**С. Р. Насыров**

# РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Казань – 2014

# 1 Ряды Фурье в гильбертовых пространствах

## 1.1 Метрические пространства

Пусть $X$ — некоторое множество и задана функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

1) $d(x, y) \geq 0 \; \forall x,\, y \in X$ и $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $d(x, y) = d(y, x) \; \forall x,\, y \in X$ (симметричность);

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \; \forall x,\, y,\, z \in X$ (неравенство треугольника).

Пара $(X, d)$ называется *метрическим пространством*, а функция $d$ — *расстоянием* или *метрикой* на $X$.

**Примеры метрических пространств.**

1) $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.

2) $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$.

3) Пространство $l_2$ квадратично суммируемых последовательностей. Оно состоит из вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2 < +\infty$. Метрика вводится по формуле:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2}.$$

Нетрудно показать, что это действительно метрика. Проверка условий 1) и 2) очевидна. Докажем, что имеет место неравенство треугольника. Для любого натурального $N$ имеем неравенство треугольника в $\mathbb{R}^N$ (пример 2):

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(x_n - z_n)^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{N}(x_n - y_n)^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{N}(y_n - z_n)^2}.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ получаем

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - z_n)^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(y_n - z_n)^2}.$$

Это — требуемое неравенство треугольника в $l_2$.

4) Рассмотрим пространство непрерывных на компактном множестве $X$ функций $C(X)$. Введем расстояние между непрерывными функциями $f$ и $g$ на $X$:

$$d(f,g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

По теореме Вейерштрасса этот максимум существует. Провверим, что так введенная функциям удовлетворяет условиям 1)–3). Условия 1) и 2) очевидны. Установим справедливость неравенства треугольника. Фиксируем $x \in X$. Тогда в силу неравенства треугольника для чисел

$$|f(x) - h(x)| \le |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \le$$

$$\le \max_{t \in X} |f(t) - g(t)| + \max_{t \in X} |g(t) - h(t)| = d(f,g) + d(g,h).$$

Итак, $|f(x) - h(x)| \le d(f,g) + d(g,h)$ для любого $x \in X$. Учитывая, что правая часть последнего неравенства не зависит от $x$, получаем

$$d(f,h) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)| \le d(f,g) + d(g,h).$$

В качестве $X$ можно взять и отрезок $[a;b]$. В этом случае соответствующее пространство обозначается $C[a,b]$.

5) Рассмотрим на пространстве непрерывных функций на отрезке $[a;b]$ функцию

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Докажите, что что функция $d_1$ определяет некоторое расстояние на этом пространстве. Еще одна метрика, которую можно определить на пространстве непрерывных на отрезке функций, задается по формуле

$$d_2(f,g) = \left( \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Пусть $(X,d)$ — метрическое пространство. Говорят, что последовательность $x_n$ сходится в этом пространстве к элементу $x$, если числовая последовательность $d(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$.

Последовательность $x_n$ называется фундаментальной в $(X,d)$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall m, \, n \ge N \; d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Очевидна

**Теорема.** *Если последовательность в метрическом пространстве сходится, то она фундаментальна.*

Обратное, вообще говоря, неверно.

Метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится. Примеры полных метрических пространств: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $C(X)$, где $X$ компактно (см. теорему ниже).

Примеры неполных метрических пространств: пространство непрерывных на $[a; b]$ функций с интегральной метрикой $d_1$ или с интегральной метрикой $d_2$. Чтобы продемонстрировать это, построим фундаментальную последовательность в этом пространстве. которая не сходится ни к какой непрерывной функции. Для простоты рассмотрим отрезок $[0, 1]$. Пусть непрерывная функция

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/2, \\ n(x - 1/2), & 1/2 \le x \le 1/2 + 1/n, \\ 1, & 1/2 + 1/n \le x \le 1. \end{cases}$$

Тогда последовательность $f_n$ фундаментальна по метрике $d_1$, но не сходится ни к какой непрерывной функции, поскольку предел должен быть равен нулю при $0 \le x < 1/2$ и единице при $1/2 < x \le 1$ (докажите это строго!). Следовательно, предел — разрывная в точке $x = 1/2$ функция.

**Теорема.** *Пространство $C(X)$ полно.*

Доказательство. Пусть последовательность $f_n \in C(X)$ и $d(f_n, f_m) \to 0$ при $m$, $n \to \infty$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m,\ n \ge N$

$$d(f_m, f_n) = \max_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Тогда для любого $x \in X$ при $m$, $n \ge N$ имеем

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Это означает, что числовая последовательность $f_n(x)$ фундаментальна в $\mathbb{R}$. По критерию Коши последовательность $f_n(x)$ сходится в $\mathbb{R}$. Обозначим ее предел через $f(x)$. Переходя к пределу в $(*)$, получаем

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \tag{$**$}$$

при $n \ge N$. Это неравенство выполняется для любого $x \in X$ и $N = N(\varepsilon)$ не зависит от $x \in X$. Значит, $f_n \rightrightarrows f$ на $X$. Так как $f_n$ непрерывны на $X$, то и $f$ непрерывна как равномерный предел последовательности непрерывных функций. Так как (∗∗) выполняется для любого $x \in X$, то $d(f_n, f) = \max_X |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$, $n \ge N$. Следовательно, $f_n \to f$ в $C(X)$ и теорема доказана.

**Замечание.** В процессе доказательства мы показали, что сходимость в пространстве $C(X)$ равносильна равномерной сходимости.

## 1.2 Линейные нормированные пространства

Нормированное векторное пространство $E$ над полем $\Lambda$ (в дальнейшем будем считать, что $\Lambda = \mathbb{R}$ или $\Lambda = \mathbb{C}$) — это линейное векторное пространство над $\Lambda$, на котором определена функция $\|\cdot\|$, называемая нормой и удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $\forall x \in E$ $\|x\| \ge 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2) $\forall x \in E$ $\forall \lambda \in \Lambda$ имеем $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (однородность);

3) $\forall x, y \in E$ справедливо неравенство $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$ (неравенство треугольника).

Любое нормированное пространство является метрическим с метрикой $d(x, y) = \|x - y\|$.

**Примеры нормированных пространств.**

1) $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\| = |x|$.

2) $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$.

3) Множество $C(X)$ непрерывных функций на компактном множестве $X$ с нормой $\|f\| = \max_{x\in X} |f(x)|$. Свойства нормы 1) и 2) легко проверяются. Покажем, что имеет место неравенство треугольника. Для любого $x \in X$ имеем

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \max_{y\in X} |f(y)| + \max_{y\in X} |g(y)| = \|f\| + \|g\|.$$

Итак, $|f(x) + g(x)| \le \|f\| + \|g\|$, $x \in X$. Следовательно,

$$\|f + g\| = \max_{x\in X} |f(x) + g(x)| \le \|f\| + \|g\|.$$

4) Рассмотрим множество $l_p$ $(p \ge 1)$ последовательностей

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

таких, что сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p$. Определим в $l_p$ норму

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Эта норма превращает $l_p$ в линейное нормированное пространство. Важнейший частный случай — $p = 2$.

5) Рассмотрим множество $L_p(a, b)$ $(p \geq 1)$ функций $f$ на отрезке $[a, b]$, таких что функция $|f|^p$ интегрируема (по Лебегу) на $[a, b]$ (по поводу интеграла Лебега см. замечание ниже). Следующая операция превращает $L_p(a, b)$ в линейное нормированное пространство:

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Важнейшие частные случаи — $p = 1$ и $p = 2$.

**Замечание 1.** Интеграл Лебега является обобщением интеграла Римана. Здесь мы не даем определения интеграла Лебега! Отметим только, что если функция интегрируема по Риману на отрезке, то она интегрируема и по Лебегу и интегралы Римана и Лебега от нее совпадают.

**Замечание 2.** На самом деле требуется также, чтобы функции из $L_p(a, b)$ были измеримыми (определение измеримости функции будет дано в курсе теории функций действительного переменного или в курсе функционального анализа). Кроме того, функции, совпадающие во всех точках отрезка, за исключением множества меры нуль по Лебегу, считаются за один элемент пространства $L_p(a, b)$.

*Банаховым пространством* называется полное линейное нормированное пространство.

## 1.3 Унитарные пространства

Пусть $\Lambda$ — полем действительных или комплексных чисел. Линейное пространство $U$ над полем $\Lambda$ называется *унитарным*, если оно бесконечномерно и задана функция $(\,\cdot\,,\,\cdot\,) : U \times U \to \Lambda$, удовлетворяющая условиям

1) для любых $x$, $y$, $z \in U$ и любых $\alpha$, $\beta \in \Lambda$ имеем $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;

2) для любых $x$, $y$, $z \in U$ выполняется равенство $(y,x) = \overline{(x,y)}$ (черта сверху означает комплексное сопряжение);

3) для любого $x \in U$ имеем $(x,x) \geq 0$, причем $(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$.

При этом функция $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ называется *скалярным произведением.* Обозначим $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ и назовем $\|x\|$ нормой элемента $x$.

**Упражнение 1.** Докажите, что в действительном унитарном пространстве

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2),$$

а в комплексном —

$$\mathrm{Re}(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), \quad \mathrm{Im}(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2).$$

Таким образом, скалярное произведение можно выразить через норму.

**Упражнение 2.** Основываясь на результате упражнения 1, докажите, что $f : U_1 \to U_2$ — линейное отображение унитарных пространств и $\|f(x)\|_{U_2} = \|x\|_{U_1}$ для любого $x \in U_1$, то

$$(f(x_1), f(x_2))_{U_2} = (x_1, x_2)_{U_1}, \quad x_1, x_2 \in U_1.$$

**Теорема (неравенство Коши-Буняковского).** *Для любых $x$, $y$, $z \in U$ выполняется равенство*

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

*Знак равенства в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $x$ и $y$ линейно зависимы.*

Доказательство. Для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$0 \leq \|tx+y\|^2 = (tx+y, tx+y) = (tx,tx) + (y,tx) + (tx,y) + (y,y) =$$

$$= t^2(x,x) + t(x,y) + t\overline{(x,y)} + (y,y) = \|x\|^2 t^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y)t + \|y\|^2.$$

Итак, $\|x\|^2 t^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y)t + \|y\|^2 \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Можно считать, что $x$, $y \neq \theta$. Тогда $\|x\|^2 \neq 0$ и квадратичный трехчлен имеет дискриминант $D \leq 0$, откуда $D/4 = (\mathrm{Re}(x,y))^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$. Таким образом, $|\,\mathrm{Re}(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Для доказательства неравенства Коши-Буняковского рассмотрим вместо $x$ вектор $e^{-i\theta}x$, где $\theta \in \mathbb{R}$. Тогда в силу доказанного,

$$|\operatorname{Re}(e^{-i\theta}x, y)| \leq \|e^{-i\theta}x\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Можно считать, что $(x, y) \neq 0$, иначе доказываемое неравенство очевидно. Пусть $\theta = -\arg(x, y)$. Тогда $\operatorname{Re}(e^{-i\theta}x, y) = |(x, y)|$ и нужное неравенство установлено.

Если в неравенстве Коши-Буняковского имеет место знак равенства, то дискриминант квадратичного трехчлена равен нулю и тогда существует $t \in \mathbb{R}$, при котором этот трехчлен обращается в нуль. Тогда $\|te^{-i\theta}x + y\|^2 = 0$, откуда $te^{-i\theta}x + y = \theta$. Следовательно, $x$ и $y$ линейно зависимы. Обратно, если $y = \lambda x$, то

$$|(x,y)| = |(x, \lambda x)| = |\lambda| \cdot |(x,x)| = |\lambda| \cdot \|x\|^2 = |\lambda| \cdot \|x\| \cdot \|x\| = \|x\| \cdot \|\lambda x\| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Теперь докажем, что функция $\|\cdot\|$ обладает свойствами абстрактной нормы.

1) $\forall x \in U$ $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$. Это очевидно.

2) $\forall \lambda \in \Lambda$ $\forall x \in U$ $\|\lambda x\| = (\lambda x, \lambda x)^{1/2} = (\lambda \cdot \overline{\lambda}(x,x))^{1/2} = |\lambda| \cdot \|x\|$.

3) $\forall x, y \in U$ $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$, откуда следует неравенство треугольника $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Любое унитарное пространство является нормированным с нормой* $\|x\| = (x,x)^{1/2}$.

Поскольку нормированное пространство является метрическим с расстоянием $\rho(x,y) = \|x - y\|$, в унитарном пространстве $U$ можно ввести метрику и говорить о сходимости по этой метрике.

**Теорема 2.** *Норма и скалярное произведение в унитарном пространстве являются непрерывными функциями, т. е. если* $x_n \to x$, $y_n \to y$, *то* 1) $\|x_n\| \to \|x\|$; 2) $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Доказательство. 1) Непрерывность норму следует из неравенства треугольника. Имеем $|\,\|x_n\| - \|x\|\,| \leq \|x_n - x\|$. Если $x_n \to x$, то $\|x_n - x\| \to 0$ и тогда $|\,\|x_n\| - \|x\|\,| \to 0$. Отсюда следует, что $\|x_n\| \to \|x\|$.

2) Имеем с применением неравенств треугольника и Коши-Буняковского: $|(x_n, y_n) - (x, y)| = |((x_n - x) + x, (y_n - y) + y) - (x, y)| = |(x_n - x, y_n - y) + (x, y_n - y) + (x_n - x, y)| \le |(x_n - x, y_n - y)| + |(x, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \le \|x_n - x\| \, \|y_n - y\| + \|x\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\| \to 0$ если $x_n \to x$, $y_n \to y$. Поэтому $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Теорема доказана.

Векторы $x$ и $y$ назовем *ортогональными* в унитарном пространстве $U$, если $(x, y) = 0$. В случае ортогональности векторов $x$ и $y$ пишем $x \perp y$.

*Ортогональной системой* в $U$ называется система $\{e_\alpha\}$ векторов из $U$ таких, что $e_\alpha \ne \theta$ для любого $\alpha$ и $(e_\alpha, e_\beta) = 0$, т. е. $e_\alpha \perp e_\beta$, для любых $\alpha$, $\beta$ таких, что $\alpha \ne \beta$.

**Лемма.** *Если $\{e_\alpha\}$ — ортогональная система векторов в $U$, то $\{e_\alpha\}$ — линейно независимая система.*

Доказательство. Предположим, что некоторые векторы системы $e_{\alpha_1}$, $e_{\alpha_2}, \dots, e_{\alpha_n}$ линейно зависимы. Тогда существуют константы $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, не все равные нулю и такие, что $\lambda_1 e_{\alpha_1} + \lambda_2 e_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n e_{\alpha_n} = 0$. Умножая скалярно обе части последнего равенства на $e_{\alpha_k}$, $1 \le k \le n$, получаем $\lambda_k = 0$. Таким образом, все $\lambda_k = 0$ — противоречие. Итак, $\{e_\alpha\}$ — линейно независимая система.

Ортогональная система $\{e_\alpha\}$ в унитарном пространстве $U$ называется *ортонормированной*, если $\forall \alpha$ $\|e_\alpha\| = 1$. Любая ортогональная система $\{f_\alpha\}$ может быть сделана ортонормированной преобразованием $f_\alpha \mapsto e_\alpha = \frac{f_\alpha}{\|f_\alpha\|}$. Для краткости вместо «ортонормированная система» будем писать «онс».

Пусть $\{e_\alpha\}$ — онс в $U$. Эта система называется *полной* в $U$, если линейная оболочка этой системы $L\{e_\alpha\}$ плотна в $U$, т. е. замыкание $\overline{L\{e_\alpha\}}$ совпадает с $U$. Другими словами, $\forall x \in U$ $\exists x_n \in L\{e_\alpha\}$: $x_n \to x$, $n \to \infty$.

## 1.4 Примеры унитарных пространств и онс в них

1) Пространство $\mathbb{C}^n$. Элементами $\mathbb{C}^n$ являются упорядоченные наборы комплексных чисел $z = (z_1, z_2 \dots, z_n)$. Пусть $x = (x_1, x_2 \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2 \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Определим их скалярное произведение по формуле $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$. Это пространство удовлетворяет всем условиям, входящим в определение унитарного пространства, за исключением одного: оно конечномерно. Следующий пример дает бесконечномерное обобще-

ние пространства $\mathbb{C}^n$.

2) Пространство $l_2$ квадратично суммируемых последовательностей. Оно состоит из последовательностей $z = (z_1, z_2 \ldots, z_n, \ldots)$ комплексных чисел $z_n$ таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < +\infty$. Введем в $l_2$ линейные операции сложения и умножения на скаляр. Если $\lambda \in \mathbb{C}$, $z = (z_1, z_2 \ldots, z_n, \ldots)$ и $u = (u_1, u_2 \ldots, u_n, \ldots)$ — векторы из $l_2$, то, по определению,

$$\lambda z = (\lambda z_1, \lambda z_2 \ldots, \lambda z_n, \ldots), \quad z + u = (z_1 + u_1, z_2 + u_2, \ldots, z_n + u_n, \ldots).$$

Проверим, что $\lambda z$ и $z + u$ лежат в $l_2$. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda z_k|^2 = |\lambda|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < +\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k + u_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2(|z_k|^2 + |u_k|^2) = 2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 \right) < +\infty.$$

Эти операции превращают $l_2$ в линейное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ (проверьте это!). Роль нулевого играет вектор $\theta = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Введем в $l_2$ скалярное произведение по правилу

$$(z, u) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \overline{u_k}.$$

Покажем, что последний ряд сходится. Имеем

$$|z_k \overline{u_k}| = |z_k|\,|u_k| \leq \frac{1}{2}(|z_k|^2 + |u_k|^2),$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k \overline{u_k}| \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 \right) < +\infty.$$

Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k \overline{u_k}$ сходится абсолютно, следовательно, сходится.

Проверим аксиомы скалярного произведения. Имеем

$$(\lambda z, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda z_k \overline{u_k} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} z_k \overline{u_k} = \lambda (z, u),$$

$$(z+u,v)=\sum_{k=1}^{\infty}(z_k+u_k)\overline{v_k}=\sum_{k=1}^{\infty}z_k\overline{v_k}+\sum_{k=1}^{\infty}u_k\overline{v_k}=(z,v)+(u,v),$$

$$(u,z)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\overline{z_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\overline{z_k\overline{u_k}}=\overline{\sum_{k=1}^{\infty}z_k\overline{u_k}}=\overline{(z,u)},$$

$$(z,z)=\sum_{k=1}^{\infty}z_k\overline{z_k}=\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^2\geq 0,$$

причем $(z,z)=0$ тогда и только тогда, когда $z_k=0$, т. е. $z=\theta=(0,0,\ldots,0,\ldots)$.

Рассмотрим систему векторов в $l_2$

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0,\ldots,0,\ldots), \\ e_2 & = & (0,1,0,\ldots,0,\ldots), \\ \ldots & . & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n & = & (0,0,0,\ldots,1,\ldots), \\ \ldots & . & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Ясно, что $e_m\perp e_n$, $m\neq n$, и $\|e_n\|=1$. Таким образом, $\{e_n\}$ — онс в $l_2$.

Система $\{e_n\}$ является полной в $l_2$. Действительно, покажем, что для любого $x\in l_2$ существует последовательность $y_n\in L\{e_n\}$, сходящаяся к $x$. Пусть $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$. Рассмотрим последовательность $y_n=\sum_{k=1}^{n}x_ke_k=(x_1,x_2,\ldots,x_n,0,0,\ldots)$. Тогда $x-y_n=(0,0,\ldots,0,x_{n+1},x_{n+2},\ldots)$ и $\|x-y_n\|^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^2\to 0$, $n\to\infty$, как остаток сходящегося ряда. Следовательно, $y_n\to x$, $n\to\infty$. Это означает, что $\overline{L\{e_n\}}=l_2$.

Пространство $l_2$ является нормированным с нормой $\|z\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2}$.

3) Пространство $L_2(a,b)$ — это пространство комплекснозначных измеримых функций $f$ на отрезке $[a;b]$ таких, что функция $|f|^2$ интегрируема по Лебегу на $[a;b]$. Более детально интеграл Лебега будет рассмотрен далее в курсах «Функциональный анализ» или «Действительный анализ». Здесь мы будем пользоваться свойствами этого интеграла без особых обоснований.

Пусть $\alpha\in\mathbb{C}$. Если $f\in L_2(a,b)$, то $\alpha f\in L_2(a,b)$, так как функция $|\alpha f|^2=|\alpha|^2|f|^2$ интегрируема по Лебегу на $[a;b]$. Если $f$, $g\in L_2(a,b)$, то $|f|^2$ и $|g|^2$ интегрируемы на $[a;b]$, поэтому из неравенства $|f+g|^2\leq 2(|f|^2+|g|^2)$ следует, что $|f+g|^2$ интегрируема на $[a;b]$. Операции сложения и умножения на скаляр превращают $L_2(a,b)$ в линейное векторное пространство.

Введем на $L_2(a,b)$ скалярное произведение. Для любых $f$, $g \in L_2(a,b)$ положим

$$(f,g) = \int_a^b f\overline{g}d\mu. \tag{$**$}$$

Это определение корректно. Действительно, $|f\overline{g}| = |f|\,|g| \leq \frac{1}{2}(|f|^2+|g|^2)$, откуда следует, что функция $f\overline{g}$ интегрируема по Лебегу на $[a;b]$.

Проверим, что скалярное произведение, заданное по формуле (**) удовлетворяет всем нужным свойствам. Имеем

$$(f,f) = \int_a^b f\overline{f}d\mu = \int_a^b |f|^2 d\mu \geq 0,$$

так как $|f|^2 \geq 0$. Если $(f,f)=0$, то $\int_a^b |f|^2 d\mu = 0$ и, поскольку функция $|f|^2$ неотрицательна, с использованием свойств интеграла Лебега выводим, что $f=0$ почти всюду (т. е. за исключением множества меры нуль) на $[a;b]$. Будем не различать функции, которые равны почти всюду. Тогда $f \equiv 0$. Остальные свойства скалярного произведения выполняются очевидным образом.

Как и любое унитарное пространство, $L_2(a,b)$ является нормированным с нормой $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$, т. е.

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f|^2 d\mu\right)^{1/2}.$$

Покажем, что система $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$ является ортогональной в $L_2(0,2\pi)$.

$1 \perp \cos nx$, $n \in \mathbb{N}$. Проверим это. Имеем

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{2\pi} = 0$$

Аналогично показываем, что $1 \perp \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$.

$\sin mx \perp \cos nx$, $m$, $n \in \mathbb{N}$, так как при $m \neq n$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m-n)x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left.\frac{\cos(m+n)x}{m+n}\right|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left.\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right|_0^{2\pi} = 0.$$

При $m = n$ вычисления проводятся еще проще.

$\cos mx \perp \cos nx$, $m$, $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, так как

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m-n)x \, dx - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m+n)x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \left. \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right|_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \left. \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right|_0^{2\pi} = 0.$$

Аналогично $\sin mx \perp \sin nx$, $m$, $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.

Подсчитаем нормы элементов этой ортогональной системы.

Имеем

$$\|1\|^2 = \int_0^{2\pi} 1^2 dx = 2\pi,$$

при $n \in \mathbb{N}$

$$\|\cos nx\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi,$$

$$\|\sin nx\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi.$$

Таким образом, $\|1\| = \sqrt{2\pi}$, $\|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Итак, следующая система является онс:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{2\pi}}, \ldots \right\}$$

## 1.5 Сепарабельные унитарные пространства. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

**Теорема.** *Пусть $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — некоторая система линейно независимых векторов в унитарном пространстве $U$. Тогда в $U$ существует счетная ортогональная система $\{e_n\}$ такая, что линейная оболочка $L\{e_n\}$ системы векторов $e_n$ совпадает с линейной оболочкой $L\{f_n\}$ системы векторов $f_n$.*

Доказательство. Строим систему $\{e_n\}$ по индукции. Пусть $e_1 = f_1$. Будем искать $e_2$ в виде $e_2 = f_2 - \alpha e_1$. Тогда

$$(e_1, e_2) = 0 \Longrightarrow (e_2, e_1) = (f_2, e_1) - \alpha(e_1, e_1) = 0,$$

откуда
$$\alpha = \frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{(f_2, f_1)}{(f_1, f_1)}.$$
Теперь предположим, что построены векторы $e_1,\ e_2, \ldots, e_{n-1}$. Будем искать $e_n$ в виде
$$e_n = f_n - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \ldots - \alpha_{n-1} e_{n-1}.$$
По предположению индукции $e_1,\ e_2, \ldots, e_{n-1}$ являются линейными комбинациями векторов $f_1,\ f_2, \ldots, f_{n-1}$. Поэтому $e_n$ является линейной комбинацией векторов $f_1,\ f_2, \ldots, f_n$. Обратно,
$$f_n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + e_n$$
линейная комбинация векторов $e_k$, $1 \le k \le n$. Для того, чтобы $e_n \perp e_k$, $1 \le k \le n-1$, необходимо и достаточно, чтобы
$$0 = (e_n, e_k) = (f_n, e_k) - \alpha_1(e_1, e_k) - \alpha_2(e_2, e_k) - \ldots - \alpha_{n-1}(e_{n-1}, e_k) =$$
$$= f_n, e_k) - \alpha_k(e_k, e_k),$$
откуда $\alpha_k = \frac{(f_n, e_k)}{(e_k, e_k)}$.

Метрическое пространство $X$ называется *сепарабелным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество, т. е. счетное множество $A$, замыкание которого $\overline{A}$ совпадает со всем пространством $X$.

**Следствие.** *В любом сепарабельном пространстве $U$ существует счетная полная онс.*

Действительно, пусть $\{f_n\}$ — счетная всюду плотная система векторов в $U$. Без ограничения общности можно считать, что система векторов $\{f_n\}$ линейно независима. Применим к этой системе процесс ортогонализации Грама-Шмидта. В результате получим счетную ортогональную систему векторов $\{e_n\}$. При этом, $L\{e_n\} = L\{f_n\}$, откуда
$$\overline{L\{e_n\}} = \overline{L\{f_n\}} = U.$$
Наконец, систему $\{e_n\}$ можно нормировать, заменяя $e_n$ на $\frac{e_n}{\|e_n\|}$.

## 1.6 Коэффициенты Фурье разложения элемента унитарного пространства в ряд Фурье

Пусть $U$ — унитарное пространство, $\{e_n\}$ — счетная онс в нем. Тогда скалярное произведение $c_k := (x, e_k)$ назовем $k$-м коэффициентом Фурье элемента $x$ по онс $\{e_n\}$. Ряд, т. е. формальная сумма $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ называется *рядом Фурье* элемента $x$.

**Лемма.** *Для любых $a_1, a_2, \dots, a_n$ справедливо неравенство*

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\| \geq \|x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\|,$$

*где $c_k$ — коэффициенты Фурье элемента $x$ по онс $\{e_n\}$.*

Доказательство. Имеем

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|^2 = (x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k) =$$

$$= (x, x) - 2\,\mathrm{Re}(x, \sum_{k=1}^{n} a_k e_k) + (\sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \sum_{k=1}^{n} a_k e_k) =$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\overline{a_k} + \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{a_k}(e_k, e_k) = \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\, c_k \overline{a_k} + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\, c_k \overline{a_k} + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - a_k|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

Равенство в последнем неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $a_k = c_k$, $1 \leq k \leq n$.

**Следствие 1.**

$$\min_{a_1, \dots, a_n} \|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|^2 = \|x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

**Следствие 2 (неравенство Бесселя).** Если $c_k$ — коэффициенты Фурье элемента $x$ по счетной онс $\{e_n\}$, то последовательность

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots) \in l_2$$

и $\|c\|_{l_2} \leq \|x\|$, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|x\|^2. \tag{$*$}$$

Действительно, из следствия 1 получаем: $\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geq 0$, т. е. $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq \|x\|^2$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ сходится и его сумма $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|x\|^2$. С другой стороны, $\|c\|_{l_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$.

Неравенство (*) называется *неравенством Бесселя.*

Система $\{e_n\}$ называется *замкнутой*, если для любого элемента $x \in U$ имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2,$$

где $c_n$ — коэффициенты Фурье элемента $x$ по онс $\{e_n\}$. Это равенство называется *равенством Парсеваля.*

**Теорема.** *Система $\{e_n\}$ полна тогда и только тогда, когда она замкнута.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что система $\{e_n\}$ полна. Тогда любой элемент $x$ можно представить как предел последовательности некоторых $x_m \in L\{e_n\}$. Пусть $x_m = \sum_{k=1}^{N_m} a_k e_k$. В силу леммы частичные суммы ряда Фурье $x_m = \sum_{k=1}^{N_m} c_k e_k$ элемента $x$ дают лучшее приближение, чем $\sum_{k=1}^{N_m} a_k e_k$. Поэтому $\|x - \sum_{k=1}^{N_m} c_k e_k\|^2 \to 0$, $m \to \infty$. С другой стороны,

$$\|x - \sum_{k=1}^{N_m} c_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{N_m} |c_k|^2 \to 0, \quad m \to \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{N_m} |c_k|^2 = \|x\|^2.$$

Таким образом, для любого элемента $x$ имеет место равенство Парсеваля. Значит, система замкнута.

Достаточность. Пусть система $\{e_n\}$ замкнута. Тогда для любого $x \in U$ имеет место равенство Парсеваля и

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \to 0,$$

$n \to \infty$. Это означает, что элемент $x$ является пределом элементов $x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ из линейной оболочки $L\{e_n\}$. Таким образом, система $\{e_n\}$ полна.

Из доказательства теоремы получаем

**Следствие.** *Если $\{e_n\}$ — полная онс в унитарном пространстве $U$, то для любого элемента $x \in H$ его ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ сходится к $x$.*

## 1.7 Гильбертовы пространства. Теорема Рисса-Фишера.

*Гильбертовым пространством* называется полное унитарное пространство.

**Теорема (Рисс-Фишер).** *Пусть $c = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ — некоторая последовательность из пространства $l_2$, $\{e_n\}$ — счетная онс в гильбертовом пространстве $H$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ сходится в гильбертовом пространстве $H$ к некоторому элементу $x$, причем $c_k$ является $k$-м коэффициентом Фурье элемента $x$.*

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы $S_n := \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Требуется доказать, что последовательность $S_n$ сходится в пространстве $H$. Для этого достаточно установить, что $S_n$ фундаментальна. При $m > n$ имеем

$$\|S_m - S_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k\|^2 = (\sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k, \sum_{j=n+1}^{m} c_j e_j) = \sum_{k,j=n+1}^{m} (c_k e_k, c_j e_j) =$$

$$= \sum_{k,j=n+1}^{m} c_k \overline{c_j} (e_k, e_j) = \sum_{k,j=n+1}^{m} c_k \overline{c_j} \delta_{kj} = \sum_{k=n+1}^{m} c_k \overline{c_k} = \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2.$$

Так как $c \in l_2$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится. По критерию Коши $\sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 \to 0$, $m$, $n \to \infty$. Тогда $\|S_m - S_n\|^2 \to 0$, $m$, $n \to \infty$, т. е. последовательность $S_n$ фундаментальна. В силу полноты $H$ существует предел $\lim_{n\to\infty} S_n = x$. В силу непрерывности скалярного произведения получаем $(x, e_k) = \lim_{n\to\infty}(S_n, e_k)$. Так как при $n \geq k$ имеет место равенство $(S_n, e_k) = (\sum_{k=1}^{n} c_j e_j, e_k) = \sum_{k=1}^{n} c_j(e_j, e_k) = \sum_{k=1}^{n} c_j \delta_{jk} = c_k$, то

$$(x, e_k) = \lim_{n\to\infty} (S_n, e_k) = c_k.$$

Два гильбертовых пространства $H_1$ и $H_2$ называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f : H_1 \to H_2$ линейных векторных пространств такой, что $(f(x_1), f(x_2))_{H_1} = (x_1, x_2)_{H_2}$ для любых $x_1$, $x_2 \in H_1$. Изоморфизм определяет отношение эквивалентности на множестве гильбертовых пространств.

**Теорема.** *Любое сепарабельно гильбертово пространство $H$ изоморфно пространству $l_2$.*

Доказательство. Рассмотрим любое сепарабельное гильбертово пространство $H$. По доказанному выше в $H$ существует полная, значит, замкнутая, счетная онс $\{e_n\}$. Рассмотрим отображение $f : H \to l_2$, действующее по правилу $f : x \mapsto c := (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$, где $c_n = (x, e_n)$ — $n$-й коэффициент Фурье элемента $x$. В силу равенства Парсеваля $\|c\|_{l_2} = \|x\|_H$, т. е.

$$\|f(x)\|_{l_2} = \|x\|_H. \qquad (*)$$

В силу теоремы Рисса-Фишера существует отображение $g : l_2 \to H$, действующее по правилу $c := (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots) \mapsto x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$. По той же теореме $f \circ g = \mathrm{id}_{l_2}$. Так как ряд Фурье любого элемента по полной онс сходится к этому элементу, имеем $g \circ f = \mathrm{id}_H$. Таким образом, $g$ — отображение, обратное к $f$ и слева и справа. Следовательно, $f$ — биекция. Из определения следует, что $f$ — линейное отображение. Таким образом, $f$ — изоморфизм между $H$ и $l_2$. Равенство $(*)$ означает, что $f$ сохраняет норму. Следовательно, $f$ сохраняет и скалярное произведение. Теорема доказана.

**Следствие.** *Любые два сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны.*

# 2 Тригонометрические ряды Фурье

## 2.1 Сходимость тригонометрических рядов Фурье в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$

Рассмотрим пространство $L_2(a, b)$, $b - a = 2\pi$. Все эти пространства изоморфны между собой и получаются друг из друга сдвигом: $f(x) \mapsto f(x+t)$. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $a = -\pi$, $b = \pi$.

Как показано выше, тригонометрическая система функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ n \geq 1\right\}$$

является ортонормированной системой в $L_2(-\pi, \pi)$. Ниже мы покажем, что эта система является полной. Ряд Фурье функции $f$ по этой системе имеет вид:

$$\alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \alpha_1 \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} + \beta_1 \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} + \alpha_2 \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} + \beta_2 \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}} + \ldots,$$

где коэффициенты Фурье вычисляются как скалярное произведение функции $f$ на соответствующий элемент онс:

$$\alpha_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} dt, \quad \beta_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} dt,$$

$$\alpha_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

В силу полноты онс этот ряд сходится в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ к элементу $f$ и имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2).$$

На практике вместо этой онс используют более простую:

$$\{1, \cos nx, \sin nx,\ n \geq 1\}.$$

Эта система является ортогональной, но не нормированной. Обозначим

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Тогда $\alpha_n = \sqrt{\pi} a_n$, $\beta_n = \sqrt{\pi} b_n$, $n \geq 1$, $\alpha_0 = \sqrt{2\pi} a_0$ и имеет место равенство в $L_2(-\pi, \pi)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \qquad (1)$$

Отметим, что скобки в последней сумме, как правило, не ставят. Равенство Парсеваля в терминах коэффициентов $a_n$, $b_n$ имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

**Замечание.** Следует еще раз подчеркнуть, что равенство (1) имеет место в смысле пространства $L_2(-\pi, \pi)$. Поскольку в $L_2(-\pi, \pi)$ две функции, отличающиеся друг от друга на множестве меры нуль по Лебегу, считаются одинаковыми, то из (1) не следует, что в фиксированной точке $x$ равенство это имеет место.

В связи с этим возникают следующие вопросы:

1) При каких условиях на функцию $f$ равенство (1) имеет место в точке $x \in [a, b]$?

2) при каких условиях на функцию $f$ равенство ряд Фурье сходится равномерно к $f$ на $[a, b]$?

Решению этих вопросов будут посвящены следующие пункты.

## 2.2 Частичные суммы ряда Фурье. Ядро Дирихле.

Рассмотрим частичные суммы ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Имеем

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^{n} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \cos kx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \sin kx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt) \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t) \right] dt.$$

Подсчитаем сумму

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos kx}{2 \sin \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left( \sin \frac{(2k+1)x}{2} - \sin \frac{(2k-1)x}{2} \right)}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Обозначим

$$D_n(x) = \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2\pi \sin \frac{x}{2}}.$$

Функция $D_n(x)$ называется *ядром Дирихле*. Таким образом, мы доказали равенство

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt.$$

Установим следующий вспомогательный результат.

**Лемма.** *Если функция $f$ является $2\pi$-периодической на $\mathbb{R}$, то для любых точек $a$, $b$ выполняется равенство*

$$\int_{a}^{a+2\pi} f(t)dt = \int_{b}^{b+2\pi} f(t)dt.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{a}^{a+2\pi} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt + \int_{b}^{b+2\pi} f(t)dt + \int_{b+2\pi}^{a+2\pi} f(t)dt =$$

$$= \int_{a}^{b} f(t)dt + \int_{b}^{b+2\pi} f(t)dt + \int_{b}^{a} f(t+2\pi)dt =$$

$$= \int_{a}^{b} f(t)dt + \int_{b}^{b+2\pi} f(t)dt + \int_{b}^{a} f(t)dt = \int_{b}^{b+2\pi} f(t)dt.$$

Функция $D_n$ является $2\pi$-периодической. Продолжим функцию $f$ до $2\pi$-периодической функции на всю прямую $\mathbb{R}$. Если $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то переопределим произвольно $f$ в одной из точек $-\pi$, $\pi$, на величину интегралов это не влияет. Тогда

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)dt = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(t+x)D_n(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)D_n(t)dt.$$

Итак,

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)D_n(t)dt.$$

## 2.3 Ядро Фейера. Теорема Фейера.

Если функция $f$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то ее ряд Фурье не обязан сходиться к $f$, тем более, равномерно. Однако в этом случае средние арифметические частичных сумм ряда Фурье сходятся равномерно к $f$.

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — некоторый числовой ряд. Обозначим через $S_n$ его $n$-ю частичную сумму. Рассмотрим средние арифметические

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}$$

частичных сумм $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Эти величины $\sigma_n$ называются *чезаровскими средними* ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Если последовательность $\sigma_n$ имеет конечный предел $S$, то говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по Чезаро и его сумма равна $S$.

Теперь рассмотрим тригонометрический ряд Фурье. Его чезаровские средние равны

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+x)}{\sin\frac{t}{2}} \left[\sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3t}{2} + \ldots + \sin\frac{(2n-1)t}{2}\right] dt.$$

Имеем

$$\sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3t}{2} + \ldots + \sin\frac{(2n-1)t}{2} =$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2} + \ldots + 2\sin\frac{t}{2}\sin\frac{(2n-1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{(1-\cos t)+(\cos t-\cos 2t)+\ldots+(\cos(n-1)t-\cos nt)}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1-\cos nt}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Итак,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt.$$

Функция

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}$$

называется *ядром Фейера.*

**Свойства ядра Фейера.**

1) $\Phi_n(t) \geq 0$, $t \in (-\pi,\pi)$, $t \neq 0$, $n \geq 1$.

2) $\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt = 1$, $n \geq 1$. Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\,dt = 1.$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(D_0(t)+D_1(t)+\ldots+D_{n-1}(t))dt =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}D_0(t)dt+\int_{-\pi}^{\pi}D_1(t)dt+\ldots+\int_{-\pi}^{\pi}D_{n-1}(t)dt)\right) = 1.$$

3) $\lim_{t\to 0}\Phi_n(t) = \frac{n}{2\pi}$.

4) Для любого $\varepsilon \in (0,\pi)$ последовательность $\Phi_n(t)$ равномерно стремится к 0 на $[-\pi;-\varepsilon]\cup[\varepsilon,\pi]$. Действительно,

$$|\Phi_n(t)| \leq \frac{1}{2\pi n\sin^2\frac{\varepsilon}{2}} \to 0,\ n\to\infty,$$

на $[-\pi;-\varepsilon]\cup[\varepsilon,\pi]$ при $n\to\infty$.

**Теорема Фейера.** *Если функция $f$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то чезаровские средние $\sigma_n$ частичных сумм тригонометрического ряда Фурье этой функции равномерно сходятся к функции $f$ на $[-\pi;\pi]$.*

Доказательство. Так как $f(-\pi) = f(\pi)$, функцию $f$ можно продолжить на всю прямую до непрерывной $2\pi$-периодической функции, которую будем также обозначать через $f$. Имеем $\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\Phi_n(t)dt$. Кроме того, с учетом свойства 2) функции $\Phi_n$ имеем

$$f(x) = f(x)\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\Phi_n(t)dt.$$

Тогда, с учетом свойства 1) функции $\Phi_n$ получаем

$$|\sigma_n(x)-f(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}[f(t+x)-f(x)]\Phi_n(t)dt\right| \le \int_{-\pi}^{\pi}|f(t+x)-f(x)|\Phi_n(t)dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{-\delta}|f(t+x)-f(x)|\Phi_n(t)dt + \int_{-\delta}^{\delta}|f(t+x)-f(x)|\Phi_n(t)dt +$$

$$+ \int_{\delta}^{\pi}|f(t+x)-f(x)|\Phi_n(t)dt. \qquad (*)$$

Функция $f$ непрерывна на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$. Значит, $f$ равномерно непрерывна. Отметим, что если $x$, $t \in [-\pi; \pi]$, то $x$, $x+t \in [-2\pi; 2\pi]$ и тогда из равномерной непрерывности следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x, t \in [-\pi; \pi] \quad (|t| < \delta \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Тогда, с использованием свойств 1) и 2) функции $\Phi_n(t)$, получаем

$$\int_{-\delta}^{\delta}|f(t+x)-f(x)|\Phi_n(t)dt \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $f$ непрерывна на $[-2\pi; 2\pi]$, существует $M > 0 : |f(x)| \le M$ $\forall x \in [-2\pi; 2\pi]$. Тогда

$$\int_{\delta}^{\pi}|f(t+x)-f(x)|\Phi_n(t)dt \le \int_{\delta}^{\pi}(|f(t+x)|+|f(x)|)\Phi_n(t)dt \le 2M\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)dt.$$

Так как $\Phi_n \rightrightarrows 0$ на $[\delta; \pi]$, последовательность интегралов

$$\alpha_n = \int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)dt \to 0, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $\exists N : \forall n \geq N$ $(\alpha_n < \frac{\varepsilon}{8M})$. Тогда при $n \geq N$

$$\int_\delta^\pi |f(t+x) - f(x)|\Phi_n(t)dt < 2M\frac{\varepsilon}{8M} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Подчеркнем что $N = N(\delta) = N(\delta(\varepsilon))$ зависит только от $\varepsilon$ и не зависит от $x$.

Аналогично, при $n \geq N$ получаем неравенство

$$\int_{-\pi}^\delta |f(t+x) - f(x)|\Phi_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Из полученных неравенств и неравенства $(*)$ следует, что

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

при $x \in [-\pi; \pi]$, $n \geq N$, т. е. $\sigma_n \rightrightarrows f$, $n \to \infty$. Теорема Фейера доказана.

## 2.4 Теоремы Вейерштрасса о приближении. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.

Тригонометрическим многочленом называется выражение вида

$$T_N(x) = \sum_{k=0}^N (a_k \sin kx + b_k \sin kx),$$

где $a_k$ и $b_k$ — константы.

**Теорема Вейерштрасса о приближении тригонометрическими многочленами.** *Если функция непрерывна и $2\pi$-периодична на $\mathbb{R}$, то существует последовательность тригонометрических многочленов, равномерно сходящаяся на $\mathbb{R}$ к функции $f$. Иначе говоря, для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрических многочлен $T_n$ такой, что $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in \mathbb{R}$.*

Доказательство сразу следует теоремы Фейера и того факта, что чезаровские средние частичных сумм тригонометрического ряда Фурье функции $f$ являются тригонометрическими многочленами.

Теперь отметим особенности разложения в тригонометрический ряд Фурье четных и нечетных функций.

**Теорема 1.** *Если функция $f$ интегрируема по Лебегу на $[-\pi;\pi]$ и является четной, то при разложении в ряд Фурье все коэффициенты $b_n$ равны нулю, т. е.*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

*причем*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Доказательство. Имеем

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} f(-x) \sin nx dx = 0.$$

Аналогично

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) \cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx dx - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} f(-x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Точно так же доказывается

**Теорема 2.** *Если функция a интегрируема по Лебегу на $[-\pi;\pi]$ и является нечетной, то при разложении в ряд Фурье все коэффициенты $a_n$ равны нулю, т. е.*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx,$$

*причем*

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx.$$

Из теоремы Фейера с учетом теорем 1 и 2 можно вывести следствия.

**Следствие 1.** *Если функция $f$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и является четной, то $f$ можно представить в виде равномерного предела последовательности тригонометрических многочленов вида $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$, а если нечетной — то многочленов вида $\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$.*

**Следствие 2.** *Если функция $f$ непрерывна на $[0,\pi]$, то*

*1) $f$ можно представить в виде равномерного предела последовательности тригонометрических многочленов вида $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$,*

*2) в случае, если $f(0) = f(\pi)$, $f$ можно представить в виде равномерного предела последовательности тригонометрических многочленов вида $c + \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$.*

Доказательство. 1) Любую непрерывную на $[0,\pi]$ функцию можно продолжить четным образом на $[-\pi,\pi]$. Далее применяем следствие 1.

2) Если к тому же $f(0) = f(\pi)$, то функцию $g(x) = f(x) - f(0)$ можно продолжить нечетным образом на $[-\pi,\pi]$, при этом $g(-\pi) = g(\pi) = 0$. В силу следствия 1 $g$ можно представить в виде равномерного предела последовательности тригонометрических многочленов вида $\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$. Тогда $f$ можно представить в виде равномерного предела последовательности тригонометрических многочленов вида $f(0) + \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$.

**Многочлены Чебышева.**

Рассмотрим функции $P_n(x) = \cos n \arccos x$, где $n$ — неотрицательное целое число. Используя формулы для косинусов кратных углов, получаем $P_0(x) = \cos 0 = 1$, $P_1(x) = \cos\arccos x = x$, $P_2(x) = \cos 2\arccos x = 2x^2 - 1$, $P_3(x) = \cos 3\arccos x = 4x^3 - 3x$. Мы видим, что при $n = 0$, 1, 2, 3... функции $P_n(x)$ являются многочленами от переменной $x$. Они называются *многочленами Чебышева.*

**Теорема.** *Для любого неотрицательного целого $n$ функция $P_n$ является многочленом от $x$ степени $n$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \arccos x$, тогда $\cos\alpha = x$. Имеем

$$P_n(x) = \cos n\alpha = \operatorname{Re} e^{in\alpha} = \operatorname{Re}(e^{i\alpha})^n = \operatorname{Re}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n =$$

$$= \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^{n-k}\alpha (i\sin\alpha)^k = \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j C_n^{2j} \cos^{n-2j}\alpha \sin^{2j}\alpha =$$

$$= \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j C_n^{2j} \cos^{n-2j}\alpha (1-\cos^2\alpha)^j = \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j C_n^{2j} x^{n-2j} (1-x^2)^j.$$

**Теорема Вейерштрасса о приближении алгебраическими многочленами.** *Если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то функ-*

*цию $f$ можно представить как равномерный предел последовательности алгебраических многочленов на отрезке $[a;b]$. Иначе говоря, для любого $\varepsilon > 0$ существует алгебраический многочлен $Q_n$ такой, что $|f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in [a;b]$.*

Доказательство. 1) Сначала рассмотрим случай, когда функция $f$ задана на отрезке $[-1;1]$. Пусть $g(x) = f(\cos x)$, $x \in [0;\pi]$. В силу следствия 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$ такой, что $|g(t) - T_n(t)| < \varepsilon$ для любого $t \in [0;\pi]$. Тогда $\forall x \in [-1;1]$ имеем $|f(x) - T_n(\arccos x)| < \varepsilon$. При этом

$$T_n(\arccos x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k \arccos x = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x),$$

где $P_k(x)$ — многочлены Чебышева. Следовательно, $T_n(\arccos x)$ является искомым алгебраическим многочленом.

2) Случай произвольного отрезка $[a;b]$ сводится к рассмотренному выше линейной заменой переменной. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \alpha t + \beta.$$

При $\alpha = (b-a)/2$, $\beta = (b+a)/2$ эта функция отображает отрезок $[-1;1]$ на $[a;b]$. Пусть $h(t) = f(\varphi(t))$. Функция $h$ непрерывна на $[-1;1]$. В силу доказанного в п. 1) для любого $\varepsilon > 0$ существует алгебраический многочлен $R_n$ такой, что $|h(t) - R_n(t)| < \varepsilon$. Тогда

$$|f(x) - R_n(\varphi^{-1}(x))| < \varepsilon, \quad x \in [a;b],$$

где $\varphi^{-1}(x) = (x-\beta)/\alpha$. Остается заметить, что $R_n(\varphi^{-1}(x)$ является алгебраическим многочленом от переменной $x$.

## 2.5 Полнота тригонометрической системы функций в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$

С помощью теорем Вейерштрасса можно доказать полноту тригонометрической системы функций в пространстве $L_2(-\pi,\pi)$. Предварительно дадим некоторые определения и установим необходимые факты.

Пусть $X$ — топологическое пространство, $A$, $B \subset X$. Множество $A$ называется *плотным* в $B$, если $\overline{A} \supset B$. Например, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, поэтому $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$.

**Лемма.** *Если $A$ плотно в $B$, $B$ плотно в $C$, то $A$ плотно в $C$.*

Доказательство. Имеем $\overline{A} \supset B$, $\overline{B} \supset C$, поэтому $\overline{A} = \overline{\overline{A}} \supset \overline{B} \supset C$.

Теперь рассмотрим пространство $L_2(-\pi, \pi)$. В курсе теории функций действительного переменного доказывается, что множество непрерывных функций $C[a; b]$ плотно в пространстве $L_2(a; b)$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

**Теорема.** *Система $\{1, \cos nx, \sin nx, n \geq 1\}$ полна в $L_2(-\pi, \pi)$.*

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку $\Lambda$ векторов тригонометрической системы. Пусть функция $f$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По теореме Вейерштрасса существует тригонометрический полином $Q(x)$ такой, что $\forall x \in [-\pi, \pi]$ $|f(x) - Q(x)| < \varepsilon/\sqrt{2\pi}$. Тогда

$$\|f - Q\|_{L_2(-\pi,\pi)} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - Q(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2 dx\right)^{1/2} = \varepsilon.$$

Следовательно, множество $\Lambda$ плотно в $C[-\pi, \pi]$ в смысле топологии $L_2(-\pi, \pi)$. Далее, как отмечалось выше, $C[-\pi; \pi]$ плотно в пространстве $L_2(-\pi; \pi)$. В силу леммы отсюда следует, что $\Lambda$ плотно в $L_2(-\pi; \pi)$. Таким образом, тригонометрическая система полна в $L_2(-\pi; \pi)$.

**Следствие.** *Пусть функция $f \in L_2(-\pi; \pi)$ и*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

*ее ряд Фурье. Тогда справедливо равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Доказательство следует из того, что система полна в $L_2(-\pi, \pi)$, поэтому она замкнута, т. е. для любой функции $f \in L_2(-\pi; \pi)$ справедливо равенство Парсеваля.

**Замечание** Из равенства Парсеваля следует, что для любой функции $f \in L_2(-\pi; \pi)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ сходится, следовательно, $a_n$, $b_n \to 0$, $n \to \infty$.

## 2.6 Комплексная форма рядов Фурье

Пусть
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$
Из формулы Эйлера следует, что
$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \quad \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}).$$
С учетом этих равенств преобразуем ряд Фурье: Пусть
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx+b_n \sin nx = \frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(e^{inx}+e^{-inx})-ib_n(e^{inx}-e^{-inx})] =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n - ib_n)e^{inx} + (a_n + ib_n)e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$
Таким образом,
$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$
т. е. функции $f$ сопоставляется комплексный ряд Фурье $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$.

Отметим, что комплекснозначная система $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является ортогональной в пространстве $L_2(-\pi;\pi)$. Действительно, для любых $m \neq n$ имеем
$$(e^{imx}, e^{inx}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}e^{-inx}dx =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}dx = \left.\frac{e^{i(m-n)x}}{i(m-n)x}\right|_{x=-\pi}^{\pi} = 0.$$
При этом
$$\|e^{inx}\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |e^{inx}|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$
откуда $\|e^{inx}\| = \sqrt{2\pi}$. Коэффициенты $c_n$ вычисляются по правилу
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx.$$

Система система $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является полной, следовательно, и замкнутой в пространстве $L_2(-\pi;\pi)$. Равенство Парсеваля справедливо дял любой функции $f \in L_2(-\pi;\pi)$ и имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2.$$

## 2.7 Связь комплексных рядов Фурье с теорией функций комплексного переменного

Рассмотрим в единичном круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ аналитическую функцию $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Если последний ряд сходится в граничной точке $e^{i\theta}$ единичного круга, то по теореме Абеля существует конечный предел

$$\lim_{r\to 1-} f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Это показывает, что комплексные ряды Фурье являются средством для изучения граничных значений аналитических функций.

## 2.8 Осцилляционная лемма. Принцип локализации Римана

**Осцилляционная лемма.** *Пусть функция $f$ интегрируема на $[a,b]$ по Лебегу. Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0.$$

**Замечание.** Название леммы связано с тем, что при больших $\lambda$ функции $\cos\lambda x$ и $\sin\lambda x$ сильно осциллируют, т. е. колеблются на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Рассмотрим для примера интеграл $\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx$. (Второй интеграл рассмотрите самостоятельно.)

1) Рассмотрим сначала случай, когда $f$ непрерывно дифференцируема на $[a,b]$. Тогда функции $f$ и $f'$ непрерывны на $[a,b]$, следовательно, ограничены на этом отрезке. т. е. существуют константы $M$, $C$ такие, что

$|f(x)| \le M$, $|f'(x)| \le C$, $x \in [a,b]$. Применяя интегрирование по частям, получаем

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = \frac{1}{\lambda}\int_a^b f(x) d\sin\lambda x = \frac{1}{\lambda} f(x)\sin\lambda x|_a^b - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x dx,$$

следовательно, с учетом неравенства треугольника, получаем

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right| \le \frac{1}{|\lambda|}\left(|f(b)|\,|\sin\lambda b| + |f(a)|\,|\sin\lambda a| + \int_a^b |f'(x)|\,|\sin\lambda x| dx\right) \le$$

$$\le \frac{1}{|\lambda|}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x)| dx\right) \le \frac{2M+C}{|\lambda|} \to 0,\ \lambda \to \infty.$$

2) Рассмотрим произвольную интегрируемую функцию $f$. фиксируем $\varepsilon > 0$. Множество непрерывных функций плотно в пространстве интегрируемых функций $L_1(a,b)$, а непрерывную функцию можно приблизить сколь угодно точно алгебраическими многочленами. Следовательно, существует многочлен $\varphi$ такой, что

$$\|f-\varphi\|_{L_1(a,b)} = \int_a^b |f(x)-\varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\varphi$ — гладкая функция, в силу 1) имеем

$$\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x dx \to 0,\ \lambda \to \infty.$$

Следовательно, существует $\lambda_0$ такое, что при $|\lambda| > \lambda_0$

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При $|\lambda| > \lambda_0$ имеем

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right| \le \left|\int_a^b (f(x)-\varphi(x))\cos\lambda x dx\right| + \left|\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,|\cos\lambda x| dx + \frac{\varepsilon}{2} \le \int_a^b |f(x)-\varphi(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

**Теорема (принцип локализации Римана).** *Сходимость ряда Фурье интегрируемой на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функции* $f$ *точке* $x \in (-\pi, \pi)$ *зависит лишь от поведения этой функции в любой сколь угодно малой окрестности точки* $x$.

Доказательство. частичные суммы ряда Фурье функции $f$ равны

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt,$$

где

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((2n-1)t/2)}{\sin(t/2)}$$

ядро Дирихле. Фиксируем достаточно малое $\delta > 0$. Имеем

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\delta} f(x+t) D_n(t) dt + \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) D_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt.$$

Докажем, что в последней сумме первое и третье слагаемые стремятся к нулю при $n \to \infty$. Рассмотрим для определенности третье слагаемое (первое исследуется аналогично).

Имеем

$$\int_{\delta}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t)}{\sin(t/2)} \sin((2n-1)t/2) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} g(t) \sin((2n-1)t/2) dt,$$

где

$$g(t) = \frac{f(x+t)}{\sin(t/2)}.$$

Функция $f(x+t)$ интегрируема на $[\delta, \pi]$ как суперпозиция интегрируемой функции и сдвига $t \mapsto x+t$, а функция $\sin(t/2)$ непрерывна и $\sin(t/2) \geq \sin(\delta/2) > 0$ на $[\delta, \pi]$. Поэтому функция $g$ как частное этих функций интегрируема на $[\delta, \pi]$. По осцилляционной лемме

$$\int_{\delta}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} g(t) \sin((2n-1)t/2) dt \to 0, \ n \to \infty.$$

Таким образом, сходимость $S_n(x)$ конечному пределу имеет место тогда и только тогда, когда имеет конечный предел второе слагаемое

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)D_n(t)dt.$$

Но это слагаемое зависит лишь от значений функции $f$ в $\delta$-окрестности точки $x$. Поскольку $\delta$ может быть взято сколь угодно малым, теорема доказана.

**Замечание.** Совершенно аналогично доказывается, что ряд Фурье интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ функции сходится в точке $x \in (-\pi, \pi)$ к значению $f(x)$ тогда и только тогда, когда разность

$$S_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\delta}[f(x+t) - f(x)]D_n(t)dt + \int_{-\delta}^{\delta}[f(x+t) - f(x)]D_n(t)dt +$$

$$+ \int_{\delta}^{\pi}[f(x+t) - f(x)]D_n(t)dt$$

стремится к нулю. При этом первое и третье слагаемые стремятся к нулю по осцилляционной лемме, поэтому ряд Фурье сходится в точке $x$ к $f(x)$ тогда и только тогда, когда при некотором $\delta \in (0, \pi)$ (или при любом $\delta \in (0, \pi)$!)

$$\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+t)-f(x)]D_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x+t) - f(x)}{\sin(t/2)}\sin((2n-1)t/2)dt \to 0,$$

$n \to \infty$.

## 2.9 Сходимость ряда Фурье в точке

Будем говорить, что интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция $f$ удовлетворяет *условию Дини* в точке $x \in (-\pi, \pi)$, если для некоторого малого $\delta$ существует интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right| dt. \qquad (*)$$

Отметим, что если этот интеграл существует для некоторого малого $\delta$, то он существует при всех $\delta \in (0, \pi)$, поскольку знаменатель подинтегрального выражения непрерывен и обращается в нуль только в точке $t = 0$.

**Теорема 1.** *Пусть функции $f$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет в точке $x \in (-\pi, \pi)$ условию Дини. Тогда ряд Фурье этой функции в точке $x$ сходится к значению $f(x)$.*

Доказательство. Пусть для некоторого $\delta$ существует интеграл $(*)$. Тогда он существует при всех $\delta \in (0, \pi)$. Из свойства абсолютной непрерывности интеграла как функции множества следует, что при $\delta \to 0$ значение интеграла стремится к нулю. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta \in (0, \pi)$ такое, что

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \varepsilon.$$

Используя известное неравенство $(2/\pi)|t| \leq |\sin t| \leq 1$, $t \in [0, \pi/2]$ получаем

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{\sin(t/2)} \sin((2n-1)t/2) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{\sin(t/2)} \right| dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из осцилляционной леммы следует, что существует $N$ такое, что при $n \geq N$ выполняются неравенства

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{\sin(t/2)} \sin((2n-1)t/2)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{\sin(t/2)} \sin((2n-1)t/2)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда с учетом аддитивности интеграла и неравенства треугольника получаем при $n \geq N$

$$|S_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{\sin(t/2)} \sin((2n-1)t/2)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теперь опишем некоторые классические условия, при которых выполняется условие Дини.

1) Говорят, что функция $f$ удовлетворяет *условию Гельдера* с показателем $\alpha > 0$ в точке $x$, если существуют константы $\delta$, $A > 0$ такие, что

$$|f(x+t) - f(x)| \leq A|t|^{\alpha}, \quad |t| \leq \delta.$$

Если функция $f$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию Гельдера в точке $x \in (-\pi, \pi)$, то она удовлетворяет условию Дини в этой точке. Действительно, из условия Гельдера следует, что

$$\left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right| \leq \frac{A}{|t|^{1-\alpha}}.$$

Поскольку несобственный интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{|t|^{1-\alpha}}\, dt$$

сходится, то существует интеграл $(*)$. Таким образом, справедливо

**Следствие 1.** *Пусть функции $f$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию Гельдера в точке $x \in (-\pi, \pi)$. Тогда ряд Фурье этой функции в точке $x$ сходится к значению $f(x)$.*

2) Пусть функция $f$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и дифференцируема в точке $x \in (-\pi, \pi)$. Тогда существует

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'(x).$$

Поэтому функция

$$\frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

ограничена в некоторой окрестности нуля, следовательно, функция $f$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha = 1$. Отсюда получаем следующее достаточно простое достаточное условие сходимости ряда Фурье.

**Следствие 2.** *Пусть функции $f$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и дифференцируема в точке $x \in (-\pi, \pi)$. Тогда ряд Фурье этой функции в точке $x$ сходится к значению $f(x)$.*

**Замечание.** Из принципа локализации Римана следует, что в следствиях 1 и 2 непрерывность функции $f$ достаточно требовать лишь в некоторой малой окрестности точки $x$.

Теперь рассмотрим случай, когда точка $x$ может являться точкой разрыва первого рода функции $f$.

Будем говорить, что функция $f$ удовлетворяет *обобщенному условию Дини* в точке $x$, если в точке $x$ существуют конечные односторонние пределы $f(x \pm 0)$ и существуют интегралы

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right| dt, \quad \int_0^\delta \left| \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right| dt. \qquad (**)$$

**Теорема 2.** *Пусть функции $f$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет в точке $x \in (-\pi, \pi)$ обобщенному условию Дини. Тогда ряд Фурье этой функции в точке $x$ сходится к значению*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Доказательство проводится точно так же как в случае обычного условия Дини. Докажите теорему самостоятельно!

**Замечание.** Если функции $f$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и существуют пределы $f(\pi - 0)$, $f(-\pi + 0)$ в концевых точках отрезка, то ряд Фурье функции $f$ сходится в точках $\pm\pi$ к значению $(1/2)(f(\pi-0) + f(-\pi + 0))$. Действительно, достаточно рассмотреть $2\pi$-периодическое продолжение функции $f$ на всю числовую ось (при этом значение в точках $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, задаем произвольно, значение коэффициентов Фурье от этихз значений не зависит!).vskip0.3 cm

**Пример.** Рассмотрим функцию $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$. Эта функция нечетная, поэтому ее разложение происходит только по синусам. Имеем

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

поэтому ряд Фурье функции $f$ имеет вид

$$2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Поскольку функция $f$ дифференцируема в любой точке из $(-\pi, \pi)$, сумма того ряда равна $f(x) = x$, т. е.

$$x = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Если мы рассмотрим этот ряд в точках $x = \pm\pi$, то его сумма равна нулю. При этом $f(\pi - 0) = \pi$, $f(-\pi + 0) = -\pi$ и $(1/2)(f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)) = 0$, что согласуется с замечанием выше.

### 2.10 Равномерная сходимость ряда Фурье

Теперь коснемся вопроса равномерной сходимости ряда Фурье. Будем говорить что непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция $f$, принимающая одинаковые значения на концах отрезка, удовлетворяет равномерному условию Дини, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $x$ выполняется неравенство

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \varepsilon.$$

Без доказательства приведем следующую теорему и следствия из нее.

**Теорема.** *Пусть функция $f$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Если $f$ удовлетворяет равномерному условию Дини, то ее ряд Фурье сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ к функции $f$.*

**Следствие 1.** *Пусть функция $f$ задана на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Если $f$ удовлетворяет условию Гельдера*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le A|x_1 - x_2|^{\alpha}, \quad x_1, x_2 \in [-\pi, \pi],$$

*с некоторыми константами $A > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, то ее ряд Фурье сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ к функции $f$.*

**Следствие 2.** *Пусть функция $f$ непрерывно дифференцируема задана на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда ее ряд Фурье сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ к функции $f$.*

## 3 Интерал Фурье и пробразование Фурье

### 3.1 Интерал Фурье

Нам понадобится понятие фукнции, интегрируемой по Лебегу на всей числовой прямой. Определение похоже на определение несобственных интегралов Римана. Функция $f$, заданная на всей числовой оси, интегрируема на $\mathbb{R}$, если она интегрируема на любом отрезке и для любой последовательности отрезков $A_n$, исчерпывающей $\mathbb{R}$, существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}|f(x)|dx.$$

Если $f$ интегрируема на $\mathbb{R}$, то, по определению,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)dx.$$

Интегралы Лебега по неограниченным множествам обладают большинством свойств, которым удовлетворяют интегралы Лебега по ограниченным множествам.

Интегрируемые на $\mathbb{R}$ функции образуют банахово пространство $L_1(\mathbb{R})$ с нормой

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx.$$

**Теорема.** *Пусть функцию $f$ интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}$. Если эта функция в точке $x$ удовлетворяет услоию Дини, то*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt.$$

Доказательство. Требуется доказать, что

$$I_A := \frac{1}{\pi}\int_0^{A}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt \to f(x), \quad A\to+\infty.$$

Из неравенства

$$|f(t)\cos\lambda(t-x) \le |f(t)|, \quad \lambda\in[0,A],\ t\in\mathbb{R},$$

и интегрируемости функции $|f|$ на $\mathbb{R}$ следует, что функция $f(t)\cos\lambda(t-x)$ интегрируема на $[0,A]\times\mathbb{R}$. По известной теореме Фубини о перестановке порядка интегрирования получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{A}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt\int_0^{A}\cos\lambda(t-x)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin[A(t-x)]}{t-x}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+x) \frac{\sin At}{t}\, dt.$$

Таким образом,

$$I_A = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+x) \frac{\sin At}{t}\, dt.$$

Используя известное значение интеграла Дирихле, получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin At}{t}\, dt = f(x) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin At}{t}\, dt = f(x) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau}\, d\tau = f(x).$$

Таким образом,

$$I_A - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} \sin At\, dt.$$

Докажем, что при $M \to +\infty$

$$\int_{-\infty}^{-M} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} \sin At\, dt \to 0, \quad \int_{M}^{+\infty} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} \sin At\, dt \to 0, \tag{1}$$

причем сходимость равномерна по $A \in [1, \infty]$. Рассмотрим второй интеграл, первый исследуется аналогично. Имеем

$$\left| \int_{M}^{+\infty} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} \sin At\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{M}^{+\infty} \frac{|f(t+x) - f(x)|}{t} |\sin At|\, dt + |f(x)| \left| \int_{M}^{+\infty} \frac{\sin At}{t}\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{M}^{+\infty} \frac{|f(t+x) - f(x)|}{t}\, dt + |f(x)| \left| \int_{AM}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+x) - f(x)|\, dt + |f(x)| \left| \int_{AM}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \right|.$$

Если $M \to +\infty$, то $\frac{1}{M} \to 0$, и поскольку $AM \geq M$ при $A \geq 1$, имеем

$$\int_{AM}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \to 0,$$

как остаток сходящегося несобственного интеграла Дирихле, причем равномерно по $A$ на $[1, +\infty)$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (1) существует $M > 0$ такое, что для любого $A \geq 1$ выполняются неравенства

$$\left|\int_{-\infty}^{-M} \frac{f(t+x)-f(x)}{t} \sin At\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2}$$

$$\left|\int_{M}^{+\infty} \frac{f(t+x)-f(x)}{t} \sin At\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Точно так же как при доказательстве теоремы о сходимости ряда Фурье в точке доказываем, что при выполнении условия Дини в точке $x$

$$\int_{-M}^{M} \frac{f(t+x)-f(x)}{t} \sin At\, dt \to 0, \quad A \to +\infty,$$

поэтому существует $A_0 ge 1$ такое, что при $a \geq A_0$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{-M}^{M} \frac{f(t+x)-f(x)}{t} \sin At\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Из свойства аддитивности интеграла имеем

$$I_A - f(x) = \int_{-\infty}^{-M} \frac{f(t+x)-f(x)}{t} \sin At\, dt +$$

$$+ \int_{-M}^{M} \frac{f(t+x)-f(x)}{t} \sin At\, dt + \int_{M}^{+\infty} \frac{f(t+x)-f(x)}{t} \sin At\, dt.$$

Применяя неравенство треугольника с учетом (2), (3) и (4) получаем

$$|I_A - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

$A \geq A_0$. Это и означает, что $I_A - f(x) \to 0$, $A \to +\infty$. Доказательство теоремы закончено.

## 3.2 Прямое и обратное преобразование Фурье

Запишем доказанное равенство несколько по-другому. Заметим, что функция

$$G(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt$$

нечетная, поэтому

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{A \to +\infty} \int_0^A G(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^A G(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \, v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda) d\lambda.$$

Аналогично, поскольку функция

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda(t-x) dt$$

нечетная, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \, v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda) d\lambda = 0.$$

Применяя равенство Эйлера

$$\cos \lambda(t-x) - i \sin \lambda(t-x) = e^{-i\lambda(t-x)},$$

записываем равенство в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \, v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\lambda) - iH(\lambda)] d\lambda = \frac{1}{2\pi} \, v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \, v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

Обозначим

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt. \tag{5}$$

Тогда последнее равенство можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{6}$$

Отметим, что равенства (5) и (6) достаточно похожи. При этом, интеграл в (6) понимается в смысле главного значения по Коши.

Пусть равенство (5) имеет место для всех точек $x \in \mathbb{R}$. Соответствие $F : f \mapsto \Phi$, определяемое (5), называется преобразованием Фурье, а функция $F$ — преобразование Фурье функции $f$. В дальнейшем вместо $\Phi$ будем часто писать $F[f]$, почеркивая, что функция $\Phi$ — результат преобразования Фурье $F$, примененного к функции $f$. Аналогично, равенство (6) определяет обратное преобразование Фурье, которое обозначается через $F^{-1}$. Таким образом, $f = F^{-1}[\Phi]$.

## 3.3 Свойства преобразования Фурье

**Теорема 1.** *Если последовательность $f_n$ сходится в пространстве $L_1(\mathbb{R})$ к функции $f$, то $F[f_n] \rightrightarrows F[f]$ на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Имеем

$$|F[f_n](\lambda) - F[f](\lambda)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f_n(t) - f(t)) e^{-i\lambda t} dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - f(t)| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f_n - f\|_{L_1(\mathbb{R})} \to 0,$$

$n \to \infty$.

**Теорема 2.** *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}$. Тогда $F[f]$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}$, причем $F[f](\lambda) \to 0$, $\lambda \to \infty$.*

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала случай, когда $f = \chi_{[a,b]}$ — характеристическая функция отрезка $[a, b]$, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Имеем

$$F[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-i\lambda t} dt = \left. \frac{e^{-i\lambda t}}{-i\lambda\sqrt{2\pi}} \right|_a^b = \frac{e^{-i\lambda b} - e^{-i\lambda a}}{-i\lambda\sqrt{2\pi}},$$

откуда видно, что $F[f](\lambda)$ является непрерывной функцией на $\mathbb{R}$. При этом,

$$|F[f](\lambda)| = \left| \frac{e^{-i\lambda b} - e^{-i\lambda a}}{-i\lambda\sqrt{2\pi}} \right| \leq \frac{|e^{-i\lambda b}| + |e^{-i\lambda a}|}{\lambda\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\lambda|} \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

2) Пусть $f(x) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \chi_{a_k, b_k}(x)$ — линейная комбинация характеристических функций отрезков. Тогда утверждение следует из доказанного в п. 1) и линейности преобразования Фурье, в силу которой

$$F[f](\lambda) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k F[\chi_{a_k, b_k}](\lambda).$$

3) Теперь рассмотрим случай произвольной функции из $L_1(\mathbb{R})$. Из свойств интеграла Лебега следует, что существует последовательность функций $f_n$, каждая из которых является линейной комбинацией характеристических функций отрезков, и которяа сходится к $f$ в пространстве $L_1(\mathbb{R})$. В силу доказанного в п. 2) их преобразования Фурье $F[f_n]$ являются непрерывными функциями, стремящимися к нулю на бесконечности. По теореме 1 $F[f_n] \rightrightarrows F[f]$ на $\mathbb{R}$. Продолжим функции $F[f_n]$ на $\overline{\mathbb{R}}$, полагая $F[f_n](-\infty) = F[f_n](+\infty) = 0$, $F[f](-\infty) = F[f](+\infty) = 0$. Тогда $F[f_n] \rightrightarrows F[f]$ на $\overline{\mathbb{R}}$. Равномерный предел последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией, поэтому $F[f]$ непрерывна на $\mathbb{R}$. В частности, существуют $\lim_{\lambda\to-\infty} F[f](\lambda) = F[f](-\infty) = 0$, $\lim_{\lambda\to+\infty} F[f](\lambda) = F[f](+\infty) = 0$. Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** *Пусть $f(t) \in L_1(\mathbb{R})$ и $tf(t) \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда функция $F[f]$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и*

$$\frac{d}{d\lambda}F[f](\lambda) = F[-itf(t)](\lambda).$$

Приведем доказательство для случая, когда функции $f(t)$ и $tf(t)$ абсолютно интегрируемы в несобственном смысле по Риману на $\mathbb{R}$. Обоснуем возможность дифференцируемости под знаком интеграла. Имеем

$$\frac{d}{d\lambda}(f(t)e^{-i\lambda t}) = -itf(t)e^{-i\lambda t}.$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

сходится, поскольку $|f(t)e^{-i\lambda t}| = |f(t)|$ — интегрируемая несобственном смысле функция на $\mathbf{R}$.

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\lambda}(f(t)e^{-i\lambda t})dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

сходится равномерно по $\lambda$ по признаку Вейерштрасса, поскольку

$$|(-it)f(t)e^{-i\lambda t}| = |tf(t)|$$

является интегрируемой функцией на $\mathbb{R}$.

Таким образом, с учетом предыдущих равенств получаем

$$\frac{d}{d\lambda}F[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(-it)f(t)e^{-i\lambda t}dt = F[-itf(t)](\lambda).$$

**Следствие.** *Если в условиях теоремы 3 функция $t^n f(t)$ интегрируема на $\mathbb{R}$, то преобразование Фурье функции $f$ является $n$ раз непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функцией и*

$$\frac{d^n F[f](\lambda)}{d\lambda^n} = F[(-it)^n f(t)](\lambda).$$

**Теорема 4.** Если функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ и непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, причем $f'(t) \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$F[f'](\lambda) = (i\lambda)F[f](\lambda).$$

Доказательство. Применяя интегрирование по частям, получаем

$$F[f'](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ f(t)e^{-i\lambda t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt = (i\lambda)F[f](\lambda).$$

**Следствие 1.** *Если функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ непрерывно дифференцируема $n$ раз на $\mathbb{R}$, причем $f^{(n)}(t) \in L_1(\mathbb{R})$, то*

$$F[f^{(n)}](\lambda) = (i\lambda)^n F[f](\lambda).$$

**Следствие 2.** *В условиях следствия 1*

$$F[f](\lambda) = o(\lambda^{-n}), \quad \lambda \to \infty.$$

Действительно, силу теоремы 1 и следствия 1

$$F[f](\lambda) = \frac{F[f^{(n)}](\lambda)}{(i\lambda)^n} = \frac{o(1)}{(i\lambda)^n} = o(\lambda^{-n}), \quad \lambda \to \infty.$$

**Следствие 2.** *Если функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, то $F[f](\lambda) = o(\lambda^{-2})$, $\lambda \to \infty$. Следовательно, функция $F[f]$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и интеграл в формуле для обратного преобразования Фурье $f = F^{-1}[\Phi]$, где $\Phi = F[f]$, можно понимать в обычном смысле, а не в смысле главного значения по Коши.*

## 3.4 Преобразование Фурье в пространстве быстро убывающих на $\infty$ функций

Введем пространство $S_\infty$ быстро убывающих на $\infty$ функций. Это пространство играет важную роль при определении так называемых обобщенных функций, играющих важную роль в соременной математике.

Говорят, что функция $f$ принадлежит пространству $S_\infty$, если $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и для любых целых неотрицательных $p$ и $q$ выполняется условие

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p f^{(q)}(x)| < +\infty.$$

Если $f \in S_\infty$, то

$$|f^{(q)}(x)| \leq \frac{c_{p,q}}{|x|^p} \quad \forall p, q \geq 0, \qquad (*)$$

с некоторыми константами $c_{p,q}$. Из $(*)$ следует, что сама функция $f$ и все ее производные убывают на бесконечности быстрее, чем любая степенная функция. Отсюда также следует, что все производные $f^{(q)}$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Более того, для любых $p$, $q \geq 0$ функция $x^p f^{(q)}(x) \in L_1(\mathbb{R})$.

Примером функции $f \in S_\infty$ является функция $f(x) = e^{-x^2}$.

Из формулы Лейбница следует, что для любых целых неотрицательных $m$ и $n$

$$(x^m f(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} A_k x^{\alpha_k} f^{(k)}(x)$$

с некоторыми неотрицательными целыми $\alpha_k$ и константами $A_k$. Поэтому

$$\sup_{\mathbb{R}} |(x^m f(x))^{(n)}| < +\infty.$$

Более того,

$$(x^m f(x))^{(n)} = o(x^{-s}), \quad x \to \infty,$$

для любого $s \geq 0$. Справедлива

**Теорема.** *Преобразование Фурье является биекцией пространства $S_\infty$ на себя.*

Доказательство. Используя теоремы 3 и 4 из предыдущего пункта, получаем, что если функция $f \in S_\infty$, то для любых $p$, $q \geq 0$ функция $F[f]$ является $q$ раз непрерывно дифферецнируемой и

$$(i\lambda)^p \frac{d^q F[f](\lambda)}{d\lambda^q} = F\left[\frac{d^p[(-it)^q f(t)](\lambda)}{dt^p}\right],$$

откуда следует, что $F[f] \in S_\infty$, так как по теореме 2 предыдущего пункта преобразование Фурье интегрируемой функции является непрерывной функцией, стремящейся к нулю на бесконечности, т.е ограниченной.

Так как для любой функции $f \in S_\infty$ имеем $F[f] \in S_\infty$, обратное преобразование Фурье $F^{-1}$ переводит $F[f]$ в $f$, при этом $F^{-1} \circ F = F \circ F^{-1} = id_{S_\infty}$. Таким образом, $F$ обладает обратным $F^{-1}$ как слева, так и справа, следовательно, $F$ — биекция.

## 3.5 Преобразование Фурье свертки

Пусть $f_1,\ f_2 \in L_1(\mathbb{R})$. Сверткой этих функций называется функция

$$f(x) = f_1 * f_2(x) =: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi.$$

С помощью теоремы Фубини можно показать, что правая часть последнего равенства существует почти всюду и является интегрируемой по Лебегу на $\mathbb{R}$ функцией. Действительно, рассмотрим повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi) f_2(x-\xi)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-\xi)| dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(t)| dt.$$

Следовательно, существует этот повторный интеграл. Из теоремы Фубини следует, что существуют оба повторных интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi,$$

причем во втором интеграле внутренний интеграл существует почти всюду и является интегрируемой функцией; отметим, что он совпадает с функцией $f$.

**Теорема.** *Если $f_1,\ f_2 \in L_1(\mathbb{R})$, то $F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2]$.*

Доказательство. С использованием теоремы Фубини (см. ниже) можно изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, который представляет собой преобразование Фурье от свертки. Имеем, с использованием замены переменных,

$$F[f_1 * f_2](\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-\xi)e^{-i\lambda x}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)e^{-i\lambda(t+\xi)}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)e^{-i\lambda t}dt = F[f_1]\cdot F[f_2].$$

Обоснование применения теоремы Фубини. Имеем $|e^{-i\lambda x}| = 1$, поэтому $|e^{-i\lambda x}f_1(\xi)f_2(x-\xi)| = |f_1(\xi)f_2(x-\xi)|$. Повторный интеграл от функции $|f_1(\xi)f_2(x-\xi)|$ существует, этом мы показывали пере доказательством теоремы. Таким, образом, теорема Фубини применима.

# Содержание