Занятие 4. Свойства предела последовательности

I. теоремы Вейерштрасса и о сжатой переменной
II. вычисление пределов по арифметическим свойствам (методами раскрытия неопределённостей)
III. второй замечательный предел

Составила: Рванова А.С.
Редакторы: Лебедева А.Д., Правдин К.В.

В аудитории

I. Теоремы Вейерштрасса и о сжатой переменной

Задача 1. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{2n-1}{3n+1}$ – возрастающая.

Задача 2. Даны последовательности. Указать, какие из этих последовательностей ограничены и какие из них не ограничены.

а) $x_n = \frac{5n^2}{n^2+3}$
б) $y_n = (-1)^n \frac{2n}{n+1} \sin n$
в) $z_n = n \cos \pi n$

Задача 3. Доказать, что последовательность сходится и найти её предел.

$x_1 = \frac{x_0}{a+x_0};\ x_2 = \frac{x_1}{a+x_1};\ x_3 = \frac{x_2}{a+x_2};\ \dots\ ;x_n = \frac{x_{n-1}}{a+x_{n-1}}\ ;\dots \quad (a > 1,\ x_0 > 0)$

Задача 4. Доказать, что следующие последовательности сходятся, и найти их пределы:

$$x_1 = \sqrt{2};\quad x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}};\quad x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}};\dots;\quad x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}\ (n\ \text{радикалов});\ \dots$$

Задача 5. Найти пределы последовательностей с общими членами:

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}};\quad z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}};\quad y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

II. Вычисление пределов по арифметическим свойствам (методами раскрытия неопределённостей)

Вычислить:

Задача 6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10n}{n^2+1}$

Задача 7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$

Задача 8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$

Задача 9. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$

III. Второй замечательный предел

Задача 10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{3n}$

Консультация

II. Вычисление пределов по арифметическим свойствам (методами раскрытия неопределённостей)

Задача 11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}((-1)^n n)}{n^2+1}$.

Задача 12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n-3}$.

Задача 13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{5}{n}-(-1)^n}$.

Задача 14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-4n}{3n^2+n+1}$.

Задача 15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-4n-3}{3n^3-8n+5}$

Задача 16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-5n+1}{3n+7}$

Задача 17. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt[3]{8n^3-n}}{n-\sqrt[4]{n^3+16}}$.

Задача 18. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^5-3^{n+2}+2^n}{n^3+3^n}$.

Задача 19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

Задача 20. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}{\sqrt[n]{n}-1}$.

Задача 21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$.

III. Второй замечательный предел

Задача 22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{4n-3}\right)^{2n+3}$

Задача 23. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^{n+2}\cdot n^3+9}$

Задача 24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)^{n^2+1}$

Задача 25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n^2+n+1}$

Самостоятельно

I. Теорема Вейерштрасса и о сжатой переменной

Задача 26. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n=\frac{10^n}{n!}$ убывает при $n\geq 10$.

Задача 27. Доказать, что последовательность сходится:

$$x_n=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1}+\cdots+\frac{1}{5^n+1}$$

$\left(\text{т. е.}\ \ x_1 = \dfrac{1}{5+1};\ \ x_2 = \dfrac{1}{5+1} + \dfrac{1}{5^2+1};\ \ x_3 = \dfrac{1}{5+1} + \dfrac{1}{5^2+1} + \dfrac{1}{5^3+1};\ \ \dots\right)$

Задача 28. Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

а) $x_n = \frac{n^2-1}{n^2}$
б) $x_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

Задача 29. С помощью теоремы о «зажатой» последовательности доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ \ (a > 0)$.

II. Вычисление пределов по арифметическим свойствам (методами раскрытия неопределённостей)

Задача 30. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+2}$

Задача 31. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Задача 32. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

Задача 33. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

Задача 34. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$.

Задача 35. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$.

III. Второй замечательный предел

Задача 36. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$

Задача 37. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2+2n+2}\right)^n$