Практическое задание к уроку 3 "Линейные преобразования".

1. Найти собственные векторы и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\tilde{u}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ неизвестный собственный вектор. Тогда $A\tilde{u}=\lambda\tilde{u}$ можно выразить следующим образом:

$$\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-x_1-6x_2\\ 2x_1+6x_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-x_1-6x_2=\lambda x_1\\ 2x_1+6x_2=\lambda x_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}-x_1-6x_2-\lambda x_1=0\\ 2x_1+6x_2-\lambda x_2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1(-1-\lambda)-6x_2=0\\ 2x_1+(6-\lambda)x_2=0\end{cases}$$

По определению $\tilde{u}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ Уравнения линейно зависимы и определитель матрицы системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 6\\ 2 & 6-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Найдём собственные вектора:

$$(-1-\lambda)(6-\lambda)-2(-6)=0$$

$$\lambda^2-5\lambda-6+12=0$$

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

$$D=25-24=1;\sqrt{D}=1$$

$$\lambda_1=\frac{5-1}{2}=2;\lambda_2=\frac{5+1}{2}=3$$

Найдём собственные вектора:

$$\begin{cases}x_1(-1-\lambda)-6x_2=0\\ 2x_1+(6-\lambda)x_2=0\end{cases}$$

для $\lambda_1=2$:

$$\begin{cases}x_1(-1(-2))-6x_2=0\\ 2x_1+(6-2)x_2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-3x_1-6x_2=0\\ 2x_1+4x_2=0\end{cases}$$

$$x_1=-2x_2$$

для $\lambda_2=3$:

$$\begin{cases}x_1(-1(-3))-6x_2=0\\ 2x_1+(6-3)x_2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-4x_1-6x_2=0\\ 2x_1+3x_2=0\end{cases}$$

$$x_1=-\frac{3}{2}x_2$$

Ответ:
Собственные значения равны $\lambda_1=2$ и $\lambda_2=3$.
Собственные векторы равны:

$$\tilde{u}_1=\begin{pmatrix}-2x_2\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_2=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}x_2\\ x_2\end{pmatrix}$$

2. Дан оператор поворота на 180 градусов, задаваемый матрицей

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Показать, что **любой** вектор является для него собственным.

Обозначим через $\tilde{u}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ неизвестный собственный вектор. Тогда $A\tilde{u}=\lambda\tilde{u}$ можно выразить следующим образом:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-x_1 & 0\\ 0 & -x_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-x_1=\lambda x_1\\ -x_2=\lambda x_2\end{cases}$$

По определению $\tilde{u}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ Уравнения линейно зависимы и определитель матрицы системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Найдём собственные вектора:

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda)=0$$

$$\lambda^2+2\lambda+1=0$$

$$D=4-4=0$$

$$\lambda=-1$$

Найдём собственные вектора:

$$\begin{cases}-x_1=\lambda x_1\\ -x_2=\lambda x_2\end{cases}$$

для $\lambda=-1$:

$$\begin{cases}-x_1=-x_1\\ -x_2=-x_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=x_1\\ x_2=x_2\end{cases}$$

3. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Установить, является ли вектор $x=(1,1)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Предположим, что

$$\tilde{u}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

собственный вектор. $A\tilde{u}=\lambda\tilde{u}$ можно выразить следующим образом:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=\lambda x_1\\ -x_1+3x_2=\lambda x_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+1=\lambda\\ -1+3=\lambda\end{cases}$$

$$\begin{cases}2=\lambda\\ 2=\lambda\end{cases}$$

Ответ:
Вектор x=(1,1) яляется собственным вектором данного линейного оператора.

4. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Установить, является ли вектор $x=(3,-3,-4)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Предположим, что

$$\tilde{u}=\begin{pmatrix}3\\ -3\\ -4\end{pmatrix}$$

собственный вектор. $A\tilde{u}=\lambda\tilde{u}$ можно выразить следующим образом:

$$\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}0+3x_2+0=\lambda x_1\\ 3x_1+0+0=\lambda x_2\\ 0+0+3x_3=\lambda x_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x_2=\lambda x_1\\ 3x_1=\lambda x_2\\ 3x_3=\lambda x_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}-9=3\lambda\\ 9=-3\lambda\\ -12=-4\lambda\end{cases}$$

$$\begin{cases}-3=\lambda\\ -3=\lambda\\ 3=\lambda\end{cases}$$

Ответ:
Вектор x=(3,-3, -4) не яляется собственным вектором данного линейного оператора.