Занятие 5. Подпоследовательности

I. подпоследовательности, верхний и нижний пределы
II. критерий Коши

Источники:

[Кудрявцев] Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу Том 1 (2003)

[Альсевич] Альсевич Л. А. и др. Пределы. Предел последовательности. БГУ (2011)

Составители: Шиманская Г.С., Правдин К.В.
Редактор: Правдин К.В.

В аудитории

I. Подпоследовательности, верхний и нижний пределы

Задача 1. Указать сходящуюся подпоследовательность последовательности $x_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$.

Задача 2. Найти все частичные пределы последовательности $\{x_n\}$, если x_n равно:

а) $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$; б) $\dfrac{n^2}{n+5}$; в) $(-1)^n$.

Задача 3. Выделив подпоследовательности, доказать, что последовательность $x_n = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ расходится. Найти множество частичных пределов, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Задача 4. Выделив подпоследовательности, доказать, что последовательность $x_n = (-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right)$ расходится. Найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, а также $\sup\{x_n\}$ и $\inf\{x_n\}$.

II. Критерий Коши

Задача 5. При помощи критерия Коши доказать, что последовательность x_n сходится:

$$x_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \dots + \frac{\cos n}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Задача 6. При помощи критерия Коши доказать, что предел последовательности x_n не существует:

а) $x_n = \sin^2 n$;
б) $x_n = \cos^2 n - 1$.

Консультация

I. Подпоследовательности, верхний и нижний пределы

Задача 7. Указать сходящуюся подпоследовательность последовательности x_n:

$x_n = n - 5\left[\dfrac{n-1}{5}\right]$, где $[x]$ – целая часть числа x (наибольшее целое, не превосходящее x).

Задача 8. Найти все частичные пределы последовательности x_n:

а) $\dfrac{1-n^3}{1+n^2}$; б) $3^{(-1)^n \cdot n}$.

Задача 9. Выделив подпоследовательности, доказать, что последовательность x_n расходится. Найти множество частичных пределов, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

а) $x_n = \left(\dfrac{3}{2}\cos\left(\dfrac{2\pi n}{3}\right)\right)^n$;

б) $\{x_n\} = \left\{1,\ \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10},\ \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \dots, \frac{99}{100},\ \dots\ ,\ \frac{1}{10^n}, \frac{2}{10^n}, \dots, \frac{10^n-1}{10^n},\ \dots\ \right\}.$

Задача 10. Выделив подпоследовательности, доказать, что последовательность x_n расходится. Найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, а также $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$, если x_n равно:

а) $\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$; б) $\dfrac{n^2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 1}{n+1}$.

Задача 11. Для последовательности x_n найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, а также $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$:

$x_n = \dfrac{(3\cos(\pi n/2) - 1)\ \cdot\ n\ +\ 1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

II. Критерий Коши

Задача 12. При помощи критерия Коши доказать, что последовательность x_n сходится:

$x_n = \dfrac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \dfrac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \dots + \dfrac{\cos n}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Задача 13. При помощи критерия Коши доказать, что предел последовательности x_n не существует:

а) $x_n = \sin n \cos n$;
б) $x_n = \sin^2 n - \cos^2 n$.

Самостоятельно

I. Подпоследовательности, верхний и нижний пределы

Задача 14. Найти все частичные пределы последовательности $x_n = n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$.

Задача 15. Выделив подпоследовательности, доказать, что последовательность $x_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n}$ расходится. Найти множество частичных пределов, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Задача 16. Выделив подпоследовательности, доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится. Найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, а также $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$, если x_n равно:

а) $(-1)^n \dfrac{3n-1}{n+2}$; б) $\dfrac{((-1)^n - 1)n^2 + n + 1}{n}$.

II. Критерий Коши

Задача 17. При помощи критерия Коши доказать, что последовательность $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{arctg}(2^k + k)}{2^k}$ сходится.

Задача 18. При помощи критерия Коши доказать, что предел последовательности x_n не существует:

а) $x_n = \sin n \cos n$;
б) $x_n = \sin^2 n - \cos^2 n$.