Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Кафедра электронных вычислительных машин

Отчёт

по лабораторной работе № 2

«Построение и исследование аналитической модели дискретно – стохастической СМО»

Выполнили ст. гр. 950503 — Довголёнок Д.А, Балобин М.А

Проверила: Герман Ю.О.

Минск 2022

Цель:

Изучить методы анализа поведения дискретно-стохастической СМО.

Краткое теоретическое введение.

Рассматриваем СМО с марковскими процессами.

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем называют **дискретной марковской цепью.**

Такие процессы удобно иллюстрировать с помощью **графа состояний** системы, где вершины представляют возможные состояния , S_2, ..., S_n системы, а дуги — возможные переходы из состояния Sj в состояние S_k, (на графе отмечаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния). Над каждой стрелкой, как правило, проставляются соответствующие вероятности перехода из состояния Sj в состояние S_k

Однородная марковская цепь может быть полностью описана **матрицей переходных вероятностей**:

$$||P_{ij}|| = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & P_{ij} & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nm} \end{pmatrix}$$

и начальным распределением $p_m(0)$, где m = 1,2,...

Замечание. Распределение X_0 называется начальным распределением марковской цепи:

$$p_m(0) = P\{X_0 = m\}, \text{ где } m = 1, 2, \dots.$$

Элементы матрицы переходных вероятностей обладают следующими свойствами: $Pij > 0$

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1, i = 1, \dots, n.$$

Задание:

Вариант 1.

Пусть матрица переходных вероятностей P суть

	S0	S1	S2	S3
S0	0.1	0.2	0.4	0.3
S1	0.3	0.1	0.4	0.2
S2	0.2	0.2	0.2	0.4
S3	0.3	0.3	0.3	0.1

1. Найти установившиеся вероятности состояний системы: P_0, P_1, P_2, P_3.
2. Рассчитать вероятности состояний системы на третьем шаге (k=3)
3. Рассчитать число шагов до попадания в поглощающее состояние для матрицы вероятностей переходов

	S0	S1	S2	S3
S0	0.1	0.2	0.4	0.3
S1	0.3	0.1	0.4	0.2
S2	0	0	1.0	0
S3	0.3	0.3	0.3	0.1

Ход работы:

Матрица переходных вероятностей:

	S0	S1	S2	S3
S0	0.1	0.2	0.4	0.3
S1	0.3	0.1	0.4	0.2
S2	0.2	0.2	0.2	0.4
S3	0.3	0.3	0.3	0.1

Сумма вероятностей по каждой строке равна 1.

1. Составим систему уравнений для установившегося режима

$p_0 = 0.1*p_0+ 0.3*p_1+0.2*p_2 +0.3*p_3$

$p_1 = 0.2*p_0+ 0.1*p_1+0.2*p_2 +0.3*p_3$

$p_2 = 0.4*p_0+ 0.4*p_1+0.2*p_2 +0.3*p_3$

$p_3 = 0.3*p_0 + 0.2*p_1 + 0.4*p_2 + 0.1*p_3$

$1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3$

Решаем систему и находим вероятности состояний системы: P_0, P_1, P_2, P_3.:

$p_0 = 0.22$

$p_1 = 0.21$

$p_2 = 0.31$

$p_3 = 0.26$

Вероятности состояния системы на шаге k вычисляются по формуле

$$\mathbf{R}(k) = \mathbf{R}(0) \cdot \mathbf{P}^k.$$

Здесь $\mathbf{P}^k$ - k-ая степень матрицы.

2. Вероятности состояний системы на третьем шаге (k=3):

Вероятности состояний системы в начальный момент времени:

$P_0(0) = 0.22$, $P_1(0) = 0.21$, $P_2(0)=0.31$, $P_3(0)=0.26$

$\mathbf{R}(1) = \mathbf{R}(0) \cdot \mathbf{P}^1 = <0.22, 0.21, 0.31, 0.26> \times$

	S0	S1	S2	S3
S0	0.1	0.2	0.4	0.3
S1	0.3	0.1	0.4	0.2
S2	0.2	0.2	0.2	0.4
S3	0.3	0.3	0.3	0.1

$= <0.23, 0.20, 0.31, 0.26>$

$\mathbf{R}(2) = \mathbf{R}(1) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{R}(0) \cdot \mathbf{P}^2 = <0.23, 0.20, 0.31, 0.26> \times$

	S0	S1	S2	S3
S0	0.1	0.2	0.4	0.3
S1	0.3	0.1	0.4	0.2
S2	0.2	0.2	0.2	0.4
S3	0.3	0.3	0.3	0.1

$= <0.22, 0.21, 0.31, 0.26>$

$\mathbf{R}(2) = \mathbf{R}(2) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{R}(0) \cdot \mathbf{P}^3 = <0.22, 0.21, 0.31, 0.26> \times$

	S0	S1	S2	S3
S0	0.1	0.2	0.4	0.3
S1	0.3	0.1	0.4	0.2
S2	0	0	1.0	0
S3	0.3	0.3	0.3	0.1

$= <0.23, 0.20, 0.31, 0.26>$

Видим, что значения почти не меняются и на 3 шаге получаются следующие вероятности: <0.23, 0.20, 0.31, 0.26>

3. Рассчитать число шагов до попадания в поглощающее состояние для матрицы вероятностей переходов:

	S0	S1	S2	S3
S0	0.1	0.2	0.4	0.3
S1	0.3	0.1	0.4	0.2
S2	0	0	1.0	0
S3	0.3	0.3	0.3	0.1

Здесь одно поглощающее состояние: S2. Удаляем строку и столбец S2

В матричном виде запишем

$$T = Q*T+I,$$

где I – единичная диагональная матрица.

Здесь Q – матрица вероятностей переходов, которая получается из матрицы P удалением строк и столбцов, соответствующих поглощающим состояниям.

	S0	S1	S3
S0	0.1	0.2	0.3
S1	0.3	0.1	0.2
S3	0.3	0.3	0.1

Это есть матрица Q.

$\|Q\|=\left[q_{00}\ q_{01}\ q_{03}\ q_{10}\ q_{11}\ q_{13}\ q_{30}\ q_{31}\ q_{33} \right]$

Запишем уравнения

$$T = Q*T+I$$

в таком виде:

$t_1=q_{11}*t_1 +q_{12}*t_2+q_{1z}*t_z+1$

$t_2=q_{21}*t_1 +q_{22}*t_2+q_{2z}*t_z+1$

…

$t_z=q_{z1}*t_1 +q_{z2}*t_2+q_{zz}*t_z+1$,

где t_i – среднее количество шагов, которое сделаем из состояния t_i в поглощающее состояние;
q_{ij} – вероятность перехода.

Согласно примеру, получаем три уравнения:

$t_0= q_{00}*t_0+ q_{01}*t_1 + q_{03}*t_3 +1$

$t_1= q_{10}*t_0+ q_{11}*t_1 + q_{13}*t_3 +1$

$t_3= q_{30}*t_0+ q_{31}*t_1 + q_{33}*t_3 +1$

или

$t_0= 0.1*t_0 + 0.2*t_1+ 0.3*t_3 +1$

$t_1= 0.3*t_0 + 0.1*t_1+ 0.2*t_3 +1$

$t_3= 0.3*t_0 + 0.3*t_1+ 0.1*t_3 +1$

Матрица T выражается в виде формулы

$$T = (I – Q)^{-1}.$$

Матрица I-Q имеет такой вид в нашем случае:

	S0	S1	S3
S0	0.9	-0.2	-0.3

S1	-0.3	0.9	-0.2
S3	-0.3	-0.3	0.9

С помощью Excel найдем обратную матрицу:

1.5	0.54	0.62
0.66	1.44	0.54
0.72	0.66	1.5

Итак, если система стартует из состояния S0, то она попадает в поглощающее состояние в среднем за 1.5 + 0.54 + 0.62 ~ 3 шага

Если система стартует из состояния S1, то она попадает в поглощающее состояние в среднем за 0.66 + 1.44 + 0.54 ~ 3 шага.

Если система стартует из состояния S3, то она попадает в поглощающее состояние в среднем за 0.72 + 0.66 + 1.5 ~3 шага.