1. Есть ли у графика функции $y = x^4$ ($x \in \mathbb{R}$) точки перегиба?

2. Найти производную функции $\operatorname{arcth} x$.

3. Написать разложение функции $f(x) = x + x|x|$ ($x \in \mathbb{R}$) по степеням x с остатком в форме Лагранжа (полином должен быть как можно более высокого порядка).

4. Найти $(x^2 2^x)^{(50)}$ в точке $x = 2$.

5. Можно ли применить теорему Ролля к функции $f(x) = |x|x^4$?

6. Можно ли дифференцировать суперпозицию двух функций, если одна из них не дифференцируема? Проиллюстрировать ответ примерами.

7. Найти участки выпуклости вверх и вниз кривой $y = |x-1|x^3$ ($x \in \mathbb{R}$).

8. Применить правило Лопиталя к вычислению предела

$$\lim_{x\to 1-} \log_2 x^{1/\sqrt{1-x}}.$$

9. Исследовать на локальный экстремум функцию $f(x) = 2^{|x|}(x^2 - x^4)$.

10. Исследовать на локальный экстремум функцию $f(x) = (9/7)x^7 - 3x^4 + 5x + 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

11. Можно ли применить ее к функциям $f(x) = |x|x^2$, $g(x) = x^2$ на отрезке $[-1, 2]$?

12. Дифференцируема ли функция $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, если $x \neq 0$, $f(0) = 0$ в точке 0?

13. Применить правило Лопиталя к вычислению предела $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$).

14. Исследовать на монотонность функцию $f(x) = e^{|x|}(1 - x^2)$.

15. Найти все асимптоты функции $y = \sqrt[4]{\frac{x^5}{x+2}}$.

16. Справедлива ли формула конечных приращений Лагранжа для функции, заданной на отрезке $[-1/\pi, 1/\pi]$ формулой $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$?

17. Пользуясь формулой Тейлора, переписать многочлен
$p(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^4$ по степеням $x - 5$.

18. Найти $df(2)$ для $f(x) = \frac{x^2 2^x}{x^x}$.

19. Пусть $g(x)$ непрерывна в точке a, а $f(x) = |x-a|g(x)$. Существуют ли $f'(a-)$, $f'(a+)$, $f'(a)$?

20. Используя формулу Лагранжа, доказать, что $\ln(1+x) > x - x^2/2$ ($x > 0$).

21. Пусть $f'(0) \neq 0$. Найти

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)e^x - f(0)}{f(x)\cos x - f(0)}.$$

22. Пользуясь формулой Тейлора, полином
$p(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^4$ записать по степеням $x - 2$.

23. Пусть $f(x)$ имеет на интервале (a, b) ограниченную производную. Покажите, что в этом случае $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b).

24. С помощью формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа записать разложение n-го порядка для функции e^{1+x} по степеням x и установить, что остаток стремится к нулю при $n \to \infty$.

25. Пусть $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to b-} f(x)$ — конечная величина. Покажите, что в этом случае существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

26. Пусть $f(x) = x$, если $x \le 0$, $f(x) = x^{4/3} \ln x$, если $x > 0$. Найти $f'(0+)$, $f'(0-)$. Существует ли $f'(0)$?

27. Пусть функции f и g непрерывны при $x \ge a$ и дифференцируемы при $x > a$, причем $f(a) = g(a)$ и $f'(x) > g'(x)$ $(x > a)$. Доказать, что $f(x) > g(x)$ $(x > a)$.

28. Верно ли утверждение: если f, g не дифференцируемы в точке a, то $f + g$ также не дифференцируема в точке a.

29. С помощью формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа записать разложение для функции $\sin x$ порядка n по степеням x и показать, что остаток стремится к нулю при $n \to \infty$.

30. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке числовой прямой, причем $f'(x) = 2$. Доказать, что существует константа b такая, что $f(x) = 2x + b$.

31. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x) = x^2 \sin(x^{-1})$, $x \ne 0$, $f(0) = 0$. В каких точках непрерывна производная $f'(x)$?

32. С помощью формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа записать разложение n-го порядка для функции $\ln(1 - 2x)$ по степеням x и установить область, где остаток стремится к нулю при $n \to \infty$.

33. Пусть функции f и g дифференцируемы в точке a. Найти

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}.$$

34. Написать разложение по формуле Тейлора с остатком в форме Пеано для функции $f(x) = \exp(-x^{-2})$, $x \ne 0$, $f(0) = 0$.

35. Найти $\inf f(x)$, если $f(x) = x^x$, $E = [0, 1/3)$.

36. Пусть функция f дифференцируема на всей числовой прямой. В каких точках дифференцируема функция $|f|$?

37. Найти производную функции $\operatorname{arcsh} x$.

38. Можно ли применить правило дифференцирования произведения к нахождению производной $(uv)'(0)$, где $u(x) = x^3$, $v(x) = \sin(x^{-1})$, если $x \ne 0$, $v(0) = 0$? Существует ли $(uv)'(0)$?

39. Исследовать на экстремум в точке a функцию $f(x) = (x - a)^8 h(x)$, где функция h непрерывна в точке a, причем $h(a) \ne 0$.

40. С помощью формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа записать разложение n-го порядка для функции $\ln(1 - x)$ по степеням x и установить область, где остаток стремится к нулю при $n \to \infty$.

41. Найти числа a, b, c, при которых функция $f(x) = 4x$, $x \le 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $0 < x < 1$, $3 - 2x$, $x \ge 1$, была дифференцируемой на всей числовой прямой.

42. Пусть функция f дифференцируема в точке a. Найти

$$\lim_{n\to\infty} n[f(a+1/n)+f(a+2/n)+\ldots+f(a+k/n)-kf(a)],$$

где k —фиксированное натуральное число.

43. Найти $f'(0+)$ и $f'(0-)$ для функции $f(x)=\exp(x^{-1})$, $x\neq 0$, $f(0)=0$. Существует ли $f'(0)$?

44. Пусть $f(x)$, $g(x)$ — дифференцируемые функции, $g(x)$ монотонно возрастает и $f'(x)\leq g'(x)$ $(x\geq a)$. Доказать, что $|f(x)-f(a)|\leq g(x)-g(a)$.

45. Написать разложение функции $f(x)=1+x^2|x|$ $(x\in\mathbb{R})$ по степеням x с остатком в форме Пеано (полином должен быть как можно более высокого порядка).

46. Пусть $f(x)=(x-x^3)/|x|$, $x\neq 0$, $f(0)=1$. Найти точки разрыва $f(x)$ и указать, какого они рода. Найти $f'(x+)$ и $f'(x-)$ в точках разрыва x функции f.

47. Пусть функция f дифференцируема в каждой точке числовой прямой и для всех x, h имеет место равенство $f(x+h)-f(x)=f'(x)h$. Доказать, что найдутся константы a и b такие, что $f(x)=ax+b$, $x\in\mathbb{R}$.