Комплексные числа

Содержание

§1. История комплексных чисел

Прежде формального определения понятия "комплексное число"обратимся к тому как этот объект появился исторически. Рассмотрим кубическое уравнение:

$$x^3 = 15x + 4$$

Из формул Кардано для уравнений такого типа следует, что решение может быть найдено в виде:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{Q}},$$

где $Q = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{3}\right)^3$, а числа b и k соответствуют коэффициентам в уравнении более общего вида

$$x^3 = kx + b$$

При подстановке чисел из примера, получаем $Q = -121$ и тогда

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Попробуем не смутиться тем, что под квадратным корнем находится отрицательное число и найдем результат извлечения кубического корня. Предположим следующее

$$\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1}$$

Давайте убедимся в этом, проверив равенство со знаком "+".

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Второе равенство, со знаком "$-$" доказывается аналогично. Тогда для решения исходного уравнения получаем, что

$$x = \left(2 + \sqrt{-1}\right) + \left(2 - \sqrt{-1}\right) = 4$$

Результатом суммы двух таких "странных" корней стало обычное действительное число, которое мы и желали получить. В этом можно убедиться, построив графики кубической параболы и прямой, стоящей в правой части уравнения из примера.

Такие числа, числа с корнями из отрицательных чисел, с подачи Декарта начали называть мнимыми (лат. imaginarius). Позднее Эйлером было введено специальное обозначение, к которому мы в дальнейшем придем.

$$\sqrt{-1} = i$$

§2. Поле комплексных чисел

Опр. 2.1. Комплексным числом называется элемент z декартова произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$z = (a, b), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

снабженного двумя операциями, *индуцированными* из $\mathbb{R}$:

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$;

NtB 2.1. Для множества комплексных чисел имеется специальное обозначение:

$$\mathbb{C} = \left\{(a, b) : \quad a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

NtB 2.2. Для всех комплексных чисел выполняется свойство

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2.$$

NtB 2.3. В дальнейшем будем предполагать, что множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ вложено в $\mathbb{C}$. Для этого мы утверждаем, что комплексное число вида $(a, 0) \in \mathbb{C}$ однозначно соответствует числу $a \in \mathbb{R}$.

Перечислим свойства операций сложения и умножения комплексных чисел:

(а) **Ассоциативность сложения.**

$$((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a, b) + ((c, d) + (e, f))$$

(б) **Коммутативность сложения.**

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$$

(в) **Существование нулевого элемента.** Нулевым элементом называют такой элемент, который не изменяет другой при операции сложения. В множестве комплексных чисел таковым является $(0,0)$. Действительно,

$$\exists\,(\alpha,\beta)\colon\ (a,b)+(0,0)=(a,b)$$

(г) **Существование противоположного элемента.** Противоположным элементом к элементу (a,b) называют такой элемент, который в сумме с (a,b) дает нулевой элемент.

$$\exists\ (\alpha,\beta) : (a,b)+(\alpha,\beta)=(0,0)$$

Из этого требования следует, что $\alpha=-a$ и $\beta=-b$. Следовательно противоположным элементом к (a,b) будем называть элемент $(-a,-b)$. Можно заметить, что он получается путем умножения комплексного числа (a,b) на число -1. Это позволяет определить операцию разности родственную сложению как

$$(a,b)-(c,d)=(a,b)+(-1)(c,d)=(a,b)+(-c,-d)=(a-c,b-d)$$

(д) **Ассоциативность относительно операции умножения.**

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f)=(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))$$

(е) **Коммутативность относительно операции умножения.**

$$(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b)$$

(ж) **Существование единицы.** Единичным элементом, единицей, называют такой элемент, который не меняет комплексное число при умножении на него.

$$\exists\,(\alpha,\beta)\colon\ (a,b)\cdot(\alpha,\beta)=(a,b)$$

Можно предположить, что по аналогии с нулевым элементом, единичным будет $(1,1)$, но можно также предположить, что это будет вещественная единица $1\leftrightarrow(1,0)$.

Воспользуемся определением произведения двух чисел.

$$(a,b)\cdot(\alpha,\beta)=(a\alpha-b\beta,a\beta+b\alpha)=(a,b)$$

Это равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases}a\alpha-b\beta=a\\ a\beta+b\alpha=b\end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $\alpha=1$ и $\beta=0$ в предположении, что a и b ненулевые. Соответственно единичным элементом множества комплексных чисел является элемент $(1,0)$.

(з) **Существование обратного элемента.** Обратный элемент — это такой, который при умножении на исходное комплексное число дает единицу.

$$\exists\,(\alpha,\beta)\colon\ (a,b)\cdot(\alpha,\beta)=(1,0)$$

Найдем обратный элемент.

$$(a,b)\cdot(\alpha,\beta)=(a\alpha-b\beta,a\beta+b\alpha)=(1,0)$$

Приведем равенство комплексных чисел к равенству вещественных и мнимых частей.

$$\begin{cases}a\alpha-b\beta=1\\a\beta+b\alpha=0\end{cases}$$

Чтобы в самом начале не делать никаких предположений о числах a и b, которые необходимы для того чтобы выразить например a из второго уравнения, поступим следующим образом. Домножим первое уравнение на a, а второе на b и сложим их.

$$a^2\alpha+b^2\alpha=a$$

Следовательно, вещественная часть обратного комплексного числа равна

$$\alpha=\frac{a}{a^2+b^2}$$

Подставляя его во второе равенство для мнимой части, получаем

$$\beta=\frac{-b}{a^2+b^2}$$

Мы получили общий вид для обратного элемента:

$$(\alpha,\beta)=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

Здесь важно сделать несколько замечаний. Во-первых, мы не можем вычислить обратный элемент для нулевого. Это следует напрямую из найденного способа нахождения обратного элемента. Во-вторых, обратный элемент определяется единственным образом.

Опр. 2.2. Множество вместе с введенными на нем операции и обладающее перечисленными выше свойствами, называется полем.

NtB 2.4. Множество рациональных, действительных и, как было показано, комплексных чисел представляют собой примеры поля.

§3. Формы комплексных чисел

Алгебраическая форма

Опр. 3.1. **Алгебраической формой** комплексного числа $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ называется представление его в следующем виде:

$$z = a + ib,$$

где символ i называется **мнимой единицей** и обладает свойством $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$.

Опр. 3.2. Пусть $z = a + ib \in \mathbb{C}$ - комплексное число, тогда

- $\operatorname{Re} z \triangleq a$ называется **вещественной частью** числа z;
- $\operatorname{Im} z \triangleq b$ называется **мнимой частью** числа z;
- $\overline{z} = a - ib$ называется числом, **комплексно сопряженным** к z;
- $N(z) \triangleq z\overline{z} = a^2 + b^2$ называется **нормой** комплексного числа z;
- $|z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется **модулем** комплексного числа.

Тригонометрическая форма

Пример 3.1. Пару вещественных чисел (a, b), определяющих комплексное число z, можно интерпретировать как координаты некоторой точки на плоскости, которая называется *комплексной плоскостью.* Координаты на рассматриваемой плоскости - это *вещественная* Re и *мнимая* Im оси.

Опр. 3.3. **Аргументом** комплексного числа z (обозначается $\arg(z)$) называется направленный угол от оси Re до луча Oz, откладываемый против часовой стрелки с величиной, берущейся по модулю $2\pi k$.

Пример 3.2. Альтернативно паре (a, b) можно использовать пару (ρ, ψ), определяемую следующим образом:

$$a = \rho \cos \psi, \quad b = \rho \sin \psi,$$
$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|, \quad \cos \psi = a/|z|, \quad \sin \psi = b/|z|.$$

Пара (ρ, ψ) отвечает координатам точки z в *полярной системе координат.*

Опр. 3.4. **Тригонометрической формой** комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ называется представление его в следующем виде:

$$z = (\rho \cos \psi, \rho \sin \psi) = \rho(\cos \psi, \sin \psi).$$

Лемма 3.1. *Имеют место свойства:*

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Доказательство. Прямой проверкой убеждаемся, что

$$\rho_1(\cos\psi_1, \sin\psi_1) \cdot \rho_2(\cos\psi_2, \sin\psi_2) = \rho_1\rho_2(\cos(\psi_1+\psi_2), \sin(\psi_1+\psi_2)).$$

$\square$

Теорема 3.1. *(Формула Муавра) Пусть* $z \in \mathbb{C}$ *и* $n \in \mathbb{N}$, *тогда*

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg(z^n) = n \cdot \arg(z).$$

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n.

$\square$