

1. Доказать, что если функция f имеет непрерывную производную на отрезке $[0, 2]$ и

$$f_n(x) = n[f(1 + 1/n) - f(x)],$$

то $f_n(x)$ сходится равномерно к $f'(x)$ на $[0, 1]$.

2. Может ли последовательность разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции?

3. Доказать, что если $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$, а $g_n(x)$ сходится равномерно к $g(x)$ на $[0, 1]$, то $f_n(x) - g_n(x)$ сходится равномерно к $f(x) - g(x)$ на $[0, 1]$.

4. Доказать, что для любой непрерывной функции f на вещественной оси последовательность $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} n^{-1} f(x + i/n)$ сходится равномерно на любом отрезке $[a, b]$ к $f(x) = \int_0^1 f(x+t) dt$.

5. Доказать, что если последовательность интегрируемых на $[a, b]$ функций f_n сходится равномерно к интегрируемой на $[a, b]$ функции f , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

6. Можно ли и перейти к пределу под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2 x^4} dx?$$

7. Ответ обосновать.

8. Пусть $l = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$. Доказать, что радиус сходимости степенного ряда с коэффициентами a_n удовлетворяет неравенству $l \leq R \leq L$.

9. Законно ли почленное дифференцирование ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(x/n^2)$?

10. Доказать, что сумма ряда

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

непрерывна при $x > 1$.

11. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-1}$ сходится. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$ сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке, не содержащем точек a_n .

12. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/10)}{\sqrt{n^2 + \sin^2(n\pi/10)}}.$$

13. Законно ли почленное дифференцирование ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{1/(2n+1)} - x^{1/(2n-1)})$ на отрезке $[0, 1]$?

14. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$, члены которого монотонно возрастающие функции на $[a, b]$, сходится абсолютно в концевых точках этого отрезка, то данный ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$.

15. Дифференцируема ли функция $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$?

16. Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} [2 + \cos \pi n]^n n^2 (x-1)^n.$$

17. Доказать, что сумма ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ является бесконечно дифференцируемой функцией при $x > 0$.

18. Что можно сказать про радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)x^n$, если известны радиусы сходимости R_1 и R_2 рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$?

19. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 e^{nx}}, \quad x \geq 0.$$

20. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = (1+x^3) \ln(1+x^2)$.

21. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos nx}{1+n^3}.$$

22. Что можно сказать про радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n x^n$, если известны радиусы сходимости R_1 и R_2 рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$?

23. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}$ сходится равномерно при $x \geq 0$.

24. Доказать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную на всей числовой оси.

25. Пусть $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Как выглядит разложение в степенной ряд функции $f(x)/(1-x)$?

26. Найти производную функции

$$F(\alpha) = \int_{-\alpha^2}^{\alpha^2} f(t) |\alpha - t| dt.$$

27. Доказать, что если $f(x)$ интегрируема на $[0, +\infty)$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

28. Доказать, что функция

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^\alpha} dx$$

непрерывна при $\alpha > 2$.

29. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x^q} dx, \quad q \geq -1.$$

30. Можно ли дифференцировать по параметру интеграл

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin(\alpha x) e^{-x^4} dx,$$

применяя дифференцирование под знаком интеграла?

31. Вычислить

$$\int_0^{+\infty} x^{10} e^{-x^2} dx.$$

32. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится при $x = x_0$, то он сходится равномерно при $x \geq x_0$.

33. Вычислить

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}.$$

34. Исследовать на равномерную сходимость $\int_0^{+\infty} \sqrt[3]{\alpha} e^{-\alpha x^3} dx$, $\alpha \geq 0$.

35. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$.

36. Доказать, что интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^p} dx$$

сходится неравномерно при $p > 2$.

37. Доказать, что интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$$

сходится неравномерно при $p > 0$.