Пояснения к решениям тестовых заданий по ЦОС.

Реваев Дмитрий

1. Линейная свёртка двух векторов.
Было необходимо найти элементы последовательности $z(k)$, заданной выражением:

$$z(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot y(k-n),$$

где $x(n)$ и $y(n)$ – последовательности длины N, а индекс $k \in [0 \ldots 2(N-1)]$. Последовательности $x(n)$ и $y(n)$ имеют N элементов с ненулевыми значениями. Это элементы с индексами $m \in [0 \ldots N-1]$ Реализовано два варианта вычисления линейной свёртки: прямой и с использованием циклической свёртки. Вычисление свёртки прямым методом при $N = 2$ описывается следующими равенствами:

$$z(k) = \sum_{n=0}^{1} x(n) \cdot y(k-n), k \in [0 \ldots 2]$$

$$z(0) = x(0) \cdot y(0) + x(1) \cdot y(-1) = x(0) \cdot y(0)$$

$$z(1) = x(0) \cdot y(1) + x(1) \cdot y(0)$$

$$z(2) = x(0) \cdot y(2) + x(1) \cdot y(1) = x(1) \cdot y(1)$$

Исходя из выражений выше, для вычисления элементов $z(0), z(1), z(2)$ требуется 4 операции умножения на переменную и одна операция сложения. Стоимость выполнения этих операций согласно приведённой таблице: $4 \cdot 8 + 1 \cdot 1 = 33$.
Прямой метод нахождения линейной свёртки последовательностей длины $N = 3$:

$$z(k) = \sum_{n=0}^{2} x(n) \cdot y(k-n), k \in [0 \ldots 4]$$

$$z(0) = x(0) \cdot y(0) + x(1) \cdot y(-1) + x(2) \cdot y(-2) = x(0) \cdot y(0)$$

$$z(1) = x(0) \cdot y(1) + x(1) \cdot y(0) + x(2) \cdot y(-1) = x(0) \cdot y(1) + x(1) \cdot y(0)$$

$$z(2) = x(0) \cdot y(2) + x(1) \cdot y(1) + x(2) \cdot y(0)$$

$$z(3) = x(0) \cdot y(3) + x(1) \cdot y(2) + x(2) \cdot y(1) = x(1) \cdot y(2) + x(2) \cdot y(1)$$

$$z(4) = x(0) \cdot y(4) + x(1) \cdot y(3) + x(2) \cdot y(2) = x(2) \cdot y(2)$$

Для вычисления значений элементов последовательности $z(n)$ потребуется 9 операций умножения на переменную и 4 операции сложения. Стоимость выполнения этих операций: $9 \cdot 8 + 4 \cdot 1 = 76$.
Прямой метод вычисления линейной свёртки последовательностей, состоящих из N ненулевых элементов, требует проведения N^2 операций умножения и $(N-1)^2$ операций сложения общей стоимостью $8N^2 + (N-1)^2 = 9N^2 - 2N + 1$.
Второй метод вычисления свёртки основан на следствии из теоремы о свёртке и алгоритме быстрого преобразования Фурье. К последовательностям $x(n)$ и $y(n)$ конечной длины применимо следующее свойство дискретного преобразования Фурье:

$$\mathcal{DFT}[x(n) * y(n)] = \mathcal{DFT}[x(n)] \cdot \mathcal{DFT}[y(n)],$$

где $\mathcal{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) exp\Big(-i\frac{2\pi}{N}nk\Big), n, k = 0 \dots N-1$ и

$x(k) * y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) y\Big((k-n) \mathrm{mod} N\Big)$ – операция циклической свёртки,

$y\Big((k-n) \mathrm{mod} N\Big)$ – сигнал, циклически задержанный на n отсчётов относительно исходного.

Значения линейной свёртки можно определить, вычислив циклическую свёртку последовательностей, дополненных в конце $N-1$ нулями:

$$z(k) = \sum_{n=0}^{2N-1} x(n) y\Big((k-n) \mathrm{mod} (2N-1)\Big).$$

Циклическую свёртку двух последовательностей можно найти, выполнив обратное дискретное преобразование Фурье над произведением их спектров ДПФ. Расчёт ДПФ целесообразно провести с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье:

$$z(n) = \mathcal{IFFT}\Big[\mathcal{FFT}[x(n)]\mathcal{FFT}[y(n)]\Big].$$

Процесс расчёта циклической свёртки сигналов $a(n)$ и $b(n)$, содержащих по N отсчётов, показан на рисунке ниже:

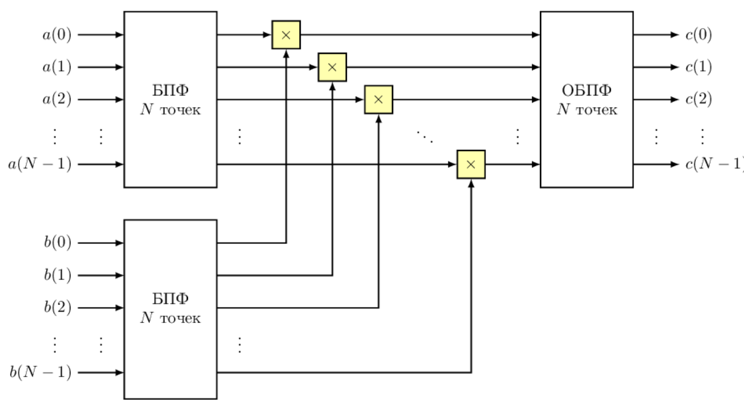


Рис. 1: Вычисление циклической свёртки на основе алгоритма БПФ.

Наиболее эффективно алгоритмы БПФ работают с массивами, размерность которых являются целой степенью двойки. Пусть $M = 2^L > 2N-1$ – ближайшее такое число к размеру последовательности элементов линейной свёртки. Для нахождения линейной свёртки необходимо вычисление трёх M-точечных БПФ и M комплексных умножений. Алгоритм 2^L-точечного БПФ с прореживанием по времени/частоте имеет L уровней разделения-объединения. На первых двух уровнях производится двух- и четырёхточечное ДПФ с умножением на тривиальные коэффициенты: $\pm 1, \pm i$, поэтому общее количество операций комплексного умножения на нетривиальную константу – $\frac{3M}{2}(\log_2 M - 2)$, а операций комплексного умножения на переменную – $M \log_2 M$. Количество операций комплексного сложения – $3M \log_2 M$. Одна операция комплексного умножения требует 4 операции умножения и две операции сложения, одно комплексное сложение – две операции сложения. Значит, стоимость вычисления свёртки равна $14 \cdot \frac{3M}{2}(\log_2 M - 2) + 34M + 6M\log_2 M = 27M\log_2 M - 8M$. Тогда критерий использования второго метода свёртки можеть быть описан неравенством:

$$9N^2 - 2N + 1 > M(27\log_2 M - 8),$$

где N – количество ненулевых элементов последовательностей $x(n)$ и $y(n)$, а M – ближайшая к $2N-1$ степень двойки.

Для N = 16 в третьем пункте задания критерий не выполняется, так как

$9 \cdot 16^2 - 2 \cdot 16 + 1 < 32 \cdot (27 \cdot 5 - 8)$.

2. Передискретизация сигнала с рациональным коэффициентом.

При изменении частоты сэмплирования (передискретизации) сигнала по имеющимся отсчётам, соответствующим частоте дискретизации F_s, вычисляются отсчёты сигнала, соответствущие другой частоте дискретизации F_{res}. Идеальная передискретизация эквивалентна восстановлению непрерывного сигнала по его отсчётам с последующей дискретизацией его на новой частоте. Точное значение исходного непрерывного сигнала в момент времени t определяется следующим выражением:

$$x(t) = \sum_i x(t_i) \frac{\sin \frac{\omega_s}{2}(t - t_i)}{\frac{\omega_s}{2}(t - t_i)},$$

где $x(t_i)$ – i-ый отсчёт сигнала, $\omega_s = 2\pi F_s$ – циклическая частота дискретизации. Функция $\frac{\sin \frac{\omega_s}{2}(t-t_i)}{\frac{\omega_s}{2}(t-t_i)}$ не является финитной, поэтому для вычисления значения сигнала в данной точке необходимо обработать бесконечное число его отсчётов. Для реальных сигналов с конечной длительностью применяются восстанавливающие фильтры с импульсной характеристикой $h(t)$, частотная характеристика которых близка к частотной характеристике идеального фильтра нижних частот:

$$x(t) = \sum_i x(t_i) h(t - t_i).$$

Частные случаи передискретизации: децимация с целым коэффициентом (уменьшение частоты дискретизации в целое число раз), интерполяция с целым коэффициентом (увеличение частоты дискретизации в целое число раз), комбинация предыдущих двух методов (изменение частоты дискретизации в рациональное число раз).
Децимация цифрового сигнала с целым коэффициентом производится в два этапа: удаление высокочастотных составляющих, не удовлетворяющих условиям теоремы Котельникова для новой частоты дискретизации, отбрасывание лишних отсчётов. При уменьшении частоты дискретизации в M раз сохраняется каждый M-ый отсчёт. Интерполяция позволяет увеличить частоту дискретизации в целое или дробное число раз с помощью вычисления значений сигнала в промежуточных отсчётах. Для этого на место этих промежуточных отсчётов ставятся нули, далее сигнал проходит цифровой фильтр нижних частот. Выход сигнала нормируется умножением на коэффициент интерполяции. Для изменения частоты дискретизации в $\frac{L}{M}$ раз можно последовательно произвести интерполяцию с коэффициентом L и децимацию с коэффициентом M.

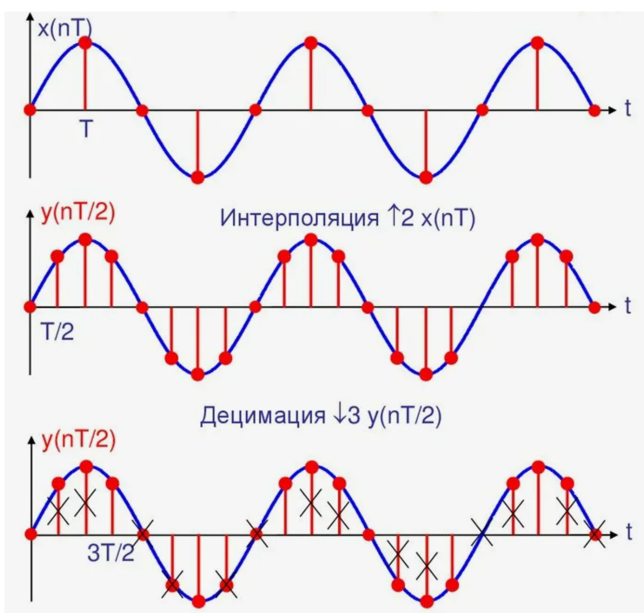


Рис. 2: Передискретизация сигнала с коэффициентом $\frac{2}{3}$.

При этом фильтрацию сигнала достаточно произвести всего один раз: между интерполяцией и децимацией сигнала.

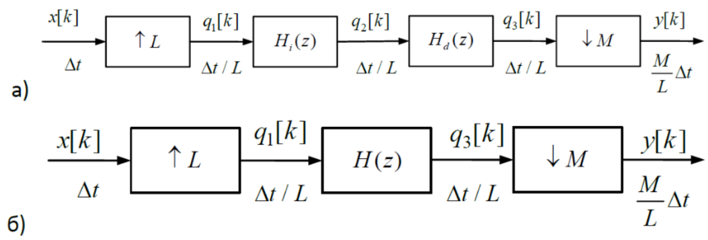


Рис. 3: Система однократной передискретизации.

На рис. а) цифровой фильтр с передаточной функцией $H_i(z)$ относится к блоку однократной интерполяции. Цифровой фильтр с передаточной функцией $H_d(z)$ относится к блоку однократной децимации. Оба фильтра работают на одной частоте дискретизации $f_s = L/\Delta t$. Это обстоятельство позволяет объединить два фильтра в один с передаточной функцией $H(z) = H_i(z)H_d(z)$. Недостатком данного метода является необходимость фильтрации сигнала на повышенной в L раз частоте дискретизации, что требует значительных вычислительных ресурсов.

Для выполнения передискретизации сигнала с коэффициентом 4/5 было решено выделять группы по 6 отсчётов с перекрытием в один отсчёт: 6-ой отсчёт n-ой группы – 1-ый отсчёт в (n+1)-ой группе. По значениям этих отсчётов были вычислены значения трёх промежуточных отсчётов с помощью интерполяционного полинома Лагранжа. В качестве отсчётов сигнала с новой частотой дискретизации $F_{res} = \frac{4}{5}F_s$ из каждой такой группы был взят первый отсчёт без изменений и следующие за ним три промежуточных отсчёта.

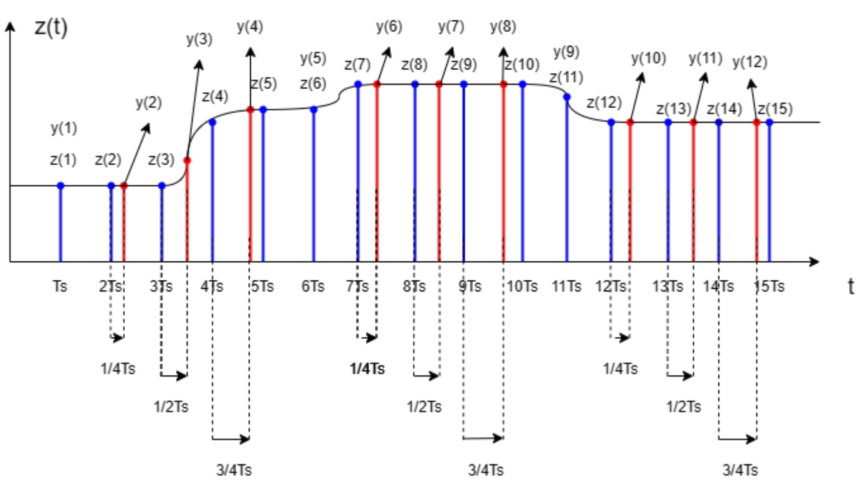


Рис. 4: Передискретизация сигнала с коэффициентом $\frac{4}{5}$.

На рисунке выше синими точками показаны значения отсчётов исходного сигнала $z(n)$ с шагом дискретизации $T_s = 1/F_s$, красными – значения промежуточных отсчётов. Промежуточные значения были вычислены с помощью кубической интерполяции по четырём точкам. В общем виде выражение для нахождения этих значений выглядит так:

$$z\Big((n+\mu)T_s\Big) = \Big(-\frac{\mu^3}{6}+\frac{\mu^2}{2}-\frac{\mu}{3}\Big)z\Big((n-1)T_s\Big)+ \\ +\Big(\frac{\mu^3}{2}-\mu^2-\frac{\mu}{2}+1\Big)z\Big(nT_s\Big)+ \\ +\Big(-\frac{\mu^3}{2}+\frac{\mu^2}{2}+\mu\Big)z\Big((n+1)T_s\Big)+ \\ +\Big(\frac{\mu^3}{6}-\frac{\mu}{6}\Big)z\Big((n+2)T_s\Big), \tag{1}$$

где $\mu \in (0,1)$ – дробный шаг.
Значения первых пяти отсчётов сигнала $y(n)$ с новой частотой дискретизации:

$$y(1) = z(1), \quad y(2) = z(2+1/4), \quad y(3) = z(3+1/2), \quad y(4) = z(4+3/4), \quad y(5) = z(6).$$

Следующие три промежуточных значения $y(6), y(7), y(8)$ вычислены по значениям исходного сигнала в точках $z(6), \ldots, s(11)$. Уравнение (1) может быть переписано следующим образом:

$$z\Big((n+\mu)T_s\Big) = \Big(z\Big((n-1)T_s\Big) \quad z\Big(nT_s\Big) \quad z\Big((n+1)T_s\Big) \quad z\Big((n+2)T_s\Big)\Big) \cdot \begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 & -1/3 & 0 \\ 1/2 & -1 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/6 & 0 & -1/6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu^3 \\ \mu^2 \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

На рисунке ниже представлена схема цифровой передискретизации сигналов на основе интерполяции. Она содержит четыре КИХ-фильтра, рассчитывающих коэффициенты полинома. Расчёт полинома производится по схеме Горнера.

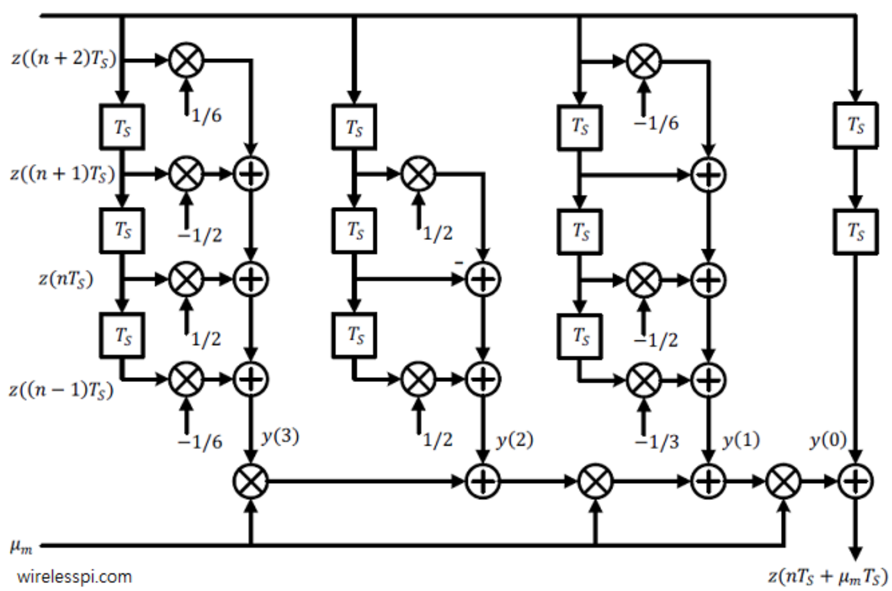


Рис. 5: Структура фильтра Фарроу для кубической интерполяции Лагранжа.

Для осуществления передискретизации был использован случайный сигнал на выходе фильтра Баттерворта 4-го порядка с частотой среза $\nu_c = 1/6$.

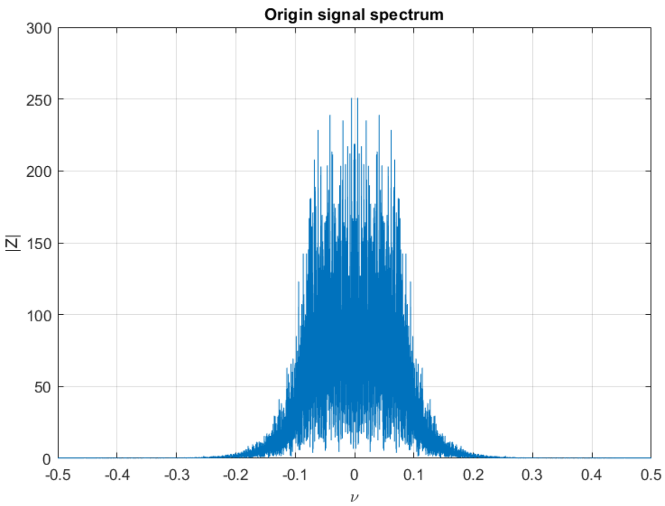


Рис. 6: Спектр исходного сигнала в нормированных частотах.

В результате передискретизации сигнала с коэффициентом $^4/_5$ получился сигнал той же длительности, содержащий на 20% меньше отсчётов. В полосе $[0, 0.2\nu]$ для исходного сигнала и $[0, 0.25\nu]$ – для передискретизованного нормализованная среднеквадратичная ошибка менее -13dB.

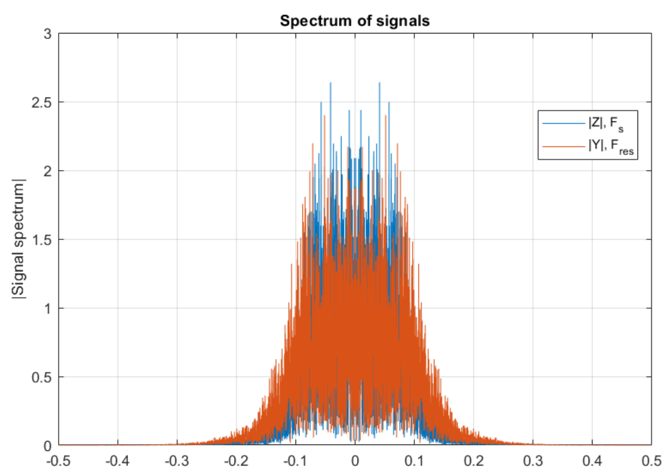


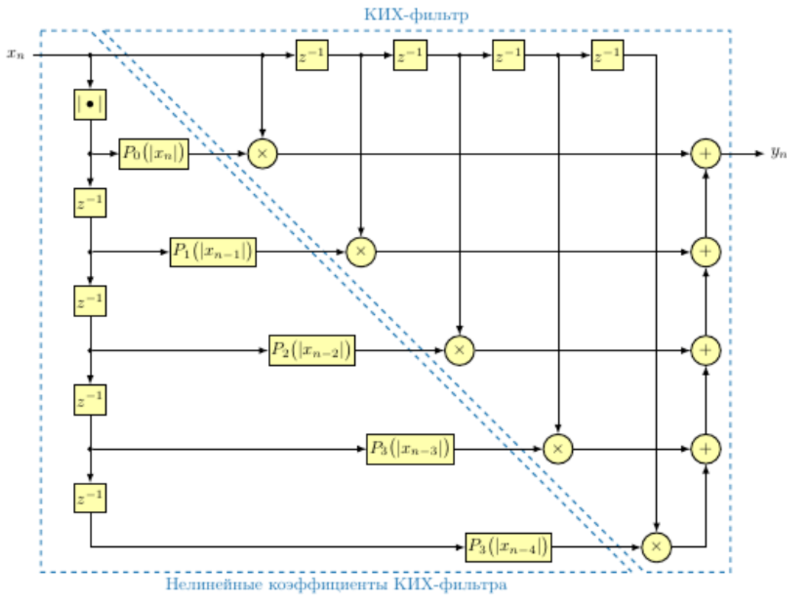
Рис. 7: Спектры исходного и передискретизованного сигналов в нормированных частотах.

3. Адаптивная фильтрация.

Дана нелинейная система вида

$$y(n) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k x(n-k) + b_k x(n-k)|x(n-k)|^2 + c_k x(n-k)|x(n-k)|^4,$$

где $x(n)$ и $y(n)$ – сигнал на входе и выходе нелинейной системы, a, b, c – ненулевые коэффициенты, истинные значения и количество K которых неизвестны. Для оценки неизвестных коэффициентов системы была выбрана нелинейная полиномиальная модель с памятью:



Эта модель представляет собой КИХ-фильтр, коэффициенты которого есть полиномы $P_k(|x(n-k)|)$, зависящие от модуля задержанных отсчётов входного сигнал $x(n-k)$. Её выход может быть записан как

$$y'(n) = \sum_{k=0}^{K-1} x(n-k) \sum_{q=0}^{Q} \omega_{k,q} |x(n-k)|^{2q} = \sum_{k=0}^{K-1} x(n-k) P_k(|x(n-k)|),$$

где $Q = 2$ – число, определяющее порядок нелинейности системы и адаптивного фильтра, $\omega_{k,0} = a'_k, \omega_{k,1} = b'_k, \omega_{k,2} = c'_k$ – коэффициенты многочлена $P_k(|x(n-k)|)$, которые также являются оценками неизвестных коэффициентов нелинейной системы. Выход полиномиальной модели можно записать в терминах вектора состояния фильтра $y(n) = \mathbf{u}_n^T \mathbf{w}$, где $\mathbf{u}_n^T = \Big(x(n) \quad x(n)|x(n)|^2 \quad x(n)|x(n)|^4 \quad \dots \quad x(n-K+1) \quad x(n-K+1)|x(n-K+1)|^2$
$x(n-K+1)|x(n-K+1)|^4 \Big) \in \mathbb{C}^{1\times K(Q+1)}$,
а $\mathbf{w} = (\omega_{0,0} \quad \omega_{0,1} \quad \omega_{0,2} \quad \dots \quad \omega_{K-1,0} \quad \omega_{K-1,1} \quad \omega_{K-1,2})^T \in \mathbb{C}^{K(Q+1)\times 1}$.
Теперь задача нелинейной адаптации может быть сведена к поиску коэффициентов полиномов, обеспечивающих минимум среднего квадрата ошибки:
$J(\mathbf{w}) = \mathbf{E}[|\mathbf{e}|^{\mathbf{2}}] = \sum_{n=0}^{N-1} |e_n|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} (|\hat{y}(n) - \mathbf{u}_n^T \mathbf{w}|)^2 \to min_{\mathbf{w}}$,
где $\hat{y}(n)$ – зашумленный сигнал на выходе нелинейной системы длительностью N отсчётов.
Перейдём от суммы к скалярному произведению векторов ошибок:
$J(\mathbf{w}) = \mathbf{E}[|\mathbf{e}|^{\mathbf{2}}] = \sum_{n=0}^{N-1} |e_n|^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{U}\mathbf{w})^T (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{U}\mathbf{w})$, где матрица состояния входного сигнала:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} x(0) & \cdots & x(0)|x(0)|^4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(K-1) & \cdots & x(K-1)|x(K-1)|^4 & \cdots & x(0) & \cdots & x(0)|x(0)|^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(N-1) & \cdots & x(N-1)|x(N-1)|^4 & \cdots & x(N-K) & \cdots & x(N-K)|x(N-K)|^4 \end{pmatrix}$$

$J(\mathbf{w})$ – квадратичная функция вещественого векторного аргумента. Её можно минимизировать, найдя и приравняв к нулю вектор градиента $\nabla_J(\mathbf{w})$:

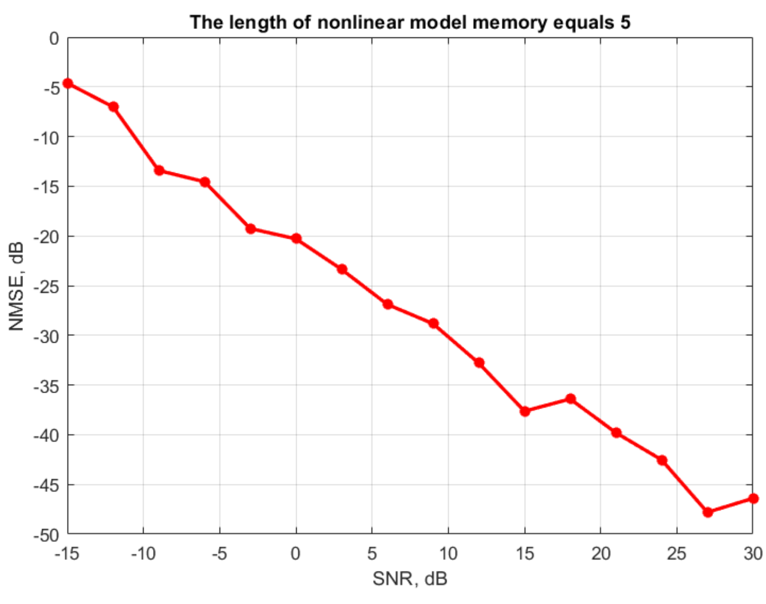
$$\nabla_J(\mathbf{w}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^T} J(\mathbf{w}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^T} (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{U}\mathbf{w})^T (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{U}\mathbf{w}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^T} (\mathbf{w}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U}\mathbf{w} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{y}}^T \hat{\mathbf{y}}) =$$

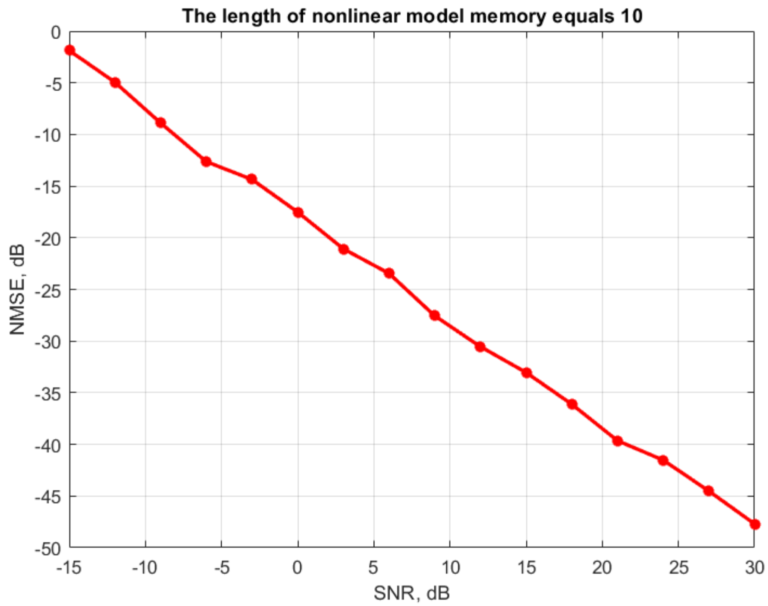
$$\Big((\mathbf{U}^T\mathbf{U})^T + \mathbf{U}^T\mathbf{U}\Big)\mathbf{w} - 2\mathbf{U}^T\hat{\mathbf{y}} = 2\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{w} - 2\mathbf{U}^T\hat{\mathbf{y}}.$$

Приравняв градиент к нулю, получим систему линейных алгебраических уравнений, решением которой является LS-оценка коэффициентов нелинейной системы:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}\hat{\mathbf{y}}.$$

При моделировании данной задачи было сделано следующее: сгенерирован комплексный сигнал, который был в соотношении 1:9 поделен на обучающую и тестовую выборку. Задан коэффициент памяти нелинейной модели K и сгенерировано $3K$ комплексных случайных чисел, соответствующих коэффициентам a_k, b_k, c_k. Для получения выхода системы была составлена матрица состояний, которая умножалась на заданные коэффициенты. К сигналу на выходе системы добавлялся БГШ со значением SNR в диапазоне от -15 до 30 dB. Минимизация ошибки мощности производилась по обучающей выборке методом LS-оценки в итеративном процессе. На каждой итерации память нелинейной полиномиальной модели увеличивалась на единицу (добавлялось три коэффициента). Итеративный процесс выполнялся до тех пор, пока уменьшалась нормализованная мощность ошибки (критерий завершения цикла на i-ой итерации: $|\mathbf{e}^{(\mathbf{i})}|^\mathbf{2}/|\hat{\mathbf{y}}|^\mathbf{2} > |\mathbf{e}^{(\mathbf{i-1})}|^\mathbf{2}/|\hat{\mathbf{y}}|^\mathbf{2}$). Качество минимизации мощности ошибки для различных значений K памяти нелинейной системы в наблюдаемом диапазоне значений отношения сигнал/шум измерялось по критерию нормализованной среднеквадратичной ошибки на тестовой выборке отсчётов выходного сигнала системы.





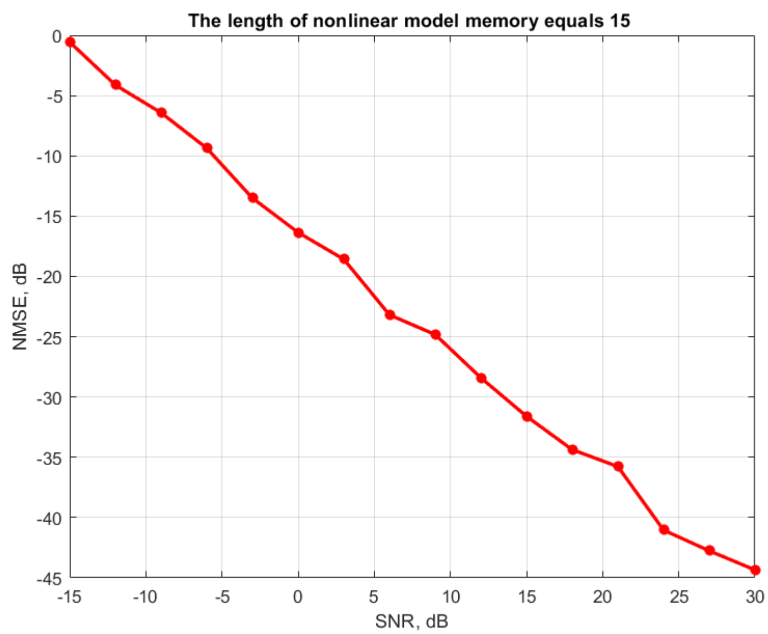


Рис. 8: Зависимость нормализованной среднеквадратичной ошибки от отношения сигнал/шум при различных значениях длины истории нелинейной системы.