С. Р. Насыров

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. МЕРА ЖОРДАНА. КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Казань – 2010

$\phi(A) \subset \cup_{i=1}^m \phi(Q_i')$. В силу предыдущей леммы $\mu(\phi(Q_i)) = |\det[\phi]|\mu(Q_i)$, $\mu(\phi(Q_i')) = |\det[\phi]|\mu(Q_i')$. Применяя те же рассуждения, что и для случая параллельного переноса, получаем $\sum_{i=1}^l \mu(\phi(Q_i)) \le \mu_*(\phi(A)) \le \mu^*(\phi(A)) \le \sum_{i=1}^m \mu(\phi(Q_i'))$, откуда $|\det[\phi]|\mu_*(k;A) = |\det[\phi]| \sum_{i=1}^l \mu(Q_i) \le \mu_*(\phi(A)) \le \mu^*(\phi(A)) \le |\det[\phi]| \sum_{i=1}^m \mu(Q_i') = |\det[\phi]|\mu^*(k;A)$. При $k \to \infty$ величины $\mu_*(k;A)$, $\mu^*(k;A)$ стремятся к $\mu(A)$, поэтому из последнего неравенства получаем $|\det[\phi]|\mu(A) \le \mu_*(\phi(A)) \le \mu^*(\phi(A)) \le |\det[\phi]|\mu(A)$. Значит, $\mu_*(\phi(A)) = \mu^*(\phi(A)) = |\det[\phi]|\mu(A)$. Это доказывает, что множество $\phi(A)$ измеримо и $\mu(\phi(A)) = |\det[\phi]|\mu(A)$.

б) В общем случае представим ϕ в виде $\phi = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \ldots \circ \phi_p$, где ϕ_j имеют вид I)–III). Так как для них утверждение леммы уже установлено, имеем $\mu(\phi(A)) = \mu(\phi_1 \circ \phi_2 \circ \ldots \circ \phi_p(A)) = |\det[\phi_1]| \cdot |\det[\phi_2]| \cdot \ldots \cdot |\det[\phi_p]|\mu(A) = |\det[\phi_1 \circ \phi_2 \circ \ldots \circ \phi_p]|\mu(A) = |\det[\phi]|\mu(A)$. Теорема 1 доказана.

Теперь рассмотрим любое ортогональное преобразование в $\mathbb{R}^n$. Так как определитель матрицы этого преобразования равен по модулю единице, получаем, что при ортогональном преобразовании мера множеств не меняется. Так как мера не меняется и при сдвиге, получаем, что справедлива

Теорема 2. *При любом движении в $\mathbb{R}^n$ измеримые множества переходят в измеримые той же меры.*

5 Кратные интегралы Римана

5.1 Разбиение множества

Пусть A — некоторое измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Разбиением множества A называется совокупность его измеримых подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_p$, обладающая свойствами:

1) $A = \cup_{i=1}^p A_i$;

2) $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ для любых i, j, таких, что $i \ne j$;

3) $A_i = A_i^- \cap A$ для любого i.

Разбиение $(A_j')_{1\le j\le q}$ называется измельчением разбиения $(A_i)_{1\le i\le p}$, если для любого i, $1 \le i \le p$, существует j, $1 \le j \le q$, такое, что $A_j' \subset A_i$.

Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$. Диаметром множества B называется число $d(B) := \sup_{x,y\in B} \|x - y\|$. Диаметром разбиения $\tau = (A_i)_{1\le i\le p}$ называется число $d(\tau) := \max_{1\le i\le p} d(A_i)$.

Свойства разбиений.

1) Если $(A'_j)_{1\le j\le q}$ является измельчением $(A_i)_{1\le i\le p}$, а $(A''_k)_{1\le k\le r}$ — измельчением $(A'_j)_{1\le j\le q}$, то $(A''_k)_{1\le k\le r}$ является измельчением $(A_i)_{1\le i\le p}$.

2) Для любых разбиений $(A_i)_{1\le i\le p}$ и $(A'_j)_{1\le j\le q}$ множества A существует разбиение, которое является измельчением как $(A_i)_{1\le i\le p}$, так и $(A'_j)_{1\le j\le q}$. Действительно, в качестве разбиения можно взять совокупность непустых пересечений множеств $A_i \cap A'_j$.

3) Пусть A — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение τ с диаметром $d(\tau) < \varepsilon$. Действительно, выберем целое k такое, что $\frac{\sqrt{n}}{2^k} < \varepsilon$. Рассмотрим все двоичные кубы $Q_1, Q_2, \dots, Q_p$ ранга k, которые пересекаются с A. Тогда $\tau = (A \cap Q_i)_{1\le i\le p}$ — разбиение A. Имеем $d(A\cap Q_i) \le d(Q_i) = \frac{\sqrt{n}}{2^k} < \varepsilon$, поэтому $d(\tau) < \varepsilon$.

5.2 Интегральные суммы. Определение кратного интеграла Римана

Пусть A — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f : A \to \mathbb{R}$. ассмотрим любое разбиение $\tau = (A_i)_{1\le i\le p}$ множества A. Фиксируем в A_i некоторую точку ξ_i. Семейство $(\xi_i)_{1\le i\le p}$ назовем семейством промежуточных точек T_τ, соответствующим разбиению τ. Интегральной суммой Римана для разбиения τ и семейства промежуточных точек T_τ назовем величину $S(f,\tau,T_\tau) := \sum_{i=1}^p f(\xi_i)\mu(A_i)$.

Число I называется пределом интегральных сумм Римана $S(f,\tau,T_\tau)$ при $d(\tau)\to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall \tau\ \forall T_\tau$

$$d(\tau) < \delta \Longrightarrow |S(f,\tau,T_\tau) - I| < \varepsilon.$$

Если существует $\lim_{d(\tau)\to 0} S(f,\tau,T_\tau) = I$, то говорят, что функция f интегрируема на множестве A по Риману и число I называют значением интеграла Римана от функции f по множеству A. При $n \ge 2$ интеграл называется кратным итегралом.

Интеграл Римана обозначается $\int_A f d\mu = \int_A f d\mu_n = \int_A f(x)dx$. Применяют и другие обозначения. В $\mathbb{R}^2$:

$$\iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2,$$

в $\mathbb{R}^3$:

$$\iiint_A f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1dx_2x_3,$$

в $\mathbb{R}^2$:
$$\iint \dots \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots x_n.$$

5.3 Интегральные суммы Дарбу

Пусть функция f ограничена на измеримом по жордану множестве A. Пусть $\tau = (A_i)_{1\le i\le p}$ — некоторое разбиение множества A. Обозначим $M_{A_i}(f) = \sup_{A_i} f$, $m_{A_i}(f) = \inf_{A_i} f$. Верхней интегральной суммой Дарбу для функции f, соответствующей разбиению τ, назовем число $S^*(f,\tau) := \sum M_{A_i}(f)\mu(A_i)$, нижней — число $S_*(f,\tau) := \sum m_{A_i}(f)\mu(A_i)$.

Свойства сумм Дарбу.

1) Для любых τ и T_τ
$$S_*(f,\tau) \le S(f,\tau,T_\tau) \le S^*(f,\tau).$$
Действительно, для любого $\xi_i \in A_i$ имеем $m_i \le f(\xi) \le M_i$, поэтому $m_{A_i}(f)\mu(A_i) \le \sum_{i=1}^p f(\xi_i)\mu(A_i) \le M_{A_i}(f)\mu(A_i)$.

2) Если τ' — измельчение τ, то
$$S_*(f,\tau) \le S_*(f,\tau') \le S^*(f,\tau') \le S^*(f,\tau).$$

Пусть $\tau = (A_i)_{1\le ilep}$, $\tau' = (A'_j)_{1\le jleq}$. Имеем
$$S^*(f,\tau) = \sum_{i=1}^p M_{A_i}(f)\mu(A_i) = \sum_{i=1}^p M_{A_i}(f) \sum_{j:A'_j\subset A_i} \mu(A'_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^p \sum_{j:A'_j\subset A_i} M_{A_i}(f)\mu(A'_j) \ge \sum_{i=1}^p \sum_{j:A'_j\subset A_i} M_{A'_j}(f)\mu(A'_j) =$$
$$= \sum_{j=1}^q M_{A'_j}(f)\mu(A'_j) = S^*(f,\tau').$$
Для нижних сумм доказательство проводится аналогично. Среднее неравенство следует из 1).

3) Для любых разбиений τ', τ'' имеем $S_*(f,\tau') \le S^*(f,\tau'')$.

Действительно, пусть τ измельчение как τ', так и τ''. Тогда в силу 2) и 1)
$$S_*(f,\tau') \le S_*(f,\tau) \le S^*(f,\tau) \le S^*(f,\tau'').$$

Из 3) следует, что конечны величины $I_*(f,A) := \sup S_*(f,\tau)$, $I^*(f,A) := \sup S^*(f,\tau)$. Величины $I_*(f,A)$ и $I^*(f,A)$ называются нижним и верхним интегралами Дарбу для ограниченной на измеримом множестве A функции f.

4) $I_*(f,A) \le I^*(f,A)$.

5) **Лемма Дарбу.** *Для ограниченной на измеримом множестве A функции f существуют* $\lim_{d(\tau)\to 0} S_*(f,\tau) = I_*(f,A)$, $\lim_{d(\tau)\to 0} S^*(f,\tau) = I^*(f,A)$.

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы Дарбу для интегралов по отрезку.

Теорема (критерий интегрируемости). *Для ограниченной на измеримом множестве A функции f следующие условия равносильны:*

1) *f интегрируема на множестве A;*

2) $\lim_{d(\tau)\to 0}[S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau)] = 0$;

3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau$: $S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \varepsilon$;

4) $I_*(f,A) = I^*(f,A)$.

Если эти условия выполняются, то $\int_A f d\mu = I_*(f,A) = I^*(f,A)$.

Доказательство также аналогично доказательству соответствующего утверждения для интегралов по отрезку.

5.4 Классы интегрируемых функций

Теорема 1. *Если A — нуль-множество, то любая функция интегрируема на A и $\int_A f d\mu = 0$.*

Доказательство. Для любого разбиения $\tau = (A_i)_{1\le i\le p}$ имеем $\mu(A_i) = 0$, $1 \le i \le p$. Следовательно, $S(f,\tau,T_\tau) := \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)\mu(A_i) = 0$ и $\int_A f d\mu = \lim_{d(\tau)\to 0} S(f,\tau,T_\tau) = 0$.

Теорема 2. *Любая непрерывная функция f на замкнутом измеримом по Жордану множеству A является интегрируемой.*

Доказательство. Если A — замкнутое и измеримое множество, то A — замкнуто и ограничено, следовательно, компактно. Можно считать, что $\mu(A) > 0$, так как в противном случае утверждение теоремы следует из теоремы 1.

Функция f непрерывна на компактном множестве A. По теореме Кантора f равномерно непрерывна. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $\forall x',\, x'' \in A$ $(\|x' - x''\| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon)}{\mu(A)}$.

Пусть $\tau = (A_i)_{1 \le i \le p}$ — некоторое разбиение множества A с диаметром $d(\tau) < \delta$. Тогда и любых $x',\, x'' \in A_i$ $\|x' - x''\| \le d(A_i) \le d(\tau) < \delta$, следовательно, $f(x') - f(x'') < \frac{\varepsilon)}{\mu(A)}$ откуда $M_{A_i}(f) - m_{A_i}(f) \le \frac{\varepsilon)}{\mu(A)}$. Имеем

$$S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) = \sum_{i=1}^{p}(M_{A_i}(f) - m_{A_i}(f))\mu(A_i) \le \frac{\varepsilon}{\mu(A)} \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) = \frac{\varepsilon)}{\mu(A)} \cdot \mu(A) = \varepsilon.$$

В силу критерия интегрируемости функция f интегрируема на A.

5.5 Множества меры нуль по Лебегу

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством меры нуль (или нуль-множеством) по Лебегу , если для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества A конечным или счетным числом открытых кубов Q_j таких, что $\sum_i \mu(Q_i) < \varepsilon$.

Свойства множеств меры нуль по Лебегу.

1) Любое подмножество множества меры нуль по Лебегу является также нуль-множеством по Лебегу.

2) Объединение конечного или счетного числа нуль-множеств по Лебегу является нуль-множеством по Лебегу.

Доказательство. Пусть $A = \cup_{i \in I} A_i$, где A_i — множество меры нуль по Лебегу, I — конечное или счетное подмножество в $\mathbb{N}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда для любого $i \in I$ существует покрытие $A_i \subset \cup_{j \in J_i} Q_{ij}$ множества A_i открытыми кубами Q_{ij}, где J_i – конечное или счетное множество, $\sum_{j \in J_i} \mu(Q_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Тогда $A \subset \cup_{i,j} Q_{ij}$ — покрытие A не более чем счетным числом кубов $Q_{i,j}$, $j \in J_i$, $i \in I$, причем $\sum_{i,j} \mu(Q_{ij}) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \mu(Q_{ij}) < \sum_{i \in I} \frac{\varepsilon}{2^i} \le \varepsilon$.

Следствие. Любое счетное множество в R^n является нуль-множеством по Лебегу.

3) Множество меры нуль по Жордану является нуль-множеством по Лебегу.

Обратное неверно. Например, множество $Q \cap [0;1]$ не измеримо по Жордану, но является множеством меры нуль по Лебегу как лбое счетное множество.

4) Если A — компактное нуль-множество по Лебегу, то A — нуль множество и по Жордану.

Действительно, если $A \subset \cup_{i\in I} Q_i$ — покрытие множества A открытыми кубами и $\sum_{i\in I}\mu(Q_i) < \varepsilon$, то в силу компактности A из этого покрытия можнго выделить конечное подпокрытие, т.е. существует конечное подмножество $I' \subset I$ такое, что $A \subset \cup_{i\in I'} Q_i$. Тогда $mu^*(A) \le \sum_{i\in I'}\mu(Q_i) < \varepsilon$. Поскольку ε — произвольное положительное число, то отсюда следует, что $\mu^*(A) = 0$. Следовательно, A — множество меры нуль по Жордану.

5.6 Колебание функции в точке

Пусть функция f ограничена на множестве A и $x \in A^\circ$. Тогда для достаточно малых положительных δ имеем $O_\delta(x) \subset A$. Обозначим $M_\delta(x) = \sup_{O_\delta(x)} f$, $m_\delta(x) = \inf_{O_\delta(x)} f$. Из определения ясно, что величина $M_\delta(x)$ является возрастающей, а $m_\delta(x)$ убывающей функцией от параметра δ. Поэтому неотрицательная функция $M_\delta(x) - m_\delta(x)$ имеет конечный предел $\omega_f(x) := \lim_{\delta\to 0+}(M_\delta(x) - m_\delta(x))$. Величина $\omega_f(x)$ называется колебанием функции f в точке x.

Упражнение. Докажите, что функция f непрерывна в точке $x \in A^\circ$ тогда и только тогда, когда $\omega_f(x) = 0$.

Для любого $\lambda > 0$ рассмотрим множество $A_\lambda := \{x \in A^\circ \mid \omega_f(x) \ge \lambda\}$.

Лемма 1. *Для любого $\lambda > 0$ множество A_λ является замкнутым в A°, т.е. существует замкнутое в $\mathbb{R}^n$ множество B такое, что $A_\lambda = B \cap A^\circ$.*

Доказательство. Пусть x_m — некоторая последовательность точек из A_λ такая, что $x_m \to x_0 \in A^\circ$, $m \to \infty$. Требуется доказать, что $x_0 \in A_\lambda$. Фиксируем $\delta > 0$ такое, что $O_\delta(x_0) \subset A$. В силу сходимости x_m к x_0 существует $N \in \mathbb{N}$: $\forall m \ge N$ имеем $\|x_m - x_0\| < \frac{\delta}{2}$. Тогда $O_{\delta/2}(x_m) \subset O_\delta(x_0)$, $m \ge N$. При таких m очевидно $M_\delta(x_0) \ge M_{\delta/2}(x_m)$, $m_\delta(x_0) \le m_{\delta/2}(x_m)$, откуда $M_\delta(x_0) - m_\delta(x_0) \ge M_{\delta/2}(x_m) - m_{\delta/2}(x_m) \ge \omega_f(x_m) \ge \lambda$. Переходя к пределу при $\delta \to 0+$ получаем $\omega_f(x_0) \ge \lambda$. Это означает, что $x_0 \in A_\lambda$.

Следствие. *Множество $A_\lambda \cup \partial A$ является замкнутым в $\mathbb{R}^n$.*

Действительно, существует замкнутое множество B такое, что $A_\lambda = B \cap A^\circ$. Тогда $A_\lambda \cup \partial A = (B \cap A^\circ) \cup \partial A = (B \cup \partial A) \cap (A^\circ \cup \partial A) = (B \cup \partial A) \cap A^-$

— замкнуто, так как B, ∂A и A^- — замкнутые множества.

Лемма 2. *Пусть функция f задана на множестве A, B — компактное подмножество в A° и $\omega_f(x) < \lambda$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для любых x', $x'' \in B$*

$$\|x' - x''\| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < 2\lambda.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда $\forall\delta > 0$ $\exists x'_\delta$, $x''_\delta \in B$: $\|x'_\delta - x''_\delta\| < \delta$ и $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq 2\lambda$. В частности, для $\delta = \frac{1}{m}$ существуют $\exists x'_m$, $x''_m \in B$: $\|x'_m - x''_m\| < \frac{1}{m}$ и $|f(x'_m) - f(x''_m)| \geq 2\lambda$. Так как B компактно, то существует подпоследовательность x'_{m_k}, сходящаяся к некоторому $x_0 \in B$. Так как $\|x'_{m_k} - x''_{m_k}\| < \frac{1}{m_k} \to 0$, $k \to \infty$, то x''_{m_k}, $k \to \infty$. В точке x_0 выполняется неравенство $\omega_f(x_0) < \lambda$. С другой стороны, в любой δ-окрестности точки x_0 существует некоторый шар $O_r(x_m) \subset O_\delta(x_0)$. Это доказывается так же, как и при доказательстве леммы 1. Так как $\omega_f(x_m) \geq 2\lambda$, существуют точки x', $x'' \in O_r(x_m)$ такие, что $f(x') - f(x'') \geq 2\lambda$. Так как x', $x'' \in O_\delta(x_0)$, то $M_\delta(x) - m_\delta(x) \geq 2\lambda$. Поскольку это верно для любого $\delta > 0$, получаем $\omega_f(x_0) \geq 2\lambda$ — противоречие с неравенством $\omega_f(x_0) < \lambda$.

5.7 Теорема Лебега

Теорема (Лебег). *Ограниченная на измеримом по Жордану множестве функция f интегрируема на A тогда и только тогда, когда множество точек разрыва функции f является нуль-множеством по Лебегу.*

Доказательство. Достаточность. Пусть Λ — множество точек разрыва функции f. Предположим, что Λ — нуль-множество по Лебегу. Докажем, что если f ограничена на A, т.е. $\exists K > 0$: $\forall x \in A$ $|f(x)| \leq K$, то f интегрируема на A. Для этого воспользуемся критерием интегрируемости. Зададим $\varepsilon > 0$ и докажем, что существует разбиение τ множества A такое, что $S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \varepsilon$. можно считать, что $\mu(A) > 0$.

Фиксируем число $0 < \lambda < \frac{\varepsilon}{4\mu(A)}$. Ясно, что $A_\lambda \subset \Lambda$, поэтому A_λ — нуль-множество по Лебегу. Так как A измеримо, то оно ограничено и ∂A — нуль-множество по Жордану, следовательно, по Лебегу. Отсюда следует, что $A^*_\lambda := A_\lambda \cup \partial A$ — нуль-множество по Лебегу. Но по лемме 1 это множество замкнуто, а так как A ограничено, то A^*_λ также ограничено, так как содержится в ограниченном множестве A^-. Следовательно, A^*_λ компактное нуль-множество по Лебегу, откуда следует, что оно является нуль-множеством и по Жордану.

Покроем множество A^*_λ конечным числом открытых кубов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ так, чтобы $\sum_{i=1}^k \mu(Q_i) < \frac{\varepsilon}{4K}$. Пусть $A_1 = \cup_{i=1}^k Q_i^- \cap A$. Тогда

$$\mu(A_1) \leq \sum_{i=1}^k \mu(Q_i^-) = \sum_{i=1}^k \mu(Q_i) < \frac{\varepsilon}{4K}.$$

Пусть $A' = A \setminus \cup_{i=1}^k Q_i$. Так как $\cup_{i=1}^k Q_i \supset \partial A$, то $A' = A^- \setminus \cup_{i=1}^k Q_i$, откуда следует, что A' является замкнутым множеством как разность замкнутого и открытого. В силу ограниченности A множество A' является компактным.

Итак, A' компактное подмножество в A° и, поскольку оно не пересекается с A_λ, имеем $\omega_f(x) < \lambda \ \forall x \in A'$. По лемме 2 существует $\delta > 0$ такое, что для любых x', $x'' \in B$

$$\|x' - x''\| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < 2\lambda. \tag{1}$$

Разобьем A' на конечное число замкнутых измеримых множеств A_2, $A_3, \ldots, A_p$ таких, что $\max_{1\leq i\leq p} d(A_i) < \delta$. Тогда в силу (1) $M_{A_i} - m_{A_i} \leq 2\lambda$, $2 \leq i \leq p$. Отметим, что $M_{A_1} - m_{A_1} \leq 2K$. Пусть $\tau = (A_i)_{1\leq i\leq p}$. Тогда $S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) = (M_{A_1} - m_{A_1})\mu(A_1) + \sum_{i=2}^p (M_{A_i} - m_{A_i})\mu(A_i) \leq 2K\mu(A_1) + 2\lambda \sum_{i=2}^p \mu(A_i) \leq 2K\mu(A_1) + 2\lambda\mu(A) < 2K\frac{\varepsilon}{4K} + 2\mu(A)\frac{\varepsilon}{4\mu(A)} = \varepsilon$. Итак, $S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \varepsilon$. Это доказывает интегрируемость f.

Необходимость. Пусть f — ограниченная интегрируемая функция на A. Докажем сначала, что для любого $\lambda > 0$ множество A_λ является нуль-множеством по Жордану. По критерию интегрируемости существует разбиение $\tau = (A_i)_{1\leq i\leq p}$ множества A такое, что $S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \lambda\varepsilon$. Тогда

$$\lambda\varepsilon > \sum_{i=1}^p (M_{A_i} - m_{A_i})\mu(A_i) \geq \sum{}' (M_{A_i} - m_{A_i})\mu(A_i), \tag{2}$$

где штрих у суммы означает суммирование по всем i, для которых множество A_i содержит по крайней мере одну точку x из A_λ, внутреннюю для A_i. Тогда для таких A_i

$$M_{A_i} - m_{A_i} \geq \omega_f(x) \geq \lambda.$$

Тогда из (2) следует, что $\lambda\varepsilon > \lambda\sum' \mu(A_i)$, т.е. $\sum' \mu(A_i) < \varepsilon$. Теперь заметим, что множество точек из A_λ, которые не являются внутренними, лежат на ∂A_i. Таким образом, $A_\lambda \subset (\cup' A_i) \cup (\cup \partial A_i)$. Так как A_i измеримы, их границы являются нуль-множествами, откуда $\mu^*(A_\lambda) \le \sum' \mu(A_i) < \varepsilon$. Так как ε — произвольное положительное число, то отсюда заключаем, что $\mu^*(A_\lambda) = 0$. Таким образом, A_λ — нуль-множество по Жордану.

Теперь установим, что $\Lambda \cap A^\circ = \cup_{m=1}^{\infty} A_{1/m}$. Действительно, если $x \in \cup_{m=1}^{\infty} A_{1/m}$, То существует $m \in \mathbb{N}$: $x \in A_{1/m}$, т.е. $\omega_f(x) > \frac{1}{m} > 0$. Следовательно, x — точка разрыва функции f. Кроме того, $x \in A^\circ$, поэтому $x \in \Lambda \cap A^\circ$. Обратно, если $x \in \Lambda \cap A^\circ$, то $\omega_f(x) > 0$, значит, существует $k \in \mathbb{N}$: $\omega_f(x) > \frac{1}{k}$. Значит $x \in A_{1/k} \subset \cup_{m=1}^{\infty} A_{1/m}$.

Множества $A_{1/m}$ являются множествами меры нуль по Жордану, следовательно, и по Лебегу. Поэтому $\Lambda \cap A^\circ = \cup_{m=1}^{\infty} A_{1/m}$ — также нуль-множество по Лебегу. Наконец, $\Lambda \subset (\Lambda \cap A^\circ) \cup \partial A$ является подмножеством объединения двух нуль-множеств по Лебегу — $\Lambda \cap A^\circ$ и ∂A. Поэтому Λ нуль-множество по Лебегу.

5.8 Урезанные суммы Римана

Лемма. *Пусть A — измеримое по Жордану множество в $\mathbb{R}^n$, $B \subset A$ и B — нуль-множество по Жордану. Тогда*

$$\lim_{d(\tau)\to 0} \sum_{i:A_i \cap B \neq \emptyset} \mu(A_i) = 0,$$

где $\tau = (A_i)_{1\le i\le p}$.

Доказательство. Так как $\mu(B) = 0$, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}$: $\mu^*(k; B) < 3^{-n}\varepsilon$. Значит, для всех двоичных кубов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$, пересекающихся с B^- имеем $\sum_{i=1}^{l} \mu(Q_i) < 3^{-n}\varepsilon$. Пусть C есть объединение всех двоичных кубов ранга k, которые пересекаются с кубами $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$. У любого двоичного куба ранга k существует ровно $(3^n - 1)$ двоичных куба ранга k, которые пересекаются с ним и отличны от него. Поэтому число двоичных кубов ранга k в C не превосходит $3^n l$ и $\mu(C) \le 3^n \sum_{i=1}^{l} \mu(Q_i) < \varepsilon$. Если $\tau = (A_i)_{1\le i\le p}$, $d(\tau) < \frac{1}{2^k}$ и $A_i \cap B \neq \emptyset$, то $A_i \subset C$. Следовательно, $0 \le \sum_{i:A_i\cap B=\emptyset} \mu(A_i) \le \mu(C) \le \varepsilon$. Отсюда следует утверждение леммы.

Теорема. *Пусть f ограничена на измеримом по Жордану множестве A. Пусть $B \subset A$ и B — нуль-множество по Жордану. Для любого разбиения $\tau = (A_i)_{1\le i\le p}$ множества A и любого отвечающего ему* *семейства промежуточных точек* $(\xi_i)_{1\le i\le p}$ *обозначим*

$$S_B(f,\tau,T_\tau)=\sum_{i:A_i\cap B=\emptyset} f(\xi_i)\mu(A_i).$$

Конечный предел $\lim_{d(\tau)\to 0} S_B(f,\tau,T_\tau)$ *существует тогда и только тогда, когда* f *интегрируема на* A*, и в этом случае он равен* $\int_A f d\mu$.

Доказательство. Имеем

$$S(f,\tau,T_\tau)=S_B(f,\tau,T_\tau)+\sum_{i:A_i\cap B\neq\emptyset} f(\xi_i)\mu(A_i). \qquad (*)$$

Так как f ограничена на A, то существует константа $M>0$ такая, что $|f(\xi)|\le M\ \forall \xi\in A$. Тогда

$$\left|\sum_{i:A_i\cap B\neq\emptyset} f(\xi_i)\mu(A_i)\right|\le M\sum_{i:A_i\cap B\neq\emptyset}\mu(A_i)\to 0,$$

$d(\tau)\to\infty$ по предыдущей лемме. Из $(*)$ с учетом интегрируемости f следует, что конечные пределы

$$\lim_{d(\tau)\to 0} S_B(f,\tau,T_\tau),\quad \lim_{d(\tau)\to 0} S(f,\tau,T_\tau)=\int_A f d\mu,$$

существуют одновременно и равны.

Следствие. *Ограниченная на измеримом множестве* A *функция* f *интегрируема тогда и только тогда, когда существует конечный* $\lim_{d(\tau)\to 0} S_{\partial A}(f,\tau,T_\tau)$ *и этот предел равен* $\int_A f d\mu$.

5.9 Сравнение двух определений интеграла по отрезку

Итак, мы имеем два определения интеграла от функции f по отрезку $[a;b]$.

Определение 1). Выбирается разбиение τ отрезка точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$, а также семейство промежуточных точек T_τ. Интегральные суммы $S'(f,\tau,T_\tau)=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\mu([x_{i-1},x_i)$. Функция f интегрируема тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim_{d(\tau)\to 0} S'(f,\tau,T_\tau)$, этот предел и называется интегралом.

Определение 2). Берется любое разбиение $\tau = (A_i)_{1 \le i \le n}$ отрезка $[a; b]$, где A_i — измеримые по Жордану множества. Интегральные суммы $S''(f, \tau, T_\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\mu(A_i)$. Функция f интегрируема тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim_{d(\tau)\to 0} S''(f, \tau, T_\tau)$, и этот предел называется интегралом.

Покажем, что эти два определения эквивалентны. Действительно, разбиение из определения 1) — частный случай разбиения из определения 2), поэтому если функция интегрируема в смысле определения 2), то она интегрируема и в смысле определения 1) и пределы $\lim_{d(\tau)\to 0} S'(f, \tau, T_\tau)$ и $\lim_{d(\tau)\to 0} S'(f, \tau, T_\tau)$ совпадают.

Обратно, пусть функция f интегрируема в смысле определения 1). Тогда по критерию интегрируемости, доказанному во втором семестре, для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\tau = ([x_{i-1}, x_i])_{1 \le i \le n}$ такое, что $S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) < \varepsilon$. Но разбиение τ является также и разбиением в смысле определения 2), т.е. разбиением отрезка на измеримые подмножества. По критерию интегрируемости, доказанному в этом семестре, функция f интегрируема и в смысле определения 2).

5.10 Свойства интегируемых функций

Теорема 1. *Функция $f \equiv 1$ интегрируема на любом измеримом множестве A и $\int_A d\mu =: \int_A 1 d\mu = \mu(A)$.*

Доказательство. Для любых $\tau = (A_i)_{1 \le i \le n}$ и T_τ имеем $S(f, \tau, T_\tau) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(A)$, поэтому существует конечный предел $\lim_{d(\tau)\to 0} S(f, \tau, T_\tau) = \mu(A)$.

Теорема 2. *Если функции f и g ограничены и интегрируемы на измеримом множестве A, то для любых констант α, β функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема на A и $\int_A (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu$.*

Доказательство. Для любых $\tau = (A_i)_{1 \le i \le n}$ и $T_\tau = (\xi_i)_{1 \le i \le n}$ имеем $S(\alpha f + \beta g, \tau, T_\tau) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha f + \beta g)(\xi_i)\mu(A_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\mu(A_i) + \beta \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\mu(A_i) = \alpha S(f, \tau, T_\tau) + \beta S(g, \tau, T_\tau)$. Переходя к пределу при $d(\tau) \to 0$ получаем нужное утверждение.

Теорема 3. *Пусть функции f и g ограничены и интегрируемы на измеримом множестве A. Тогда функция fg также интегрируема на A.*

Доказательство. Пусть функции f и g ограничены и интегрируемы на A. По теореме Лебега множества точек разрыва A_f и A_g этих функций имеют меру нуль по Лебегу. Так как множество точек разрыва произведения $A_{fg} \subset A_f \cup A_g$, оно тоже является множеством меры нуль по Лебегу. Кроме того, произведение fg ограничено на A, так как f и g ограничены. По теореме Лебега произведение fg интегрируемо на A.

Упражнение. Докажите, что если f ограничена и интегрируема на множестве A, то и $|f|$ интегрируема на A.

Теорема 4. *Если функция f интегрируема на A и для некоторых констант m, M имеет место неравенство $m \leq f(x) \leq M$, $x \in A$, то*

$$m\mu(A) \leq \int f d\mu \leq M\mu(A).$$

Доказательство. Для любых $\tau = (A_i)_{1 \leq i \leq n}$ и $T_\tau = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ имеем $m \leq f(x_i) \leq M$ и

$$m\mu(A) \leq m\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} m\mu(A_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\mu(A_i) \leq M\sum_{i=1}^{n} m\mu(A_i) = M\sum_{i=1}^{n} m\mu(A_i) = M\mu(A),$$

т.е. $m\mu(A) \leq S(f, \tau, T_\tau) \leq M\mu(A)$. Переходя к пределу при $d(\tau) \to 0$ получаем нужное утверждение.

Следствие 1. *Если функция f интегрируема и ограничена на A, то*

$$\left|\int_A f d\mu\right| \leq \sup_A |f| \cdot \mu(A).$$

Следствие 2. *Если функция f интегрируема и неотрицательна на A, то $\int_A f d\mu \geq 0$.*

Теорема 5. *Пусть функции f и g интегрируемы на измеримом множестве A и $f(x) \leq g(x)$, $x \in A$. Тогда $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$.*

Доказательство. Функция $g - f$ неотрицательна и интегрируема по теореме 2. Следовательно, по следствию 2 из теоремы 4 с использованием теоремы 2 получаем $\int_A g d\mu - \int_A g d\mu = \int_A (g - f) d\mu \geq 0$.

Следствие 1. Если f интегрируема и ограничена на A, то

$$\left|\int_A f d\mu\right| \leq \int_A |f| d\mu.$$

Теорема 6 (обобщенная теорема о среднем). *Пусть функции f и g ограничены и интегрируемы на множестве A. Пусть $g(x) \geq 0$ и $m \leq f(x) \leq M$, $x \in A$, для некоторых констант m, M. Тогда существует $\alpha \in [m; M]$ такое, что*

$$\int_A f(x)g(x)dx = \alpha \int_A g(x)dx. \tag{2}$$

Если f непрерывна на A и множество A является линейно связным и компактным, то существует $x_0 \in A$ такое, что

$$\int_A f(x)g(x)dx = f(x_0) \int_A g(x)dx.$$

Так как $g(x) \geq 0$, справедливо неравенство $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, $x \in A$. Следовательно, $m \int_A g(x)dx \leq \int_A f(x)g(x)dx \leq M \int_A g(x)dx$. Если $\int_A g(x)dx = 0$, то из последнего неравенства следует, что $\int_A f(x)g(x)dx = 0$ и (2) выполняется для любого числа α. Если же $\int_A g(x)dx \neq 0$, то по следствию 2 из теоремы 4 $\int_A g(x)dx > 0$, поэтому

$$m \leq \frac{\int_A f(x)g(x)dx}{\int_A g(x)dx} \leq M.$$

Обозначим

$$\alpha = \frac{\int_A f(x)g(x)dx}{\int_A g(x)dx},$$

тогда $\alpha \in [m; M]$.

Пусть теперь функция f является к тому же непрерывной на A и множество A линейно связно и компактно. В силу теоремы Вейерштрасса можно считать, что $m = \inf_A f$, $M = \sup_A f$. Непрерывная функция на линейно связном множестве принимает любое значение, промежуточное между m и M. Поэтому существует точка $x_0 \in A$ такая, что $f(x_0) = \alpha$. Это завершает доказательство теоремы 6.

Упражнение. Сформулируйте обычную теорему о среднем (случай $g \equiv 1$).

Теорема 7 (аддитивность интеграла как функции множества). *Пусть функция f ограничена и интегрируема на множестве $A = A_1 \cup A_2$, где A_1 и A_2 измеримы и не пересекаются. Тогда f интегрируема на A_1 и A_2 и*

$$\int_A f(x)dx = \int_{A_1} f(x)dx + \int_{A_2} f(x)dx. \qquad (3)$$

Доказательство. Функция f ограничена на A, поэтому она ограничена на A_1 и A_2. Так как f интегрируема на A, множество точек разрыва A_f функции f имеет лебегову меру нуль. Множества точек разрыва функции f на множествах A_1 и A_2 являются подмножествами множества A_f, поэтому они также имеют меру нуль. Применяя теорему Лебега, убеждаемся, что функция f интегрируема на A_1 и A_2. Пусть теперь τ_1 и τ_2 — разбиение множеств A_1 и A_2 соответственно. Их объединение дает разбиение τ множества A. Диаметры разбиений связаны соотношением $d(\tau) = \max\{d(\tau_1), d(\tau_2)\}$. Возьмем семейства промежуточных точек T_{τ_1}, T_{τ_1} отвечающих разбиениям τ_1 и τ_2. Они порождают семейство промежуточных точек T_τ отвечающих разбиению τ. Справедливо соотношение

$$S_A(f, \tau, T_\tau) = S_{A_1}(f, \tau_1, T_{\tau_1}) + S_{A_2}(f, \tau_2, T_{\tau_2}). \qquad (4)$$

Если $d(\tau_1)$, $d(\tau_2) \to 0$, то $d(\tau) \to 0$ и из (4) следует утверждение теоремы 7.

Теорема 8. *Если функция f ограничена и интегрируема на двух измеримых непересекающихся множествах A_1 и A_2, то она интегрируема на их объединении $A := A_1 \cup A_2$ и справедливо равенство* (4).

Доказательство. Если функция f ограничена на A_1 и A_2, то она ограничена и на A. Множество точек разрыва A_f функции f на A является подмножеством множества $A_f^1 \cup A_f^2 \cup \partial A_1 \cup \partial A_2$, где A_f^1 и A_f^2 — множества точек разрыва f на A_1 и A_2 соответственно. По теореме Лебега множества A_f^1 и A_f^2 являются множествами меры нуль по Лебегу. Границы ∂A_1 и ∂A_2 измеримых множеств A_1 и A_2 являются нуль-множествами по Жордану, следовательно, и по Лебегу. Таким образом, $A_f^1 \cup A_f^2 \cup \partial A_1 \cup \partial A_2$ является нуль-множеством по Лебегу, откуда выводим, что A_f — также нуль-множество по Лебегу. Применяя теорему Лебега, убеждаемся, что f интегрируема на A. Равенство (3) следует из теоремы 7.

Теорема 9 (непрерывность интеграла Римана как функции множества). *Пусть A_n — последовательность измеримых подмножеств* *измеримого множества A и $\lim_{n\to\infty} mu(A_n) = \mu(A)$. Если функция f ограничена и интегрируема на A, то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f d\mu = \int_A f d\mu.$$

Доказательство. Отметим, что интегрируемость функции f на A_n следует из теоремы 7. Имеем

$$\left|\int_A f d\mu - \int_{A_n} f d\mu\right| = \left|\int_{A\setminus A_n} f d\mu\right| \leq \sup_A |f|\cdot\mu(A\setminus A_n) = \sup_A |f|\cdot[\mu(A)-\mu(A_n)] \to 0, \quad n\to\infty.$$

5.11 Сведение кратного интеграла Римана к повторному

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ — измеримые множества. Рассмотрим их произведение

$$A\times B = \{z = (x,y) \mid x\in A, y\in B\} =$$

$$= \{(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) \mid (x_1\ldots,x_n)\in A, (y_1,\ldots,y_m \in B\}.$$

Пусть функция f интегрируема на $A\times B$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{A\times B} f d\mu_{n+m} = \int_{A\times B} f(x_1\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)dx_1\ldots dx_n dy_1,\ldots dy_m =$$

$$= \int_{A\times B} f(x,y)dxdy.$$

Задача: как свести вычисление этого $(n+m)$-мерного интеграла к вычислению интегралов меньшей размерности? Ответ на это дает

Теорема (Фубини). *Пусть функция f ограничена и интегрируема на $A\times B$, для любого $x\in A$ функция $f_x(y) := f(x,y)$ интегрируема (как функция от y) на множестве B и $F(x) := \int_B f(x,y)dy$. Тогда функция F интегрируема на A и*

$$\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A F(x)dx = \int_A\left(\int_B f(x,y)dy\right)dx.$$

Аналогично, если для любого $y\in B$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x на A и $\Phi(y) := \int_A f(x,y)dx$, то функция Φ интегрируема на B и

$$\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_B \Phi(y)dy = \int_B\left(\int_A f(x,y)dx\right)dy.$$

Докажем первое утверждение. Рассмотрим некоторое разбиение $\tau_A = (A_i)_{1\le i\le p}$ множества A. Фиксируем некоторую точку $x_i \in A_i$. Пусть $T_{\tau_A} = (x_i)_{1\le i\le p}$. Тогда интегральная сумма $S(F, \tau_A, T_{\tau_A}) = \sum_{i=1}^{p} F(x_i)\mu(A_i)$. Пусть $\tau_B = (B_j)_{1\le j\le q}$ — некоторое разбиение множества B. В силу аддитивности интеграла как функции множества $F(x_i) = \int_B f(x_i, y)dy = \sum_{j=1}^{q}\int_{B_j} f(x_i, y)dy$.

Для любого $y \in B_j$ имеем

$$m_{A_i\times B_j}(f) := \inf_{A_i\times B_j} f \le f(x_i, y) \le \sup_{A_i\times B_j} f =: M_{A_i\times B_j}(f).$$

Тогда

$$m_{A_i\times B_j}(f)\mu(B_j) \le \int_{B_j} f(x_i, y)dy \le M_{A_i\times B_j}(f)\mu(B_j).$$

Суммируя, получаем

$$\sum_{j=1}^{q} m_{A_i\times B_j}(f)\mu(B_j) \le F(x_i) = \sum_{j=1}^{q}\int_{B_j} f(x_i, y)dy \le \sum_{j=1}^{q} M_{A_i\times B_j}(f)\mu(B_j).$$

Умножая последнее неравенство на $\mu(A_i)$ и суммируя по i, получаем

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} m_{A_i\times B_j}(f)\mu(A_i)\mu(B_j) \le \sum_{i=1}^{p} F(x_i)\mu(A_i) \le \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} M_{A_i\times B_j}(f)\mu(A_i)\mu(B_j).$$

Но $\mu(A_i)\mu(B_j) = \mu(A_i \times B_j)$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} m_{A_i\times B_j}(f)\mu(A_i\times B_j) \le S(F, \tau_A, T_{\tau_A}) \le \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} M_{A_i\times B_j}(f)\mu(A_i\times B_j).$$

Окончательно получаем

$$S_*(f, \tau) \le S(F, \tau_A, T_{\tau_A}) \le S^*(f, \tau),$$

где $\tau := (A_i \times B_j)_{i,j}$ — разбиение множества $A \times B$. При $d(\tau_A)$, $d(\tau_B) \to 0$ имеем $d(\tau) \to 0$ (докажите это самостоятельно!), поэтому $S_*(f, \tau)$, $S^*(f, \tau) \to \int_{A\times B} f(x, y)dxdy$. По теореме о двух милиционерах тогда существует предел $\lim_{d(\tau_A)\to 0} S(F, \tau_A, T_{\tau_A}) = \int_{A\times B} f(x, y)dxdy$. По определению интеграла Римана функция F интегрируема на A и

$$\int_A F(x)dx = \int_{A\times B} f(x, y)dxdy.$$

Теорема доказана.

Замечание. Обычно записывают

$$\int_A \left(\int_B f(x,y)dy \right) dx = \int_A dx \int_B f(x,y)dy,$$

$$\int_B \left(\int_A f(x,y)dx \right) dy = \int_B dy \int_A f(x,y)dx.$$

Эти интегралы называют повторными интегралами.

Следствие 1. *Если функция f непрерывна на $[a;b] \times [c;d]$, то*

$$\iint_{[a;b]\times[c;d]} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

Следствие 2. Пусть функция f непрерывна в параллелограмме $\Pi = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times \ldots [a_n; b_n]$. Тогда

$$\iint \cdots \int\limits_{\Pi} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_n.$$

Для доказательства достаточно применить теорему Фубини $(n-1)$ раз.

Замечание. При сведении кратного интеграла к повторному можно выбирать любой порядок интегрирования:

$$\int\limits_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} dx_{i_1} \int\limits_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} dx_{i_2} \ldots \int\limits_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_{i_n}.$$

Препочтение следует отдавать такому порядку, в котором интегралы по отрезкам вычисляются наиболее просто с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

5.12 Сведение кратного интеграла к повторному в случае правильных областей интегрирования

Правильной областью интегрирования назовем множество в $\mathbb{R}^{n+1}$ вида

$$A_\varphi^\psi := \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ \varphi(x) \le x_{n+1} \le \psi(x), x \in A\},$$

где A — некоторое замкнутое измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, а φ и ψ — непрерывные на A функции.

Лемма. *Любая правильная область A_φ^ψ является измеримым множеством.*

Доказательство. Так как замкнутое множество A измеримо, оно ограничено, следовательно, компактно. Функции φ и ψ непрерывны на компактном множестве A, поэтому они ограничены по теореме Вейерштрасса. Пусть $m = \inf_A \varphi$, $M = \sup_A \psi$. Очевидно, что $A_\varphi^\psi \subset A \times [m; M]$, поэтому A_φ^ψ ограничено, так как A и отрезок $[m; M]$ — ограниченные множества.

По критерию измеримости достаточно доказать, что граница ∂A_φ^ψ есть нуль-множество по Жордану. Имеем $\partial A_\varphi^\psi \subset \Gamma_\varphi \cup \Gamma_\psi \cup \partial A \times [m; M]$. Графики Γ_φ и Γ_ψ непрерывных функций φ и ψ на компактном множестве A являются нуль-множествами по Жордану в $\mathbb{R}^{n+1}$, а ∂A — нуль-множество по Жордану в $\mathbb{R}^n$, поэтому $\partial A \times [m; M]$ — нуль-множество по Жордану в $\mathbb{R}^{n+1}$. Отсюда следует, что ∂A_φ^ψ является подмножеством объединения трех нуль-множеств, значит, само является нуль-множеством по Жордану. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть функция f является итнтегрируемой ограниченной функцией в правильной области A_φ^ψ. Если для любого $x \in A$ существует интеграл $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, x_{n+1}) dx_{n+1}$, то*

$$\int_{A_\varphi^\psi} f(x, x_{n+1}) dx dx_{n+1} = \int_A dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, x_{n+1}) dx_{n+1}.$$

Доказательство. Обозначим $m = \inf_A \varphi$, $M = \sup_A \psi$. Тогда $A_\varphi^\psi \subset A \times [m; M]$. Продолжим функцию f на $A \times [m; M]$ до функции $\widetilde{f}$, полагая

$$\widetilde{f}(x, x_{n+1}) = \begin{cases} f(x, x_{n+1}), & (x, x_{n+1}) \in A_\varphi^\psi; \\ 0, & (x, x_{n+1}) \notin A_\varphi^\psi. \end{cases}$$

Функция $\widetilde{f}$ интерируема на множестве $A \times [m; M]$. Действительно, множество точек разрыва функции $\widetilde{f}$ лежит в множестве $A_f \cup \Gamma_\varphi \cup \Gamma_\psi$, где A_f — множество точек разрыва функции f, а Γ_φ и Γ_ψ — графики функций φ и ψ. Так как f интегрируема, по теореме Лебега A_f — нуль-множество по Лебегу, а Γ_φ и Γ_ψ — нуль-множества по Жордану как графики непрерывных функций на компактном множестве. Следовательно, множество точек разрыва функции $\widetilde{f}$ — нуль-множество по Лебегу. Кроме того, $\widetilde{f}$ ограничена, так как f ограничена. По теореме Лебега функция $\widetilde{f}$ интегрируема.

Функция $f(x, x_{n+1})$ интегрируема по x_{n+1} на $[m; M]$ при любом фиксированном $x \in A$. Действительно, для любого $x \in A$

$$\widetilde{f}(x, x_{n+1}) = \begin{cases} 0, & m \leq \varphi(x) < x_{n+1}; \\ f(x, x_{n+1}), & \varphi(x) < x_{n+1} \leq \psi(x); \\ 0, & \psi(x) \leq x_{n+1} \leq M. \end{cases}$$

Так как функция $f(x, x_{n+1})$ интегрируема на отрезке $[\varphi(x); \psi(x)]$, то функция $\widetilde{f}(x, x_{n+1})$ также интегрируема на нем. Кроме того, $\widetilde{f}(x, x_{n+1})$ интегрируема на $[m; \varphi(x)]$ $[\psi(x); M]$, поскольку равна нулю за исключением, быть может, концевых точек. Имеем

$$\int_m^M \widetilde{f}(x, x_{n+1}) dx_{n+1} = \int_m^{\varphi}(x) \widetilde{f}(x, x_{n+1}) dx_{n+1} + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \widetilde{f}(x, x_{n+1}) dx_{n+1} +$$

$$+ \int_{\psi(x)}^M \widetilde{f}(x, x_{n+1}) dx_{n+1} = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, x_{n+1}) dx_{n+1}.$$

По предыдущей теореме имеем

$$\int_{A \times [m;M]} \widetilde{f}(x, x_{n+1}) dx dx_{n+1} = \int_A dx \int_m^M \widetilde{f}(x, x_{n+1}) dx_{n+1} =$$

$$= \int_A dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, x_{n+1}) dx_{n+1}.$$

С другой стороны,

$$\int_{A \times [m;M]} \widetilde{f}(x, x_{n+1}) dx dx_{n+1} = \int_{A_\varphi^\psi} \widetilde{f}(x, x_{n+1}) dx dx_{n+1} +$$

$$+ \int_{A \times [m;M] \setminus A_\varphi^\psi} \widetilde{f}(x, x_{n+1}) dx dx_{n+1} = \int_{A_\varphi^\psi} f(x, x_{n+1}) dx dx_{n+1}.$$

Из последних равенств следует, что

$$\int_{A_\varphi^\psi} f(x, x_{n+1}) dx dx_{n+1} = \int_A dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, x_{n+1}) dx_{n+1}.$$

Следствие. *Пусть* $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a \le x_1 \le b, \varphi_1(x_1) \le x_2 \le \psi_1(x_1), \varphi_2(x_1, x_2) \le x_3 \le \psi_2(x_1, x_2), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \le x_n \le \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}$*, где* φ_i*,* ψ_i *— непрерывные функции. Тогда для любой непрерывной функции* f *на* A

$$\iint \dots \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \int_a^b dx_1 \int_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} dx_2 \int_{\varphi_2(x_1,x_2)}^{\psi_2(x_1,x_2)} dx_3 \dots \int_{\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n.$$

Для доказательства достаточно применить $(n-1)$ раз предыдущую теорему.

Замечание 1. Если дано множество A, то $[a; b]$ — это проекция A на ось Ox_1, $[\varphi_1(x_1); \psi_1(x_1)]$ — проекция сечения A_{x_1} множества A гиперплоскостью $\{x_1 \equiv \text{const}\}$, $[\varphi_2(x_1, x_2); \psi_2(x_1, x_2)]$ — проекция сечения $A_{x_1 x_2}$ множества A плоскостью $\{x_1 \equiv \text{const}, x_2 \equiv \text{const}\}$, ...,

$$[\varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})]$$

— проекция сечения $A_{x_1 x_2 \dots x_n}$ множества A прямой $\{x_1 \equiv \text{const}, x_2 \equiv \text{const}\}$.

Замечание 2. Если множество интегрирования имеет сложный вид, его разбивают на несколько частей, которые являются правильными областями интегрирования.

Замечание 3. Порядок интегрирования можно менять, используя тот, при котором интегралы по отрезкам вычисляются по формуле Ньютона-Лейбница наиболее просто.

Примеры. 1) Свести к повторному интеграл $\iint_A f(x, y) dxdy$, где $A = \{x^2 + y^2 \le 1\}$. Проекция A на ось Ox есть отрезок $[-1; 1]$. Фиксируем точку $x \in [-1; 1]$. Проекция сечения множества A на ось Ox_2 прямой $x = \text{const}$ есть отрезок $[-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}]$. Следовательно, $\iint_A f(x, y) dxdy = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

2) Свести к повторному интеграл $\iiint_A f(x, y, z) dxdydz$, где $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$. Спроектируем множество A на ось Ox. Получаем отрезок $[-1; 1]$. Фиксируем точку $x \in [-1; 1]$. Рассмотрим сечение A плоскостью $x = \text{const}$ и спроектируем его на плоскость yOz.

В результате получаем круг $K_x = \{y^2 + z^2 \leq \sqrt{1-x^2}\}$. Его проекция на ось Oy есть отрезок $[-\sqrt{1-x^2}; \sqrt{1-x^2}]$. Рассмотрим сечение этого круга прямой $y = \text{const}$. Проектируя его на ось Oz, получаем отрезок $[-\sqrt{1-x^2-y^2}; \sqrt{1-x^2-y^2}]$. Окончательно имеем

$$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz = \int_{-1}^{1} dx \iint_{K_x} f(x,y,z)dydz =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz.$$

Упражнение. Докажите, что если функция f непрерывна на замкнутом измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}^n$ и проекция на плоскость $Ox_1x_2 \ldots x_l$ есть измеримое множество B и для любого $x_1, x_2, \ldots, x_l \in B$ проекция сечения множества A плоскостью $\{x_1 = \text{const}, x_2 = \text{const}, \ldots, x_l = \text{const}\}$ есть измеримое множество $A_{x_1,x_2,\ldots,x_l}$, то

$$\int_A f(x)dx = \int_B dx_1dx_2 \ldots dx_l \int_{A_{x_1,x_2,\ldots,x_l}} f(x)dx_{l+1} \ldots dx_n.$$

5.13 Объем множества A_φ^ψ

Имеем $\mu(A_\varphi^\psi) = \int_{A_\varphi^\psi} d\mu = \int_A dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx_{n+1} = \int_A [\psi(x) - \varphi(x)]dx$.

5.14 Криволинейные системы координат

Пусть $\Phi : U \to V$ — некоторый диффеоморфизм, U, V — области в $\mathbb{R}^n$. Тогда обратная функция $\Psi = \Phi^{-1}$ также является диффеоморфизмом. Говорят, что отображение $\Psi : V \to U$ задаем криволинейную систему координат на множестве V. Вектор $t = \Psi(x)$ называется вектором координат точки x, а его компоненты $t_1, t_2 \ldots, t_n$ — координатами точки $(x_1, x_2, \ldots, t_n)$.

Приведем важные примеры.

1) Полярная система координат на плоскости.

Отображение $\Phi : (r, \varphi) \mapsto (x, y)$ задается формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r > 0, \ \varphi \in (0, 2\pi).$$

Таким образом, $\Phi : (0; +\infty) \times (0; 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$. Обратное отображение $\Psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\} \to (0; +\infty) \times (0; 2\pi)$ определено

формулами
$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+k\pi,\ x\neq 0$$
(при $x=0$ полагаем $\varphi=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}y$). Нетрудно видеть, что Ψ — диффеоморфизм и якобиан

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r\cos^2\varphi+r\sin^2\varphi=r>0.$$

Тогда и Φ — диффеоморфизм и его якобиан обратен якобиану Ψ. Линии $r=\mathrm{const}>0$ — это окружности (без точки, лежащей на положительной полуоси оси Ox), линии $\varphi=\mathrm{const}$ — это лучи исходящие из начала координат.

2) Обобщенная полярная система координат на плоскости.

Она отличается от обычной полярной тем, что отображение Φ имеет вид
$$x=ar\cos\varphi,\quad y=br\sin\varphi,\quad r>0,\ \varphi\in(0,2\pi),$$
где a и b — некоторые положительные константы. При этом

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=abr.$$

Линии $r=\mathrm{const}>0$ — эллипсы, а $\varphi=\mathrm{const}$ — лучи исходящие из начала координат.

3) Цилиндрическая система координат в пространстве.

зададим отображение $\Phi:(r,\varphi,h)\mapsto(x,y,z)$ формулами

$$x=r\cos\varphi, y=\sin\varphi, z=h.$$

Отображение Φ действует из $(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}\to(\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\mid x\geq 0\})\times\mathbb{R}$. Его якобиан

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,h)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r>0$$

4) Обобщенная цилиндрическая система координат в пространстве.

Она отличается от обычной цилиндрической тем, что отображение Phi имеет вид
$$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=h,$$

где a, b и c — некоторые положительные константы. При этом

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,h)} = abcr.$$

5) Сферическая система координат в пространстве.

Рассмотрим точку $M(x,y,z)$, не лежащую на оси Oz. Обозначим через ψ угол, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси Oz, а через r длину этого вектора. Спроектируем точку M на плоскость. Обозначим через A ее проекцию. Пусть ρ — длина вектора $\overrightarrow{OA}$, φ — угол, образуемый вектором $\overrightarrow{OA}$ с положительным направлением оси Ox. Имеем $\rho = r\sin\psi$, $z = r\cos\psi$, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, откуда

$$x = r\sin\psi\cos\varphi, y = r\sin\psi\sin\varphi, z = r\cos\psi.$$

Отображение $\Phi : (r,\varphi,\psi) \mapsto (x,y,z)$, определяемой этими формулами, является диффеоморфизмом области $(0;+\infty)\times(0;2\pi)\times(0;\pi)$ на $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid x \geq 0\}$. Углы φ и ψ называются углами Эйлера. Отметим, что иногда вместо ψ используют угол $(\pi/2-\psi)$, который образует вектор $\overrightarrow{OM}$ с плоскостью Oxy. Подсчитаем якобиан отображения Φ. Имеем

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)} = \begin{vmatrix} \sin\psi\cos\varphi & -r\sin\psi\sin\varphi & r\cos\psi\cos\varphi \\ \sin\psi\sin\varphi & r\sin\psi\cos\varphi & r\cos\psi\sin\varphi \\ \cos\psi & 0 & -r\sin\psi \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\psi \begin{vmatrix} -r\sin\psi\sin\varphi & r\cos\psi\cos\varphi \\ r\sin\psi\cos\varphi & r\cos\psi\sin\varphi \end{vmatrix} - r\sin\psi \begin{vmatrix} \sin\psi\cos\varphi & -r\sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\sin\varphi & r\sin\psi\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\cos^2\psi\sin\psi \begin{vmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} - r^2\sin^3\psi \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -(r^2\cos^2\psi\sin\psi + r^2\sin^3\psi) = -r^2\sin\psi(\cos^2\psi + \sin^2\psi) = -r^2\sin\psi.$$

Множество точек $r = \mathrm{const}$ — это сфера в $\mathbb{R}^3$ с центром в начале координат, $\varphi = \mathrm{const}$ — вертикальная полуплоскость, граница которой совпадает с осью Oz, $\psi = \mathrm{const}$ — круговой конус, ось симметрии которого вертикальна и проходит через начало координат (из всех этих поверхностей, разумеется, следует удалить множество точек $\{(x,y,z) \mid x \geq 0\}$).

6) Обобщенная сферическая система координат в пространстве.

Она отличается от обычной сферической системы координат тем, что отображение Φ имеет вид

$$x = ar\sin\psi\cos\varphi, y = br\sin\psi\sin\varphi, z = cr\cos\psi,$$

где a, b и c — некоторые положительные константы. При этом

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)} = -abcr^2\sin\psi.$$

5.15 Замена переменных в кратном интеграле

Сначала изучим, как меняется мера бесконечно малого куба $Q_\rho^{x_0} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_1 \le \rho\}$ при диффеоморфизме Φ, где норма $\|x\|_1 = \max_{1\le k\le n}|x_k|$. Если $x_0 = \theta$, то для краткости вместо $Q_\rho^{x_0}$ будет писать Q_ρ. Напомним, что для любых x

$$\|x\|_1 \le \|x\| \le \sqrt{n}\|x\|_1.$$

Если $\Phi = A$ — линейное отображение, то $\mu(A(Q_\rho^{x_0}) = |\det[A]|\mu(Q_\rho^{x_0})$. Если Φ — диффеоморфизм, то $\Phi(x) \approx \Phi(x_0) + A(x - x_0)$, где $A = \Phi'(x_0)$. Таким образом (поскольку при параллельных переносах мера не меняется), следует ожидать, что $\mu(\Phi(Q_\rho^{x_0})) \approx \mu(A(Q_\rho^{x_0} - x_0)) = \mu(A(Q_\rho)) = |\det[A]|\mu(Q_\rho) = |\det[A]|\mu(Q_\rho^{x_0}) = |I_\Phi(x_0)|\mu(Q_\rho^{x_0})$, т. е. существует предел

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\mu(\Phi(Q_\rho^{x_0}))}{\mu(Q_\rho^{x_0})} = |I_\Phi(x_0)|.$$

Лемма 1. *Пусть $\Phi : U \to V$ — некоторый диффеоморфизм, U, V — открытые множества в $\mathbb{R}^n$ и K — некоторый компакт в U. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon, K)$: $\forall x$, $x_0 \in K$*

$$\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|\Phi(x) - \Phi(x_0) - \Phi'(x_0)(x - x_0)\| \le \varepsilon\|x - x_0\|$$

(δ не зависит от точек x, x_0!).

Доказательство. Так как K — компакт, $r := \operatorname{dist}(K, \partial U) > 0$. Для любого $x \in K$ имеем $\overline{B_{r/2}(x)} \subset U$. Пусть $K_1 = \overline{\cup_{x\in K}B_{r/2}(x)}$. Ясно, что K_1 — замкнутое ограниченное множество и $K_1 \subset \cup_{x\in K}\overline{B_{r/2}(x)} \subset U$, т. е. $K_1 \subset U$. При этом в силу неравенства треугольника $\operatorname{dist}(K_1, \partial U) \ge r/2$.

Пусть теперь $x,\ x_0 \in K$, причем $\|x - x_0\| < r/2$. Тогда $B_{r/2}(x_0) \subset U$ и отрезок с концами $x,\ x_0$ лежит в шаре $B_{r/2}(x_0)$, следовательно, в U. Пусть $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$. Для любого $1 \le j \le n$ по формуле конечных приращений имеем

$$\Phi_j(x) = \Phi_j(x_0) + \Phi_j'(y_j)(x - x_0), \quad y_j = x_0 + \theta_j(x - x_0)$$

где $0 < \theta_j < 1$. Так как $\|y_j - x_0\| = \|\theta_j(x - x_0)\| \le \|x - x - 0\| < r/2$, точка $y_j \in B_{r/2}(x_0) \subset K_1$, т. е. $y_j \in K_1$.

Частные производные $\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}$ непрерывны на компактном множестве K_1, поэтому по теореме Кантора они равномерно непрерывны. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (0; r/2) : \forall x',\ x'' \in K_1\ \forall i,\ j$

$$\|x' - x''\| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(x') - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(x'') \right| < \frac{\varepsilon}{n\sqrt{n}}.$$

Тогда

$$|\Phi_j(x) - \Phi_j(x_0) - \Phi_j'(x_0)(x - x_0)| = |\Phi_j'(y_j)(x - x_0) - \Phi_j'(x_0)(x - x_0)| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(y_j) - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(x_0) \right] (x_i - x_{0i}) \right| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n\sqrt{n}} |x_i - x_{0i}| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{n\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \|x - x_0\| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \|x - x_0\|,$$

если $x,\ x_0 \in K$, $\|x - x_0\| < \delta$. Из последнего неравенства следует, что $\|\Phi(x) - \Phi(x_0) - \Phi'(x_0)(x - x_0)\|_1 \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \|x - x_0\|$, следовательно, $\|\Phi(x) - \Phi(x_0) - \Phi'(x_0)(x - x_0)\| \le \varepsilon \|x - x_0\|$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\Phi : U \to V$ — некоторый диффеоморфизм, U, V — открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого компакта $K \subset U$ существует константа M такая, что для любого $x \in K$ справедлива оценка $\|A_x^{-1}\| \le M$, где $A_x := \Phi'(x)$.*

Доказательство. Ранее было доказано, что $A_x^{-1} = (\Phi^{-1})'(\Phi(x))$. Так как Φ — диффеоморфизм, Φ^{-1} — тоже диффеоморфизм, следовательно, A_x^{-1} задается матрицей, элементы которой непрерывно зависят от x.

Пусть S^n — сфера в $\mathbb{R}^n$, $S^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Тогда отображение $(x, h) \mapsto A_x^{-1} h$ является непрерывным отображением из компактного множества $K \times S^n$ в $\mathbb{R}^n$. Образ компактного множества при непрерывном отображении является компактным, следовательно, ограниченным множеством в $\mathbb{R}^n$, поэтому существует M:

$$\|A_x^{-1}h\| \le M \quad \forall x \in K, h \in S^n.$$

Тогда $\|A_x^{-1}\| = \sup_{h\in S^n} \|A_x^{-1}h\| \le M$, $x \in K$.

Теорема (Жордан-Брауэр). *Пусть $f : S^n \to \Sigma$ — некоторый гомеоморфизм сферы S^n на свой образ Σ, лежащий в $\mathbb{R}^n$. Тогда Σ разбивает $\mathbb{R}^n$ на два линейно связных подмножества, и для каждого из них Σ является границей.*

Замечание. Вместо сферы можно брать поверхность куба в $\mathbb{R}^n$.

5.16 Свойства линейно связных множеств

1) Любое выпуклое множество является линейно связным.

2) Непрерывный образ линейно связного множества является линейно связным: если A линейно связно и $f : A \to f(A)$ — непрерывное отображение, то $f(A)$ линейно связно. Действительно, для любых точек y_1, $y_2 \in f(A)$ существуют x_1, $x_2 \in A$ такие, что $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Так как A линейно связно, то существует путь $\omega : [0;1] \to A$ такой, что $\omega(0) = x_1$, $\omega(1) = x_2$. Тогда $f \circ \omega$ — это путь, соединяющий точки y_1 и y_2, так как $f \circ \omega(0) = f(x_1) = y_1$, $f \circ \omega(1) = f(x_2) = y_2$.

3) Сначала напомним определение линейной компоненты связности множества. Пусть B — некоторое множество в топологическом пространстве. Назовем точки b_1 и b_2 эквивалентными, если существует путь в B, соединяющий точки b_1 и b_2. Любой класс эквивалентности по такому отношению называется компонентой линейной связности множества B. Справедливо следующее утверждение: если $A \subset B$ и A линейно связно, то существует компонента связности множества B, содержащая A.

Лемма 3. *Пусть $\rho > 0$ и отображение $g : Q_\rho \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, инъективно и $\|g(x) - x\| < \eta$, где $0 < \eta < \rho/2$. Тогда $Q_{\rho-\eta} \subset g(Q_\rho) \subset Q_{\rho+\eta}$.*

Доказательство. 1) Сначала докажем, что $g(Q_\rho) \subset Q_{\rho+\eta}$. Пусть $x \in Q_\rho$, т.е. $\|x\|_1 \le \rho$. Имеем $g(x) = x + y$, где $y := g(x) - x$. По условию $\|y\| \le \eta$, поэтому $\|y\|_1 \le \eta$. По неравенству треугольника $\|g(x)\|_1 = \|x + y\|_1 \le \|x\|_1 + \|y\|_1 \le \rho + \eta$, что означает $g(x) \in Q_{\rho+\eta}$.

2) Докажем, что $Q_{\rho-\eta} \subset g(Q_\rho)$. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \partial Q_\rho$. Тогда существует i: $|x_i| = \rho$. Имеем $g(x) = x + y$, где $y = g(x) - x$. Вектор $g(x)$ обладает свойством: его i-ая компонента удовлетворяет неравенству $|x_i+y_i| \geq |x_i|-|y_i| > \rho-\eta$. Следовательно, $\|g(x)\|_1 > \rho-\eta$, т.е. $g(x) \notin Q_{\rho-\eta}$. Следовательно, $Q_{\rho-\eta} \cap g(\partial Q_\rho) = Q_{\rho-\eta} \cap \partial g(Q_\rho) = \emptyset$. По теореме Жордана-Брауэра множество $\partial g(Q_\rho)$ разбивает $\mathbb{R}^n$ на две линейно связных компоненты B_1 и B_2, причем $Q_{\rho-\eta} \subset (\partial g(Q_\rho))^c = B_1 \cup B_2$. Множество $Q_{\rho-\eta}$ выпукло, следовательно, линейно связно. Поэтому оно содержится в одной из компонент линейной связности множества $(\partial g(Q_\rho))^c$ — в B_1 или B_2. Пусть B_1 — так компонента, которая содержит начало координат θ. Так как $\theta \in Q_{\rho-\eta}$, получаем, что $Q_{\rho-\eta} \subset B_1$. Нетрудно видеть, что множество $g(Q_\rho)^\circ$ в качестве границы имеет множество $\partial g(Q_\rho)$, поэтому по теореме Жордана-Брауэра совпадает либо с B_1, либо с B_2.

Докажем, что $g(Q_\rho)^\circ = B_1$. Для этого достаточно установить, что $g(Q_\rho)^\circ$ пересекается с $Q_{\rho-\eta}$. Имеем $\|g(\theta)\|_1 \leq \|g(\theta)\| = \|g(\theta) - \theta\| < \eta < \rho - \eta$, так как $\eta < \rho/2$. Это означает, что $g(\theta) \in g(Q_\rho)^\circ \cup Q_{\rho-\eta}$, т.е. последнее пересечение непусто. Итак, $Q_{\rho-\eta} \subset B_1 = g(Q_\rho)^\circ \subset g(Q_\rho)$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4 (об искажении меры куба при диффеоморфизме). *Пусть $\Phi : U \to V$ — диффеоморфизм, U, V — открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Пусть компакт $K \subset U$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что для любого $x \in K$ и для любого $\rho \in (0;\delta)$ куб $Q_\rho^x \subset U$ и*

$$\left| \frac{\mu^*(\Phi(Q_\rho^x))}{\mu(Q_\rho^x)} - |I_\Phi(x)| \right| < \varepsilon,$$

где $I_\Phi(x)$ — якобиан отображения Φ в точке x.

Доказательство. Так как Φ — диффеоморфизм, якобиан $I_\Phi(x)$ является непрерывной функцией на компактном множестве K. По теореме Вейерштрасса существует константа $L = L(K) > 0$ такая, что для любого $x \in K$ имеет место неравенство $|I_\Phi(x)| \leq L$.

Так как $\lim_{\gamma\to 0+}(1+\gamma)^n = 1$ и $\lim_{\gamma\to 0+}(1-\gamma)^n = 1$, существует такое $\gamma = \gamma(\varepsilon, K) \in (0; 1/2)$, что

$$(1+\gamma)^n - 1 < \frac{\varepsilon}{L}, \quad 1 - (1-\gamma)^n < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Пусть $\varepsilon_1 = \frac{\gamma}{2M\sqrt{n}}$, где $M = \sup_{x\in K} \|A_x^{-1}\| < +\infty$ в силу леммы 2 ($A_x = \Phi'(x)$). В силу леммы 1 существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1, K)$ такое, что для любых

x, $x_0 \in K$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(x) - \Phi(x_0) - \Phi'(x_0)(x - x_0)\| \leq \varepsilon_1 \|x - x_0\|. \tag{1}$$

Пусть $t = x - x_0$, $\phi(t) = \Phi(t + x_0) - \Phi(x_0) = \Phi(x) - \Phi(x_0)$. Тогда $\phi'(\theta) = \Phi'(x_0) = A_{x_0}$. Для простоты обозначения будем писать A вместо A_{x_0}. Тогда (1) можно переписать в виде

$$\|\phi(t) - At\| \leq \varepsilon_1 \|t\|, \quad \|t\| < \delta_1. \tag{2}$$

Пусть $\delta = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ и $0 < \rho < \delta$. Если $t \in Q_\rho$, то $\|t\|_1 \leq \rho$ и $\|t\| \leq \sqrt{n}\|t\|_1 < \delta_1$. Тогда из (2) следует, что

$$\|A^{-1}\phi(t) - t\|\|A^{-1}(\phi(t) - At)\| =\leq \|A^{-1}\|\|\phi(t) - At\| \leq M\varepsilon_1\|t\| \leq$$

$$\leq M \cdot \frac{\gamma}{2M\sqrt{n}}\rho\sqrt{n} = \frac{\gamma\rho}{2} < \gamma\rho, \quad t \in Q_\rho.$$

Итак,

$$\|g(t) - t\| < \gamma\rho, \quad t \in Q_\rho,$$

где $g(t) = A^{-1}\phi(t)$. По лемме 3

$$Q_{\rho-\gamma\rho} \subset g(Q_\rho) = A^{-1}\phi(Q_\rho) \subset Q_{\rho+\gamma\rho}.$$

Тогда

$$A(Q_{\rho(1-\gamma)}) \subset \phi(Q_\rho) \subset A(Q_{\rho(1+\gamma)}).$$

Ясно, что $\phi(Q_\rho) = \Phi(Q_\rho^{x_0}) - \Phi(x_0)$, $Q_\rho = Q_\rho^{x_0} - x_0$. Используя результаты об искажении меры куба при линейных преобразованиях и инвариантность меры относительно параллельных переносов, получаем

$$|I_\Phi(x_0)|\mu(Q_{\rho(1-\gamma)}) \leq \mu^*(\phi(Q_\rho)) = \mu^*(\Phi(Q_\rho^{x_0})) \leq |I_\Phi(x_0)|\mu(Q_{\rho(1+\gamma)})$$

или

$$|I_\Phi(x_0)|(1-\gamma)^n\mu(Q_\rho^{x_0}) \leq \mu^*(\Phi(Q_\rho^{x_0})) \leq |I_\Phi(x_0)|(1-\gamma)^n\mu(Q_\rho^{x_0}).$$

Таким образом,

$$-\varepsilon < [(1-\gamma)^n - 1]|I_\Phi(x_0)| \leq \frac{\mu^*(\Phi(Q_\rho^{x_0}))}{\mu(Q_\rho^{x_0})} - |I_\Phi(x_0)| \leq [(1+\gamma)^n - 1]|I_\Phi(x_0)| < \varepsilon,$$

следовательно,

$$\left|\frac{\mu(\Phi(Q_\rho^{x_0}))}{\mu^*(Q_\rho^{x_0})} - |I_\Phi(x_0)|\right| < \varepsilon, \quad 0 < \rho < \delta.$$

Лемма 4 доказана.

Теорема 1. *Пусть $\Phi : U \to V$ — диффеоморфизм и D — замкнутое измеримое множество в U. Тогда $\Phi(D)$ измеримо.*

Доказательство. Пусть $K \subset U$ — компактное множество такое, что $D \subset K^\circ$. В силу леммы 4 существует положительные константы C и δ такие, что для любого куба Q_ρ^x, $x \in K$, $\rho < \delta$, имеет место неравенство

$$\frac{\mu(\Phi(Q_\rho^x))}{\mu(Q_\rho^x)} \leq C.$$

Так как множество D измеримо, ∂D — нуль-множество по Жордану. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие $D \subset \cup_{i=1}^k Q_i$ кубами такими, что $\sum_{i=1}^k \mu(Q_i) < \varepsilon/C$. Можно считать Q_i настолько малыми, что кубы $Q_i \subset K$ и их стороны имеют длины, меньшие $\delta/2$. Тогда $\partial\Phi(D) = \Phi(\partial D) \subset \cup_{i=1}^k \Phi(Q_i)$ и $\mu^*(\partial\Phi(D)) \leq \sum_{i=1}^k \mu^*(\Phi(Q_i)) \leq C\sum_{i=1}^k \mu(Q_i) < \varepsilon$. Таким образом, $\partial\Phi(D)$ — нуль-множество. Так как D компактно, $\Phi(D)$ также компактно, следовательно, ограничено. По критерию измеримости $\Phi(D)$ измеримо.

Следствие. В условиях леммы 4 основное неравенство можно записать в виде

$$\left|\frac{\mu(\Phi(Q_\rho^x))}{\mu(Q_\rho^x)} - |I_\Phi(x)|\right| < \varepsilon.$$

Действительно, кубы Q_ρ^x измеримы, поэтому и их образы $\Phi(Q_\rho^x)$ также измеримы, откуда $\mu^*(\Phi(Q_\rho^x)) = \mu(\Phi(Q_\rho^x))$.

Теорема 2 (замена переменных в кратном интеграле). *Пусть $\Phi : U \to V$ — диффеоморфизм и D — замкнутое измеримое множество в U. Пусть $D^* := \Phi(D)$ и и функция $f : D^* \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда*

$$\int_{D^*} f(x)dx = \int_D f(\Phi(t))|I_\Phi(t)|dt.$$

Доказательство. Выберем компактное множество $K \subset U$ такое, что $D \subset K^\circ$. Покроем множество D двоичными кубами Q_1, $Q_2, \ldots Q_k$ ранга

l, каждый из которых пересекается с D. Если l достаточно велико, $D \subset \cup_{i=1}^{k} \subset K$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу леммы 4 и следствия из теоремы 1 $\exists \delta > 0$: $\forall x \in K$ и $\forall \rho \in (0; \delta)$

$$\left| \frac{\mu(\Phi(Q_\rho^x))}{\mu(Q_\rho^x)} - |I_\Phi(x)| \right| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Множества $\Phi(Q_i)$ образуют покрытие множества $D^* = \Phi(D)$. Если $l \to \infty$, то $\max_{1 \le i \le k} d(\Phi(Q_i)) \to 0$ в силу равномерной непрерывности Φ на компактном множестве K (распишите это более подробно!). Рассмотрим урезанную интегральную сумму $S_{\partial D^*}(f, \tau, T_\tau) = \sum_{\Phi(Q_i) \subset D^{*\circ}} f(\xi_i)\mu(\Phi(Q_i))$, где $\tau = (\Phi(Q_i) \cap D^*)_{1 \le i \le k}$, ξ_i — некоторая точка из $\Phi(Q_i) \cap D^*$, совпадающая с образом центра t_i куба Q_i в случае, если $Q_i \subset D^\circ$.

В силу $(*)$, если $1/2^l < \delta$, то

$$\mu(\Phi(Q_i)) = \mu(Q_i)|I_\Phi(t_i)| + r_i \mu(Q_i),$$

где $|r_i| < \varepsilon$. Тогда

$$S_{\partial D^*}(f, \tau, T_\tau) = \sum_{Q_i \subset D^\circ} f(\Phi(t_i))|I_\Phi(t_i)|\mu(Q_i) + \sum_{Q_i \subset D^\circ} f(\Phi(t_i)) r_i \mu(Q_i).$$

Первое из слагаемых S_1 в правой части последнего равенства является урезанной суммой Римана для функции $f \circ \Phi(t)|I_\Phi(t)|$ по множеству D. Второе слагаемое S_2 оценивается следующим образом:

$$\left| \sum_{Q_i \subset D^\circ} f(\Phi(t_i)) r_i \mu(Q_i) \right| \le \varepsilon \max_{D^*} |f| \sum_{i=1}^{k} \mu(Q_i).$$

При $l \to \infty$ имеем $S_{\partial D^*}(f, \tau, T_\tau) \to \int_{D^*} f(x)dx$, $S_1 \to \int_D f(\Phi(t))|I_\Phi(t)|dt$, $\sum_{i=1}^{k} \mu(Q_i) \to \mu^*(D) = \mu(D)$. Поэтому

$$\left| \int_{D^*} f(x)dx - \int_D f(\Phi(t))|I_\Phi(t)|dt \right| \le \varepsilon \max_{D^*} |f| \mu(D).$$

В силу произвольности ε получаем, что значения интегралов $\int_{D^*} f(x)dx$ и $\int_D f(\Phi(t))|I_\Phi(t)|dt$ совпадают. Теорема 2 доказана.

5.17 Несобственные кратные интегралы

Рассмотрим следующий интеграл

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}\frac{dxdy}{x^2+y^2}.$$

Нетрудно видеть, что в точке $(0,0)$ подинтегральная функция неопределена, а при $(x,y)\to(0,0)$ имеем $\frac{1}{x^2+y^2}\to+\infty$. Отсюда можно вывести, что как бы мы ни определяли подинтегральную функцию в точке $(0,0)$ рассматриваемый кратный интеграл Римана не будет существовать в собственном смысле. Строгое доказательство использует ту же идею, что и доказательство того, что функция, интегрируемая по Риману в собственном смысле на отрезке, ограничена. Естественно назвать такой интеграл несобственным кратным интегралом. Другой пример несобственного интеграла — это интеграл

$$\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{dxdy}{x^2+y^2}.$$

Этот интеграл является несобственным, потому что область интегрирования не ограничена, следовательно, не измерима по Жордану.

Пусть A —некоторое измеримое по Жордану множество в $\mathbb{R}^n$ и $x_0\in A^\circ$. Предположим, что при достаточно малых $\delta>0$ функция f интегрируема на множестве $A\backslash O_\delta(x_0)$, но не интегрируема на множестве A (в самой точке x_0 функция f может быть не определена!). Тогда назовем интеграл $\int_A f(x)dx$ несобственным интегралом с единственной особенностью в точке x_0. Без ограничения общности можно считать, что A — открытое множество, так как ∂A имеет меру нуль и интеграл от любой функции по такому множеству (и по любому его подмножеству) равен нулю.

Компактным исчерпанием множества A называется любая последовательность A_n подмножеств множества A, удовлетворяющая условиям:

1) $\cup_{n=1}^\infty A_n=A$,

2) $A_n^-\subset A_{n+1}$, $n\geq 1$,

3) A_n — открытые множества, $n\geq 1$.

Пусть $\int_A f(x)dx$ — несобственный интегралом с единственной особенностью в точке $x_0\in A^\circ$. Говорят, что несобственный интеграл $\int_A f(x)dx$ сходится, если для любого компактного исчерпания $\{A_n\}$ множества $A\backslash\{x_0\}$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}f(x)dx$, который не зависит от выбора исчерпания. В этом случае число $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)dx$ называют значением несобственного интеграла $\int_A f(x)dx$. Если несобственный интеграл не сходится, то говорят. что он расходится.

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла с единственной особенностью в точке ∞, если множество содержит внешность некоторого шара $\{\|x\| \geq R\}$ (определить самостоятельно!).

Теперь дадим общее определение несобственного кратного интеграла. Пусть B — некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и функция $f : B \to \mathbb{R}$, причем $\int_B f(x)dx$ не является собственным интегралом Римана, но для любого измеримого по Жордану множества Q такого, что $\overline{Q} \subset B$ существует $\int_Q f(x)dx$. Если для любого компактного исчерпания $\{B_n\}$ множества B существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f(x)dx$, который не зависит от выбора $\{B_n\}$ то говорят, что несобственный интеграл $\int_B f(x)dx$ сходится и его значение $\int_B f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f(x)dx$.

5.18 Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Теорема 1. *Пусть* $\int_B f(x)dx$ *— несобственный интеграл,* $f \geq 0$ *на* B *и для некоторого компактного исчерпания* $\{B_n\}$*, множества* B *существует конечный предел* $\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f(x)dx$*. Тогда интеграл* $\int_B f(x)dx$ *сходится и его значение* $\int_B f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f(x)dx$*.*

Доказательство. Предположим, что существует $\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f(x)dx =: \alpha$ и $\{C_n\}$ — другая исчерпывающая последовательность для B. Докажем, что существует $\lim_{n\to\infty} \int_n f(x)dx = \alpha$. Рассмотрим некоторое C_n. Так как $\overline{C}_n \subset C_{n+1} \subset B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, имеем $\overline{C}_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Множества B_n образуют открытое покрытие компактного множества C_n, следовательно, из этого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, т.е. $\overline{C}_n \subset \cup_{j=1}^{l} B_{k_j}$. Так как множества B_{k_j} вложены друг в друга, получаем, что $\cup_{j=1}^{l} B_{k_j} = B_k$, где $k = \max_{1\leq j\leq l} k_j$. Итак, $C_n \subset B_k$. В силу неотрицательности f имеем $\beta_n := \int_n f(x)dx \leq \int_{B_k} f(x)dx := \alpha_k$. Кроме того, последовательности β_n и α_n монотонно возрастают. Так как α_n имеет предел α, получаем $\alpha_k \leq \alpha$, $k \geq 1$. Из последнего неравенства и неравенства $\beta_n \leq \alpha_k$ выводим, что $\beta_n \leq \alpha$. Следовательно, монотонно возрастающая последовательность β_n ограничена сверху, откуда следует, что существует конечный предел $\beta := \lim_{n\to\infty} \beta_n \leq \alpha$. Меняя местами $\{B_n\}$ и $\{B_n\}$, получаем аналогично, что $\alpha \leq \beta$. Таким образом, $\alpha = \beta$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $\int_B f(x)dx$ — несобственный интеграл и $f \geq 0$ на B. Если для некоторого компактного исчерпания $\{B_n\}$ множества B существует константа C такая, что $\int_{B_n} f(x)dx \leq C$, то интеграл $\int_B f(x)dx$ сходится.*

Доказательство следует из того, что последовательность $\int_{B_n} f(x)dx$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она сходится к конечному пределу, и по теореме 1 интеграл $\int_B f(x)dx$ сходится.

Теорема 3 (теорема сравнения). *Пусть $\int_B f(x)dx$ и $\int_B g(x)dx$ — два несобственных интеграла и $0 \leq f \leq g$ на множестве B. Если интеграл $\int_B g(x)dx$ сходится, то и интеграл $\int_B f(x)dx$ сходится.*

Доказательство. Пусть интеграл $\int_B g(x)dx$ сходится. Фиксируем некоторую последовательность $\{B_n\}$ — компактное исчерпание множества B. Тогда $\int_{B_n} f(x)dx \leq \int_{B_n} g(x)dx \leq C := \lim_{k\to\infty} \int_{B_k} g(x)dx$, так как последовательность $\int_{B_n} g(x)dx$ монотонно возрастает. Следовательно, $\int_{B_n} f(x)dx \leq C$, $n \geq 1$. По теореме 2 интеграл $\int_B f(x)dx$ сходится.

Теорема 4 (теорема сравнения). *Пусть $\int_B f(x)dx$ и $\int_B g(x)dx$ — два несобственных интеграла с единственной особенностью в точке x_0 (либо $x_0 \in \mathbb{R}^n$, либо $x_0 = \infty$), причем f, $g \geq 0$ на B. Если $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$, то интегралы $\int_B f(x)dx$ и $\int_B g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.*

Доказательство проводится как и в одномерном случае сведением к теореме 3 (распишите подробно доказательство самостоятельно!).

На практике при исследовании сходимости интегралов $\int_B f(x)dx$ в качестве функции g часто берут степенные функции вида $g(x) = \frac{1}{\|x-x_0\|^\alpha}$, если $x_0 \in \mathbb{R}^n$, или $g(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$, если $x_0 = \infty$. Выясним, при каких α сходятся интегралы для таких функций. В качестве областей интегрирования достаточно взять шары или внешности шаров.

1) Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$, иначе можно сделать замену переменных (сдвиг), не меняющую сходимость интеграла. Итак, рассмотрим

$$\int_{0<\|x\|<r_0} \frac{dx}{\|x\|^\alpha}, \quad r_0, \alpha \in \mathbb{R}, r_0 > 0.$$

В качестве компактного исчерпания проколотого шара $\{0 < \|x\| < r_0\}$ возьмем последовательность шаровых слоев $B_n := \{\frac{r_0}{n} < \|x\| < r_0\left(1 - \frac{1}{n}\right)\}$, $n \geq 2$. На самом деле, конечно, можно было бы вместо B_n рассматривать множества $\{\frac{r_0}{n} < \|x\| < r_0\}$, так как на сфере $\|x\| = r_0$ и в ее окрестности подинтегральная функция непрерывна, поэтому не нужно вырезать окрестности этой сферы!

Для подсчета интегралов $\int_{B_n} \frac{dx}{\|x\|^\alpha}$ примени обобщенную сферическую систему координат в $\mathbb{R}^n$. Она имеет вид

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & r\cos\varphi_{n-1}, \\ x_2 & = & r\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}, \\ x_3 & = & r\sin\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-3}, \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} & = & \sin\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-2}\ldots\sin\varphi_2\cos\varphi_1, \\ x_n & = & \sin\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-2}\ldots\sin\varphi_2\sin\varphi_1, \end{array} \qquad (1)$$

где $r > 0$, $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi_2$, φ_3, $\varphi_{n-1} \leq \pi$. Углы φ_k имеют ясный геометрический смысл. Угол φ_{n-1} — это угол, который образует вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с положительным направлением оси Ox_1, угол φ_{n-2} — это угол, который образует проекция вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на гиперплоскость $Ox_2x_3\ldots x_n$ с положительным направлением оси Ox_2, и т. д. Наконец, угол φ_1 — это угол, который образует проекция вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на плоскость $Ox_{n-1}x_n$ с положительным направлением оси Ox_{n-1}. При этом $r = \|x\|$.

Докажем, что модуль якобиана

$$\left|\frac{\partial(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n)}{\partial(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}\right| = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_{n-1}\sin^{n-3}\varphi_{n-2}\ldots\sin^2\varphi_3\sin\varphi_2. \qquad (2)$$

Применим метод математической индукции. При $n = 2$ имеем обычную полярную систему координат на плоскости, при $n = 3$ — сферическую в $\mathbb{R}^3$. Формула (2), очевидно, в этих случаях справедлива. Пусть теперь эта формула справедлива для всех размерностей $2, 3, \ldots, n-1$. Докажем ее для размерности n.

Представим преобразование (1) в виде суперпозиции двух отображений

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & t \\ x_2 & = & \rho\cos\psi_{n-2} \\ x_3 & = & \rho\sin\psi_{n-1}\cos\psi_{n-2}, \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} & = & \rho\sin\psi_{n-2}\sin\psi_{n-3}\dots\sin\psi_2\cos\psi_1, \\ x_n & = & \rho\sin\psi_{n-2}\sin\psi_{n-3}\dots\sin\psi_2\sin\psi_1, \end{array} \tag{2}$$

и

$$\begin{array}{lcl} t & = & r\cos\varphi_{n-1} \\ \rho & = & r\sin\varphi_{n-1} \\ \psi_1 & = & \varphi_1, \\ \psi_2 & = & \varphi_2, \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi_{n-2} & = & \varphi_{n-2}. \end{array} \tag{3}$$

Поскольку в преобразовании (2) только первая функция x_1 зависит от переменной t, причем $x_1 = t$, получаем, что

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(t, \rho, \psi_1, \dots, \psi_{n-2})} = \frac{\partial(x_2, \dots, x_n)}{\partial(\rho, \psi_1, \dots, \psi_{n-2})}.$$

Используя то, что зависимость $x_2, \dots, x_n$ от переменных $\rho, \psi_1, \dots, \psi_{n-2}$ точно такая же, как для сферической системы координат в размерности $(n-1)$, по предположению индукции получаем

$$\frac{\partial(x_2, \dots, x_n)}{\partial(\rho, \psi_1, \dots, \psi_{n-2})} = \rho^{n-2}\sin^{n-3}\psi_{n-2}\sin^{n-4}\psi_{n-3}\dots\sin^2\psi_3\sin\psi_2.$$

В преобразовании (3) только t и ρ зависят от переменных r и φ_{n-1} (зависимость точно такая же как в случае полярной системы координат на плоскости), а $\psi_k = \varphi_k$, $1 \le k \le n-2$. Поэтому

$$\frac{\partial(t, \rho, \psi_1, \dots, \psi_{n-2})}{\partial(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})} = (-1)^n \frac{\partial(t, \rho)}{\partial(r, \varphi_{n-1})} = (-1)^n r.$$

поскольку якобиан суперпозиции отображений равен произведению якобианов, получаем

$$\left|\frac{\partial(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \dots,\, x_n)}{\partial(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}\right| = \left|\frac{\partial(x_2, \dots, x_n)}{\partial(\rho, \psi_1, \dots, \psi_{n-2})} \cdot \frac{\partial(t, \rho, \psi_1, \dots, \psi_{n-2})}{\partial(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}\right| =$$

$$= \rho^{n-2} \sin^{n-3} \psi_{n-2} \sin^{n-4} \psi_{n-3} \dots \sin^2 \psi_3 \sin \psi_2 \cdot r =$$
$$= r(r \sin \varphi_{n-1})^{n-2} \sin^{n-3} \varphi_{n-2} \sin^{n-4} \varphi_{n-3} \dots \sin^2 \varphi_3 \sin \varphi_2 =$$
$$= r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_{n-1} \sin^{n-3} \varphi_{n-2} \dots \sin^2 \varphi_3 \sin \varphi_2,$$

что и требовалось доказать.

Теперь имеем

$$\int_{0<\|x\|<r_0} \frac{dx}{\|x\|^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{r_0}{n}<\|x\|<r_0\left(1-\frac{1}{n}\right)} \frac{dx}{\|x\|^\alpha} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{r_0}{n}}^{r_0(1-\frac{1}{n})} \frac{r^{n-1}dr}{r^\alpha} \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_{n-1} d\varphi_{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \times$$

$$\times \dots \times \sin^2 \int_0^\pi \varphi_3 d\varphi_3 \int_0^\pi \sin \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 =$$

$$= C \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{r_0}{n}}^{r_0(1-\frac{1}{n})} \frac{dr}{r^{\alpha+1-n}} = C \int_0^{r_0} \frac{dr}{r^{\alpha+1-n}},$$

где $C > 0$ — константа. Таким образом, наш интеграл сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_0^{r_0} \frac{dr}{r^{\alpha+1-n}}$, т.е. при $\alpha + 1 - n < 1$, что эквивалентно неравенству $\alpha < n$.

2) Рассмотрим случай $x_0 = \infty$. Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\int_{\|x\|>r_0} \frac{dx}{\|x\|^\alpha}, \quad r_0, \alpha \in \mathbb{R}, r_0 > 0.$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{r^{\alpha+1-n}}$, т. е. при $\alpha + 1 - n > 1$, что эквивалентно неравенству $\alpha > n$.

5.19 Несобственные интегралы от функций, меняющих знак

По определению несобственный интеграл $\int_B f(x)dx$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_B |f(x)|dx$. Введем функции

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0; \\ 0, & f(x) < 0, \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0; \\ -f(x), & f(x) < 0, \end{cases}$$

Ясно, что

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Кроме того, $f_+,\ f_- \geq 0$, $f_+,\ f_- \leq |f|$.

Теорема 1. *Если несобственный интеграл $\int_B f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Так как $0 \leq f_+,\ f_- \leq |f|$, из сходимости интеграла $\int_B |f(x)|dx$ по теореме сравнения следует сходимость интегралов $\int_B f_+(x)dx$ и $\int_B f_-(x)dx$. Следовательно, в силу линейности сходится интеграл

$$\int_B f(x)dx = \int_B [f_+(x) - f_-(x)]dx = \int_B f_+(x)dx - \int_B f_-(x)dx.$$

В отличие от одномерных несобственных интегралов, для кратных несобственных интегралов обычная сходимость равносильна абсолютной сходимости. Для доказательства установим вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то существует подпоследовательность x_n такая, что*

$$x_{n_{k+1}} > 3x_{n_k} + 2k.$$

Доказательство очевидно.

Лемма 2. *Пусть функция f интегрируема на измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, причем $f \geq 0$ на A $\int_A f(x)dx > \alpha > 0$. Тогда существует измеримое подмножество $B \subset A$ такое, что $f > 0$ на B и $\int_B f(x)dx > \alpha$.*

Доказательство. Пусть $\beta = \int_A f(x)dx$, $\beta > \alpha$, и $\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2}$. тогда существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\tau_A = (A_i)_{1\leq i\leq p}$

$$d(\tau_A) < \delta \Longrightarrow |S_*(f, \tau_A) - \beta| < \varepsilon.$$

Тогда для таких τ_A выполняется неравенство $S_*(f, \tau_A) > \beta - \varepsilon > \alpha$. Имеем $S_*(f, \tau_A) = \sum_{i=1}^p m_i \mu(A_i)$, где $m_i = \inf_{A_i} f$. Так как $f \geq 0$, все $m_i \geq 0$. Следовательно, $S_*(f, \tau) = \sum_{i:m_i>0} m_i \mu(A_i) > \alpha$. Пусть $B = \cup_{i:m_i>0} A_i$, тогда $\tau_B = (A_i)_{i:m_i>0}$ — разбиение множества B. Если выполняется неравенство $m_i > 0$, то на таком A_i имеем $f > 0$. Следовательно, $f > 0$ на B.

Кроме того,

$$S_*(f,\tau_B)=\sum_{m_i>0} m_i\mu(A_i)=S_*(f,\tau_A)>\alpha.$$

Наконец, $\int_B f(x)dx \le S_*(f,\tau_B)>\alpha$. Лемма 2 доказана.

Теорема 2. *Если несобственный интеграл $\int_B f(x)dx$, $B\subset\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$ сходится, то он сходится абсолютно.*

Доказательство. Предположим, что $\int_B |f(x)|dx$ расходится. Докажем, что тогда интеграл $\int_B f(x)dx$ расходится.

Если $\int_B |f(x)|dx$ расходится, то для любой исчерпывающей последовательности $\{B_n\}$ имеем $\lim_{n\to\infty}\int_{B_n} f(x)dx=+\infty$. Фиксируем некоторую такую последовательность $\int_B f(x)dx$. В силу леммы 1, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можем считать, что что

$$\int_{B_{n+1}}|f(x)|dx>3\int_{B_n}|f(x)|dx+2n.$$

Пусть $C_n=B_{n+1}\setminus B_n$. Тогда

$$\int_{C_n} f_+(x)dx\int_{C_n} f_-(x)dx=\int_{C_n}|f(x)|dx>2\int_{B_n}|f(x)|dx+2n.$$

Из интегралов $\int_{C_n} f_+(x)dx$, $\int_{C_n} f_-(x)dx$ выберем бо́льший. предположим, для определенности, что $\int_{C_n} f_+(x)dx \ge \int_{C_n} f_-(x)dx$. Тогда

$$2\int_{C_n} f_+(x)dx \ge \int_{C_n} f_+(x)dx\int_{C_n} f_-(x)dx>2\int_{B_n}|f(x)|dx+2n,$$

откуда

$$\int_{C_n} f_+(x)dx>\int_{B_n}|f(x)|dx+n.$$

По лемме 2 существует измеримое подмножество $D_n\subset C_n$ такое, что $f_+>0$ на D_n и

$$\int_{D_n} f_+(x)dx>\int_{B_n}|f(x)|dx+n.$$

Без ограничения общности можно считать, что D_n открыто. Так как $f_+>0$ на D_n, получаем, что $f_+=f$ на D_n и тогда

$$\int_{D_n} f(x)dx>\int_{B_n}|f(x)|dx+n.$$

Пусть $E_n := B_n \cup D_n$. Множества D_n образуют компактное исчерпание множества B и

$$\int_{E_n} f(x)dx = \int_{D_n} f(x)dx + \int_{B_n} f(x)dx \geq \int_{D_n} f(x)dx - \int_{B_n} |f(x)|dx > n.$$

Таким образом, $\int_{E_n} f(x)dx > n$, откуда следует, что $\int_{E_n} f(x)dx \to +\infty$, $n \to \infty$. Это означает, что интеграл $\int_B f(x)dx$ расходится.

6 Криволинейные интегралы

6.1 Кривые в $\mathbb{R}^n$

Путь ω в $\mathbb{R}^n$ — это непрерывное отображение $\omega : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ некоторого отрезка $[a;b]$ в $\mathbb{R}^n$. Два пути $\omega_1 : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ и $\omega_2 : [c;d] \to \mathbb{R}^n$ называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\varphi : [a;b] \to [c;d]$ такой, что $\omega_1 = \omega_2 \circ \varphi$. Класс эквивалентности C путей называется кривой в $\mathbb{R}^n$. Если ω — представитель класса эквивалентности C, то говорят, что ω — параметризация кривой C. Параметризация дает представление кривой в виде $x = \omega(t)$, $a \leq t \leq b$.

Если при определении ограничиться только монотонно возрастающими гомеоморфизмами φ, то соответствующий класс эквивалентности называется ориентированной кривой, т.е. кривой, на которой задана ориентация (направление обхода, соответствующее возрастанию параметра t). Если путь $\omega : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируем и $\|\omega'(t)\| \neq 0$, $t \in [a;b]$, то ω называется гладким путем. На множестве гладких путей можно ввести отношение эквивалентности так же, как и выше, если в качестве φ брать непрерывно дифференцируемые функции с $\varphi'(t) \neq 0$, $t \in [a;b]$. Кроме того, очевидным образом определяется понятие гладкой ориентированной кривой.

Путь $\omega : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ называется кусочно-гладким, если существует разбиение отрезка $[a;b]$ на конечное число подотрезков, на каждом из которых ω является гладким. Класс эквивалентности кусочно-гладкого пути называется кусочно-гладкой кривой.

Путь $\omega : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если $\omega(a) = \omega(b)$. Класс эквивалентности замкнутого пути называется замкнутой кривой.

Пусть $\omega : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ — параметризация кривой C, точки $t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ — некоторое разбиение отрезка $[a;b]$. Ломаная с последовательными вершинами в точках $\omega(t_0), \omega(t_1) \ldots, \omega(t_n)$ называется ломаной, вписанной в кривую C. Кривая C называется спрямляемой, если конечен супремум длин ломанных, вписанных в C. Этот супремум называется длиной кривой C. Очевидна

Лемма. *Пусть $\omega : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ — некоторое представление кривой C, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Кривая C спрямляема тогда и только тогда, когда функции ω_k, $1 \le k \le n$, являются функциями ограниченной вариации.*

6.2 Криволинейные интегралы второго рода

Пусть C — спрямляемая ориентируемая кривая в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $|C|$ носитель кривой C, т.е. множество точек в $\mathbb{R}^n$, соответствующее этой кривой. Пусть функции $f_j : |C| \to \mathbb{R}$, $1 \le j \le n$, — некоторые функции. Дифференциальной формой назовем выражение $\omega = \sum_{j=1}^n f_j(x)dx_j$. Рассмотрим любые точки $x^{(0)} = A$, $x^{(1)}, \ldots, x^{(l)} = B$, расположенные на кривой C в порядке ее обхода в положительном направлении, причем A — начало, B — конец кривой C. Пусть $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$. Будем говорить, что точки $x^{(k)}$ образуют разбиение τ кривой C. Диаметром разбиения τ назовем число $d(\tau) := \max_{1 \le k \le l} S_k$, где S_k — длина части кривой C между точками $x^{(k)}$ и $x^{(k+1)}$.

Пусть точка $y^{(k)}$ лежит на кривой C между точками $x^{(k)}$ и $x^{(k+1)}$. Семейство $T_\tau := (y^{(k)})_{1 \le k \le l}$ назовем семейством промежуточных точек, соответствующим разбиению τ. Составим интегральную сумму $S(\omega, \tau, T_\tau) := \sum_{j=1^n} \sum_{k=1}^l f_j(y^{(k)})(x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})$. Если существует предел $\lim_{d(\tau)\to 0} S(\omega, \tau, T_\tau)$, то этот предел называется криволинейным интегралом второго рода от дифференциальной формы ω и обозначается $\int_C \omega = \int_C \sum_{j=1}^n f_j(x)dx_j$. В случае $\mathbb{R}^2$
$$\int_C \omega = \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy,$$
В случае $\mathbb{R}^3$
$$\int_C \omega = \int_C f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz.$$
Если кривая замкнута, то иногда вместо $\int_C \omega$ пишут $\oint_C \omega$.

Теорема. *Если f_j — непрерывные функции, то криволинейный интеграл второго рода $\int_C \sum_{j=1}^n f_j(x)dx_j$ существует. Если*
$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \quad a \le t \le b,$$

— некоторая параметризация кривой C, то

$$\int_C \sum_{j=1}^n f_j(x)dx_j = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(x(t))dx_j(t),$$

где интегралы в правой части понимаются в смысле Римана-Стилтьеса.

Доказательство. Пусть $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $a \le t \le b$, — параметризация C, точкам $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$ соответствуют точки t_k и ξ_k. Тогда $\sum_{k=1}^l f_j(y^{(k)})(x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}) = \sum_{k=1}^l f_j(x(\xi_k))(x_j(t_k) - x_j(t_{k-1}))$. Это — интегральная сумма Римана-Стилтьеса непрерывной функции $f_j(x(t))$ относительно функции ограниченной вариации $x_j(t)$. Если $d(\tau) \to 0$, то $\max \Delta t_k \to 0$. Поэтому при $d(\tau) \to 0$ интегральная сумма стремится к $\int_a^b f_j(x(t))dx_j(t)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема дает практический способ вычисления криволинейных интегралов второго рода.

Замечание 2. Если кривая C является гладкой, то для гладкой параметризации $x = x(t)$, $a \le t \le b$, имеем

$$\int_C \sum_{j=1}^n f_j(x)dx_j = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(x(t))x_j'(t)dt.$$

6.3 Свойства криволинейных интегралов второго рода

Пусть ω_1 и ω_2 — две дифференциальные формы, $\omega_1 = \sum_{j=1}^n f_j(x)dx_j$, $\omega_2 = \sum_{j=1}^n g_j(x)dx_j$. Их линейная комбинация $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 = \sum_{j=1}^n (\alpha f_j(x) + \beta g_j)dx_j$, α, $\beta \in \mathbb{R}$.

1) $\int_C (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \alpha \int_C \omega_1 + \beta \int_C \omega_2$. Это следует из линейности интегральных сумм.

2) $\int_{C_1+C_2} \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega$.

3) Пусть C^- получается из кривой сменой ориентации (направления обхода). Тогда $\int_{C^-} \omega = -\int_C \omega$.

Действительно, если $\tau = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(l)})$ — некоторое разбиение кривой C, то $\tau^- = (x^{(l)}, x^{(l-1)}, \dots, x^{(0)})$ — разбиение кривой C^-, и для любого T_τ имеем очевидно для интегральных сумм, соответствующих кривым C^- и C: $S_{C^-}(\omega, \tau^-, T_\tau) = -S_C(\omega, \tau, T_\tau)$, так как в этих суммах при смене направления обхода выражение $x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}$ меняет знак.

4) Если $|f_j(x)| \leq M$, $x \in |C|$ то $|\int_C f_j(x)dx_j| \leq Ml(C)$, где $l(C)$ — длина кривой C. Действительно для интегральных сумм для интеграла $\int_C f_j(x)dx_j$ имеем $|S(f_j(x)dx_j, \tau, T_\tau)| = \left|\sum_{k=1}^{l} f_j(y^{(k)})(x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})\right| \leq \sum_{k=1}^{l} |f_j(y^{(k)})| \cdot |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| \leq M \sum_{k=1}^{l} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| \leq M \sum_{k=1}^{l} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq Ml(C)$. Переходя к пределу при $d(\tau) \to 0$, получаем нужное неравенство.

6.4 Криволинейные интегралы второго рода и полные дифференциалы

Теорема 1. *Пусть U — некоторая область в $\mathbb{R}^n$, C — ориентированная гладкая кривая в U, g — непрерывно дифференцируемая в U функция, причем $\omega = dg(x) = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} dx_j$. Тогда*

$$\int_C \omega = \int_C dg(x) = g(B) - g(A),$$

где B и A — конечная и начальная точки кривой C.

Доказательство. Пусть $x : [a; b] \to R^n$ — некоторая гладкая параметризация кривой C. Тогда

$$\int_C \omega = \int_C dg(x) = \int_C \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} dx_j = \int_a^b \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial g(x(t))}{\partial x_j} x_j'(t) dt =$$

$$= \int_a^b \frac{dg(x(t))}{dt} dt = g(x(t))|_a^b = g(x(b)) - g(x(a)) = g(B) - g(A).$$

Теорема 2. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область, $\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)dx_j$ — дифференциальная форма в U, а функции f_j непрерывны. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\omega = dg$, где g — некоторая непрерывно дифференцируемая функция;

2) для любых точек A, $B \in U$ и любой гладкой кривой C, соединяющей точки A и B, интеграл $\int_C \omega$ зависит только от A и B, но не от кривой C;

3) для любой замкнутой гладкой кривой C в U имеем $\int_C \omega = 0$;

4) для любой простой замкнутой кривой C в U имеем $\int_C \omega = 0$;

5) для любой простой замкнутой ломаной C в U имеем $\int_C \omega = 0$.

6) *для любой замкнутой ломаной C в U имеем* $\int_C \omega = 0$.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Это следует из теоремы 1.

2) $\Longrightarrow$ 3). Рассмотрим любую замкнутую гладкую кривую C. Разобъем ее на части C_1 и C_2 точками A и B. Тогда $\int_C \omega = \int_{C_1+C_2} \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega$. Но кривые C_1 и C_2^- имеют одинаковые начало и конец, поэтому $\int_{C_1} \omega = \int_{C_2^-} \omega = -\int_{C_2} \omega$. Следовательно, $\int_C \omega = 0$.

3) $\Longrightarrow$ 4). Очевидно.

4) $\Longrightarrow$ 5). Пусть C — простая замкнутая ломаная в U с вершинами $A_1,\ A_2, \ldots, A_s$. Поместим C в открытое множество V такое, что $\overline{V}$ компактно и содержится в U. Положим $M_j = \sup_V |f_j|$, по теореме Вейерштрасса $M_j < +\infty$. Построим последовательность замкнутых гладких кривых C_m, которые приближаются к C при $m \to \infty$ следующим образом. Заменим часть ζ_k^m ломаной C, состоящей из двух отрезков и лежащей в $1/m$-окрестности вершины A_k, дугой окружности σ_k^m, которая касается этих отрезков в их концевых точках. При достаточно больших m кривые C_m лежат в V, причем длины $l(\zeta_k^m)$, $l(\sigma_k^m) \to 0$, $m \to \infty$, для любого k. Имеем $C = \xi_0^m + \zeta_1^m + \xi_1^m + \zeta_2^m + \xi_2^m + \ldots + \zeta_s^m + \xi_s^m$, $C_m = \xi_0^m + \sigma_1^m + \xi_1^m + \sigma_2^m + \xi_2^m + \ldots + \sigma_s^m + \xi_s^m$, поэтому, поскольку $\int_{C_m} \omega = 0$ для любого m, имеем

$$\left|\int_C \omega\right| = \left|\int_C \omega - \int_{C_m} \omega\right| = \left|\left(\sum_{i=0}^{s} \int_{\xi_i^m} \omega + \sum_{i=1}^{s} \int_{\zeta_i^m} \omega\right) - \left(\sum_{i=0}^{s} \int_{\xi_i^m} \omega + \sum_{i=1}^{s} \int_{\sigma_i^m} \omega\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{s} \int_{\zeta_i^m} \omega - \sum_{i=1}^{s} \int_{\sigma_i^m} \omega\right| \le \sum_{j=1}^{n} M_j \sum_{i=1}^{s} [l(\zeta_i^m) + l(\sigma_i^m)].$$

Итак,

$$\left|\int_C \omega\right| \le \sum_{j=1}^{n} M_j \sum_{i=1}^{s} [l(\zeta_i^m) + l(\sigma_i^m)].$$

Поскольку левая часть не зависит от m и неотрицательна, а правая стремится к нулю при $m \to \infty$, получаем, что $\int_C \omega = 0$.

5) $\Longrightarrow$ 6). Действительно, любую замкнутую ломаную C можно разбить точками ее самопересечения на конечно число простых замкнутых ломаных C_j. Тогда $\int_C \omega = \sum_j \int_{C_j} \omega = \sum_j 0 = 0$.

6) $\Longrightarrow$ 1). Найдем функцию g такую, что $\frac{\partial g(x)}{\partial x_j} = f_j(x)$. Тогда $dg(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} dx_j = \omega$.

Фиксируем точку $x_0 \in U$ и пусть $g(x) = \int_{\Gamma^x_{x_0}} \omega$, где $\Gamma^x_{x_0}$ — произвольная ломаная, соединяющая точки x_0 и x в U. Нетрудно видеть, что $\int_{\Gamma^x_{x_0}} \omega$ не зависит от выбора ломаной $\Gamma^x_{x_0}$. Действительно, пусть Γ_1 и Γ_2 — две ломаные, соединяющие точки x_0 и x в U. Тогда $\Gamma_1 + \Gamma_2^-$ — замкнутая ломаная в U и $\int_{\Gamma_1+\Gamma_2^-} \omega = 0$. С другой стороны, $\int_{\Gamma_1+\Gamma_2^-} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega - \int_{\Gamma_2} \omega$, откуда $\int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega$.

Докажем, что $\frac{\partial g(x)}{\partial x_j} = f_j(x)$. Пусть $x \in U$. Так как U открыто, при достаточно малых t вектор $x + te_j \in U$. Более того отрезок σ_t с концами x и $x+te_j$ лежит в U. Имеем $g(x+te_j) = \int_{\Gamma^x_{x_0}+\sigma_t} \omega$, откуда $g(x+te_j) - g(x) = \int_{\sigma_t} \omega$. Параметризуем σ_t следующим образом: $x(u) = x + ute_j$, $0 \le u \le 1$. Тогда $x'_k(u) = 0$, $k \ne j$, $x'_j(u) = t$. Следовательно, с применением теоремы о среднем, получаем $\int_{\sigma_t} \omega = \int_{\sigma_t} \sum_{k=1}^n f_k(x)dx_k = \int_0^1 \sum_{k=1}^n f_k(x + ute_j)dx'_k(u)du = \int_0^1 f_j(x + ute_j)tdu = tf_j(x + \theta te_j)$, где $\theta = \theta(t) \in (0;1)$. Учитывая это и непрерывность функции f_j, получаем

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_j} = \lim_{t\to 0} \frac{g(x+te_j) - g(x)}{t} = \lim_{t\to 0} f_j(x + \theta te_j) = f_j(x).$$

Теорема доказана.

Как следствие получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Если $dg(x) = \omega$, где $\omega = \sum_{j=1}^n f_j(x)dx_j$ — дифференциальная форма с непрерывными в области U коэффициентами f_j, то $g(x) = g(x_0) + \int_{x_0}^x \omega$, где x_0 — фиксированная точка области U, а $\int_{x_0}^x \omega$ — криволинейный интеграл от ω, взятый по любой кусочно-гладкой кривой соединяющей точки x_0 и x.*

Действительно, если $g_1(x) = \int_{x_0}^x \omega$, то $dg_1(x) = \omega$ и $d(g - g_1)(x) = 0$ в U, откуда $g(x) - g_1(x) = c = \text{const}$ в U. Так как $g_1(x_0) = 0$, получаем $g(x_0) = c$. Таким образом, $g(x) = c + g_1(x) = g(x_0) + \int_{x_0}^x \omega$.

Теорема 4. *Если $dg(x) = \omega$, где $\omega = \sum_{j=1}^n f_j(x)dx_j$ — дифференциальная форма с непрерывно дифференцируемыми в области U коэффициентами f_j, то*

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}, \quad x \in U,\ 1 \le i,j \le n. \qquad (*)$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что частные производные $\frac{\partial g(x)}{\partial x_j} = f_j(x)$ функции g непрерывно дифференцируемы. Таким образом, функция g дважды непрерывно дифференцируема, значит, смешанные частные производные второго порядка не зависят от порядка дифференцирования. Имеем

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}, \quad x \in U.$$

Теорема доказана.

Условия $(*)$ называются (необходимыми) условиями полного дифференциала. Отметим, что при $i = j$ эти условия тривиальны, поэтому из записывают только при $i \neq j$. В силу того, что условия симметричны относительно i и j, количество существенно различных условий получается $n(n-1)/2$.

Отметим некоторые частные случаи.

1) $n = 2$. Если форма $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом, то

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

2) $n = 3$. Если форма $\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + RQ(x,y,z)dz$ является полным дифференциалом, то

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}, \ \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}, \ \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}.$$

Следующий пример показывает, что условия $(*)$ достаточными, вообще говоря, не являются.

Пример. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ дифференциальную форму

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Пусть

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Имеем

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Таким образом, выполняется необходимое условие полного дифференциала. Покажем однако, что ω не является полным дифференциалом в

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Для этого найдем замкнутую гладкую кривую, вдоль которой криволинейный интеграл от ω отличен от нуля.

В качестве такой кривой возьмем единичную окружность γ с параметризацией $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Получаем

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (\cos t)' + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (\sin t)' \right) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Тем не менее, справедлива следующая

Теорема 5. *Если $\omega = \sum_{j=1}^n f_j(x)dx_j$ — дифференциальная форма с непрерывно дифференцируемыми в односвязной области U коэффициентами f_j, и*

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}, \quad x \in U,\ 1 \le i,j \le n, \tag{$*$}$$

Тогда существует дважды непрерывно дифференцируемая функция g в U такая, что $\omega = dg(x)$ в U.

Напомним, что область U называется односвязной, если любую замкнутую кривую в U можно стянуть в точку, оставаясь в области U. Докажем эту теорему для частного случая звездной области. Область U называется звездной относительно точки x_0, если для любой точки $x \in U$ отрезок с концами в точках x_0 и x лежит в U.

Итак, пусть U звездна относительно точки $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Определим функцию $g(x) := \int_0^1 \sum_{j=1}^n f_j(x_0 + t(x-x_0))(x_j - x_j^0)dt$. Отметим, что точка $x_0 + t(x - x_0)$ пробегает отрезок с концами в точках x_0 и x, когда t пробегает отрезок $[0;1]$. Вычислим частную производную

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \sum_{j=1}^n f_j(x_0 + t(x - x_0))(x_j - x_j^0)dt.$$

По теореме о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, доказываемой далее, следует, что можно поменять местами операцию дифференцирования по x_j и интегрирования по t. Тогда получаем

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_i} = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_j(x_0 + t(x - x_0))(x_j - x_j^0)]dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f_j(x_0 + t(x - x_0))}{\partial x_i} t(x_j - x_j^0) + f_i(x_0 + t(x - x_0)) \right] dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f_i(x_0 + t(x - x_0))}{\partial x_j} (x_j - x_j^0) \cdot t + f_i(x_0 + t(x - x_0)) \right] dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{df_i(x_0 + t(x - x_0))}{dt} \, tdt + \int_0^1 f_i(x_0 + t(x - x_0))dt =$$

$$= f_i(x_0 + t(x - x_0)) \cdot t|_{t=0}^1 - \int_0^1 f_i(x_0 + t(x - x_0))dt + \int_0^1 f_i(x_0 + t(x - x_0))dt = f_i(x).$$

Теорема доказана.

6.5 Нахождение функции по ее дифференциалу в параллелепипеде

I) Пусть $n = 2$. Рассмотрим задачу о восстановлении функции g по дифференциалу $dg(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ в прямоугольнике. Фиксируем точку (x_0, y_0) в прямоугольнике. Соединим точки (x_0, y_0) и (x, y) двузвенной ломаной Γ с звеньями, параллельными координатным осям и проходящим через точку (x, y_0). Тогда

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + \int_\Gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= g(x_0, y_0) + \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy.$$

Аналогично, соединяя точки ломаной, проходящей через точку (x_0, y), получаем

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^x P(x, y)dx.$$

Пример. Рассмотрим

$$\omega = 3(x^2 + y^2)dx + 3(2xy + y^2)dy.$$

Имеем $P(x, y) = 3(x^2 + y^2)$, $Q(x, y) = 3(2xy + y^2)$, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 6y = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. В силу односвязности $\mathbb{R}^2$ существует функция g на плоскости такая, что $dg = \omega$. Определим функцию g двумя способами, описанными выше.

1) $g(x,y) = g(0,0) + \int_0^x 3x^2dx + \int_0^y 3(2xy+y^2)dy = g(0,0) + x^3 + 3xy^2 + y^3$.

2) $g(x,y) = g(0,0) + \int_0^y 3y^2dy + \int_0^x 3(x^2+y^2)dx = g(0,0) + y^3 + x^3 + 3xy^2$.

Здесь $g(0,0)$ — произвольная константа.

II) Пусть $n = 3$, дифференциальная форма $\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ задана в параллелепипеде $\Pi := [a;b] \times [c;d] \times [e;f]$ и в любой точке параллелепипеда выполняются условия полного дифференциала:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Тогда существует функция g в Π такая, что $dg = \omega$. Одним из способов восстановления функции g является способ интегрирования ω по ломаной с вершинами в точках (x_0, y_0, z_0), (x, y_0, z_0), (x, y, z_0) и (x, y, z). Имеем

$$g(x,y,z) = g(x_0,y_0,z_0) + \int_{x_0}^x P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^z R(x,y,z)dz.$$

Упражнение 1. Существует еще 5 вариантов восстановления функции g по форме ω, когда интегрирование идет по ломаной со сторонами, параллельными координатным осям . Выпишите их самостоятельно.

Упражнение 2. Как отыскивать функцию по ее дифференциалу в параллелепипеде в R^n?

6.6 Формула Грина

Формула Ньютона-Лейбница имеет вид $\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a)$. Эта формула связывает интеграл по отрезку от дифференциальной формы dF с ее значениями на границе отрезка. Своеобразным обобщением этой формулы на двойные интегралы является формула Грина.

Теорема (формула Грина). *Пусть D — некоторая замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, граница которой является объединением конечного числа кусочно-гладких кривых Γ_1, $\Gamma_1 \ldots, \Gamma_k$, ориентированных таким образом, что при их обходе область D остается «слева». Пусть $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ — некоторая непрерывно дифференцируемая в D дифференциальная форма. Тогда справедливо равенство*

$$\oint_{\partial D} \omega = \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} \omega = \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy.$$

Доказательство. 1) Сначала рассмотрим случай, когда $k = 1$ ($\Gamma_1 = \Gamma$) и область D имеет вид, изображенный на рис. 1. Здесь $a_1a_2a_3a_4$ — график некоторой непрерывной кусочно-гладкой функции $y = \varphi(x)$, $a_8a_7a_6a_5$ — график некоторой непрерывной кусочно-гладкой функции $y = \psi(x)$, a_1a_8 и a_4a_5 — вертикальные участки (возможно, отсутствующие).

Докажем, что

$$-\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_\Gamma P(x,y)dx.$$

Имеем

$$-\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int_c^d dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy =$$

$$= -\int_c^d P(x,y)\big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx = -\int_c^d P(x,\psi(x)) + \int_c^d P(x,\varphi(x)) =$$

$$= -\int_{a_8a_7a_6a_5} P(x,y)dx + \int_{a_1a_2a_3a_4} P(x,y)dx = \int_{a_5a_6a_7a_8} P(x,y)dx +$$

$$+ \int_{a_1a_2a_3a_4} P(x,y)dx + \int_{a_8a_1} P(x,y)dx + \int_{a_4a_5} P(x,y)dx = \int_\Gamma P(x,y)dx.$$

Аналогично можно показать, что

$$\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \int_\Gamma Q(x,y)dy.$$

Складывая полученные равенства, получаем формулу Грина.

2) Общий случай. он сводится к предыдущему. Разрежем область D на конечное число областей D_j, $1 \le j \le l$ вида, используемого в п. 1) путем проведения горизонтальных и вертикальных разрезов (рис. 2). Тогда

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = \sum_{j=1}^{l} \iint_{D_j} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy =$$

$$= \sum_{j=1}^{l} \int_{\partial D_j} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Последнее равенство имеет место, поскольку общие участки границ смежных областей обходятся в противоположных направлениях, поэтому они сокращаются по свойству криволинейных интегралов второго рода.

Замечание. Рассмотрим алгебру дифференциальных форм над кольцом непрерывных функций в области D, порожденную элементами dx и dy с умножениям $\wedge$, обладающим свойствами: $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$, $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$. Произвольная дифференциальная форма первого порядка имеет вид $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Для непрерывно дифференцируемых в области D функций P и Q определим

$$d\omega = dP(x,y) \wedge dx + dQ(x,y) \wedge dy = \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy\right) \wedge dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}dy\right) \wedge dy = \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

С использованием этих обозначений формулу Грина можно записать в виде

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega.$$

Из формулы Грина следует

Теорема. *Пусть D — односвязная область в $\mathbb{R}^2$, ограниченная кусочно-гладкой кривой, P, Q — непрерывно дифференцируемые функции в D и $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Тогда существует дважды непрерывно дифференцируемая функция g в D такая, что $dg(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой простой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ в D интеграл $\int_\gamma Pdx + Qdy = 0$. В силу односвязности D кривая γ ограничивает некоторую односвязную область $G \subset D$. можно считать, что при обходе γ область G остается слева. Тогда

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

6.7 Вычисление площади с помощью криволинейных интегралов

Площадь плоской области ограниченной кусочно-гладкими кривыми, образующими ∂D, равна $S(D) = \iint_D dxdy$. С использованием формулы

Грина, беря в качестве функций $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = x$, получаем

$$S(D) = \int_{\partial D} xdy.$$

Аналогично получаем еще две формулы:

$$S(D) = -\int_{\partial D} ydx, \quad S(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$. Параметризуем граничную кривую следующим образом: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$. Применим третью из приведенных формул. Имеем

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t - a\sin^3 t \cdot 3a3\cos^2 t(-\sin t))dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 tdt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2tdt = \frac{3a^2}{16}(1 - \cos 4t)dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

6.8 Изменение площади плоской фигуры под действием диффеоморфизма. Геометрический смысл знака якобиана.

Теорема. *Пусть U, $V \subset \mathbb{R}^2$ — две области, диффеоморфизм $\Phi : U \to V$ дважды непрерывно дифференцируем. Пусть Γ^* — простой замкнутый кусочно-гладкий контур в U, ограничивающий некоторую замкнутую область A^*, ориентированный в положительном направлении. Пусть $\Gamma = \Phi(\Gamma^*)$ — кривая, ориентация которой индуцирована ориентацией Γ и A — замкнутая область в V, ограниченная Γ. Тогда:*

1) *Имеет место равенство*

$$\mu(A) = \iint_{A^*} |I_\Phi(u, v)|\, dudv.$$

2) *Если $I_\Phi(u, v) > 0$ в U, то кривая Γ ориентирована положительным образом, а если $I_\Phi(u, v) > 0$ в U, то — отрицательным. В первом*

случае говорят, что Φ сохраняет ориентацию, а во втором — что меняет ориентацию.

Доказательство. Пусть $(u(t), v(t))$, $t \in [a; b]$ — некоторая кусочно-гладкая параметризация кривой Γ. Тогда $(x(t), y(t)) = \Phi(u(t), v(t))$, $t \in [a; b]$ — параметризация кривой $\Gamma = \Phi(\Gamma^*)$.

Пусть $\Phi = (\varphi, \psi)$, тогда $x(t) = \varphi(u(t), v(t))$, $y(t) = \psi(u(t), v(t))$. Пусть параметр $\varepsilon = 1$, если Γ ориентирована положительным образом, $\varepsilon = -1$, если Γ ориентирована отрицательным образом. Имеем

$$\mu(A) = \varepsilon \int_\Gamma x dy = \varepsilon \int_a^b [\varphi(u(t), v(t))\psi'_u(u(t), v(t))u'(t) + \psi'_v(u(t), v(t))v'(t)] =$$

$$= \varepsilon \int_{\Gamma^*} \varphi(u, v)\psi'_u(u, v))du + \psi'_v(u, v)dv = \varepsilon \iint_{A^*} [(\varphi\psi'_v)_u - (\varphi\psi'_u)_v] dudv =$$

$$= \varepsilon \iint_{A^*} [\varphi'_u\psi'_v + \varphi\psi''_{vu} - \varphi'_v\psi'_u - \varphi\psi''_{uv}] dudv = \varepsilon \iint_{A^*} [\varphi'_u\psi'_v - \varphi'_v\psi'_u] dudv =$$

$$= \varepsilon \iint_{A^*} I_\Phi(u, v) dudv.$$

Итак,

$$\mu(A) = \varepsilon \iint_{A^*} I_\Phi(u, v) dudv.$$

Если $I_\Phi(u, v) > 0$ в U, то $\iint_{A^*} I_\Phi(u, v)dudv > 0$ и $\varepsilon = 1$. Если $I_\Phi(u, v) < 0$ в U, то $\iint_{A^*} I_\Phi(u, v)dudv < 0$ и $\varepsilon = -1$.

6.9 Доказательство формулы замены переменных в двойном интеграле

Теорема. *Пусть U, V — области в $\mathbb{R}^2$, $\Phi : U \to V$ — дважды гладкий диффеоморфизм, Γ^* — кусочно-гладкий контур, ограничивающий замкнутую область $A^* \subset U$ и $\Phi(A^*) = A$. Пусть $f : A \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда*

$$\iint_A f(x, y) dxdy = \iint_{A^*} f(x(u, v), y(u, v)) |I_\Phi(u, v)| dudv.$$

Доказательство. Пусть $\tau^* = (A_i^*)_{1 \le i \le p}$ — некоторое разбиение A^* на замкнутые части A_i^*, ограниченные кусочно-гладкими кривыми. Пусть $\tau = (A_i)_{1 \le i \le p}$, где $A_i = \Phi(A_i^*)$ — разбиение A. Если $d(\tau^*) \to 0$, то Если $d(\tau) \to 0$. Это следует из равномерной непрерывности Φ.

С использованием обобщенной теоремы о среднем имеем

$$\iint_{A^*} f(x(u,v),y(u,v))|I_\Phi(u,v)|dudv = \sum_{i=1}^{p} \iint_{A_i^*} f(x(u,v),y(u,v))|I_\Phi(u,v)|dudv =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} f(x(u_i,v_i),y(u_i,v_i)) \iint_{A_i^*} |I_\Phi(u,v)|dudv = \sum_{i=1}^{p} f(x(u_i,v_i),y(u_i,v_i))\mu(A_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} f(x_i,y_i)\mu(A_i),$$

где точки $(u_i,v_i) \in A_i^*$, $x_i,y_i) = \Phi(u-i,v_i) \in \Phi(A_i^*) = A_i$. Таким образом, мы показали, что

$$\iint_{A^*} f(x(u,v),y(u,v))|I_\Phi(u,v)|dudv = S(f,\tau,T_\tau),$$

где T_τ состоит из точек (x_i,y_i). При $d(\tau^*) \to 0$ имеем $d(\tau) \to 0$ и $S(f,\tau,T_\tau) \to \iint_A f(x,y)dxdy$. Теорема доказана.

6.10 Длина пространственной кривой

Теорема. *Пусть* Γ *— гладкая кривая в* $\mathbb{R}^n$ *с представлением* $x = x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$, $a \le t \le b$. *Тогда длина кривой* Γ

$$l(\Gamma) = \int_a^b \|x'(t)\|dt,$$

где $\|x'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i'(t))^2}$.

Доказательство. Ясно, что длина

$$l(\Gamma) = \lim_{d(\tau\to 0)} \sum_{k=1}^{m} \|x(t_k) - x_(t_{k-1})\|,$$

где $\tau = (t_0,t_1,\ldots,t_m)$ — некоторое разбиение отрезка $[a;b]$. Имеем по формуле конечных приращений

$$\|x(t_k) - x_{t_{k-1}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i(t_k) - x_i(t_{k-1}))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i'(\theta_{ki})^2 \Delta t_k^2},$$

где $\theta_{ki} \in [t_{k-1};t_k]$ — некоторые промежуточные точки. Следовательно, длина ломаной с вершинами в точках $x(t_k)$ равна $\sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i'(\theta_{ki})^2} \Delta t_k$.

С другой стороны, по теореме о среднем

$$\int_a^b \|x'(t)\|dt = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|x'(t)\|dt = \sum_{k=1}^m \|x'(\theta_k)\|\Delta t_k = \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i'(\theta_k)^2}\Delta t_k.$$

Здесь точки $\theta_k \in [t_{k-1}; t_k]$. Функции $x_i'(t)$ непрерывны на $[a; b]$, следовательно, они равномерно непрерывны, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \theta',\ \theta'' \in [a; b]$

$$|\theta' - \theta''| < \delta \Longrightarrow |x_i'(\theta') - x_i'(\theta'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}(b-a)}.$$

Следовательно, если $d(\tau) < \delta$, то

$$\left|\sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i'(\theta_k)^2}\Delta t_k - \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i'(\theta_{ki})^2}\Delta t_k\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^m \Delta t_k \left|\sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i'(\theta_k)^2} - \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i'(\theta_{ki})^2}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^m \Delta t_k \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i'(\theta_k - x_i'(\theta_{ki})^2} < \sum_{k=1}^m \Delta t_k \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

Итак,

$$\left|\int_a^b \|x'(t)\|dt - \sum_{k=1}^m \|x(t_k) - x_(t_{k-1})\|\right| < \varepsilon,$$

если $d(\tau) < \delta$. Теорема доказана.

Замечание. В силу аддитивности интеграла эта формула справедлива и для кусочно-гладких кривых, хотя $\|x'(t)\|$ может не существовать в конечном числе точек. Выражение $ds := \|x'(t)\|dt$ называется дифференциалом длины дуги.

6.11 Криволинейные интегралы первого рода

Пусть Γ — некоторая спрямляемая кривая в $\mathbb{R}^n$. Разобьем кривую Γ на k частей точками $x_0,\ x_1, \ldots, x_k$. Обозначим через Δs_j длину поддуги Γ_j кривой Γ, расположенную между точками x_{j-1} и x_j. Выберем на каждой из дуг Γ_j точку y_j. Пусть $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Составим интегральную сумму $S := \sum_{j=1}^k f(y_j)\Delta s_j$. Пусть $d = \max_{1\le j\le k} \Delta s_j$. Если существует конечный предел интегральных сумм $\lim_{d\to 0} S$ то этот предел называется криволинейным интегралом 1-го рода от функции f по кривой Γ и обозначается $\int_\Gamma f(x)ds$.

Покажем, что в случае, когда функция f непрерывна, этот предел всегда существует и дадим способ вычисления этого интеграла.

Пусть $x = x(t)$, $a \le t \le b$, — некоторая параметризация кривой Γ. Тогда $x_j = x(t_j)$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$. Кроме того, $y_j = x(\xi_j)$, $1 \le j \le k$. Рассмотрим функцию $s = s(t)$, где $s(t)$ — длина дуги кривой Γ, расположенной между точками x_0 и $x(t)$. Функция $s(t)$ монотонно возрастает, причем $s(a) = 0$, $s(b) = l$, где l — длина кривой Γ.

Тогда

$$S = \sum_{j=1}^{k} f(y_j)\Delta s_j = \sum_{j=1}^{k} f(x(\xi_j))(s(t_j) - s(t_{j-1}))$$

— нтегральная сумма Римана-Стилтьеса. Функция $s = s(t)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, обратная функция $t = t(s)$ также непрерывна на $[0; l]$, поэтому равномерно непрерывна. Отсюда следует, что $\max_j \Delta s_j \to 0$ тогда и только тогда, когда $\max_j \Delta t_j \to 0$.

Так как функция $f(x(t))$ непрерывна, а $s = s(t)$ — функция ограниченной вариации, то существует конечный

$$\lim_{\max_j \Delta t_j \to 0} \sum_{j=1}^{k} f(x(\xi_j))(s(t_j) - s(t_{j-1})) = \int_a^b f(x(t))ds(t).$$

Итак, существует $\int_\Gamma f ds$ и

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(x(t))ds(t).$$

Если кривая Γ гладкая или кусочно-гладкая, то $s(t) = \int_a^t \|x'(t)\|dt$ и $s'(t) = \|x'(t)\|$ за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(x(t))\|x'(t)\|dt.$$

Отметим частные случаи.

При $n = 2$

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

При $n=3$

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Пример. Вычислить $\int_\Gamma xyds$, где Γ — четверть единичной окружности с центром в нуле, роасположенной в первой четверти и обходимой против часовой стрелки.

Параметризуем Γ: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$. Тогда $s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$ и

$$\int_\Gamma xyds = \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = \frac{1}{2}\int |0^{\pi/2} \sin 2t dt = -\frac{1}{4}\cos 2t|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\,.$$

6.12 Свойства криволинейных интегралов первого рода

Будем предполагать кривые спрямляемыми, а функции непрерывными.

1) $\int_\Gamma ds = l(\Gamma)$, где $l(\Gamma)$ — длина кривой Γ. Действительно, интегральные суммы равны $S = \sum_{j=1}^k \Delta s_k = l(\Gamma)$.

2) Линейность.

$$\int_\Gamma (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_\Gamma f ds + \beta \int_\Gamma g ds.$$

3) Аддитивность.

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} f ds = \int_{\Gamma_1} f ds + \int_{\Gamma_2} f ds.$$

4) Оценка интеграла.

$$\left|\int_\Gamma f ds\right| \le \max_\Gamma |f| \cdot l(\Gamma) \qquad (*).$$

Действительно, для интегральных сумм S имеем

$$|S| \le \sum_{j=1}^k |f(y_j)|\Delta s_j \le \max_\Gamma |f||S| \le \sum_{j=1}^k \Delta s_j = \max_\Gamma |f| \cdot l(\Gamma).$$

Переходя к пределу при $\max \Delta s_j \to 0$, получаем $(*)$.

5) Интеграл первого рода не зависит от выбора направления обхода кривой.

6.13 Связь криволинейных интегралов первого и второго рода

Пусть Γ — некоторая кусочно-гладкая кривая. Тогда

$$\int_\Gamma \sum_{j=1}^n f_j(x)dx_j = \int_a^b \sum_{j=1}^n f_j(x(t))x_j'(t)dt =$$

$$= \int_a^b \sum_{j=1}^n f_j(x(t))\frac{x_j'(t)}{\|x'(t)\|}\|x'(t)\|dt = \int_\Gamma \sum_{j=1}^n f_j(x)\cos\alpha_j(x)ds,$$

где $\cos\alpha_j(x) = \frac{x_j'(t)}{\|x'(t)\|}$ — j-ая компонента единичного касательного вектора $\vec{e} = \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|}$ к кривой Γ в точке $x = x(t)$ (направляющий косинус вектора касательной). Таким образом, $\vec{e} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \dots, \cos\alpha_n)$, $\sum_{j=1}^n \cos^2\alpha_j = 1$.

Отметим частные случаи.

При $n = 2$ имеем

$$\int_\Gamma f dx + g dy = \int_\Gamma [f\cos\alpha + g\sin\alpha]ds,$$

где $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ — вектор единичной касательной к кривой.

При $n = 3$ имеем

$$\int_\Gamma f dx + g dy + h dz = \int_\Gamma [f\cos\alpha + g\cos\beta + h\cos\gamma]ds,$$

где $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — вектор единичной касательной к кривой.

7 Поверхностные интегралы

7.1 Гладкие поверхности в трехмерном пространстве

Сначала рассмотрим пример: часть единичной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, лежащая в положительно октанте. Множество точек этой поверхности можно задать с помощь двух параметров — углов Эйлера

$$x = \sin\psi\cos\varphi, \;\; y = \sin\psi\sin\varphi, \;\; z = \cos\psi,$$

$0 < \varphi, \psi < \pi/2$. Эта система равенств задает отображение $(\varphi, \psi) \mapsto (x, y, z)$ квадрата в плоскости (φ, ψ) в R^3. Это – пример параметризованной поверхности.

Дадим общее определение. Пусть $D = \{(u, v)\}$ — некоторая область в $\mathbb{R}^2$ и $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ — непрерывное инъективное отображение. Тогда множество $S = \Phi(D)$ назовем простой поверхностью в $\mathbb{R}^3$. Пару (S, Φ) будем называть параметризованной поверхностью.

Отметим, что любая поверхность может быть параметризована бесконечным числом способов. Действительно, если $h : \Omega \to D$ — некоторый гомеоморфизм, то $(S, \Phi \circ h)$ — другая параметризация поверхности S.

Предположим теперь, что отображение Φ непрерывно дифференцируемо, $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, и векторы

$$\Phi'_u(u, v) = (x'_u(u, v), y'_u(u, v), z'_u(u, v)), \quad \Phi'_v(u, v) = (x'_v(u, v), y'_v(u, v), z'_v(u, v))$$

линейно независимы для любого $(u, v) \in D$. Тогда назовем S гладкой поверхностью, а Φ — ее гладкой параметризацией.

Назовем u-линией образ прямой $\{u = \text{const}\}$ при отображении Φ, а v-линией образ прямой $\{v = \text{const}\}$. Тогда $\Phi'_u(u, v)$ — вектор, касательный к v-линии, а $\Phi'_v(u, v)$ — вектор, касательный к u-линии в точке $\Phi(u, v)$. Плоскость, порожденная этими векторами называется касательной плоскостью к поверхности S в точке $\Phi(u, v)$, а вектор, перпендикулярный этой плоскости, — это вектор нормали к поверхности в данной точке.

Рассмотрим матрицу Якоби отображения Φ:

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

и ее миноры

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Покажем, что вектор (A, B, C) — вектор нормали к поверхности S в соответствующей точке. Действительно, векторное произведение векторов Φ'_u и Φ'_v перпендикулярно им, следовательно, касательной плоскости, т.е. направлено по нормали к поверхности. Имеем

$$\Phi'_u \times \Phi'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}.$$

Отметим, что так как векторы Φ'_u и Φ'_v линейно независимы, $\Phi'_u \times \Phi'_v \neq \theta$. Это эквивалентно тому, что $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Рассмотрим частный случай, когда гладкая поверхность S задана в виде $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. Тогда в качестве параметров u, v можно взять x, y и матрица Якоби отображения $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{pmatrix},$$

при этом $A = -f'_x$, $B = -f'_y$, $C = 1$. Вектор нормали имеет вид $\vec{N} = (-f'_x, -f'_y, 1)$, вектор единичной нормали

$$\vec{n} = \left(\frac{-f'_x}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}}, \frac{-f'_y}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}} \right).$$

Если гладкая поверхность задана неявно в виде $F(x, y, z) = 0$, то для любой гладкой параметризации $F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0$. Дифференцируя это соотношение по u и v, получаем

$$F'_x x'_u + F'_y y'_u + F'_y y'_u = 0,$$

$$F'_x x'_v + F'_y y'_v + F'_y y'_v = 0.$$

Эти равенства означают, что вектор $\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z)$ ортогонален векторам Φ'_u и Φ'_v, порождающим касательную плоскость. Значит, этот вектор, если он отличен от нуля, ортогонален касательной плоскости и является вектором нормали.

Примеры. 1) Единичная сфера задается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, поэтому $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Имеем $\nabla F = (2x, 2y, 2z)$, поэтому этот вектор и коллинеарный ему (x, y, z) являются нормальными векторами к сфере в точке (x, y, z).

2) Рассмотрим эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Тогда $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ и $\nabla F = (2\frac{x}{a^2}, 2\frac{y}{b^2}, 2\frac{z}{c^2})$. В качестве вектора нормали можно взять вектор $(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2})$.

Введем величины

$$E = \|\Phi'_u\|^2 = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2,$$

$$F =< \Phi'_u, \Phi'_v >= x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v,$$

$$G = \|\Phi'_v\|^2 = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2.$$

Имеем $A^2 + B^2 + C^2 = \|\Phi'_u \times \Phi'_v\|^2 = \|\Phi'_u\|^2 \|\Phi'_v\|^2 \sin^2 \alpha = \|\Phi'_u\|^2 \|\Phi'_v\|^2 - \|\Phi'_u\|^2 \|\Phi'_v\|^2 \cos^2 \alpha = \|\Phi'_u\|^2 \|\Phi'_v\|^2 - < \Phi'_u, \Phi'_v >^2 = EG - F^2$. Итак,

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2.$$

Итак, справедлива

Теорема. *Если $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ — некоторая непрерывно дифференцируемая инъективная функция, параметризующая поверхность S, то следующие условия равносильны:*

1) *векторы Φ'_u и Φ'_u линейно независимы;*
2) $\Phi'_u \times \Phi'_v \neq \theta$;
3) $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$;
4) $EG - F^2 \neq 0$.

При этом, (A, B, C) — вектор нормали и его длина равна

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2}.$$

Единичный вектор нормали имеет вид

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right).$$

7.2 Площадь поверхности, заданной параметрически

Пусть S — гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$ и $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ — ее гладкая параметризация. Выберем достаточно малое положительное число h и разобьем область D на части решеткой с шагом h. В результате область D разобьется на конечное число областей $D_1, \ldots, D_p$, диаметр разбиения $\tau = (D_j)_{1 \leq i \leq p}$ равен $\sqrt{2}h$. Пусть $S_i = \Phi(D_i)$, $1 \leq i \leq p$. Области D_i назовем ячейками, причем правильными. если D_i — квадрат. Рассмотрим некоторую правильную ячейку D_i и соответствующую ей часть S_i поверхности S. Обозначим $M = \Phi(u, v)$, $M' = \Phi(u + h, v)$,

$M'' = \Phi(u, v+h)$. По формуле конечных приращений имеем вектор $M\vec{M}' = \Phi(u+h, v) - \Phi(u,v) = \Phi'_u(u+\theta h, v)h \approx \Phi'_u(u,v)h$. Аналогично $M\vec{M}'' \approx \Phi'_v(u,v)h$. Рассмотрим вместо S_i параллелограмм, натянутый на векторы $\Phi'_u(u,v)h$ и $\Phi'_v(u,v)h$. Его площадь равна

$$\|\Phi'_u(u,v)h \times \Phi'_u(u,v)h\| = \|\Phi'_u(u,v) \times \Phi'_u(u,v)\|h^2 =$$

$$= \sqrt{EG-F^2}h^2 = \sqrt{EG-F^2}\mu(D_i).$$

Суммируя по всем правильным ячейкам, получаем, что

$$\sum_{i:D_i---.} \sqrt{EG-F^2}\mu(D_i)$$

есть урезанная сумма Римана $S_{\partial D}(\sqrt{EG-F^2}, \tau, T_\tau)$ для двойного интеграла. При $h \to 0$ имеем $(\tau) \to 0$ и

$$S_{\partial D}(\sqrt{EG-F^2}, \tau, T_\tau) \to \iint_D \sqrt{EG-F^2}dudv.$$

Этот предел назовем площадью поверхности S. Итак,

$$S = \iint_D \sqrt{EG-F^2}dudv.$$

В частности, если гладкая поверхность задана явным образом в виде $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, то

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}dxdy.$$

7.3 Независимость площади гладкой поверхности от выбора параметризации

Пусть $D^* = \Phi\Phi^*(s,t)$, $(s,t) \in D^*$, — другая гладкая параметризация поверхности S. Тогда существует диффеоморфизм $F : D^* \to D$ такой, что $\Phi^* = \Phi \circ F$. Имеем $\Phi^*(s,t) = \Phi \circ F(s,t) = \Phi(u(s,t), v(s,t))$,

$$\Phi^{*\prime}_s = \Phi'_u u'_s + \Phi'_v v'_s, \quad \Phi^{*\prime}_t = \Phi'_u u'_t + \Phi'_v v'_t.$$

Тогда

$$\Phi^{*\prime}_s \times \Phi^{*\prime}_t = (\Phi'_u u'_s + \Phi'_v v'_s) \times (\Phi'_u u'_t + \Phi'_v v'_t) =$$

$$= \Phi'_u \times \Phi'_u \cdot u'_s u'_t + \Phi'_u \times \Phi'_v \cdot u'_s v'_t + \Phi'_v \times \Phi'_u \cdot v'_s u'_t + \Phi'_v \times \Phi'_v \cdot v'_s v'_t =$$

$$= \Phi'_u \times \Phi'_v (u'_s v'_t - u'_t v'_s) = \Phi'_u \times \Phi'_v \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}.$$

Следовательно,

$$\|\Phi^{*\prime}_s \times \Phi^{*\prime}_t\| = \|\Phi'_u \times \Phi'_v\| \cdot \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right|.$$

Итак,

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv = \iint_D \|\Phi'_u \times \Phi'_v\| dudv =$$

$$= \iint_{D^*} \|\Phi'_u \times \Phi'_v\| \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right| dsdt = \iint_{D^*} \|\Phi^{*\prime}_s \times \Phi^{*\prime}_t\| dsdt = \iint_{D^*} \sqrt{E^* G^* - (F^*)^2} dsdt.$$

7.4 Свойства площади гладкой поверхности

1) Если S — ладкяа поверхность, то ее площадь строго положительна.

2) Если S разбить на конечное число кусков $S_1, \ldots, S_p$, то площадь S равна сумме площадей $S_1, \ldots, S_p$.

3) Площадь поверхности инвариантна относительно перепараметризации.

4) Площадь поверхности инвариантна относительно движений в трехмерном пространстве. Это следует из инвариантности векторного произведения относительно движения.

Пример. Вычислить площадь части единичной сферы, которая описывается через углы Эйлера неравенствами $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, $\psi_1 \le \psi \le \psi_2$.

Параметрическое задание этой части сферы задается системой

$$x = \sin\psi\cos\varphi, \quad = \sin\psi\sin\varphi, \quad z = \cos\psi,$$

$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, $\psi_1 \le \psi \le \psi_2$. Найдем матрицу Якоби

$$\begin{pmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\psi & y'_\psi & z'_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\psi\sin\varphi & \sin\psi\cos\varphi & 0 \\ \cos\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$E = \sin^2\psi\sin^2\varphi + \sin^2\psi\cos^2\varphi = \sin^2\psi,$$

$$F = - -\sin\psi\sin\varphi\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\cos\varphi\cos\psi\sin\varphi = 0,$$

$$G = \cos^2\psi\cos^2\varphi + \cos^2\psi\sin^2\varphi + \sin^2\psi = 1,$$
и $\sqrt{EG - F^2} = \sin\psi$. Имеем

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sin\psi d\psi = (\varphi_2 - \varphi_1)(\psi_1 - \cos\psi_2).$$

В частности, площадь единичной сферы равна 4π.

7.5 Площадь кусочно-гладкой поверхности

Кусочно-гладкую поверхность можно разбить на конечное число гладкий поверхностей $S_1, \dots, S_p$. Например, поверхность куба можно разбить на шесть квадратов. По определению, площадь S равна сумме площадей $S_1, \dots, S_p$. Можно записать

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

но величины E, G, F не определены в точках стыка гладких кусков s_j.

7.6 Поверхностные интегралы первого рода

Пусть сначала S — гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$ с параметризацией Φ. Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда по определению поверхностный интеграл от функции f по поверхности S

$$\iint_S f dS = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Величина поверхностного интеграла первого рода не зависит от параметризации. Это доказывается точно так же, как для площади поверхности. Если поверхность S кусочно гладкая и состоит из гладких кусков $S_1, \dots, S_p$, то по определению полагают

$$\iint_S f dS = \sum_{i=1}^{p} \iint_{S_i} f dS.$$

Отметим простейшие свойства поверхностных интегралов первого рода.

1) Линейность.

$$\iint_S (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_S f dS + \beta \iint_S g dS.$$

2) Аддитивность. Если поверхность S разбита на конечное число кусочно гладких кусков $S_1, \ldots, S_p$, то

$$\iint_S f dS = \sum_{i=1}^{p} \iint_{S_i} f dS.$$

3) Площадь поверхности Σ

$$S(\Sigma) = \iint_\Sigma dS.$$

Примеры. 1) Пусть $S = \{z = \sqrt{x^2 + y^2} \mid z \leq 1\}$. Найдем $\iint_S z dS$. Имеем

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Тогда

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dxdy = \sqrt{2} dxdy$$

и

$$\iint_S z dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 dr = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi.$$

2) Найдем $\iint_S x dS$, где S —единичная сфера. Пусть $D = \{(\varphi, \psi) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \pi\}$. Имеем

$$\iint_S x dS = \iint_D \sin\psi \cos\varphi \sin\psi d\varphi d\psi = \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^2\psi d\psi = 0.$$

7.7 Ориентируемые гладкие поверхности. Ориентация.

Начнем с примеров.

1) Рассмотрим лист Мебиуса. Он получается из прямоугольника склейкой двух противоположных сторон с поворотом на 180°. Это — классический пример односторонней поверхности.

2) Сфера является двусторонней поверхностью. Существует внешняя сторона сферы и ее внутренняя сторона.

Теперь рассмотрим произвольную гладкую поверхность S. Предположим, что для любой точки P на поверхности S задан вектор $\vec{V} = \vec{V}(P)$. Тогда говорят, что на S задано векторное поле. Если вектор $\vec{V} = \vec{V}(P)$ непрерывно зависит от точки P, то векторное поле называется непрерывным. Если вектор $\vec{V}(P)$ является вектором нормали к поверхности S в любой точке P, то векторное поле называется нормальным. Поверхность S называется ориентируемой, если на S существует непрерывное нормальное поле $\vec{V}(P)$, которое не обращается в нуль ни в какой точке P. Это определение эквивалентно следующему: на S существует непрерывное нормальное векторное поле единичных векторов. Действительно, если $\vec{V}(P)$ — некоторое ненулевое непрерывное нормальное векторное поле, то $\frac{\vec{V}(P)}{\|\vec{V}(P)\|}$ — также ненулевое непрерывное нормальное векторное поле, состоящее из векторов длины единица. Обратное очевидно.

Если $\vec{n} = \vec{n}(P)$ — ненулевое непрерывное нормальное векторное поле, состоящее из единичных векторов, то $(-\vec{n}(P))$ — также непрерывное нормальное векторное поле, состоящее из единичных векторов. Нетрудно проверить, что других таких полей на поверхности нет. Будем говорить. что непрерывное нормальное векторное поле единичных векторов на S задает ориентацию или сторону поверхности S.

Например, на единичной сфере $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ векторное поле (x, y, z) задает внешнюю сторону сферы (векторы нормали направлены вне сферы), а векторное поле $(-x, -y, -z)$ — внутреннюю сторону (векторы нормали направлены внутрь сферы). Первое поле задает ориентацию внешней нормали, а второе — внутренней нормали.

Ориентированая поверхность — это пара $(S, \vec{n})$, где S —ориентируемая поверхность S, $\vec{n}$ — ориентация S, т. е. непрерывное нормальное векторное поле на S, состоящее из единичных векторов.

Примеры. 1) Сфера $\{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2\}$. Нормаль к поверхности задается вектором градиента функции $F(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - R^2$. Имеем $\vec{N} = (2(x-x_0), 2(y-y_0), 2(z-z_0))$. Нормируем нормаль. Получаем непрерывное нормальное единичное поле

$$\vec{n} = \left(\frac{x-x_0}{R}, \frac{z-z_0}{R}, \frac{z-z_0}{R},\right),$$

которое задает ориентацию внешней нормали.

2) Эллипсоид
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$
Непрерывное ненулевое поле нормалей имеет вид $(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})$. Длина вектора нормали равна $h=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\neq 0$. Тогда векторное $\vec{n}=(\frac{x}{ha^2},\frac{y}{hb^2},\frac{z}{hc^2})$ задает внешнюю сторону поверхности эллипсоида.

3) Пусть поверхность S задается как график гладкой функции $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$. Вектор нормали имеет вид $(-f'_x,-f'_y,1)\neq\theta$. Это — ненулевое непрерывное нормальное векторное поле. Нормируем его. Получаем единичное поле
$$\vec{n}=\left(\frac{-f'_x}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_x)^y}},\frac{-f'_y}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_x)^y}}\frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_x)^y}}\right).$$
Поскольку третья координата этого поля положительна, говорят, что это поле задает верхнюю сторону поверхности. Противоположное поле $(-\vec{n})$ задает нижнюю сторону.

Упражнение. Доказать, что лист Мебиуса нельзя задать в виде $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z)=0\}$, где F — непрерывно дифференцируемая функция с градиентом, не обращающимся в нуль ни в одной точке.

7.8 Ориентация кусочно-гладкой поверхности. Положительная ориентация края.

Можно ввести ориентацию не только для гладких, но и дял кусочно-гладких поверхностей. Например, поверхность куба может быть ориентирована, хотя у нее не существует нормалей в точках ребер и в вершинах куба.

Пусть S состоит из конечного числа гладких кусков $S_1,\dots,S_p$, стыкующихся между собой вдоль кусочно гладких кривых. Предположим, что все поверхности S_i ориентируемы. Выберем на них ориентации. Ориентация S_i порождает (индуцирует) вполне определенную ориентацию (направление обхода) граничных кривых. В качестве положительной ориентации выберем то направление обхода граничной кривой γ куска S_i, при котором выбранная сторона поверхности остается «слева». Это определение можно проиллюстрировать следующим образом. Если мы смотрим с конца вектора нормали, заданного ориентацией S_i, то кривая γ обходится против часовой стрелки. Данное «определение» весьма не строго и применимо в случае, когда поверхность S_i не очень изогнута. однако ему можно придать более строгую форму. Пусть γ параметризована некоторой гладкой функцией $x = x(t)$, $a \leq t \leq b$. Тогда вектор $\vec{e}_1 := x'(t)$ — вектор касательной к γ точке $x(t)$. Выберем вектор $\vec{e}_2$, лежащий в касательной плоскости в ее граничной точке $x(t)$, перпендикулярный $\vec{e}_1$ и направленный в сторону поверхности S_i. Пусть $\vec{n}$ — вектор нормали, соответствующий выбранной ориентации на S_i. Если тройка $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n})$ является правой тройкой ,то ориентацию кривой γ назовем положительной (относительно выбранной ориентации поверхности S_i), в противном случае — отрицательной. Теперь рассмотрим два куска S_i и S_j, которые имеют общий участок границы γ. Будем говорить, что ориентации S_i и S_j выбраны когерентно (т. е. согласовано), если положительная ориентация γ относительно S_i противоположна положительной ориентации γ относительно S_j.

Поверхность S, состоящую из конечного числа гладких кусков $S_1, \dots, S_p$, назовем ориентируемой, если существуют ориентации кусков S_i такие, что любые две поверхности, имеющие общие граничные участки, когерентно ориентированы. В этом случае когерентные ориентации кусков S_i задают ориентацию на S.

Пример. Рассмотрим единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выберем ориентации граней куба следующим образом. Ориентация верхней грани $A_1B_1C_1D_1$ задается постоянным векторным полем $(0,0,1)$, нижней $ABCD$ — $(0,0,-1)$, грани AA_1D_1D — $(1,0,0)$, грани BB_1C_1C — $(-1,0,0)$, грани AA_1B_1BD — $(0,-1,0)$, грани CC_1D_1D — $(0,1,0)$. Нетрудно видеть, что эти ориентации выбраны когеретно. Например, грани $A_1B_1C_1D_1$ и AA_1D_1D имеют общий участок границы — ребро A_1D_1. Относительно грани $A_1B_1C_1D_1$ положительный обход этого ребра происходит от точки A_1 к точке D_1, а относительно грани AA_1D_1D — наоборот.

Таким образом, поверхность куба ориентируема, и выбранные когерентные ориентации граней определяют ориентацию всей поверхности, которую можно назвать внешней стороной куба.

7.9 Поверхностный интеграл второго рода

Пусть S — гладкая или кусочно гладкая ориентируемая поверхность и $\vec{n} = \vec{n}(P) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — некоторая ее ориентация. Пусть P, Q, R — три непрерывные вещественнозначные функции на S. Рассмотрим дифференциальныую форму второго порядка

$$\omega = P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

По определению, поверхностный интеграл второго рода от формы ω по ориентированной поверхности $(S, \vec{n})$ есть

$$\iint_S \omega = \iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy := \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

Таким образом, поверхностный интеграл второго рода определяется через поверхностный интеграл первого рода. Если изменить ориентацию на S, то нормаль $\vec{n}$ сменит знак и тогда поверхностный интеграл по поверхности S^-, т.е. поверхности S с измененной ориентацией

$$\iint_{S^-} \omega = -\iint_S \omega.$$

Поверхностный интеграл второго рода обладает свойствами линейности и аддитивности (сформулировать и доказать самостоятельно).

Рассмотрим

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy := \iint_S R\cos\gamma dS.$$

Пусть поверхность S задается как график гладкой функции $z = f(x,y)$, $(x,y) in D$. Выберем на S ориентацию, соответствующую верхней стороне, тогда

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}, \quad dS = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}dxdy$$

и

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy := \iint_D R(x,y,f(x,y))dxdy.$$

Если выбрана нижняя сторона поверхности, то

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy := -\iint_D R(x,y,f(x,y))dxdy.$$

Аналогично получим $\cos\alpha dS = \pm dydz$, $\cos\beta dS = \pm dzdx$.

Пусть теперь поверхность S задана парметрически и сторона поверхности определяется вектором нормали $\vec{N} = (A, B, C)$. Тогда

$$\iint_S \omega = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$= \iint_D \left[P\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + Q\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + R\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right]\sqrt{EG-F^2}dudv =$$

$$= \iint_D (PA + QB + RC)dudv,$$

так как $\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Перепишем последнее соотношение в виде

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \iint_D \left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)dudv.$$

В таком виде это равенство напоминает формулу замены переменных в двойном интеграле.

7.10 Формула Гаусса-Остроградского

Напомним, что ограниченная область $U \subset \mathbb{R}^3$ называется правильной относительно оси Oz, если ее граница состоит из графиков непрерывных функций $z = \varphi(x, y)$, $z = \psi(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$, и, быть может, цилиндрической поверхности, лежащей на $\partial D \times \mathbb{R}$. Аналогично определяются области, правильные относительно других осей.

Теорема (формула Гаусса-Остроградского). *Пусть U — область в $\mathbb{R}^3$, правильная относительно всех координатных осей и ограниченная кусочно-гладкой поверхностью ∂U, ориентированной в сторону внешней нормали. Пусть*

$$\omega = P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy$$

— некоторая дифференциальная форма второго порядка с непрерывными в $\overline{U}$ коэффициентами P, Q, R. Тогда справедливо равенство

$$\iint_{\partial U} \omega = \iint_{\partial U} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_U \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Доказательство. Формула Гауса-Остроградского равносильна трем равенствам:

$$\iint_{\partial U} \omega = \iint_{\partial U} P dydz = \iiint_U \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz,$$
$$\iint_{\partial U} \omega = \iint_{\partial U} Q dzdx = \iiint_U \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz,$$
$$\iint_{\partial U} \omega = \iint_{\partial U} R dxdy = \iiint_U \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz.$$

Доказательство этих равенств проводится одинаковым образом. Докажем, к примеру, третье равенство. По условию, область U является правильной относительно оси Oz. Пусть она ограничена графиками S_1 и S_2 непрерывных функций $z = \varphi(x, y)$, $z = \psi(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$, и цилиндрической поверхностью S_3, лежащей на $\partial D \times \mathbb{R}$. Таким образом,

$$\overline{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}.$$

Имеем

$$\iiint_U \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$
$$= \iint_D R(x, y, \psi(x, y))dxdy - \iint_D R(x, y, \varphi(x, y))dxdy =$$
$$= \iint_{S_2} R(x, y, \psi(x, y))dxdy + \iint_{S_1} R(x, y, \varphi(x, y))dxdy,$$

так как внешняя нормаль к части границы, являющейся графиком функции $z = \psi(x, y)$ определяет верхнюю сторону поверхности, а к части границы, являющейся графиком функции $z = \varphi(x, y)$ — нижнюю. Кроме того,

$$\iint_{S_3} R(x, y, \psi(x, y))dxdy = \iint_{S_3} R(x, y, \psi(x, y)) \cos\gamma dS = 0,$$

так как вектор нормали к поверхности S_3 параллелен плоскости xOy, поэтому $\cos\gamma = 0$. Итак,

$$\iiint_U \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \sum_{j=1}^{3} \iint_{S_j} R(x, y, \psi(x, y))dxdy = \iint_{\partial U} R(x, y, \psi(x, y))dxdy.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Формула гаусса-Остроградского справедлива не только для областей, правильных относительно всех координатных осей, но и для областей, которые являются конечным объединением таких областей. Поясним это на примере объединения двух областей. Пусть $U = U_1 \cup U_2$, $\partial U_1 = S_1 \cup S_3$, $\partial U_2 = S_2 \cup S_3^-$. Тогда

$$\iiint_U \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz =$$

$$= \iiint_{U_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz + \iiint_{U_2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz =$$

$$= \iint_{\partial U_1} \omega + \iint_{\partial U_2} \omega = \iint_{S_1} \omega + \iint_{S_3} \omega + \iint_{S_2} \omega + \iint_{S_3^-} \omega = \iint_{S_1 \cup S_2} \omega = \iint_{\partial U} \omega.$$

Замечание 2. На самом деле формула Гаусса-Остроградского справедлива для любой ограниченной области, граница которой состоит из конечного числа кусочно гладких поверхностей.

7.11 Интерпретация формулы Гаусса-Остроградского через дифференциальные формы

Рассмотрим алгебру, порожденную дифференциалами dx, dy, dz с антикоммутативным умножением $\wedge$. Пусть $\omega = P(x,y,z)dy \wedge dz + Q(x,y,z)dz \wedge dx + R(x,y,z)dx \wedge dy$. Определим

$$d\omega = dP(x,y,z) \wedge dy \wedge dz + dQ(x,y,z) \wedge dz \wedge dx + dR(x,y,z) \wedge dx \wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dz \wedge dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \wedge dz \wedge dx +$$

$$+ \frac{\partial R}{\partial z}dz \wedge dx \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Тогда формулу Гаусса-Остроградского можно записать в виде

$$\iint_{\partial U} \omega = \iiint_U d\omega.$$

7.12 Формула Стокса

Рассмотрим кусочно-гладкую ориентированную поверхность Σ с краем $\partial\Sigma$. Ориентация Σ определяет положительную ориентацию края $\partial\Sigma$. Рассмотрим дифференциальную форму $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Тогда

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dz = \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx +$$

$$+ \frac{\partial Q}{\partial x} \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz \wedge dy + \frac{\partial R}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Введем вектор

$$\operatorname{rot}(P, Q, R) := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Этот вектор называется ротором векторного поля $(P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Тогда

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\right] dS =$$

$$=< \operatorname{rot}(P, Q, R), \vec{n} >,$$

где $\vec{n}$ — вектор единичной нормали к поверхности Σ.

Теорема (формула Стокса). *Пусть* Σ — *дважды гладкая поверхность в* $\mathbb{R}^3$ *с кусочно гладким краем* $\partial\Sigma$*, положительно ориентированным относительно* Σ *и состоящим из кусочно-гладких кривых. Пусть* $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ — *непрерывно дифференцируемая форма на* Σ*. Тогда справедливо равенство*

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \iint_{\Sigma} d\omega$$

или в развернутом виде

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS.$$

Доказательство. Разобьем поверхность Σ на конечное число кусков Σ_j, каждый из которых представим в виде графика дважды непрерывно дифференцируемой функции $z = f(x,y)$, $x = f(y,z)$, или $y = f(x,z)$. Ясно, что достаточно доказать формулу Стокса для каждого из кусков. поэтому с самого начала можно считать, что Σ представимо в виде такого графика. Пусть, для определенности это — график функции $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$. Формула Стокса равносильна трем равенствам:

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma \right) dS, \tag{1}$$

$$\int_{\partial\Sigma} Qdy = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos\alpha \right) dS, \tag{2}$$

$$\int_{\partial\Sigma} Rdz = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos\beta \right) dS. \tag{3}$$

Докажем, равенство (1). Предположим, для определенности, что выбрана верхняя сторона поверхности. Тогда край $\partial\Sigma$ обходится против часовой стрелки, если смотреть сверху. При проектировании на плоскость XOY этот край переходит в кривую ∂D, обходимую против часовой стрелки. Имеем, с помощью формулы Грина,

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt = \int_a^b P(x(t), y(t), f(x(t), y(t))) dx(t) dt =$$

$$= \int_{\partial D} P(x), y), f(x,y))dx = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy =$$

$$= -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{f'_y}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}} \right) \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2} dxdy =$$

$$= -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta \right) dS,$$

откуда следует (1). Совершенно аналогично доказывается (2)

Докажем, наконец, (3). Рассуждая как и выше, получаем

$$\int_{\partial\Sigma} Rdz = \int_a^b R(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))(f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t))dt =$$

$$= \int_{\partial D} R(x, y, f(x,y))(f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy) =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(R(x,y,f(x,y))f'_y(x,y)) - \frac{\partial}{\partial y}(R(x,y,f(x,y))f'_x(x,y)) \right] dxdy =$$

$$= \iint_D \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} f'_x \right) f'_y + R f''_{yx} - \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} f'_y \right) f'_x - R f''_{xy} \right] =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial R}{\partial x} f'_y - \frac{\partial R}{\partial y} f'_x \right] dxdy = \iint_D \left[\frac{\partial R}{\partial x} \frac{f'_y}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}} - \frac{\partial R}{\partial y} \frac{f'_y}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}} \right] dS =$$

$$= \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta \right) dS.$$

Замечание. Формула Стокса справедлива не только для дважды гладких поверхностей, но и для просто гладких.

Содержание