Практическое задание к уроку 1 "Линейное пространство. Основные понятия".

Часть 1

1. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = e^x, f_2(x) = 1, f_3(x) = x + 1, f_4(x) = x - e^x.$$

Вектор $f_4(x)$ яаляется линейной комбинацией векторов $f_3(x)$, $f_2(x)$, $f_1(x)$:

$$f_3(x) = x + f_2(x)$$

$$f_4(x) = f_3(x) - f_2(x) - f_1(x)$$

Из чего следует, что $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x + 1$ и $f_4(x) = x - e^x$ **линейно зависимы**.

2. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = 2, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = (x+1)^2.$$

Вектор $f_4(x)$ яаляется линейной комбинацией векторов $f_3(x)$, $f_2(x)$, $f_1(x)$:

$$f_4(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = f_3(x) + f_1(x)f_2(x) + \frac{1}{2}f_1(x)$$

Из чего следует, что $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ и $f_4(x) = (x+1)^2$ **линейно зависимы**.

3. Найти координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$ в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$.

$x = (2, 3, 5) = (2, 0, 0) + (0, 3, 0) + (0, 0, 5) = 1 \cdot (2, 0, 0) + 3 \cdot (0, 1, 0) + \frac{1}{2}(0, 0, 10) = \frac{1}{2} \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 3 \cdot b_3$

Координатами вектора x в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$ **являются** $(\frac{1}{2}, 1, 3)$.

4. Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$:

а в базисе 1, x, x^2;

координаты вектора $3x^2 - 2x + 2$ в базисе 1, x, x^2 **равны** $(2, -2, 3)$

б в базисе x^2, $x - 1$, 1.

координаты вектора $3x^2 - 2x + 2$ в базисе x^2, $x - 1$, 1 **равны** $(3, -2, 0)$

5. Установить, является ли линейным подпространством:

а. совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю;

Не является линейным подпространством, так как в случае $a = (0, a_2, a_3)$ и $b = (b_1, 0, b_2)$ сумма $a + b = (0 + b_1, a_2 + 0, a_3 + b_3) = (b_1, a_2, a_3 + b_3)$, где начальная координата не соответствует векторам a и b.

б. все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Являются линейным подпространством, так как при $a = (u_1 + u_2 + u_3)$ и $b = (u_4 + u_5)$ $a + b = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5)$

Часть 2

1. Найти скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}$:

а.

$$x = (0, -3, 6),\ y = (-4, 7, 9);$$

$$(x, y) = (0 \cdot (-4) + (-3) \cdot 7 + 6 \cdot 9) = 33$$

In [1]:

```python
import numpy as np
x = np.array([0, -3, 6])
y = np.array([-4, 7, 9])
print(f'Скалярное произведение векторов x и y равняется {np.dot(x,y)}')
```

```
Скалярное произведение векторов x и y равняется 33
```

б.

$$x = (7, -4, 0, 1),\ y = (-3, 1, 11, 2).$$

$$(x, y) = 7 \cdot (-3) + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 11 + 1 \cdot 2 = -23$$

In [2]:

```python
x = np.array([7, -4, 0, 1])
y = np.array([-3, 1, 11, 2])
print(f'Скалярное произведение векторов x и y равняется {np.dot(x,y)}')
```

```
Скалярное произведение векторов x и y равняется -23
```

2. Найти нормы векторов $(4, 2, 4)$ и $(12, 3, 4)$ и угол между ними.

$$\ell_1 = |4| + |2| + |4| = 10; \ell_1 = |12| + |3| + |4| = 19$$

$$\ell_2 = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = 6; \ell_2 = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = 13$$

$$cos\alpha = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{4 \cdot 12 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{6 \cdot 13} = \frac{70}{78} = 0.897435897$$

In [3]:

```python
a = np.array([4, 2, 4])
b = np.array([12, 3, 4])
print(f'Норма векторов l1:\n a = {np.linalg.norm(a, ord = 1)}\n b = {np.linalg.norm(b,
print(f'Норма векторов l2:\n a = {np.linalg.norm(a, ord = 2)}\n b = {np.linalg.norm(b,
print(f'Угол между векторами a и b равен: \n{np.dot(a,b)/ (np.linalg.norm(a, ord=2)*np
```

```
Норма векторов l1:
 a = 10.0
 b = 19.0
Норма векторов l2:
 a = 6.0
 b = 13.0
Угол между векторами a и b равен:
0.8974358974358975
```

3. Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:

а. произведение длин векторов;

Согласно принятой аксиоме:

$$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y);$$

Определим: $x_1 = (4, 0)$, $x_2 = (0, 2)$, $y = (0, 3)$

$$\|x_1\| = \sqrt{4^2 + 0} = 4$$

$$\|x_2\| = \sqrt{0 + 2^2} = 2$$

$$\|y\| = \sqrt{0 + 3^2} = 3$$

$$\|x_1 + x_2\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\|x_1 + x_2\| \cdot \|y\| = \|x_1\| \cdot \|y\| + \|x_2\| \cdot \|y\| = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 18$$

$$18 \neq 15$$

Пространство не будет евклидовым

б. утроенное обычное скалярное произведение векторов?

$$a = (x, y); 3a$$

Пространство будет евклидовым

4. Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$:

а. $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$;

не образуют базис

б. $x = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $y = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $z = (0, 0, 1)$;

образуют базис

$$(x, y) = 1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{2} + (-1/\sqrt{2}) \cdot 1/\sqrt{2} + 0 = 0$$

$$(x, z) = 1/\sqrt{2} \cdot 0 + (-1/\sqrt{2}) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$(y, z) = 1/\sqrt{2} \cdot 0 + 1/\sqrt{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

в. $(1/2, -1/2, 0)$, $(0, 1/2, 1/2)$, $(0, 0, 1)$;

не образуют базис

$$(x, y) = \frac{1}{2} \cdot 0 + (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = -0.25$$

$$(x, z) = \frac{1}{2} \cdot 0 + (-\frac{1}{2}) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$(y, z) = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.5$$

г. $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$

образуют