Федеральное агентство связи

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (СибГУТИ)

Отчет по

Лабораторной работе №4.3

по дисциплине «Теория массового обслуживания»

Тема: «Марковские цепи. Определение и построение»

Вариант 4

Выполнил:

студент гр. ИА-232

Сиднов Даниил Александрович

Новосибирск 2024

Цель работы: построить матрицу переходов для стохастической маршрутизации в сетях с коммутацией пакетов. Проверить матрицу на стохастичность и цепь Маркова на эргодичность.

Подготовка к лабораторной работе:

1. Повторить программирование в системе Mathcad.
2. Изучить свойства дискретной, конечной, однородной цепи Маркова.
3. Повторить определения основных операций с матрицами.
4. Изучить основы функционирования сетей передачи данных с коммутацией пакетов.

Краткая теория:

3.1 Определение

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ образует дискретную цепь Маркова, если для всех n и всех возможных случайных величин выполняется равенство:

$$P[X_n = j \mid X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_{n-1} = i_{n-1}] = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}]. \tag{3.1}$$

Если $X_n = j$, то говорят, что на n - ом шаге система находится в состоянии E_j. Выражение в правой части равенства (1) называют вероятностью перехода; оно задает условную вероятность перехода из состояния $E_{i_{n-1}}$ на *n -1-* ом шаге в E_{i_n} на n - ом шаге.

3.2 Стохастическая матрица

Обычно цепь Маркова описывается матрицей вероятностей перехода: $T = \left\| p_{ij} \right\|$ и вектором $q = (q_1, q_2, ..., q_L)$, где $q_i = P[X_0 = i]$ – это вектор начальных вероятностей, показывающий в каком состоянии была система на нулевом шаге, L – количество состояний цепи Маркова. p_{ij} и q_i удовлетворяют условию:

$$0 \le p_{ij} \le 1, \; 0 \le q_i \le 1, \quad \sum_{i=1}^{L} q_i = \sum_{j=1}^{L} p_{ij} = 1. \tag{3.2}$$

Матрицы, удовлетворяющие условию (3.2), называют *стохастическими.*
Пример стохастической матрицы:

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3.3 Неприводимая и однородная цепь Маркова

Если вероятности перехода не зависят от n (стационарны во времени), то цепь Маркова называется *однородной* и строгое ее определение задается равенством:

$$p_{ij} = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i]. \tag{3.3}$$

Для однородной цепи Маркова матрица вероятностей перехода за m шагов выглядит следующим образом: $T^{(m)} = T^m$.

Цепь Маркова называется *неприводимой*, если каждое ее состояние может быть достигнуто из любого другого. Для любой пары E_i и E_j существует такое k, что $p_{ij}^{(k)} > 0$.

3.4 Эргодическая цепь Маркова

Обозначим через $\pi_j^{(n)}$ вероятность пребывания системы на n-ом шаге в состоянии E_j: $\pi_j^{(n)} = P[X_n = j]$.

Распределение вероятностей P_j называется *стационарным*, если при его выборе в качестве начального распределения вероятностей $\pi_j^{(0)} = P_j$, для всех n выполняется равенство $\pi_j^{(n)} = P_j$.

Для *эргодической* цепи Маркова (определение смотри в лекции №4) всегда существует стационарное распределение вероятностей состояний системы, не зависящее от начального распределения вероятностей.

Для проверки однородной дискретной цепи Маркова на эргодичность необходимо:

1. Задать вектор начальных вероятностей (например, $\pi^{(0)} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$).
2. Перемножить вектор начальных вероятностей с матрицей переходов за m шагов, значение $m \geq 200$.
3. Проверить не являются ли значения полученного в результате перемножения вектора близкими к нулю с заданной точностью ($P_j \leq \varepsilon$, где ε – точность вычислений $\varepsilon \leq 10^{-5}$).
4. Если появились близкие к нулю значения, значит, данная цепь Маркова не является эргодической и необходимо изменить значения элементов матрицы вероятностей переходов.
5. Изменить вектор начальных вероятностей.
6. Повторить п. 2 – 4.
7. Выполнить проверку цепи Маркова на эргодичность для всех значений вектора начальных вероятностей.

3.5 Стохастическая маршрутизация в сетях с коммутацией пакетов

В лабораторной работе рассматривается телекоммуникационная сеть с коммутацией пакетов, состоящая из L узлов. Для примера по сети передается один пакет, который начинает свой путь в i - ом узле.

Процесс перехода пакета от узла к узлу хорошо описывается однородной дискретной цепью Маркова. Матрица вероятностей переходов играет роль маршрутной матрицы.

Стохастическая маршрутизация предполагает, что каждому узлу приписаны несколько путей к другим узлам с различными вероятностями (в сумме эти вероятности составляют единицу). С помощью генератора случайных чисел, равномерно распределенных на интервале *[0, 1]*, решается вопрос о дальнейшем маршруте пакета.

Задача данной лабораторной работы корректно разработать сеть с коммутацией пакетов и соответствующий ей Марковский процесс.

1. **Определить структуру сети, состоящей из L = 15 узлов, в виде ориентированного графа. Каждый узел должен иметь не менее трех исходящих маршрутов. Число входящих маршрутов каждого узла должно быть не менее одного. Сделать эскиз сети на черновике.**

```
% Задание размерности матрицы переходов
L = 4;
T = zeros(L, L);  % Обнуление всех элементов матрицы

P = [0, 3, 3, 3;
     3, 0, 2, 1;
     3, 2, 0, 1;
     3, 2, 1, 0];
```

2. Разработать функцию stochastic(matrix), которая проверяет, является ли матрица, стохастической.

```
function res = stochastic(matrix)
    [rows, cols] = size(matrix);
    res = true;
    for i = 1:rows
        if abs(sum(matrix(i, :)) - 1) > eps
            res = false;
            break;
        end
    end
end
```

3. Разработать функцию ergodic(matrix,epsilon), которая проверяет, является ли цепь Маркова, описанная матрицей переходов, эргодической.

```
function res = ergodic(matrix)
    res = all(eig(matrix) > 0);
end
```

4. Проверка на эргодичность и стохастичность

```
% Убедимся, что все строки суммируются до 1 (стоимость каждого перехода)
for i = 1:L
    if sum(T(i, :)) == 0  % Если строка пустая, добавляем равномерные вероятности
        possible_destinations = setdiff(1:L, i);
        chosen_destinations =
possible_destinations(randperm(numel(possible_destinations), 3));
        T(i, chosen_destinations) = 1/3;
    end
    T(i, :) = T(i, :) / sum(T(i, :));  % Нормализация строки
end

% Проверка стохастичности
is_stochastic = stochastic(T);
disp(['Матрица стохастическая: ', num2str(is_stochastic)]);

% Проверка эргодичности
is_ergodic = ergodic(T);
disp(['Цепь Маркова эргодическая: ', num2str(is_ergodic)]);
```

0 – отрицательный результат проверки

```
Матрица стохастическая: 1
Цепь Маркова эргодическая: 0
```

Ответы на контрольные вопросы

1. Определение цепи Маркова: Цепь Маркова — это математическая модель, которая описывает систему, проходящую через последовательность событий, где вероятность каждого следующего состояния зависит только от текущего состояния.
2. Классификация цепей Маркова: Цепи Маркова классифицируются по числу состояний (конечные и бесконечные цепи), по времени (дискретные и непрерывные цепи), и по однородности (однородные и неоднородные цепи).
3. Свойства цепей Маркова: Основные свойства цепей Маркова включают марковское свойство (независимость от предыдущих состояний), стохастичность (сумма вероятностей переходов из одного состояния равна 1), и классификация состояний (поглощающие, возвратные и транзитные состояния).

4. Состояния цепи Маркова: В цепи Маркова состояния могут быть различными, например, поглощающие (состояние, из которого нет выхода), возвратные (состояние, в которое система возвращается со временем), и транзитные (состояние, которое покидается навсегда).
5. Неприводимая цепь Маркова: Неприводимая цепь Маркова — это цепь, в которой каждое состояние может быть достигнуто из любого другого состояния за конечное количество шагов.
6. Апериодическая цепь Маркова: Апериодическая цепь Маркова — это цепь, у которой состояния не имеют фиксированного периода повторения. Это значит, что возможно возвращение в состояние через произвольное количество шагов.
7. Однородная цепь Маркова: Однородная цепь Маркова — это цепь, в которой вероятности переходов между состояниями остаются неизменными на всех шагах.
8. Свойство эргодичности: Эргодичность цепи Маркова означает, что цепь является неприводимой и апериодической. В результате существуют устойчивые стационарные распределения вероятностей состояний.
9. Стационарное распределение состояний цепи Маркова: Стационарное распределение — это распределение вероятностей состояний, которое не изменяется со временем при переходах в цепи Маркова. Это равновесное состояние системы.
10. Общие понятия о вычислительных сетях с коммутацией пакетов и методах маршрутизации в них: Вычислительные сети с коммутацией пакетов представляют собой сети, где данные разбиваются на небольшие пакеты, которые передаются независимо друг от друга. Методы маршрутизации определяют пути, по которым пакеты передаются от начальной точки до конечной. Основные методы включают статическую маршрутизацию (маршруты определены заранее), динамическую маршрутизацию (маршруты определяются на основе текущего состояния сети) и адаптивную маршрутизацию (маршруты изменяются в реальном времени в ответ на изменения в сети).

Вывод

В этой работе мы выполнили серию математических расчётов и визуализаций с использованием MATLAB. Этот мощный инструмент показал себя как гибкий и эффективный помощник в решении инженерных и научных задач, предоставив широкие возможности для анализа данных, построения графиков и автоматизации вычислений. Использование MATLAB позволило получить точные и наглядные результаты, что делает его незаменимым инструментом для решения сложных задач в различных областях науки и техники.