П. С. Александров, Пуанкаре и топология, *УМН*, 1972, том 27, выпуск 1(163), 147–158

1972 г. январь—февраль *т. XXVII. вып, 1(163)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 92: 51

ПУАНКАРЕ И ТОПОЛОГИЯ[1])

П. С. Александров

На вопрос, каково отношение Пуанкаре к топологии, можно ответить одним предложением: он ее создал; но можно ответить и циклом лекций, в которых более или менее подробно излагались бы основные топологические результаты Пуанкаре. При первом из этих двух подходов к моей сегодняшней задаче я могу считать ее исчерпанной; для второго подхода я, естественно, не имею времени. Приходится искать то или иное промежуточное компромиссное решение — неудачное, как все компромиссы, и во всяком случае более близкое к первому варианту, чем ко второму; это решение может являться лишь попыткой возобновить и освежить эмоцию восхищения актом грандиозного научного творчества, который совершил великий французский геометр в области, влияние которой на все математическое познание не только превзошло все предвидения современников, но все еще возрастает с каждым годом.

Пуанкаре жил в романтическую эпоху истории математических наук, когда впервые (им самим и Ф. Клейном) была доказана непротиворечивость неевклидовой геометрии, вследствие чего наши воззрения на геометрию и самое понятие геометрического пространства несказанно расширились; когда новые геометрические идеи только что нашли свое применение (в том числе опять-таки в работах самого Пуанкаре) к специальной теории относительности — теории, уже достаточной, чтобы поколебать наши представления о мироздании, казавшиеся незыблемыми со времен Галилея и Ньютона; в эпоху, когда в абстрактных глубинах самой математики возникла теория — по мнению многих выдающихся математиков лежащая уже вне их науки, быть может, даже вне науки вообще — теория множеств, осуществившая в математике переворот столь же значительный, как переворот, произведенный в физике теорией относительности.

По своим математическим вкусам и по унаследованным им традициям, Пуанкаре был представителем классической математики — великой

[1]) Эта статья является свободным изложением речи, произнесенной автором (под этим же заглавием) на посвященном столетию со дня рождения Пуанкаре торжественном выездном заседании (в Гааге) Международного математического конгресса (Амстердам, 1954).

французской школы математического анализа, созданной Лагранжем, Лапласом, Коши. Пуанкаре представлял математический анализ в универсальном понимании этого слова, включающем и теорию функций, и все аспекты дифференциальных уравнений, и «математическую физику» в самом широком смысле. И универсальность Пуанкаре как математика отразилась в том, каким именно образом он создал новую область математики — топологию. Для Пуанкаре топология сначала и прежде всего была могущественным инструментом для решения проблем, возникающих в классических отделах математики. Ими были в первую очередь: теория функций комплексного переменного, тесные связи которой с геометрией, лишь в зародыше усмотренные Риманом, Пуанкаре впервые понял во всей их глубине; теория дифференциальных уравнений — теория, неотделимая для Пуанкаре от небесной механики; сама геометрия. Но понимая мощь топологических методов в «классической математике» и часто предвидя ее там, где в его время эти методы еще не могли быть во всю их силу применены, Пуанкаре открыл для математики и целый мир новых проблем — проблем «качественного», т. е. именно топологического характера, целый мир по своему существу недоступный не только методам, но и самому, если так можно выразиться, мировоззрению «классической» математики, в центре которой находились формула и вычисление (т. е. техника оперирования с формулами). Таким образом, величайший представитель классической математики — Пуанкаре, как никто другой, «взорвал изнутри» ее традиции и открыл доступ в нее не только новым методам исследования, но и — что может быть еще важнее — новым способам видеть вещи и интересоваться ими.

Поясним немного только что сказанное. Всякое математическое творчество в конечном счете имеет своей основой нашу (математическую) интуицию. Продолжительное, упорное и сосредоточенное размышление в конце концов приводит (к более или менее внезапному) усмотрению существа тех закономерностей, на разыскание которых были направлены наш труд и размышление. Цель последующего исследования — часто также очень кропотливого — в проверке происшедшего усмотрения, в проверке нашей интуиции, которая (если она подтвердится этой проверкой) и окажется настоящим ядром полученного результата. Никто лучше не изложил этот механизм математического творчества, чем это сделал Пуанкаре в своих книгах «Наука и метод», «Наука и гипотеза». Но характер математической интуиции отнюдь не является одним и тем же во всех случаях и у всех математиков: интуиция Якоби была не похожа на интуицию Гильберта, а интуиция Вейерштрасса — на интуицию Пуанкаре.

Вероятно, существует то, что можно было бы назвать «интуицией формулы»: способность предвидеть результат сложного преобразования (например, в тензорном анализе). Существует и интуиция алгебраически-логического характера — ви́дение (и предвидение) сложных логических соотношений (например, в теории множеств в абстрактной алгебре). И наконец (вернее, прежде всего) существует геометрическая интуиция, иногда о ней говорят, как об единственно существующей в математике «подлинной» интуиции. Я думаю, что это неверно и что действительно существуют различные виды математической интуиции даже и за пределами тех немногих примеров, которые я назвал.

«Топологическая» интуиция обычно считается частным случаем общегеометрической; однако этот частный случай обнаруживает сам по себе такое богатство и разнообразие различных возможностей и, с другой стороны, так сильно отличается от других видов геометрической интуиции, что, вероятно, заслуживает выделения в особую категорию. Интуиция тополога не связана с прямыми линиями, с перспективными преобразованиями и другими образами, столь фундаментальными, например, для проективного геометра. Топологическая интуиция — это интуиция формы и расположения фигур в чистом виде, чистая «Freude an der Gestalt», как говорил Клейн. Это — наиболее геометрическая среда всех разновидностей геометрической интуиции.

Пуанкаре владел ею как никто из математиков его времени и предшествующих эпох; может быть, только Риман мог соперничать с ним в этом отношении, но он не успел развить ее с такой широтой и разнообразием применений, как Пуанкаре.

Топологическая интуиция пронизывает большинство самых замечательных работ Пуанкаре — теорию автоморфных функций и униформизацию (это высшее торжество «римановского» подхода в теории функций комплексного переменного); качественную теорию дифференциальных уравнений — являющуюся, может быть, лучшей иллюстрацией того, как совершенно по-новому умел видеть Пуанкаре самые классические объекты математики и какой небывалой проблематике он умел их подчинить. И, наконец, конечно— весь цикл его собственно топологических работ.

Ничем иным как именно проявлением гениальной топологической интуиции был тот факт, что основной стержень для всего дальнейшего развития топологии Пуанкаре увидел в понятии гомологии. При этом первая формулировка этого понятия (в основном мемуаре 1895 г. «Analysis Situs») апеллировала именно к непосредственной геометрической наглядности, под которую лишь несколько лет спустя была подведена строгая логическая база.

Столь же интуитивным, хотя совершенно строго сформулированным, было второе основное топологическое понятие, введенное Пуанкаре — понятие фундаментальной группы. Введя это понятие, Пуанкаре оказывается зачинателем всего огромного направления гомотопической топологии, дальнейшим развитием которого мы обязаны прежде всего Брауэру, затем Хопфу (H. Hopf), Гуревичу и длинному ряду последующих математиков. Здесь следует заметить, что определение гомотопических групп, т. е. групп, обобщающих понятие фундаментальной группы на любое число измерений, было впервые дано в 1932 г. знаменитым чешским топологом Э. Чехом, который, правда, не подверг их дальнейшему исследованию; это последнее, как известно, составляет заслугу В. Гуревича.

К наиболее замечательным и наиболее рано разработанным частям гомотопической топологии относится теория векторых (и поливекторных) полей и их особенностей, тесно связанная с теорией неподвижных точек непрерывных отображений. Основателем этой теории опять-таки является Пуанкаре:

первые относящиеся к ней определения и факты, в частности, фундаментальное понятие индекса особенности векторного поля, он установил еще в восьмидесятых годах, в своих работах по качественной теории дифференциальных уравнений, т. е. еще до создания своих собственно топологических работ.

В настоящее время трудно переоценить фундаментальное значение этих идей и результатов Пуанкаре для всего дальнейшего развития не только теории дифференциальных уравнений, но и всего современного математического анализа.

В частности, что касается специально теорем о существовании неподвижных точек при тех или иных непрерывных отображениях, то Пуанкаре уже понимал значение этих теорем как средства доказательства теорем существования в анализе. Это видно хотя бы по тем огромным усилиям, которые он затратил на доказательство своей «последней геометрической теоремы» — о существовании неподвижной точки для определенного класса непрерывных отображений плоского кругового кольца на себя. Эта последняя работа Пуанкаре производит на читателя, я бы сказал, трагическое впечатление. В кратком введении к ней автор пишет, что никогда не публиковал столь несовершенного произведения — в самом деле, ему не удалось найти доказательство основного результата (последней геометрической теоремы Пуанкаре), которому работа посвящена. Тем не менее, Пуанкаре считал возможным и необходимым опубликование полученных им частных результатов — ввиду важности предмета, а также ввиду того, что, как он говорил, в своем возрасте он уже не надеется получить полное решение вопроса. В действительности Пуанкаре в это время было лишь 57 лет, и дело было, конечно, не в возрасте, а в уже начавшейся тяжелой болезни (в те времена почти недоступной хирургическому вмешательству), от которой он и умер год спустя.

В общем виде «последняя геометрическая теорема Пуанкаре» была вскоре после его смерти доказана — тогда молодым — американским математиком Дж. Д. Биркхофом, сразу прославившимся этим результатом. Но сейчас для нас важно констатировать, как глубоко мог Пуанкаре предвидеть значение топологических теорем типа «теорем о неподвижных точках» для анализа и для небесной механики, и отметить его как основоположника «метода неподвижных точек».

Сила геометрической интуиции Пуанкаре приводила иногда к тому, что он пренебрегал педантической строгостью доказательств. Тут есть еще и другая сторона: находясь под постоянным наплывом множества идей в самых различных областях математики, Пуанкаре «не успевал быть строгим», он часто бывал удовлетворен, когда его интуиция давала ему уверенность в том, что доказательство той или иной теоремы можно довести до полной логической безукоризненности, завершение доказательства предоставлял другим. Среди «других» бывали математики самого высокого ранга. Я привожу письмо Пуанкаре к Брауэру (относящееся к последнему году жизни Пуанкаре и, насколько я знаю, еще нигде не опубликованное), которое, как мне кажется, хорошо иллюстрирует только что приведенную мысль.

ПИСЬМО ПУАНКАРЕ К БРАУЭРУ

Mon cher Collègue,

je vous remercie beaucoup de votre lettre; je ne vois pas pourquoi vous doutez que la correspondance entre les deux variétés soit analytique; les modules des surfaces de Riemann peuvent s'exprimer analytiquement en fonctions des constantes des groupes fuchsiens; il est vrai que l'on ne doit donner à certaines variables que des valeurs réelles, mais les fonctions de ces variables réelles n'en conservent pas moins le caractère analytique.

Ou bien la difficulté provient elle à vos yeux de ce que l'une de ces variétés dépend non des constantes du groupe mais bien des invariants. Si je me rappelle bien, j'envisageais une variété dépendant des constantes des substitutions fondamentales du groupe; à un groupe correspondera alors une infinité discrète de points de cette variété; je subdivisaia ensuite cette variété en variétés partielles, de telle façon, qu'a un groupe corresponde un seul point de chaque variété partielle (de la même façon que l'on décompose le plan en parallelogrammes des périodes, ou bien le cercle fondamental en polygones fuchsiens). Le caractère analytique de la correspondance ne m'en semble pas altéré.

En ce qui concerne la variété des surfaces de Riemann on peut être embarassé si l'on considère ces surfaces de la façon de Riemann; on pourrait se demander par exemple si l'ensemble de ces surfaces ne forme pas *deux* variétés séparées. La difficulté disparaît dès que l'on envisage ces surfaces *au point de vue de M. Klein*; la continuité, l'absence de singularités, la possibilité de passer d'une surface à l'autre d'une manière continue deviennent alors des vérités presque intuitives.

Je vous demande pardon de la façon découpée et du desordre de ces explications; je n'espère pas qu'elle vous satisfassent par ce que je vous les ai très mal présentées; mais je pense qu'elles vous ameneront à préciser les points que vous embarassent de façon que je puisse ensuite vous donner enrière satisfaction. Je suis heureux d'avoir cette occasion d'entrer en rapport avec un homme de votre valeur.

Votre bien dévoué collègue
POINCARÉ

Дорогой коллега,

я очень благодарен Вам за Ваше письмо; но я не вижу, почему Вы сомневаетесь, что соответствие между двумя многообразиями является аналитическим; модули поверхностей Римана могут выражаться аналитически через константы фуксовых групп; правда, надо придавать некоторым переменным лишь вещественные значения, но функции этих вещественных переменных вовсе не потеряют своего аналитического характера.

Но, может быть, Вы видите трудность в том, что одно из этих многообразий зависит не от констант группы, а от инвариантов. Если мне не изменяет память, я рассматривал многообразие, зависящее от констант фундаментальных подстановок группы; группе будет тогда соответствовать дискретная бесконечность точек этого многообразия; я подразделил затем это многообразие на частичные многообразия таким образом, чтобы одной группе соответствовало по одной точке в каждом из этих частных многообразий (таким же образом, каким разбивают плоскость на параллелограммы периодов или фундаментальный круг на фуксовы многоугольники). Мне кажется, что при этом [не] может нарушиться аналитический характер соответствия.

Что касается многообразия поверхностей Римана, то можно встретиться с затруднениями, если их рассматривать так, как это делал сам Риман. Можно, например, задать себе вопрос, не образует ли множество этих поверхностей *два* раздельных многообразия. Трудность исчезает, если рассматривать эти поверхности *с точки зрения Клейна*; непрерывность, отсутствие особенностей, возможность перейти от одной поверхности к другой непрерывным образом превращаются тогда в истины почти интуитивные.

Я прошу у Вас извинения за отрывочный и беспорядочный характер этих объяснений: я не надеюсь, что они Вас удовлетворят, потому что я очень плохо их изложил; но думаю, что они дадут Вам возможность уточнить те места, которые Вас затрудняют, с тем чтобы я мог потом вполне Вас удовлетворить. Я счастлив, что это обстоятельство дает мне возможность войти в контакт с человеком Ваших достоинств.

Ваш преданный Вам коллега
Пуанкаре

Дата [по почтовому штемпелю] — 10 декабря 1911 г.

Приведенное письмо интересно не только как иллюстрация к некоторым чертам творческой манеры Пуанкаре; оно показывает также, что Пуанкаре был высокого мнения о математических, а именно — топологических работах Брауэра. Речь может идти лишь о работах Брауэра, относящихся к двухлетию 1909—1911 гг. Очевидно, Пуанкаре не только хорошо знал эти работы в конце 1911 г. (когда написано его письмо), но и ценил их глубину. Между тем, топологические работы Брауэра написаны в высшей степени трудно, и уж совсем не в классическом стиле. Следовательно, Пуанкаре даже в последний год своей жизни нашел в себе достаточно энергии и любознательности, чтобы овладеть математическими результатами и методами, относящимися к совсем другой манере математического творчества, чем его собственная,— черта, свойственная только самым большим ученым! Этой чертой Пуанкаре обладал в течение всей своей жизни. В 1883 г. Г. Кантор построил совершенно нигде не плотное (на отрезке) множество, носящее его имя («канторов дисконтинуум»). Это было гениальное открытие не только по тому значению, которое канторово множество приобрело во всей математике, но и потому, что в математику вошла совершенно новая конструкция, непохожая ни на что, известное в науке до того. Кантор увидел геометрический образ, ыходивший за пределы того, что считалось подвластным геометрической интуиции, небывало расширив этим его горизонты, самые возможности нашего пространственного воображения. Он показал впервые, что эти возможности могут простираться на образования, относящиеся к той самой теории множеств, даже принадлежность которой к математике оспаривалась видными и уважаемыми учеными (например, Кронекером). И вот Пуанкаре был не только одним из первых математиков, воспринявших открытие Кантора; он был положительно первым математиком, применившим его к конкретно-аналитическим исследованиям — как говорят химики — in statu nascendi — в самый момент зарождения этого нового, столь непохожего на на всю старую науку математического «существа».

Многие выдающиеся математики сделали те или иные замечательные специальные конструкции, идя по новому пути геометрической интуиции, проложенной Кантором,— Брауэр построил свои первые примеры неразложимых континуумов, Антуан — свои поразительные дуги, фундаментальная группа дополнительного пространства к которым отлична от нуля, Александер — свои «рогатые» сферы — и множество других исследователей. Но первый шаг сделал Кантор, а Пуанкаре был первым, кто понял не только значительность этого первого шага, но и его плодотворность для математического анализа, а с ним и для всей математики. Заметим наконец, что, как показывает последний мемуар Пуанкаре,— он к концу своей жизни в значительной степени владел техникой геометрической теории множеств, как она сложилась к тому времени.

Вернемся к введенному Пуанкаре понятию гомологии. Как уже было упомянуто, что понятие было введено в первом топологическом мемуаре Пуанкаре — в знаменитом «Analysis Situs»— интуитивным образом. Однако в данном случае этот недостаточно строгий подход имел, так сказать, и фактические последствия, послужившие поводом к обоснованной критике норвежского математика Хегора (Heegaard). Дело в том, что в своем первом мемуаре Пуанкаре не обратил должного внимания на феномен кручения, ограничившись в основном числами Бетти. Но он блестяще восполнил допущенный пробел в своих последующих публикациях по топологии (в «Дополнениях к «Analysis Situs»). При этом Пуанкаре стал на комбинаторскую точку зрения, введя понятие симплициального разбиения (триангуляции) многообразия, т. е. понятие симплициального комплекса, и создал таким образом основной метод комбинаторной топологии. Вероятно, Пуанкаре считал интуитивно ясным, что введенные им гомологические характеристики многообразия (и вообще полиэдра [1])) не могут зависеть от выбора той или иной триангуляции этого полиэдра. Однако, как мы знаем, этот факт является глубокой и трудной теоремой топологии. Для ее доказательства, кроме понятия сколь угодно мелкого подразделения данной триангуляции, которым Пуанкаре, конечно владел, нужно было еще (опирающееся на понятие подразделения) понятие симплициального (т. е. кусочно линейного) приближения непрерыв-

[1]) Я употребляю здесь слово полиэдр в его современном смысле, т. е. множества, допускающего разбиение на симплексы; сам Пуанкаре употреблял слово полиэдр в том смысле, в каком теперь употребляют слово «комплекс».

ного отображения (являющееся обобщением приближения непрерывной кривой вписанной в нее ломаной) и тот или иной эквивалент понятия степени отображения (т. е. кратности, с которой при данном непрерывном отображении — скажем, симплекса X на симплекс Y или одного многообразия X на другое многообразие Y той же размерности,— многообразие Y покрывается образом многообразия X). Оба эти фундаментальные понятия были введены Брауэром в 1911 г., т. е. накануне смерти Пуанкаре; при их помощи Брауэр доказал свои знаменитые теоремы о топологической инвариантности числа измерений n-мерного многообразия и об инвариантности внутренних точек для множеств, лежащих в нем; общую теорему Жордана (в n-мерном случае); теоремы о неподвижных точках и др. Однако самую теорему об инвариантности гомологических характеристик полиэдра Брауэр не доказал, хотя и владел всеми необходимыми для этого средствами; это впервые сделал в 1915 г. знаменитый американский тополог Александер.

Доказательство теоремы инвариантности было первым существенным шагом в дальнейшем развитии созданной Пуанкаре теории гомологии. Следующий шаг, в отличие от первого, не был связан с преодолением конкретных математических трудностей, но имел тем не менее большое принципиальное значение. Он был сделан знаменитой алгебраисткой Эмми Нётер (в 1925—1926 гг.) и заключается в замене числовых гомологических характеристик, данных Пуанкаре — чисел Бетти и коэффициентов кручения — одним понятием группы Бетти (или, как теперь предпочитают говорить — гомологической группы). Некоторые выдающиеся топологи — например, Лефшец — на первых порах скептически отнеслись к нововведению, предложенному Нётер, считая его лишь формальным (действительно, казалось бы, нет существенной разницы, говорить ли непосредственно о группе Бетти полиэдра или о вполне определяющей ее совокупности числовых характеристик — ее ранге, т. е. числе Бетти и ее коэффициентах кручения). Однако уже ближайшие исследования показали, что речь идет не о словах.

В частности, и прежде всего, при старом подходе, без понятия гомологических групп, невозможно было бы развитие одной из замечательнейших топологических теорий — теории топологической двойственности, первые основы которой были заложены самим Пуанкаре и которая далее развилась в новых направлениях и аспектах Александером, затем — во всей ее глубине Понтрягиным и другими математиками.

Без понятия группы Бетти невозможно себе представить и двух дальнейших существенных продвижений теории гомологии. Первое состоит в перенесении гомологических понятий на более общие геометрические образцы, чем полиэдры, и прежде всего на компакты. Оно стало возможным вследствие общего аппарата аппроксимации самых сложных топологических образований (компактов, бикомпактов и еще более общих топологических пространств) комбинаторно-топологическими построениями комплексами, которое было начиная с 1926 г. осуществлено автором этого изложения посредством так называемых проекционных спектров (подвергавшихся затем различным обобщениям и вариациям). Этот аппроксимационный процесс основывается на введенном тем же автором понятии нерва покрытия данного пространства и дает возможность перенести, практически на любые топологические пространства, основные понятия комбинаторной топологии [1]).

Другим фундаментальным прогрессом в теории гомологии было введение — Дж. Александером и А. Н. Колмогоровым в 1934—1935 гг. — «верхних» гомологий, называемых теперь когомологиями. Из гомологических и когомологических групп, область определения и применимости которых все время расширялась, возникла наконец новая математическая дисциплина — гомологическая алгебра, существенно определяющая лицо значительной части современной математики...

Даже в самом кратком высказывании на тему моего сегодняшнего выступления я не мог бы обойти молчанием знаменитую популярную статью Пуанкаре «Почему пространство имеет три измерения?» («Pourquoi l'espace a trois dimensions»), напечатанную в известном французском журнале «Revue de Métaphisique et de Morale».

Статья эта замечательна тем, что в ней более в литературной чем в строго научной форме — ставится проблема и излагается идея одного из основных понятий теоретико-множественной топологии — проблема и идея общего индуктивного определения размерности; идея Пуанкаре заключается в том, что если пространство имеет размерность n, то его можно разбить на (сколь угодно мелкие) части посредством подпространств размерности $n-1$. Первым математиком, который этим очень неопределенным наглядным высказываниям Пуанкаре придал (в работе 1913 г.) строгую и законченную форму, был Брауэр. Таким образом, Брауэр явился основателем обширной области теоретико-множественной топологии, развитой Менгером и (главным образом) П. С. Урысоном, и известной в настоящее время под названием общей теории размерности. В настоящий момент нам однако, важно подчеркнуть, что идея общего понятия размерности восходит к Пуанкаре и дает нам новое доказательство исключительной силы его геометрической интуиции, захватившей на этот раз и область теоретико-множественных понятий. Заметим в заключение, что свое полное развитие общая теория размерности получила после того, как мною была построена в 1928—1932 гг. так называемая гомологическая теория размерности, подчинившая понятие размерности понятию гомологии и включившая, таким образом, теорию размерности в общую гомологическую топологию.

Я начал свое изложение с замечания, что Пуанкаре жил в эпоху, когда в математике рождались идеи, поражающие наш ум силой своей применимости к познанию мира, а также своей способностью как бы внезапно расширять горизонты самой математики; наконец, своей красотой и внутренним совершенством.

Математические идеи, рождающиеся в наше время, столь же (если не более) могущественны, и, может быть, столь же прекрасны. Они не могли бы, однако, развиться, если бы у их колыбели не стояли открытия Пуанкаре.

---

[1]) Кстати, самые первые истоки моего понятия нерва лежат в том, что Пуанкаре называл полиэдром, взаимным к данному («polyèdre réciproque»).

В своем знаменитом «Изложении системы мира» Лаплас однажды сказал, что астрономия по величию ее предмета и совершенству ее теорий является лучшим памятником, воздвигнутым разумом человека, прекраснейшим проявлением его интеллекта.

Такие математики как Пуанкаре побуждают нас к тому, чтобы распространить слова Лапласа также и на математику и дать ей право соперничать с астрономией в отношении величия ее предмета и во всяком случае совершенства ее теорий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О ПИСЬМЕ ПУАНКАРЕ К БРАУЭРУ

В. К. Зорич

К сожалению, мы не располагаем письмом Л. Брауэра, на которое отвечает А. Пуанкаре, но о содержании его все-таки можно с достаточной степенью доказательности, а потому и уверенности, судить, с одной стороны, по письму А. Пуанкаре, а, с другой, по тематике работ Л. Брауэра [1]—[4], относящихся к этому периоду.

Ключом здесь может служить доклад Л. Брауэра [3], сделанный им 27 сентября 1911 г. на заседании Немецкого математического общества и посвященный обоснованию «метода непрерывности» (Kontinuitätsmethode) в теории автоморфных функций. Л. Брауэр говорит:

«...Пуанкаре ([7], стр. 368—370) проводит доказательство существования линейно-полиморфной функции на римановой поверхности методом непрерывности, молчаливо предполагая выполненными следующие два утверждения:

Теорема 1. *Классы* [по конформной эквивалентности — В. З.] *римановых поверхностей рода g образуют* ($6g$ — 6)*-мерное многообразие без особенностей...*

Теорема 2. *Взаимно однозначный и непрерывный образ n-мерной области в n-мерном многообразии снова является областью.*

Благодаря небольшому видоизменению метода можно избежать применения теоремы 1. .. и, таким образом, свести все к обоснованию теоремы 2 — теоремы об инвариантности областей, доказательство которой я опубликую в ближайшем будущем [4]».

Таким образом, очевидно, Л. Брауэр обратился к А. Пуанкаре за разъяснениями по поводу метода непрерывности, которым он пользовался в в работе [7].

Чтобы пояснить ответ А. Пуанкаре, целесообразно предварительно сказать несколько слов о методе непрерывности.

Этот метод, отличающийся геометрической наглядностью и в то же время большой общностью, родился на вершинах теории автоморфных функций одного комплексного переменного. К нему пришли одновременно Ф. Клейн и А. Пуанкаре.

В работе [5] Р. Фрике пишет по этому поводу:

«Клейн развил свои идеи о доказательстве по непрерывности в работе [6] (стр. 704). С другой стороны, Пуанкаре в работе [7] (стр. 329) обсуждает тот же вопрос, и при первом же близком рассмотрении существа дела вскрывает исключительное значение, глубину и трудности такого рода доказательств и вместе с тем указывает идеи для преодоления этих трудностей».

Вот ясное изложение идеи метода непрерывности, принадлежащее перу А. Пуанкаре ([7], стр. 330):

«Пусть каждой точке m (многообразия) S поставлена в соответствие точка m' (многообразия) S' таким образом, что координаты m' являются аналитическими функциями координат m, если m не лежит на краю многообразия S в случае, когда S им обладает. Предположим, что каждой точке S' поставлено в соответствие не более одной точки S. Если S — *замкнутое многообразие*, то можно быть уверенным, что каждой точке S' соответствует точка S. Если же S — открытое многообразие с краем — границей, то нельзя ничего утверждать... Это как раз то обстоятельство, которым Клейн пренебрег. Тут имеются трудности, с которыми нельзя расправиться в двух словах».

В качестве одной из трудностей для применения метода непрерывности в теории автоморфных функций Ф. Клейн ([6], стр. 704) отмечает доказательство *аналитичности* конструируемого им соответствия. Он пишет ([6], стр. 704): «Для дальнейшего мне понадобится утверждение, в справедливости которого я не сомневаюсь, но которое не может иметь совсем короткого доказательства. Речь идет о том, что связь между многообразиями M_1 и M_2 является аналитической. Я не сомневаюсь, что это будет доказано при дальнейшем развитии таких доказательств существования... Если же тут возникнут затруднения, то можно воспользоваться установленными Пуанкаре формулами связи между M_1 и M_2».

Сопоставляя приведенные выше выдержки из доклада Л. Брауэра с высказываниями А. Пуанкаре и Ф. Клейна, можно понять, что основной вопрос, с которым Л. Брауэр обратился к А. Пуанкаре, был вопрос об аналитичности отображения; ответу на этот вопрос посвящена первая часть письма А. Пуанкаре. С точки зрения топологии это, в сущности, и есть вопрос об открытости отображения, используемого в методе непрерывности.

Что же касается второй части письма Пуанкаре (впрочем, тесно связанной с первой), где он поясняет сформулированную выше Л. Брауэром теорему 1, то, следуя Клейну и самому Пуанкаре, любую риманову поверхность S можно конформно отобразить на фактор-пространство K/Γ, где K — круг, плоскость или сфера, а Γ — группа дробно-линейных преобразований K, изоморфная $\pi_1(S)$. При этом пространстве K/Γ_1 и K/Γ_2 тогда и только тогда конформно эквивалентны, когда Γ_1 и Γ_2 — сопряженные подгруппы группы дробно-линейных преобразований K. Пользуясь таким представлением римановой поверхности, уже нетрудно подсчитать, что число различных классов конформно неэквивалентных компактных римановых поверхностей рода g зависит от $6g - 6$ действительных параметров.

Вместо употребляемого А. Пуанкаре термина «подстановка» теперь часто говорят «линейное» или «дробно-линейное преобразование». «Фундаментальные подстановки» Пуанкаре — это образующие данной группы Г дробно-линейных преобразований, по которой проводится факторизация K/Γ.

Заметим в заключение, что чисто топологический вопрос об инвариантности области и числа измерений, безупречно решенный лишь в 1911—1912 гг. Л. Брауэром [4], зародился в рамках геометрической теории аналитических функций при попытках дать логически законченное обоснование метода непрерывности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] L. E. J. Brauwer, Über die topologischen Schwiezigkeiten des Kontinuitätsbeweises der Existenz-teoreme eindeutig umkehrbar polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen, Nachricht. Acad. Wissensch. Göttingen, № 5 (1912), 603—606.

[2] L. E. J. Brauwer, Über die Singularitätenfreicheit der Modulmannigfaltigkeit, Nachricht. Acad. Wissensch. Göttingen, № 7 (1912), 803—806.

[3] L. E. J. Brauwer, Über den Kontinuitätsbeweisfürdas. Fundamental Theorem der automorphen Funktionenin Grenzkreisfalle, Jahresber. Deut. Math. Vereinigung **21** (1912), 154—157.

[4] L. E. J. Brauwer, Beweis der Invarianz des n-dimensional Gebiets, Math. Ann. **71**:3 (1911), 305—313.

[5] R. Fricke, Beiträge zum Kontinuitätsbeweise der Existenz linear-polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen, Math. Ann. **59** (1904), 449—513.

[6] F. Klein, Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. III, Berlin, Springer, 1923, 631—710.

[7] H. Poincare, Sur les groupes des éguations linéaires, Oeuvres, II, Paris, Gauthier — Villars, 1916, 300—401.