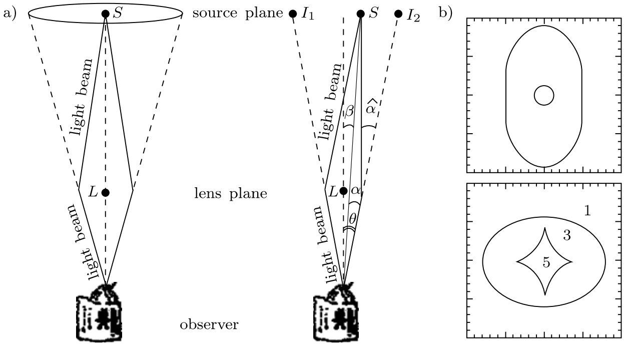
# Некорректные задачи астрофизики

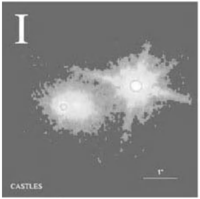
Факультет Космических Исследований, МГУ

Москва

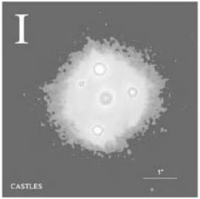
# Гравитацонное линзирование схема



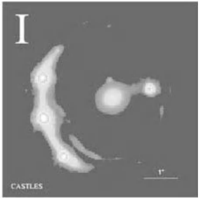
# Гравитацонное линзирование примеры




UM673




SDSS0924+0219




RXJ1131-1231

# Мат модель гравитацонного линзирования

Изображение, получаемое наземными телескопами искажается за счет атмосферных флуктуаций и аппаратной функцией телескопа:

$$Az = \iint k(x-\xi, y-\eta) z(\xi,\eta) d\xi d\eta = u(x,y).$$

где $z(\xi,\eta)$ - искомая функция распределения света звезды, $k(x-\xi, y-\eta)$ -функция искажения звезды (PSF - point spread function).

# Восстановление аппаратной функции

Аппаратная функция представляет собой отклик прибора на точечный источник

$$k(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\frac{x'^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y'^2}{2\sigma_y^2}\right),$$

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$

$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

В общем виде рассмотрим функцию

$$K(x,y) = a_1 k(x - x_0, y - y_0) + a_2.$$

Для поиска вектора параметров $\{\sigma_x, \sigma_y, x_0, y_0, \varphi, a_1, a_2\}$ достаточно воспользоваться методом наименьших квадратов.

# Регуляризующий алгоритм

Алгоритм состоит в поиске параметра регуляризации по принципу невязки

$$\rho(\alpha) = ||A[z_\delta^\alpha] - u_\delta|| \simeq \delta,$$

для тихоновского функцонала $M^\alpha[z] = ||A_h z - u_\delta||^2 + \alpha\Omega[z]$. Для поиска оптимального значения берется верхний предел для параметра $\alpha^{**} = \frac{M^2\delta}{||u_\delta||_{L_2}} - \delta$ последовательно вычисляются значения $\alpha^s = \alpha^{s-1}/10$. Процесс повторяется до тех пор, пока $\rho(\alpha^s) \leq \delta$. Как доказано алгоритм невязки сходится к точному решению и является оптимальным.

# Различные пространства решений

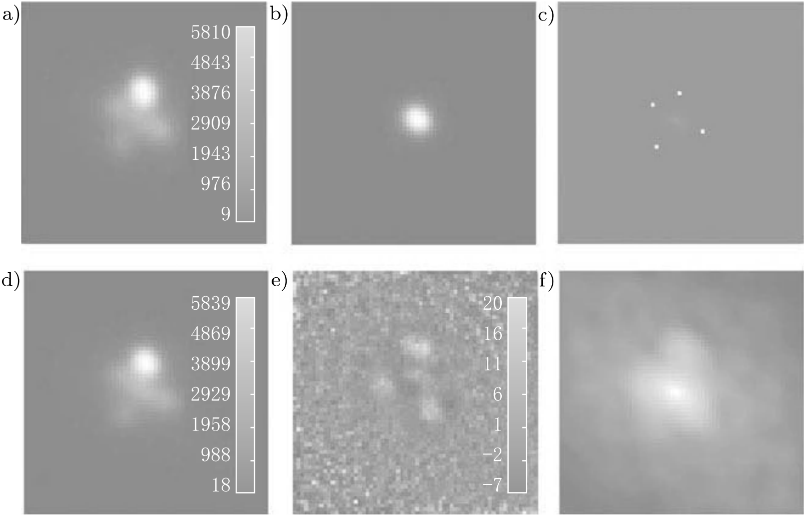
Пространство Соболева

$$\Omega[z] = \iint \left\{ z^2 + (\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})^2 + 2(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})^2 + (\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})^2 \right\} dxdy.$$

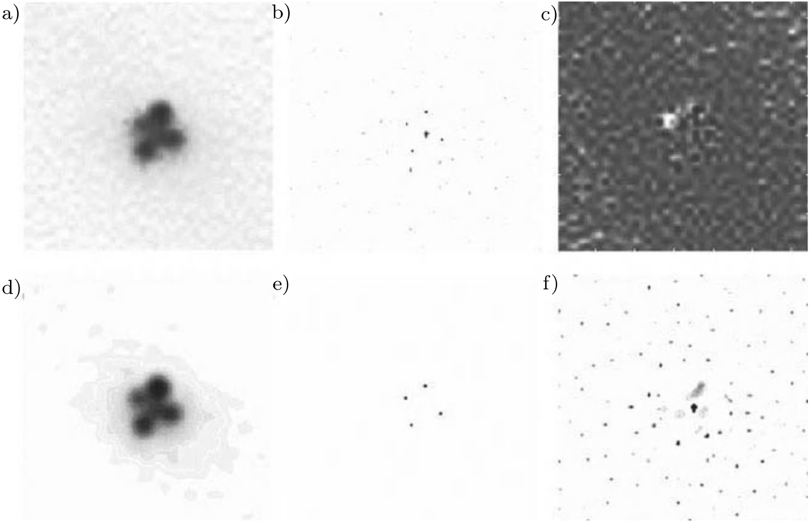
Пространство функций с ограниченной вариацией

$$V(z) = \sup \left( \sum_m \sum_n |z_{m+1,n+1} - z_{m+1,n} - z_{m,n+1} + z_{m,n}| \right).$$

# Решение в пространстве Соболева



# Решение в пространстве функций ограниченной вариации



# Модель микролинзирования

$$A(x, x_c) = \frac{k}{\sqrt{x_c - x}} H(x_c - x),$$

Распределение яркости источника

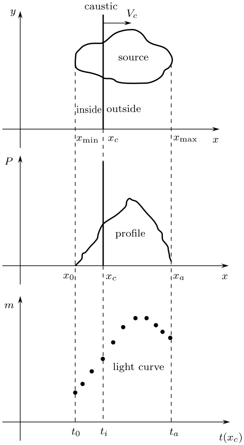
$$P(x) = 2 \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} I(x, y) dy,$$

Наблюдаемая кривая есть свертка яркости квазара и фактора увеличения

$$F_{tot} = A(x, x_c) * P(x).$$

В моделе также можно учесть интенсивность каустики от параметров линзы, данная неопределнность влияет на точность определения яркости источника.

# Схема микролинзирования



# Определение параметров орбит двойных звезд

Определим следдюущие велчины $P$ - период, $i$ - наклонение орбиты, $e$ - эксцентреситет, $\Omega_1$ - восходящий узел, $\pi$- периастр, $\omega$- угол из центра масс между направлением на восходящий узел и периастр. Проекция радиус вектора $r$ звезды на луч зрения равна

$$z(t) = r(t)\sin[v(t) + \omega]\sin i,$$

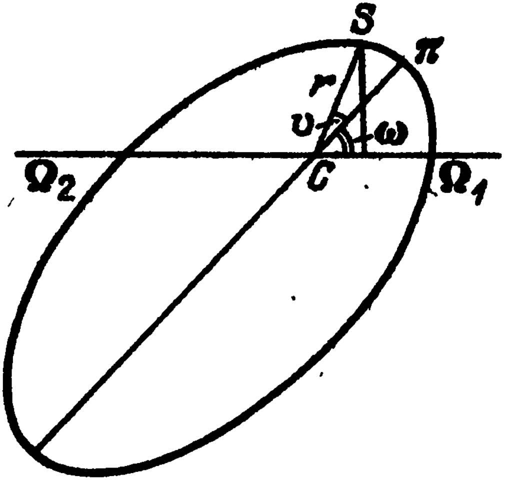
тогда для наблюдаемой лучевой скорость $V_r(t)$ и элементам орбаты устанавливается связь:

$$V_r(t) = \gamma + K[e\cos\omega + \cos(v(t) + \omega)],$$

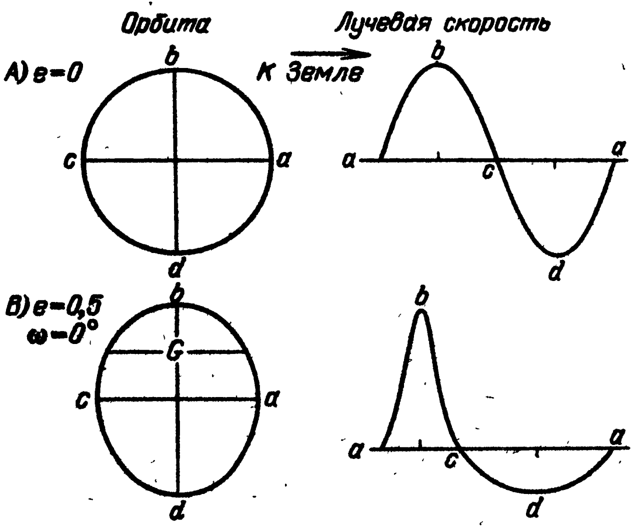
где

$$K = \frac{(V_r^{max} - V_r^{min})}{2} = \frac{2\pi a}{P}\frac{\sin i}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

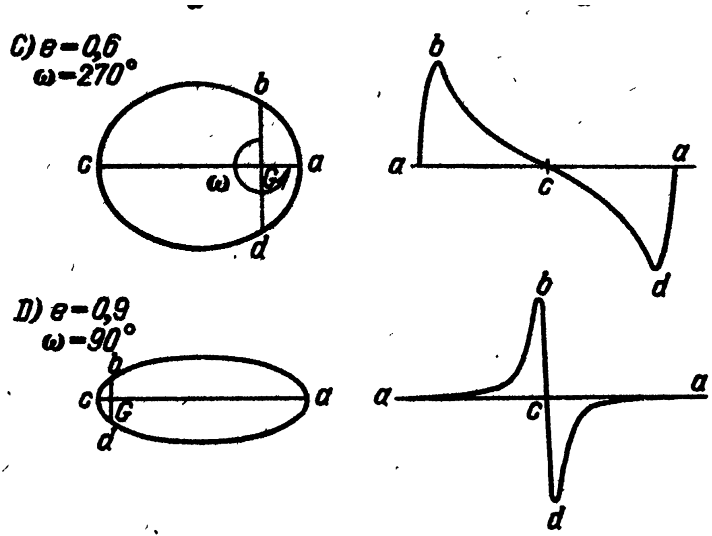
# Геометрия орбиты



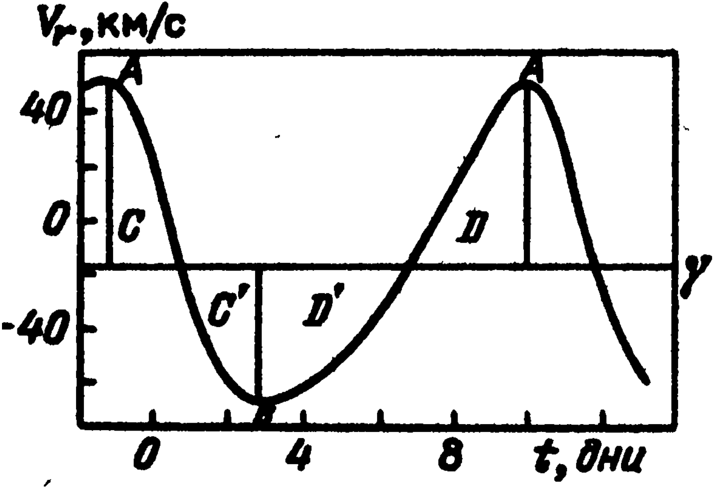
# Метод лучевых скоростей



# Метод лучевых скоростей



# Определение параметров орбиты



# Определение параметров орбиты

Обозначим модули экстримальных значений лучевых скоростей $A$, $B$, тогда по методу Лемана-Филеса

$$K = (A+B)/2 = \frac{2\pi \sin i}{P\sqrt{1-e^2}},$$

$$e\cos\omega = \frac{A-B}{A+B},$$

$$e\sin\omega = \frac{2\sqrt{AB}(z_D - z_C)}{(A+B)(z_D - z_C)},$$

в то же время в общем случае параметры орбиты можно получить методом наименьших квадратов

$$\Phi(\gamma, K, e, \omega) = \sum [V_r(t_j) - V_r^T(t_j, \gamma, K, e, \omega)]^2.$$

# Обратная задача интерпретации кивых блеска затменных двойных звезд

1. Эффект эллипсоидальности;
2. Эфект отражения или переработки излучения одной компоненты в атмосфере другой;
3. Затмение;

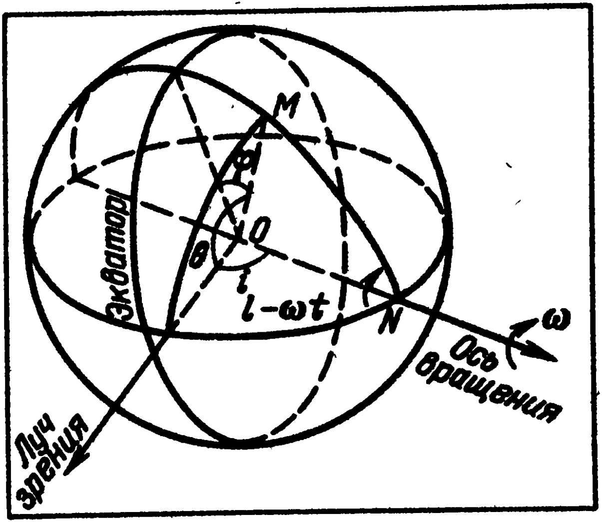
1. Компоненты системы сферически симметричны;
2. Орбита системы круговая;
3. Эффект отражения отсутствует;

# Картирование распределения элементов по поверхности звезд

Замечано периодическое изменение линий поглощения различных элементов в спектре звезд. Одна из причин - **неравномерное распределение элементов**.

Почему именно химический состав, а не физические условия? Спектральный состав непрерывного излучения и блеск звезд меняется слабо. Также за это говорит синхронность линий, соответствующих различной степени ионизации и асинхронность изменения линий различных элементов.

# Картирование распределения элементов по поверхности звездй



# Картирование распределения элементов по поверхности звезд

$$R(\lambda) = \frac{1}{N} \iint_{\cos\theta>0} f(\tau(M), \lambda + \triangle\lambda_D(M)) u_1(\theta) u_2(\theta) \cos\theta dM,$$

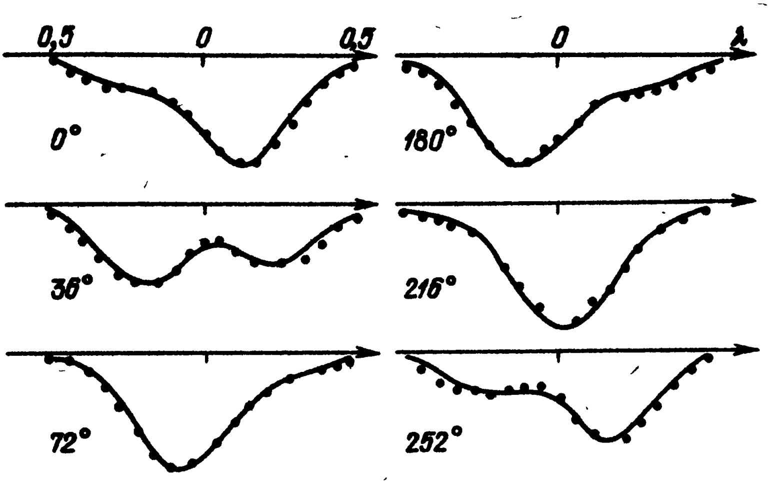
где

$$f(\tau, \lambda) = \left( \frac{1}{h(\tau)} + \frac{1}{\tau k(\tau)} \right)^{-1}.$$

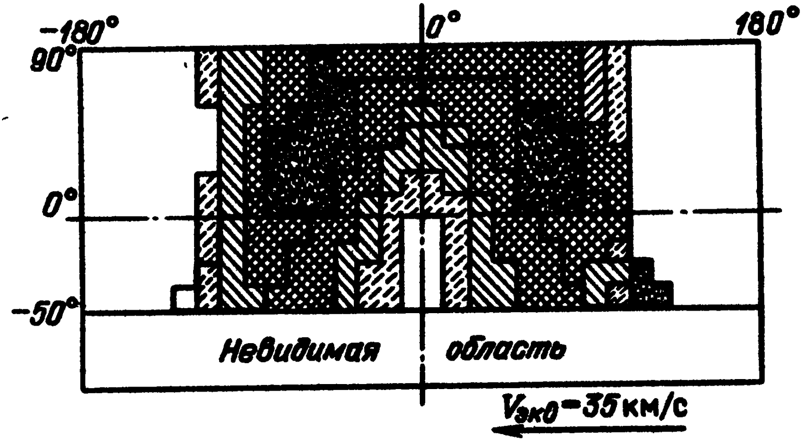
С учетом того, что звезда вращается, можно написать уравнение для различных фаз

$$R(\lambda, \omega t) = \frac{1}{N} \iint_{\cos\theta>0} f(\tau(M), \lambda + \triangle\lambda_D(M, \omega t)) H(M, \omega t) dM.$$

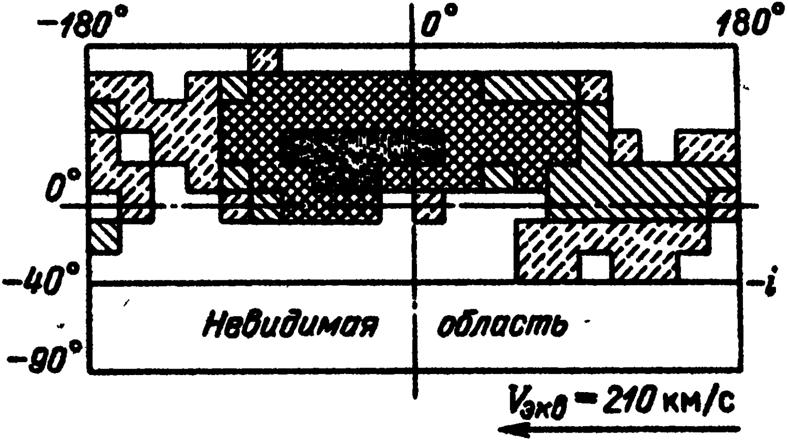
# Спектральные профили поглощения от всей звезды в разных фазах



# Картирование распределения элементов по поверхности звезды



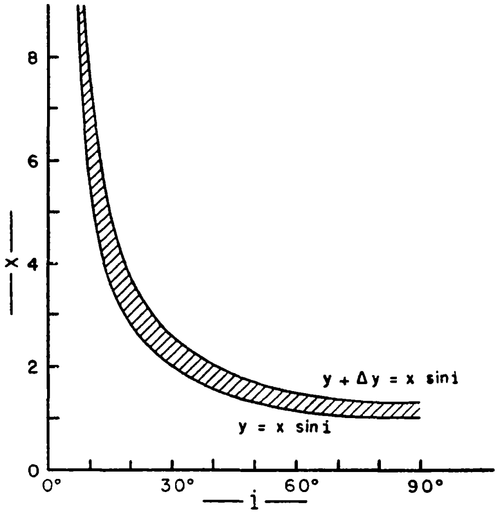
# Картирование распределения элементов по поверхности звезды



# Задача поиска распределения масс экзопланет

Метод **лучевых скоростей** наиболее простой способ получить информацию о массе экзопланеты, только в данном случае меряется проективная масса. Независимое получить массу планеты возможно затменным методом или методом астрометрическим. (в некоторых случаях даже нельзя точно быть уверенным, что наблюдаемый обьект - это планета).

# Распределение масс экзопаланет



# Распределение масс экзопаланет

Пусть планета имеет массу $x$, а склонение орбиты угол $i$, тогда наблюдаемая масса $y$ будет иметь вид: $y = x \sin i$, $y + dy = x \sin i$. Распределению исходных масс соответствует функция $\phi(y)$, а распределению проективных масс $f(x)$, тогда будет справедлива зависимость

$$\phi(y)dy = \iint_{\triangle S} f(x) \sin i dx di,$$

# Вывод уравнения связи двух масс

Произведем замену $dx = \frac{dy}{\sin i}$, интеграл преобразуется

$$\phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} f\left(\frac{y}{\sin i}\right) di$$

произведем замену $di = \frac{dy}{x \cos i}$,

$$\phi(y) = \int_{y = x \sin i} f(x) \frac{\sin i}{x \cos i} dx,$$

в результате имеем следующее интегральное уравнение Абеля

$$\phi(y) = y \int\limits_y^{\infty} \frac{f(x)}{x(x^2 - y^2)^{1/2}} dx$$

# Решение уравнения Аблея

При определенной замене переменных имеем уравнение Абеля

$$\Phi(\nu) = \int_0^{\eta} \frac{F(\xi)}{(\eta - \xi)^{1/2}} d\xi,$$

которое решается приенением обратного оператора Абеля

$$F(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\xi} \frac{\Phi(\eta)}{(\xi - \eta)^{1/2}} d\eta,$$

в исходных обозначениях

$$f(x) = -\frac{2}{\pi} x^2 \frac{\partial}{\partial x} x \int_x^{\infty} \frac{\phi(y)}{y^2 (y^2 - x^2)^{1/2}} dy.$$

# Байсовский подход 1

Байсовская теорема о условной вероятности ($y = xsini$)

$$f(x)\Pi(y|x) = \phi(y)R(x|y),$$

где $\Pi(y|x) = \frac{\sin i}{x \cos i}$ так что справедлива формула

$$f(x) = \int_0^x \phi(y)R(x|y)dy,$$

откуда можно определить итерационную процедуру

# Байсовский подход 2

Функция $R(x|y)$ - ядро уравнения обратного к исходному:

$$R(x|y) = \frac{f(x)\Pi(y|x)}{\phi(y)} = \frac{f(x)\Pi(y|x)}{\int_0^\infty f(x)\Pi(y|x)dx},$$

на основе указанных формул можно определить итерацинную процедуру:

$$f_{r+1}(x) = f_r(x)\int_0^x \frac{\phi(y)}{\phi_r(y)}\Pi(y|x)dy,$$

и

$$\phi_r(y) = \int_0^\infty f_r(x)\Pi(y|x)dx.$$

# Приближение гистограммы

Представим искомую функцию распределения в виде суперпозиции средних ядер:

$$\hat{f}(x) \approx \frac{1}{Nh} \sum K\left(\frac{x - X_n}{h}\right).$$

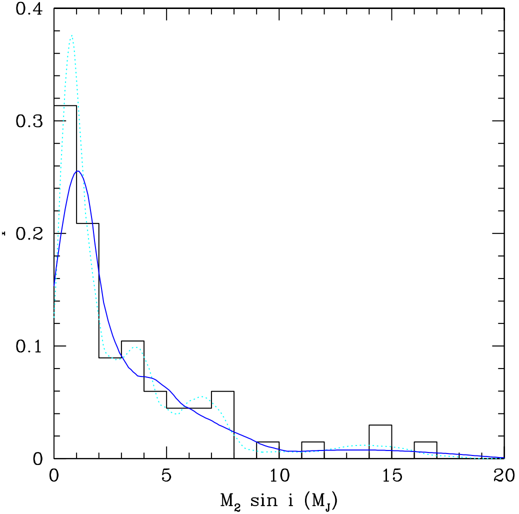
Пусть задано некоторое оптимальное значение шага $h_{opt}$, тогда можно ввести так называемые адаптивные ядра с переменным шагом

$$h_n = h(X_n) = h_{opt}[\tilde{f}(X_n)/s]^{-0.5},$$

где $\log s = \frac{1}{N} \sum \log \tilde{f}(X_n)$. Оптимальное приближение может быть найдено из минимума среднего квадратичного:

$$Resid(\hat{f}) = \int [\hat{f}(x) - f(x)]^2 dx.$$

# Распределение проекционных масс



# Восстановление распределения