С. Р. Насыров

ИНТЕГРАЛ РИМАНА НА ОТРЕЗКЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Казань – 2013

УДК 517.1

Печатается по решению Учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского КФУ

Научный редактор
кандидат физико-математических наук, доцент Р. Н. Гумеров

Насыров С.Р. Интеграл Римана на отрезке и его приложения. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2013. – 45 с.

В настоящем учебном пособии излагается теоретический материал, связанный с интегралом Римана на отрезке и его геометрическими приложениями (вычисление площадей, объемов, длин кривых). Материал соответствует курсу «Математический анализ» для классических университетов (первая половина 2-го семестра).

1 Определенный интеграл Римана на отрезке

1.1 Разбиение отрезка. Семейство промежуточных точек

Рассмотрим отрезок $[a;b]$. *Разбиением* τ *отрезка* $[a;b]$ называется любое множество точек

$$\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

таких, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Любое разбиение τ порождает разложение $[a;b]$ на n отрезков $\triangle_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$. Отрезок $\triangle_k$ назовем *k-ым частичным сегментом разбиения* τ. Обозначим через $\triangle x_k = x_k - x_{k-1}$ длину $\triangle_k$. *Диаметром разбиения* τ называется число

$$d(\tau) = \max_{1 \leq k \leq n} \triangle x_k.$$

Рассмотрим два разбиения τ и τ' отрезка $[a;b]$. Разбиение τ' называется *измельчением разбиения* τ, если τ является подмножеством τ'. Ясно,что измельчение — это отношение порядка на множестве разбиений $[a;b]$.

Лемма 1.1.1 ***(иерархичность).*** *Для любого из двух разбиений τ' и τ'' отрезка $[a;b]$ существует разбиение τ, которое является измельчением как τ', так и τ''.*

Доказательство. Достаточно взять $\tau = \tau' \cup \tau''$.

Рассмотрим любое разбиение τ отрезка $[a;b]$. *Семейством промежуточных точек* T_τ, отвечающих разбиению

$$\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

отрезка $[a;b]$, называется семейство точек

$$T_\tau = (\xi_k)_{1 \leq k \leq n},$$

удовлетворяющих условию: $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1,n}$.

1.2 Интегральная сумма Римана функции f на $[a;b]$.

Пусть f — некоторая числовая функция на $[a;b]$. Пусть $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ — некоторое разбиение $[a;b]$: и $T_\tau = (\xi_k)_{1\le k\le n}$ — семейство промежуточных точек, отвечающих τ. *Интегральной суммой* для функции f, отвечающей разбиению τ и семейству промежуточных точек T_τ, называется число

$$S(f,\tau,T_\tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k.$$

1.3 Геометрический смысл интегральных сумм Римана

Пусть функция f непрерывна и положительна на $[a;b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию $\triangle$, ограниченную сверху графиком функции f, снизу — осью OX, а сбоку — прямыми $x=a$ и $x=b$. Как приближенно вычислить ее площадь? Площадь S криволинейной трапеции равна $\sum\limits_{k=1}^{n} S_k$, где S_k — площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью OX, сверху — графиком функции f и с боков — прямыми $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$. Заменим S_k на площадь прямоугольника, имеющего то же основание, что и последняя трапеция, и высоту $f(\xi_k)$. Тогда получим

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k = S(f,\tau,T_\tau).$$

Таким образом, интегральная сумма Римана равна площади многоугольника со сторонами параллельными координатным осям, аппроксимирующего (приближающего) криволинейную трапецию Δ.

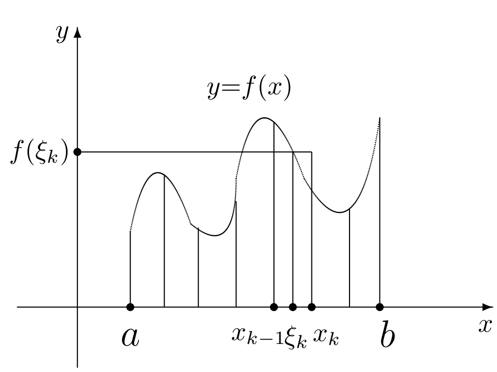

Рис. 1

1.4 Определение интеграла Римана на $[a;b]$

Число $I \in \mathbb{R}$ называется *пределом интегральных сумм Римана* при $d(\tau) \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения τ с диаметром $d(\tau)$, меньшим δ, и для любого семейства промежуточных точек T_τ выполняется неравенство

$$|S(f,\tau,T_\tau) - I| < \varepsilon.$$

Если существует предел

$$I = \lim_{d(\tau)\to 0} S(f,\tau,T_\tau),$$

то число I называется *интегралом Римана* от функции f на отрезке $[a;b]$ и пишут $I = \int_a^b f(x)dx$. При этом говорят, что *функция f интегрируема на $[a;b]$* по Риману.

Число a называется *нижним пределом интегрирования*, b — *верхним пределом интегрирования*, f называется *подинтегральной функцией*, x — *переменной интегрирования*. Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ зависит от a, b и от f, но не зависит от x:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Теорема 1.4.1 *Постоянная функция $f \equiv c$ интегрируема на $[a;b]$ и*

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

Доказательство. Для любых τ и T_τ имеем $f(\xi_k) = c$, $k = \overline{1,n}$. Поэтому интегральная сумма

$$S(f,\tau,T_\tau) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\triangle x_k = \sum_{k=1}^n c\,\triangle x_k = c\sum_{k=1}^n \triangle x_k = c(b-a)$$

не зависит ни от τ, ни от T_τ. Следовательно, $\exists \lim\limits_{d(\tau)\to 0} S(f,\tau,T_\tau) = c(b-a)$. Итак, $f \equiv c$ интегрируема и

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

Теорема 1.4.2 *Число I является пределом интегральных сумм Римана $S(f,\tau,T_\tau)$ при $d(\tau)\to 0$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{\tau_n\}$ и для любой последовательности $\{T_{\tau_n}\}$ таких, что $d(\tau_n)\to 0$, $n\to\infty$, существует*

$$\lim_{n\to\infty} S(f,\tau_n,T_{\tau_n}) = I.$$

Доказать самостоятельно (идея доказательства — как и в теореме Гейне о пределе функции).

Теорема 1.4.3 ***(Необходимое условие интегрируемости).*** *Если функция f интегрируема по Риману на $[a;b]$, то f ограничена на $[a;b]$.*

Доказательство. Пусть функция f интегрируема, но не ограничена на $[a;b]$. Докажем, что такого быть не может. Рассмотрим любое разбиение $\tau=\{x_0,\ldots,x_n\}$ и докажем, что существует семейство промежуточных точек T_τ такое, что

$$|S(f,\tau,T_\tau)| > M,$$

где M — любое наперед заданное число. Так как функция f не ограничена на $[a;b]$, существует k такое, что функция f не ограничена на отрезке $[x_{k-1};x_k]$. Рассмотрим любое семейство $T_\tau=\{\xi_0,\ldots,\xi_n\}$. Обозначим $x'=\xi_k$. Тогда интегральная сумма Римана

$$S(f,\tau,T_\tau)=\sum_{l=1}^{n} f(\xi_l)\triangle x_l = f(x')\triangle x_k + S',$$

где

$$S'=\sum_{1\le l\le n,\, l\ne k} f(\xi_l)\triangle x_l.$$

Фиксируем точки $\xi_1,\ldots,\xi_{k-1},\xi_{k+1},\ldots,\xi_n$. Так как функция f не ограничена на $[x_{k-1};x_k]$, то $\exists x'\in[x_{k-1};x_k]$:

$$|f(x')| > \frac{M+|S'|}{\triangle x_k}. \tag{1}$$

Тогда можно оценить интегральную сумму:

$$|S(f,\tau,T_\tau)| \overset{\text{нер-во }\triangle}{\ge} |f(x')|\,|\triangle x_k| - |S'| \overset{(1)}{\ge} \frac{M+|S'|}{\triangle x_k}\triangle x_k - |S'| = M.$$

Следовательно, не существует конечного предела $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} S(f,\tau,T_\tau)$ интегральных сумм и функция f не интегрируема на $[a;b]$, что противоречит условию теоремы.

Пример ограниченной функции, не интегрируемой по Риману.

Рассмотрим функцию Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Рассмотрим любое разбиение $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ отрезка $[a;b]$. Для любого k существуют такие точки ξ'_k, $\xi''_k \in [x_{k-1}, x_k]$, что ξ'_k — рациональная точка, ξ''_k — иррациональная. Пусть T'_τ состоит из точек ${\xi'}_k$, T''_τ — из точек ξ''_k. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} S(f,\tau,T'_\tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)\triangle x_k = \sum_{k=1}^{n} \triangle x_k = b-a,$$

так как $f(\xi'_k) = 1$ для любого k,

$$\sum_{k=1}^{n} S(f,\tau,T''_\tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi''_k)\triangle x_k = 0,$$

так как $f(\xi''_k) = 0$ для любого k. Следовательно, можно указать последовательности τ_n и T'_{τ_n} такие, что

$$S(f,\tau_n,T'_{\tau_n}) \to b-a, \quad d(\tau_n) \to 0,$$

и другую последовательность T''_{τ_n} такую,что

$$S(f,\tau_n,T''_{\tau_n}) \to 0, \quad d(\tau_n) \to 0.$$

Итак, не существует предела интегральной сумм, поэтому функция f не интегрируема на $[a;b]$.

1.5 Интегральные суммы Дарбу

Пусть функция f является ограниченной на $[a;b]$. Тогда для любого семейства $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ и для любого $k = \overline{1,n}$ существуют конечные числа

$$m_k = \inf_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x)$$

и

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}; x_k]} f(x).$$

Нижней и верхней интегральными суммами Дарбу функции f на $[a; b]$, отвечающими разбиению τ, называются числа

$$S_*(f, \tau) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k,$$

$$S^*(f, \tau) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k$$

Геометрический смысл интегральных сумм Дарбу — это площади многоугольников, заштрихованных на рисунке.

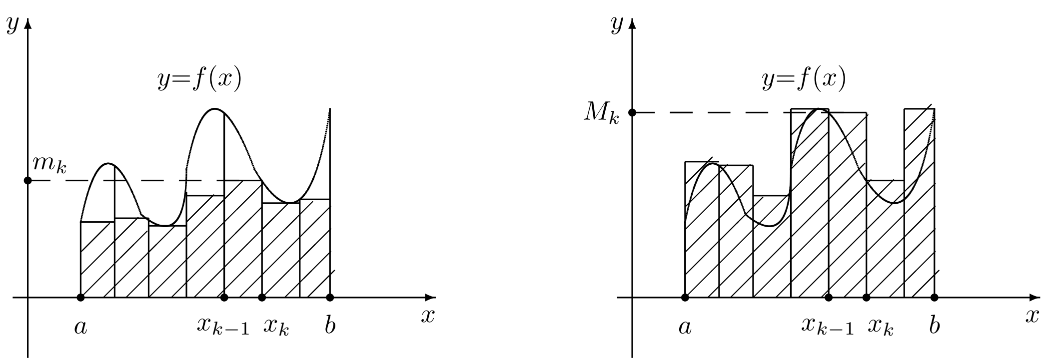

Рис. 2

1.6 Свойства интегральных сумм Дарбу.

1. *Для любых τ и T_τ выполняется неравенство:*

$$S_*(f, \tau) \leq S(f, \tau, T_\tau) \leq S^*(f, \tau). \tag{2}$$

Действительно, для любого $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k.$$

Умножая это неравенство на $\triangle x_k$ и суммируя по $k = \overline{1, n}$, получим неравенство (2).

2. *Если τ' — измельчение τ, то*

$$S_*(f, \tau') \geq S_*(f, \tau), \quad S^*(f, \tau') \leq S^*(f, \tau).$$

Достаточно доказать, что утверждение справедливо в случае, когда τ' отличается от τ на одну точку x'. Предположим, что $x' \in [x_{k-1}; x_k]$. Докажем первое неравенство (второе доказывается аналогично). Имеем

$$S_*(f,\tau) = \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i,$$

$$S_*(f,\tau') = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} m_i \triangle x_i + m'_k(x' - x_k) + m''_k(x_k - x'),$$

где

$$m'_k = \inf_{x\in[x_{k-1};x']} f(x) \geq m_k,$$

$$m''_k = \inf_{x\in[x';x_k]} f(x) \geq m_k,$$

так как инфимумы берутся по более узким множествам, чем отрезок $[x_{k-1}; x]$. Значит,

$$S_*(f,\tau') - S_*(f,\tau) = m'_k(x' - x_{k-1}) + m''_k(x_k - x') - m_k(x_k - x_{k-1}) \geq$$

$$\geq m_k(x' - x_{k-1}) + m_k(x_k - x') - m_k(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

Свойство 2 доказано.

Пусть

$$\Omega(f,\tau) = S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau).$$

Следствие. *Если τ' есть измельчение τ, то*

$$\Omega(f,\tau') \leq \Omega(f,\tau).$$

3. *Пусть τ' и τ'' — два разбиения отрезка $[a; b]$. Тогда*

$$S_*(f,\tau') \leq S^*(f,\tau'').$$

Пусть $\tau = \tau' \cup \tau''$ — измельчение τ' и τ''. Тогда в силу свойства 2

$$S_*(f,\tau') \leq S_*(f,\tau) \leq S^*(f,\tau) \leq S^*(f,\tau'').$$

4. *Справедливы равенства:*

$$S_*(f,\tau) = \inf_{T_\tau} S(f,\tau,T_\tau), \quad S^*(f,\tau) = \sup_{T_\tau} S(f,\tau,T_\tau).$$

Доказательство очевидно.

Обозначим

$$I_*(f) = \sup_\tau S_*(f,\tau),$$

$$I^*(f) = \inf_\tau S^*(f,\tau).$$

Числа $I_*(f)$ и $I^*(f)$ иногда называют *нижним и верхним интегралами Дарбу* функции f.

Ясно, что для любого τ

$$S_*(f,\tau) \le I_*(f) \le I^*(f) \le S^*(f,\tau), \quad 0 \le I^*(f) - I_*(f) \le \Omega(f,\tau).$$

Лемма 1.6.1 ***(Дарбу).*** *Существуют пределы нижних и верхних сумм Дарбу:*

$$\lim_{d(\tau)\to 0} S_*(f,\tau) = I_*(f),$$

$$\lim_{d(\tau)\to 0} S^*(f,\tau) = I^*(f).$$

Доказательство. Докажем существование первого предела (второй рассматривается аналогично). Установим, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \tau \ \ (d(\tau) < \delta \Rightarrow |S_*(f,\tau) - I_*(f)| < \varepsilon).$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $I_*(f) = \sup\limits_\tau S_*(f,\tau)$, то существует разбиение $\overline{\tau} = \{\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m\}$ отрезка $[a;b]$ такое, что

$$0 \le I_*(f) - S_*(f,\overline{\tau}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $K = \sup\limits_{[a;b]} |f(x)|$. Докажем, что $\delta = \frac{\varepsilon}{4mK}$ является искомой величиной. Рассмотрим любое разбиение τ такое, что $d(\tau) < \delta$. Пусть $\tau^* = \tau \cup \overline{\tau}$. Разбиение τ^* отличается от τ на p точек: $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_p$, где $p \le m$ (если τ и $\overline{\tau}$ не имеют общих точек на $[a;b]$, то $p = m-1$). Пусть

$$\tau_1 = \tau \cup \widetilde{x}_1,\ \tau_2 = \tau_1 \cup \widetilde{x}_2, \ldots, \tau_p = \tau_{p-1} \cup \widetilde{x}_p = \tau^*.$$

Имеем

$$0 \le S_*(f,\tau_1) - S_*(f,\tau) = m_k'(x' - x_{k-1}) + m_k''(x_k - x') - m_k(x_k - x_{k-1}) \le$$

$$\le K(x' - x_{k-1}) + K(x_k - x') + K(x_k - x_{k-1}) = 2K\triangle x_k < 2K\delta.$$

Аналогично доказывается, что

$$0 \le S_*(f,\tau_2) - S_*(f,\tau_1) < 2K\delta,$$

$$0 \le S_*(f,\tau_3) - S_*(f,\tau_2) < 2K\delta,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$0 \le S_*(f,\tau^*) - S_*(f,\tau_{p-1}) < 2K\delta.$$

Суммируя, получим

$$0 \le S_*(f,\tau^*) - S_*(f,\tau) < 2pK\delta \le 2mK\frac{\varepsilon}{4mK} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак,

$$0 \le S_*(f,\tau^*) - S_*(f,\tau) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Далее, так как τ^* — измельчение $\overline{\tau}$, имеем $S_*(f,\tau^*) \ge S_*(f,\overline{\tau})$ и

$$0 \le I_*(f) - S_*(f,\tau^*) \le I_*(f) - S_*(f,\overline{\tau}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Складывая (3) и (4), получим

$$0 \le I_*(f) - S_*(f,\tau) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Теорема 1.6.1 (критерий интегрируемости) *Следующие четыре условия равносильны:*

1) *функция f интегрируема по Риману на $[a;b]$;*
2) *функция f ограничена на $[a;b]$ и $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} \Omega(f,\tau) = 0$;*
3) *функция f ограничена на $[a;b]$ и для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau\colon \Omega(f,\tau) < \varepsilon$;*
4) *функция f ограничена на $[a;b]$ и $I_*(f) = I^*(f)$.*

При этом, если $I_*(f) = I^*(f)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_*(f) = I^*(f).$$

Доказательство. Схема доказательства: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть функция f интегрируема по Риману. Тогда f ограничена на $[a;b]$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall \tau$ с диаметром $d(\tau) < \delta$ и $\forall T_\tau$

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \le S(f,\tau,T_\tau) \le I + \frac{\varepsilon}{3},$$

где $I = I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. Так как имеет место свойство 4), то, беря нижнюю и верхнюю грани, то есть $\inf\limits_{T_\tau}$ и $\sup\limits_{T_\tau}$, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq S_*(f,\tau) \leq S^*(f,\tau) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$$

Следовательно, $0 \leq \Omega(f,\tau) = S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \ \forall \tau \ d(\tau) < \delta \Rightarrow 0 \leq \Omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Следовательно, $\exists \lim\limits_{d(\tau)\to 0} \Omega(f,\tau) = 0$.

2) $\Rightarrow$ 3). Очевидно (снимается ограничение на диаметр).

3) $\Rightarrow$ 4). Так как $0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq \Omega(f,\tau)\ \forall\tau$, то фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем τ таким образом, что $\Omega(f,\tau) < \varepsilon$. Тогда $0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $I^*(f) - I_*(f) = 0$.

4) $\Rightarrow$ 1). Пусть $I^*(f) = I_*(f) = I$. Докажем,что f интегрируема на $[a;b]$ и $\int_a^b f(x)dx = I$. Для любых τ и T_τ

$$S_*(f,\tau) \leq S(f,\tau,T_\tau) \leq S^*(f,\tau),$$

$$S_*(f,\tau) \leq I_*(f) = I = I^*(f) \leq S^*(f,\tau).$$

Вычитая эти два неравенства получим

$$|S(f,\tau,T_\tau) - I| \leq S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) = \Omega(f,\tau)$$

В силу леммы Дарбу с использованием (4) получаем, что существует

$$\lim_{d(\tau)\to 0} \Omega(f,\tau) = \lim_{d(\tau)\to 0} S^*(f,\tau) - \lim_{d(\tau)\to 0} S_*(f,\tau) = I^*(f) - I_*(f) = 0.$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ \forall \tau \ \ \forall T_\tau$

$$d(\tau) < \delta \Rightarrow |S(f,\tau,T_\tau) - I| < \varepsilon.$$

Это означает, что функция f интегрируема и $\int_a^b f(x)\,dx = I$.

Как следствие получаем теорему Римана:

Теорема 1.6.2 *Для того чтобы функция f была интегрируемой на $[a;b]$ необходимо и достаточно, чтобы функция f была ограниченной на $[a;b]$ и $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \tau :\ \Omega(f,\tau) < \varepsilon$.*

Имеем $\Omega(f,\tau)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\triangle x_k$ Пусть функция f является ограниченной на отрезке $\triangle$. Обозначим через $\omega_\triangle(f)=\sup_\triangle f-\inf_\triangle f$ *колебание функции* f *на* $\triangle$.

Теорема 1.6.3 *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Если* $\triangle'\subset\triangle$, *то* $\omega_{\triangle'}(f)\le\omega_\triangle(f)$.

2) *Если* $\forall x',x''\in\triangle$ *выполняется неравенство* $|f(x')-f(x'')|\le\delta$, *то* $\omega_\triangle(f)\le\delta$.

3) *Если* $\omega_\triangle(f)\le\delta$, *то для любых точек* x', $x''\in\triangle$ *имеет место неравенство* $|f(x')-f(x'')|\le\delta$.

4) *Если* $|f(x)|\le k$ *на* $\triangle$, *то* $\omega_\triangle(f)\le 2k$.

5) *Если функция f является непрерывной на* $[a;b]$, *то для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* $\delta>0$, *что для любого отрезка* $\triangle\subset[a;b]$ *с длиной, меньшей* δ, *имеет место неравенство* $\omega_\triangle(f)<\varepsilon$.

Доказательство. 1) Если $\triangle'\subset\triangle$, то $\inf_{\triangle'}f\ge\inf_\triangle f$, $\sup_{\triangle'}f\le\sup_\triangle f$, откуда следует нужное неравенство.

Утверждения 2) и 3) очевидны (нужно взять sup и inf).

4) Если $|f(x)|\le k$, $x\in\triangle$, то ясно, что $|\sup_\triangle f|\le k$ и $|\inf_\triangle f|\le k$ $\Rightarrow\ \omega_\triangle(f)\le|\sup_\triangle f|+|\inf_\triangle f|\le 2k$.

5) Функция f непрерывна на $[a;b]$, поэтому по теореме Кантора f равномерно непрерывна на $[a;b]$, то есть $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall x_1,x_2\in[a;b]$

$$|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

Пусть длина $l(\triangle)$ отрезка $\triangle$ меньше $\frac{\delta}{2}$. Так как функция f непрерывна на $\triangle$, то по теореме Вейрштрасса существуют точки x_1, $x_2\in\triangle$ такие, что

$$f(x_1)=\sup_\triangle f(x),\quad f(x_2)=\inf_\triangle f(x).$$

Имеем $|x_1-x_2|\le l(\triangle)\le\frac{\delta}{2}<\delta$, откуда

$$\omega_\triangle(f)=f(x_1)-f(x_2)=|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Отметим, что $\Omega(f,\tau)=\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\triangle x_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k(f)\triangle x_k$, где $\omega_k(f)=\omega_{\triangle_k}(f)$, $\triangle_k=[x_{k-1};x_k]$.

1.7 Классы интегрируемых функций. Теорема Лебега

Теорема 1.7.1 *Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то функция f интегрируема на $[a;b]$.*

[[В силу пункта 5 предыдущей теоремы $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0:$

$$l(\triangle) < \delta \Rightarrow \omega_{\triangle}(f) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Рассмотрим любое разбиение τ отрезка $[a;b]$ такое, что $d(\tau) < \delta$. Тогда $\omega_k(f) < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Значит

$$0 \leq \Omega(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\triangle x_k < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\triangle x_k = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} \Omega(f,\tau) = 0$. В силу критерия интегрируемости f интегрируема.]]

Теорема 1.7.2 *Любая монотонная на отрезке $[a;b]$ функция f интегрируема на $[a;b]$.*

[[Пусть для определенности функция f монотонно возрастает. Можно считать, что функция $f \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда $f(a) < f(b)$. В силу возрастания $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, $x \in [a;b]$, поэтому функция f является ограниченной на отрезке $[a;b]$. Пусть τ — любое разбиение отрезка $[a;b]$ такое, что $d(\tau) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, где ε — любое наперед заданное число, большее нуля. Если $x \in [x_{k-1};x_k]$, то $f(x_{k-1}) \leq f(x) \leq f(x_k)$. Кроме того, $\triangle x_k \leq d(\tau) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Тогда

$$0 \leq \Omega(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\triangle x_k \leq \sum_{k=1}^{n}[f(x_k) - f(x_{k-1})]d(\tau) =$$

$$= [f(b)-f(a)]d(\tau) < [f(b)-f(a)]\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \varepsilon.]]$$

Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$.

Определение 1.7.1 *Множество A называется множеством меры нуль по Жордану, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие множества A отрезками, суммарная длина которых меньше ε.*

Определение 1.7.2 *Множество A называется множеством меры нуль по Лебегу, если для любого $\varepsilon > 0$ существует не более чем счетное покрытие A отрезками, суммарная длина которых меньше ε.*

Замечание. Если $A \subset \cup_{k=1}^{\infty}[\alpha_k, \beta_k]$, то под суммарной длиной счетного числа отрезков, то есть бесконечной суммой $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\beta_k - \alpha_k)$ понимается предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\beta_k - \alpha_k)$.

Примеры. 1) Любое конечное множество есть множество меры нуль по Жордану и по Лебегу. Если множество $A = \{y_1, y_2, \ldots, y_l\}$, то покроем любую точку y_j отрезком $[\alpha_j, \beta_j]$ длины $\beta_j - \alpha_j < \frac{\varepsilon}{l}$. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{l}(\beta_j - \alpha_j) < \varepsilon$.

2) Рассмотрим бесконечное множество

$$A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}.$$

Покажем, что множество A имеет меру нуль по Жордану, следовательно, и по Лебегу (см. утверждение 1.7.1). Покроем точку 0 отрезком $[-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}]$ длины $\frac{\varepsilon}{2}$. Вне этого отрезка лежит конечное число точек из A. Следовательно, $A \setminus [-\frac{\varepsilon}{4}; \frac{\varepsilon}{4}]$ можно покрыть конечным числом отрезков суммарной длины, меньшей $\frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому множество A можно покрыть конечным числом отрезков, суммарной длины, меньшей $\frac{\varepsilon}{2}$.

Очевидно

Утверждение 1.7.1 *Любое множество меры нуль по Жордану является множеством меры нуль по Лебегу.*

Обратное не верно! Это следует из следующего примера.

Пример. Любое счетное множество является множеством меры нуль по Лебегу. Для любого $\varepsilon > 0$ покроем множество A не более чем счетным числом отрезков с суммой длин, меньшей ε. Без ограничения общности можно считать,что $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Покроем точку x_n отрезком $[\alpha_n; \beta_n]$ длины $\beta_n - \alpha_n < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Тогда $A \subset \cup_{n=1}^{\infty}[\alpha_n, \beta_n]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n - \alpha_n) < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

В частности, множество $\mathbb{Q} \cap [0;1]$ является множеством меры нуль по Лебегу. Но это множество не является множеством меры нуль по Жордану, так как если

$$\mathbb{Q} \cap [0;1] \subset \bigcup_{k=1}^{m} [\alpha_k; \beta_k],$$

где m — конечное число, то $[0;1] \subset \bigcup_{k=1}^{m} [\alpha_k; \beta_k]$ и $\sum\limits_{k=1}^{m} (\beta_k - \alpha_k) \geq 1$ (последнее доказать самим как упражнение).

Утверждение 1.7.2 *Если A — множество меры нуль по Жордану (по Лебегу), то любое подмножество $B \subset A$ является множеством меры нуль по Жордану (по Лебегу).*

Утверждение 1.7.3 *Если $A_1, \ldots, A_n$ — множества меры по Жордану (по Лебегу), то их объединение $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$ — множество меры нуль по Жордану (по Лебегу).*

[[Достаточно рассмотреть случай, когда $n = 2$. Если каждое из множеств A_1, A_2 покрыть конечным (не более, чем счетным) множеством отрезков с суммой длин, меньшей $\frac{\varepsilon}{2}$, то A покрывается конечным (не более, чем счетным) множеством отрезков, суммарной длины, меньшей ε.]]

Следующая теорема является важнейшим инструментом для доказательства теорем об интегрируемости функций на отрезке.

Теорема 1.7.3 (Лебег) *Для того чтобы ограниченная функция f на $[a;b]$ была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы множество точек разрыва функции f на отрезке $[a;b]$ имело меру нуль по Лебегу.*

Доказательство будет дано позже в более общей ситуации при изучении кратных интегралов Римана.

1.8 Свойства интеграла Римана

Теорема 1.8.1 *(линейность интеграла) Если функции f и g интегрируемы на $[a;b]$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, то линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ тоже интегрируема на $[a;b]$ и*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx. \tag{5}$$

[[Для любого разбиения τ и семейства промежуточных точек T_τ имеем

$$S(\alpha f+\beta g,\tau,T_\tau)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha f(\xi_i)+\beta g(\xi_i))\triangle x_i=$$

$$=\alpha\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\triangle x_i+\beta\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\triangle x_i=\alpha S(f,\tau,T_\tau)+\beta S(g,\tau,T_\tau).$$

Пусть $d(\tau)\to 0$. Тогда $\alpha S(f,\tau,T_\tau)+\beta S(g,\tau,T_\tau)$ стремится к выражению, стоящему в правой части равенства (5). Следовательно, функция $\alpha f+\beta g$ интегрируема на $[a;b]$ и справедливо (5).]]

Теорема 1.8.2 *Если функции f и g интегрируемы на $[a;b]$, то произведение fg является интегрируемой функцией на $[a;b]$.*

[[Пусть A_f — множество точек разрыва функции f, A_g — множество точек разрыва функции g, A_{fg} — множество точек разрыва функции fg. Тогда $A_{fg}\subset A_f\cup A_g$ (это следует из теоремы о непрерывности произведения непрерывных функций). Функции f и g интегрируемы. По теореме Лебега f и g ограничены и множества A_f, A_g имеют меру нуль по Лебегу. Тогда функция fg ограничена и множество A_{fg} имеет меру нуль по Лебегу, так как является подмножеством множества $A_f\cup A_g$ меры нуль по Лебегу. Итак, fg ограничена и A_{fg} имеет лебегову меру нуль. По теореме Лебега произведение fg интегрируемо.]]

Теорема 1.8.3 *Если функция f интегрируема на $[a;b]$, то f интегрируема на любом отрезке $[c;d]\subset[a;b]$.*

[[Если функция f интегрируема на $[a;b]$, то по теореме Лебега функция f ограничена и множество точек разрыва A_f функции f имеет меру нуль по Лебегу. Пусть $g=f|_{[c;d]}$, тогда функция g ограничена и множество A_g точек разрыва функции g содержится в A_f. Так как A_f — множество меры нуль по Лебегу, A_g — также множество меры нуль по Лебегу. По теореме Лебега функция g интегрируема.]]

Теорема 1.8.4 *(аддитивность интеграла как функции множества). Пусть $a<c<b$ и функция f интегрируема на $[a;c]$ и $[c;b]$. Тогда функция f интегрируема на $[a;b]$ и*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \qquad (6)$$

[[Пусть функция f интегрируема на $[a;c]$ и $[c;b]$. Тогда функция f ограничена на $[a;c]$ и $[c;b]$. Следовательно, функция f ограничена на всем отрезке $[a;b]$. Пусть A_1 — множество точек разрыва функции f на $[a;c]$ и A_2 — множество точек разрыва функции f на $[c;b]$. По теореме Лебега A_1 и A_2 имеют лебегову меру нуль. Множество A_f точек разрыва функции f на $[a;b]$ равно $A_f = A_1 \cup A_2$, следовательно, имеет лебегову меру нуль. Значит f интегрируема.

Подсчитаем интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Рассмотрим любую последовательность $\{\tau_n\}$ разбиений отрезка $[a;b]$ такую, что точка c является одной из точек разбиения τ_n для любого $n \geq 1$ и пусть $d(\tau_n) \to 0$, $n \to \infty$. Рассмотрим любую последовательность $\{T_{\tau_n}\}$ промежуточных точек. Любое τ_n индуцирует (порождает) разбиения τ_n' и τ_n'' отрезков $[a;c]$ и $[c;b]$, а любое семейство промежуточных точек T_{τ_n} — семейства промежуточных точек $T_{\tau_n'}$ и $T_{\tau_n''}$ отрезков $[a;c]$ и $[c;b]$. Тогда интегральная сумма Римана

$$S(f, \tau_n, T_{\tau_n}) = S(f, \tau_n', T_{\tau_n'}) + S(f, \tau_n'', T_{\tau_n''}). \tag{7}$$

Так как $0 \leq d(\tau_n') \leq d(\tau_n) \to 0$, $0 \leq d(\tau_n'') \leq d(\tau_n) \to 0$, имеем $d(\tau_n'), d(\tau_n'') \to 0$, $n \to \infty$ (по теореме о двух милиционерах). Переходя в (7) к пределу при $n \to \infty$ с учетом того, что функция f интегрируема на отрезках $[a;c]$, $[c;b]$ и $[a;b]$, получаем нужное равенство (6).]]

Теорема 1.8.5 *Если функция f интегрируема на $[a;b]$ и $f \geq 0$ на $[a;b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

[[Имеем $S(f, \tau_n, T_{\tau_n}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\triangle x_k \geq 0$, так как $f(\xi_k) \geq 0$ по условию теоремы, $\triangle x_k \geq 0$, $1 \leq k \leq n$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\tau)\to 0} S(f, \tau_n, T_{\tau_n}) \geq 0$$

(предел неотрицательных чисел есть число неотрицательное).]]

Теорема 1.8.6 *Если на $[a;b]$ функция f интегрируема и неотрицательна и существует точка c, которая является точкой непрерывности функции f, в которой $f(c) > 0$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

[[Предположим, что точка $c \in (a;b)$ (если $c = a$ или $c = b$, то доказательство аналогично). Так как $f(c) > 0$ и $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$, существует отрезок $[a';b']$, который содержит точку c и содержится в $(a;b)$, такой, что $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$, $x \in [a',b']$. Тогда в силу теорем 1.8.1, 1.8.4 и 1.8.5 имеем

$$\int_a^b f(x) = \int_a^{a'} f(x)\,dx + \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx + \int_{b'}^{b} f(x)\,dx \geq \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{a'}^{b'} \left(f(x) - \frac{f(c)}{2}\right)\,dx + \int_{a'}^{b'} \frac{f(c)}{2}\,dx \geq \int_{a'}^{b'} \frac{f(c)}{2}\,dx = \frac{f(c)}{2}(b'-a') > 0.]]$$

Теорема 1.8.7 *Пусть f и g интегрируемы на $[a;b]$ и $f \geq g$ на $[a;b]$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

[[Так как $f - g \geq 0$ на $[a;b]$, то в силу линейности интеграла $f - g$ интегрируема и по теореме 1.8.5

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0,$$

что и требовалось доказать.]]

Теорема 1.8.8 *Если функция f интегрируема на $[a;b]$, то $|f(x)|$ интегрируема на $[a;b]$ и*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

[[Функция f интегрируема на $[a;b]$, поэтому функция f ограничена на $[a;b]$ и множество A_f точек разрыва функции f имеет лебегову меру нуль. Тогда $|f(x)|$ тоже ограничена на $[a;b]$, а множество $A_{|f|}$ точек разрыва функции $|f|$ является подмножеством множества A_f (так как если функция f непрерывна в некоторой точке x_0, то $|f|$ тоже непрерывна в точке x_0). Множество A_f имеет меру 0 по Лебегу и $A_{|f|}$ является подмножеством A_f, поэтому $A_{|f|}$ имеет меру 0 по Лебегу. По теореме Лебега $|f|$ интегрируема. Имеем $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Следовательно,

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

откуда получаем нужное неравенство.]]

1.9 Теоремы о среднем для интегралов

Теорема 1.9.1 *Если* $m \le f(x) \le M$ *и функция* f *интегрируема на* $[a;b]$*, то существует константа* μ *такая, что* $m \le \mu \le M$ *и*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a).$$

Более того, если функция f *непрерывна на* $[a;b]$*, то существует такая точка* $c \in [a;b]$*, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

[[Имеем

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a).$$

Обозначим $\mu = \int_a^b f(x)\,dx/(b-a)$, тогда $m \le \mu \le M$ и первое утверждение доказано.

Пусть функция f непрерывна на $[a;b]$ и $M = \sup_{[a;b]} f$, $m = \inf_{[a;b]} f$. Так как $\mu \in [m, M]$, то по теореме Больцано-Коши о промежуточном значении $\exists c \in [a;b] : f(c) = \mu$. Следовательно, $f(c) = \int_a^b f(x)\,dx/(b-a)$, откуда следует второе утверждение теоремы.]]

Теорема 1.9.2 *Пусть функции* f *и* g *интегрируемы на* $[a;b]$, $g \ge 0$ *и* $m \le f(x) \le M$ *на* $[a;b]$*. Тогда существует константа* $\mu \in [m, M]$ *такая, что*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{8}$$

Более того, если функция f *непрерывна на* $[a;b]$*, то* $\exists c \in [a;b]$*:*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx. \tag{9}$$

(Теорема 1.9.1 получается из теоремы 1.9.2, если взять $g(x) \equiv 1$.)

[[Имеем $m \le f(x) \le M$. Следовательно, в силу неотрицательности функции g, $m\,g(x) \le f(x)\,g(x) \le M\,g(x)$, откуда

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$ и тогда формула (8) справедлива для любого μ. Если $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, то $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ и тогда

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = \mu \leq M, \tag{10}$$

откуда следует (8).

Если функция f непрерывна, то можно считать, что $m = \inf_{[a;b]} f$, $M = \sup_{[a;b]} f$. Если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то формула (9) справедлива для любого c. Если $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, то в силу (10) и теоремы Больцано-Коши существует c такое, что $f(c) = \mu$, откуда следует (9).]]

1.10 Расширение понятия интеграла

До сих пор мы рассматривали $\int_a^b f(x)\,dx$ в случае, когда $a < b$. Можно определить этот интеграл и в случае, когда $a \geq b$. При $a = b$ полагаем $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, а если $a > b$, то полагаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Если так определить интеграл, то для него остаются справедливыми большинство свойств обычного интеграла. В частности,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad (\forall a, b, c)$$

(доказать самостоятельно!).

2 Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция f интегрируема на $[a;b]$. Тогда по теореме 1.7.1 функция f интегрируема на $[a;x]$ для любого $x \in [a;b]$. Рассмотрим функцию $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Эта функция называется *интегралом с переменным верхним пределом* x.

2.1 Непрерывность интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 2.1.1 *Пусть функция f интегрируема на $[a;b]$. Тогда интеграл с переменным верхним пределом $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ является непрерывной функцией на отрезке $[a;b]$.*

[[Если функция f интегрируема $[a;b]$, то она ограничена на $[a;b]$. Следовательно, $K=\sup_{x\in[a;b]}|f(x)|<+\infty$. Для любых x_0, $x\in[a;b]$

$$|F(x)-F(x_0)|=\left|\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt\right|$$

$$=\left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right|\le\sup_{t\in[a;b]}|f(t)|\cdot|x-x_0|=K|x-x_0|.$$

Фиксируем $\varepsilon>0$. Пусть $\delta=\frac{\varepsilon}{K}$. Тогда $|x-x_0|<\delta\Rightarrow|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$ следовательно, функция F непрерывна в любой точке $x_0\in[a;b]$.]]

2.2 Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом

Теорема 2.2.1 *Пусть функция f непрерывна в точке $x_0\in[a;b]$. Тогда функция $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ дифференцируема в точке x_0 и справедливо равенство $F'(x_0)=f(x_0)$.*

[[Имеем

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)=\frac{\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt-f(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt-\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x(f(t)-f(x_0))\,dt.$$

Так как f непрерывна в точке x_0, то $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $|t-x_0|<\delta$ $\Rightarrow|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Пусть $|x-x_0|<\delta$. Тогда для любого t, лежащего между x_0 и x, выполняется неравенство $|t-x_0|<\delta\Rightarrow|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$. Следовательно,

$$0\le\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|\le\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x(f(t)-f(x_0))\,dt\right|\le$$

$$\leq \frac{1}{|x-x_0|} \sup |f(t)-f(x_0)|\,|x-x_0| \leq \varepsilon.$$

Итак, $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$, то есть производная $F'(x_0)$ существует и равна $f(x_0)$.]]

Следствие 2.2.1 *Пусть функция f непрерывна на $[a;b]$. Тогда функция $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема на $[a;b]$ и производная $F'(x)=f(x)$ на $[a;b]$, то есть функция F — первообразная функции f.*

2.3 Основная теорема интегрального исчисления

Теорема 2.3.1 *Пусть функция f непрерывна на $[a;b]$ и Φ — некоторая первообразная функции f на $[a;b]$. Тогда*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b)-\Phi(a)$$

(формула Ньютона-Лейбница).

[[Пусть функция f непрерывна на $[a;b]$, тогда $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ является первообразной функции f. Следовательно, $\exists C=\mathrm{const}:\ \forall x\in[a;b]\ \ F(x)=\Phi(x)+C$. Имеем $F(a)=\int_a^a f(t)dt=0$. Следовательно, $\Phi(a)+C=0 \Rightarrow C=-\Phi(a)$. Тогда $F(x)=\Phi(x)+C=\Phi(x)-\Phi(a)$. Итак,

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = \Phi(b)-\Phi(a).]]$$

Формула Ньютона-Лейбница иногда записывается в другом виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)|_{x=a}^b = \Phi(x)|_a^b.$$

Еще один вид формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b)-F(a)$$

или

$$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(t)\,dt.$$

Примеры.

1)
$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{1} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}\,.$$

2)
$$\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$
$$= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = (x - \ln(x+1))\,|_0^1 = 1 - \ln 2.$$

2.4 Замена переменных в определенном интеграле

Теорема 2.4.1 *Пусть функция f непрерывна на $[a;b]$, функция φ непрерывно дифференцируема на $[\alpha;\beta]$, $\varphi([\alpha,\beta]) = [a;b]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

[[Оба интеграла существуют, так как подинтегральные функции являются непрерывными. Пусть Φ — первообразная функции f на $[a;b]$, то есть $\Phi'(x) = f(x)$ на $[a;b]$. Тогда
$$(\Phi(\varphi(t)))' = \Phi'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$
на $[\alpha,\beta]$. По формуле Ньютона-Лейбница
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(t))|_{t=\alpha}^{\beta} =$$
$$= \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(x)|_{x=a}^{b} = \int_a^b f(x)\,dx.]]$$

Итак, для замены переменных следует произвести 3 операции:
1) замена функции, то есть $f(x) \to f(\varphi(t))$;
2) замена дифференциала, то есть $dx \to \varphi'(t)\,dt$;
3) замена пределов интегрирования.

Пример. Вычислить
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Сделаем замену переменных $x = \sin t$, тогда $dx = \cos t\,dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 1$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Значит,

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\sin 0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

2.5 Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 2.5.1 *Пусть функции f и g непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a;b]$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.$$

[[Интегралы существуют, так как подинтегральные функции непрерывны. Имеем $(fg)' = f'g + fg' \;\Rightarrow\; fg' = (fg)' - f'g$. Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \int_a^b (f(x)\,g(x))'dx - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx =$$

$$= f(x)\,g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.]]$$

Пример.

$$\int_1^2 \ln x\,dx = \ln x \cdot x|_1^2 - \int_1^2 x(\ln x)'dx = x\ln x|_1^2 - x|_1^2 = 2\ln 2 - 3.$$

2.6 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Напомним вид формулы Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x), \quad (11)$$

где $r_n(x)$ — остаточный член.

Теорема 2.6.1 *Пусть функция дифференцируема f $(n+1)$ раз на $[c;d]$ и точка $a \in [c;d]$. Тогда $\forall x \in [c,d]$ справедлива формула Тейлора (11), где остаток*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \quad (12)$$

[[Доказательство по индукции. При $n = 0$ равенство

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

справедливо (формула Ньютона-Лейбница). Предположим, что формула (11) с остатком (12) справедлива при $n = k$, то есть

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt. \tag{13}$$

Имеем

$$\frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt = -\frac{1}{(k+1)!}\int_a^x f^{(k+1)}(t)\,d((x-t)^{k+1}) =$$

$$= -\frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(t)(x-t)^{k+1}|_{t=a}^{x} + \frac{1}{(k+1)!}\int_a^x (x-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a)(x-a)^{k+1} + \frac{1}{(k+1)!}\int_a^x (x-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)\,dt, \quad k \le n-1.$$

Из последнего равенства и равенства ((13)) следует, что

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{(k+1)!}\int_a^x (x-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)\,dt.$$

3 Применения определенного интеграла

3.1 Площадь плоской фигуры

Пусть B — многоугольник в $\mathbb{R}^2$. Нетрудно определить его площадь $P(B)$. Сначала определим площадь треугольника. Если треугольник прямоугольный, то по определению его площадь равна половине произведения катетов. Произвольный треугольник является объединением двух прямоугольных, поэтому его площадь равна сумме площадей этих прямоугольных треугольников. Наконец, произвольный многоугольник B можно разбить на конечное число треугольников T_1, $T_2, \dots, T_m$, и его площадь по определению равна $P(B) = \sum_{k=1}^{m} P(T_k)$.

Теперь перейдем к определению площади (меры Жордана) произвольного ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}^2$.

Рассмотрим два числа:

$$P_*(A) = \sup_{B \subset A} P(B),$$

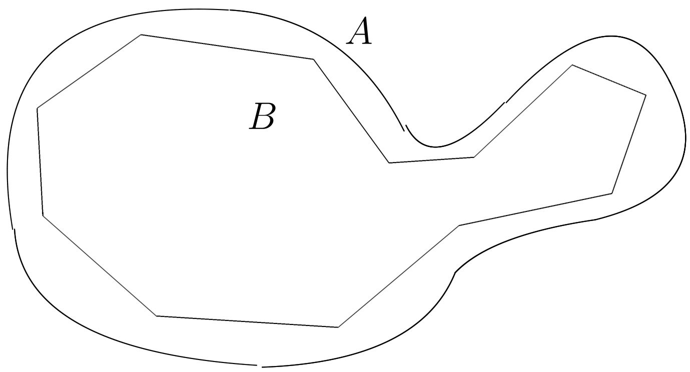

Рис. 3

$$P^*(A) = \inf_{B \supset A} P(B).$$

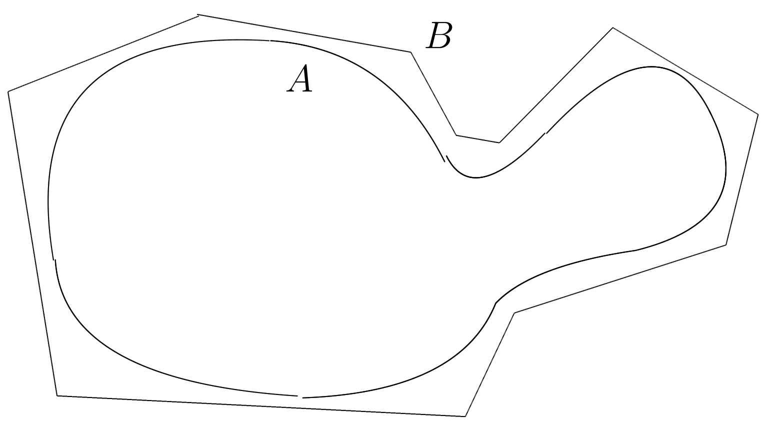

Рис. 4

Здесь B — многоугольники, которые содержатся в A или, наоборот, содержат A (рис. 3 и 4). Числа $P_*(A)$ и $P^*(A)$ называют *внутренней и внешней мерой Жодрана* множества A.

Если $P_*(A) = P^*(A)$, то говорят, что множество A *измеримо* (по Жордану) и его *площадь (мера Жордана)*

$$P(A) = P_*(A) = P^*(A).$$

Мера P обладает свойствами:

1) $P(A) \geq 0$ для любого измеримого A;
2) если множества $A_1, \ldots, A_n$ измеримы и попарно не пересекаются, то объединение $A = \cup_{i=1}^n A_i$ измеримо и

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

3) любой многоугольник B измерим и его мера $P(B)$, определенная по формуле $P(B) = P_*(B) = P^*(B)$ совпадает с площадью.

Пример. Рассмотрим круговой сектор S радиуса R с центральным углом α. Утверждается, что он измерим и его мера $P(S) = \frac{1}{2}\,\alpha R^2$.

Разобьем S на n секторов $S_1, \ldots, S_n$ одинакового раствора $\frac{\alpha}{n}$. Рассмотрим сектор S_j (рис. 5). Имеем

$$\triangle OAB \subset S_j \subset \triangle OCD,$$

$$OA = OB = R \Longrightarrow P(\triangle OAB) = \frac{1}{2}\,R^2 \sin\frac{\alpha}{n}.$$

Кроме того,

$$OC = OD = \frac{R}{\cos\beta} \Longrightarrow P(\triangle OCD) = \frac{1}{2}\,R^2\,\frac{\sin\frac{\alpha}{n}}{\cos^2\beta},$$

где $\beta = \alpha/(2n)$.

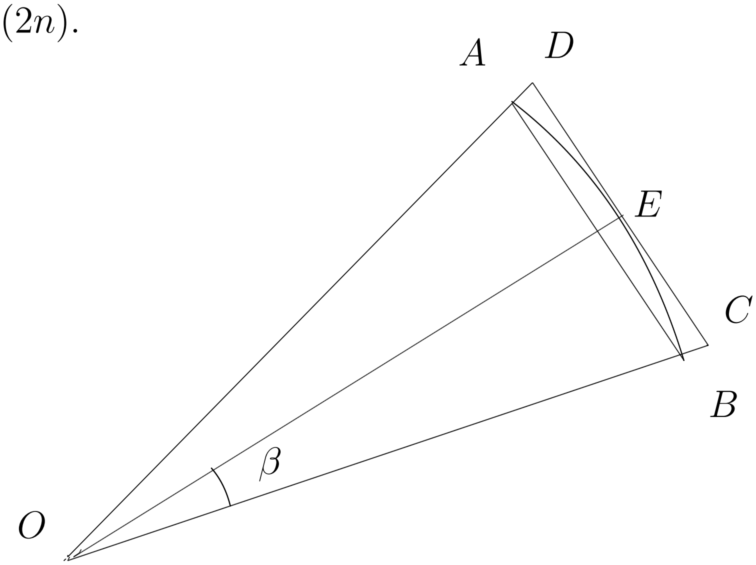

Рис. 5

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} R^2 \sin\frac{\alpha}{n} \leq P_*(S) \leq P^*(S) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} R^2 \frac{\sin\frac{\alpha}{n}}{\cos^2\beta},$$

$$\frac{1}{2}R^2\, n\sin\frac{\alpha}{n} \le P_*(S) \le P^*(S) \le \frac{1}{2}\frac{R^2 n\sin\frac{\alpha}{n}}{\cos^2\beta}.$$

При $n \to \infty$, $n\sin\frac{\alpha}{n} \to \alpha$ (первый замечательный предел), откуда

$$\frac{1}{2}\,\alpha R^2 \le P_*(S) \le P^*(S) \le \frac{1}{2}\,\alpha R^2.$$

Следовательно, S измерим и $P(S) = \frac{1}{2}\,\alpha R^2$.

Лемма 3.1.1 *(критерий измеримости). Ограниченное в $\mathbb{R}^2$ множество A измеримо $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0$ $\exists$ измеримые множества B, C: $B \subset A \subset C$ и $P(C) - P(B) < \varepsilon$.*

[[«$\Rightarrow$» Пусть A измеримо, тогда $P(A) = P_*(A) = P^*(A)$. В силу свойства точной верхней грани для любого $\varepsilon > 0$ существует многоугольник C: $A \subset C$ и $P(C) < P^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично существует многоугольник B: $B \subset A$ и $P(B) > P_*(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. Вычитая два этих неравенства и используя равенство $P_*(A) = P^*(A)$, получим $P(C) - P(B) < \varepsilon$.

«$\Leftarrow$». Пусть существуют измеримые множества B, C такие, что $B \subset A \subset C$ и $P(C) - P(B) < \varepsilon$. Так как $B \subset A$, имеем

$$P(B) = P_*(B) \le P_*(A) \le P^*(A) \le P^*(C) = P(C).$$

Следовательно, $0 \le P^*(A) - P_*(A) \le P(C) - P(B) < \varepsilon$ $\forall\varepsilon > 0$. Поэтому $P^*(A) - P_*(A) = 0$, то есть A измеримо.]]

3.2 Площадь криволинейной трапеции

Пусть f непрерывна на $[a;b]$ и $f \ge 0$. Рассмотрим множество

$$A_0^f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f\},$$

т. е. криволинейную трапецию. Докажем, что A_0^f измерима и

$$P(A_0^f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Рассмотрим любое разбиение $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a;b]$ и соответствующие ему интегральные суммы Дарбу

$$S_*(f,\tau) = \sum_{k=1}^n m_k \triangle x_k, \quad S^*(f,\tau) = \sum_{k=1}^n M_k \triangle x_k.$$

Сумма S_* равна площади многоугольника B, содержащегося в A_0^f, а S^* — площадь многоугольника C, который содержит A_0^f. Так как f непрерывна, то f интегрируема на $[a;b]$ и по критерию интегрируемости

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \tau : \, P(C) - P(B) = S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) < \varepsilon.$$

Таким образом, существуют измеримые B и C такие, что $B \subset A_0^f \subset C$ и $P(C) - P(B) < \varepsilon$. Следовательно, A_0^f измерима. Очевидно, что

$$S_*(f, \tau) = P(B) \le P(A_0^f) \le P(C) = S^*(f, \tau).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $d(\tau) \to 0$, получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx \le P(A_0^f) \le \int_a^b f(x)\,dx.$$

Значит, $P(A_0^f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

3.3 Площадь криволинейного сектора

Рассмотрим криволинейный сектор

$$S_f = \{(r, \varphi) \mid \alpha \le \varphi \le \beta, \ r \le f(\varphi)\},$$

где $f(\varphi)$ — некоторая непрерывная неотрицательная функция на $[\alpha; \beta]$. Докажем, что S_f измерим и его площадь равна

$$P(S_f) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Рассмотрим любое разбиение $\tau = \{\alpha = \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n = \beta\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$. Пусть

$$r_k = \inf_{\varphi_{k-1} \le \varphi \le \varphi_k} f(\varphi),$$
$$R_k = \sup_{\varphi_{k-1} \le \varphi \le \varphi_k} f(\varphi),$$

$k = \overline{1, n}$. Заменяя каждый из криволинейных секторов

$$S_f^{(k)} = \{(r, \varphi) \mid \varphi_{k-1} \le \varphi \le \varphi_k, \ r \le f(\varphi)\}$$

на круговой сектор

$$\{(r, \varphi) \mid r \le r_k, \ \varphi_{k-1} \le \varphi \le \varphi_k\},$$

(рис. 6) получаем веерообразную фигуру $B \subset S_f$, площадь которой равна

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r_k^2 \triangle\varphi_k.$$

Заменяя криволинейные секторы $S_f^{(k)}$ на круговые

$$\{(r, \varphi) \mid 0 \le r \le R_k,\ \varphi_{k-1} \le \varphi \le \varphi_k\},$$

получаем веерообразную фигуру C, которая содержит S_f, площадь которой

$$P(C) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} R_k^2 \triangle\varphi_k.$$

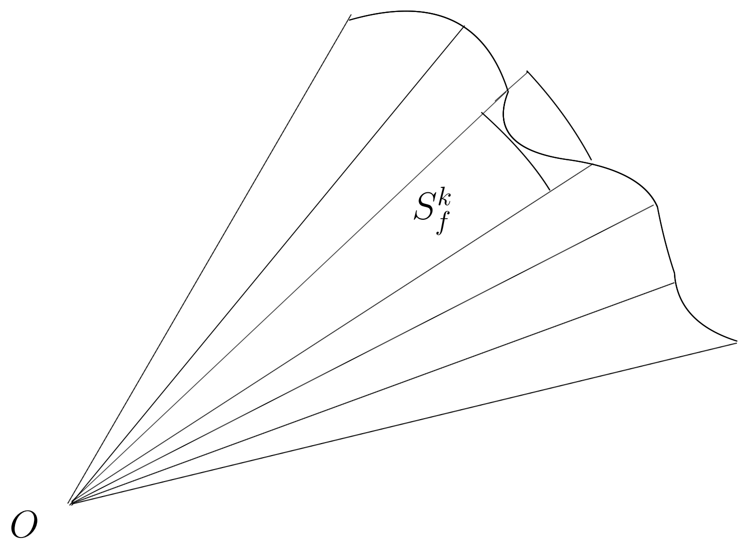

Рис. 6

Но

$$P(B) = S_*((1/2)f^2(\varphi), \tau),$$
$$P(C) = S^*((1/2)f^2(\varphi), \tau).$$

Функция $(1/2)f^2(\varphi)$ непрерывна, следовательно, она интегрируема на $[\alpha; \beta]$. Поэтому существует τ такое, что

$$S^*((1/2)f^2(\varphi), \tau) - S_*((1/2)f^2(\varphi), \tau) < \varepsilon,$$

для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Так как B и C являются объединениями круговых секторов, B и C измеримы,

$$B \subset S_f \subset C \Longrightarrow P(C) - P(B) < \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию измеримости S_f измеримо. Так как

$$S_*(f^2(\varphi)/2, \tau) = P(B) \le P(S_f) \le P(C) = S^*(f^2(\varphi)/2, \tau),$$

то при $d(\tau) \to 0$ получаем

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{2} f^2(\varphi)\, d\varphi \le P(S_f) \le \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} f^2(\varphi)\, d\varphi,$$

откуда

$$P(S_f) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\, d\varphi.$$

3.4 Измеримость множеств в $\mathbb{R}^3$. Объем

Определим теперь объем V множеств в трехмерном пространстве. Сначала рассмотрим треугольную пирамиду, одно из боковых ребер которой имеет длину H и перпендикулярно основанию. Тогда по определению ее объем равен $(1/3)H \cdot \Sigma$, где Σ — площадь основания пирамиды. Исходя из этого, мы можем определить объем $V(M)$ произвольного многогранника M в $\mathbb{R}^3$, разбивая его на подобные пирамиды.

Пусть теперь A — ограниченное множество в $\mathbb{R}^3$. Определим два числа:

$$V_*(A) = \sup_{M \subset A} V(M),$$
$$V^*(A) = \inf_{M \supset A} V(M),$$

где супремум и инфимум M берутся по многогранникам, лежащим в A и содержащим A соответственно.

Если $V_*(A) = V^*(A)$, то говорят, что множество A является *измеримым* и *его объем* равен

$$V(A) =: V_*(A) = V^*(A).$$

Почти очевидна

Лемма 3.4.1 *Если D измеримо в $\mathbb{R}^2$, то $D \times [a;b]$ измеримо в $\mathbb{R}^3$ и*

$$V(D \times [a;b]) = P(D)(b-a).$$

Теперь найдем формулу для вычисления объема множества через площади его сечений.

Предположим, что A — множество в $\mathbb{R}^3$, обладающее свойствами:
1) его проекция на ось OX совпадает с отрезком $[a;b]$;
2) для любого $x_0 \in [a;b]$ обозначим через A_{x_0} сечение A плоскостью $\{x = x_0\}$, спроектированное на плоскость yOz:

$$A_{x_0} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_0, y, z) \in A\};$$

требуется чтобы A_{x_0} было измеримым для любого $x_0 \in [a;b]$;
3) для любых x_1, $x_2 \in [a;b]$ либо $A_{x_1} \subset A_{x_2}$, либо $A_{x_2} \subset A_{x_1}$;
4) площадь $P(A_x)$ является непрерывной функцией от x на $[a;b]$.

Теорема 3.4.1 *При выполнении условий* 1) – 4) *множество* A *измеримо в* $\mathbb{R}^3$ *и*

$$V(A) = \int_a^b P(A_x)\,dx.$$

[[Рассмотрим любое разбиение τ отрезка $[a;b]$: $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Разобьем A на n частей плоскостями $\{x = x_k\}$. Пусть

$$\inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} P(A_x) = \alpha_k, \qquad \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} P(A_x) = \beta_k.$$

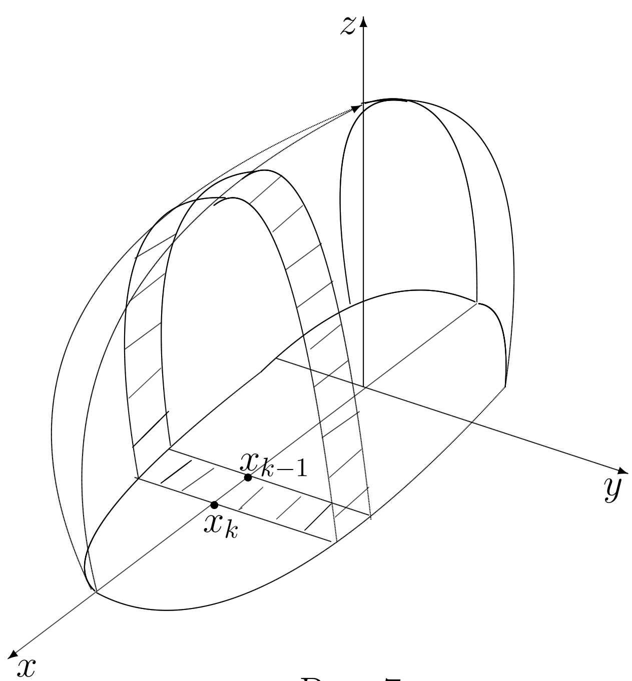

Рис. 7

В силу непрерывности функции $P(A_x)$ существуют точки $\overline{x}_k$ и $\underline{x}_k$ такие, что $P(\underline{x}_k) = \alpha_k$ и $P(\overline{x}_k) = \beta_k$. Из условия 3) следует, что $A_{\underline{x}_k} \subset A_x \subset A_{\overline{x}_k}$ для любого $x \in [x_{k-1}, x_k]$.

Заменим множество

$$\mathcal{A}_k := A \cap \{(x,y,z) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

на множество $\underline{\mathcal{A}}_k = A_{\underline{x}_k} \times [x_{k-1}, x_k]$. Тогда $\underline{\mathcal{A}}_k \subset \mathcal{A}_k$ и

$$B \equiv \cup_{k=1}^n \underline{\mathcal{A}}_k \subset \cup_{k=1}^n \mathcal{A}_k = A.$$

Аналогично

$$A \subset C = \cup_{k=1}^n \overline{\mathcal{A}}_k,$$

где $\overline{\mathcal{A}}_k = A_{\overline{x}_k} \times [x_{k-1}, x_k]$. Множества B и C измеримы (в силу леммы 3.4.1) и

$$V(B) = \sum_{k=1}^n V(\underline{A}_k) = \sum_{k=1}^n P(A_{\underline{x}_k})(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n P(A_{\underline{x}_k})\Delta x_k.$$

Аналогично

$$V(C) = \sum_{k=1}^n P(A_{\overline{x}_k})\triangle x_k.$$

Обозначим $f(x) = P(A_x)$. Тогда

$$V(B) = \sum_{k=1}^n f(\underline{x}_k)\triangle x_k = S_*(f,\tau),$$

$$V(C) = \sum_{k=1}^n f(\overline{x}_k)\triangle x_k = S^*(f,\tau).$$

Так как f непрерывна по условию 4), f интегрируема и $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau$: $S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \varepsilon$, то есть существуют измеримые B и C такие, что $B \subset A$, $A \subset C$ и $V(C) - V(B) < \varepsilon$. Как и в плоском случае, отсюда следует, что A измеримо. Далее,

$$S_*(f,\tau) = V(B) \le V(A) \le V(C) = S^*(f,\tau).$$

При $d(\tau) \to 0$ получаем, что

$$\int_a^b f(x)\,dx \le V(A) \le \int_a^b f(x)\,dx,$$

то есть

$$V(A) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P(A_x)\,dx.$$

3.5 Объем тела вращения

Рассмотрим на плоскости непрерывную неотрицательную функцию $y = f(x)$, $a \le x \le b$. *Телом вращения* назовем тело, которое получается вращением криволинейной трапеции

$$A_f = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

вокруг оси Ox (рис. 8).

Тело вращения F_f измеримо и его объем равен

$$V(F_f) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

[[Множество F_f удовлетворяет условиям 1) – 4), так как его сечение плоскостью $\{x = \mathrm{const}\}$ есть круг радиуса $f(x)$ с центром в начале координат, его площадь $\pi f^2(x)$ — непрерывная функция от x. Следовательно,

$$V(F_f) = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.]]$$

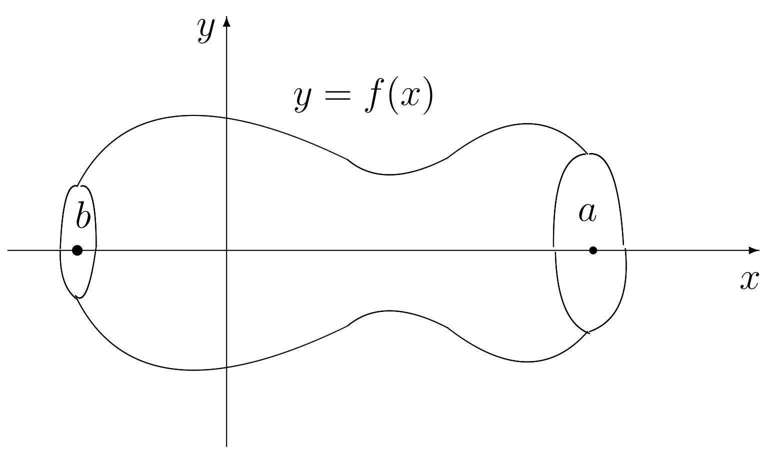

Рис. 8

Примеры. 1) Площадь эллипса. Рассмотрим эллипс E, граница которого задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Пусть E_1 — его часть, лежащая в первом квадранте. В силу симметрии эллипса имеем $P(E) = 4P(E_1)$. Так как x, $y \ge 0$ в первом квадранте,

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \le x \le a.$$

Таким образом, $P(E) = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. Делая замену переменных $x = a\sin t$ $(dx = a\cos t\,dt)$, получаем

$$P(E) = \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\;a\cos t\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt =$$

$$= 2ab\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt = 2ab\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

2) Объем эллипсоида. Пусть граница эллипсоида задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Сечение эллипсоида плоскостью $x = \mathrm{const}$ — эллипс с границей

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

или

$$\frac{y^2}{(bk)^2}+\frac{z^2}{(ck)^2}=1, \quad k=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Площадь этого эллипса равна

$$P = \pi\cdot bk\cdot ck = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Следовательно,

$$V = \int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{3}\,\pi abc.$$

3.6 Кривые на плоскости.

Путём на плоскости $\mathbb{R}^2$ назовем любое непрерывное отображение

$$f:[a;b]\to\mathbb{R}^2,$$

то есть

$$f(t) = (x(t), y(t)), \quad a\le t\le b,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции.

Два пути $f : [a;b] \to \mathbb{R}^2$ и $g : [c,d] \to R^2$ назовем *эквивалентными*, если существует непрерывное строго монотонное отображение $\varphi : [a;b] \to [c;d]$ такое, что $g\circ\varphi = f$. Это отношение на множестве путей действительно является отношением эквивалентности (имеют место рефлексивность, транзитивность, симметричность). *Кривой* в $\mathbb{R}^2$ называется класс эквивалентности путей. Если путь f принадлежит кривой C, то будем говорить, что f — это *параметризация кривой* C.

Например, если C — это окружность $\{x^2 + y^2 = 1\}$, обходимая однократно из точки $(1, 0)$, то

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi,$$

одна из ее параметризаций. Существуют и другие параметризации, например, $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (одна часть пути), $x = \cos(t + \frac{\pi}{2})$, $y = \sin(t + \frac{\pi}{2}), \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ (другая часть пути).

Если в определении эквивалентности потребовать, чтобы φ было строго возрастающим, то соответствующий класс эквивалентности называется *ориентированной кривой.* Для ориентированных кривых можно определить начальную и конечную точки: $(x(a), y(a))$ — начальная точка, $(x(b), y(b))$ — конечная точка. Если начальная и конечная точки совпадают, то *кривая* называется *замкнутой,* если нет, то — *разомкнутой.* Разомкнутая *кривая* называется *простой,* если для любой параметризации $f : [a; b] \to \mathbb{R}^2$ отображение f является инъективным. *Кривая* C называется *гладкой* (класса C^1), если существует ее параметризация $(x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, такая, что функции $x(t)$ и $y(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми.

3.7 Длина плоской кривой

Рассмотрим любую кривую C на $\mathbb{R}^2$ с параметризацией $(x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$.

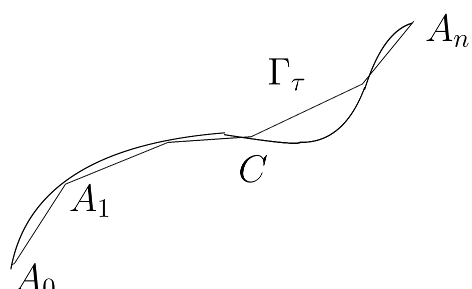

Рис. 9

Рассмотрим любое разбиение $\tau = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ отрезка $[a; b]$. Пусть $A_k = (x(t_k), y(t_k))$, $k = \overline{0, n}$. Пусть Γ_τ — ломаная с вершинами A_0,

$A_1, \ldots, A_n$, вписанная в кривую. Всегда существует конечный или бесконечный $\sup_\tau l(\Gamma_\tau)$. Если этот супремум конечен, то говорят, что *кривая спрямляема* и *ее длина*

$$l(C) = \sup_\tau l(\Gamma_\tau).$$

3.8 Вычисление длины гладкой кривой

Теорема 3.8.1 *Пусть C — гладкая кривая на плоскости с параметризацией $(x(t), y(t))$, $a \le t \le b$, где x, y — непрерывно дифференцируемые функции. Пусть*

$$m_1 = \inf_{[a;b]} |x'(t)|, \quad m_2 = \inf_{[a;b]} |y'(t)|,$$

$$M_1 = \sup_{[a;b]} |x'(t)|, \quad M_2 = \sup_{[a;b]} |y'(t)|.$$

Утверждается, что кривая C спрямляема и

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2}\,(b-a) \le l(C) \le \sqrt{M_1^2 + M_2^2}\,(b-a). \tag{14}$$

[[Рассмотрим любое разбиение τ отрезка $[a;b]$: $\tau = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$. Пусть $A_k = (x(t_k), y(t_k))$. Вычислим длину k-го звена ломаной

$$\Gamma_\tau = A_0\widehat{A_1 \ldots} A_k.$$

Имеем по формуле Лагранжа

$$|A_{k-1}A_k| = \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} =$$

$$= \sqrt{(x'(\xi_k))^2 (\triangle t_k)^2 + (y'(\eta_k))^2 (\triangle t_k)^2} = \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2}\,\triangle t_k,$$

где ξ_k, $\eta_k \in (t_{k-1}; t_k)$ — промежуточные точки. Следовательно, длина k-го звена удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2}\,\triangle t_k \le |A_{k-1}A_k| \le \sqrt{M_1^2 + M_2^2}\,\triangle t_k.$$

Суммируя эти неравенства по $k = \overline{1, n}$, получим:

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2}\,(b-a) \le l(\Gamma_\tau) \le \sqrt{M_1^2 + M_2^2}\,(b-a).$$

Следовательно, $l(C) = \sup_\tau l(\Gamma_\tau) < +\infty$ и справедлива оценка (14).]]

Пусть C — гладкая кривая, $(x(t), y(t))$, $a \le t \le b$, — ее гладкая параметризация. Для любого $t \in [a;b]$ кривая с начальной точкой

$(x(a), y(a))$ и конечной точкой $(x(t), y(t))$ является гладкой, следовательно, спрямляемой; ее длину обозначим через $s(t)$. Нетрудно проверить, что $s(t)$ является монотонно возрастающей функцией. Если $s(t)$ — строго монотонно возрастающая, то существует обратная функция $t = t(s)$, где $0 \leq s \leq l$, l — длина кривой C, и тогда существует параметризация $(x(t(s)), y(t(s)))$, $0 \leq s \leq l$, называемая *натуральной параметризацией*, а параметр s называется *натуральным параметром.*

Теорема 3.8.2 *Если C — гладкая кривая, $(x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ — ее гладкая параметризация, то длина дуги $s = s(t)$ непрерывно дифференцируема и*

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

[[Рассмотрим любую точку $t \in [a; b]$ и пусть $\triangle t$ — приращение t такое, что $t + \triangle t \in [a; b]$. Рассмотрим случай, когда $\triangle t > 0$ (случай $\triangle t < 0$ рассматривается аналогично). Тогда, согласно теореме 3.8.1, $\triangle s$, то есть длина кривой между точками $(x(t), y(t))$ и $(x(t+\triangle t), y(t+\triangle t))$, оценивается следующим образом:

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2}\, \triangle t \leq \triangle s \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2}\, \triangle t, \tag{15}$$

где

$$m_1 = \inf_{[t; t+\triangle t]} |x'(t)|, \quad m_1 = \inf_{[t; t+\triangle t]} |y'(t)|,$$
$$M_1 = \sup_{[t; t+\triangle t]} |x'(t)|, \quad M_2 = \sup_{[t; t+\triangle t]} |y'(t)|.$$

Так как $x'(t)$, $y'(t)$ — непрерывные функции, по теореме Вейерштрасса существуют точки c_1, c_2, c_3, $c_4 \in [t; t+\triangle t]$ такие, что

$$m_1 = |x'(c_1)|, \quad m_2 = |y'(c_2)|, \quad M_1 = |x'(c_3)|, \quad M_2 = |y'(c_4)|.$$

При $\triangle t \to 0$ получаем $c_i \to t$, $i = \overline{1, 4}$. Поэтому m_1, $M_1 \to |x'(t)|$, m_2, $M_2 \to |y'(t)|$. Деля все части неравенства (15) на $\triangle t$ и устремляя $\triangle t$ к нулю, с использованием теоремы о двух милиционерах получаем, что существует предел

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle s}{\triangle t} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Итак, $s'(t)$ существует и равняется

$$s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2},$$

что и требовалось доказать.]]

Теорема 3.8.3 *Если C — гладкая кривая, $(x(t), y(t))$, $a \le t \le b$, — ее гладкая параметризация, то*

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt.$$

[[Поскольку $s(a) = 0$, $s(b) = l(C)$ (s — длина дуги), имеем

$$l(C) = s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t)dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt.]]$$

3.9 Частные случаи задания кривой

1) Пусть кривая задается в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Тогда $x = t$, $y = f(t)$, $a \le t \le b$ — параметризация. Если функция f непрерывно дифференцируема, то

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$$

и

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

2) Пусть кривая C задана в полярной системе координат: $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$. Тогда кривую можно параметризовать следующим образом: $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$, $\alpha \le \varphi \le \beta$. Если $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируемая функция,то

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} =$$

$$= \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2} =$$
$$= \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2},$$

откуда

$$l(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

Упражнение. В случае $\varphi = \varphi(r)$ вывести самостоятельно формулу для вычисления длины кривой.

3.10 Площадь поверхности вращения

Пусть $y = f(x)$, $a \le x \le b$ — непрерывная функция, $f \ge 0$. Если мы будем вращать график функции f вокруг оси OX, то получим некоторую поверхность. Вычислим ее площадь.

Напомним одну формулу из школьной геометрии. Рассмотрим усеченный конус с радиусами оснований R и r и образующей l. Площадь его боковой поверхности $S_{\text{бок}} = \pi(R + r)l$.

Теорема 3.10.1 *Если функция f непрерывно дифференцируема, то площадь поверхности вращения графика функции f вокруг оси OX равна*

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Сначала докажем лемму об интегральных суммах, записанных по двум семействам промежуточных точек.

Лемма 3.10.1 *Пусть функция f интегрируема на $[a;b]$, g непрерывна на $[a;b]$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall \tau$ и $\forall$ $T'_\tau = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $T''_\tau = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ выполняется условие: из того, что $d(\tau) < \delta$ следует, что*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) g(\eta_k) \triangle x_k - \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

[[Доказательство. Функция f интегрируема, следовательно, ограничена, то есть $\exists$ $M > 0$: $|f(x)| \le M$, $x \in [a;b]$. Кроме того, множество точек разрыва функции f имеет меру нуль по Лебегу. Тогда произведение fg также ограничено и множество точек разрыва у fg также имеет меру нуль по Лебегу. Отсюда вытекает, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0$: $\forall \tau$, $\forall T'_\tau = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ из того, что $d(\tau) < \delta_1$ вытекает неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) g(\xi_k) \triangle x_k - \int_a^b f(x)\, g(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

Так как функция g непрерывна, по теореме Кантора функция g является равномерно непрерывной, то есть $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_2 > 0:$ $\forall x_1,\ x_2 \in [a;b]$

$$|x_1 - x_2| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $d(\tau) < \delta$ и

$$T'_\tau = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}, \quad T''_\tau = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}.$$

Тогда имеет место неравенство (16). С другой стороны,

$$|\xi_k - \eta_k| \le \triangle x_k \le d(\tau) < \delta_2 \ \Rightarrow |g(\xi_k) - g(\eta_k)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) g(\eta_k) \triangle x_k - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) g(\xi_k) \triangle x_k\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(\xi_k) - g(\eta_k)) \triangle x_k\right| \overset{\text{нер-во}\,\triangle}{\le} \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\, |g(\xi_k) - g(\eta_k)| \triangle x_k <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} M \frac{\varepsilon}{2M(b-a)} \triangle x_k = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

Из (16), (17) и неравенства треугольника следует нужное неравенство.]]

[[Доказательство теоремы. Рассмотрим любое разбиение τ отрезка $[a; b]$. Плоскости $\{x = x_k\}$ разбивают поверхность вращения на n частей. Заменим k-ую часть боковой поверхностью усеченного конуса, получающегося вращением отрезка $A_{k-1}A_k$ вокруг оси OX, где точка $A_k = (x_k, f(x_k))$, $k = \overline{0, n}$. Сумма площадей боковых поверхностей усеченных конусов равна

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k)) |A_{k-1}A_k| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k)) \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} =$$

$$= \pi \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k-1}) + f(x_k)) \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(\eta_k))^2 (x_k - x_{k-1})^2} =$$

$$= \pi \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \sqrt{1 + (f'(\eta_k))^2}\, \triangle x_k + \pi \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \sqrt{1 + (f'(\eta_k))^2}\, \triangle x_k,$$

где $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Здесь мы использовали формулу конечных приращений Лагранжа.

Применяя к первой сумме лемму 3.10.1 с функцией $g(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$ и семействами промежуточных точек $\xi_k = x_{k-1}$, $\eta_k = \eta_k$, получим, что эта сумма стремится к величине

$$\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Аналогично вторая сумма имеет тот же предел, только в качестве точек ξ_k берутся точки x_k. Итак, предел сумм площадей боковых поверхностей усеченных конусов, вписанных в поверхность вращения, равен

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Замечание. Если s — длина дуги кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$, то $\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = ds$, поэтому справедлива следующая формула для площади поверхности вращения:

$$S = 2\pi \int_0^L y(s)ds.$$

Можно доказать справедливость этой формулы для любой поверхности, получающейся вращением любой кусочно-гладкой кривой.

Пример. Площадь поверхности сферы. Сфера получается вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $|x| \le R$. Параметризуем полуокружность: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $0 \le t \le \pi$. Имеем $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = R\,dt$, откуда

$$S = 2\pi \int_0^\pi R\,\sin t R\,dt = 2\pi R^2(-\cos t)|_0^\pi = 4\pi R^2.$$

Задача. Вычислить площадь поверхности тора.

Список литературы

[1] Никольский С.М. Курс математического анализа, изд. 6-е., стер. – Москва: Физматлит, 2001. – 591 с.

[2] Зорич В.А. Математический анализ, ч. I, – изд 4-е, испр. – М.: МЦНМО, 2002. – 657 с.

[3] Шерстнев А.Н. Конспект лекций по математическому анализу, изд. 4-е. – Казань: КГУ, 2005. – 373 с.

[4] Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т. 1. – М.: Высшая школа, 1973. – 614 с.

[5] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, изд. 8-е. – Москва: Физматлит, 2003. – 679 с.

[6] Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу: учебное пособие для вузов. – Москва: АСТ, 2010. – 558 с.

[7] Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 251 с.

Содержание