит ли это, что все грибы в этой корзине ядовиты? (Для простоты забудем об условно съедобных грибах и будем каждый гриб считать либо съедобным, либо ядовитым.)

Задача 5. Рассмотрим два утверждения. Сколько из них могут быть верными?

1) В этой корзине все грибы съедобные.

2) В этой корзине есть хотя бы один ядовитый гриб.

Задача 6. Лжец сказал: «В этой корзине некоторые грибы ядовитые». Что можно узнать из этого высказывания?

Задача 7. Дано утверждение: «Все малышки хорошо поют». Незнайка сформулировал к нему отрицание: «Все малышки поют отвратительно».

1) Как с помощью закона исключенного третьего убедить Незнайку, что он ошибся?

2) Сформулируйте отрицание правильно.

Задача 8. Постройте отрицания к каждому утверждению, не используя частицу «не». Где сможете, укажите, что верно: утверждение или его отрицание. Где сможете, обоснуйте свое мнение примером или контрпримером.

1) На Земле существует хотя бы одна гора выше 10000 м над уровнем моря.

2) Существует хотя бы один вулкан с высотой более 10000 м относительно своего основания.

3) Любой жук помещается в спичечном коробке.

4) Некоторые горные реки быстрые.

5) Бутерброд всегда падает маслом вниз.

Задача 9. Рассмотрим два утверждения:

А: В этой корзине все грибы съедобные.

Б: В этой корзине есть хотя бы один съедобный гриб.

Могут ли быть верными: 1) оба утверждения; 2) ровно одно из них;

3) ни одного?

Задача 10. Является ли высказывание «В этой корзине некоторые грибы съедобные» отрицанием высказывания «В этой корзине некоторые грибы ядовитые»?

Задача 11. Нарисуйте с помощью кругов Эйлера иллюстрацию к каждому высказыванию. Есть ли среди иллюстраций одинаковые? Одинаков ли смысл соответствующих высказываний?

1. Все хоббиты живут в норах.

2. Все жители нор – хоббиты.

3. Некоторые кошки серые.

4. Некоторые серые существа – кошки.

Задача 12. Когда учительница ругала Дениса за плохой почерк, он сказал: «У всех великих людей был плохой почерк, значит, я великий человек». Прав ли он?

Задача 13. Шерлок Холмс допросил Зайца, Волка и Лису по делу о съедении Колобка. Подозреваемые заявили:

Заяц: «Хотя бы один из нас съел Колобка».

Волк: «Хотя бы один из нас не ел Колобка».

Лиса: «Хотя бы один из нас сказал правду».

Как известно, Колобка съела Лиса. Кто сказал правду, а кто солгал?

Задача 14. Комиссия посетила больницу и составила отчет, в котором не было ни одного правдивого утверждения.

«Все врачи имеют достаточный опыт. Некоторые врачи никогда еще не ставили неправильного диагноза. Никто из врачей не опаздывает на работу. Все пациенты довольны лечением. Ни один из них не жалуется на бытовые условия. Некоторые пациенты выздоравливают за один день».

Напишите, как выглядел бы честный отчет.

Задача 15. В комнате собрались несколько жителей острова рыцарей и лжецов. Трое из них сказали следующее:

– Нас тут не больше трех человек. Все мы лжецы.

– Нас тут не больше четырех человек. Не все мы лжецы.

– Нас тут пятеро. Лжецов среди нас не меньше трех.

Сколько в комнате человек и сколько из них лжецов?

Задача 16. Предположим, что справедливы следующие утверждения:

- Среди людей, имеющих телевизоры, не все являются малярами.

- Люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли отсюда, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

Занятие 3. Вдоль по Африке, или Примеры для некоторых и контрпримеры для всех

Задача 1. Определите, какие из утверждений верны. Где можно, подтвердите свой ответ примером (контрпримером). В остальных случаях обоснуйте его по-другому.

1. Все нечетные числа простые.
2. Все простые числа нечетные.
3. Некоторые нечетные числа простые.
4. Некоторые простые числа нечетные.
5. Все четные числа составные.
6. Все числа вида $p + 7$, где p – простое, являются составными.

Задача 2. Верно ли высказывание: «Любое нечетное число, большее 5, можно представить в виде суммы трех простых чисел»?

Задача 3*. Верно ли утверждение: «Все дожившие до наших дней тираннозавры умеют вышивать крестиком»?

Задача 4*. Рассмотрим два высказывания:

А: Некоторым Мишиным одноклассникам 12 лет.

Б: Всем Мишиным одноклассникам 12 лет.

Можно ли, ничего не зная про Мишу, утверждать, что:

- 1) если верно А, то верно и Б;
- 2) если верно Б, то верно и А?

Задача 5. Землянин Вася сказал: «Все марсиане лжецы». Прав ли Вася?

Задача 6. Есть 30 гирек, которые весят 1 г, 2 г, 3 г..., 30 г. Можно ли разложить их: 1) на две кучки одинакового веса; 2) на три кучки одинакового веса?

Задача 7. 1) Можно ли заполнить таблицу 3×3 натуральными числами так, чтобы сумма чисел в каждой строке была четным числом, а в каждом столбце – нечетным? **2)** А таблицу 4×4 ?

Задача 8. Верно ли, что периметр любого четырехугольника, целиком находящегося внутри данного квадрата, меньше периметра этого квадрата?

Задача 9. Верно ли, что все числа вида $2^n + 15$, где n – натуральное число, простые?

Задача 10. Рассмотрим натуральные числа, в записи которых нет нулей.

- 1) Найдется ли среди них десятизначное число, делящееся на сумму своих цифр?
- 2) А стозначное?

Задача 11.1) Какие из высказываний А – Д означают одно и то же?

2) Будем считать высказывание А истинным. Какие из других высказываний в таком случае наверняка истинны?

А: Дед Мороз – волшебник.

Б: Существует хотя бы один дед-волшебник.

В: Существует ровно один дед-волшебник.

Г: Некоторые деды – волшебники.

Д: Некоторые волшебники – деды.

Задача 12*. Найдите ошибку в рассуждениях.

«Рассмотрим три высказывания:

А: Существует хотя бы один дед-волшебник.

Б: Дед Мороз – волшебник.

В: Все деды – волшебники.

Можно ли утверждать, что если верно В, то верно и А? Нет: контрпримером является ситуация, когда множество дедов пусто (аналогично задаче про Мишиных одноклассников).

С другой стороны, если верно В, то верно и Б (иначе Дед Мороз служил бы контрпримером к высказыванию В). Но если верно Б, то верно и А (для доказательства существования достаточно привести пример, в данном случае Дед Мороз – пример). Итак, если верно В, то верно и А».

Задача 13*. Прокомментируйте доказательство существования Деда Мороза, изложенное в виде диалога двух логиков.

Первый: «Если я не ошибаюсь, Дед Мороз существует».

Второй: «Разумеется, Дед Мороз существует, если вы не ошибаетесь».

Первый: «Следовательно, мое утверждение истинно».

Второй: «Разумеется!»

Первый: «Итак, я не ошибся, а вы согласились с тем, что если я не ошибаюсь, то Дед Мороз существует. Следовательно, Дед Мороз существует».

Занятие 4. Пиратская логика, или Высказывания с союзами «и», «или»

Задача 1. Чтобы найти клад, надо пройти от старой пальмы 100 футов на восток, потом 100 футов на север. Четыре пирата высказались про место расположения клада.

Арчи: от пальмы 30 футов на восток, потом 120 футов на север;

Бен: от пальмы 100 футов на восток, потом 120 футов на север;

Вилли: от пальмы 30 футов на восток, потом 100 футов на север;

Глен: от пальмы 100 футов на восток, потом 100 футов на север.

Подберите подходящую строку в таблице истинности для высказываний каждого из 4 пиратов.

Задача 2. Какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны?

1) Утка умеет плавать и летать.

2) Курица умеет плавать и летать.

3) Камбала умеет плавать и летать.

Задача 3. Какие из следующих шести высказываний истинны, а какие ложны?

1) Береза – это куст или дерево. Береза – это либо куст, либо дерево.

2) Собака – животное или камбала – рыба. Либо собака – животное, либо камбала – рыба.

3) Собака – это птица или рыба. Собака – это либо птица, либо рыба.

Задача 4. 1) В сказке Ганса Христиана Андерсена «Новое платье короля» обманщики пообещали, что «платье... обладает чудесным свойством становиться невидимым для всякого человека, который не на своем месте сидит или непроходимо глуп». Изобразите с помощью кругов Эйлера тех, для кого платье должно стать невидимым.

2) Вот отрывок из «Песни ткачей» Владимира Васильева:

Мы не напрасно взялись ткать,
Чтоб мог народ, в конце концов,
О короле сказать:

«Либо он дурак – либо не на месте,
Либо не на месте – либо он дурак,
Либо он дурак – либо не на месте,
Либо не на месте и дурак!»

Представим, что три представителя народа высказались о короле. Первый: «Либо он дурак – либо не на месте»; второй: «Либо не на месте – либо он дурак»; третий: «Либо он дурак, либо не на месте, либо не на месте и дурак». Одинаков ли смысл трех высказываний? Какое из них наиболее точно соответствует сказке?

Задача 5. Постройте отрицания к высказываниям пиратов из задачи 1. Какие из этих отрицаний истинны?

Задача 6. Замените высказывания на противоположные:

1) Но с ветром худо и в трюме течи.

2) Ни Бог, ни дьявол не помогут ему спасти свои суда.

3) Случился штиль иль просто ветер встречный.

4) Вода и ветер сегодня злы, и зол, как черт, капитан.

Задача 7. В ансамбль приглашают всех, кто хорошо поет или танцует. Наташа хорошо и поет, и танцует. Пригласят ли ее в ансамбль?

Задача 8. Каждый из четырех гномов: Бенья, Сеня, Веня и Женя – либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Мы услышали такой разговор:

Бенья – Венья: «Ты врун».

Женья – Бенья: «Сам ты врун!»

Сенья – Женя: «Да оба они вруны!» Подумав, он добавил: «Впрочем, ты тоже».

Кто из гномов говорит правду?

Задача 9. Математик с тремя детьми пришел в пиццерию.

– Хочу, чтобы в пицце были помидоры или грибы, – потребовала Аня.

– Пиццу с помидорами и грибами я есть не буду, – заявил Боря.

– Если будут помидоры, а грибов не будет, то я не буду есть, – добавил Ваня.

– Отлично! – воскликнул математик. – Сделайте нам, пожалуйста, пиццу с...

Так какую же пиццу заказал математик, чтобы все дети ее ели?

Задача 10. Андрей является участником шоу-викторины. Главный приз спрятан в одном из ящиков. Андрей получает 4 подсказки:

1. Приз находится в синем или зеленом ящике.

2. Приз находится в красном или желтом ящике.

3. Приз находится в зеленом ящике.

4. В желтом ящике приза нет.

Три подсказки ошибочны и только одна правильная. Андрей поразмыслил и открыл правильный ящик. Ящик какого цвета он выбрал?

Задача 11. В доме 300 квартир. В квартиры, номера которых кратны 4 или 6, Дед Мороз принес шоколадку. А в квартиры, номера которых кратны 4 и 6, – айфон. Чего Дед Мороз принес в дом больше – айфонов или шоколадок? Во сколько раз?

Задача 12. Зайчишка-хвастунишка залез на пенек и громко закричал: «Во всем лесу нет никого меня смелее, нет никого меня умнее!». Он, конечно же, соврал. Какой из пяти выводов можно сделать?

(А) Все в лесу умнее и смелее его.

(Б) В лесу есть кто-то и умнее его, и смелее.

(В) В лесу есть кто-то его умнее.

(Г) В лесу есть кто-то его смелее.

(Д) В лесу есть кто-то умнее или смелее его.

Задача 13. Король подвел узника к двум дверям, ведущим в две комнаты. В каждой из них может находиться принцесса или тигр. При этом не исключено, что в обеих комнатах находятся принцессы или в обеих – тигры. Узник должен войти в одну из комнат. Если там окажется принцесса, то узник женится на ней. Если тигр – то он растерзает узника. На дверях висят таблички с надписями:

I. В этой комнате находится
принцесса, а во второй сидит тигр

II. В одной из комнат находится
принцесса, а в другой сидит тигр

Король любезно сообщил, что на одной из табличек написана правда, а на другой – нет. Какую комнату вы посоветуете выбрать?

Задача 14. Другого узника ожидало похожее испытание. Но на этот раз король сказал, что утверждения на обеих табличках одновременно либо истинны, либо ложны. А написано было вот что:

I. В этой комнате тигр или в другой — принцесса
--

II. Принцесса в другой комнате

Задача 15. Для третьего узника король повесил на обе двери одинаковые таблички:

В обеих комнатах находятся принцессы

А сказал так: «Если в левой комнате находится принцесса, то утверждение на табличке истинно, если же тигр, то ложно. В правой же комнате все наоборот: утверждение ложно, если там находится принцесса и истинно, если тигр». Куда лучше идти узнику?

Задача 16. Один из пяти братьев испек маме пирог.

Никита сказал: «Это Глеб или Игорь».

Глеб сказал: «Это сделал не я и не Дима».

Игорь сказал: «Вы оба шутите».

Антон сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой обманул».

Дима сказал: «Нет, Антон, ты не прав».

Мама знает, что трое из ее сыновей всегда говорят правду. Кто испек пирог?

Задача 17. Четверо детей сказали друг о друге так:

Маша: «Саша, Наташа и Гриша умеют сидеть на стуле».

Саша: «Маша, Наташа и Гриша не умеют сидеть на стуле».

Наташа: «Маша и Саша солгали».

Гриша: «Маша, Саша и Наташа сказали правду».

Сколько детей на самом деле сказали правду?

Задача 18. «Хоп!» – это игра на внимательность. Игроки по очереди называют натуральные числа в порядке возрастания. Если число кратно 3 или содержит в записи цифру 3, то вместо него надо сказать «Хоп!». Если не ошибаться, получится ряд: 1, 2, хоп, 4, 5, хоп, 7, 8, хоп, 11, хоп, хоп, 14 и т. д. Кто по ошибке назовет запрещенное число, выходит из круга. Побеждает последний оставшийся игрок.

Пять ребят играли в «Хоп!». Известно, что числа 1 и 23 назвал Петя, 2 и 20 – Вася, а 5 и 15 – Таня. Сколько раз победитель сказал «Хоп!»?

Занятие 5. Можно ли дышать на Луне, или Следствие и обратные высказывания

Задача 1. Перед перекрестком папа остановил машину. «У нас мотор сломался!» – испуганно закричал Ваня. «С чего ты взял?» – удивился папа. «Но ты же сам говорил, что если мотор сломался, то машина не едет», – объяснил Ваня. Правильно ли он рассуждал?

Задача 2. Постройте высказывание, обратное данному. Истинно ли данное высказывание? А обратное ему?

- 1) Если последняя цифра натурального числа – 0, 2, 4, 6 или 8, то оно четное.
- 2) Если натуральное число делится на 6, то оно четное.
- 3) Если натуральное число делится на 3, то оно делится и на 5.

Задача 3. «Вырежем» из составного высказывания задачи 5.2 (п. 2) простые высказывания. А: «Число делится на 6», Б: «Число четное». Как мы убедились, для них высказывание «А # Б» истинно, а обратное ему высказывание «Б # А» – ложно. Приведите другие примеры высказываний А и Б с тем же свойством.

Задача 4. Будем считать истинной пословицу «Кто не работает, тот и не ест».

- 1) Известно, что Иван ест. Обязательно ли он работает?
- 2) Известно, что Семен работает. Обязательно ли он ест?

Задача 5. Верно ли высказывание «Если человек допрыгнет с Земли до Луны, то он сможет там дышать»?

Задача 6. 1) Сформулируйте высказывание, начинающееся со слова «все», имеющее тот же смысл, что высказывание «Если человек допрыгнет с Земли до Луны, то он сможет там дышать».

2) Сформулируйте высказывание с союзом «если... то», имеющее тот же смысл, что высказывание «Все дожившие до наших дней тираннозавры умеют вышивать крестиком».

Задача 7. 1) Верно ли, что если Жень – Борин брат, то Боря – Женин брат?

2) Составьте обратное высказывание. Верно ли оно?

Задача 8. На планете Плюк действует правило: увидев чатланина, житель планеты должен сказать «Ку». В суд поступили дела пяти обвиняемых в нарушении этого правила:

- 1) Первый сказал «Ку» облезлой кошке.
- 2) Землянин Второй ничего не сказал при встрече с главным чатланином.
- 3) Часовой Третий спал на посту, не заметил подошедшего чатланина и ничего ему не сказал.
- 4) Четвертый сказал чатланину: «Ку. Как противно приветствовать такого мерзавца!»
- 5) Пятый не знал, что Шестой – чатланин, поэтому при встрече сказал ему: «Здравствуйте, уважаемый!»

Кто, с вашей точки зрения, нарушил данное правило, а кто нет?

Задача 9. Пусть на клетчатой бумаге нарисован многоугольник, составленный из целых клеточек. Рассмотрим два утверждения:

1) Если многоугольник можно разрезать на доминошки (прямоугольники 1 x 2), то количество клеточек четно.

2) Если количество клеточек четно, то многоугольник можно разрезать на доминошки.

Верны ли эти утверждения? Можно ли их доказать (опровергнуть) с помощью примера (контрпримера)?

Задача 10. Говорят, что если человек сорвет цветок папоротника, то станет понимать язык животных. Правду ли говорят?

Задача 11. Из утверждений «Число a делится на 2», «Число a делится на 4», «Число a делится на 12» и «Число a делится на 24» три верных, а одно неверное. Какое? Найдите три таких числа a .

Задача 12. На столе лежат четыре карточки, на которых сверху написано: «А», «Б», «4», «5». Известно, что на одной стороне каждой карточки написана буква, на другой – натуральное число. Какое наименьшее число карточек надо перевернуть, чтобы проверить истинность утверждения: «Если на одной стороне карточки написано четное число, то на другой – гласная буква»?

Задача 13. На вопрос, какая завтра будет погода, синоптик верно ответил:

- (1) «если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя»;
- (2) «если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра»;
- (3) «если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра».

Определите погоду на завтра.

Задача 14*. Прочитайте отрывок из сказки Льюиса Кэрролла «Алиса в стране чудес» в переводе Бориса Заходера. Алиса путает высказывания «А # Б» и «Б # А», а ее собеседники поясняют, почему это не одно и то же. Все ли их примеры удачны?

«– Так бы и сказала! – укоризненно сказал Заяц. – Надо говорить то, что думаешь!»

– Я всегда так и делаю! – выпалила Алиса, а потом, чуточку подумав, честно прибавила: – Ну, во всяком случае... во всяком случае, что я говорю, то и думаю. В общем, это ведь одно и то же!

– Ничего себе! – сказал Шляпа. – Ты бы еще сказала: „я вижу все, что ем“, и „я ем все, что вижу“ – это тоже одно и то же!

– Ты бы еще сказала, – подхватил Заяц, – „я учу то, чего не знаю“ и „я знаю то, чего не учу“ – это тоже одно и то же!

– Ты бы еще сказала, – неожиданно откликнулась Соня, не открывая глаз, – „я дышу, когда сплю“ и „я сплю, когда дышу“ – это тоже одно и то же...»

Занятие 6. «...И чушь прекрасную несли», или Как рассуждать логично, не вдумываясь в смысл высказываний

Задача 1. Верно ли сделаны выводы?

1) Все металлы проводят электричество. Ртуть – металл. Следовательно, ртуть проводит электричество.

2) Все арабы смуглы. Ахмед смугл. Следовательно, Ахмед – араб.

Задача 2. Все вороны собирают картины. Некоторые вороны сидят в птичьей клетке. Следует ли из этого, что некоторые собиратели картин сидят в птичьей клетке?

Задача 3. Все вороны собирают картины. Некоторые собиратели картин сидят в птичьей клетке. Следует ли из этого, что некоторые вороны сидят в птичьей клетке?

Задача 4. Ни одна кочерга не мягкая. Все подушки мягкие. Какой можно сделать вывод?

Задача 5. Является ли точным квадратом число:

а) 1234567;

б) 10101... 01 (всего 2015 единиц и 2014 нулей);

в) 20122013201420152016?

Задача 6. Каждый англичанин любит играть в гольф. Майкл любит играть в гольф. Можно ли наверняка утверждать, что он англичанин?

Задача 7. Докажите с помощью контрпримера, что вывод сделан неверно.

1) Все мои друзья – болельщики «Спартака». А некоторые болельщики «Спартака» занимаются спортом. Следовательно, некоторые мои друзья занимаются спортом.

2) Некоторые кочаны капусты – паровозы. Некоторые паровозы играют на рояле. Значит, некоторые кочаны капусты играют на рояле.

Задача 8. Покажите с помощью рисунка, что рассуждение верное.

1) Все крокодилы умеют летать. Все великаны являются крокодилами. Значит, все великаны могут летать.

2) Некоторые сны ужасны. Ни один ягненок не способен вызвать ужас. Следовательно, некоторые сны не ягнята.

Задача 9. Определите, какие из приведенных рассуждений истинны, а какие ложны.

1) Все англичане любят пудинг. Ни один француз не любит пудинг. Следовательно, ни один француз не англичанин.

2) Ни один лентяй не достоин славы. Некоторые художники – не лентяи. Следовательно, некоторые художники достойны славы.

Задача 10. Сделайте вывод, если это возможно:

1) Сахар сладкий. Некоторые сладкие вещи очень нравятся детям.

2) Некоторые горные кручи непреодолимы. Все заборы вполне преодолимы.

3) Гусеницы не отличаются красноречием. Джон красноречив.

4) Все шутки придуманы для того, чтобы смешить людей. Ни один закон не шутка.

5) Музыка, которую слышно, вызывает колебания воздуха. Музыка, которую не слышно, не стоит того, чтобы за нее платили деньги.

Задача 11. Придумайте свои примеры верных и неверных рассуждений про всех и некоторых.

Задача 12. В следующем рассуждении истинность исходных высказываний не вызывает сомнения. Верен ли вывод? Почему?

Все сочинения Пушкина нельзя прочитать за одну ночь. «Сказка о рыбаке и рыбке» – сочинение Пушкина. Следовательно, «Сказку о рыбаке и рыбке» нельзя прочитать за одну ночь.

Занятие 7. Доказательство от противного

Задача 1. Если рыцарь встречается дракона, то рыцарь вступает в бой.

1) Составьте к этому высказыванию обратное, противоположное и противоположное обратному.

2) Известно, что рыцарь вступил в бой. Означает ли это, что он встретил дракона?

3) Рыцарь не вступил в бой. Означает ли это, что он не встретил дракона?

Задача 2. Многочисленное число не содержит повторяющихся цифр. Докажите, что оно не может быть произведением двух меньших чисел, состоящих только из единиц и нулей.

Задача 3. Двое играют в «крестики-нолики» на бесконечной доске. Крестики ходят первыми. Выигрывает тот, кто смог поставить пять своих значков подряд по вертикали, горизонтали или диагонали. Докажите, что крестики могут как минимум не проиграть.

Задача 4. В клетках шахматной доски как-то расставлены все натуральные числа от 1 до 64. Докажите, что найдутся две соседние по стороне или по вершине клетки, числа в которых отличаются не меньше чем на 9.

Задача 5. Острова архипелага связаны мостами так, что с каждого острова можно дойти до любого другого. Не более чем с двух островов ведет нечетное число мостов, а с остальных – четное. «Докажем», что можно обойти архипелаг, пройдя по каждому мосту ровно один раз.

«Доказательство». Предположим противное: хотя бы с трех островов ведет нечетное число мостов. Заходя на остров, мы «тратим» два моста: по одному вошли, по другому вышли. Поэтому мосты, выходящие с каждого острова, можно объединить в пары. Нечетное число мостов может быть только на самом первом острове (мы с него вышли первый раз, не заходя перед этим) и на последнем (зашли, но не вышли). Если островов с нечетным числом мостов хотя бы три, приходим к противоречию, и пройти по всем мостам ровно один раз нельзя. А если таких островов не более двух, то можно.

Верно ли это «доказательство»?

Задача 6*. Конечно или бесконечно множество простых чисел?

Задача 7. Петя сказал: «Если кот шипит, то рядом собака, и наоборот, если собаки рядом нет, то кот не шипит». Не сказал ли он что-то лишнее?

Задача 8. Все знают: когда Петя готов к уроку, он всегда поднимает руку. И вдруг...

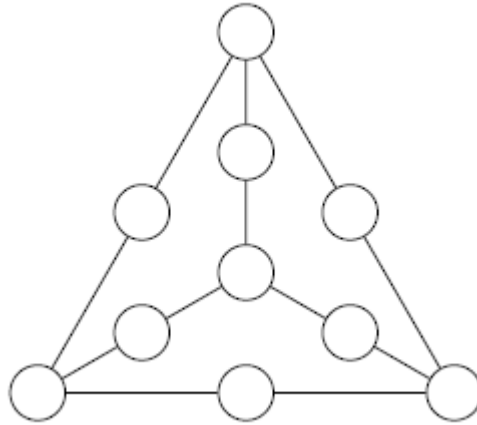
1) Двоечник Вася точно знает, что сегодня Петя не готов к уроку. «Значит, он не будет поднимать руку», – думает Вася. Верно ли он рассуждает?

2) Марья Ивановна видит, что Петя не поднимает руку. «Ага, значит, он к уроку не готов. Вот сейчас вызову и двойку поставлю!» – думает коварная Марья Ивановна. Верно ли она рассуждает?

Задача 9. В вершинах куба расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Докажите, что есть ребро, числа на концах которого отличаются не менее чем на 3.

Задача 10. Десять друзей послали друг другу праздничные открытки, так что каждый послал пять открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.

Задача 11. Можно ли в кружочках расставить все цифры от 0 до 9 так, чтобы сумма трех чисел на каждом из шести отрезков была бы одной и той же?



Задача 12. Двое играют в игру «Щелк!». У них есть прямоугольная шоколадка, разделенная на дольки. Левая нижняя долька отравлена. Ходят по очереди. За ход можно съесть произвольную дольку и все находящиеся справа и сверху от нее. Съевший отравленную дольку проигрывает. Докажите, что у первого игрока есть выигрышная стратегия на любой прямоугольной шоколадке, в которой больше одной дольки (предъявлять стратегию не обязательно).

Задача 13. Круг разбит на 25 секторов, пронумерованных в произвольном порядке числами от 1 до 25. В одном из секторов сидит кузнечик. Он прыгает по кругу, каждым своим прыжком перемещаясь по часовой стрелке на количество секторов, равное номеру текущего сектора. Докажите, что в некотором секторе кузнечик не побывает никогда.

Задача 14. 1) Несколько мальчиков стали в ряд, при этом разница в росте между двумя соседними не более 10 см. Потом их построили по росту. Докажите, что и теперь разница в росте между двумя соседними мальчиками не более 10 см.

2) На уроке танцев 15 мальчиков и 15 девочек построили двумя параллельными колоннами, так что образовалось 15 пар. В каждой паре измерили разницу роста мальчика и девочки (разница берется по абсолютной величине, то есть из большего вычитают меньшее). Максимальная разность оказалась 10 см. В другой раз перед образованием пар каждую колонну предварительно построили по росту. Докажите, что максимальная разность будет не больше 10 см.

Задача 15. Найдите ошибку в рассуждении.

Докажем от противного, что ленивых учеников больше, чем прилежных. Предположим, что прилежных не меньше, чем ленивых. Несомненно, ленивых учеников больше, чем надо. Значит, получается, что прилежных учеников тем более больше, чем надо?! С этим мы, учителя, согласиться никак не можем. Получили противоречие, значит, исходное предположение было неверно, и на самом деле ленивых учеников больше, чем прилежных.

Занятие 8. Равносильность

Задача 1. 1) Известно, что высказывание $A \# B$ истинно. Что можно сказать об истинности высказываний $A \# B$ и $B \# A$?

2) Известно, что высказывание $A \# B$ истинно. Можно ли что-то сказать об истинности высказывания $A \# B$?

3) Известно, что высказывание $A \# B$ ложно. Можно ли что-то сказать об истинности высказывания $A \# B$?

Приведите для каждого случая примеры подходящих высказываний.

Задача 2. Бабушка печет пирог в те и только те дни, когда ждет гостей.

1) Бабушка печет пирог. Можно ли утверждать, что она сегодня ждет гостей?

2) Бабушка не печет пирог. Можно ли утверждать, что сегодня она не ждет гостей?

Задача 3. Равносильны ли высказывания **A** и **B**? Если нет, то следует ли хотя бы одно из них из другого?

1) A: «Некоторые принцессы – красавицы»; B: «Некоторые красавицы – принцессы».

2) A: «Все принцессы – красавицы»; B: «Все красавицы – принцессы».

3) A: «Число N кратно 11»; B: «Сумма цифр числа N , стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах».

4) A: «Число N является квадратом натурального числа»; B: «У числа N нечетное число делителей».

5) A: «У любой девочки из 6 „А“ больше друзей среди одноклассников, чем у любого мальчика из 6 „А“ среди одноклассниц»; B: «В 6 „А“ мальчиков больше, чем девочек».

Задача 4. Чтобы доказать равносильность двух утверждений A и B, необходимо доказать две теоремы: $A \# B$ и $B \# A$. А какое наименьшее число теорем надо доказать, чтобы убедиться в равносильности: а) трех утверждений; б) десяти утверждений?

Задача 5*. В лифте многоэтажного дома работают только две кнопки: одна поднимает лифт на x этажей, вторая опускает на y этажей (если это возможно при данном положении лифта), где натуральные числа x и y меньше количества этажей в доме. Рассмотрим три утверждения:

(1) С любого этажа можно попасть на любой другой.

(2) С любого этажа, кроме последнего, можно подняться на следующий.

(3) С любого этажа, кроме первого, можно спуститься на предыдущий.

1) Покажите, что в зависимости от значений x и y каждое утверждение может быть как верным, так и неверным.

2) Между какими из этих утверждений можно поставить знак следствия и получить верное высказывание? Есть ли среди данных трех утверждений равносильные?

Задача 6. Иа-Иа считает, что у Винни-Пуха хорошее настроение бывает тогда и только тогда, когда Винни-Пух хорошенько подкрепился. Съев всё, что было у Кролика, Винни-Пух застрял в норе, и его настроение сразу испортилось. Прав ли Иа-Иа?

Задача 7. Будем считать, что трава зеленая, а небо голубое. Определите, какие из данных высказываний истинны, а какие ложны:

1) Если трава зеленая, то небо голубое.

2) Если трава зеленая, то небо оранжевое.

3) Если трава оранжевая, то небо зеленое.

4) Если трава оранжевая, то небо голубое.

5) Трава зеленая тогда и только тогда, когда небо голубое.

6) Трава зеленая тогда и только тогда, когда небо оранжевое.

7) Трава оранжевая тогда и только тогда, когда небо зеленое.

8) Трава оранжевая тогда и только тогда, когда небо голубое.

Задача 8. В лесу живут только ляпустики и мордасики. Равносильны ли для обитателей леса три утверждения:

- (1) все ляпустики кузявые;
- (2) если кто-то некузяв, то он мордасик;
- (3) никто, кроме мордасиков, не может быть некузявым?

Задача 9. Объект охраняют пятеро часовых: А, Б, В, Г и Д. При этом справедливы следующие утверждения:

- 1) Если А спит, то и Б спит.
 - 2) Хотя бы один из Г и Д спит.
 - 3) Ровно один из Б и В спит.
 - 4) В спит тогда и только тогда, когда спит Г.
 - 5) Если Д спит, то А и Г тоже спят.
- Перечислите всех спящих часовых.

Задача 10*. Трех братьев пригласили на день рождения. Всего ожидалось 17 человек. «Вот бы мальчиков было больше, чем девочек», – захотел первый. «Вот бы при любой рассадке по кругу нашлось два мальчика рядом», – захотел второй. «Вот бы при любой рассадке по кругу нашелся гость, сидящий между двумя мальчиками», – захотел третий. Докажите, что все трое хотят одного и того же.

Указание. Докажите равносильность трех утверждений по кругу: $1 \# 2 \# 3 \# 1$.

Задача 11*. У профессора есть n утверждений A_1, \dots, A_n . О том, что все эти утверждения равносильны, знает только он. Профессор по очереди дает ученикам для доказательства такие теоремы: $A_i \# A_j$. Нельзя давать теорему, если она следует из ранее доказанных. Какое наибольшее число теорем могут доказать ученики, если: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) в общем случае?

Задача 1. Из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 Незнайка задумал два числа и сообщил Знайке их произведение. Знайка не смог отгадать задуманные числа. Какое произведение мог сообщить Незнайка?

Задача 2. Встретились как-то два математика и разговорились:

А: «У меня трое сыновей».

Б: «Сколько им лет?»

А: «Произведение их возрастов равно 36. А сумма их возрастов равна номеру твоего дома».

Б: «Я все равно не знаю, сколько лет каждому».

А: «Мой старший сын рыжий».

После этого Б смог определить, сколько лет сыновьям А. Сколько же?

Задача 3. За столом сидело несколько жителей острова рыцарей и лжецов. Путешественник спросил каждого про его ближайших соседей. Каждый ответил: «У меня оба соседа – лжецы». Путешественник сказал: «Если бы вас было на одного больше или на одного меньше, я бы смог узнать, сколько среди вас рыцарей. А так не могу». Сколько человек было за столом?

Задача 4. Два мудреца написали на семи карточках числа от 5 до 11. После этого они перемешали карточки, первый мудрец взял себе три карточки, второй взял две, а две оставшиеся карточки они не глядя спрятали в мешок. Изучив свои карточки, первый мудрец сказал второму: «Я знаю, что сумма чисел на твоих карточках четна!» Какие числа написаны на карточках первого мудреца?

Задача 5. Один из двух братьев-близнецов по имени Джон совершил преступление. Известно, что по крайней мере один из близнецов всегда лжет. Судья спросил у братьев по очереди: «Вы – Джон?» Первый ответил: «Да». Второй тоже что-то ответил. После этого судья смог определить, кто из них на самом деле Джон. Определите это и вы.

Задача 6. На острове живут два племени: рыцарей и лжецов. Путешественник встретил двух островитян и спросил одного из них: «Вы оба рыцари?» Тот ответил «да» или «нет». Путешественник не смог определить, кто перед ним, и спросил у того же человека: «Вы из одного племени?» Тот ответил «да» или «нет», и теперь путешественник понял, из какого племени каждый из островитян. Кого он встретил?

Задача 7. Путешественник посетил деревню, каждый житель которой либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Все жители деревни встали в круг лицом к центру, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив ли тот. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют лжецы. Определите и вы, чему она равна.

Задача 8. Путешественник на острове рыцарей и лжецов пришел в гости к своему знакомому рыцарю и увидел его за круглым столом с пятью гостями.

– Интересно, а сколько среди вас рыцарей? – спросил он.

– А ты задай каждому какой-нибудь вопрос и узнай сам, – посоветовал один из гостей.

– Хорошо. Пусть каждый ответит на вопрос: кто твои соседи? – спросил путешественник.

На этот вопрос все ответили одинаково.

– Данных недостаточно! – сказал путешественник.

– Но сегодня день моего рождения, не забывай об этом, – сказал один из гостей.

– Да, сегодня день его рождения! – сказал его сосед. И путешественник смог узнать, сколько за столом рыцарей.

Сколько же их?

Задача 9. Саша и Маша загадали по натуральному числу и сказали их Васе. Вася написал на одном листе бумаги сумму загаданных чисел, а на другом – их произведение, после чего один из листов спрятал, а другой (на нем оказалось написано число 2002) показал Саше и Маше. Увидев это число, Саша сказал, что не знает, какое число загадала Маша. Услышав это, Маша сказала, что не знает, какое число загадал Саша. Какое число загадала Маша?

Задача 10. Есть 9 карточек с цифрами 1, 2, ..., 9. Их перетасовали, отдали четыре Ивану, четыре Василисе и одну Бабе-Яге. Иван сообщил вслух, что сумма цифр на его карточках оканчивается на 7.

1) Знает ли теперь Василиса карточку Бабы-Яги?

2) Знает ли теперь Баба-Яга набор карточек Василисы?

3) Может ли случиться, что про какую-то карточку, кроме своей, Баба-Яга знает, у кого она находится?

Задача 11. Пять мудрецов играют в мафию. Среди них два мафиози, два мирных жителя и комиссар. Мафиози знают друг друга, комиссар знает все, мирные жители изначально ничего не знают. Мафиози могут говорить что угодно. Остальные говорят только то, в чем сами уверены. Состоялся разговор:

А: «Д – мирный житель».

Б: «Нет, Д – мафиози».

В: «Д не знает, кто я».

Г: «Д знает, кто я».

Д: «Б – мафиози».

Определите роли тех игроков, для кого это возможно.

Задача 1. Двум мудрецам принесли один белый и два черных колпака. Затем им завязали глаза и надели каждому на голову по колпаку, а третий спрятали. После этого мудрецам развязали глаза, и каждый смог увидеть, какой колпак на голове у другого. Затем у первого мудреца спросили, какой колпак на голове у него самого, и он ответил правильно. Какие колпаки надели на головы мудрецам?

Задача 2. Двум мудрецам принесли один белый и два черных колпака. Затем им завязали глаза и надели каждому на голову по черному колпаку, а белый спрятали. Когда им развязали глаза, у первого мудреца спросили, какой колпак на голове у него самого. Что он ответил? Когда после этого тот же вопрос задали второму мудрецу, он ответил правильно. Как он догадался?

Задача 3. Изменится ли решение предыдущей задачи, если вначале принесли: а) один белый и три черных колпака; б) два белых и два черных колпака?

Задача 4. Трем мудрецам принесли два белых и три черных колпака. Затем им завязали глаза и надели каждому на голову по черному колпаку, а белые спрятали. Когда им развязали глаза, у первого мудреца спросили, знает ли он, какой колпак на голове у него самого.

а) Что он ответил?

б) Тот же вопрос задали второму мудрецу. Что ответил второй?

в) Наконец, спросили третьего мудреца, и он правильно назвал цвет своего колпака. Как он рассуждал?

Задача 5*. *Парадокс трех мудрецов.* В задаче о трех мудрецах первый смог бы определить цвет своего колпака лишь в одном случае: если бы видел перед собой двух мудрецов в белых колпаках. Но и второй, и третий мудрецы знают, что это не так: они же видят черные колпаки друг на друге. Поэтому ответ «Не знаю», произнесенный первым мудрецом, для каждого из них очевиден и не содержит никакой информации.

С другой стороны, если первому мудрецу не задавать вопроса, то второй окажется в положении первого, а третий – в положении второго, и не сможет ответить на вопрос. Но третий ответил, значит, информация в ответе первого все же была! Какая же?

Задача 6. Как можно изменить количество колпаков в задаче о трех мудрецах, чтобы решение всех пунктов в точности сохранилось?

Задача 7*. Придумайте задачу, аналогичную задаче о трех мудрецах, для большего количества мудрецов. Решите задачу для четырех и для пяти мудрецов.

Задача 8*. В купе поезда собрались 7 мудрецов. Окно было открыто. Поезд въехал в тоннель, и лица всех мудрецов оказались испачканы сажей. Каждый видел, что и другие испачканы, но себя не видел и спокойно продолжал беседу. В купе вошел проводник и сказал: «Господа, среди вас есть люди с грязными лицами. В поезде воды нет. Зато на каждой станции поезд стоит достаточно долго, так что рекомендую испачкавшимся пойти и умыться». Несколько станций никто из мудрецов не реагировал на это замечание, но на некоторой станции все одновременно встали и пошли умываться.

1) На какой по счету станции мудрецы поняли, что следует умыться?

2) *Парадокс проводника.* Если бы проводник промолчал, каждый бы по-прежнему считал себя чистым и умываться не пошел бы. Но ведь каждый видел, что среди них есть испачкавшиеся, так что проводник, казалось бы, ничего нового не сказал. Так что же сказал проводник?

Задача 9. Установим соответствие между задачами о колпаках и о проводнике (при одинаковом количестве мудрецов). Будем считать, что на мудреце с грязным лицом надет черный колпак, а иначе – белый. Тогда ответу «Не знаю» в задаче о колпаках соответствует нежелание умываться в задаче о проводнике. Как перевести слова проводника на язык задачи о колпаках?

Задача 10. Три дамы сидят в купе с испачканными лицами и смеются. Вдруг А думает: «Почему Б не понимает, что В смеется над ней? О Боже! Они смеются надо мной!» Что в этой задаче играет роль проводника?

Задача 11. Фразы типа «Это верно», «А знает, что это верно», «Б знает, что А знает, что это верно», «В знает, что Б знает, что А знает, что это верно» можно продолжать до бес-

конечности, и все они имеют разный смысл, но разницу эту с каждым «витком» улавливать все труднее. Придумайте подобные цепочки, где эта разница заметна.

Приложение к занятию 10. Продолжаем играть в мудрецов

Задача 12. Пяти мудрецам принесли колпаки всех семи цветов радуги и восьмой, белый, колпак. Затем мудрецов построили в затылок друг другу и надели каждому по колпаку. Каждый мудрец видит колпаки всех стоящих перед ним, но не видит ни своего колпака, ни колпаки стоящих сзади. Мудрецам сообщили, что белый колпак на кого-то надет. Затем по очереди, начиная с последнего, стали спрашивать каждого, знает ли он цвет своего колпака. Как только кто-то верно назовет цвет своего колпака, всем дадут по конфете. Но если он ошибется, всех казнят. Чем закончится эта история?

Задача 13. Пяти мудрецам принесли шесть колпаков: два желтых, два красных и два зеленых. Мудрецов построили в затылок друг другу и надели каждому по колпаку. Каждый мудрец видит колпаки всех стоящих перед ним, но не видит ни своего колпака, ни колпаков стоящих сзади. Затем по очереди, начиная с последнего, стали спрашивать каждого, знает ли он цвет своего колпака.

1) На мудрецов надеты колпаки в таком порядке: красный, желтый, зеленый, красный, желтый (а второй зеленый спрятан). Что ответят мудрецы?

2) На мудрецов надеты колпаки в таком порядке: красный, красный, желтый, желтый, зеленый (а второй зеленый спрятан). Что ответят мудрецы?

3) Стоявший сзади мудрец верно ответил на вопрос. Докажите, что и остальные смогут определить цвета своих колпаков.

4) Один из мудрецов верно ответил на вопрос. Обязательно ли остальные после этого тоже смогут определить цвета своих колпаков?

5) Докажите, что не менее трех мудрецов правильно определяют цвет своего колпака.

6) Придумайте ситуацию, в которой верно ответить на вопрос смогут четыре из пяти мудрецов.

Задача 14. 1) Двум мудрецам написали на лбу по натуральному числу и сообщили, что эти числа последовательные. Когда мудрецы посмотрели друг на друга, между ними состоялся такой диалог:

А: «Я не знаю моего числа».

Б: «А я знаю мое число».

Какие числа были написаны?