

## Работа 3.6.1

# Спектральный анализ электрических сигналов

Шелихов Дмитрий  
Группа Б01-305

21 октября 2024 г.

**Цель работы:** изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров; проверить справедливость соотношений неопределённостей; познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки.

**В работе используются:** генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье или цифровой USB-осциллограф, подключенный к персональному компьютеру.

### Теоретическая справка

По теореме Фурье любая периодическая функция может быть представлена в виде ряда (конечного или бесконечного) гармонических функций с кратными частотами - ряда Фурье. Одно из представлений ряда Фурье для функции с периодом Т имеет вид

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(2\pi\nu_n t) + B_n \sin(2\pi\nu_n t)), \quad (1)$$

, где  $\nu_n = n\nu_0$ ,  $\nu_0 = \frac{1}{T}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  - частоты фурье-гармоник,  $A_n$  и  $B_n$  - коэффициенты разложения в ряд Фурье.

Коэффициенты находятся как:

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(2\pi\nu_n t) dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(2\pi\nu_n t) dt. \quad (2)$$

На практике удобнее использовать эквивалентную форму записи ряда Фурье в "представлении амплитуд и фаз":

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi\nu_n t + \varphi_n). \quad (3)$$

, где  $a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ , а фаза определяется соотношением  $\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{B_n}{A_n}$

Соотношения неопределённостей.

Между сигналом как функцией времени  $f(t)$  и его спектром как функции частоты  $a(\nu)$  имеется взаимосвязь. Если у сигнала  $f(t)$  есть какое-то характеристическое время  $\Delta t$  (например период повторения, длительность импульса, время нарастания и т.д.), то в спектре  $a(\nu)$  в том или ином виде наблюдается характерный масштаб  $\Delta\nu \sim \frac{1}{\Delta t}$  (расстояние между пиками, ширина спектра, ширина пиков и т.д.)

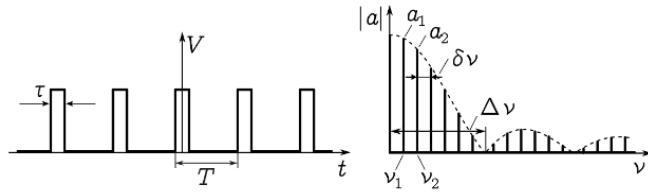


Рис. 1: Периодическая последовательность импульсов и её спектр

$$\Delta\nu \cdot \Delta t \sim 1 \text{ (4)} - \text{соотношение неопределённостей}$$

Для любого сигнала с периодом Т в спектре обязательно будут наблюдаться гармоники на расстоянии  $\delta\nu = 1/T$  друг от друга. В данном случае соотношение является точным и от формы сигнала не зависит.

### Ход работы

- 1) По техническому описанию ознакомимся с устройством панели приборов: генератора сигналов произвольной формы и цифрового осциллографа/компьютерной программы, используемой для отображения сигналов с осциллографа. Изучим расположение основных кнопок и ручек настройки.
- 2) Подключим один из выходов генератора к одному из каналов осциллографа и включим приборы в сеть.

- A. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённостей**
- 3) Следуя техническому описанию генератора, настроим генерацию прямоугольных импульсов. Параметры:  $\nu_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$  (период  $T = 1/\nu_{\text{повт}} = 1\text{мс}$ ), и длительность импульса  $\tau = T/20 = 50\text{ мкс}$ .
  - 4) По техническому описанию получим устойчивую картину сигнала на экране осциллографа.
  - 5) Следуя техническому описанию осциллографа, получим на его экране спектр (преобразование Фурье) сигнала.

Масштаб по горизонтальной оси установим меньше или порядка ожидаемой ширины спектра  $\Delta\nu \approx 20\text{ кГц}$  (ширину спектра оцениваем из соотношения неопределённостей).

Масштаб по вертикальной оси подберём так, чтобы спектральные линии не выходили за пределы экрана (кроме, может быть, «нулевой» гармоники  $\nu = 0\text{ Гц}$ , — она отвечает за уровень постоянного смещения сигнала, и ее высота может оказаться значительно выше остальных).

Центр картины при предварительной настройке установите на  $0\text{ Гц}$ , а затем после подбора масштабов сместите его так, чтобы спектр занимал весь экран начиная от левого края.

- 6) Пронаблюдаем, как изменяется спектр при изменении параметров сигнала.

- Наблюдения:
- а) При увеличении  $\nu_{\text{повт}}$  выросли амплитуды, ширина спектра не меняется.
  - б) При увеличении  $\tau$  амплитуды гармоник вырастают, а ширина спектра уменьшается.
  - 7) При фиксированных  $\nu_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$  и  $\tau = 50\text{мкс}$  измерим амплитуды  $a_n$  и частоты  $\nu_n$  8 гармоник. Сравним значения с рассчитанными теоретически

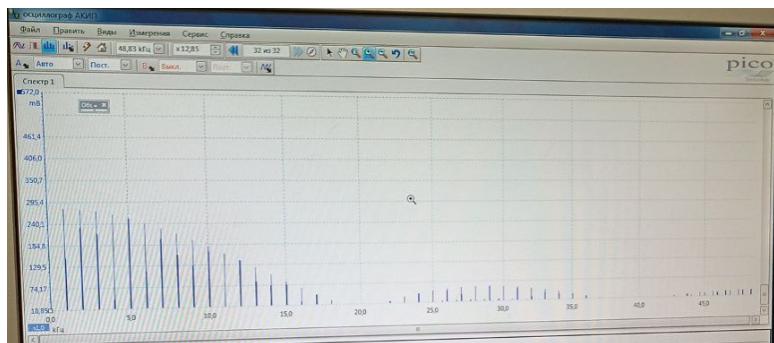


Рис. 2:  $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 50 \text{ мкс}$

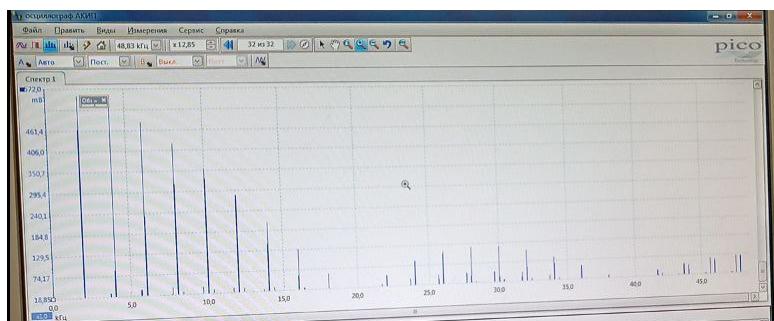


Рис. 3:  $\nu_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 50 \text{ мкс}$

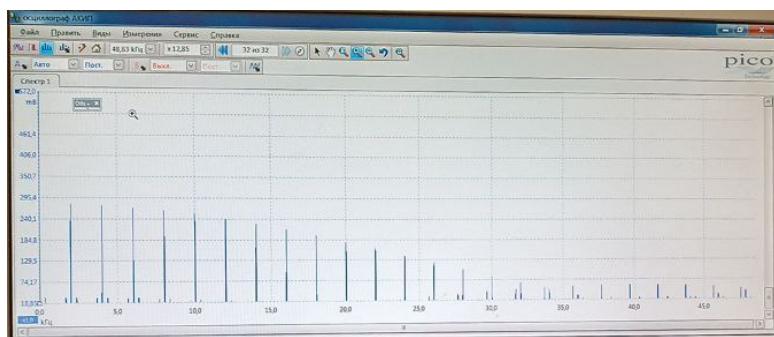


Рис. 4:  $\nu_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 25 \text{ мкс}$

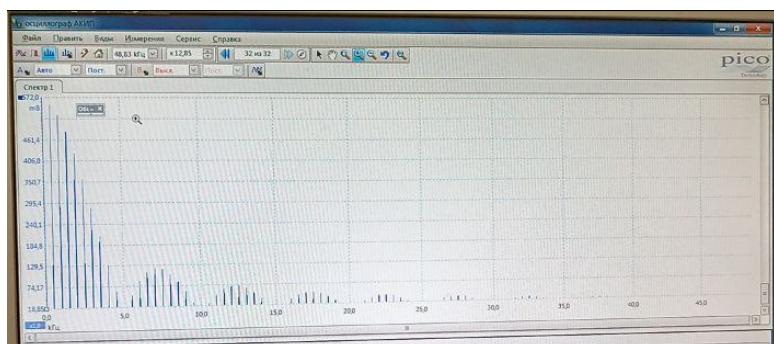


Рис. 5:  $\nu_{\text{повт}} = 0.5 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 200 \text{ мкс}$

$$\nu_n = \frac{n}{T}, |a_n| = \frac{|\sin \frac{\pi n \tau}{T}|}{\pi n} = \frac{\tau}{T} \frac{|\sin \pi \nu_n \tau|}{\pi \nu_n \tau}$$

Результаты измерений занесём в таблицу:

п гармоники	1	2	3	4	5	6	7	8
$\nu_n^{\text{эксп}}$ , кГц	1,014	2,031	3,007	4,024	5,041	6,017	6,994	8,011
$\nu^{\text{теор}}$ , кГц	1	2	3	4	5	6	7	8
$ a_n^{\text{эксп}} $ , мВ	$279,1 \pm 0,1$	$275,8 \pm 0,1$	$270,9 \pm 0,1$	$262,7 \pm 0,1$	$252,9 \pm 0,1$	$241,4 \pm 0,1$	$226,7 \pm 0,1$	$212,0 \pm 0,1$
$ a_n/a_1 ^{\text{эксп}}$	1	$0,988 \pm 0,001$	$0,967 \pm 0,001$	$0,939 \pm 0,001$	$0,904 \pm 0,001$	$0,862 \pm 0,001$	$0,814 \pm 0,001$	$0,760 \pm 0,001$
$ a_n/a_1 ^{\text{теор}}$	1	0,988	0,969	0,941	0,906	0,864	0,812	0,760

Получаем, что экспериментальное отношение амплитуд и рассчитанное теоретически совпадают с погрешностью не более 0.22%.

8) Зафиксируем период повторения Т прямоугольного сигнала.  $T = 1\text{мс}$ ,  $\nu_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$ . Изменяя длительность импульса  $\tau$  в диапазоне от  $\tau = T/50$  до  $\tau = T/5$ , измерим полную ширину спектра сигнала  $\Delta\nu$  - от центра спектра ( $\nu = 0$ ) до гармоники с нулевой амплитудой  $a_n \approx 0$ .

$\tau$ , мкс	$\Delta\nu$ , кГц	$\nu_{\text{повт}}$ , кГц
30	$27,8 \pm 1,4$	1
45	$19,9 \pm 1,0$	
67,5	$13,8 \pm 0,7$	
100	$10,0 \pm 0,5$	
140	$6,0 \pm 0,3$	
200	$5,0 \pm 0,1$	

9) Зафиксируем длительность импульса прямоугольного сигнала  $\tau = 100\text{мкс}$ . Изменяя период повторения Т в диапазоне от  $2\tau$  до  $50\tau$  измерим расстояния  $\delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n$  между соседними гармониками спектра. Если спектральные компоненты окажутся расположены слишком близко друг к другу, измерим расстояние между  $(n + m)$ -й и  $m$ -й гармониками (для некоторых целых  $n$  и  $m$ ) и найдем  $\delta\nu = \frac{(\nu_{n+m} - \nu_n)}{m}$ .

$T$ , мкс	$\delta\nu_m$ , кГц	$\delta\nu$ , кГц	$\nu_{\text{повт}}$ , кГц	$m$ , шт
200	$19,98 \pm 0,02$	$4,995 \pm 0,005$	5,00	4
300	$19,98 \pm 0,02$	$3,330 \pm 0,003$	3,33	6
500	$20,00 \pm 0,02$	$2,000 \pm 0,002$	2,00	10
800	$12,52 \pm 0,02$	$1,252 \pm 0,002$	1,25	10
1100	$9,10 \pm 0,02$	$0,910 \pm 0,002$	0,91	10
1500	$6,66 \pm 0,02$	$0,666 \pm 0,002$	0,67	10
2000	$5,06 \pm 0,02$	$0,506 \pm 0,002$	0,50	10
2500	$4,00 \pm 0,02$	$0,400 \pm 0,002$	0,40	10
3000	$3,34 \pm 0,02$	$0,334 \pm 0,002$	0,33	10
3500	$2,86 \pm 0,02$	$0,286 \pm 0,002$	0,29	10
4000	$2,50 \pm 0,02$	$0,250 \pm 0,002$	0,25	10
4500	$2,22 \pm 0,02$	$0,222 \pm 0,002$	0,22	10
5000	$2,00 \pm 0,02$	$0,200 \pm 0,002$	0,20	10

10) Построим графики зависимостей  $\Delta\nu(1/\tau)$  и  $\delta\nu(1/T)$ . Проведем наилучшие прямые и определим их наклон.

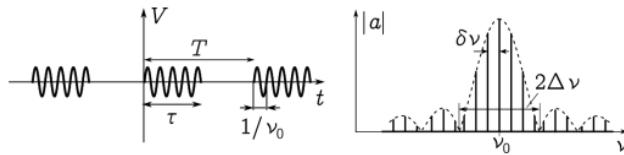
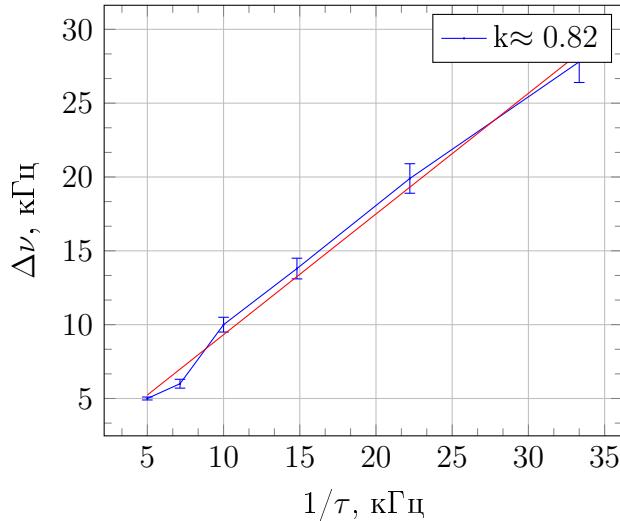


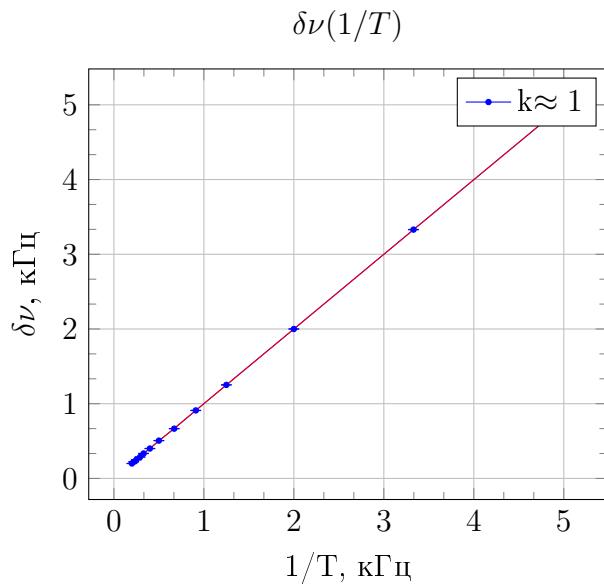
Рис. 6: Периодическая последовательность цугов и её спектр

График зависимости ширины спектра от обратного времени импульса  $\Delta\nu(1/\tau)$  :



Получили  $k \approx 0.82 \pm 0.05$ . По соотношению неопределённостей  $k \approx \Delta\nu \cdot \tau \approx 1$ . Таким образом соотношение соблюдается, поскольку получена величина по порядку совпадающая с единицей.

График  $\delta\nu(1/T)$  :



Таким образом получаем  $k = \delta\nu \cdot T = 1,000 \pm 0,004 \approx 1$ . Убеждаемся в справедливости соотношение неопределённостей.

### Б.Наблюдение спектра периодической последовательности цугов

11) Следуя техническому описанию генератора, установим его на режим подачи перио-

дических импульсов синусоидальной формы ("пугов"). Установим несущую частоту  $\nu_0 = 50\text{кГц}$ , период повторения  $T = 1\text{мс}$  ( $\nu_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$ ), число периодов синусоиды в одном импульсе  $N = 5$  (что соответствует длительности импульса  $\tau = N/\nu_0 = 100\text{ мкс}$ ). Получим на экране осциллографа устойчивую картину сигнала.

12) Получим на экране осциллографа спектр сигнала. Центр картины установим на частоту  $\nu_0$ . Масштаб по горизонтали (кГц/дел) подберем так, чтобы спектр помещался на экране.

13) Изменяя параметры сигнала  $T$ ,  $\nu_0$  и  $N$  проанализируем, как изменяется вид спектра. Сравним наблюдаемые спектры со спектрами прямоугольных импульсов.

Наблюдения: а) При изменении  $N$  число волн спектра равно  $2N-1$

б) При увеличении  $N$  амплитуда растет, ширина спектра уменьшается

в) При увеличении  $T$  амплитуда уменьшается, ширина спектра не меняется. Число гармоник увеличивается

г) При увеличении  $\nu_0$  амплитуда уменьшается, ширина спектра растет

14) При параметрах сигнала, соответствующих сохранённым в предыдущем пункте изображениям, измерим положение центра спектра, его ширину  $\Delta\nu$  и расстояние между гармониками  $\delta\nu$ .

$\nu_0$ , кГц	$\nu_{\text{центр}}$ , кГц	$T$ , мс	$\delta\nu_m$ , кГц	m, шт	N, шт	$\delta\nu$
50	$50.02 \pm 0.02$	1	$10.01 \pm 0.02$	20	5	1.00
70	$70.00 \pm 0.02$	1	$14.04 \pm 0.02$	28	5	1.00
50	$49.94 \pm 0.02$	2	$9.94 \pm 0.02$	40	5	0.50
50	$50.00 \pm 0.02$	1	$8.00 \pm 0.02$	16	6	1.00

В каждом случае величина  $T \cdot \delta\nu = 1$ . Таким образом соотношение неопределённостей выполняется.

### Г. Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

19) Следуя техническому описанию генератора, установим на генераторе режим модулированного по амплитуде синусоидального сигнала. Установим параметры: несущая частота  $\nu_0 = 50\text{кГц}$ , частота модуляции  $\nu_{\text{мод}} = 2\text{кГц}$ , глубина модуляции 50% ( $m = 0.5$ ). Получим на экране осциллографа устойчивую картину сигнала.

20) С помощью осциллографа (в режиме курсорных измерений) измерим максимальную  $A_{\text{max}}$  и минимальную  $A_{\text{min}}$  амплитуды сигнала. Проверим справедливость равенства  $m = \frac{A_{\text{max}} - A_{\text{min}}}{A_{\text{max}} + A_{\text{min}}}$

$2A_{\text{max}}$ , В	$A_{\text{max}}$ , В	$2A_{\text{min}}$ , В	$A_{\text{min}}$ , В	m	$\frac{A_{\text{max}} - A_{\text{min}}}{A_{\text{max}} + A_{\text{min}}}$
$2.47 \pm 0.02$	$1.24 \pm 0.01$	$0.8315 \pm 0.0003$	$0.4158 \pm 0.0002$	0.5	$0.496 \pm 0.008$

В пределах погрешности экспериментально полученная глубина модуляции совпадает с выставленной.

21) Получим на экране спектр сигнала. С помощью осциллографа измерим частоты центральной и боковой гармоник.

$\nu_{\text{бок}}$ , кГц	$\nu_{\text{бок1}}$ , кГц	$\nu_{\text{бок2}}$ , кГц
$49.99 \pm 0.01$	48	52

Изменяя несущую частоту  $\nu_0$  и частоту модуляции  $\nu_{\text{мод}}$  видим, что :

а) При увеличении  $\nu_{\text{мод}}$  расстояние между центральной и боковой гармоникой увеличивается. Амплитуды не меняются, центр спектра неподвижен.

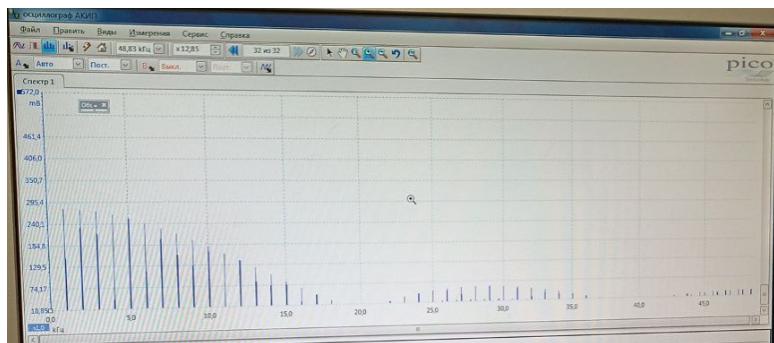


Рис. 7:  $\nu_0 = 50\text{кГц}$ ,  $T = 1\text{мс}$ ,  $N = 5$

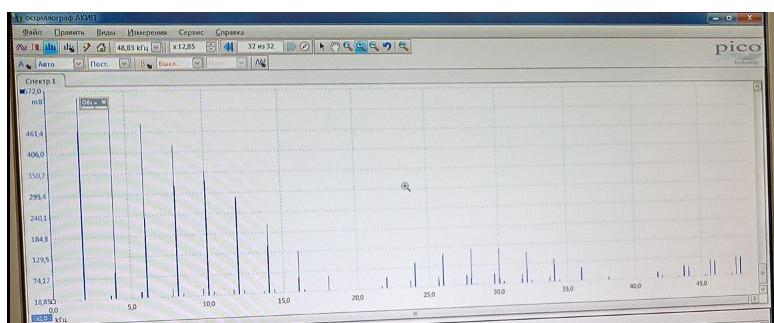


Рис. 8:  $\nu_0 = 70\text{кГц}$ ,  $T = 1\text{мс}$ ,  $N = 5$

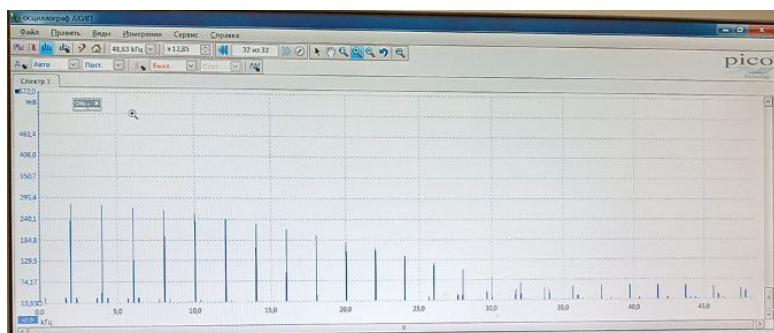


Рис. 9:  $\nu_0 = 50\text{кГц}$ ,  $T = 2\text{мс}$ ,  $N = 5$

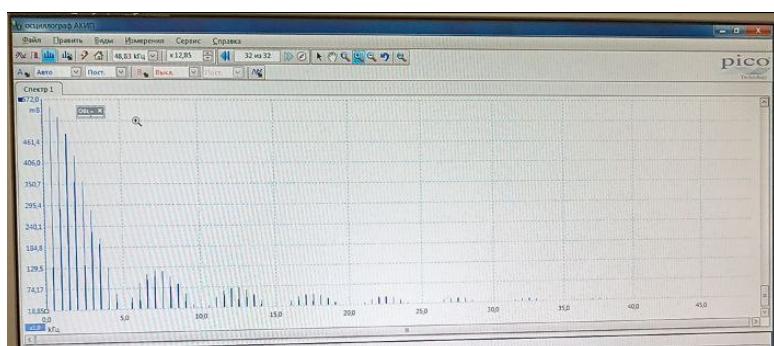


Рис. 10:  $\nu_0 = 50\text{кГц}$ ,  $T = 1\text{мс}$ ,  $N = 6$

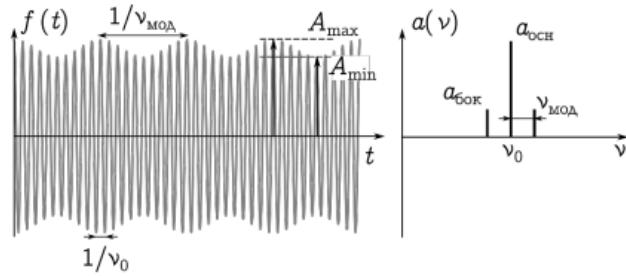


Рис. 11: Гармонический амплитудно-модулированный сигнал и его спектр

- б) При увеличении  $\nu_0$  центр спектра смещается вправо, амплитуды не изменяются.  
 22) Изменяя на генераторе глубину модуляции  $m$  в диапазоне от 10% до 100%, измерим отношение амплитуд боковой и основной спектральных линий  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ .

$a_{\text{осн}}, \text{ мВ}$	$m, \%$	$a_{\text{бок}}, \text{ мВ}$	$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}} \cdot 100, \%$
$582.0 \pm 0.1$	10	$29.57 \pm 0.01$	$5.08 \pm 0.03$
	20	$59.14 \pm 0.02$	$10.16 \pm 0.06$
	40	$115.8 \pm 0.04$	$19.90 \pm 0.10$
	50	$144.1 \pm 0.05$	$24.76 \pm 0.12$
	70	$202.6 \pm 0.07$	$34.81 \pm 0.18$
	80	$229.0 \pm 0.08$	$39.35 \pm 0.20$
	100	$289.4 \pm 0.10$	$49.73 \pm 0.25$

- 23) Построим график  $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}$  от  $m$  и проверим, совпадает ли результат с теоретическим.

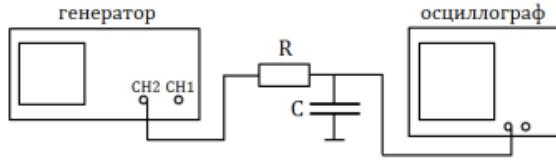
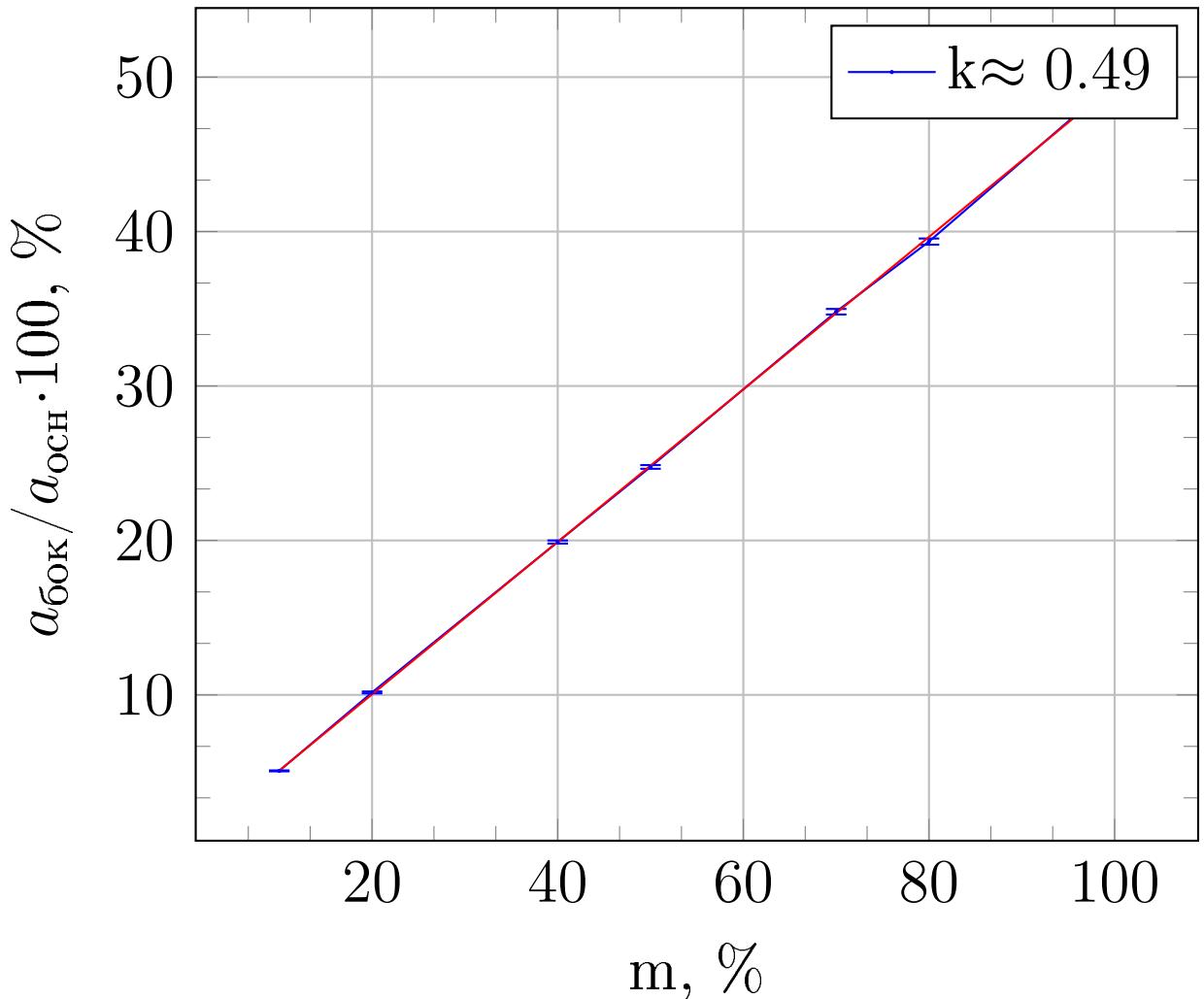


Рис. 12: Схема экспериментальной установки для изучения фильтрации сигналов

$$a_{\text{бок}} / a_{\text{осн}} \cdot (\text{m})$$



Таким образом, получаем наклон графика  $k \approx 0.49 \pm 0.01$ . Из теории следует, что для амплитудно-модулированного гармонического сигнала  $a_{\text{бок}} = \frac{ma_0}{2}$ . Получили совпадение угла наклона графика в пределах погрешности.

#### E. Изучение фильтрации сигналов

26) Для RC-цепочки с известными сопротивлением и ёмкостью рассчитаем характерное время  $\tau_{RC} = RC$  и соответствующую частоту  $\nu_{RC} = 1/\tau_{RC}$ :

R, кОм	C, пФ	$\tau_{RC}$ , мкс	$\nu_{RC}$ , кГц
3	1000	3	333

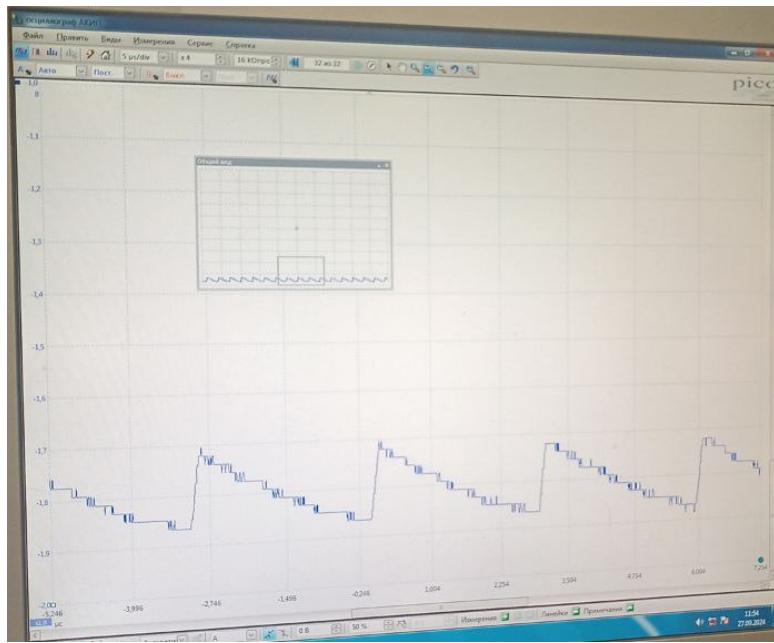


Рис. 13: сигнал  $T = 3\text{мкс}$

Соберем схему согласно рис.4. Подадим на вход RC-цепочки последовательность прямоугольных импульсов с периодом повторения  $T \sim \tau_{RC}$  и длительностью  $\tau \sim T/20$ .

- 27) Пронаблюдаем форму сигнала и его спектр на выходе RC-цепочки("фильтрованный сигнал") при различных значениях периода  $T$ :  
 28) При фиксированном периоде  $T = 3\text{мкс}$  проведем измерения отношений амплитуд соответствующих спектральных гармоник фильтрованного и исходного сигналов:  $K_n = |a_n^\Phi| / |a_n^0|$ . Чтобы измерить амплитуды спектра исходного сигнала переподключим генератор к первому каналу осциллографа.

$n$	$ a_n^0 , \text{ мВ}$	$ a_n^\Phi , \text{ мВ}$	$K_n$
1	$26.61 \pm 0.02$	$8.93 \pm 0.02$	$0.336 \pm 0.001$
2	$33.84 \pm 0.02$	$9.23 \pm 0.02$	$0.273 \pm 0.001$
3	$36.35 \pm 0.02$	$9.52 \pm 0.02$	$0.262 \pm 0.001$
4	$37.82 \pm 0.02$	$9.23 \pm 0.02$	$0.244 \pm 0.001$
5	$43.58 \pm 0.02$	$9.67 \pm 0.02$	$0.222 \pm 0.001$
6	$44.17 \pm 0.02$	$10.26 \pm 0.02$	$0.232 \pm 0.001$
7	$45.65 \pm 0.02$	$11.29 \pm 0.02$	$0.247 \pm 0.001$
8	$46.24 \pm 0.02$	$11.14 \pm 0.02$	$0.241 \pm 0.001$
9	$49.34 \pm 0.02$	$11.73 \pm 0.02$	$0.238 \pm 0.001$

- 29) Построим график зависимости амплитудного коэффициента фильтрации  $K(\nu)$  от частоты  $\nu = n\nu_0$ .

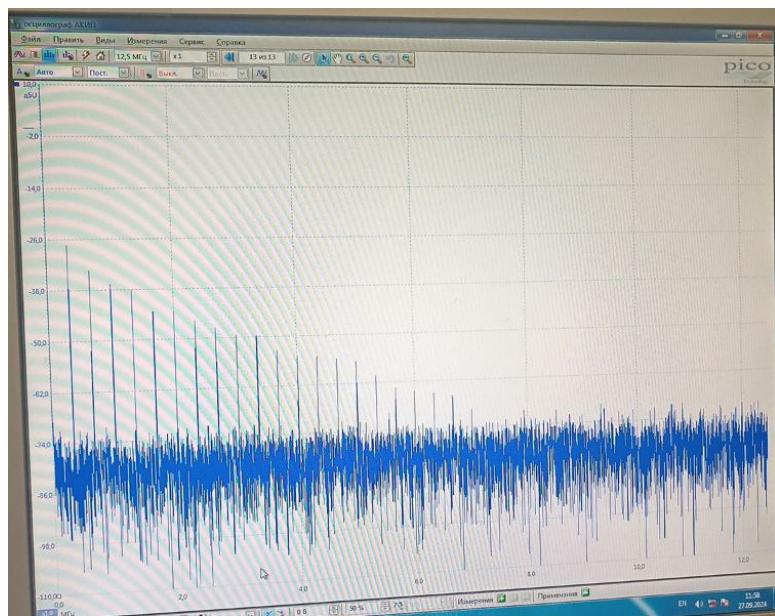


Рис. 14: спектр  $T = 3\text{мкс}$

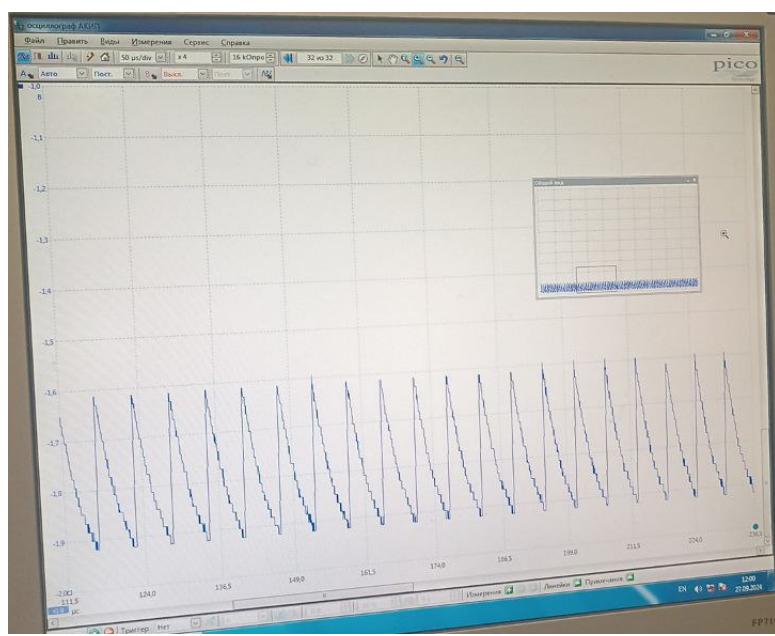


Рис. 15: сигнал  $T = 6\text{мкс}$

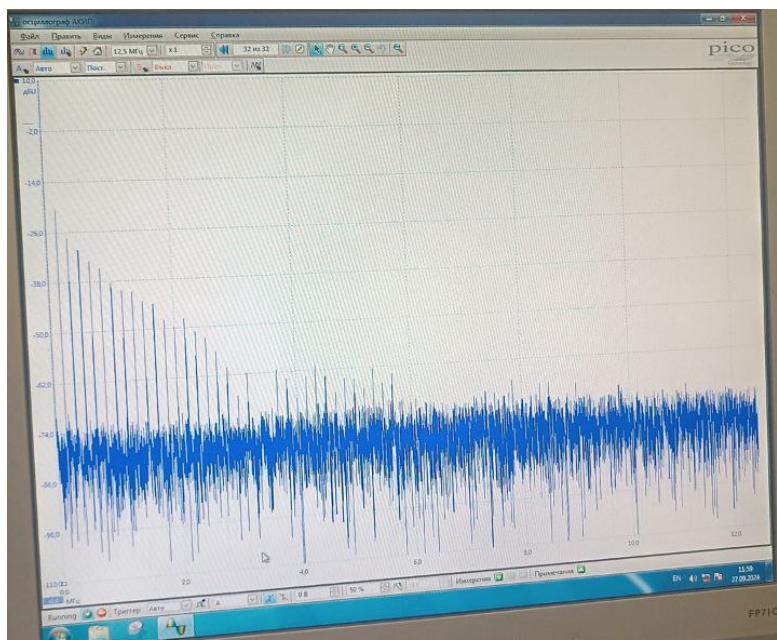


Рис. 16: спектр  $T = 6\text{мкс}$

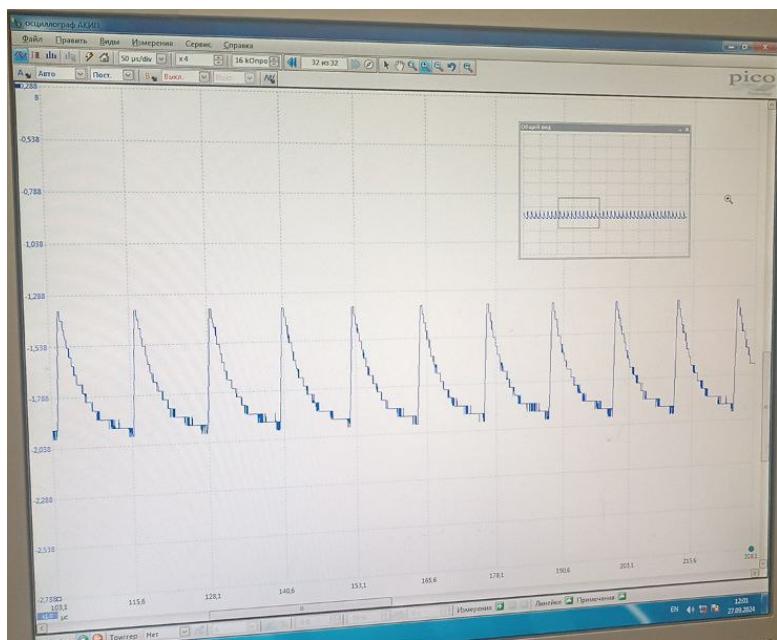


Рис. 17: сигнал  $T = 12\text{мкс}$

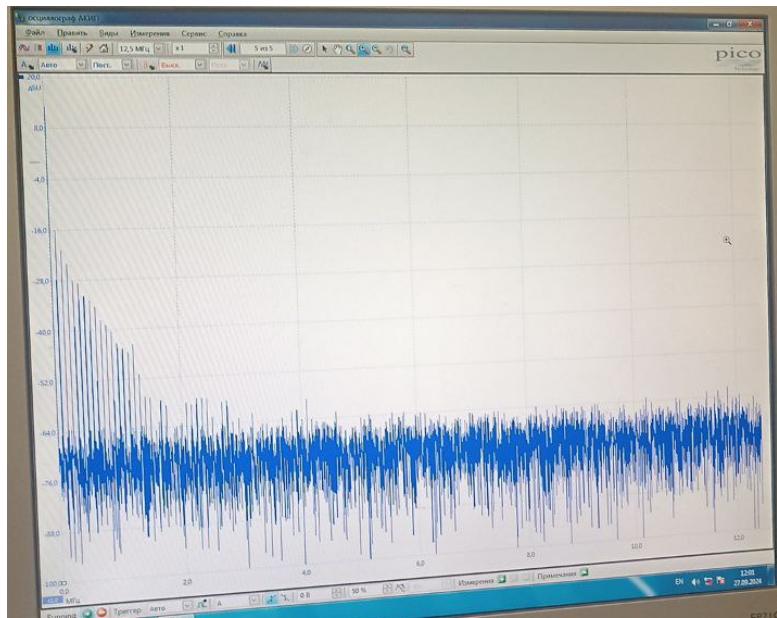


Рис. 18: спектр  $T = 12\text{мкс}$

