С. Р. Насыров

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Казань – 2011

1 Введение

В настоящем учебном пособии излагаются теория несобственных интегралов, зависящих от параметра, а также функциональные ряды. Материал соответствует курсу «Математический анализ» для классических университетов, 4-й семестр.

2 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

2.1 Равномерная сходимость последовательности функций

Сначала рассмотрим пример, дающий представление о равномерной сходимости. Пусть из пункта A в пункт B движется счетное число черепах $T_1, T_2, \ldots$. Они начинают движение в одно и то же время и движутся равномерно с фиксированной скоростью. Пусть скорость черепахи T_n равна $1/n$, расстояние AB равно 1. Спрашивается, наступит ли момент времени, когда все черепахи окажутся в пункте B? Ответ отрицательный. Действительно, черепаха T_n окажется в пункте B в момент времени n. Поскольку множество натуральных чисел не ограничено сверху, то для любого момента времени t существует такое натуральное n, что $n > t$. Это означает, что черепаха T_n в момент времени t еще не придет в пункт B. Этот пример показывает, что если число объектов бесконечно и каждый из них в какой-то момент времени приходит в конечный пункт, то это не значит, что в какой-то момент все они придут в этот пункт. Это — пример неравномерного движения (сходимости).

Теперь дадим определения поточечной и равномерной сходимости последовательности функций. Пусть $f_n : X \to \mathbb{R}$ — последовательность функций на множестве X. Говорят, что последовательность f_n сходится поточечно на X к функции $f : X \to \mathbb{R}$, если для любого $x \in X$ числовая последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$. Более подробно, f_n сходится к f поточечно на X, если $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Говорят, что последовательность f_n сходится равномерно на X к функции $f : X \to \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Отметим, что в отличие от поточечной, при равномерной сходимости номер N не зависит от x, т. е. может быть выбран единым для всех x сразу. В случае равномерной сходимости пишут $f_n \rightrightarrows f$ на X.

Если $\forall x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, то $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$. Обратно, если $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$, то $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ $\forall x \in X$. Это показывает, что равномерная сходимость равносильна тому, что числовая последовательность $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$ стремится к нулю при $n \to infty$. (То, что знак в неравенстве $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ нестрогий, несущественно, так как ε — любое положительное число, и его всегда можно уменьшить.)

Очевидна следующая

Теорема. *Если последовательность функций f_n сходится к f на X равномерно, то она сходится к f на X и поточечно.*

Обратное утверждение неверно, как показывают примеры ниже.

Отметим некоторые простые свойства равномерной сходимости, которые сразу следуют из определений.

1) Если X — конечное множество, то из поточечной сходимости следует равномерная.

2) Если $f_n \rightrightarrows f$ на множествах $X_1, X_2, \ldots, X_m$, то $f_n \rightrightarrows f$ на $X = \cup_{j=1}^m X_j$.

3) Если $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$ на множестве X, то $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ на множестве X.

4) Если $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X, $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha f_n \rightrightarrows \alpha f$ на множестве X.

5) Если $f_n \rightrightarrows f$, а функция g ограничена на множестве X, то $g f_n \rightrightarrows g f$ на множестве X.

2.2 Геометрическая интерпретация равномерной сходимости

Посмотрим, что означает геометрически условие $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$. Оно равносильно неравенству $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$ $\forall x \in X$. Следовательно, график функции $y = f_n(x)$ на множестве X при $n \ge N$ лежит в узкой полоске «высоты» 2ε, ограниченной сверху и снизу графиками функций $y = f(x) + \varepsilon$ и $y = f(x) - \varepsilon$.

Примеры. 1) Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = x^n$ на отрезке $X = [0; 1]$. Поточечный предел последовательности f_n существует и равен

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Докажем, что равномерной сходимости здесь нет. Действительно, $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0 \le x < 1} x^n = 1 \not\to 0$, $n \to \infty$.

2) Пусть $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $0 \le x \le 1$. Тогда $f_n \to 0$ поточечно на $[0;1]$. Исследуем, будет ли равномерная сходимость. Имеем $\sup_{[0;1]} |f_n| = \max_{[0;1]} f_n$. Найдем максимальное значение функции f_n на $[0;1]$. Имеем $f'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$, откуда нетрудно заключить, что функция f_n имеет максимум в точке $x = n/(n+1)$. Тогда

$$\sup_{[0;1]} |f_n| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \le 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

$n \to \infty$. Таким образом, $f_n \rightrightarrows f$ на $[0;1]$.

2.3 Критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций

Теорема. *Последовательность f_n сходится равномерно на X к некоторой функции f тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m \ge N$ $\forall x \in X\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на X. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) : \forall n \ge N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Если n, $m \ge N$, то $|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N : \forall n, m \ge N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. При фиксированном $x \in X$ получаем, что числовая последовательность $f_n(x)$ фундаментальна, следовательно, сходится к некоторому пределу, который обозначим через $f(x)$. Докажем, что $f_n \rightrightarrows f$ на X. Так как $\forall x \in X$ при n, $m \ge N$ имеет место неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, то при $m \to \infty$ получаем $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$. Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) :$ $\forall n \ge N\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$. Это означает, что $f_n \rightrightarrows f$ на X.

2.4 Равномерная сходимость и непрерывность

Одним из важных свойств равномерной сходимости является свойство сохранения непрерывности. Справедлива

Теорема. *Пусть X — топологическое пространство и функции f_n непрерывны в точке $x_0 \in X$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на X, то функция f также непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $f_n \rightrightarrows f$ на X, то $\exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \forall x \in X \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Фиксируем $n \geq N$. Функция f_n непрерывна в точке x_0, поэтому существует окрестность U точки x_0 такая, что $\forall x \in U$ имеем $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда для любого $x \in U$ имеем $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Итак, $\forall \varepsilon > 0$ существует окрестность U точки x_0 такая, что $\forall x \in U \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Это означает, что функция f непрерывна в точке x_0.

Следствие 1. *Если функции f_n непрерывны на X и $f_n \rightrightarrows f$ на X, то функция f непрерывна на X.*

Следствие 2. *Если функции f_n непрерывны на X и $f_n \to f$ на X, а функция f не непрерывна на X, то $f_n \not\rightrightarrows f$ на X.*

Следствие 3. *Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на X, x_0 — предельная точка X и существует $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = \alpha_n$, $n \geq 1$. Если $\alpha_n \to \alpha$, $n \to \infty$, то существует $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$.*

Доказательство. Если $x_0 \notin X$, то определим, если $x_0 \in X$, то переопределим f_n и f в точке x_0 по формулам $f_n(x_0) = \alpha_n$, $f(x_0) = \alpha$. Тогда новые функции f_n сходятся равномерно к новой функции f на множестве $X \cup \{x_0\}$. Кроме того, функции f_n непрерывны в точке x_0, поэтому по предыдущей теореме функция f непрерывна в точке x_0, т. е. $\lim_{x \to x_0} f(x)\alpha$.

Отметим, что последнее равенство можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Теперь поставим вопрос: при каких дополнительных условиях из поточечной сходимости следует равномерная? Приводимая ниже теорема Дини частично дает ответ на этот вопрос.

Последовательность функций f_n на множестве X называется монотонно убывающей, если для любого $x \in X$ имеют место неравенства

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots \geq f_n(x) \geq \ldots,$$

и возрастающей, если

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots, \quad \forall x \in X.$$

Монотонно убывающие и монотонно возрастающие последовательности часто называются просто монотонными.

Напомним некоторые сведения из топологии.

1) Замкнутое подмножество компактного множество компактно.

2) Пусть $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ — некоторая последовательность непустых компактных множеств в некотором топологическом пространстве. Тогда $\cap_{n=1}^{\infty} X_n \ne \emptyset$.

3) Прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении является замкнутым множеством.

Теорема (Дини). *Пусть f_n — монотонная последовательность непрерывных функций на компактном множестве X. Если f_n поточечно сходится к непрерывной на X функции f, то эта последовательность сходится к f на X равномерно.*

Доказательство. Пусть для определенности, f_n монотонно убывает. Рассмотрим функции $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$. Ясно, что $g_1(x) \ge g_2(x) \ge \ldots \ge g_n(x) \ge \ldots$, причем g_n непрерывны на X. Фиксируем $\varepsilon > 0$ рассмотрим множества $X_n := \{x \in X \mid g_n(x) \ge \varepsilon\} = g_n^{-1}([\varepsilon, +\infty))$. Так как множество $[\varepsilon, +\infty)$ замкнуто, а функции g_n непрерывны, то X_n — замкнутые подмножества компактного множества X, следовательно, X_n компактны. Из монотонности последовательности g_n следует, что $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$. По условию теоремы g_n поточечно сходится к нулю. Это означает, что $\forall x \in X\ \exists N : \forall n \ge N\ g_n < \varepsilon$, т. е. $x \notin X_n$. Следовательно, $\cap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$. Но пересечение непустых вложенных друг в друга компактных множеств непусто. Следовательно, $\exists n_0 : X_{n_0} = \emptyset$. Тогда $X_n = \emptyset$, $n \ge n_0$, т. е. $\forall n \ge n_0$ и $\forall x \in X\ g_n(x) < \varepsilon$, т. е. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Так как ε — любое положительное число, то отсюда следует равномерная сходимость f_n к f.

Отметим некоторые свойства равномерной сходимости.

1) Если $f_n(x) \equiv \alpha_n = \mathrm{const}$ сходится к $\alpha = \mathrm{const}$, то $f_n \rightrightarrows f$.

2) Если $f_n \rightrightarrows f$ а X и g — ограниченная функция на X, то $gf_n \rightrightarrows gf$ на X.

Действительно, $\sup_X |gf_n - gf| = \sup_X |g(f_n - f)| \le \sup_X |g| \sup_X |f_n - f| \to 0$, $n \to \infty$.

2.5 Равномерная сходимость и операции дифференцирования и интегрирования

Теорема 1. *Пусть f_n — последовательность интегрируемых функций на измеримом по Жордану множестве A функций сходится к интегрируемой на A функции f равномерно. Тогда $\int_A f_n(x)dx \to \int_A f(x)dx$, $n \to \infty$.*

Доказательство. Действительно,

$$\left|\int_A f_n(x)dx - \int_A f(x)dx\right| = \left|\int_A (f_n(x)dx - f(x))dx\right| \le \sup_X |f_n - f| \cdot \mu(A) \to 0,$$

$n \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть последовательность функций f_n определена на $[a;b]$ и в некоторой точке $c \in [a;b]$ числовая последовательность $f_n(c)$ сходится к некоторому числу α. Если f_n дифференцируемы на $[a;b]$ и производные f_n' сходятся равномерно на $[a,b]$ к некоторой функции g, то последовательность f_n сходится равномерно к дифференцируемой функции f и $f' = g$.*

Доказательство. Фиксируем $x \in [a,b]$. Пусть

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0, \\ f_n'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

Докажем, что последовательность φ_n сходится равномерно на $[a;b]$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по критерию Коши $\exists N : \forall x \in [a;b]\ \forall m \ge n \ge N$ имеет место неравенство $|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$. При $m \ge n \ge N$ в силу формулы конечных приращений Лагранжа при $x \neq x_0$ имеем

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \left|\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0}\right| =$$

$$\left|\frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))}{x - x_0}\right| = |f_n'(\theta) - f_m'(\theta)| < \varepsilon,$$

где θ лежит между x и x_0. Отметим, что при $x = x_0$ также

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = |f_n'(x_0) - f_m'(x_0)| < \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию Коши последовательность φ_n сходится равномерно на $[a;b]$. Так как функция $g(x) = x - x_0$ ограничена на этом отрезке и не зависит от n, то последовательность $f_n(x) - f_n(x_0) = g(x)\varphi_n(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$. Теперь пусть $x = x_0$. Так как числовая последовательность $f_n(c)$ сходится, то отсюда следует, что последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно к некоторой функции f. Осталось показать, что $f' = g$. В силу равномерной сходимости последовательности φ_n и следствия 3 предыдущего пункта получаем, что существует

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n\to\infty} f'_n(x_0) = g(x_0).$$

2.6 Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть $z = f(x,y)$ — некоторая функция, определенная на $A \times Y$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ — множество, измеримое по Жордану и при любом $y \in Y$ существует интеграл $\int_A f(x,y)dx$. Результатом интегрирования является число $F(y) = \int_A f(x,y)dx$, которое зависит от $y \in Y$. Такие интегралы называются интегралами зависящими от параметра. Одними из наиболее интересных вопросов являются: при каких условиях на f функция F непрерывна? дифференцируема?

Теорема 1(непрерывность интеграла, зависящего от параметра). *Пусть множество A компактно и функция $z = f(x,y)$ непрерывна на $A \times [a;b]$. Тогда функция*

$$F(y) = \int_A f(x,y)dx$$

непрерывна на $[a;b]$.

Доказательство. Можно считать, что $\mu(A) > 0$. Множество $A \times [a;b]$ компактно как произведение компактных множеств. Функция f непрерывна на $A \times [a;b]$, поэтому она равномерно непрерывна, т. е. $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0 : \forall(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in A \times [a;b]$ $(\|x_1 - x_2\| < \delta$ и $|y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon/\mu(A))$. Тогда при $|y_1 - y_2| < \delta$ имеем

$$|F(y_1) - F(y_2)| = \left|\int_A f(x,y_1)dx - \int_A f(x,y_2)dx\right| =$$

$$= \left| \int_A f((x, y_1) - f(x, y_2))dx \right| \leq \int_A |f((x, y_1) - f(x, y_2)|dx \leq \frac{\varepsilon}{\mu(A)} \mu(A) = \varepsilon.$$

Следовательно, F непрерывна на $[a; b]$.

Теорема 2 (дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра). *Пусть A — компактное множество, функция f непрерывна на $A \times [a; b]$ и в любой точке (x, y) множества $A \times [a; b]$ существует частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, которая является непрерывной функцией на $A \times [a; b]$. Тогда $F(y) = \int_A f(x, y)dx$ является непрерывной функцией на $[a; b]$ и*

$$F'(y) = \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx, \quad y \in [a; b].$$

Доказательство. Можно считать, что $\mu(A) > 0$. Имеем

$$F'(y) = \lim_{h \to 0} \frac{F(y + h) - F(y)}{h}. \qquad (*)$$

Докажем, что этот предел существует и равен $\int_A \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$. Действительно, в силу формулы конечных приращений

$$\frac{F(y + h) - F(y)}{h} - \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx = \frac{1}{h} \left[\int_A f(x, y + h)dx - \int_A f(x, y)dx \right] -$$

$$- \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx = \int_A \frac{1}{h} [f(x, y + h) - f(x, y)]dx - \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx =$$

$$= \int_A \left[\frac{\partial f(x, y + \theta h)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right] dx,$$

где $\theta = \theta(x, y) \in (0; 1)$. Частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывна на компактном множестве $A \times [a; b]$, поэтому по теореме Кантора она равномерно непрерывна, следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall y',\ y'' \in [a; b]\ \forall x \in A$

$$|y' - y''| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f(x, y')}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y'')}{\partial y} \right| < \frac{\varepsilon}{\mu(A)}.$$

Используя это, получаем

$$\left| \frac{F(y + h) - F(y)}{h} - \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx \right| \leq$$

$$\le \int_A \left|\frac{\partial f(x,y+\theta h)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| dx \le \frac{\varepsilon}{\mu(A)}\mu(A) = \varepsilon.$$

Таким образом, предел $(*)$ существует и равен $\int_A \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$. В силу предыдущей теоремы последний интеграл является непрерывной функций переменной y. Теорема доказана.

Теорема 3 (интегрируемость интеграла, зависящего от параметра). *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^m$ — измеримые по жордану замкнутые множества и f — функция, непрерывная на $A \times B$. Тогда функция $F(y) = \int_A f(x,y)dx$ является интегрируемой на B функцией, $\Phi(x) = \int_B f(x,y)dy$ является интегрируемой на A функцией и*

$$\int_B F(y)dy = \int_B dy \int_A f(x,y)dy = \int_A dx \int_B f(x,y)dx = \int_A \Phi(x)dx.$$

Эта теорема следует из свойств кратных интегралов.

Теперь рассмотрим интегралы с переменными пределами интегрирования вида $\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$.

Теорема 4. *Пусть f непрерывна на $[\alpha;\beta] \times [a;b]$, функции φ и ψ : $[a;b] \to [\alpha;\beta]$ непрерывны. Тогда функция $\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$ непрерывна на $[a;b]$.*

Доказательство. Фиксируем точку $y_0 \in [a;b]$. Установим непрерывность Φ в точке y_0. Имеем

$$\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y_0)} f(x,y)dx + \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y)dx + \int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} f(x,y)dx.$$

По теореме о непрерывности интеграла, зависящего от параметра имеем

$$\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y)dx \to \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y_0)dx = \Phi(y_0).$$

Оценим первое и третье слагаемые. Так как f непрерывна на компакте $[\alpha;\beta] \times [a;b]$, она ограничена, т. е. $\sup|f| = M < +\infty$. Значит,

$$\left|\int_{\varphi(y)}^{\varphi(y_0)} f(x,y)dx\right| \le M|\varphi(y_0) - \varphi(y)| \to 0, \quad y \to y_0,$$

так как φ непрерывна, поэтому первое слагаемое стремится к нулю. Аналогично показываем, что третье слагаемое стремится к нулю при $y \to y_0$. Итак, $\lim_{y\to y_0} \Phi(y) = \Phi(y_0)$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы 4 и, кроме того, существует непрерывная частная производная* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *на* $[\alpha;\beta]\times[a;b]$. *Тогда функция* Φ *дифференцируема на* $[a;b]$ *и*

$$\Phi'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx + f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию трех переменных $\chi(u,v,y) = \int_u^v f(x,y)dy$. Эта функция определена и непрерывно дифференцируема на $[\alpha;\beta]\times[\alpha;\beta]\times[a;b]$ и ее частные производные равны:

$$\frac{\partial\chi}{\partial v} = f(v,y), \quad \frac{\partial\chi}{\partial u} = -f(u,y), \quad \frac{\partial\chi}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$$

Здесь для вычисления $\frac{\partial\chi}{\partial v}$ и $\frac{\partial\chi}{\partial v}$ мы применили теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом, а для вычисления $\frac{\partial\chi}{\partial y}$ — теорему 2. Так как $\Phi(y) = \chi($
$varphi(y), \psi(y), y)$, то по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\Phi'(y) = \frac{\partial\chi}{\partial u}\varphi'(y) + \frac{\partial\chi}{\partial v}\psi'(y) + \frac{\partial\chi}{\partial y}.$$

Подставляя сюда полученные выражения для частных производных функции χ, получаем требуемое равенство.

3 Однопараметрические семейства функций и равномерная сходимость

3.1 Определение равномерной сходимости семейства функций. Критерий Коши.

Рассмотрим функцию $u = F(x,t)$, $F : X\times[a;b) \to \mathbb{R}$, где $-\infty < a < b \le +\infty$. Предположим, что для любого фиксированного $x\in X$ при $t\to b-$ существует конечный предел $\lim_{t\to b-} F(x,t) =: F_0(x)$. Тогда функция F_0 называется поточечным пределом семейства $F(x,t)$ при $t\to b-$. Функция F_0 называется равномерным пределом семейства $F(x,t)$, $a\le t<b$ на X при $t\to b-$, если $\sup_{x\in X}|F(x,t)-F_0(x)| \to 0$, $t\to b-$. Эквивалентное определение: $F(x,t) \rightrightarrows F_0(x)$ на X при $t\to b-$, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists b_\varepsilon\in[a;b)$: $\forall t\in(b_\varepsilon;b)$ $\forall x\in X$ выполняется неравенство $|F(x,t)-F_0(x)|<\varepsilon$.

Теорема 1 (аналог теоремы Гейне). *Однопараметрическое семейство функций $F(x,t) \rightrightarrows F_0(x)$ на X при $t \to b-$ тогда и только тогда, когда $\forall t_n \in [a;b)$*

$$t_n \to b,\ n \to \infty \Rightarrow F(x,t_n) \rightrightarrows F_0(x),\ n \to \infty \text{ на } X.$$

Доказательство. Обозначим $g(t) = \sup_{x\in X} |F(x,t) - F_0(x)|$. Равномерная сходимость семейства $F(x,t) \rightrightarrows F_0(x)$ на X означает, что $\lim_{t\to b-} g(t) = 0$. По теореме Гейне это эквивалентно условию: $\forall t_n \in [a;b)$ $t_n \to b$, $n \to \infty$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(t_n) = 0$. Последнее эквивалентно условию теоремы.

Теорема 2 (критерий Коши). *Однопараметрическое семейство функций $F(x,t)$ сходится равномерно к некоторой функции $F_0(x)$ на X при $t \to b-$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists b_\varepsilon \in [a;b)$: $\forall t', t'' \in (b_\varepsilon; b)$ $\forall x \in X$ выполняется неравенство $|F(x,t') - F(x,t'')| < \varepsilon$.*

Доказательство следует из обычного критерия Коши существования предела функции, примененного к функции $g(t) = \sup_{x\in X} |F(x,t) - F_0(x)|$.

3.2 Равномерная сходимость семейства функций и непрерывность

Теорема 1. *Пусть X — топологическое пространство и $F(x,t)$, $a \le t < b$, — некоторое однопараметрическое семейство функций, непрерывных на X при любом фиксированном $t \in [a;b)$. Если $F(x,t) \rightrightarrows F_0(x)$ на X при $t \to b-$, то функция F_0 непрерывна на X.*

Доказательство. Если $F(x,t) \rightrightarrows F_0(x)$ на X при $t \to b-$, то в силу аналога теоремы Гейне $\forall t_n \in [a;b)$

$$t_n \to b,\ n \to \infty \Rightarrow F(x,t_n) \rightrightarrows F_0(x),\ n \to \infty \text{ на } X.$$

Функция F_0 является непрерывной на X как равномерный предел последовательности непрерывных функций $F(x,t_n)$.

Теорема 2 (аналог теоремы Дини). *Пусть X — компактное топологическое пространство, $F(x,t)$, $a \le t < b$, — некоторое однопараметрическое семейство функций, непрерывных на X при любом фиксированном $t \in [a;b)$, причем либо*
1) $\forall x \in X$ $\forall t_1, t_2 \in [a;b)$ $t_1 < t_2 \Rightarrow F(x,t_1) \le F(x,t_2)$, либо

2) $\forall x \in X\ \forall t_1,\, t_2 \in [a;b)\ t_1 < t_2 \Rightarrow F(x,t_1) \geq F(x,t_2)$.

Если $\forall x \in X\ F(x,t) \to F_0(x)$ и F_0 является непрерывной функцией на $[a;b)$, то $F(x,t) \rightrightarrows F_0(x)$ на X при $t \to b-$.

Доказательство. Для любой последовательности $t_n \in [a;b)$ такой, что $t_n \to b$, $n \to \infty$, имеем последовательность $F(x,t_n)$ монотонна и сходится к непрерывнйо функции $F_0(x)$. Следовательно, последовательность $F(x,t_n) \rightrightarrows f_0(x)$ на X, $n \to \infty$. По аналогу теоремы Гейне семейство $F(x,t) \rightrightarrows F_0(x)$, $t \to b-$.

3.3 Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Пусть функция $f : Y \times [a;b) \to \mathbb{R}$ и для любого $t \in [a;b)$ интеграл $F(y,t) = \int_a^t f(x,y)dx$ является собственным интегралом Римана и при $t \to b-$ существует конечный предел $F(y) := \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x,y)dx$, но $\int_a^b f(x,y)dx$ не является собственным интегралом Римана для любого $y \in Y$. Тогда говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится поточечно на Y.

Предположим, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится поточечно на Y. Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, если семейство $F(y,t) = \int_a^t f(x,y)dx$ сходится равномерно к $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ на Y. Таким образом, $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists b_\varepsilon \in [a;b)$: $\forall t \in [b_\varepsilon; b)$ и $\forall y \in Y$ $\left|\int_t^b f(x,y)dx\right| < \varepsilon$. Действительно,

$$F(y) - F(y,t) = \int_a^b f(x,y)dx - \int_a^t f(x,y)dx = \int_t^b f(x,y)dx.$$

Теорема 1 (аналог теоремы Гейне). *Несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y тогда и только тогда, когда для любой последовательности $t_n \in [a;b)$, сходящейся к точке b, последовательность $\int_a^{t_n} f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y к $\int_a^b f(x,y)dx$.*

Действительно, пусть $F(y,t) = \int_a^t f(x,y)dx$. Ранее было показано, что семейство $F(y,t)$ сходится равномерно на Y к $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ тогда и только тогда, когда любой последовательности $t_n \in [a;b)$, сходящейся к точке b, последовательность $F(y,t_n)$ сходится равномерно на Y к $F(y)$.

Теорема 2 (критерий Коши). *Несобственный интеграл* $\int_a^b f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y *тогда и только тогда, когда* $\forall\varepsilon > 0\ \exists b_\varepsilon \in [a;b)$*:* $\forall t'$, $t'' \in [b_\varepsilon;b)$ *и* $\forall y \in Y$ $\left|\int_{t'}^{t''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$.

Действительно,

$$\int_{t'}^{t''} f(x,y)dx = \int_a^{t''} f(x,y)dx - \int_a^{t'} f(x,y)dx = F(y,t'') - F(y,t').$$

Далее применяем критерий Коши равномерной сходимости однопараметрических семейств функций.

3.4 Достаточные условия равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 1 (признак Вейерштрасса). *Пусть для любого* $x \in [a;b)$ *и для любого* $e \in Y$ *имеет место неравенство* $|f(x,y| \le g(x))$. *Если несобственный интеграл* $\int_a^b g(x)dx$ *– с единственной особенностью в точке* b *и сходится, то* $\int_a^b f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y.

Доказательство. Интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится, поэтому по критерию Коши сходимости несобственных интегралов $\forall\varepsilon > 0\ \exists b_\varepsilon \in [a;b) : \forall t'$, $t'' \in [b_\varepsilon;b)$ выполняется неравенство $\left|\int_a^b g(x)dx\right| < \varepsilon$. Тогда $\forall t'$, $t'' \in [b_\varepsilon;b)$ и $\forall y \in Y$ имеем

$$\left|\int_a^b f(x,y)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x,y)|dx\right| \le \left|\int_a^b g(x)dx\right| < \varepsilon.$$

По критерию Коши интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно.

Теорема 2 (Дини). *Пусть* $f(x,y) \ge 0$ *и непрерывна на* $[a;b) \times Y$, *где* Y *— компактное множество. Предположим, что для любого* $y \in Y$ *интеграл* $F(y) := \int_a^b f(x,y)dx$ *сходится и функция* F *непрерывна на* Y. *Тогда интеграл* $\int_a^b f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y.

Доказательство. Рассмотрим любую возрастающую последовательность точек $t_n \in [a;b)$, сходящуюся к точке b. Последовательность собственных интегралов $F(y,t_n) = \int_a^{t_n} f(x,y)dx$ — это последовательность непрерывных функций на компактном множестве Y, так как f непрерывна на $[a;t_n] \times Y$.

Так как функций f неотрицательна, имеем

$$F(y, t_{n+1}) = \int_a^{t_{n+1}} f(x, y)dx = \int_a^{t_n} f(x, y)dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, y)dx \leq$$

$$\leq \int_a^{t_n} f(x, y)dx = F(y, t_n).$$

Следовательно, последовательность $F(y, t_n)$ монотонно возрастает при любом фиксированном $y \in Y$. По теореме Дини для последовательностей $F(y, t_n) \rightrightarrows F(y)$ на Y. Поскольку последовательность t_n произвольна, получаем $F(y, t) \rightrightarrows F(y)$, $t \to b-$ на Y. Это означает равномерную сходимость интеграла $\int_a^b f(x, y)dx$ на Y.

Теорема 3 (признак Дирихле). *Интеграл $\int_a^b f(x, y)g(x, y)dx$ с единственной особенностью в точке b для любого $y \in Y$ сходится равномерно, если:*

1) функция $f(x, y)$ непрерывна на $[a; b)$ для любого фиксированного $y \in Y$ и $\exists M > 0 : \forall y \in Y\ \forall t \in [a; b)$

$$\left| \int_a^t f(x, y)dx \right| \leq M;$$

2) *функция $g(x, y)$ дифференцируема и монотонно убывает по переменной x на $[a; b)$ для любого фиксированного $y \in Y$;*

3) *$g(x, y) \rightrightarrows 0$, $x \to b-$, на Y.*

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{t'}^{t''} f(x, y)g(x, y)dx = F(x, y)g(x, y)|_{t'}^{t''} - \int_{t'}^{t''} F(x, y)\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}dx,$$

где $F(t) = \int_a^t f(x, y)dx$, поэтому с учетом монотонности функции $g(x, y)$ по переменной x получаем

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x, y)g(x, y)dx \right| \leq M|g(t'', y)| + M|g(t', y)| + M \left| \int_{t'}^{t''} \left| \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right| dx \right| =$$

$$= M \left(g(t'', y) + g(t', y) + \left| \int_{t'}^{t''} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} dx \right| \right) \leq 2M(g(t'', y) + g(t', y)).$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как функция $g(x, y) \rightrightarrows 0$ при $x \to b-$, существует $b_\varepsilon \in [a; b) : \forall t \in [b_\varepsilon; b)\ \forall y \in Y$ имеет место неравенство $g(t, y) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Если t', $t'' \in [b_\varepsilon; b)$, то из полученных выше оценок следует, что

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x, y) g(x, y) dx \right| < 2M \left(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M} \right) = \varepsilon.$$

По критерию Коши $\int_a^b f(x, y) g(x, y) dx$ сходится равномерно.

Теорема 4 (признак Абеля). *Интеграл $\int_a^b f(x, y) g(x, y) dx$ с единственной особенностью в точке b для любого $y \in Y$ сходится равномерно, если:*

1) функция $f(x, y)$ непрерывна на $[a; b)$ для любого фиксированного $y \in Y$ и $\int_a^b f(x, y) dx$ сходится равномерно на Y,

2) функция $g(x, y)$ непрерывно дифференцируема по x и монотонно убывает для любого фиксированного $y \in Y$,

3) $\exists M > 0 : \forall x \in [a; b)\ \forall y \in Y\ |g(x, y)| \leq M$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3, применим критерий Коши. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $\widetilde{F}(t) = \int_b^t f(x, y) dx$. В силу 1) $\exists t_\varepsilon \in [a, b)$: $\forall t \in (t_\varepsilon; b))\ |\widetilde{F}(t)| < \frac{\varepsilon}{4M}$. Рассуждая как и при доказательстве теоремы 3 (только вместо F используем $\widetilde{F}$), получаем, что $\forall t'$, $t'' \in (t_\varepsilon; b)$ $\forall y \in Y$

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x, y) g(x, y) dx \right| \leq 2 \frac{\varepsilon}{4M} (g(t'', y) + g(t', y)) < \varepsilon.$$

3.5 Непрерывность и дифференцируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на $[a; b) \times Y$ и интеграл $F(y) = \int_a^b f(x, y)$ сходится равномерно на Y. Тогда функция F является непрерывной на Y.*

Доказательство. Для любого фиксированного $t \in [a; b)$ функция $F(y, t) = \int_a^b f(x, y) dx$ непрерывна на Y по теореме о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра. При $t \to b-$ семейство $F(y, t) \rightrightarrows F(y)$. Следовательно, $F(y)$ непрерывна на Y как равномерный предел семейства непрерывных функций.

Теорема 2. *Пусть функция f непрерывна на $[a;b) \times [c,d]$ и существует частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, которая является непрерывной на $[a;b) \times [c,d]$ функцией. Если для любого $y \in [c;d]$ сходится интеграл $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, а интеграл $\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ сходится равномерно, то функция F непрерывно дифференцируема на $[c;d]$ и $F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$, $y \in [c;d]$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $t_n \in [a;b)$: $t_n \to b$, $n \to \infty$. Тогда $\forall y \in Y$

$$F(y,t_n) = \int_a^{t_n} f(x,y)dx \to F(y) = \int_a^b f(x,y)dx.$$

С помощью теоремы о дифференцировании собственных интегралов, зависящих от параметра, из условий теоремы получаем, что

$$\frac{dF(y,t_n)}{dy} = \int_a^{t_n} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx \rightrightarrows \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$$

на $[c;d]$ в силу равномерной сходимости последнего интеграла. По теореме о дифференцируемости последовательности функций отсюда следует, что $F(y)$ дифференцируема и

$$F'(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{dF(y,t_n)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$$

По предыдущей теореме $\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ является непрерывной функцией, следовательно, F непрерывно дифференцируема.

3.6 Интегрирование несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 1. П*усть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a;b) \times [c;d]$ и несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx = F(y)$ сходится равномерно на $[c;d]$. Тогда*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

Доказательство. Пусть $b_n \in [z;b)$ — некоторая последовательность, сходящаяся к b при $n \to \infty$. Тогда по теореме об интегрировании собственных интегралов, зависящих от параметра, имеем

$$\int_c^d \left(\int_a^{b_n} f(x,y)dx \right) dy == \int_a^{b_n} \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

При $n \to \infty$

$$F_n(y) = \int_a^{b_n} f(x,y)dx \rightrightarrows F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

на $[c;d]$ по условию теоремы. Тогда, используя определение несобственного интеграла и теорему о предельном переходе под знаком интеграла, получаем

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_c^d \left(\int_a^{b_n} f(x,y)dx \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_c^d F_n(y)dy = \int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна и неотрицательна на $[a;b) \times [c;d)$, несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx = F(y)$ сходится для любого $y \in [c;d)$, несобственный интеграл $\int_c^d f(x,y)dy = G(x)$ сходится для любого $x \in [a;b)$ и функции F и G являются непрерывными на $[c;d)$ и $a;b)$ соответственно. Если сходится один из интегралов $\int_c^d F(y)dy$, $\int_a^b G(x)dx$, то сходится и другой и их значения совпадают:*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Доказательство. Обозначим $A = \int_c^d F(y)dy$, $B = \int_a^b G(x)dx$. Фиксируем некоторую возрастающие последовательности точек $b_n \in [a;b)$ и $d_n \in [c;d_n)$. Так как интеграл $\int_a^b f(x,y)dx = F(y)$ сходится для любого $y \in [c;d)$, $f \geq 0$ и $F(y)$ непрерывна, то по теореме Дини этот интеграл сходится равномерно на любом отрезке $[c;d_n] \subset [c;d]$. Аналогично, интеграл $G(x) = \in_c^d f(x,y)dy$ сходится равномерно на любом отрезке $[a;b_n] \subset [a;b)$. По предыдущей теореме с учетом неотрицательности f имеем

$$\int_c^{d_n} \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^{d_n} f(x,y)dy \right) dx \leq \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx,$$

следовательно, $\int_c^{d_n} F(y)dy \le B$. Так как $F(y) \le 0$, то отсюда следует, что существует конечный $\lim_{n\to\infty} \int_c^{d_n} F(y)dy \le B$. Итак, $A \le B$. совершенно аналогично получаем, что $B \le A$, поэтому $A = B$.

Пример. Вычислим интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Отметим, что несобстввенный интеграл сходится, так как $\sin x \sim x$, $x \to 0$, а на $+\infty$ интеграл сходится по признаку Дирихле ($\sin x$ имеет ограниченную первообразную, а $1/x$ монотонно стремится к нулю).

Для вычисления интеграла Дирихле рассмотрим вспомогательный интеграл $F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$, $y \ge 0$. Этот интеграл сходится равномерно по признаку Абеля на $[0; +\infty)$. Действительно, интеграл Дирихле сходится, а функция e^{-xy} обладает свойствами: $|e^{-xy}| \le 1$, x, $y \ge 0$, она убывает по x при любом фиксированном $y \ge 0$.

Применяя теорему о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра, получаем, что $F(y)$ — непрерывная функция и интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = F(0) = \lim_{y\to 0+} F(y)$.

Теперь рассмотрим $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-xy} \frac{\sin x}{x}\right) dx = -\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx$. Отметим, что при $y = 0$ последний интеграл расходится, но для любого $y_0 > 0$ интеграл сходится равномерно на $[y_0; +\infty)$. Действительно, при $x \ge 0$, $y \ge y_0 > 0$ имеем $|e^{-xy} \sin x| \le e^{-xy} \le e^{-xy_0}$. Интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-xy_0} dx = -\left.\frac{e^{-xy_0}}{y_0}\right|_{x=0}^{+\infty} = frac1y_0$ сходится. По признаку Вейерштрасса интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx$ сходится равномерно на $[y_0; +\infty)$. Поэтому к несобственному интегралу $F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$ можно применить теорему о дифференцировании по параметру. С учетом того, что y_0 — любое положительное число, имеем при $y > 0$ $F'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx = -frac11 + y^2$. Тогда $F(y) = -\operatorname{arctg} y + C$. Докажем, что $\lim_{y\to+\infty} F(y) = 0$. Действительно,

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx\right| \le \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = \frac{1}{y} \to 0, \quad y \to +\infty,$$

так как $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le 1$, $x \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что $0 = \lim_{y\to+\infty}(-\operatorname{arctg} y + C) = -\pi/2 + C$, т. е. $C = \pi/2$. Итак, $F(y) = \pi/2 - \operatorname{arctg} y$ и интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{y\to 0} (\pi/2 - \operatorname{arctg} y) = \pi/2.$$

4 Функциональные ряды

4.1 Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Критерий Коши.

Рассмотрим формальную сумму $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$, где $f_n(x)$ —некоторая функция, заданная на множестве X. Эта сумма называется функциональным рядом. Говорят, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx$ сходится поточечно, если для любого $x \in X$ числовой ряд сходится.

Говорят, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно на X, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится поточечно на X.

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве X, если последовательность его частичных сумм $\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ сходится равномерно на X (к $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$). Пусть $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, тогда равномерная сходимость ряда означает, что $S(x) - S_N(x) \rightrightarrows 0$, $N \to \infty$, т.е. остаток $r_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows 0$ на X.

Теорема (Критерий Коши). *Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon)$: $\forall m \geq n \geq M\ \forall x \in X\ |\sum_{k=n}^{m} f_k(x)| < \varepsilon$.*

Доказательство. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно тогда и только тогда, когда последовательность $S_N(x)$ сходится равномерно. По критерию Коши равномерной сходимости последовательности функций это равносильно тому, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon)$: $\forall m \geq n \geq M$ $\forall x \in X\ |S_m(x) - S_{n-1}(x)| < \varepsilon$. Но $S_m(x) - S_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{m} f_k(x)$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Его частичные суммы $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x^n = \frac{x - x^{N+1}}{1-x} \to \frac{x}{1-x}$, если $|x| < 1$. Однако ряд не сходится равномерно на $(-1; 1)$, так как

$$\sup_{|x|<1} \left| \frac{x - x^{N+1}}{1 - x} - \frac{x}{1 - x} \right| = \sup_{|x|<1} \left| \frac{x^{N+1}}{1 - x} \right| = +\infty.$$

Если же рассмотреть сходимость ряда на множестве $\{|x| < q\}$, где $q < 1$ — фиксированное число, то сходимость будет равномерной, так как

$$\sup_{|x|<q} \left| \frac{x - x^{N+1}}{1 - x} - \frac{x}{1 - x} \right| = \sup_{|x|<q} \left| \frac{x^{N+1}}{1 - x} \right| = \frac{q^{N+1}}{1 - q} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Замечание. Критерий Коши означает, что при равномерной сходимости $\sup_X |S_m(x) - S_{n-1}(x)| \to 0$, т.е. $\sup_X |\sum_{k=n}^m f_n(x)| \to 0$, m, $n \to \infty$. В частности, беря $m = n$, получаем

Следствие. *Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ сходится равномерно на X, то $\sup_X |f_n(x)| \to 0$, $n \to \infty$.*

4.2 Равномерная сходимость функциональных рядов и непрерывность

Теорема 1. *Пусть X — топологическое пространство, f_n — непрерывные функции на X и ряд $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ сходится равномерно на X. Тогда сумма ряда $S(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ является непрерывной функцией на X.*

Доказательство. По определению ряд $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ сходится равномерно на X тогда и только тогда, когда частичные суммы сходятся равномерно на X. Функции $S_N(x)$ непрерывны на X как конечные суммы непрерывных на X функций. Следовательно, $S(x)$ непрерывна на X как равномерный предел непрерывных на X функций.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^\infty (1-x)x^n$, $x \in [0;1]$. Имеем $S_N(x) = (1-x)(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^N) = x - x^{N+1}$. При $N \to \infty$ имеем

$$S_N(x) \to S(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1), \\ x-1, & x = 1. \end{cases}$$

Члены ряда $(1-x)x^n$ являются непрерывными функциями, а сумма ряда $S(x)$ разрывна в точке $x = 1$. Следовательно, ряд не может сходиться равномерно на $[0;1]$.

Теорема Дини. *Пусть X — компактное топологическое пространство, функции f_n неотрицательны и непрерывны на X. Пусть ряд $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ сходится на X и его сумма является непрерывной функцией на X. Тогда ряд $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ сходится равномерно на X.*

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы $S_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$. Так как функции $f_n(x)$ непрерывны и неотрицательны, функции $S_N(x)$ непрерывны и последовательность $S_N(x)$ монотонно возрастает для любого фиксированного x. Кроме того, $S_N(x)$ сходится поточечно к $S(x)$, $N \to \infty$, где $S(x)$ непрерывна на множестве X. По теореме Дини для последовательностей функций $S_N(x)$ сходится к $S(x)$ равномерно на X. Это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X.

4.3 Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 1 (признак Вейерштрасса). *Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Предположим, что для любого $x \in X$ имеют место неравенства $|f_n(x)| \leq \alpha_n$, $n \geq 1$. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на X.*

Доказательство. Абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ следует из признака сравнения для числовых рядов. Докажем равномерную сходимость на X. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По критерию Коши для числовых рядов $\exists N$: $\forall m \geq n \geq N$ $\sum_{k=n}^{m} \alpha_k < \varepsilon$. Тогда $\forall m \geq n \geq N$ $\forall x \in X$ $\sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m} \alpha_k < \varepsilon$. По критерию Коши функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$. Так как $\frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Лемма. *Пусть последовательность g_n неотрицательна и монотонно убывает, а последовательность F_n удовлетворяет условию $|F_n(x)| \leq M$, $n \geq 0$, для некоторого $M > 0$. Тогда*

$$\left|\sum_{k=n}^{m}(F_k - F_{k-1})g_k\right| \leq 2Mg_n, \quad \forall m \geq n \geq 1.$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{k=n}^{m}(F_k - F_{k-1})g_k = \sum_{k=n}^{m} F_k g_k - \sum_{k=n}^{m} F_{k-1} g_k = \sum_{k=n}^{m} F_k g_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} F_k g_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=n}^{m} F_k g_k - \sum_{k=n}^{m} F_k g_{k+1} + F_m g_{m+1} - F_{n-1} g_n = \sum_{k=n}^{m} F_k (g_k - g_{k+1}) + F_m g_{m+1} - F_{n-1} g_n.$$

Следовательно, по неравенству треугольника

$$\left|\sum_{k=n}^{m}(F_k - F_{k-1})g_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |F_k|\,|g_k - g_{k+1}| + |F_m|\,|g_{m+1}| + |F_{n-1}|\,|g_n| \leq$$

$$\le M\left(\sum_{k=n}^{m}(g_k - g_{k+1}) + g_{m+1} + g_n\right) = M(g_n - g_{m+1} + +g_{m+1} + g_n) = 2Mg_n.$$

Теорема 2 (признак Дирихле). *Функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ *сходится равномерно на* X*, если выполняются следующие условия:*

1) *существует константа* $M > 0$ *такая, что* $\forall N \ge 1$ $\forall x \in X$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right| \le M;$$

2) *последовательность* $g_n(x)$ *убывает для любого* $x \in X$;

3) $g_n(x) \rightrightarrows 0$, $n \to \infty$, *на* X.

Доказательство. Пусть $F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$. Тогда $\forall N \ge 1$ $\forall x \in X$ выполняется неравенство $|F_N(x)| \le M$. Так как $g_n(x) \rightrightarrows 0$, $n \to \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ $\exists N$: $\forall n \ge N$ $\forall x \in X$ выполняется неравенство $|g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Используя лемму, получаем что $\forall m \ge n \ge N$ $\forall x \in X$

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)g_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n}^{m}(F_k(x) - F_{k-1}(x))g_k(x)\right| \le 2Mg_n(x) < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

По критерию Коши функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ сходится равномерно на X.

Теорема 3 (признак Абеля). *Функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ *сходится равномерно на* X*, если выполняются следующие условия:*

1) *функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* X;

2) *последовательность* $g_n(x)$ *убывает для любого* $x \in X$;

3) *существует константа* $C > 0$ *такая, что* $\forall n \ge 1$ $\forall x \in X$ $|g_n| \le C$.

Доказательство. Так как функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X, по критерию Коши $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$: $\forall m$, n: $m \ge n \ge N$ $\forall x \in X$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2C}. \qquad (*)$$

Фиксируем число $n \ge N$. Пусть $\widetilde{F}_k(x) = \sum_{i=n}^{k} f_k(x)$, $k \ge n$, $\widetilde{F}_{n-1} = 0$. Тогда в силу $(*)$ имеем $|\widetilde{F}_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2C}$, $k \ge n$, $x \in X$. Применяя лемму, получаем, что при $m \ge N$

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)g_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n}^{m}(\widetilde{F}_k(x) - \widetilde{F}_{k-1}(x))g_k\right| \le 2\frac{\varepsilon}{2C}|g_n(x)| \le \varepsilon.$$

По критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ сходится равномерно на X.

4.4 Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов

Теорема 1. *Пусть функции f_n непрерывно дифференцируемы на ограниченном числовом промежутке I. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится по крайней мере в одной точке промежутка I и ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно на I. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на I и его сумма S непрерывно дифференцируема на I, причем $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$, $x \in I$.*

Замечание. Последнее равенство можно записать в виде

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

При этом говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ можно почленно дифференцировать.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Из условий теоремы следует, что $S_n(x)$ сходится в некоторой точке из промежутка I. Имеем: последовательность $S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$ сходится равномерно на I. Тогда по теореме о дифференцировании последовательности функций $S_n(x)$ сходится равномерно на I к дифференцируемой функции $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ и

$$S'(x) = \lim_{n\to\infty} S_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x).$$

Теорема 2. *Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ составлен из интегрируемых на отрезке $[a;b]$ функций и сходится равномерно на $[a;b]$ интегрируемой на $[a;b]$ функции f. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

В частности, утверждается, что последний ряд сходится.

Замечание. Последнее равенство можно записать в виде

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

При этом говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ можно почленно интегрировать.

Доказательство. Пусть $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Функции $S_n(x)$ интегрируемы и равномерно сходятся к f на $[a;b]$. ПО теореме о предельном переходе под знаком интеграла получаем, что $\int_a^b S_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$, $n \to \infty$. Но $\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)dx$. Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx$ сходится и его сумма равна $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема 3. *Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ составлен из непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций и сходится равномерно на $[a;b]$ к функции f. Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x f_n(t)dt$$

сходится равномерно на $[a;b]$ к функции $\int_c^x f(t)dt$, где c — произвольная точка из $[a;b]$.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что f непрерывна на отрезке $[a;b]$. Пусть $F_n(x) = \int_c^x f_n(t)dt$, $F(x) = \int_c^x f(t)dt$. Тогда

$$F_n'(x) = f_n(x), \quad F'(x) = f(x), \quad x \in [a;b].$$

Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} F_n'(x)$ сходится равномерно, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(c)$ сходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$ и его сумма $S(x)$ такова, что $S'(x) = f(x)$, причем $S(c) = 0$. По формуле Ньютона-Лейбница получаем, что $S(x) = \int_c^x f(t)dt = F(x)$.

5 Степенные ряды

5.1 Радиус сходимости степенного ряда. Интервал и область сходимости

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots.$$

При этом говорят, что ряд записан в точке x_0, а a_n называется n-м коэффициентом ряда.

Радиусом сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ называется число

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (*)$$

Отметим, что $0 \le R \le +\infty$.

Теорема. *Если $R = 0$, то степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ сходится только при $x = 0$. Если $R = +\infty$, то степенной ряд сходится при любом $x \in \mathbb{R}$. Если $0 < R < +\infty$, то степенной ряд сходится на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ и расходится при $|x - x_0| > R$. В точках $x = x_0 \pm R$ ряд может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство. Любой степенной ряд сходится при $x = x_0$. Пусть $x \ne x_0$. Применим к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ радикальный признак Коши. Имеем

$$q = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} - |x-x_0| \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x-x_0|}{R}.$$

Если $|x - x_0| < R$, то $q < 1$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ сходится, поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ сходится абсолютно. Если $|x - x_0| > R$, то $q > 1$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ расходится, причем его n-й член стремится к $+\infty$. Следовательно, $a_n(x-x_0)^n$ не стремится к нулю, и ряд расходится $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Если $|x - x_0| = R$, то возможна как сходимость, так и расходимость (см. примеры ниже). Теорема доказана.

Интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Множество точек I, где сходится степенной ряд, называется областью сходимости этого ряда. Если $R = +\infty$, то $I = \mathbb{R}$. Если $0 < R < +\infty$, то $(x_0 - R; x_0 + R) \subset I \subset [x_0 - R; x_0 + R]$. Следовательно, область сходимости может отличаться от интервала не более чем на две точки — концы интервала $x = x_0 \pm R$.

Примеры. 1) Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$. Имеем

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Ряд сходится только при $x = 0$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Имеем

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Следовательно, ряд сходится для любого $x \in \mathbb{R}$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} [n]\sqrt{n} = 1.$$

Интервал сходимости — $(-1;1)$. При $x = 1$ имеем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который сходится как ряд Лейбница. При $x = -1$ имеем гармонический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^\lambda}$. Имеем $R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\lambda} = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^\lambda = 1$. Интервал сходимости — $(-1;1)$. Рассмотрим сходимость на концах интервала. При $x = 1$: ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$ сходится при $\lambda > 1$. При $x = -1$: ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\lambda}$ сходится при $\lambda > 0$.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. $R = \lim)_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$. Интервал сходимости — $(-1;1)$. При $x = 1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ расходится, при $x = -1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ также расходится.

Формула $(*)$ называется формулой Коши-Адамара.

Теорема. *Если существует*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R \tag{$**$}$$

, то радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ равен R.

Доказательство. Пусть $x \neq x_0$. Применим к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x - x_0)^n|$ признак Даламбера. Пусть

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}|}{|a_n (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x - x_0|}{R}.$$

Если $|x - x_0| < R$, то $q < 1$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x - x_0)^n|$ сходится по признаку Даламбера. Следовательно, наш ряд сходится абсолютно. Если $|x - x_0| > R$, то $q > 1$ и $|a_n (x - x_0)^n| \to +\infty$, $n \to \infty$. Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ расходится.

Формула (**) называется формулой Даламбера.

Пример. Рассмотрим ряд $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$. По формуле Коши-Адамара радиус сходимости ряда равен 1. Однако формула Даламбера не применима, так как не существует предела (**): $\left|\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\right| = +\infty$, $\left|\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}\right| = 0$.

5.2 Операции над степенными рядами

Пусть даны два степенных ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$. Можно определить сумму, разность и произведение рядов как $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x - x_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k bn - k$.

Теорема. *Пусть R_1 и R_2 — радиусы сходимости степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$. Пусть $R = \min\{R_1, R_2\} > 0$. Тогда сумма, разность и произведение этих рядов сходится абсолютно при $|x - x_0| < R$.*

Доказательство. Для суммы и разности доказательство очевидно. Рассмотрим случай произведения. Если $|x - x_0| < R$, то ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ сходятся абсолютно. поэтому произведение сходится абсолютно по теореме Мертенса.

5.3 Непрерывность суммы степенного ряда

Теорема 1. *Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, лежащем в интервале сходимости.*

Доказательство. Пусть радиус R сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ — положительное число. Рассмотрим любой отрезок $[a; b] \subset (x_0 - R; x_0 + R)$. Существует $r < R$ такое, что для любого $x \in [a; b]$ имеем $|x - x_0| \leq r$. Имеем $|a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n|r^n$, $n \geq 0$. Степенной ряд сходится абсолютно в точке $x = x_0 + r$, лежащей в интервале сходимости, т. е. сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n$. Из признака Вейерштрасса следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится равномерно на $[a; b]$.

Теорема 2. *Сумма степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости.*

Доказательство. Фиксируем любую точку x из $(x_0 - R; x_0 + R)$. Докажем, что сумма степенного ряда непрерывна в этой точке. Поместим x вместе с малой окрестностью в отрезок $[a; b]$, лежащий в интервале сходимости. По теореме 1 ряд сходится равномерно на $[a; b]$. Члены ряда $a_n(x - x_0)^n$ являются непрерывными функциями? поэтому сумма является непрерывной на $[a; b]$ в силу равномерной сходимости.

Теорема 3 (теорема Абеля). *Если радиус сходимости* $0 < R < +\infty$ *и степенной ряд сходится в точке* $x = x_0 + R$ *(*$x = x_0 - R$*), то ряд сходится равномерно на отрезке* $[x_0; x_0 + R]$ *(*$[x_0 - R; x_0]$*). В частности, сумма ряда является непрерывной функцией на отрезке* $[x_0; x_0+R]$ *(*$[x_0-R; x_0]$*).*

Доказательство. Рассмотрим $x = x_0 + R$. Их сходимости ряда в этой точке следует, что сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$. Это — числовой ряд, поэтому он сходится равномерно но x на $[x_0; x_0 + R]$. Представим наш степенной ряд в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^n.$$

Имеем $\left|\frac{x-x_0}{R}\right| \leq 1$, если $x \in [x_0; x_0 + R]$. Величина $\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n$ монотонна по n при любом фиксированном x. Следовательно, по признаку Абеля степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится равномерно на $[x_0; x_0 + R]$.

Упражнение. Докажите, что если сходятся ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ и их произведение $\sum_{n=0}^{\infty}{}_n$, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}{}_n$. Указание: перейдите к степенным рядам.

5.4 Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Теорема 1. *Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости, т.е. если* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$*,* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*, то сумма ряда* $f(x)$ *является дифференцируемой функцией на* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *и*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R). \qquad (*)$$

Доказательство. Пусть $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Поместим точку x в симметричный относительно точки x_0 отрезок $[x_0 - r, x_0 + r] \subset (x_0 -$

$R, x_0 + R)$ как внутреннюю точку. Так как

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

то радиус сходимости ряда, получающегося почленным дифференцированием, совпадает с радиусом сходимости исходного ряда. Следовательно, ряд $(*)$ сходится равномерно на $[x_0 - r, x_0 + r]$ по теореме 1 из предыдущего пункта. Так как исходный ряд сходится на $(x_0 - R, x_0 + R)$, по теореме о почленном дифференцировании функциональных рядов $f(x)$ является дифференцируемой функцией на $(x_0 - R, x_0 + R)$ и справедливо равенство $(*)$.

Следствие. *Сумма степенного ряда является бесконечно дифференцируемой функцией в интервале сходимости.*

Теорема 2. *Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости, т.е. если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, то $\forall x \in (x_0 + R; x_0 - R)$*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x - x_0)^{n+1}}{n+1}. \qquad (**)$$

Более того, если степенной ряд сходится в точке $x = x_0 + R$ ($x = x_0 - R$), то равенство $(**)$ справедливо и для этой точки. При этом радиус сходимости ряда в правой части $(**)$ совпадает с радиусом сходимости исходного ряда.

Доказательство. Пусть $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$, тогда степенной ряд сходится равномерно на отрезке с концами x_0 и x. Следовательно, можно применить теорему почленном интегрировании функционального ряда, откуда следует $(**)$. Если исходный ряд сходится в точке точке $x = x_0 + R$ ($x = x_0 - R$), то опять-таки он сходится равномерно на отрезке с концами x_0 и x и имеет место $(**)$.

Наконец, радиус сходимости ряда в правой части $(**)$ равен

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \frac{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

5.5 Ряд Тейлора. Аналитические функции.

Пусть функция f бесконечно дифференцируема в точке x_0. Рядом Тейлора функции f в точке x_0 называется степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, где $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Предположим, что радиус сходимости ряда Тейлора функции f равен $R > 0$. Тогда при $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ можно определить сумму этого ряда $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Возникает вопрос: когда сумма ряда $S(x)$ совпадает с $f(x)$? Следующий пример показывает, что ответ не всегда положителен.

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Докажем, что функция бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и все производные функции f в точке $x = 0$ равны 0. При $x \neq 0$ производная $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$. В точке $x = 0$ имеем, с использованием замены переменных и правила Лопиталя,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0.$$

Аналогично $f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-1/x^2}$,

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}}{x} = 2 \lim_{t \to \infty} \frac{t^4}{e^{t^2}} = 0.$$

Точно также показываем что $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, ряд Тейлора функции f в точке $x = 0$ состоит из нулей, т.е. $S(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $f(x) \neq S(x)$, $x \neq 0$.

Функция f называется аналитической в точке $x = x_0$, если в некоторой окрестности этой точки сумма ряда Тейлора функции f, записанного в точке x_0, совпадает с $f(x)$.

Если функция f бесконечно дифференцируема в точке x_0, то для любого $n \in \mathbb{N}$ можно записать формулу Тейлора n-го порядка: $f(x) = S_n(x) + r_n(x)$, где $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$, и, как и выше, $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Нетрудно заметить, что $S_n(x)$ являются частичными суммами ряда Тейлора, поэтому $f(x) = S(x)$ тогда и только тогда, когда остаток $r_n(x) \to 0$, $n \to \infty$. Итак, доказана

Теорема 1. *Функция f является аналитической в точке x_0 тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности этой точки $r_n(x) \to 0$, $n \to \infty$.*

Теперь сформулируем достаточное условие аналитичности функции f в точке, следующее непосредственно из теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $M_n = \sup_{x \in I} |f^{(n)}(x)|$, где I — δ-окрестность точки x_0. Если $\frac{M_n}{n!}\delta^n \to 0$, $n \to \infty$, то ряд Тейлора функции f в точке x_0 сходится к f в δ-окрестности точки x_0 и, следовательно, функция f является аналитической в точке x_0.*

Пусть теперь задан некоторый степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ с радиусом сходимости $R > 0$ и S — его сумма в интервале сходимости.

Теорема 3. *Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ является рядом Тейлора своей суммы S.*

Доказательство. Имеем $S(x_0) = a_0$. По теореме о почленном дифференцировании степенных рядов имеем в интервале сходимости

$$S'(x) = a_1 + 2a_2(x - x)^2 + 3(x - x_0)^3 + \dots,$$

поэтому $S'(x_0) = a_1$. Аналогично, дифференцируя еще раз, получаем

$$S'(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + \dots,$$

и $S''(x_0) = 2a_2$. Продолжая далее получаем

$$S^n(x) = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1a_n + (n + 1) \cdot n \cdot \ldots \cdot 2a_{n+1}(x - x_0) + \dots,$$

поэтому $S^n(x_0) = n!a_n$ и $a_n = \frac{S^{(n)(x_0)}}{n!}$. Последнее означает, что степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ является рядом Тейлора своей суммы S.

Функция f называется аналитической на интервале $(a; b)$, если она аналитическая в любой точке этого интервала.

Отметим некоторые свойства аналитических функций.

1) Сумма, разность произведение функций, аналитических в точке x_0 (на $(a; b)$) является аналитической функцией в точке x_0 (на $(a; b)$).

2) Если f, g — аналитические в точке x_0 (на $(a; b)$) функции и $g(x) \neq 0$ в точке x_0 (на $(a; b)$), то частное f/g является аналитической функцией в точке x_0 (на $(a; b)$).

3) Если функция f аналитична в точке x_0 и функция g аналитична в точке $f(x_0)$, то суперпозиция $g \circ f$ является непрерывной в точке x_0.

5.6 Разложение в ряд Тейлора некоторых элементарных функций

1) $y = e^x$. Имеем $y^{(n)}(x) = e^x$, поэтому $y^{(n)}(0) = 1$ и $a_n = \frac{1}{n!}$. Ряд Тейлора функции в точке $x = 0$ имеет вид

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Докажем, что сумма этого ряда совпадает с e^x для любого $x \in \mathbb{R}$. Отметим, что радиус сходимости ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Имеем для любого $r > 0$ $M_n = \sup_{|x|\le r} |y^{(n)}(x)| = \sup_{|x|\le r} e^x = e^r$. Так как $\frac{M_n}{n!}\delta^n = \frac{e^r}{n!}\delta^n \to 0$, $n \to \infty$, то по теореме 2 имеем

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

для любого $x \in [-r; r]$. Так как r — любое положительное число, то это равенство имеет место для любого $x \in \mathbb{R}$.

2) $y = \sin x$. Имеем $y'(x) = \cos x$, $y''(x) = -\sin x$, $y'''(x) = -\cos x$, $y^{IV}(x) = \sin x$, $\ldots$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ получаем $y^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2)$. Поэтому для любого числового промежутка вида $I = [-\delta; \delta]$ имеем $M_n = \sup_I |y^{(n)}(x)| \le 1$. Тогда $0 \le \frac{M_n}{n!}\delta^n \le= \frac{1}{n!}\delta^n \to 0$, $n \to \infty$. По теореме 2 получаем, что ряд Тейлора функции $y = \sin x$ сходится к значению $\sin x$ в любой точке $x \in \mathbb{R}$. С учетом равенств

$$y^{(n)}(0) = \sin(n\pi/2) = \begin{cases} 0, & n \text{ — четное}, \\ (-1)^k, & n = 2k+1, \end{cases}$$

получаем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots ,$$

$x \in \mathbb{R}$. Отметим, что радиус сходимости ряда равен, разумеется, $+\infty$.

3) $y = \cos x$. Дифференцируя почленно разложение функции $y = \sin x$, получаем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots ,$$

$x \in \mathbb{R}$.

4) Для любого комплексного z определим функции

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots.$$

Тогда

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \ldots + \frac{(iz)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 + iz + -\frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \ldots + \ldots = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right) +$$

$$\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right) = \cos z + i \sin z.$$

Итак, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (формула Эйлера).

5) При $|x| < 1$ из формулы суммы геометрической прогрессии получаем

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots.$$

6) Обобщенный бином. Пусть $y = (1+x)^\alpha$. Имеем $y'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $y''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \ldots, y^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Таким образом, $y(0) = 1$, $y'(0) = \alpha$, $y''(0) = \alpha(\alpha-1), \ldots, y^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$. Ряд Тейлора функции $y = (1+x)^\alpha$ имеет вид

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots. \qquad (*)$$

Если α — натуральное число, то все члены ряда, начиная с некоторого номера равны нулю и ряд сходится к $(1+x)^\alpha$ в силу формулы бинома

Ньютона. Если $\alpha \neq 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, то по формуле Даламбера радиус сходимости ряда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1.$$

Обозначим через $S(x)$ сумму ряда $(*)$. Покажем, что $S(x) = (1+x)^\alpha$, $|x| < 1$. Имеем

$$S'(x) = \alpha+\alpha(\alpha-1)x+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\dots,$$

откуда

$$(1+x)S'(x) = S'(x)+xS'(x) = \alpha+\alpha(\alpha-1)x+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2+\dots$$

$$\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\dots+\alpha x+\alpha(\alpha-1)x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^3+\dots$$

$$\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n+\dots = \alpha+\alpha^2x+\frac{\alpha^2(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha^2(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dots$$

$$\dots+\frac{\alpha^2(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots = \alpha S(x).$$

Мы показали, что функция S удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1+x)S'(x) = S(x)$, $|x<1|$. Решим это уравнение. Имеем

$$\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{\alpha}{1+x} \Longrightarrow \ln S(x) = \alpha\ln(1+x)+C \Longrightarrow S(x) = e^C(1+x)^\alpha.$$

Учитывая, что $S(0) = 1$, получаем, что $C = 0$ и $S(x) = (1+x)^\alpha$.

Упражнение. Исследуйте сходимость ряда $(*)$ при $x = \pm 1$.

7) В силу (5) имеем

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^nx^n+\dots.$$

Почленно интегрируя это разложение, получаем

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\dots.$$

Отметим, что при $x = 1$ имеем ряд Лейбница

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + \ldots .$$

По теореме Абеля сумма ряда является непрерывной функцией в точке $x = 1$. Так как $\ln(1 + x)$ является непрерывной функцией в точке $x = 1$, имеем

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + \ldots .$$

8) Пусть $y = \operatorname{arctg} x$. Имеем

$$y' = \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Интегрируя почленно этот ряд получаем

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Как и в предыдущем примере имеем при $x = 1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots .$$

9) Пусть $y = \arcsin x$. Тогда

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-x^2)^n, \quad |x| < 1,$$

где

$$a_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} = (-1)^n \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2}}{n!} =$$

$$= (-1)^n \frac{(2n - 1)!!}{2^n n!} = (-1)^n \frac{(2n - 1)!!}{2n!!}.$$

Таким образом,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n - 1)!!}{2n!!} x^{2n},$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n - 1)!!}{2n!!} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}, \quad |x| < 1.$$

При $x = 1$ получаем

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{1}{2n+1}.$$

10) $y = \sin^2 x$. Имеем

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}(1-1+\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^4}{4!}+\frac{(2x)^6}{6!}-\ldots) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2x)^n}{n!}.$$

11) Пусть $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$. Имеем

$$y' = \frac{2}{1-x^2} = 2 + 2x^2 + 2x^4 + \ldots + 2x^{2n} + \ldots, \quad |x| < 1,$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \ldots + \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

12) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ (интегральный синус). Имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots,$$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

13)

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x/2} =$$

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \ldots + \frac{x^n}{2^n} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \ldots + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)x^n + \ldots, \quad |x| < 1.$$

14) Разложим функцию $y = 1/x$ в степенной ряд в точке $x = x_0 \neq 0$. Имеем

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0 + (x - x_0)} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-x_0}{x_0}} =$$

$$= \frac{1}{x_0}\left(1 - \frac{x-x_0}{x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{x_0^2} - \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{x_0^n} + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_0^{n+1}}\,(x-x_0)^n.$$

Ряд сходится при $\left|\frac{x-x_0}{x_0}\right| < 1$, т. е. при $|x-x_0| < |x_0|$.

15) Разложим функцию $y = 1/x^2$ в степенной ряд в точке $x = x_0 \neq 0$. Дифференцируя предыдущее разложение, получаем

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_0^{n+1}}\,n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x_0^{n+1}}\,(n+1)(x-x_0)^n.$$

16) Рассмотрим функцию $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n!}$. Этот ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса, т. к. $\left|\frac{\sin(2^n x)}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!}$, а числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится. Так как члены ряда непрерывны, функция f непрерывна. Дифференцируя почленно этот ряд, получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cos(2^n x)}{n!}$. Этот ряд также сходится равномерно, так как числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ сходится. Следовательно, сумма этого ряд является производной $f'(x)$. Аналогично получаем

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}\sin(2^n x)}{n!},$$

и т. д.,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{kn}\sin(2^n x + k\frac{\pi}{2})}{n!}.$$

Таким образом, функция f бесконечно дифференцируема.

Теперь построим ряд Тепйлора функции f в точке $x = 0$. Имеем $f(0) = 0$, $f'(0) = e^2$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$, …, $f^{(2k)} = 0$, $f^{(2k+1)} = (-1)^k e^{2^{2k+1}}$. Следовательно, ряд Тейлора функции f имеет вид $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{e^{2^{2k+1}}}{(2k+1)!}x^{2k+1}$. Применим к исследованию сходимости этого ряда признак Даламбера. Имеем

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{e^{2^{2k+3}}}{(2k+3)}x^{2k+3} \;:\; \frac{e^{2^{2k+1}}}{(2k+1)}x^{2k+1}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{2^{2k+3}-2^{2k+1}}}{(2k+2)(2k+3)}|x^2| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{e^{3\cdot 2^{2k+1}}}{(2k+2)(2k+3)}|x^2| = +\infty,$$

если $x \neq 0$. Таким образом, ряд Тейлора функции f расходится для любого $x \neq 0$.

Содержание