Федеральное агентство связи
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (СибГУТИ)

Отчет по

Лабораторной работе №8

по дисциплине «Теория массового обслуживания»

Тема: «Система массового обслуживания M/G/1. Формула Хинчина-Поллячека»

Вариант 11

Выполнил:
студент гр. ИА-232
Московских Дмитрий Петрович

Новосибирск 2024

Цель работы: Проверить корректность формулы Хинчина – Поллячека на примере систем типа M/M/1 и M/D/1.

Подготовка к лабораторной работе:

1. Повторить обозначения систем массового обслуживания.
2. Повторить вероятностные свойства систем массового обслуживания типа M/G/1, M/M/1 и M/D/1.
3. Повторить формулу Хинчина – Поллячека для вероятностно-временных характеристик систем массового обслуживания.

Краткая теория:

7.1 Характеристики M/G/1

Средняя длина очереди

$$\overline{N}_q = \rho^2 \frac{(1+C_b^2)}{2(1-\rho)}. \quad (7.1)$$

Среднее число заявок в СМО

$$\overline{N} = \rho + \rho^2 \frac{(1+C_b^2)}{2(1-\rho)}. \quad (7.2)$$

Среднее время ожидания

$$W = \rho \cdot \overline{x} \frac{(1+C_b^2)}{2(1-\rho)}. \quad (7.3)$$

Среднее время пребывания требования в системе

$$T = \overline{x} + \rho \cdot \overline{x} \frac{(1+C_b^2)}{2(1-\rho)}. \quad (7.4)$$

7.2 Характеристики M/D/1

Средняя длина очереди

$$\overline{N}_q = \rho^2 \frac{1}{2(1-\rho)}. \quad (7.5)$$

Среднее число заявок в СМО

$$\overline{N} = \rho^2 \frac{1}{2(1-\rho)} + \rho. \quad (7.6)$$

Среднее время ожидания

$$W = \frac{\rho \cdot x}{2(1-\rho)}. \quad (7.7)$$

Среднее время пребывания требования в системе

$$T = \frac{x(2-\rho)}{2(1-\rho)}. \tag{7.8}$$

7.3 Характеристики M/M/1

Средняя длина очереди

$$\overline{N}_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \tag{7.9}$$

Среднее число заявок в СМО

$$\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho}. \tag{7.10}$$

Среднее время ожидания

$$W = \frac{\rho \cdot \overline{x}}{1-\rho}. \tag{7.11}$$

Среднее время пребывания требования в системе

$$T = \frac{\overline{x}}{1-\rho}, \tag{7.12}$$

где

$C_b^2 = \frac{\sigma_b^2}{(\overline{x})^2}$ – нормированная дисперсия времени обслуживания,

σ_b^2 – дисперсия времени обслуживания,

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – коэффициент использования системы.

1. **Написать Mathcad – программу, рассчитывающую характеристики СМО.**
3. Получить зависимости всех вышеописанных характеристик от нормирован ной дисперсии времени обслуживания и коэффициента загрузки для систе мы типа M/G/1 по формулам 7.1 – 7.4. При этом нормированную дисперсию изменять следующим образом: 100 , , 30 , 20 , 10 , 1 , 0 2 ⍰ = b
C , Среднее время об
служивания задать по своему усмотрению

```
rho = lambda / mu; % коэффициент загрузки

% Вариации для C_b^2 (нормированная дисперсия для M/G/1)
Cb2_values = [0, 1, 10, 20, 30, 100];
mean_service_time = 1 / mu;

% Выделение памяти для хранения результатов
Nq_MG1 = zeros(length(Cb2_values), 1);
N_MG1 = zeros(length(Cb2_values), 1);
Wq_MG1 = zeros(length(Cb2_values), 1);
T_MG1 = zeros(length(Cb2_values), 1);

% Рассчет характеристик для M/G/1
for i = 1:length(Cb2_values)
    Cb2 = Cb2_values(i);
```

```
    Nq_MG1(i) = (rho^2 * (1 + Cb2)) / (2 * (1 - rho)); % Среднее число заявок в
очереди
    N_MG1(i) = Nq_MG1(i) + rho; % Среднее число заявок в системе
    Wq_MG1(i) = Nq_MG1(i) / lambda; % Среднее время ожидания
    T_MG1(i) = Wq_MG1(i) + mean_service_time; % Среднее время пребывания
end

% Характеристики для M/D/1
Nq_MD1 = (rho^2) / (2 * (1 - rho)); % Среднее число заявок в очереди
N_MD1 = Nq_MD1 + rho; % Среднее число заявок в системе
Wq_MD1 = Nq_MD1 / lambda; % Среднее время ожидания
T_MD1 = Wq_MD1 + mean_service_time; % Среднее время пребывания

% Характеристики для M/M/1
Nq_MM1 = rho^2 / (1 - rho); % Среднее число заявок в очереди
N_MM1 = rho / (1 - rho); % Среднее число заявок в системе
Wq_MM1 = Nq_MM1 / lambda; % Среднее время ожидания
T_MM1 = 1 / (mu * (1 - rho)); % Среднее время пребывания
```

2. **Получить зависимости вышеописанных характеристик от коэффициента за грузки для системы M/D/1 по формулам 7.5 – 7.8. 5. Получить зависимости характеристик от коэффициента загрузки для систе мы M/M/1по формулам 7.9 – 7.12. 6. Построить графики полученных зависимостей (каждая характеристика на отдельном графике, три СМО на одном графике).**

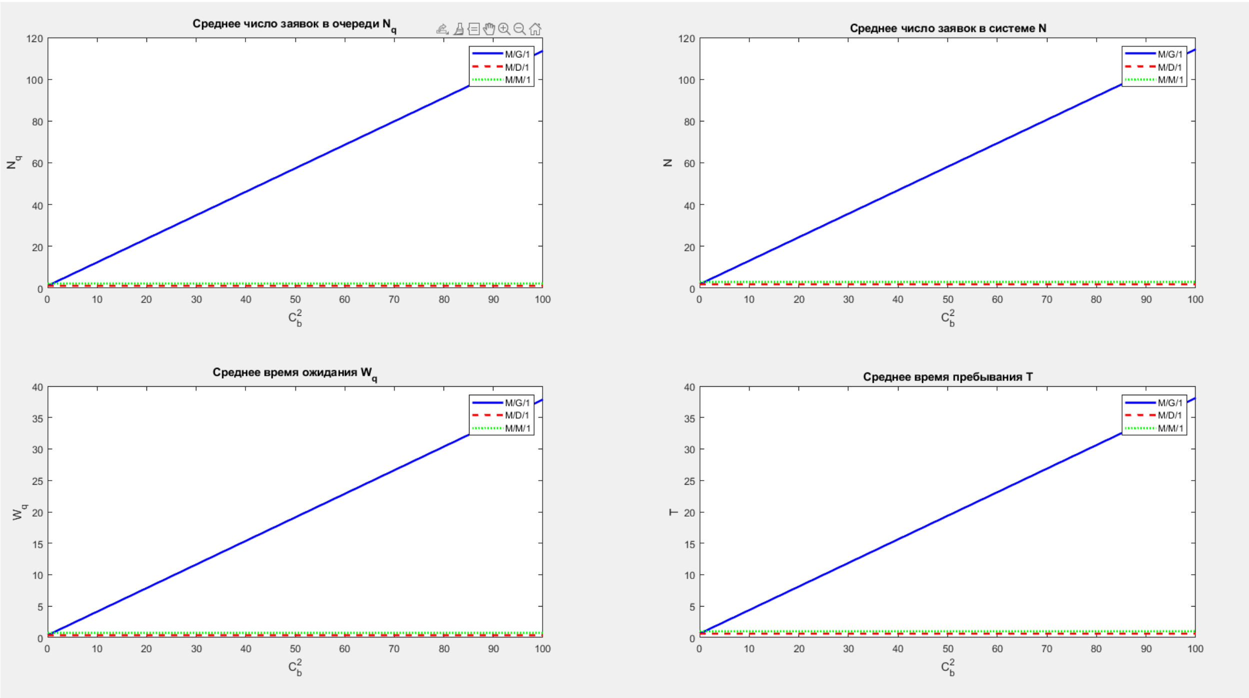
```
% Графики
figure;
subplot(2,2,1);
plot(Cb2_values, Nq_MG1, 'b-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(Cb2_values, Nq_MD1*ones(size(Cb2_values)), 'r--', 'LineWidth', 2);
plot(Cb2_values, Nq_MM1*ones(size(Cb2_values)), 'g:', 'LineWidth', 2);
title('Среднее число заявок в очереди N_q');
xlabel('C_b^2');
ylabel('N_q');
legend('M/G/1', 'M/D/1', 'M/M/1');

subplot(2,2,2);
plot(Cb2_values, N_MG1, 'b-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(Cb2_values, N_MD1*ones(size(Cb2_values)), 'r--', 'LineWidth', 2);
plot(Cb2_values, N_MM1*ones(size(Cb2_values)), 'g:', 'LineWidth', 2);
title('Среднее число заявок в системе N');
xlabel('C_b^2');
ylabel('N');
legend('M/G/1', 'M/D/1', 'M/M/1');

subplot(2,2,3);
plot(Cb2_values, Wq_MG1, 'b-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(Cb2_values, Wq_MD1*ones(size(Cb2_values)), 'r--', 'LineWidth', 2);
plot(Cb2_values, Wq_MM1*ones(size(Cb2_values)), 'g:', 'LineWidth', 2);
title('Среднее время ожидания W_q');
xlabel('C_b^2');
ylabel('W_q');
legend('M/G/1', 'M/D/1', 'M/M/1');

subplot(2,2,4);
plot(Cb2_values, T_MG1, 'b-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(Cb2_values, T_MD1*ones(size(Cb2_values)), 'r--', 'LineWidth', 2);
```

```
plot(Cb2_values, T_MM1*ones(size(Cb2_values)), 'g:', 'LineWidth', 2);
title('Среднее время пребывания T');
xlabel('C_b^2');
ylabel('T');
legend('M/G/1', 'M/D/1', 'M/M/1');
```



Контрольные вопросы:

1. Формула Хинчина – Поллячека для системы массового обслуживания типа M/G/1

Формула Хинчина – Поллячека для системы M/G/1 описывает зависимости вероятностно-временных характеристик от нормированной дисперсии времени обслуживания. Основные характеристики:

- Средняя длина очереди:

$$N_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \frac{\sigma^2}{2(1-\rho)}$$

- Среднее число заявок в СМО:

$$N = N_q + \rho$$

- Среднее время ожидания:

$$: W_q = \frac{N_q}{\lambda}$$

- Среднее время пребывания в системе:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \sigma^2$$

— дисперсия времени обслуживания.

2. Формула Хинчина – Поллячека для системы массового обслуживания типа M/M/1

Формула для M/M/1:

- Средняя длина очереди:

$$N_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

- Среднее число заявок в СМО:

$$N = \frac{\rho}{1-\rho}$$

- Среднее время ожидания:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

- Среднее время пребывания в системе:

$$: W = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

3. Формула Хинчина – Поллячека для системы массового обслуживания типа M/D/1

Формула для M/D/1:

- Средняя длина очереди: $Nq = (\rho^2) / (2(1 - \rho))$
- Среднее число заявок в СМО: $N = Nq + \rho$
- Среднее время ожидания: $Wq = (\rho^2) / (2\mu(1 - \rho))$
- Среднее время пребывания в системе: $W = Wq + (1 / \mu)$

4. Нормированная дисперсия времени обслуживания

Нормированная дисперсия времени обслуживания определяется как: $Cb^2 = \sigma^2 / \mu^2$, где σ^2 — дисперсия времени обслуживания, μ — интенсивность обслуживания.

5. Средняя длина очереди

Средняя длина очереди для разных систем:

- M/G/1: $Nq = (\rho^2) / (1 - \rho) + (\sigma^2) / (2(1 - \rho))$
- M/M/1: $Nq = (\rho^2) / (1 - \rho)$
- M/D/1: $Nq = (\rho^2) / (2(1 - \rho))$

6. Среднее число заявок в СМО

Среднее число заявок в системе:

- M/G/1: N=Nq+ρN = N_q + \rhoN=Nq+ρ
- M/M/1: N=ρ1−ρN = \frac{\rho}{1 - \rho}N=1−ρρ

- M/D/1: N=Nq+ρN = N_q + \rhoN=Nq+ρ

7. Среднее время ожидания

Среднее время ожидания в очереди для разных систем:

- M/G/1: W = Wq + (1 / μ)
- M/M/1: W = 1 / (μ(1 - ρ))
- M/D/1: W = Wq + (1 / μ)

8. Среднее время пребывания требования в системе

Среднее время пребывания заявки в системе:

- M/G/1: W=Wq+1μW = W_q + \frac{1}{\mu}W=Wq+μ1
- M/M/1: W=1μ(1−ρ)W = \frac{1}{\mu(1 - \rho)}W=μ(1−ρ)1
- M/D/1: W=Wq+1μW = W_q + \frac{1}{\mu}W=Wq+μ1

9. Сравнение вероятностно-временных характеристик систем M/D/1 и M/M/1

Системы M/D/1 и M/M/1 различаются по характеру времени обслуживания. В системе M/D/1 время обслуживания фиксировано, что приводит к более предсказуемым характеристикам, меньшему среднему времени ожидания и меньшему числу заявок в очереди по сравнению с M/M/1, где время обслуживания подчиняется экспоненциальному распределению. Это делает систему M/D/1 более эффективной и менее подверженной колебаниям в количестве заявок.

Вывод

В результате выполнения лабораторной работы была подтверждена корректность формулы Хинчина – Поллячека для систем массового обслуживания типов M/G/1, M/M/1 и M/D/1. Были исследованы зависимости вероятностно-временных характеристик от нормированной дисперсии времени обслуживания и коэффициента загрузки. Полученные результаты показали, что различные распределения входного потока и времени обслуживания существенно влияют на характеристики системы.

Сравнение систем M/D/1 и M/M/1 выявило, что фиксированное время обслуживания в системе M/D/1 приводит к более предсказуемым и стабильным результатам, чем в системе M/M/1, где случайность распределения времени обслуживания может создавать дополнительные очереди и увеличивать время ожидания. Эти результаты подчеркивают важность выбора подходящей модели системы массового обслуживания для оптимизации процессов и повышения эффективности работы системы.