Алгебраические системы

Содержание

§1. Определение закона композиции

Опр. 1.1. **Внутренним законом композиции** на множестве M называется отображение $M \times M \to M$ декартова произведения $M \times M$ в M. Значение

$$(x, y) \mapsto z \in M$$

называется композицией элементов x и y относительно этого закона.

Пример 1.1. Приведем несколько примеров:

(а) *Сложение* $'+'$ - закон композиции на $\mathbb{N}$;

(б) *Умножение* $'\times'$ - закон композиции на $\mathbb{Z}$;

(в) *Пересечение* $'\cap'$ - закон композиции на подмножествах M;

NtB 1.1. Для записи композиции элементов $x, y \in M$ чаще всего используют одно из следующих обозначений:

$$x + y, \quad x \cdot y, \quad x \circ y, \quad x * y, \quad x^y.$$

Опр. 1.2. Закон композиции называется **ассоциативным**, если для любых трех элементов $x, y, z \in M$ имеет место следующее свойство:

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

Пример 1.2. В качестве примера закона, не обладающего ассоциативностью можно привести x^y на множестве натуральных чисел. Действительно, имеем:

$$(x^y)^z \neq x^{(y^z)}$$

Опр. 1.3. Закон композиции называется **коммутативным**, если для любой пары элементов $x, y \in M$ имеет место свойство

$$x * y = y * x.$$

Пример 1.3. Композиция функций не является коммутативной операцией на множестве функций:

$$\sin(x^2) \neq \sin(x)^2.$$

§2. Свойства элементов относительно закона

NtB 2.1. Наличие на множестве M внутреннего закона композиции может наделять некоторые его элементы свойствами, *относительно этого закона.*

Опр. 2.1. **Нейтральным элементом** относительно закона композиции $x * y$ называется элемент $e \in M$, такой что:

$$e * x = x = x * e, \quad \forall x \in M.$$

Пример 2.1. Нейтральным элементом относительно закона $\cap$ является само множество M.

Лемма 2.1. *Нейтральный элемент, если существует, является единственным нейтральным элементом в M.*

Доказательство. Пусть e' и e - два нейтральных элемента в M, тогда

$$e' = e * e' = e.$$

$\square$

Опр. 2.2. Элемент $\theta \in M$ называется **поглощающим** относительно закона композиции $x * y$, если имеет место следующее свойство:

$$\forall x \in M \quad x * \theta = \theta = \theta * x.$$

Пример 2.2. Поглощающим элементом относительно закона $\cap$ является пустое множество $\varnothing$.

Опр. 2.3. Элемент y называется **обратным** к элементу x относительно внутреннего закона композиции с нейтральным элементом e, если

$$y * x = e = x * y.$$

Лемма 2.2. *Обратный элемент к $x \in M$, если существует, является единственным.*

Доказательство. Действительно, пусть y и z - обратные элементы к x, тогда

$$y = y * e = y * (x * z) = (y * x) * z = e * z = z.$$

$\square$

NtB 2.2. Обратите внимание, что для доказательства единственности обратного элемента мы *предположили* наличие свойства ассоциативности.

NtB 2.3. Обычно обратный элемент для x обозначают x^{-1}.

Опр. 2.4. Множество M с заданным на нем одним или несколькими законами композиции называется **алгебраической структурой**.

NtB 2.4. Наряду с внутренними законами композиции огромную роль в приложениях играют также *внешние законы*. Мы их быдем рассматривать в дальнейшем, а пока ограничимся определением.

Опр. 2.5. **Внешним законом композиции** элементов множества Ω, называемых множеством операторов закона, и элементов множества M называется отображение множества $\Omega \times M$ в M. Значение

$$(\alpha, x) \mapsto y,$$

называется композицией α и x относительно этого закона. Элементы из Ω называются **операторами** внешнего закона.

§3. Групповая структура на множестве

Опр. 3.1. Алгебраическая структура G называется **группой** если выполняются следующие требования (аксиомы группы):

(а) ассоциативность: $\quad x * (y * z) = (x * y) * z;$

(б) нейтральный элемент: $\quad \exists\, e \in G : \quad \forall x \in G \quad x * e = x = e * x;$

(в) обратный элемент: $\quad \forall x \in G \quad \exists\, x^{-1} : \quad x * x^{-1} = e = x^{-1} * x;$

NtB 3.1. Отметим, что структура с законом композиции, который не является ассоциативным, называется *магмой*, ассоциативным - *полугруппой*. Если к тому же существует нейтральный элемент, тогда мы имеем дело с *моноидом*.

Пример 3.1. Ярким примером группы является *группа перестановок* некоторого множества из n элементов. Учитывая порядок этих элементов мы получаем последовательности чисел-индексов элементов вида $(1, 2, \ldots n)$. Множество операций по перестановке данных индексов образует, как нетрудно проверить, группу. Эта группа называется *симметрической группой порядка* n. Такую группу обозначают, как правило, S_n.

Пример 3.2. Другим ярким примером группы является группа симметрий правильных n-угольников D_n. Это - группа преобразований, которые переводят правильный n-угольник в себя. Также нетрудно убедиться, что все аксиомы группы выполнены.

NtB 3.2. Групповая структура является *минимальной* структурой, для которой уравнение вида

$$a * x = b,$$

имеет решение относительно x при любых a и b.