ЗАДАЧИ
к коллоквиуму по математическому анализа (3 семестр)

1. Привести примеры рядов, для которых признак Раабе неприменим.
2. Привести примеры рядов, для которых признак Даламбера неприменим.
3. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ сходится неабсолютно для любого $x \in (0, \pi)$.
4. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится, а обратное неверно.
5. Члены сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ переставить так, чтобы он стал расходящимся.
6. Пусть $b_n > 0$ и $b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Можно ли утверждать, что ряд $(-1)^{n+1} b_n$ сходится?
7. Доказать, что если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$.
8. Доказать, что если для ряда с положительными членами существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, а обратное неверно.
9. Пусть S — сумма ряда Лейбница $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ $(b_n \geq 0)$ и S_n — его n-ая частичная сумма. Доказать, что $|S - S_n| \leq b_{n+1}$.
10. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными и монотонно убывающими членами сходится, то $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.
11. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ нужно взять, чтобы найти его сумму с точностью до 10^{-5}?
12. Пусть ряды с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$?
13. Привести пример рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ таких, что $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, один из рядов сходится, а другой — расходится.
14. Найти

$$\text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

15. Показать, что если $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и f монотонна, то $f(x) = O(x^{-1})$, $x \to +\infty$.
16. Привести пример функции f такой, что $f(x)$ не стремится к нулю при $x \to \infty$, но интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.
17. Привести пример интеграла, который в смысле главного значения по Коши не существует.
18. Доказать, что если интегралы $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$ и $\int_0^{+\infty} g^2(x)\,dx$ сходятся, то интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ также сходится.
19. Пусть функция f монотонна на $(0, 1]$ и не ограничена в окрестности точки $x = 0$. Доказать, что если существует $\int_0^1 f(x)\,dx$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

20. Доказать, что если ϕ — непрерывно дифференцируемая функция на $[a, b]$, то для любого $c \in (a, b)$ существует

$$v.p. \int_a^b \frac{\phi(x)\,dx}{x - c} = \int_a^b \frac{\phi(x) - \phi(c)\,dx}{x - c} + \phi(c) \ln \frac{b - c}{c - a},$$

где интеграл в правой части сходится как обычный несобственный интеграл.

21. Может ли произведение множеств на прямой, одно из которых неизмеримо, быть измеримым на плоскости?
22. Будут ли измеримы множества A и B, если $A \cup B$ измеримо?
23. Привести пример неизмеримого множества в $\mathbb{R}^2$.
24. Пусть A — нуль-множество по Жордану в $\mathbb{R}^m$, а B — множество в $\mathbb{R}^n$. При каких условиях на B произведение $A \times B$ является нуль-множеством в $\mathbb{R}^{m+n}$?