Нижегородский
государственный
университет
им. Н.И. Лобачевского

**Институт информационных технологий, математики и механики**
**Кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики**
Направление подготовки: «Прикладная математика и информатика»
Профиль подготовки: «Прикладная математика и информатика (общий профиль)»

## Выпускная квалификационная работа на тему:
# «Минимизация неявно заданной функции, применение метода имитации отжига»

**Выполнил:** студент группы 381903_3
Розанов Д.И

**Научный руководитель:**
Чирков А.Ю.

г. Нижний Новгород
2023 гг.

# Постановка задачи.

**Поставлена целочисленная задача о ранце на максимизацию (1):**

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max\limits_{x_1,\ldots,x_n} \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_n x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \end{cases} \quad (1),$$

где:

$c_i$ – цена $i$-ого предмета ($i$ = 1, …, n),

$a_i$ – вес $i$-ого предмета ($i$ = 1, …, n),

$b$ - максимальный вес, который может быть в рюкзаке

$x_i \in Z_+,\ i = \overline{1,n}$

c = $(c_1, c_2, \ldots, c_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор цен предметов

a = $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор весов предметов

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ - вектор, где $x_i$ количество предметов $i$-ого типа.

**Оптимальное решение целочисленной задачи о ранце** - точка $p \in {Z_+}^n$, на которой достигается максимум целевой функции и удовлетворяющая ограничению $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b$

**Оптимальное значение задачи (1)** $\lambda(a, b, c) = cp$ – значение функции в этой точке.

**Множество $\boldsymbol{Z_k^n}$** – множество из наборов размерности n, у которых k компонент отличны от нуля

**K-оптимальное решение целочисленной задачи о ранце (1)** - точка $v \in Z_k^n$, на которой достигается максимум целевой функции и удовлетворяющая ограничению $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b$

**K-оптимальное значение задачи (1)** $\lambda_k(a, b, c) = cv$ - значение функции в этой точке

# Постановка задачи. Цель работы.

**Поставлена целочисленная задача о ранце на максимизацию (1):**

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max\limits_{x_1,\ldots,x_n} \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_n x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \end{cases} \quad (1),$$

где:

$c_i$ – цена $i$-ого предмета ($i$ = 1, …, n),

$a_i$ – вес $i$-ого предмета ($i$ = 1, …, n),

$b$ - максимальный вес, который может быть в рюкзаке

$x_i \in Z_+,\ i = \overline{1,n}$

c = $(c_1, c_2, \ldots, c_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор цен предметов

a = $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор весов предметов

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ - вектор, где $x_i$ количество предметов $i$-ого типа.

**Точность k - оптимального решения целочисленной задачи о рюкзаке (1):** $\alpha_k = \frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}$.

- если $\lambda(a,b,c) = 0$, то $\alpha_k$(a, b,c) = 1.
- $\forall$a, c $\in Z_+^n, b \in N \Rightarrow 0 \le \alpha_k = \left|\frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}\right| \le 1$

**Гарантированная точность k-оптимального решения целочисленной задачи о ранце (1)** $\alpha_{k,n} = \inf\limits_{a,b,c}\left\{\left|\frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}\right|:\ \text{a, c} \in Z_+{}^n, b \in N\right\}$

- **Необходимо, используя различные методы для минимизации функции, найти:** $\inf\limits_{a,b,c}\left|\frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}\right|$, если a, c $\in Z_+{}^n, b \in N$.

# Сложность задачи. Методы решения.

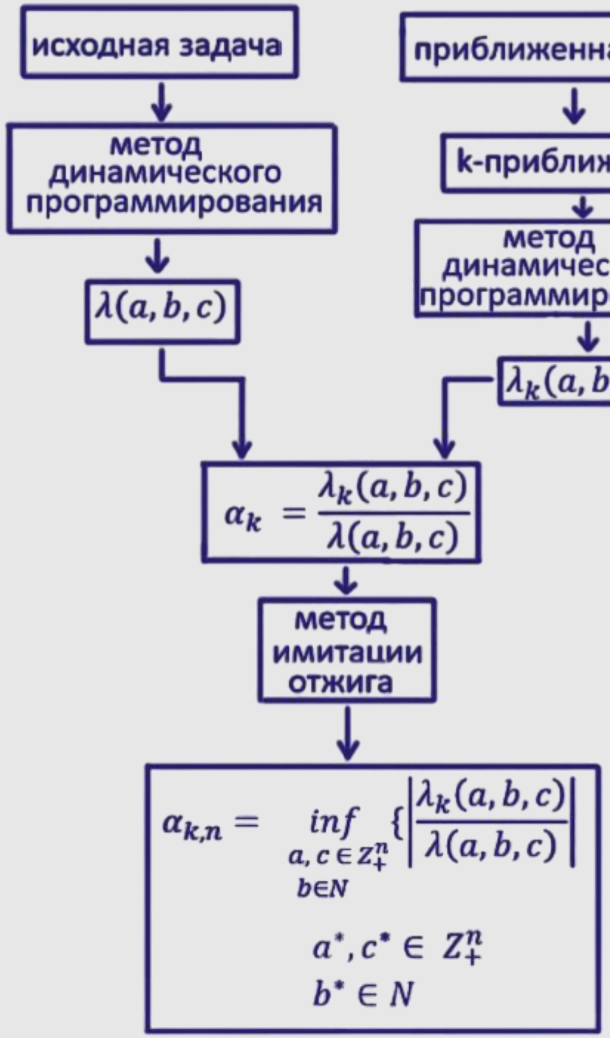



**рис.1:** блок-схема реализованной программной реализации

- **Сложность задачи:** задача относится к классу NP-полной
- **Методы решения:**
  - Для нахождения оптимального значения задачи (1) $\lambda(a,b,c) = cp$ используется метод динамического программирования
  - Для нахождения k-оптимального значения задачи (1) $\lambda_k(a,b,c) = cv$ – необходимо найти k ненулевых компонент для вектора $v^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)^{\mathrm{T}} : \max\limits_{x_1,\dots,x_n}\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\} = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i^* = \lambda_k$, используя метод динамического программирования
  - Для поиска минимума функции $\alpha_k = \frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}$ и нахождения значения $\alpha_{k,n}$ используется метод имитации отжига, использующий случайный поиск с постепенным уменьшением температуры

# Алгоритм метода имитации отжига

1. **Множества:**
   - S – множество всех состояний задачи.
2. **Параметры:**
   - $s_i \in S$ – состояние i-го шага.
   - $t_i \in R$ – температура i-го шага.
3. **Функции :**
   - $E: S \to R$ – функция энергии, ставит каждому решению в соответствие число, полученное по правилу, которое зависит от оптимизируемого параметра.
   - $T: N \to R$ – убывающая функция изменения температуры с течением времени, ставит номеру итерации i $\in N$ в соответствие температуру $t_i \in R$.
   - $F: S \to S$ функция, порождающая новое состояние-кандидат ($s_c$) на основе предыдущего, в которое система может перейти или отбросить.

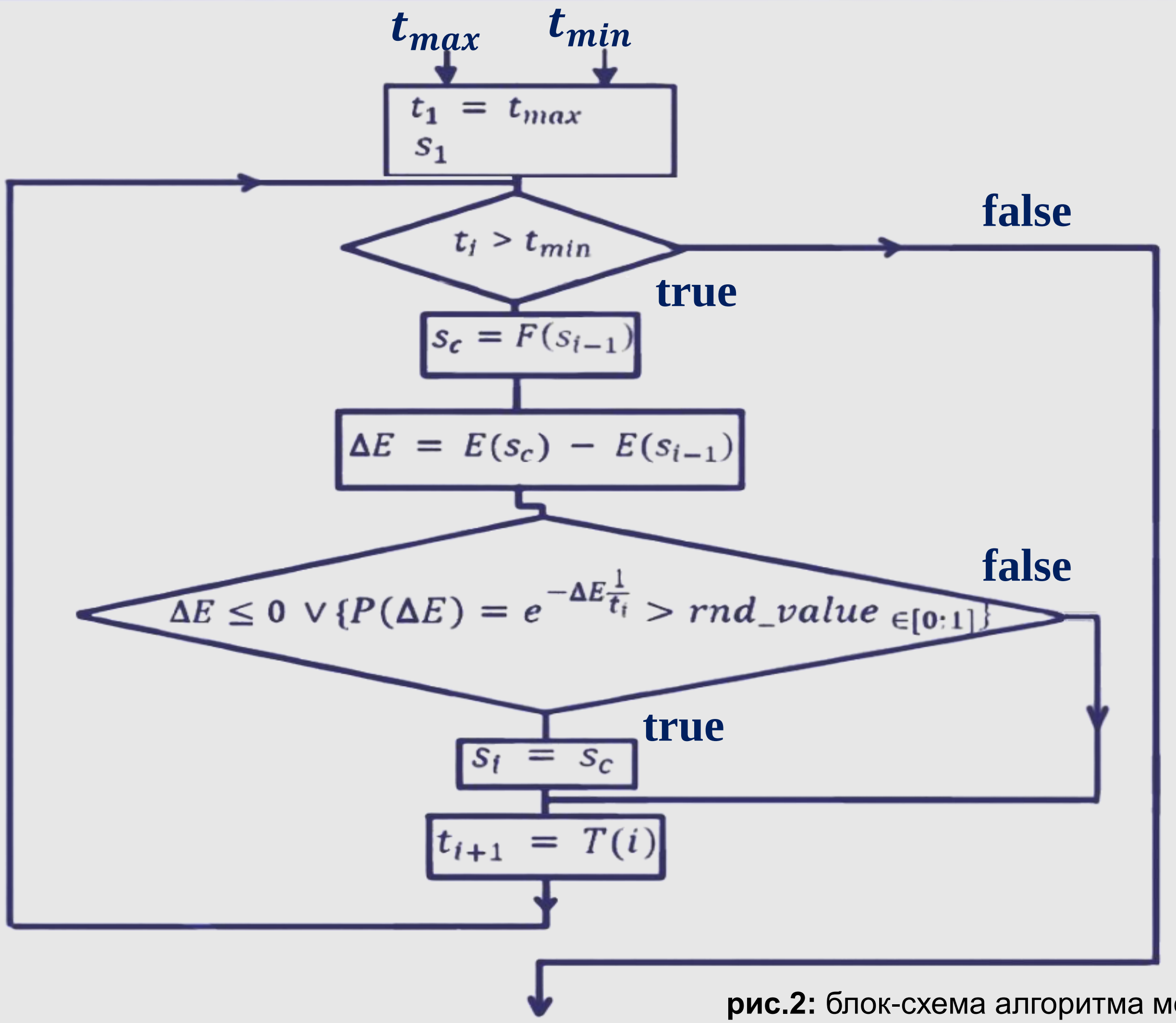



**рис.2:** блок-схема алгоритма метода имитации отжига

# Исследования
# Задача поиска $\alpha_{1,n}$

- для проведения исследований были использованы результаты, описанные в статье А.Ю. Чиркова, В.Н. Шевченко "О приближении оптимального решения целочисленной задачи о ранце оптимальными решениями целочисленной задачи о ранце с ограничением на мощность", и они были сопоставлены с результатами, полученными в программе.

**Их статьи для задачи по поиску $\alpha_{1,n}$:** $\forall n$ и k = 1: $\alpha_{k,n}$ > 0,59136

**Из программной реализации:**

| n | $\inf\limits_{\substack{a,c \in Z_+^n \\ b \in N}} \left\| \frac{\lambda_1(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)} \right\|$ |
|---|---|
| 3 | 0.613059 |
| 4 | 0.631744 |
| 5 | 0.66959 |

**Табл.1:** результаты программной реализации задачи поиска $\alpha_{1,n}$

- **Итог:**
  минимизированные значения $\alpha_1 = \left| \frac{\lambda_1(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)} \right|$ из запуска программы удовлетворяют нижней оценке $\alpha_{1,n} > 0.59135549205$, полученной в статье

# Исследования
# Задача поиска $\alpha_{n-1,n}$

- для проведения исследований были использованы результаты, описанные в статье А.Ю. Чиркова, В.Н. Шевченко

**Из статьи для задачи по поиску $\alpha_{n-1,n}$:** $\forall n\ \alpha_{n-1,n} = \frac{2^n - 2}{2^n - 1}$

| n | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha_{n-1,n}$ | 0.857142 | 0.933333 | 0.96774193 | 0.984126 |

**Табл.2:** значения $\alpha_{n-1,n}$ из статьи

**Из программной реализации:**

| n | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $\min\limits_{\substack{a,c \in Z_+^n \\ b \in N}} \left\{ \left\| \frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)} \right\| \right\}$ | 0.857142 | 0.933333 | 0.97619 | 0.997199 |
| $\min\limits_{\substack{a,c \in Z_+^n \\ b \in N}} \left\{ \left\| \frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)} \right\| \right\} - \alpha_{n-1,n}$ | | | 0.00844807 | 0.013073 |

**Табл.3:** результаты программной реализации задачи поиска $\alpha_{n-1,n}$

# Исследования
# Задача поиска $\alpha_{2,n}$ и $\alpha_{3,5}$

- для проведения исследований были использованы результаты, описанные в статье А.Ю. Чиркова, В.Н. Шевченко

**Из статьи для задачи по поиску $\alpha_{2,n}$:** $\forall n \quad \frac{2^n - 2^{n-k}}{2^n - 1} = \frac{2^n - 2^{n-2}}{2^n - 1} \le \alpha_{2,n} \le \frac{2^{k+1} - 2}{2^{k+1} - 1} = \frac{2^3 - 2}{2^3 - 1} \cong 0.857143$

| n | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| нижняя оценка $\alpha_{2,n}$ | 0.8 | 0.774194 | 0.761905 | 0.755906 | 0.752941 | 0.751468 | 0.750733 |

Табл.4: значения $\alpha_{n-1,n}$ из статьи

**Из программной реализации:**

| n | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\min\limits_{\substack{a,c \in Z_+^n \\ b \in N}} \left\{ \left\lvert \frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)} \right\rvert \right\}$ | 0.86602 | 0.89473. | 0.9 | 0.909091 | 0.916667 | 0.925926 | 0.941176 |

**Табл.5:** результаты программной реализации задачи поиска $\alpha_{2,n}$

**Из статьи для задачи по поиску $\alpha_{3,5}$:** $\forall n \quad \frac{2^n - 2^{n-k}}{2^n - 1} = \frac{2^5 - 2^{5-3}}{2^5 - 1} \le \alpha_{2,n} \le \frac{2^{k+1} - 2}{2^{k+1} - 1} = \frac{2^4 - 2}{2^4 - 1}$

Тогда: $0.903226 \le \alpha_{2,n} \le 0.933333$

**Из программной реализации:**

$\min\limits_{\substack{a,c \in Z_+^n \\ b \in N}} \left\lvert \frac{\lambda_3(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)} \right\rvert = 0.961538$

- $|0.933333 - 0.961538| = 0.028205$

# Решение задачи поиска $\alpha_{2,n}$ с доп. ограничениями.

**Введем следующие ограничения:**

- $\sum_{i=1}^{n} c_i = C$
- $\sum_{i=1}^{n} a_i = A \leq b$

где: $C, A = const \in Z_+$

**Итог:** ограничили область поиска решения поставленной задачи $\Rightarrow$ исключаем из рассмотрения некоторое количество совпадающих решений, но имеющие разные $c_i$ и $a_i$.

- для проведения исследований были использованы результаты, описанные в статье А.Ю. Чиркова, В.Н. Шевченко

**Из статьи для задачи по поиску $\alpha_{2,n}$:** $\forall n \ \frac{2^n - 2^{n-2}}{2^n - 1} \leq \alpha_{2,n} \leq 0.857143$

- $0.8 \leq \alpha_{2,4} \leq 0.857143,$
- $0.774194 \leq \alpha_{2,5} \leq 0.857143,$

- **Итог:**

| | $n = 4$ | $n = 5$ |
|---|---|---|
| $\alpha_{k,n}$ нижняя оценка | 0.8 | 0.774194 |
| $\alpha_{k,n}$ верхняя оценка | 0.857143 | |
| $\min\limits_{\substack{a,c \in Z_+^n \\ b \in N}} \left\lvert \frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)} \right\rvert$ | 0.86602 | 0.89473 |
| $\min\limits_{\substack{a,c \in Z_+^n \\ b \in N}} \left\lvert \frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)} \right\rvert$ с ограничением | 0.8526 | 0.874126 |

**Табл.5:** сравнение результатов в задаче поиска $\alpha_{2,n}$ с введенными ограничениями и без огр.

# Решение задачи поиска $\alpha_{2,n}$ при $n = 5$ с использованием предыдущих результатов

- для проведения исследований были использованы результаты, описанные в статье А.Ю. Чиркова, В.Н. Шевченко
- **для задачи поиска $\boldsymbol{\alpha_{2,n}}$ при $\boldsymbol{n = 4}$:** удалось минимизировать $\alpha_2 = \frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}$ до значения из отрезка $0.8 \le \alpha_{2,4} = 0.8526 \le 0.857143$, введя ограничения на сумму цен и весов.

  **Но:** для $n \ge 5$ не удалось

**Целочисленная задача о ранце на max (1):**

$$\begin{cases} cx \to \max\limits_{x_1,\dots,x_n} \\ ax \le b \end{cases} \text{(1),где:}$$

$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор цен предметов

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор весов предметов

$b$ - максимальный вес, который может быть в рюкзаке

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ - вектор, где $x_i \in Z_+$, количество предметов $i$-ого типа.

**Идея поиска $\boldsymbol{\alpha_{2,n}}$ при $\boldsymbol{n \ge 5}$:**

- Т.к. работа алгоритма метода имитации отжига зависит от начальных условий и параметров метода запуска программы, тогда:
  - используем полученные результаты из исследования $\alpha_{2,4}$ для минимизации $\alpha_2 = \frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}$ в задаче с $\alpha_{2,5}$
  - используем раннее полученные результаты из исследования $\alpha_{2,5}$ для этой же задачи

# Решение задачи поиска $\alpha_{2,n}$ при $n = 5$ с использованием предыдущих результатов

- для проведения исследований были использованы результаты, описанные в статье А.Ю. Чиркова, В.Н. Шевченко

| | изменения начальных параметров | нижняя оценка для $\alpha_{2,5}$ | верхняя оценка для $\alpha_{2,5}$ | результат предыдущих запусков программной реализации | $\min_{\substack{a,c \in Z_+^n \\ b \in N}} \left\lvert \frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)} \right\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| начальные параметры из задачи поиска $\alpha_{2,4}$ | | 0.779144 | 0.857143 | 0.874126 | 0.878983 |
| начальные параметры из задачи поиска $\alpha_{2,5}$ | | | | | 0.874126 |
| начальные параметры из задачи поиска $\alpha_{2,5}$ | $A = 10^6$ | | | | 0.874126 |
| начальные параметры из задачи поиска $\alpha_{2,5}$ | без ограничения B | | | | 0.8608 |

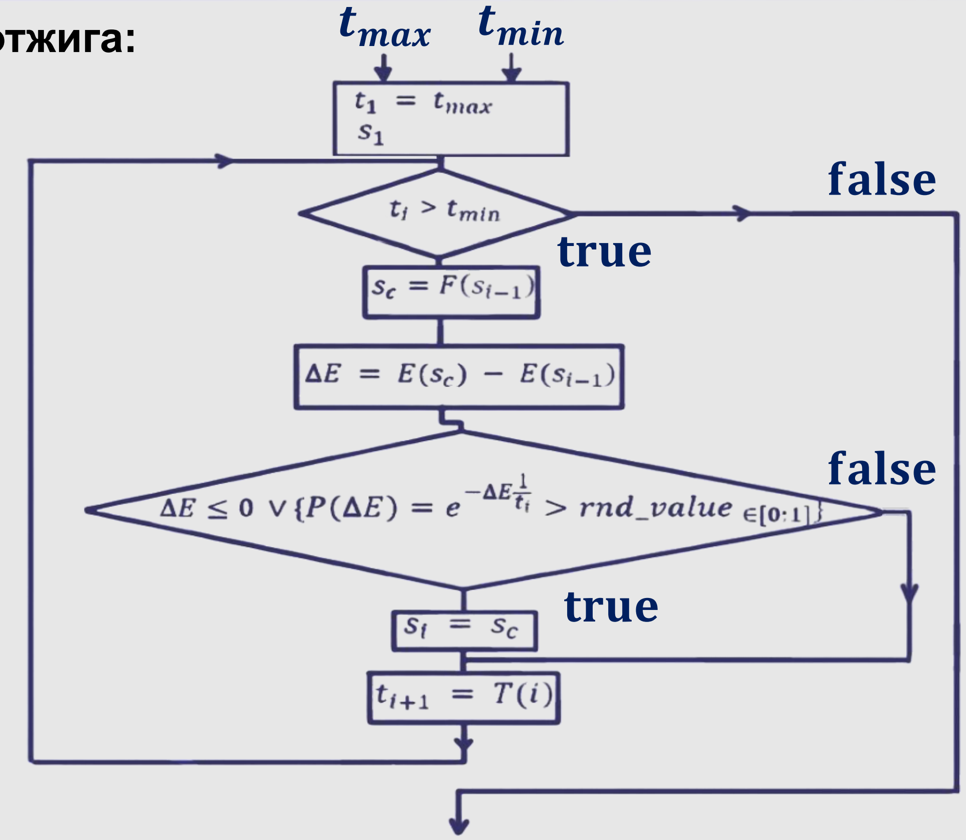
**Табл.6:** сравнение результатов в задаче поиска $\alpha_{2,5}$ с использованием раннее полученных результатов

# Решение задачи с понижением размерности

**Идея:**


**рис.3:** алгоритм поиска $\alpha_{k,n}$

- **Метод имитации отжига:**
  1. **Множества:**
     S
  2. **Параметры:**
     $s_i \in S$
     $t_i \in R$
  3. **Функции:**
     $E: S \to R$
     $T: N \to R$
     $F: S \to S$



# Решение задачи поиска $\alpha_{2,5}$ с модифицированным методом имитации отжига

- для проведения исследований были использованы результаты, описанные в статье А.Ю. Чиркова, В.Н. Шевченко

**В задаче по поиску $\alpha_{2,5}$ значение точности k-оптимального решения $0.874126$ получилось при следующем наборе параметров:**

$c = (1, 9, 140, 255, 595),$
$a = (2, 21, 157, 215, 396),$
$A = 1000,$
$B = 791.$

- **Из программной реализации с н.у, описанными раннее:** $0.868056$

- **Итог:**
  - удалось получить меньшее значение, чем найденное ранее
  - $\alpha_2 = \frac{\lambda_2(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)} = 0.868056$ не принадлежит интервальной оценки для гарантированной точности k-оптимального решения из теории $0.774194 \le \alpha_{2,5} \le 0.857143.$
  - $|0.868056 - 0.857143| = 0.010913$

# Выводы:

**Задача поиска $\alpha_{1,n}$:**

| n | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| $\min\limits_{\substack{a,c\in Z_+^n \\ b\in N}} \left\lvert\frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}\right\rvert$ | 0.613059 | 0.631744 | 0.66959 |

**Табл.7:** рез-ты программной реализации для задачи поиска $\alpha_{1,n}$

Из программной реализации получилось: $\forall n \min\limits_{\substack{a,c\in Z_+^n \\ b\in N}} \left\lvert\frac{\lambda_1(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}\right\rvert \geq \alpha_{1,n} \geq 0{,}59135549205$

**Задача поиска $\alpha_{n-1,n}$:**

| n | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $\min\limits_{\substack{a,c\in Z_+^n \\ b\in N}} \left\lvert\frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}\right\rvert$ | 0.857142 | 0.933333 | 0.97619 | 0.997199 |
| $\alpha_{n-1,n}$ | 0.857142 | 0.933333 | 0.9677419 | 0.984126 |
| $\min\limits_{\substack{a,c\in Z_+^n \\ b\in N}} \left\lvert\frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}\right\rvert - \alpha_{n-1,n}$ | 0 | 0 | 0.0084481 | 0.013073 |

**Табл.8:** сравнение значений $\alpha_{n-1,n}$ и результатов программной реализации

- Удалось решить задачу поиска $\alpha_{1,n}$
- Удалось решить задачу поиска $\alpha_{n-1,n}$ при $n = 3, 4$. Для $n \geq 5$ минимизируемое значение отношения приближенного решения к точному близко к $\alpha_{n-1,n}$

# Выводы:

**Задача поиска $\alpha_{2,n}$:**

| n | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| нижняя оценка $\alpha_{2,n}$ | 0.8 | 0.774194 | 0.761905 | 0.755906 | 0.752941 | 0.751468 | 0.750733 |
| верхняя оценка $\alpha_{2,n}$ | 0.857143 | | | | | | |
| в программной реализации без модификаций: $\min\limits_{a,c\in Z_+^n, b\in N}\left\lvert\frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}\right\rvert$ | 0.86602 | 0.89473 | 0.9 | 0.909091 | 0.916667 | 0.925926 | 0.941176 |
| в программной реализации с ограничениями: $\min\limits_{a,c\in Z_+^n, b\in N}\left\lvert\frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}\right\rvert$ | 0.8526 | 0.874126 | | | | | |
| в программной реализации с использованием предыдущих результатов с ограничением A и B: $\min\limits_{a,c\in Z_+^n, b\in N}\left\lvert\frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}\right\rvert$ | | 0.874126 | | | | | |
| в программной реализации с использованием предыдущих результатов без ограничения B: $\min\limits_{a,c\in Z_+^n, b\in N}\left\lvert\frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}\right\rvert$ | | 0.8608 | | | | | |
| в программной реализации с модифицированным методом отжига: $\min\limits_{a,c\in Z_+^n, b\in N}\left\lvert\frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}\right\rvert$ | | 0.86805 | | | | | |

**Табл.9:** сравнение значений $\alpha_{2,n}$ и результатов программной реализации

- Удалось решить задачу поиска $\alpha_{2,4}$ при введении в программную реализацию ограничений A и B
- Для задачи $\alpha_{2,5}$ удалось минимизировать $\min\limits_{a,c\in Z_+^n, b\in N}\left\lvert\frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}\right\rvert$ до значения $0.8608$ при использовании предыдущих результатов запусков программы и без ограничений A и B

# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

381903_3 Розанов Д.И.