ПОСОБИЕ

по олимпиадной математике

Уровень А1

издание 2

Татьяна Бабичева, Игорь Яковлев, Дмитрий Бабичев, Сергей Бабичев, Наталья Бабичева, Александр Жогов, Михаил Подаев, Мария Федотова

Под редакцией Татьяны Бабичевой

Оглавление

Введение

О данной серии книг

В данной серии книг мы разбираем темы, необходимые для решения олимпиадных задач и просто трудные для самостоятельного освоения. Книга будет полезна как для школьников, самостоятельно готовящихся к олимпиадам по математике, так и для руководителей математических кружков.

Конечно, школьная математика — далеко не вся математика, но для понимания наших книг вам не потребуется более глубоких знаний.

В нашем курсе много тем, потому что, решая олимпиадные задачи, часто приходится разбираться с несколькими подзадачами разного типа. Например, для решения задачи, кажущейся чисто геометрической, может понадобиться комбинаторика, а для задачи на теорию чисел — инварианты и принцип Дирихле.

В каждой из рассматриваемых тем есть теоретическая часть, дающая новый материал или дополняющая известный. В качестве иллюстрации мы приводим решение двух-трёх задач с подробными пояснениями. Также несколько задач предлагаем для закрепления, — их решения приведены в конце каждой главы книги.

Мы разбили серию книг на уровни — по образцу международных уровней знания иностранного языка. Почему именно так? Во-первых, мы рассказываем о «языке» олимпиадной математики. Классическое разбиение по классам кажется нам неактуальным (зачастую для понимания темы достаточно математических знаний уровня начальной школы). К тому же, темы в книгах «переплетаются», и без прохождения темы уровня A1 иногда затруднительно понять ту же тему, расширенную на A2.

Что же вам предстоит на каждом из уровней?

Давайте пользоваться аналогией с иностранными языками:

Уровень **A1**. Вы понимаете (в общих чертах) иностранную речь, можете поговорить о семье, занятиях, хобби, путешествиях, погоде, купить что-нибудь. В общем, стандартный набор туриста.

Вы умеете спрягать базовые глаголы, знакомы с различными временами? Вас не вводит в ступор вопрос «Как дела?». Поздравляю, у вас хороший уровень A1! Этого достаточно для выживания.

Так же и в олимпиадной математике — вы сможете «выжить» на олимпиадах начального уровня, понять, что от вас требуется в задачах и сформулировать решение. Скорее всего, для понимания тем этого уровня вам не потребуются знания математики дальше шестого класса. (Задача может быть из олимпиады 11-го класса, — методика решения не изменится).

На уровне **A2** вы можете обсудить предпочтения в искусстве, поговорить о культурных различиях, основных тенденциях в обществе и так далее.

Вы строите сложносочинённые предложения («Это Петя, чей папа работает в банке. Я о нем уже рассказывал»), можете написать другу в фейсбук, рассказать об отпуске и планах на будущее, понять суть любого разговора на языке.

В олимпиадной математике — вы можете быстро распознать, на какую тему, скорее всего, задача из олимпиады среднего уровня, составить решение, обойти типичные ошибки в его оформлении. Для понимания тем этого уровня вам не потребуется математических знаний глубже 7-8 класса.

Владея языком на уровне **B1**, вы можете обсудить сложный характер прабабушки, последние научные открытия (с точки зрения неспециалиста) и нового президента Франции. Вы знакомы с условным наклонением, без подготовки можете общаться в любой бытовой ситуации. Надо отметить, что время, необходимое на овладение очередным уровнем, растёт нелинейно и увеличивается с повышением сложности.

В олимпиадной математике — вы умеете решать задачи почти из любого ее раздела. Возможно, эти решения не всегда изящны, но для вас не представляет труда определить сложность задачи, а также использовать решения, затрагивающие несколько тем. Скорее всего, вы — призёр математических олимпиад, перешли в сильную математическую школу и задумываетесь о профессии, связанной с математикой. Для понимания тем этого уровня вам, вероятно, не потребуется знаний школьной математики выше 9-10 класса.

Уровень **B2** — пороговый уровень для поступления в иностранные университеты. Вы способны логически рассуждать и аргументировать позицию по любой востребованной в обществе теме. Можете написать статью, официальное письмо, объяснить точку зрения коллеге и доказать его неправоту. Просмотр фильмов на языке оригинала, конспектирование и понимание радиопередач не представляет для вас сложности. «Свободное владение языком» обычно подразумевает как раз уровень B2.

В олимпиадной математике — вероятно, вы прошли на финал всероссийской олимпиады по математике.

До следующего уровня — **C1** — доходят немногие. Для того, чтобы хорошо преподавать иностранный язык, требуется уровень не менее C1. Какое-то количество преподавателей иностранного языка имеют как раз этот уровень, но, к сожалению, это редкость, и остальные имеют уровень B2 или ниже.

Человек на уровне C1 в состоянии прочесть и понять научный текст, воспринять речь с сильным акцентом, написать доклад или диплом на иностранном языке.

В олимпиадной математике — скорее всего, вы призёр финала всероссийской олимпиады по математике, и все вокруг знают о вашей любви к науке. Вы побывали на нескольких сборах по олимпиадной математике и, возможно, опробовали себя в качестве преподавателя.

C2 — уровень образованного носителя-лингвиста. Он в состоянии воспринимать и производить тексты любых жанров — написать роман, диссертацию, подготовить речь для научной конференции физиков-ядерщиков и готов исправлять ошибки в речи и текстах урождённых носителей языка. Как правило, иностранцы считают обладателя C2 своим, только иногда могут сомневаться, из какого он региона.

В олимпиадной математике — это люди, которые не только способны решить задачи любой сложности, но и придумывают свои.

Мы подробно и последовательно разбираем материал. Но иногда мы позволяем себе немного поэкспериментировать и показываем задачи, относительно трудные для школьников средних классов. Мы специально не выделяем их звёздочками. Звёздочки перед задачами обычно пугают и мешают верить в свои силы, а ведь кто-то из не очень опытных мог бы понять эти сложные задачки. Для более опытных олимпиадников последовательное прочтение серии наших книг, начиная с данной, позволит освежить и углубить знания. Им эти сложные задачки будут приятными подарками и откроют уходящие в даль заманчивые математические просторы.

О книге, которую вы сейчас читаете

Эта книга по уровню сложности рассчитана на учеников 6-7 классов, которые начинают свой путь в олимпиадной математике. Большая часть тем не подразумевает, что читатель имеет достаточные знания алгебры или геометрии, но некоторые кванты всё-таки требуют знакомства с основными темами 7-го класса. Если вы ещё не перешли в 7 класс, это не страшно. Можно будет вернуться к пропущенным местам позже.

Традиционно большинство олимпиадных задач не особенно привязаны к классу, поэтому данная книга будет полезна и старшеклассникам. (Некоторые из предложенных в книге задач действительно были предложены в вариантах олимпиад за старшие классы). Кроме того, проблема большинства ребят в том, что зачастую они сильно переусложняют решение. Важно понять, как решать задачи простыми и изящными методами. Книга разбита на несколько разделов, объединённых общей идеей. Подробное разбиение на темы вы видите в содержании. Каждый раздел, в свою очередь, разбит на несколько «квантов», организованных следующим образом: в первой части каждого кванта рассмотрена теория, посвящённая данной теме, а также приведено подробное решение нескольких типовых задач.

Вторая часть кванта — задачник–«задавальник» по данной теме, для каждой из задач которого указан источник. Решение задач из задавальника можно прочитать, например, в указанных источниках (на сайте математического праздника или другой олимпиады или в указанной книге, на сайте problems.ru). Также, данное издание этой книги включает в себя дополнительную книгу с решениями задач из задавальника.

Третья часть кванта — несколько задач для самостоятельного решения. Ряд из них — авторские и они впервые увидят свет именно здесь. Их решения приведены в конце книги. Не удивляйтесь, если какая-то задача встретится несколько раз в разных темах. Это означает, что её можно решить разными методами.

Олимпиадные задачи, включённые в данное пособие, имеют маркировку типа «Год.Класс.Номер». Например, задача с отметкой «Математический праздник 2010.6.4» — это задача под номером 4 из варианта за 6 класс Математического праздника 2010 года.

Указание номера задачи из олимпиады позволяет составить представление о её сложности: чем больше номер задачи, тем она, как правило, труднее. На Математическом празднике и Турнире Архимеда обычно предлагается по шесть задач, на Городской устной олимпиаде — девять.

Использованная литература

Мы начинаем список рекомендованной и использованной литературы с книги [6], которая, несмотря на то, что была издана больше 30 лет назад, является классической во всех смыслах. Вряд ли найдётся хотя бы один победитель международной олимпиады от команды России, который бы её не читал. Мы тоже присоединяемся к рекомендациям обязательно её прочитать.

Книга [11] выдержала уже три издания и содержит материалы популярнейшей в Москве (и не только) олимпиады «Математический праздник», в которой принимают участие ученики шестых и седьмых классов. Последнее, третье издание, содержит задачи до 2008 года.

Другой популярный турнир математиков 5-го и 6-го класса — весенний турнир Архимеда. Ему посвящена книга [4], в которой собраны все задачи до 2008 года включительно.

После школьного этапа Всероссийской Олимпиады по математике следует районный (муниципальный) этап. Хотя шестиклассники и семиклассники лишены возможности выйти в региональные этапы по своим классам, которые начинают проводиться только с восьмых классов, но получить опыт олимпиадной математики они могут. В книге [2] — много задач районного этапа, в том числе и для школьников, начиная с 6-го класса. Её первая глава посвящена решению классических задач олимпиадной математики.

С этой книгой перекликается [1], в которой приведены и разобраны задачи Московской областной олимпиады с 1992 по 2003 годы.

Задачи на теорию чисел часто представляют большую сложность для изучающих. В книге [3] имеется теоретический материал и много самих задач. Интересно, что последняя, 19-я задача в ЕГЭ как раз в основном посвящена задачам на теорию чисел, хотя её решение часто доступно ученикам 6-7 классов при надлежащей подготовке.

Хотя книга [7] в основном рассчитана на школьников 8-11 классов, методы, которые там рассматриваются, будут полезны всем изучающим олимпиадную математику.

По отдельным разделам математики, необходимым для решения олимпиадных задач, тоже написано много хороших книг и статей в журналах. Хорошим введением в математическую индукцию может служить, например, небольшая книга [10], по принципу крайнего — статья [8]. Впрочем, на различные темы, нас интересующие, очень много книг в своё время было опубликовано в серии «Библиотечка Кванта», один список которых, вероятно, потребовал бы десяток страниц. Тем не менее мы никак не можем пропустить книгу [9] из этой серии, содержащую 1001 интересную задачу для 5-8-х классов.

Для решения задач важно не только знать и понимать идеи решения, но уметь владеть техническими навыками, для чего требуется перерешать много технических задач, которых, к примеру, очень много в [5].

На некоторые печатные материалы сослаться явным образом не получилось, так как они, к сожалению, не были изданы или же не были найдены в продаже в виде книг и брошюр (но существуют но сайтах олимпиад). Это относится к материалам уральских турниров юных математиков, к зимнему туру турнира Архимеда, начиная с 2012 года и к материалам Городской устной математической олимпиады для 6—7 классов с момента её появления (2002 год). Надеемся, что публикация этих материалов в данной книге позволит расширить их географию.

Благодарности

За описание уровней языковых компетенций и зарождение идеи о подобном разделении книг по олимпиадной математике — Надежду Соколову (её сайт — http://sokolova.pro/), преподавателя по французскому и итальянскому языкам.

За техническую сторону вопроса авторы сердечно благодарят Никиту Першукова, нашего администратора `Git`.

За вёрстку в TEX и коррекцию — Марию Тарасевич.

За правки с точки зрения русского языка и читаемости текста — Арчета.

За предложенные правки в изложении материала и бета–тестирование материалов книги, авторам хочется особенно выделить неоценимый вклад

Мещерина Ильи
Каца Давида
Кравченко Сергея
Солдатовой Сони
Громова Бориса
Вечер Анастасии
Разводова Дмитрия
Разводова Ивана
Утяцкой Алины
Бутенко Егора
Лисова Петра

Художественное оформление книги выполнила замечательный иллюстратор Саша Бланк (http://www.instagram.com/sasha.blanc).

Также авторы благодарят всех своих учеников–вдохновителей, своих коллег, а также весь коллектив ЦРИТО МФТИ за неоценимую поддержку в процессе написания и издания данной книги.

Второе издание

Во втором издании данной книги, исправленном и дополненном, мы поменяли изложение некоторых тем на более верное методически и простое для читателя. Также, был значительно переработан задавальник в сторону лучшего соответствия сложности и адекватности тем изложенному материалу, в том числе, некоторые задачи были перенесены в следующий том данной серии книг.

В связи с большим количеством запросов, к данному изданию теперь прилагается дополнительная книга–решебник с решениями всех задач, предложенных в задавальнике.

Глава 1

Начала олимпиадной математики

В данной главе приведены задачи с достаточно интуитивными методами оформления решений, не требующими специфических знаний.

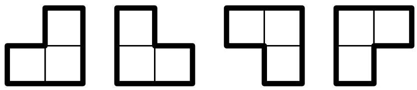
Здесь рассматриваются такие темы, как примеры и конструкции, переливания, разрезания и взвешивания. Чтобы решение задачи засчитали полностью, обычно достаточно привести алгоритм, показать, как разрезать фигурку, чтобы она удовлетворяла какому-либо условию, либо просто привести пример или контрпример.

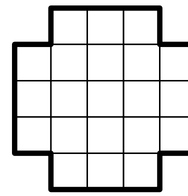
1 Разрезания

Материал для разбора на занятии

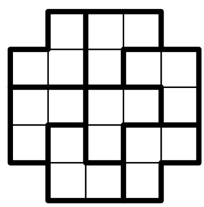
Задачи на разрезание — одни из самых простых в оформлении задач на олимпиадах. В зависимости от правильности полученного рисунка, обычно по критериям за данную задачу можно получить или 0 баллов, или полный балл. Рассмотрим пример из районной олимпиады по математике.

Задача 1.1.1. Разрежьте фигуру на рисунке справа на уголки



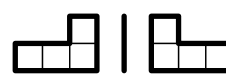


Решение. В данной задаче нам уже известна форма фигур, на которые мы должны разрезать исходную, поэтому мы можем получить следующее решение.



□

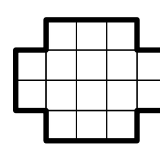
Обычно в задачах на разрезание геометрические фигуры называются равными, если их можно наложить друг на друга так, чтобы они полностью совпали.



Возможно, это произойдёт после «переворачивания» бумажки, из которой они вырезаны. Например, фигуры, изображенные справа, являются, с точки зрения классических задач на разрезание, равными.

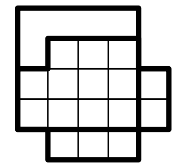
Иногда задачи на разрезание принимают немного другой вид.

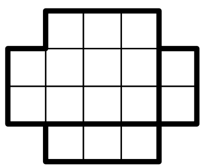
Задача 1.1.2. Разрежьте фигуру, полученную из прямоугольника 4×5 вырезанием четырёх угловых клеток 1×1, на три части, не являющиеся квадратами, так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат.

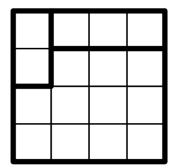


Решение. Чтобы решить задачу, в которой из частей одной фигуры надо получить другую, стоит вначале определиться, какую именно фигуру мы должны получить. Подсчитаем количество клеток в исходной фигуре. Их 16. Мы должны получить квадрат, а это значит, что полученный квадрат должен быть размера 4×4.

Будем пытаться понять, какие части останутся на своих местах, рисуя квадрат на данной фигуре, вначале попытавшись «задеть» как можно большую её площадь. Так как фигура симметрична, получим следующий рисунок. Тогда, оставив целой общую с квадратом фигуру, получим требуемое разрезание и собранный из этих частей квадрат.





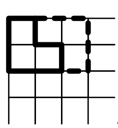
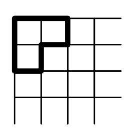


□

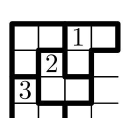
Бывают задачи, в которых на разрезания наложены дополнительные ограничения.

Задача 1.1.3. («Математический праздник» — 2011.6.2) Разрежьте квадрат 6×6 клеток на уголки из трёх клеток так, чтобы никакие 2 уголка не образовывали прямоугольник 2×3.

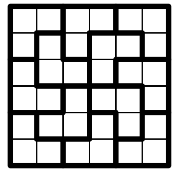
Решение. В задачах подобных типов нет конкретных методов решения, достаточно использовать здравый смысл и логику и, таким образом, делать некий «осмысленный перебор». Например, достаточно быстро можно понять, что фигура, которая «задевает» угловую клетку, не может стоять так

, а должна стоять только так: .

Повторив рассуждения для всех четырёх углов доски 6 на 6, мы, таким образом, уже «вырезали» из квадрата 4 фигурки. Попытавшись закрыть клетку 1, получим, что фигурка может лежать, например, как показано на рисунке. Затем попробуем закрыть клетку 2, откуда получаем единственный вариант, не противоречащий условию. Потом закроем клетку 3.



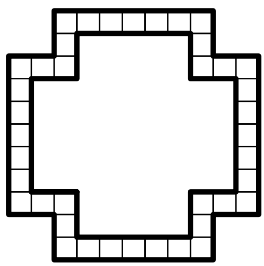
Далее, такую же картинку получим в каждом углу.



□

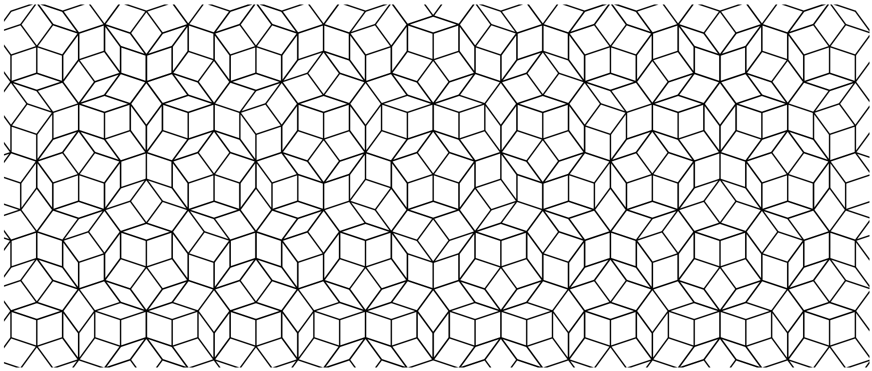
Задавальник

Задача 1.1.4. («Математический праздник» — 2012.6.1) Разрежьте рамку на 16 равных частей.



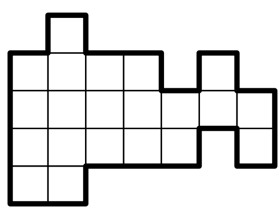
Задача 1.1.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.6.1) Покажите, как разрезать квадрат размером 5×5 клеток на «уголки» шириной в одну клетку так, чтобы все «уголки» состояли из разного количества клеток. (Длины «сторон» уголка могут быть как одинаковыми, так и различными).

Задача 1.1.6. («Математический праздник» — 2011.7.1) На рисунке ниже приведён фрагмент мозаики, которая состоит из ромбиков двух видов: «широких» и «узких». Нарисуйте, как по линиям мозаики вырезать фигуру, состоящую ровно из 3 «широких» и 8 «узких» ромбиков. (Фигура не должна распадаться на части.)



Задача 1.1.7. («Математический праздник» — 2015.1) Упорный Вася хотел из клетчатой доски 8×8 вырезать 12 прямоугольников 1×2 так, чтобы из оставшейся части доски невозможно было вырезать прямоугольник $1{\times}3$. (Резать можно только по линиям сетки). И у него это получилось! Покажите на рисунке, как он мог это сделать.

Задача 1.1.8. («Математический праздник» — 2016.1) Закрасьте на рисунке одну клетку и незакрашенную часть разрежьте по линиям сетки на две одинаковые части.

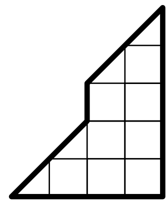


Задача 1.1.9. («Математический праздник» — 2016.7.1) Мальвина велела Буратино разрезать квадрат на 7 прямоугольников (необязательно различных), у каждого из которых одна сторона в два раза больше другой. Выполнимо ли это задание?

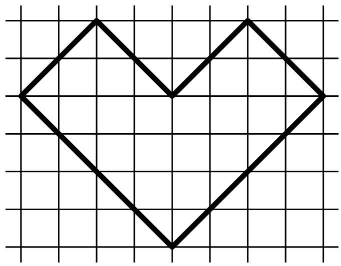
Задача 1.1.10. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2004.7.1) Нарисуйте шестиугольник, который жюри не сможет разрезать на два четырёхугольника.

Задача 1.1.11. («Математический праздник» — 2003.7.1) На клетчатой бумаге нарисован квадрат. Известно, что его можно разрезать на прямоугольники размером 1×6 клеток. Докажите, что этот квадрат можно также разрезать на уголки из трёх клеток.

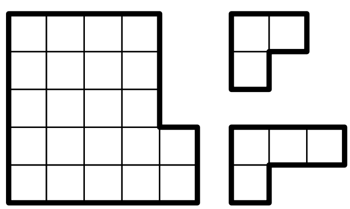
Задача 1.1.12. («Математический праздник» — 2006.6.2) Разрежьте фигуру на две одинаковые (совпадающие при наложении) части.



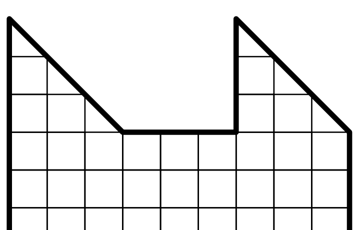
Задача 1.1.13. («Математический праздник» — 2009.6.2) Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на восемь одинаковых частей.



Задача 1.1.14. («Математический праздник» — 2002.6.2;7.2) Незнайка разрезал фигуру на трёхклеточные и четырёхклеточные уголки, нарисованные справа от неё. Сколько трёхклеточных уголков могло получиться?

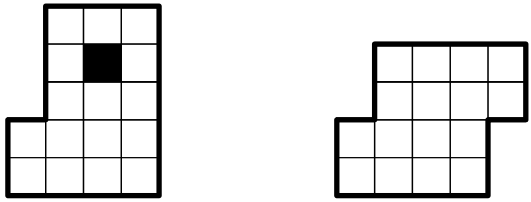


Задача 1.1.15. («Математический праздник» — 1995.6.2) Разрежьте изображённую на рисунке фигуру на две одинаковые части.

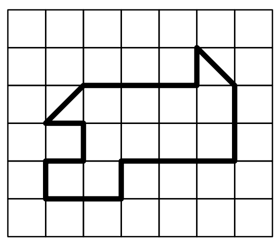


Задача 1.1.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.6.2) Разрежьте фигуру с вырезанным квадратиком на две одинаковые части, из которых можно составить вторую фигуру. Части

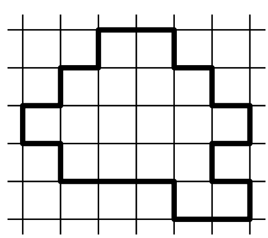
разрешается и поворачивать, и переворачивать.



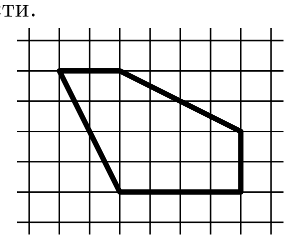
Задача 1.1.17. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.6.2) Добавьте к фигуре, изображённой на рисунке, две клетки (по линиям сетки) так, чтобы после этого её можно было разрезать по линиям сетки на две равные части.



Задача 1.1.18. («Математический праздник» — 1999.7.2) Разрежьте фигуру (по границам клеток) на три равные (одинаковые по форме и величине) части.

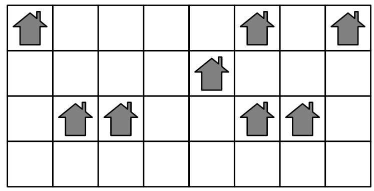


Задача 1.1.19. («Математический праздник» — 2006.7.2) Разрежьте изображённый на рисунке пятиугольник на две одинаковые (совпадающие при наложении) части.



Задача 1.1.20. (Турнир Архимеда — 2012.2) Требуется разбить участок

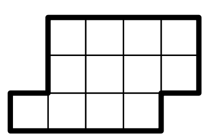
земли на 8 одинаковых дачных участков (то есть совпадающих как по площади, так и по форме). Границы участков должны проходить по линиям сетки, на каждом участке должен располагаться домик.



Задача 1.1.21. («Математический праздник» — 2012.7.2) Квадрат разрезали на несколько частей. Переложив эти части, из них всех сложили треугольник. Затем к этим частям добавили ещё одну фигурку — и оказалось, что из нового набора фигурок тоже можно сложить как квадрат, так и треугольник. Покажите, как такое могло бы произойти (нарисуйте, как именно эти два квадрата и два треугольника могли бы быть составлены из фигурок).

Задача 1.1.22. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.7.2) Квадрат разрезали на двенадцать прямоугольных треугольников. Могут ли десять из них оказаться равными друг другу, а два оставшихся — отличаться и от них, и друг от друга?

Задача 1.1.23. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.7.2) Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две одинаковые части тремя способами (резать можно только по линиям сетки).

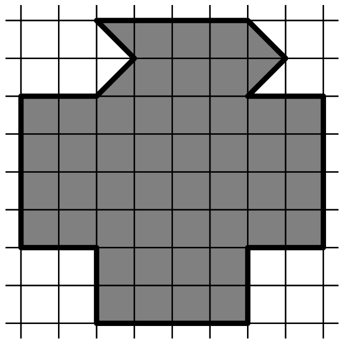


Задача 1.1.24. («Математический праздник» — 1991.6.3) Как одним прямолинейным разрезом рассечь два лежащих на сковороде квадратных блина на две равные части каждый?

Задача 1.1.25. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.6.3) Существует ли 10-угольник, который можно разрезать на 5 треугольников?

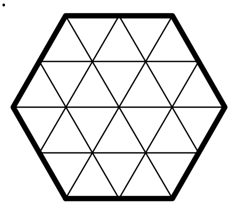
Задача 1.1.26. («Математический праздник» — 2008.6.4) Разрежьте какой-нибудь квадрат на квадратики двух разных размеров так, чтобы маленьких было столько же, сколько и больших.

Задача 1.1.27. («Математический праздник» — 2017.6.4) Разрежьте фигуру на двенадцать одинаковых частей.



Задача 1.1.28. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.6.5) Мачеха приказала Золушке сшить квадратное одеяло из пяти прямоугольных кусков так, чтобы длины сторон всех кусков были попарно различны и составляли целое число дюймов. Сможет ли Золушка выполнить задание без помощи феи-крёстной?

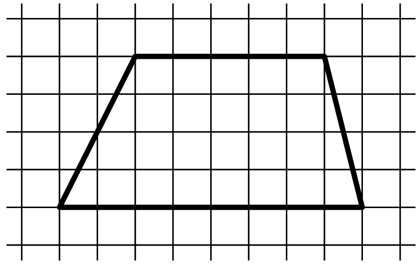
Задача 1.1.29. («Математический праздник» — 2015.6.4;7.3) Разрежьте нарисованный шестиугольник на четыре одинаковые фигуры. Резать можно только по линиям сетки.



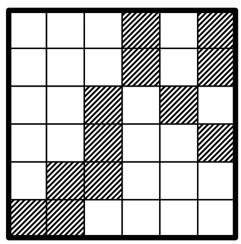
Задача 1.1.30. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.7.3) Разрежьте по клеточкам квадрат 5×5 на три части с равными периметрами.

Задача 1.1.31. («Математический праздник» — 2003.6.4) Прямоугольник разрезан на несколько прямоугольников, периметр каждого из которых — целое число метров. Верно ли, что периметр исходного прямоугольника — тоже целое число метров?

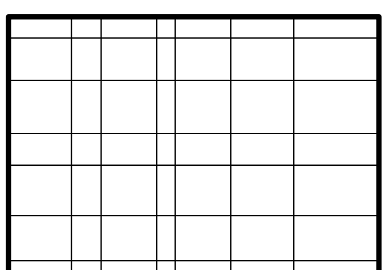
Задача 1.1.32. («Математический праздник» — 1998.6.4) Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две части, из которых можно сложить треугольник.



Задача 1.1.33. («Математический праздник» — 1997.6.4) Разрежьте изображённую на рисунке доску на четыре одинаковые части так, чтобы каждая из них содержала три заштрихованные клетки.



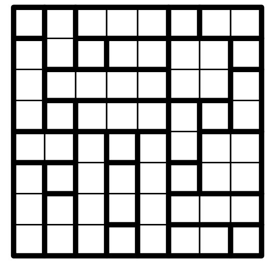
Задача 1.1.34. («Математический праздник» — 2003.7.4) Прямоугольник разрезали шестью вертикальными и шестью горизонтальными разрезами на 49 прямоугольников, как показано на рисунке ниже. Оказалось, что периметр каждого из получившихся прямоугольников — целое число метров. Обязательно ли периметр исходного прямоугольника — целое число метров?



Задача 1.1.35. («Математический праздник» — 2003.7.4) Существует ли десятиугольник, который одной прямой можно разбить на 6 частей?

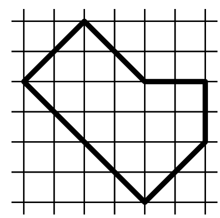
Задача 1.1.36. («Математический праздник» — 1994.6.5) Разрежьте квадрат на три части, из которых можно сложить треугольник с тремя острыми углами и тремя различными сторонами.

Задача 1.1.37. («Математический праздник» — 2010.6.5) Саша разрезал шахматную доску 8×8 по границам клеток на 30 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались даже углами (рисунок ниже). Попытайтесь улучшить его достижение, разрезав доску на большее число прямоугольников с соблюдением того же условия.



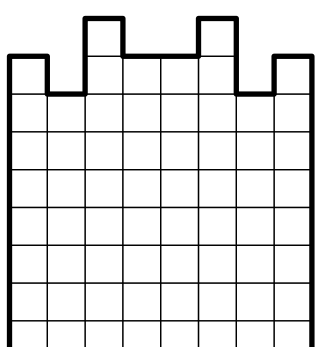
Задача 1.1.38. («Математический праздник» — 1996.6.5) Можно ли разрезать на четыре остроугольных треугольника: а) какой-нибудь выпуклый пятиугольник; б) правильный пятиугольник?

Задача 1.1.39. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.6.5) Разрежьте фигуру на рисунке на три равные части (не обязательно по линиям сетки). (Равными называются части, которые можно совместить, наложив друг на друга. При этом части можно поворачивать и переворачивать.)



Задача 1.1.40. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.7.5) Разрежьте по клеточкам квадрат 7×7 на девять прямоугольников (не обязательно различных), из которых можно будет сложить любой прямоугольник со сторонами, не превосходящими 7.

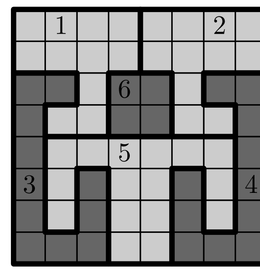
Задача 1.1.41. («Математический праздник» — 1995.7.6) Разрежьте изображённую фигуру на две части, из которых можно сложить целый квадрат 8×8.



Задача 1.1.42. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.6.7) Вася называет прямоугольник, стороны которого отличаются на 1, *почти–квадратом*. (Например, прямоугольник со сторонами 5 и 6 — это почти-квадрат.) Существует ли почти–квадрат, который можно разрезать на 2010 почти-квадратов?

Задача 1.1.43. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.6.8) На сколько равных восьмиугольников можно разрезать квадрат размером 8×8? (Все разрезы должны проходить по линиям сетки.)

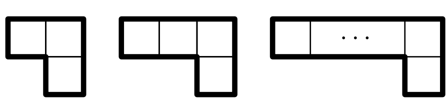
Задача 1.1.44. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.6.9) Дима разрезал картонный квадрат 8×8 по границам клеток на шесть частей (см. рисунок). Оказалось, что квадрат остался *крепким*: если положить его на стол и потянуть (вдоль стола) за любую часть в любом направлении, то весь квадрат потянется вместе с этой частью. Покажите, как разрезать такой квадрат по границам клеток не менее, чем на 27 частей, чтобы квадрат оставался крепким и в каждой части было не более 16 клеток.



Задача 1.1.45. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.6.9) Дан квадрат $2n \times 2n$. Вася закрашивает в нём две любые клетки. Всегда ли Петя сможет разрезать этот квадрат на две равные части так, чтобы закрашенные клетки были в разных половинках?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1. Буквой «Г» называется клетчатая фигура, состоящая из $2, 3, 4, \ldots$ клеток, идущих подряд, и ещё одной клетки, имеющей общую сторону с одной из крайних клеток:



Имеется набор, состоящий из букв «Г», в котором фигура каждого размера встречается ровно по два раза. Составьте квадрат 8×8 из фигур набора так, чтобы не было фигуры какого-то размера, использованной ровно один раз.

Задача 1.2. Один австрийский художник и картограф, сидя в тюрьме за дебош в пивной, очень хотел сделать флаг для своей организации. Он планировал, чтобы флаг был квадратным, размером 5 на 5 метров, с дыркой в самом центре размером 1 на 1 метр. Однако в его распоряжении имелся лишь прямоугольный кусок ткани размером 6 на 4 метра с разлиновкой по квадратной сетке шагом в 1 метр, линии которой были параллельны сторонам прямоугольника и начинались от них. Также ему хотелось разрезать исходный кусок не более, чем на 4 части, которые ещё и вдобавок должны были быть одинаковыми, чтобы их проще было прятать, а разрезы он хотел делать только по линиям разлиновки. К тому же, если стража заметила бы у него куски ткани прямоугольной формы, она бы сразу могла его заподозрить. Помогите молодому человеку справиться с этой задачей.

Задача 1.3. Имеются прямоугольники 1×1, 1×2, $1 \times 3, \ldots, 1 \times 13$. Составьте из них прямоугольник, каждая сторона которого больше единицы.

2 Взвешивания

Материал для разбора на занятии

Если вы участвовали в олимпиадах ранее, то наверняка сталкивались с задачами на взвешивания.

Они, как правило, сводятся к поиску за конечное число взвешиваний предмета, отличающегося от остальных по весу. Поиск осуществляется путём операций сравнения как одиночных элементов, так и групп элементов, между собой или с гирями определённого веса. При этом могут использоваться весы, отличающиеся по своим возможностям. Самый простой случай — чашечные весы, позволяющие сравнивать объекты или группы объектов между собой (как с использованием гирь, так и без, что оговаривается в условии задачи).

Простейшей задачей на эту тему является следующая.

Задача 1.2.1. Есть 3 внешне одинаковые конфеты, из которых одна невкусная (более лёгкая, потому что без начинки). Как с помощью чашечных весов без гирь выделить невкусную конфету за 1 взвешивание?

Вначале разберёмся, что такое чашечные весы без гирь и что они умеют.

Одной из самых распространённых ошибок учащихся на олимпиадах является убеждённость, что если мы не видим, на сколько конкретно тяжелее одна чаша весов, то уж понять, в каком из двух взвешиваний чаша «перевешивала сильнее», мы можем. За такое «решение» жюри ставит ноль баллов.

Также, к сожалению, большинство участников олимпиад при решении задачи на взвешивание категорически не понимают, как его правильно оформить.

Решение. Пронумеруем конфеты и положим на различные чаши весов конфету номер 1 и конфету номер 2. Возможны три случая.

1. Если перевесила чаша с конфетой номер 1, значит невкусной является конфета номер 2.

2. Если перевесила чаша с конфетой номер 2, значит невкусной является конфета номер 1.

3. Если на весах установилось равенство, то невкусной является оставшаяся конфета — конфета номер 3.

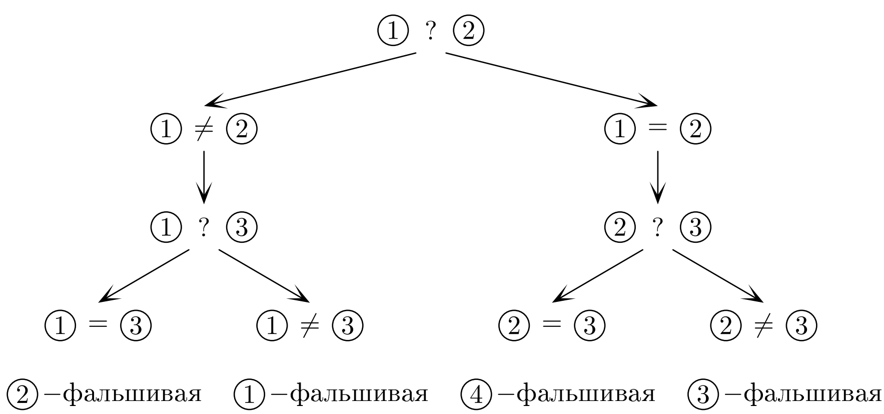
Решение задачи после перебора всех случаев является законченным. Не забудьте указать все возможные случаи, потеря одного, даже очевидного, на ваш взгляд, случая, может лишить вас баллов за задачу, в том числе и всех. □

Иногда неизвестно, легче или тяжелее остальных объект, который надо найти. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.2.2. Среди четырёх монет ровно одна фальшивая (причём неизвестно, легче ли эта монета или тяжелее настоящей). Как выделить её с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

Решение. Одним из методов оформления решения подобных задач является схема возможных действий.

Схема взвешиваний для ① ② ③ ④



□

Также, в задачах на взвешивания условие может поменяться посредством добавления «испорченности» весов, показывающих какое-то искажение. Например, весы могут показывать равновесие при всех случаях, когда веса на отдельных чашах отличаются менее, чем на какое-либо количество грамм. Также, например, в условие может быть введён фиксированный набор гирь, которые тоже можно использовать.

Также, задача на взвешивание может быть дана и для обычных весов, показывающих вес.

Задача 1.2.3. Королю принесли ежегодную дань — по одному мешку с золотыми монетами от каждой из 10 провинций его королевства, но тайная служба донесла, что в одном из мешков монеты фальшивые, весящие 9 грамм (во всех же остальных — одинаковые и весящие 10 грамм). У короля есть дорогие показывающие точный вес заморские весы, которые он может использовать лишь единожды. Как королю найти мешок с фальшивыми монетами? (В каждом мешке монет большое количество.)

Решение. Решать данную задачу, можно, опираясь на противоречие ожидаемого веса (если бы все монеты были настоящими) и реального, полученного из-за фальшивых монет. Например, мы можем взять из каждого мешка разное количество монет: из первого 1 монету, из второго 2 и т. д. Если бы фальшивых монет не было, весы показали бы вес в 550 грамм $\big((1+2+\cdots+10)\cdot 10\big)$. Однако, наличие фальшивых монет снизит его до $550-x$, где x — номер мешка с фальшивыми монетами. □

Если вы встретили тип задач, с которым вы ранее не встречались, не волнуйтесь, а просто попробуйте свои силы!

Задавальник

Задача 1.2.4. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.7.1) В наборе из 10 гирек любые четыре гирьки перевешивают любые три из оставшихся. Верно ли, что любые три гирьки из этого набора перевешивают любые две из оставшихся семи?

Задача 1.2.5. («Математический праздник» — 2017.7.2) У аптекаря есть три гирьки, с помощью которых он одному покупателю отвесил 100 г йода, другому — 101 г мёда, а третьему — 102 г перекиси водорода. Гирьки он ставил всегда на одну чашу весов, а товар — на другую. Могло ли быть так, что каждая гирька легче 90 г?

Задача 1.2.6. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2005-2006.7.3) У продавца есть стрелочные весы для взвешивания сахара с двумя чашками. Весы могут показывать вес от 0 до 5 кг. При этом сахар можно класть только на левую чашку, а гири можно ставить на любую из двух чашек. Какое наименьшее количество гирь достаточно иметь продавцу, чтобы взвесить любое количество сахара от 0 до 25 кг?

Задача 1.2.7. (Турнир Архимеда — 2016.5) На столе три слитка золота весом в 3, 4 и 5 г. На каждом слитке указан вес, но надписи могут быть перепутаны. Вес слитков можно сравнивать на чашечных весах без гирь, но в момент взвешивания на одну из чашек (любую) прыгает невидимый гном весом в 1 г. Как, сделав не более двух взвешиваний, выяснить правильный вес хотя бы одного слитка?

Задача 1.2.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.6.6) Четыре внешне одинаковые монетки весят 1, 2, 3 и 4 грамма. Можно ли за четыре взвешивания на чашечных весах без гирь узнать, какая из них сколько весит?

Задача 1.2.9. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2007-2008.7.2) В копилке лежат 30 монет, среди которых 2 фальшивые: одна легче настоящих на 0,5 г, другая легче настоящих на 1 г. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить 14 настоящих монет?

Задача 1.2.10. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.6.7) Ювелир изготовил 6 одинаковых по виду серебряных украшений массой 22 г, 23 г, 24 г, 32 г, 34 г и 36 г и поручил своему подмастерью выбить на каждом украшении его массу. Может ли ювелир за два взвешивания на чашечных весах без стрелок и гирек определить, не перепутал ли подмастерье украшения?

Задача 1.2.11. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников — 1998-1999.8.2) У фальшивомонетчика есть 40 внешне одинаковых монет, среди которых 2 фальшивые — они легче, чем остальные, и весят одинаково. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 20 настоящих?

Задача 1.2.12. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.6.8) Известно, что среди 63 монет есть 7 фальшивых. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие монеты также весят одинаково, и фальшивая монета легче настоящей. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить 7 настоящих монет?

Задача 1.2.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.6.9) Есть 13 золотых и 14 серебряных монет, из которых ровно одна фальшивая. Известно, что если фальшивая монета — золотая, то она легче настоящей, так как сделана из меньшего количества золота, а если фальшивая монета — серебряная, то она тяжелее настоящей, так как сделана из более дешёвого и тяжёлого металла. Как найти фальшивую монету за три взвешивания на чашечных весах без гирь? (Настоящие золотые монеты весят одинаково и настоящие серебряные монеты весят одинаково.)

Задача 1.2.14. (Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2009.8.4) Имеются чашечные весы и 100 монет, среди которых несколько (больше 0, но меньше 99) фальшивых монет. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие тоже весят одинаково, при этом фальшивая монета легче настоящей. Можно делать взвешивание на весах, заплатив перед взвешиванием одну из монет. Докажите, что можно с гарантией обнаружить настоящую монету.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.4. Есть 9 внешне одинаковых конфет, из которых одна невкусная (более лёгкая, потому что без начинки). Как с помощью чашечных весов без гирь выделить невкусную конфету за 2 взвешивания?

Задача 1.5. Среди семи монет имеются 2 фальшивые (более лёгкие). За 3 взвешивания на чашечных весах без гирь определите обе фальшивые монеты.

Задача 1.6. Среди 9 монет ровно одна фальшивая (неизвестно, легче она или тяжелее настоящей). Как определить её с помощью трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь?

Задача 1.7. Есть 9 кг зерна и чашечные весы с гирькой в 200 грамм. Как с помощью 3 взвешиваний отмерить ровно 2 кг зерна?

Задача 1.8. У бобра-хранителя зерна есть 6 гирь с нанесённой маркировкой 1, 2, 3, 4, 5 и 6 кг. Однако он подозревает, что у двух гирь может быть перепутана маркировка. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах, на которых можно сравнить веса любых групп гирь, определить, верна ли данная маркировка? Гири изготовлены из разных материалов, поэтому «на глаз» определить данную информацию он не может.

3 Переливания

Материал для разбора на занятии

Одна из олимпиадных тем, условия задач которой вызывают много вопросов у незнакомых с данной спецификой школьников, связана с задачами на переливания. Ниже приведена одна из самых известных — так называемая задача Пуассона. Знаменитый французский математик, механик и физик Симеон Дени Пуассон (1781 – 1840) решил эту задачу в юности и впоследствии утверждал, что именно она побудила его стать математиком.

Задача 1.3.1. Влад имеет 12 л молока и хочет выпить его половину. Но у него есть только 8-литровый и 5-литровый сосуды. Каким образом ему отмерить 6 л?

Решение. Типичным решением не знакомого с данной темой участника олимпиады является следующее: «Владу следует отлить половину из двенадцатилитрового сосуда в восьмилитровый. $12 : 2 = 6$, значит, у нас есть 6 литров».

К сожалению, за данное решение, при всём желании, ни одного балла получить не выйдет. Как зачастую бывает, в условии задачи не указано то, что авторы считают очевидным — а именно, что все сосуды у нас являются непрозрачными и даже такой формы, что понять, насколько они заполнены, не представляется возможным.

Единственные действия, которые являются доступными — это вылить целиком всё содержимое из одного сосуда в другой или налить в сосуд столько, сколько в него поместится.

Стандартным методом оформления решения таких задач является построение таблицы, показывающей, какое количество жидкости содержится на каждом шаге в каждом из сосудов.

Например, решение данной задачи можно оформить так.

Размер сосуда	12	8	5
Шаг 0	12	0	0
Шаг 1	4	8	0
Шаг 2	4	3	5
Шаг 3	9	3	0
Шаг 4	9	0	3
Шаг 5	1	8	3
Шаг 6	1	6	5

Это можно расшифровать следующим образом: на первом шаге мы наполняем полностью 8-литровый сосуд, на втором — выливаем, сколько поместится, из 8-литрового в 5-литровый и т. д. □

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.3.2. Злой маг Крокобобр варит зелье. На последнем этапе он должен добавить ровно 4 миллилитра мёртвой воды. К сожалению, он пришёл к роднику мёртвой воды только с колбами в 3 миллилитра и в 5 миллилитров. Как стоит поступить Крокобобру, чтобы доварить своё зелье?

Решение. В данной задаче решение полностью напоминает предыдущее, единственное, можно учесть, что объём одного из сосудов — родника — неограничен. Мы можем учитывать или не учитывать этот «виртуальный» сосуд в нашей таблице, на полученный балл это повлиять не должно. Если вам удобнее учитывать, то неограниченность родника лучше всего обозначить знаком «бесконечность» — ∞.

Размер сосуда	∞	3	5
Шаг 0	∞	0	0
Шаг 1	∞	0	5
Шаг 2	∞	3	2
Шаг 3	∞	0	2
Шаг 4	∞	2	0
Шаг 5	∞	2	5
Шаг 6	∞	3	4

При решении задач на переливания важно учитывать, что если на каком-то шаге у вас повторился один из предыдущих — то вы явно где-то что-то переусложняете и идёте не туда. □

Задавальник

Задача 1.3.3. («Математический праздник» — 2006.6.4) Таня стоит на берегу речки. У неё есть два глиняных кувшина: один — на 5 литров, а про второй Таня помнит лишь то, что он вмещает то ли 3, то ли 4 литра. Помогите Тане определить ёмкость второго кувшина. (Заглядывая в кувшин, нельзя понять, сколько в нём воды.)

Задача 1.3.4. (Всероссийская олимпиада школьников — 2014.5.3) Как отмерить 8 л воды, находясь около реки и имея два ведра вместимостью 10 л и 6 л (8 л воды должно получиться в одном ведре)?

Задача 1.3.5. (Всероссийская олимпиада школьников — 2014.6.3) Как отмерить 2 л воды, находясь около реки и имея два ведра вместимостью 10 л и 6 л? (Два литра воды должны получиться в одном ведре.)

Задача 1.3.6. (Московская математическая олимпиада — 1964.9.2) В n стаканах достаточно большой вместительности налито поровну воды. Разрешается переливать из любого стакана в любой другой столько воды, сколько имеется в этом последнем. При каких n можно за конечное число шагов слить воду в один стакан?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.9. В бочке 16 с половиной литров варенья. Как отлить из неё 6 литров с помощью девятилитрового ведра и пятилитрового бидона?

Задача 1.10. Говорят, что великий чернокнижник Иоганн Фауст, изучая труды, чудом спасенные из Александрийской библиотеки во время её разрушения, наткнулся на древний манускрипт, в котором описывался рецепт изготовления эликсира бессмертия, для которого были необходимы слёзы драконов, крокодилов и котов. С трудом добыв все эти ингредиенты, Фауст вернулся в свою лабораторию с 6-литровой склянкой, доверху наполненной слезами дракона, 4-литровой, наполненной слезами крокодилов, и 5-литровой — слезами котов. Также в его распоряжении имелся пустой 8-литровый сосуд. Зелья бессмертия требуется ровно 6 литров, причём концентрация всех его ингредиентов должна быть равной. Учитывая силы, затраченные на добычу всего этого, ни одной капли проливать было нельзя. Также Фауст понимал, что все эти жидкости перемешиваются очень быстро до равномерного состояния. Помогите ему справиться с данной задачей.

Задача 1.11. Злой маг Крокобобр варит зелье. На последнем этапе он должен добавить три раза подряд ровно по 3 миллилитра мертвой воды. К сожалению, в этот раз он принёс в свою башню только колбу с 9 миллилитрами мёртвой воды и у него нет времени сбегать к роднику ещё раз. У себя он нашёл пустые пробирки в 5, 4 и 2 миллилитра объёмом. Как стоит поступить Крокобобру, чтобы доварить своё зелье?

4 Примеры и конструкции

Материал для разбора на занятии

Название данной темы, в принципе, говорит само за себя — в условии задачи нас обычно просят привести пример или составить конструкцию, обладающую заданными свойствами. При этом, оформление решения обычно не вызывает проблем — достаточно привести требуемый пример, и, возможно, объяснить, почему он подходит. Доказательств того, что он «самый красивый» или единственный, не требуется.

Подобные задачи достаточно часто можно встретить начальными (традиционно, наиболее лёгкими) номерами в различных олимпиадах муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников.

Вас могут попросить привести пример, связанный практически со всем, чем угодно, начиная с арифметических конструкций и заканчивая конструкциями геометрическими, логическими и так далее.

Рассмотрим несколько задач с районных олимпиад.

Задача 1.4.1. Найдите десять натуральных чисел, сумма и произведение которых равны двадцати.

Решение. В данной задаче нам заранее известно произведение данных 10 чисел, поэтому первым делом мы раскладываем число 20 на простые множители (напомним, что простым называется число, которое делится только на 1 и само себя, само число 1 простым не является): $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Таким образом, становится очевидно, что не менее 7 множителей равны 1. Далее простым перебором случаев мы можем получить, что

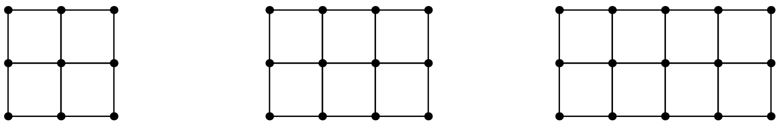
$$20 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 10.$$

Этот пример и следует записать в решении, при этом можно не описывать, как мы его получили. □

Рассмотрим более «геометрическую» задачу.

Задача 1.4.2. Нарисуйте 8 одинаковых квадратов так, чтобы ровно 15 точек были вершинами нарисованных квадратов.

Решение. У каждого квадрата имеется 4 вершины. Значит, если квадраты расположены в разных местах, вершин будет $4 \times 8 = 32$, что более чем в 2 раза больше, чем нам требуется. В таком случае попробуем «скучковать» наши квадраты. Сгруппируем 4 квадрата в виде одного большого (рисунок а)). Это даст нам 9 вершин. Осталось добавить ещё 4 квадрата, добавив только 6 вершин. Добавим ещё 2 квадрата рядом, дополнив фигуру до прямоугольника 2×3 (рисунок б)). Добавилось 2 квадрата и 3 вершины. Добавив ещё 2 квадрата таким же образом, получим требуемое — рисунок в). Его мы и приводим в качестве и решения, и ответа. $\square$



а) б) в)

Вернёмся к арифметике.

Задача 1.4.3. Найдите какое-нибудь натуральное число, которое в 2002 раза больше суммы своих цифр.

Решение. Очевидно, что наше число делится на 2002, значит, ещё и, как минимум, четырёхзначное. Чтобы не составлять ужасных уравнений с множеством неизвестных, начнём выписывать числа, делящиеся на 2002 и проверять их на удовлетворение условию:

$$2002 \neq (2+0+0+2) \cdot 2002 = 4 \cdot 2002,$$

$$2002 \cdot 2 = 4004 \neq (4+0+0+4) \cdot 2002 = 8 \cdot 2002,$$
$$2002 \cdot 3 = 6006 \neq (6+0+0+6) \cdot 2002 = 12 \cdot 2002,$$
$$2002 \cdot 4 = 8008 \neq (8+0+0+8) \cdot 2002 = 16 \cdot 2002,$$
$$2002 \cdot 5 = 10010 \neq (1+0+0+1+0) \cdot 2002 = 2 \cdot 2002,$$

Наконец, следующее число удовлетворит условию, и мы получим ответ

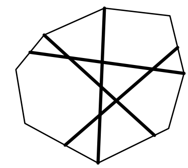
$$2002 \cdot 6 = 12012 = (1+2+0+1+2) \cdot 2002 = 6 \cdot 2002.$$

$\square$

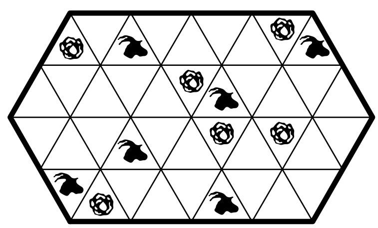
Задавальник

Задача 1.4.4. («Математический праздник» — 1994.6.1) Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или отчество, или фамилия. Может ли такое быть?

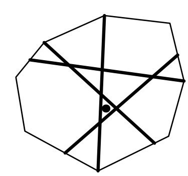
Задача 1.4.5. («Математический праздник» — 2015.6.1) Через двор проходят четыре пересекающиеся тропинки (см. план). Посадите четыре яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки было поровну яблонь.



Задача 1.4.6. («Математический праздник» — 2017.6.1;7.1) Фермер огородил снаружи участок земли и разделил его на треугольники со стороной 50 м. В некоторых треугольниках он высадил капусту, а в некоторые пустил пастись коз. Помогите фермеру построить по линиям сетки дополнительные заборы как можно меньшей общей длины, чтобы защитить всю капусту от коз.

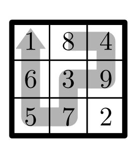


Задача 1.4.7. («Математический праздник» — 2015.7.1) Во дворе, где проходят четыре пересекающиеся тропинки, растёт одна яблоня (см. план). Посадите ещё три яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки было поровну яблонь.

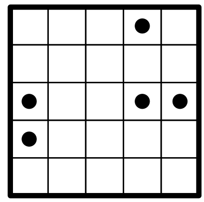


Задача 1.4.8. («Математический праздник» — 2012.7.1) Квадрат 3×3 заполнен цифрами так, как показано на рисунке слева. Разрешается ходить по клеткам этого квадрата, переходя из клетки в соседнюю (по стороне), но ни в какую клетку не разрешается попадать дважды. Петя прошёл, как показано на рисунке справа, и выписал по порядку все цифры, встретившиеся по пути, — получилось число 84937561. Нарисуйте другой путь так, чтобы получилось число побольше (чем больше, тем лучше).

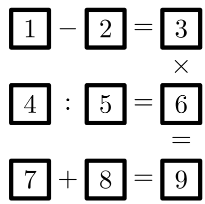
1	8	4
6	3	9
5	7	2



Задача 1.4.9. (Турнир Архимеда — 2014.1) Требуется передвинуть каждую из пяти фишек на соседнюю клетку так, чтобы в итоге в каждой строке, каждом столбце и на каждой диагонали оказалось не более одной фишки. (Две клетки называются соседними, если они имеют общую сторону.) Покажите, как это сделать. (Передвижения фишек покажите стрелками.)

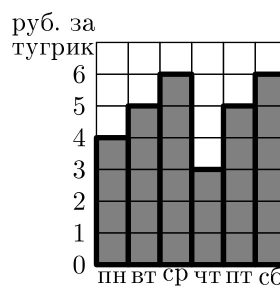


Задача 1.4.10. (Турнир Архимеда — 2017.1) На рисунке расставлены карточки с числами $1, 2, 3, \ldots, 9$ так, что получились четыре неверных равенства (три горизонтальных, одно вертикальное).

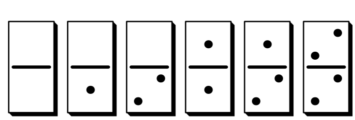


Переставьте эти карточки так, чтобы все равенства стали верными. Достаточно привести ответ.

Задача 1.4.11. (Турнир Архимеда — 2005.7.1) На рисунке изображено, как изменялся курс тугрика в течение недели. У Пети было 30 рублей. В один из дней недели он обменял все свои рубли на тугрики. Потом он обменял все тугрики на рубли. Затем он ещё раз обменял все вырученные рубли на тугрики, и, в конце концов, обменял все тугрики обратно на рубли. Напишите, в какие дни он совершал эти операции, если в воскресенье у него оказалось 54 рубля. (Достаточно привести пример.)



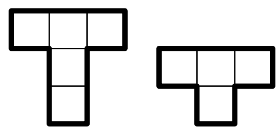
Задача 1.4.12. («Математический праздник» — 2014.6.2) Из шести костяшек домино (см. рисунок) сложите прямоугольник 3×4 так, чтобы во всех трёх строчках точек было поровну и во всех четырёх столбцах точек было тоже поровну. (Выделите пожирнее границы доминошек.)



Задача 1.4.13. («Математический праздник» — 2010.6.3) Поросёнок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых куби-

ков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы.

Задача 1.4.14. («Математический праздник» — 2014.6.4) Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать на четыре фигурки, изображённые слева, а можно — на пять фигурок, изображённых справа. (Фигурки можно поворачивать.)



Задача 1.4.15. («Математический праздник» — 2007.6.4) В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трёх улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.

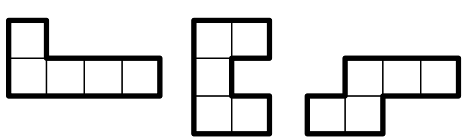
Задача 1.4.16. («Математический праздник» — 2016.7.3) Сложите из трёх одинаковых клетчатых фигур без оси симметрии фигуру с осью симметрии.

Задача 1.4.17. («Математический праздник» — 1998.6.5;7.3) На кольцевой дороге расположены четыре бензоколонки: A, B, C и D. Расстояние между A и B — 50 км, между A и C — 40 км, между C и D — 25 км, между D и A — 35 км (все расстояния измеряются вдоль кольцевой дороги в кратчайшую сторону).

1. Приведите пример расположения бензоколонок (с указанием расстояний между ними), удовлетворяющий условию задачи.

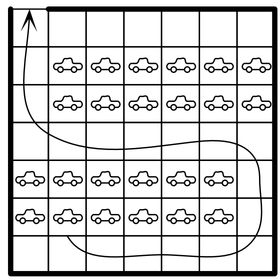
2. Найдите расстояние между B и C (укажите все возможности).

Задача 1.4.18. («Математический праздник» — 2007.6.5;7.5) Нарисуйте, как из данных трёх фигурок, использовав каждую ровно один раз, сложить фигуру, имеющую ось симметрии.

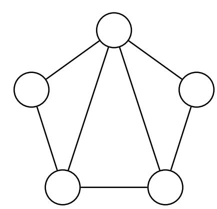


Задача 1.4.19. («Математический праздник» — 2008.6.5) Автостоянка в Цветочном городе представляет собой квадрат 7×7 клеточек, в каждой из которых можно поставить машину. Стоянка обнесена забором, одна из

сторон угловой клетки удалена (это ворота). Машина ездит по дорожке шириной в клетку. Незнайку попросили разместить как можно больше машин на стоянке таким образом, чтобы любая могла выехать, когда прочие стоят. Незнайка расставил 24 машины так, как показано на рисунке. Попытайтесь расставить машины по-другому, чтобы их поместилось больше.



Задача 1.4.20. («Математический праздник» — 2014.7.5) Впишите в пять кружков натуральные числа так, чтобы если два кружка:



- соединены линией, то стоящие в них числа должны отличаться ровно в два или ровно в четыре раза;
- не соединены линией, то отношение стоящих в них чисел не должно быть равно ни 2, ни 4.

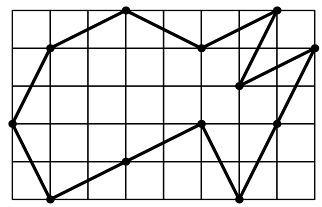
Задача 1.4.21. («Математический праздник» — 2006.7.5) Дед звал внука к себе в деревню: «Вот посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растут груши и яблони, причём яблони посажены так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растёт ровно две груши». — «Ну и что тут интересного, — ответил внук. — У тебя, значит, яблонь вдвое меньше, чем груш». «А вот и не угадал, — улыбнулся дед. — Яблонь у меня в саду вдвое больше, чем груш». Нарисуйте, как могли расти яблони и груши в саду у деда.

Задача 1.4.22. («Математический праздник» — 2009.7.5) Начертите два четырёхугольника с вершинами в узлах сетки, из которых можно сложить:

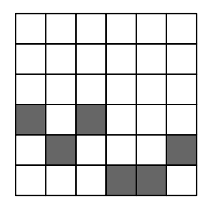
а) как треугольник, так и пятиугольник;
б) и треугольник, и четырёхугольник, и пятиугольник.

Покажите, как это можно сделать.

Задача 1.4.23. («Математический праздник» — 2014.7.5) Незнайка рисует замкнутые пути внутри прямоугольника 5×8, идущие по диагоналям прямоугольников 1×2. На рисунке изображён пример пути, проходящего по 12 таким диагоналям. Помогите Незнайке нарисовать путь как можно длиннее.



Задача 1.4.24. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.7.1) У электромонтёра был кусок провода длиной 25 м, из которого утром он собирался вырезать необходимые для работы куски в 1 м, 2 м, 3 м, 6 м и 12 м. Но утром обнаружилось, что ночью какой-то хулиган разрезал провод на две части. Сможет ли монтёр выполнить намеченные работы?



Задача 1.4.25. («Математический праздник» — 2013.7.2) В квадрате закрашена часть клеток, как показано на рисунке. Разрешается перегнуть квадрат по любой линии сетки, а затем разогнуть обратно. Клетки, которые при перегибании совмещаются с закрашенными, тоже закрашиваются. Можно ли закрасить весь квадрат за: а) 5 или менее; б) 4 или менее; в) 3 или менее таких перегибания? Если да, впишите в каждую клетку номер сгибания, после которого она будет закрашена впервые, линию сгиба проведите и пометьте той же цифрой. Если нет, докажите это.

Задача 1.4.26. («Математический праздник» — 2005.7.2) Можно ли расставить числа а) от 1 до 7; б) от 1 до 9 по кругу так, чтобы любое из них делилось на разность своих соседей?

Задача 1.4.27. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.6.4;7.2) Пусть на плоскости отмечено несколько точек. Назовём прямую *нечестной*, если она проходит ровно через три отмеченные точки и по разные стороны от неё отмеченных точек не поровну. Можно ли отметить 7 точек и провести для них 5 нечестных прямых?

Задача 1.4.28. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.6.4) По кругу было записано 8 чисел. Затем между каждыми соседними числами записали их сумму, а старые числа стёрли. Могло ли оказаться так, что теперь по кругу записаны числа 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18?

Задача 1.4.29. («Математический праздник» — 2005.6.5) В числах **МИХАЙЛО** и **ЛОМОНОСОВ** каждая буква обозначает цифру (разным буквам соответствуют разные цифры). Известно, что у этих чисел произведения цифр равны. Могут ли оба числа быть нечётными?

Задача 1.4.30. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2004.7.4) В $8A$ классе учится 27 школьников. Им предложили посещать кружки по пению, молчанию и чтению стихов. Каждый хочет посещать один или несколько из этих кружков. Оказалось, что в каждый кружок желает ходить более трети класса. Нужно распределить детей по кружкам так, чтобы каждый посещал только один кружок, причём из тех, которые хотел, и во всех кружках было поровну детей. Всегда ли это возможно?

Задача 1.4.31. (Турнир Архимеда — 2012.4) Можно ли вычеркнуть одно из натуральных чисел от 1 до 9, а оставшиеся числа расставить в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на каждой грани куба были равны между собой, но не были кратны вычеркнутому числу?

Задача 1.4.32. («Математический праздник» — 2010.7.5) а) Поросёнок Наф–Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы.

б) А может ли Наф–Наф добиться, чтобы при этом каждые два квадрата граничили друг с другом?

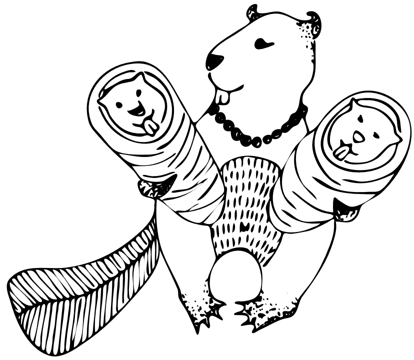
Задача 1.4.33. («Математический праздник» — 2008.7.5) Серёжа вырезал из картона две одинаковые фигуры. Он положил их с нахлёстом на дно прямоугольного ящика. Дно оказалось полностью покрыто. В центр дна вбили гвоздь. Мог ли гвоздь проткнуть одну картонку и не проткнуть другую?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.12. Запишите число 1997 с помощью десяти двоек и арифметических операций.

Задача 1.13. Как разложить гирьки весом $1, 2, \ldots, 9$ г в три коробочки так, чтобы в первой было две гирьки, во второй — три, в третьей — четыре, а суммарный вес гирек в коробочках был одинаковым?

Задача 1.14. В стране Бобряндии живут цифровые бобры. Каждый день в бобряндии рождается ровно один бобёр, у которого на шкурке написан номер дня от сотворения мира. Закон гласит, что каждому бобру, сумма цифр на шкурке которого делится на 7, при рождении присваивают статус бобродемика. Однажды мама-бобриха родила бобрят-близнецов, но, в связи с цифровой системой мира, один родился официально на день раньше другого. Может ли быть такое, что оба близнеца — бобродемики?



5 Алгоритмы и операции

Материал для разбора на занятии

Данная тема является логическим продолжением темы «примеры и конструкции», но если в «примерах и конструкциях» обычно требуется привести «статический пример», то в данной теме мы ищем пример «динамический», то есть описываем некую последовательность действий, с помощью которой мы можем прийти от изначальной позиции к требуемой.

Приведём неожиданный для вас пример задачи такого рода, предложенной на ЕГЭ по информатике (да, за 11 класс).

Задача 1.5.1. (ЕГЭ по информатике 30.05.2013. Основная волна. Дальний Восток. Вариант 4.) У исполнителя Удвоитель две команды, которым присвоены номера:

1) вычти 1;

2) умножь на 2.

Первая из них уменьшает число на экране на 1, вторая удваивает его. Запишите порядок команд в программе, которая преобразует число 17 в число 135 и содержит не более 4 команд. Указывайте лишь номера команд.

Например, программа 212 — это программа

- умножь на 2;
- вычти 1;
- умножь на 2.

Она преобразует число 3 в число 10.

Решение. Заметим, что 135 нечётно, а увеличивать число мы можем, только домножая на 2, поэтому хотя бы одна из команд — это вычитание 1. Также заметим, что команд 2 не менее трех, т. к. иначе получим число, не большее $17 \cdot 2 \cdot 2 = 68 < 135$. Поэтому у нас три команды 2 и одна 1, откуда получим перебором пример программы, преобразующей 17 в 135 — 2221. □

Процесс с латинского — «ход, продвижение». Задачи по теме алгоритмов и операций подразумевают пошаговое, ход за ходом, выполнение определённых действий (как правило, их ограниченное количество). При этом решение задачи сводится к «запуску» определённого процесса — алгоритма, последовательности шагов, причем важно показать, что он будет конечным и приведёт к нужному результату. Например.

Задача 1.5.2. В парламенте у каждого не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого депутата в своей палате будет не более одного врага.

Решение. Продемонстрируем организацию процесса разбиения по шагам. Переводить депутатов в палаты будем по одному. Разобьём парламент случайным образом на две палаты. Далее найдём депутата, имеющего не менее двух врагов в своей палате, и пересадим его в другую палату. Общее число пар врагов, сидящих в одной палате, при этом уменьшается. Процесс будет конечным и остановится, так как количество враждующих пар не больше, чем количество человек в парламенте, умноженное на три (на самом деле, даже меньше, но это мы пройдём в седьмой главе). Остановка процесса означает построение нужного разбиения. $\square$

К сожалению, иногда встречаются ошибочные рассуждения. К вышеприведённой задаче можно, например, привести такое «решение».

НЕРешение. Поместим всех депутатов в зал. Выберем одного депутата и отправим его в палату A. Затем выберем депутата, не имеющего врагов в A (пока такие есть), и отправим в A. Повторим эту итерацию до тех пор, пока таковые депутаты останутся. После выберем в зале депутата, имеющего ровно одного врага, и отправим в A. Проделаем так несколько раз, пока и такие депутаты не закончатся. После отведём в комнату B депутатов, у которых три врага в A. Т. к. они не враждуют между собой, это не будет противоречить условию. В зале останутся депутаты, имеющие ровно двух врагов в A. Но тогда в B у них не более одного врага, и их можно отправить в B. $\square$

Ошибка в последнем «решении» следующая. Отправляя в A депутата X, имеющего в A одного врага Y, и отправляя Z, имеющего одного врага — пусть это снова будет Y, получим, что у Y уже два врага в A.

Задача 1.5.3. В землю воткнули 3 пики, 2 пустые, а на третью были насажены диски диаметром в 3, 2 и 1 дециметр в указанном порядке снизу вверх. Разрешается следующее: взять верхний диск, насаженный на одну из пик, и насадить его на другую пику, при этом класть разрешается только диск меньшего диаметра на диск большего. Требуется в результате этих операций перенести все диски в указанном порядке на другую пику.

Решение. Представим решение в виде таблицы, в которой будем отображать диски, насаженные на каждую из пик на соответствующем шаге (самая левая цифра означает верхний диск).

Шаг 0	123		
Шаг 1	23	1	
Шаг 2	3	1	2
Шаг 3	3		12
Шаг 4		3	12
Шаг 5	1	3	2
Шаг 6	1	23	
Шаг 7		123	

Полученный на последнем шаге результат завершает решение задачи. □

Задавальник

Задача 1.5.4. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2004.6.1) Даны две палочки. Их можно прикладывать друг к другу и делать отметки. Как с помощью этих операций выяснить, что больше — длина более короткой палочки или 2/3 длины более длинной палочки?

Задача 1.5.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.6.1) У первого из десяти друзей есть 5 тугриков, у второго — 10 тугриков, у третьего — 15 тугриков, и т. д., у десятого — 50 тугриков. Они сели на ковёр–самолёт, полёт на котором стоит 5 тугриков с носа. Смогут ли они честно расплатиться с ковром–самолётом, если тот не даёт сдачу и не разменивает деньги?

Задача 1.5.6. («Математический праздник» — 2010.7.1) У Юры есть калькулятор, который позволяет умножать число на 3, прибавлять к числу 3 или (если число делится на 3 нацело) делить на 3. Как на этом калькуляторе получить из числа 1 число 11?

Задача 1.5.7. («Математический праздник» — 1994.6.2) Найдите в последовательности $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$ число, стоящее на: а) 6; б) 1994 месте? Ответ объясните.

Задача 1.5.8. («Математический праздник» — 1998.6.2) Три ёжика делили три кусочка сыра массами 5 г, 8 г и 11 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно отрезать и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить ёжикам равные кусочки сыра?

Задача 1.5.9. («Математический праздник» — 2014.6.3) Одуванчик утром распускается, два дня цветёт жёлтым, на третий день утром становится белым, а к вечеру облетает. Вчера днём на поляне было 20 жёлтых и 14 белых одуванчиков, а сегодня — 15 жёлтых и 11 белых. Сколько:

а) жёлтых одуванчиков было на поляне позавчера;
б) белых одуванчиков будет на поляне завтра?

Задача 1.5.10. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.6.3) На левом берегу реки собрались 5 физиков и 5 химиков. Всем надо на правый берег. Есть двухместная лодка. На правом берегу ни в какой момент не могут находиться ровно три химика или ровно три физика. Каким образом им всем переправиться, сделав 9 рейсов направо?

Задача 1.5.11. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.6.3) Есть пять батареек, из которых три заряжены, а две разряжены. Фотоаппарат работает от двух заряженных батареек. Покажите, как за четыре попытки можно гарантированно включить фотоаппарат.

Задача 1.5.12. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.6.4) Пончик находится в сломанном луноходе на расстоянии 18 км от Лунной базы, в которой сидит Незнайка. Между ними устойчивая радиосвязь. Запаса воздуха в луноходе хватит на 3 часа, кроме того, у Пончика есть баллон для скафандра, с запасом воздуха на 1 час. У Незнайки есть много баллонов с запасом воздуха на 2 часа каждый. Незнайка не может нести больше двух баллонов одновременно (одним из них он пользуется сам). Скорость передвижения по Луне в скафандре равна 6 км/ч. Сможет ли Незнайка спасти Пончика и не погибнуть сам?

Задача 1.5.13. («Математический праздник» — 2014.7.4) Одуванчик утром распускается, три дня цветёт жёлтым, на четвёртый день утром становится белым, а к вечеру пятого дня облетает. В понедельник днём на поляне было 20 жёлтых и 14 белых одуванчиков, а в среду — 15 жёлтых и 11 белых. Сколько белых одуванчиков будет на поляне в субботу?

Задача 1.5.14. («Математический праздник» — 1990.6.4;7.4) Поставьте в ряд а) 5 простых чисел; б) 6 простых чисел так, чтобы разности соседних чисел в каждом ряду были равны.

Задача 1.5.15. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.7.4) В клубе встретились двадцать джентльменов. Некоторые из них были в шляпах, а некоторые — без шляп. Время от времени один из джентльменов снимал с себя шляпу и надевал её на одного из тех, у кого в этот момент шляпы не было. В конце десять джентльменов подсчитали, что каждый из них отдавал шляпу большее количество раз, чем получал. Сколько джентльменов пришли в клуб в шляпах?

Задача 1.5.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.6.5;7.4) Вася выписал все слова (не обязательно осмысленные), которые получаются вычеркиванием ровно двух букв из слова **ИНТЕГРИРОВАНИЕ**, а Маша сделала то же самое со словом **СУПЕРКОМПЬЮТЕР**. У кого получилось больше слов?

Задача 1.5.17. (Турнир Архимеда — 2017.4) На Новогоднем базаре продаются гирлянды из шариков. В каждой гирлянде 201 шарик: некоторые — красные, остальные — зелёные. Шарики волшебные — по команде Дежурного Снеговика они могут менять цвет: красные становятся зелёными, а зелёные — красными. За один раз он может поменять цвет каких-нибудь двух, трёх или четырёх шариков, расположенных подряд. За каждое перекрашивание Снеговик берет 1 копейку. Федя утверждает, что рубля ему заведомо хватит на то, чтобы превратить любую гирлянду в одноцветную. Прав ли Федя?

Задача 1.5.18. («Математический праздник» — 2015.7.5) Имеется набор из двух карточек: $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$. За одну операцию разрешается составить выражение, использующее числа на карточках, арифметические действия, скобки. Если его значение — целое неотрицательное число, то его выдают на новой карточке. (Например, имея карточки $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ и $\boxed{7}$, можно составить выражение $\boxed{7}\boxed{5}/\boxed{3}$ и получить карточку $\boxed{25}$ или составить выражение $\boxed{3}\boxed{5}$ и получить карточку $\boxed{35}$.) Как получить карточку с числом 2015 за:

а) 4 операции;
б) 3 операции?

Задача 1.5.19. («Математический праздник» — 1991.7.5) Даны две последовательности:

$$2, 4, 8, 16, 14, 10, 2 \quad \text{и} \quad 3, 6, 12.$$

В каждой из них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону. Найдите этот закон. Найдите все натуральные числа, переходящие сами в себя (по этому закону). Докажите, что число 2^{1991} после нескольких переходов станет однозначным.

Задача 1.5.20. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.7.5) На бесконечном листе клетчатой бумаги x клеток покрашены в чёрный цвет. Каждую секунду все белые клетки, у которых хотя бы три соседа из четырёх чёрные, становятся чёрными, а все клетки, у которых хотя бы три соседа из четырёх белые, становятся белыми. Остальные клетки не меняются. Может ли через несколько секунд случиться так, что на листе бумаги окажется ровно $\frac{3}{2}x$ чёрных клеток?

Задача 1.5.21. («Математический праздник» — 1997.6.6) Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама — за 2, малыш — за 5, а бабушка — за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя.)

Задача 1.5.22. («Математический праздник» — 1997.6.6) Кощей Бессмертный взял в плен 43 человека и увёз их на остров. Отправился Иван–Царевич на двухместной лодке выручать их. А Кощей ему и говорит:

– Надоело мне этих дармоедов кормить, пусть плывут отсюда на твоей лодке подобру-поздорову. Имей в виду: с острова на берег доплыть можно только вдвоём, а обратно и один справится. Перед переправой я скажу каждому не менее чем про 40 других пленников, что это оборотни. Кому про кого скажу, сам выберешь. Если пленник про кого-то слышал, что тот оборотень, он с ним в лодку не сядет, а на берегу находиться сможет. Я заколдую их так, чтобы на суше они молчали, зато в лодке рассказывали друг другу про всех известных им оборотней. Пока хоть один пленник остаётся на острове, тебе с ними плавать нельзя. Лишь когда все 43 окажутся на том берегу, одному из них можно будет за тобой приплыть. А коли не сумеешь устроить им переправу — останешься у меня навсегда.

Есть ли у Ивана способ пройти испытание и вернуться с пленниками домой?

Задача 1.5.23. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.6.6) К кабинке канатной дороги, ведущей на гору, подошли четыре человека, которые весят 50, 60, 70 и 90 кг. Смотрителя нет, а в автоматическом режиме кабинка ездит туда-сюда только с грузом от 100 до 250 кг (в частности, пустой она не ездит), при условии, что пассажиров можно рассадить на две скамьи так, чтобы веса на скамьях отличались не более, чем на 25 кг. Каким образом все они смогут подняться на гору?

Задача 1.5.24. («Математический праздник» — 1993.6.7) Али–Баба стоит с большим мешком монет в углу пустой прямоугольной пещеры размером $m \times n$ клеток, раскрашенных в шахматном порядке. Из любой клетки он может сделать шаг в любую из четырёх соседних клеток (вверх, вниз, вправо или влево). При этом он должен либо положить 1 монету в этой клетке, либо забрать из неё 1 монету, если, конечно, она не пуста. Может ли после прогулки Али–Бабы по пещере оказаться, что на чёрных клетках лежит ровно по 1 монете, а на белых монет нет?

Задача 1.5.25. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.6.7) По кругу стоят восемь козлов разного роста. Любой из них умеет перепрыгивать через двух соседних козлов против часовой стрелки. Докажите, что при любом начальном расположении козлов они смогут встать по росту.

Задача 1.5.26. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.7.6) На столе лежит стопка карт «рубашкой» вверх. Требуется переложить их в обратном порядке (и снова «рубашкой» вверх), применив несколько раз такую операцию: из любого места стопки вынимаются две соседние карты, переворачиваются как единое целое и кладутся на прежнее место. При каком количестве карт в стопке это можно сделать?

Задача 1.5.27. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.7.7) На складах двух магазинов хранится пшено: на первом складе на 16 тонн больше, чем на втором. Каждую ночь ровно в полночь владелец каждого магазина ворует у своего конкурента четверть имеющегося на его складе пшена и перетаскивает на свой склад. Через 10 ночей воришек поймали. На каком складе в момент их поимки было больше пшена и на сколько?

Задача 1.5.28. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.7.7) Восемь томов «Энциклопедии Козлов» сложили в стопку. Разрешается вынимать из стопки либо третью сверху книгу, либо самую нижнюю, и класть её наверх. Докажите, что независимо от начального расположения томов их можно сложить по порядку номеров.

Задача 1.5.29. (Курчатов — 2016.8) На олимпиаду пришли 300 учеников из не менее чем 4 школ. Докажите, что их можно разбить на команды по

3 человека в каждой так, чтобы в каждой команде либо все три ученика были из одной школы, либо все три — из разных школ.

Задача 1.5.30. (Московская математическая олимпиада — 2001.8.3) Даны шесть слов: **ЗАНОЗА**, **ЗИПУНЫ**, **КАЗИНО**, **КЕФАЛЬ**, **ОТМЕЛЬ**, **ШЕЛЕСТ**. За один шаг можно заменить любую букву в любом из этих слов на любую другую (например, за один шаг можно получить из слова **ЗАНОЗА** слово **ЗКНОЗА**. Какое наименьшее число шагов нужно, чтобы сделать все слова одинаковыми (допускаются бессмысленные)?

Задача 1.5.31. («Математический праздник» — 1991.5-6.2) Электрик был вызван для ремонта гирлянды из четырёх соединённых последовательно лампочек, одна из которых перегорела. На вывинчивание любой лампочки из гирлянды уходит 10 секунд, на завинчивание – 10 секунд. Время, которое тратится на другие действия, мало. За какое наименьшее время электрик заведомо может найти перегоревшую лампочку, если у него есть одна запасная лампочка?

Задача 1.5.32. (Турнир им. Ломоносова — 1986.8.4) В компании из k человек ($k > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2k - 4$ разговора все они могут узнать все новости.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.15. В землю воткнули 3 пики, 2 пустые, а на третью были насажены диски диаметром в 4, 3, 2 и 1 дециметр в таком порядке снизу вверх. Разрешается следующее: взять верхний диск, насаженный на одну из пик, и насадить его на другую пику, при этом класть разрешается только диск меньшего диаметра на диск большего. Требуется в результате этих операций перенести все диски в таком порядке на другую пику.

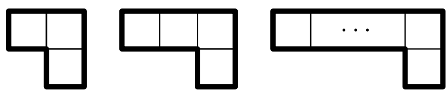
Задача 1.16. Коммерсант Вася занялся торговлей. Каждое утро он покупает товар на некоторую часть имеющихся у него денег (возможно, на все имеющиеся у него деньги). После обеда он продаёт купленный товар в 2 раза дороже, чем купил. Как нужно торговать Васе, чтобы через 5 дней у него было ровно 25000 рублей, если сначала у него было 1000 рублей?

Задача 1.17. Один генерал решил провести модернизацию войска роботов. Для этого он расставил солдат-роботов в круг и начал идти по кругу, превращая каждого десятого солдата в дрона, после чего тот снимался с места и улетал. Однако из-за своей забывчивости он прошёл круг не один раз и остановился, заметив, что остался только один солдат. Какой номер был у этого солдата, если всего их было 20?

6 Разбор задач для самостоятельного решения

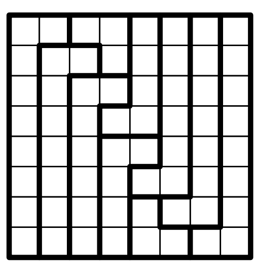
Разрезания

Задача 1.1. Буквой «Г» называется клетчатая фигура, состоящая из $2, 3, 4, \ldots$ клеток, идущих подряд, и ещё одной клетки, имеющей общую сторону с одной из крайних клеток:



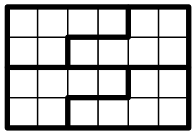
Имеется набор, состоящий из букв «Г», в котором фигура каждого размера встречается ровно по два раза. Составьте квадрат 8×8 из фигур набора так, чтобы не было фигуры какого-то размера, использованной ровно один раз.

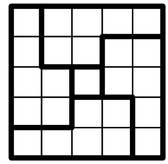
Решение. Одно из возможных решений приведено на рисунке ниже. □



Задача 1.2. Один австрийский художник и картограф, сидя в тюрьме за дебош в пивной, очень хотел сделать флаг для своей организации. Он планировал, чтобы флаг был квадратным, размером 5 на 5 метров, с дыркой в самом центре размером 1 на 1 метр. Однако в его распоряжении имелся лишь прямоугольный кусок ткани размером 6 на 4 метра с разлиновкой по квадратной сетке шагом в 1 метр, линии которой были параллельны сторонам прямоугольника и начинались от них. Также ему хотелось разрезать исходный кусок не более, чем на 4 части, которые ещё и вдобавок должны были быть одинаковыми, чтобы их проще было прятать, а разрезы он хотел делать только по линиям разлиновки. К тому же, если стража заметила бы у него куски ткани прямоугольной формы, она бы сразу могла его заподозрить. Помогите молодому человеку справиться с этой задачей.

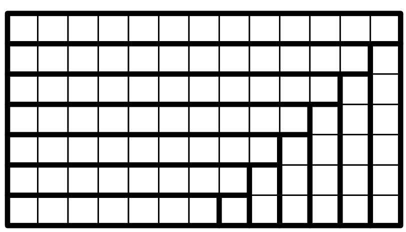
Решение. Возможное решение приведено на рисунке. □





Задача 1.3. Имеются прямоугольники 1×1, 1×2, $1 \times 3, \ldots, 1 \times 13$. Составьте из них прямоугольник, каждая сторона которого больше единицы.

Решение. Найдём размер искомого треугольника. Его площадь должна быть равна сумме площадей всех прямоугольников, то есть $S = 1+2+\ldots+13 = 91$. Чтобы получился прямоугольник, это должно быть произведение двух чисел, каждое из которых больше единицы, $91 = 7 \cdot 13$. Уложить фигуру 1×13 можно только по длинной стороне. Тогда заметим, что $1 + 12 = 2 + 11 = \ldots = 5 + 7$, откуда и получаем изящное разрезание (рисунок ниже). □



Взвешивания

Задача 1.4. Есть 9 внешне одинаковых конфет, из которых одна невкусная (более лёгкая, потому что без начинки). Как с помощью чашечных весов без гирь выделить невкусную конфету за 2 взвешивания?

Решение. Заметим, что из трёх конфет мы можем выявить невкусную за одно взвешивание. Действительно, пусть есть три конфеты, взвесим первые две: если они различны по весу, то наиболее лёгкая — невкусная, если равны, то невкусная — третья.

У нас девять конфет, разделим их на три кучки по три конфеты. Наша задача — узнать, в какой из кучек находится лёгкая конфета. Тогда останется одно взвешивание, чтобы выявить из этих трёх невкусную, а это мы умеем делать. Но ведь это та же самая задача: есть три кучки, одна из которых легче, просто в этом случае взвешиваем не по одной конфете а по кучке, ч. т. д. □

Задача 1.5. Среди семи монет имеются 2 фальшивые (более лёгкие). За 3 взвешивания на чашечных весах без гирь определите обе фальшивые монеты.

Решение. Возьмём две кучки по три монеты, сравним их.

Если они равны, то это значит, что в каждой из них по одной фальшивой. Тогда, чтобы выявить фальшивую, понадобится по взвешиванию для каждой кучки (см. решение предыдущей задачи). Всего получается три взвешивания.

Если же они не равны, то возможны два варианта: либо монета, которая не была в кучках — фальшивая, либо обе фальшивых в лёгкой кучке. Попробуем понять, какой из двух случаев мы получили. В более тяжёлой кучке точно нет фальшивых монет, поэтому взвесим одну из монет этой кучки с монетой, не входящей в кучки. Если они различны — то имеем первый случай, если равны — то второй.

В первом случае из лёгкой кучки выявляем фальшивую за одно взвешивание, а вторая фальшивая монета — та, которая не входила в кучки. Всего получили три взвешивания.

Во втором случае мы точно знаем, что обе фальшивые монеты находятся в лёгкой кучке. Более тяжёлую настоящую монету мы можем найти за одно за взвешивание, и тогда фальшивые монеты — две оставшиеся. Также получили три взвешивания. □

Задача 1.6. Среди 9 монет ровно одна фальшивая (неизвестно, легче она или тяжелее настоящей). Как определить её с помощью трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь?

Решение. В отличие от предыдущих двух задач неизвестно, легче или тяжелее фальшивая. Это добавляет лишнее взвешивание.

Опять разделим девять монет на три кучки. Взвесим две пары кучек: первую со второй, вторую с третьей. Заметим, что фальшивая монета — одна, поэтому мы получим что две кучки равны, а третья — нет, и в зависимости от того, тяжелее или легче отличающаяся кучка — поймём, как отличается фальшивая монета.

Берём эту отличающуюся кучку и по уже известному методу в одно взвешивание выявляем фальшивую. Всего получили три взвешивания. □

Задача 1.7. Есть 9 кг зерна и чашечные весы с гирькой в 200 грамм. Как с помощью 3 взвешиваний отмерить ровно 2 кг зерна?

Решение. Возьмём кучку зерна, её масса m. Мы можем получить две кучки массами либо $m/2$, $m/2$ (ссыпать на две чаши, не используя гирю), либо $m/2 - 100$, $m/2 + 100$ (то же, но на одной из чаш гиря), либо m, $m - 200$ (в равновесном состоянии весов на одну из чаш положить гирю и ссыпать с этой чаши зерно до тех пор, пока снова не достигнем равновесия).

У нас есть 9000 грамм зерна и хочется, чтобы вес новых кучек делился на 200. Разделим зерно на кучки по 4400 и 4600 грамм. Теперь «располовиним» $4400 \to 2200 + 2200$ и потом вычтем из одной кучки 200 грамм. В итоге мы воспользовались каждой операцией по разу и получили три взвешивания. □

Задача 1.8. У бобра-хранителя зерна есть 6 гирь с нанесённой маркировкой 1, 2, 3, 4, 5 и 6 кг. Однако он подозревает, что у двух гирь может быть перепутана маркировка. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах, на которых можно сравнить веса любых групп гирь, определить, верна ли данная маркировка? Гири изготовлены из разных материалов, поэтому «на глаз» определить данную информацию он не может.

Решение. Будьте внимательны! В данной задаче требуется определить, не какие 2 гири перепутаны, а только лишь, верна маркировка или нет.

Первым взвешиванием поставим на одну чашку весов гири с маркировками «6» и «1», а на вторую — «2» и «5». Если весы находятся не в равновесии, значит, маркировка точно перепутана, и второе взвешивание уже не является необходимым. Если весы находятся в равновесии, то возможны следующие случаи:

- перепутаны маркировки на гирях «6» и «1»;
- перепутаны маркировки на гирях «2» и «5»;
- перепутаны маркировки на гирях «3» и «4».

Вторым взвешиванием поставим на одну чашку весов гири с маркировками «6» и «2», а на вторую — «5» и «3». Рассуждая аналогично первому взвешиванию, получаем, что в случае равновесия, если бы первого взвешивания не было, были бы возможны варианты:

- перепутаны маркировки на гирях «6» и «2»;
- перепутаны маркировки на гирях «3» и «5»;
- перепутаны маркировки на гирях «1» и «4».

Таким образом, данные системы возможных ошибок маркировки несовместны, значит, за данные 2 взвешивания мы гарантированно определим, не перепутаны ли маркировки у каких-либо 2 гирь. □

Переливания

Задача 1.9. В бочке 16 с половиной литров варенья. Как отлить из неё 6 литров с помощью девятилитрового ведра и пятилитрового бидона?

Решение. Если нет желания использовать дроби, можно считать объём не в литрах, а в половинках литра. Тогда в бочке имеется 33 половинки, в ведре помещается 18 половинок и в бидоне — 10 половинок. Таблица решений тогда будет такой.

Сосуд	Бочка	Ведро	Бидон
Размер сосуда	33	18	10
Шаг 0	33	0	0
Шаг 1	23	0	10
Шаг 2	23	10	0
Шаг 3	13	10	10
Шаг 4	13	18	2
Шаг 5	31	0	2
Шаг 6	31	2	0
Шаг 7	21	2	10
Шаг 8	21	12	0

Задача решена. □

Задача 1.10. Говорят, что великий чернокнижник Иоганн Фауст, изучая труды, чудом спасенные из Александрийской библиотеки во время её разрушения, наткнулся на древний манускрипт, в котором описывался рецепт изготовления эликсира бессмертия, для которого были необходимы слёзы драконов, крокодилов и котов. С трудом добыв все эти ингредиенты, Фауст вернулся в свою лабораторию с 6-литровой склянкой, доверху наполненной слезами дракона, 4-литровой, наполненной слезами крокодилов, и 5-литровой — слезами котов. Также в его распоряжении имелся пустой 8-литровый сосуд. Зелья бессмертия требуется ровно 6 литров, причём концентрация всех его ингредиентов должна быть равной. Учитывая силы, затраченные на добычу всего этого, ни одной капли проливать было нельзя. Также Фауст понимал, что все эти жидкости перемешиваются очень быстро до равномерного состояния. Помогите ему справиться с данной задачей.

Решение. Будем писать после каждой величины тип слёз в скобках.

Сосуд	4-литровый	5-литровый	6-литровый	8-литровый
Шаг 0	4(кр)	5(к)	6(д)	0
Шаг 1	4(кр)	5(к)	0	6(д)
Шаг 2	0	5(к)	4(кр)	6(д)
Шаг 3	4(д)	5(к)	4(кр)	2(д)
Шаг 4	4(д)	5(к)	0	4(кр), 2(д)
Шаг 5	2(д)	5(к)	0	4(кр), 4(д)
Шаг 6	0	5(к)	2(д)	4(кр), 4(д)
Шаг 7	2(кр), 2(д)	5(к)	2(д)	2(кр), 2(д)
Шаг 8	2(кр), 2(д)	5(к)	0	2(кр), 4(д)
Шаг 9	0	5(к)	2(кр), 2(д)	2(кр), 4(д)
Шаг 10	0	3(к)	2(кр), 2(к), 2(д)	2(кр), 4(д)

Задача решена. □

Задача 1.11. Злой маг Крокобобр варит зелье. На последнем этапе он должен добавить три раза подряд ровно по 3 миллилитра мертвой воды. К сожалению, в этот раз он принёс в свою башню только колбу с 9 миллилитрами мёртвой воды и у него нет времени сбегать к роднику ещё раз. У себя он нашёл пустые пробирки в 5, 4 и 2 миллилитра объёмом. Как стоит поступить Крокобобру, чтобы доварить своё зелье?

Решение. Таблица будет такой.

Сосуд Размер сосуда	Колба 9	Пробирка 1 5	Пробирка 2 4	Пробирка 3 2
Шаг 0	9	0	0	0
Шаг 1	7	0	0	2
Шаг 2	3	0	4	2
Шаг 3	3	4	0	2
Шаг 4	0	4	3	2
Шаг 5	4	0	3	2
Шаг 6	6	0	3	0
Шаг 7	1	5	3	0
Шаг 8	1	3	3	2
Шаг 9	3	3	3	0

Сложность задачи в необычной формулировке. Три раза подряд означает, что у Крокобобра нет времени, чтобы отмерять новые 3 миллилитра после того, как уже он добавил порцию в зелье. Так что, требуется так разлить зелье по пробиркам, чтобы в них было именно по три миллилитра одновременно. Решение, в котором несколько раз будут получены три миллилитра, которые потом будут вылиты в зелье, баллов не принесёт. Как только задачу мы поняли, решить её несложно. □

Примеры и конструкции

Задача 1.12. Запишите число 1997 с помощью десяти двоек и арифметических операций.

Решение. Для получения полного балла по этой задаче достаточно предъявить решение. В таких задачах обычно допускается не ставить между числами знаков операций, что позволяет из четырёх двоек получить число 2222. Нам требуется число 1997, четыре двойки для получения 2222 мы уже использовали. Осталось вычесть число 225, которое нужно получить шестью двойками:

$$1997 = 2222 - 222 - 2 - 2 : 2.$$

□

Задача 1.13. Как разложить гирьки весом $1, 2, \ldots, 9$ г в три коробочки так, чтобы в первой было две гирьки, во второй — три, в третьей — четыре, а суммарный вес гирек в коробочках был одинаковым?

Решение. Задача решается весьма просто: вначале вычисляем вес каждой коробочки. Вес всех гирек — 45 граммов, значит, одна коробочка должна содержать гирьки на 15 граммов. Одну коробочку мы наполним гирьками в 9 и 6 граммов, вторую — 8, 5 и 2 грамма, третью — 1, 3, 4, 7 граммов. Ответ предъявлен, задача решена. □

Задача 1.14. В стране Бобряндии живут цифровые бобры. Каждый день в бобряндии рождается ровно один бобёр, у которого на шкурке написан номер дня от сотворения мира. Закон гласит, что каждому бобру, сумма цифр на шкурке которого делится на 7, при рождении присваивают статус бобродемика. Однажды мама-бобриха родила бобрят-близнецов, но, в связи с цифровой системой мира, один родился официально на день раньше другого. Может ли быть такое, что оба близнеца — бобродемики?

Решение. Понятно, что в задаче просят найти два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на семь. Заметим, что такое может произойти только, если меньшее число оканчивается на несколько девяток, тогда, при прибавлении единицы, произойдёт изменение суммы больше, чем на 1. Пусть девяток n штук, тогда, прибавив единицу, мы изменим сумму цифр на $k = 1 - 9n$, k делится на 7 при n равном 4. Отсюда получим, что меньшее число может оканчиваться на 9999, и, чтобы сумма его цифр делилась на 7, допишем 6 в начало числа, получив 69999. Отсюда, номер второго близнеца 70000. Оба номера удовлетворяют поставленным условиям. □

Алгоритмы и операции

Задача 1.15. В землю воткнули 3 пики, 2 пустые, а на третью были насажены диски диаметром в 4, 3, 2 и 1 дециметр в таком порядке снизу вверх. Разрешается следующее: взять верхний диск, насаженный на одну из пик, и насадить его на другую пику, при этом класть разрешается только диск меньшего диаметра на диск большего. Требуется в результате этих операций перенести все диски в таком порядке на другую пику.

Решение. Представим решение в виде таблицы, в которой будем отображать диски, насаженные на каждую из пик на соответствующем шаге (самая левая цифра означает верхний диск).

Шаг 0	1234		
Шаг 1	234	1	
Шаг 2	34	1	2
Шаг 3	34		12
Шаг 4	4	3	12
Шаг 5	14	3	2
Шаг 6	14	23	
Шаг 7	4	123	
Шаг 8		123	4
Шаг 9		23	14
Шаг 10	2	3	14
Шаг 11	12	3	4
Шаг 12	12		34
Шаг 13	2	1	34
Шаг 14		1	234
Шаг 15			1234

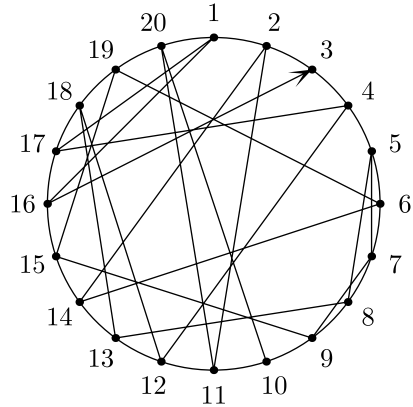
Построенная таблица завершает решение задачи. □

Задача 1.16. Коммерсант Вася занялся торговлей. Каждое утро он покупает товар на некоторую часть имеющихся у него денег (возможно, на все имеющиеся у него деньги). После обеда он продаёт купленный товар в 2 раза дороже, чем купил. Как нужно торговать Васе, чтобы через 5 дней у него было ровно 25000 рублей, если сначала у него было 1000 рублей?

Решение. Задачу можно решать с конца. После пятого дня у него должно стать 25000 рублей. Если у него было 13000 рублей после четвёртого дня, то, купив на 12000 товара и продав их за 24000, он получит искомую сумму. Рассуждая аналогично, если после третьего дня у него будет 7000 рублей, то он купит товар на 6000 рублей и продаст за 12000. А 7000 рублей получаем из 4000, закупив товар на 3000. Ну а 4000 мы получим за два дня, закупая товар на все деньги оба раза. □

Задача 1.17. Один генерал решил провести модернизацию войска роботов. Для этого он расставил солдат-роботов в круг и начал идти по кругу, превращая каждого десятого солдата в дрона, после чего тот снимался с места и улетал. Однако из-за своей забывчивости он прошёл круг не один раз и остановился, заметив, что остался только один солдат. Какой номер был у этого солдата, если всего их было 20?

Решение. На рисунке приведён последовательный порядок превращений в соответствии с алгоритмом, откуда следует, что останется солдат под номером 3. □



Глава 2
Вокруг геометрии

Данный раздел объединяет геометрические и предгеометрические задания, в основном не требующие знаний школьной геометрии.

1 Раскраски

Материал для разбора на занятии

Иногда в олимпиадах встречаются задачи, в которых не нужно ничего доказывать, а нужно что-нибудь предъявить, например, раскрашенную в разные цвета фигуру. Начинающим обычно нравится, что ничего не надо доказывать, но решение не всегда легко найти. В 1852 году шотландский физик Фрэнсис Гутри, работая над картой графств Англии, заметил, что для её раскраски достаточно четырёх красок. Его брат сообщил об этом наблюдении О. де Моргану — известному математику, а после А. Кэли сформулировал гипотезу (1878) — «проблему четырёх красок» — можно ли раскрасить любую карту мира, используя 4 цвета, так, чтобы граничащие страны были раскрашены в разные цвета? Несмотря на кажущуюся простоту данной гипотезы, её доказательство оказалось непростым. Только в 1976 году задача была решена Кеннетом Аппелем и Вольфгангом Хакеном, при этом значительную часть вычислений выполнил компьютер, а текст доказательства оказался настолько объёмным (сотни страниц и тысячи диаграмм), что мало кто из математиков смог прочесть его полностью.

Одна из классических неолимпиадных тем для задач на раскраски — это судоку. Поясним, что такое судоку, для тех, кто с этим не сталкивался.

При игре в судоку игровое поле представляет собой квадрат размером 9×9, разделённый на меньшие квадраты со стороной в 3 клетки. Таким образом, всё игровое поле состоит из 81 клетки. В них уже в начале игры стоят некоторые числа (от 1 до 9), называемые подсказками. От игрока требуется заполнить свободные клетки цифрами от 1 до 9 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждом малом квадрате 3×3 каждая цифра встречалась бы только один раз. Классическим судоку обычно признаётся судоку из 9 цветов (цифр). Существуют также разновидности с большими и меньшими игровыми полями, например, с полем 4×4, разделённым на 4 квадрата 2×2. Разберём простейшие методы решения подобных задач.

Задача 2.1.1. Решите судоку.

1			
	2		
		3	1
			4

Решение. Пронумеруем клетки доски, как в шахматах или при игре в морской бой, для удобства описания хода решения. Заметим, что в правом нижнем квадрате уже отмечено 3 из 4 клеток, то есть, на клетке $C1$ может стоять только число 2.

Рассмотрим левый нижний квадрат. В нём обязательно должна быть цифра 1 на одной из клеток. Эта цифра не может стоять в столбце A, так как в нём уже стоит 1 на клетке $A4$. Также, цифра не может стоять в строке 2, так как в клетке $D2$ уже стоит 1. Таким образом, 1 может стоять только на месте $B1$. Аналогичным образом мы получаем, что в правом верхнем квадрате 1 может стоять только на месте $C3$.

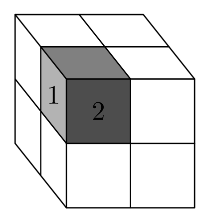
Повторим рассуждения для цифры 2 в левом нижнем квадрате и получим, что она может стоять только на клетке $A2$. Таким образом, мы получили, что в строке 2 уже отмечено 3 числа, значит, на $B2$ может стоять только цифра 4, значит, в левом нижнем квадрате осталось поставить только цифру 3 на клетку $A1$. Таким образом, в столбце A осталось поставить цифру 4 на позиции $A3$. Повторяя рассуждения, получим ответ. Заполненное судоку завершает решение задачи.

4	1	3	4	2
3	4	2	1	3
2	2	4	3	1
1	3	1	2	4
	A	B	C	D

□

К данной теме можно отнести и задачи на доказательства.

Задача 2.1.2. (Тургор. Осенний тур. Тренировочный вариант — 1988.7-8.4) Каждую грань кубика разбили на четыре равных квадрата и раскрасили эти квадраты в три цвета так, чтобы квадраты, имеющие общую сторону, были покрашены в разные цвета. Докажите, что в каждый цвет покрашено по 8 квадратов.



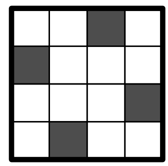
Решение. Нарисуем получившийся кубик и посмотрим внимательно на него. Рассмотрим, какие «соседи» есть у чёрного квадратика.
Можно заметить, что соседи 1 и 2 являются соседями друг другу. А значит, все 3 квадратика, выходящие из одной вершины куба, должны быть разного цвета. Кубик можно «разрезать» на 8 маленьких кубиков, в каждом из которых покрашены 3 грани, причём в разные цвета, то есть, в каждый цвет покрашено по 8 квадратиков. □

В принципе, методы решения задач на раскраски зачастую тесно перекликаются с рассмотренными в первой главе методами.

Задача 2.1.3. («Математический праздник» — 1999.6.3) Квадрат 4 на 4 разделён на 16 клеток. Раскрасьте эти клетки в чёрный и белый цвета так, чтобы у каждой чёрной клетки было три белых соседа, а у каждой белой клетки был ровно один чёрный сосед. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

Решение. Пусть у нас всего x границ между чёрными и белыми клетками. Тогда у каждой белой клетки ровно одна из границ — граница между клетками разных цветов, то есть у нас всего x белых клеток. В то же время, у каждой чёрной клетки 3 стороны — границы между нею и окружающими её белыми клетками, то есть, чёрных клеток всего $\frac{x}{3}$. Так как каждая клетка квадрата имеет белый или чёрный цвет, можно получить уравнение $x + \frac{x}{3} = 16$, откуда $x = 12$.

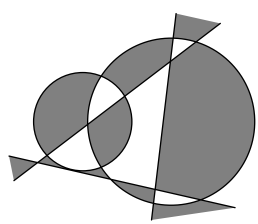
Чёрная клетка не может стоять в углу, так как у угловых клеток всего по 2 соседа. В то же время, так как угловые клетки белые, а у белых клеток есть один чёрный сосед, учитывая факт, что всего чёрных клеток 4, можно получить ответ.



В качестве решения данной задачи достаточно предоставить только рисунок. □

И в заключение приведём один интересный факт (пока без доказательства).

Предположим, что на плоскости проведено множество пересекающихся, непересекающихся и касающихся прямых и окружностей. Оказывается, можно раскрасить плоскость в 2 цвета так, что границы цветов и образуют эти прямые и окружности!

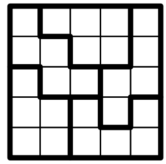


Задавальник

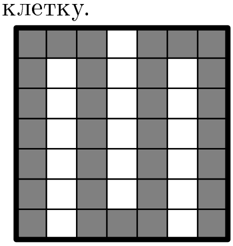
Задача 2.1.4. («Математический праздник» — 2000.6.2;7.1) В квадрате 7×7 клеток закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по три закрашенных клетки.

Задача 2.1.5. («Математический праздник» — 1990.6.1;7.1) Раскрасьте плоскость в три цвета так, чтобы на каждой прямой были точки не более, чем двух цветов, и каждый цвет был бы использован.

Задача 2.1.6. («Математический праздник» — 1996.6.6) Покрасьте клетки доски 5×5 в пять цветов так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждом выделенном блоке встречались все цвета.

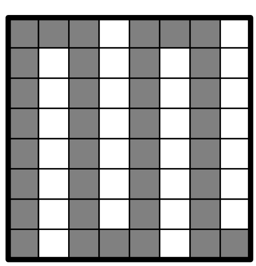


Задача 2.1.7. («Математический праздник» — 2002.6.4) Художник–авангардист Змий Клеточкин покрасил несколько клеток доски размером 7×7, соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна соседствовать ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Ему удалось покрасить 31 клетку.



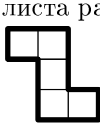
Побейте его рекорд — закрасьте а) 32 клетки; б) 33 клетки.

Задача 2.1.8. («Математический праздник» — 2002.7.5) Художник–авангардист Змий Клеточкин покрасил несколько клеток доски размером 8×8, соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна — ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Ему удалось покрасить 36 клеток. Побейте его рекорд! (Жюри умеет закрашивать 42 клетки!)



Задача 2.1.9. («Математический праздник» — 2001.6.6) Поля клетчатой доски размером 8×8 будем по очереди закрашивать в красный цвет так, чтобы после закрашивания каждой следующей клетки фигура, состоящая из закрашенных клеток, имела ось симметрии. Покажите, как можно, соблюдая это условие, закрасить а) 26 клеток; б) 28 клеток. (В качестве ответа расставьте на тех клетках, которые должны быть закрашены, числа

от 1 до 26 или до 28 в том порядке, в котором проводилось закрашивание.)

Задача 2.1.10. («Математический праздник» — 2004.6.7) Клетки тетрадного листа раскрашены в восемь цветов. Докажите, что найдётся фигура вида , внутри которой есть клетки одного цвета.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.1. Деревянный куб покрасили снаружи белой краской, каждое его ребро разделили на 10 равных частей, после чего куб распилили так, что получились маленькие кубики, у которых ребро в 10 раз меньше, чем у исходного куба. Сколько получилось маленьких кубиков, у которых окрашена хотя бы одна грань?

Задача 2.2. Решите судоку.

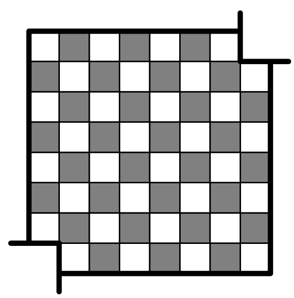
	5	6		3	
			6	4	5
1		4			
			1		4
2	3	5			
	4		5	2	

2 Метод раскраски

Материал для разбора на занятии

Хорошо продуманная раскраска фигур способна творить чудеса. Большинству из нас с детства знакома шахматная доска и порядок, в котором расположены чёрные и белые поля. Оказывается, эта раскраска помогает решить некоторые задачи намного более наглядным и понятным способом. В качестве разминки рассмотрим одну из самых известных задач на разрезания по данной теме.

Задача 2.2.1. Дана доска размером 8×8 клеток, у которой вырезан левый нижний и правый верхний углы (рисунок ниже). Можно ли такую доску разрезать на домино размером 1 на 2 клетки?

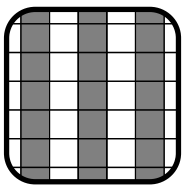


Решение. Пытаясь подобрать пример такого разбиения, мы всё время будем терпеть неудачу, что заставляет задуматься — может быть, это вообще невозможно? Но как доказать, что это невозможно? Ведь существует просто огромное количество вариантов попыток расставить домино, и перебрать их за время олимпиады не сможет не только её участник, но и самый мощный компьютер. Тут нам на помощь приходит шахматная раскраска.

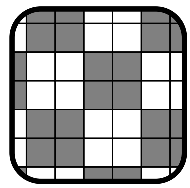
Рассмотрим сначала доску без вырезанных уголков: в ней количество белых и чёрных полей будет одинаковым — по 32 клетки. Заметим теперь, что левый нижний и правый верхний углы одного цвета. Пусть этот цвет оказался чёрным (случай с белым цветом абсолютно аналогичен). Тогда у доски с двумя вырезанными полями 32 белых поля и 30 чёрных. Но каждая доминошка состоит из одной белой и одной чёрной клетки! Значит, и доска, разрезанная на доминошки, должна содержать поровну чёрных и белых клеток, что не так. Следовательно, данную доску нельзя разрезать на доминошки. □

Рассмотренная раскраска является далеко не единственной, которая используется при решении подобного типа задач, например, следующие раскраски встречаются также довольно часто:

- «полосатая раскраска» — в ней первый столбец полностью чёрный, следующий за ним — белый, потом снова чёрный, и так далее (рисунок а));
- «большая шахматная раскраска» — почти то же самое, что и обычная шахматная раскраска, только всё разбивается на квадраты 2 на 2 (рисунок б)).



а) «полосатая раскраска»



б) «большая шахматная раскраска»

Раскраски, как правило, используются, чтобы доказать, что требуемого разбиения не существует. Обычно в задаче не сразу понятно, какую раскраску нужно использовать для решения, поэтому первым шагом следует определить, какая именно раскраска поможет решить задачу. Возможно, для этого потребуется перебрать несколько различных методов раскраски. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 2.2.2. Дана доска размером 10 на 10. Можно ли её разрезать на прямоугольники размером 1 на 4?

Решение. Попробуем использовать шахматную раскраску — тогда на ней будет по 50 чёрных и белых полей. Но ведь каждый прямоугольник занимает по 2 чёрных и 2 белых поля, то есть, теоретически, 25 прямоугольников размером 1 на 4 будут давать 50 чёрных и 50 белых полей, и никакого противоречия в этом случае не получается. Но отсюда вовсе не следует, что подобное разбиение существует. Используем «большую» шахматную раскраску. Тогда доска делится на 25 квадратов 2 на 2, и из них 13 будут чёрными, а 12 — белыми. Значит, всего будет 52 чёрных и 48 белых полей. Но каждый прямоугольник 1 на 4 занимает ровно 2 чёрных и ровно 2 белых поля. Получаемое противоречие показывает, что доску на указанные прямоугольники разрезать невозможно. □

Задавальник

Задача 2.2.3. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.6.6) Сколько фишек может стоять на шахматной доске, если любой квадрат, состоящий из девяти клеток, содержит в точности одну фишку?

Задача 2.2.4. (Московская математическая регата — 2013/14.7.4.3) Из шахматной доски (размером 8×8) вырезали центральный квадрат размером 2×2. Можно ли оставшуюся часть доски разрезать на равные фигурки в виде буквы «Г», состоящие из четырёх клеток?

Задача 2.2.5. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2014.9.6) Из шахматной доски размером 8×8 вырезали квадрат размером 2×2 так, что оставшуюся доску удалось разрезать на прямоугольники размером 1×3. Определите, какой квадрат могли вырезать.

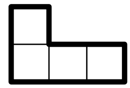
Задача 2.2.6. (Московская математическая регата — 2017/18.11.2.3) Из клетчатой доски размером 8×8 выпилили восемь прямоугольников размером 2×1. После этого из оставшейся части требуется выпилить квадрат размером 2×2. Обязательно ли это удастся?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.3. На клетчатой доске стоит фигура «бобёр», которая может ходить на три клетки по горизонтали и на одну по вертикали или пять клеток по вертикали и одну по горизонтали. Может ли «бобёр», сделав несколько ходов, попасть в соседнюю по стороне с начальной клетку?

Задача 2.4. Можно ли квадрат 10×10 разрезать на фигуры, приведённые

ниже?



Задача 2.5. Можно ли квадрат 8×8 с вырезанной угловой клеткой разрезать на прямоугольники размером 1 на 3 ?

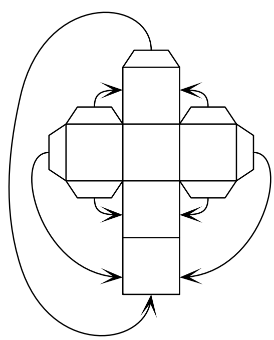
3 Развёртки

Материал для разбора на занятии

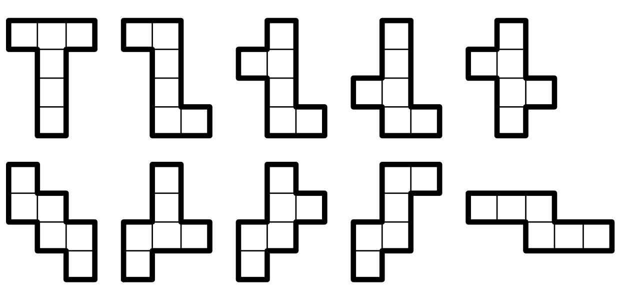
Одной из важных концепций стереометрических задач (то есть, задач, связанных с объёмными фигурами) является концепция «развёртки».

Рассмотрим фигуру, с которой вы уже столкнулись в прошлых «квантах» — куб. Куб можно очень легко изготовить из бумаги самостоятельно.

Рассмотрим следующую развёртку куба, изображённую на рисунке. Если мы согнём данную фигуру по линиям сетки, соединив и склеив вместе рёбра, отмеченные стрелочками (используя выпуклые части развёртки), то получим трёхмерную фигуру.



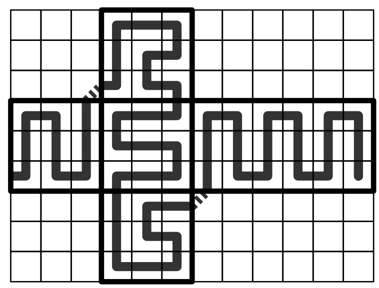
Существует большое количество возможных развёрток куба из квадратов, все варианты которых приведены на рисунке ниже.



Иногда развёртка может помочь решить или оформить задачу, например.

Задача 2.3.1. (Тургор. Весенний тур. Тренировочный вариант — 1988-1989.7-8.4). Можно ли нарисовать на поверхности кубика Рубика такой замкнутый путь, который проходит через каждый квадратик ровно один раз (через вершины квадратиков путь не проходит)?

Решение. Нарисуем развёртку куба и попробуем провести «сплошной» путь, помня о том, как связаны стороны куба. Получим такую картинку.



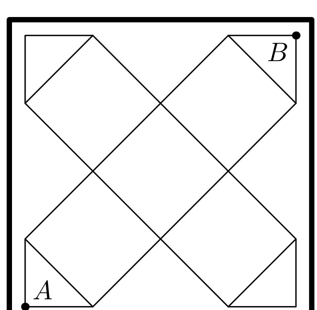
Отсюда делаем вывод, что такой путь нарисовать можно. □

Без изображения развёртки решение было бы гораздо более длинным и непонятным.

Не всегда развёртка будет представлять из себя фигуру, которую нужно склеивать по рёбрам, иногда это может быть что-то более сложное.

Задача 2.3.2. (Московская математическая олимпиада — 1954.8.1). Из квадрата размером 3 на 3 вырезать одну фигуру, которая представляет развёртку полной поверхности куба, длина ребра которого равна 1.

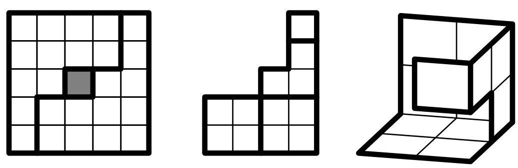
Решение. Заметим, что развёртка вырезается из симметричной фигуры. Попробуем сделать симметричную развёртку куба. Разрежем одну из граней куба по диагоналям, а затем сделаем разрез по 4 рёбрам, выходящим их этой грани, получим:



Расстояние AB равно четырём длинам ребра куба, т. е. равно 4. Заметим, что диагональ квадрата 3×3 имеет длину $3\sqrt{2} > 4$, поэтому наша развёртка не выходит за его границы. $\square$

Задача 2.3.3. («Математический праздник» — 1998.7.6). Из квадрата 5×5 вырезали центральную клетку. Разрежьте получившуюся фигуру на две части, в которые можно завернуть куб $2 \times 2 \times 2$.

Решение. Заметим, что квадрат можно разрезать, как на рисунке посередине.



Каждая часть сворачивается, как показано на рисунке справа, и образует со второй такой же куб $2 \times 2 \times 2$. $\square$

Задавальник

Задача 2.3.4. (Всероссийская олимпиада по геометрии — 2005.23) Оклейте куб в один слой пятью равновеликими выпуклыми пятиугольниками.

Задача 2.3.5. (Всероссийская олимпиада по геометрии — 2011.10.8) Есть лист жести размером 6×6. Разрешается надрезать его, но так, чтобы он не распадался на части, и сгибать. Как сделать куб с ребром 2, разделённый перегородками на единичные кубики?

Задача 2.3.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2007.8-9.1) Дана прямоугольная полоска размером 12×1. Оклейте этой полоской в два слоя куб с ребром 1 (полоску можно сгибать, но нельзя надрезать).

Задача 2.3.7. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.6.4) Дан куб с ребром 2. Покажите, как наклеить на него без наложений 10 квадратов со стороной 1 так, чтобы никакие квадраты не граничили по отрезку (по стороне или её части). Перегибать квадраты нельзя.

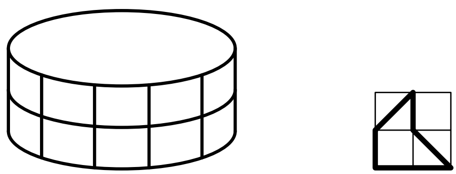
Задача 2.3.8. (Московская математическая регата — 2011/12.10.2.2) Вокруг цилиндрической колонны высотой 20 метров и диаметра 3 метра обвита узкая лента, которая поднимается от подножия до вершины семью полными витками. Какова длина ленты?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.6. В музее Гуггенхайм в Нью-Йорке есть скульптура, имеющая форму куба. Жук, севший на одну из вершин, хочет как можно быстрее осмотреть скульптуру, чтобы перейти к другим экспонатам (для этого достаточно попасть в противоположную вершину куба). Какой путь ему выбрать?

Задача 2.7. Составьте развёртку правильной четырёхугольной пирамиды.

Задача 2.8. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2014.5.4). Полина решила раскрасить свой клетчатый браслет размером 10×2 (рисунок слева) волшебным узором из одинаковых фигурок (рисунок справа), чередуя в них два цвета. Помогите ей это сделать.



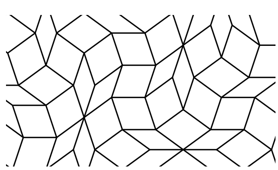
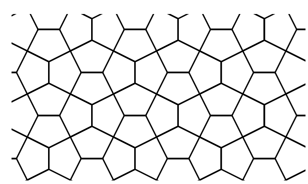
4 Замощение плоскости

Материал для разбора на занятии

Современная математика, как наука, со временем становится всё менее доступной для понимания широкому кругу лиц. Одной из причин является отказ от геометрического, наглядного, описания в пользу формализации и алгебраизации математики. Однако, несмотря на высокий уровень абстракции современной математики и продолжающееся экстремальное повышение степени абстракции, в этом разделе науки до сих пор совершаются открытия, смысл которых интуитивно ясен непрофессионалу, например, связанные с задачей замощения плоскости паркетами (многоугольниками одинаковой формы). Более того, совсем недавно открытия могли совершать непрофессионалы.

Так, известной является история открытия в 1970-х годах домохозяйкой из Сан-Диего Марджори Райс, матерью пятерых детей, не имеющей математического образования, нового вида пятиугольных паркетов — одного из решений задачи поиска выпуклых пятиугольников, которыми можно замостить плоскость без пробелов и наложений. Статью в Scientific American М. Гарднера, призывающего к поиску данных пятиугольников, она прочитала случайно, а о своём открытии сообщила Гарднеру.

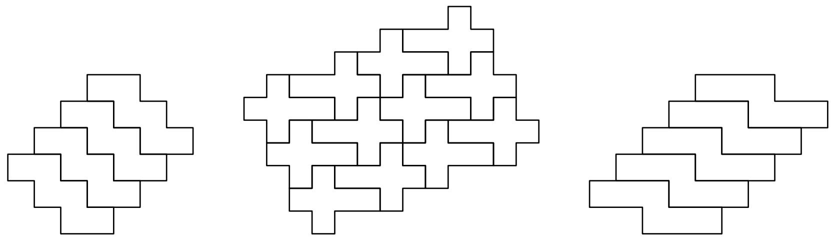
Рассмотрим, например, тротуарную плитку.

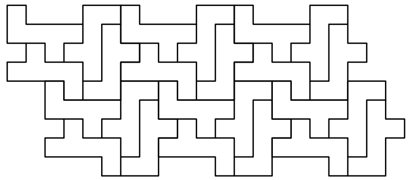
На левом рисунке мы замостили плоскость плитками нескольких видов, на правом — одинаковыми плитками.

В предыдущей теме мы рассматривали развёртки куба. Любой развёрткой куба можно замостить плоскость.

Приведём несколько примеров.



Одними из важных принципов решения задачи на замощение плоскости являются принципы повторяемости и симметрии. По сути, в классической олимпиадной математике задачи на замощение плоскости — это задачи на разрезание бесконечного пространства на одинаковые части.

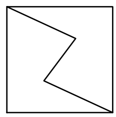


Задача 2.4.1. («Математический праздник» — 1990.5.4) Замостите плоскость одинаковыми пятиугольниками.

Решение. Первой реакцией при решении данной задачи может быть желание нарисовать одинаковые правильные пятиугольники. Например, очень часто встречается «решение» следующего вида.

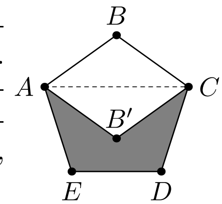
«Разрежем» пятиугольник на 3 треугольника. В каждом из них сумма углов равна $180°$, значит, сумма углов пятиугольника равна $180° \cdot 3 = 540°$. Значит, один угол равен $540° : 5 = 108°$ градусов. После замощения плоскости в каждом уголке сходится несколько углов пятиугольника, но $360°$ градусов нельзя поделить на $108°$, значит, так замостить плоскость нельзя.

Если бы в задаче говорилось про правильный пятиугольник, это было бы решением, но про правильность одинаковых пятиугольников в условии сказано не было! На самом деле, замостить подобным образом плоскость можно. Например, разрежем плоскость сначала на равные квадраты, а затем разделим каждый из них на два равных пятиугольника.



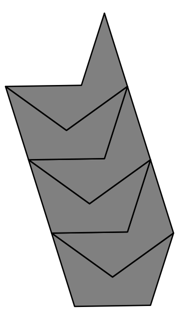
Полученный рисунок завершает решение задачи. □

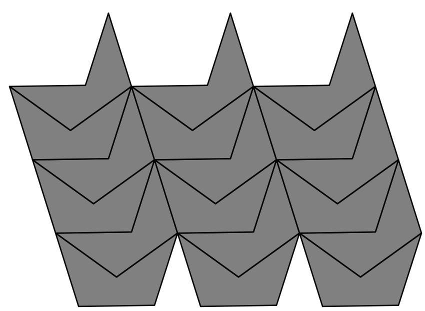
Задача 2.4.2. (Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина (Москва) — 2005.10-11.3). $ABCDE$ — правильный пятиугольник. Точка B' симметрична точке B относительно прямой AC (см. рисунок). Можно ли пятиугольниками, равными $AB'CDE$, замостить плоскость?



Решение. Найдём углы полученного пятиугольника. В ходе решения предыдущей задачи мы уже получили, что угол правильного пятиугольника составляет $108°$. Получим, что $AB'CDE$ имеет углы, равные $36°$, $252°$, $36°$, $108°$, $108°$ соответственно. А также, равные стороны в силу того, что $ABCDE$ — правильный и $AB' = AB = BC = B'C$, т. к. B' симметрична B относительно AC.

Поэтому фигурами, равными $AB'CDE$, можно замостить «полосу» (рис. слева). Затем, такими равными параллельными полосами замостим всю плоскость (рис. справа).

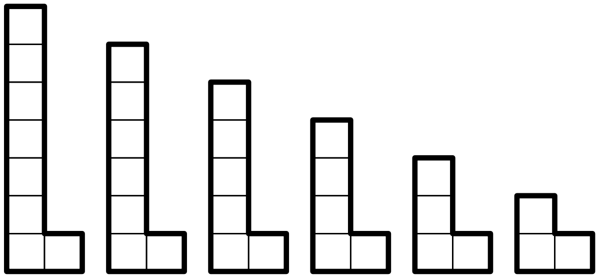




Полученный рисунок завершает решение задачи. □

Задавальник

Задача 2.4.3. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.6.3) Из набора уголков, изображённых на рисунке, сложите прямоугольник.

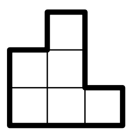


Задача 2.4.4. («Математический праздник» — 1990.5.4) Замостите плоскость одинаковыми семиугольниками.

Задача 2.4.5. («Математический праздник» — 2004.6.4;7.5) Сложите из фигур, изображённых на рисунке:

а) квадрат размером 9×9 с вырезанным в его центре квадратом 3×3;
б) прямоугольник размером 9×12.

Фигуры можно не только поворачивать, но и переворачивать.



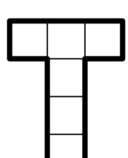
Задача 2.4.6. (Турнир городов. Осенний тур. Тренировочный вариант — 1996/97.8-9.2) При каких целых значениях n правильный треугольник со стороной n можно замостить плитками, имеющими форму равнобокой трапеции со сторонами 1, 1, 1, 2?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.9. Замостить плоскость одинаковыми 8-угольниками.

Задача 2.10. Замостить плоскость одинаковыми 9-угольниками.

Задача 2.11. Замостить плоскость следующей развёрткой куба.

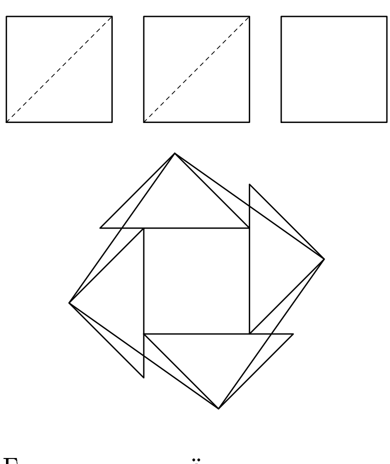


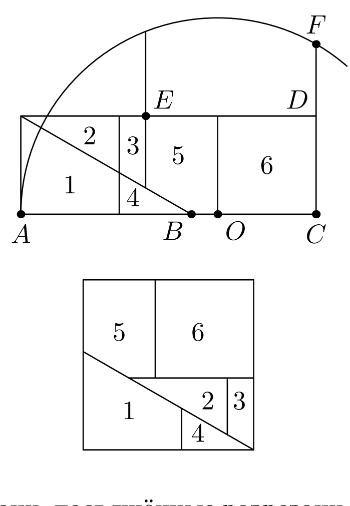
5 Замощения и разрезания с ограничениями

Материал для разбора на занятии

Задачи на замощения были рассмотрены в предыдущем «кванте», однако существуют также немного модифицированные задания, подразумевающие дополнительные условия: ограничение по количеству фигур или их типов; ограничение по способу действия с фигурой — можно ли использовать «перевернутые» (зеркально-симметричные данной) фигуры, и т. д.

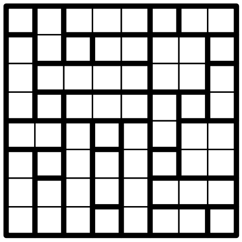
Задачи на разрезание являлись предметом увлечения многих математиков с древнейших времен. Многие простые задачи данного типа были решены ещё в античности, но по праву автором первого систематического труда, посвященного разрезаниям, считается Абул-Вефа — знаменитый математик и астроном персидского происхождения X века, живший в Багдаде (он, в числе прочего, ввёл понятия тангенса и котангенса, рассмотрел задачи на построения циркулем и линейкой). До нас дошли лишь фрагменты его трудов. Одна из самых известных задач — задача Абул-Вефа: разрезать три равных квадрата на несколько частей, из которых можно составить один большой квадрат. Её решение приведено на рисунке ниже: два квадрата разрезаны по диагоналям на четыре треугольника, располагаемые вокруг третьего квадрата. Еще четыре разреза завершают решение задачи.



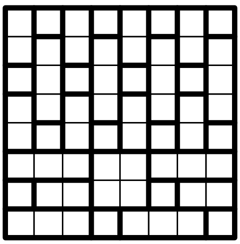


Геометры всерьёз взялись рассматривать задачи, посвящённые разрезаниям фигур с ограничением по наименьшему числу частей и последующим составлением из них той или иной новой фигуры, лишь в начале XX века. Одним из основоположников этого увлекательного раздела геометрии был знаменитый составитель головоломок Генри Э. Дьюдени. Древнюю задачу Абул-Вефа Дьюдени решил, получив лишь 6 частей, что в настоящее время является разбиением с их наименьшим возможным количеством (на рисунке справа $AB = ED = CF, O$ — центр окружности).

Задача 2.5.1. («Математический праздник» — 2010.6.5) Саша разрезал шахматную доску 8×8 по границам клеток на 30 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались даже углами. Можно ли улучшить его достижение, разрезав доску на большее число прямоугольников с соблюдением того же условия?

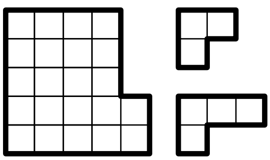


Решение. На рисунке доска разрезана на 35 прямоугольников.



Оказывается, что на большее число прямоугольников вышеуказанным образом разрезать доску нельзя. Однако доказательство этого весьма громоздко, и приводить мы его не будем. Для решения задачи оно, разумеется, не требовалось. □

Задача 2.5.2. Незнайка разрезал фигуру на трёхклеточные и четырёхклеточные уголки, нарисованные справа от неё. Сколько трёхклеточных уголков могло получиться?



Решение. Фигура состоит из 22 клеток. Пусть x — количество получившихся трёхклеточных уголков, а y — четырёхклеточных. Тогда $3x + 4y = 22$. Заметим, что x чётно и $x < 8$ (так как $3x$ не может быть больше 22), то

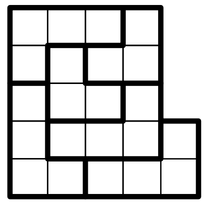


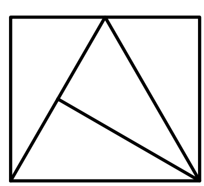
Рис. 5.1: Случаи для $x = 2$ слева и для $x = 6$ справа.

есть, $x = 0, 2, 4$ или 6. Значения $x = 0$ и $x = 4$ не подходят, так как y получается нецелым. Оба оставшихся варианта для $x = 2$ и $x = 6$ реализуются, как показано на рисунке.

Если вы просто получите рисунки перебором — полный балл за данную задачу вы не получите, нужно объяснить, почему другие варианты невозможны! □

Задача 2.5.3. (Тургор. Осенний тур. Тренировочный вариант — 2015.8-9.2) Из одинаковых неравнобедренных прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник?

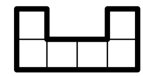
Решение. Не обязательно. Например, возьмём равносторонний треугольник и приложим к двум его сторонам гипотенузами прямоугольные треугольники с углом 60° при общей вершине.



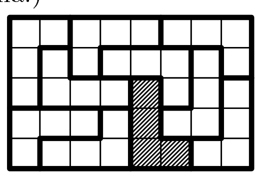
Осталось разрезать равносторонний треугольник высотой из другой вершины. □

Задавальник

Задача 2.5.4. («Математический праздник» — 2005.6.4) Незнайка разместил без наложений в квадрате 10×10 только 13 фигур («скобок»), изображённых на рисунке. Попробуйте разместить больше.



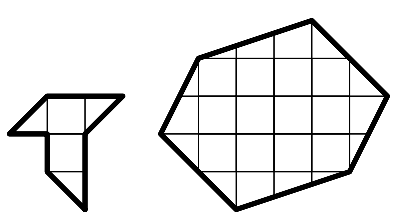
Задача 2.5.5. («Математический праздник» — 2003.6.5) В распоряжении юного паркетчика имеется 10 одинаковых плиток, каждая из которых состоит из 4 квадратов и имеет форму буквы «Г» (все плитки ориентированы одинаково). Может ли он составить из них прямоугольник размером 5×8? (Плитки можно поворачивать, но нельзя переворачивать. Например, на рисунке изображено неверное решение: заштрихованная плитка неправильно ориентирована.)



Задача 2.5.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.6.5) Вася нарисовал карандашом разбиение клетчатого прямоугольника на прямоугольники размером 3×1 (тримино), закрасил ручкой центральную клетку каждого из получившихся прямоугольников, после чего стёр карандашные линии. Всегда ли можно восстановить исходное разбиение?

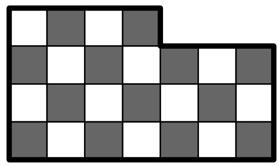
Задача 2.5.7. («Математический праздник» — 1999.6.6) На плоскости нарисован серый квадрат. Имеется семь квадратных плиток того же размера. Нужно положить их на плоскость так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть серого квадрата (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

Задача 2.5.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.7.8) Предложенные вам четыре одинаковые фигуры (рисунок слева) требуется уложить в шестиугольник (рисунок справа) так, чтобы они не выступали за его границы и не накладывались друг на друга (даже частично).



Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.12. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.6.1;7.2) У бабушки была клетчатая тряпочка, изображённая на рисунке.



Однажды она захотела сшить из неё подстилку коту в виде квадрата размером 5×5. Бабушка разрезала тряпочку на три части и сшила из них квадратный коврик, также раскрашенный в шахматном порядке. Покажите, как она могла это сделать (у тряпочки одна сторона лицевая, а другая изнаночная, то есть части можно поворачивать, но нельзя переворачивать).

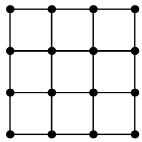
Задача 2.13. Можно ли разрезать квадрат на четыре части так, чтобы каждая часть имела общий отрезок с любой другой?

6 Геометрия на клетчатой бумаге

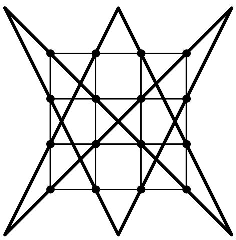
Материал для разбора на занятии

Геометрия на клетчатой бумаге нам уже хорошо знакома по предыдущим темам. Перейдём к более сложным или необычным задачам, связанным с «клеточностью» пространства. Для решения некоторых задач из данной темы вам, возможно, потребуются знания из курса геометрии за 7 класс.

Задача 2.6.1. («Математический праздник» — 2005.7.3) Зачеркните все шестнадцать точек, изображённых на рисунке, шестью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя отрезков по линиям сетки.



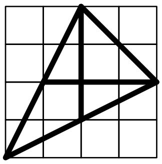
Решение. Вариант решения данной задачи указан на рисунке



□

Задача 2.6.2. («Математический праздник» — 1999.6.5) Нарисуйте на клетчатой бумаге треугольник с вершинами в углах клеток, две медианы которого перпендикулярны. (Медиана соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны.)

Решение.



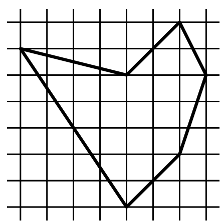
□

Как найти площадь фигуры, изображённой на клетчатой бумаге? Обычно такие площади считают разбиением на прямоугольники и треугольники или используя дополнения до них. Но это можно вычислить гораздо проще! Оказывается, что верна удивительная формула (**формула Пика**):

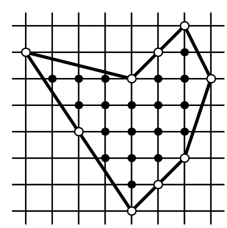
$$S = \text{В} + \frac{\Gamma}{2} - 1,$$

где В — количество узлов сетки, лежащих внутри многоугольника, а Г — на его границе. Из этой формулы видно, в частности, что площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки всегда является целой или полуцелой.

Задача 2.6.3. Какую площадь имеет следующий многоугольник?

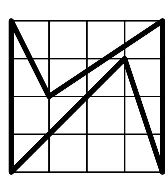


Решение. Сначала посчитаем число узлов координатной сетки внутри многоугольника (чёрные), и на границе (белые): В $= 19$, Г $= 9$. Откуда, пользуясь формулой, получим $S = 19 + \frac{9}{2} - 1 = 22{,}5$. □



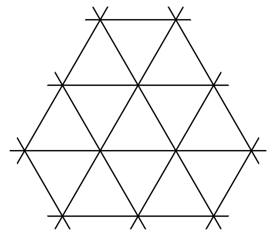
Задача 2.6.4. («Математический праздник» — 2007.7.4) На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат 4×4. Отметьте ещё два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) площади 6 клеток.

Решение. В качестве решения необходимо не только предоставить рисунок, но и объяснить, как подсчитана площадь полученной фигуры. На границе расположено 14 узлов сетки, внутри — 0, таким образом, $S = 7 - 1 = 6$.



□

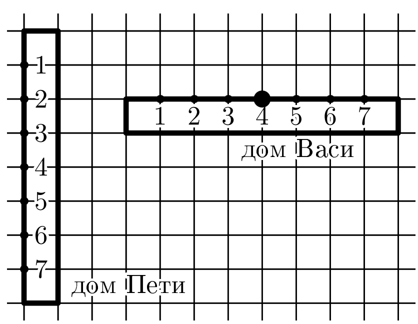
На олимпиадах встречаются также задачи, в которых «клетки» не квадратные, а треугольные, например, как на рисунке.



Задавальник

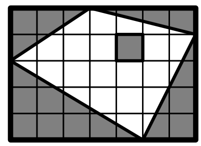
Задача 2.6.5. («Математический праздник» — 1993.7.1) Можно ли в центры 16 клеток шахматной доски 8×8 вбить гвозди так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?

Задача 2.6.6. («Математический праздник» — 2009.7.1) Петя и Вася живут в соседних домах (план на рисунке). Вася живёт в четвёртом подъезде. Известно, что Пете, чтобы добежать до Васи кратчайшим путём (не обязательно идущим по сторонам клеток), безразлично, с какой стороны обегать свой дом. Определите, в каком подъезде живет Петя.

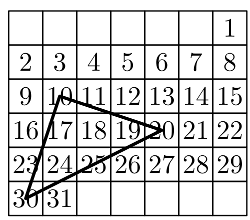


Задача 2.6.7. («Математический праздник» — 2013.6.2) Из каждого клетчатого квадрата со стороной 3 клетки вырезается фигура из пяти клеток с таким же периметром, как у квадрата, но площадью 5 клеток. Саша утверждает, что сможет вырезать 7 таких различных фигур (никакие две из них не совместятся при наложении, даже если фигуры переворачивать). Не ошибается ли он?

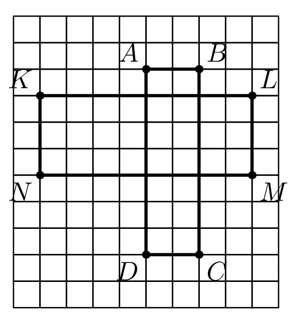
Задача 2.6.8. (Турнир Архимеда — 2013.2) Имение маркиза Карабаса имеет форму прямоугольника (на рисунке ниже). Часть участка занимает лес (выделен тёмным), остальное — пастбища. Чего у маркиза больше — леса или пастбищ? Ответ объясните.



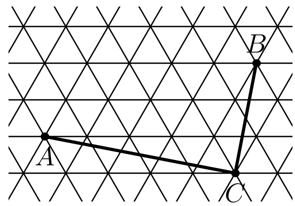
Задача 2.6.9. («Математический праздник» — 2006.7.3) Наташа сделала из листа клетчатой бумаги календарь на январь 2006 года (на рисунке ниже) и заметила, что центры клеток 10, 20 и 30 января образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Наташа предположила, что это будет верно и в любом другом году, за исключением тех лет, когда центры клеток 10, 20 и 30 лежат на одной прямой. Права ли Наташа?



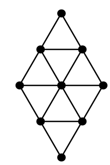
Задача 2.6.10. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.6.8) Прямоугольники $ABCD$ и $KLMN$ имеют соответственно параллельные стороны и расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что площади четырёхугольников $ALCN$ и $KBMD$ равны.



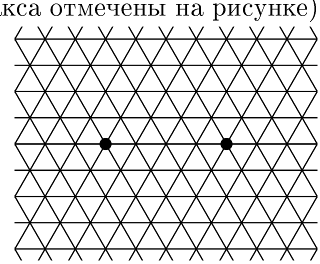
Задача 2.6.11. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.7.8) На сетке из равносторонних треугольников построен угол ACB. Найдите его величину.



Задача 2.6.12. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.6.2) Из 16 спичек сложен ромб со стороной в две спички, разбитый на треугольники со стороной в одну спичку. А сколько спичек потребуется, чтобы сложить ромб со стороной в 10 спичек, разбитый на такие же треугольники со стороной в одну спичку?

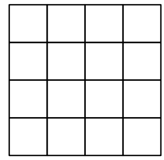


Задача 2.6.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.6.2) Коля и Макс живут в городе с треугольной сеткой дорог. В этом городе передвигаются на велосипедах, при этом разрешается поворачивать только налево. Коля поехал в гости к Максу и по дороге сделал ровно 4 поворота налево. На следующий день Макс поехал к Коле и приехал к нему, совершив только один поворот налево. Оказалось, что длины их маршрутов одинаковы. Изобразите, каким образом они могли ехать (дома Коли и Макса отмечены на рисунке).



Задача 2.6.14. («Математический праздник» — 2006.7.6) Петя закрасил одну клетку прямоугольника. Саша может закрашивать другие клетки этого прямоугольника по следующему правилу: можно красить любую клетку, у которой нечётное число закрашенных соседей (по стороне). Сможет ли Саша закрасить все клетки прямоугольника (независимо от того, какую клетку выбрал Петя), если размеры прямоугольника: а) 8×9; б) 8×10 клеток?

Задача 2.6.15. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.7.8) Есть 40 одинаковых шнуров. Если поджечь любой шнур с одной стороны, он сгорает, а если с другой — не горит. Вася раскладывает шнуры в виде квадрата (на рисунке каждый шнур — сторона клетки). Затем Петя расставляет 12 запалов. Сможет ли Вася разложить шнуры так, что Пете не удастся сжечь все шнуры?



Задача 2.6.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.7.8) Квадрат с вершинами в узлах сетки и сторонами длиной 2009, идущими по линиям сетки, разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Докажите, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.14. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2007.7.5) На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5 клеток. Его требуется разбить на 5 частей одинаковой площади, проводя отрезки внутри квадрата только по линиям сетки. Может ли оказаться так, что суммарная длина проведённых отрезков не превосходит 16 клеток?

Задача 2.15. Можно ли заполнить клетки бесконечного клетчатого листа крестиками и ноликами так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали и диагонали нельзя было встретить три одинаковых знака подряд?

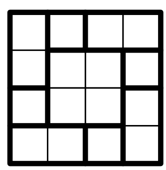
7 Геометрия квадратов и прямоугольников

Материал для разбора на занятии

Геометрия квадратов и прямоугольников — тема, которую можно в каком-то смысле считать продолжением темы «геометрия на клетчатой бумаге». Однако, в данной теме вершинами фигур не обязательно являются узлы сетки.

Задача 2.7.1. (Московская математическая регата — 2012.7.2.2) Разрежьте квадрат 4×4 по линиям сетки на 9 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались ни сторонами, ни вершинами.

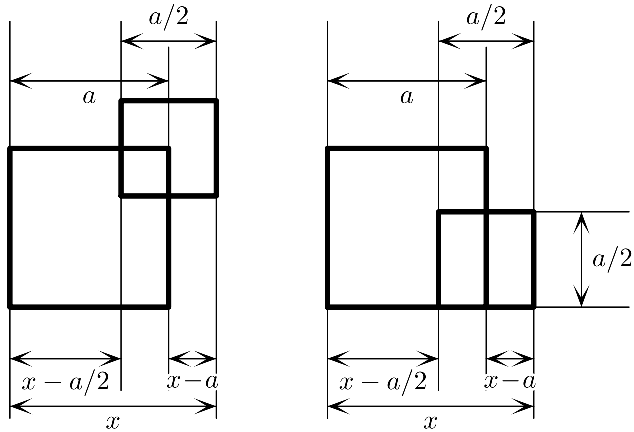
Решение. Пример подобного разрезания приведён на рисунке ниже.



□

Задача 2.7.2. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.6.3) В большой квадратный зал привезли два квадратных ковра, сторона одного ковра вдвое больше стороны другого. Когда их положили в противоположные углы зала, они в два слоя накрыли 4 м^2, а когда их положили в соседние углы, то 14 м^2. Каковы размеры зала?

Решение. Обозначим длину стороны комнаты за x, а длину стороны большого ковра за a. Проиллюстрируем условие рисунком.



В первом случае ковры накрывают квадрат со стороной

$$x - (x - a) - \left(x - \frac{a}{2}\right) = \frac{3}{2}a - x.$$

Во втором — прямоугольник со сторонами

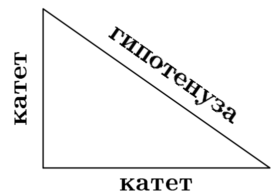
$$x - (x - a) - \left(x - \frac{a}{2}\right) = \frac{3}{2}a - x \text{ и } \frac{a}{2}.$$

Значит, $\left(\frac{3}{2}a - x\right) \cdot \frac{a}{2} = 14$ м^2. Поскольку сторона квадрата, площадь которого 4 м^2, равна 2 м, то $\frac{3}{2}a - x = 2$ м. Подставив это в уравнение выше, получим: 2 м $\cdot \frac{a}{2} = 14$ м^2, т. е. $a = 14$ м, а $x = \frac{3}{2}a - 2$ м $= 19$ м. □

Задача 2.7.3. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.6.4) Длину прямоугольника увеличили на 1 м, а ширину уменьшили на 1 мм. Могла ли при этом площадь прямоугольника уменьшиться?

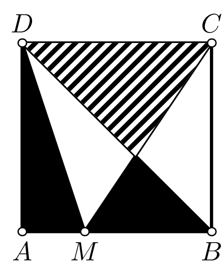
Решение. Пусть начальная длина прямоугольника равна 2 м, а ширина 2 мм, конечные их величины будут равны 3 м и 1 мм соответственно. Тогда начальная площадь была 4 м·мм, а конечная 3 м·мм, т. е. площадь уменьшилась. □

Напомним, что такое прямоугольный треугольник и как называются его стороны. *Прямоугольным* называется треугольник, в котором один из углов — прямой, то есть равен 90 градусам. Стороны, примыкающие к прямому углу, называются *катетами*, сторона, лежащая напротив прямого угла — *гипотенузой*.



Предположим, что мы знаем длины катетов. Как мы можем узнать длину гипотенузы? Одна из важнейших формул, используемых в геометрических задачах, в которых есть прямоугольные треугольники — **теорема Пифагора**: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Тройки целых чисел, удовлетворяющие данному условию, обычно называются «пифагоровыми тройками». Самой известной пифагоровой тройкой является тройка 3, 4, 5: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

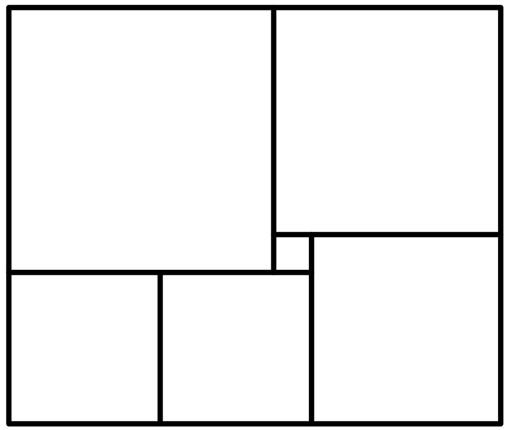
Задача 2.7.4. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.6.9) На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена произвольная точка M. Докажите, что площадь заштрихованного треугольника равна сумме площадей чёрных треугольников.



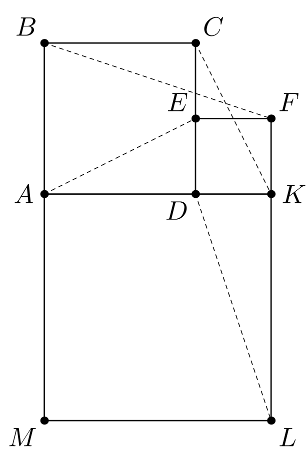
Решение. Пусть точка O — точка пересечения DB и MC. Заметим, что треугольники ADB и DMC имеют равные основания и высоты, значит, их площади одинаковы. Распишем их через площади треугольников, которые они содержат: $S_{ADM}+S_{DMO}+S_{MOB} = S_{DMO}+S_{DOC}$, т. е. $S_{ADM}+S_{MOB} = S_{DOC}$, что и требовалось доказать. □

Задавальник

Задача 2.7.5. («Математический праздник» — 1995.6.3) Прямоугольник составлен из шести квадратов. Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького равна 1.



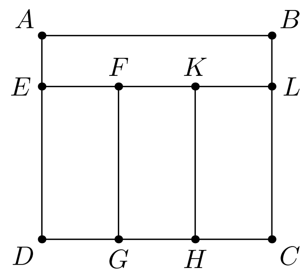
Задача 2.7.6. («Математический праздник» — 1993.6.6) Квадрат $ABCD$ со стороной 2 и квадрат $DEFK$ со стороной 1 стоят рядом на верхней стороне AK квадрата $AKLM$ со стороной 3. Между парами точек A и E, B и F, C и K, D и L натянуты паутинки. Паук поднимается снизу вверх по маршруту $AEFB$ и спускается по маршруту $CKDL$. Какой маршрут короче?



Задача 2.7.7. («Математический праздник» — 2017.7.4) Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK = AC$. Найдите угол $\angle BKC$.

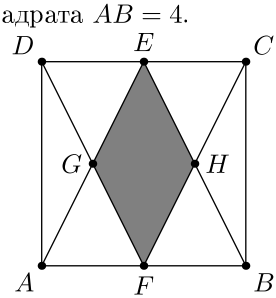
Задача 2.7.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.6.9) У Вики есть четыре фигурки, у Алины есть квадрат, а у Полины есть квадрат другого размера. Объединившись, Алина и Вика могут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок. Может ли оказаться так, что Полина и Вика также смогут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок? (Квадраты складываются без просветов и наложений.)

Задача 2.7.9. (Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2016.6.5) Прямоугольник $ABCD$ разделили на четыре меньших прямоугольника с одинаковыми периметрами. Известно, что $AB = 18$ см, а $BC = 16$ см. Найдите длины сторон остальных прямоугольников.

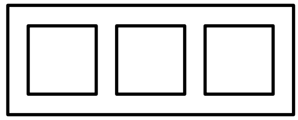


Задача 2.7.10. («Покори Воробьёвы горы» 2016.5–6.4; 7–8.3) Маленький огород размером 6×7 метров разбили на 5 квадратных грядок. Все межи между грядками проходят параллельно сторонам прямоугольника, сторона каждой грядки составляет целое число метров. Найдите суммарную длину получившихся меж. Считать межи линиями, не имеющими толщины.

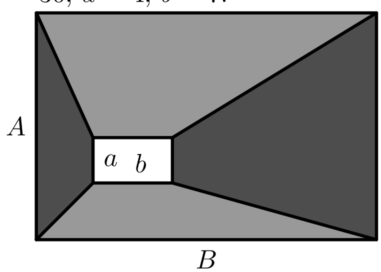
Задача 2.7.11. («Покори Воробьёвы горы» 2016.5–8.5) В квадрате $ABCD$ точки F и E — середины сторон AB и CD соответственно. Точку E соединили с вершинами A и B, а точку F — с C и D, как показано на рисунке. Определите площадь ромба $FGEH$, образовавшегося в центре, если известна сторона квадрата $AB = 4$.



Задача 2.7.12. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2015.6.4) Рамка для трёх квадратных фотографий имеет везде одинаковую ширину. Периметр одного отверстия равен 60 см, периметр всей рамки равен 180 см. Чему равна ширина рамки?



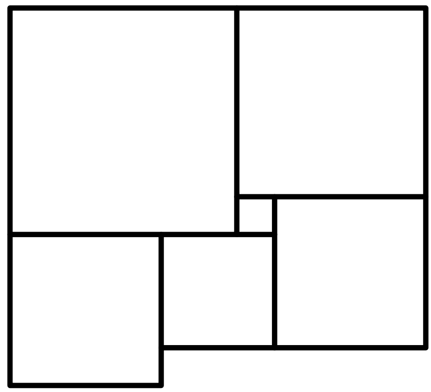
Задача 2.7.13. («Покори Воробьёвы горы» 2015.7.2) Внутри большого прямоугольника размером $A \times B$ расположен маленький прямоугольник размером $a \times b$. Найдите разность между суммарной площадью светло–серых и суммарной площадью тёмно–серых четырёхугольников, если известно, что $A = 20$, $B = 30$, $a = 4$, $b = 7$.



Задача 2.7.14. («Покори Воробьёвы горы» 2014.7.3) Фермеры Иванов, Петров, Сидоров, Васильев и Ермолаев владеют участками прямоугольной формы, площадь которых указана на чертеже. Найдите площадь общего пастбища.

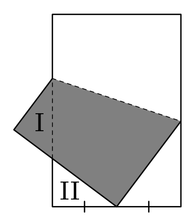
Иванов 25 га	лес	Ермолаев 30 га
Петров 28 га	Общее пастбище	озеро
пустырь	Сидоров 10 га	Васильев 20 га

Задача 2.7.15. («Математический праздник» — 1995.7.3) Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего, если сторона самого маленького равна 1.



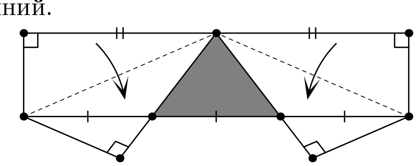
Задача 2.7.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.7.3) Можно ли так расположить на плоскости четыре прямоугольника, чтобы ни одна вершина не была общей для всех прямоугольников, но у любых двух прямоугольников была одна общая вершина? (Прямоугольники могут пересекаться.)

Задача 2.7.17. («Математический праздник» — 2011.7.4) Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны, как показано на рисунке ниже. Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8.

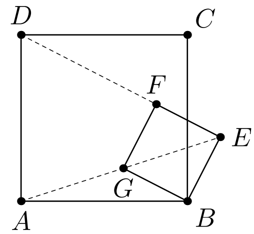


Задача 2.7.18. («Математический праздник» — 1990.6–7.6) Внутри квадрата $ABCD$ расположен квадрат $KMXY$. Докажите, что середины отрезков AK, BM, CX и DY также являются вершинами квадрата.

Задача 2.7.19. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.7.7) Два угла прямоугольного листа бумаги согнули так, как показано на рисунке. Противоположная сторона при этом оказалась разделённой на три равные части. Докажите, что закрашенный треугольник — равносторонний.

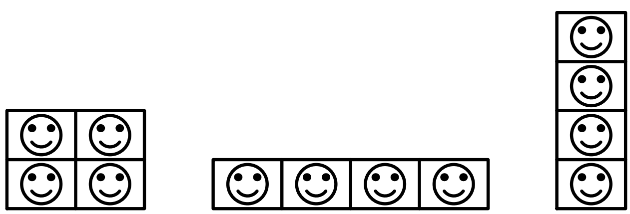


Задача 2.7.20. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.7.8) Квадраты $ABCD$ и $BEFG$ расположены так, как показано на рисунке. Оказалось, что точки A, G и E лежат на одной прямой. Докажите, что тогда точки D, F и E также лежат на одной прямой.



Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.16. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2014.6.3) Из четырёх фотографий можно составить три различных прямоугольника, как показано на рисунке. Периметр какого-то одного из них равен 56 см. Найдите периметры остальных двух прямоугольников, если периметр фотографии равен 20 см.



Задача 2.17. (Материалы математических кружков МЦНМО) Дан вырезанный из бумаги прямоугольник размером 2×3. Имея в распоряжении бесконечное число таких прямоугольников, покажите, каким образом их можно сложить на плоскости так, чтобы без чертёжных приборов можно было отметить вершины квадрата со стороной, равной диагонали этого прямоугольника.

8 Разбор задач для самостоятельного решения

Раскраски

Задача 2.1. Деревянный куб покрасили снаружи белой краской, каждое его ребро разделили на 10 равных частей, после чего куб распилили так, что получились маленькие кубики, у которых ребро в 10 раз меньше, чем у исходного куба. Сколько получилось маленьких кубиков, у которых окрашена хотя бы одна грань?

Решение. Данную задачу (как и большинство задач, в которых нужно вычислить что-либо, введённое условием «хотя бы») проще всего решать «от обратного». Для этого вначале найдём количество кубиков, у которых не покрашено ни одной грани. Всего кубиков — $10 \cdot 10 \cdot 10$, а неокрашенными остались все кубики, которые находятся за «верхним слоем», то есть, они образуют кубик $8 \cdot 8 \cdot 8$. Таким образом, хотя бы одну окрашенную грань имеют $10^3 - 8^3 = 488$ кубиков. □

Задача 2.2. Решите судоку.

	5	6		3	
			6	4	5
1		4			
			1		4
2	3	5			
	4		5	2	

Решение. Действиями, предложенными в теоретической части, получаем.

4	5	6	2	3	1
3	1	2	6	4	5
1	6	4	3	5	2
5	2	3	1	6	4
2	3	5	4	1	6
6	4	1	5	2	3

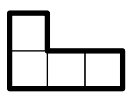
Заполненное судоку завершает решение задачи. □

Метод раскраски

Задача 2.3. На клетчатой доске стоит фигура «бобёр», которая может ходить на три клетки по горизонтали и на одну по вертикали или пять клеток по вертикали и одну по горизонтали. Может ли «бобёр», сделав несколько ходов, попасть в соседнюю с начальной клетку?

Решение. Это очень простая задача, если мы заметим, что на шахматной доске фигура «бобёр» при ходе никогда не меняет цвет поля. Все соседние с начальным полем поля имеют другой цвет. Так что, ответом будет «невозможно». □

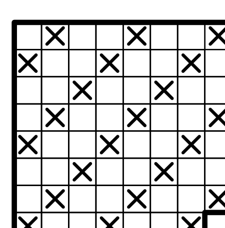
Задача 2.4. Можно ли квадрат 10×10 разрезать на фигуры, приведённые ниже?



Решение. Рассмотрим полосатую раскраску с горизонтальными полосами. Заметим, что каждая фигура данного вида занимает либо 1 чёрную клетку и 3 белых, либо 1 белую клетку и 3 чёрных. Всего в квадрате 10×10 100 клеток, а в каждой фигуре по 4 клетки. Поэтому, если квадрат можно разрезать на фигуры, то их будет 25 штук. Всего на доске 50 белых полей. Каждая фигура занимает либо 1, либо 3 белых поля, но сумма 25 нечётных чисел не может быть чётной. Поэтому квадрат 10×10 невозможно разрезать на данные фигуры. □

Задача 2.5. Можно ли квадрат 8×8 с вырезанной угловой клеткой разрезать на прямоугольники размером 1 на 3 ?

Решение. Наша цель — раскрасить фигуру так, чтобы как бы мы ни укладывали прямоугольник 1×3, он занимал бы одну и ровно одну закрашенную клетку (назовём это «условием»). На рисунке справа одна такая возможная раскраска.



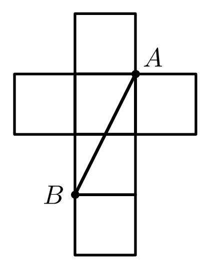
Чтобы занять все помеченные крестиками клетки, требуется положить 22 прямоугольника. Но ведь тогда занимаемая ими площадь будет равна 66 клеткам, а в нашем распоряжении только 63. Значит, такого разрезания не существует.

При решении данной задачи мы можем найти и другие раскраски, удовлетворяющие «условию». Если бы таких клеток оказалось меньше 22, нам бы потребовалось предъявить решение (чего сделать не получилось бы). Именно поэтому мы из множества раскрасок, удовлетворяющих «условию», выбрали ту, в которой закрашенных клеток больше 21. □

Развёртки

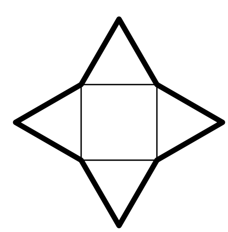
Задача 2.6. В музее Гуггенхайм в Нью-Йорке есть скульптура, имеющая форму куба. Жук, севший на одну из вершин, хочет как можно быстрее осмотреть скульптуру, чтобы перейти к другим экспонатам (для этого достаточно попасть в противоположную вершину куба). Какой путь ему выбрать?

Решение. При выборе развёртки куба со следующим расположением начальной и конечной вершины, становится совершенно понятно, что кратчайший путь на кубе будет соответствовать кратчайшему пути, т. е. пути по прямой, на развёртке. □

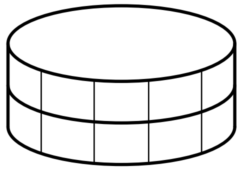
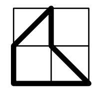


Задача 2.7. Составьте развёртку правильной четырёхугольной пирамиды.

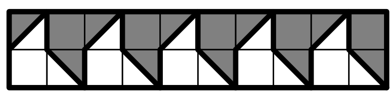
Решение. Самый простой вид у развёртки будет, если выбрать в качестве её «центра» основание пирамиды. □



Задача 2.8. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2014.5.4). Полина решила раскрасить свой клетчатый браслет размером 10×2 (рисунок слева) волшебным узором из одинаковых фигурок (рисунок справа), чередуя в них два цвета. Помогите ей это сделать.

Решение. Сделаем развёртку браслета и проведём разбиение и раскраску (на рисунке ниже).

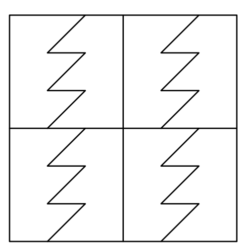


□

Замощение плоскости

Задача 2.9. Замостить плоскость одинаковыми 8-угольниками.

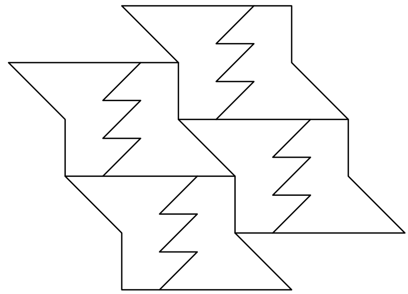
Решение. Пример замощения показан на рисунке ниже. Данными квадратами можно замостить плоскость, значит, изначальными многоугольниками — тоже.



□

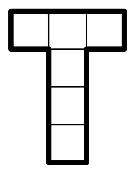
Задача 2.10. Замостить плоскость одинаковыми 9-угольниками.

Решение. Пример замощения показан на рисунке. Построенные бесконечные полосы с параллельными краями позволяют завершить замощение плоскости.

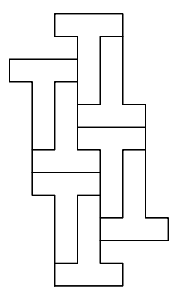


□

Задача 2.11. Замостить плоскость следующей развёрткой куба.



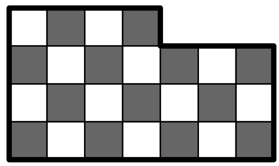
Решение. Пример замощения показан на рисунке ниже. Построенные бесконечные полосы с параллельными краями позволяют завершить замощение плоскости.



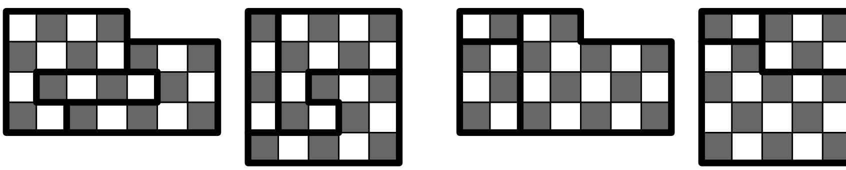
□

Замощения и разрезания с ограничениями

Задача 2.12. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.6.1;7.2) У бабушки была клетчатая тряпочка, изображённая на рисунке. Однажды она захотела сшить из неё подстилку коту в виде квадрата размером 5×5. Бабушка разрезала тряпочку на три части и сшила из них квадратный коврик, также раскрашенный в шахматном порядке. Покажите, как она могла это сделать (у тряпочки одна сторона лицевая, а другая изнаночная, то есть части можно поворачивать, но нельзя переворачивать).



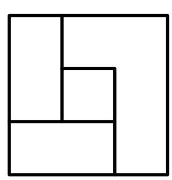
Решение. Это можно сделать несколькими способами, некоторые из которых указаны на рисунке.



□

Задача 2.13. Можно ли разрезать квадрат на четыре части так, чтобы каждая часть имела общий отрезок с любой другой?

Решение. Квадрат можно разрезать, как показано на рисунке ниже.

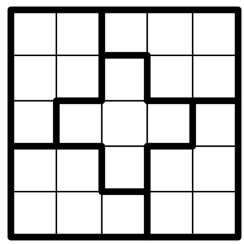


□

Геометрия на клетчатой бумаге

Задача 2.14. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2007.7.5) На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5 клеток. Его требуется разбить на 5 частей одинаковой площади, проводя отрезки внутри квадрата только по линиям сетки. Может ли оказаться так, что суммарная длина проведённых отрезков не превосходит 16 клеток?

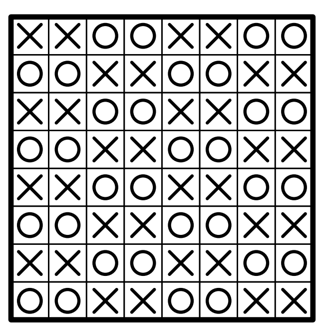
Решение. Да, так квадрат разбить можно, так как данные части не обязательно должны быть одинаковыми, просто должны быть одинаковой площади, то есть, составлять $25 : 5 = 5$ клеток. Один из возможных примеров приведён на рисунке.



□

Задача 2.15. Можно ли заполнить клетки бесконечного клетчатого листа крестиками и ноликами так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали и диагонали нельзя было встретить три одинаковых знака подряд?

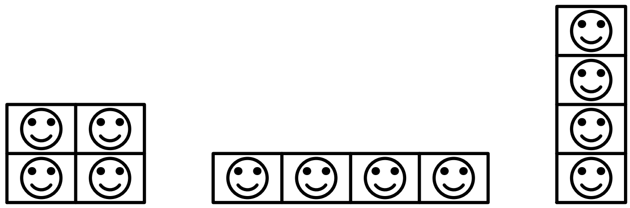
Решение. Да, можно. На каждой горизонтали элементы чередуются по 2, на вертикалях — по 1, а на диагоналях — по 2.



□

Геометрия квадратов и прямоугольников

Задача 2.16. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2014.6.3) Из четырёх фотографий можно составить три различных прямоугольника, как показано на рисунке. Периметр какого-то одного из них равен 56 см. Найдите периметры остальных двух прямоугольников, если периметр фотографии равен 20 см.



Решение. На первом рисунке полученный прямоугольник в 2 раза выше и в 2 раза шире, чем отдельная фотография, а, значит, его периметр ровно в 2 раза больше, чем периметр одной фотографии, то есть 40 см.

Прямоугольник, изображённый на втором рисунке, в 4 раза шире фотографии и имеет высоту, ей равную, значит, его периметр равен сумме периметра одной фотографии и её ширины, взятой 6 раз.

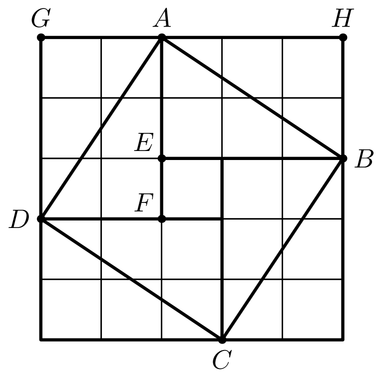
Прямоугольник, изображённый на третьем рисунке, в 4 раза выше фотографии и имеет ширину, ей равную, значит, его периметр равен сумме периметра одной фотографии и её высоты, взятой 6 раз.

Пусть периметр второго прямоугольника равен 56 см. Так как периметр фотографии равен 20 см, то $56 - 20 = 36$ см — её шестикратная ширина. Значит, в этом случае ширина фотографии равна 6 см, тогда её высота равна $20 : 2 - 6 = 4$ см. Следовательно, периметр третьего прямоугольника равен $20 + 6 \cdot 4 = 44$ см.

Если же 56 см — это периметр третьего прямоугольника, то высота и ширина поменяются местами, поэтому теперь периметр второго прямоугольника будет равен 44 см. □

Задача 2.17. (Материалы математических кружков МЦНМО) Дан вырезанный из бумаги прямоугольник размером 2×3. Имея в распоряжении бесконечное число таких прямоугольников, покажите, каким образом их можно сложить на плоскости так, чтобы без чертёжных приборов можно было отметить вершины квадрата со стороной, равной диагонали этого прямоугольника.

Решение. Сложим 4 прямоугольника в фигуру, изображённую на рисунке. Стороны AD и AB равны как соответственные элементы равных прямоугольников $AFDG$ и $AHBE$, аналогично $\angle DAF = \angle ABE$. Также, $\angle AEB = 90°$, $\Rightarrow \angle EAB + \angle EBA = 90°$, $\Rightarrow \angle EAB + \angle DAF = \angle DAB = 90°$. Аналогично можно получить, что равны и перепендикулярны все соседние стороны четырёхугольника $ABCD$, значит, он является квадратом.


G
A
H
E
B
F
D
C

□

Глава 3
Вокруг алгебры

Глава 4

Теория чисел

Данный раздел посвящён теме «теория чисел», которая объединяет в себя такие темы, как делимость, основные свойства целых чисел, основную теорему арифметики. Также вы сможете лучше узнать, что же такое правильная несократимая дробь, сколько существует простых чисел и почему мы пользуемся арабскими цифрами.

1 Чётность

Материал для разбора на занятии

«Общаясь» с числами, мы начинаем замечать свойства чётных и нечётных чисел в операциях между ними. По чётности чисел, участвующих в операции, мы можем определить чётность получившегося числа, не зная их самих.

Для операции сложения таблица выглядит так:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ч} + \mathbf{Ч} &= \mathbf{Ч},\\
\mathbf{Ч} + \mathbf{Н} &= \mathbf{Н},\\
\mathbf{Н} + \mathbf{Ч} &= \mathbf{Н},\\
\mathbf{Н} + \mathbf{Н} &= \mathbf{Ч}.
\end{aligned}$$

Интересно, что для операции вычитания получается точно такая же таблица:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ч} - \mathbf{Ч} &= \mathbf{Ч},\\
\mathbf{Ч} - \mathbf{Н} &= \mathbf{Н},\\
\mathbf{Н} - \mathbf{Ч} &= \mathbf{Н},\\
\mathbf{Н} - \mathbf{Н} &= \mathbf{Ч}.
\end{aligned}$$

Прибавляя единицу к числу, мы меняем его чётность, а прибавляя двойку — не меняем.

При умножении достаточно появиться хотя бы одному чётному числу, чтобы результат получился чётным:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ч} \cdot \mathbf{Ч} &= \mathbf{Ч},\\
\mathbf{Ч} \cdot \mathbf{Н} &= \mathbf{Ч},\\
\mathbf{Н} \cdot \mathbf{Ч} &= \mathbf{Ч},\\
\mathbf{Н} \cdot \mathbf{Н} &= \mathbf{Н}.
\end{aligned}$$

Задача 4.1.1. Пусть a и b — целые числа. Докажите, что число $ab(a+b)$ чётно.

Решение. В случае, когда a или b чётно, всё произведение $ab(a+b)$ согласно приведённой выше таблице также чётно. Если же a и b одновременно нечётны, то их сумма $a+b$ чётна, а значит, и всё произведение также чётно. $\square$

Задача 4.1.2. Можно ли разменять 25 тугриков на 10 купюр достоинством в 1, 3 и 5 тугриков?

Решение. Вернёмся к таблице сложения чётных и нечётных чисел, которую мы составили вначале. Все купюры у нас имеют нечётное достоинство. Чётное количество нечётных чисел даст в сумме чётное число; 25 — нечётное число, так что ответ будет «нельзя». $\square$

Задача 4.1.3. Из коробки с домино потерялись все кости, содержащие «пусто». Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд?

Решение. Задачи на домино регулярно встречаются среди олимпиадных задач, и полезно понимать основы данной игры. Набор домино состоит из 28 различных костей, на каждой из которых присутствует пара чисел от нуля до шести. Имеется семь костей с одинаковыми числами, они называются «дубли». Игра в домино состоит в том, чтобы выкладывать кости так, чтобы соприкасались квадраты с равными числами. В полном наборе домино каждая цифра встречается ровно по 8 раз (проверьте сами данный факт). Каждое выкладывание очередной кости либо добавляет дубль, который и так является парой, либо создаёт новую пару. Если выложен весь комплект, то каждая из цифр, таким образом, должна быть частью какой-либо пары в ряду (если мы не замкнули кольцо, то на краях должны остаться одинаковые числа).

Если мы потеряли все кости, содержащие «пусто», а это кости (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), то каждая из шести оставшихся цифр в оставшемся наборе теперь встречается по 7 раз. Каждая из цифр должна образовать пару, если она находится внутри ряда. На концах ряда могут находиться различные цифры, но оставшиеся четыре не смогут составить пары.

Ответ: нельзя. □

Задача 4.1.4. Как-то раз руководство КГБ решило спровоцировать группу советских хиппи на участие в акции протеста против войны во Вьетнаме около посольства США в Москве. В разработку была взята группа из 100 хиппи, которую планировалось убедить участвовать в акции. Однако перед этим их нужно было познакомить друг с другом. С одной стороны, опасно было собирать сразу слишком много незнакомых людей, с другой, в случае знакомства по двое процесс занял бы слишком большое время. Тогда агент КГБ, которому было поручено выполнение данного задания, решил действовать следующим образом: знакомить людей по трое, но обязательно так, чтобы уже знакомые люди во второй раз на одной встрече оказаться не могли. Удастся ли ему познакомить таким способом всех хиппи друг с другом?

Это — один из самых нелюбимых здравомыслящими людьми тип задач: в несколько строчек сформулирована задача, которая может быть сформулирована в несколько раз короче. Такие задачи в данной книге мы включаем именно для того, чтобы вы научились прорываться через текст условия.

Решение. Допустим, что агент смог выполнить требуемые условия. Рассмотрим какого-то произвольного хиппи. Во время каждой встречи он знакомится ровно с 2 другими хиппи, но ведь всего ему нужно познакомиться с 99 хиппи, а поскольку 99 — нечётное число, ни при каких условиях это не удастся обеспечить. □

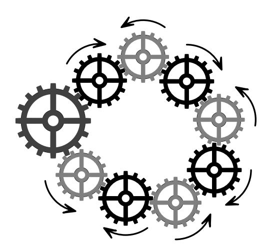
Помимо приведённой выше таблицы полезно рассмотреть следующие свойства, связанные с чётностью чисел:

1. Разность двух чисел имеет ту же чётность, что и их сумма: сложив $(a - b)$ и $(a + b)$, получим $2a$ — чётное число. Как мы знаем, оба слагаемых должны быть одной чётности, чтобы дать чётную сумму.
2. Алгебраическая (со знаками $+$ или $-$) сумма целых чисел имеет ту же чётность, что и их сумма (например, $2 - 7 + (-4) - (-3) = -6$ и $2 + 7 + 4 + 3 = 16$ оба чётны).

Принцип чётности может проявляться не только в числах.

Задача 4.1.5. На плоской поверхности размещены 9 шестерёнок, соединённых по замкнутой цепочке попарно (первая со второй, вторая с третьей, ..., девятая с первой). Могут ли они все одновременно вращаться?

Решение. Предположим, что все шестерёнки могут вращаться одновременно. Тогда в замкнутой цепочке будут чередоваться два вида шестерёнок: одни вращаются по часовой стрелке, а другие против. Т. к. рядом не могут располагаться шестерёнки одного вида, они должны разбиваться на пары. Но по условию их нечётное количество — получили противоречие. □



Задача 4.1.6. На квадратной доске $(2n+1) \times (2n+1)$ расположены 2017 шашек, причём для любой из шашек есть симметричные относительно каждой из главных диагоналей (если шашка лежит на диагонали, то она в том числе отображается сама в себя). Докажите, что одна из шашек должна располагаться в центральной клетке.

Решение. **Первый способ.** Докажем, что все шашки, кроме одной, можно разбить на пары:

— если шашка не лежит на первой диагонали, то для неё есть симметричная относительно первой диагонали;

— если шашка лежит на первой диагонали, но не в центре квадрата, то для неё есть симметричная относительно второй диагонали.

Так как всего шашек 2017 — нечётное число, то одна должна располагаться в центральной клетке.

Второй способ. У каждой шашки есть симметричная как относительно одной диагонали, так и относительно другой. Из этого следует, что у каждой шашки есть центральносимметричная. Так как шашек нечётное число, то одна из них стоит в центральной клетке. □

Задавальник

Задача 4.1.7. (Тургор. Весенний тур. Основной вариант — 1986/1987.7-8.1) Автомат при опускании гривенника выбрасывает пять двушек, а при опускании двушки — пять гривенников. Может ли Петя, подойдя к автомату с одной двушкой, получить после нескольких опусканий одинаковое количество двушек и гривенников?

Задача 4.1.8. (Тургор. Весенний тур. Тренировочный вариант — 1992/1993.
10-11.4) Есть три кучи камней. Разрешается к любой из них добавить столько камней, сколько есть в двух других кучах, или из любой кучи выбросить столько камней, сколько есть в двух других кучах. Например: $(12, 3, 5) \to (12, 20, 5)$ (или $(4, 3, 5)$). Можно ли, начав с куч 1993, 199 и 19, сделать одну из куч пустой?

Задача 4.1.9. (Тургор. Весенний тур. Основной вариант — 2010/2011.8-9.1) По кругу написаны все целые числа от 1 по 2010 в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочерёдно то возрастают, то убывают. Докажите, что разность каких-то двух чисел, стоящих рядом, чётна.

Задача 4.1.10. («Математический праздник» — 1990.5.1) В парламенте некоторой страны две палаты, имеющие равное число депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причём воздержавшихся не было. Когда председатель сообщил, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования сфальсифицированы. Как он это понял?

Задача 4.1.11. (Турнир Архимеда — 2013.5.5) Как-то раз Дядя Фёдор, Матроскин и Шарик отправились с почты домой. Дядя Фёдор вышел первым, а Матроскин последним. По дороге домой Дядя Фёдор обгонял других, либо его обгоняли ровно 8 раз. Матроскин обгонял других, либо его обгоняли ровно 6 раз. Известно, что Дядя Фёдор пришёл домой позже, чем Шарик. В каком порядке друзья пришли домой?

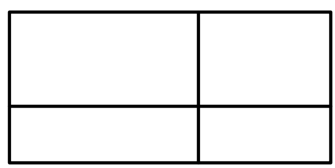
Задача 4.1.12. («Математический праздник» — 2005.6.3) Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на три кучки;

кому какая достанется — определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят её уравнять их кучки, и тогда она заберёт излишек себе. После этого все едят доставшиеся им конфеты.

а) Придумайте, как Лисе разложить конфеты по кучкам так, чтобы съесть ровно 80 конфет (ни больше, ни меньше).

б) Может ли Лиса сделать так, чтобы в итоге съесть ровно 65 конфет?

Задача 4.1.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.6.3) На рисунке можно найти 9 прямоугольников. Известно, что у каждого из них длина и ширина — целые. Сколько прямоугольников из этих девяти могут иметь нечётную площадь?



Задача 4.1.14. («Математический праздник» — 2013.6.4) За круглый стол сели 13 детей и договорились, что мальчики будут врать девочкам, а друг другу говорить правду, а девочки, наоборот, будут врать мальчикам, а друг другу говорить правду. Один из детей сказал своему правому соседу: «Большинство из нас мальчики». Тот сказал своему правому соседу: «Большинство из нас девочки», а он своему соседу справа: «Большинство из нас мальчики», а тот своему: «Большинство из нас девочки» и так далее, пока последний ребёнок не сказал первому: «Большинство из нас мальчики». Сколько мальчиков было за столом?

Задача 4.1.15. («Математический праздник» — 1991.6.4;7.2) Подпольный миллионер Тарас Артёмов пришёл в Госбанк, чтобы обменять несколько 50- и 100-рублёвых купюр старого образца. Ему была выдана 1991 купюра более мелкого достоинства[1], причём среди них не было 10-рублёвых. Докажите, что его обсчитали.

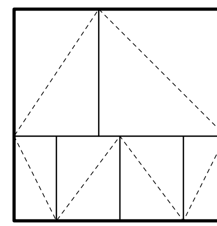
Задача 4.1.16. («Математический праздник» — 2002.7.3) В написанном на доске примере на умножение хулиган Петя исправил две цифры. Получилось $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$. Восстановите исходный пример и объясните, как Вы это сделали.

Задача 4.1.17. («Математический праздник» — 2000.7.4) Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух последовательных чётных чисел?

[1] В то время имели хождение купюры по 1, 3, 5, 10, 25, 50 и 100 рублей (нового образца).

Задача 4.1.18. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.7.4) В школе 450 учеников и 225 парт. Ровно половина девочек сидят за одной партой с мальчиками. Можно ли пересадить учеников так, чтобы ровно половина мальчиков сидела за одной партой с девочками?

Задача 4.1.19. («Математический праздник» — 2013.6.5) Малый и Большой острова имеют прямоугольную форму и разделены на прямоугольные графства. В каждом графстве проложена дорога по одной из диагоналей. На каждом острове эти дороги образуют замкнутый путь, который ни через какую точку не проходит дважды. Вот как устроен Малый остров, где всего 6 графств (на рисунке справа).



Нарисуйте, как может быть устроен Большой остров, если на нём нечётное число графств. Сколько графств у вас получилось?

Задача 4.1.20. («Математический праздник» — 2010.6.6) На краю круглого вращающегося стола через равные промежутки стояли 30 чашек с чаем. Мартовский Заяц и Соня сели за стол и стали пить чай из каких-то двух чашек (не обязательно соседних). Когда они допили чай, Заяц повернул стол так, что перед каждым опять оказалось по полной чашке. Когда и эти чашки опустели, Заяц снова повернул стол (возможно, на другой угол), и снова перед каждым оказалась полная чашка. И так продолжалось до тех пор, пока весь чай не был выпит. Докажите, что если бы Заяц всегда поворачивал стол так, чтобы его новая чашка стояла через одну от предыдущей, то им бы тоже удалось выпить весь чай (т. е. тоже каждый раз обе чашки оказывались бы полными).

Задача 4.1.21. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.7.7) Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10 (на рисунке ниже). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была один раз, на клетке 2 — два раза, . . . , на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1. Имеется 18 целых чисел, произведение которых равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.

Задача 4.2. На доске написано 2017 целых чисел от 1 до 2017. Каждым ходом Дормидонт стирает с доски два числа и записывает на доску модуль их разности. Может ли последнее оставшееся на доске число равняться нулю?

Задача 4.3. Пока дети решали контрольную работу, преподаватель написал на стене класса по кругу все натуральные числа от 1 до 2018 по одному разу так, что между каждыми 2 числами, стоящими через 1, оказался делитель их суммы. Вася увидел на стене написанное число 1999, а соседнее число закрывала голова одноклассника. Он решил поспорить со своим соседом, что полностью закрыто нечётное число. Какие его шансы выиграть данный спор?

2 Признаки делимости

Материал для разбора на занятии

Делимость — одно из основополагающих понятий теории чисел. Обычно мы говорим, что число a делится на число b, если остаток от деления a на b равен нулю. Но что такое остаток? О них мы поговорим в следующем разделе, а пока дадим более строгое определение делимости чисел.

Определение 1. Целое число a делится на целое число b, не равное нулю, если существует такое целое число c, что $a = b \cdot c$.

Рассмотрим *основные свойства делимости.*

Утверждение 1. Если целое число a делится на число b, а число b делится на число c, то число a делится на число c.

Доказательство: $a = bn$; $b = ck, \Rightarrow a = (nk)c, \Rightarrow a$ делится на c. □

Утверждение 2. Если k — общий делитель чисел a и b, то:

а) числа $a + b$ и $a - b$ делятся на k;

б) число ab делится на k^2.

Доказательство: а) $a = nk$, $b = mk, \Rightarrow a+b = (n+m)k$, $a-b = (n-m)k, \Rightarrow$ $(a + b)$ и $(a - b)$ делятся на k;

б) $a = nk$, $b = mk, \Rightarrow ab = (nm)k^2, \Rightarrow ab$ делится на k^2. □

Следствие. Если одно из чисел a и b делится на k, а второе не делится на k, то числа $a + b$ и $a - b$ не делятся на k.

Определение 2. Натуральное число p называется простым, если оно отлично от единицы и делится только на натуральные числа 1 и p,

Определение 3. Натуральные числа p и q называются взаимно простыми, если единственным общим натуральным делителем этих чисел является число 1.

Утверждение 3. Если число $s = ab$ (a, b — целые) делится на простое число p, то хотя бы одно из чисел a и b делится на p.

Пусть есть некие утверждения A и B. Говорят, что «A равносильно B», или что «A тогда и только тогда, когда B», или же «для A необходимо и достаточно B» в случае, если $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Говорят, что «для A

достаточно B», или что «для B необходимо A», или «в случае если B, то A», или «A, когда B», если $B \Rightarrow A$.

Напомним *признаки делимости*, которые большинство из вас проходило в 6 классе (и после этого они благополучно забылись). Напомним всем, что ноль — это число, которое делится на всё что угодно!

Число, делящееся нацело на 2, называется чётным, и его последняя цифра также должна быть чётной, то есть равняться 0, 2, 4, 6 или 8 (0 — это чётное число, потому что оно делится на всё что угодно!), и наоборот, при последней чётной цифре число будет чётным.

Признаки делимости на 3 и на 9 очень похожи: сумма цифр числа делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда само число делится на 3 (на 9).

Чтобы число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра делилась на 5, то есть равнялась 0 или 5.

Весьма очевиден тот факт, что делимость числа на 10 эквивалента тому, что его последней цифрой является 0.

Признак делимости на 4 чуть сложнее — требуется рассмотреть число, образованное двумя его последними цифрами: тот факт, что оно делится на 4 равносилен тому, что на 4 делится все число.

И наконец признак делимости на 11: для того, чтобы число делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы на 11 делилась знакопеременная сумма его цифр (при суммировании первую цифру мы берём со знаком плюс, следующую — со знаком минус и так до последней).

Приведём пример.

Задача 4.2.1. Делится ли число 435678232 на 11?

Решение. Найдём знакопеременную сумму цифр данного числа

$$4 - 3 + 5 - 6 + 7 - 8 + 2 - 3 + 2 = 0.$$

Число 0 делится на 11, значит, и исходное число делится на 11. □

Задача 4.2.2. Доказать признак делимости на 9.

Доказательство. Пусть число имеет десятичную запись $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$. Тогда $N = a_0 + 10^1 a_1 + a_2 10^2 + \ldots + a_{n-1}10^{n-1} + a_n 10^n$. Заметим, что числа $1, 10, 100, \ldots, 10^n$ все имеют остаток 1 при делении на 9 (так как числа $0{,}9{,}99, \ldots, 999\ldots99$ делятся на 9). А значит, если сумма цифр $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ делится на 9, то и $N = a_0 + 10^1 a_1 + a_2 10^2 + \ldots + a_{n-1}10^{n-1} + a_n 10^n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + 9a_1 + 99a_2 + \ldots + 9\ldots9a_n$ делится на 9. □

Не существует простых признаков делимости на 7 и 13, однако для любого числа, большего тысячи, процесс проверки можно сильно упростить, сведя его к проверке делимости суммы или разности чисел, не превосходящих тысячу. Разобьём искомое число на группы цифр по три, начиная с единиц, например, число 211626363 разобьём на 363, 626 и 211. Самая левая группа может содержать менее трёх цифр. Если знакочередующаяся сумма этих групп делится на 7, 11 или 13, то и само число делится на 7, 11 или 13. В нашем случае мы вычисляем сумму $211 + (-626) + 363 = -52$. Она не делится ни на 7, ни на 11, но делится на 13, значит, то же самое можно сказать и про число 211626363. Доказательство этого факта основывается на том, что $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Учитывая, что $999 = 27 \cdot 37$, можно получить аналогичный признак делимости на 27 и 37. Для проверки делимости нужно сложить все тройки. Если результат делится на 27 или на 37, то и изначальное число будет обладать теми же свойствами.

После рассмотрения признаков делимости очень важно будет обратить внимание на некоторые соображения, относящиеся к практическому разложению числа на простые множители. Как правило, самым удобным будет перебор всех простых множителей, начиная с наименьших, т. е. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, ..., за исключением случаев, когда некоторые множители можно сразу указать по виду числа, например: $970097 = 97 \cdot 10001$ или: $100020001 = 10000^2 + 2 \cdot 10000 \cdot 1 + 1^2 = (10000 + 1)^2$.

Также следует помнить о следующем факте: если число n не делится ни на одно простое число, не превосходящее некоторого числа p, причём $p^2 \geqslant n$, то n — простое. Действительно, допустим, что у n есть хотя бы один делитель $p_1 > p$, тогда $n = p_1 \cdot p_2$, где p_2 — некое целое число. Если $p_2 \geqslant p$, получаем: $n = p_1 \cdot p_2 > p \cdot p > n$ — противоречие, но p_2 не может быть меньше p по условию, откуда и следует сформулированное нами утверждение.

Задача 4.2.3. Может ли число, составленное из 13 единиц, 13 двоек и 13 троек, быть полным квадратом?

Решение. Обычно, если в задаче даны лишь цифры, из которых составлено число, но ничего не известно про их порядок, это задача на признаки делимости на 3 и/или 9. Докажем, что число, составленное из данных цифр, не может быть полным квадратом. Сумма цифр этого числа равна $13 \cdot (1+2+3) = 78$, что делится на 3. Значит и изначальное число делится на 3. Но если бы оно было квадратом, оно должно было бы делиться и на 3^2, так как 3 — простое. Но число 78 не делится на 3^2, значит, квадрат составить нельзя. □

Почему мы стали доказывать именно невозможность составления числа?

Если на минуту предположить, что квадрат можно было бы составить, а это — 39-значное число, то доказать, что это действительно полный квадрат, без калькулятора (а калькулятором пользоваться на олимпиадах нельзя!) практически невозможно.

Задача 4.2.4. Найдите четырёхзначное число, являющееся полным квадратом, первые 2 цифры которого равны между собой и последние 2 тоже.

Решение. Заметим, что данное число должно записываться в виде $\overline{aabb}$. Можно заметить, что знакопеременная сумма цифр этого числа равна нулю, а это значит, что число делится на 11. Пусть $N^2 = \overline{aabb}$, тогда N тоже делится на 11, и N должно быть двузначным числом, чтобы при возведении в квадрат получалось четырёхзначное. Все двузначные числа, делящиеся на 11, состоят из равных цифр, значит $N = \overline{cc}$.

Запишем уравнение: $\overline{cc}^2 = \overline{aabb}$, откуда

$$(11c)^2 = 1000a + 100a + 10b + b = 11(100a + b) \Leftrightarrow 11c^2 = 100a + b.$$

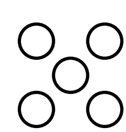
Нетрудным перебором можно убедиться, что подходит только $c = 8$, и $88^2 = 7744$. $\square$

Задавальник

Задача 4.2.5. («Математический праздник» — 2016.6.1) У Незнайки есть пять карточек с цифрами: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ и $\boxed{5}$. Помогите ему составить из этих карточек два числа — трёхзначное и двузначное — так, чтобы первое число делилось на второе.

Задача 4.2.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.7.1) Астролог считает, что 2013 год *счастливый*, потому что 2013 нацело делится на сумму $20 + 13$. Будет ли когда-нибудь два счастливых года подряд?

Задача 4.2.7. («Математический праздник» — 2015.6.2) а) Впишите в каждый кружочек по цифре, отличной от нуля, так, чтобы сумма цифр в двух верхних кружочках была в 7 раз меньше суммы остальных цифр, а сумма цифр в двух левых кружочках — в 5 раз меньше суммы остальных цифр.



б) Докажите, что задача имеет единственное решение.

Задача 4.2.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.7.2) Существуют ли такие цифры **Г** и **У**, что число **УГУ** делится на 13, а число **ГУГ** — не делится?

Задача 4.2.9. («Математический праздник» — 2012.6.3) Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?

Задача 4.2.10. («Математический праздник» — 2008.6.3) На складе лежало несколько целых головок сыра. Ночью пришли крысы и съели 10 головок, причём все ели поровну. У нескольких крыс от обжорства заболели животы. Остальные 7 крыс следующей ночью доели оставшийся сыр, но каждая крыса смогла съесть вдвое меньше сыра, чем накануне. Сколько сыра было на складе первоначально?

Задача 4.2.11. («Математический праздник» — 2010.7.3) Маленькие детки кушали конфетки. Каждый съел на 7 конфет меньше, чем все остальные вместе, но всё же больше одной конфеты. Сколько всего конфет было съедено?

Задача 4.2.12. («Математический праздник» — 2006.7.4) Год проведения нынешнего математического праздника делится на его номер: $2006 : 17 = 118$. Назовите:

а) первый номер матпраздника, для которого это тоже было выполнено.
б) последний номер матпраздника, для которого это тоже будет выполнено.

Задача 4.2.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2004.7.5) Среди некоторых 13 последовательных натуральных чисел 7 чётных и 5 кратных трём. Сколько среди них чисел, кратных 6?

Задача 4.2.14. («Математический праздник» — 2017.7.5) Можно ли так расставить цифры $1, 2, \ldots, 8$ в клетках а) буквы **Ш**, б) полоски (на рисунке ниже); чтобы при любом разрезании фигуры на две части сумма всех цифр в одной из частей делилась на сумму всех цифр в другой? (Резать можно только по границам клеток. В каждой клетке должна стоять одна цифра, каждую цифру можно использовать только один раз.)

а) б)

Задача 4.2.15. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.7.7) Докажите, что сумма цифр числа, делящегося на 7, может быть равна любому натуральному числу, кроме единицы.

Задача 4.2.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.7.8) Последовательные натуральные числа 2 и 3 делятся на последовательные нечётные числа 1 и 3 соответственно; числа 8, 9 и 10 — делятся на 1, 3 и 5 соответственно. Найдутся ли 11 последовательных натуральных чисел, которые делятся на 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 и 21 соответственно?

Задача 4.2.17. («Математический праздник» — 2004.7.1) Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух?

Задача 4.2.18. («Математический праздник» — 2002.6.3) На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске?

Задача 4.2.19. («Математический праздник» — 2003.7.3) Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.

Задача 4.2.20. (Турнир Архимеда — 2016.4) Известно, что сумма

$$\textbf{ТУРНИР} + \textbf{АРХИМЕДА}$$

кратна 2016. Докажите, что сумма **ИР** + **АР** кратна 9. (Цифры заменены буквами: разные цифры — разными буквами, одинаковые цифры — одинаковыми буквами)

Задача 4.2.21. («Математический праздник» — 1995.7.5) Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и так далее. После одиннадцати таких вычитаний получился нуль. С какого числа начинали?

Задача 4.2.22. («Математический праздник» — 2011.7.5) В справочнике «Магия для чайников» написано:

> Замените в слове **ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ** одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение.

Возможно ли таким образом устроить землетрясение? (Натуральное число, большее 1, называется простым, если у него нет других делителей, кроме 1 и самого себя.)

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.4. Найдите наибольшее четырёхзначное число, делящееся на 2, 5, 9 и 11, все цифры которого различны.

Задача 4.5. Сумма трёх различных наименьших делителей некоторого числа A равна 8. Сколькими нулями может оканчивается число A? Укажите все варианты.

3 Сравнения по модулю

Материал для разбора на занятии

Почти в каждой олимпиаде встречаются задачи, в которых и коэффициенты, и переменные могут принимать только целочисленные значения. Это так называемые задачи в целых числах. В этом разделе мы будем рассматривать только такие задачи. Один из мощнейших инструментов решения таких задач — модульная арифметика.

Определение 4. Говорят, что числа a и b сравнимы по модулю x, если их разница делится на x. Записывают это следующим образом $a \equiv b \pmod{x}$, или $a = b \pmod{x}$.

Для определённости в дальнейшем будем считать, что модулем x могут быть только положительные целые числа.

Для отрицательных чисел операция нахождения остатка может иметь разные варианты, каждый из которых содержит здравый смысл: например, что есть остаток от деления числа -17 на 10? Ответ -7 кажется убедительным, так как $-17 = 10 \cdot (-1) + (-7)$. Но ведь и ответ 3 не хуже, так как $-17 = 10 \cdot (-2) + 3$. Когда речь идёт о модульной арифметике, нам интересен будет именно второй вариант, при котором если делитель положителен, то и остаток положителен.

Тогда нетрудно убедиться в равносильном утверждении.

Утверждение 4. Числа a и b сравнимы по модулю x, тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый остаток при делении на x.

Сравнивать по модулю можно также и отрицательные числа.

Например, $13 \equiv 7 \pmod{3}$ или $11 \equiv -3 \pmod{7}$.

Если $a \equiv 0 \pmod{x}$, то a делится на x.

Со сравнениями по модулю можно работать так же, как и с обычными равенствами: их можно складывать, умножать и возводить в степень.

Если $a \equiv b \pmod{x}$ и $c \equiv d \pmod{x}$, то

- $a + c \equiv b + d \pmod{x}$;
- $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{x}$;
- $a^n \equiv b^n \pmod{x}$ для любого натурального n.

Результат операции деления двух целых чисел может не входить во множество целых чисел. Пока мы будем применять эту операцию только тогда, когда результат является целым числом, а в остальных случаях считать результат операции неопределённым.

Порой использование сравнений по модулю позволяет существенно уменьшить сложность вычислений. Рассмотрим это на примере.

Задача 4.3.1. Найти остаток от деления $2013 \cdot 2014 \cdot 2015 + 2016^3$ на 7.

Решение. Найдём остаток от деления 2013 на 7. Разумеется, это можно сделать, использовав деление в столбик, но мы, как участники олимпиад, вспомним красивый факт: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, откуда число 2002 делится на 7, то есть $2002 \equiv 0 \pmod 7$, но $11 \equiv 4 \pmod 7$, откуда $2002 + 11 \equiv 0 + 4 = 4 \pmod 7$.

Значит, $2014 \equiv 5 \pmod 7$ и $2015 \equiv 6 \pmod 7$, $\Rightarrow 2013 \cdot 2014 \cdot 2015 \equiv 4 \cdot 5 \cdot 6 = = 120 \equiv 1 \pmod 7$. Так как $2016 \equiv 0 \pmod 7$, то $2016^3 \equiv 0^3 \pmod 7$.

Окончательно: $2013 \cdot 2014 \cdot 2015 + 2016^3 \equiv 1 + 0 = 1 \pmod 7$. □

В некоторых случаях удобнее перейти к отрицательным числам. Например, $8^{100} \equiv (-1)^{100} = 1 \pmod 9$.

Когда мы используем сравнения по модулю, многие из известных признаков делимости открываются нам с новой стороны и могут даже дать больше информации. Например, признаки делимости на 9 и на 3 выглядят следующим образом:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0 \pmod 9$$

и

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0 \pmod 3.$$

Одним из методов решения задач на делимость является перебор остатков. В некоторых задачах найти модуль, по которому перебираются остатки, не составляет труда, в других его ещё нужно угадать.

Задача 4.3.2. Доказать, что ни при каких целых n число $n^2 + 3n + 4$ не делится на 9.

Решение. Целое число может давать остатки $0, 1, 2, \ldots, 8$ при делении на 9. Переберём все эти случаи. Для удобства запишем остатки в виде таблицы.

$n \pmod 9$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^2 \pmod 9$	0	1	4	0	7	7	0	4	1
$3n \pmod 9$	0	3	6	0	3	6	0	3	6
$n^2 + 3n + 4 \pmod 9$	4	8	5	4	5	8	4	2	2

Рассмотрим, например, случай, когда n даёт остаток 5 при делении на 9. Тогда $n \equiv 5 \pmod 9$, откуда

$$n^2 + 3n = 4 \equiv 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 = 25 + 15 + 4 \equiv 7 + 6 + 4 = 17 \equiv 8 \pmod 9.$$

Остальные случаи разбираются аналогично. Видим, что ни в одном случае не получился остаток 0, а это значит, что данное выражение не делится на 9 ни при каких целых n. □

Задача 4.3.3. Может ли число, составленное из 13 двоек, 13 троек, 13 четвёрок и 13 пятёрок быть полным квадратом?

Решение. Докажем, что это невозможно. Так как речь в задаче идёт о числе, цифры которого известны, но не известен их порядок, воспользуемся признаком делимости на 3. Обозначим число за N.

Тогда сумма цифр числа N равна $13(2+3+4+5)$. По признаку делимости, получаем: $N \equiv 13 \cdot 14 \equiv 1 \cdot 2 = 2 \pmod 3$.

Посмотрим, может ли квадрат натурального числа давать остаток 2 по модулю 3, как и в предыдущей задаче, разберём случаи.

$x \pmod 3$	0	1	2
$x^2 \pmod 3$	0	1	1

Делаем вывод — квадрат натурального числа не может давать остаток 2 по модулю 3, значит, составить квадрат из всех данных цифр невозможно. □

Задавальник

Задача 4.3.4. (Московская математическая олимпиада — 1940.7-8.4) Сколько существует таких пар целых чисел x, y, заключённых между 1 и 1000, что $x^2 + y^2$ делится на 7.

Задача 4.3.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.6.1) В ряд лежат 1000 конфет. Сначала Вася съел девятую конфету слева, после чего съедал каждую седьмую конфету, двигаясь вправо. После этого Петя съел седьмую слева из оставшихся конфет, а затем съедал каждую девятую из них, также двигаясь вправо. Сколько конфет после этого осталось?

Задача 4.3.6. («Математический праздник» — 1998.7.5) На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу — на одну монету больше. Какова наименьшая возможная цена покупки?

Задача 4.3.7. (Московская математическая регата — 2011/2012.8.3) Сколько существует таких натуральных n, не превосходящих 2012, что сумма

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n$$

оканчивается на 0?

Задача 4.3.8. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2011.9.4) Незнайка утверждает, что существует восемь таких последовательных натуральных чисел, что в разложение их на простые множители каждый множитель входит в нечётной степени (например, два таких последовательных числа: $23 = 23^1$ и $24 = 2^3 \cdot 3^1$). Прав ли он?

Задача 4.3.9. (Турнир городов. Весенний тур. Основной вариант — 2009/2010. 10-11.1) Из Южной Америки в Россию 2010 кораблей везут бананы, лимоны и ананасы. Число бананов на каждом корабле равно числу лимонов на остальных кораблях вместе взятых, а число лимонов на каждом корабле равно числу ананасов на остальных кораблях вместе взятых. Докажите, что общее число фруктов делится на 31.

Задача 4.3.10. (Турнир городов. Весенний тур. Тренировочный вариант — 1986/1987.
9-10.1) Можно ли число 1986 представить в виде суммы шести квадратов нечётных чисел?

Задача 4.3.11. (Московская математическая регата — 2012/2013.10.5) Известно, что $b = 2013^{2013} + 2$. Будут ли числа $b^3 + 1$ и $b^2 + 2$ взаимно простыми?

Задача 4.3.12. (Московская математическая регата — 2012/2013.11.5) Существуют ли четыре последовательных натуральных числа, каждое из которых можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.6. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$ (то есть, образуют «Пифагорову тройку»). Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

Задача 4.7. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.

Задача 4.8. Сколько существует натуральных чисел n, меньших 2014, для которых $2^n - n^2$ делится на 7?

4 Основная теорема арифметики

Материал для разбора на занятии

Что такое простое число, мы уже знаем. Заметим, что все натуральные числа делятся на три непересекающихся множества — множество простых чисел, множество составных чисел и единицу (да-да, она не является простым числом, и мы скоро поймём, почему).

Пусть дано число 360. На какое наименьшее простое число оно делится? Очевидно, на 2: $360 = 2 \cdot 180$. На какое наименьшее простое число делится 180? Тоже на 2: $180 = 2 \cdot 90$, так что $360 = 2 \cdot 2 \cdot 90$. На какое наименьшее простое число делится 90? Опять на 2: $90 = 2 \cdot 45$, так что $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 45$. На какое наименьшее простое число делится 45? На 3: $45 = 3 \cdot 15$, так что $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15$. Наконец, $15 = 3 \cdot 5$, $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, и на этом начатый нами процесс останавливается: все получившиеся множители являются простыми. Такое произведение называется разложением на простые множители, или каноническим разложением.

Теорема 1. Любое натуральное число (кроме единицы) можно представить в виде произведения простых множителей, и притом единственным образом (с точностью до порядка сомножителей).

Мы видим, что, если бы единицу мы назначили простым числом, то такое разложение не было бы единственным. Заметим, что 1 считали простым числом ещё в XVIII веке такие великие математики, как Эйлер и Гольдбах. Так, последним была сформулирована гипотеза Гольдбаха, одна из семи задач тысячелетия: любое чётное число представимо в виде суммы двух простых чисел. И число $2 = 1 + 1$. Сегодня в формулировке гипотезы уточнение — «любое чётное число, начиная с 4». Последним из крупных математиков, считавших 1 простым числом, был Анри Лебег в 1899 году.

Выше было получено каноническое разложение числа 360: $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, или, как это обычно записывают, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Мы видим, таким образом, что любое число состоит как бы из «кирпичиков» — простых множителей, возникающих в его каноническом разложении. Простое число состоит из одного такого «кирпичика» — самого себя.

Каноническое разложение является мощным инструментом решения целого ряда задач. Благодаря ему перед нами открывается вся картина делителей данного числа. Так, для числа 360 мы теперь можем сразу сказать, что оно делится, например, на $2^3 = 8$, на $2^2 \cdot 3 = 12$, на $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$ (так как эти числа «сконструированы» из отдельных элементов канонического разложения) и не делится, скажем, на 7 и на $33 = 3 \cdot 11$ (так как ни 7, ни 11 не входят в каноническое разложение).

Отметим, что эквивалентные формулировки приведённой выше Основной теоремы арифметики можно встретить еще у Евклида (III в. до н. э.), а впервые точная формулировка и доказательство были приведены К. Гауссом в его «Арифметических исследованиях» (Disquisitiones Arithmeticae, 1801 г.).

Решим задачу со школьного этапа всероссийских олимпиад по математике.

Задача 4.4.1. (Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2018.6.1) В доме на всех этажах во всех подъездах равное количество квартир (больше одной). Также во всех подъездах поровну этажей. При этом количество этажей больше количества квартир на этаже, но меньше, чем количество подъездов. Сколько в доме этажей, если всего квартир 715?

Решение. Разложим число 715 на простые множители: $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$. Заметим, что из условия следует, что общее число квартир равно произведению количества подъездов, этажей и квартир на лестничной площадке друг на друга, причём каждая из этих величин больше 1. Но т. к. 715 мы можем представить в виде произведения трёх различных чисел, больших 1, единственным образом с точностью до перестановок, а также, учитывая указанные в условии данные о соотношении количества искомых величин, приходим к ответу: 5 квартир на лестничной площадке, 11 этажей и 13 подъездов. □

Задача 4.4.2. Определите, сколько существует натуральных чисел, меньших 100, таких, что произведение всех делителей этого числа (включая 1 и само число) равняется кубу данного числа.

Решение. Обращали ли вы внимание на то, что если, скажем, $120 = 6 * 20$, то есть, 120 делится на 6, то оно будет делиться и на $\frac{120}{6}$? Факт, как будто очевидный, но его можно переформулировать следующим образом: если c делится на a, то c делится и на $b = \frac{c}{a}$. Иногда математики вместо c делится на a говорят «a делит c». Таким образом у каждого числа c все делители можно разбить на пары, произведение которых составляет c. Однако, если c является точным квадратом, то последнюю пару образовать не получится и количество всех делителей будет нечётным.

Вернёмся к нашей задаче и попробуем мысленно выписать в ряд все делители искомого числа. Чтобы получить в произведении куб, нужно, чтобы все делители образовывали три пары (а это означает, что то, что мы ищем, не может быть точным квадратом, так как число делителей у нас чётное).

Сколько простых чисел участвует в разложении числа? Предположим, их три. Убедитесь сами, что числа 1, p_1, p_2, p_3, $p_1 \cdot p_2$, $p_1 \cdot p_3$, $p_2 \cdot p_3$, $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ являются делителями нашего числа c и все эти делители по основной теореме арифметики все различны. Тогда количество делителей числа c будет больше 6. Аналогично получаем, что если число простых делителей больше трёх, то количество всех делителей искомого числа c будет больше шести.

Если в разложение числа c входит ровно два простых делителя, то, как нетрудно установить, оно должно быть в виде $p_1 \cdot p_2^2$. Докажите сами, что другие разложения не подходят. Так как $c < 100$, то установить все решения мы можем прямым перебором, проверив значения всех чисел вида $2 \cdot 3^2$, $2 \cdot 5^2$, $2 \cdot 7^2$, $3 \cdot 2^2$, $3 \cdot 5^2$, $5 \cdot 2^2$, $5 \cdot 3^2$, $7 \cdot 2^2$, $7 \cdot 3^2$, $11 \cdot 2^2$, $11 \cdot 3^2$, $13 \cdot 2^2$, $17 \cdot 2^2$, $19 \cdot 2^2$, $23 \cdot 2^2$.

Мы ещё не рассмотрели случай, когда количество простых делителей равно единице. Это нам даёт ровно один случай — p_1^5, или 32.

Располагая все числа в порядке возрастания, получаем *ответ*:

$$12, 18, 20, 28, 32, 44, 45, 50, 52, 63, 68, 75, 76, 92, 98, 99.$$

□

Задавальник

Задача 4.4.3. («Математический праздник» — 1995.7.1) Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

Задача 4.4.4. («Математический праздник» — 2008.7.1) Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

Задача 4.4.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.7.1) Юра записал четырёхзначное число. Лёня прибавил к первой цифре этого числа 1, ко второй 2, к третьей 3 и к четвёртой 4, а потом перемножил полученные суммы. У Лёни получилось 234. Какое число могло быть записано Юрой?

Задача 4.4.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.6.2) Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие — втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

Задача 4.4.7. («Математический праздник» — 1999.6.2) Укажите пять целых положительных чисел, сумма которых равна 20, а произведение — 420.

Задача 4.4.8. («Математический праздник» — 2007.6.2;7.2) В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.)

Задача 4.4.9. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.6.2) Есть четыре карточки с цифрами: 2, 0, 1, 6. Для каждого из чисел от 1 до 9 можно из этих карточек составить четырёхзначное число, которое кратно выбранному однозначному. А в каком году такое будет в следующий раз?

Задача 4.4.10. («Математический праздник» — 2009.7.6) Используя в качестве чисел любое количество монет достоинством 1, 2, 5 и 10 рублей, а также (бесплатные) скобки и знаки четырёх арифметических действий, составьте выражение со значением 2009, потратив как можно меньше денег.

Задача 4.4.11. («Математический праздник» — 1996.7.6) Произведение последовательных чисел от 1 до n называется *n-факториал* и обозначается $n!$ ($1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$). Можно ли вычеркнуть из произведения

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100!$$

один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.9. Существует ли целое число, произведение цифр которого равно а) 1980; б) 1990; в) 2000; г) 2018?

Задача 4.10. Существует ли натуральное число, большее 100, такое, что произведение всех делителей этого числа (включая 1 и само число), равняется восьмой степени данного числа?

Задача 4.11. (Олимпиада «Ломоносов» — 2017.7–8.6, 9.4) Про натуральные числа m и n известно, что $3n^3 = 5m^2$. Найдите наименьшее возможное значение $m + n$.

Задача 4.12. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2009.8.1) Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

5 НОД и НОК. Алгоритм Евклида

Материал для разбора на занятии

Напомним концепции НОД (наибольшего общего делителя) и НОК (наименьшего общего кратного).

Пусть полученное с помощью основной теоремы арифметики разложение чисел M и N на простые множители выглядит следующим образом:

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n} \text{ и } M = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}.$$

Покажем, что их наибольший общий делитель будет равен

$$\text{НОД}(M, N) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdots p_n^{\min(\alpha_n,\beta_n)}.$$

Здесь мы использовали понятие функции минимума $\min(x,y)$, показывающей наименьшее из значений x и y.

Прежде покажем, что приведённое число является делителем M и N. Обозначим для удобства наше число за a:

$$\frac{N}{a} = \frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}}{p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdots p_n^{\min(\alpha_n,\beta_n)}} =$$

$$= p_1^{\alpha_1-\min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\alpha_2-\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdots p_n^{\alpha_n-\min(\alpha_n,\beta_n)}.$$

Так как числа вида $\alpha_i - \min(\alpha_i,\beta_i)$ являются целыми неотрицательными, числа $p^{\alpha_i-\min(\alpha_i,\beta_i)}$ будут натуральными, равно как и их произведение. Следовательно, N делится на a. Рассуждение для M полностью аналогично. Таким образом, a является общим делителем M и N, осталось показать лишь, что оно наибольшее.

Пусть существует число b, большее a и являющееся общим делителем M и N. Рассмотрим его разложение на простые множители и сравним с таковым числа a:

$$b = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_n^{\gamma_n}.$$

Так как $b > a$, то какой-то из простых множителей числа b входит в число b в большей степени, чем в число a. Тогда, обязательно найдётся такое i, что $\gamma_i > \min(\alpha_i,\beta_i)$. Отсюда, b не будет делить N, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$, и M в противном случае, следовательно, $a = \text{НОД}(M, N)$.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что наименьшее общее кратное чисел M и N будет равно

$$\text{НОК}(M, N) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \cdots p_n^{\max(\alpha_n,\beta_n)}.$$

Здесь $\max(x,y)$ — наибольшее из значений x и y. Минимальное и максимальное значения двух переменных связаны очень полезным соотношением $\min(x,y) + \max(x,y) = x + y$. В самом деле, если числа равны, то минимальное и максимальное значение совпадают с числами, а если не равны, то одно из чисел будет как раз являться максимальным значением, а второе — минимальным, а от перестановки мест слагаемых сумма не меняется.

Отсюда, в частности, следует формула: $\text{НОК}(M,N) \cdot \text{НОД}(M,N) = M \cdot N$.

Числа называются *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1.

Взаимно простые числа и НОД связывает *соотношение Безу*. Пусть a и b — целые числа, одновременно не равные нулю, тогда существуют такие целые числа u и v, что справедливо равенство $\text{НОД}(a,b) = a \cdot u + b \cdot v$.

Отсюда следует, что, если a и b — взаимно простые числа, то для них можно найти такие u и v, что $a \cdot u + b \cdot v = 1$.

Решим несколько устных задач для разминки.

Задача 4.5.1. Число $5A$ делится на 3. Следует ли из этого, что число A делится на 3?

Решение. Допустим, что число A на 3 не делится, тогда в его разложении на простые множители нет 3, но разложение числа $5A$ отличается от разложения числа A лишь наличием дополнительной степени при 5, значит, и в нём 3 нет, и на 3 оно не делится — из получившегося противоречия имеем, что A обязано делиться на 3. $\square$

Задача 4.5.2. Число $5A$ делится на 15. Следует ли из этого, что число A делится на 15?

Решение. Нет, не следует, например, условие задачи не выполнено для $A = 3$. $\square$

Однако хотелось бы выявить некую закономерность для подобного рода логических переходов, и, как оказывается, такая закономерность действительно есть.

Лемма 1. Если ab делится на c, причём b взаимно просто с c, то a делится на c.

Доказательство. Во-первых, заметим, что у взаимно простых чисел в их разложении на простые множители нет ни одного общего, иначе НОД этих чисел делился бы на него и не был бы равен 1. Предположим противное, т. е. a не делится на c. В таком случае существует хотя бы одно такое простое число, что в разложение числа c оно будет входить в степени большей, чем в разложение числа a (возможно, в число a оно входит в нулевой степени). Заметим также, что в разложении числа b это данное простое число также будет отсутствовать из-за взаимной простоты чисел b и c, таким образом, в разложение числа c данное простое число будет входить в степени большей, чем в разложении числа ab, т. е. ab не будет делиться на c. Придя к противоречию, получаем утверждение данной леммы. □

Замечание 1. Если дано два числа b и c, не являющихся взаимно простыми, то гарантированно существует число a такое, что ab делится на c, а a — не делится. Легко проверить, что число

$$a = \frac{c}{\text{НОД}(b, c)}$$

подходит.

Утверждение 5. Если целое число s делится на взаимно простые числа a и b, то s делится на ab.

Доказательство. Данное интуитивно понятное утверждение, несмотря на простую формулировку, опирается в своем доказательстве на основную теорему арифметики. Два взаимно простых числа в своём разложении имеют различные простые числа, так как иначе они не будут взаимно простыми. В таком случае, в разложении числа s присутствуют все данные простые числа в степенях, не меньших, чем в числах a и b. Таким образом, данное число делится на ab. □

Вспомним также *алгоритм Евклида* для нахождения НОД двух чисел: $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b)$, если $a > b$ (каждым его шагом будет вычитание из большего числа меньшего). Естественным его улучшением является *обобщённый алгоритм Евклида*, в котором числа не вычитаются, а делятся друг на друга с остатком. Например, $\text{НОД}(315, 100) = \text{НОД}(100, 15) = \text{НОД}(15, 10) = \text{НОД}(5, 10) = \text{НОД}(0, 5) = 5$.

Задача 4.5.3. Каким может быть число

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc},$$

если известно, что это целое число и a, b и c — попарно взаимно простые натуральные числа?

Решение. Посмотрим, есть ли среди чисел a, b, c равные. Возможны два варианта:

1) среди них есть два равных. Пусть это, не умаляя общности (в силу симметрии условия), числа a и b. Так как они должны быть взаимно простыми, то это возможно, только тогда, когда $a = b = 1$. Поэтому

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{2(c+1)^2}{c}.$$

Но числа $c+1$ и c всегда взаимно простые, поэтому и $(c+1)^2$ и c взаимно простые, но $2(c+1)^2 \mathrel{\vdots} c$, значит $2 \mathrel{\vdots} c$, откуда $c = 1$ или $c = 2$. В первом случае значение

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

равно 8, во втором — 9.

2) среди чисел a, b, c все различные. Не умаляя общности можно считать, что $a < b < c$. Так как числа a, b и c попарно взаимно простые, то ни $a+c$, ни $b+c$ не может делиться на c, значит, $a+b \mathrel{\vdots} c \Leftrightarrow a+b = kc$ для некоторого целого k. Аналогично, $a+c = lb$ для целого l.

Так как $a+b < 2c$, и $a+b = kc$, то $a+b = c, \Rightarrow a = c-b$. Отсюда:

$$a+c = (c-b)+c = lb \Leftrightarrow 2c = b(l+1).$$

Правая часть этого выражения делится на b, значит, и левая тоже должна делиться на b, но c и b взаимно просты, следовательно, 2 должно делиться на $b, \Rightarrow b = 1$ или $b = 2$. Но $1 \leqslant a < b$, откуда b может быть равно только 2. Так как $a < b$, то $a = 1$, $c = a+b = 3$. В этом случае

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

□

Задача 4.5.4. Найдите НОД чисел $\underbrace{11\ldots11}_{m}$ и $\underbrace{11\ldots11}_{n}$, $m > n$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом Евклида с модификацией. Сначала вычтем из первого числа второе $(\underbrace{11\ldots11}_{n}, \underbrace{11\ldots11}_{m}) = (\underbrace{11\ldots11}_{m-n}\underbrace{00\ldots00}_{n}, \underbrace{11\ldots11}_{n})$. Заметим теперь, что НОД двух данных чисел не может делиться ни на 2, ни на 5, следовательно,

$$(\underbrace{11\ldots11}_{m-n}\underbrace{00\ldots00}_{n}, \underbrace{11\ldots11}_{n}) = (\underbrace{11\ldots11}_{m-n}, \underbrace{11\ldots11}_{n}).$$

Мы видим, что после применения одного шага модифицированного алгоритма число единиц в наших числах изменилось точно таким же образом, как изменились бы числа при обычном алгоритме Евклида. Можно сказать, что один шаг модифицированного алгоритма аналогичен одному шагу обычного алгоритма Евклида, применённому к количеству единиц в числах. Так как в результате применения обычного алгоритма Евклида получается НОД двух чисел m и n, то в результате применения модифицированного алгоритма получится число, состоящее из НОД(m, n) единиц. □

Задавальник

Задача 4.5.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.7.3) На каждом километре между сёлами Марьино и Рощино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано расстояние до Марьино, на другой — расстояние до Рощино. Гуляя по этой дороге, Бобик для каждой таблички подсчитал наибольший общий делитель записанных на ней чисел. Оказалось, что среди полученных им чисел встретились только 1, 3 или 5 (каждое хотя бы по одному разу). Найдите расстояние между сёлами.

Задача 4.5.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.7.4) Назовём натуральные числа a и b *друзьями*, если их произведение является точным квадратом. Докажите, что если a — друг b, то a — друг НОД(a, b).

Задача 4.5.7. (Тургор. Весенний тур. Тренировочный вариант — 1996/1997.
10-11.2) Числа a и b — натуральные. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab. Докажите, что $a = b$.

Задача 4.5.8. (Московская математическая олимпиада — 1964.9.2) Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел не является степенью никакого целого числа.

Задача 4.5.9. (Тургор. Осенний тур. Основной вариант — 2014/2015.8-9.2) Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя:

а) ровно в шесть раз;
б) ровно в пять раз?

Задача 4.5.10. (Московская математическая олимпиада — 1935.8.1) Докажите, что

$$\text{НОК}(a, b, c) \cdot \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОД}(b, c) \cdot \text{НОД}(c, a) = \text{НОД}(a, b, c) \cdot abc.$$

Задача 4.5.11. (Тургор. Осенний тур. Основной вариант — 1983/1984.7-8.2) Найти все такие натуральные k, которые можно представить в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от 1.

Задача 4.5.12. (Тургор. Осенний тур. Основной вариант — 1998/1998.8-9.1) а) Докажите, что если НОК$(a, a+5) =$ НОК$(b, b+5)$ (a, b — натуральные), то $a = b$.

б) Могут ли НОК(a, b) и НОК$(a+c, b+c)$ быть равны (a, b, c — натуральные)?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.13. В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждом его ребре — наибольший общий делитель двух чисел, записанных на концах этого ребра. Могла ли сумма всех чисел, записанных в вершинах, оказаться равной сумме всех чисел, записанных на рёбрах?

Задача 4.14. Найти наибольший общий делитель чисел $2^n - 1$ и $2^m - 1$.

6 Простые числа

Материал для разбора на занятии

Данный квант объединяет в себе в основном задачи, посвящённые примерам и контрпримерам в теории чисел.

Задача 4.6.1. Если в выражение $n^2 + n + 41$ подставлять числа $n = 1, 2, 3, 4, 5$, то получатся простые числа $43, 47, 53, 61, 71$. Верно ли, что при подстановке в это выражение любого натурального числа n получится простое число?

Решение. Встретив такую задачу на олимпиаде, вы можете ужаснуться, потому что не существует никаких явных признаков того, что число является простым (в то время, как доказать, что число не является простым, иногда бывает очень просто). Так вот — такая формулировка задачи и является для вас очевидной подсказкой — не стоит доказывать, что все числа такого вида простые, достаточно привести пример не простого числа.

Заметим, что первые 2 слагаемых делятся на n, а третье равно 41. Если мы возьмём n, делящееся на 41, сумма чисел будет делиться на 41, образуя контрпример, что завершает решение задачи. $\square$

Задача 4.6.2. Найдите все такие простые p, что среди чисел от 1 до p включительно составных чисел будет ровно вдвое больше, чем простых.

Решение. Выпишем все простые числа, не превышающие 59. Их всего 17:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59.$$

Можно получить, что среди чисел, не превышающих 59, подходит только $p = 37$.

Рассмотрим остатки от деления на 6 любых шести идущих подряд чисел, первое из которых не менее 4: этими остатками будут $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Числа, дающие при делении на 6 остатки $0, 2, 3$ и 4, простыми быть не могут, поскольку они делятся на 2 или 3. Значит, среди любых 6 подряд идущих чисел, первое из которых хотя бы 4, простых не более 2.

Рассмотрим некоторое число $p_1 > 59$. От 1 до 59 включительно будет 17 простых чисел. От 60 до p_1 включительно — $p_1 - 60 + 1$ чисел, то есть, не более $\frac{p_1-60+1}{6}$ «шестёрок» чисел плюс оставшиеся после последней «шестёрки» числа (в которой простым может быть число только с остатком 1 при делении на 6, так как, если в неё входит число с остатком 5 при делении на 6, то оно входит в полную «шестёрку»). Таким образом получаем

не более $2 \cdot \frac{p_1-60+1}{6}+1$ простых чисел. Поэтому от 1 до p_1 включительно будет не более
$$17+2\cdot\frac{p_1-60+1}{6}+1=\frac{p_1-5}{3}$$
простых чисел. Тогда, составных будет не менее $p_1-1-\frac{p_1-5}{3}=\frac{2p_1+2}{3}$ чисел (так как 1 не является ни простым, ни составным). Таким образом, составных чисел будет более, чем в 2 раза больше, чем простых. Значит, кроме найденного $p=37$, других решений нет. □

Данную задачу мы решили благодаря тому, что заметили: сначала простые числа идут довольно часто, а потом всё реже и реже, в связи с чем возникает резонный вопрос — не может ли так произойти, что в какой-то момент они возьмут и закончатся? Иначе говоря, бесконечно ли множество простых чисел, или же существует наибольшее простое число? Оказывается, что ответить на этот вопрос не так уж и сложно. Пусть множество простых чисел конечно. Рассмотрим тогда число, равное произведению всех простых чисел, сложенному с единицей: $p_1p_2\cdots p_n+1$. Простым оно быть никак не может, поскольку больше любого из них. Однако данное число даёт остаток 1 при делении на любое простое число, значит, должно являться простым. Полученное противоречие доказывает бесконечность множества простых чисел.

Задача 4.6.3. Евклидово доказательство бесконечности множества простых чисел наводит на мысль определить рекуррентно числа Евклида:
$$e_1=2, e_n=e_1e_2\cdots e_{n-1}+1\ (n\geqslant 2).$$
Все ли числа e_n являются простыми?

Решение. Нет, т. к. $e_5=1807=13\cdot 139$. □

Задача 4.6.4. Докажите, что p^2-1 делится на 24, если p — простое число и $p>3$.

Решение. Применим формулу разности квадратов: $p^2-1=(p-1)(p+1)$. Поскольку p — простое и $p>3$, p — нечётное.

Возможные остатки от деления p на 4: 1 и 3. Тогда остатки чисел $p-1$ и $p+1$ от деления на 4 будут 2 и 0, т. е. $(p-1)(p+1)$ гарантированно делится на 8.

Аналогично с остатками по модулю 3: остаток от деления p равен 1 или 2, раз оно простое и больше 3, но тогда одно из чисел $p-1$ или $p+1$ гарантированно делится на 3. То есть $(p-1)(p+1)$ делится и на 3, и на 8, но тогда оно, так как 3 и 8 — взаимно простые числа, делится и на 24. □

Задача 4.6.5. Ваня записал несколько простых чисел, использовав ровно по одному разу все цифры от 1 до 9. Сумма этих простых чисел оказалась равной 225. Можно ли, использовав ровно по одному разу те же цифры, записать несколько простых чисел так, чтобы их сумма оказалась меньше?

Решение. Все чётные цифры, кроме 2, должны стоять в разряде десятков (иначе соответствующее число не будет простым). Сумма будет наименьшей, если все остальные числа будут стоять в разряде единиц. Например,

$$207 = 2+3+5+41+67+89 = 2+3+5+47+61+89 = 2+5+7+43+61+89.$$

□

Задавальник

Задача 4.6.6. («Математический праздник» — 2013.6.1) Вася умножил некоторое число на 10 и получил простое число. А Петя умножил то же самое число на 15, но всё равно получил простое число. Может ли быть так, что никто из них не ошибся?

Задача 4.6.7. («Математический праздник» — 2001.7.1) В книге рекордов Гиннесса написано, что наибольшее известное простое число равно

$$23021^{377} - 1.$$

Не опечатка ли это?

Задача 4.6.8. («Математический праздник» — 2017.6.2) На двух карточках записаны четыре различные цифры — по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым? (Нельзя переворачивать цифры вверх ногами, то есть делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот.)

Задача 4.6.9. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.7.3) Мальвина попросила Буратино выписать все девятизначные числа, составленные из различных цифр. Буратино забыл, как пишется цифра 7, поэтому записал только те девятизначные числа, в которых этой цифры нет. Затем Мальвина предложила ему вычеркнуть из каждого числа по шесть цифр так, чтобы оставшееся трёхзначное число было простым. Буратино тут же заявил, что это возможно не для всех записанных чисел. Прав ли он?

Задача 4.6.10. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.7.4) Незнайка хочет записать по кругу 2015 натуральных чисел так, чтобы для каждых двух соседних чисел частное от деления большего на меньшее было простым числом. Знайка утверждает, что это невозможно. Прав ли Знайка?

Задача 4.6.11. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.6.6) Является ли простым число 1111112111111?

Задача 4.6.12. (Турнир им. Ломоносова — 1989.7.13) Найдите все простые числа, которые нельзя записать в виде суммы двух составных.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.15. Найти все такие натуральные числа p, что p и $5p+1$ — простые.

Задача 4.16. Докажите, что любое простое число, большее 3, можно записать в одном из двух видов: $6n+1$ либо $6n-1$, где n — натуральное число.

Задача 4.17. Докажите, что p^2-q^2 делится на 24, если p и q — простые числа, большие 3.

Задача 4.18. Существует ли такое число n, что числа

а) $n-96$, n, $n+96$;

б) $n-1996$, n, $n+1996$

простые? (Все простые числа считаем положительными.)

7 Дроби

Материал для разбора на занятии

Что такое дробь, вы проходили ещё в 3 классе. Некоторые из текстовых задач, связанных с дробями, мы уже решали в предыдущей главе данной книги. В данной главе мы перейдём к более формально-математическому языку и рассмотрим, как дроби могут быть использованы в теории чисел.

Напомним некоторые определения на более формальном языке.

Определение 5. *Несократимая дробь* — это дробь, представимая в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное, при этом верно, что НОД$(m, n) = 1$. Для целого числа m представлением в виде несократимой дроби является представление в виде $m = \frac{m}{1}$.

Определение 6. *Правильная несократимая дробь* — это дробь, представимая в виде $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные, при этом верно, что НОД$(m, n) = 1$, $m < n$.

Обратим внимание на следующее важное замечание: если $m, n, a > 0$ и $m < n$, то

$$\frac{m}{n} < \frac{m+a}{n+a}.$$

Действительно:

$$\frac{m+a}{n+a} - \frac{m}{n} = \frac{(m+a)n - (n+a)m}{n(n+a)} = \frac{a(n-m)}{n(n+a)} > 0.$$

Так как при переворачивании положительных дробей в неравенстве знак меняется, также будет верным

$$\frac{n}{m} > \frac{n+a}{m+a}.$$

Задача 4.7.1. (Московская математическая олимпиада — 2016.8.1) Можно ли число $\frac{1}{10}$ представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей? (То есть выражений вида $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа и $p < q$.)

Решение. Интуитивно хочется, чтобы числитель каждой дроби был либо единицей, либо сокращался со знаменателем предыдущей, тогда произведение примет вид:

$$\frac{1}{10} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_3} \cdot \ldots \cdot \frac{n_{10}}{n_{11}} = \frac{n_1}{n_{11}}, \quad n_1 < n_2 < \ldots < n_{11}.$$

Отсюда сделаем вывод, что $n_{11} = 10n_1$. Нам нужно 11 различных натуральных чисел, поэтому возьмём $n_1 = 2, \Rightarrow n_{11} = 20$, и получим пример

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{20} = \frac{1}{10}.$$

Поэтому ответ на данную задачу — «можно» и приведённый пример. □

Задача 4.7.2. (Московская математическая олимпиада — 1999.8.1) Сравнив дроби 111110/111111, 222221/222223, 333331/333334, расположите их в порядке возрастания.

Решение. Сравним дроби:

$$\frac{111110}{111111} = \frac{333330}{333333} < \frac{333330+1}{333333+1},$$

$$\frac{333331}{333334} = \frac{666662}{666668} < \frac{666662+1}{666668+1} = \frac{222221}{222223},$$

Значит,

$$\frac{111110}{111111} < \frac{333331}{333334} < \frac{222221}{222223}.$$

□

Задача 4.7.3. («Покори Воробьёвы горы» 2016.5-6.3) Найдите все несократимые положительные дроби, которые увеличиваются в 3 раза, если увеличить и числитель, и знаменатель на 12.

Решение. Обозначим числитель и знаменатель нашей дроби как a и b соответственно. По условию

$$3\frac{a}{b} = \frac{a+12}{b+12}, \ \Rightarrow \ 3ab + 36a = ab + 12b, \ \Rightarrow$$
$$a(b+18) = 6b, \ \Rightarrow \ \frac{a}{b} = \frac{6}{b+18}.$$

Допустим, что b не делится ни на 2, ни на 3, тогда последняя дробь является несократимой, и $a = 6, b = b + 18$, что, конечно же, невозможно.

Пусть b делится на 2, но не делится на 3, тогда $b = 2k$, где k — целое и не делящееся на 3:

$$\frac{a}{2k} = \frac{6}{2k+18} = \frac{3}{k+9}.$$

Последняя дробь несократима, значит, $a = 3$, $2k = k+9$, $k = 9$, $b = 2k = 18$, но т. к. a и b должны быть взаимно просты, данные числа не походят.

Пусть b делится на 3, но не делится на 2, тогда $b = 3k$, где k — целое и не делящееся на 2:

$$\frac{a}{3k} = \frac{6}{3k+18} = \frac{2}{k+6}.$$

Последняя дробь несократима, значит, $a = 2$, $3k = k+6$, $k = 3$, $b = 3k = 9$, т. е. $a = 2$, $b = 9$ — решение.

Пусть b делится и на 2, и на 3, тогда $b = 6k$, где k — целое:

$$\frac{a}{6k} = \frac{6}{6k+18} = \frac{1}{k+3}.$$

Последняя дробь несократима, значит, $a = 1$, $6k = k+9$, $k = \frac{9}{5}$, что также не подходит.

Итак, условию удовлетворяет только одна дробь: $\frac{2}{9}$. □

Задача 4.7.4. После урока Шломо поспорил с Мухаммедом, уверяя, что он знает такое натуральное число m, что число $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ — нецелое. Прав ли Шломо? И если прав, то что это за число могло быть?

Решение. Приведём данное в условии выражение к виду:

$$\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} = \frac{m}{3} + \frac{m^2-m}{2} + \frac{m}{2} + \frac{m^3-m}{6} + \frac{m}{6} =$$

$$= m + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m^2-1)}{6} = m + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(m+1)}{6}.$$

Среди чисел m и $m-1$ хотя бы одно гарантированно делится на 2, а среди m, $m-1$ и $m+1$ — хотя бы одно на 2 и одно на 3. Значит, каждое слагаемое в данной сумме есть целое число, равно как и их сумма. Таки получается, что хитрый Шломо был не прав. □

Задавальник

Задача 4.7.5. («Математический праздник» — 1999.7.1) Числитель и знаменатель дроби — натуральные числа, дающие в сумме 101. Известно, что дробь не превосходит 1/3. Укажите наибольшее возможное значение такой дроби.

Задача 4.7.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.7.1) Записаны шесть положительных несократимых дробей, сумма числителей которых равна сумме их знаменателей. Паша перевёл каждую из неправильных дробей в смешанное число. Обязательно ли найдутся два числа, у которых одинаковы либо целые части, либо дробные части?

Задача 4.7.7. («Математический праздник» — 1997.6.2) В папирусе Ринда (Древний Египет) среди прочих сведений содержатся разложения дробей в сумму дробей с числителем 1, например,

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}.$$

Один из знаменателей здесь заменён буквой x. Найдите этот знаменатель.

Задача 4.7.8. («Математический праздник» — 2000.7.2) Карлсон написал дробь 10/97. Малыш может: 1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно; 2) умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь: а) равную 1/2; б) равную 1?

Задача 4.7.9. («Математический праздник» — 2004.6.3) а) Придумайте три правильные несократимые дроби, сумма которых — целое число, а если каждую из этих дробей «перевернуть» (то есть заменить на обратную), то сумма полученных дробей тоже будет целым числом.

б) То же, но числители дробей — не равные друг другу натуральные числа.

Задача 4.7.10. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.7.3) Мальвина записала по порядку 2016 обыкновенных правильных дробей: 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 2/4, 3/4, ... (в том числе и сократимые). Дроби, значение которых меньше, чем 1/2, она покрасила в красный цвет, а остальные дроби — в синий. На сколько количество красных дробей меньше количества синих?

Задача 4.7.11. («Математический праздник» — 2016.7.4) Впишите вместо звёздочек шесть различных цифр так, чтобы все дроби были несократимыми, а равенство верным:

$$\frac{*}{*} + \frac{*}{*} = \frac{*}{*}.$$

Задача 4.7.12. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.6.5) Можно ли в равенстве

$$\frac{*}{*} + \frac{*}{*} + \frac{*}{*} + \frac{*}{*} = *$$

заменить звёздочки цифрами от 1 до 9, взятыми по одному разу, так, чтобы равенство стало верным?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.19. Докажите, что дробь $\frac{1}{n}$ можно представить в виде конечной десятичной дроби только в том случае, если n в разложении на простые множители содержит только двойки и пятёрки.

Задача 4.20. Какое число нужно вычесть из числителя дроби $\frac{537}{463}$ и прибавить к знаменателю, чтобы после сокращения получить $\frac{1}{9}$?

8 Системы счисления

Материал для разбора на занятии

В современном мире при счёте мы пользуемся десятичной системой счисления. Что же это такое? Это значит, что, если мы разобьём число на «разрядные слагаемые», то мы получим «десятки», «сотни», «тысячи» и так далее, то есть, степени десятки. Например, $2018 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$.

В десятичной системе счисления каждая цифра может быть от 0 до 9, то есть быть любым неотрицательным целым числом, меньшим основания степени. А что такое, например, двоичная система счисления? Это система счисления, в которой «думает» компьютер, а думает он именно в ней потому, что физически представить числа в двоичной системе счисления оказывается наиболее просто, ведь в ней всего 2 возможные цифры, цифре 1 может соответствовать наличие тока в некоем участке цепи (или включённая лампочка в ламповом компьютере), а цифре 0 — его отсутствие. Численная запись двоичного числа будет трактоваться следующим образом: $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}_2 = a_n 2^n + \ldots + a_1 2^1 + a_0 2^0$.

Аналогичным обобщением для системы счисления с основанием s будет формула: $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}_s = a_n s^n + \ldots + a_1 s^1 + a_0 s^0$, при этом цифры у неё будут от 0 до $s - 1$. Если система счисления имеет основание, большее 10, в качестве цифр «10», «11» и т. д. обычно используются латинские буквы $A, B, \ldots$

Определение 7. *Позиционной системой счисления* называется система счисления, в которой значение каждого числового знака (цифры) в записи числа зависит от его позиции (разряда).

Первые упоминания о позиционных системах относятся к шумерским и вавилонским трудам. Это — система счисления по основанию 60, изобретённая шумерами в III тысячелетии до н. э. Эта система получила большое распространение благодаря древним и средневековым астрономам, использовавшим данную систему, в первую очередь, для представления дробей. Поэтому средневековые учёные часто называли шестидесятеричные дроби «астрономическими». Эти дроби использовались для записи астрономических координат — углов, и эта традиция сохранилась по сей день. В одном градусе 60 минут и в одной минуте 60 секунд.

Возникновение десятичной системы счисления связано со счётом на пальцах. В средневековой Европе она распространилась через итальянских купцов, в свою очередь заимствовавших её у жителей Средней Азии.

Однако существуют также и непозиционные системы счисления, например, всем известная система счисления, использовавшаяся в величайшем государстве Античности, на основе которого сформировалась вся европейская цивилизация — Древнем Риме. С этой системой мы постоянно встречаемся в жизни, ведь номера веков, тысячелетий, съездов партий, советов депутатов и т. п. всегда записываются именно в римской системе счисления. Напомним же её устройство.

Значения её цифр следующие:

I 1,
V 5,
X 10,
L 50,
C 100,
D 500,
M 1000.

Перевод из десятичной системы счисления в римскую осуществляется следующим образом — прежде нужно разложить число на десятичные разряды, затем единичный разряд представляется так:

I 1,
II 2,
III 3,
IV 4,
V 5,
VI 6,
VII 7,
VIII 8,
IX 9.

Аналогично (только с другими буквами) представляются и другие разряды. Затем все обозначения каждого разряда записываются подряд, слева направо, начиная с большего. Например, число $1917 = 1000 + 900 + 10 + 7$ запишется как MCMXVII.

Вернёмся снова к позиционным системам счисления. В общем-то понятно, что данного выше определения через разложение по разрядам вполне довольно для того, чтобы переводить числа из десятичной системы счисления в другую и обратно. Делается это следующим образом: допустим, у нас есть число 4231, которое мы хотим перевести в троичную систему счисления. Сперва следует выписать все степени тройки, не превышающие данного числа: $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, $3^6 = 729$, $3^7 = 2187$. А затем начать вычитать из исходного числа данные степени, начиная с большей, столько раз, сколько еще вычитается:

$4231-2187=2044$, $2044-729\cdot 2=586$, $586-243\cdot 2=100$, $100-81=19$, $19-9\cdot 2=1$, то есть

$$4231=2187+729\cdot 2+243\cdot 2+81+9\cdot 2+1=$$

$$=1\cdot 3^7+2\cdot 3^6+2\cdot 3^5+1\cdot 3^4+0\cdot 3^3+2\cdot 3^2+0\cdot 3^1+1\cdot 3^0=12210201_3.$$

Но существует также и другой способ, основанный на делении с остатком: число последовательно делится на основание степени, пока не получится 0, тогда все получившиеся остатки, записанные в обратном порядке, образуют число в требуемой системе счисления. Проиллюстрируем данный метод на примере того же числа:

$$\begin{aligned}
4231:3&=1410 \text{ (1 в остатке)},\\
1410:3&=470 \text{ (0 в остатке)},\\
470:3&=156 \text{ (2 в остатке)},\\
156:3&=52 \text{ (0 в остатке)},\\
52:3&=17 \text{ (1 в остатке)},\\
17:3&=5 \text{ (2 в остатке)},\\
5:3&=1 \text{ (2 в остатке)},\\
1:3&=0 \text{ (1 в остатке)},
\end{aligned}$$

Отсюда: $4231=12210201_3$.

Для перевода из недесятичной системы счисления в десятичную можно использовать эти два способа, применённые в обратном порядке. Первый вряд ли нуждается в комментариях, а второй выполняется следующим образом для системы с основанием s:

$$\overline{a_n\ldots a_1a_0}_s=\big(\ldots(a_n\cdot s+a_{n-1})\cdot s+\ldots+a_1\big)\cdot s+a_0,$$

т. е. для нашего примера:

$$12210201_3=\big((((((1\cdot 3+2)\cdot 3+2)\cdot 3+1)\cdot 3+0)\cdot 3+2)\cdot 3+0\big)\cdot 3+1=4231.$$

Стоит также обратить внимание на возможность быстрого перевода из системы с основанием s в систему с основанием s^k, осуществляемого следующим образом. Прежде всего исходное число разбивается на группы по k цифр; начиная справа, каждая группа переводится в новую систему счисления, причём результат должен состоять из 1 цифры; получившиеся цифры записываются в том порядке, в котором были записаны группы цифр исходного числа. Перевод из системы с основанием s^k в систему с основанием s осуществляется аналогичным образом в обратном порядке. Приведём пример.

Задача 4.8.1. Перевести число $37ba7af8_{16}$ из шестнадцатеричной системы счисления в восьмеричную.

Решение. Можно представить, сколько времени и нервов потребует решение этой задачи переводом сперва в десятичную систему счисления, а потом в восьмеричную, поэтому воспользуемся описанным выше способом. Сначала переводим данное число в двоичную систему счисления, для этого каждую цифру представляем в двоичной системе счисления, добавляя вперёд нули, чтобы везде было по 4 цифры:

$$3_{16} = 0011_2,\ 7_{16} = 0111_2,\ b_{16} = 1011_2,\ a_{16} = 1010_2,$$
$$7_{16} = 0111_2,\ a_{16} = 1010_2,\ f_{16} = 1111_2,\ 8_{16} = 1000_2.$$

Значит, $37ba7af8_{16} = 110111101110100111101011111000_2$.

Теперь переведём получившееся число в восьмеричную систему счисления, разобьём его, начиная с конца, на группы по 3 цифры и переведём их в цифры восьмеричной системы счисления:

$$110_2 = 6_8,\ 111_2 = 7_8,\ 101_2 = 5_8,\ 110_2 = 6_8,\ 100_2 = 4_8,$$
$$111_2 = 7_8,\ 101_2 = 5_8,\ 011_2 = 3_8,\ 111_2 = 7_8,\ 000_2 = 0_8.$$

Значит, наше число равно 6756475370_8, что и является ответом к задаче. $\square$

Задавальник

Задача 4.8.2. («Математический праздник» — 2008.6.1) Сегодня 17 февраля 2008 года. Наташа заметила, что в записи этой даты сумма первых четырёх цифр равна сумме последних четырёх. Когда в этом году такое совпадение случится в последний раз?

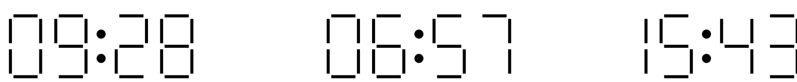
Задача 4.8.3. («Математический праздник» — 2009.6.1) У 2009 года есть такое свойство: меняя местами цифры числа 2009, нельзя получить меньшее четырёхзначное число (с нуля числа не начинаются). В каком году это свойство впервые повторится снова?

Задача 4.8.4. («Математический праздник» — 2002.7.1) Год проведения олимпиады (2002) — год–палиндром, то есть одинаково читается справа налево и слева направо. Предыдущий год–палиндром был 11 лет назад (1991). Какое максимальное число годов–непалиндромов может идти подряд (между 1000 и 9999 годами)?

Задача 4.8.5. («Математический праздник» — 1993.6.4) Если у числа x подсчитать сумму цифр и с полученным числом повторить это ещё два раза, то получится ещё три числа. Найдите самое маленькое x, для которого все четыре числа различны, а последнее из них равно 2.

Задача 4.8.6. («Математический праздник» — 1991.6.5) Найдите числа, равные удвоенной сумме своих цифр.

Задача 4.8.7. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.7.6) На рисунке приведены три примера показаний исправных электронных часов. Сколько палочек могут перестать работать, чтобы время всегда можно было определить однозначно?



Задача 4.8.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.7.6) Некоторые числа представимы в виде суммы $\overline{abc} + \overline{ab} + a$, а некоторые — нет. (Например, число 1001 представимо, поскольку $1001 = 993 + 99 + 9$. А числа 220 и 1514 — не представимы.) Сколько существует трёхзначных чисел, представимых в виде суммы $\overline{abc} + \overline{ab} + a$?

Задача 4.8.9. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.7.7) Вася задумал двузначное число и сообщил Пете произведение цифр в записи этого числа, а Саше — сумму этих цифр. Между мальчиками состоялся такой диалог.

Петя: «Я угадаю задуманное число с трёх попыток, но двух мне может не хватить».

Саша: «Если так, то мне для этого хватит четырёх попыток, но трёх может не хватить».

Какое число было сообщено Саше?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.21. Перевести число 321 из десятичной системы счисления в пятеричную.

Задача 4.22. Перевести число 3210_4 в десятичную систему счисления.

Задача 4.23. Переведите число jpg_{27} в девятеричную систему счисления.

9 Разбор задач для самостоятельного решения

Чётность

Задача 4.1. Имеется 18 целых чисел, произведение которых равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.

Решение. Для того, чтобы произведение целых чисел равнялось единице, среди множителей можно использовать только числа 1 и -1, причём количество чисел -1 должно быть чётно. Для того, чтобы сумма группы чисел 1 и -1 равнялась нулю, необходимо, чтобы количество чисел 1 равнялось 9 и количество чисел -1 тоже равнялось 9, что является нечётным числом. То есть, мы доказали, что сумма данных чисел не равна нулю. □

Задача 4.2. На доске написано 2017 целых чисел от 1 до 2017. Каждым ходом Дормидонт стирает с доски два числа и записывает на доску модуль их разности. Может ли последнее оставшееся на доске число равняться нулю?

Решение. Подсчитаем сумму всех написанных на доске чисел:

$$1 + 2 + \ldots + 2017.$$

Запишем числа в другом порядке:

$$\underbrace{1 + 2017} + \underbrace{2 + 2016} + \ldots + 1009.$$

Сумма каждой пары чисел равна 2018 — чётное число. Число 1009 — нечётное, следовательно, общая сумма тоже нечётная.

Рассматривая таблицы сложения и вычитания чётных и нечётных чисел, мы замечаем, что они совпадают, следовательно, если мы сотрём два числа и напишем модуль их разности, то чётность суммы всех чисел, записанных на доске, не изменится. Так как 0 — чётное число, то после ряда шагов оно не может остаться последним. □

Задача 4.3. Пока дети решали контрольную работу, преподаватель написал на стене класса по кругу все натуральные числа от 1 до 2018 по одному разу так, что между каждыми 2 числами, стоящими через одно, оказался делитель их суммы. Вася увидел на стене написанное число 1999, а соседнее число закрывала голова одноклассника. Он решил поспорить со своим соседом, что полностью закрыто нечётное число. Какие его шансы выиграть данный спор?

Решение. Допустим, что существует 2 соседних чётных числа a и b. Тогда число c, записанное слева от них, также чётное, так как иначе число $c + b$ было бы нечётным и никак не могло делиться на чётное число a, аналогично, число, записанное справа от них, также было бы чётным. Продолжая цепочку доказательств чётности чисел, можно получить, что тогда вообще все записанные числа являются чётными, однако у нас есть и нечётные числа. Таким образом, чётные числа никогда не стоят подряд. Так как чётных чисел и нечётных поровну, можно получить, что нечётные и чётные числа обязательно чередуются по одному. Значит, соседнее числу 1999 число обязательно будет чётным, т. е. у Василия нет никаких шансов. $\square$

Признаки делимости

Задача 4.4. Найдите наибольшее четырёхзначное число, делящееся на 2, 5, 9 и 11, все цифры которого различны.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 2, 5, 9 и 11, необходимо, чтобы оно делилось на произведение всех этих чисел, так как они взаимно простые. Произведение всех этих чисел равно 990. Заметим, что $990 \cdot 9 = 8910$ подходит под условия задачи, число $990 \cdot 10 = 9900$ не подходит, а $990 \cdot 11$ — уже пятизначное число. Поэтому, искомое число — 8910. $\square$

Задача 4.5. Сумма трёх различных наименьших делителей некоторого числа A равна 8. Сколькими нулями может оканчивается число A? Укажите все варианты.

Решение. Наименьшим делителем числа A будет число 1. Значит, сумма двух наименьших делителей, не равных единице, должна быть равна 7. Это возможно в двух случаях: $7 = 3 + 4$ или $7 = 2 + 5$. Но первый случай невозможен, так как тогда число делится на 4, значит, является чётным, и наименьший делитель после числа 1 — это число 2.

Во втором случае — наименьшие делители 1, 2, 5, тогда число делится также и на 10, а, следовательно, оканчивается на 0. Докажем, что оно не может оканчиваться на 00. Действительно, такое число будет делиться на 100, следовательно, и на 4, что невозможно. Поэтому наше число может заканчиваться только ровно на один ноль. $\square$

Сравнения по модулю

Задача 4.6. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2+y^2=z^2$ (то есть, образуют «Пифагорову тройку»). Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

Решение. Рассмотрим, какие остатки может давать квадрат натурального числа при делении на 3:

x	0	1	2
x^2	0	1	1

Отсюда можно сделать вывод: если число не делится на 3, то его квадрат даёт остаток 1 при делении на 3. Предположим противное: ни одно из чисел не делится на 3, тогда все квадраты дают остаток 1. Но тогда уравнение $x^2+y^2=z^2$ по модулю 3 записывается как $1+1\equiv 1$, что неверно. Полученное противоречие означает, что хотя бы одно из чисел x, y или z делится на 3. □

Задача 4.7. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.

Решение. Обозначим числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 и x_7. Сумма любых шести из них делится на 5:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_6 \vdots 5, \\ x_2+x_3+\ldots+x_7 \vdots 5, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_7+x_1+\ldots+x_5 \vdots 5. \end{cases}$$

Просуммируем все эти выражения. Тогда каждое число x_i слева будет встречаться ровно по 6 раз:

$$6(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7) \vdots 5,$$

откуда

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 \vdots 5.$$

Вычитая отсюда каждую из делимостей написанной выше системы, получаем требуемое утверждение: $x_7 \vdots 5, x_1 \vdots 5, \ldots, x_6 \vdots 5$. □

Задача 4.8. Сколько существует натуральных чисел n, меньших 2014, для которых 2^n-n^2 делится на 7?

Решение. Рассмотрим остатки, которые имеет число n^2 при делении на 7. Они будут иметь период длины 7:

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	2	2	4	1

Рассмотрим также остатки, которые имеет число 2^n при делении на 7. Они будут иметь период длины 3:

n	0	1	2	3	4	5
2^n	1	2	4	1	2	4

Поэтому у числа $n^2 - 2^n$ остатки будут иметь период $3 \cdot 7 = 21$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1
2^n	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4

Заметим теперь, что $2014 = 21 \cdot 95 + 19$, поэтому полный период повторится 95 раз. За каждый период будет 6 случаев, когда $n^2 - 2^n = 0 \pmod 7$:

$$n \equiv 2, 4, 5, 6, 10, 15 \pmod{21}.$$

И ещё за неполный период также будет 6 случаев. Поэтому всего будет

$$95 \cdot 6 + 6 = 96 \cdot 6 = 576$$

таких n, что $2^n - n^2$ делится на 7. □

Основная теорема арифметики

Задача 4.9. Существует ли целое число, произведение цифр которого равно а) 1980; б) 1990; в) 2000; г) 2018?

Решение: а) $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, 11 не может входить в число в качестве цифры;

б) $1990 = 2 \cdot 5 \cdot 199$ — аналогично пункту а), наличие простого числа 199 среди делителей также говорит о том, что такого числа не существует;

в) $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, из приведённого разложения следует, что такое число существует — оно может быть составлено из степеней двоек (не выше третьей) и из пятёрок, например: 2222555, 44555, 28555;

г) $2018 = 2 \cdot 1009$ — аналогично первым двум пунктам, такого числа не существует.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да; г) нет. □

Задача 4.10. Существует ли натуральное число, большее 100, такое, что произведение всех делителей этого числа (включая 1 и само число), равняется восьмой степени данного числа?

Решение. Да, например, у числа 2^{15} ровно 16 делителей: $2^0, 2^1, \ldots, 2^{15}$, что составляет $(15+1):2 = 8$ пар делителей, каждая из которых даёт само число в произведении, значит, оно подходит. $\square$

Задача 4.11. (Олимпиада «Ломоносов» — 2017.7–8.6, 9.4) Про натуральные числа m и n известно, что $3n^3 = 5m^2$. Найдите наименьшее возможное значение $m+n$.

Решение. Так как левая часть данного уравнения делится на 3, то и правая также должна делиться на 3. Таким образом, так как 5 не делится на 3, в разложении m^2 на простые множители присутствует хоть одна тройка, значит, и в самом числе m тоже. Таким образом, число m представимо в виде $m = 3a$, аналогичным образом можно получить, что $n = 5b$, где a и b — натуральные. Подставим данные числа в исходное уравнение, получим $3(5b)^3 = 5(3a)^2$. Откуда:

$$3 \cdot 5^3 \cdot b^3 = 5 \cdot 3^2 \cdot a^2,\ 5^2 \cdot b^3 = 3 \cdot a^2.$$

Повторив аналогичные рассуждения, получим, что $a = 5x$, $b = 3y$, таким образом, $n = 15y$, $m = 15x$. После подстановки в уравнение получим:

$$5^2 \cdot (3y)^3 = 3 \cdot (5x)^2,\ 5^2 \cdot 3^3 \cdot y^3 = 3 \cdot 5^2 \cdot x^2,$$

откуда $3^2 \cdot y^3 = x^2$, откуда $x = 3t$, $3^2 \cdot y^3 = (3t)^2$, $y^3 = t^2$. При этом требуется найти минимальное возможное значение числа $15y + 45t$, что достигается при $y = t = 1$. Не забывайте, что в данной задаче недостаточно просто угадать ответ, нужно объяснить, как вы его получили!

Ответ: $15 + 45 = 60$. $\square$

Задача 4.12. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2009.8.1) Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

Решение. Несложно увидеть, что $1000 = 5^3 \cdot 2^3$. Тогда каждое из искомых чисел в своем разложении на простые множители может содержать только двойки и пятёрки. При этом одновременно 2 и 5 не могут присутствовать в разложении одного числа, иначе оно будет делиться на 10. Следовательно, одно из чисел равно 5^3, а другое — 2^3, а их сумма равна $5^3 + 2^3 = 125 + 8 = 133$.

Ответ: $5^3 + 2^3 = 125 + 8 = 133$. $\square$

НОД и НОК

Задача 4.13. В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждом его ребре — наибольший общий делитель двух чисел, записанных на концах этого ребра. Могла ли сумма всех чисел, записанных в вершинах, оказаться равной сумме всех чисел, записанных на рёбрах?

Решение. Докажем, что для любых двух различных чисел выполняется неравенство: $a + b \geqslant 3\,\text{НОД}(a, b)$. Действительно, пусть $\text{НОД}(a, b) = d$, тогда $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, где $a_1 \neq b_1$ — натуральные числа. Тогда

$$a + b = (a_1 + b_1)d \geqslant 3d \Leftrightarrow a_1 + b_1 \geqslant 3,$$

что верно. При этом равенство может достигаться, только если $a = 2b$ или $b = 2a$.

Поэтому сумма любых двух чисел, стоящих в соседних вершинах не меньше утроенного числа, стоящего на ребре между ними. Просуммируем все эти неравенства (выписав неравенство на каждом ребре): каждое число стоящее в вершине посчитается ровно 3 раза. Поэтому сумма чисел, стоящих в вершинах, больше либо равна сумме чисел, стоящих на рёбрах, и равенство может быть достигнуто лишь когда достигаются равенства во всех суммируемых неравенствах. Поэтому любые два числа, стоящие в соседних вершинах, отличаются в 2 раза.

Пусть в некоторой вершине стоит число a. Тогда в каждой из трёх соседних может стоять либо число $a/2$, либо $2a$. Очевидно, что какое-то число будет повторяться. Поэтому сумма всех чисел, записанных в вершинах, не могла оказаться равной сумме всех чисел, записанных на рёбрах. □

Задача 4.14. Найти наибольший общий делитель чисел $2^n - 1$ и $2^m - 1$.

Решение. Пусть, не умаляя общности, $n > m$. Воспользуемся модифицированным алгоритмом Евклида:

$$\text{НОД}(2^n - 1, 2^m - 1) = \text{НОД}(2^n - 2^m, 2^m - 1) = \text{НОД}(2^{n-m} - 1, 2^m - 1).$$

Тут мы воспользовались тем, что второе из полученных чисел — нечётное, поэтому первое из чисел можно разделить на 2^m, от этого НОД не поменяется.

Один шаг такого модифицированного алгоритма Евклида производит те же операции со степенями, что и обычный алгоритм Евклида — с числами. Поэтому в результате работы такого алгоритма получится число $2^{\text{НОД}(n,m)} - 1$, что и требовалось найти. □

Простые числа

Задача 4.15. Найти все такие натуральные числа p, что p и $5p+1$ — простые.

Решение. Если p простое и $p > 2$, то p — нечётное, но тогда $5p+1$ чётное и совершенно точно составное. Осталось лишь проверить, что $2 \cdot 5 + 1 = 11$ — простое число, что приводит к ответу к данной задаче: $p = 2$. $\square$

Задача 4.16. Докажите, что любое простое число, большее 3, можно записать в одном из двух видов: $6n+1$ либо $6n-1$, где n — натуральное число.

Решение. В материале для разбора на занятии мы обращали внимание на замечание: любое простое число, большее 3, может иметь в качестве остатка от деления на 6 лишь числа 1 и 5, откуда непосредственно следует утверждение задачи. $\square$

Задача 4.17. Докажите, что $p^2 - q^2$ делится на 24, если p и q — простые числа, большие 3.

Решение. Применим формулу разности квадратов: $p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$. Поскольку p, q — простые и $p, q > 3$, p, q — нечётные. Возможными остатками от деления p и q на 4, в силу нечётности простых чисел больших 3, могут быть 1 и 3, тогда остатками чисел $p-q$ и $p+q$ от деления на 4 могут быть следующие пары:

$$\begin{aligned}
&1 - 3 \equiv 2 \pmod 4 \text{ и } 1 + 3 \equiv 0 \pmod 4, \text{ либо}\\
&1 - 1 \equiv 0 \pmod 4 \text{ и } 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4, \text{ либо}\\
&3 - 3 \equiv 0 \pmod 4 \text{ и } 3 + 3 \equiv 2 \pmod 4, \text{ либо}\\
&3 - 1 \equiv 2 \pmod 4 \text{ и } 3 + 1 \equiv 0 \pmod 4, \text{ т. е.}
\end{aligned}$$

всегда 2 или 0. Значит, $(p-q)(p+q)$ гарантированно делится на 8.

Аналогично с остатками по модулю 3: остатки p и q равны 1 или 2, так как данные числа простые и больше 3, но тогда одно из чисел $p-q$ или $p+q$ гарантированно делится на 3. Т. е. $(p-q)(p+q)$ делится и на 3, и на 8, но тогда оно, в силу взаимной простоты чисел 3 и 8, делится и на 24. $\square$

Задача 4.18. Существует ли такое число n, что числа

а) $n-96$, n, $n+96$;

б) $n-1996$, n, $n+1996$

простые? (Все простые числа считаем положительными.)

Решение. а) Да, например, $n = 101$ подходит, ведь числа $5, 101, 197$ простые.

б) Как мы выяснили в предыдущей задаче, среди чисел $p - q$, p, $p + q$ хотя бы одно делится на 3, если q не делится на 3. Тогда, чтобы все числа среди $n-1996$, n, $n+1996$ были простыми, необходимо, чтобы выполнялось равенство $n - 1996 = 3$, но тогда $n + 1996 = 3995$ — составное число. □

Дроби

Задача 4.19. Докажите, что дробь $\frac{1}{n}$ можно представить в виде конечной десятичной дроби только в том случае, если n в разложении на простые множители содержит только двойки и пятёрки.

Решение. Пусть данная дробь представима в виде конечной десятичной дроби. Приравняем эти дроби, записанные в том и ином виде:

$$\overline{0{,}a_1a_2\ldots a_k} = \frac{1}{n},$$

после раскрытия пропорции получим $\overline{a_1a_2\ldots a_k} \cdot n = 10^k$. В разложении 10^k на простые множители есть только 2 и 5, значит, из основной теоремы арифметики, и в разложении n могут быть только эти простые множители, что и требовалось доказать. □

Задача 4.20. Какое число нужно вычесть из числителя дроби $\frac{537}{463}$ и прибавить к знаменателю, чтобы после сокращения получить $\frac{1}{9}$?

Решение. Обозначим данное число за n, тогда:

$$\frac{537 - n}{463 + n} = \frac{1}{9},$$
$$(537 - n) \cdot 9 = 463 + n, \ \Rightarrow \ 4833 - 9n = 463 + n,$$
$$n = 437.$$

□

Системы счисления

Задача 4.21. Перевести число 321 из десятичной системы счисления в пятеричную.

Решение. Запишем: $321 - 125 \cdot 2 = 71$, $71 - 25 \cdot 2 = 21$, $21 - 5 \cdot 4 = 1$. Тогда:

$$321 = 5^3 \cdot 2 + 5^2 \cdot 2 + 5^1 \cdot 4 + 5^0 \cdot 1 = 2241_5.$$

□

Задача 4.22. Перевести число 3210_4 в десятичную систему счисления.

Решение. Запишем: $3210_4 = 4^3 \cdot 3 + 4^2 \cdot 2 + 4^1 \cdot 1 + 4^0 \cdot 0 = 228_{10}$. □

Задача 4.23. Переведите число jpg_{27} в девятеричную систему счисления.

Решение. Воспользуемся описанным в теоретической части данного кванта методом. Переводим данное число сперва в троичную систему счисления:

$$j_{27} = 201_3,\ p_{27} = 221_3,\ g_{27} = 121_3,\ \Rightarrow\ jpg_{27} = 201221121_3.$$

Затем переводим в девятеричную:

$$2_3 = 2_9,\ 01_3 = 1_9,\ 22_3 = 8_9,\ 11_3 = 4_9,\ 21_3 = 7_9,\ \Rightarrow\ 201221121_3 = 21847_9.$$

□

Глава 5

Размышления и игры

Что значит рассуждать логически с точки зрения математики?

Когда ваше «очевидно» действительно очевидно для проверяющих?

Почему для решения задачи иногда достаточно привести пример, а иногда этого недостаточно?

В данном разделе мы постарались ответить на все эти вопросы. Для этого мы подробно познакомим вас с некоторыми из основных методов решения олимпиадных задач: метод доказательства от противного, принцип Дирихле, принцип крайнего, оценка+пример, метод полного перебора и метод подсчёта двумя способами.

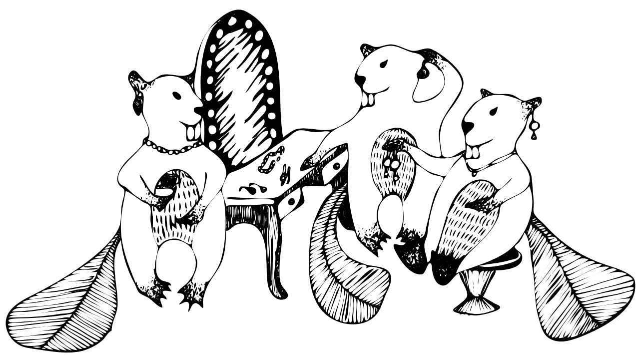
1 Логические задачи

Материал для разбора на занятии

Зачастую в олимпиадах школьников встречаются задачи, которые можно объединить в общую группу так называемых «логических задач». Нередко они вызывают большое раздражение у участников олимпиад, так как многие логические переходы, требующие объяснений согласно критериям оценки конкретной задачи, кажутся «очевидными» и «само собой разумеющимися». Самый простой способ не лишиться баллов из-за недостаточно правильного оформления — написать решение задачи настолько подробно, чтобы его понял даже первоклассник («Если вы не можете объяснить что-либо простыми словами, доступными даже неподготовленному слушателю, вы сами этого не понимаете», Р. Фейнман). Правда, тогда есть шанс вызвать раздражение жюри «простынёй текста», но баллов за раздражение по критериям снять не смогут.

Рассмотрим несколько классических задач на логику.

Задача 5.1.1. У бобрих Тата, Диди и Дита проколоты уши. На троих у них три пары серёжек — красные, зелёные и синие (они бывают для правого уха и для левого). У Тата цвета серёжек в разных ушах совпадают. У Диди точно нет ни одной красной серёжки. У Дита в правом ухе зелёная серёжка, а в левом — другого цвета. У кого в левом ухе синяя серёжка?



Решение. Определим, какого цвета серёжка в правом ухе у Диди. Она не красного цвета, а правая зелёная у Дита, значит в правом ухе у Диди синяя серёжка. Тогда, в правом ухе у Тата оставшаяся красная серёжка. Цвета серёжек у Тата одинаковы, значит в левом ухе у неё тоже красная серёжка. А что у Дита? Так как в правом ухе у неё зелёная серёжка, в левом — другого цвета, а красная уже занята, следовательно в левом ухе у неё синяя серёжка. Ответ: у Дита. □

Одним из классических методов оформления задач на логику является составление таблиц. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 5.1.2. Три друга — Владимир, Игорь и Сергей преподают математику, физику и литературу в школах Тулы, Рязани и Калуги. Владимир работает не в Рязани, Игорь — не в Туле, туляк преподаёт литературу, рязанец — не физику, Игорь — не математику. Какой предмет и в каком городе преподаёт каждый из них?

Решение. Составим таблицу парных соответствий между именами, городами и предметами. Мы объединим их в одну таблицу на рисунке ниже.

	Вл	И	Су	Ту	Ря	Ка
Ма						
Ф						
Ли						
Ту						
Ря						
Ка						

Заполним таблицу фактами из условия задачи: для этого мы проставим минусы в те клетки, в которых утверждение ложно и плюсики в те, где утверждение истинно. Так как у нас условия взаимоисключающие (то есть, человек не может жить одновременно в разных городах), то, поставив плюсик в клетку, мы должны поставить минусы в остальные клетки в подтабличке 3×3 в той же строке и том же столбце. Поставив плюсик согласно условию, что литератор живёт в Туле, заполним минусами пустые клетки третьей строки и первого столбца правой подтаблички. Как только мы поставили минус после условия «рязанец преподаёт не физику», мы обнаруживаем, что в столбце «Рязань» в правой подтабличке у нас осталась единственная пустая клетка, в неё ставим плюсик. После первоначального заполнения мы видим такую таблицу (рисунок а)).

	Вл	И	Су	Ту	Ря	Ка
Ма		−		−	+	−
Ф				−	−	+
Ли				+	−	−
Ту		−				
Ря	−					
Ка						

а) После первого заполнения

	Вл	И	Су	Ту	Ря	Ка
Ма	−	−	+	−	+	−
Ф	−	+	−	−	−	+
Ли	+	−	−	+	−	−
Ту	+	−	−			
Ря	−	−	+			
Ка	−	+	−			

б) Решённая задача

Мы уже получили достаточно много информации: учитель литературы живёт в Туле, учитель математики — в Рязани и учитель физики — в

Калуге.

Начнём рассуждать. Игорь живёт не в Туле, Игорь — не математик, математик живёт в Рязани $\to$ Игорь живёт не в Рязани $\to$ Игорь живёт в Калуге. Ставим плюсик. Теперь мы знаем, что Владимир живёт в Туле и Сергей — в Рязани. Объединив наши знания, мы получаем заключительную таблицу (рисунок б)). $\square$

Ещё одной важной темой в логических задачах являются задачи про рыцарей (правдолюбцев), которые всегда говорят правду, лжецов, которые всегда лгут и хитрецов, которые могут говорить как правду, так и ложь (возможно, с наложенными ограничениями). Рассмотрим задание на эту тему.

Задача 5.1.3. Из трёх человек, A, B и C, один — рыцарь, другой — лжец, третий — хитрец. A сказал: «Я хитрец». B сказал: «A и C иногда говорят правду». C сказал: «B — хитрец». Кто из них лжец, кто — рыцарь, а кто хитрец?

Решение. A говорит, что он хитрец, значит он не может быть рыцарем, так как в таком случае он соврёт.

Пусть A лжец. Тогда он никогда не говорит правду, а, значит, B солгал, так как если он говорит, что A и C иногда говорят правду, то имеется в виду, что каждый из них иногда говорит правду. Тогда, B — хитрец. Значит, C — рыцарь, и C говорит правду. Данный вариант нам подошёл. Но мы должны проверить все возможные варианты.

Пусть A — хитрец. Тогда C точно лжёт, так как B не может быть тоже хитрецом. Значит, C лжец, так как хитрец у нас уже есть. Тогда B — рыцарь. Но C никогда не говорит правду, значит, B солгал, следовательно он — не рыцарь. Противоречие.

Таким образом, мы получили единственный ответ: A — лжец, B — хитрец, C — рыцарь. $\square$

Задавальник

Задача 5.1.4. («Математический праздник» — 2010.6.2) В Лесогории живут только эльфы и гномы. Гномы лгут, говоря про своё золото, а в остальных случаях говорят правду. Эльфы лгут, говоря про гномов, а в остальных случаях говорят правду. Однажды два лесогорца сказали:

А: Всё моё золото я украл у Дракона.

Б: Ты лжёшь.

Определите, эльфом или гномом является каждый из них.

Задача 5.1.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.6.2) Некоторые жители *Острова Разноцветных Лягушек* говорят только правду, а остальные всегда лгут. Трое островитян сказали так:

Бре: На нашем острове нет синих лягушек.

Ке: Бре — лгун. Он же сам синяя лягушка!

Кекс: Конечно, Бре — лгун. Но он красная лягушка.

Водятся ли на этом острове синие лягушки?

Задача 5.1.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.6.2) Дом имеет форму квадрата, разделённого на девять одинаковых квадратных комнат. В каждой комнате живёт либо рыцарь, который всегда говорит только правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый житель дома заявил: «Среди моих соседей рыцарей больше, чем лжецов». Известно, что среди жителей дома есть и рыцари, и лжецы. Сколько среди них рыцарей? (Соседними считаются комнаты, имеющие общую стену.)

Задача 5.1.7. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.6.2) Каждый из трёх приятелей либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Им был задан вопрос: «Есть ли хотя бы один лжец среди двух остальных?» Первый ответил: «Нет», второй ответил: «Да». Что ответил третий?

Задача 5.1.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.7.2) В шеренге стоят 2014 человек, и одного из них зовут Артур. Каждый из стоящих в шеренге либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый, кроме Артура, сказал: «Между мной и Артуром стоят ровно два лжеца». Сколько лжецов в этой шеренге, если известно, что Артур — рыцарь?

Задача 5.1.9. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.7.2) В семье весёлых гномов папа, мама и ребёнок. Имена членов семьи: Саша, Женя и Валя. За обеденным столом два гнома сделали по два заявления. Валя: «Женя и Саша разного пола. Женя и Саша — мои родители». Саша: «Я — отец Вали. Я — дочь Жени». Восстановите имя и отчество гнома–ребёнка, если известно, что каждый гном один раз сказал правду, и один раз пошутил.

Задача 5.1.10. («Математический праздник» — 2003.6.3) На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

Задача 5.1.11. («Математический праздник» — 2015.6.3) Математик с пятью детьми зашёл в пиццерию.

Маша: Мне с помидорами и чтоб без колбасы.

Даша: Я буду без помидоров.

Никита: А я с помидорами. Но без грибов!

Игорь: И я без грибов. Зато с колбасой!

Ваня: А мне с грибами.

Папа: Да, с такими привередами одной пиццей явно не обойдёшься...

Сможет ли математик заказать две пиццы и угостить каждого ребёнка такой, какую тот просил, или всё же придётся три пиццы заказывать?

Задача 5.1.12. («Математический праздник» — 2011.6.3;7.3) Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

а) ничьей не будет;
б) в ворота «Юга» забьют;
в) «Север» выиграет;
г) «Север» не проиграет;
д) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что верными оказались ровно три прогноза. С каким счётом закончился матч?

Задача 5.1.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.6.3) Карлсон открыл школу, и 1 сентября во всех трёх первых классах было по три урока: Курощение, Низведение и Дуракаваляние. Один и тот же предмет в двух классах одновременно идти не может. Курощение в 1Б было первым уроком. Учитель Дуракаваляния похвалил учеников 1Б: «У вас получается ещё лучше, чем у 1А». Низведение на втором уроке было не в 1А. В каком классе валяли дурака на последнем уроке?

Задача 5.1.14. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.7.3) Четверо детей сказали друг о друге так.

Маша: Задачу решили трое: Саша, Наташа и Гриша.

Саша: Задачу не решили трое: Маша, Наташа и Гриша.

Наташа: Маша и Саша солгали.

Гриша: Маша, Саша и Наташа сказали правду.

Сколько детей на самом деле сказали правду?

Задача 5.1.15. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.7.3) В XIX и XX веках Россией правили 6 императоров из династии Романовых. Вот их имена и отчества по алфавиту: Александр Александрович, Александр Николаевич, Александр Павлович, Николай Александрович, Николай Павлович и Павел Петрович. Один раз после брата правил брат, во всех остальных случаях — после отца сын. Как известно, последнего русского императора звали Николаем. Восстановите порядок правления императоров. (К сожалению, жюри упорно делает вид, что не знает русской истории, и не верит ничему, кроме логических рассуждений.)

Задача 5.1.16. (Турнир Архимеда — 2015.3) Однажды на остров Рыцарей (которые всегда говорят правду) и Лжецов (всегда лгут), приехал путешественник. Выйдя на берег, он встретил процессию из четырёх островитян, которые несли 12 красных и 4 синих шариков (по 4 каждый). Каждый из них высказал одно утверждение. Первый сказал: «Красных шариков у меня меньше, чем синих». Второй сказал: «Синих шариков у меня не меньше, чем красных». Третий сказал: «Синих и красных шариков у меня поровну». Четвёртый сказал: «Красных у меня не более одного». Не можете ли Вы указать, сколько рыцарей могло быть среди них?

Задача 5.1.17. («Математический праздник» — 2009.7.3) У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зелёный: «Вместе у нас 27 ног», жёлтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног?

Задача 5.1.18. («Математический праздник» — 2009.6.4) Если у осьминога чётное число ног, он всегда говорит правду. Если нечётное, то он всегда лжёт. Однажды зелёный осьминог сказал тёмно–синему:

— У меня 8 ног. А у тебя только 6.

— Это у меня 8 ног, — обиделся тёмно-синий. — А у тебя всего 7.

— У тёмно–синего действительно 8 ног, — поддержал фиолетовый и похвастался: — А вот у меня целых 9!

— Ни у кого из вас не 8 ног, — вступил в разговор полосатый осьминог. — Только у меня 8 ног!

У кого из осьминогов было ровно 8 ног?

Задача 5.1.19. («Математический праздник» — 1996.6.4) Три человека A, B, C пересчитали кучу шариков четырёх цветов. При этом каждый из них правильно различал какие-то два цвета, а два других мог путать: один путал красный и оранжевый, другой — оранжевый и жёлтый, а третий — жёлтый и зелёный. Результаты их подсчётов приведены в таблице. Сколько каких шариков было на самом деле?

	красный	оранжевый	жёлтый	зелёный
A	2	5	7	9
B	2	4	9	8
C	4	2	8	9

Задача 5.1.20. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.6.4) В школе колдовства 13 учеников. Перед экзаменом по ясновидению преподаватель посадил их за круглый стол и попросил угадать, кто получит диплом ясновидящего. Про себя и двух своих соседей все скромно умолчали, а про всех остальных написали: «Никто из этих десяти не получит!» Конечно же, все сдавшие экзамен угадали, а все остальные ученики ошиблись. Сколько колдунов получили диплом?

Задача 5.1.21. («Математический праздник» — 1991.7.4) Знайка пришёл в гости к братьям-близнецам Винтику и Шпунтику, зная, что один из них никогда не говорит правду, и спросил одного из них: «Ты Винтик?». «Да», — ответил тот. Когда Знайка спросил об этом же второго, то получил столь же чёткий ответ и сразу определил, кто есть кто. Кого звали Винтиком?

Задача 5.1.22. («Математический праздник» — 1998.7.4) На острове Контрастов живут и рыцари, и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Некоторые жители заявили, что на острове чётное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечётное число лжецов. Может ли число жителей острова быть нечётным?

Задача 5.1.23. (Турнир Архимеда — 2013.4) У царя Гороха три сына: старший — Пётр, средний — Фёдор и младший — Иван–дурак. Царь хочет женить старшего сына на царевне Несмеяне. Известно, что два сына царя Гороха — рыцари (всегда говорят правду), а один — лжец (всегда врёт), но мало кто знает, кто из них кто. Царевна Несмеяна хочет выяснить, за кого (рыцаря или лжеца) ей предлагают выйти замуж. Может ли она это узнать, задав один вопрос Ивану? (Иван–дурак умеет отвечать на вопросы только «да» или «нет»; кто среди братьев рыцарь, и кто — лжец, ему известно).

Задача 5.1.24. (Турнир Архимеда — 2014.4) На конференции по математической физике за круглым столом собрались рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы — врут), причём известно, что среди физиков и математиков лжецов поровну. Каждому из участников конференции задали вопрос: «Кто ваш сосед справа: физик или математик?». Подводя итоги, председатель заметил: «Интересно, что нас здесь 34 человека, причём физиков и математиков поровну, однако каждый утверждает, что его сосед справа — математик». Определите, кем был председатель — рыцарем или лжецом?

Задача 5.1.25. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.7.4) У Буратино есть 5 монет, ровно одна из них — фальшивая. Какая именно — известно только Коту Базилио. Буратино может выбрать три монеты, одну из них отдать Коту, и за это узнать про другие две, есть ли среди них фальшивая. Буратино знает, что Кот за настоящую монету скажет правду, а за фальшивую — соврёт. Как Буратино определить фальшивую монету среди всех пяти, задав не более трёх вопросов?

Задача 5.1.26. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.7.4) Вовочка пришёл сдавать компьютерный тест. На экране появились 6 вопросов, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». После ответа на все вопросы компьютер вычисляет количество правильных ответов и ставит: двойку, если правильных ответов не более двух; тройку — если их три; четвёрку — если четыре; пятёрку — если пять или шесть.

Вовочка не знал ответа ни на один из вопросов. Тем не менее, по предыдущему опыту он знал следующее: первый и последний вопросы требуют противоположных ответов; не бывает, что на три подряд вопроса ответ один и тот же; не бывает, что утвердительные и отрицательные ответы строго чередуются; последовательность ответов на первые три вопроса не бывает в точности такой же, как последовательность ответов на последние три вопроса.

Помогите Вовочке не получить двойку.

Задача 5.1.27. («Математический праздник» — 2011.6.5) Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше — съем на обед». Как гномам заранее договориться действовать, чтобы спастись?

Задача 5.1.28. («Математический праздник» — 2002.6.5) Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алёше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотых и 3 серебряных. Каждому досталось по две монеты. Илья Муромец не знает, какие монеты достались Добрыне, а какие — Алёше, но знает, какие монеты достались ему самому. Придумайте вопрос, на который Илья Муромец ответит «да», «нет» или «не знаю», и по ответу на который Вы сможете понять, какие монеты ему достались.

Задача 5.1.29. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.6.5) На острове рыцарей и лжецов путешественник пришёл в гости к своему знакомому рыцарю и увидел его за круглым столом с пятью гостями.

— Интересно, а сколько среди вас рыцарей? — спросил он.

— А ты задай каждому какой-нибудь вопрос и узнай сам, — посоветовал один из гостей.

— Хорошо. Скажи мне каждый: кто твои соседи? — спросил путешественник.

На этот вопрос все ответили одинаково.

— Данных недостаточно! — сказал путешественник.

— Но сегодня день моего рождения, не забывай об этом, — сказал один из гостей.

— Да, сегодня день его рождения! — сказал его сосед.

И путешественник смог узнать, сколько за столом рыцарей. Действительно, сколько же их?

Задача 5.1.30. (Турнир Архимеда — 2017.5) Кощей Бессмертный испытывает Ивана–царевича. На клетчатой доске 5×9 он отметил невидимыми чернилами квадрат 2×2. Ивану разрешается, выбрав несколько клеток, спросить у Кощея, есть ли среди них хотя бы одна отмеченная, на что Кощей обязан ответить правдиво: «да» или «нет». Сможет ли Иван найти отмеченный квадрат, задав не более 5 вопросов?

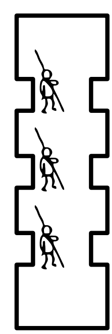
Задача 5.1.31. («Математический праздник» — 2005.6.6) В Пустоземье живут три племени: эльфы, гоблины и хоббиты. Эльф всегда говорит только правду, гоблин всегда лжёт, а хоббит через раз говорит то правду, то ложь. Однажды за круглым столом пировало несколько пустоземцев, и один из них сказал, указав на своего левого соседа: «Он — хоббит». Сосед сказал: «Мой правый сосед солгал». В точности ту же фразу затем повторил его левый сосед, потом её же произнёс следующий по кругу, и так они говорили «Мой правый сосед солгал» много-много кругов, да и сейчас ещё, возможно, говорят. Определите, из каких племён были пирующие, если известно, что за столом сидело а) девять; б) десять жителей Пустоземья. Объясните своё решение.

Задача 5.1.32. («Математический праздник» — 2007.6.6) Кощей Бессмертный похитил у царя трёх дочерей. Отправился Иван–царевич их выручать. Приходит он к Кощею, а тот ему и говорит:

«Завтра поутру увидишь пять заколдованных девушек. Три из них — царёвы дочери, а ещё две — мои. Для тебя они будут неотличимы, а сами друг дружку различать смогут. Я подойду к одной из них и стану у неё спрашивать про каждую из пятерых: „Это царевна?“ Она может отвечать и правду, и неправду, но ей дозволено назвать царевнами ровно двоих (себя тоже можно называть). Потом я так же опрошу каждую из остальных девушек, и они тоже должны будут назвать царевнами ровно двоих. Если после этого угадаешь, кто из них и вправду царевны, отпущу тебя восвояси невредимым. А если ещё и догадаешься, которая царевна старшая, которая средняя, а которая младшая, то и их забирай с собой».

Иван может передать царевнам записку, чтобы научить их, кого назвать царевнами. Может ли он независимо от ответов Кощеевых дочерей: а) вернуться живым; б) увезти царевен с собой?

Задача 5.1.33. («Математический праздник» — 2008.6.6;7.4) Василиса Премудрая решила запереть Кощея в прямом коридоре, разделённом тремя проходами на четыре комнаты, причём в каждом проходе, облокотившись на одну из стен, стоит толстый усталый стражник. Каждый раз, когда Кощей переходит из одной комнаты в другую, стражник переходит к противоположной стене и облокачивается на неё. Если все стражники облокотятся на одну стену, она не выдержит и рухнет, а Кощей выйдет на свободу.
Может ли Василиса изначально так прислонить стражников и разместить Кощея, чтобы он никогда не смог выбраться?



Задача 5.1.34. («Математический праздник» — 2012.6.6) Известно, что Шакал всегда лжёт, Лев говорит правду, Попугай просто повторяет последний услышанный ответ (а если его спросить первым, ответит как попало), а Жираф даёт честный ответ, но на предыдущий заданный ему вопрос (а на первый вопрос отвечает как попало). Мудрый Ёжик в тумане наткнулся на Шакала, Льва, Попугая и Жирафа и решил выяснить, в каком порядке они стоят. Спросив всех по очереди «Ты Шакал?», он понял только лишь, где Жираф. Спросив всех в том же порядке: «Ты Жираф?», он смог ещё понять, где Шакал, но полной ясности так и не наступило. И лишь после того как на вопрос «Ты Попугай?» первый ответил «да», Ежу, наконец, стало ясно, в каком порядке стояли животные. Так в каком же?

(«Как попало» означает, что один из ответов «да» или «нет» выбирается произвольно.)

Задача 5.1.35. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.6.6) На кружок пришли дети из двух классов: Ваня, Дима, Егор, Инна, Лёша, Саша и Таня. На вопрос: «Сколько здесь твоих одноклассников?» каждый честно ответил «Двое» или «Трое». Но мальчики думали, что спрашивают только про мальчиков–одноклассников, а девочки правильно понимали, что спрашивают про всех. Кто Саша — мальчик или девочка?

Задача 5.1.36. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.6.6) На острове Правландия все жители могут ошибаться, но младшие никогда не противоречат старшим, а когда старшие противоречат младшим, они (старшие) не ошибаются. Между жителями А, Б и В произошёл такой разговор:

А: Б — самый высокий.

Б: А — самый высокий.

В: Я выше Б.

Следует ли из этого разговора, что чем моложе человек, тем он выше (для трёх говоривших)?

Задача 5.1.37. (Турнир Архимеда — 2012.6) За круглым столом сидят 38 попугаев и Мартышка. Известно, что каждый из них либо всегда лжёт (таких будем называть «лжецами»), либо всегда говорит правду (таких будем называть «правдивыми»). Мартышка задала каждому попугаю один и тот же вопрос: «Кем является Ваш сосед справа — правдивым или лжецом?» (опрос шёл последовательно по кругу). Первые два попугая (справа от Мартышки) ответили: «мой сосед справа — лжец». Следующие два: «мой сосед справа — правдивый», следующие два: «мой сосед справа — лжец», и так далее. По окончании опроса Мартышка сказала: «Среди нас не менее 9 правдивых». Сколько правдивых было на самом деле?

Задача 5.1.38. (Турнир Архимеда — 2017.6) К остановке, где останавливаются автобусы с номерами $164, 171, 258, 285, 365, 367, 377, 577,$ подошли учитель (он знает номер нужного автобуса) и три его ученика (они его не знают). Учитель предложил поиграть.

Он сообщил каждому (по секрету от остальных) одну из цифр номера: Лене — первую цифру, Васе — вторую, Коле — третью, и попросил угадать номер нужного автобуса (дети знают, кому сообщена первая цифра номера, кому — вторая, а кому — третья). После этого между ребятами состоялся разговор:

Лена: я не знаю номера, но понимаю, что и остальные его не знают.

Вася: я не знаю номера, но Коля теперь должен его знать.

Коля: да, я знаю номер, и вы двое помогли мне его определить.

Укажите и Вы номер нужного автобуса.

Задача 5.1.39. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.6.7) Врун всегда лжёт, Хитрец говорит правду или ложь, когда захочет, а Переменчик говорит то правду, то ложь попеременно. Путешественник встретил Вруна, Хитреца и Переменчика, которые знают друг друга. Сможет ли он, задавая им вопросы, выяснить, кто есть кто?

Задача 5.1.40. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.6.9) В некотором государстве живут граждане трёх типов:

а) *дурак* считает всех дураками, а себя умным;

б) *скромный умный* про всех знает правильно, а себя считает дураком;

в) *уверенный умный* про всех знает правильно, а себя считает умным.

В думе — 200 депутатов. Премьер–министр провёл анонимный опрос думцев: сколько умных в этом зале сейчас находится? По данным анкет он не смог узнать количество умных. Но тут из поездки вернулся единственный депутат, не участвовавший в опросе. Он заполнил анкету про всю думу, включая себя, и прочитав её, премьер–министр всё понял. Сколько умных могло быть в думе (включая путешественника)?

Задача 5.1.41. («Математический праздник» — 2007.7.6) Буратино ходит по улицам города, на одном из перекрёстков которого зарыт клад. На каждом перекрёстке ему по радио сообщают, приблизился он к кладу или удалился (по сравнению с предыдущим перекрёстком). Радио либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт (но Буратино не знает, лжёт оно или нет). Сможет ли Буратино точно узнать, где закопан клад, если план города имеет вид, как на рисунке ниже. (Перекрёстки отмечены точками.)

а) б)

Задача 5.1.42. («Математический праздник» — 1999.7.6) Квадрат разбили на 100 прямоугольников девятью вертикальными и девятью горизонтальными прямыми (параллельными его сторонам). Среди этих прямоугольников оказалось ровно 9 квадратов. Докажите, что два из этих квадратов имеют одинаковый размер.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.1. В поезде, в одном купе, ехали астроном, поэт, прозаик и драматург. Их фамилии были Алексеев, Борисов, Константинов и Дмитриев. Каждый из них взял с собой книгу, написанную одним из пассажиров купе. Алексеев и Борисов поменялись книгами и углубились в чтение. Поэт читал пьесу. Прозаик, очень молодой человек, выпустивший свою первую книгу, говорил, что он никогда ничего не читает по астрономии. Борисов взял в дорогу одно из произведений Дмитриева. Никто из пассажиров не брал в дорогу и не читал книг, написанных им самим. Что читал каждый из них? Кто кем был?

Задача 5.2. Бобёр, Крокодил и Макака с острова рыцарей и лжецов встретились, и двое сказали:

Бобёр: «Мы все лжецы».

Крокодил: «Ровно один из нас рыцарь».

Кто из этих троих рыцарь и кто лжец?

2 Доказательство от противного

Материал для разбора на занятии

Название этого метода («Доказательство от противного»), в принципе, говорит само за себя. Это частный случай метода, известного как «доведение до абсурда» — «reductio ad absurdum» (лат.), или «апагогия».

Если в задаче требуется доказать некоторое утверждение A, мы будем предполагать, что оно неверное, то есть верно отрицание A. После этого каким-то образом нужно прийти к противоречию, что будет означать, что наше предположение было неверно, и задача решена.

Этот способ доказательства основывается на истинности закона двойного отрицания в классической логике. Закон двойного отрицания — положенный в основу классической логики принцип, согласно которому «если неверно, что неверно A, то A — верно». Закон двойного отрицания называется также законом снятия двойного отрицания.

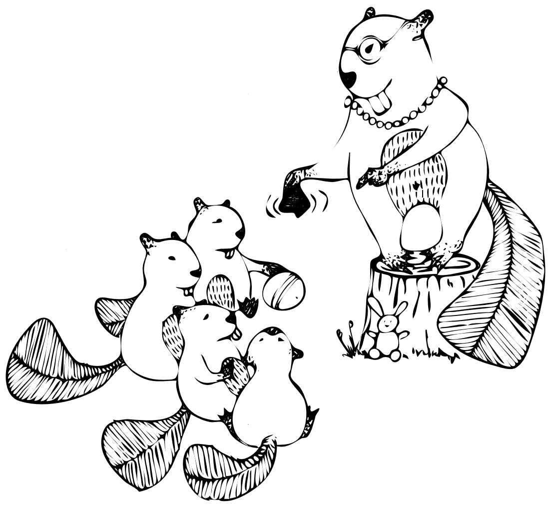
С рассуждениями, основанными на доказательстве от противного, мы часто сталкиваемся в реальной жизни. Предположим, когда-то вы не захотели пойти в школу и сказали дома, что у вас болит горло. Родители смотрят на ваше горло и говорят «если бы у тебя и правда болело горло, то оно было бы красным. Оно не красное, значит, оно и не болит.»

Как же данный принцип может помочь при решении задач по математике? На самом деле, он может быть использован почти во всех темах, но мы приведём только несколько примеров.

Классическим примером использования закона двойного отрицания является история о жестоком короле, который захотел казнить своего министра, но так, чтобы не возмутились жители королевства. Поэтому он объявил, что он король добрый и готов простить министра, точнее, довериться их древним богам. Для этого он напишет на двух одинаковых с виду кусках бумаги «смерть» и «жизнь», и министр выберет бумажку. В зависимости от того, что будет на ней написано, — и будет решена его судьба. Министр был мудрым и понял, что на обоих бумажках написано «смерть», в то же время, он выбрал одну бумагу и выжил. Как же он это сделал?

Решение следующее — министр проглотил выбранную им бумажку. Чтобы установить, какой жребий ему выпал, жители королевства заглянули в оставшуюся бумажку. На ней было написано: «смерть». Это доказывало, что ему повезло, он вытащил бумажку, на которой было написано: «жизнь».

Задача 5.2.1. Можно ли разбить 44 бобрят в детском саду на 9 групп так, чтобы количество бобрят в разных группах было различным?



Решение. Попробовав придумать пример такого разбиения, мы очень быстро придём в тупик. Таким образом, мы придём к выводу, что скорее всего так бобрят разбить на группы нельзя. Предположим противное, то есть, что такое разбиение существует. Отсортируем наши группы по числу бобрят в них по возрастанию (так как нет двух групп с одинаковым количеством бобрят). В группе с наименьшим числом бобрят их не менее 1, у второй по величине — не менее 2 и так далее. Т. е. всего мы должны отправить в садик не менее $1+2+\ldots+9=45$ бобрят, что больше, чем 44. Полученное противоречие завершает решение задачи. $\square$

Задача 5.2.2. Целочисленные точки на прямой покрашены в красный и синий цвет. Докажите, что найдётся отрезок, у которого оба конца и середина покрашены в один цвет.

Решение. Предположим противное, т. е. допустим, что такого отрезка не существует. Рассмотрим все точки с чётными координатами, кроме 0. Либо среди них есть точка того же цвета, что и 0, либо все они другого цвета, чем 0. Во втором случае сразу приходим к противоречию, рассмотрев точки $2, 4, 6$. Итак, у нас есть одноцветные точки 0 и $2x$, где $x \in \mathbb{Z}$. Тогда $-2x$, x и $4x$ должны быть другого цвета. Но ведь x является серединой отрезка с концами $-2x$ и $4x$, что приводит к противоречию. $\square$

Задача 5.2.3. За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа — мальчики.

Решение. Предположим противное, то есть, что у каждого человека за столом соседи или разнополые, или девочки, то есть, рядом с каждым человеком сидит не менее 1 девочки. Тогда рядом сидеть может не более 2 мальчиков подряд, и рядом с каждой девочкой должна сидеть как минимум одна девочка. Таким образом, если мы рассмотрим группы мальчиков и девочек, сидящих рядом, расположенных по кругу, мы получим, что в каждой группе мальчиков не более 2, а девочек — не менее 2. Так как, из-за круглости стола, количество групп мальчиков и девочек одинаково, и количество мальчиков и девочек за столом одинаково, то получим, что в каждой группе мальчиков и девочек ровно по 2 человека, но 25 не делится на 2. Полученное противоречие завершает решение задачи. □

Задача 5.2.4. Среди любых десяти из шестидесяти животных найдутся трое одного вида. Докажите, что среди всех них найдутся 15 животных одного вида.

Решение. Предположим противное, т. е. допустим, что первая часть условия выполнима, даже если представителей каждого вида не более 14. Назовём животных, которые одни представляют свой вид, одиночками, в противовес «стаям», в которых будет хотя бы по 2 животных. Поскольку первая часть условия должна быть выполнена, у нас может быть не более 4 «стай», иначе мы могли бы выбрать в качестве группы из 10 животных по 2 зверя из 5 стай. С другой же стороны, если стай будет не более 3, то одиночек будет не менее $60 - 3 \cdot 14 = 18$, и, выбрав 10 одиночек, мы сразу придём к противоречию. Значит, стай ровно 4, в таком случае одиночек не менее $60 - 4 \cdot 14 = 4$, и, выбрав по 2 животных из каждой стаи и 2 одиночек, приходим к противоречию. Противоречия, полученные во всех возможных вариантах распределения животных, завершают решение задачи. □

Задавальник

Задача 5.2.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.6.8) Можно ли 100 гирь массами

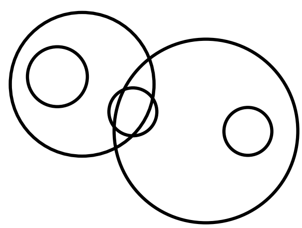
$$1, 2, 3, \ldots, 99, 100$$

разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

Задача 5.2.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.6.8) На Всемирном конгрессе мудрецов звездочёты сидят в ряд напротив алхимиков за большим длинным столом, а во главе стола сидит Самый Почтенный Мудрец. В первый день конгресса оказалось, что напротив каждого алхимика сидит звездочёт с более длинной бородой, чем у него. На второй день алхимики договорились сесть за столом в порядке возрастания длины бороды от конца стола до Самого Почтенного Мудреца. Но и звездочёты договорились между собой сесть в порядке возрастания длиннобородости от конца стола до Самого Почтенного Мудреца. Докажите, что и во второй день напротив каждого алхимика будет сидеть звездочёт с более длинной бородой, чем у него.

Задача 5.2.7. (Московская математическая олимпиада — 1977.10.4) Каждая точка числовой оси, координата которой — целое число, покрашена либо в красный, либо в синий цвет. Доказать, что найдётся цвет со следующим свойством: для каждого натурального числа k имеется бесконечно много точек этого цвета, координаты которых делятся на k.

Задача 5.2.8. (Турнир им. Ломоносова — 2014.6.3) Лесник считал сосны в лесу. Он обошёл 5 кругов, изображённых на рисунке, и внутри каждого круга насчитал ровно 3 сосны. Может ли быть, что лесник ни разу не ошибся?



Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.3. В лесу решили свергнуть монарха-льва и устроили революцию. На выборах президента леса каждый из голосующих зверей вносит в избирательный бюллетень имена 10 наиболее достойных на его взгляд кандидатов. На главной поляне леса находится 11 урн для голосования. После дня выборов выяснилось, что в каждой урне лежит хотя бы один бюллетень, и при всяком выборе 11 произвольных бюллетеней по одному из каждой урны найдётся кандидат, имя которого встречается в каждом из выбранных бюллетеней. Докажите, что по крайней мере в одной урне все бюллетени содержат имя одного и того же кандидата.

Задача 5.4. Узлы квадратной сетки покрашены в два цвета. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с одноцветными вершинами.

Задача 5.5. Десять друзей послали друг другу праздничные открытки, так что каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.

3 Принцип Дирихле

Материал для разбора на занятии

Решение задач на принцип Дирихле обычно основывается на методе «доказательство от противного».

Обычно впервые с принципом Дирихле школьники, занимающиеся олимпиадной математикой, сталкиваются в 5 классе. Звучит он следующим образом: «Если в N клетках сидит не менее $N+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов». Воспользуемся методом «от противного» — предположим, что «это не так», то есть в каждой клетке сидит **менее** двух кроликов, то есть 1 или 0. Тогда в N клетках максимально будет сидеть $N \cdot 1 = N$ кроликов, что меньше, чем $N + 1$. В большинстве англоязычной литературы этот принцип называется «pigeon principle» и формулируется для голубей.

Естественным обобщением можно считать следующее утверждение: «Если в N клетках сидит не менее $kN+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит хотя бы $k + 1$ кроликов».

В действительности вы вряд ли встретите задачу, в которой и вправду придётся рассаживать кроликов по клеткам. В каждой конкретной задаче нужно понять, что играет роль кроликов, а что — роль клеток.

Задача 5.3.1. Дано 6 целых чисел. Доказать, что среди них можно выбрать два, разность которых делится на 5.

Решение. Числа, данные в условии задачи, намекают на то, что она решается с помощью принципа Дирихле. «Кроликов» должно быть на один больше, чем «клеток», а 6 на один больше, чем 5. Следовательно «кроликами» являются сами числа. Осталось понять, каким образом выбираются «клетки». «Клеток» должно быть 5 штук, а в условии задачи идёт речь о делимости на 5. Возможных остатков при делении на 5 как раз ровно 5 штук: 0, 1, 2, 3, 4. То есть мы сажаем «кролика»-число в «клетку»-остаток при делении на 5. По принципу Дирихле какие-то два «кролика» сидят в одной «клетке» — значит, какие-то два числа имеют одинаковый остаток при делении на 5, а это значит, что их разность делится на 5. □

Задача 5.3.2. Числа от 1 до 9 разбили на три группы. Докажите, что хотя бы в одной из групп произведение чисел будет не меньше, чем 72.

Решение. Воспользуемся принципом «от противного». Пусть то, что требуется доказать, не верно. Это значит, что в каждой группе произведение будет меньше 72, что равносильно меньше или равно 71. Но 71 — число простое, то есть оно не может быть произведением указанных чисел. Отсюда следует, что произведение всех чисел меньше либо равно 70^3. С другой стороны, произведение всех чисел равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = (3 \cdot 4 \cdot 6) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (8 \cdot 9) = 72 \cdot 70 \cdot 72$, что больше, чем 70^3. Полученное противоречие завершает решение задачи. □

Задача 5.3.3. Докажите, что среди любых шести человек обязательно будут либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Решение. В данном случае «кролики» — это люди. «Клетки» — это знакомства или незнакомства. Представим 6 людей в виде точек на плоскости и будем соединять две точки красным отрезком, если соответствующие люди знакомы, иначе — синим. Задача сводится к тому, чтобы доказать существование хотя бы одного треугольника. Рассмотрим произвольную точку. Она должна быть соединена одним из отрезков с каждой из оставшихся 5 точек. По принципу Дирихле не менее, чем с тремя точками, она будет соединена отрезком одного цвета (допустим, красным). Тогда, если какие-то две точки из них соединены также красным отрезком, то мы увидим красный треугольник. В противном случае эти три точки образуют синий треугольник. □

Задача 5.3.4. Докажите, в любой компании найдутся двое с одинаковым числом знакомых из этой компании.

Решение. Снова найдём «кроликов» и «клетки». Нетрудно догадаться, что в качестве «кроликов» будут выступать люди, а в качестве «клеток» — количество их знакомств. У любого человека может быть от 0 до $n-1$ знакомых, где n — количество людей в компании. Значит клетки будут иметь номера от 0 до $n-1$. Казалось бы — и «клеток», и «кроликов» — поровну, так что же, принцип Дирихле тут не работает? Работает, но с небольшой модификацией. Заметим, что в клетках 0 и $n-1$ не могут одновременно сидеть кролики. Действительно, тогда будет человек, который не знаком ни с кем, и человек, который знаком со всеми, чего не может быть. Следовательно, непустых клеток, оказывается, у нас $N-1$. То есть, принцип Дирихле в данной задаче всё же сработал.

Полученное противоречие завершает решение задачи. □

Задавальник

Задача 5.3.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.7.2) На кружок пришли четыре мальчика из 7А и четыре

— из 7Б: три Лёши, три Вани и два Артёма. Могло ли оказаться так, что у каждого из них есть хотя бы один тёзка–одноклассник, пришедший на кружок?

Задача 5.3.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.7.3) Убирая детскую комнату к приходу гостей, мама нашла 9 носков. Среди любых четырёх носков хотя бы два принадлежали одному ребёнку, а среди любых пяти носков не более трёх имели одного хозяина. Сколько могло быть детей и сколько носков могло принадлежать каждому ребёнку?

Задача 5.3.7. («Математический праздник» — 1994.6.7) Среди любых десяти из шестидесяти школьников найдётся три одноклассника. Обязательно ли среди всех шестидесяти школьников найдётся: а) 15; б) 16 одноклассников?

Задача 5.3.8. («Математический праздник» — 1994.7.6) В одной из школ 20 раз проводился кружок по астрономии. На каждом занятии присутствовало ровно пять школьников, причём никакие два школьника не встречались на кружке более одного раза. Докажите, что всего на кружке побывало не менее 20 школьников.

Задача 5.3.9. (Тургор. Осенний тур. Основной вариант — 1988/1989.7.3) Докажите, что из любых семи натуральных чисел (не обязательно идущих подряд) можно выбрать три числа, сумма которых делится на три.

Задача 5.3.10. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2009.7.3) В классе 25 учеников. Известно, что у любых двух девочек класса количество друзей–мальчиков из этого класса не совпадает. Какое наибольшее количество девочек может быть в этом классе?

Задача 5.3.11. (Турнир им. Ломоносова — 2007.7.2) У Пети в кармане несколько монет. Если Петя наугад вытащит из кармана 3 монеты, среди них обязательно найдётся монета «1 рубль». Если Петя наугад вытащит 4 монеты из кармана, среди них обязательно найдётся монета «2 рубля». Петя вытащил из кармана 5 монет. Назовите эти монеты.

Задача 5.3.12. (Турнир им. Ломоносова — 1985.7.6) Дано 25 чисел. Сумма любых четырёх из них положительна. Докажите, что сумма их всех тоже положительна.

Задача 5.3.13. (Турнир им. Ломоносова — 1985.7.8) В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

Задача 5.3.14. (Белорусская республиканская математическая олимпиада — 1966.8.5) Тридцать команд участвуют в розыгрыше первенства по футболу. Доказать, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.6. Докажите, что правильный треугольник нельзя полностью накрыть двумя правильными треугольниками с меньшими площадями.

Задача 5.7. В таблице 8×8 расставлены целые числа, причём любые два числа в соседних по сторонам клетках отличаются не более, чем на 4. Докажите, что среди этих чисел есть 2 равных.

Задача 5.8. На шахматной доске более четверти полей занято шахматными фигурами. Докажите, что занятыми оказались хотя бы две соседние (по стороне или углу) клетки.

4 Математические игры

Материал для разбора на занятии

Задачу на игру определить очень просто: обычно в условии задачи это явно указано. Игроков в игре обычно двое. Под ходом подразумеваются некие действия, разрешённые правилами игры, причём, как правило, выполнение хода является обязательным. Ходы выполняются по очереди. За редчайшими исключениями, в какой-то момент игра заканчивается — по прошествии определенного, заранее известного, числа ходов или же в связи с тем, что наступило некоторое положение в игре. После чего определяется результат игры: победа одного из игроков или ничья. Впрочем, ничья в играх, которые могут встретиться в задаче математической олимпиады, встречается не так уж и часто. Вопрос в таких задачах формулируется обычно следующим образом: каков будет результат при правильной игре обеих сторон? Говорят, что игрок A выигрывает при правильной игре обеих сторон, или форсированно выигрывает, в случае, если существует некоторая стратегия, позволяющая ему совершать свои ходы, конечно, в зависимости от ходов соперника, таким образом, чтобы результатом игры в любом случае была победа игрока A. Легко понять, что в таком случае у игрока B стратегии, позволяющей ему гарантированно не проиграть, не существует. Говорят, что при правильной игре обеих сторон партия завершается ничьей, если у каждого из игроков существует стратегия, при которой в любом случае результатом игры будет ничья или его победа.

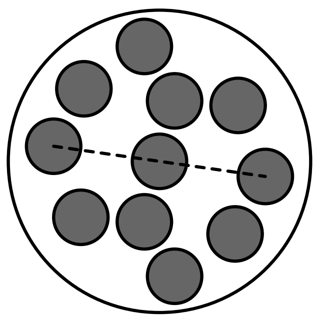
При игре или при попытке оформить решение часто применяется такое понятие, как «лучший» ход. Но существует следующая проблема: в большинстве игр практически невозможно чётко определить, что значит этот самый «лучший» ход, не проанализировав позицию до самого конца. Например, в шахматах есть такое понятие как «жертва фигуры», которая, на первый взгляд, может показаться «плохим» ходом, так как теряется материал. Но в перспективе этот ход может оказаться довольно «хорошим», так как он через несколько ходов приведёт к позиции с более высокой оценкой.

Таким образом, по сделанному ходу часто нельзя сразу же определить, является ли он «лучшим». Поэтому это понятие можно применять только в играх, в которых мы можем рассчитать ходы противников до самого конца, а в остальных случаях следует всячески избегать этого скользкого понятия.

Самой распространённой в олимпиадах не самого высокого уровня является **симметричная стратегия** и её разновидности. В этом случае игрок с выигрышной стратегией придерживается некоторой симметрии: на каждый ход соперника он отвечает симметричным ходом.

Задача 5.4.1. Пусть есть круглый стол и неограниченное количество одинаковых круглых монет. Двое по очереди кладут монеты на стол, при этом нельзя класть их друг на друга. Проигрывает тот, которому некуда положить монету. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Приведём выигрышную стратегию для первого игрока, то есть мы будем руководить его ходами. Первым ходом положим монету в самый центр стола. На любой ход второго игрока будем ходить центральносимметрично, то есть симметрично относительно центра данного стола (на рисунке ниже).



Докажем, что такая стратегия будет работать: для этого достаточно показать, что первый игрок всегда сможет сделать ход. В силу стратегии, после хода первого игрока расположение монет на столе всегда будет оставаться центральносимметричным. Это значит, что если второй игрок кладёт куда-нибудь на стол монету, то центральносимметричное место остаётся свободным — именно на это место мы и положим монету. □

Приведём пример другой задачи, где симметрия выражена менее ярко.

Задача 5.4.2. Пусть дано две кучки, в каждой из которых лежит по 20 камней. За один ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Докажем, что у второго игрока есть выигрышная стратегия, то есть будем руководить его ходами. На любой ход первого игрока мы будем брать такое же количество камней из другой кучки. Тогда после любого хода второго игрока камней в обеих кучках будет поровну. Это означает, что после любого хода первого игрока количество камней в кучках различное, и второй сможет сделать свой ход.

Несложно увидеть решение в данной задаче при неравном числе камней в кучах — в этом случае выигрывает первый игрок, который своим первым ходом уравнивает число камней, сводя задачу к предыдущей.

Как можно заметить, симметрия в приведённой выше задаче уже не геометрическая: симметрия заключалась в равенстве кучек. □

Говоря выше о том, что каждый из игроков делает «лучший» ход или придерживается «правильной» стратегии, отметим, что в последнем случае единственным правильным ходом для первого игрока является именно уравнивание числа камней в кучах, в то время как все остальные явились бы неправильными. Конечно, можно привести довод «а если другой игрок ошибётся, я же все равно могу выиграть, даже сыграв неправильно», и даже подкрепить его конкретным примером — матчем за звание чемпиона мира по шахматам 2006 года между Крамником и Топаловым, когда оба игрока допустили по ошибке, просмотрев мат. Но к математике это не будет иметь отношения — в математической модели, описывающей игру, нет места ошибке и эмоциональному фактору, присущим шахматам.

Задавальник

Задача 5.4.3. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.7.2) Аня и Катя играют в игру «Быки и коровы». Аня загадала четырёхзначное число с неповторяющимися цифрами, а Катя пытается это число угадать. Для этого она предлагает свои четырёхзначные числа (тоже с неповторяющимися цифрами), а Аня про каждое из них сообщает, сколько в нём «быков» (т. е. цифр, которые не только присутствуют и в Катином числе, и в Анином, но даже стоят на одних и тех же местах) и «коров» (цифр, которые присутствуют в обоих числах, но стоят на разных местах). Катя предложила числа $5860, 1674, 9432$ и 3017 и на каждое число получила ответ «2 коровы». Какое число загадала Аня?

Задача 5.4.4. (Турнир Архимеда — 2014.3) Маша и Катя играют в такую игру: по очереди обрывают лепестки у ромашки с 64 лепестками. За один ход разрешается сорвать любое нечётное количество лепестков, меньшее 16, причём запрещается повторять уже сделанные ходы. (*Например, если Катя при своём ходе сорвёт* 3 *лепестка, то в дальнейшем ни Маша, ни Катя сорвать* 3 *лепестка не имеют права.*) Выигрывает тот, кто сорвёт последний лепесток. Начинает Маша. Кто из них выиграет, как бы ни играл соперник?

Задача 5.4.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.6.4) Вася и Митя играют в «морской бой» на поле размером 8×8 по следующим правилам. Митя расставляет 16 одноклеточных кораблей так, чтобы они не соприкасались (даже углами). Каждым ходом Вася называет одну из клеток поля и, если на этой клетке стоит корабль, то корабль считается уничтоженным. Докажите, что независимо от расстановки кораблей Вася за 4 хода сможет уничтожить хотя бы один корабль.

Задача 5.4.6. (*Симметричная стратегия*) Кто из игроков выигрывает при правильной игре в следующих ситуациях?

1. На столе лежат две стопки монет: в одной из них 30 монет, а в другой — 20. За ход разрешается взять любое количество монет из одной стопки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.
2. На доске написано число 1. Двое по очереди прибавляют любое число от 1 до 5 к числу на доске и записывают вместо него сумму. Выигрывает тот, кто первый запишет на доске число 30.
3. Двое по очереди ставят ладьи на шахматную доску на свободные от уже поставленных ладей клетки. Выигрывает тот, при ходе которого все клетки доски оказываются битыми поставленными фигурами.

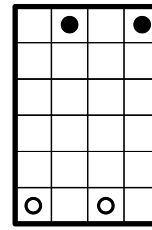
Задача 5.4.7. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.6.7) Придя в школу, Коля и Алиса обнаружили на доске надпись

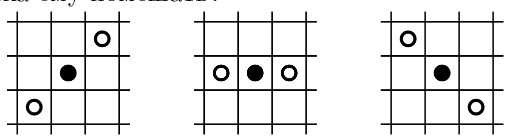
ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА.

Они договорились сыграть в следующую игру: за один ход в этой надписи разрешается стереть произвольное количество одинаковых букв, а выигрывает тот, кто стирает последнюю букву. Первым ходил Коля и стёр последнюю букву **А**. Как надо играть Алисе, чтобы обеспечить себе выигрыш?

Задача 5.4.8. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.6.7) Два пирата, Билл и Джон, имея каждый по 74 золотые монеты, решили сыграть в такую игру: они по очереди будут выкладывать на стол монеты, за один ход — одну, две или три, а выиграет тот, кто положит на стол сотую по счёту монету. Начинает Билл. Кто может выиграть в такой игре, независимо от того, как будет действовать соперник?

Задача 5.4.9. («Математический праздник» — 1994.7.5) На доске 4×6 клеток стоят две чёрные фишки (Вани) и две белые фишки (Серёжи, см. рисунок). Ваня и Серёжа по очереди двигают любую из своих фишек на одну клетку вперёд (по вертикали). Начинает Ваня. Если после хода любого из ребят чёрная фишка окажется между двумя белыми по горизонтали или по диагонали (как на нижних рисунках), она считается «убитой» и снимается с доски. Ваня хочет провести обе свои фишки с верхней горизонтали доски на нижнюю. Может ли Серёжа ему помешать?





Задача 5.4.10. (Турнир Архимеда — 2013.6) Вася и Коля играют в игру: закрашивают клетки квадратной доски 4×4. Первым ходит Вася, затем Коля, затем снова Вася и так далее, до тех пор, пока не окажется окрашенным какой-нибудь квадрат 2×2. Кто закрасил последнюю клетку в таком квадрате, тот и проиграл. Кто из мальчиков сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

Задача 5.4.11. («Математический праздник» — 2014.7.6) На доске записаны два числа: 2014 и 2015. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно либо:

- уменьшить одно из чисел на его ненулевую цифру или на ненулевую цифру другого числа;
- разделить одно из чисел пополам, если оно чётное.

Выигрывает тот, кто первым напишет однозначное число. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

Задача 5.4.12. (Турнир Архимеда — 2015.6) Иван–Царевич и Кощей нашли кошелёк с 12 монетами номиналом $1, 2, 3, 4, \ldots, 12$ тугриков. Они решили разделить найденные деньги по следующим правилам.

1. Кощей достаёт из кошелька две монеты (какие пожелает) и показывает их Ивану–Царевичу.
2. Иван решает, сколько и каких монет отдать Кощею (одну, две или ни одной). Все монеты, не доставшиеся Кощею, возвращают в кошелёк.

Если сумма в кошельке не кратна 3, то делёж заканчивается, и Иван забирает все монеты, которые остались в кошельке. Если сумма кратна 3, то процесс повторяется.

а) Может ли Иван действовать так, чтобы наверняка получить больше денег, чем Кощей?

б) На какую наибольшую сумму он может рассчитывать независимо от игры Кощея?

Задача 5.4.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.7.6) Петя и Вася играют на доске размером 7×7. Они по очереди ставят в клетки доски цифры от 1 до 7 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не оказалось одинаковых цифр. Первым ходит Петя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

Задача 5.4.14. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.7.6) Людоедом называется фантастическая шахматная фигура, которая может ходить как шахматный король — на соседнюю клетку по вертикали или горизонтали, но не может ходить по диагонали. Два людоеда стоят на противоположных угловых полях шахматной доски и начинают ходить по очереди. Людоеду, вставшему на клетку, где уже стоит другой людоед, разрешается им пообедать. Кто кого съест при правильной игре и как ему надо для этого играть?

Задача 5.4.15. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2003.7.6) Двое играют в крестики–нолики на бесконечном листе клетчатой бумаги. Побеждает тот, кто первым сумеет поставить пять одинаковых значков подряд (по горизонтали или вертикали). Докажите, что второй может играть так, чтобы не проиграть.

Задача 5.4.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.7.7) Буратино выложил на стол 2016 спичек и предложил Арлекину и Пьеро сыграть в игру, беря по очереди спички со стола: Арлекин может своим ходом брать либо 5 спичек, либо 26, а Пьеро — либо 9, либо 23. Не дождавшись начала игры, Буратино ушёл, а когда он вернулся, партия уже закончилась. На столе осталось две спички, а проиграл тот, кто не смог сделать очередной ход. Хорошенько подумав, Буратино понял, кто ходил первым, и кто выиграл. Выясните это и вы!

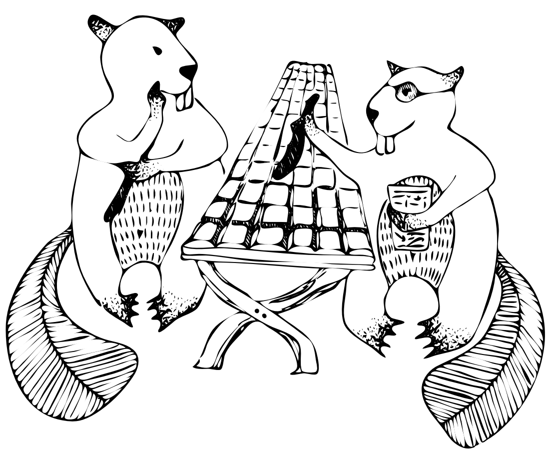
Задача 5.4.17. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.7.7) Почтальон Печкин не хотел отдавать посылку. Тогда Матроскин предложил ему сыграть в следующую игру: каждым ходом Печкин пишет в строку слева направо буквы, произвольно чередуя **М** и **П**, пока в строке не будет всего 11 букв. Матроскин после каждого его хода, если хочет, меняет местами любые две буквы. Если в итоге окажется, что записанное «слово» является палиндромом (то есть одинаково читается слева направо и справа налево), то Печкин отдаёт посылку. Сможет ли Матроскин играть так, чтобы обязательно получить посылку?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.9. На доске размером 8×8 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы не появлялось закрашенных уголков из трёх клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 5.10. (Кружок малого мехмата — 2012/2013.Игры.5) Двое играют в следующую игру. Каждый игрок по очереди вычеркивает 9 чисел (по своему выбору) из последовательности $1, 2, \ldots, 100, 101$. После одиннадцати таких вычеркиваний останутся 2 числа. Первому игроку присуждается столько очков, какова разница между этими оставшимися числами. Доказать, что первый игрок всегда сможет набрать по крайней мере 55 очков, как бы ни играл второй.

Задача 5.11. Дана плитка шоколада размером 6 на 12 долек. Бобры Шломо и Василий решили сыграть в следующую игру: можно взять любой прямоугольный кусок и разломать его по линии раздела долек на два меньших прямоугольных куска. Полученные куски есть нельзя! Проигрывает тот, кто не может сделать ход, а выигравший в данной игре получит весь шоколад. Бобры очень любят 99-процентный шоколад и очень хотят выиграть. Кто выигрывает при правильной игре, если Василий уступил право первого хода Шломо?



5 Принцип крайнего

Материал для разбора на занятии

Название принципа «крайнего» говорит само за себя — для решения задачи нужно найти и рассмотреть некоторый «крайний» объект. Что значит «крайний»? Этот термин может немного сбивать с толку, особенно если это — задача на числа, а не геометрическая задача. «Крайний» — это обычно наибольшее или наименьшее число, выражающее какое-то свойство, присутствующее в задаче. Это может быть, например, наибольшее расстояние между точками, если дано множество точек; наименьшая из площадей треугольников, наименьший угол и тому подобное.

Задача 5.5.1. Имеется 11 гирек весом в $1, 2, \ldots, 11$ граммов. Пять из них — бронзовые, пять — серебряные и одна золотая. Все бронзовые вместе весят меньше, чем все серебряные, на 30 граммов. Сколько весит золотая гирька?

Решение. Разность в весе пяти самых тяжёлых гирек $(11+10+9+8+7 = 45)$ и пяти самых лёгких $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15)$ как раз равна 30 граммам, значит, разница в 30 граммов может быть достигнута единственным образом, а, значит, золотая гирька — оставшаяся, шестиграммовая. □

Задача 5.5.2. На бесконечной шахматной доске очень странный старец Радагаст решил расположить числа, причём таким образом, что каждое является средним арифметическим соседних по сторонам клетки четырёх чисел. Докажите, что все числа равны между собой.

Решение. В данном случае имеем совмещение принципа крайнего и числовых неравенств. Рассмотрим самое большое из записанных Радагастом чисел s (если их несколько — возьмём любое из них). Пусть оно граничит по сторонам клеток с числами a, b, c, d, причём $s \geqslant a$, $s \geqslant b$, $s \geqslant c$, $s \geqslant d$. Но по условию

$$s = \frac{a+b+c+d}{4} \Rightarrow 4s = a+b+c+d.$$

Если хотя бы одно из неравенств выше было бы строгим, то Радагаст получил бы $4s > a + b + c + d$, что противоречит условию. Отсюда имеем $s = a = b = c = d$. Аналогично рассуждая, приходим к тому, что все числа у Радагаста — одинаковые. □

Задача 5.5.3. Доказать, что при любом натуральном n число

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

не является целым.

Решение. Данная задача кажется задачей на теорию чисел, что является правдой. Её можно отнести к подразделу «принцип крайнего в теории чисел». Выберем среди чисел от 1 до n наибольшую степень двойки, пусть это 2^k. Тогда среди оставшихся чисел больше нет делящихся на 2^k — следующее число, делящееся на 2^k это 2^{k+1}, и оно уже больше n, так как мы рассматривали наибольшую степень двойки. Значит, все оставшиеся числа от 1 до n делятся максимум на $k-1$ степень двойки.

Приведём числа к общему знаменателю — наименьшему общему кратному чисел от 1 до n. Тогда знаменатель получившейся дроби будет числом вида $x \cdot 2^k$, где x — нечётное число. В числителе будет сумма $n-1$ чётного числа и нечётного числа x, которое даёт слагаемое $\frac{1}{2^k}$, значит, числитель будет нечётным. Но нечётное число не может делиться на чётное, поэтому дробь не может оказаться целым числом.

Как в этой задаче догадаться, что рассматривать нужно наибольшую степень двойки? В задаче идёт речь о делимости, и приведение к общему знаменателю является разумным ходом. Посмотрев частные случаи для небольших n, можно увидеть, что в числителе получаются все чётные слагаемые, кроме одного — того, которое получилось из степени двойки. □

Задача 5.5.4. (Объединённая межвузовская математическая олимпиада школьников — 2015-2016, задача 9) Федерация спортивной борьбы присвоила каждому участнику соревнования квалификационный номер. Известно, что во встречах борцов, квалификационные номера которых отличаются более, чем на 2 номера, всегда побеждает борец с меньшим номером. Турнир для 256 борцов проводится по олимпийской системе: в начале каждого дня бойцы разбиваются на пары, проигравший выбывает из соревнований (ничьих не бывает). Какой наибольший квалификационный номер может иметь победитель?

Решение. Заметим, что борец с номером k может проиграть только борцу с номером не больше, чем $k+2$, поэтому после каждого тура наименьший номер не может увеличиться больше, чем на 2 номера. На турнире с 256 участниками 8 туров ($256 = 2^8$), а после каждого тура количество участников уменьшается в два раза), следовательно, номер победителя турнира не превосходит $1 + 2 \cdot 8 = 17$.

Предположим, что борец с номером 17 может победить. Тогда в первом туре должны выбыть борцы с номерами 1 и 2. Это возможно только если борец с номером 1 проиграл борцу с номером 3, а борец с номером 2 проиграл борцу с номером 4. Значит, после первого тура борцы с номерами 3 и 4 останутся. Аналогично, после второго тура останутся борцы с номерами 5 и 6, после третьего — 7 и 8, ..., после седьмого — 15 и 16. Значит в последнем, финальном, бою встретятся борцы с номерами 15 и 16. Противоречие с предположением, что борец с номером 17 может победить. Отсюда же мы видим, что борец под номером 16 в финальном бое победить может. □

Задача 5.5.5. Докажите, что существует 100 подряд идущих чисел, среди которых ровно 7 простых.

Решение. Нетрудно понять, что среди первых 100 натуральных чисел есть больше 7 простых.

Легко привести пример из любого наперёд заданного числа идущих подряд составных чисел. Например, вот 100 подряд идущих составных чисел: $101! + 2$, $101! + 3, \ldots, 101! + 101$. Первое из них делится на 2, второе на 3, ..., последнее — на 101.

Будем «двигать» ряд из 100 чисел вправо по числовой оси: при этом одно число уберётся слева, и одно добавится справа. При таком процессе количество составных чисел может измениться максимум на 1. Вначале простых чисел было больше 7, а в конце их стало 0. Значит, в силу дискретной непрерывности, существует некоторый момент времени, в который простых чисел ровно 7, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим применение данного метода в задачах, связанных с геометрическими фигурами.

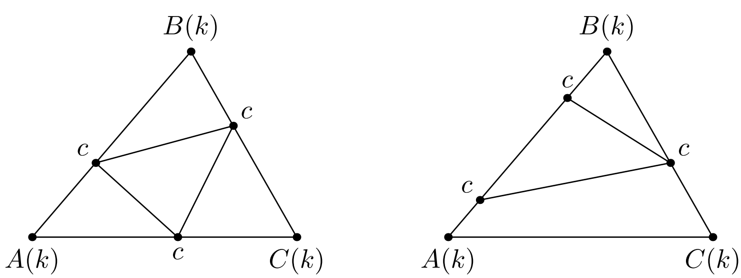
Задача 5.5.6. (Розенталь А. Л. Правило крайнего//Квант, №9 (1988)) На прямой задано множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего две другие точки из М. Докажите, что множество М бесконечно.

Решение. **Первый способ.** В данной задаче помимо приведённого выше принципа крайнего понадобится метод от противного. Предположим, что множество M конечно. Тогда на прямой можно выделить крайние точки. Однако они не могут лежать посередине какого-либо отрезка. Данное противоречие подтверждает справедливость доказываемого суждения.

Второй способ. Рассмотрим все длины отрезков между точками из M. Выберем отрезок AB наибольшей длины. Очевидно, что вне отрезка AB больше нет точек. Но тогда ни A, ни B не могут быть серединами каких-либо отрезков. Противоречие. □

Задача 5.5.7. (сайт problems.ru, задача 35135) На плоскости синим и красным цветом окрашено несколько точек так, что никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой (точек каждого цвета не меньше трёх). Докажите, что какие-то три точки одного цвета образуют треугольник, на трёх сторонах которого лежит не более двух точек другого цвета.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC наименьшей площади, у которого все вершины одного цвета — не умаляя общности можно считать, что они красные. Докажем, что такой треугольник является искомым. Предположим противное: тогда на его сторонах лежат хотя бы 3 синих точки. Возможны два случая: каждая синяя точка лежит на своей стороне или на одной стороне лежат две синие точки и ещё одна — на другой стороне. В обоих случаях (на рисунке ниже) площадь треугольника с вершинами в синих точках будет меньше площади треугольника ABC, чего не может быть: треугольник ABC имеет наименьшую площадь среди одноцветных треугольников. Полученное противоречие завершает доказательство задачи.



□

Приведём напоследок задачу, которая предназначена для школьников старше седьмого класса.

Задача 5.5.8. Хоббиты Шира очень любят ходить друг к другу в гости, но не любят, когда кто-то чужой ходит по их огороду. Для этого земля в Шире поделена таким образом, что каждые два участка соприкасаются друг с другом (как минимум, в одной точке). Бильбо решил найти такой прямолинейный маршрут, который проходил бы через все владения (т. е. имел бы со всеми огородами хотя бы одну общую точку). Сможет ли он это сделать? (Огород хоббита имеет форму не обязательно выпуклого многоугольника, причём можно считать, что все огороды расположены в одной плоскости.)

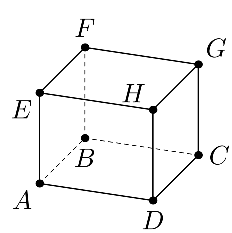
Решение. Рассмотрим прямолинейную дорогу, проходящую в Шире, спроецируем на неё все огороды-многоугольники и зададим на ней направление лево-право. На дороге получим несколько отрезков, любые два из которых имеют общую точку. Из левых концов этих отрезков возьмём самый правый. Полученная таким образом точка принадлежит всем отрезкам, поэтому искомый Бильбо путь — это проведённый через неё перпендикуляр к дороге, и он пройдёт через все данные огороды-многоугольники. □

Задавальник

Задача 5.5.9. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.6.3) Давным–давно страной Тарнией правил царь Ятианр. Чтобы тарнийцы поменьше рассуждали, он придумал для них простой язык. Его алфавит состоял всего из шести букв: **А**, **И**, **Н**, **Р**, **Т**, **Я**, но порядок их отличался от принятого в русском языке. Словами этого языка были все последовательности, использующие каждую из этих букв по одному разу.

Ятианр издал полный словарь нового языка. В соответствии с алфавитом первым словом словаря оказалось «Тарния». Какое слово следовало в словаре за именем Ятианр?

Задача 5.5.10. («Математический праздник» — 2000.7.5) В вершинах куба $ABCDEFGH$ расставлены натуральные числа так, что числа в соседних (по ребру) вершинах отличаются не более чем на единицу. Докажите, что обязательно найдутся две диаметрально противоположные вершины, числа в которых отличаются не более чем на единицу. (Пары диаметрально противоположных вершин куба: A и G, B и H, C и E, D и F.)



Задача 5.5.11. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.7.7) Артём коллекционирует монеты. В его коллекции 27 монет, причём все они имеют различный диаметр, различную массу и были выпущены в разные годы. Каждая монета хранится в отдельном спичечном коробке. Может ли Артём сложить из этих коробков параллелепипед $3 \times 3 \times 3$ так, чтобы любая монета была легче монеты, находящейся под ней, меньше монеты справа от неё и древнее той, которая находится перед ней?

Задача 5.5.12. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.6.9) В классе 27 учеников. Каждый из них занимается не более чем в двух кружках, причём для любых двух учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдётся кружок, в котором занимаются не менее 18 учеников.

Задача 5.5.13. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.7.9) Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причём для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдётся кружок, в котором занимается не менее двух третей всего класса.

Задача 5.5.14. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2011.7.9) Компьютеры №1, №2, №3, ..., №100 соединены в кольцо (первый со вторым, второй с третьим, ..., сотый с первым). Хакеры подготовили 100 вирусов, занумеровали их, и в различное время в произвольном порядке запускают каждый вирус на компьютер, имеющий тот же номер. Если вирус попадает на незаражённый компьютер, то он заражает его и переходит на следующий в цепи компьютер с бо́льшим номером до тех пор, пока не попадёт на уже заражённый компьютер (с компьютера №100 вирус переходит на компьютер №1). Тогда вирус погибает, а этот компьютер восстанавливается. Ни на один компьютер два вируса одновременно не попадают. Сколько компьютеров будет заражено после того как все 100 вирусов совершат атаку?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.12. (Н. Х. Агаханов) Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строку, но нельзя записать по кругу так, чтобы сумма каждых двух соседних чисел была квадратом натурального числа.

Задача 5.13. На выставке встретились художники, часть которых лично знакома друг с другом. Выяснилось, что любые два из них, имеющие равное число знакомых, не имеют общих знакомых. Доказать, что найдётся художник, знакомый ровно с одним из посетителей выставки.

Задача 5.14. (А. Я. Розенталь) На плоскости задано множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего две другие точки из M. Докажите, что множество M бесконечно.

Задача 5.15. Может ли очень странный старец Радагаст нарисовать на листе бумаги 2018 отрезков так, чтобы концы каждого отрезка лежали внутри каких-то двух других отрезков? (Граничные точки отрезка не являются внутренними.)

Задача 5.16. Четыре шахматиста из Бобряндии и 7 иностранных шахматистов играли в круговом турнире, где каждый играл с каждым по две партии. Победитель партии получал одно очко, проигравший — ноль, а за ничью давались пол-очка каждому. Все участники набрали различное количество очков, причём сумма всех очков Бобряндских шахматистов оказалась равна сумме всех очков иностранных шахматистов. Докажите, что в тройке призёров был хотя бы один Бобряндец.

6 Полный перебор

Материал для разбора на занятии

Сколькими способами можно выбрать три яблока из корзины? Сколько имеется вариантов школьного расписания? Такого рода вопросами занимается комбинаторика, которую мы подробнее пройдём в седьмой главе. В комбинаторных задачах нас обычно интересует, сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из заданного конечного набора объектов.

В простейших случаях мы можем просто выписать все нужные нам комбинации и подсчитать их. Однако выписывание ни в коем случае не должно быть бессистемным! Примеры правильного перебора — выписывание чисел по возрастанию или слов в алфавитном порядке; при таком переборе ни один вариант не ускользнёт от нас и, с другой стороны, будет исключена возможность повторения вариантов. Важно: если вы решаете комбинаторную задачу и пытаетесь определить, например, количество способов расставить детей в классе в шеренгу перебором, то, даже если вы упустите ровно один случай из миллиона, вы получите за всю задачу 0 баллов. Поэтому никогда не пытайтесь перебирать варианты, если вы уже попробовали данный метод и убедились, что вариантов будет больше, чем, к примеру, уместится на одну страницу.

Задача 5.6.1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр $1, 2, 3$?

Решение. Выписываем числа в порядке возрастания:

$$11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.$$

Всего получилось 9 чисел. □

Задача 5.6.2. К завтрашнему дню нужно сделать математику, русский и географию (в какой последовательности — безразлично). Сколькими способами можно приготовить на завтра уроки?

Решение. Закодируем наши предметы буквами: **М** — математика, **Р** — русский, **Г** — география. Тогда, например, **МРГ** — это вариант, когда мы сначала делаем математику, потом — русский, потом — географию. Выпишем варианты в алфавитном порядке: **ГМР**, **ГРМ**, **МГР**, **МРГ**, **РГМ**, **РМГ**. Получилось 6 вариантов. Итак, уроки на завтра можно сделать шестью способами. □

Задача 5.6.3. Сколькими способами можно выложить в ряд два красных и два синих шарика? Шарики не отличаются ничем, кроме цвета.

Решение. Будем обозначать красный шарик буквою **К**, а синий — **С**. Выпишем варианты в алфавитном порядке: **ККСС**, **КСКС**, **КССК**, **СККС**, **СКСК**, **ССКК**. Итого 6 вариантов. □

Задача 5.6.4. В магазине продаётся белая, чёрная и зелёная ткань. Нужно купить ткань двух различных цветов. Из какого числа вариантов приходится выбирать?

Решение. Всего 3 варианта: белая и чёрная, белая и зелёная, чёрная и зелёная. □

Задача 5.6.5. Задача Леонарда Эйлера (или задача о беспорядках, хорошо известная в комбинаторике, которая будет представлена в последней главе). Четверо господ при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Сколько существует вариантов, при которых каждый из них получит чужую шляпу?

Решение. Пронумеруем наших господ от 1 до 4. Комбинацию выбора шляп будем обозначать следующим образом: цифра будет обозначать принадлежность взятой шляпы, а её порядковый номер — человека, её взявшего. Выпишем все возможные варианты в порядке возрастания чисел:

$$2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321.$$

Итого — 9 вариантов. □

Задача 5.6.6. Сколькими способами можно расставить три разных цветка в две вазы?

Решение. Обозначим наши цветки за 1, 2 и 3. Слева от запятой будет одна ваза, справа другая:

$$\text{ничего},\ 123; 1, 23; 2, 13; 3, 12; 12, 3; 13, 2; 23, 1; 123,\ \text{ничего}.$$

Итого — 8 вариантов. □

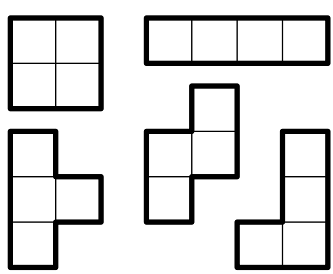
Переборные методы могут быть использованы не только в комбинаторике, например, ранее в данном разделе при решении задач на логику мы иногда разбивали путь решения на 2 или несколько ветвей — это тоже можно называть полным перебором, если вы рассмотрели все возможные ветви. Например, так: рассмотрим Васю. Вася может быть лжецом, хитрецом или рыцарем, разобьём дальнейшее решение на 3 возможных случая. Если какую-то из ветвей вы указали, но не рассмотрели целиком, решение перестаёт быть полным и может быть оценено, опять же, только нулём баллов.

Также, к примеру, методы полного перебора активно используются в информатике и смежных науках. Например, шифр считается криптостойким, если не существует метода «взлома» существенно более быстрого, чем полный перебор всех ключей шифрования. Также в современной математике и информатике до сих пор существует большой класс задач, которые невозможно решить существенно быстрее, чем методами полного перебора.

Полный перебор может вам встретиться и в задачах на так называемую комбинаторную геометрию.

Задача 5.6.7. Тетрамино — это связная фигура, состоящая из 4 клеток, вырезанная из клетчатого листа бумаги по линиям сетки. Фигуры, совмещаемые при помощи поворота и зеркального отражения, считаются равными. Сколько существует различных тетрамино?

Решение. Все возможные тетрамино указаны на рисунке. Их 5 штук.



□

Задавальник

Задача 5.6.8. («Математический праздник» — 2004.6.1) Кузнечик прыгает вдоль прямой вперёд на 80 см или назад на 50 см. Может ли он менее чем за 7 прыжков удалиться от начальной точки ровно на 1 м 70 см?

Задача 5.6.9. («Математический праздник» — 2003.6.6) На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 12, во второй —

15. Какое число написано на грани, противоположной той, где написана цифра 3?

Задача 5.6.10. («Математический праздник» — 2002.6.6) Айрат выписал подряд все числа месяца:

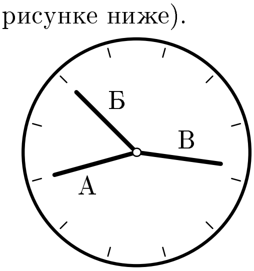
$$123456789101112\ldots$$

и покрасил три дня (дни рождения своих друзей), никакие два из которых не идут подряд. Оказалось, что все непокрашенные участки состоят из одинакового количества цифр. Докажите, что первое число месяца покрашено.

Задача 5.6.11. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.6.7) По дороге на новогодний праздник несколько мальчиков помогали Деду Морозу нести подарки. Каждый из мальчиков нёс по три подарка, а остальные 142 подарка Дед Мороз вёз на санях. Все подарки Дед Мороз разделил поровну между всеми этими мальчиками и 14 девочками. Сколько могло быть мальчиков?

Задача 5.6.12. (Турнир Архимеда — 2012.1) Петя обратил внимание, что дата проведения Турнира Архимеда, записанная восемью цифрами (22.01.2012) обладает интересной особенностью: переставив первые четыре цифры, можно получить номер года. А какие ещё даты в этом году имеют такое же свойство?

Задача 5.6.13. («Математический праздник» — 2013.7.4) Дима увидел в музее странные часы (на рисунке ниже).



Они отличаются от обычных часов тем, что на их циферблате нет цифр и вообще непонятно, где у часов верх; да ещё секундная, минутная и часовая стрелки имеют одинаковую длину. Какое время показывали часы? (Стрелки А и Б на рисунке смотрят ровно на часовые отметки, а стрелка В чуть-чуть не дошла до часовой отметки.)

Задача 5.6.14. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.7.4) На площади репетировал военный оркестр. Для исполнения гимна музыканты выстроились квадратом, а для исполнения лирической песни — перестроились в прямоугольник. При этом количество шеренг увеличилось на пять. Сколько музыкантов в оркестре?

Задача 5.6.15. («Математический праздник» — 2016.7.6) На конкурсе «А ну-ка, чудища!» стоят в ряд 15 драконов. У соседей число голов отличается на 1. Если у дракона больше голов, чем у обоих его соседей, его считают хитрым, если меньше, чем у обоих соседей, — сильным, остальных (в том числе стоящих с краю) считают обычными. В ряду есть ровно четыре хитрых дракона — с $4, 6, 7$ и 7 головами и ровно три сильных — с $3, 3$ и 6 головами. У первого и последнего драконов голов поровну.

а) Приведите пример того, как такое могло быть.
б) Докажите, что число голов у первого дракона во всех примерах одно и то же.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.17. Пентамино — это связная фигура, состоящая из 5 клеток, вырезанная из клетчатого листа бумаги по линиям сетки. Фигуры, совмещаемые при помощи поворота и зеркального отражения, считаются равными. Сколько существует различных пентамино?

Задача 5.18. Перечислите все убывающие четвёрки натуральных чисел, дающих в сумме 15.

7 Разбиения на пары и группы

Материал для разбора на занятии

Данная тема может быть как одним из частных случаев темы «примеры и конструкции», так и подтемой некоторых комбинаторных задач.

Если в задачах на тему «примеры и конструкции» обычно решением является контрпример, то в данной теме обычно наоборот требуется доказать, что его построить невозможно.

Задача 5.7.1. Можно ли нарисовать замкнутую 13-звенную ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

Решение. Если бы такое было возможно, то все звенья ломаной можно было бы разбить на пары пересекающихся. Однако тогда число звеньев должно быть чётным. Противоречие. □

Задача 5.7.2. Илья написал на гранях кубика натуральные числа от 1 до 6. Таня кубика не видела, но утверждает, что у данного кубика как минимум дважды соседние по значению числа будут разделены только одним ребром. Права ли Таня?

Решение. Разобьём грани кубика на пары противоположных, получив 3 пары. Сколько же существует соседних чисел? Их 5 пар: 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5, 5 и 6. То есть, максимум 3 из данных пар окажутся на не соседних гранях, то есть, минимум 2 пары чисел останутся соседними и будут разделены только одним ребром. □

Задача 5.7.3. (Московская математическая регата — 2015.11.3.3) На столе выложены в ряд 64 гирьки, причём масса двух любых соседних гирек отличается на 1 г. Требуется разложить гирьки на две кучки с равными массами и равным количеством гирь. Всегда ли это удастся?

Решение. Разобьём все гири на четвёрки идущих подряд. Если для каждой четвёрки мы первую и последнюю гири поместим в первую кучку, а вторую и третью — во вторую кучку, то веса кучек будут оставаться равными, так как сумма первой и последней гирь в четвёрке будет всегда в точности равна сумме второй и третьей гирь. □

Задача 5.7.4. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.7.3) Из натуральных чисел от 1 до 100 выбрано 50 различных. Оказалось, что сумма никаких двух из них не равна 100. Верно ли, что среди выбранных чисел всегда найдётся квадрат какого-нибудь целого числа?

Решение. Допустим, что среди выбранных есть число 100, тогда оно и будет квадратом. В противном же случае, если число 100 не выбрано, то все числа от 1 до 99, кроме числа 50, можно разбить на 49 пар так, чтобы сумма чисел в каждой паре равнялась 100: $1+99, 2+98, \ldots, 49+51$. Если бы из какой-то пары были взяты оба числа, они бы давали в сумме 100, что противоречит условию, значит, из каждой пары взято не более 1 числа. Поскольку всего чисел 50, получается, что из каждой пары должно быть взято по 1 числу, а также число 50. В паре $36+64$ оба слагаемых являются квадратами, и хотя бы одно из них будет среди выбранных. □

Задача 5.7.5. (Алтуфова, Устинов) Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

Решение. Для того, чтобы решить эту задачу с помощью принципа Дирихле, мы должны понять, что в задаче является клетками, а что — кроликами. С кроликами как будто всё понятно — это числа. А что с клетками? Давайте для каждого нечётного числа заведём свою группу (клетку) и распределим наши $2n$ чисел по этим клеткам. В клетку под номером k мы положим само число k и все числа вида $k\cdot 2^1$, $k\cdot 2^2$, $\ldots$, $k\cdot 2^l \leqslant 2n$. Нетрудно убедиться, что каждое из наших чисел попадёт ровно в одну клетку — в самом деле, если число нечётное, то оно будет входить в соответствующую клетку по определению, а если оно чётное, то будем делить его на два до тех пор, пока результат не станет нечётным числом. Например, для $n=6$ мы заведём 6 групп — $1, 3, 5, 7, 9, 11$. В группу 1 попадут числа $1, 2, 4, 8$, в группу 3 — числа $3, 6, 12$, в группу 5 — числа 5 и 10, а в группы 7, 9 и 11 попадёт по одному числу. Теперь каждому кролику предназначена своя клетка. Выпустим всех кроликов. Если мы возьмём произвольных $n+1$ кроликов, то, по принципу Дирихле, хотя бы в одну из n клеток попадёт хотя бы два кролика. Вспомним, что каждая клетка по условию отбора может содержать числа, которые делятся друг на друга, что и завершает доказательство. □

Задача 5.7.6. («Математический праздник» — 1993.5,6.8) В спортклубе тренируются 100 толстяков весом от 1 до 100 кг. На какое наименьшее число команд их гарантированно можно разделить так, чтобы ни в одной команде не было двух толстяков, один из которых весит вдвое больше другого?

Решение. Одной команды явно недостаточно (тогда в одну команду попадут толстяки с весами 1 и 2 килограмм, что не соответствует требуемому условию).

Покажем, как можно обойтись двумя командами. Если мы обнаружим какого-либо из толстяков, который весит одинаково с каким-либо другим, отправим его в ту же команду.

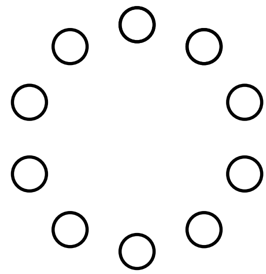
Тогда для каждого толстяка весом $2a$ есть не более одного толстяка из команды, весящего $4a$ (для весящих более 50 кг более старшие товарищи вовсе не «вписываются» в 100-килограммовые стандарты), и не более одного, весящего a (да и то в случае, если вес — чётное число, т. к. весовые стандарты предполагают исключительно целочисленное значение — такая вот дискриминация).

Учитывая вышеизложенное, можно организовать распределение по командам следующим образом. Образуем цепочки спортсменов с весами a,$2a$,$4a$, $\ldots$ и будем их через одного распределять по двум командам. Очевидно, что всех спортсменов можно распределить по аналогичным цепочкам с непересекающимися элементами (справедливость данного утверждения элементарно доказывается методом от противного — иначе для какого-то веса нашлось бы два различных, весящих в два раза больше, — c'est absurde). Некоторые цепочки будут вовсе состоять из одного элемента $(51, 53, 55$ и т. д.) — абсолютно неважно, в какую команду они попадут. Самая длинная будет состоять из степеней двоек $(1, 2, 4, 8, \ldots)$ — например, стоящих на чётных местах определим в одну команду, остальных — в другую.

Таким образом, все спортсмены будут распределены по двум командам, и условие задачи будет выполнено. □

Задавальник

Задача 5.7.7. («Математический праздник» — 1998.6.3) Расположите в кружочках (вершинах правильного десятиугольника) числа от 1 до 10 так, чтобы для любых двух соседних чисел их сумма была равна сумме двух чисел, им противоположных (симметричных относительно центра окружности).



Задача 5.7.8. (Турнир Архимеда — 2015.4) В один прекрасный день каждый из 2015 гномов обиделся на какого-то другого гнома (одного), и на каждого гнома обиделся какой-то другой гном (один). Белоснежке требуется распределить гномов на три группы так, чтобы в каждой из групп не было гномов, обиженных на кого-нибудь из данной группы. Всегда ли это возможно? Ответ обоснуйте.

Задача 5.7.9. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.7.4) Два фокусника показывают зрителю такой фокус. У зрителя есть 24 карточки, пронумерованные числами от 1 до 24. Он выбирает из них 13 карточек и передаёт первому фокуснику. Тот возвращает зрителю две из них. Зритель добавляет к этим двум одну из оставшихся у него 11 карточек и, перемешав, передаёт эти три карточки второму фокуснику. Каким образом фокусники могут договориться так, чтобы второй всегда с гарантией мог определить, какую из трёх карточек добавил зритель?

Задача 5.7.10. («Математический праздник» — 2009.7.4) Скупой рыцарь хранит золотые монеты в 77 сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну по этим двум сундукам. Потом он заметил, что если открыть любые 3, или любые 4, . . . , или любые 76 сундуков, то тоже можно так переложить лежащие в них монеты, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга не успел проверить, можно ли разложить все монеты поровну по всем 77 сундукам. Можно ли, не заглядывая в сундуки, дать точный ответ на этот вопрос?

Задача 5.7.11. («Математический праздник» — 2009.6.6) а) Скупой рыцарь хранит золотые монеты в шести сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну в эти два сундука. Ещё он заметил, что если открыть любые 3, 4 или 5 сундуков, то тоже можно переложить лежащие в них монеты таким образом, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга так и не узнал, можно ли разложить все монеты поровну по всем шести сундукам. Можно ли, не заглядывая в заветные сундуки, дать точный ответ на этот вопрос?

б) А если сундуков было восемь, а Скупой рыцарь мог разложить поровну монеты, лежащие в любых 2, 3, 4, 5, 6 или 7 сундуках?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.19. Каких чисел больше среди всех трёхзначных чисел: тех, у которых средняя цифра больше обеих крайних, или тех, у которых средняя цифра меньше обеих крайних?

Задача 5.20. Для избавления от проклятья боброведьмы ёжику нужно узнать сумму всех возможных шестизначных чисел, состоящих из $1, 2, 3, 4$. Помогите ёжику.

8 Подсчёт двумя способами

Материал для разбора на занятии

В некоторых задачах можно получить нужное уравнение, если вычислить двумя способами одну и ту же величину. Трудность состоит в том, чтобы додуматься — какую именно величину подсчитывать двумя способами (и какими именно!).

Задача 5.8.1. Тридцать школьников, среди которых были семиклассники и восьмиклассники обменялись рукопожатиями. При этом оказалось, что каждый семиклассник пожал руку восьми восьмиклассникам, а каждый восьмиклассник пожал руку семи семиклассникам. Сколько было семиклассников и сколько восьмиклассников?

Решение. Пусть x — число семиклассников, y — число восьмиклассников; тогда $x + y = 30$. Второе уравнение мы получим, если подсчитаем двумя способами общее количество рукопожатий. С одной стороны, число рукопожатий равно $8x$, поскольку от каждого семиклассника «исходит» 8 рукопожатий. С другой стороны, число рукопожатий равно $7y$, так как от каждого восьмиклассника «исходит» 7 рукопожатий. Следовательно, $8x = 7y$. Решая полученную систему уравнений, находим: $x = 14$, $y = 16$. ☐

Задача 5.8.2. (Турнир им. Ломоносова — 1985) Было 7 пустых ящиков. В некоторые из них положили ещё по 7 пустых ящиков и т. д. В итоге стало 10 непустых ящиков. Сколько всего стало ящиков?

Решение. Пусть общее количество ящиков равно x. Подсчитаем число ящиков, которые лежат в каком-то другом ящике. С одной стороны, оно равно $x - 7$, поскольку каждый ящик, кроме начальных семи, лежит в каком-то другом. С другой стороны, их число равно $10 \cdot 7 = 70$, поскольку в каждом из 10 непустых ящиков лежит ровно 7 (а ни в каком пустом ящике не лежит ни единого). Значит, $x - 7 = 70$, откуда $x = 77$. Эту задачу можно было решить и иначе. После каждого укладывания семи ящиков в какой-то ящик число непустых ящиков увеличивается на 1. Изначально таковых было 0, в конце стало 10, значит, число ящиков увеличилось на $10 \cdot 7 = 70$, т. е. $x = 7 + 70 = 77$. ☐

Задача 5.8.3. (Козлова) Рита, Люба и Варя решали задачи. Чтобы дело шло быстрее, они купили конфет и условились, что за каждую решённую задачу девочка, решившая её первой, получает четыре конфеты, решившая второй — две, а решившая последней — одну. Девочки говорят, что каждая из них решила все задачи и получила 20 конфет, причём одновременных решений не было. Может ли такое быть?

Решение. После решения каждой задачи суммарное число конфет, оказывавшихся во владении девочек, увеличивалось на $4 + 2 + 1 = 7$, значит, итоговое суммарное число их конфет обязательно должно делиться на 7, но $20 \cdot 3 = 60$ на 7 не делится. Следовательно, девочки ошиблись. $\square$

Следующая задача связана также с недавно пройденным принципом крайнего.

Задача 5.8.4. (Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников — 1995.9.3) Клетки квадратной таблицы 15×15 раскрашены в красный, синий и зелёный цвета. Докажите, что найдётся по крайней мере 2 строки, в которых клеток хотя бы одного цвета поровну.

Решение. Предположим противное: это будет означать, что клеток каждого цвета в каждой из строк различное количество. Значит, минимальное число клеток любого цвета будет равно

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 14 = 14 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2},$$

а всего закрашенных клеток тогда не менее, чем

$$14 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 21 \cdot 15.$$

Однако же всего клеток ровно $15 \cdot 15$, т. е. меньше. Полученное противоречие завершает решение задачи. $\square$

Нижеприведённая задача будет затрагивать помимо принципа крайнего и темы этого раздела также ещё и «оценку+пример».

Задача 5.8.5. (Московская математическая олимпиада — 2007.8.3) В футбольном чемпионате участвовали 16 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу, за победу давалось 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0. Назовём команду успешной, если она набрала хотя бы половину от наибольшего возможного количества очков. Какое наибольшее количество успешных команд могло быть в турнире?

Решение. Допустим, что все 16 команд могли оказаться успешными. Поскольку всего каждая из команд играет по 15 игр, максимально возможное число очков, которое может набрать одна команда, равно $15 \cdot 3 = 45$, и т. к. можно набрать лишь целое число очков, для успешного выступления их должно быть не менее 23. Тогда в сумме все команды должны набрать по меньшей мере $16 \cdot 23$ очка. Попробуем оценить общую сумму очков, набранных всеми командами, иначе. В одной партии команды в сумме набирают

2 или 3 очка, т. е. в любом случае не более 3. Всего партий $16 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2}$, а, значит, и очков не более чем

$$16 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 16 \cdot 22{,}5,$$

то есть, мы пришли к противоречию.

Пример с 15 успешными командами: команда под номером 16 проигрывает все свои матчи. Остальные команды играют следующим образом: команды с чётными номерами выигрывают у команд с нечётными, и наоборот. Тогда каждая из них выиграет 8 из 15 игр и окажется успешной. □

Задавальник

Задача 5.8.6. (Кружок малого мехмата — 2015/2016.7ББ.3) Можно ли в клетки квадрата 10×10 поставить некоторое количество звёздочек так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было ровно две звёздочки, а в каждом прямоугольнике 3×1 — ровно одна звёздочка?

Задача 5.8.7. (Кружок малого мехмата — 2015/2016.7ББ.4) Аркаша вырезал много одинаковых квадратов и в вершинах каждого из них в произвольном порядке написал числа $1, 2, 3$ и 4. Затем Степан сложил квадраты в стопку и написал сумму чисел, попавших в каждый из четырёх углов стопки. Может ли оказаться так, что в каждом углу стопки сумма равна а) 2015; б) 2016?

Задача 5.8.8. (Турнир им. Ломоносова — 1978.1) а) Можно ли занумеровать рёбра куба числами -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров рёбер, которые в ней сходятся, была одинаковой? б) А можно ли так же занумеровать рёбра куба натуральными числами от 1 до 12?

Задача 5.8.9. (Кружок малого мехмата — 2015/2016.7ББ.6) Можно ли расставить по кругу семь целых неотрицательных чисел так, чтобы сумма каких-то трёх расположенных подряд чисел была равна 1, каких-то трёх подряд расположенных — 2, ..., каких-то трёх подряд расположенных — 7?

Задача 5.8.10. (Кружок ВМШ 57 школы — 2005/2006.7.2) Ковровая дорожка покрывает лестницу из 9 ступенек. Длина и высота лестницы равны 2 метрам. Хватит ли этой ковровой дорожки, чтобы покрыть лестницу из 10 ступенек длиной и высотой 2 метра?

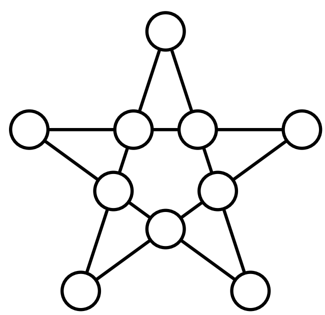
Задача 5.8.11. (Кружок МЦНМО — 2005/2006.7.1) Игорь закрасил в квадрате 6×6 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратиках 2×2 одинаковое число закрашенных клеток и во всех полосках

1×3 одинаковое число закрашенных клеток. Докажите, что старательный Игорь закрасил все клетки.

Задача 5.8.12. («Математический праздник» — 1996.7.1) По кругу расставлены цифры $1, 2, 3, \ldots, 9$ в произвольном порядке. Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трёхзначное число. Найдите сумму всех девяти таких чисел. Зависит ли она от порядка, в котором записаны цифры?

Задача 5.8.13. (Московская математическая олимпиада — 1992.8.3) Каждый участник двухдневной олимпиады в первый день решил столько же задач, сколько все остальные в сумме — во второй день. Докажите, что все участники решили поровну задач.

Задача 5.8.14. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2008.7.1) Можно ли в кружочки на пятиконечной звезде (на рисунке ниже) расставить 4 единицы, 3 двойки и 3 тройки так, чтобы суммы четырёх чисел, стоящих на каждой из пяти прямых, были равны?



Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.21. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.7.9) Сеть автобусных маршрутов в пригороде Амстердама устроена так, что:

а) на каждом маршруте есть ровно три остановки, считая обе конечные;

б) каждые два маршрута либо вовсе не имеют общих остановок, либо имеют только одну общую остановку.

Какое наибольшее количество маршрутов может быть в этом пригороде, если в нём всего 9 остановок?

Задача 5.22. Дано 25 чисел. Сумма любых четырёх из них положительна. Докажите, что сумма их всех тоже положительна.

9 Оценка + пример

Материал для разбора на занятии

Данная тема стоит некоторым «особняком» в олимпиадной математике: по сути, это даже не отдельная тема — задача на практически любую тему может быть на оценку + пример.

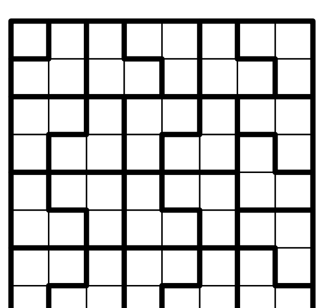
Обнаружить данную тему помогут слова «наибольшее» или «наименьшее» в условии задачи. Например, задача может быть такого типа: найдите наибольшее число, которое обладает заданным свойством. Что подразумевает решение такой задачи? Зачастую приходится видеть решения подобного типа: «это число подходит», далее идёт доказательство, что оно подходит, и на этом решение заканчивается. Но требовалось найти именно наибольшее число, а не любое подходящее. Приведённая часть решения называется примером. Но требуется также доказать и оценку, что данное число действительно наибольшее. Обычно по критериям за пример ставят менее половины баллов, но человек уже думает, что решил задачу, и переходит к следующей, потеряв остальные баллы.

Гораздо обиднее обратная ситуация, когда была доказана оценка, а пример человек счёл очевидным и вообще не стал про него писать. К сожалению, по критериям выставления оценок проверяющий не может поставить за такое решение полный балл.

Задача 5.9.1. Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8?

Решение. **Оценка.** В квадрате 64 клетки. Поэтому вырезать 22 и более уголков не получится: ведь тогда суммарное число клеток в них будет не меньше $22 \cdot 3 = 66$. Значит, число уголков не больше 21.

Пример. Вырезать 21 уголок можно — пример приведён на рисунке ниже.



Следовательно, наибольшее возможное количество уголков равно 21. Логика рассуждения ясна: мы показали, что количество уголков не превосходит числа 21 (**оценка**) и иногда ему равно (**пример**). Значит, 21 и есть максимум числа уголков. □

Задача 5.9.2. (Кружок ВМШ 57 школы — 2005/2006.7) Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы в каждом уголке из трёх полей было по крайней мере одно незакрашенное поле?

Решение. **Оценка.** Разобьём доску на 16 квадратиков размером 2×2. Заметим, что в каждом из получившихся квадратиков мы можем закрасить не более двух полей (чтобы не получилось чёрных уголков). Поэтому общее количество закрашенных квадратиков не превышает $2 \cdot 16 = 32$.

Пример. Раскрасим шахматную доску полосками построчно: $4 \cdot 8 = 32$. Или сама по себе шахматная раскраска будет также содержать 32 закрашенных квадратика. □

Задача 5.9.3. Каким наименьшим числом монет в 3 и 5 копеек можно набрать сумму 37 копеек?

Решение. Если число монет не превосходит семи, то сумма окажется не более $7 \cdot 5 = 35$ копеек. Поэтому семи и менее монет нам не хватит. Предположим, что монет восемь. Все они не могут быть пятикопеечными ($8 \cdot 5 = 40$). Семь пятикопеечных монет и одна трёхкопеечная дают в сумме 38 копеек. Если же пятикопеечных монет не более шести, то сумма не превосходит $6 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 36$ копеек. Значит, восемью монетами набрать 37 копеек также не получается. Итак, монет должно быть не менее девяти. Приведём пример подходящего набора из девяти монет: пять пятикопеечных и четыре трёхкопеечных

$$5 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 37.$$

Следовательно, наименьшее возможное число монет равно девяти. □

Обратите внимание: вы никому не обязаны объяснять, как вы додумались до примера! При записи решения пример достаточно просто привести (и показать, если это неочевидно, что он подходит). Описывать, из каких соображений ваш пример построен, не нужно.

Задача 5.9.4. (Кружок малого мехмата — 2012/2013) В пруд пустили 30 щук, которые стали кушать друг друга. Щука считается сытой, если она съела хотя бы трёх щук. Какое наибольшее количество щук могло насытиться, если съеденные сытые щуки при подсчёте тоже учитываются?

Решение. **Оценка.** Её можно дать различными способами.

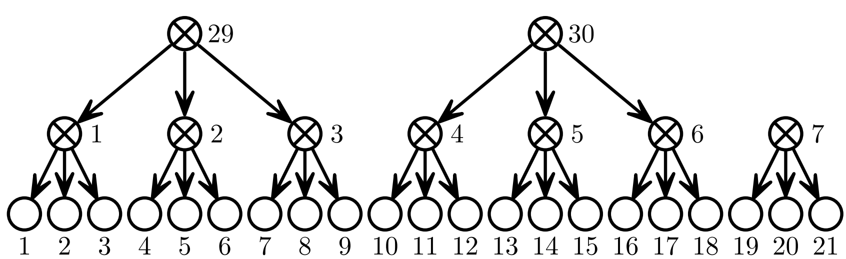
Описательный подход к оценке. Заметим, что если сытыми оказались 10 или больше щук, то будут съедены 30 и более щук — то есть вообще все имеющиеся щуки, чего быть не может (если предположить, что саму себя щука съесть не сможет — что вполне очевидно).

Формально-аналитический подход к оценке. Пусть оказались сытыми a щук. Тогда они вместе съели $3a$ или более щук. Так как каждая щука не может быть съедена дважды, а в конце останется по крайней мере одна щука, очевидно соотношение $3a < 30$. Отсюда $a < 10$ — то есть максимально возможное количество — 9.

Пример. Его также можно привести различными способами.

Описательно. Приведём пример, при котором ровно 9 щук оказались сытыми. Обозначим щук-каннибалов через $a_1; a_2; \ldots; a_n$. Сначала насыщаются 7 щук ($a_1; \ldots; a_7$), съедая 21 щуку ($a_8; \ldots; a_{28}$) — каждая съела по 3 щуки. Остаётся 9 щук — 7 уже сытых ($a_1; \ldots; a_7$) и 2 ещё голодных ($a_{29}; a_{30}$). Две ещё голодные (a_{29} и a_{30}) насыщаются, съев 6 сытых щук ($a_1; \ldots; a_6$).

Графически. Кружками на рисунке ниже отмечены насытившиеся щуки, крестиками — оставшиеся голодными.



□

Задача 5.9.5. (Олимпиада Зимней олимпиадной школы МФТИ 2018, юниоры, задача 3) В ряд стоят 150 цветочных горшков, в некоторых из них растёт по растению. Среди любых трёх подряд идущих горшков хотя бы в одном есть растение. Зомби прошёл вдоль ряда и съел некоторые растения, так что теперь среди любых пяти идущих подряд горшков не более одного растения. Какое минимальное число растений он мог съесть?

Решение. Рассмотрим 2 последовательных горшка с цветком: между ними стоят не более чем 2 пустых горшка, значит, один из них (тех, что с цветком) точно опустошат. То есть, всего будет съедено не менее половины общего числа растений в случае, если оно чётно, и половины общего числа растений, уменьшенного на единицу, в случае, если оно нечётно. Разобьём 150 наших горшков на 50 последовательных троек. Ясно, что в каждой из них не менее одного горшка с цветком, значит, всего таковых не менее 50, и будет съедено не менее 25 растений.

Пример, при котором может быть съедено ровно 25 растений, таков: прежде растения располагаются на номерах, делящихся на 3, т. е.: $3, 6, 9, 12, \ldots,$ а затем зомби съедает растения с номерами, делящимися на 6. Легко понять, что данный пример соответствует условию, и в нём действительно съедается ровно 25 растений. □

Также, как и в задачах на игры, тут следует избегать понятия «лучший случай» — невозможно объяснить, что означает это словосочетание. Обычно на просьбу объяснить, что же означает этот лучший случай, следует ответ: «ну это очевидно». Такой ответ никого не удовлетворит.

Проиллюстрируем это примером решения только что приведённой задачи. Один из соавторов данной книги, будучи членом жюри олимпиады, проходившей в устном формате, на которой была дана эта задача, столкнулся с рассуждением одного из школьников, начинающимся следующими словами: «Чем меньше изначально расставлено растений, тем меньше растений зомби съест» — это и есть попытка перейти от общего случая к «лучшему». Разумеется, это утверждение является неверным, поскольку в нём не говорится, что зомби будет пытаться есть как можно меньше растений. А перейдя к «лучшему случаю» с 50 посаженными растениями, участник показал, что при расстановках $1, 4, 7, 10, \ldots;$ $2, 5, 8, 11, \ldots;$ $3, 6, 9, 12, \ldots$ съесть менее 25 растений не представляется возможным. Но поскольку данные варианты расстановок 50 растений не являются исчерпывающими (всего их столько, что выписать их все, воспользовавшись напрямую полным перебором, не хватит времени олимпиады), это ничего не доказывает даже для данного «лучшего случая».

Стоит также заметить, что рассмотрение каких-либо «лучших случаев» может быть довольно полезным при поиске примера, этого понятия стоит опасаться лишь при доказательстве оценки.

Задача 5.9.6. (Школьный этап Всероссийской олимпиады школьников — 2015.8.1) Все натуральные числа, сумма цифр в записи которых делится на 5, выписывают в порядке возрастания: $5, 14, 19, 23, 28, 32, \ldots$ Чему равна самая маленькая разность между соседними числами в этом ряду?

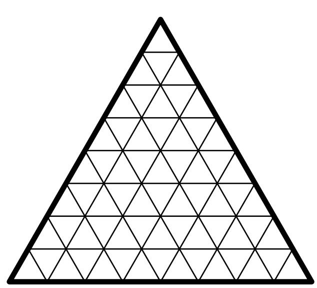
Решение. Если между двумя соседними числами этой последовательности нет перехода разряда, то разность просто будет равна 5. При переходе разряда 9 превращается в 0, а следующий разряд увеличивается на 1. То есть, сумма цифр уменьшается на 8, при переходе двух последних — уменьшается на 17, и так далее. Перебрав немного дальше, можно заметить, что при переходе 4 последних разрядов сумма уменьшается на 35, т. е. можно подобрать таких 2 последовательных числа, что сумма цифр делилась бы на 5 у обоих, например, 49999 и 50000. Это пример для разности в 1. Совершенно ясно, что меньше разность быть не может — исключительная задача, где пример оказался гораздо сложнее оценки. □

Задавальник

Задача 5.9.7. («Математический праздник» — 2008.6.2) Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разных размеров и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает громко барабанить. Какое наибольшее число зайчат сможет начать барабанить?

Задача 5.9.8. («Математический праздник» — 1997.7.2) В Мексике экологи добились принятия закона, по которому каждый автомобиль хотя бы один день в неделю не должен ездить (владелец сообщает полиции номер автомобиля и «выходной» день недели этого автомобиля). В некоторой семье все взрослые желают ездить ежедневно (каждый — по своим делам!). Сколько автомобилей (как минимум) должно быть в семье, если взрослых в ней а) 5 человек; б) 8 человек?

Задача 5.9.9. («Математический праздник» — 2016.6.3) Равносторонний треугольник со стороной 8 разделили на равносторонние треугольнички со стороной 1 (на рисунке ниже). Какое наименьшее количество треугольничков надо закрасить, чтобы все точки пересечения линий (в том числе и те, что по краям) были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольничка?

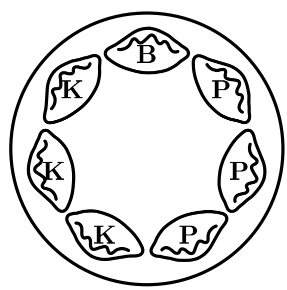


Задача 5.9.10. («Математический праздник» — 1990.5.3) Сорок восемь кузнецов должны подковать 60 лошадей. Какое наименьшее время они затратят на работу, если каждый кузнец тратит на одну подкову пять минут? (Лошадь не может стоять на двух ногах.)

Задача 5.9.11. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2005.7.4) Каркас куба с рёбрами длины 1 намазан мёдом. В вершине куба находится жук. Какой минимальный путь он должен проползти, чтобы съесть весь мёд?

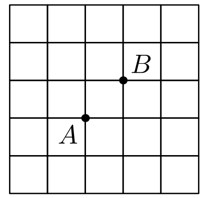
Задача 5.9.12. («Математический праздник» — 2015.6.5) Обезьяна становится счастливой, когда съедает три разных фрукта. Какое наибольшее количество обезьян можно осчастливить, имея 20 груш, 30 бананов, 40 персиков и 50 мандаринов? Обоснуйте свой ответ.

Задача 5.9.13. («Математический праздник» — 2014.6.5) Мама испекла пирожки — три с рисом, три с капустой и один с вишней — и выложила их на блюдо по кругу (на рисунке ниже). Потом поставила блюдо в микроволновку подогреть. На вид все пирожки одинаковые. Маша знает, как они лежали, но не знает, как повернулось блюдо. Она хочет съесть пирожок с вишней, а остальные считает невкусными. Как Маше наверняка добиться этого, надкусив как можно меньше невкусных пирожков?



Задача 5.9.14. («Математический праздник» — 2006.6.5) Дед звал внука к себе в деревню: «Вот посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растёт четыре груши, а ещё есть яблони, причём они посажены так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растёт ровно две груши». «Ну и что тут интересного, — ответил внук. — У тебя всего две яблони». «А вот и не угадал, — улыбнулся дед. — Яблонь у меня в саду больше, чем груш». Нарисуйте, как могли расти яблони и груши в саду у деда. Постарайтесь разместить на рисунке как можно больше яблонь, не нарушая условий. Если Вы думаете, что разместили максимально возможное число яблонь, попробуйте объяснить, почему это так.

Задача 5.9.15. («Математический праздник» — 2009.6.5) Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка A на плане) до своего отеля (точка B). Турист хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрестке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.



Задача 5.9.16. («Математический праздник» — 2012.6.5) Замените в равенстве

$$\textbf{ПИРОГ} = \textbf{КУСОК} + \textbf{КУСОК} + \textbf{КУСОК} + \ldots + \textbf{КУСОК}$$

одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные — разными так, чтобы равенство было верным, а количество «кусков пирога» было бы наибольшим из возможных.

Задача 5.9.17. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.6.5) На клетчатой доске размером 4×4 Петя закрашивает несколько клеток. Вася выиграет, если сможет накрыть все эти клетки не пересекающимися и не вылезающими за границу квадрата уголками из трёх клеток. Какое наименьшее количество клеток должен закрасить Петя, чтобы Вася не выиграл?

Задача 5.9.18. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.6.6) Для игры в шляпу Надя хочет разрезать лист бумаги на 48 одинаковых прямоугольников. Какое наименьшее количество разрезов ей придётся сделать, если любые куски бумаги можно перекладывать, но нельзя сгибать, а Надя способна резать одновременно сколько угодно слоёв бумаги? (Каждый разрез — прямая линия от края до края куска.)

Задача 5.9.19. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2015.6.6) Из одинакового количества квадратов со сторонами 1, 2 и 3 составьте квадрат наименьшего возможного размера.

Задача 5.9.20. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2008.6.6) Найдите наибольшее число цветов, в которые можно покрасить рёбра куба (каждое ребро одним цветом) так, чтобы для каждой пары цветов нашлись два соседних ребра, покрашенные в эти цвета. (Соседними считаются рёбра, имеющие общую вершину.)

Задача 5.9.21. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2006.6.6) Выступая на арене с 10 львами и 15 тиграми, дрессировщик Паша потерял над ними контроль, и звери начали пожирать друг друга. Лев насытится, если съест трёх тигров, а тигр — если съест двух львов. Определите, какое наибольшее количество хищников могло насытится и как это могло произойти.

Задача 5.9.22. («Математический праздник» — 2013.6.6) Тридцать три богатыря нанялись охранять Лукоморье за 240 монет. Хитрый дядька Черномор может разделить богатырей на отряды произвольной численности (или записать всех в один отряд), а затем распределить всё жалованье между отрядами. Каждый отряд делит свои монеты поровну, а остаток отдаёт Черномору. Какое наибольшее количество монет может достаться Черномору, если жалованье между отрядами Черномор распределяет: а) как ему угодно; б) поровну?

Задача 5.9.23. (Турнир Архимеда — 2012.5) В мешке лежат золотые монеты — дублоны, дукаты и пиастры, одинаковые на ощупь. Если из мешка вынуть 10 монет, то среди них обязательно окажется хотя бы один дублон; если вынуть 9 монет, то среди них обязательно окажется хотя бы один дукат; если же вынуть 8 монет, то среди них обязательно окажется хотя бы один пиастр. Какое наибольшее количество монет могло быть в мешке?

Задача 5.9.24. («Математический праздник» — 2003.7.5) В честь праздника 1% солдат в полку получил новое обмундирование. Солдаты расставлены в виде прямоугольника так, что солдаты в новом обмундировании оказались не менее чем в 30% колонн и не менее чем в 40% шеренг. Какое наименьшее число солдат могло быть в полку?

Задача 5.9.25. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.6.7) В пять горшочков, стоящих в ряд, Кролик налил три килограмма мёда (не обязательно в каждый и не обязательно поровну). Винни–Пух может взять любые два горшочка, стоящие рядом. Какое наибольшее количество мёда сможет гарантированно съесть Винни–Пух?

Задача 5.9.26. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.6.7) Пятизначное число называется *неразложимым*, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

Задача 5.9.27. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.6.7) Каждое из 50 изделий нужно сначала покрасить, а потом упаковать. Время окраски — 10 минут, упаковки — 20 минут. После окраски деталь должна 5 минут сохнуть. Сколько необходимо нанять маляров и сколько упаковщиков, чтобы выполнить работу в кратчайшее время, если нельзя нанимать более 10 человек?

Задача 5.9.28. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2017.6.8;7.8) В каждой клетке доски размером 5×5 стоит крестик или нолик, причём никакие три крестика не стоят подряд ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали. Какое наибольшее количество крестиков может быть на доске?

Задача 5.9.29. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2016.6.9) В магазине продают коробки конфет. Среди них есть не менее пяти коробок разной цены (никакие две из них не стоят одинаково). Какие бы две коробки ни купил Вася, Петя всегда сможет также купить две коробки, потратив столько же денег. Какое наименьшее количество коробок конфет должно быть в продаже?

Задача 5.9.30. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.6.9) План дворца шаха — это квадрат размером 6×6, разбитый на комнаты размером 1×1. В середине каждой стены между комнатами есть дверь. Шах сказал своему архитектору: «Сломай часть стен так, чтобы все комнаты стали размером 2×1, новых дверей не появилось, а путь между любыми двумя комнатами проходил не более, чем через N дверей». Какое наименьшее значение N должен назвать шах, чтобы приказ можно было выполнить?

Задача 5.9.31. (Турнир Архимеда — 2014.6) Незнайка переставил цифры в некотором числе A и получил число B. Затем он вычислил разность $A - B$ и получил при этом число, записанное с помощью одних единиц (другие цифры не использовались). Какое наименьшее число могло у него получиться?

Задача 5.9.32. («Математический праздник» — 2005.7.6) На острове Невезения с населением 96 человек правительство решило провести пять реформ. Каждой реформой недовольна ровно половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Какое максимальное число людей правительство может ожидать на митинге? (Приведите пример и докажите, что больше нельзя.)

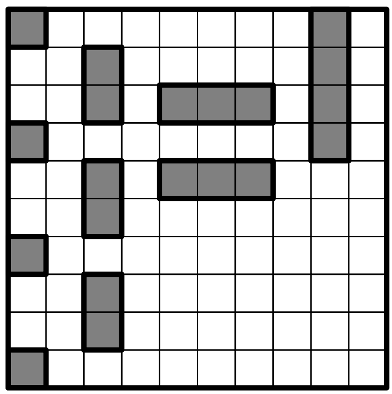
Задача 5.9.33. («Математический праздник» — 2008.7.6) Вася постоял некоторое время на остановке. За это время проехал один автобус и два трамвая. Через некоторое время на эту же остановку пришёл Шпион. Пока он там сидел, проехало 10 автобусов. Какое минимальное число трамваев могло проехать за это время? И автобусы, и трамваи ходят с равными интервалами, причём автобусы ходят с интервалом 1 час.

Задача 5.9.34. («Математический праздник» — 2012.7.6) Победив Кощея, потребовал Иван золота, чтобы выкупить Василису у разбойников. Привёл его Кощей в пещеру и сказал:

«В сундуке лежат золотые слитки. Но просто так их унести нельзя: они заколдованы. Переложи себе в суму один или несколько. Потом я переложу из сумы в сундук один или несколько, но обязательно другое число. Так мы будем по очереди перекладывать их: ты в суму, я в сундук, каждый раз новое число. Когда новое перекладывание станет невозможным, сможешь унести свою суму со слитками».

Какое наибольшее число слитков может унести Иван, как бы ни действовал Кощей, если в сундуке исходно лежит а) 13; б) 14 золотых слитков? Как ему это сделать?

Задача 5.9.35. («Математический праздник» — 2010.7.6) Легко разместить комплект кораблей для игры в «Морской бой» на доске 10×10 (на рисунке). А на какой наименьшей квадратной доске можно разместить этот комплект? (Напомним, что согласно правилам корабли не должны соприкасаться даже углами.)



Задача 5.9.36. («Математический праздник» — 2013.7.6) Лиса Алиса и кот Базилио вырастили на дереве 20 фальшивых купюр и теперь вписывают в них семизначные номера. На каждой купюре есть 7 пустых клеток для цифр. Базилио называет по одной цифре: «1» или «2» (других он не знает), а Алиса вписывает названную цифру в любую свободную клетку любой купюры и показывает результат Базилио. Когда все клетки заполнены, Базилио берёт себе как можно больше купюр с разными номерами (из нескольких с одинаковым номером он берёт лишь одну), а остаток забирает Алиса. Какое наибольшее количество купюр может получить Базилио, как бы ни действовала Алиса?

Задача 5.9.37. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.7.9) На окружности отмечены 2014 точек. В одной из них сидит кузнечик, который делает прыжки по часовой стрелке либо на 57 делений, либо на 10. Известно, что он посетил все отмеченные точки, сделав наименьшее количество прыжков длины 10. Какое?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.23. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2008.7.3) Новогодняя гирлянда, висящая вдоль школьного коридора, состоит из красных и синих лампочек. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в гирлянде, если всего лампочек 50?

Задача 5.24. Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого прямоугольника 5×7?

Задача 5.25. (Кружок малого мехмата — 2012/2013) Какое наименьшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка в любом квадратике 2×2?

10 Разбор задач для самостоятельного решения

Логические задачи

Задача 5.1. В поезде, в одном купе, ехали астроном, поэт, прозаик и драматург. Их фамилии были Алексеев, Борисов, Константинов и Дмитриев. Каждый из них взял с собой книгу, написанную одним из пассажиров купе. Алексеев и Борисов поменялись книгами и углубились в чтение. Поэт читал пьесу. Прозаик, очень молодой человек, выпустивший свою первую книгу, говорил, что он никогда ничего не читает по астрономии. Борисов взял в дорогу одно из произведений Дмитриева. Никто из пассажиров не брал в дорогу и не читал книг, написанных им самим. Что читал каждый из них? Кто кем был?

Решение. Вначале стоит определить, книги каких направлений читали люди каких профессий. Из того, что поэт читает пьесу, а прозаик не читает книги по астрономии, мы получаем следующую таблицу:

	астр	поэт	проз	драм
астр	—	—	+	—
поэт	—	—	—	+
проз	—	+	—	—
драм	+	—	—	—

Заметили ли вы, что обладатели всех профессий выстроились в круг друг за другом? А именно, если их расположить в порядке, кто кого читает, то получается следующая картина:

$$\text{астр} \to \text{проз} \to \text{поэт} \to \text{драм} \to \text{астр}.$$

Можно заметить ещё одну подсказку: Дмитриев написал несколько произведений, а прозаик написал лишь первую книгу. Если Борисов купил в дорогу одно из произведений Дмитриева, а Алексеев и Борисов поменялись книгами, то **Алексеев читает Дмитриева**.

Ещё один вывод можно сделать из факта, что Алексеев и Борисов обменялись книгами. Так как Алексеев не имел свою книгу, то после обмена

Борисов не мог её получить, так что Борисов не читал Алексеева. А кого же он читал? Дмитриева уже читает Алексеев, свою книгу Борисов тоже не читает, следовательно **Борисов читает Константинова**.

Мы получили похожую картинку для фамилий:

$$\text{Алексеев} \to \text{Дмитриев и Борисов} \to \text{Константинов.}$$

Учитывая, что Дмитриев — не прозаик, получаем таблицу со всеми возможными вариантами:

астр	проз	поэт	драм
Д	Б	К	А
К	А	Д	Б
Б	К	А	Д

Наши выводы можно записать в виде высказываний.

Решение 1.

- Алексеев (поэт) читает Дмитриева (драматург).
- Константинов (прозаик) читает Алексеева (поэт).
- Борисов (астроном) читает Константинова (прозаик).
- Дмитриев (драматург) читает Борисова (астроном).

Решение 2.

- Константинов (поэт) читает Алексеева (драматург).
- Борисов (прозаик) читает Константинова (поэт).
- Дмитриев (астроном) читает Борисова (прозаик).
- Алексеев (драматург) читает Дмитриева (астроном).

Решение 3.

- Дмитриев (поэт) читает Борисова (драматург).
- Алексеев (прозаик) читает Дмитриева (поэт).
- Константинов (астроном) читает Алексеева (прозаик).
- Борисов (драматург) читает Константинова (астроном).

Нетрудно убедиться, что во всех вариантах системы утверждений непротиворечивы. □

Задача 5.2. Бобёр, Крокодил и Макака с острова рыцарей и лжецов встретились, и двое сказали:

Бобёр: «Мы все лжецы».

Крокодил: «Ровно один из нас рыцарь».

Кто из этих троих рыцарь и кто лжец?

Решение. Предположим, что Бобёр — рыцарь, следовательно, его высказывание истинно, и он является лжецом. Противоречие. Значит Бобёр — лжец, и его высказывание ложно. Высказывание «Неверно, что мы все лжецы» означает «Среди нас есть рыцари», а не «Мы все рыцари».

Предположим, что Крокодил — лжец, тогда его высказывание ложно, и истинным является высказывание «Количество рыцарей среди нас не равно одному». Так как из высказывания Бобра следует, что рыцари среди Бобра, Крокодила и Макаки имеются, а Бобёр и Крокодил — лжецы, то рыцарь ровно один, это Макака. Мы опять пришли к противоречию, так как Крокодил-лжец сказал правду. Следовательно, Крокодил — рыцарь, а Макака — лжец. □

Доказательство от противного

Задача 5.3. В лесу решили свергнуть монарха-льва и устроили революцию. На выборах президента леса каждый из голосующих зверей вносит в избирательный бюллетень имена 10 наиболее достойных на его взгляд кандидатов. На главной поляне леса находится 11 урн для голосования. После дня выборов выяснилось, что в каждой урне лежит хотя бы один бюллетень, и при всяком выборе 11 произвольных бюллетеней по одному из каждой урны найдётся кандидат, имя которого встречается в каждом из выбранных бюллетеней. Докажите, что по крайней мере в одной урне все бюллетени содержат имя одного и того же кандидата.

Решение. Предположим, что это не так. Если условие задачи не выполнено, то для каждого кандидата в каждой урне найдётся хоть 1 бюллетень, в котором он не записан. Возьмём произвольный бюллетень из первой урны. В нём указаны имена 10 кандитатов в президенты. Тогда во второй урне найдётся бюллетень, на котором не написано имя первого из указанных в данном списке кандидатов, в третьей урне — бюллетень, в котором не указан второй из кандидатов, $\ldots$, в одиннадцатой — в котором не указан десятый из кандидатов. Тогда, если мы возьмём все указанные бюллетени вместе с выбранным из первой урны бюллетенем, кандидата, имя которого встречается в каждом из них, мы не найдём. Полученное противоречие завершает решение задачи. □

Задача 5.4. Узлы квадратной сетки покрашены в два цвета. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с одноцветными вершинами.

Решение. Предположим противное — пусть такого треугольника не существует. Найдём в одной горизонтали два узла одного цвета. Это можно сделать.

Рассмотрим произвольный узел — пусть он цвета A. В одной горизонтали с ним попробуем найти узел такого же цвета. Если этого не удалось сделать — значит, все остальные узлы в этом ряду цвета B, и в таком случае можем взять два узла второго цвета.

В одной вертикали с одним из найденных одноцветных узлов попробуем найти узел такого же цвета. Если это удалось сделать — задача решена.

Иначе имеем две вертикали, каждая из которых за исключением одного узла закрашена в один и тот же цвет, что также приводит к существованию искомого треугольника. Полученное противоречие завершает решение задачи. $\square$

Задача 5.5. Десять друзей послали друг другу праздничные открытки, так что каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.

Решение. Предположим противное, то есть, что таких людей не найдётся. Это будет означать, что в любой паре людей отправлена или только одна открытка, или же ни единой. Всего пар

$$10 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 45,$$

то есть, отправлено не более 45 открыток, однако же всего открыток ровно $10 \cdot 5 = 50$ — противоречие. $\square$

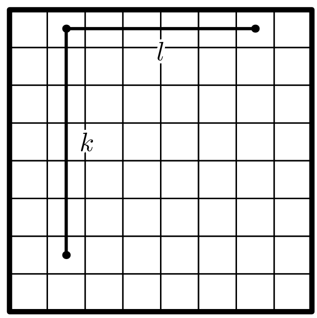
Принцип Дирихле

Задача 5.6. Докажите, что правильный треугольник нельзя полностью накрыть двумя правильными треугольниками с меньшими площадями.

Решение. Заметим, что наибольший отрезок, который можно покрыть правильным треугольником — это длина стороны этого треугольника. Рассмотрим 3 вершины-«кролика» исходного правильного треугольника и 2 меньших правильных треугольника («клетки для кроликов»). Тогда по принципу Дирихле какие-то две вершины должны быть покрыты одним треугольником, что невозможно, что и требовалось доказать. $\square$

Задача 5.7. В таблице 8×8 расставлены целые числа, причём любые два числа в соседних по сторонам клетках отличаются не более, чем на 4. Докажите, что среди этих чисел есть 2 равных.

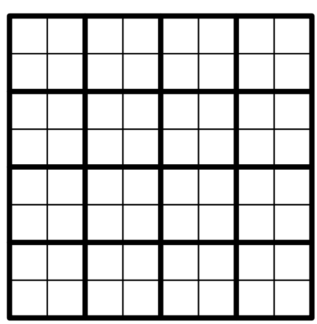
Решение. Предположим противное. Тогда в таблице нет двух одинаковых чисел — все числа различные. Рассмотрим наименьшее и наибольшее из них — они будут отличаться хотя бы на 63. Но от одного из них можно добраться до другого через соседние клетки за, максимум, $k+l \leqslant 7+7 = 14$ ходов (рисунок ниже).



Так как разница между соседними числами не более, чем 4, то, сделав $\leqslant 14$ ходов, разница будет не более, чем $4 \cdot 14 = 56$. Полученное противоречие завершает доказательство задачи. □

Задача 5.8. На шахматной доске более четверти полей занято шахматными фигурами. Докажите, что занятыми оказались хотя бы две соседние (по стороне или углу) клетки.

Решение. Разобьём доску на квадраты 2×2 (на рисунке ниже).



Всего на шахматной доске 64 поля, более четверти из которых занято. Тогда занято не меньше, чем 17 клеток. Так как квадратов-«клеток» всего 16, а фигур-«кроликов» — 17, то по принципу Дирихле в каком-то квадрате стоят хотя бы две фигуры, а, значит, они соседние либо по стороне, либо по углу. □

Математические игры

Задача 5.9. На доске размером 8×8 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы не появлялось закрашенных уголков из трёх клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Воспользуемся симметричной стратегией. Будем играть за второго игрока и делать ходы, симметричные относительно центра доски. Тогда на любой ход первого у нас будет ответ. Действительно, если это не так, а значит, появился уголок из трёх клеток, то в силу симметрии, до нашего хода этот уголок уже был, чего не может быть. А это и означает, что при правильной игре выигрывает второй игрок. □

Задача 5.10. (Кружок малого мехмата — 2012/2013.Игры.5) Двое играют в следующую игру. Каждый игрок по очереди вычеркивает 9 чисел (по своему выбору) из последовательности $1, 2, \ldots, 100, 101$. После одиннадцати таких вычеркиваний останутся 2 числа. Первому игроку присуждается столько очков, какова разница между этими оставшимися числами. Доказать, что первый игрок всегда сможет набрать по крайней мере 55 очков, как бы ни играл второй.

Решение. Первый игрок своим первым ходом вычеркивает 9 центральных чисел от 47 до 55. Далее стратегия первого игрока следующая: при выборе вторым игроком числа a среди прочих, первый игрок своим следующим ходом вычеркивает число b, такое, что $|a - b| = 55$.

Или все оставшиеся числа после первого хода разбиваются на пары

$$(1; 56), (2; 57), \ldots, (a; a + 55), \ldots, (46; 101).$$

Второй игрок своим ходом вычеркивает 9 любых чисел, первый же своим следующим ходом «подчищает» за ним, не оставляя чисел без пары. Таким образом, в конце всегда останется целая пара чисел, разность которых 55. □

Задача 5.11. Дана плитка шоколада размером 6 на 12 долек. Бобры Шломо и Василий решили сыграть в следующую игру: можно взять любой прямоугольный кусок и разломать его по линии раздела долек на два меньших прямоугольных куска. Полученные куски есть нельзя! Проигрывает тот, кто не может сделать ход, а выигравший в данной игре получит весь шоколад. Бобры очень любят 99-процентный шоколад и очень хотят выиграть. Кто выигрывает при правильной игре, если Василий уступил право первого хода Шломо?

Решение. Приведём выигрышную стратегию для Шломо. Первым ходом разломаем шоколадку на два куска размером 6×6. На каждое действие Василия с одной из частей будем производить такое же действие с другой из частей — в этом будет заключаться наша симметричная стратегия. Так как на любой ход Василия у Шломо есть ответный ход, то он выигрывает.

Заметим, что в этой задаче на самом деле совершенно не важно, какой стратегией пользуются бобры: игра в любом случае завершится в пользу Шломо, так как с каждым ходом общее количество кусков увеличивается на один. Вначале был 1 кусок, а в конце — 72. Значит, за всю игру будет сделан ровно 71 ход, и последним сходит Шломо, он и выиграет. □

Принцип крайнего

Задача 5.12. (Н. Х. Агаханов) Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строку, но нельзя записать по кругу так, чтобы сумма каждых двух соседних чисел была квадратом натурального числа.

Решение. Для числа 16 можно найти только одного подходящего соседа, поэтому требуемая запись по кругу невозможна (в круге у каждого числа будет 2 соседа).

Пример, показывающий возможность такового расположения в строку:

$$16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.$$

□

Задача 5.13. На выставке встретились художники, часть которых лично знакома друг с другом. Выяснилось, что любые два из них, имеющие равное число знакомых, не имеют общих знакомых. Доказать, что найдётся художник, знакомый ровно с одним из посетителей выставки.

Решение. Пусть у художника X число знакомых максимально и равно N. У каждого из этих N имеется хотя бы один знакомый X и всего не более N знакомых, причём никакие два их них не имеют одинакового количества знакомых. Следовательно, это числа $1, 2, \ldots, N$. Если среди них не будет посетителя, имеющего только одного знакомого, тогда у кого-то будет $N + 1$ знакомый, что противоречит утверждению, сделанному вначале, поэтому такой посетитель обязательно найдётся. □

Задача 5.14. (А. Я. Розенталь) На плоскости задано множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего две другие точки из M. Докажите, что множество M бесконечно.

Решение. Предположим противное — пусть M конечно. Зафиксируем положение плоскости и выберем крайнюю левую точку. В случае, если их несколько — выберем нижнюю из них. Очевидно, она не может лежать посередине какого-либо отрезка. Противоречие. $\square$

Задача 5.15. Может ли очень странный старец Радагаст нарисовать на листе бумаги 2018 отрезков так, чтобы концы каждого отрезка лежали внутри каких-то двух других отрезков? (Граничные точки отрезка не являются внутренними.)

Решение. Рассмотрим произвольное расположение 2018 отрезков. Проведём произвольную прямую, не перпендикулярную ни одному из данных отрезков — существование такой прямой обусловлено конечным числом направлений исходных отрезков с одной стороны и бесконечно возможным множеством направлений данной прямой с другой. Спроецируем концы данных отрезков на проведённую прямую и рассмотрим конец крайнего отрезка (любого из двух). Очевидно, что он не может лежать внутри какого-то другого отрезка. Противоречие. $\square$

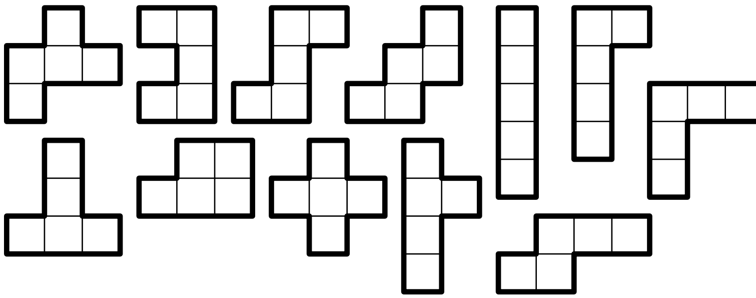
Задача 5.16. Четыре шахматиста из Бобряндии и 7 иностранных шахматистов играли в круговом турнире, где каждый играл с каждым по две партии. Победитель партии получал одно очко, проигравший — ноль, а за ничью давались пол-очка каждому. Все участники набрали различное количество очков, причём сумма всех очков Бобряндских шахматистов оказалась равна сумме всех очков иностранных шахматистов. Докажите, что в тройке призёров был хотя бы один Бобряндец.

Решение. Подсчитаем общее количество сыгранных партий. Всего игроков 11, каждый играл с остальными 10 ($11 \cdot 10$, но каждая партия посчитается два раза, поэтому $11 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$) по два раза ($11 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 110$). Итого 110 партий, следовательно, 110 набранных очков. Тогда каждая группа набрала по 55 очков. Лучший из Бобряндцев набрал не менее 14,5 очков (так как $14{,}5 + 14 + 13{,}5 + 13 = 55$). Если его опередили три иностранца, то они набрали не менее $15 + 15{,}5 + 16 = 46{,}5$ очков. Тогда оставшихся 4 иностранца набрали в сумме 8,5 очков, что меньше 12, которые они набрали бы только при встречах между собой. Противоречие. $\square$

Полный перебор

Задача 5.17. Пентамино — это связная фигура, состоящая из 5 клеток, вырезанная из клетчатого листа бумаги по линиям сетки. Фигуры, совмещаемые при помощи поворота и зеркального отражения, считаются равными. Сколько существует различных пентамино?

Решение. Все возможные пентамино указаны на рисунке. Всего 12 пентамино.



$\square$

Задача 5.18. Перечислите все убывающие четвёрки натуральных чисел, дающих в сумме 15.

Решение. Возможны следующие разбиения числа 15 на сумму четырёх убывающих чисел:

$$9+3+2+1=15; 8+4+2+1=15; 7+5+2+1=15;$$

$$7+4+3+1=15; 6+5+3+1=15; 6+4+3+2=15.$$

$\square$

Разбиения на пары и группы

Задача 5.19. Каких чисел больше среди всех трёхзначных чисел: тех, у которых средняя цифра больше обеих крайних, или тех, у которых средняя цифра меньше обеих крайних?

Решение. Подумаем, почему эта задача расположена в данной теме? Попробуем заметить следующий факт. Если мы рассмотрим трёхзначное число с цифрами $\overline{abc}$, то при вычитании его из числа 999, мы получим число $\overline{(9-a)(9-b)(9-c)}$.

Тогда, если в первом числе средняя цифра была больше обеих крайних, то во втором она будет меньше обеих крайних, и наоборот. Таким образом, разбив числа на пары $100-899, 101-898, \ldots, 499-500$, мы получим, что в каждой такой паре у нас или оба числа не принадлежат ни к одной из категорий, или одно из них принадлежит к первой, а второе — ко второй.

Вне групп лежат числа от 900 до 999. Ни в одном из этих чисел средняя цифра не может быть больше первой цифры из крайних, 9. В то же время, число, например, 909 обладает свойством, что его средняя цифра меньше обеих крайних. Таким образом, итого чисел, у которых средняя цифра меньше обеих крайних, больше чем тех, у которых средняя цифра больше обеих крайних. □

Задача 5.20. Для избавления от проклятья боброведьмы ёжику нужно узнать сумму всех возможных шестизначных чисел, состоящих из $1, 2, 3, 4$. Помогите ёжику.

Решение. Образуем пары вида

$$\overline{abcdef} \text{ и } \overline{(5-a)(5-b)(5-c)(5-d)(5-e)(5-f)},$$

то есть, получим числа вычитанием из 5 каждой цифры исходного числа. Тогда все числа имеют пару и только одну. Сумма двух чисел из пары равна 555555. Сколько существует всего чисел?

Вычтем из каждой цифры 1 и расположим числа в порядке возрастания: $000000, 000001, 000002, 000003, 000010, \ldots$

Это — числа, в которых не более 6 знаков в системе счисления с основанием 4, то есть, числа, меньшие $1000000_4 = 4^6_{10}$. Таких чисел (так как 0 тоже рассматривается) $4^6 = 4096$. Значит, пар таких чисел 2048, и сумма всех таких чисел равна $2048 \cdot 555555 = 1137776640$. □

Подсчёт двумя способами

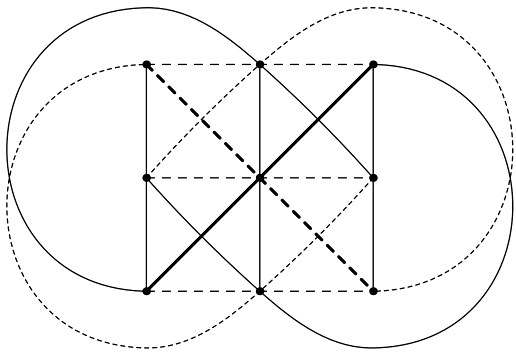
Задача 5.21. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2010.7.9) Сеть автобусных маршрутов в пригороде Амстердама устроена так, что:

а) на каждом маршруте есть ровно три остановки, считая обе конечные;

б) каждые два маршрута либо вовсе не имеют общих остановок, либо имеют только одну общую остановку.

Какое наибольшее количество маршрутов может быть в этом пригороде, если в нём всего 9 остановок?

Решение. Допустим, что существует остановка, через которую проходит хотя бы 5 маршрутов. В соответствии с условием кроме этой остановки ни у каких двух маршрутов из этих 5 другой общей быть не может, а поскольку у каждого маршрута есть ещё по 2 остановки, помимо данной, кроме неё должно быть ещё не менее $5 \cdot 2 = 10$ остановок. Полученное противоречие доказывает, что через каждую остановку проходит не более 4 маршрутов. Так как всего остановок 9, а через каждую проходит не более чем 4 маршрута, всего все маршруты проходят все остановки не более $9 \cdot 4 = 36$ раз, то есть, их не более $36 : 3 = 12$. Пример с 12 маршрутами приведён на рисунке ниже.



□

Задача 5.22. Дано 25 чисел. Сумма любых четырёх из них положительна. Докажите, что сумма их всех тоже положительна.

Решение. Если суммы любых четырёх чисел положительны, то положительны и суммы любых 24 чисел. Таких сумм вида $S - x_i$ всего 25. Если их просуммировать, получится $25S - x_1 - \ldots - x_{25} = 25S - S = 24S$, и это больше нуля. Следовательно, сумма S всех чисел также больше нуля. □

Оценка + пример

Задача 5.23. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2008.7.3) Новогодняя гирлянда, висящая вдоль школьного коридора, состоит из красных и синих лампочек. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в гирлянде, если всего лампочек 50?

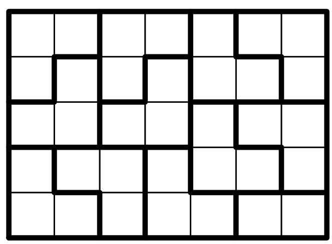
Решение. **Оценка.** Найдём наименьшее количество синих лампочек в гирлянде. Заметим, что рядом с каждой красной лампочкой обязательно имеется синяя, поэтому три красных лампочки подряд не могут идти. Следовательно, среди каждых трёх последовательно идущих лампочек хотя бы одна лампочка синяя. Тогда из 48 лампочек синих будет не меньше, чем $48 : 3 = 16$. Обе лампочки с номерами 49 и 50 оказаться красными не могут. Итак, синих лампочек в гирлянде должно быть не менее 17, следовательно, красных лампочек — не больше 33.

Пример. Пусть лампочки с номерами $2, 5, 8, 11, \ldots, 50$ — синие, а остальные — красные. В гирлянде — 33 красные лампочки. □

Задача 5.24. Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого прямоугольника 5×7?

Решение. **Оценка.** Предположим, что таких уголков 12 — но $12 \cdot 3 = 36 > 35$, поэтому таких уголков может быть не более 11.

Пример. На рисунке ниже пример с 11 уголками.

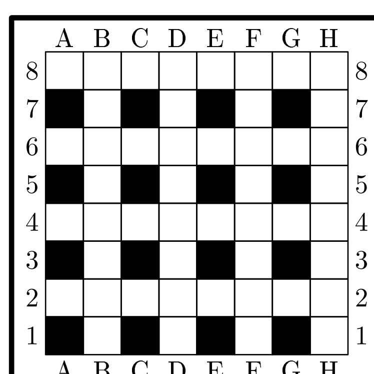


□

Задача 5.25. (Кружок малого мехмата — 2012/2013) Какое наименьшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка в любом квадратике 2×2?

Решение. **Оценка**. Разобъём исходный квадрат на 16 квадратиков 2×2. В каждом из получившихся квадратиков необходимо закрасить минимум одну клетку, так что их не меньше 16.

Пример. Закрасим на доске клетки $A1$, $A3$, $A5$, $A7$, $C1$, $C3$, $C5$, $C7$, $E1$, $E3$, $E5$, $E7$, $G1$, $G3$, $G5$, $G7$ (обозначения клеток — как на шахматной доске). Легко видеть, что закрашено 16 клеток, и при этом в любом квадратике 2×2 есть ровно одна закрашенная клетка (рисунок справа). □



Глава 6

Шахматные доски и фигуры

Задачи, связанные с шахматной доской и шахматными фигурами, — частый гость на олимпиадах. Мы уже использовали шахматную доску в решении некоторых задач, раскрашивая её клетки в различные цвета и разрезая её на кусочки. В данном разделе мы, в основном, будем иметь дело с фигурами, которые расставляются или путешествуют по доске. Мы столкнёмся с прямолинейной ладьёй, которую никто не может сбить с горизонтального или вертикального направления, непреклонным слоном, не желающим уходить с полей одного цвета, универсальным ферзём, который сочетает свойства ладьи и слона, хитрым конём, который может перепрыгивать другие фигуры и медлительным королём, который не может перемещаться более чем на один шаг в любом направлении. Иногда нам предложат воспользоваться другими фигурами, ходы которых будут заданы.

Ряд задач будет связан со свойствами игровой доски, которая может содержать не 8 горизонталей и 8 вертикалей, как обычная шахматная доска, а иметь другие размеры и, к тому же, клетки которой могут быть выкрашены в другие цвета.

1 Шахматные фигуры

На олимпиадах по математике зачастую встречаются задачи, связанные с шахматной доской и шахматными фигурами, в связи с чем мы никак не можем обойти стороной данный вопрос. В условии задачи обычно никогда не пишется, как ходят фигуры, но так как знание шахматных правил не входит в программу Всероссийской олимпиады и других олимпиад, в случае, если вы засомневаетесь, как ходит та или иная фигура, жюри будет обязано ответить на ваш вопрос, потому что правила совершения ходов де-факто являются частью условия.

Напомним шахматные правила, которые могут вам пригодиться на математических олимпиадах:

1. Ладья (некоторые называют эту фигуру в обычной жизни «башней» или «турой», хотя это отнюдь не официальное название) своим ходом перемещается на любое количество клеток либо по горизонтали, либо по вертикали, не имея при этом возможности перепрыгивать через другие фигуры. Кстати, в немецком языке ладья называется «башней», а в английском — «скалой».

2. Слон (некоторые называют его «офицером») в свой ход перемещается на любое количество клеток по диагонали, так же без перепрыгиваний. В других языках его называют «бегун», «епископ».

3. Ферзь (некоторые называют его «королевой», что, кстати, является названием этой фигуры в немецком и английском языках) сочетает в себе возможности ладьи и слона: он ходит на любое число клеток либо по горизонтали, либо по вертикали, либо по диагонали, всё так же без возможности перескока.

4. Король ходит на 1 клетку в любую из сторон, то есть, либо в клетку, имеющую общую границу с данной, либо в клетку, имеющую общую вершину.

5. Конь (некоторые называют его «лошадью») ходит следующим образом: положение коня после его хода должно отличаться от начального положения на 2 клетки по горизонтали и 1 клетку по вертикали, либо на 1 клетку по горизонтали и 2 клетки по вертикали, при этом для возможности хода достаточно того, чтобы потенциальная клетка была свободной от фигуры своего цвета, наличие фигур на любых других клетках ходу коня никоим образом не препятствует. Возможно, вы уже слышали фразу «Конь ходит буквой Г», она как раз характеризует «прыжки» коня. По-немецки это «прыгун», а по-английски — «рыцарь».

Разумеется, при своих ходах фигуры должны оставаться в пределах шахматной доски.

Обычно слова «сделать ход» подразумевают возможность пойти только на пустую клетку, не занятую другой фигурой, «взятие» в настоящих шахматах также является допустимым ходом, но в олимпиадах его возможность обычно оговаривают отдельно.

Говорят, что фигура A бьёт поле b, или что поле b находится под боем фигуры A в случае, если эта фигура имеет возможность пойти на данное поле, даже если на поле b находится другая фигура. Для пешек определение будет иным.

Говорят, что фигура A бьёт фигуру B, находящуюся на поле b, или что фигура B находится под боем фигуры A в случае, если фигура A бьёт поле b. В таком случае фигура A своим ходом может осуществить «взятие» фигуры B.

Если фигура осуществляет взятие другой фигуры, то последняя снимается с доски, а бьющая фигура занимает её место.

Отдельно стоит упомянуть ход пешки: это единственная фигура в шахматах, обычный ход которой отличается от взятия. Обычный ход пешка делает следующим образом: перемещается на 1 клетку «вперёд», то есть, белая/чёрная пешка на 1 клетку вверх/вниз, если стоит на любой, кроме своей начальной, позиции в игре. В начальной позиции пешка может пойти на 1 или 2 клетки «вперёд» по желанию игрока. Под боем пешки находятся поля «вперёд-направо» и «вперёд-налево», т. е. для белой/чёрной пешки поле, находящееся на 1 клетку выше/ниже и левее или правее соответственно. В реальной математической задаче, скорее всего, эти правила будут каким-либо образом изменены, например, пешкам будет разрешено только бить, или будет убрано правило о возможном ходе на 2 клетки и т. п. Существуют и другие случаи взятия пешки, например, так называемое «взятие на проходе», известное тем из вас, кто играет в шахматы, но в задачах по математике оно никогда не рассматривается.

Ходы выполняются по очереди. Запрещено делать ход такой, чтобы в его результате король стороны, сделавшей ход, остался под боем. Сами по себе эти факты вряд ли могут пригодиться, однако то следствие, что позиция, в которой оба короля находятся под боем, в шахматах является невозможной, вполне может подразумеваться как часть условия задачи.

Шахматная доска окрашена в 2 цвета — белый и чёрный по следующему принципу: если некая клетка окрашена в белый цвет, то все имеющие с ней общую границу клетки должны иметь чёрный, и наоборот, таким образом, если мы рассмотрим любую вертикаль или горизонталь, то цвета клеток в ней будут разными у соседних клеток и одинаковыми у клеток, разделённых одной клеткой. Такая раскраска называется «шахматной» и уже рассматривалась в предыдущих главах данной книги.

Если в условии явно не сказано иное, то шахматная доска имеет размер 8×8 клеток.

Стоит обратить внимание на несколько важных соображений.

1. Если из двух одинаковых фигур одна бьёт другую, то и вторая в таком случае обязательно бьёт первую.

2. Количество способов сделать ход у разных фигур на пустой доске может сильно меняться в зависимости от их позиции, за исключением ладьи, имеющей всегда одинаковое число возможных ходов.

3. Все клетки любой из диагоналей окрашены в один и тот же цвет, таким образом, слон в результате своего хода останется на клетке того же цвета, а, значит, и в результате сколь угодно большой серии ходов цвет поля слона никогда не изменится.

4. Конь после своего хода всегда меняет цвет поля, на котором он находится, из чего следует вывод: в результате n сделанных ходов конь сменит цвет своего поля, если n нечётное, и не сменит, если n чётное.

5. Ладья может достичь любой клетки пустой доски, на какой бы она ни находилась изначально, не более, чем за 2 хода. В самом деле: сперва она может пойти вдоль горизонтали на клетку, находящуюся на одной вертикали с требуемой, а затем по вертикали до неё, либо в обратном порядке. Так как ферзь включает в себя возможности ладьи, он также может это сделать.

6. Слон может достичь любой клетки того же цвета пустой квадратной доски, что и та, на которой он находится изначально, не более, чем за 2 хода. Действительно, проведём все возможные 4 диагонали, проходящие через эти две клетки. Гарантированно хотя бы одно пересечение будет находиться в пределах доски (иначе одно из расстояний по вертикали или горизонтали между этими клетками было бы больше горизонтального или вертикального размера доски, что невозможно в случае, если она квадратная), значит, слон может пойти сперва на клетку пересечения, а затем и на требуемую.

Всё вышесказанное относится не только к шахматной доске 8×8, но и к квадратной доске любого другого размера.

2 Обойдите ходом шахматного коня...

Материал для разбора на занятии

Говорят, что мы обошли доску некоторой фигурой, если сделали следующее: поставили нашу фигуру на некую клетку, а затем делали ею ходы только на клетки, не бывшие ещё ни разу занятыми, так, что в какой-то момент все клетки на доске оказались пройденными. Зачастую эта задача может обременяться: например, разрешается начать только с какой-то определённой клетки или же определённой клеткой закончить и тому подобное.

В классическом виде без ограничений данная задача известна, по крайней мере, с XVIII века. Леонард Эйлер посвятил ей большую работу «Решение одного любопытного вопроса, который, кажется, не подчиняется никакому исследованию».

Оформление задач на обход должно выглядеть примерно следующим образом. Если вы доказываете, что обход существует, достаточно привести какой-то один его пример, что нагляднее показывать не списком ходов или иначе, а просто нарисовав доску с числами на полях, идущими в том порядке, в котором фигура побывала на соответствующих клетках. Если же хотите доказывать, что его не существует, то вы должны либо привести некое логическое рассуждение, из которого следует, что если бы обход существовал, то получилось бы какое-то противоречие (то есть, доказать это «от противного», методом, который вы уже прошли в предыдущей главе), либо показать, что все возможные попытки обхода не приводят к успеху, но, как правило, осуществление перебора не является реалистичным в рамках времени, отведённого на олимпиаду. Стоит заметить, что, к примеру, приведение одной неудачной, приведшей к тупику, попытки обхода ничего не говорит о его принципиальной возможности, ведь для доказательства его несуществования нужно рассмотреть все возможные варианты. Проиллюстрируем это нижеследующими примерами.

Задача 6.2.1. Конь стоит в левом нижнем углу доски $2n \times 2n$, где n — натуральное число. Может ли он обойти доску так, чтобы завершить свой путь в правом верхнем углу?

Решение. Попытка обойти шахматную доску конём заставит нас потратить много-много времени. Возможно, мы найдём какой-либо обход всей доски. Но как доказать, что не существует обхода, заканчивающегося именно в правом верхнем углу? Если мы решаем задачу на нарисованном на бумаге квадрате $2n \times 2n$, то можем упустить важные факты. Тут нам поможет шахматная раскраска доски и соображения из кванта «чётность». Как уже было сказано выше, конь меняет цвет поля, на котором находится, в результате одного хода, а также в результате любого нечётного количества ходов, в результате же чётного числа ходов он остается на поле того же цвета. Вот мы и обнаружили, что задача решается с использованием принципа чётности. Пусть левое нижнее поле будет чёрным, как и на настоящей шахматной доске. Правое верхнее поле лежит на той же диагонали, что левое нижнее, значит оно того же цвета и также чёрное. Всего на доске $(2n)^2$ клеток, одна из них уже занята конём, и чтобы обойти все оставшиеся клетки доски, требуется сделать $(2n)^2 - 1$ ходов, т. е. нечётное число, а как мы уже знаем, ход с нечётным номером приведёт коня на белое поле. Так что ответ на вопрос задачи: не может. □

Задача 6.2.2. Конь стоит в левом нижнем углу доски 3×4. Может ли он обойти доску?

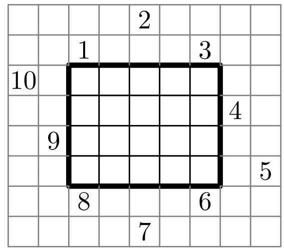
Решение. Да, может, пример обхода на рисунке ниже.

3	6	11	8
12	9	2	5
1	4	7	10

Заметим опять, что существование неудачных путей, которые могут завести в тупик, никак образом не доказывает невозможности обхода.

3	8	5	
6		2	9
1	4	7	

Однажды один из авторов книги в реальной жизни при проверке районной олимпиады по математике увидел, что некий ее участник понял в условии задачи «обойти конем доску 4×5» слово «обойти» не в смысле, указанном выше, а в смысле «пройти вокруг чего-либо и вернуться в исходную точку», приведя следующее решение.



К сожалению, несмотря на то, что человек правильно решил ту задачу, о которой он подумал, ни одного балла поставить ему мы не смогли. □

Задавальник

Задача 6.2.3. (Ленинградские математические кружки — 6.003) Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки. Можно ли обойти её ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

Задача 6.2.4. (Ленинградские математические кружки — 2.003) Может ли конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

Задача 6.2.5. (Московская математическая олимпиада — 1959.8.5) Доказать, что шахматную доску размером 4×4 нельзя обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле ровно один раз.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.1. Обойдите ходом шахматного коня доски а) 5×5; б) 6×6.

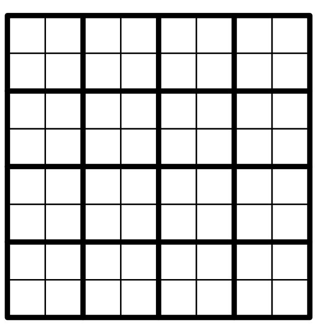
3 Оценка + пример на шахматной доске

Материал для разбора на занятии

Разберем также некоторые задачи, связанные с уже пройденной вами темой «оценка+пример».

Задача 6.3.1. Какое наибольшее количество шахматных королей можно расставить на доске 8×8, чтобы они не били друг друга?

Решение. Попробовав расставить королей несколько раз, можно заметить, что больше 16 расставить никогда не удастся. Возникает логичное предположение, что больше расставить и не получится. Разобьём доску на 16 квадратов 2 на 2 (рисунок а)). Заметим, что в каждом из них можно расставить не более одного короля. Это значит, что всего можно расставить не более 16 королей. Это и есть искомая оценка. Пример расстановки 16 королей можно видеть на рисунке б). Важно понимать, что пример может быть далеко не единственным в задаче, но для решения достаточно привести один.



а) оценка

К		К		К		К	
К		К		К		К	
К		К		К		К	
К		К		К		К	

б) пример

□

Задача 6.3.2. Какое наибольшее количество шахматных слонов можно расставить на доске 4×4 таким образом, чтобы они не били друг друга?

Решение. **Оценка**. «Раскрасим» доску в 6 цветов.

1	3	5	6
2	1	3	5
4	2	1	3
6	4	2	1

Очевидно, что на клетках одного цвета может быть не более одного слона. Так как цветов — шесть, то слонов не может быть более шести.

Пример.

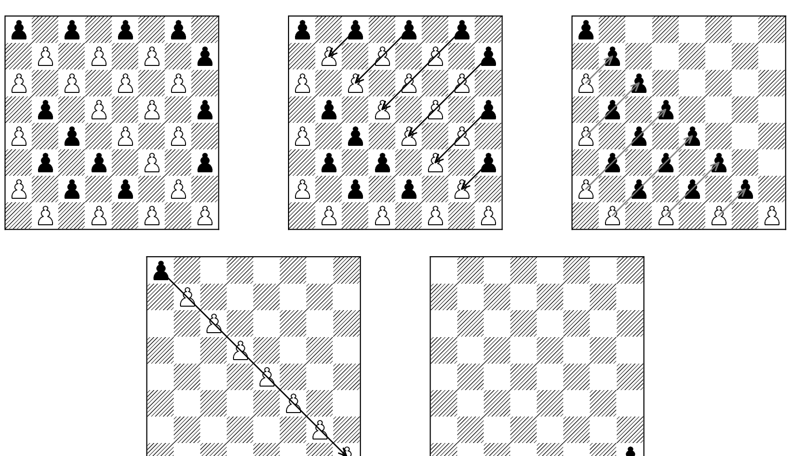
С	С	С	С
	С	С	

□

Задача 6.3.3. (Федеральный окружной этап Всероссийской олимпиады школьников — 2007.8.4) На шахматной доске расставлены во всех клетках 32 белые и 32 чёрные пешки. Пешка может бить пешки противоположного цвета, делая ход по диагонали на одну клетку и становясь на место взятой пешки (белые пешки могут бить только вправо-вверх и влево-вверх, а чёрные — только влево-вниз и вправо-вниз). Другим образом пешки ходить не могут. Какое наименьшее количество пешек может остаться на доске?

Решение. Заметим, что после взятия пешка всегда сохраняет цвет поля, на котором находится, значит, она сохранит цвет своего поля в результате сколь угодно большой серии взятий. Следовательно, в итоге останется не менее 2 пешек — одна на чёрной клетке и одна на белой.

Пример расстановки и серии взятий для пешек, стоящих на белых клетках, указан на рисунке (в результате из 32 пешек остаётся одна).



На чёрных клетках пешки расставлены зеркально-симметрично относительно центральной горизонтали (белая пешка переходит в чёрную, и наоборот). Сначала взятие осуществляет одна из пешек на белой клетке, затем симметричная ей, и так далее. Таким образом, было доказано, что нельзя оставить более 2 пешек, и приведён пример, что завершает решение задачи. □

Задавальник

Задача 6.3.4. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.7.5) Какое наибольшее количество ладей может стоять на шахматной доске, если половина из них белые, половина — чёрные, и при этом никакая белая ладья не бьёт никакую чёрную?

Задача 6.3.5. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2012.7.9) Клетки доски размером 5×5 раскрашены в шахматном порядке (угловые клетки — чёрные). По чёрным клеткам этой доски двигается фигура — мини–слон, оставляя след на каждой клетке, где он побывал, и больше в эту клетку не возвращаясь. Мини–слон может ходить либо в свободные от следов соседние (по диагонали) клетки, либо прыгать (также по диагонали) через одну клетку, в которой оставлен след, на свободную клетку за ней. Какое наибольшее количество клеток сможет посетить мини–слон?

Задача 6.3.6. (Кружок ВМШ 57 школы — 2002.7.2) а) Какое максимальное количество слонов можно расставить на доске 1000×1000 так, чтобы они не били друг друга? б) Какое максимальное количество коней можно расставить на доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

Задача 6.3.7. (Тургор. Весенний тур. Тренировочный вариант — 2007.9.3) Какое наименьшее число ладей нужно поставить на шахматную доску 8×8, чтобы все белые клетки были под боем этих ладей? (Под боем ладьи считаются все клетки строки и столбца, в которых находится ладья.)

Задача 6.3.8. (Тургор. Весенний тур. Тренировочный вариант — 2007.9.1) Клетки доски 9×9 раскрасили в шахматном порядке в чёрный и белый цвета (угловые клетки белые). Какое наименьшее число ладей нужно поставить на эту доску, чтобы все белые клетки оказались под боем этих ладей? (Под боем ладьи считаются все клетки строки и столбца, в которых находится ладья.)

Задача 6.3.9. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2011.9.6) Какое наибольшее количество клеток можно отметить на шахматной доске так, чтобы с каждой из них на любую другую отмеченную клетку можно было пройти ровно двумя ходами шахматного коня?

Задача 6.3.10. (Тургор. Осенний тур. Основной вариант — 2001.8-9.5) Саша выставляет на пустую шахматную доску ладьи: первую — куда захочет, а каждую следующую ставит так, чтобы она побила нечётное число ранее выставленных ладей. Какое наибольшее число ладей он сможет так выставить?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.2. Какое максимальное число а)ладей; б)ферзей; в)коней можно расставить на доске 4×4 так, чтобы они не били друг друга?

Задача 6.3. Какое максимальное число а)слонов; б)ферзей; в)коней можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

4 Разнобой на шахматной доске

В данном разделе приведён разнобой из задач, связанных каким-то образом с шахматными досками и фигурами. Некоторые из данных задач гораздо сложнее, чем они кажутся, поэтому не пугайтесь, если вы не смогли что-то решить.

Задача 6.4.1. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2002.6.2) Поставьте 5 фишек на доску размером 8×8, чтобы любой состоящий из девяти клеток квадрат содержал в точности одну фишку.

Задача 6.4.2. («Математический праздник» — 1998.6.6) Расставьте на шахматной доске 32 коня так, чтобы каждый из них бил ровно двух других.

Задача 6.4.3. (Тургор. Весенний тур. Тренировочный вариант — 1998.8;9.2) Шахматный король обошёл всю доску 8×8, побывав на каждой клетке по одному разу, вернувшись последним ходом в исходную клетку. Докажите, что он сделал чётное число диагональных ходов.

Задача 6.4.4. (Турнир им. Ломоносова — 1990.13) Дан куб $4 \times 4 \times 4$. Расставьте в нём 16 ладей так, чтобы они не били друг друга.

Задача 6.4.5. (Турнир им. Ломоносова — 1991.14) На шахматной доске 4×4 расположена фигура — «летучая ладья», которая ходит так же, как обычная ладья, но не может за один ход стать на поле, соседнее с предыдущим. Может ли она за 16 ходов обойти всю доску, становясь на каждое поле по разу, и вернуться на исходное поле?

Задача 6.4.6. (Московская математическая олимпиада — 1992.8.2) Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечётное число фигур?

Задача 6.4.7. (Тургор. Осенний тур. Основной вариант — 2008.8;9.1) На шахматной доске 100×100 расставлено 100 не бьющих друг друга ферзей. Докажите, что в каждом угловом квадрате 50×50 находится хотя бы один ферзь.

Задача 6.4.8. (Московская математическая регата — 2013.11.3.3)На шахматную доску поставлены 11 коней так, что никакие два не бьют друг друга. Докажите, что на ту же доску можно поставить ещё одного коня с сохранением этого свойства.

Задача 6.4.9. (Тургор. Осенний тур. Тренировочный вариант — 2001.8-9.5) На доске размером 15×15 клеток расставили 15 ладей, не бьющих друг друга. Затем каждую ладью передвинули ходом коня. Докажите, что теперь какие-то две ладьи будут бить друг друга.

Задача 6.4.10. (Московская математическая регата — 2013.7.4.3) На белых и чёрных клетках доски 10×10 стоит по одинаковому количеству ладей так, что никакие две ладьи друг друга не бьют. Докажите, что на эту доску можно поставить ещё одну ладью так, чтобы она не била никакую из уже стоящих.

5 Разбор задач для самостоятельного решения

Обойдите ходом шахматного коня...

Задача 6.1. Обойдите ходом шахматного коня доски а) 5×5; б) 6×6?

Решение. Один из способов обойти доску 5×5.

3	24	13	18	5
14	19	4	23	12
9	2	25	6	17
20	15	8	11	22
1	10	21	16	7

Один из способов обойти доску 6×6.

24	31	4	15	18	29
3	16	25	30	5	14
36	23	32	17	28	19
9	2	35	26	13	6
22	33	8	11	20	27
1	10	21	34	7	12

□

Оценка + пример на шахматной доске

Задача 6.2. Какое максимальное число а)ладей; б)ферзей; в)коней можно расставить на доске 4×4 так, чтобы они не били друг друга?

Решение. а) С ладьями всё просто. Так как каждая ладья бьёт все клетки на своих горизонтали и вертикали, на эти поля ставить других ладей нельзя, но их можно ставить на любые другие небитые клетки. Поэтому на доске 4×4 можно расставить 4 ладьи.

Л			
	Л		
		Л	
			Л

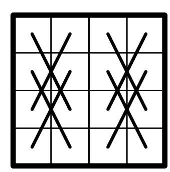
б) Расстановка ферзей — задача на оценку+пример. Оценка, доказанная для ладей, показывает, что больше 4 ферзей на доске расставить нельзя. Пример расстановки 4 ферзей указан на рисунке.

	Ф		
			Ф
Ф			
		Ф	

в) Вспомнив свойство коня — бить только клетки противоположного цвета — мы быстро находим одно из решений: расставить всех коней на полях одного цвета, что даст нам 8 коней (рисунок а)). Для оценки разобьём поле на множества. На этот раз их будет 8 (рисунок б)). На каждом из этих множеств может стоять максимум один конь, поэтому всего можно расставить не более 8 коней.

	К		К
К		К	
	К		К
К		К	

а) пример

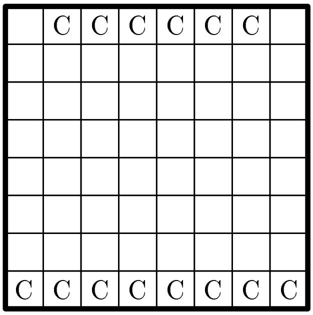


б) оценка

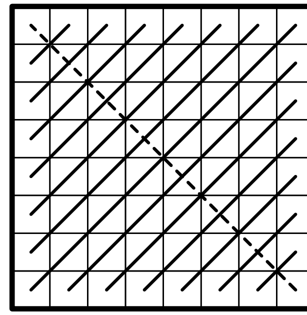
□

Задача 6.3. Какое максимальное число а)слонов; б)ферзей; в)коней можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Решение. а) Докажем, что максимальное число слонов, которых можно расставить так, чтобы они не били друг друга, равно 14. Приведём оценку и пример. Пример изображён на рисунке а).



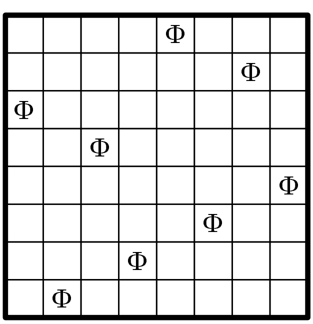
а) пример



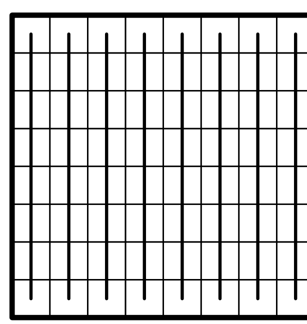
б) оценка

Разобьём доску на 14 множеств клеток, 13 из которых диагонали, а 14-ое — две противоположные клетки (рисунок б)). На каждом из этих множеств может стоять максимум 1 слон, поэтому всего можно поставить максимум 14 слонов.

б) Докажем, что можно расставить не более 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга. Пример изображён на рисунке а). Для доказательства оценки, достаточно заметить, что на каждой вертикали может стоять не более одного ферзя, поэтому можно расставить не более 8 ферзей (рисунок б)). Между прочим, решением этой задачи занимался великий математик Гаусс. Он установил, что существует 92 различные расстановки.



а) пример

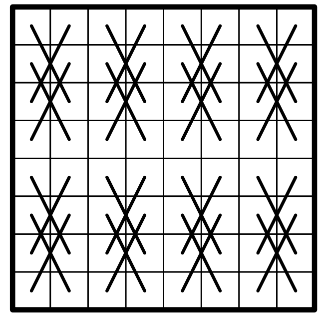


б) оценка

в) Докажем, что максимальное число коней, которых можно расставить так, чтобы они не били друг друга равно 32. Пример изображён на рисунке а) — все кони стоят на чёрных полях и не бьют друг друга (конь бьёт только поля противоположного цвета). Для оценки снова разобьём поле на множества. На этот раз их будет 32 (рисунок б)). На каждом из этих множеств может стоять максимум один конь, поэтому всего можно расставить не более 32 коней.

	К		К		К		К
К		К		К		К	
	К		К		К		К
К		К		К		К	
	К		К		К		К
К		К		К		К	
	К		К		К		К
К		К		К		К	

а) пример



б) оценка

□

Глава 7

Этого вам не расскажут на школьных уроках математики

Данная глава нашей книги посвящена таким темам, которым почти или совсем не уделяется время на школьных занятиях.

Тем не менее, параграфы данной главы приоткроют вам дверь в увлекательный мир невероятно красивой и во всех смыслах удивительной науки — дискретной математики!

Увлекательного путешествия!

1 Графы. Что такое граф?

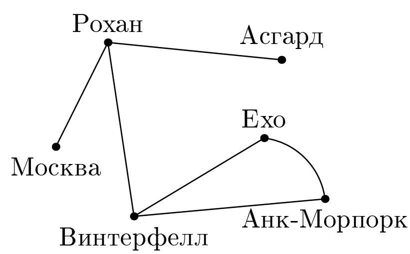
Материал для разбора на занятии

Графы, наверное, одна из наименее любимых тем олимпиадной математики. Редко в каких школах упоминают графы, а изучают их вообще в единичных. Как бы то ни было, олимпиадные задачи на эту тему существуют, и нам придётся их решать. Новичок, пришедший на олимпиаду и увидевший такую задачу, скорее всего, ограничится чтением её условия, после чего перейдёт к другой. Тем не менее, задача на графы может оказаться совсем несложной, и для её решения иногда бывает достаточно знания терминологии, небольшой теории и здравого смысла.

Так что же такое граф?

Определение 8. *Графом* называется конечный набор точек, некоторые из которых соединены линиями. Данные точки называются *вершинами* графа, а соединяющие линии — *рёбрами*.

Наглядно изобразить это можно так: пусть вершины — это некоторые города, а рёбра графа — это дороги, их соединяющие (рисунок ниже). При этом в графе неважно расположение вершин на рисунке или факт пересечения рёбер — один и тот же граф может быть изображён различными способами.



Дадим строгое определение.

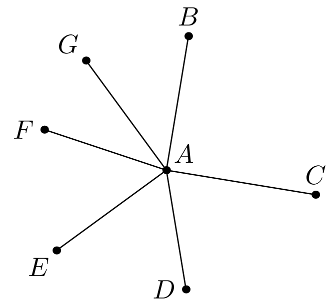
Определение 9. Графы называются *равными* (изоморфными), если они имеют одинаковое количество вершин, и эти вершины можно занумеровать таким образом, что вершины соединены в первом графе тогда и только тогда, когда вершины с такими же номерами соединены во втором графе.

Использование графов помогает представить задачу более наглядно. Для начала разберём следующую задачу.

Задача 7.1.1. («Математический праздник» — 1994.6.6) Пешеход обошёл шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?

Решение. Итак, рассмотрим шесть улиц, выходящих из центра города в разных направлениях, например, как на рисунке справа: шесть отрезков

AB, AC, AD, AE, AF, AG, с общим началом A и без других общих точек.



Пешеход может, выйдя из центра, пройти каждую улицу туда-обратно. Но, очевидно, пройти по каждой улице ровно один раз невозможно.

Таким образом, ответ: такое могло быть! □

Определение 10. *Полным графом* называется граф, в котором каждая вершина соединена с каждой.

Зададимся вопросом, как определить количество рёбер в полном графе с n вершинами? Очевидно, что каждая из n вершин, согласно определению, соединена с остальными $n-1$ вершинами, откуда имеем: $n \cdot (n-1)$, однако таким образом каждое ребро будет учтено дважды. Поэтому окончательно получаем, что число вершин в полном графе из n рёбер равно

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Задача 7.1.2. В Шире между 10 домами проложено 20 аккуратных брусчатых дорог, каждая из которых связывает какие-то два дома. Экономящие своё время аккуратные хоббиты хотят проложить ещё несколько дорог так, чтобы из каждого дома можно было добраться до любого другого, причём лишних дорог строить не требуется (два дома должна соединять лишь одна дорога). Сколько дорог необходимо ещё построить?

Решение. Общее количество дорог в конечном счёте должно быть таким:

$$\frac{10 \cdot (10-1)}{2} = 45.$$

Так как 20 дорог уже проложено, то осталось проложить еще 25. □

Задавальник

Задача 7.1.3. (Кружок малого мехмата — 2013/2014.6.1) В деревне Игуменка 9 домов. Известно, что у Петра соседи Иван и Антон, Максим сосед Ивану и Сергею, Виктор — Диме и Никите, а также по соседству живут Евгений с Никитой, Иван с Сергеем, Евгений с Димой, Сергей с Антоном, и больше соседей в означенной деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Пётр огородами пробраться к Никите за яблоками?

Задача 7.1.4. («Математический праздник» — 1992.6.3) Как, не отрывая карандаша от бумаги, провести шесть отрезков таким образом, чтобы оказались зачёркнутыми 16 точек, расположенных в вершинах квадратной сетки 3×3?

Задача 7.1.5. («Математический праздник» — 1995.6.6) В квадрате 6×6 отмечают несколько клеток так, что из любой отмеченной можно пройти в любую другую отмеченную, переходя только через общие стороны отмеченных клеток. Отмеченную клетку называют *концевой*, если она граничит по стороне ровно с одной отмеченной. Отметьте несколько клеток так, чтобы получилось: а) 10; б) 11; в) 12 концевых клеток.

Задача 7.1.6. («Математический праздник» — 1991.6.6) Метро города Урюпинска состоит из трёх линий и имеет по крайней мере две конечные станции и по крайней мере два пересадочных узла, причём ни одна из конечных станций не является пересадочной. С каждой линии на каждую из остальных можно перейти по крайней мере в двух местах.

Нарисуйте пример такой схемы метро, если известно, что это можно сделать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя два раза один и тот же отрезок.

Задача 7.1.7. (Материалы олимпиадных школ МФТИ) В школе учится 20 детей, причём у любых двух есть общая бабушка. Назовём бабушку «многовнучной», если у неё есть хотя бы 13 внуков. В школе объявили бабушкоапокалипсис, который обязателен для посещения всеми бабушками. Докажите, что хотя бы одна многовнучная бабушка устроит апокалипсис.

Задача 7.1.8. В компании у каждых двух людей ровно пять общих знакомых. Докажите, что количество пар знакомых делится на 3.

Задача 7.1.9. (Иванов, «Математический кружок») а) В группе из четырёх человек, говорящих на разных языках, любые трое могут общаться (возможно, один переводит двум другим). Доказать, что их можно разбить на пары, в каждой из которых имеется общий язык.

б) То же для группы из 100 человек.

в) То же для группы из 102 человек.

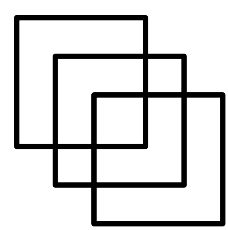
Задача 7.1.10. (Иванов, «Математический кружок») Каждое из рёбер полного графа с 17 вершинами покрашено в один из трёх цветов. Докажите, что есть три вершины, все рёбра между которыми — одного цвета.

Задача 7.1.11. (Ленинградские математические кружки) Каждое из рёбер полного графа с 9 вершинами покрашено в синий или красный цвет. Докажите, что либо есть четыре вершины, все рёбра между которыми — синие, либо есть три вершины, все рёбра между которыми — красные.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.1. (Ленинградские математические кружки) Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля — Меркурий, Плутон — Венера, Земля — Плутон, Плутон — Меркурий, Меркурий — Венера, Уран — Нептун, Нептун — Сатурн, Сатурн — Юпитер, Юпитер — Марс и Марс — Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

Задача 7.2. (Турнир им. Ломоносова — 1998.5-8.11) Можно ли нарисовать эту картинку, как на рисунке справа, не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу?



Задача 7.3. (Ленинградские математические кружки) Каждое из рёбер полного графа с 6 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что есть три вершины, все рёбра между которыми — одного цвета.

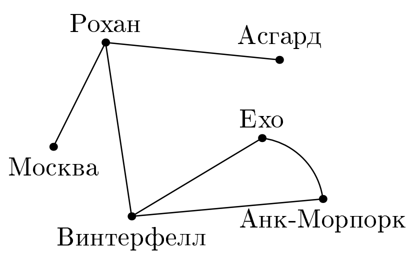
2 Графы. Степень вершины графа

Материал для разбора на занятии

Мы продолжаем разговор о графах: они, как и многие математические объекты, обладают своими характеристиками. По мере изучения темы мы познакомим вас со множеством таких характеристик. Но, для начала, давайте сформулируем, что же такое степень вершины графа.

Определение 11. Количество рёбер, выходящих из данной вершины, называется *степенью* вершины. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется *нечётной*, а чётную степень — *чётной*. Степень вершины v принято обозначать $\deg v$.

Например, на рисунке ниже степень вершины «Рохан» — 3, так как из неё ведёт три дороги — в Москву, Винтерфелл и Асгард.



Сформулируем и докажем следующее важное утверждение.

Лемма 2 (о рукопожатиях)**.** Число нечётных вершин любого графа чётно.

Доказательство. Рассмотрим каждое ребро графа как некоторую «ниточку», соединяющую 2 вершины. Тогда сумма всех степеней вершин графа — это общее количество ниточек, выходящих из всех вершин. Но каждую ниточку мы посчитали по 2 раза, так как она имеет 2 конца. Таким образом, сумма степеней всех вершин в графе чётна.

Предположим, что у нас в графе нечётное количество нечётных вершин. Тогда сумма степеней нечётных вершин — нечётное число, вследствие чего сумма степеней всех вершин графа есть сумма некоторого чётного числа, равного сумме степеней чётных вершин и некоторого нечётного числа, равного сумме степеней вершин нечётных, т. е. нечётное число, что противоречит чётности суммы вершин в графе. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Похожая идея использовалась в предыдущем кванте при нахождении числа рёбер в полном графе. □

Давайте продемонстрируем на примере, насколько мощным инструментом является доказанная лемма.

Задача 7.2.1. Докажите, что число людей, когда-либо державших в руках данную книгу и сделавших нечётное число рукопожатий с другими такими людьми, чётно.

Доказательство. Давайте представим людей, которые держали в руках данную книгу, в виде вершин графа, и соединим рёбрами те вершины, которые соответствуют людям, обменявшимся рукопожатием друг с другом.

Тогда, согласно лемме «о рукопожатиях», количество нечётных вершин в таком графе — чётное число. Значит, и людей, соответствующих этим вершинам, также чётное число, что и требовалось доказать! □

Задача 7.2.2. Кандидат в мэры города Бобров в своей предвыборной компании обещал провести новые телефонные линии между домами следующим образом: всего в городе 25 домов, и каждый дом должен быть соединён ровно с 5 другими. Докажите, что он не сможет сдержать своё обещание.

Доказательство. Пусть дома — это вершины, а телефонные линии — это рёбра графа. Тогда степень каждой вершины равна 5. А сумма всех степеней равна $5 \cdot 25 = 125$, что должно быть равно удвоенному количеству рёбер. Но это невозможно, так как 125 — нечётное число. □

Большое количество ошибок при решении задач на графы заключается в том, что разбираются только частные случаи и не делается попытки решить задачу в общем виде.

Задача 7.2.3. На праздновании Дня рождения Бильбо присутствовала вся его родня, как известно, не отличающаяся благонравным характером и радушием. Поэтому на празднике у каждого из присутствующих хватило терпения поздороваться ровно с n присутствующими (причём у каждого присутствующего это число n одинаково), а Бильбо, внимательно следивший за своими родственниками, подсчитал, что всего было сделано 109 рукопожатий. Чему может равняться n, и каково число присутствующих, если последних было больше двух?

Решение. Количество присутствующих обозначим через s. Тогда число рукопожатий равно:
$$\frac{s \cdot n}{2} = 109.$$
Число 109 — простое, а т. к. $s > 2$, то очевидно, что $n = 2, s = 109$. $\square$

Задача 7.2.4. (Ленинградские математические кружки) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Решение. Рассмотрим граф, в котором вершины — отрезки. Вершины соединены ребром в случае, если соответствующие им отрезки пересекаются. В таком случае имеем нечётное число вершин (9) нечётной степени (3), что противоречит лемме о рукопожатиях. Поэтому ответ — нельзя. $\square$

Задавальник

Задача 7.2.5. («Математический праздник» — 1992.7.3) Резидент одной иностранной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда двусторонних соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

Задача 7.2.6. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2014.6.4) Компания из нескольких друзей вела переписку так, что каждое письмо получали все, кроме отправителя. Каждый написал одно и то же количество писем, в результате чего всеми вместе было получено 440 писем. Сколько человек могло быть в этой компании?

Задача 7.2.7. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2013.6.8) Можно ли нарисовать 1006 различных 2012-угольников, у которых все вершины общие, но при этом ни у каких двух нет ни одной общей стороны?

Задача 7.2.8. («Математический праздник» — 2017.7.6) Среди 49 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

Задача 7.2.9. (Ленинградские математические кружки) У некоторого короля 19 баронов–вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства одно, пять или девять соседних баронств?

Задача 7.2.10. (Иванов, «Математический кружок») В графе каждая вершина — синяя или зелёная. При этом каждая синяя вершина связана с пятью синими и десятью зелёными, а каждая зелёная — с девятью синими и шестью зелёными. Каких вершин больше — синих или зелёных?

Задача 7.2.11. (Иванов, «Математический кружок») В графе из каждой вершины выходит по три ребра. Может ли в нём быть 1990 рёбер?

Задача 7.2.12. (Ленинградские математические кружки) На конференции присутствуют 50 учёных, каждый из которых знаком по крайней мере с 25 участниками конференции. Докажите, что найдутся четверо из них, которых можно усадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом со знакомыми ему людьми.

Задача 7.2.13. (Иванов, «Математический кружок») В кружке у каждого члена имеется один друг и один враг. Доказать, что

а) число членов чётно;
б) кружок можно разделить на два нейтральных кружка.

Задача 7.2.14. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников (Москва) — 2006.6.5) В норке живёт семья из 24 мышей. Каждую ночь ровно четыре из них отправляются на склад за сыром. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждая мышка побывала на складе с каждой ровно по одному разу?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.4. В общежитии живут 214 студентов. Каждый час ровно 4 из них отправляются на кухню перекусить. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждый из студентов столкнулся с каждым на кухне ровно по одному разу?

Задача 7.5. Могут ли степени вершин в графе быть равны: а) $6, 5, 4, 3, 2, 2$; б) $5, 5, 4, 3, 2, 1$; в) $5, 5, 4, 3, 2, 2$?

3 Эйлеровы пути и кёнигсбергские мосты. Перевод рисунка в граф

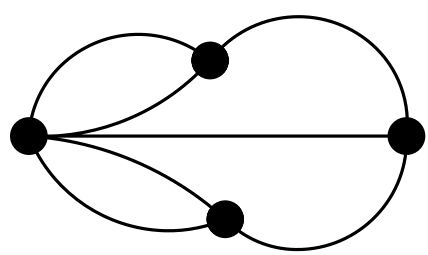
Материал для разбора на занятии

Текущий параграф посвящён одной исторически важной задаче.

Задача 7.3.1 (задача о семи кёнигсбергских мостах). В городе Кёнигсберге было 7 мостов. Найти способ, как можно пройти по всем семи мостам Кёнигсберга, не проходя ни по одному из них дважды.

Решение. Первым, кто решил поставленную задачу, был Леонард Эйлер. Вопроизведём решение великого математика.

Обозначим части города, ограниченные водой, вершинами графа, а мосты, соединяющие части города — рёбрами. Кёнигсберг того времени можно было бы представить следующим образом.



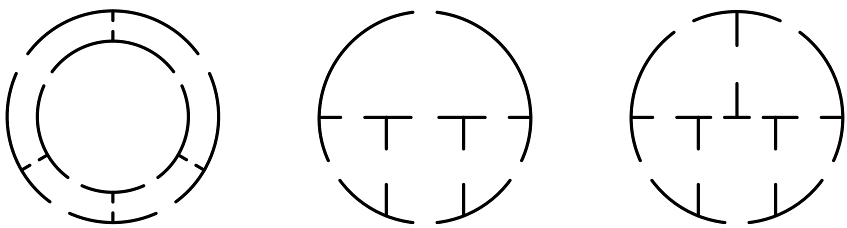
Как мы доказали в предыдущем параграфе, количество нечётных вершин в графе — чётно.

Но Леонард Эйлер шагнул дальше: он пришёл к тому, что

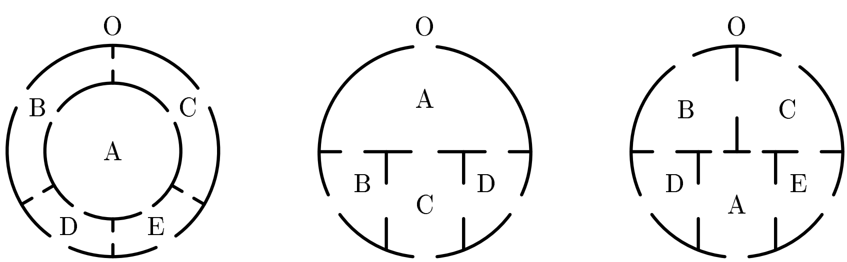
- если в графе все вершины — чётные, то можно начертить данный граф, не отрывая карандаша от бумаги, при этом, начав с любой вершины данного графа и вернувшись в неё же.
- если в графе ровно две вершины — нечётные, то можно начертить данный граф, не отрывая карандаша от бумаги, при этом, начав с любой из нечётных вершин и завершив его в другой нечётной вершине.
- граф, который содержит более двух нечётных вершин, нельзя нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги.

Представленный на рисунке выше граф содержит 4 нечётные вершины. Значит, его нельзя нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, из чего следует, что нельзя пройти по всем мостам Кёнигсберга, не проходя ни по одному из них дважды. □

Задача 7.3.2. Умберто решил построить библиотеку и заказал разработать несколько вариантов планировки комнат (на рисунке ниже), причём обязательным условием было наличие ровно одной двери в каждой стене, отделяющей две комнаты или комнату и внешнее пространство. В каких случаях можно пройти через все двери, не проходя ни через одну более одного раза.



Решение. Представим граф с вершинами-комнатами (одна из вершин — внешняя область) и рёбрами-дверьми.



а) Все степени вершин чётны, Эйлеров обход возможен.

б) Две вершины нечётной степени — цикл существует с концами в данных вершинах.

в) Три вершины нечётной степени — обход невозможен. □

После решения задачи о кёнигсбергских мостах возник новый раздел математики — «Теория графов», с которым можно будет ознакомиться в рамках данной главы.

Для дальнейшей работы необходимо ввести новые понятия.

Определение 12. *Путём* в графе называется упорядоченный набор вершин, в котором каждая следующая вершина соединена с предыдущей ребром.

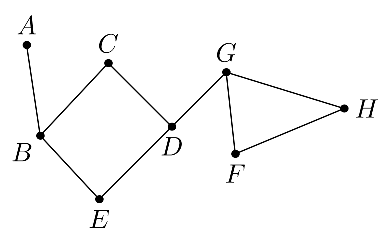
Определение 13. Длиной пути называется количество рёбер, образующих данный путь.

Определение 14. Две вершины в графе называются *смежными*, если они соединены ребром. В противном случае они называются несмежными.

Определение 15. *Циклом* в графе называется путь, в котором начальная и конечная вершины совпадают.

Определение 16. Простым циклом в графе называется путь, который начинается и заканчивается в одной вершине, и при этом не проходит ни через одну из других вершин дважды.

Например, на рисунке ниже $B-C-D-E-B$ и $F-G-H-F$ — это циклы.



Описанные в решении задачи о кёнигсбергских мостах понятия получили свои названия.

Определение 17. *Эйлеровым путём* в графе называется путь, который проходит по каждому ребру, причём ровно один раз.

Определение 18. Эйлеров цикл — замкнутый Эйлеров путь.

Определение 19. Эйлеров граф — граф, из всех рёбер которого можно выделить эйлеров цикл на всех рёбрах.

Задавальник

Задача 7.3.3. (Ленинградские математические кружки — 6.020) Имеется группа островов, соединённых мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошёл все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведёт с Троекратного, если турист:

а) не с него начал и не на нём закончил;

б) с него начал, но не на нём закончил;
в) с него начал и на нём закончил?

Задача 7.3.4. (Ленинградские математические кружки) а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?

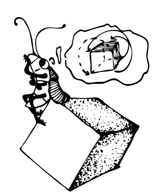
б) Какое наименьшее число раз придётся ломать проволоку, чтобы всё же изготовить требуемый каркас?

Задача 7.3.5. (Тургор. Весенний тур. Тренировочный вариант — 1992/1993. 8-9.4) Муравей ползает по проволочному каркасу куба, при этом он никогда не поворачивает назад. Может ли случиться, что в одной вершине он побывал 25 раз, а в каждой из остальных — по 20 раз?

Задача 7.3.6. (Московская математическая олимпиада — 1961.8.1.4) Дана ладья, которой разрешается делать ходы только длиной в одну клетку. Доказать, что она может обойти все клетки прямоугольной шахматной доски, побывав на каждой клетке ровно один раз, и вернуться в начальную клетку тогда и только тогда, когда число клеток на доске чётно.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.6. В одной из вершин куба сидит таракан. Может ли он проползти по всем его рёбрам ровно по одному разу и возвратиться в исходную вершину?



Задача 7.7. Существует ли эйлеров граф, из которого можно выделить эйлеров цикл несколькими различными способами?

4 Графы. Связные графы

Материал для разбора на занятии

Мы продолжаем говорить о графах. Введём ещё одну их важную характеристику.

Определение 20. Граф называется *связным*, если любые две его вершины могут быть соединены путём, т. е. последовательностью рёбер, каждое следующее из которых начинается в конце предыдущего.

Определение 21. *Дерево* — это связный граф без простых циклов. У дерева количество рёбер на одно меньше количества вершин.

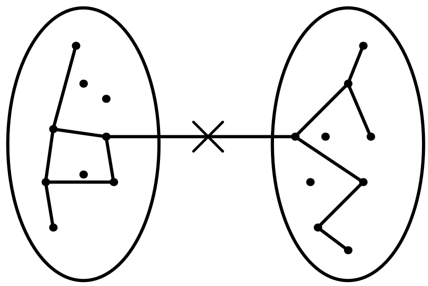
Задача 7.4.1. У живущего в Шире Бильбо Беггинса есть 8 соседей. Причём между девятью соседскими домами проложены дороги, каждая из которых соединяет два дома. Известно, что каждый дом соединён по крайней мере с четырьмя другими. Грядёт праздник Урожая, к которому Бильбо наготовил свиных пирогов по рецепту гондорцев, чтобы угостить своих соседей, до которых можно дойти по дороге (пирог большой, нести непросто; к тому же, обладающий строптивым характером Бильбо не собирается пачкать в пыли свой праздничный кафтан). Докажите, что Бильбо придётся угостить пирогами и поздравить с Днём Урожая всех своих соседей.

Решение. Предположим, что утверждение неверно, и есть какой-то дом A, до которого Бильбо, живущий в доме B, не сможет дойти. Но в таком случае среди оставшихся 7 есть по крайней мере 4 дома, соединённых с домом Бильбо дорогами, а также есть 4 дома, соединённых дорогами с домом A. Но в таком случае один из этих домов соединён дорогой как с A, так и с B, что противоречит предположению. Поэтому Бильбо может по дорогам дойти до любого дома и поздравить любого из хозяев с Днём Урожая. □

Любой граф, не являющийся связным, разбивается на связные части, называемые *компонентами связанности* графа.

Задача 7.4.2. В некоторой стране каждый город соединён ровно с 10 другими, при этом из любого города можно добраться в любой другой. Одну дорогу закрыли на ремонт. Доказать, что из любого города всё ещё можно добраться до любого другого.

Решение. Снова представим себе, что города это вершины, а рёбра — это дороги. Тогда в задаче рассматривается связный граф, степень каждой вершины которого равна 10. Предположим, что после убирания дороги (ребра) граф перестал быть связным. Это значит, что граф разбился на две не связанные между собой части (на рисунке ниже).



Посчитаем сумму степеней в левой части, которая тоже является графом, пусть и меньших размеров. Пусть в ней осталось k городов. Из каждого города, кроме одного, по-прежнему выходит 10 дорог, значит, сумма степеней вершин в этом графе равна $10k-1$. Но это нечётное число, а значит, мы получили противоречие. Таким образом, после убирания ребра граф остался связным, что и требовалось доказать. □

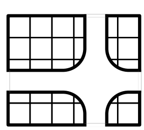
Заметим, что невозможно точное изображение графа — если мы действительно будем проводить по 10 рёбер из каждой вершины, рисунок будет очень громоздким и некрасивым. Поэтому при изображении графов часто всех рёбер и вершин не рисуют, оставляя только важную структуру графа.

Мы знаем из предыдущего параграфа, что такое эйлеров граф. Сформулируем теорему.

Теорема 2. Граф является Эйлеровым тогда и только тогда, когда он связен и все его вершины чётные.

Доказательство данной теоремы будет приведено во второй книге данной серии, но этим фактом можно пользоваться уже сейчас.

Задача 7.4.3. Дана волейбольная сетка размером 12 на 25 квадратиков. Какое наибольшее число верёвочек можно разрезать так, чтобы сетка не распалась?



Решение. Представим сетку в виде графа, где узелки — это вершины, а верёвочки — рёбра. Нам требуется удалить как можно больше рёбер, чтобы граф при этом оставался связным. Будем поступать следующим образом: пока в графе есть цикл, можно убрать одно ребро из этого цикла.

При этом граф останется связным. Будем «резать» циклы до тех пор, пока не останется ни одного. Связный граф без циклов — это дерево. В оставшемся графе будет $13 \cdot 26 = 338$ вершин, значит, в нём будет $338 - 1 = 337$ рёбер. А вначале в графе было $13 \cdot 25 + 12 \cdot 26 = 637$ рёбер. Поэтому можно разрезать максимум $637 - 337 = 300$ верёвочек. Больше ни одной верёвочки разрезать не получится — дерево при удалении любого из рёбер перестаёт быть связным. □

Заметим, что в условии задачи присутствует слово «наибольшее» — это значит, что она на оценку и пример. В данном случае и оценка и пример идут бок о бок, из построения примера следует доказательство оценки.

Задавальник

Задача 7.4.4. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-6.6;7-8.5;9.4) В Империи Вестероса было 1000 городов и 2017 дорог (каждая дорога соединяет какие-то два города). Из каждого города можно было проехать в каждый. Однажды злой волшебник заколдовал N дорог, и ездить по ним стало нельзя. Образовалось 7 королевств, так, что в каждом королевстве можно добраться из любого города в любой по дорогам, а из одного королевства в другое по дорогам добраться нельзя. При каком наибольшем N это возможно?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.8. В стране Ёжландия кандидат в президенты после выборов обещает сделать самолётное сообщение. При этом из столицы будет выходить 7 рейсов, из всех остальных городов — по 6, а из города Бобров — всего один рейс. Жители города Бобров считают, что теперь они даже с пересадками не смогут долететь до столицы. Докажите, что они ошибаются.

Задача 7.9. (Московская математическая олимпиада — 1990.9.1) В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трёх братьев. Докажите, что все семеро — братья.

Задача 7.10. В стране Бобряндии 99 городов, каждый из которых соединён авиалиниями не менее, чем с 50 другими. Докажите, что из каждого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками).

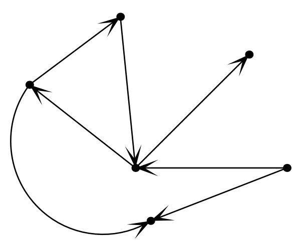
5 Ориентированные графы

Материал для разбора на занятии

Определение 22. Граф называется *ориентированным* (направленным), если его рёбра имеют направление.

Ориентированные графы часто также называют *«орграфы»*.

Изображается это обычно стрелкой на конце в какую-либо сторону (на рисунке ниже). Если это не оговорено особо, в ориентированном графе обычно не могут сосуществовать два ребра между двумя вершинами, одно из которых направлено в одну сторону, а другое — в другую.



В задачах на ориентированный граф обычно упоминаются всякие реки, потоки или дороги с односторонним движением. Иногда — односторонние отношения между людьми (Вася должен деньги Пете, который должен Соломону; Пете нравится Маша, которой нравится Илья, ...).

Аналогично понятию степени вершины в ориентированном графе вводятся понятия «полустепень захода» и «полустепень исхода» — количество рёбер, входящих в вершину и исходящих соответственно. В данном случае рассмотренная ранее лемма о рукопожатиях немного модифицируется.

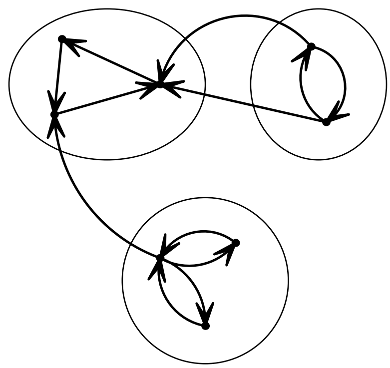
Лемма 3 (Ориентированная лемма о рукопожатиях)**.** В любом орграфе сумма степеней захода всех вершин равна сумме степеней исхода всех вершин.

Неориентированный граф разбивается на компоненты связанности, но структура ориентированного графа более сложная, и здесь понадобятся другие термины.

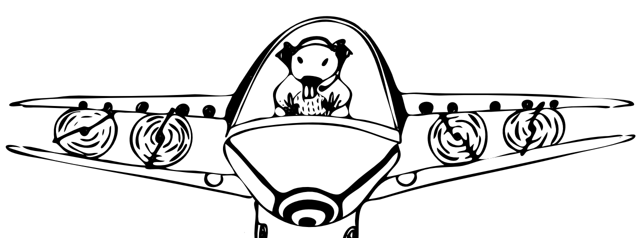
Определение 23. Вершины u и v графа называются *сильно связанными*, если существует путь по рёбрам от u до v и от v до u (передвигаться можно только по направлению стрелок!).

Определение 24. Граф называется сильно связанным, если любые две его вершины сильно связаны.

Любой граф разбивается на компоненты сильной связанности, между которыми проведены ориентированные рёбра (на рисунке ниже). Доказательство данного факта, к сожалению, выходит за рамки данной книги, предлагаем принять его на веру.



Задача 7.5.1. В некоторой стране города соединены односторонними авиалиниями. Известно, что выполняется условие: вылетев из любого города, нельзя в него вернуться, пользуясь этими авиалиниями. Докажите, что можно дополнить систему авиалиний так, чтобы любые два города были бы соединены авиалинией и при этом всё так же, вылетев из города, в него нельзя было вернуться.



Решение. Переформулируем задачу на язык графов: дан ориентированный граф, в котором нет циклов, так как выполняется условие: вылетев из города, нельзя вернуться обратно. Рассмотрим два произвольных города A и B, между которыми нет ребра и докажем, что их можно соединить либо направленным ребром AB, либо направленным ребром BA. Предположим, что это не так. Если нельзя провести направленное ребро AB, значит при его проведении появляется цикл: существует путь S_1 от B до A.

Аналогично, если нельзя провести направленное ребро BA, то существует путь S_2 от A до B. Но тогда, вылетев из вершины A и двигаясь сначала по пути S_2, а потом по пути S_1 мы снова вернёмся в вершину A — противоречие. Поэтому можно провести какое-то направленное ребро между вершинами A и B. Продолжим подобную процедуру, пока между любыми двумя вершинами не будет проведено какое-то направленное ребро, чего и требовалось достигнуть. $\square$

Определение 25. Направленный полный граф (в котором каждая вершина соединена с каждой) называется *турниром*.

Теорию ориентированных графов можно использовать, например, при решении задач на делимость.

Задача 7.5.2. По кругу записаны 7 натуральных чисел. Известно, что в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Докажите, что найдётся пара и несоседних чисел с таким же свойством.

Доказательство. Представим числа как вершины графа, а делимости как ориентированные рёбра: если первое число делится на второе, проведём от первого ко второму стрелку. Тогда между любыми двумя соседними числами обязательно проведена стрелка в какую-либо сторону.

Докажем, что существует две соседние стрелки, направленные в одну сторону (по или против часовой стрелке). Предположим противное: пусть некоторая стрелка направлена по часовой стрелке, тогда следующая — против, и так далее. Но тогда седьмая стрелка будет направлена по часовой стрелке, и нашлось две соседние стрелки, направленные в одну сторону. Поэтому некоторое число a делится на соседнее b, а b делится на соседнее c. Значит, $a \vdots c$ — существует два несоседних числа, одно из которых делится на другое, что и требовалось доказать. $\square$

Мы ввели понятие сильной связности, а значит, бывает ещё и слабая? Да, бывает.

Определение 26. Граф называется *слабо связным*, если каждая вершина может быть достижима из каждой, возможно, с нарушением (против стрелок).

Существует ещё один вид связности.

Определение 27. Граф называется *односторонним*, если для любой пары вершин одна из них достижима из другой.

Задавальник

Задача 7.5.3. (Ленинградские математические кружки) Дима, приехав из Врунляндии, рассказал, что там есть несколько озер, соединённых между собой реками. Из каждого озера вытекают три реки, и в каждое озеро впадают четыре реки. Докажите, что он ошибается.

Задача 7.5.4. (Кружок МЦНМО — 35501) На сторонах некоторого многоугольника расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

Задача 7.5.5. (Ленинградские математические кружки) Докажите, что на рёбрах связного графа можно так расставить стрелки, чтобы из некоторой вершины можно было добраться по стрелкам до любой другой.

Задача 7.5.6. (Ленинградские математические кружки) В некоторой стране есть столица и ещё 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

Задача 7.5.7. (Иванов, «Математический кружок») В стране каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Доказать, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более, чем по двум дорогам.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.11. В Бобряндии есть 11 плотин и все они соединены реками с односторонним и очень сильным течением (слабые лапки бобров не в состоянии вынести данной скорости). Каждая плотина соединена с каждой рекой, причём в каждую плотину втекает 5 рек и из каждой плотины вытекает 5 рек. Докажите, что из любой плотины можно доплыть в любую другую, проплыв не более, чем по двум рекам.

Задача 7.12. В королевстве каждый город соединён с каждым дорогой. Может ли сумасшедший король ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы выехав из любого города, в него нельзя было вернуться?

Задача 7.13. В некоторый момент однокругового турнира из 100 человек оказалось, что все игроки, кроме Лошикова, выиграли по 26 игр, а проиграли по 25. Докажите, что Лошиков совсем не умеет играть.

6 Комбинаторика. Перебор вариантов

Материал для разбора на занятии

Появление многих традиционных разделов математики — алгебры, геометрии, арифметики, — обусловлено практической необходимостью (счётные книги, передел земли и т. д.). Но есть раздел математики, возникновение которого можно связать скорее с развлекательным аспектом в жизни общества — это комбинаторика и теория вероятностей. Различные игры людям были известны ещё с древних времён — египетский сенет, шахматы, шашки, го, позже — карты. В каждой из этих игр приходилось рассматривать различные комбинации передвигаемых фигур. Более того, на более современном этапе игроки — непрофессиональные математики, — вносили свой вклад в комбинаторику как науку. Так, известна переписка заядлого игрока шевалье де Мерэ с Пьером Ферма и Блезом Паскалем, где были затронуты весьма тонкие комбинаторные вопросы.

С темой полного перебора вы уже столкнулись в пятой главе данной книги. Напомним главные принципы решения комбинаторных задач методом полного перебора:

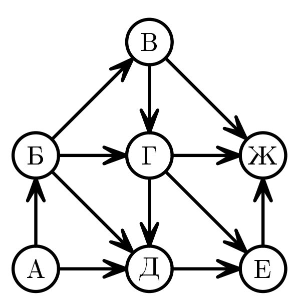
- необходимо обозначать комбинации буквами или цифрами так, что каждая комбинация будет обозначена своей уникальной последовательностью букв или цифр;
- необходимо выписывать комбинации в алфавитном порядке (при обозначении буквами) или по возрастанию чисел (при обозначении цифрами).

При соблюдении этих правил ни один вариант не ускользнёт от вас и, с другой стороны, будет исключена возможность повторения вариантов.

После прохождения темы «графы» мы можем расширить класс задач, которые можно решить переборными методами.

Одна из типовых задач на ЕГЭ по информатике — нахождение количества путей из одной вершины ориентированного графа до другой.

Задача 7.6.1. (Тренировочная работа по информатике 08.10.2013, вариант ИНФ10102.) На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Ж?



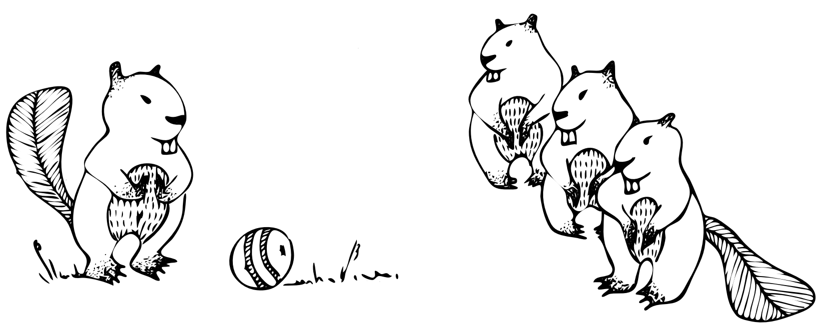
Решение. Распишем возможные пути, перебирая последовательности посещённых вершин, и расположим их в алфавитном порядке, чтобы точно ничего не пропустить: **АБВГДЕЖ; АБВГЕЖ; АБВГЖ; АБВЖ; АБГДЕЖ; АБГЕЖ; АБГЖ; АБДЕЖ; АДЕЖ**.

Заметим, что переборное решение данной задачи стало возможно только потому, что схема дорог оказалась очень маленькой. Существует способ решать такие задачи для больших схем, но это уже лежит за пределами данной темы. □

Задача 7.6.2. В детском саду четверо бобрят. Сколько существует способов выбрать из них двух для того, чтобы отправить их на олимпиаду по лесоведению?

Решение. Пронумеруем бобрят цифрами $1, 2, 3, 4$. Варианты будут следующими: $12, 13, 14, 23, 24, 34$. Всего — шесть вариантов. □

Задача 7.6.3. В детском саду четверо бобрят. Сколько существует способов разбить их на пары для игры в мяч?



Решение. Данная задача очень похожа на предыдущую, но совершенно другая по своей идее. Пронумеруем бобрят цифрами $1, 2, 3, 4$. Варианты будут следующими: $12 - 34, 13 - 24, 14 - 23$. Всего — три варианта. □

Задача 7.6.4. Мерри, Пиппин и Сэм получили в подарок от эльфов Лотлориэна 3 различных плаща, отличающихся цветом фибулы (застёжки). Сколькими способами они могут разделить плащи между собой (чтобы каждому достался ровно один плащ)?

Решение. Пронумеруем плащи и переберём все возможные варианты: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Ответ: 6. □

Задача 7.6.5. А теперь предположим, что эльфы предложили Мерри, Пиппину и Сэму в подарок один из двух плащей на выбор. Сколькими способами они могут выбрать плащи?

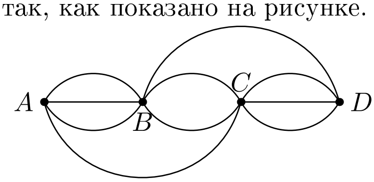
Решение. Пронумеруем плащи и переберём все возможные варианты. Очевидно, здесь будут иметь место повторы чисел: 111, 112, 121, 211, 221, 212, 122, 222. Ответ: 8. □

Задавальник

Задача 7.6.6 (Задача Леонарда Эйлера). Четверо господ при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Сколько существует вариантов, при которых каждый из них получит чужую шляпу?

Задача 7.6.7. (Олимпиада «Физтех» — 2014.7;8) Сколько существует способов составить комиссию из семи человек, выбирая её членов из восьми супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

Задача 7.6.8. (Турнир им. Ломоносова — 2012.7) Города A, B, C и D соединены дорогами так, как показано на рисунке.



Сколькими способами можно проделать путь из города A в город D, побывав в каждом городе ровно по одному разу?

Задача 7.6.9. («Математический праздник» — 1997.7.1) Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998? (Прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаются одинаковыми.)

Задача 7.6.10. Сколько существует чисел, больших, чем 3528, каждое из которых можно получить перестановкой цифр данного числа?

Задача 7.6.11. Сколько существует трёхзначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 4?

Задача 7.6.12. Сколько существует четырёхзначных чисел, сумма цифр которых больше 33?

Задача 7.6.13. На окружности отметили четыре различные точки. Сколько при этом получилось дуг?

Задача 7.6.14. Сколько существует двузначных чисел, у которых первая цифра меньше второй?

Задача 7.6.15. Шесть знакомых обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

Задача 7.6.16. Семеро шахматистов провели двухкруговой турнир, в котором каждый сыграл с каждым по две партии (одну партию белыми фигурами, одну — чёрными). Сколько партий было сыграно на турнире?

Задача 7.6.17. Девять шестиклассников получили по математике, русскому языку и географии четвёрки и пятёрки в четверти. Докажите, что хотя бы у двух из них оценки по этим предметам полностью совпадают.

Задача 7.6.18. Пятнадцать шестиклассников получили по математике, русскому, географии и физкультуре четвёрки и пятёрки в четверти. Можно ли теперь утверждать, что хотя бы у двух из них оценки по этим предметам полностью совпадают?

Задача 7.6.19. Двум врачам нужно посетить четырёх больных, причём каждый врач должен побывать у каких-либо двух больных. Сколькими способами врачи могут распределить между собой эти посещения?

Задача 7.6.20. Есть две белые, две красные и две розовые гвоздики. Сколькими способами их можно расставить в три вазы так, чтобы в каждой вазе стояли по две гвоздики разного цвета?

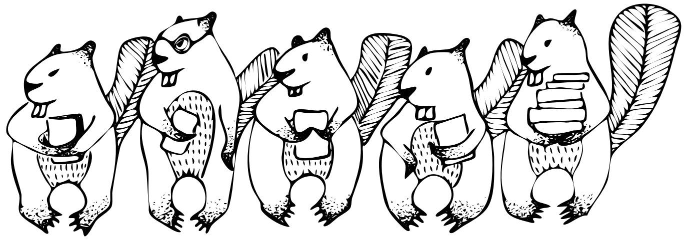
Задача 7.6.21. Петя и Вася играют в пинг-понг, матч продолжается до трёх побед. Сколько существует вариантов протекания матча?

Задача 7.6.22. Из Жёлтой страны в Голубую ведут две дороги, из Голубой страны в Розовую — четыре. Из Жёлтой страны в Фиолетовую ведут три дороги, из Фиолетовой страны в Розовую — тоже три. Прямых дорог из Жёлтой страны в Розовую и из Голубой страны в Фиолетовую нет. Сколькими путями можно добраться из Жёлтой страны в Розовую? А из Голубой страны в Фиолетовую?

Задача 7.6.23. Алфавит племени Ни–Бум–Бум содержит только три буквы — А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из трёх букв. Сколько слов в языке этого племени?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.14. В детском саду пятеро бобрят. Сколько существует способов выбрать из них двух для того, чтобы отправить их на олимпиаду по лесоведению?



Задача 7.15. В детском саду шестеро бобрят. Сколько существует способов разбить их на пары для игры в мяч, если Вася хочет играть только с Ильёй или Алисой?

Задача 7.16. Мерри, Пиппин и Сэм получили в подарок от эльфов Лотлориэна 4 различных плаща, отличающихся цветом фибулы (застёжки). Сколькими способами они могут разделить плащи между собой (чтобы каждому достался ровно один плащ)?

7 Комбинаторика. Правила сложения и умножения

Материал для разбора на занятии

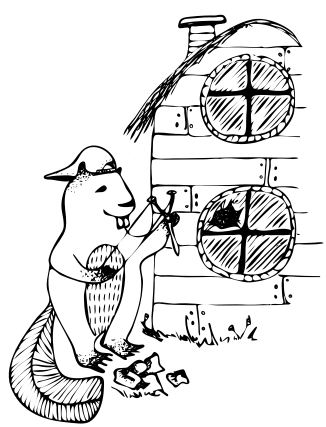
Итак, мы продолжаем изучение комбинаторики. В предыдущем кванте был разобран базовый способ решения комбинаторных задач — перебор вариантов. Чтобы двигаться дальше, сформулируем два утверждения, которыми мы в дальнейшем будем пользоваться.

Утверждение 6 (Правило сложения)**.** Если объект A можно выбрать n способами, а объект B можно выбрать m способами, то выбрать объект A *или* B можно $m+n$ способами.

Утверждение 7 (Правило умножения)**.** Если объект A можно выбрать n способами, а объект B можно выбрать m способами, то выбрать объект A *и* B можно $m \cdot n$ способами.

Если вы новичок в этой теме, то при решении задачи следует каждый раз проговаривать про себя — какой союз нужно поставить «и» или «или», и умножать или складывать соответственно.

Задача 7.7.1. У хулигана Васи есть 5 разных камней, один из которых он выбирает и бросает в одно из 4 окон квартиры своего друга Пети. Сколькими способами он может это сделать?

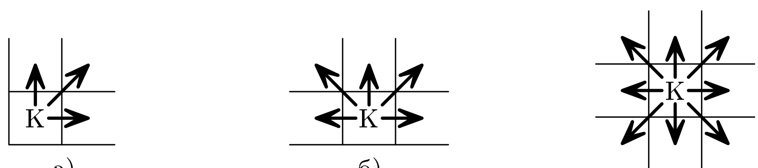


Решение. Пользуемся правилом умножения: нужно выбрать камень, который он бросает, **и** окно, в которое он его бросает. Итого получается $5 \cdot 4 = 20$ способов. □

Задача 7.7.2. Сколькими способами на шахматной доске можно расставить двух королей — чёрного и белого, чтобы они не били друг друга?

Решение. Попробуем воспользоваться правилом умножения: первого короля можно расставить 64 способами — на любое поле. Но вот количество способов расстановки второго короля будет уже зависеть от того, куда мы поставили первого короля: в угол, на границу или на остальные поля.

Поэтому сначала придётся воспользоваться правилом сложения: первый король стоит в углу **или** на границе, **или** на остальных полях.



а) б) в)

В первом случае король бьёт три поля, и ещё на одном стоит, поэтому второго короля можно поставить $64 - 4 = 60$ способами. Так как угловых полей всего 4, то расставить двух королей в этом случае мы можем $4 \cdot 60$ способами — расставляем первого короля 4 способами **и** второго короля — 60 способами.

Граничных полей всего 24, значит первого короля мы можем поставить 24 способами **и** второго короля — $64 - 6 = 58$ способами (король, стоящий на границе, бьёт 5 полей и ещё одно поле занимает). То есть в этом случае есть $24 \cdot 58$ способов.

В третьем случае способов $36 \cdot 55$, по аналогичным соображениям. Итого, получается $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$ способов. □

Используя приведённые правила, можно ещё раз обратиться к хоббитам из предыдущего пункта.

Задача 7.7.3. Мерри, Пиппин, Сэм, Фродо и Гэндальф получили в подарок от эльфов Лотлориэна 5 различных плащей, отличающихся цветом фибулы (застёжки). Сколькими способами они могут разделить плащи между собой (чтобы каждому достался ровно один плащ)?

Решение. Очевидно, что перебором решать эту задачу долго. Пусть хоббиты и волшебник выбирают плащи по очереди. Так, Мерри может выбрать себе плащ пятью способами, после этого выбор Пиппина сократится до четырёх, Сэма до трёх, Фродо до двух, а у Гэндальфа выбора не останется. Воспользуемся правилом умножения: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способов. □

В последней задаче можно задаться вопросом — а если хоббиты и волшебник будут выбирать плащи в другом порядке, не возникнут ли ещё новые случаи? Предлагаем самим убедиться, что в силу симметрии рассматриваемые случаи окажутся такими же.

И, в дополнение, можно сформулировать ещё одно важное правило.

Утверждение 8 (Правило деления)**.** Если каждый способ при подсчёте был учтён n раз, то результат нужно поделить на n.

В разобранных задачах таких моментов ещё не возникало — каждый способ там был подсчитан ровно по 1 разу, чего нельзя сказать про следующую задачу.

Задача 7.7.4. Кошка поймала 20 мышек. Сколькими способами она может выбрать себе ужин, если на ужин она съедает 2 мышек?

Решение. Воспользуемся правилом умножения: первую мышку она может выбрать 20 способами и вторую — 19 способами, так как одна мышка уже выбрана. Значит ответ — $19 \cdot 20$? А вот и нет. Дело в том, что мы каждый способ выбора мышек подсчитали по два раза. Действительно, рассмотрим двух мышек — Микки и Минни. Есть два способа: сначала выбран Микки, потом Минни, или наоборот — сначала Минни, а потом Микки. Поэтому искомое количество способов равно

$$\frac{19 \cdot 20}{2} = 190.$$

□

Задача 7.7.5. Мерри и Пиппин получили в подарок от эльфов Лотлориэна 3 плаща, отличающихся цветом фибулы (застёжки) — изумрудный и два серебряных. Сколькими различными способами они могут разделить плащи между собой (чтобы каждому достался ровно один плащ)? (Уточним, что серебряные плащи принципиально не отличаются друг от друга.)

Решение. Попробуем перебрать варианты: ИС, СИ, СС (И — изумрудный, С — серебряный), итого 3 варианта.

Теперь попробуем применить правило умножения. Мерри выбирает один из трёх плащей, Пиппин — один из оставшихся двух: $3 \cdot 2 = 6$. Как мы видим, полученный ответ в два раза больше предыдущего. Дело в том, что в последних шести встречаются повторяющиеся варианты из-за двух одинаковых серебряных плащей. Если обозначить их $С_1$ и $С_2$, то это наглядно видно: $ИС_1$, $ИС_2$, $С_1И$, $С_2И$, $С_1С_2$, $С_2С_1$. □

Задавальник

Задача 7.7.6. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-6.2;7-8.1) Сколько натуральных чисел от 1 до 2017 имеют ровно три различных натуральных делителя?

Задача 7.7.7. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-6.2) Сколько трёхзначных натуральных чисел имеют чётное число различных натуральных делителей?

Задача 7.7.8. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-8.6;9.5) Сколькими способами можно разложить число 10000 на три натуральных множителя, ни один из которых не делится на 10? Считаем, что разложения, отличающиеся только порядком сомножителей, не различаются.

Задача 7.7.9. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-6.6) Сколькими способами можно разложить число 1024 на три натуральных множителя так, чтобы первый множитель был кратен второму, а второй — третьему?

Задача 7.7.10. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-6.5;7-8.4;9.3) Вася придумывает четырёхзначный пароль для кодового замка. Он не любит цифру 2, поэтому не использует её. Кроме того он не любит, когда две одинаковые цифры стоят рядом. А ещё он хочет, чтобы первая цифра совпадала с последней. Сколько вариантов надо перебрать, чтобы гарантированно угадать Васин пароль?

Задача 7.7.11. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-6.4;7-8.3;9.2) Петя придумывает пароль для своего смартфона. Пароль состоит из четырёх десятичных цифр. Петя хочет, чтобы пароль не содержал цифру 7, при этом в пароле должны быть хотя бы две (или более) одинаковые цифры. Сколькими способами Петя может это сделать?

Задача 7.7.12. («Математический праздник» — 1998.6-7.1) На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

Задача 7.7.13. («Математический праздник» — 1996.6.3) Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятёрка?

Задача 7.7.14. (Турнир им. Ломоносова — 2016.5-8.4) Сколько чисел, делящихся на 4 и меньших 1000, не содержат ни одной из цифр 6, 7, 8, 9 или 0?

Задача 7.7.15. («Покори Воробьёвы горы» 2017.5-6.5;7-8.6;9.4) На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольный треугольник с катетами, равными 7 клеткам (катеты идут по линиям сетки). Потом обвели все линии сетки, находящиеся внутри треугольника. Какое наибольшее количество треугольников можно найти на этом рисунке?

Задача 7.7.16. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.6.5) Мария Ивановна покупает 16 шариков для Последнего звонка. В магазине есть шарики трёх цветов: синего, красного и зелёного. Сколько существует вариантов различных покупок 16 шариков, если Мария Ивановна хочет, чтобы шарики каждого цвета составляли не менее четверти от количества всех шариков?

Задача 7.7.17. (Городская устная математическая олимпиада для 6—7 классов — 2009.6.8) Отец говорит сыну:

— Сегодня у нас у обоих день рождения, и ты стал ровно в 2 раза моложе меня.

— Да, и это восьмой раз за мою жизнь, когда я моложе тебя в целое число раз.

Сколько лет сыну, если отец не старше 75 лет?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.17. Кошка поймала 20 мышек. Сколькими способами она может выбрать себе завтрак, обед и ужин, если:

- эти мышки были большими, и ей достаточно одной, чтобы наесться;
- эти мышки были средних размеров, и на каждую трапезу ей необходимо по 2 мышки;
- кошка на диете, и она пропускает один из приёмов пищи, при этом на одном из приёмов пищи она хочет съесть двух мышек, а на другом — одну?

Задача 7.18. Сколько существует способов раскрасить таблицу 2×3 в 2 цвета — белый и чёрный, чтобы обязательно хотя бы одна клетка была белой и хотя бы одна клетка была чёрной?

Задача 7.19. В проекте «Олимпиадные школы круглый год» приняли участие 24 человека. Сколькими способами можно выбрать:

а) двух счастливчиков, которые получат специальные призы от координатора проекта (призы одинаковые);

б) трёх счастливчиков, которые получат специальные призы от координатора проекта (призы разные)?

Задача 7.20. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8 при условии, что цифры не должны повторяться?

8 Метод математической индукции

Материал для разбора на занятии

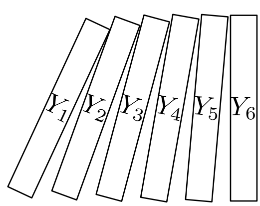
Метод математической индукции (ММИ) используется для доказательства ряда утверждений, при которых каждое следующее утверждение доказывается из предыдущего:

$$Y_1 \to Y_2 \to Y_3 \to \ldots \to Y_n \to Y_{n+1} \to \ldots$$

Первое утверждение называется *базой индукции*.

Каждая стрелка — *индукционный переход*: если истинно n-е утверждение и корректен переход, то истинно и $n+1$-е утверждение. Таким образом, индукция работает следующим образом: из первого утверждения следует второе, из второго — третье, и так далее, вплоть до любого n. При этом обычно корректность всех переходов доказывается единым образом.

Индукция подобна принципу домино: если мы толкнём первое домино (база индукции), то каждое домино будет толкать следующее (индукционный переход), и цепочка упавших домино добежит до любого домино.



Задача 7.8.1. (Шень, «Математическая индукция») Доказать с помощью математической индукции, что (при любом $n \geqslant 1$):

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение. База индукции: $n = 1$. Очевидно, что

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1.$$

Переход: используя утверждение

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2},$$

докажем, что

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}.$$

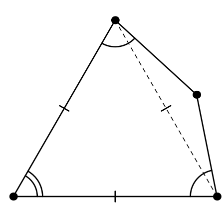
Действительно, так как $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$, прибавим к обеим частям части $n+1$:

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2},$$

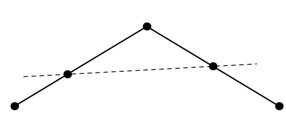
что и требовалось доказать. □

Задача 7.8.2. Доказать, что для любого $n \geqslant 4$ существует выпуклый n-угольник, у которого ровно 3 острых угла.

Решение. База индукции: $n = 4$, достаточно построить выпуклый четырёхугольник с 3 острыми углами и 1 тупым, это делается несложно (рисунок ниже).



Переход: используя утверждение о существовании такого n-угольника, докажем существование $(n+1)$-угольника. Поступим следующим образом: возьмём n-угольник с 3 острыми углами (а он существует, это утверждение номер n), поскольку n не меньше 4, есть хотя бы 1 тупой угол. «Отрежем» один из тупых углов, как это показано на рисунке ниже, при этом образуется 2 угла, каждый из которых больше отрезаемого, т. е. оба тупые.



Заметим, что, вообще говоря, индукция в этом случае начиналась не с первого, а с четвёртого утверждения, но это на решение никак не влияет — по нашей аналогии с домино, они начинаются с номера 4. □

Отметим, что база индукции, как правило, хоть и очевидна, всё же требует аккуратной проверки. Если нет базы, нет и индукции — некому толкнуть первое домино, чтобы запустить цепную реакцию.

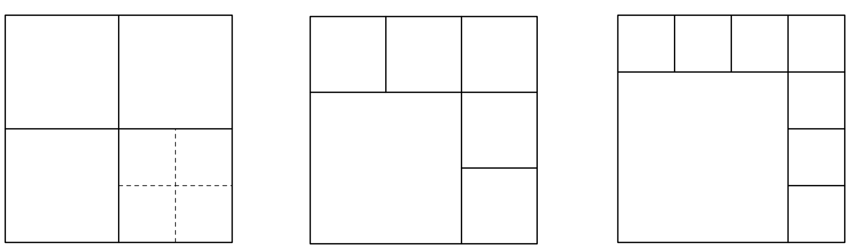
Особенность метода *полной* математической индукции в том, что при доказательстве утверждения номер $n+1$ можно пользоваться истинностью всех утверждений от номера 1 до номера n. Формально это можно записать так:

$$\text{из } \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\} \text{ следует } Y_{n+1}.$$

Обычно при применении метода полной математической индукции используются лишь несколько предыдущих утверждений, а не сразу все. Можно привести следующую аналогию: если метод математической индукции можно было представить, как набор домино, и чтобы упало текущее домино, её должна была «подтолкнуть» предыдущая. А теперь домино каким-то образом ещё связаны некими шарнирами, и для того, чтобы упало $n+1$-ое домино, должны упасть все домино, с которыми она соединена.

Задача 7.8.3. Докажите, что любой квадрат можно разрезать на любое, начиная с шести, количество квадратов.

Решение. Попробуем сначала разрезать квадрат хотя бы на какое-нибудь число квадратов. Очевидно, каким образом квадрат разрезается на 4 части. Немного поразмыслив, можно найти и способ разрезания на 6 и на 8 частей (на рисунке ниже).



Заметим теперь, что если мы, например, хотим разрезать квадрат на 7 частей, то достаточно разрезать его на 4 части, а потом один из кусков снова разрезать на 4 части. Вообще, если какой-то квадрат разрезан на n частей, то при разрезании любого из его квадратов на 4 части получается $n+3$ части, то есть выполняется следствие $Y_n \to Y_{n+3}$ для любого n. Выполняются цепочки следствий:

- $Y_6 \to Y_9 \to Y_{12} \to Y_{15} \to \ldots;$
- $Y_7 \to Y_{10} \to Y_{13} \to Y_{16} \to \ldots;$
- $Y_8 \to Y_{11} \to Y_{14} \to Y_{17} \to \ldots.$

То есть для того, чтобы запустить домино, нужно, чтобы выполнялись Y_6, Y_7 и Y_8. Но в этом мы уже убедились. □

Можно сказать, что в рассмотренной задаче три независимые цепочки домино, и чтобы все три запустились, база должна быть сложной — состоять из трёх утверждений. Применяя полную индукцию, нужно внимательно следить за выполнением сложной базы, иначе не запустится «цепная реакция».

Задача 7.8.4. При каких $n > 3$ набор гирь с массами $1, 2, 3, \ldots, n$ граммов можно разложить на три равные по массе кучки?

Решение. Чтобы гири можно было разделить требуемым образом, суммарная масса гирь должна делиться на 3. Сумма масс от 1 до n равна $n(n+1)/2$ (мы это уже доказали), и поэтому n может давать только остатки 0 или 2 при делении на 3.

Если можно разбить на три равные по массе кучки набор из n гирек, то и набор из $n + 6$ гирек тоже можно разбить требуемым образом, поскольку гири массами $n+1, n+2, \ldots, n+6$ легко разложить на три равные по массе кучки.

Легко проверить, что при количестве гирек, равных числам 5, 6, 8 или 9, существуют требуемые разбиения:

- $1 + 4 = 2 + 3 = 5$;
- $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$;
- $1 + 2 + 3 + 6 = 4 + 8 = 5 + 7$;
- $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 6 + 9 = 7 + 8$.

Значит, разбить можно все наборы из количества гирь, дающего остатки 0 или 2 при делении на 3. □

Напоследок приведём несколько примеров ошибочного применения метода математической индукции.

Задача 7.8.5. Докажем, что любые n лошадей одного цвета.

«Доказательство». База: $n = 1$. Действительно, база очевидна — любая лошадь одного цвета сама с собой.

Переход: утверждение n — любые n лошадей одного цвета. Отсюда докажем, что любая $n + 1$ лошадь одного цвета. Действительно, рассмотрим любую $n + 1$ лошадь: $Л_1, Л_2, \ldots, Л_n, Л_{n+1}$. По предположению индукции лошади из множества $\{Л_1, \ldots, Л_n\}$ — одного цвета, так же как и лошади из множества $\{Л_2, \ldots, Л_{n+1}\}$. Но лошадь $Л_2$ находится в обоих множествах, значит и вся $n + 1$ лошадь одного цвета. □

Предлагаем читателю остановиться на минутку и задуматься — где ошибка в приведённом рассуждении?

А ошибка кроется в следующем: на самом деле неверен переход $Y_1 \to Y_2$, в этом случае $Л_2$ не находится в обоих множествах, и рассматриваемые множества вообще не пересекаются. Хоть остальные переходы верны: из второго утверждения следует третье, и третьего — четвёртое, и так далее, индукция работать не будет: первое домино упало, но не задело второе, и цепочка прервалась.

Б. Рассел, критикуя идею индукции (с точки зрения философии), приводит в «Проблемах философии» следующий пример.

Задача 7.8.6 (индюк-индуктивист). Предположим, что фермер каждый день кормит индюка. Индюк привыкает к этому и при виде фермера ждёт, что ему отсыплют положенную порцию. Предположим, индюк — неплохой индуктивист, и не хочет торопиться с выводами. Он начинает наблюдать за фермером и определяет, во сколько ему приносят еду. Индюк полагает, что и завтра фермер принесёт ему еду, и, убедившись в своей правоте, надувается от гордости. Индюку невдомёк, что на следующий день фермер, вместо того, чтобы принести еды, зарежет его, изжарит и съест.

В чем неправ индюк, и почему он всё-таки неважный индуктивист? А неправ он в том, что здесь не существует индуктивного перехода и из того, что сегодня всё хорошо, не следует, что всё так же будет завтра.

Задавальник

Задача 7.8.7. (Московская математическая олимпиада — 1962.10.2.5) В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым из остальных одну партию. Доказать, что участников можно так занумеровать, что окажется, что ни один участник не проиграл непосредственно за ним следующему.

Задача 7.8.8. (Шень, «Математическая индукция») Рассмотрим всевозможные обыкновенные дроби с числителем 1 и любым (целым положительным) знаменателем:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$$

Доказать с помощью математической индукции, что для любого $n > 3$ можно представить единицу в виде суммы n различных дробей такого вида. Например, при $n = 3$ можно написать так:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

(Ясно, что двумя дробями не обойтись, поскольку все дроби, кроме первой, меньше половины. Можно также проверить, что для трёх дробей есть только один вариант.)

Задача 7.8.9. (Шень, «Математическая индукция») Доказать, что любой из квадратов

$$2 \times 2,\ 4 \times 4,\ 8 \times 8, \ldots, 2^n \times 2^n, \ldots,$$

из которого вырезан угловой квадратик 1×1, можно разрезать на уголки из трёх клеток.

Задача 7.8.10. (Шень, «Математическая индукция») В последовательности Фибоначчи

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55, \ldots$$

каждый следующий член равен сумме двух предыдущих. Доказать, что два делящихся на 7 числа в ней не могут стоять рядом.

Задача 7.8.11. (Кружок малого мехмата — 2016/2017.7) На плоскости проведены n прямых, проходящих через одну точку. Докажите, что они разбивают плоскость на $2n$ областей.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.21. Любую ли сумму из целого числа тугриков, больше семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами по 3 и 5 тугриков?

Задача 7.22. Доказать, что любое натуральное число можно представить в виде суммы различных степеней двойки.

9 Инвариант

Материал для разбора на занятии

Пусть в задаче присутствует некоторый «процесс», например, на доске заданы числа, которые можно менять по какому-то правилу, или позиция, из которой можно делать некоторые ходы. Можно сказать, что это игра, в которой участвует один игрок. Именно по таким признакам можно определить, что задача именно на инвариант, а не на другую тему.

Определение 28. *Инвариант* — это математическая величина или математическое свойство, которое остаётся постоянным, то есть не изменяется при некотором преобразовании.

Зачастую инвариантом является чётность (остаток при делении на 2) или остаток от деления на какое-либо число комбинации некоторых чисел, связанных с данной задачей. Рассмотрим одну из типичных задач на инвариант.

Задача 7.9.1. На доске написано 6 чисел — 3, 14, 15, 9, 2, 6. За одну операцию к любым двум числам можно прибавить 1. Можно ли сделать все числа одинаковыми?

Решение. При взгляде на условие задачи первой идеей будет пытаться увеличивать маленькие числа, чтобы они достигли больших. Но, немного помучившись, мы легко уравняем пять чисел, а вот шестое будет от них отличаться. Использовать перебор для решения задачи не получится, так как случаев бесконечно много (вдруг они, например, уравняются в миллионе). Доказать, что это сделать невозможно, поможет принцип инварианта.

Как найти инвариант? Нужно проследить некоторую закономерность. Что не поменялось, если к двум числам была прибавлена единица? Нетрудно понять, что сумма всех чисел увеличится на 2, поэтому сумма — **не** инвариант. Но мы знаем, что если к числу прибавить 2, то его чётность не изменится. Таким образом, чётность суммы всех чисел всегда остаётся неизменной и равной тому, чему она была вначале. А какая она была? Так как среди чисел $3, 14, 15, 9, 2$ и 6 нечётное число нечётных чисел, то и сумма всех чисел будет нечётной. Но ведь нам нужно, чтобы все числа стали равными друг другу, следовательно, их сумма должна делиться на 6 (их количество), то есть должна быть чётной. Отсюда и следует то, что эти числа невозможно сделать равными. □

Задача 7.9.2. В 8 «А» классе процветает бизнес: Вася меняет 1 шоколадную конфету на 6 леденцов, а Петя меняет 1 леденец на 6 шоколадных конфет. В класс приходит новый ученик Соломон, у которого есть 1 шоколадная конфета. Он может неограниченное число раз обращаться к своим новым одноклассникам для обмена. Может ли у него оказаться поровну леденцов и шоколадных конфет, при условии, что он их не ест.

Решение: Попробуем найти инвариант. В каждый момент времени материальное положение Соломона характеризуется двумя числами: числом шоколадных конфет X и числом леденцов Y. Для удобства обозначим его парой (X, Y). Эта пара могла поменяться за один ход следующим образом: либо она превратилась в $(X-1, Y+6)$, либо в $(X+6, Y-1)$. Заметим, что разность между числами изменилась на 7. Это значит, что не поменялся остаток от деления на 7 у разности количества шоколадных конфет и леденцов. В конце эта разность, а значит и остаток при делении на 7, должна стать равной нулю. А изначально она была равна 1. Это невозможно, а значит, что Соломон не сможет добиться своей цели. $\square$

Задача 7.9.3. (Объединённая межвузовская математическая олимпиада школьников — 2011) Ваня сдал три ЕГЭ. По русскому языку он набрал на 5 баллов меньше, чем по физике, а по физике — на 9 баллов меньше, чем по математике. Золотая рыбка, приснившаяся Ване, обещала выполнить любое количество желаний следующих видов:

- прибавить по баллу за каждый экзамен;
- за один экзамен (по выбору Вани) уменьшить баллы на 3, а за каждый из двух остальных — увеличить на 1.

Рыбка выполняет желание, если при этом ни один результат не превысит 100 баллов. Мог ли Ваня во сне набрать 100 баллов более чем по одному экзамену?

Решение. Допустим, что Ване удалось это сделать. Обозначим число баллов, полученных им за эти 2 экзамена (баллы за оба которые он превратил в 100), за x и y соответственно. В результате одного акта волшебства происходит следующее: либо $(x, y) \to (x+1, y+1)$, либо $(x, y) \to (x-3, y+1)$, либо $(x, y) \to (x+1, y-3)$. Рассмотрим величину $(x-y) \bmod 4$. Легко видеть, что она является инвариантом. Но вначале разности баллов у всевозможных пар предметов не кратны четырём (они равны 5, 9 и 14), а в конце разность баллов по каким-то двум экзаменам должна быть равна нулю, то есть, кратна четырём. Таким образом, ни при каких условиях Ванина задумка не удастся. $\square$

Задавальник

Задача 7.9.4. (Турнир городов — 1987,7-8) В левый нижний угол шахматной доски 8×8 поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку, то есть симметрично отражаться относительно её центра (прыгать можно по вертикали, горизонтали и диагонали). Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки вновь в форме квадрата 3×3, но в другом углу:

а) левом верхнем;
б) правом верхнем?

Задача 7.9.5. (Турнир городов — 1987,7-10) Имеются два трёхлитровых сосуда. В одном 1 л воды, в другом — 1 л двухпроцентного раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить полуторапроцентный раствор в том сосуде, в котором вначале была вода?

Задача 7.9.6. (Турнир городов — 1985,7-10) На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т. п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

Задача 7.9.7. (Кружок МЦНМО — 2004/2005.6) На вешалке висят 20 платков: 17 девочек по очереди подходят к вешалке, и каждая либо снимает, либо вешает ровно один платок. Может ли после ухода девочек на вешалке остаться 10 платков?

Задача 7.9.8. (Козлова Е. Г., «Сказки и подсказки») В языке Древнего Племени алфавит состоит всего из двух букв: «М» и «О». Два слова являются синонимами, если одно из другого можно получить при помощи исключения буквосочетаний «МО» и «ООММ» или добавления в любое место буквосочетания «ОМ». Являются ли синонимами в языке Древнего Племени слова «ОММ» и «МОО»?

Задача 7.9.9. (Кружок МЦНМО — 2004/2005.7) Хулиганы Вася и Петя порвали стенгазету, причём Петя рвал каждый кусок на 5 частей, а Вася на 9. При попытке собрать стенгазету нашли 1988 обрывков. Докажите, что нашли не все кусочки.

Задача 7.9.10. (Ленинградские математические кружки) На столе стоят семь стаканов — все вверх дном. За один ход можно перевернуть любые четыре стакана. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.23. По кругу записаны числа $1, 2, 3, 2, 2, 0$. За один ход можно к любым двум соседним числам прибавить по единице. Можно ли все числа сделать равными?

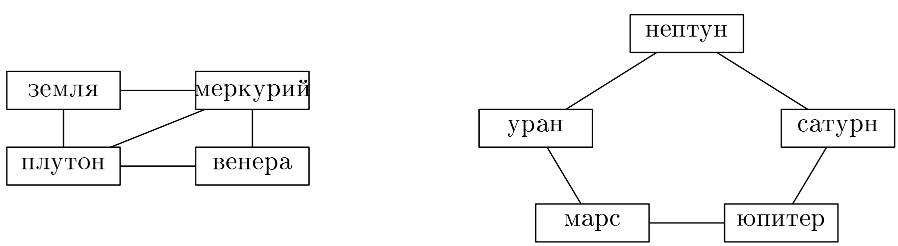
Задача 7.24. На шести плотинах сидят шесть бобров, на каждой плотине — по бобру. Плотины стоят в ряд с интервалами в десять метров. Если какой-то бобёр переплывает с одной плотины на другую, то какой-то другой бобёр обязательно переплывает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все бобры собраться на одной плотине? А если бобров и плотин — семь?

10 Разбор задач для самостоятельного решения

Графы. Что такое граф?

Задача 7.1. (Ленинградские математические кружки) Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля — Меркурий, Плутон — Венера, Земля — Плутон, Плутон — Меркурий, Меркурий — Венера, Уран — Нептун, Нептун — Сатурн, Сатурн — Юпитер, Юпитер — Марс и Марс — Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

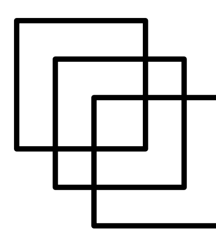
Решение. Нарисуем схему: планетами будут соответствовать точки, а соединяющим их маршрутам – не пересекающиеся между собой линии.



Теперь видно, что долететь от Земли до Марса нельзя.

Ответ: нельзя. □

Задача 7.2. (Турнир им. Ломоносова — 1998.5-8.11) Можно ли нарисовать эту картинку, как на рисунке справа, не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу?

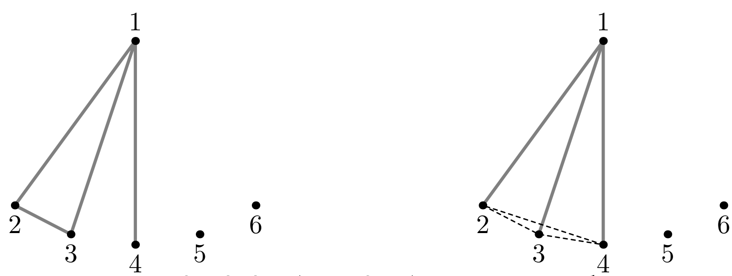


Решение. Пронумеруем три квадрата, из которых состоит фигура. Начнём рисовать первый квадрат с любой его точки до тех пор, пока не дойдём до точки пересечения со вторым квадратом. Затем прерываем обход первого квадрата и рисуем второй до тех пор, пока не дойдём до его точки пересечения с третьим. Затем рисуем полностью третий квадрат, окончив, дорисовываем второй, затем — первый. Каждый раз мы будем оканчивать рисовать квадрат в той же точке, в которой начинали, то есть в точке пересечения с предыдущим квадратом.

Ответ: можно. □

Задача 7.3. (Ленинградские математические кружки) Каждое из рёбер полного графа с 6 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что есть три вершины, все рёбра между которыми — одного цвета.

Решение. Рассмотрим одну из вершин данного графа. Ввиду полноты графа, из неё выходит 5 рёбер. По принципу Дирихле, как минимум 3 из данных рёбер — одного цвета. Пронумеруем вершины графа. Пусть рассматриваемая вершина имеет номер 1, и рёбра одного цвета выходят в вершины с номерами 2, 3 и 4.



Тогда, если вершины 2 и 3, 3 и 4 или 2 и 4 соединены ребром того же цвета, то у нас выделился одноцветный треугольник. Если же все данные рёбра имеют другой цвет, то выделился одноцветный треугольник на вершинах 2, 3 и 4. □

Графы. Степень вершины графа

Задача 7.4. В общежитии живут 214 студентов. Каждый час ровно 4 из них отправляются на кухню перекусить. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждый из студентов столкнулся с каждым на кухне ровно по одному разу?

Решение. Заметим, что всего существует

$$\frac{214 \cdot 213}{2} = 107 \cdot 213$$

пар студентов. Каждый час на кухне встречается 4 из них, это $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ пар. Но так как $107 \cdot 203$ число нечётное, то оно не может делиться на 6. Поэтому не могло получиться так, что в какой-то момент времени каждый из студентов столкнулся с каждым ровно по разу.

Заметим, что задачу можно сформулировать на языке графов: есть полный граф на 214 вершинах (в котором проведены все рёбра), требуется узнать, можно ли его разбить на полные подграфы на 4 вершинах. □

Задача 7.5. Могут ли степени вершин в графе быть равны: а) $6, 5, 4, 3, 2, 2$; б) $5, 5, 4, 3, 2, 1$; в) $5, 5, 4, 3, 2, 2$?

Решение. а) Предположим, что такой граф существует. Сумма степеней вершин в данном графе — чётное число, таким образом, явного противоречия по данному критерию нет. Сколько всего вершин в данном графе? Шесть. Но у первой вершины степень 6, то есть, из неё выходит больше рёбер, чем это возможно. Таким образом, такого графа не существует.

б) Предположим, что такой граф существует. Если в графе на 6 вершинах существует вершина со степенью 5, это значит, что она соединена со всеми остальными. Таким образом, вершины с номером 1 и 2 соединены со всеми остальными вершинами, то есть, в том числе, с вершиной номер 6. Тогда степень вершины 6 не менее 2. Полученное противоречие завершает доказательство несуществования данного графа.

в) Сумма степеней вершин в данном графе — нечётное число, что приводит к противоречию. □

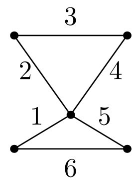
Графы. Эйлеровы пути и кёнигсбергские мосты

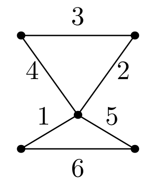
Задача 7.6. В одной из вершин куба сидит таракан. Может ли он проползти по всем его рёбрам ровно по одному разу и возвратиться в исходную вершину?

Решение. Представим куб как граф, где вершинами графа будут вершины куба, а его рёбрами — рёбра куба. Тогда вопрос может быть сформулирован как «Является ли полученный граф Эйлеровым?». В данном графе 8 вершин, у каждой из которых степень 3. Значит, Эйлерова цикла в данном графе не существует и таракан так проползти не сможет. □

Задача 7.7. Существует ли эйлеров граф, из которого можно выделить эйлеров цикл несколькими различными способами?

Решение. Да, такие графы существуют. На данном графе можно выделить Эйлеров цикл как на левом рисунке, так и на правом.





□

Графы. Связные графы

Задача 7.8. В стране Ёжландия кандидат в президенты после выборов обещает сделать самолётное сообщение. При этом из столицы будет выходить 7 рейсов, из всех остальных городов — по 6, а из города Бобров — всего один рейс. Жители города Бобров считают, что теперь они даже с пересадками не смогут долететь до столицы. Докажите, что они ошибаются.

Решение. Предположим, что из города Бобров нельзя будет долететь до столицы. Это означает, что граф, вершинами которого являются города, а рёбрами — авиалинии, является несвязным. При этом столица и город Бобров находятся в разных компонентах связанности. Рассмотрим ту компоненту, в которой находится город Бобров: степени всех вершин, кроме одной, равны 6, и степень одной вершины равна 1. Но тогда сумма всех степеней является нечётным числом, что невозможно. Поэтому жители города Бобров ошибаются, и из него точно можно долететь до столицы. □

Задача 7.9. (Московская математическая олимпиада — 1990.9.1) В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трёх братьев. Докажите, что все семеро — братья.

Решение. Предположим, что это неверно, и есть по крайней мере два мальчика, не являющиеся братьями. Тогда по условию из оставшихся 5 у каждого из них есть по крайней мере три брата — но в этом случае по крайней мере один из них будет их общим братом, а, значит, и они между собой должны являться родными братьями. Данное противоречие доказывает утверждение задачи. □

Задача 7.10. В стране Бобряндии 99 городов, каждый из которых соединён авиалиниями не менее, чем с 50 другими. Докажите, что из каждого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками).

Решение. Если существует пара городов, которые не соединены цепочкой рёбер (авиалиний), то данный граф является несвязным. Значит, в нём выделяется не менее 2 компонент связности. Так как каждый город соединён не менее, чем с 50 другими, то в одной компоненте связности не может быть менее $1+50=51$ вершины (сам город и 50 городов, соединённых с ним рёбрами). Таким образом, так как в графе не менее 2 компонент связности, в нём не менее $51\cdot 2=102$ вершин, а 99 меньше 102. Полученное противоречие завершает решение задачи.

На самом деле, верен более общий факт — если в графе n вершин и каждая вершина имеет степень не менее, чем $\frac{n-1}{2}$, то такой граф связен. $\square$

Ориентированные графы

Задача 7.11. В Бобряндии все 11 плотин соединены реками с односторонним и очень сильным течением (слабые лапки бобров не в состоянии вынести данной скорости). Каждая плотина соединена с каждой рекой, причём в каждую плотину втекает 5 рек и из каждой плотины вытекает 5 рек. Докажите, что из любой плотины можно доплыть в любую другую, проплыв не более, чем по двум рекам.

Решение. Рассмотрим две плотины с номерами X и Y. Пусть река идёт из плотины X в плотину Y. Тогда, из X в Y можно добраться, проплыв только по одной реке. Можно ли добраться из Y в X? Из Y выходят реки в 5 плотин, а в X входят реки из 5 плотин. Если эти плотины не совпадают, всего в Бобряндии должно быть не менее $5+5+1+1=12$ плотин (по 5 плотин для каждой из плотин X и Y и сами эти плотины). А всего в стране 11 плотин, что приводит к противоречию. Значит, какие-то из плотин совпадают и мы можем доплыть из Y в X через одну из них. $\square$

Задача 7.12. В королевстве каждый город соединён с каждым дорогой. Может ли сумасшедший король ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы выехав из любого города, в него нельзя было вернуться?

Решение. Тут мы имеем дело с введением ориентации (с заданными свойствами) на обычном графе. Занумеруем все вершины и будем ставить все стрелки от меньшего номера к большему. Таким образом, мы никогда не сможем добраться из города с большим номером к городу с меньшим номером. $\square$

Задача 7.25. В некоторый момент однокругового турнира из 100 человек оказалось, что все игроки, кроме Лошикова, выиграли по 26 игр, а проиграли по 25. Докажите, что Лошиков совсем не умеет играть.

Решение. Подсчитаем общее количество выигрышей в данном турнире — их $26 \cdot 99 + x$, где x — количество выигрышей Лошикова. Общее количество проигрышей в данном турнире равно $25 \cdot 99 + y$, где y — количество проигрышей Лошикова. Так как общее количество выигрышей в турнире равно общему количеству проигрышей, то $26 \cdot 99 + x = 25 \cdot 99 + y$, таким образом, $y - x = 99$. Лошиков всего сыграл 99 игр, то есть, сумма количества его выигрышей и проигрышей не превосходит 99. Таким образом, $x = 0$. Значит, Лошиков не выиграл ни разу, а проиграл 99 раз. Таким образом, можно сделать вывод, что он совершенно не умеет играть. □

Комбинаторика. Перебор вариантов

Задача 7.13. В детском саду пятеро бобрят. Сколько существует способов выбрать из них двух для того, чтобы отправить их на олимпиаду по лесоведению?

Решение. Пронумеруем бобрят номерами от 1 до 5. Тогда на олимпиаду по лесоведению можно выбрать двух из них следующими способами:

$$1 \text{ и } 2; 1 \text{ и } 3; 1 \text{ и } 4; 1 \text{ и } 5; 2 \text{ и } 3; 2 \text{ и } 4; 2 \text{ и } 5; 3 \text{ и } 4; 3 \text{ и } 5; 4 \text{ и } 5,$$

то есть, итого существует 10 способов. □

Задача 7.26. В детском саду шестеро бобрят. Сколько существует способов разбить их на пары для игры в мяч, если Вася хочет играть только с Ильёй или Алисой?

Решение. Пронумеруем бобрят номерами от 1 до 6. Пусть Вася имеет номер 1, Илья имеет номер 2, а Алиса — номер 3. Тогда разбить на пары их можно следующими способами:

1. $1 + 2$, $3 + 4$, $5 + 6$;
2. $1 + 2$, $3 + 5$, $4 + 6$;
3. $1 + 2$, $3 + 6$, $4 + 5$;
4. $1 + 3$, $2 + 4$, $5 + 6$;
5. $1 + 3$, $2 + 5$, $4 + 6$;
6. $1 + 3$, $2 + 6$, $4 + 5$.

Таким образом, всего возможно 6 способов. □

Задача 7.14. Мерри, Пиппин и Сэм получили в подарок от эльфов Лотлориэна 4 различных плаща, отличающихся цветом фибулы (застёжки). Сколькими способами они могут разделить плащи между собой (чтобы каждому достался ровно один плащ)?

Решение. Очевидно, в каждом из случаев один из плащей останется невыбранным. Если отбросить четвёртый плащ, остальные три можно разделить шестью способами. Также по шесть способов будет, если отбросить третий, второй или первый плащи. Таким образом, мы имеем $6 \cdot 4 = 24$ варианта. □

Комбинаторика. Правила сложения и умножения

Задача 7.15. Кошка поймала 20 мышек. Сколькими способами она может выбрать себе завтрак, обед и ужин, если:

- эти мышки были большими, и ей достаточно одной, чтобы наесться;
- эти мышки были средних размеров, и на каждую трапезу ей необходимо по 2 мышки;
- кошка на диете, и она пропускает один из приёмов пищи, при этом на одном из приёмов пищи она хочет съесть двух мышек, а на другом — одну?

Решение. 1. На завтрак кошка может выбрать одну из 20 мышек, на обед одну из 19 оставшихся, и на ужин — одну из 18 мышек, всего $20 \cdot 19 \cdot 18$ вариантов.

2. На завтрак кошка должна выбрать 2 из 20 мышек, на обед 2 из 18 оставшихся, и на ужин — 2 из 16, т. е. всего

$$\frac{20 \cdot 19}{2} \cdot \frac{18 \cdot 17}{2} \cdot \frac{16 \cdot 15}{2} \text{ вариантов.}$$

3. Вариантов того, какой приём пищи она пропустит, ровно 3. Способов после этого выбрать приём пищи, на котором она съест 2 мышки — 2. В последнем оставшемся приёме пищи она съест одну мышь. В приёме пищи, в котором она съест 2 мышки — $\frac{20 \cdot 19}{2}$ вариантов выбора, в приёме, в котором она съедает одну мышь — 18. По правилу произведения, получаем

$$3 \cdot 2 \cdot \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 18 \text{ вариантов.}$$

□

Задача 7.16. Сколько существует способов раскрасить таблицу 2×3 в 2 цвета — белый и чёрный, чтобы обязательно хотя бы одна клетка была белой и хотя бы одна клетка была чёрной?

Решение. Вариантов раскраски каждой клетки 2, каждая клетка красится независимо, поэтому по правилу произведения всего возможных вариантов раскраски 2^6, из которых 2 случая не подходят — когда все клетки белые и когда все клетки чёрные, поэтому подходящих по условию вариантов $2^6 - 2$. □

Задача 7.17. В проекте «Олимпиадные школы круглый год» приняли участие 24 человека. Сколькими способами можно выбрать:

а) двух счастливчиков, которые получат специальные призы от координатора проекта (призы одинаковые);

б) трёх счастливчиков, которые получат специальные призы от координатора проекта (призы разные)?

Решение. В первом случае нам нужно выбрать 2 из 24 человек без учёта порядка, т. е. вариантов будет $\frac{24 \cdot 23}{2}$.

Во втором же случае порядок важен, и вариантов $24 \cdot 23 \cdot 22$. □

Задача 7.18. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8 при условии, что цифры не должны повторяться?

Решение. Первую цифру можно выбрать 1 из 4 способов (нуля на первом месте быть не может), вторую — 1 из 4 (оставшихся), третью — 1 из 3, четвёртую — 1 из 2, пятой будет оставшаяся, итого $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ вариантов. □

Метод математической индукции

Задача 7.19. Любую ли сумму из целого числа тугриков, больше семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами по 3 и 5 тугриков?

Решение. **Первый способ — переход $\mathbf{Y_n \to Y_{n+1}}$.** База: $8 = 3 + 5$ Шаг индукции: пусть сумма в n тугриков представима с помощью купюр в 3 и 5 тугриков.

Если среди них имеется хоть одна купюра в 5 тугриков, заменим её на две купюры в 3 тугрика: $(5) \to (3, 3)$, получим $n + 1$ тугрик. Если все купюры в 3 тугрика, то, так как их не меньше трёх, возможна замена $(3, 3, 3) \to (5, 5)$, получим $n + 1$ тугриков.

Второй способ — переход $\mathbf{Y_n \to Y_{n+3}}$. Докажем, что любую сумму, начиная с 8 тугриков, можно уплатить купюрами в 3 и 5 тугриков. База: $8 = 3 + 5$; $9 = 3 + 3 + 3$; $10 = 5 + 5$. Переход: из утверждения номер n следует утверждение номер $n + 3$.

Действительно, если n тугриков можно представить как сумму 3— и 5—тугриковых купюр, то, добавив 3 тугрика, мы представим $n + 3$ тугрика.

Тройная база $n = 8, 9, 10$ и переход $Y_n \to Y_{n+3}$ доказывают утверждение задачи. □

Задача 7.20. Доказать, что любое натуральное число можно представить в виде суммы различных степеней двойки.

Решение. Попробуем представить число n в виде разложения на степени двоек. Возьмём наибольшую возможную степень, которая умещается в число n. Пусть это будет 2^k. Тогда $2^2 \leqslant n < 2^{k+1}$. Если $n = 2^k$, то искомое предположение доказано. Если же $n > 2^k$, то нам осталось разложить число $n - 2^k$. По предположению индукции это можно сделать. Осталось убедиться, что при разложении числа n не появятся повторяющиеся степени двойки. Действительно, так как $n - 2^k < 2^k$, то степени k в разложении числа $n - 2^k$ появиться не может и степени повторяться не будут.

Заметим, что базой в данной задаче выступают числа $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$, а переход имеет вид $n - 2^k \to n$.

На самом деле, таким образом мы доказали в том числе и возможность перевода числа в двоичную систему счисления. □

Инвариант

Задача 7.21. По кругу записаны числа $1, 2, 3, 2, 2, 0$. За один ход можно к любым двум соседним числам прибавить по единице. Можно ли все числа сделать равными?

Решение. Докажем, что инвариантом будет знакопеременная сумма всех чисел, написанных по кругу, то есть первое число входит в эту сумму со знаком плюс, второе — со знаком минус, третье — со знаком плюс, и так далее. Действительно, после прибавления единицы к любым двум соседним числам такая величина будет оставаться постоянной: одно из двух соседних чисел обязательно будет со знаком плюс, и к общей сумме единица прибавится, а второе будет со знаком минус, из общей суммы единица вычтется. Если все числа станут равными, то знакопеременная сумма будет равна нулю. Но вначале она равна

$$1 - 2 + 3 - 2 + 2 - 0 = 2 \neq 0$$

и при любой операции она не изменяется, поэтому сделать все числа равными невозможно. □

Задача 7.22. На шести плотинах сидят шесть бобров, на каждой плотине — по бобру. Плотины стоят в ряд с интервалами в десять метров. Если какой-то бобёр переплывает с одной плотины на другую, то какой-то другой бобёр обязательно переплывает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все бобры собраться на одной плотине? А если бобров и плотин — семь?

Решение. Если мы будем отсчитывать положение каждого из бобров с одной и той же точки на реке, то инвариантом будет сумма расстояний каждого из бобров до этой точки. Выберем точкой отсчёта самую левую плотину. Тогда положения бобров будут следующими: $0, 10, 20, 30, 40, 50$. Сумма этих чисел равна 150. Бобры должны оказаться в одном месте, значит, расстояния от каждого из них до точки отсчёта должны совпадать. Сумма расстояний шести бобров равняется 150 метрам, следовательно они должны собраться в точке, отстоящей от точки отсчёта на 25 метров. Но там нет плотины! Следовательно, ответом на первую часть задачи будет «нет, не могут».

Рассуждая аналогично для семи бобров, мы найдём точку встречи. Она будет находиться на расстоянии $(0 + 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60)/7 = 30$ метров от самой левой плотины, то есть в районе 4-й плотины. Отсюда следует и решение, какие бобры куда должны перемещаться. Первый бобр с самой левой плотины отправляется на четвёртую, а навстречу ему туда же отправляется седьмой бобр, второй и шестой проделывают ту же операцию, третий и пятый — аналогично. Четвёртый бобр остаётся на месте. Все перемещения корректны и все бобры собрались на одной плотине. $\square$

Предметный указатель

Список литературы

[1] *Агаханов Н.Х., Подлипский О.К.* Математические олимпиады Московской области. — М.: Изд-во МФТИ, 2003. — С. 224. — ISBN 5-89155-100-0.

[2] *Агаханов Н.Х., Подлипский О.К.* Математика. Районные олимпиады. 6—11 классы. — Просвещение (Пять колец), 2010. — С. 192. — ISBN 978-5-09-018951-4.

[3] *Алфутова Н. Б., Устинов А. В.* Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. — М.: МЦНМО, 2002. — С. 264. — ISBN 5-94057-038-0.

[4] Весенний турнир Архимеда / Под ред. Чулкова П.В. — МЦНМО, 2009. — С. 416. — ISBN 978-5-94057-446-0.

[5] *Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И.* Сборник задач по алгебре: учебное пособие для 8-9 классов с углублённым изучением математики. — 7 изд. — М.: Просвещение, 2001. — С. 271.

[6] *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. — Киров, 1994. — С. 272. — ISBN 5-87400-072-0.

[7] *Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К.* Как решают нестандартные задачи / Под ред. Бугаенко В.О. — 4 изд. — М.: МЦНМО, 2008. — С. 96. — ISBN 978-5-94057-331-9.

[8] *Розенталь А.Л.* Правило крайнего // *Квант.* — 1988. — № 9.

[9] *Спивак А.В.* Математический праздник. — Бюро Квантум, 2004. — С. 288. — ISBN 5-85843-035-X.

[10] *Шень А.* Матетатическая индукция. — 3 изд. — М.: МЦНМО, 2006. — С. 32.

[11] *Ященко И.В.* Приглашение на математический праздник, 3-издание, исправленное и дополненное. — МЦНМО, 2009. — С. 140. — ISBN 978-5-94057-364-7.