Задачи к коллоквиуму

Доказать эквивалентность определений интеграла Римана на языке ε-δ и через последовательности.

Является ли множество всех рациональных точек на отрезке $[0, 2]$ нуль-множеством по Лебегу? по Жордану? Ответ обосновать.

Построить неинтегрируемую функцию на отрезке $[0, 1]$, квадрат которой интегрируем.

Доказать, что если функция интегрируема на $[a, b]$ и $\inf_{[a,b]} |f(x)| > 0$, то функция $1/f$ также интегрируема на $[a, b]$.

Доказать, что если f интегрируема на [0,1] и $f(x) > 0$ при любом $x \in [0, 1]$, то $\int_0^1 f(x)\,dx > 0$.

Найти предел $\lim_{x\to 0}(1/x)\int_0^x \cos t^2 dt$.

Построить неинтегрируемую функцию на отрезке $[0, 1]$, модуль которой интегрируем.

Доказать, что если f — нечетная функция на $[-l, l]$, то $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$.

Получить формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа из формулы Тейлора с остатком в интегральной форме.

Вычислить интегральные суммы Дарбу на отрезке $[0, 1]$ для функции Дирихле $f(x) = 1$, если x рациональное, $f(x) = 0$, если x иррациональное.

Доказать измеримость цилиндра в $\mathbb{R}^3$ и вычислить его объем.

Исходя из определения длины кривой, доказать, что если спрямляемая кривая разбита на две части, то эти части спрямляемы, и ее длина равна сумме длин составляющих ее кривых.

Вычисление длины гладкой кривой в трехмерном пространстве с помощью определенных интегралов.

Пусть f интегрируема на [0,1], причем $0 \le f(x) \le 1$ $(0 \le x \le 1)$; g непрерывна на [0,1]. Доказать, что тогда $g \circ f$ интегрируема на [0,1].

Доказать, что если f и g интегрируемы на [0,1] и $f(x) < g(x)$ $(x \in [0, 1])$, то $\int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^1 g(x)\,dx$.

Функция $f(x)$ $(a < x < b)$ непрерывна и ограничена. Всегда ли можно доопределить f в точках a и b так, чтобы она была интегрируемой?

Покажите, что если функция f не убывает, то

$$\left|\int_0^1 f(x)dx - (1/n)\sum_{k=1}^{n} f(k/n)\right| = O(1/n)\ (n \to \infty).$$

Используя интегральные суммы, найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0.$$

Доказать, что если функция f непрерывна и положительна на отрезке $[0, 1]$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(1/n)f(2/n)\cdots f(n/n)} = \exp\left(\int_0^1 \ln f(x)\,dx\right).$$

Покажите, что функция $f(x) = \operatorname{sgn} \sin \frac{\pi}{x}$, если $x \neq 0$, $f(x) = 1$, если $x = 0$ интегрируема на [0,1].

Пусть f интегрируема на $[0,1]$. оказать, что интеграл $\int_0^1 f^2(x)dx = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности f.

Вывести формулу площади боковой поверхности усеченного конуса.

Используя интегральные суммы, найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

Доказать, что если функция f непрерывна на $[0, \pi/2]$, то

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx.$$

Доказать, что если функция f непрерывна и имеет период T на вещественной прямой, то для любого a

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx$$

Пусть функция f непрерывна на $[0, +\infty)$ и $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$. Пользуясь теоремой о среднем, доказать, что $\lim_{x\to+\infty}(1/x) \int_0^x f(t)\, dt = A$.

Используя интегральные суммы, найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$$

Доказать, что если функция интегрируема на $[-1, 2]$, то

$$\lim_{h\to 0} \int_0^1 f(x+h)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Доказать, что если f — четная функция на $[-l, l]$, то $\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = 2\int_0^l f(x)\, dx$.

Привести пример функций f и g, интегрируемых на $[0, 1]$, которые не совпадают тождественно между собой, $f(x) \leq g(x)$, $x \in [0, 1]$, но интегралы от которых по отрезку $[0, 1]$ совпадают.

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$