

Занятие 6. Предел функции

- I. предел функции по определению Коши
- II. предел функции по определению Гейне
- III. исследование сходимости функции (в командах)
- IV. вычисление пределов по арифметическим свойствам (методами раскрытия неопределённостей)

Источники:

Составила: Шиманская Г.С., Правдин К.В.
Редакторы: Правдин К.В.

В аудитории

I. Предел функции по определению Коши

Исходя из определения предела функции по Коши, докажите следующие равенства:

Задача 1. Исходя из определения предела функции по Коши, докажите следующие равенства:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 8) = -5$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 1}{3x + 9} = \frac{5}{3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1 - x)^2} = +\infty$; г) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2$.

II. Предел функции по определению Гейне

Задача 2. Пользуясь определением предела функции по Гейне и теоремами о пределах последовательностей, докажите, что $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}$.

Задача 3. Докажите, что предел не существует:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}$.

III. Исследование сходимости функции (в командах)

Задача 4. Дана функция $f(x) = \left(\frac{2x-3}{3x+8}\right)^{4x+11}$. Известно, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

1. Постройте график функции $f(x)$ в графическом редакторе Desmos: <https://www.desmos.com/>
2. Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) функции на бесконечностях:
 - а. сформулируйте определение конечного предела и бесконечных пределов функции в терминах $\varepsilon - \delta$ и неравенств;
 - б. выберите по три различных положительных числа $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ для $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ отдельно;
 - в. для каждого такого числа изобразите на графике соответствующую ε -окрестность пределов (для $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ отдельно);
3. для каждого выбранного ε найдите на графике наибольшую δ -окрестность переменных x , в которой все значения функции $f(x)$ попадают в ε -окрестность, или установите, что такой окрестности нет.

Варианты:

1) $f(x) = \left(\frac{2x-3}{3x+8}\right)^{4x+11}$; 2) $f(x) = \left(\frac{1-x^2}{2-7x^2}\right)^{x-13}$; 3) $f(x) = \left(\frac{x^3-1}{3x^3+1}\right)^{x^3-3}$; 4) $f(x) = \left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x-3}$;
5) $f(x) = \left(\frac{3x-1}{2x+11}\right)^{1-3x}$; 6) $f(x) = \left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x+2}$; 7) $f(x) = \left(\frac{13x+8}{10x-1}\right)^{x^3-1}$; 8) $f(x) = \left(\frac{5-3x}{1-2x}\right)^{0,3x-3}$.

Консультация

IV. Вычисление пределов по арифметическим свойствам (методами раскрытия неопределённостей)

Для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right) = f(a).$$

Это свойство непрерывности функции в точке, оно будет доказано в лекциях позднее (см. раздел 2).

Задача 5. Вычислить пределы функций:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} \quad (p, q \in \mathbb{N}).$$

Задача 6. Вычислить пределы функций:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x); \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x - 2} - \sqrt[3]{2x - 3}};$$
$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 - 3} - 5x); \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x); \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3}}{4x + 2}; \quad \text{ж) } \lim_{x \rightarrow \infty} 5^{\frac{2x}{x+3}}.$$

Задача 7. Вычислить пределы функций:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{\sqrt[3]{26 + x} - 3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt[4]{x + 17} - 2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}};$$
$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1 + x} - 1}{x} \quad (k \in \mathbb{N}); \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3} - 2 \cos x}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \sin x)^2}}; \quad \text{ж) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}.$$

Самостоятельно

I. Предел функции по определению Коши

Задача 8. Исходя из определения предела функции по Коши, докажите следующие равенства:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = 2; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -7} \frac{5x^2 + 34x - 7}{x + 7} = -36; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{3x + 2} = \frac{2}{3}.$$

II. Предел функции по определению Гейне

Задача 9. Докажите, что предел не существует:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \arctg\left(\frac{1}{x}\right); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x.$$