Найти функцию $z = f(x, y)$ в $\mathbb{R}^2$, если

$$dz = e^{x^2+y^2}[(2x\cos(xy) - y\sin(xy))dx + (2y\cos(xy) - x\sin(xy))dy].$$

Найти $F'(t)$, если

$$F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz,$$

а f непрерывна.

Найти объем тела, ограниченного плоскостями $a_i x + b_i y + c_i z = \pm h_i$ $(i = 1, 2, 3)$, если $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$

Исследовать на сходимость тройной несобственный интеграл

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\ge 1} \frac{\varphi(x,y,z)dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p},$$

где φ непрерывна и $0 < m \le \varphi(x, y, z) \le M$.

Может ли у неинтегрируемой функции модуль быть интегрируемым?

Доказать, что для криволинейного интеграла справедлива оценка

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \le \max_C \sqrt{P^2(x,y) + Q^2(x,y)}\, l(C),$$

где $l(C)$ — длина кривой C, P, Q — непрерывные функции.

Найти функцию в $\mathbb{R}^3$ по ее дифференциалу

$$du = e^{x^2+y^2}[(2x\cos(x+z) - \sin(x+z))dx + 2y\cos(x+z)dy - \sin(x+z)dz].$$

Вычислить интеграл $F(t) = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)dS$, где $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, если $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$, $f(x, y, z) = 0$, если $z < \sqrt{x^2+y^2}$.

Вывести формулу для вычисления длины кривой в трехмерном пространстве, заданной в цилиндрической системе координат: $r = r(\varphi)$, $z = z(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$.

Найти $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, u)$.

Сходится ли несобственный интеграл

$$\iint_{x^2+y^2>1} \frac{\sin(x+y)dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}?$$

Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2,$$

если $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$

Доказать сходимость и вычислить несобственный интеграл

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)dxdy.$$

Найти
$$\int_C \cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xdx+ydy+zdz),$$
где C соединяет начало координат с точкой (1,1,1).

Доказать равенство
$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \int_0^1 f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}du.$$

Вывести формулу для вычисления площади поверхности, заданной в цилиндрической системе координат уравнением $z = f(r,\varphi)$.

Доказать, что если f непрерывна и C — замкнутый кусочно-гладкий контур, то
$$\oint\limits_C f(x^2+y^2)(xdx+ydy) = 0.$$

Какой знак имеет интеграл $\iint_{|x|+|y|\le 1} \ln(x^2+y^2)dxdy$?

Доказать, что если C — простой замкнутый гладкий контур на плоскости, $\vec{l}$ — произвольное направление, то
$$\oint\limits_C \cos(\vec{l},\vec{n})ds = 0,$$
где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к контуру C.

Сходится ли интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy$?

Пусть C — простой замкнутый контур, расположенный в плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ и ограничивающий область площади S. Найти
$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$
где контур C пробегается в положительном направлении, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к плоскости, задающей ориентацию.

Выписать суммы Дарбу для интеграла по единичному квадрату от функции $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ для разбиения на одинаковые квадраты и найти их пределы, когда диаметр разбиения стремится к нулю.

Доказать, что если S — простая замкнутая гладкая поверхность, $\vec{l}$ — произвольное направление, то $\int\int_S \cos(\vec{l},\vec{n})dS = 0$, где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S.

Исследовать сходимость интеграла
$$\iint_{|x|+|y|\ge 1} \frac{dxdy}{x^4+y^4}.$$

Доказать, что $\operatorname{rot}(u\vec{a}) = u\operatorname{rot}(\vec{a}) + \operatorname{grad} u \times \vec{a}$.

Вычислить площадь области, ограниченной кривыми $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x^3 = y^2$, $x^3 = 3y^2$.

Доказать, что $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}$.

Доказать, что если функция интегрируема по Риману в единичном круге, то она ограничена.

Доказать сходимость и вычислить тройной несобственный интеграл
$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz.$$

Привести примеры (3-5) множеств в трехмерном пространстве, являющихся нуль-множествами по Лебегу, но не по Жордану.

Доказать, что если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области V и

$$\iiint_{\omega} f(x,y,z)dxdydz = 0$$

для любой области $\omega \subset V$, то $f \equiv 0$.

Исследовать сходимость интеграла

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dxdy}{x^4+y^4}.$$

Докажите, что если f непрерывна в окрестности точки x_0, то

$$\lim_{diam(A)\to 0} \int_A f(x)dx = f(x_0),$$

где предел берется по всем измеримым множествам A, для которых x_0 — внутренняя точка.

Найти направляющие косинусы внешней нормали к тору $x = (b + a\cos\psi)\cos\phi$, $y = (b + a\cos\psi)\sin\phi$, $x = a\sin\psi$, где $0 < a < b$.

Найти объем n-мерной пирамиды $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1$, $x_i \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ $(a_i > 0$, $i = 1,2,\ldots,n)$.

Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$\iint_{|x|+|y|\leq 10} \frac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$$

и найти его приближенное значение с точностью до 0,1.

Привести пример функции, не интегрируемой по Риману в единичном квадрате.