Практическое задание к уроку 4 "Системы линейных уравнений".

Часть 1

1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_4 = -2 \\ -x_2 + x_3 + 5x_4 = -2 \\ -2x_3 + 3X_4 = 4 \end{cases}$$

Данная система является совместной и неопределённой. Её общее решение является:

$$x_3 = \frac{4 - 3x_4}{-2} = 1.5x_4 - 2$$

$$x_2 = 2 + x_3 + 5x_4 = 2 + 1.5x_4 - 2 + 5x_4 = 6.5x_4$$

$$x_1 = -2 - 3x_4$$

Одно из частных решений при $x_4 = 0$ является: $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = -2$

2. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений:

а)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 4 & 2 & 21 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \\ 0 & 3 & 3 & 21 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 25 \\ 0 & 3 & 3 & 21 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 18 & 96 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 3 & 16 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 25 \\ 0 & -1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 3 & 16 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 16 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 9 \\ -x_2 + 2x_3 = 9 \\ 3x_3 = 16 \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{16}{3}$$

$$x_2 = 2x_3 - 9 = \frac{32}{3} - \frac{27}{3} = \frac{5}{3}$$

$$x_1 = 9 - \frac{16}{3} = \frac{27}{3} - \frac{16}{3} = \frac{11}{3}$$

система совместна и определена

б)

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5; \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}; \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right)$$

$$rang\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Третья строка расширенной матрицы имеет вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 5$, следовательно **система несовместна**.

в)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -8 \end{pmatrix}; \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -23 & -14 \end{array}\right)$$

$$rangA = rang\tilde{A}$$

Система совместна и неопределена

3. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

$$rangA = 3, rang\tilde{A} = 3$$

так как ранг матрицы равен рангу расширенной матрицы следовательно **система совместна и определена**.

4. Дана система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right).$$

Найти соотношение между параметрами a, b и c, при которых система является несовместной.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 3 & 3 & 3 & c-b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 3 & 2b-c \\ 3 & 3 & 3 & c-b \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a-2b+c \\ 1 & 2 & 3 & 2b-c \\ 3 & 3 & 3 & c-b \end{array}\right)$$

В случае, когда $a - 2b + c \neq 0$ **система несовместна**

Часть 2

1. Решить систему уравнений методом Крамера:

а)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$$

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2$$

Так как $detA \neq 0$ **система совместна**.

$$detA_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 14 = 10;$$

$$detA_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4$$

Таким образом:

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{detA_2}{detA} = \frac{4}{2} = 2$$

б)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (2 + 6 + 20) - (10 - 24 - 1) = 43$$

Так как $detA \neq 0$ **система совместна**.

$$detA_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (10 + 3 - 40) - (5 - 120 + 2) = 86;$$

$$detA_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-4 - 60 + 5) - (-20 + 10 - 6) = -43$$

$$detA_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (2 + 4 + 40) - (20 - 16 - 1) = 43$$

Таким образом:

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA} = \frac{86}{43} = 2$$

$$x_2 = \frac{detA_2}{detA} = -\frac{43}{43} = -1$$

$$x_3 = \frac{detA_3}{detA} = \frac{43}{43} = 1$$