Практическое задание к уроку 2 "Матрицы и матричные операции"

Часть 1

Задание 1

а.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$$

AB - **неопределено**, т.к. число столбцов матрицы A не соответствует числу строк матрицы B.

BA - **неопределено**, т.к. число столбцов матрицы B не соответствует числу строк матрицы A.

б.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} \end{pmatrix}$$

AB - **определено**, т.к. число столбцов матрицы A соответствует числу строк матрицы B. Размерность матрицы AB - 2×3.

BA - **неопределено**, т.к. число столбцов матрицы B не соответствует числу строк матрицы A.

в.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} & b_{17} & b_{18} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} & b_{27} & b_{28} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} & b_{38} \end{pmatrix}$$

AB - **определено**, т.к. число столбцов матрицы A соответствует числу строк матрицы B. Размерность матрицы AB - 8×8.

BA - **определено**, т.к. число столбцов матрицы B соответствует числу строк матрицы A. Размерность матрицы BA - 3×3.

г.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

AB - **определено**, т.к. A и B квадратные матрицы одного размера. Размерность матрицы AB - 4×4.

BA - **определено**, т.к. B и A квадратные матрицы одного размера. Размерность матрицы BA - 4×4.

Задание 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & -2-1 \\ 3+0 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} (1 \cdot 4 + (-2) \cdot 0) & (1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 5) \\ (3 \cdot 4 + 0 \cdot 0) & (3 \cdot (-1) + 0 \cdot 5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

In [1]:

```
import numpy as np
```

In [2]:

```
A = np.array([[1, -2], [3, 0]])
B = np.array([[4, -1], [0, 5]])
print(f'Сумма матриц A и B равна: \n\n {A+B}\n')
print(f'Произведение матриц A и B равно: \n\n {np.dot(A,B)}')
```

```
Сумма матриц A и B равна:

 [[ 5 -3]
 [ 3  5]]

Произведение матриц A и B равно:

 [[  4 -11]
 [ 12  -3]]
```

Задание 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B + 4C = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-6) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 - 0 + 8 & 21 - 10 - 16 \\ 9 - 4 + 4 & -18 + 2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

In [3]:

```
A = np.array([[1, 7], [3, -6]])
B = np.array([[0, 5], [2, -1]])
C = np.array([[2, -4], [1, 1]])
print(f'3A-2B+4C=\n\n{np.dot(3,A)-np.dot(2,B)+np.dot(4,C)}')
```

```
3A-2B+4C=

[[ 11  -5]
 [  9 -12]]
```

Задание 4

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 5 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 & 5 \cdot 5 + (-2) \cdot (-2) & 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

In [4]:

```
A = np.array([[4,1],[5,-2],[2,3]])
print(f'Произведение A и A\u1d40 равно: \n\n{np.dot(A,A.T)}\n')
print(f'Произведение A\u1d40 и A равно: \n\n{np.dot(A.T,A)}')
```

```
Произведение A и Aᵀ равно:

[[17 18 11]
 [18 29  4]
 [11  4 13]]

Произведение Aᵀ и A равно:

[[45  0]
 [ 0 14]]
```

Задание 5

In [5]:

```
def matrix_product(matrix_a, matrix_b):
    '''Функция перемножения матриц matrix_a и matrix_b'''
    if len(matrix_a[0]) == len(matrix_b):
        result = [[0 for i in range(len(matrix_a))] \
                  for j in range(len(matrix_b[0]))]
        for i in range(len(matrix_a)):
            for j in range(len(matrix_b[0])):
                for x in range(len(matrix_a[0])):
                    result[i][j] += matrix_a[i][x] * matrix_b[x][j]
    else:
        result = "неопределено."
    return result
```

In [6]:

```
print(f'Произведение матриц \n\n\
{matrix_product([[1, 2, 3],[1, 3, 2]],[[1, 2],[2, 3],[3, 4]])}')
```

```
Произведение матриц

[[14, 20], [13, 19]]
```

In [7]:

```
print(f'Произведение матриц \n\n\
{matrix_product([[1, 2, 3, 4],[1, 3, 2, 4]],[[1, 2],[2, 3],[3, 4]])}')
```

```
Произведение матриц

неопределено.
```

Часть 2

Задание 1

а.

$$A = \begin{pmatrix} sinx & -cosx \\ cosx & sinx \end{pmatrix};$$

$$detA = \begin{vmatrix} sinx & -cosx \\ cosx & sinx \end{vmatrix} = sinx \cdot sinx - cosx \cdot -cosx = sin^2x + cos^2x = 1$$

б.

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix};$$

Матрица A является треугольной. Следовательно из 7-го свойства определителя матрицы её определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

$$detA = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$$

In [8]:

```
A = np.array([[4, 2, 3], [0, 5, 1], [0, 0, 9]])
print(f'Определитель матрицы A равен {np.linalg.det(A)}')
```

```
Определитель матрицы A равен 180.0
```

в.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$$

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 7 \cdot 6) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 7 \cdot 5) = 0$$

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (1 \cdot 5 \cdot 9 + 7 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 8) - (3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 8 \cdot 6 + 9 \cdot 4 \cdot 2) = 0$$

In [9]:

```
A = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]])
print(f'Определитель матрицы A равен  {np.linalg.det(A)}')
```

```
Определитель матрицы A равен  0.0
```

Задание 2

а.

Так как для двух квадратных матриц одинакового размера справедливо правило $det(A \cdot B) = detA \cdot detB.$, то при $detA = 4$:

$$det(A^2) = det(A \cdot A) = detA \cdot detA = 4 \cdot 4 = 14$$

б.

Согласно первому свойству определителей - определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной.

Следовательно при $detA = 4$ определитель $det(A^T) = det(A) = 4$

в.

Согласно правилу умножения матрицы на число:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Также согласно свойству определителя матрицы, умножение строки или столбца матрицы на число λ приведет к умножению определителя матрицы на то же число:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Следовательно, в случае нахождения определителя матрицы, умноженной на число, множитель каждой строки матрицы может быть вынесен столько раз, сколько соответствует размерности матрицы:

$$det(\lambda \cdot A) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^n \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n \cdot det(A),$$

где n разрядность матрицы.

Следовательно при $det(A) = 4$ выражение $det(2A) = det(A) \cdot 2^n = 4 \cdot 2^n$.

Задание 3

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

Вычтя из второй строки исходной матрицы перыую строку умноженную на 2, получим матрицу в которой все элементы второй строки равны 0:

$$detA = \begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

В случаях когда матрица имеет нулевую строку или нулевой столбец определитель матицы равен нулю. Следовательно матрица является **вырожденной**.

In [10]:

```
A = np.array([[-2, 7, -3], [4, -14, 6], [-3, 7, 13]])
if np.linalg.det(A):
    print('Матрица A невырожденная.')
else:
    print('Матрица A вырожденная.')
```

```
Матрица A вырожденная.
```

Задание 4

а.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Третья строка матрицы A является суммой первых двух, следовательно может быть отброшена:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку есть минор 2-го порядка, отличный от нуля:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 2 = -1$$

Следовательно $r(A) = 2$

In [11]:

```
A = np.array([[1, 2, 3], [1, 1, 1], [2, 3, 4]])
print(f'Ранг матрицы A равен: {np.linalg.matrix_rank(A)}')
```

```
Ранг матрицы A равен: 2
```

б.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Так как третий ряд является линейной комбинацией первого и второго рядов, его можно выбросить и провести ряд элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Полученная матрица имеет 4 минора 3-го порядка, два из которых отличны от нуля. Следовательно **ранг матрицы равен 3**.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0; \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4; \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

In [12]:

```
A = np.array([[0, 0, 2, 1], [0, 0, 2, 2], [0, 0, 4, 3], [2, 3, 5, 6]])
print(f'Ранг матрицы A равен: {np.linalg.matrix_rank(A)}')
```

```
Ранг матрицы A равен: 3
```