В. И. Арнольд, Недооцененный Пуанкаре, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 1(367), 3–24

DOI: https://doi.org/10.4213/rm1714

2006 г. январь — февраль *т. 61, вып. 1 (367)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.91/.93+517.95+515.1+512.7+53

Недооцененный Пуанкаре

В. И. Арнольд

В статье описан ряд опубликованных и не опубликованных достижений А. Пуанкаре, ожидающих продолжения со стороны следующих поколений математиков: речь идет и о небесной механике, и о топологии, и о теории хаоса и динамических систем, и о гомологиях, пересечениях и зацеплениях, об истории теории относительности и теории функций и о связи гипотезы Пуанкаре с теорией инвариантов узлов.

Содержание

Список творцов современной математики начинается с Ньютона, Эйлера и Пуанкаре.

Точка зрения Пуанкаре на математику коренным образом отличалась от формалистических идей Гильберта и Харди, математика была для Пуанкаре важной частью физики и естествознания, а не искусством перестановки символов.

Описывая математические проблемы (за несколько лет до знаменитого списка проблем Гильберта), Пуанкаре делил их на две части: *бинарные проблемы* (вроде проблемы Ферма, ответ в которых представляет собой выбор из двух возможностей: “да” и “нет”) и *интересные проблемы* (вроде, например, вопроса о влиянии граничных условий на решения краевых задач), где возможно непрерывное продвижение вперед, доставляющее новые сведения о характере решений, которые остались бы незамеченными, если бы проблема ставилась как бинарная.

Пуанкаре следовал здесь идеям Фрэнсиса Бэкона (который говорил, что начинать научное исследование с аксиом и общих принципов опасно, поскольку это с необходимостью ведет к ошибкам), а вовсе не теории Декарта (который утверждал, что какая-либо связь с реальностью – не предмет науки, дело которой – только искусство логически правильных дедукций следствий из произвольных аксиом).

В качестве наиболее важных математических проблем наступающего XX века Пуанкаре назвал "создание той математики, которая нужна для будущего развития квантовой физики и теории относительности".

Сравнивая сегодня влияние проблем Пуанкаре и Гильберта, приходится признать, что математика XX века следовала скорее предложению Пуанкаре, будь то развитие топологии, созданной Пуанкаре (это развитие явилось главным достижением математики XX века) или математической физики (где прежде всего следует упомянуть Германа Вейля, ученика Гильберта, вклад которого в создание квантовой теории, особенно в открытие уравнения Шрёдингера, остается, к сожалению, неизвестным большинству математиков), будь то развитие эргодической теории хаоса в динамических системах (начатой работами Пуанкаре по небесной механике и по обыкновенным дифференциальным уравнениям).

Эти достижения Пуанкаре остались малоизвестными большинству историков науки, и я опишу ниже несколько конкретных результатов.

1. Теория бифуркаций. Диссертация Пуанкаре содержала теорему о версальных деформациях (которую он называл "леммой 4") для голоморфных полных пересечений. В современной математике это фундаментальное положение теории бифуркаций (разработанное Пуанкаре ради его исследований бифуркаций периодических орбит задачи трех тел небесной механики) приписывается обычно Гротендику, Мальгранжу и Тому.

Гротендик и Том работали над этим вопросом много лет в их соседних комнатах Института Высших Научных Исследований в Бюр-сюр-Иветт под Парижем. Они никогда не беседовали об этом, и взаимосвязь их результатов оставалась неизвестной им обоим.

Важное отличие состояло в том, что Том хотел перенести результаты с аналитического случая на гладкий. Хотя ему это и не удалось, он сумел убедить Б. Мальгранжа (который не верил в возможность такого обобщения несколько лет), что теорема о версальных деформациях должна оставаться справедливой и без предположения аналитичности.

После ряда лет тяжелой работы, Мальгранж доказал гипотезу Тома, и теперь этот знаменитый результат теории особенностей называется "теоремой Мальгранжа".

Ни Том, ни Мальгранж не замечали связи своих версальных деформаций с диссертацией Пуанкаре (и с теорией бифуркаций периодических орбит небесных тел, основанной на этой диссертации).

Во время синхронного перевода мною на русский язык обзорного пленарного доклада Мальгранжа на Московском Всемирном Математическом Конгрессе

1966 года в Актовом зале МГУ Мальгранж внезапно остановил меня через полчаса после начала доклада. Хотя он и не понимал моих русских слов, он сказал: "Ты переводишь не то, что я уже произнес, а то, что я скажу через несколько минут".

Никакого письменного текста доклада не было, но мои русские фразы действительно были произнесены Мальгранжем через несколько минут.

Хотя во Франции Пуанкаре был забыт, в России уже в двадцатые и тридцатые годы его теория бифуркаций была использована и развита Андроновым и Понтрягиным (ради нужд радиофизики и теории радиопередатчиков).

Андронов опубликовал (с полными доказательствами) теорию рождения периодических движений динамических систем из состояний равновесия при типичной потере устойчивости этого состояния, когда два собственных числа линеаризованной в положении равновесия системы пересекают мнимую ось, переходя из левой части плоскости комплексных чисел в правую.

Теорема Андронова утверждает, что (в зависимости от знака некоторой комбинации нескольких первых членов ряда Тейлора в положении равновесия) реализуется один из двух типичных сценариев.

В первом из них (называемом *мягкой потерей устойчивости*) устойчивость положения равновесия переходит в момент потери устойчивости к новорожденному предельному циклу (радиус которого растет как квадратный корень из разницы между новым значением параметра системы и тем значением, при котором положение равновесия потеряло устойчивость).

Во втором сценарии (называемом *жесткой потерей устойчивости*) в момент потери устойчивости уменьшается до нуля радиус зоны притяжения положения равновесия (эту зону ограничивает гиперповерхность в фазовом пространстве, представляющая собой цилиндр над предельным циклом с центром в теряющем устойчивость положении равновесия, причем радиус этого цикла пропорционален квадратному корню из разницы между тем будущим значением параметра, при котором положение равновесия потеряет устойчивость, и тем близким предыдущим значением, при котором наблюдается предельный цикл).

В случае мягкой потери устойчивости новорожденное устойчивое периодическое движение системы описывает малые колебания около потерявшего устойчивость положения равновесия.

В случае жесткой потери устойчивости потерявшая устойчивость положения равновесия система катастрофически переходит в совершенно другую область фазового пространства (хотя до самой потери устойчивости разница в поведениях мягко и жестко теряющих устойчивость систем незаметна).

Доказательства этих результатов Андронова о бифуркациях фазовых портретов использовали обобщенные Понтрягиным на гладкие функции результаты аналитических исследований Пуанкаре.

Принадлежащая Пуанкаре теорема о версальных деформациях (его лемма 4) доставляла оценки сверху степеней полиномиальной нормальной формы, к которой бифурцирующую систему можно привести при помощи гладко (аналитически) зависящей от параметров замены фазовых координат.

А именно, степени этих многочленов зависят от характера голоморфного ветвления аналитической неявной функции (вычисляемого по степени вырождения главных начальных членов ряда Тейлора).

Эти оценки степеней многочленов и характера ветвления доставляются теорией “рядов Пюизё” – теорией, которую Ньютон, за сотни лет до Пюизё, считал своим главным вкладом в математику (и которую он зашифровал в виде второй, более длинной, диаграммы, доставляющей способ асимптотического решения и исследования любых уравнений – алгебраических, функциональных, дифференциальных, интегральных и т. д.)

Понтрягин заметил, что теорию функций комплексных переменных можно исключить из этих исследований бифуркаций, доказал соответствующие теоремы для гладких вещественных функций, а Андронов этими теоремами воспользовался.

Практическая проблема оценки числа периодических орбит в теории Пуанкаре–Понтрягина остается нерешенной и сегодня, даже в простейшем случае возмущений интегрируемых систем типа “уравнений борьбы за существование” Лотка и Вольтерра (в том числе – в шестнадцатой проблеме Гильберта).

В этом случае невозмущенная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = x(a + bx + cy), \qquad \frac{dy}{dt} = y(p + qx + ry). \tag{1}$$

Эта система “интегрируема” (имеет нелокальный первый интеграл) при выполнении коэффициентами $(a, \ldots, r)$ некоторого алгебраического условия. Например, годится классический случай Лотка–Вольтерра, $b = r = 0$.

Упомянутый первый интеграл имеет вид

$$H(x, y) = x^\alpha y^\beta z^\gamma, \quad \text{где} \quad z = 1 - x - y,$$

для надлежащих чисел α, β, γ (в системе координат, полученной из координат уравнений (1) при помощи линейного преобразования, но обозначенных попрежнему через x и y).

Чтобы получить новорожденные предельные циклы возмущенных систем, теория Пуанкаре–Понтрягина–Андронова начинает с вариации интегрируемой динамики (1):

$$\frac{dx}{dt} = x(a + bx + cy) + \varepsilon f(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = y(p + qx + ry) + \varepsilon g(x, y), \tag{2}$$

где ε – малый параметр.

Вариация первого интеграла H доставляется (в первом приближении) формулой

$$\delta H(h) = \varepsilon \int_{H(x,y)=h} \left(\frac{\partial H}{\partial x} f + \frac{\partial H}{\partial y} g \right) dt \tag{3}$$

(интегрирование производится в течение одного периода периодического решения $(x(t), y(t))$ невозмущенной системы, для которого $H(x, y) = h$).

Трудная часть теории состоит в том, чтобы оценить число корней h уравнения $\delta H(h) = 0$: ограничено ли оно сверху, например, общей для всех квадратичных возмущений f и g постоянной?

Ответ на этот вопрос неизвестен, несмотря на следующую приятную теорему (независимо доказанную Варченко и Хованским): число корней h уравнения $\delta H(h) = 0$ ограничено сверху в случае, когда роль невозмущенной интегрируемой системы (1) играет система уравнений Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x},$$

где H – многочлен (фиксированной степени) от x и y.

Система Лотка–Вольтерра (1) не гамильтонова, да и ее интеграл H является, вообще говоря, трансцендентной функцией. Даже в случае, когда постоянные α, β и γ – рациональные числа, так что существует алгебраический интеграл, степень соответствующего многочлена, а также род соответствующей алгебраической кривой и нужных абелевых интегралов не ограничены равномерно.

Поэтому теория версальных деформаций для этой системы бифурцирующих периодических траекторий не известна ни в гладкой, ни в голоморфной ситуации, даже в случае системы Лотка–Вольтерра, правые части которой являются многочленами второй степени (1).

2. Теория когомологий. Другой типичный пример позабытого достижения Пуанкаре, которым пренебрегли следующие за ним поколения математиков, – это его изобретение теории когомологий.

Колмогоров, публикуя свои работы о когомологиях в четырех французских заметках 1935 году в Докладах Парижской Академии наук (C. R. Ac. Sci. Paris) писал, что главным его вдохновителем была теория “функций от областей” Н. М. Гюнтера (которую тот построил еще во время первой мировой войны ради приложений к гидродинамике и к теоремам существования и единственности для систем Навье–Стокса).

Колмогоров рассказывал мне позже, что все эти идеи (включая “δ-функции” Дирака, “обобщенные функции” Соболева, “распределения” Шварца и т. д.) были хорошо известны Пуанкаре, но что несколько страниц, где он изложил эти идеи на полуфизическом уровне, понял один только Эли Картан (объяснения которым этих идей Пуанкаре в книге Картана об интегральных инвариантах вдохновили позже теоремы де Рама).

Сам Колмогоров объяснил в своих статьях, что его теория когомологий является переводом на конечномерный алгебраический и комбинаторный язык общефизических идей, описывающих потоки несжимаемой жидкости через различные поверхности и магнитные потенциалы, вплоть до формул для коэффициентов зацепления кривых, построенных Гауссом для нужд теории магнитных полей.

Можно допустить, что формальный уровень строгости изложения самим Пуанкаре теории когомологий не удовлетворял ригоризму “современных математиков”.

Например, Пуанкаре написал, что существует только два способа обучить дробям: нужно разрезать (хотя бы мысленно) либо яблоко, либо круглый пирог – все другие методы ведут обучаемых к правилам вроде

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$$

(гораздо более удобным, чем Дедекиндова теория пар целых чисел или чем определение кольца Гротендика).

3. Уравнение Соболева. Современное приписывание всех математических открытий имени последнего, от которого о них узнали (Америку никто не называет Колумбией), играет в научном обществе большую положительную социальную роль поощрения эпигонов.

Лоран Шварц сказал мне в 1965 году, что С. Л. Соболев совершил грубую ошибку, публикуя свои великие работы (об обобщенных решениях дифференциальных уравнений в частных производных) в захолустном провинциальном журнале и на малоизвестном языке. Шварц добавил, что его собственный вклад состоял в переводе теории Соболева на английский язык и в ее публикации в популярном журнале.

На мой естественный вопрос о провинциальном журнале Шварц четко ответил: Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, по-французски.

Год спустя я расспросил Сергея Львовича Соболева об этих событиях, и он ответил: "Нет, Шварц сделал гораздо больше – он добавил такие факты о преобразованиях Фурье обобщенных функций, которых я не знал".

Но я хотел бы упомянуть здесь еще и слова Колмогорова (к которому Адамар обратился перед присуждением Шварцу медали Филдса за разъяснениями: Адамар приехал в Москву, чтобы поговорить об этом с Соболевым, но тот, как заместитель Курчатова в Лос-Арзамасе, не имел права с ним встретиться).

Колмогоров настаивал, что, хотя и Соболев, и Шварц – замечательные математики, не стоит забывать и Гюнтера.

Когда в Москве начали "изживать лузинщину в научной среде", в Ленинграде нужно было найти аналогичную жертву, и в качестве аристократа с антипролетарскими тенденциями был избран Н. Гюнтер.

Спасаясь от этих нападок, Гюнтер стремился набрать пролетарских и даже коммунистических учеников. Наиболее талантливым из них оказался (отнюдь не пролетарий) Сергей Львович Соболев, которому Гюнтер и предложил перенести уже готовую теорию "функций от областей" (не имеющих, подобно δ-функции, значений во всех точках, но имеющих вполне определенные интегралы по различным областям) – эту теорию, примененную самим Гюнтером к нелинейным уравнениям Навье–Стокса,[1] он предложил Соболеву применить к линейному волновому уравнению (имея в виду приложения в сейсмологии, полезные пролетариату).

Добавлю еще, что в конце 1950-х годов Сергей Львович Соболев объяснил мне (засекреченные в течение многих лет) результаты о колебаниях жидкости во вращающихся сосудах (ракетах), ради которых он создал свою теорию "уравнения Соболева".

Сегодня я знаю, что это "уравнение Соболева" было, однако, опубликовано Пуанкаре в 1910 году, как метеорологическое описание гидродинамики или аэродинамики атмосферы на вращающейся планете.

[1] Знаменитые результаты Ладыженской о трехмерных системах Навье–Стокса отличаются от результатов Гюнтера другим выбором функциональных пространств, но и у нее, как и у Гюнтера, единственность доказывается для менее сингулярных обобщенных решений, чем существование.

Сейчас теория Пуанкаре–Соболева применяется скорее не к земной атмосфере, о которой думал Пуанкаре, исследуя влияние вращения Земли на динамику циклонов, а к атмосферам Венеры и Юпитера.

Данное Соболевым обобщение теории Пуанкаре использовало новый, изобретенный им, класс функциональных пространств.

В отличие от стандартных гильбертовых пространств, эти пространства снабжены не положительно определенной квадратичной формой релятивистской (лоренцевской) сигнатуры, задающей не риманову, а лишь финслерову метрику.

Сегодня эти обобщения гильбертовых пространств часто называют P-пространствами (из-за Понтрягина, который обобщил лоренцевы метрики Соболева на случай с любым конечным числом отрицательных квадратов).

Понтрягин узнал о секретной работе Соболева, будучи его соседом в эвакуации в Казани, но ему было трудно правильно опубликовать ссылки, так как работа Соболева была засекречена.

За последние несколько лет теорию Пуанкаре–Соболева соединили (Бабин, Махалов и Николаенко) с так называемой КАМ-теорией (квазипериодических движений). Это привело к обоснованию усреднения трехмерной гидродинамики атмосферы на вращающейся планете по высоте. Получающаяся двумерная задача гораздо проще исходной трехмерной, так что и этот замысел Пуанкаре получил сегодня значительное развитие (хотя и не во Франции).

4. Принцип относительности. Вероятно, самое знаменитое из позабытых открытий Пуанкаре – это его изобретение (за 10 лет до Эйнштейна) принципа относительности.

В 1895 году Пуанкаре опубликовал (в философском журнале, без формул) статью “об измерении времени”. Он ясно объяснил в ней, что “абсолютное пространство” и “абсолютное время” Галилея и Ньютона не имеют никакого эмпирически-экспериментального определения (так как зависят от способа синхронизации часов в удаленных местах).

Пуанкаре указал, что единственный научный способ избежать этого неудобства состоит в том, чтобы постулировать полную независимость всех истинных законов природы от произвола в выборе системы координат, используемой для описания экспериментов.

В этой статье Пуанкаре избегал математические формулы (которые он уже хорошо знал, но которыми боялся напугать читателей-философов).

Минковский, друг Пуанкаре и учитель Эйнштейна, рано посоветовал Эйнштейну изучить теорию Пуанкаре, что Эйнштейн и сделал (не ссылаясь на Пуанкаре, однако, до одной статьи 1945 года, где он признает рассказанное выше).

Математическая часть “специальной теории относительности” тоже была опубликована Пуанкаре до Эйнштейна (включая и знаменитую формулу $E = mc^2$). Пуанкаре никогда не претендовал на приоритет, дружески встречался с Эйнштейном на Сольвеевских конференциях – он всегда хотел помочь этому талантливому молодому человеку.

5. Преобразования Лоренца. Поучительно, что знаменитые "преобразования Лоренца" специальной теории относительности – тоже изобретение Пуанкаре.

Это изобретение началось со студенческих лекций Пуанкаре по теории электромагнитного поля в Сорбонне. Рассказывая о системе уравнений Максвелла, Пуанкаре упомянул, что Лоренц изучал группу симметрий этой системы. Желая сформулировать ответ Лоренца, Пуанкаре начал доказывать его результат, но доказательство не получилось.

Вычисляя неделю спустя, Пуанкаре обнаружил, что даже для бесконечно-малых симметрий дело обстояло странно: они не образовывали алгебры Ли (что всегда должно иметь место для симметрий).

Продолжив вычисления, Пуанкаре увидел, что предложенные Лоренцем "симметрии" вовсе не сохраняют уравнений Максвелла. Поэтому он занялся поиском симметрий сам, и решил эту задачу. Описание полученной группы Ли симметрий (и ее алгебры Ли) вошло в лекции Пуанкаре.

Публикуя этот курс лекций, Пуанкаре выбрал для вновь открытых им преобразований имя "преобразования Лоренца", под которым все их сегодня и знают.

Замечу, кстати, что подобные терминологические феномены не редки. Например, "лемма Стокса", фундаментальная основа и теории когомологий, и электромагнитной теории Максвелла, не была ни изобретена, ни доказана Стоксом. Ее изобрел сэр Томпсон, лорд Кельвин. Стокс, бывший профессором в Ньютоновском Тринити-колледже в Кэмбридже, не сумел предоставить требовавшуюся от него для главного тамошнего письменного экзамена ("трайпос") задачу. Поэтому он, вместо того, чтобы придумывать такую задачу, передал экзаменационной комиссии только что полученное им от Кельвина письмо (с его новым результатом).

Максвелл, бывший на этом экзамене экзаменуемым, был поражен красотой задачи, и спросил, после объявления результатов экзамена, кто эту задачу предложил. Услышав, что ее предложил профессор Стокс, Максвелл стал называть ее "леммой Стокса" и основал на ней свою теорию электромагнитного поля. Она навсегда осталась леммой Стокса.

Андре Вейль рассказывал мне, что именно эта лемма послужила причиной основания группы Бурбаки: после окончания обучения он должен был читать студентам (в Нанси или в Страсбурге) курс лекций, включающий лемму Стокса, но не сумел этого сделать, так как все имеющиеся тексты были полны слепых вычислений, скрывавших все идеи.

Он стал беседовать с однокурсниками, и они пришли к выводу, что все стандартное преподавание математики с самого начала столь же непонятно, так что все нужно переделать.

Этой переделкой они и занялись, создав для этого группу Бурбаки (в конце 30-х годов XX века). Но – закончил свой рассказ Андре Вейль – "дойти до понятного изложения леммы Стокса до сих пор еще не удалось".

С тех пор прошло лет тридцать, но слова Вейля остаются справедливыми и сегодня.

Опыт Пуанкаре, приписавшего Лоренцу свой результат, я невольно повторил два раза (когда писал отзывы на докторские диссертации Маслова и Гудкова по симплектической топологии и по вещественной алгебраической геометрии).

Маслов сказал мне, прочитав мой отзыв, что я зря связываю с его именем введенное мною целое число (которое я назвал “индексом Маслова”), так как только остаток от деления этого целого числа на четыре имеет физическое значение для теории квазиклассических коротковолновых асимптотик, мое же целое число бесполезно.

Гудков же возражал против гипотезы о делимости на 16 некоторой топологической характеристики вещественных алгебраических кривых, которую я приписал ему в своем отзыве на его диссертацию. Он утверждал, будто знал какие-то (неизвестные мне) контрпримеры к этой общей гипотезе, исследовал же подробно только сотню-другую примеров.

Но я настаивал на правдоподобии этой общей гипотезы, так как я придумал, как связать ее с теоремами о делимости на 8 в дифференциальной топологии четырехмерных многообразий (хотя речь шла о топологии вещественных кривых), с одной стороны, и с топологической квантовой теорией поля – с другой. В конце концов я убедил Гудкова в ошибочности его контрпримера, и сегодня “гипотеза Гудкова” стала теоремой Рохлина, которая является одним из важнейших результатов вещественной алгебраической геометрии.

Вся эта область началась с вопроса 16-й проблемы Гильберта о возможном расположении 11 овалов плоской вещественной алгебраической кривой степени 6 на вещественной проективной плоскости.

Гильберт утверждал, что имеется только два возможных расположения одиннадцати овалов. В диссертации Гудкова было построено третье расположение (а из “гипотезы Гудкова” следует невозможность других).

Интересно, что из всех проблем Гильберта только две (13-я и 16-я) связаны с топологией, в то время как Гильберт считал свои проблемы завещанием XIX века XX-му (в XX веке именно топология стала наиболее активной областью математики).

В то время как для кривых степени 6 Гильберт предложил (неправильный) ответ, утверждая даже, что он его доказал, возможные расположения двадцати двух овалов плоской вещественной алгебраической кривой степени 8 (на вещественной проективной плоскости) неизвестны и сегодня. Компьютер способен нарисовать кривую с явно заданным уравнением, но совершенно не способен описать все возможные случаи.

В этой задаче число всех топологически возможных расположений овалов (гладких, а не алгебраических) равно 268 282 855. Гипотеза Гудкова и другие известные сегодня ограничения уменьшают число возможных расположений овалов (для алгебраических кривых) до примерно 90 случаев.

Число построенных сегодня примеров превосходит 70. Я не знаю точно самых последних успехов в интервале между этими пределами, где ситуация меняется еженедельно – это не “бинарная проблема” в терминологии Пуанкаре, и она все еще не решена (несмотря на то, что общий вопрос о возможных топологических конфигурациях алгебраических кривых данной степени относится к числу самых фундаментальных проблем математики, являясь прямым продолжением теории эллипсов и гипербол и притом куда более интересным, чем бинарная проблема Ферма). Интересно, что, хотя эту проблему можно считать вызовом и для алгебраической геометрии, и для компьютеров, пока ни алгебраические геометры, ни компьютеры ничего в ней не сделали.

Замечу вдобавок, что Гильберт зря не включил в свою проблему вопрос о топологической структуре функции-многочлена f, задающего алгебраическую кривую $f(x, y) = 0$, – он не решен до сих пор даже для многочленов невысокой степени, начиная с четвертой. Соответствующая классическая классификация гладких функций состоит из 17 746 классов, но неизвестно, сколько из них реализуется многочленами степени 4.

6. Русское издание Избранных сочинений Пуанкаре. Около 1970 года я предложил Редакции серии “Классики науки” РАН издать по-русски Избранные сочинения А. Пуанкаре. Ответ, который я получил от их начальника А. А. Логунова, бывшего раньше учеником Н. Н. Боголюбова, был отрицательным: он напоминал, что В. И. Ленин раскритиковал махиста идеалиста Пуанкаре в “Материализме и эмпириокритицизме” в 1909 году, вследствие чего издание каких-либо трудов Пуанкаре в России теперь невозможно.

Друзья предложили метод преодоления Логунова. Они объяснили мне, что глава Отделения математики Академии наук, Боголюбов, очень высоко ценит работы Пуанкаре (которые он продолжал в своей теории усреднения). Он хорошего мнения и об Арнольде (опубликовав книгу, основанную на результатах Арнольда). Поэтому он может помочь переубедить своего ученика Логунова и издать по-русски Избранные сочинения Пуанкаре.

Я позвонил Николаю Николаевичу Боголюбову, и он немедленно пригласил меня к себе домой (в здание Московского университета на Воробьевых горах). Там, прочитав письмо Логунова, он сказал следующие мудрые слова:

“Все мы трое – сказал он мне, – Пуанкаре, я и Вы, не только математики, но также и физики и естествоиспытатели.

А подход естествознания даже к самым неприятным явлениям природы, вроде извержений вулканов, прагматичен: надо стараться использовать эти явления для пользы науки (например, в случае извержения, измерить какие-либо параметры внутреннего устройства планеты).

И вот, – продолжал Боголюбов, – сейчас я покажу Вам, как использовать в интересах науки такое неприятное явление, как антисемитизм и антиэйнштейнианство отдельных лиц”.

После этого он достал лист белой бумаги, снабженный всеми его чинами: “Академик-секретарь Отделения математики Академии наук”, “Директор Объединенного института ядерных исследований” и так далее. И написал:

“Дорогой Анатолий Алексеевич! Я с профессорами Арнольдом и Олейник предлагаем издать в “Классиках науки” нашей Академии Избранные Сочинения А. Пуанкаре, в трех больших томах, включив в него и его работы по теории относительности, опубликованные раньше работ Эйнштейна. . . ”

Через несколько недель я получил от Анатолия Алексеевича Логунова требуемое Соглашение, и три тома вышли из печати в 1972 году (включая, например, “Новые методы небесной механики” и “Анализ ситус” (т.е. “топологию”), работы об автоморфных функциях (здесь я вспомнил, что в знаменитом французском энциклопедическом словаре Ларусса А. Пуанкаре определялся около 1925 года как "создатель фуксовых функций")). Работа по теории относительности тоже была включена, но без ожидаемой Логуновым критики Эйнштейна.

Издание сопровождал анализ дальнейшего развития идей Пуанкаре, написанный в каждой области крупнейшими в мире специалистами.

7. Теория усреднения. Интересно отметить соотношение теории усреднения динамических систем Боголюбова и Пуанкаре. Николай Николаевич рассказал мне (а до того – написал в своих книгах), что, в то время как Пуанкаре строил теорию усреднения для систем дифференциальных уравнений Гамильтона (небесной механики), Боголюбов распространил его теорию на более общие, произвольные динамические системы.

Приготовляя русское издание работ Пуанкаре, я обнаружил в его письмах его собственное описание его работ об усреднении. Пуанкаре писал, что общую теорию усреднения динамических систем до него разработал шведский математик и астроном Линдштедт. Пуанкаре же, применяя метод Линдштедта к системам Гамильтона небесной механики, обнаружил некоторые специальные ("симплектические" на сегодняшнем языке) явления, а потому специально описал теорию усреднения в системах Гамильтона, как отличающуюся от общей теории Линдштедта некоторыми специальными свойствами.

Читая впоследствии Линдштедта (которого Боголюбов не читал), я увидел, что окончательное изложение в версии Боголюбова понимать легче, и даже при практическом применении его технология может приводить к более коротким вычислениям, чем уже содержащая все основные идеи первоначальная работа Линдштедта, которую Пуанкаре переносил на системы уравнений Гамильтона, а Боголюбов – на негамильтоновы системы.

Сегодняшняя теория усреднения систем Гамильтона является грандиозным развитием исследований Пуанкаре (по проблеме, которую он назвал "основной проблемой динамики"). Очень важную часть этой новой теории составляет теорема Колмогорова (1954) о сохранении инвариантных торов и условно-периодических движений на них при малых возмущениях вполне интегрируемых систем уравнений Гамильтона.

Более недавним примером является открытие М. Эрманом (за несколько месяцев до его безвременной смерти) различия между неплоской небесной механикой более чем трех тел и задачей трех тел, которая является простейшим примером не вполне интегрируемой системы Гамильтона, исследованной Пуанкаре.

Упомяну также (предшествовавшую открытию Эрмана) теорему М. Севрюка, в которой была построена нужная Эрману теория диофантовых приближений на подмногообразиях проективного пространства (хотя Севрюк сам и не использовал ее в небесно-механической задаче Эрмана).

Теория диофантовых приближений появляется в этих проблемах из-за сильного влияния на взаимные возмущения планет резонансов между частотами их невозмущенных (Кеплеровых) движений.

Первый пример такого резонанса – приблизительная соизмеримость года Сатурна с годом Юпитера, периоды обращения которых вокруг Солнца относятся примерно как 5 к 2. Точнее, Юпитер проходит в день в среднем примерно 299 дуговых секунд, а Сатурн – примерно 120.

Усреднение Пуанкаре приводит при наличии такого резонанса к "вековым возмущениям", период которых измеряется веками (в данном случае – почти тысячелетием). Эти возмущения, хотя и называются вековыми, все же периодичны, т.е. увеличивавшаяся в течение тысячелетия орбита в следующем тысячелетии будет уменьшаться. Только из-за этой периодичности солнечная система не разрушается (что произошло бы всего за сотню тысячелетий, если бы эти возмущения накапливались, а не приводили, подобно движению маятника, к осцилляциям первоначальных орбит).

Это взаимодействие теории динамических систем с арифметикой диофантовых приближений было открыто Пуанкаре, который хотел использовать статистику диофантовых приближений в своих работах по небесной механике.

8. Ковалевская и теорема Пуанкаре о неинтегрируемости. Недавно я узнал из "Энциклопедии математической физики", будто Пуанкаре был автором знаменитого результата Софьи Ковалевской о новом вполне интегрируемом случае в задаче о движении тяжелого твердого тела. И вклад Пуанкаре, и работа Ковалевской замечательны (но Пуанкаре наградил Ковалевскую за ее открытие медалью Парижской Академии наук, ничего не сказав о своих предшествовавших работах на эту тему).

История открытия Ковалевской сложна, и я расскажу ниже о соотношении этого открытия и работ Пуанкаре.

Задача была поставлена Ковалевской ее учителем Вейерштрассом. Он предложил ей доказать методом Пуанкаре, что не существует новых вполне интегрируемых случаев в задаче о движении тяжелого твердого тела (исключая лишь случай Эйлера, когда твердое тело закреплено в центре тяжести, и случай Лагранжа, когда оно имеет, как волчок, ось симметрии). Дело в том, что Пуанкаре доказал (при помощи своей теории бифуркаций периодических орбит) отсутствие новых вполне интегрируемых случаев в задаче трех тел, и Вейерштрасс хотел распространить его результат на задачу о движении тяжелого твердого тела.

У Ковалевской ничего не вышло: она обнаружила, что метод Пуанкаре не всегда применим в ее ситуации. Дело в том, что для его применимости некоторая величина (зависящая от порядка резонанса, так что речь идет не об одной величине, а о целой их счетной последовательности) не должна обращаться в нуль (точнее, бесконечное число членов упомянутой последовательности должны быть отличными от нуля).

Между тем, вычисления Ковалевской показали, что (для некоторых твердых тел) все члены этой последовательности равны нулю, так что предложенный Вейерштрассом метод к цели не ведет.

Пытаясь понять причины своей неудачи, Ковалевская сделала замечательное открытие: в ее случае имеет место полная интегрируемость!

Этот неожиданный результат оказался куда важнее, чем было бы подтверждение гипотезы Вейерштрасса. Он явился первым в большой новой теории вполне интегрируемых систем уравнений Гамильтона, включающей такие знаменитые модели математической физики, как уравнения Кортевега–де Фриза, нелинейное уравнение Шрёдингера и уравнения “сайн-Гордон”. Численные компьютерные исследования нелинейных волн в работах Ферми–Паста–Улама обнаружили поразительные новые эффекты в эволюции этих волн, которые были объяснены только возникшей теорией вполне интегрируемых систем.

Что касается Пуанкаре, то его теория неинтегрируемости была основана на замечательных его топологических идеях, которые он, насколько я понимаю, никогда не опубликовал, использовав для формального доказательства неинтегрируемости только их ослабленную версию, оставив не опубликованными свои выводы о бифуркациях периодических орбит при возмущениях вполне интегрируемых систем Гамильтона.

Насколько я знаю, эти топологические результаты остаются не опубликованными даже сегодня.

Основная идея доказательства неинтегрируемости, принадлежавшего Пуанкаре, состоит в следующем описании влияния резонансов на бифуркации периодических орбит при малых типичных возмущениях вполне интегрируемых систем. Пуанкаре заметил, что во вполне интегрируемых системах уравнений Гамильтона периодические (замкнутые) орбиты всегда встречаются не поодиночке, а целыми семействами, вместе с соседними близкими замкнутыми орбитами.

Для типичной не вполне интегрируемой системы уравнений Гамильтона замкнутые орбиты лежат (на фиксированной гиперповерхности уровня функции Гамильтона в фазовом пространстве) изолированно друг от друга. Поэтому наличие достаточно большого числа таких изолированных замкнутых орбит доказывает, что система не является вполне интегрируемой.

Несмотря на это замечательное открытие им этой топологической разницы между вполне интегрируемыми и не вполне интегрируемыми системами, Пуанкаре доказал свою теорему не так. Он заметил, что некоторое приближенное свойство асимптотического поведения фазовых кривых при возмущении, еще не доказывающее описанной выше топологической картины (т.е. присутствия бесконечного числа изолированных замкнутых орбит), уже исключает возможность полной интегрируемости, и проверял не топологическую картину, а этот ее эрзац. В результате он опубликовал детально свое (длинное) доказательство более слабого результата, чем его замечательное топологическое открытие, из которого он получил этот более слабый результат, достаточный, однако, для установления невозможности полной интегрируемости.

Современные российские математики (особенно – В. В. Козлов) опубликовали недавно доказательство в стиле Пуанкаре того факта, что случай Ковалевской – единственный дополнительный случай полной интегрируемости в задаче о движении тяжелого твердого тела (сверх случаев Эйлера и Лагранжа). Таким образом, замысел Вейерштрасса, предложенный им Ковалевской, оказался в конце концов реализованным: идея использовать метод Пуанкаре была хорошей, случай Ковалевской – единственный, когда он не приводит к цели. Но этого не доказали ни Ковалевская, ни Пуанкаре (вклад которого в нынешнее доказательство был, однако, решающим).

Я все же надеюсь, что со временем появится и строгое математическое доказательство обнаруженной Пуанкаре топологической картины с бесконечным числом бифурцирующих при малом возмущении вполне интегрируемой системы уравнений Гамильтона замкнутых фазовых кривых.

Многие “доказательства невозможности” в математике включают на самом деле более глубокое понимание сути дела, чем отрицательный результат о несуществовании дедуктивного вывода.

Ряд Тейлора арктангенса расходится при модуле аргумента, превосходящем единицу. Это можно доказать, оценивая коэффициенты. Но *настоящая причина* расходимости состоит не в росте членов ряда, а в наличии особой мнимой точки $x = i$ у производной $1/(1 + x^2)$ функции арктангенс.

Подобным образом, теорема Абеля о невозможности выразить корень уравнения пятой степени через его коэффициенты при помощи радикалов скрывает топологический факт. Дело в том, что эти уравнения *топологически неразрешимы в радикалах*: никакая комплексная функция, топологически эквивалентная корню $x(a)$ уравнения $x^5 + ax + 1 = 0$, т.е. имеющая подобное ветвление, не может быть записана в виде конечной комбинации радикалов и однозначных функций.

Доказывая в какой-либо задаче невозможность какого-либо поведения решений, всегда нужно стараться сформулировать топологические, качественные причины этой невозможности, в виде положительного утверждения о сложном поведении изучаемых объектов, а не только в виде отрицательного утверждения о невозможности какой-либо формулы.

Зная много примеров подобных результатов о “топологической невозможности”, я должен все же упомянуть, что даже Пуанкаре не всегда формулировал свои результаты этим положительным образом, зачастую зная больше (по меньшей мере интуитивно), чем он явно формулировал.

В качестве огорчительного примера этой ситуации я опишу работы о топологической невозможности вычисления в элементарных функциях абелевых интегралов вдоль кривой положительного рода, например, эллиптического интеграла

$$t(X) = \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{x^3 + ax + b}}\,,$$

или эллиптической функции $X(t)$: ни интеграл, ни функция не представимы в виде конечной комбинации элементарных функций.

Я приписал в 1963 году Абелю доказательство того, что никакая комплексная функция, топологически эквивалентная функции $t(X)$ или функции $X(t)$, не элементарна (для типичных значений коэффициентов a и b).

К сожалению, Абель, по-видимому, не опубликовал ни доказательства, ни даже точной формулировки этой важной теоремы невозможности.

Я надеюсь, что подобные теоремы топологической неразрешимости будут вскоре доказаны для проблемы интегрирования дифференциальных уравнений “в квадратурах”.

9. Статистика элементов цепных дробей. Возвращаясь к принадлежащей Пуанкаре статистике резонансов теории бифуркаций периодических орбит, упомяну несколько важных более поздних математических результатов в этой области.

Статистика приближенных соизмеримостей периодов различных движений в небесной механике доставляет серьезную трудность во всех проблемах долгосрочного поведения возмущений: упадет ли Луна на Землю? Пересечет ли Юпитер орбиту Земли?

Статистика арифметических свойств случайных вещественных чисел изучалась в теории диофантовых приближений. Простейший случай – это описание приближений цепными дробями,

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}}. \tag{4}$$

Вопрос состоит здесь в том, насколько точно можно приблизить иррациональное число x рациональными дробями $p/q \approx x$ с небольшим знаменателем q. Например, классическое приближение

$$\pi \approx \frac{355}{133}$$

доставляет 6 десятичных знаков числа $\pi \approx 3.1415929\ldots$, и известно, что получаемые при обрыве цепной дроби (на некотором месте a_k) приближения являются наилучшими.

Но чтобы понять, насколько они хороши, нужно знать, насколько велики *неполные частные* a_k (называемые также *элементами* цепной дроби). Остановившись перед большим неполным частным a_k, мы получим очень хорошее приближение

$$x \approx a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{a_{k-1}}}},$$

но нужно знать, имеются ли большие неполные частные a_k среди элементов цепной дроби (4).

Для золотого сечения, $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.6\ldots$, все элементы a_k равны 1, бóльших нет.

Статистика значений чисел a_k для случайного вещественного числа x известна: частота p_n элемента n равна

$$p_n = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \tag{5}$$

(так что единицы составляют больше трети элементов).

Пуанкаре задался вопросом, как распределены элементы цепных дробей отношений частот измеренных астрономами периодов движений небесной механики: похоже ли их распределение на теоретическое распределение (5), или же природа выбирает для отношений периодов не случайные числа?

История этого исследования сложная. Распределение (5) “вероятностей” p_n было известно Гауссу, но он не опубликовал его доказательство. Астрономы, вслед за Пуанкаре, подтвердили сходство эмпирического распределения с предсказанием (5):

H. Gyldén, “Quelques remarques relativement à la représentation des nombres irrationnels par des fractions continues”, C. R. Ac. Sci. Paris, vol. 107, 1888, pp. 1584–1587.

Позже шведский математик Виман опубликовал огромную статью на эту тему:

A. Wiman, “Über eine Warscheinlichkeitsaufgabe bie Kettenbruchentwickelungen”, Acad. Föhr., Stockholm, vol. 57, 1900, pp. 589–841.

Но я не сумел понять из этой статьи, доказывал ли он формулу (5), или хотя бы формулировал ли ее как теорему.

Первое известное доказательство формулы (5) было опубликовано Р. О. Кузьминым в 1928 году. Лучше всего оно изложено в книге А. Я. Хинчина “Цепные дроби”, М., Наука, 1978.

Доказательство Хинчина использует эргодическую теорему Биркгофа. Но доказательство теоремы Биркгофа (хотя Больцман и Пуанкаре о ней уже говорили) появилось позже работы Кузьмина.

Поэтому следовало бы пересмотреть работы Вимана (1900) и Кузьмина (1928): не содержат ли они доказательства эргодической теоремы, хотя бы для нужной для их цели динамической системы $x \mapsto$ (дробная доля $1/x$) (где $0 < x$).

Гаусс уже заметил, что инвариантная мера для этого отображения интервала в себя задается как

$$\int \frac{dx}{1+x}\,.$$

Инвариантность меры под действием отображения A понимается как равенство $\operatorname{mes}(A^{-1}M) = \operatorname{mes}(M)$ для любого измеримого множества M. Формула (5) для p_n соответствует выписанной мере (которую нужно вычислять для множества $\dfrac{1}{n+1} \leqslant x < \dfrac{1}{n}$, на котором целая часть числа $1/x$ равна n).

Хорошо известно, что доказательство Биркгофом эргодической теоремы было продуктом его взаимодействия с присланной ему на отзыв более слабой теоремой фон Неймана. Было бы интересно понять соотношение этой теоремы с предшествовавшими ей работами Пуанкаре, Вимана и Кузьмина о статистике элементов цепных дробей случайных чисел.

10. Последняя геометрическая теорема Пуанкаре. Из массы других интересных идей Пуанкаре я упомяну еще его “последнюю геометрическую теорему”. Современная формулировка этого фундаментального утверждения симплектической топологии не была формально опубликована Пуанкаре, статья которого содержит зато основные идеи доказательства этой теоремы, основанного на теории Морса. Хорошо понимая, что эти идеи недостаточны для строгого доказательства, Пуанкаре утверждал лишь, что он проверил свое утверждение в нескольких сотнях частных случаев, и что он оставляет поиск полного доказательства последующим поколениям.

Простейший вариант этой гипотезы Пуанкаре был вскоре после смерти Пуанкаре доказан Дж. Д. Биркгофом: сохраняющее площади отображение кругового кольца на себя, которое поворачивает граничные окружности в противоположных направлениях, имеет не менее двух неподвижных точек.

В общей форме утверждения Пуанкаре (которое, насколько я знаю, все еще не доказано, хотя уже проверено много сотен частных случаев) круговое кольцо заменено компактным замкнутым симплектическим многообразием (симплектическая структура – это замкнутая и невырожденная дифференциальная 2-форма на гладком многообразии).

Условия сохранения площади и направлений вращения заменяются в общем случае описанием отображения как преобразования фазового потока гамильтоновой системы (с, возможно, зависящей от времени функцией Гамильтона).

Фазовый поток состоит из преобразований

$$g^t\colon M^{2n} \to M^{2n}$$

фазового симплектического многообразия M^{2n} на себя, определенных дифференциальными уравнениями с (возможно, зависящим от времени t) гамильтоновым векторным полем v на M^{2n}:

$$\frac{dg^t(x)}{dt} = v(g^t(x)), \qquad g^0(x) = x.$$

Напомню, что векторное поле Гамильтона v на симплектическом многообразии M^{2n} (с симплектической структурой ω) определяется гладкой функцией Гамильтона $H\colon M^{2n} \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\omega(v(x), w) = -dH(w)$$

для любого касательного вектора w многообразия M^{2n} в точке x:

$$v(x) \in T_x M^{2n}, \qquad w \in T_x M^{2n}.$$

В классическом случае (“координат Дарбу” p и q) симплектическая структура имеет вид $\omega = dp \wedge dq$ и уравнения Гамильтона принимают форму

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}\,, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\,.$$

Условие о вращениях в теореме Пуанкаре о кольце заменяется в этой общей ситуации требованием однозначности функции Гамильтона $H(p, q, t)$ на M^{2n} (зависящей от времени t как от параметра): “многозначные функции Гамильтона” (т.е. замкнутые дифференциальные формы) здесь исключаются.

Обобщенная “Последняя Геометрическая Теорема” Пуанкаре утверждает существование у отображения $g^t\colon M^{2n} \to M^{2n}$ по меньшей мере m неподвижных точек, где m – число Морса многообразия M^{2n} (т.е. минимальное число критических точек гладкой функции на M^{2n}).

Гипотеза, вероятно, верна в обоих случаях: и когда как критические, так и неподвижные точки считаются в этих определениях геометрически различными (так что $m(T^2) = 3$), и когда как критические, так и неподвижные точки считаются невырожденными (так что $m(T^2) = 4$).

Первоначальное утверждение Пуанкаре о кольце получается из обобщенной теоремы, примененной к двумерному тору, $M^2 = T^2$, полученному из двустороннего кольца сглаживанием краев. В этом случае $m(T^2) = 4$ дает на торе 4 неподвижных точки, а в кольце две.

В этом случае теорема была доказана Биркгофом. Позже Арнольд распространил ее на отображения, которые не слишком далеко отстоят от тождественного преобразования (замкнутого симплектического многообразия).

Затем Конли и Цендер доказали гипотезу Арнольда для $2n$-мерного тора $M^{2n} = (S^1)^{2n}$, для которого число Морса равно 2^{2n}, если критические и неподвижные точки невырождены (или считаются с их кратностями).

Флоер распространил эти результаты на многие кэлеровы многообразия (например, на поверхности рода g, где $m = 2g + 2$).

Есть еще много полезных частных случаев (например, произведения многообразий предыдущих примеров), где гипотеза строго доказана (в большинстве доказательств используются гомологии Флоера и его версия квантовой теории поля).

Несмотря на неоднократные заявления о доказательстве обобщения теоремы Пуанкаре в общем случае, я не знаю ни одного удовлетворительного такого доказательства. Между прочим, в большинстве статей на эту тему вместо оценки числа неподвижных точек снизу числом Морса симплектического многообразия доказывается более слабое неравенство,

$$(\text{число неподвижных точек}) \leqslant \Big(b_* = \sum b_i\Big)$$

в терминах чисел Бетти $b_i(M^{2n})$.

Неравенство Морса $m \geqslant b_*$ хорошо известно, и $m = b_*$ во многих примерах (например, для торов и для поверхностей), но сформулированная выше гипотеза

$$(\text{число неподвижных точек}) \geqslant (\text{число Морса } m)$$

сильнее приведенных выше оценок через числа Бетти и не должна с ними смешиваться.

11. Теория возмущений и симплектическая топология. Возвращаясь к теории возмущений Пуанкаре, приведшей ко всем перечисленным результатам симплектической топологии, я упомяну о еще одном забытом следствии теории возмущений Пуанкаре.

Влияние простого резонанса на первое приближение теории возмущений сводится, по теории Пуанкаре, к “уравнению малых колебаний вблизи резонанса”, похожему на уравнение (одномерного) математического маятника. Это – лагранжева натуральная механическая система, конфигурационным пространством которой является окружность (слабо меняющейся резонансной фазы), в то время как роль потенциальной энергии играет некоторая гладкая функция на этой окружности, а роль кинетической энергии – стандартная квадратичная форма ap^2 (где a – некоторая постоянная).

Это уравнение “обобщенного маятника” легко интегрируется, доставляя описание резонансных событий (во временной шкале масштаба $\sqrt{1/\varepsilon}$ для малых возмущений порядка ε).

Аналогичное исследование можно провести и для пересечений пар разных резонансов, исследование которых особенно важно для понимания влияния резонансов на медленную эволюцию возмущенной системы (с более чем двумя степенями свободы: при двух степенях свободы разные резонансы не пересекаются).

"Маятник" превращается для пересечения двух резонансов в натуральную систему с двумя степенями свободы, конфигурационным пространством которой является двумерный тор, $T^2 = S^1 \times S^1$. Потенциальная энергия – гладкая функция на нем, $U\colon T^2 \to \mathbb{R}$.

Кинетическая энергия оказывается трансляционно-инвариантной квадратичной формой от касательных векторов тора: в подходящих координатах q_1, q_2 на торе она записывается в виде $a_1\dot{q}_1^2 + a_2\dot{q}_2^2$. Эта форма может быть любой сигнатуры (в зависимости от того, какова невозмущенная система).

Упомянутые выше координаты q_1 и q_2 не являются, вообще говоря, угловыми координатами на торе: в их терминах тор задается в виде

$$T^2 = \mathbb{R}^2/(\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}),$$

где ω_1 и ω_2 – некоторые два линейно независимых вектора накрывающей тор плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами q_1 и q_2.

Если кинетическая энергия положительно определена, то можно исследовать многие геометрические свойства движения нашего обобщенного двумерного маятника (хотя уравнения его движения и не будут, вообще говоря, вполне интегрируемыми), используя стандартные методы вариационного исчисления в целом, минимальные геодезические метрики Якоби–Мопертюи и т. п.

Например, в каждом гомотопическом классе замкнутых кривых на торе есть замкнутая геодезическая линия (параллель, меридиан и т. п.), а именно кратчайшая линия этого класса. Можно найти и "гомоклинические или гетероклинические" траектории Пуанкаре (приближающиеся асимптотически к периодической орбите или к двум разным периодическим орбитам при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$).

Эти топологические результаты очень полезны для исследования долговременного влияния резонанса, но в случае лоренцевой метрики, когда $a_1a_2 < 0$, этих результатов нет.

Первые вопросы этого направления можно сформулировать так.

1) Существуют ли (вообще говоря) замкнутые периодические орбиты в каждом гомотопическом классе замкнутых кривых на торе (или по меньшей мере в некоторых классах, выделяемых диофантовыми свойствами полей обоих асимптотических направлений, где кинетическая энергия равна нулю, по сравнению с решеткой целочисленных линейных комбинаций векторов ω_1 и ω_2?

2) Существуют ли (вообще говоря) гетероклинические соединяющие орбиты, стремящиеся при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$ к разным замкнутым орбитам?

И теоретические и эмпирические исследования ряда авторов подсказывают бóльшую неустойчивость движения (и более быструю "диффузию Арнольда" в лоренцевом (гиперболическом) случае по сравнению с римановым (эллиптическим) случаем $a_1a_2 > 0$.

Однако эти естественные гипотезы до сих пор не доказаны, как не построен ни лоренцев вариант теории гомологий Флоера, ни лоренцевы теоремы типа гипотезы Пуанкаре, обсуждавшейся выше (о неподвижных точках симплектоморфизмов).

12. Плодотворность ошибок. Готовя русское издание "Избранных сочинений" А. Пуанкаре, я вынужден был обсудить и его ошибки (а также результирующие достижения нескольких областей математики). Упомяну здесь только две самые знаменитые ошибки: вопрос о неинтегрируемости задачи трех тел и гипотезу Пуанкаре о трехмерной сфере.

Шведский король Оскар II сформулировал, как важнейшую проблему небесной механики, следующий вопрос: зная о расходимости рядов ряда вариантов теории возмущений, доказать невозможность представить движение в задаче трех тел рядами, которые сходились бы на всей вещественной оси.

Пуанкаре получил премию короля за решение этой задачи, доказав несуществование новых аналитических первых интегралов в содержащей кеплерово элиптическое движение планет области фазового пространства задачи трех тел.

Но вывод Пуанкаре о непредставимости движения сходящимися на всей действительной оси рядами противоречил теореме Зундмана, из которой вытекала аналитическая зависимость решения от начальных условий в некоторой комплексной окрестности вещественной оси.

По теореме Римана эта окрестность комплексно диффеоморфна (открытому) единичному кругу. Параметризуя окрестность этим кругом, мы получим голоморфные в круге решения, и их ряды Тейлора в этом круге будут сходиться, доставляя "сходящийся при всех вещественных значениях времени вариант теории возмущений в задаче 3-х тел".

Поняв это, Пуанкаре потратил всю премию на покупку уже отосланных читателям номеров шведского журнала "Акта Математика", где была напечатана (в соответствии с условиями королевского конкурса) премированная статья. Затем он за свои деньги набрал новый вариант этой статьи и разослал его подписчикам (дальнейшее развитие этого исправленного варианта статьи составило знаменитые "Новые методы небесной механики" Пуанкаре).

С сегодняшней точки зрения теорема Пуанкаре об отсутствии нового аналитического первого интеграла, а особенно новые идеи, приведшие его к этой теореме, были гораздо лучше, чем формальная "бинарная проблема" шведского короля.

К счастью, все эти знаменитые проблемы, степени и премии (включая даже проблемы Гильберта, Нобелевские премии и медали Филдса) оказывают мало влияния на развитие науки. Работы, например, Г. Вейля и М. Морса, Ж. Лере и Х. Уитни, Колмогорова и Понтрягина, Петровского и Тьюринга, Шэннона и Ю. Мозера доставляют самые замечательные достижения математики XX века, хотя и не входят в списки медалей Филдса.

"Гипотеза Пуанкаре" о трехмерной сфере была опубликована им как теорема. Однако позже он сам нашел ошибку в доказательстве: одна из лемм была неверной из-за того, что Пуанкаре спутал гомотопии кривых с гомологиями.

Итоги этой серьезной ошибки замечательны. Во-первых, Пуанкаре создал и теорию гомологий, и теорию гомотопий, тщательно их различая. Например, понятие монодромии в теории автоморфных функций относится к теории гомотопий, в которой играют важную роль некоммутативные свойства фундаментальной группы.

Напротив, теория ветвления многомерных интегралов комплексной области, известная сегодня как "теория Пикара–Лефшеца" или как "связность Гаусса–Манина", которую Пуанкаре развил для использования при исследовании асимптотики "пертурбационной функции" в небесной механике, относится к теориям гомологий и когомологий, так же как и тот вариант данного Кронекером обобщения теории характеристики Штурма на функции от многих переменных, которую Пуанкаре превратил в теорию индекса особой точки векторного поля, в теорию степени отображения и в теорию пересечений и зацеплений.

К своему неверному утверждению (будто гомологическая трехмерная сфера гомеоморфна S^3) Пуанкаре сам построил контрпример, связанный с додекаэдром.

Сегодня это многообразие проще всего описать формулой "сферы Брискорна E_8" в $\mathbb{C}^3$:

$$x^3 + y^5 + z^2 = 0, \qquad |x|^2 + |y|^2 + |z^2| = 1.$$

Эта экзотическая (гомологическая) сфера явилась предшественником 28 сфер Милнора, семимерных гладких многообразий, которые все гомеоморфны обычной сфере S^7, но попарно не диффеоморфны между собой.

Каждая из сфер Милнора задается тремя вещественными уравнениями в пространстве $\mathbb{C}^5$:

$$x^{6k-1} + y^3 + u^2 + v^2 + w^2 = 0,$$
$$|x|^2 + |y|^2 + |u|^2 + |v|^2 + |w|^2 = 1.$$

Чтобы получить 28 сфер Милнора, нужно положить $k = 1, 2, \ldots, 28$. В точности одно из этих многообразий странно диффеоморфно стандартной сфере S^7.

Исправленная формулировка гипотезы Пуанкаре состоит в том, что всякое односвязное замкнутое связное 3-многообразие гомеоморфно 3-сфере.

Соответствующая характеристика 2-сферы сразу следует из классификации поверхностей.

Начиная с размерности 5 к односвязности нужно добавить условия $\pi_k(M^n) = 0$ при $k < n$. В этом случае многообразие гомеоморфно сфере S^n, как доказал С. Смейл.

В официальной российской печати история гипотезы Пуанкаре излагалась так: "Пуанкаре доказал, что любой замкнутый путь на двумерной сфере стягивается по ней в точку, оставаясь на этой сфере. Знаменитая гипотеза Пуанкаре состоит в том, что это так и для трехмерной сферы. Наш молодой ленинградский математик Г. Перельман доказал это".

Я полагаю, что нам следует правильно описывать научные события, иначе образ математика в глазах широкой публики станет чересчур уж отрицательным.

Недавно М. Эйзерман (Topology, 2004, vol. 43, № 5, 1211–1229) доказал, что гипотеза Пуанкаре связана с теорией инвариантов узлов Васильева.

Инварианты Васильева играют среди всех инвариантов узлов примерно такую роль, какую многочлены играют среди всех функций.

Вопрос о том, являются ли все инварианты узлов просто функциями от более легко обозримых инвариантов Васильева, не решен. Но Эйзерман доказал, что гипотеза Пуанкаре следовала бы и из такого результата о полноте инвариантов Васильева.

Проблема классификации узлов и их инвариантов странным образом введена в математику Томпсоном, лордом Кельвиным, при его попытке объяснить этой классификацией классификацию химических элементов, т.е. таблицу Менделеева.

Идея Томпсона состояла в том, что различие между химическими свойствами атомов разных элементов объясняется микроскопически малой жестко связанной с атомом геометрической структурой, допускающей, однако, столь разнообразные варианты, чтобы объяснить разнообразие химических элементов.

Он предположил, что эти структуры – узлы, и начал классифицировать всевозможные узлы, которые можно нарисовать на плоскости в виде их проекции с не слишком большим числом точек самопересечения.

Распознать по проекциям двух замкнутых кривых на плоскость, можно ли одну из них непрерывно продеформировать в другую (без разрезов и самопересечений) нелегко, и инварианты узлов служат этой цели. Но возникающие здесь комбинаторные проблемы все же трудны (они лежат на грани алгоритмически разрешимых задач и задач, принципиально недоступных никаким компьютерам, т.е. алгоритмически неразрешимых; к последнему типу относится, например, задача о распознании того, имеет ли данная система полиномиальных уравнений с целыми коэффициентами целочисленное решение).

Как видно, ошибка Пуанкаре способствовала современному развитию большого ряда актуальных разделов математики.

Я полагаю, что ошибки вообще составляют важную часть научной деятельности и что их роль в развитии науки может быть большей, чем роль непонятных, но правильных формальных доказательств следствий из аксиом. Истории этих ошибок предыдущих поколений нужно рассказывать студентам в виде стимулирующих примеров и как источник вдохновенья, причем ошибки величайших ученых наиболее поучительны.

В. И. Арнольд (V. I. Arnol'd)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
18.08.2005