КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (ПРЕДЕЛЫ, ПРОИЗВОДНЫЕ, ГРАФИКИ).

Учебное пособие

Казань
2012

УДК 517

Печатается по решению Редакционно-издательского совета

ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет

учебно-методической комиссии

механико-математического факультета

Протокол № 9 от 25 мая 2012 г.,

заседания кафедры математического анализа

Протокол № 6 от 11 апреля 2012 г.

Авторы-составители:

канд. физ.– мат. наук, доцент Луговая Г.Д.,

канд. физ.– мат. наук Скворцова Г.Ш.

Рецензенты

кандидат физико-математических наук, доцент Веселова Л.В.

кандидат физико-математических наук, доцент Турилова Е.А.

[**Функции одной вещественной переменной (пределы, производные, графики).**]: Учебное пособие. Издание второе, исправленное./ Луговая Г.Д., Скворцова Г.Ш. — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2012. – 85 с.

Данное учебное пособие предназначено для проведения занятий по курсу математического анализа со студентами, обучающимся по всем специальностям механико-математического факультета.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В пособии приведены некоторые теоретические сведения по темам, изучаемым в I семестре курса "Математический анализ". Также даны методические указания к решению задач по этим темам. Пособие содержит подборку задач, которые могут быть использованы для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов I курса всех специализаций механико-математического факультета.

СОГЛАШЕНИЯ

Значком $\bigtriangledown$ обозначается начало доказательства, значком $\Box$ — конец доказательства.

I. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ.

1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1.1. Определение предела. Число a называется *пределом последовательности* x_n (обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \longrightarrow a$), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ (|x_n - a| < \varepsilon).$$

1.2. Теорема о двух милиционерах.
Если $z_n \leq x_n \leq y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

1.3. Критерий Коши

Последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ (|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon).$$

1.4. Монотонные последовательности. Теорема. Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.

Замечание. Так как всякая возрастающая (убывающая) последовательность x_n ограничена снизу (сверху) числом x_1, при применении теоремы к возрастающей (убывающей) последовательности достаточно проверить ее ограниченность сверху (снизу).

1.5. Примеры.

1.5.1. Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$.

$\triangledown$ Докажем с помощью определения. Имеем $|q| < 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{|q|} > 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{|q|} = 1 + \delta$, где $\delta = \dfrac{1}{|q|} - 1 > 0$. Тогда, пользуясь формулой бинома Ньютона, получим

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1+\delta)^n = 1 + n\delta + ... > n\delta,$$

что влечет $|q|^n < \dfrac{1}{\delta n}$ и, следовательно, неравенство $|q|^n < \varepsilon$ справедливо при

$$n > \frac{1}{\varepsilon\delta} = \frac{1}{\varepsilon\left(\dfrac{1}{|q|} - 1\right)}.$$

Таким образом, $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ (в качестве N можно взять, например, $[\dfrac{1}{\varepsilon\delta}] + 1$) такое, что $\forall n > N(|q|^n < \varepsilon)$, откуда и следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. $\square$

1.5.2. Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, если $|q| > 1$.

$\bigtriangledown$ Следует из примера 1.5.1:

$$q^n = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{q}\right)^n} \longrightarrow \infty. \ \square$$

1.5.3. Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$.

$\bigtriangledown$ При $a = 1$ равенство верно. Докажем для случая $a > 1$ (тогда случай $a < 1$ будет следовать из доказанного и выкладки

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}} \longrightarrow 1).$$

Обозначим $\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1$ и докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Имеем

$$a = (\sqrt[n]{a})^n = (1 + \alpha_n)^n > n\alpha_n$$

(здесь, как и в примере 1, мы воспользовались формулой бинома), откуда $0 < \alpha_n < \dfrac{a}{n}$ и, следовательно, по теореме "о двух милиционерах" $\alpha_n \longrightarrow 0$. $\square$

1.5.4. Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$\bigtriangledown$ Как и в предыдущем примере, обозначим $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1$ и докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Пользуясь снова формулой бинома Ньютона, имеем

$$n = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + ... > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2, \qquad n \geq 2$$

Учитывая, что $n - 1 \geq \dfrac{n}{2}$ при $n \geq 2$, получим

$$n > \frac{n^2}{4}\alpha_n^2 \Longrightarrow 0 < \alpha_n < \frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \alpha_n \longrightarrow 0. \ \square$$

1.5.5. Пример. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0 \qquad (a>1).$

$\triangledown$ Воспользовавшись выкладкой предыдущего примера, получим

$$a^n=(1+a-1)^n>\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2\geq\frac{n^2}{4}(a-1)^2 \qquad (n\geq 2),$$

откуда следует, что $0<\dfrac{n}{a^n}\leq\dfrac{4}{n(a-1)^2}$ и, следовательно, по теореме "о двух милиционерах" $\dfrac{n}{a^n}\longrightarrow 0.$ $\square$

1.5.6. Пример. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0 \qquad (k\in\mathbb{N}, a>1).$

$\triangledown$ Следует из примера 1.5.5.:

$$0<\frac{n^k}{a^n}=(\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n})^k\longrightarrow 0.\square$$

1.5.7. Пример.
$x_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+...+\dfrac{\sin n}{2^n}.$

$\triangledown$ Применим критерий Коши для доказательства сходимости данной последовательности. Пусть $\varepsilon>0$ и $p\in\mathbb{N}$—произвольны. Тогда

$$|x_{n+p}-x_n|=$$

$$\left|\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+...\frac{\sin n}{2^n}+\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+...\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}-\frac{\sin 1}{2}-\frac{\sin 2}{2^2}-...\frac{\sin n}{2^n}\right|=$$

$$=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+...+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\leq\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}\right|+...+\left|\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2^{n+1}}+...+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^n}<\varepsilon \text{ при } n>N=[\log_2\frac{1}{\varepsilon}]+1.$$

(Во втором равенстве мы воспользовались формулой суммы p членов геометрической прогрессии). $\square$

1.5.8. Пример. Доказать, что последовательность x_n сходится (имеет предел).

$x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot ... \cdot \frac{n+9}{2n-1}$.

$\triangledown$ Покажем, что последовательность является убывающей.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{10 \cdot 11 \cdot ... \cdot (n+9)(n+10) \cdot 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)}{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)(2n+1) \cdot 10 \cdot 11 \cdot ... \cdot (n+9)} = \frac{n+10}{2n+1} < 1, \ n > 9.$$

Следовательно, $x_{n+1} < x_n \quad (n > 9)$, то есть x_n убывает. Кроме того, x_n ограничена снизу: $x_n > 0$. Таким образом, по теореме о монотонной ограниченной последовательности x_n является сходящейся. $\square$

1.5.9. Пример. С помощью теоремы о монотонной ограниченной последовательности доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

$\triangledown$ Так как $|x_n| \to 0$ влечет $x_n \to 0$, достаточно рассмотреть случай $a > 0$. Покажем, что последовательность $x_n = \frac{a^n}{n!}$ убывающая. Действительно, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1} n!}{a^n (n+1)!} = \frac{a}{n+1} < 1$, начиная с некоторого n. Кроме того x_n ограничена снизу: $x_n > 0$. По теореме о монотонной ограниченной последовательности существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Обозначим его через c. Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1} = \frac{a}{n+1} x_n$, получим: $c = 0 \cdot c = 0$. Таким образом, $c = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$. $\square$

1.6. УПРАЖНЕНИЯ

1.6.1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (указать $N \in \mathbb{N}$).

1)$x_n = \frac{n}{n+1}, \quad a = 1.$

2)$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad a = 0.$

3)$x_n = \frac{2n}{n^3+1}, \quad a = 0.$

4)$x_n = \frac{1}{n!}, \quad a = 0.$

5)$x_n = (-1)^n 0,999^n, \quad a = 0.$

6)$x_n = \frac{\log_b n}{n}, \quad a = 0.$

$7) x_n = \dfrac{3n-2}{2n-1}, \quad a = \dfrac{3}{2}.$

$8) x_n = \dfrac{7n+4}{2n+1}, \quad a = \dfrac{7}{2}.$

$9) x_n = \dfrac{7n-1}{n+1}, \quad a = 7.$

$10) x_n = \dfrac{9-n^3}{1+2n^3}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

$11) x_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

$12) x_n = \dfrac{n+1}{1-2n}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

$13) x_n = \dfrac{4n-1}{2n+1}, \quad a = 2.$

$14) x_n = \dfrac{2n-5}{3n+1}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$

$15) x_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}, \quad a = \dfrac{4}{3} .$

$16) x_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}, \quad a = 2.$

$17) x_n = \dfrac{2n+1}{3n-5}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$

$18) x_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}, \quad a = \dfrac{3}{4}.$

$19) x_n = \dfrac{5n+15}{6-n}, \quad a = -5.$

$20) x_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}, \quad a = -\dfrac{3}{5}.$

1.6.2. С помощью критерия Коши доказать сходимость следующих последовательностей.

$1) x_n = a_0 + a_1 q + ... + a_n q_n$, где $|a_k| < M \ (k = 0, 1, ...), \ |q| < 1.$

$2) x_n = \dfrac{\cos(1!)}{1 \cdot 2} + \dfrac{\cos(2!)}{2 \cdot 3} + ... + \dfrac{\cos(n!)}{n(n+1)}.$

$3) x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}.$

Указание. Воспользоваться неравенством $\dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ для $n \in \mathbb{N}$.

1.6.3. Пользуясь теоремой о монотонной ограниченной последовательности доказать сходимость следующих последовательностей.

$1) x_n = p_0 + \dfrac{p_1}{10} + ... + \dfrac{p_n}{10^n}$, где p_i — целые неотрицательные числа, не превышающие 9, начиная с p_1.

$2) x_n = (1 - \dfrac{1}{2})(1 - \dfrac{1}{4})...(1 - \dfrac{1}{2^n}).$

$3) x_n = (1 + \dfrac{1}{2})(1 + \dfrac{1}{4})...(1 + \dfrac{1}{2^n}).$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ.

2.1. При вычислении пределов последовательностей используются следующие арифметические свойства.

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c\lim_{n\to\infty} x_n.$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \qquad (\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0).$$

(Равенства понимаются в том смысле, что если существуют пределы в правых частях равенств, то существуют и в левых, и они равны)

2.2. Также будем использовать следующие свойства:

$$x_n \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow |x_n| \longrightarrow 0.$$

$$x_n \longrightarrow \infty \Longrightarrow \frac{1}{x_n} \longrightarrow 0.$$

$$x_n \longrightarrow 0 \Longrightarrow \frac{1}{x_n} \longrightarrow \infty.$$

2.3. Примеры.

2.3.1. Пример.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+(0,5)^n}{(0,3)^{n+1}+5} = \frac{3+0}{0+5} = \frac{3}{5}.$$

(Здесь мы воспользовались арифметическими свойствами предела и примером 1.5.1.)

В случае неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$ следует вынести старшую степень в числителе и знаменателе и сократить на нее.

2.3.2. Пример.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{100n^2}{3n^3+2}=100\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3(3+\frac{2}{n^3})}=100\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{2}{n^3}}=0.$$

2.3.3. Пример.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n+2\cdot 5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n(5\left(\dfrac{2}{5}\right)^n-3\cdot 5)}{5^n(100\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+2)}=\frac{5\cdot 0-3\cdot 5}{100\cdot 0+2}=-\frac{15}{2}.$$

2.3.4. Пример.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-n}{n+1}+\frac{n2^{-n}}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\dfrac{2}{n}-1\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}+\lim_{n\to\infty}\frac{n\dfrac{1}{2^n}}{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}=-1+0=-1.$$

Неопределенность $\infty-\infty$ приводится к $\dfrac{\infty}{\infty}$ с помощью предварительных преобразований (приведением к общему знаменателю, домножением на сопряженное и т.п.).

2.3.5. Пример.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n+1}-\frac{3n^2+1}{6n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)(6n+1)-(3n^2+1)(2n+1)}{(2n+1)(6n+1)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^3+6n+n^2+1-6n^3-2n-3n^2-1}{(2n+1)(6n+1)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-2n^2}{(2n+1)(6n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(\dfrac{4}{n}-2)}{n^2(2+\dfrac{1}{n})(6+\dfrac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{12}=-\frac{1}{6}.$$

2.3.6. Пример.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1)} = \frac{1}{2}.$$

Обратим внимание на одну типичную ошибку, допускаемую многими студентами. Например, при вычислении предела $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}-(-1)^n}$ поступают так:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}-(-1)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{-(-1)^n} = -1$, объясняя при этом, что $\dfrac{1}{n}$ и $\dfrac{1}{n^2}$ стремятся к 0, что, конечно, верно, но переход к пределу совершен не по правилам. Верное решение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}-(-1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n(-1)^n}\right)}{(-1)^n\left(\dfrac{1}{(-1)^n n^2}-1\right)} = \frac{1+0}{0-1} = -1.$$

(Здесь $\dfrac{1}{n(-1)^n}$ и $\dfrac{1}{(-1)^n n^2}$ стремятся к 0, так как стремятся к 0 их модули.)

2.4. УПРАЖНЕНИЯ

2.4.1 Вычислить пределы следующих последовательностей (найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$) [в квадратных скобках приведены ответы].

1) $x_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^5$ [1].

2) $x_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$ [1].

3) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$ [0].

4) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}+n}$ $[\dfrac{1}{2}]$.

5) $x_n = \dfrac{n^3+27}{n^4-15}$ [0].

6) $x_n = \dfrac{(n+5)^3-n(n+7)^2}{n^2}$ [1].

7) $x_n = \dfrac{3n}{5+3^{n+1}}$ [0].

8) $x_n = \dfrac{2^{n+2}+3^{n+3}}{2^n+3^n}$ [27].

9) $x_n = \dfrac{(-1)^n\cdot 6^n-5^{n+1}}{5^n-(-1)^{n+1}\cdot 6^{n+1}}$ $[\dfrac{1}{6}]$.

10) $x_n = \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$ $[\dfrac{1}{3}]$.

11) $x_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ [0].

$12) x_n = \sqrt{n^2 - 1} - (n+1) \quad [-1].$

$13) x_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} \quad [1].$

$14) x_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n \quad [\frac{2}{3}].$

$15) x_n = \frac{n}{2}(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n}} - 1) \quad [\frac{1}{3}].$

$16) x_n = \frac{n^3 + 3^n}{n + 3^{n+1}} \quad [\frac{1}{3}].$

$17) x_n = \frac{n^{10} - 1}{1 + n(1,1)^n} \quad [0].$

$18) x_n = \sqrt[n]{3^n + n \cdot 2^n} \quad [3].$

$19) x_n = \sqrt[n]{\frac{n^2 + 4^n}{n + 5^n}} \quad [\frac{4}{5}].$

$20) x_n = \sqrt[n]{\frac{10}{n} - \frac{1}{(1,2)^n}} \quad [1].$

3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

3.1. Определение. Пусть a—предельная точка множества E. Число α называется *пределом функции* $f : E \to \mathbb{R}$ в точке a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x \in E \; (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon),$$

(обозначется $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$).

3.2. Вычисление пределов функций Вычисление пределов основывается на следующих арифметических свойствах предела функции .

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

$$\lim_{x \to 1}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \qquad (\lim_{x \to a} g(x) \neq 0).$$

Равенства понимаются в том смысле, что, если существуют пределы в правых частях, то сушествуют и в левых, и они равны.

3.3. Вычисление пределов рациональных функций В случае, когда числитель и знаменатель дроби стремятся к ∞ (говорят, что имеет место *неопределенность вида* $\frac{\infty}{\infty}$), надо вынести в числителе и знаменателе старшую степень и сократить на нее (см. примеры 3.5.3., 3.5.4.).

В случае, когда числитель и знаменатель дроби стремятся к 0 (говорят, что имеет место *неопределенность вида* $\frac{0}{0}$), следует, разложив числитель и знаменатель на множители, выделить сомножитель, стремящийся к 0, и сократить на него (см. примеры 3.5.5., 3.5.6.).

Неопределенность вида $\infty - \infty$ приводится к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ (см. пример 3.5.11.).

3.4. Вычисление пределов иррациональных функций В примерах, содержащих иррациональности, для того, чтобы выделить выражение, подлежащее сокращению, следует предварительно умножить числитель и знаменатель на сопряженное (см. примеры 3.5.7., 3.5.8,3.5.11.).

3.5. Примеры.

3.5.1. Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x\to -3} \frac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7$.

$\bigtriangledown$ Докажем с помощью определения (в нашем случае

$$f(x) = \frac{2x^2+5x-3}{x+3}, a = -3, \alpha = -7).$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ оценим разность $|f(x) - \alpha| = \left|\frac{2x^2+5x-3}{x+3} + 7\right| = \left|\frac{2x^2+5x-3+7x+21}{x+3}\right| = \left|\frac{2x^2+12x+18}{x+3}\right| = \left|\frac{2(x+3)^2}{x+3}\right| = 2|x+3| < \varepsilon$ при $0 < |x+3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$. $\square$

3.5.2. Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-x-1)} = \frac{0-1}{0-1} = 1.$

3.5.3. Пример. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{1-0}{2-0-0} = \frac{1}{2}.$

3.5.4. Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+20)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{20}\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}x^{30}\left(3+\dfrac{20}{x}\right)^{30}}{x^{50}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{20}{x}\right)^{30}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\frac{2^{20}\cdot 3^{30}}{2^{50}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

3.5.5. Пример. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}.$$

3.5.6. Пример. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

3.5.7. Пример. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

(Здесь мы умножили числитель и знаменатель на $\sqrt{x+4}+2$—сопряженное к $\sqrt{x+4}-2$, затем применили в числителе формулу разности квадратов).

3.5.8. Пример. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x})((4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(\sqrt{1-x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{(1-x-9)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}=$$

$$=-\lim_{x\to-8}\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}=-\frac{4+4+4}{3+3}=-2.$$

(Здесь мы умножили числитель и знаменатель на выражения $(\sqrt{1-x}+3)$ и на $(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})$, а затем применили формулы разности квадратов в числителе и суммы кубов в знаменателе.

3.5.9. Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$.

$\bigtriangledown$ Положим $1+x=y^n$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^n-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{(y-1)(y^{n-1}+y^{n-2}+...+1)}=\frac{1}{n}.\ \square$$

3.5.10. Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

$\bigtriangledown$ Вычислим этот предел с использованием результата примера 3.5.9. Вычитая и добавляя единицу в числителе и разделив числитель и знаменатель на x, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1}{3\cdot\frac{x}{3}}-\dfrac{\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}-1}{4\cdot\frac{x}{4}}}{\dfrac{\sqrt{1+(-\frac{x}{2})}-1}{2(-\frac{x}{2})}}=$$

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{7}{36}.\ \square$$

3.5.11. Пример.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})=\{\infty-\infty\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3})}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+8x+3-x^2-4x-3}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}} =$$

$$= \{\frac{\infty}{\infty}\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{1+8/x+3/x^2}+\sqrt{1+4/x+3/x^2}} = \frac{4}{2} = 2.$$

3.6. УПРАЖНЕНИЯ

3.6.1. В следующих примерах доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что:

$$1) \lim_{x\to-2} \frac{3x^2+5x-2}{x+2} = -7.$$

$$2) \lim_{x\to3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = 2.$$

$$3) \lim_{x\to1} \frac{5x^2-4x-1}{x-1} = 6.$$

$$4) \lim_{x\to-1/2} \frac{6x^2+x-1}{x+1/2} = -7.$$

$$4) \lim_{x\to1/2} \frac{6x^2-x-1}{x-1/2} = 5.$$

$$6) \lim_{x\to-7/5} \frac{10x^2+9x-7}{x+7/5} = -19.$$

3.6.2. Вычислить пределы функций [в квадратных скобках указаны ответы].

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$ $\quad [\dfrac{1}{4}]$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$ $\quad [\dfrac{1}{5^5}]$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)(x^2+1)...(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$ $\quad [\dfrac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}]$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$ $\quad [3]$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ $\qquad [1]$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$ $\qquad [\dfrac{1}{\sqrt{2}}]$.

3.6.3. Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$ $\qquad [3]$.

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$ $\qquad [\dfrac{1}{2}]$.

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$ $\qquad [\dfrac{2}{3}]$.

4) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$ $\qquad [\dfrac{1}{4}]$.

5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ $\qquad [(\dfrac{3}{2})^{10}]$.

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ $\qquad [\dfrac{m}{n}]$.

3.6.4. Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

1) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ $\qquad [\dfrac{4}{3}]$.

2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$ $\qquad [-\dfrac{1}{16}]$.

3) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ $\qquad [\dfrac{1}{4}]$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$ $\qquad [\dfrac{1}{4}]$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$ $\qquad [\dfrac{2}{27}]$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ $\qquad [\dfrac{3}{2}]$.

3.6.5. Используя результат **примера 3.5.9.**, вычислить пределы функций [в квадратных скобках указаны ответы].

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ $\quad[\dfrac{\alpha}{m}-\dfrac{\beta}{n}]$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ $\quad[\dfrac{\beta}{n}+\dfrac{\alpha}{m}]$.

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $\quad[\dfrac{n}{m}]$.

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})...(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$ $\quad[\dfrac{1}{n!}]$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/3}((x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3})$ $\quad[\dfrac{4}{3}]$.

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$ $\quad[2]$.

3.6.6.Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$ $\quad[0]$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$ $\quad[2]$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$ $\quad[\dfrac{2}{3}]$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d})$ $\quad[\dfrac{a-c}{2}]$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$ $\quad[\dfrac{a+b}{2}]$.

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$ $\quad[\dfrac{1}{2}]$.

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ПРЕДЕЛОВ .

4.1.*Первый замечательный предел*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{\sin\mathbf{x}}{\mathbf{x}}=\mathbf{1}.$$

4.2. *Второй замечательный предел*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\infty}(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}})^{\mathbf{x}}=\mathbf{e}$$

или

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}(\mathbf{1}+\mathbf{x})^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}}=\mathbf{e}.$$

4.3. С помощью второго замечательного предела получается формула для раскрытия неопределенности вида $\mathbf{1}^{\infty}$, а именно, если $U(x)\to 1$, а $V(x)\to\infty$ при $x\to a$, то
$\lim\limits_{x\to a}U(x)^{V(x)}=e^{A}$, где $A=\lim\limits_{x\to a}(U(x)-1)V(x)$.
(Формула получается из тождественного равенства:

$$U(x)^{V(x)}=\left(\left(1+(U(x)-1)\right)^{\dfrac{1}{U(x)-1}}\right)^{(U(x)-1)V(x)}.$$

4.4. Из второго замечательного предела также получаем:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{\ln(\mathbf{1}+\mathbf{x})}{\mathbf{x}}=\mathbf{1}.$$

4.5. В свою очередь, из предыдущего получаются значения еще двух пределов:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{\mathbf{a}^{\mathbf{x}}-\mathbf{1}}{\mathbf{x}}=\ln\mathbf{a}.$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{(\mathbf{1}+\mathbf{x})^{\mu}-\mathbf{1}}{\mathbf{x}}=\mu.$$

$\bigtriangledown$ Для доказательства первого из двух равенств обозначим $a^{x}-1=\alpha$ и прологарифмируем равенство $a^{x}=1+\alpha$. Получим $x\ln a=\ln(1+\alpha)$, откуда $x=\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\ln a}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha\ln a}{\ln(1+\alpha)}=\ln a.$$

Аналогично, для доказательства второго равенства обозначим $(1+x)^{\mu}-1=\alpha$ и прологарифмируем равенство $(1+x)^{\mu}=1+\alpha$. Получим: $\mu\ln(1+x)=\ln(1+\alpha)$. Из равенств $\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\dfrac{\alpha}{x}=\dfrac{\alpha}{\ln(1+\alpha)}\cdot\dfrac{\ln(1+\alpha)}{x}=\dfrac{\alpha}{\ln(1+\alpha)}\cdot\dfrac{\mu\ln(1+x)}{x}$ с учетом того, что $x\to 0$ влечет $\alpha\to 0$, и $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{\ln(1+\alpha)}=1$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mu\ln(1+x)}{x}=\mu.\square$$

4.6. Примеры.

4.6.1. Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1.$

4.6.2. Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)}=1.$

4.6.3. Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)}=1.$

4.6.4. Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\dfrac{x^2}{4}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}.$

4.6.5. Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{(\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x})(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=2\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x+x\sin x}=$$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{\sin x}{x}}=$(с учетом примера 4.6.4.)$=2\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+1}=\dfrac{4}{3}.$

4.6.6. Пример. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(x-\pi)(x+\pi)}{\sin(\pi-x)}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(x-\pi)(x+\pi)}{-\sin(x-\pi)}==$
$-\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x-\pi}{\sin(x-\pi)}\cdot\lim\limits_{x\to\pi}(x+\pi)=-1\cdot 2\pi=-2\pi.$

4.6.7. Пример. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}=\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{2(1/2-\cos x)}{3(\pi/3-x)}=$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to\pi/3}\frac{\cos\pi/3-\cos x}{\pi/3-x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to\pi/3}\frac{-2\sin\dfrac{\pi/3+x}{2}\sin\dfrac{\pi/3-x}{2}}{\pi/3-x}=$$

$$=-\frac{2}{3}\lim_{x\to\pi/3}\sin\frac{\pi/3+x}{2}\cdot\lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin\dfrac{\pi/3-x}{2}}{\dfrac{\pi/3-x}{2}}=-\frac{2}{3}(\sin\pi/3)\cdot 1=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4.6.8. Пример. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \{1^\infty\} = e^A$, где

$$A = \lim_{x\to 0}(1+x^2-1)\operatorname{ctg}^2 x = \lim_{x\to 0} x^2\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos^2 x = 1.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} = e$.

4.6.9. Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x = e^A$, где

$$A = \lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - \frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}\right) = 1-\frac{1}{2}\cdot 0 = 1.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x = e$.

4.6.10. Пример. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}} = e^A$, где $A = \lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg}x/2-1}{x-\pi/2} =$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x/2-\cos x/2}{(\cos x/2)(x-\pi/2)} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos(\pi/2-x/2)-\cos x/2}{x-\pi/2} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{2(\sin\pi/4)\sin\dfrac{x-\pi/2}{2}}{x-\pi/2} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sqrt{2}\sin\dfrac{x-\pi/2}{2}}{2\cdot\dfrac{x-\pi/2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}} = e^{\sqrt{2}/2}$. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \{1^\infty\} = e^A$, где
$A = \lim\limits_{x\to 0}(1+x^2-1)\operatorname{ctg}^2 x =$
$= \lim\limits_{x\to 0} x^2\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} == \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x = 1.$
Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} = e$.

4.6.11. Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x = e^A$,где $A = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)x =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - \frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}\right) = 1-\frac{1}{2}\cdot 0 = 1.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x = e$.

4.6.12. Пример. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}} = e^A$, где $A = \lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg} x/2 - 1}{x-\pi/2} =$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x/2 - \cos x/2}{(\cos x/2)(x-\pi/2)} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos(\pi/2 - x/2) - \cos x/2}{x-\pi/2} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{2(\sin\pi/4)\sin\dfrac{x-\pi/2}{2}}{x-\pi/2} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sqrt{2}\sin\dfrac{x-\pi/2}{2}}{2\cdot\dfrac{x-\pi/2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}} = e^{\sqrt{2}/2}$.

4.6.13. Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\operatorname{arctg}3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(7^{2x}-1)-(5^{3x}-1)}{2x(1-\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{2x})} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{7^{2x}-1}{2x(1-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{3x})} - \lim_{x\to 0}\frac{5^{3x}-1}{3x(1-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{3x})}\cdot\frac{3}{2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{7^{2x}-1}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{3x})} - \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{5^{3x}-1}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(1-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{3x}\right)} =$$

$$= \ln 7\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3}{2}\cdot 1} - \frac{3}{2}\ln 5\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3}{2}\cdot 1} = -2\ln 7 + 3\ln 5 = \ln\frac{125}{49}.$$

4.6.14. Пример. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{\ln(1+x-1)} =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(1+(x-1))}\cdot\lim_{x\to 1}(x+1) = 1\cdot 2 = 2.$$

4.6.14. Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\dfrac{1}{x}} = \{1^\infty\} = e^A$,

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x} - 1\right)\frac{1}{x} =$$

(так как $a^x + b^x \longrightarrow 2$ при $x\to 0$)

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-a^x+b^{x^2}-b^x}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{a^x(a^{x^2-x}-1)+b^x(b^{x^2-x}-1)}{x(x-1)}\cdot(x-1) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2-x}-1}{x^2-x} - \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{b^{x^2-x}-1}{x^2-x} = -\frac{1}{2}(\ln a+\ln b) = -\ln\sqrt{ab}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\dfrac{1}{x}} = e^{-\ln\sqrt{ab}} = \dfrac{1}{\sqrt{ab}}.$

4.7. УПРАЖНЕНИЯ

4.7.1Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ $[5]$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg} 3x$ $[\frac{1}{3}]$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$ $[-\frac{5}{3}]$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$ $[\frac{7}{\pi}]$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$ $[\frac{1}{2}]$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$ $[2]$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$ $[4]$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$ $[\frac{3}{8}]$.

9) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\cos^2 x}{(\pi-x)^2}$ $[1]$.

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x^4}$ $[-1]$.

11) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$ $[\cos a]$.

12) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$ $[\frac{1}{\cos^2 a}]$.

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$ $[\frac{1}{4}]$.

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$ $[4]$.

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$ $[\frac{1}{4}]$.

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$ $[\sqrt{2}]$.

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$ $[0]$.

18) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}$ $[0]$.

19) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$ $[\frac{2}{\pi}]$.

20) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$ $[-1]$.

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ $[-\frac{1}{12}]$.

22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$ $[\frac{1}{4}]$.

4.7.2. Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$ $[e^3]$.

2) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}$ $[e^{-2}]$.

3) $\lim\limits_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$ $[e^{-1}]$.

4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\dfrac{1}{\sin x}}$ $[1]$.

5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\dfrac{1}{\sin^3 x}}$ $[\sqrt{e}]$.

6) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\dfrac{1}{x-a}}$ $[e^{\operatorname{ctg}a}]$.

7) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\dfrac{1}{x^2}}$ $[e^{3/2}]$.

8) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$ $[\dfrac{1}{e}]$.

9) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$ $[1]$.

10) $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{4}-x)\right)^{\operatorname{ctg}x}$ $[e^{-2}]$.

11) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ $[\dfrac{1}{\sqrt{e}}]$.

12) $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}$ $[e^{4/\pi}]$.

13) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{6}}$ $[e^{2/\pi}]$.

14) $\lim\limits_{x\to2\pi}(\cos x)^{\dfrac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}}$ $[e^{-1/12}]$.

15) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}}$ $[e^{2/\pi}]$.

16) $\lim\limits_{x\to2\pi}(\cos x)^{\dfrac{1}{\sin^2 2x}}$ $[e^{-1/8}]$.

17) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)^{\dfrac{1}{\cos x}}$ $[e]$.

18) $\lim\limits_{x\to4\pi}(\cos x)^{\dfrac{\operatorname{ctg}x}{\sin 4x}}$ $[e^{-1/4}]$.

19) $\lim\limits_{x\to0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ $[e^{-5/2}]$.

20) $\lim\limits_{x\to0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{\dfrac{1}{\sin^2 3x}}$ $[e^{-2/9}]$.

4.7.3 Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$ $[\ln 1764]$.

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\operatorname{arctg}x+x^3}$ $[\ln\dfrac{9}{125}]$.

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{5x}-2^{x}}{x-\sin 9x}$ $[\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{2}{243}]$.

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{3x-\operatorname{tg}2x}$ $[-2]$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+\operatorname{tg}(x^2)}$ $[1]$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin(x^3)}$ $[\ln\dfrac{8}{9}]$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{x}-2^{3x}}{\operatorname{arctg}2x-7x}$ $[\dfrac{1}{5}\ln\dfrac{8}{9}]$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{x+\sin(x^2)}$ $[3]$.

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-\operatorname{tg}x}$ $[\dfrac{1}{2}\ln(3^5\cdot 2^7)]$.

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $[\dfrac{1}{a}]$.

11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$ $[\dfrac{1}{2}]$.

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$ $[-2]$.

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$ $[\dfrac{1}{4}]$.

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$ $[50]$.

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$ $[\dfrac{1}{\ln\dfrac{a}{b}}]$.

16) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\dfrac{1}{x}}$ $[e^2]$.

17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\dfrac{1}{x^2}}$ $[\dfrac{2}{3}]$.

18) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$ $[a^{a^a}\ln a]$.

19) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}-a^{x-h}-2a^x}{h^2}$ $[a^x\ln^2 a]$.

20) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\dfrac{1}{x}}$ $[\sqrt[3]{abc}]$.

5. ПЕРЕХОД К ЭКВИВАЛЕНТНЫМ ФУНКЦИЯМ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДЕЛОВ.

5.1. Определение. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* при $x\to a$ (пишут $f(x)\sim g(x)$ ($x\to a$)), если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

5.2. Теорема. Если $f(x)\sim g(x)(x\to a)$, и существует $\lim\limits_{x\to a}g(x)h(x)$, то существует $\lim\limits_{x\to a}f(x)h(x)$, и $\lim\limits_{x\to a}f(x)h(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)h(x)$.

5.3. Приведем ряд эквивалентностей, используемых при вычислении пределов.

$\sin x \sim x \quad (x \to 0)$,

$\arcsin x \sim x \quad (x \to 0)$,

$\operatorname{tg} x \sim x \quad (x \to 0)$,

$\operatorname{arctg} x \sim x \quad (x \to 0)$,

$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2 \quad (x \to 0)$,

$\ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0)$,

$a^x - 1 \sim x \ln a \quad (x \to 0)$,

$e^x - 1 \sim x \quad (x \to 0)$,

$(1+x)^\mu \sim \mu x \quad (x \to 0)$,

$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{1}{n}x \quad (x \to 0)$.

5.4. Примеры.

5.4.1. Пример. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin\left(\dfrac{x^2}{\pi}\right)}{2^{\sqrt{\sin x+1}} - 2} = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin\left(\pi - \dfrac{x^2}{\pi}\right)}{2(2^{\sqrt{\sin x+1}-1} - 1)} =$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{\pi - \dfrac{x^2}{\pi}}{2(\sqrt{\sin x + 1} - 1)\ln 2} = \lim_{x\to\pi} \frac{\pi^2 - x^2}{2\pi \cdot \dfrac{1}{2}\sin x \cdot \ln 2} =$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{(\pi - x)(\pi + x)}{\pi \sin(\pi - x) \cdot \ln 2} = \frac{2}{\ln 2}.$$

(Здесь мы применили следующие эквивалентности:
$\sin(\pi - \dfrac{x^2}{\pi}) \sim \pi - \dfrac{x^2}{\pi}$ (так как $\pi - \dfrac{x^2}{\pi} \to 0$ при $x \to \pi$),
$2^{\sqrt{\sin x+1}-1} - 1 \sim (\sqrt{\sin x + 1} - 1)\ln 2$ (так как $\sqrt{\sin x + 1} - 1 \to 0$ при $x \to \pi$),
$\sqrt{\sin x + 1} - 1 \sim \dfrac{1}{2}\sin x$ (так как $\sin x \to 0$ при $x \to \pi$).)

5.4.2. Пример. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{tg}(\ln(3x-5))}{e^{x+3} - e^{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(3x-5)}{e^{x^2+1}(e^{x+3-x^2-1} - 1)} =$

$$= \frac{1}{e^5}\lim_{x\to 2} \frac{\ln(1 + (3x-6))}{x - x^2 + 2} = -\frac{1}{e^5}\lim_{x\to 2} \frac{3x-6}{(x-2)(x+1)} =$$

$$= -\frac{3}{e^5}\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{e^5}.$$

(Здесь мы применили следующие эквивалентности:
$\operatorname{tg}(\ln(3x-5)) \sim \ln(3x-5)$ (так как $\ln(3x-5) \to 0$ при $x \to 2$),
$e^{x-x^2+2} - 1 \sim x - x^2 + 2$ (так как $x - x^2 + 2 \to 0$ при $x \to 2$),
$\ln(1 + (3x-6)) \sim 3x - 6$ (так как $3x - 6 \to 0$ при $x \to 2$).)

5.5. УПРАЖНЕНИЯ

5.5.1 Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+ax))}{\sin bx}$ $[\dfrac{2a}{b}]$.

2) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\ln(\sin x)}{(2x-\pi)^2}$ $[-\dfrac{1}{8}]$.

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1}{1+\cos(\pi x)}$ $[\dfrac{2}{3\pi^2}]$.

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))}$ $[-2]$.

5) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(x^3-\pi^3)\sin(5x)}{e^{\sin^2 x}-1}$ $[-15\pi^2]$.

6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{x^2-a^2}-1}{\operatorname{tg}(\ln(\frac{x}{a}))}$ $[2a^2\ln a]$.

7) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 4x)}$ $[-\dfrac{1}{4}]$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x-\sin x}$ $[2]$.

9) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(\frac{x+2}{2})}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$ $[-\dfrac{2}{27}\ln 3]$.

10) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\ln(\cos x)}{3^{\sin 2x}-1}$ $[0]$.

11) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}(e^{x+2}-e^{x^2-4})}{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2}$ $[\dfrac{5}{\cos^2 2}]$.

12) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}$ $[\dfrac{1}{2\ln^2 3}]$.

13) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e}$ $[\dfrac{3}{11e}]$.

14) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}(3^{\pi/x}-3)}{3^{\cos(3x/2)}-1}$ $[-\dfrac{2}{\pi}]$.

15) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}$ $[-\dfrac{2}{\pi}]$.

16) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\operatorname{tg} 2x}}{\ln\frac{2x}{\pi}}$ $[-2\pi]$.

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin(\alpha x)-\sin(\beta x)}$ $[1]$.

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$ $[\dfrac{1}{\ln\frac{a}{b}}]$.

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$ $[1]$.

20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$ $[-2]$.

21) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x}{h}$ $[\dfrac{1}{1+x^2}]$.

22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$ $[2]$.

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6. ПРОИЗВОДНАЯ ЯВНОЙ ФУНКЦИИ

6.1. Определение производной. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x. Функция f называется *дифференцируемой* в точке x, если существует

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Этот предел называется *производной* f *в точке* x и обозначается $f'(x)$. Функция называется *дифференцируемой на интервале*, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

На практике производную функции чаще вычисляют с помощью основных правил дифференцирования, используя уже известные производные элементарных функций.

6.2. *Производные элементарных функций.*

$$(x^n)'=nx^{n-1}\ (n\text{— константа}),\quad (\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\quad (\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2},\quad (\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2},$$

$$(a^x)'=a^x\ln a,\quad (e^x)'=e^x,\quad (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},\quad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x,\quad (\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x,\quad (\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},\quad (\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

6.3. *Основные правила дифференцирования.*

6.3.1. *Производные суммы, произведения и частного.* Если функции f и g дифференцируемы в точке x и C—константа, то

$$(Cf(x))'=Cf'(x);$$

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

6.3.2. *Производная сложной функции.* Если функция g дифференцируема в точке x, функция f дифференцируема в точке $g(x)$, то

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

6.3.3. *Производная функции вида* $f(x)^{g(x)}$. По свойствам 6.3.1.и 6.3.2. если функции f и g дифференцируемы в точке x и $f(x)>0$, то

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}\right).$$

При дифференцировании функции, заданной фигурной скобкой, пользуются следующим свойством производной.

6.4. Пусть

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad f'_+(x) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(эти пределы называются соответственно *левой* и *правой* производной функции f в точке x.) Функция f в точке x дифференцируема тогда и только тогда, когда

$$f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x).$$

6.5. Примеры.

6.5.1. Найти $f'(1)$, если $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$.

$\bigtriangledown$ Найдем $f'(1)$ с помощью определения.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h-1)(1+h-2)^2(1+h-3)^3-0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(h-1)^2(h-2)^3}{h} = (-1)^2(-2)^3 = -8.\square$$

6.5.2. Найти $f'(x)$, если $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

$\bigtriangledown$ По формуле производной сложной функции

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(x + \sqrt{x}\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right).\square$$

6.5.3. Найти $f'(x)$, если $f(x) = \cos x \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

$\bigtriangledown$ По формулам производной произведения и производной сложной функции

$$f'(x) = \cos' x \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \cos x\left(\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' = -\sin x \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{\cos x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' =$$

$$= -\sin x \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{\cos x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)' = -\sin x \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{\cos x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{2} =$$

$$= -\sin x \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{\cos x}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}.\square$$

6.5.4. Найти $f'(x)$, если $f(x) = (\arccos x)^x$.

$\bigtriangledown$ Запишем функцию в следующем виде $f(x) = e^{\ln(\arccos x)^x} = e^{x \ln \arccos x}$. Теперь по формуле производной сложной функции

$$f'(x) = e^{x \ln \arccos x}\left(x \ln \arccos x\right)' =$$

$$= (\arccos x)^x\left(\ln \arccos x + \frac{x}{\arccos x}(\arccos x)'\right) =$$

$$= (\arccos x)^x\left(\ln \arccos x + \frac{x}{\arccos x}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right) =$$

$$= (\arccos x)^x\left(\ln \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right).$$

Также можно было использовать формулу 6.3.3.$\square$

6.5.5. Найти $f'(x)$, если

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{при } -\infty < x < 1, \\ (1-x)(2-x) & \text{при } 1 \le x \le 2, \\ -(2-x), & \text{при } 2 < x + \infty. \end{cases}$$

$\bigtriangledown$ Во всех точках числовой прямой, за исключением точек $x = 1$ и $x = 2$, производная вычисляется по основным правилам и

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\infty < x < 1, \\ -3 + 2x & \text{при } 1 < x < 2, \\ 1, & \text{при } 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

Посчитаем $f'(1)$ и $f'(2)$. Вначале, в точках $x = 1$ и $x = 2$ найдем левые и правые производные $f'_-(1), f'_+(1)$ и $f'_-(2), f'_+(2)$:

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0-} \frac{(1 - (1 + h)) - 0}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-h}{h} = -1,$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0+} \frac{(1 - (1 + h))(2 - (1 + h)) - 0}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{-h(1 - h)}{h} = -1.$$

Так как $f'_-(1) = f'_+(1)$, то

$$f'(1) = f'_-(1) = f'_+(1) = -1.$$

Аналогично

$$f'_-(2) = \lim_{h \to 0-} \frac{(1 - (2 + h))(2 - (2 + h)) - 0}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{(-1 - h)(-h)}{h} = 1,$$

$$f'_+(2) = \lim_{h \to 0+} \frac{-(2 - (2 + h)) - 0}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h}{h} = 1.$$

Значит $f'(2) = 1.\square$

6.5.6. Найти $f'(x)$, если $f(x) =\mid x \mid$.

$\bigtriangledown$ Во всех точках числовой прямой, за исключением точки $x = 0$ производная вычисляется по основным правилам и

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ 1, & \text{при } 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Найдем $f'_-(0)$, $f'_+(0)$.

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{\mid h \mid -0}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-h}{h} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{\mid h \mid -0}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h}{h} = 1.$$

Так как левая и правая производные в точке $x = 0$ не совпадают, то функция $f(x) = \mid x \mid$ в этой точке не дифференцируема.$\square$

6.6. УПРАЖНЕНИЯ

6.6.1. Исходя из определения, найти производные следующих функций:

$$1) y = \sqrt[3]{x}, 2) y = \arcsin x, 3) y = \operatorname{arctg} x.$$

6.6.2. Найти $f'(2)$, если $f(x) = x^2 \sin(x-2)$.

6.6.3. Пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

$$1) y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$2) y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}},$$

$$3) y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}},$$

$$4) y = \sin(\sin(\sin x)),$$

$$5) y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2},$$

$$6) y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x},$$

$$7) y = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}},$$

$$8) y = e^x + e^{x^x} + e^{x^{x^x}},$$

$$9) y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b,$$

$$10) y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x},$$

$$11) y = \ln\frac{x^2-1}{x^2+1},$$

$$12) y = \ln(\ln^2(\ln^3 x)),$$

$$13) y = \ln^3 x^2,$$

$$14) y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),$$

$$15) y = x\ln^2(x + \sqrt{x^2+1}) - 2\sqrt{x^2+1},$$

$$16) y = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

$$17) y = x(\sin\ln x - \cos\ln x),$$

$$18) y = \arccos\frac{1}{x},$$

$$19) y = \arcsin(\sin x),$$

$$20) y = \arccos(\cos^2 x),$$

$$21) y = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x},$$

$$22) y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2},$$

$$23) y = \frac{1}{\arccos^2 x^2},$$

$$24) y = \ln(1+\sin^2 x) - 2\sin x \operatorname{arctg}(\sin x),$$

$$25) y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}},$$

$$26) y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x),$$

$$27) y = \sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin x,$$

$$28) y = \log_x e$$

$$29) y = x + x^x + x^{x^x},$$

$$30) y = \sqrt[x]{x},$$

$$31) y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x},$$

$$32) y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}},$$

$$33) y = \ln \operatorname{ch} x + \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x},$$

$$34) y = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} + \ln \operatorname{cth} \frac{x}{2},$$

$$35) y = \arccos \frac{1}{\operatorname{ch} x},$$

$$36) y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x).$$

6.6.4. Найти производные следующих функций:

$$1) f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x < 0, \\ \ln(1+x) & \text{при } 0 \geq x. \end{cases}$$

$$2) f(x) = x \mid x \mid .$$

6.6.5. Найти левую и правую производную, если:

$$1) f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \text{ ,при } x \neq 0, f(0) = 0,$$

$$2) f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$$

$$3) f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} & \text{при } x < 0, \\ \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^4}} & \text{при } 0 \geq x. \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} & \text{при } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

7. ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ. ПРОИЗВОДНАЯ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

7.1. *Производная обратной функции.* Пусть функция $f(x)$ обладает непрерывной производной на интервале (a, b), причем $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Тогда $f(x)$ на интервале (a, b) имеет однозначную дифференцируемую обратную функцию $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$ и $\forall y_0 = f(x_0)$

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

7.2. *Производная функции, заданной параметрически.* Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ дифференцируемы интервале (α, β), причем производная $x'(t)$ непрерывна и $x'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$. Тогда на интервале $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$ определена однозначная дифференцируемая функция от переменной x вида $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ и $\forall x_0 = \varphi(t_0)$

$$f'_x(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

7.3. *Производная функции, заданной неявно.* Если функция $f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то, дифференцируя тождество

$$F(x, f(x)) = 0$$

как сложную функцию, можно найти $f'_x(x)$.

7.4. Примеры.

7.4.1. Выделить однозначные непрерывные ветви обратной функции $x = x(y)$ и найти их производные, если $f(x) = 2x^2 - x^4$. Найти $x'(0)$.

$\bigtriangledown$ Функция $f(x) = 2x^2 - x^4$ является дифференцируемой и ее производная $f'(x) = 4x - 4x^3$ непрерывна. В точках $x = 0$, $x = 1$, и $x = -1$ производная $f'(x) = 4x - 4x^3 = 0$. Эти точки разбивают числовую прямую на 4 интервала $(\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, \infty)$. Обозначим

$$f_1(x) = f(x)(x \in (\infty, -1)), \quad f_2(x) = f(x)(x \in (-1, 0)),$$

$$f_3(x) = f(x)(x \in (0, 1)), \quad f_4(x) = f(x)(x \in (1, \infty)).$$

Производные $f'_i(x) \neq 0 (i = 1, 2, 3, 4)$, значит определены однозначные дифференцируемые обратные функции $x_i(y) = f_i^{-1}(y) (i = 1, 2, 3, 4)$. Эти обратные функции являются однозначными непрерывными ветвями обратной функции $x = x(y)$ и для $y = 2x^2 - x^4$

$$(f_i^{-1})'(y) = \frac{1}{4x - 4x^3} (i = 1, 2, 3, 4).$$

Для того, чтобы найти $x'(0)$, сначала выясним, при каких значениях x переменная $y = 0$. Для этого решим уравнение $2x^2 - x^4 = 0$. Корнями уравнения являются значения $x = 0$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$. Точка $x = 0$ является границей одного из интервалов, указанных выше, поэтому обратная функция не определена однозначно, следовательно производная не определена. Точка $x = \sqrt{2} \in (1, \infty)$, следовательно, $x = \sqrt{2} = x_4(0)$, производная считается по формуле, выведенной выше и

$$x'(0) = (f_4^{-1})'(0) = \frac{1}{4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}^3} = \frac{1}{4\sqrt{2}(1-2)} = \frac{-1}{4\sqrt{2}}.$$

Аналогично при $x = -\sqrt{2} = x_1(0)$ производная

$$x'(0) = (f_1^{-1})'(0) = \frac{1}{-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}^3} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.\square$$

7.4.2. Найти производную $f'_x(x)$ от функции $y = f(x)$, заданной параметрически уравнениями $x = -1 + 2t - t^2, y = 2 - 3t + t^3$. Чему равна $f'_x(x)$ при $x = 0$ и $x = -1$.

$\bigtriangledown$ Продифференцируем $x(t)$ и $y(t)$. Получаем производные

$$x'(t) = 2 - 2t, y'(t) = -3 + 3t^2.$$

Производная $x'(t) = 2 - 2t = 0$ при $t = 1$. Следовательно, данными параметрическими уравнениями определены две однозначные дифференцируемые функции: $f_1(x)$ при $t < 1$ и $f_2(x)$ при $t > 1$. При $t \neq 1$ производные обеих функций имеют вид

$$f'_x(x) = \frac{-3 + 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3(1+t)}{2}.$$

Так как $x = -1$ при $t = 0$ и $t = 2$, то

$$(f_1)'(-1) = \frac{-3 + 3 \cdot 0}{2 - 2 \cdot 0} = \frac{-3}{2}$$

$$(f_2)'(-1) = \frac{-3 + 3 \cdot (2)^2}{2 - 2 \cdot 2} = \frac{-9}{2}.$$

В точке $t=1$ (т.е. при $x=0$) производная $f'(x)$ не может быть найдена по формуле из 7.2. Попробуем найти производную по определению:

$$f'_x(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{t\to 0}\frac{y(1+t)-y(1)}{x(1+t)-x(1)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2-3(1+t)+(1+t)^3-0}{-1+2(1+t)-(1+t)^2-0}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3t^2+t^3}{-t^2}=-3.\square$$

7.4.3. Найти производную $y'_x(x)$ от функции $y=f(x)$, заданной неявно следующим уравнением

$$x^2+2xy-y^2=2x.$$

Чему равно $y'_x(x)$ при $x=2, y=4$ и при $x=2, y=0$.

$\bigtriangledown$ Запишем данное уравнение в виде $x^2+2xy(x)-y^2(x)=2x$ и продифференцируем его как сложную функцию. Получаем

$$2x+2y(x)+2xy'(x)-2y(x)y'(x)=2.$$

Откуда выражаем

$$y'_x(x)=\frac{2-2x-2y(x)}{2x-2y(x)}=\frac{1-x-y(x)}{x-y(x)}.$$

Следовательно,

$$\text{при } x=2, y=4 \text{ производная } y'_x(2)=\frac{1-2-4}{2-4}=\frac{5}{2},$$

$$\text{при } x=2, y=0 \text{ производная } y'_x(2)=\frac{1-2-0}{2-0}=\frac{-1}{2}.\square$$

7.4.3. Найти производную $y'_x(x)$ от функции $y=f(x)$, заданной в полярной системе координат $r=a(1+\cos\varphi)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}, \varphi=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

$\bigtriangledown$ Можно считать, что функция $y=f(x)$ задана параметрически с параметром φ следующими уравнениями

$$x=r\cos\varphi=a(1+\cos\varphi)\cos\varphi,$$

$$y=r\sin\varphi=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi.$$

Найдем производные

$$x'(\varphi) = -a\sin\varphi\cos\varphi - a(1+\cos\varphi)\sin\varphi =$$

$$= -2a\sin\varphi\cos\varphi - a\sin\varphi = -a(\sin 2\varphi + \sin\varphi) = -2a\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2},$$

$$y'(\varphi) = -a\sin^2\varphi + a(1+\cos\varphi)\cos\varphi) = a(\cos 2\varphi + \cos\varphi) = 2a\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Заметим, что $x'(\varphi) = 0$ при $\varphi = 0, \pm\frac{2\pi}{3}$. Тогда, при $\varphi \neq 0, \pm\frac{2\pi}{3}$, по формуле пункта 7.2,

$$f'_x(x) = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{2a\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}}{-2a\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\varphi}{2}\right).\square$$

7.5. УПРАЖНЕНИЯ

7.5.1 Показать, что существует однозначная дифференцируемая обратная функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению $y^3 + 3y = x$ и найти ее производную.

7.5.2. Выделить однозначные непрерывные ветви обратной функции $x = x(y)$ и найти их производные, если

$$1) = \frac{x^2}{1+-x^2},$$

$$2) = 2e^{-x} - e^{-2x}.$$

7.5.3. Найти производные $y'_x(x)$ от функций, заданных параметрически уравнениями

$$1) x = \sin^2 t, y = \cos^2 t,$$

$$2) x = \operatorname{ch} t,\ y = \operatorname{sh} t,$$

$$3) x = e^{2t}\cos^2 t,\ y = e^{2t}\sin^2 t,$$

$$4) x = \arcsin\frac{t}{1+t^2},\ y = \arccos\frac{1}{1+t^2}.$$

7.5.4. Найти производные $y'_x(x)$ от функций, заданных неявно

$$1) y^2 = 2px,$$

$$2)\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$
$$3)x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

7.5.5. Найти производные $y'_x(x)$ от функций, заданных в полярной системе координат $1) r=a\varphi,$, $2) r=ae^{m\varphi}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

8.1. Если функция f дифференцируема в точке x, то производная $f'(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции, проведенной в точке $(x, f(x))$.

8.2. *Уравнения касательной и нормали.* Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции $y=f(x)$, проведенной в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Уравнение нормали к графику дифференцируемой функции $y=f(x)$, проведенной в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Говорят, что кривые $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ пересекаются под углом α, если под углом α пересекаются касательные к этим кривым, проведенные в точке пересечения x_0. Угол $\alpha=\mid \operatorname{arctg} f_1'(x_0)-\operatorname{arctg} f_2'(x_0)\mid$.

8.3. *Бесконечная производная.* Если функция f непрерывна в точке x и

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\infty,$$

то говорят, что в точке x функция имеет бесконечную производную. В этом случае касательная к графику функции f в точке $(x, f(x))$ перпендикулярна оси Ox.

8.4. Примеры.

8.4.1. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$$

в точках $A(-1,0)$, $B(2,3)$ и $C(3,0)$.

$\bigtriangledown$ Найдем производную от данной функции:

$$y'(x) = \sqrt[3]{3-x} - \frac{x+1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}}.$$

Так как $y'(-1) = \sqrt{4}$, $y(-1) = 0$, то уравнение касательной к графику данной функции в точке A имеет вид: $y = \sqrt{4}(x+1)$.

Так как $y'(2) = 0$, $y(2) = 3$, то касательная к графику функции в точке B параллельна оси Ox. Уравнение касательной в точке B имеет вид : $y = 3$.

В точке $C(3,0)$ функция имеет бесконечную производную, так как

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(4+h)\sqrt[3]{h}-0}{h} = \infty.$$

Значит касательная к графику функции в точке $C(3,0)$ перпендикулярна оси Ox и ее уравнение $x = 0$.$\square$

8.4.2. Определить угол между левой и правой касательными к кривой

$$y = \sqrt{1-e^{-a^2x^2}} \text{ в точке } x = 0.$$

$\bigtriangledown$ Найдем $f'_-(0), f'_+(0)$.

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{\sqrt{1-e^{-a^2h^2}}-0}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\mid ah \mid}{h} = -\mid a \mid,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{\sqrt{1-e^{-a^2h^2}}-0}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\mid ah \mid}{h} = \mid a \mid .$$

Так как левая и правая производные в точке $x = 0$ не совпадают, то заданная функция в этой точке не дифференцируема. В точке $x = 0$ можно построить касательную к левой части графика (левую касательную) и к правой части графика (правую касательную). Угловой коэффициент левой касательной равен $k_1 = -\mid a \mid$, а угловой коэффициент правой касательной $k_2 = \mid a \mid$. Пусть

α — угол между левой касательной и положительным направлением оси, а β — угол между правой касательной и положительным направлением оси. Тогда $\mathrm{tg}(\alpha) = - \mid a \mid , \mathrm{tg}(\beta) = \mid a \mid$. Угол между касательными есть угол $\gamma = \beta - \alpha$ и

$$\mathrm{tg}(\gamma) = \frac{-2 \mid a \mid}{1 - a^2}. \square$$

8.4.3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой, задаваемой параметрическими уравнениями $x(t) = 2t - t^2$, $y(t) = 3t - t^3$ в точках $t = 0, t = 1$.

$\bigtriangledown$ Продифференцируем $x(t)$ и $y(t)$. Получаем производные

$$x'(t) = 2 - 2t, y'(t) = 3 - 3t^2.$$

Производная $x'(t) = 2 - 2t = 0$ при $t = 1$. Следовательно, данными параметрическими уравнениями определены две однозначные дифференцируемые функции: $f_1(x)$ при $t < 1$ и $f_2(x)$ при $t > 1$. При $t \neq 1$ производные обеих функций имеют вид

$$f'(x) = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t}.$$

В точке $t = 0$ переменная $x(0) = 0$, значение функции $f_1(x) = f_1(0) = y(0) = 0$ и производная $f'(0) = \frac{3}{2}$. Следовательно, уравнение касательной в точке $t = 0$ имеет вид $y = \frac{3}{2}x$, а уравнение нормали $y = \frac{-2}{3}x$. В точке $t = 1$ переменная $x(1) = 1$, значение функции $f(x) = f(1) = y(1) = 2$. Так как $x'(t) = 2 - 2t = 0$ при $t = 1$ производная $f'(x)$ не может быть найдена по формуле из 2.2. Найдем производную по определению:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{t \to 0} \frac{y(1+t) - y(1)}{x(1+t) - x(1)} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{3(1+t) - (1+t)^3 - 2}{2(1+t) - (1+t)^2 - 1} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-3t^2 - t^3}{-t^2} = 3.$$

Следовательно, уравнение касательной в точке $t = 1$ имеет вид

$$y - 2 = 3(x - 1), \text{т.е. } y = 3x - 1,$$

а уравнение нормали

$$y - 2 = \frac{-(x-1)}{3}, \text{т.е. } y = \frac{-x}{3} + 2\frac{1}{3}. \square$$

8.5. УПРАЖНЕНИЯ.

8.5.1. В каких точках кривой $y = 2 + x - x^2$ касательная к ней а) параллельна оси ординат, б) параллельна биссектрисе первого координатного угла

8.5.2. Напишите уравнения касательных к следующим кривым в заданных точках

$$1) y(x) = \sqrt{5 - x^2}, M(1;2);$$

$$2) y(x) = \arcsin\frac{x}{2}, M(0;0).$$

$$3) y(x) = \ln\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}, M(0;0);$$

$$4) y(x) = \cos 2x - 2\sin x, M(\pi;1).$$

8.5.3. Найдите углы, под которыми пересекаются следующие пары кривых:

$$1) y = x^2 \text{ и } x = y^2,$$

$$2) y = \sin x \text{ и } y = \cos x.$$

8.5.4. Найдите угол между правой и левой касательными к кривой:

$$1) y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2} \text{ в точке } x = 1,$$

$$2) y = \sqrt{2x^3 + 9x^2} \text{ в точке } x = 0.$$

8.5.5. Напишите уравнения касательных к следующим кривым

$$1) x = 2t - t^2, y = 3t - t^3 \text{ в точках } t = 0; t = 1,$$

$$2) x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3} \text{ в точках } t = 0; t = 1; t = \infty.$$

8.5.6. Напишите уравнения касательных к следующим кривым в заданных точках

$$1) \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, M(6;6,4);$$

$$2) yx + \ln y = 1, M(1;1);$$

$$3) x^5 + y^5 = 2xy, M(1;1).$$

9. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ.

9.1. Функция f имеет конечную производную в точке x тогда и только тогда, когда приращение функции может быть представленно в виде

$$\triangle f(x) = f(x+dx) - f(x) = A(x)dx + o(dx) \ (dx \to 0).$$

Линейная часть этого приращения называется *дифференциалом функции* f *в точке* x и обозначается $df(x)$. Дифференциал равен

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Пренебрегая бесконечно малой $o(dx)$, для приближенных подсчетов можно пользоваться формулой

$$f(x+dx) - f(x) \approx f'(x)dx \ (dx \to 0).$$

9.2. Примеры.

9.2.1. Для функции $f(x) = x^3 - 2x + 1$ определить $\triangle f(1), df(1)$ и сравнить их, если $dx = 1; dx = 0,1; dx = 0,01$.

$\bigtriangledown$ Выведем формулы для приращения и дифференциала функции. Приращение функции

$$\triangle f(1) = f(1+dx) - f(1) = (1+dx)^3 - 2(1+dx) + 1 - 0 = (dx)^3 + 3(dx)^2 + dx.$$

Для того, чтобы найти дифференциал функции, вычислим производную

$$f'(x) = 3x^2 - 2, f'(1) = 1.$$

Дифференциал равен $df(1) = f'(1)dx = dx$. Представим результаты вычислений в виде таблицы

$dx = 1$	$\triangle f(1) = 5$	$df(1) = 1$
$dx = 0,1$	$\triangle f(1) = 0,131$	$df(1) = 0,1$
$dx = 0,01$	$\triangle f(1) = 0,010301$	$df(1) = 0,01.$

Как видно из таблицы, при убывании к нулю значений dx значения $\triangle f(1)$ и $df(1)$ становятся приблизительно равны. $\square$

9.2.2. Найти $d(\sqrt{a^2+x^2})$.

$\triangledown$ Для того, чтобы найти дифференциал , найдем

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Тогда по формуле из 4.1

$$df(x) = f'(x)dx = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx. \square$$

9.2.3. Пусть u, v — дифференцируемые функции от x. Найти $d\left(\frac{u}{v^2}\right)$.

$\triangledown$ Используя правила нахождения производной, получаем

$$d\left(\frac{u}{v^2}\right) = \frac{v^2du - udv^2}{v^4} = \frac{v^2du - 2uvdv}{v^4}.$$

9.2.4. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно $\sqrt[3]{1,02}$.

$\triangledown$ Обозначим $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Нужно найти $f(1+0,02)$. Заменяя приращение функции дифференциалом, получим $f(1+dx) - f(1) \approx f'(1)dx$. При $dx = 0,02$, формула примет вид $f(1+0,02) \approx f'(1)0,02 + f(1)$. Для окончательного результата осталось вычислить $f'(x)$ в точке $x = 1$ и $f(1)$:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ f'(1) = \frac{1}{3},\ f(1) = 1.$$

Следовательно

$$\sqrt[3]{1,02} = f(1+0,02) \approx f'(1)0,02 + f(1) = \frac{0,02}{3} + 1 \approx 1,0067. \square$$

9.3. УПРАЖНЕНИЯ.

9.3.1. Найдите дифференциал функции y, если

$$1)y = \frac{1}{x},\qquad 4)y = \sin x - x\cos x,$$

$$2)y = \arcsin\frac{x}{a},\qquad 5)y = xe^x,$$

$$3)y = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}|,\qquad 6)y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}},$$

$$7)y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9.3.2. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно 1) $\sin 29^\circ$, 2) $\operatorname{arctg} 1,05$, 3) $\ln 11$.

9.3.3. Доказать приближенную формулу

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}},\ a > 0,\ x \to 0.$$

С помощью этой формулы приближенно вычислить 1) $\sqrt[3]{9}$, 2) $\sqrt[4]{80}$, 3) $\sqrt[7]{100}$, 4) $\sqrt[10]{1000}$.

10. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

10.1. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и f, g определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности U точки a, причем $g(x), g'(x) \neq 0$ и выполнено одно из условий

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad ,$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, если существует (возможно, несобственный) предел в правой части. Правило верно также для случаев $a = \infty, \pm\infty, x \to a\pm$.

10.2. *Раскрытие неопределенностей других видов.* Раскрытие неопределенностей вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ путем алгебраических преобразований приводится к раскрытию неопределенностей двух основных типов $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Для раскрытия неопределенностей вида $0^0, \infty^0, 1^\infty$ при вычислении пределов функций $\varphi(x) = (f(x))^{g(x)}$, следует представить функцию $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = e^{g(x)\ln f(x)}$$

и свести вычисление предела функции $g(x)\ln f(x)$ к раскрытию неопределенности вида $0\cdot\infty$.

При раскрытии неопределенностей с помощью правила Лопиталя можно пользоваться замечательными пределами и эквивалентностями.

10.3. Примеры.

10.3.1. Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}=\{\dfrac{0}{0}\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\operatorname{tg}x-x)'}{(x-\sin x)'}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}=2.$$

10.3.2. Пример. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}=\{\dfrac{\infty}{\infty}\}=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{(\operatorname{tg}3x)'}{(\operatorname{tg}x)'}=$

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=3\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 3x}=\{\frac{0}{0}\}=3\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{2\cos 3x\cdot(-\sin 3x)\cdot 3}=$$

$$=-\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\cos 3x}=\{\frac{0}{0}\}=-\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\sin x}{(-\sin 3x)\cdot 3}=\frac{1}{3}.$$

10.3.3. Пример. $\lim\limits_{x\to 0+}x^2\cdot\ln x=\{0\cdot\infty\}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{1/x^2}=\{\dfrac{\infty}{\infty}\}=$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{(1/x^2)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-2/x^3}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0+}x^2=0.$$

10.3.4. Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\{\dfrac{0}{0}\}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\{\frac{0}{0}\}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$$

10.3.5. Пример. $\lim\limits_{x\to 0+}x^x=\{0^0\}=\lim\limits_{x\to 0+}e^{x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}x\cdot\ln x}$,

$\lim\limits_{x\to 0+}x\cdot\ln x=\{0\cdot\infty\}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{1/x}=\{\dfrac{\infty}{\infty}\}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=0.$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0+}x^x=e^0=1$.

10.3.6. Пример. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = \{\infty^0\} = e^{\lim\limits_{x\to\pi/2} 2\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg} x)}$,

$$\lim_{x\to\pi/2}\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg} x) = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\dfrac{1}{\cos x}} = \{\frac{\infty}{\infty}\} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{-\dfrac{1}{\cos^2 x}(-\sin x)} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = e^0 = 1.$

10.3.7. Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \{1^\infty\} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2} = \{\frac{0}{0}\} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\cdot 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3} = \{\frac{0}{0}\} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{6x^2} = -\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{-1/6}$. В этом примере мы воспользовались известным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1.\square$

10.4. УПРАЖНЕНИЯ.

10.4.1. Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ $[\dfrac{a}{b}]$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^2}$ $[1]$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}$ $[-2]$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg}x-1}{x^2}$ $[-\dfrac{1}{3}]$.

5) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$ $[\dfrac{1}{3}]$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$ $[\dfrac{1}{6}]$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$ $[\dfrac{1}{2}]$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$ $[1]$.

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$ $[\dfrac{\ln a}{6}]$.

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$ $[1]$.

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$ $\quad[\dfrac{a^2}{b^2}]$.

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$ $\quad[\dfrac{1}{6}]$.

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^{10}}$ $\quad[0]$.

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}$ $\quad[0]$.

15) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $\quad[a^a(\ln a-1)]$.

16) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$ $\quad[-2]$.

10.4.2. Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-0{,}01x}$ $\quad[0]$.

2) $\lim\limits_{x\to 1+}\ln x\cdot\ln(x-1)$ $\quad[0]$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln\operatorname{ctg} x$ $\quad[0]$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x)$ $\quad[-\dfrac{2}{\pi}]$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x^3}$ $\quad[0]$.

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{x})\sqrt{x}$ $\quad[2]$.

7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ $\quad[\dfrac{1}{2}]$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad[0]$.

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$ $\quad[0]$.

10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ $\quad[-\dfrac{1}{3}]$.

11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ $\quad[\dfrac{1}{3}]$.

12) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\pi-2\arcsin(x/\sqrt{x^2+1}))$ $\quad[2]$.

10.4.3. Вычислить следующие пределы [в квадратных скобках указаны ответы].

1) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)-}(\pi-2x)^{\cos x}$ $\quad[1]$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{3/x^2}$ $\quad[e^{-6}]$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{1/x}$ $\quad[2]$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x2}$ $\quad[e^{1/3}]$.

5) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\dfrac{1}{1+\ln x}}$ $\quad[e]$.

6) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\dfrac{1}{1-x}}$ $\quad[e^{-1}]$.

7) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$ $\quad[e^{2/\pi}]$.

8) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ $\quad[e^{-1}]$.

9) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$ $\quad[1]$.

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$ $\quad[e^{-2/\pi}]$.

11) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$ [1].

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\dfrac{1}{x}}$ [1].

13) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$ $[e^{\frac{2}{\sin 2a}}]$.

14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\dfrac{1}{x^2}}$ $[e^{1/3}]$.

15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\dfrac{1}{x^2}}$ $[e^{-1/3}]$.

16) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$ $[e^{-1/2}]$.

17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\dfrac{1}{x}}$ $[e^{-2/\pi}]$.

18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\dfrac{1}{x^2}}$ $[e^{1/6}]$.

19) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\dfrac{1}{x^2}}$ $[e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a-\ln^2 b)}]$.

11. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

11.1. *Определение производной порядка* n . Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на некотором интервале и $f'(x)$ — ее производная. Пусть $f'(x)$ также дифференцируемая функция. *Второй производной от* $f(x)$ называется производная от $f'(x)$, т.е.

$$f''(x)=(f'(x))'.$$

Последовательнымим соотношениями (при условии, что дифференцирование имеет смысл) определяется *производная порядка* n *от* $f(x)$ как

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'.$$

11.2. *Определение дифференциалов порядка* n . *Дифференциал порядка* n определяется формулой

$$d^n f(x)=d(d^{n-1}f(x)).$$

Если x — независимая переменная, то (так как dx не зависит от x)

$$d^n x=d^n x=\ldots=d^n x=0$$

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Если x — промежуточный аргумент, то есть $x = \varphi(t)$, тогда

$$d^2x(t) = d(dx(t)) = d(x'(t)dt) = x''(t)(dt)^2, \quad df(x) = f'(x)dx = f'(x)x'(t)dt$$

$$d^2f(x) = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x(t) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)x''(t)(dt)^2.$$

Для вычисления производных высших порядков используются правила вычисления производных, формула Лейбница и формулы производных высших порядков от элементарных функций.

11.3. *Формулы производных высших порядков от элементарных функций.*

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n},$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}),$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2}),$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a))^n,$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}.$$

11.4. *Формула Лейбница.* Если функции $u(x)$ и $v(x)$ n раз дифференцируемы, то

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)},$$

где $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v,$ и $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты.

11.5. Примеры.

11.5.1. Найти $f''(x)$, если $f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\bigtriangledown$ Найдем сначала первую производную:

$$f'(x)=\frac{(\arcsin x)'\sqrt{1-x^2}-(\sqrt{1-x^2})'\arcsin x}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}-\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{1-x^2}$$

$$=\frac{1+\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Дифференцируя полученную функцию, получим:

$$f''(x)=\frac{(\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x)'\sqrt{(1-x^2)^3}-(\sqrt{(1-x^2)^3})'(\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x)}{(1-x^2)^3}$$

$$=\frac{(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})\sqrt{(1-x^2)^3}-(\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x)}{(1-x^2)^3}$$

$$=\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}\arcsin x-1,5x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-1,5(1-x^2)}{(1-x^2)^3}=$$

$$=\frac{(1-x^2)\arcsin x-1,5x\arcsin x-1,5\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.\square$$

11.5.2. Найти $d^2f(x)$ для $f(x)=e^x$ в случае а) x — независимая переменная; б) x — промежуточный аргумент.

$\bigtriangledown$ а) Если x — независимая переменная, то

$$d^{(2)}f(x)=f^{(2)}(x)(dx)^2=e^x(dx)^2.$$

б) Если x — промежуточный аргумент (т.е. $x=x(t)$), то

$$d^2f(x)=d(f'(x)dx)=f''(x)(dx)^2+f'(x)d^2x(t)=e^x(dx)^2+e^xd^2x(t).\square$$

11.5.3. Найти производные f'_x, f''_{xx} и f'''_{xxx} (нижний индекс обозначает, что производные берутся по переменной x) от функции $y=f(x)$, заданной параметрически уравнениями $x=2t-t^2, y=3t-t^3$.

$\triangledown$ Продифференцируем $x(t)$ и $y(t)$. Получаем производные

$$x'(t) = 2 - 2t,\ y'(t) = 3 - 3t^2.$$

Производная $x'(t) = 2-2t = 0$ при $t = 1$. Следовательно, данными параметрическими уравнениями определены две однозначные дифференцируемые ветви $y = f(x)$: $f_1(x)$ при $t < 1$ и $f_2(x)$ при $t > 1$. При $t \neq 1$ производные обеих ветвей имеют вид:

$$f'_x = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3(1+t)}{2}.$$

Функция $y = f'_x$ также является параметрически заданной функцией и по формуле производной параметрически заданной функции при $x_0 = x(t_0)$

$$f''_{xx}(x_0) = \frac{f''_{xt}(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Так как

$$f''_{xt} = \frac{3}{2}, \text{ то } f''_{xx} = \frac{3}{2} \div (2 - 2t) = \frac{3}{4(1-t)}.$$

Аналогично

$$f'''_{xxx}(x_0) = \frac{f'''_{xxt}(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Вычисляя

$$f'''_{xxt} = \frac{3}{4(1-t)^2}, \text{ получаем } f'''_{xxx} = \frac{3}{4(1-t)^2} \div (2 - 2t) = \frac{3}{8(1-t)^3}. \square$$

11.5.4. Найти производные y'_x, y''_{xx} и y'''_{xxx} от функции, заданной неявно уравнением $x^2 + y^2 = 25$. Чему равны y'_x, y''_{xx} и y'''_{xxx} в точке $M(3,4)$.

$\triangledown$ Продифференцируем данное уравнение, считая что $y = y(x)$. Получаем

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0 \text{ или } x + y(x)y'(x) = 0 \text{ ,то есть } y'(x) = \frac{-x}{y(x)}.$$

Продифференцируем уравнение еще раз: $1 + y'(x)y'(x) + y(x)y''(x) = 0$. Подставляя $y'(x)$ и учитывая, что $x^2 + y^2 = 25$, выводим:

$$y''(x) = \frac{-1 - (y'(x))^2}{y(x)} = \frac{-(x^2 + y(x)^2)}{y(x)^3} = \frac{-25}{y(x)^3}.$$

Продифференцируем последнее выражение

$$y'''(x) = \frac{-25 \cdot (-3) y'(x)}{y(x)^4} = \frac{-75x}{y(x)^5}.$$

В точке $M(3,4)$ производные принимают следуюшие значения:

$$y'(3) = \frac{-3}{4},\ y''(3) = \frac{-25}{64},\ y'''(3) = \frac{-225}{1024}.\square$$

11.5.5. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема достаточное число раз и пусть определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$ вместе со своими производными $x'(y)$, $x''(y)$, $x'''(y)$, $x^{IV}(y)$. Найти эти производные.

$\bigtriangledown$ Как известно, $x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$. Найдем $x''(y)$, как производную сложной функции

$$x''(y) = \left(\frac{1}{y'(x)}\right)' = \frac{-x'(y)y''(x)}{y'(x)^2} = \frac{-y''(x)}{y'(x)^3}.$$

Аналогично, используя формулы производной сложной функции и отношения функций, получим:

$$x'''(y) = \left(\frac{-y''(x)}{y'(x)^3}\right)' = \frac{-y'''(x)x'(y)y'(x)^3 + 3y'(x)^2 y''(x)x'(y)y''(x)}{y'(x)^6} =$$

$$= \frac{-x'(y)y'(x)^2 \cdot (y'''(x)y'(x) - 3y''(x)^2)}{y'(x)^6} = -\frac{y'''(x)y'(x) - 3y''(x)^2}{y'(x)^5}.$$

$$x^{IV}(y) = \left(-\frac{y'''(x)y'(x) - 3y''(x)^2}{y'(x)^5}\right)' =$$

$$= -\frac{x'(y)(y''''(x)y'(x) + y'''(x)y''(x) - 6y''(x)y'''(x))y'(x)^5}{y'(x)^{10}} -$$

$$-\frac{5y'(x)^4 y''(x)x'(y)(y'''(x)y'(x) - 3y''(x)^2)}{y'(x)^{10}}$$

$$= -\frac{x'(y)y'(x)^4 \cdot (y''''(x)y'(x)^2 - 10y'''(x)y''(x)y'(x) + 15(y''(x))^3)}{y'(x)^{10}} =$$

$$= -\frac{y''''(x)y'(x)^2 - 10y'''(x)y''(x)y'(x) + 15(y''(x))^3}{y'(x)^7}.\square$$

11.5.6. Найти производную $y^{(20)}$ от функции $y = x^2 e^{2x}$.

$\bigtriangledown$ По формуле Лебница

$$y^{(20)} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (x^2)^{(k)} (e^{2x})^{(20-k)}.$$

Вычислим $(e^{2x})^{(k)}$. Первая производная $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, вторая $(e^{2x})'' = 4e^{2x}$, очевидно по индукции $(e^{2x})^{(k)} = 2^k e^{2x}$. Теперь посчитаем $(x^2)^{(k)}$. Получаем

$$(x^2)^{(0)} = x^2,\ (x^2)' = 2x,\ (x^2)'' = 2 \text{ и } (x^2)^{(k)} = 0 \text{ для всех } k = 3, \dots n.$$

Значит суммироваться будут только слагаемые с номерами $k = 0, 1, 2$. Нам нужны

$$(e^{2x})^{(20)} = 2^{20} e^{2x},\ (e^{2x})^{(19)} = 2^{19},\ (e^{2x})^{(18)} = 2^{18} e^{2x} \text{ и}$$

$$C_{20}^0 = 1,\ C_{20}^1 = 20,\ C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190.$$

Подставляя полученные выражения в формулу Лейбница, выводим

$$y^{(20)} = 2^{20} e^{2x} x^2 + 2^{19} e^{2x} \cdot 2x \cdot 20 + 2^{18} e^{2x} \cdot 2 \cdot 190 = 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95). \square$$

11.5.7. Найти производную $f^{(n)}(x)$ от функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

$\bigtriangledown$ Разложим функцию $f(x)$ на сумму простейших дробей

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Найдем производные порядка n от полученных дробей

$$y = \frac{1}{x-a} = (x-a)^{-1}.$$

Последовательно вычисляя, находим

$$y' = -(x-a)^{-2},\ y'' = 2(x-a)^{-3},\ y''' = -2 \cdot 3 (x-a)^{-4},\ \dots y^{(n)} = (-1)^n n! (x-a)^{-(n+1)}.$$

Следовательно,

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x-2)^{(n+1)}} - \frac{1}{(x-1)^{(n+1)}}\right).$$

11.5.8. Найти производную $y^{(n)}(x)$ от функции

$$y(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

$\bigtriangledown$ Представим функцию $y(x)$в виде произведения

$$y = x \cdot (1-x)^{-\frac{1}{3}}.$$

По формуле Лейбница

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x)^{(k)} ((1-x)^{-\frac{1}{3}})^{(n-k)}.$$

Так как

$$(x)^{(0)} = x,\ x' = 1 \text{ и } (x)^{(k)} = 0 \text{ для всех } k = 2, \dots n,$$

то суммироваться будут только два первых слагаемые. Найдем $(1-x^{-\frac{1}{3}})^{(k)}$. Начнем с вычисления

$$((1-x)^{-\frac{1}{3}})' = -\frac{1}{3} \cdot (1-x)^{-\frac{4}{3}} \cdot (-1) = \frac{1}{3} \cdot (1-x)^{-\frac{4}{3}},$$

$$((1-x)^{-\frac{1}{3}})'' = \frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot (1-x)^{-\frac{7}{3}} \cdot (-1) = \frac{4}{9} \cdot (1-x)^{-\frac{7}{3}}.$$

$$((1-x)^{-\frac{1}{3}})''' = \frac{4}{9}\left(-\frac{7}{3}\right) \cdot (1-x)^{-\frac{10}{3}} \cdot (-1) = \frac{4 \cdot 7}{3^3} \cdot (1-x)^{-\frac{10}{3}}.$$

По аналогии вычисляется

$$((1-x)^{-\frac{1}{3}})^{(k)} = \frac{4 \cdot 7 \dots (3k-2)}{3^k} \cdot (1-x)^{-\frac{(3k+1)}{3}} = \frac{4 \cdot 7 \dots (3k-2)}{3^k (1-x)^{k+\frac{1}{3}}}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу Лейбница, выводим

$$y^{(n)} = x((1-x)^{-\frac{1}{3}})^{(n)} + n((1-x)^{-\frac{1}{3}})^{(n-1)} =$$

$$= x\frac{4 \cdot 7 \dots (3k-2)}{3^n (1-x)^{n+\frac{1}{3}}} + n\frac{4 \cdot 7 \dots (3(n-1)-2)}{3^{(n-1)}(1-x)^{(n-1)+\frac{1}{3}}} =$$

$$= x\frac{4 \cdot 7 \dots (3k-2)}{3^n (1-x)^{n+\frac{1}{3}}} + n\frac{4 \cdot 7 \dots (3n-5)}{3^{(n-1)}(1-x)^{n-1+\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{4 \cdot 7 \dots (3n-5)}{3^n (1-x)^{n+\frac{1}{3}}} \cdot ((3n-2)x + 3n(1-x)) =$$

$$= \frac{(3n-2x) 4 \cdot 7 \dots (3n-5)}{3^n (1-x)^{n+\frac{1}{3}}}. \square$$

11.6. УПРАЖНЕНИЯ.

11.6.1. Найдите $y''(x)$, если

$$1) y = x\sqrt{1+x^2},$$

$$2) y = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}},$$

$$3) y = x \ln x,$$

$$4) y = \sin x - x \cos x,$$

$$5) y = e^{-x^2},$$

$$6) y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}},$$

$$7) y = \operatorname{tg} x.$$

11.6.2. Найти $d^2 f(x)$ в случае x — независимая переменная для 1) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, 2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 3) $f(x) = x^x$.

11.6.3. Найти производные f'_x, f''_{xx} и f'''_{xxx} от функции $y = f(x)$, заданной параметрически нижеследующими уравнениями в точке x_0

$$1) x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t),\ x_0 = \frac{a(\pi - 2)}{2},$$

$$2) x = a \cos t, y = a \sin t,\ x_0 = 0,$$

$$3) x = e^t \cos t, y = e^t \sin t,\ x_0 = 1.$$

11.6.4. Найти производные y'_x, y''_{xx} и y'''_{xxx} от функции, заданной неявно уравнением 1) $y^2 = 2px$, 2) $x^2 - xy + y^2 = 1$.

11.6.5. Найти производные y'_x, y''_{xx}, если $y^2 + 2\ln y = x^4$.

11.6.6. Найти производную указанного порядка

$$1) y^{(100)} \text{ от } y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}},$$

$$2) y^{(100)} \text{ от } y = x \operatorname{sh} x,$$

$$3) y^{(8)} \text{ от } y = \frac{x^2}{1-x},$$

$$4) y^{(10)} \text{ от } y = \frac{e^x}{x},$$
$$5) y^{(5)} \text{ от } y = x \ln x,$$
$$6) y^{(10)} \text{ от } y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}},$$
$$7) y^{(5)} \text{ от } y = \frac{\ln x}{x}.$$

11.6.7. Найти производную $f^{(n)}(x)$ от функций

$$1) y = \frac{1}{x(1-x)},$$
$$2) y = \frac{x}{\sqrt{1-2x}},$$
$$3) y = \sin^2 x,$$
$$4) y = \cos^3 x,$$
$$5) y = \sin^4 x + \cos^4 x,$$
$$6) y = x \cos ax,$$
$$7) y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x},$$
$$8) y = \frac{e^x}{x},$$
$$9) y = e^x \cos ax,$$
$$10) y = \ln \frac{a+bx}{a-bx}.$$

12. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

12.1. *Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.* Если функция $f(x)$ дифференцируема n раз в точке a, то при $(x \to a)$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + o((x-a)^n).$$

Разложение в сумму с остатком в форме Пеано единственно.

12.2. *Формула Тейлора.* Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывные производные $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(n-1)}(x)$ на отрезке $[a, b]$ и производную $f^{(n)}(x)$ на интервале (a, b), тогда для любого x из $[a, b]$ верно

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ — остаток в форме Лагранжа. Остаток в форме Лагранжа имеет вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)(x-a)^n}{n!}, \ c \text{ — некоторая точка интервала } (a, b).$$

При разложении функций по формуле Тейлора часто применяются разложения элементарных функций.

12.3. *Разложение по формуле Тейлора важнейших элементарных функций.* Если переменная $x \to 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

12.4. Примеры.

12.4.1. Написать разложение по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^4 функции

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}.$$

Чему равно $f^{(4)}(0)$?

$\bigtriangledown$ Предположим, что при $x \to 0$

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + o(x^4)$$

— требуемое разложение. Тогда $1 + x + x^2 = (1 - x + x^2)(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + o(x^4))$. Перемножим скобки в правой части, учитывая, что при $x \to 0$ сумма $o(x^4) + o(x^4)$ и произведение $x^n \cdot o(x^4)$ есть $o(x^4)$, также при $m > 4$ все $x^m = o(x^4)$. Получим

$$1+x+x^2 = a+bx-ax+cx^2-bx^2+ax^2+dx^3-cx^3+bx^3+ex^4-dx^4+cx^4+o(x^4).$$

Так как разложение по формуле Тейлора единственно, то коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях последнего равенства совпадают. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = a \text{ (при } x^0) \\ 1 = b - a \text{ (при } x^1) \\ 1 = c - b + a \text{ (при } x^2) \\ 0 = d - c + b \text{ (при } x^3) \\ 0 = e - d + c \text{ (при } x^4). \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим

$$a = 1,\ b = 2, \gamma = 2,\ d = 0,\ e = -2.$$

Таким образом, при $x \to 0$

$$f(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2} = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4).$$

По формуле Тейлора коэффициент при x^4 равен $\frac{f^{(4)}(0)}{4!}$, в нашем разложении этот коэффициент равен -2. Так как разложение по формуле Тейлора единственно, то $\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -2$ и, следовательно, $f^{(4)}(0) = -2 \cdot 4! = -48.\square$

12.4.2. Написать разложение по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^2 функции

$$f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}.$$

$\bigtriangledown$ Представим функцию $f(x)$в виде произведения трех функций

$$f(x) = (1+x)^{100}(1-2x)^{-40}(1+2x)^{-60}.$$

Используя формулу

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

разложим по степеням переменной x до члена с x^2

$$(1+x)^{100} = 1 + 100x + \frac{100 \cdot 99}{2!}x^2 + o(x^2) = 1 + 100x + 4950x^2 + o(x^2),$$

$$(1-2x)^{-40} = 1 - 40(-2x) + \frac{-40 \cdot (-41)}{2!}(-2x)^2 + o(x^2) = 1 + 80x + 3240x^2 + o(x^2),$$

$$(1+2x)^{-60} = 1-60\cdot 2x+\frac{-60\cdot(-61)}{2!}(2x)^2+o(x^2) = 1-120x+7320x^2+o(x^2)).$$

Значит

$$(1+x)^{100}(1-2x)^{-40}(1+2x)^{-60} =$$

$$= (1+100x+4950x^2+o(x^2))\cdot(1+80x+3240x^2+o(x^2))\cdot(1-120x+7320x^2+o(x^2)).$$

Перемножим скобки в правой части. Сумма слагаемых порядка малости большей, чем 2, есть $o(x^2)$ при $x \to 0$. Поэтому

$$(1+100x+4950x^2+o(x^2))\cdot(1+80x+3240x^2+o(x^2)) =$$

$$= 1+100x+4950x^2+80x+80\cdot 100x^2+3240x^2+o(x^2) = 1+180x+16190x^2+o(x^2),$$

$$(1+180x+16190x^2+o(x^2))(1-120x+7320x^2+o(x^2)) =$$

$$= 1-120x+7320x^2+180x-120\cdot 180x^2+16190x^2+o(x^2) = 1+60x+1950x^2+o(x^2). \square$$

12.4.3. Написать разложение по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^{13} функции

$$f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}.$$

$\triangledown$ Разложим сначала по формуле Тейлора при $x \to 0$

$$\sin(x^3) = x^3 - \frac{(x^3)^3}{3!} + \frac{(x^3)^5}{5!} + o((x^3)^6) = x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{18}) =$$

$$= x^3\left(1-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+o(x^{15})\right).$$

Получаем

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+o(x^{15})\right)} = x\sqrt[3]{1-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+o(x^{15})}.$$

Разложим выражение

$$\sqrt[3]{1-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+o(x^{15})}$$

до слагаемого с x^{12}. Используем формулу

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8\ldots}{3^n\cdot n!}x^n+o(x^n).$$

Получаем
$$\sqrt[3]{1-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+o(x^{15})}=$$
$$=1+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+o(x^{15})\right)-\frac{2}{3^2\cdot 2!}\left(-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+o(x^{15})\right)^2+\ldots.$$
Заметим, что слагаемые вида $o(\left(-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+o(x^{15})\right)^n)$ есть $o(x^{5n})$. Поэтому в разложении до члена с x^{12} должны участвовать только слагаемые с номерами $n=0,1,2$. Приводя подобные и записывая все члены x^n с $n>12$ в $o(x^{12})$ выводим
$$\sqrt[3]{1-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+o(x^{15})}=$$
$$=1-\frac{x^6}{3\cdot 3!}+\frac{x^{12}}{3\cdot 5!}-\frac{2}{3^2\cdot 2!}\left(\frac{x^6}{3!}\right)^2+o(x^{12})=$$
$$=1-\frac{x^6}{3\cdot 3!}+\left(\frac{1}{3\cdot 5!}-\frac{2}{3^2\cdot 2!\cdot(3!)^2}\right)x^{12}+o(x^{12})=$$
$$=1-\frac{x^6}{18}-\frac{x^{12}}{3240}+o(x^{12}).$$
Окончательно получаем
$$f(x)=x\sqrt[3]{1-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+o(x^{15})}=$$
$$=x\left(1-\frac{x^6}{18}-\frac{x^{12}}{3240}+o(x^{12})\right)=1-\frac{x^7}{18}-\frac{x^{13}}{3240}+o(x^{13}).\square$$

12.4.4. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить $\sqrt[3]{30}$ и оценить погрешность.

$\triangledown$ Используем формулу Тейлора для функции $(1+x)^m$ при малых x. Представим $\sqrt[3]{30}$ как значение функции $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ при некотором малом x
$$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{3^3+3}=3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}.$$
Применяя формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа, получим
$$\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}-\frac{2}{3^2\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2+R_2\left(\frac{1}{9}\right).$$

Откидывая остаток, вычисляем

$$\sqrt[3]{30} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} \simeq 3\left(1+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{9^3}\right) = 3,10699.$$

Погрешность при вычислении равна величине остатка в форме Лагранжа

$$|R_2\left(\frac{1}{9}\right)| = |\frac{f^{(2)}(c)}{9^2\cdot 2!}| = |\frac{2}{3^2\sqrt[3]{(1+c)^5}}| < \frac{2}{3^2}, \quad c\in(0,\frac{1}{9}).$$

Значит погрешность не превышает

$$|R_2\left(\frac{1}{9}\right)| < \frac{2}{2!3^29^2} = 0,0041.\square$$

12.4.5. С помощью формулы Тейлора найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

$\bigtriangledown$ Записывая все члены с x^n при $n>3$ в $o(x^3)$, разложим по формуле Тейлора функцию,

$$e^x\sin x = \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right) =$$

$$= 1\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)+x\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)+\frac{x^2}{2!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)+o(x^3 =$$

$$= x-\frac{x^3}{3!}+x^2+\frac{x^3}{2!}+o(x^3) = x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

Подставим полученное выражение в предел и приведем подобные

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-x-x^2}{x^3} = \frac{1}{3}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.\square$$

12.5 УПРАЖНЕНИЯ.

12.5.1 Написать разложение по целым неотрицательным степеням переменной до членов указанного порядка включительно следующих функций

$$1) y = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}} \text{ до члена с } x^2,$$

$$2) y = \sqrt[n]{a^n + x} \text{ до члена с } x^2,$$

$$3) y = e^{2x - x^2} \text{ до члена с } x^5,$$

$$4) y = \frac{x}{e^x - 1} \text{ до члена с } x^4,$$

$$5) y = \sqrt[3]{\sin x^3} \text{ до члена с } x^{13},$$

$$6) y = \ln \cos x \text{ до члена с } x^6,$$

$$7) y = \ln \frac{\sin x}{x} \text{ до члена с } x^6.$$

12.5.2. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить

$$1) \sqrt[5]{250}, \quad 2) \sqrt{e}, \quad 3) \sin 18^\circ,$$

$$4) \ln(1,2), \quad 5) \operatorname{arctg} 0,8$$

и оценить погрешность.

12.5.3. С помощью формулы Тейлора найти

$$1) \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4},$$

$$2) \lim_{x\to +\infty} \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5},$$

$$3) \lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}.$$

13. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ.

13.1. *Локальный экстремум.* По определению, функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум*, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

точки x_0, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполнено неравенство $f(x_0) \geq f(x)$. Аналогично, функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный минимум*, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполнено неравенство $f(x_0) \leq f(x)$. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный экстремум*, если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум или минимум.

13.1.1. *Необходимое условие экстремума.* В точке экстремума производная функции либо не существует либо равна нулю. Точки, в которых производная функции либо не существует либо равна нулю будем называть *критическими точками.*

13.2. *Достаточные условия экстремума.*

13.2.1 *Первое достаточное условие экстремума.* Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную во всех точках этой окрестности, за исключением, возможно, самой точки x_0. Если производная меняет знак при переходе x_0, то x_0 есть точка локального экстремума. Причем, если

$$f'(x) \leq 0 \text{ при } x < x_0 \text{ и } f'(x) \geq 0 \text{ при } x > x_0$$

(т.е. знак производной меняется с "$-$"на "$+$"при возрастании аргумента x), то x_0 есть точка локального минимума, если

$$f'(x) \geq 0 \text{ при } x < x_0 \text{и } f'(x) \leq 0 \text{ при } x > x_0$$

(т.е. знак производной меняется с "$+$"на "$-$"при возрастании аргумента x), то x_0 есть точка локального максимума. Если производная не меняет знак при переходе x_0, то в x_0 нет локального экстремума.

13.2.2 *Второе достаточное условие экстремума.* Если функция $f(x)$ имеет вторую производную, $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, то в x_0 функция имеет локальный экстремум. Причем, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 есть точка локального минимума, если $f''(x_0) < 0$, то x_0 есть точка локального максимума.

13.2.3 *Третье достаточное условие экстремума.* Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз и

$$f^{(k)}(x_0) = 0, k = 1, \ldots, n-1,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда, если n — число четное, то в x_0 функция имеет локальный экстремум. Причем, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 есть точка локального минимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 есть точка локального максимума. Если n — число нечетное, то в x_0 функция не имеет локального экстремума.

13.3 *Наибольшее и наименьшее значения функции.* Наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ достигаются либо в критических точках(т.е. там, где производная функции не существует или равна нулю), либо на концах отрезка.

13.4. Примеры.

13.4.1. Найти экстремумы функции

$$y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

$\bigtriangledown$ Найдем точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума, т.е. критические точки. Для этого вычислим производную

$$y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Производная определена на всей числовой прямой и равна нулю в $x = -1$ и $x = 1$. Следовательно, точки экстремума функции находятся среди этих точек. Выясним, в каких точках выполняется первое достаточное условие экстремума. Изменение знака производной приводится в следующей таблице:

$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$y'(x) < 0$	$y'(x) > 0$	$y'(x) < 0$

Знак производной меняется при переходе каждой из этих точек. Значит обе точки $x = -1$ и $x = 1$ являются экстремумами функции. Как следует из таблицы, точка $x = -1$ — точка минимума и значение $f(-1) = -1$, а $x = 1$ — точка максимума и $f(1) = 1$.□

13.4.2. Найти экстремумы функции

$$y = x\sqrt[3]{1-x}.$$

▽ Найдем критические точки функции. Для этого вычислим производную функции

$$y = \sqrt[3]{1-x} - \frac{x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \frac{3-4x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}.$$

Производная равна нулю при $x = \frac{3}{4}$ и неопределена в точке $x = 1$. Согласно необходимому условию экстремума, точки экстремума функции находятся среди этих точек. Выясним, как меняется знак производной:

$x < \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} < x < 1$	$x > 1$
$y'(x) > 0$	$y'(x) < 0$	$y'(x) < 0$

В точке $x = \frac{3}{4}$ знак производной меняется с "+"на "− поэтому $x = \frac{3}{4}$ является точкой локального максимума. В точке $x = 1$ знак производной не меняется, поэтому точка $x = 1$ не является экстремумом.□

13.4.3. Найти экстремумы функции

$$y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

▽ Вычислим производную функции $y' = -\sin x - \sin 2x$. Производная определена на всей числовой прямой. Выясним в каких точках производная равна нулю. Решая тригонометрическое уравнение $\sin x + \sin 2x = 0$, находим бесконечное число критических точек $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Воспользуемся вторым достаточным условием экстремума, для того чтобы выбрать среди критических точек точки экстремума . Найдем вторую производную функции $y'' = -\cos x - 2\cos 2x$. Приведем значения второй призводной в найденных точках в таблице

$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}$	$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$y''(x) = -3 < 0$	$y''(x) = -1 < 0$	$y''(x) = \frac{3}{2} > 0$

Из второго достаточного условия экстремума следует, что точки вида

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

являются точками локального максимума, а точки

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

являются точками локального миниимума. $\square$

13.4.4. Найти экстремумы функции $y = x + \sin x$.

$\bigtriangledown$ Вычислим производную функции $y' = 1 + \cos x$. Производная равна нулю в бесконечном числе критических точек $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$. Воспользуемся третьим достаточным условием экстремума, для того чтобы выбрать среди критических точек точки экстремума . Найдем вторую производную функции $y'' = -\sin x$. Значения второй призводной в найденных точках $y''((2k+1)\pi) = 0$. Найдем третью производную функции $y''' = -\cos x$, тогда $y'''((2k+1)\pi) = 1$. Так как первая и вторая производные в критических точках равны нулю, а третья производная в критических точках не равна нулю, то согласно третьему достаточному условию экстремума у данной функции экстремумов нет. $\square$

13.4.5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = x + \frac{1}{x}$$

на отрезке $[0,01; 100]$.

$\bigtriangledown$ Найдем критические точки функции. Для этого вычислим производную

$$y = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

Производная равна нулю в точках $x = 1$ и $x = -1$ и не определена в точке $x = 0$. Точка $x = 0$ не принадлежит области допустимых значений функции, а точка $x = 0$ не принадлежит отрезку $[0,01; 100]$. В точке $x = 1$ производная меняет знак с "$-$"на "$+$ поэтому точка $x = 1$ является точкой локального минимума. Для нахождения абсолютных минимума и максимума на отрезке $[0,01;100]$, сравним значения функции на концах отрезка $f(0,01) = 100,01$, $f(100) = 100,01$ и значение функции в точке локального минимума $f(1) = 2$. Очевидно наибольшим значением является значение $f(0,01) = f(100) = 100,01$, а наименьшим значением является значение $f(1) = 2.\square$

13.5. УПРАЖНЕНИЯ.

13.5.1 Найти экстремумы следующих функций

$$1) y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1},$$

$$2) y = \sqrt{2x - x^2},$$

$$3) y = \cos x + \operatorname{ch} x,$$

$$4) y = xe^x,$$

$$5) y = \sin^4 x + \cos^4 x,$$

$$6) y = \sqrt{x}\ln x,$$

$$7) y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2),$$

$$8) y = \frac{e^x}{x},$$

$$9) y = e^x \sin x.$$

13.5.2. Найти наибольшее и наименьшее значения следующих функций

$$1) y = x^2 - 4x + 6 \text{на отрезке } [-3;10],$$

$$1) y = \sqrt{5 - 4x} \text{на отрезке } [-1;1].$$

14. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИЙ.

ВЫПУКЛОСТЬ ВВЕРХ И ВНИЗ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА.

14.1. *Возрастание и убывание функций.* Функция $f(x)$ называется *возрастающей на промежутке* (a,b), если

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ при } a < x_1 < x_2 < b.$$

Функция $f(x)$ называется *убывающей на промежутке* (a,b), если

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ при } a < x_1 < x_2 < b.$$

Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, то говорят, что она *монотонна* на этом промежутке.

14.2. *Признак монотонности функций.* Если $f'(x) > 0$ при $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ возрастает на промежутке (a, b). Если $f'(x) < 0$ при всех x из (a, b), то функция $f(x)$ убывает на промежутке (a, b).

14.3. *Выпуклость вверх и вниз.* Функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх на промежутке* (a, b), если график $y = f(x)(a < x < b)$ расположен ниже касательной, проведенной к графику в любой точке промежутка (a, b).
Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз на промежутке* (a, b), если график $y = f(x)(a < x < b)$ расположен выше касательной, проведенной к графику в любой точке промежутка (a, b).

14.4. *Признак выпуклости вверх и вниз.* Если $f''(x) > 0$ при x из (a, b), то функция $f(x)$ является выпуклой вниз на промежутке (a, b). Если $f''(x) < 0$ при $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ является выпуклой вверх на промежутке (a, b).

14.5. *Точки перегиба.* Точки, в которых меняется направление выпуклости функции называются*точками перегиба.* Для того, чтобы точка x_0 была точкой перегиба необходимо , чтобы $f''(x_0) = 0$ либо вторая производная в x_0 не существовала, и достаточно, чтобы $f''(x)$ меняла свой знак при переходе через x_0.

14.6. Примеры.

14.6.1. Определить промежутки возрастания и убывания функции

$$y = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

$\triangledown$ Используем вычисления примера 13.4.1. Изменение знака производной функции приводится в следующей таблице:

$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$y'(x) < 0$	$y'(x) > 0$	$y'(x) < 0$

Следовательно на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ функция убывает, а на промежутке $(-1, 1)$ возрастает.$\square$

14.6.2. Определить промежутки выпуклости вверх и вниз, найти точки перегиба функции

$$y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

$\triangledown$ Первая производная вычислена в примере 13.4.1.

$$y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Вторая производная

$$y'' = \frac{-4x(4-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

определена на всей числовой прямой и равна нулю при $x = -2$, $x = 0$ и $x = 2$. Изменение знака второй производной приводится в следующей таблице:

$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$y''(x) < 0$	$y''(x) > 0$	$y''(x) < 0$	$y''(x) > 0$

Следовательно, на промежутках $(-\infty, -2)$ и $(0, 2)$ функция выпукла вверх, а на промежутках $(-2, 0)$ и $(2, +\infty)$ выпукла вниз. Точки $x = -2$, $x = 0$ и $x = 2$ являются точками перегиба.$\square$

14.7. УПРАЖНЕНИЯ.

14.7.1. Определить промежутки возрастания и убывания следующих функций

$$1) y = 3x - x^3,$$

$$2) y = \frac{\sqrt{x}}{x+100},$$

$$3) y = x + \sin x,$$

$$4) y = \frac{x^2}{2^x},$$

$$5) y = \sin^4 x + \cos^4 x,$$

$$6) y = x^2 - \ln x^2,$$

$$7) y = x + \sin x,$$

$$8) y = x(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x).$$

14.7.2. Определить промежутки выпуклости вверх и вниз, найти точки перегиба следующих функций

$$1) y = 3x^2 - x^3,$$

$$2) y = \frac{a^3}{x^2 + a^2},$$

$$3) y = x + x^{\frac{5}{3}},$$

$$4) y = \sqrt{1 + x^2},$$

$$5) y = e^{-x^2},$$

$$6) y = \ln(1 + x^2),$$

$$7) y = x + \sin x,$$

$$8) y = x^x.$$

15. АСИМПТОТЫ

15.1. *Определение асимптоты.* Пусть функция $f(x)$ задана при достаточно больших x. Прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой к графику функции* $f(x)$ при $x \to +\infty$, если

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx - b) = 0.$$

Аналогично определяется асимптота к графику функции при $x \to -\infty$.
Если $k = 0$, то прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой.* *Вертикальной асимптотой при $x \to a$* называется прямая $x = k$, если

$$\lim_{x \to k} f(x) = \infty.$$

15.2. *Отыскание асимптот к графику функции $f(x)$.* Если существуют пределы

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b,$$

то прямая $y = kx + b$ является асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to +\infty$. Аналогично отыскивается асимптота при $x \to -\infty$.

15.3. *Отыскание асимптот к кривой, заданной параметрически.* Пусть кривая задана параметрически уравнениями $x = x(t); y = y(t)$. Если существует такое t_0 , что $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = +\infty$ и существуют пределы

$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = k \text{ и } \lim_{x \to t_0} (y(t) - kx(t)) = b,$$

то прямая $y = kx + b$ является асимптотой к кривой при $x \to +\infty$. Аналогично отыскивается асимптота при $x \to -\infty$.

15.4. Примеры.

15.4.1. Найти асимптоты функции
$$y=\frac{2x}{1+x^2}.$$

$\bigtriangledown$Вычислим пределы
$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x(1+x^2)}=0 \text{ и } b\lim_{x\to+\infty}f(x)-kx=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{(1+x^2)}=0.$$
Такие же пределы получаются при $x\to-\infty$. Значит при $x\to\pm\infty$ функция обладает горизонтальной асимптотой $y=0$.$\Box$

15.4.2. Найти асимптоты функции
$$y=\frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2}.$$

$\bigtriangledown$ Вычислим пределы
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x-1)}{x(1+x)^2}=1 \text{ и}$$
$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-kx=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2}-x=-3.$$
Полученные пределы не зависят от знака x, поэтому при $x\to\pm\infty$ функция обладает асимптотой $y=x-3$.

Кроме того функция обладает вертикальной асимптотой $x=-1$, так как
$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2}=\infty.\Box$$

15.4.3. Найти асимптоты функции $y=f(x)$, заданной параметрически уравнениями $x(t)=\frac{3at}{1+t^3}$ и $y(t)=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

$\bigtriangledown$ Заметим, что $\lim\limits_{t\to-1}x(t)=\infty$ $\lim\limits_{t\to-1}y(t)=\infty$. Вычислим пределы
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2}{1+t^3}\div\frac{3at}{1+t^3}=-1 \text{ и}$$
$$\lim_{x\to\infty}y(t)-kx(t)=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2}{1+t^3}+\frac{3at}{1+t^3}=\lim_{t\to-1}\frac{3at}{1-t+t^2}=-a.$$

Полученные пределы не зависят от знака t и, следовательно, от знака x, поэтому при $x \to \pm\infty$ функция $y = f(x)$ обладает асимптотой $y = -x - a$.$\square$

15.5. УПРАЖНЕНИЯ.

15.5.1. Найти асимптоты следующих функций

$$1) y = \frac{x^3}{3x^2 - x^3},$$
$$2) y = \sqrt{x^2 + x},$$
$$3) y = \sqrt[3]{x^2 + x^3},$$
$$4) y = \frac{xe^x}{e^x - 1},$$
$$5) y = \ln(1 + e^x),$$
$$8) y = x + \arccos\frac{1}{x}.$$

15.5.1. Найти асимптоты следующих функций, заданных параметрически уравнениями

$$1) x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t,$$
$$2) x = 2t - t^2, y = 3t - t^3,$$
$$3) x = \frac{t^2}{1 - t^2}, y = \frac{t}{t^2 - 1},$$
$$4) x = t + e^t, y = 2t + e^{2t}.$$

16. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

16.1. *План построения.* При построении графиков используется следующий план исследования функции.

I. Исследования, проводимые без использования производной.

1) Определить область существования функции.

2) Выяснить симметрию графика (четность или нечетность) и периодичность.

3) Найти нули функции, промежутки постоянства знака.

4) Найти точки разрыва функции, промежутки непрерывности.

5) Исследовать поведение функции на границе области существования, найти асимптоты.

II. Исследования, проводимые при помощи производных.

6) Вычислить производную функции.

7) Найти точки экстремума и промежутки монотонности функции.

8) Найти точки перегиба и промежутки выпуклости вверх и вниз.

16.2. Примеры.

16.2.1. Построить график функции

$$y = \frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2}.$$

$\bigtriangledown$Функция определена всюду, кроме точки $x = -1$. Данная функция не является четной или нечетной, не является периодичной. Решая уравнение

$$\frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2} = 0,$$

находим нули функции $x = 0$ и $x = 1$.

Функция $f(x) > 0$ при $x > 1$ и $f(x) < 0$ при $x < 1$. Функция непрерывна на всей области существования. Как показано в примере 15.2.2., при $x \to \pm\infty$ функция обладает асимптотой $y = x - 3$ и функция обладает вертикальной асимптотой $x = -1$ при $x \to -1$.

Найдем производную

$$y' = \frac{(3x^2-2x)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3-x^2)}{(1+x)^4} = \frac{x(x^2+3x-2)}{(1+x)^3}.$$

Производная равна нулю в точках $x = 0$, $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \simeq -3,56$ и $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \simeq 0,56$ и не определена в точке $x = -1$. Обозначим точки по возрастанию $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ и $x_4 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$. Знак производной и промежутки монотонности приводятся в следующей таблице:

$x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x_2 < x < x_3$	$x_3 < x < x_4$	$x > x_4$
$y'(x) > 0$	$y'(x) < 0$	$y'(x) > 0$	$y'(x) < 0$	$y'(x) > 0$
возрастает	убывает	возрастает	убывает	возрастает

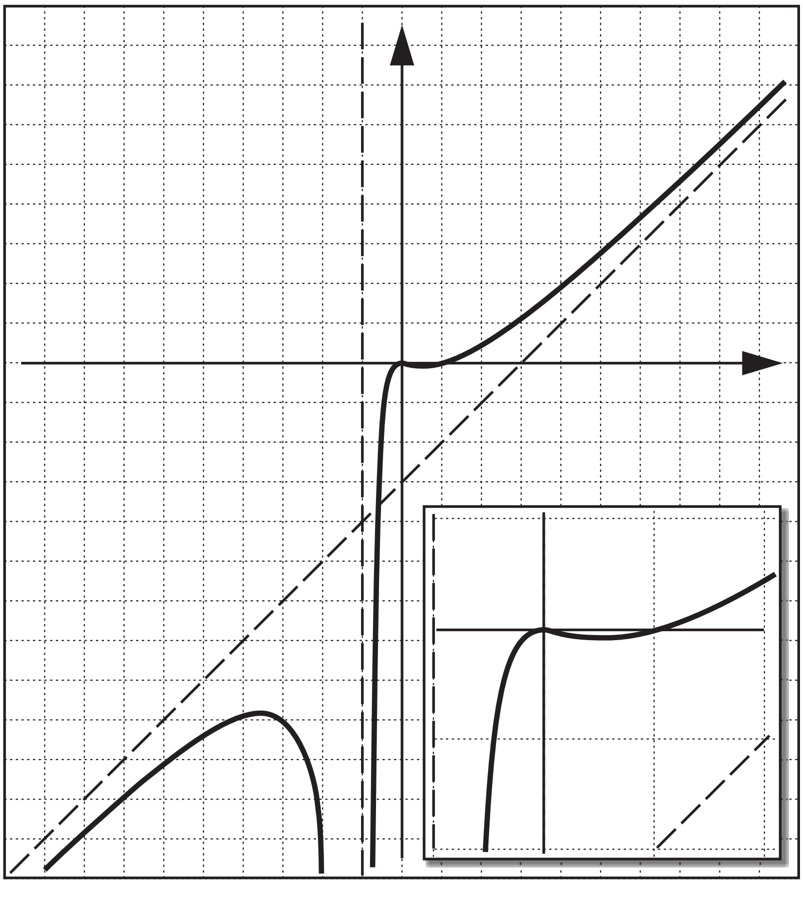

Рис. 1: График функции примера 16.2.1

Как следует из таблицы, в точках $x_2 = -1$ и $x_4 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ — минимумы, а в точках $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ и $x_3 = 0$ — максимумы. Причем $f(x_1) \simeq -8,82$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \infty$, $f(x_1) = 0$ и $f(x_4) \simeq -0,06$.
Найдем вторую производную

$$y'' = \frac{(3x^2+6x-2)(x-1)^3 - 3(x+1)^2(x^3+3x^2) - 2x}{(1+x)^6} = \frac{10x-2}{(1+x)^4}.$$

Вторая производная равна нулю в точке $x = 0,2$ и не определена в при $x = -1$. В точке $x = 0,2$ вторая производная меняет знак с "$-$"на "$+$"и в точке $x = -1$ вторая производная не меняет знак. Следовательно, на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0,2)$ функция выпукла вверх, а на промежутке $(0,2; +\infty)$ выпукла вниз. Точка $x = 0,2$ является точкой перегиба.
График функции представлен на рис. 1.$\square$

16.2.2. Построить график функции

$$y = (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}.$$

$\triangledown$ Функция определена на всей числовой прямой. Данная функция является нечетной, поэтому достаточно исследовать ветвь графика при $x > 0$. Для построения полного графика необходимо к полученной ветви добавить ее симметричное относительно начала координат отображение. Функция не периодична. Найдем нули функции. Уравнение

$$(x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}} = 0 \text{ эквивалентно } |x+2| = |x+2|.$$

Решая последнее, получаем, что точка $x = 0$ — нуль функции. Функция $f(x) > 0$ при $x > 0$ и $f(x) < 0$ при $x < 0$. Функция непрерывна на всей области существования. Так как предел

$$\lim_{x\to\infty} (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-2)^2 - (x+2)^2}{(x+2)^{\frac{4}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{4}{3}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{8x}{\sqrt[3]{x^4}} = 0,$$

то прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой к графику функции при $x \to \infty$.

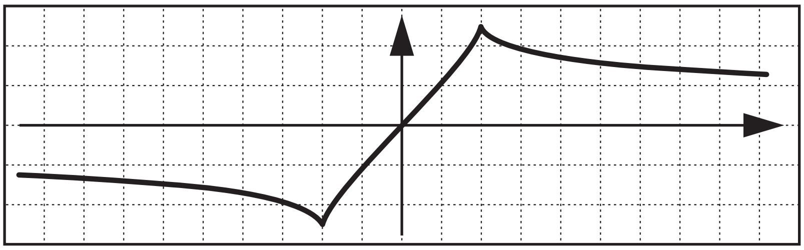

Рис. 2: График функции примера 16.2.2.

Найдем производную

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+2}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}} =$$

$$= \frac{2((x-2)-(x+2))}{3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{x-2}((x+2)^{\frac{4}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{4}{3}})} =$$

$$= \frac{-8}{3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{x-2}((x+2)^{\frac{4}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{4}{3}})}.$$

Производная не определена в точках $x = -2$, $x = 2$ и нигде не равна нулю. В точке $x = 2$ знак производной меняется с "$+$"на "$-$ поэтому $x = 2$ является точкой локального максимума. Из соображений симметрии $x = -2$ — точка минимума. Причем $f(2) = 2\sqrt[3]{2} \simeq 2,52, f(-2) = -2\sqrt[3]{2} \simeq -2,52$. На промежутках $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$ функция убывает, а на промежутке $(-2, 2)$ возрастает.

Найдем вторую производную

$$y'' = \frac{-2}{9(x+2)^{\frac{4}{3}}} + \frac{2}{9(x-2)^{\frac{4}{3}}} =$$

$$= \frac{-2((x-2)^4 - (x+2)^4)}{9(x+2)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{4}{3}}((x+2)^{\frac{8}{3}} + (x-2)^{\frac{4}{3}}(x+2)^{\frac{4}{3}} + (x-2)^{\frac{8}{3}})} =$$

$$= \frac{-8x(1+x^2)}{9(x+2)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{4}{3}}((x+2)^{\frac{8}{3}} + (x-2)^{\frac{4}{3}}(x+2)^{\frac{4}{3}} + (x-2)^{\frac{8}{3}})}.$$

Вторая производная равна нулю в точке $x = 0$ и не определена при $x = -2$ и $x = 2$. В точке $x = 0$ вторая производная меняет знак с "$-$"на "$+$"и при $x = -2$ и $x = 2$ вторая производная не меняет знак. Следовательно, на промежутках $(-\infty, -2)$ и $(-2, 0)$ функция выпукла вверх, а на промежутках $(0, 2)$ и $(2, +\infty)$ выпукла вниз. Точка $x = 0$ является точкой перегиба.

График функции представлен на рис. 2.□

16.2.3. Построить график функции

$$y = \sin x + \frac{\sin 3x}{3}.$$

$\bigtriangledown$ Функция определена на всей числовой прямой и является нечетной. Функция периодична с периодом 2π. Достаточно исследовать функцию на отрезке $[0, \pi]$. Весь график получается симметричным относительно начала координат продолжением графика на отрезке $[0, \pi]$ и, далее, периодическим продолжением.

Найдем нули функциии. Упростим функцию

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} = \sin x + \sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x = 2\sin x(1 - \frac{2}{3}\sin^2 x).$$

Так как $1 - \frac{2}{3}\sin^2 x > 0$ при всех x, то уравнение $\sin x + \frac{\sin 3x}{3} = 0$ сводится к уравнению $\sin x = 0$. Решая последнее, получаем что точки $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ — нули функции. На отрезке $[0, \pi]$ функция $f(x) > 0$, значит (исходя из нечетности) на отрезке $[-\pi, 0]$ функция $f(x) < 0$. Функция непрерывна и не имеет ассимптот.

Найдем производную

$$y' = \cos x + \cos 3x = \cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x = 2\cos x(2\cos^2 x - 1) = 2\cos x\cos 2x.$$

На отрезке $[0, \pi]$ производная равна нулю при $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{4}$. Для исследования на экстремум используем второй достаточный признак экстремума. Найдем вторую производную $y'' = -(\sin x + 3\sin 3x)$. В точках $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{3\pi}{4}$ вторая производная $y'' = -2\sqrt{2} < 0$, следовательно в этих точках — локальные максимумы и $f(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{3\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \simeq 0,94$.

В точке $x = \frac{\pi}{2}$ вторая производная $y'' = 2 > 0$, следовательно в точке $x = \frac{\pi}{4}$ — локальнй минимум и $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{3} \simeq 0,67$.

Найдем точки перегиба. Для этого решим уравнение

$$\sin x + 3\sin 3x = 10\sin x - 12\sin^3 x = 0.$$

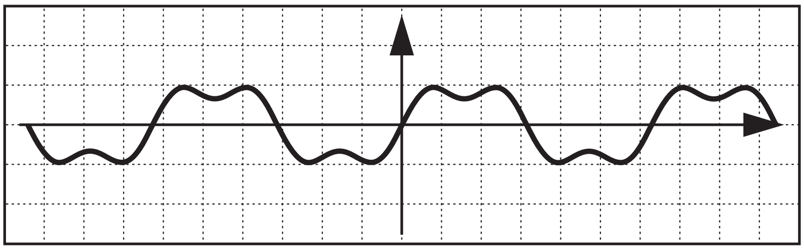

Рис. 3: График функции примера 16.2.3.

Вторая производная на отрезке $[0,\pi]$ равна нулю при

$$x_0=0,\ x_1=\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\simeq 0,37\pi,\ x_2=\pi-\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\simeq 0,63\pi,\ x_3=\pi.$$

На отрезках $[0,x_1]$ и $[x_2,\pi]$ вторая производная отрицательна, следовательно функция выпукла вверх. На отрезке $[x_1,x_2]$ вторая производная положительна, следовательно функция выпукла вниз. Точки x_0, x_1, x_2 и x_3 являются точками перегиба.

Построим график функции сначала на отрезке $[0,\pi]$. Затем отобразим полученную кривую симметрично началу координат. Имеем график функции на отрезке $[-\pi,\pi]$. Периодически продолжим график на всю числовую прямую. График функции представлен на рис. 3. $\square$

16.2.4. Построить кривую, заданную параметрически уравнениями

$$x(t)=\frac{3at}{1+t^3}; y(t)=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

$\triangledown$ Построим сначала вспомогательные графики функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$. Обе функции определены всюду, кроме точки $t=-1$, не являются четными или нечетными, не являются периодичными. Точка $t=0$ является нулем обеих функций. Функция $x(t)>0$ при $t<-1$ и $t>0$, $x(t)<0$ при $-1<t<0$. Функция $y(t)>0$ при $t>-1$ и $y(t)<0$ при $t<-1$. Заметим, что $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$. Значит, прямая $x=0$ является горизонтальной асимптотой функции $x=x(t)$ и прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой функции $y=y(t)$. Кроме того, прямая $t=0$ является вертикальной асимптотой обеих функций.

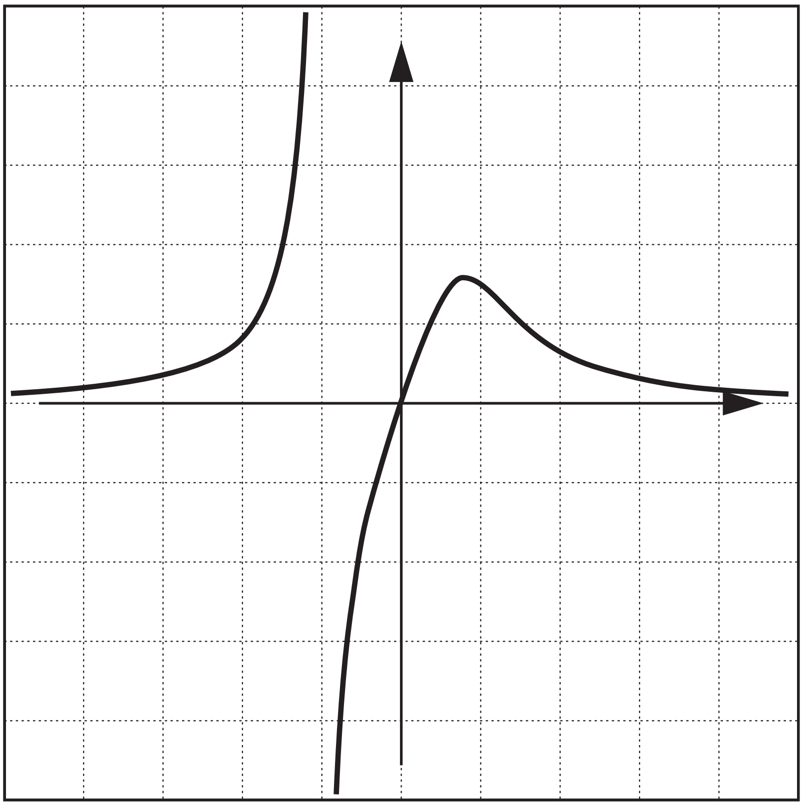

Рис. 4: x=x(t).

Найдем производные

$$x'(t) = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \text{ и } y'(t) = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

Производная $x'(t) = 0$ при $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и не определена при $t = -1$. Исследуя знак производной $x'(t)$, получаем, что точка $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ — точка максимума функции $x(t)$ и $x(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) = a\sqrt[3]{4}$, а точка $t = -1$ не является экстремумом функции $x(t)$. Производная $y'(t) = 0$ при $t = 0$ и $t = \sqrt[3]{2}$ и неопределена при $t = -1$. Исследуя знак производной $y'(t)$, получаем, что точка $t = 0$ — точка минимума функции $y(t)$ и $y(0) = 0$; точка $t = \sqrt[3]{2}$ — точка максимума функции $y(t)$ и $y(\sqrt[3]{2}) = a\sqrt[3]{4}$; точка $t = -1$ не является экстремумом функции $y(t)$. Графики функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ представлены на рис. 4 и рис. 5.

Приступим к построению графика кривой. Область изменения параметра t — числовая прямая, разбивается точками $t = -1$, $t = 0$, $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, t = \sqrt[3]{2}$ (это особые точки графиков $x = x(t)$ и $y = y(t)$) на интервалы. Используя

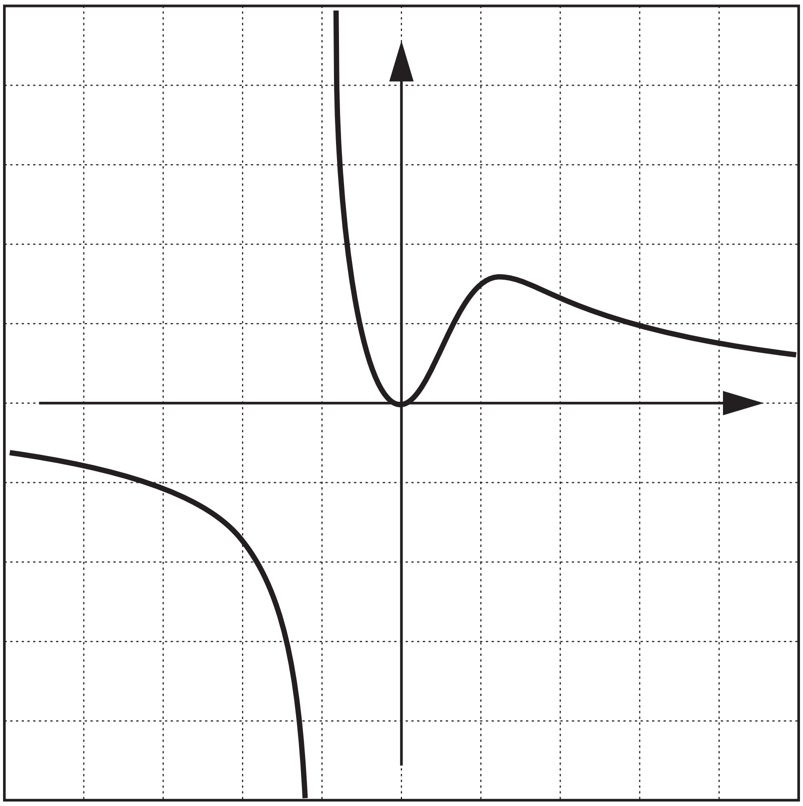

Рис. 5: y=y(t).

вспомогательные графики, изучим поведение функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ на каждом из полученных интервалов. Полученные данные приведем в виде таблицы для $t \le 0$:

$t \to -\infty$	$t < -1$	$t \to -1-$	$t \to -1+$	$-1 < t < 0$	$t = 0$
$x(t) \to 0$	$x(t) > 0 \uparrow$	$x(t) \to +\infty$	$x(t) \to -\infty$	$x(t) < 0 \uparrow$	$x(t) = 0$
$y(t) \to 0$	$y(t) < 0 \downarrow$	$y(t) \to -\infty$	$y(t) \to +\infty$	$y(t) > 0 \downarrow$	$y(t) = 0$
					$y(t)$—min

Продолжение таблицы для $t > 0$:

$0 < t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < t < \sqrt[3]{2}$	$t = \sqrt[3]{2}$	$t > \sqrt[3]{2}$	$t \to +\infty$
$x(t) > 0 \uparrow$	$x(t) = a\sqrt[3]{4}$	$x(t) > 0 \downarrow$	$x(t) = a\sqrt[3]{2}$	$x(t) > 0 \downarrow$	$x(t) \to 0$
$y(t) > 0 \uparrow$	$y(t) = a\sqrt[3]{2}$	$y(t) < 0 \uparrow$	$y(t) = a\sqrt[3]{4}$	$y(t) > 0 \downarrow$	$y(t) \to 0$
	$x(t)$—max		$y(t)$— max		

Из таблицы следует, во-первых, что точка O(0,0) есть точка самопересечения кривой, так как $x(t) = y(t) = 0$ при $t = 0$ и при $t \to +\infty$. Во-вторых

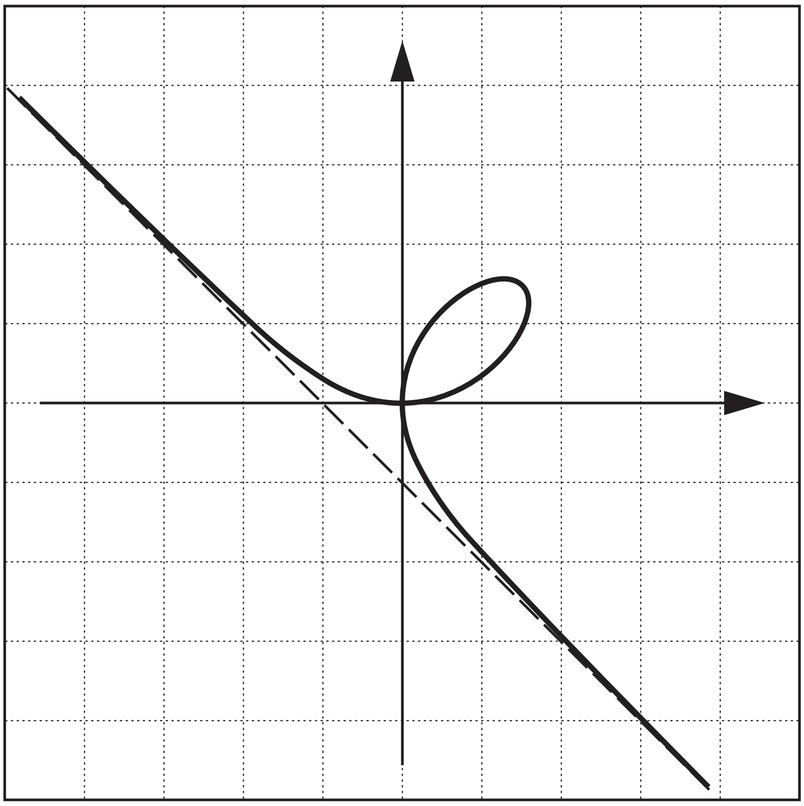

Рис. 6: Параметрически заданная кривая.

точка $x(t) = y(t) = 0$ есть точка минимума одной из ветвей кривой (при $-1 < t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$), так как при $x < x(0) = 0$ параметр $t < 0$ и $y(t)$ убывает, а при $x > x(0) = 0$ параметр $t > 0$ и $y(t)$ возрастает. В-третьих, точка $x(t) = a\sqrt[3]{2}, y(t) = a\sqrt[3]{4}, t = \sqrt[3]{2}$ есть точка локально максимума ветви кривой при $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < t$, так как при переходе по возрастанию параметром t значения $\sqrt[3]{2}$ переменная $x(t)$ убывая переходит значение $x(t) = a\sqrt[3]{2}$, переменная же $y(t)$ возрастает при $t < \sqrt[3]{2}$ до значения $y(t) = a\sqrt[3]{4}$, а при $t > \sqrt[3]{2}$ переменная $y(t)$ убывает. В-четвертых точка $x(t) = a\sqrt[3]{4}, y(t) = a\sqrt[3]{2}, t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ есть точка возврата кривой, так как при переходе по возрастанию параметром t значения $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ переменная $y(t)$ возрастая переходит значение $y(t) = a\sqrt[3]{2}$, переменная же $x(t)$ возрастает при $t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ до значения $x(t) = a\sqrt[3]{4}$, а при $t > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ переменная $x(t)$ убывает.

В примере 15.4.3 найдена асимптота кривой при $x \to \pm\infty$. Это прямая с уравнением $y = -x - a$.

Найдем производные y'_x и $y''_{xx}(x_0)$ по формулам производных параметрически заданных функций:

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

$$y''_{xx} = \frac{y''_{xt}(t)}{x'(t)} = \frac{2(t^3+1)^2}{(1-2t^3)^2} \div \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{2(t^3+1)^4}{(1-2t^3)^3}.$$

Исследование знака первой производной подтверждает сведения, приведенные в таблице выше. Вторая производная меняет знак с "$+$"на "$-$"при возрастании параметра t в точке $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Следовательно, на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ функция выпукла вниз, а на промежутке $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$ выпукла вверх. Точка $x(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) = a\sqrt[3]{4}$ является точкой перегиба. Из графика видно, что точка $x = 0, y = 0$, соответствующая значению параметра $t \to +\infty$, также является точкой перегиба на одной из ветвей кривой.
Кривая изображена на рис. 6.$\square$

16.3. УПРАЖНЕНИЯ.

16.3.1. Построить графики следующих функций

$$1) y = 3x^2 - x^3,$$

$$2) y = \frac{x^4}{(1+x)^3},$$

$$3) y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4,$$

$$4) y = \frac{(1+x)^3}{(1-x)^2},$$

$$5) y = (x-3)\sqrt{x},$$

$$6) y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1},$$

$$7) y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}},$$

$$8) y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}},$$

$$9) y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}},$$

$$10) y = \cos^4 x + \sin^4 x,$$

$$11) y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x,$$

$$12) y = \cos^2 x + \sin x,$$

$$13) y = \frac{\sin x}{\sin(x+\pi/4)},$$

$$14) y = e^{2x-x^2},$$

$$15) y = (1+x^2)e^{-x^2},$$

$$16) y = \frac{e^x}{1+x},$$

$$17) y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$

$$18) y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}},$$

$$19) y = x + \operatorname{arctg} x,$$

$$20) y = x \operatorname{arctg} x,$$

$$21) y = \arcsin \frac{x}{1+x^2},$$

$$22) y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

$$23) y = \cos^4 x + \sin^4 x,$$

$$24) y = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}},$$

$$25) y = (x+2)e^{\frac{1}{x}},$$

$$26) y = x^x,$$

$$27) y = (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

16.3.1. Построить графики следующих кривых, заданных параметрически уравнениями

$$1) x = \operatorname{ch} t,\ y = \operatorname{sh} t,$$

$$2) x = 2t - t^2,\ y = 3t - t^3,$$

$$3) x = \frac{t^2}{1-t^2},\ y = \frac{t}{t^2-1},$$

$$4) x = t + e^t,\ y = 2t + e^{2t},$$

$$5) x = a\cos 2t,\ y = a\cos 3t,$$

$$6) x = \cos^4 t,\ y = \sin^4 t,$$

$$7) x = t\ln t,\ y = \frac{\ln t}{t},$$

$$8) x = \frac{a}{\cos^3 t},\ y = \operatorname{tg}^3 t.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Демидович Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.*// М: Наука, 1977. – 528 с.

1. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. *Сборник задач по математическому анализу, том 1.*// М: Наука, 1986. – 496 с.

1. Шерстнев А.Н. *Конспект лекций по математическому анализу.*// Казань: Изд. КГУ., 1989. – 295 с.