1. Пусть $f(x) = 1 - x$, $x \in (0, 1)$, $f(x) = 2 - x$, $x \in (1, 2)$. Существует ли обратная к f функция? Ответ обосновать.

2. Пусть $f(x) = x, x \in (0, 1)$, $f(x) = 3 - x$, $x \in (1, 2)$. Построить график функции $y = f(x)$. Существует ли обратная к ней функция? Если да, то найти ее и нарисовать ее график.

3. Пусть $f_1(x) = \operatorname{sign} x$, $f_2(x) = [x]$ — целая часть x, $f_3(x) = 1$, если $|x| \leq 1$, $f_3(x) = 0$, если $|x| > 1$. Найти $f_1 \circ f_2 \circ f_3$.

4. Пусть $f : E \to F$ и $g : F \to E$ — функции такие, что $g \circ f(x) = x$ $\forall x \in E$ и $f \circ g(y) = y$ $\forall y \in F$. Доказать, что f — биекция и обратной к ней функцией является g.

5. Пусть $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Сколько существует биекций $f : E \to E$? Сколько инъекций?

6. Пусть 1 — мажоранта множества E и существует последовательность $x_n \in E$, сходящаяся к 1. Доказать, что $\sup E = 1$.

7. Обладает ли множество минорант множества $X = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + x^4 \leq 100\}$ наибольшим элементом? Ответ аргументировать.

8. Пусть $\inf E \leq 1$. Следует ли из этого, что обязательно найдется точка $a \in E$ такая, что $a < 1,0001$? Ответ аргументировать.

9. Охарактеризовать последовательности (x_n), удовлетворяющие условию: $\forall\, \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N\ (|x_n| < \varepsilon)$.

10. Охарактеризовать последовательности (x_n), удовлетворяющие условию: $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N\ (|x_n| \geq \varepsilon)$.

11. Охарактеризовать последовательности (x_n), удовлетворяющие условию: $\forall\, \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N\ (|x_n| \geq \varepsilon)$.

12. Охарактеризовать последовательности (x_n), удовлетворяющие условию: $\forall\, \varepsilon > 0\ \forall N\ \forall n \geq N\ (|x_n| < \varepsilon)$.

14. Охарактеризовать последовательности (x_n), удовлетворяющие условию: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N\ \exists n \geq N\ (|x_n| \geq \varepsilon)$.

15. Доказать, что если $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция, и существует $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то существует $\lim_{n\to\infty} x_{f(n)} = a$.

16. Пользуясь ε-N-определением предела последовательности, доказать, что если $x_n \to a > 0$, $y_n > 0$, $y_n \to 0$, то $\frac{x_n}{y_n} \to +\infty$.

17. Пусть последовательность (x_n) такова, что существуют пределы $\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = a$. Можно ли утверждать, что $\lim_{k\to\infty} x_k = a$? Ответ обосновать.

18. Опираясь на ε-N-определение предела последовательности, доказать, что если $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, то $\lim_{n\to\infty} |x_{n+2} - x_n| = 0$.

19. Опираясь на ε-N-определение предела последовательности, доказать, что если $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots$ и $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $(|x_n| \leq 1)$, то (x_n) сходится.

20. Доказать, что монотонная последовательность, обладающая сходящейся подпоследовательностью, сходится.

21. Доказать, что если $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$, то $\exists b > 0 \exists N\ \forall n \geq N$ $(x_n > b)$.

22. Используя ε-N определение предела, доказать, что последовательность $x_n = (n^2 + n + 1)^{1/2} - n$ сходится.

23. Доказать, что если $x_n \neq 0$, $n \geq 1$ и $\lim_{n\to\infty}(x_n + x_n^{-1}) = 2$, то $x_n \to 1$, $n \to \infty$.

24. Доказать, что если $\lim_{n\to\infty} x_n = a < 0$, то $\exists N\ \forall n \geq N$ $(x_n < 0)$.

25. Пусть $X \subset [1, +\infty)$ и $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in E$ $(x < 1 + \frac{1}{n})$. Пользуясь определением инфимума, доказать, что $\inf E = 1$.

26. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ и $0 \geq y_n \geq 3x_n$, то $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

27. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$.

28. Используя критерий Коши, доказать, что последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ не имеет конечного предела.

29. Используя определения предела последовательности и инфимума, доказать, что если $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, то $\inf x_n > -\infty$.

30. Доказать, что монотонная последовательность, обладающая сходящейся подпоследовательностью, сходится.

31. Найти все предельные точки множества $X = [0, 1] \backslash \mathbb{Q}$. Ответ строго обосновать.

32. Напишите, что означает, что точка $a \in \mathbb{R}$ не является предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}$. Приведите примеры.

33. Доказать, что если точка x_0 является предельной точкой $A \cup B$, то x_0 является предельной точкой по крайней мере одного из множеств A, B.

34. Доказать, что если $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = c > 0$, то $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = -\infty$.

35. Используя определение бесконечных пределов, доказать, что если $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, то $\lim_{x\to-\infty} f^4(x) = +\infty$.

36. Доказать, что если существует конечный предел $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, то $f(x) = O(g(x))$ $(x \to 0)$.

37. Пусть $f(x) \sim g(x)$ $(x \to 0)$ и существует $\lim_{x\to 0} g(x) \sin x = a$.

Доказать, что предел $\lim_{x\to 0} f(x)\sin x$ существует и равен a.

38. Пользуясь определением бесконечных пределов, доказать, что если $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, то $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + \sin x) = -\infty$

39. Пусть $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$. Существует ли предел $\lim_{x\to 0} |f(x)-g(x)|$? Если — да, то чему он равен, если нет — привести пример.

40. Доказать, что функция Дирихле $f(x) = 0$, если x иррационально; $f(x) = 1$, если x рационально, не имеет предела ни в одной точке.

41. Доказать, что если $f(x) \sim g(x)$, $g(x) \sim h(x)$ $(x \to 0)$, то $f(x) \sim h(x)$ $(x \to 0)$.

42. Доказать, что функция Римана $f(x) = 0$, если x иррационально; $f(x) = \frac{1}{q}$, если $x = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь; $f(x) = 1$, если $x = 0$, имеет предел в каждой иррациональной точке, равный нулю.

43. Доказать, что при $n > m$ имеет место соотношение $O(x^m)+o(x^n) = o(x^n)$, $x \to +\infty$.

44. Доказать, что при $n > m$ имеет место соотношение $O(x^n)+o(x^m) = o(x^m)$, $x \to +\infty$.

45. Верно ли, что $\sin x^3 = o(x^2)$, $x \to 0$? Ответ обосновать.

46. Доказать, что $o(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$, $x \to x_0$.

47. Верно ли, что $o(f(x)) + O(f(x)) = o(f(x))$, $x \to x_0$? Ответ обосновать.

48. Доказать, что $O(f(x))o(g(x)) = o(f(x)g(x))$ $(x \to x_0)$.

49. Доказать, что если $f(x) \sim g(x)$, $x \to 0$, то $g(x) \sim f(x)$, $x \to 0$.

50. Привести примеры функций f и g таких, что $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, а 1) $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = 0$; 2) $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = +\infty$; 3) $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)}$ не существует.

51. Доказать, что если $f(x) > 0$ и $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, то $\ln(1 + f(x)) \sim f(x)$, $x \to 0$.

52. Доказать, что если $f(x) > 0$ и $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $x \to +\infty$, то $e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$, $x \to +\infty$.