Записать равенство Парсеваля для пространства комплекснозначных функций $L^2(-\pi,\pi)$ с ортогональным базисом $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Рассмотрим скалярное произведение на множестве непрерывных функций на $[-1,1]$:

$$< f,g >= \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}f(x)g(x)dx.$$

Доказать, что многочлены Чебышева образуют ортогональную систему в этом унитарном пространстве. Чему равна норма многочленов Чебышева в этом пространстве?

Доказать, что не существует функции из $L^2(-\pi,\pi)$, коэффициенты Фурье которой равны $a_n = 2/n$, $b_n = 1/\sqrt{n}$.

В каких точках интервала $(-\pi,\pi)$ ряд Фурье функции

$$f(x) = \sqrt[10]{|x(x+1)|}$$

сходится к значению $f(x)$?

В каких точках интервала $(-\pi,\pi)$ ряд Фурье функции $f(x) = \sqrt{|\sin x|}$ сходится к значению $f(x)$?

Доказать, что не существует функции из $L^2(-\pi,\pi)$, коэффициенты Фурье которой равны $b_n = 0$, $a_n = 1/\sqrt{n}$.

В каких точках интервала $(-\pi,\pi)$ ряд Фурье функции

$$f(x) = (\ln|x|)^{-2} + \sqrt{|x^2+1)|}$$

сходится к значению $f(x)$?

Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая, наделенная метрикой $\rho(x,y) = |\exp x - \exp y|$ (проверить 3 аксиомы метрики!)?

Убедиться, что функция

$$\rho(x,y) = \sup_k |x_k - y_k|$$

определяет метрику на множестве c сходящихся вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$.

Убедиться, что функция

$$\rho(x,y) = \sup_k |x_k - y_k|$$

определяет метрику на множестве l_∞ ограниченных вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$.

Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая, наделенная метрикой (проверить 3 аксиомы метрики!) $\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$?

Убедиться, что функция

$$\rho(x, y) = \sup_k |x_k - y_k|$$

определяет метрику на множестве l_∞ ограниченных вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$.

Показать, что функция

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

определяет метрику на множестве $M[a, b]$ ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций.

Рассмотрим пространство непрерывных на $[a, b]$ функций $f(x)$ таких, что $f(a) = 2f(b)$ с метрикой $d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$. Будет ли это метрическое пространство полным?

Привести пример последовательности непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, фундаментальной по метрике

$$d(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

но не сходящейся ни к какой непрерывной функции по этой метрике.

Сходится ли в пространстве $C[0, 1]$ последовательность $x_n = t^n - t^{n+1}$?

Показать, что функция

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

определяет метрику на множестве $M[a, b]$ ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций.

Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая, наделенная метрикой (проверить 3 аксиомы метрики!)

$$\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|?$$

Рассмотрим пространство непрерывных на $[a, b]$ функций $f(x)$ таких, что $f(a) = f(b)$ с метрикой

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Будет ли это метрическое пространство полным?

Привести пример последовательности непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, фундаментальной по метрике

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx,$$

но не сходящейся ни к какой непрерывной функции по этой метрике.