

Работа 3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов

Шелихов Дмитрий
Группа Б01-305

19 октября 2024 г.

Цель работы: изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров; проверить справедливость соотношений неопределённостей; познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки.

В работе используются: генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье или цифровой USB-осциллограф, подключенный к персональному компьютеру.

Теоретическая справка

По теореме Фурье любая периодическая функция может быть представлена в виде ряда (конечного или бесконечного) гармонических функций с кратными частотами - ряда Фурье. Одно из представлений ряда Фурье для функции с периодом Т имеет вид

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(2\pi\nu_n t) + B_n \sin(2\pi\nu_n t)), \quad (1)$$

, где $\nu_n = n\nu_0$, $\nu_0 = \frac{1}{T}$, $n = 1, 2, \dots$ - частоты фурье-гармоник, A_n и B_n - коэффициенты разложения в ряд Фурье.

Коэффициенты находятся как:

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(2\pi\nu_n t) dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(2\pi\nu_n t) dt. \quad (2)$$

На практике удобнее использовать эквивалентную форму записи ряда Фурье в "представлении амплитуд и фаз":

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi\nu_n t + \varphi_n). \quad (3)$$

, где $a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, а фаза определяется соотношением $\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{B_n}{A_n}$

Соотношения неопределённостей.

Между сигналом как функцией времени $f(t)$ и его спектром как функции частоты $a(\nu)$ имеется взаимосвязь. Если у сигнала $f(t)$ есть какое-то характеристическое время Δt (например период повторения, длительность импульса, время нарастания и т.д.), то в спектре $a(\nu)$ в том или ином виде наблюдается характерный масштаб $\Delta\nu \sim \frac{1}{\Delta t}$ (расстояние между пиками, ширина спектра, ширина пиков и т.д.)

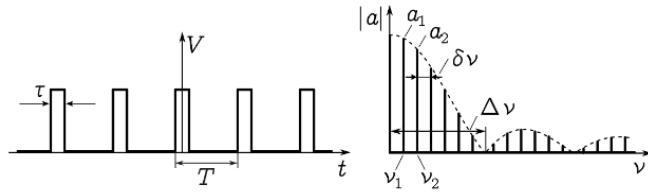


Рис. 1: Периодическая последовательность импульсов и её спектр

$$\Delta\nu \cdot \Delta t \sim 1 \text{ (4)} - \text{соотношение неопределённостей}$$

Для любого сигнала с периодом Т в спектре обязательно будут наблюдаться гармоники на расстоянии $\delta\nu = 1/T$ друг от друга. В данном случае соотношение является точным и от формы сигнала не зависит.

Ход работы

- 1) По техническому описанию ознакомимся с устройством панели приборов: генератора сигналов произвольной формы и цифрового осциллографа/компьютерной программы, используемой для отображения сигналов с осциллографа. Изучим расположение основных кнопок и ручек настройки.
- 2) Подключим один из выходов генератора к одному из каналов осциллографа и включим приборы в сеть.

- A. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённостей**
- 3) Следуя техническому описанию генератора, настроим генерацию прямоугольных импульсов. Параметры: $\nu_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$ (период $T = 1/\nu_{\text{повт}} = 1\text{мс}$), и длительность импульса $\tau = T/20 = 50\text{ мкс}$.
 - 4) По техническому описанию получим устойчивую картину сигнала на экране осциллографа.
 - 5) Следуя техническому описанию осциллографа, получим на его экране спектр (преобразование Фурье) сигнала.

Масштаб по горизонтальной оси установим меньше или порядка ожидаемой ширины спектра $\Delta\nu \approx 20\text{ кГц}$ (ширину спектра оцениваем из соотношения неопределённостей).

Масштаб по вертикальной оси подберём так, чтобы спектральные линии не выходили за пределы экрана (кроме, может быть, «нулевой» гармоники $\nu = 0\text{ Гц}$, — она отвечает за уровень постоянного смещения сигнала, и ее высота может оказаться значительно выше остальных).

Центр картины при предварительной настройке установите на 0 Гц , а затем после подбора масштабов сместите его так, чтобы спектр занимал весь экран начиная от левого края.

- 6) Пронаблюдаем, как изменяется спектр при изменении параметров сигнала.

- Наблюдения:
- а) При увеличении $\nu_{\text{повт}}$ выросли амплитуды, ширина спектра не меняется.
 - б) При увеличении τ амплитуды гармоник вырастают, а ширина спектра уменьшается.
 - 7) При фиксированных $\nu_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$ и $\tau = 50\text{мкс}$ измерим амплитуды a_n и частоты ν_n 8 гармоник. Сравним значения с рассчитанными теоретически

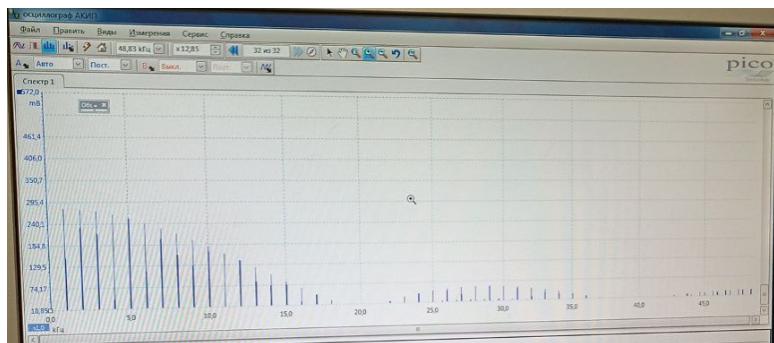


Рис. 2: $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 50 \text{ мкс}$

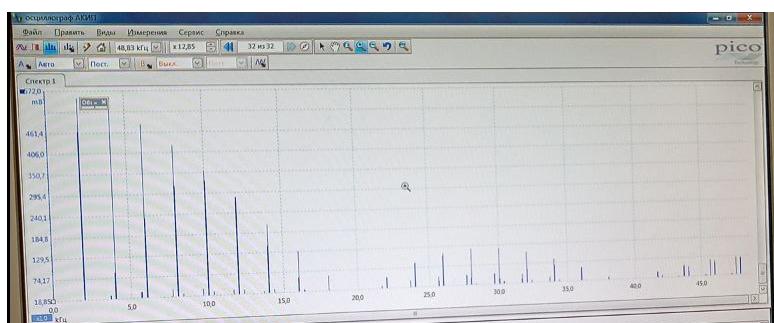


Рис. 3: $\nu_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$, $\tau = 50 \text{ мкс}$

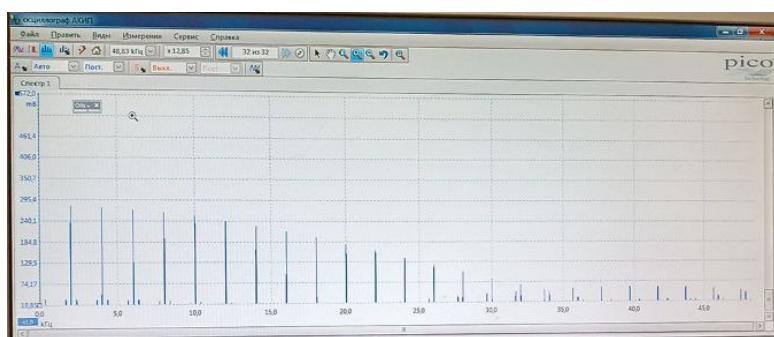


Рис. 4: $\nu_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$, $\tau = 25 \text{ мкс}$

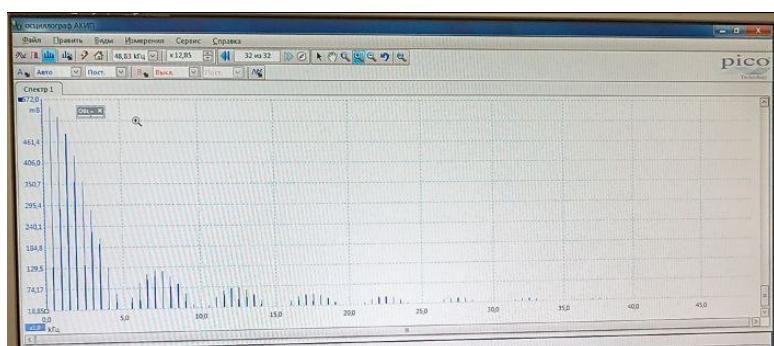


Рис. 5: $\nu_{\text{повт}} = 0.5 \text{ кГц}$, $\tau = 200 \text{ мкс}$

$$\nu_n = \frac{n}{T}, |a_n| = \frac{|\sin \frac{\pi n \tau}{T}|}{\pi n} = \frac{\tau}{T} \frac{|\sin \pi \nu_n \tau|}{\pi \nu_n \tau}$$

Результаты измерений занесём в таблицу:

п гармоники	1	2	3	4	5	6	7	8
$\nu_n^{\text{эксп}}$, кГц	1,014	2,031	3,007	4,024	5,041	6,017	6,994	8,011
$\nu^{\text{теор}}$, кГц	1	2	3	4	5	6	7	8
$ a_n^{\text{эксп}} $, мВ	$279,1 \pm 0,1$	$275,8 \pm 0,1$	$270,9 \pm 0,1$	$262,7 \pm 0,1$	$252,9 \pm 0,1$	$241,4 \pm 0,1$	$226,7 \pm 0,1$	$212,0 \pm 0,1$
$ a_n/a_1 ^{\text{эксп}}$	1	$0,988 \pm 0,001$	$0,967 \pm 0,001$	$0,939 \pm 0,001$	$0,904 \pm 0,001$	$0,862 \pm 0,001$	$0,814 \pm 0,001$	$0,760 \pm 0,001$
$ a_n/a_1 ^{\text{теор}}$	1	0,988	0,969	0,941	0,906	0,864	0,812	0,760

Получаем, что экспериментальное отношение амплитуд и рассчитанное теоретически совпадают с погрешностью не более 0.22%.

8) Зафиксируем период повторения Т прямоугольного сигнала. $T = 1\text{мс}$, $\nu_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$. Изменяя длительность импульса τ в диапазоне от $\tau = T/50$ до $\tau = T/5$, измерим полную ширину спектра сигнала $\Delta\nu$ - от центра спектра ($\nu = 0$) до гармоники с нулевой амплитудой $a_n \approx 0$.

τ , мкс	$\Delta\nu$, кГц	$\nu_{\text{повт}}$, кГц
30	$27,8 \pm 1,4$	1
45	$19,9 \pm 1,0$	
67,5	$13,8 \pm 0,7$	
100	$10,0 \pm 0,5$	
140	$6,0 \pm 0,3$	
200	$5,0 \pm 0,1$	

9) Зафиксируем длительность импульса прямоугольного сигнала $\tau = 100\text{мкс}$. Изменяя период повторения Т в диапазоне от 2τ до 50τ измерим расстояния $\delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n$ между соседними гармониками спектра. Если спектральные компоненты окажутся расположены слишком близко друг к другу, измерим расстояние между $(n + m)$ -й и m -й гармониками (для некоторых целых n и m) и найдем $\delta\nu = \frac{(\nu_{n+m} - \nu_n)}{m}$.

T , мкс	$\delta\nu_m$, кГц	$\delta\nu$, кГц	$\nu_{\text{повт}}$, кГц	m , шт
200	$19,98 \pm 0,02$	$4,995 \pm 0,005$	5,00	4
300	$19,98 \pm 0,02$	$3,330 \pm 0,003$	3,33	6
500	$20,00 \pm 0,02$	$2,000 \pm 0,002$	2,00	10
800	$12,52 \pm 0,02$	$1,252 \pm 0,002$	1,25	10
1100	$9,10 \pm 0,02$	$0,910 \pm 0,002$	0,91	10
1500	$6,66 \pm 0,02$	$0,666 \pm 0,002$	0,67	10
2000	$5,06 \pm 0,02$	$0,506 \pm 0,002$	0,50	10
2500	$4,00 \pm 0,02$	$0,400 \pm 0,002$	0,40	10
3000	$3,34 \pm 0,02$	$0,334 \pm 0,002$	0,33	10
3500	$2,86 \pm 0,02$	$0,286 \pm 0,002$	0,29	10
4000	$2,50 \pm 0,02$	$0,250 \pm 0,002$	0,25	10
4500	$2,22 \pm 0,02$	$0,222 \pm 0,002$	0,22	10
5000	$2,00 \pm 0,02$	$0,200 \pm 0,002$	0,20	10

10) Построим графики зависимостей $\Delta\nu(1/\tau)$ и $\delta\nu(1/T)$. Проведем наилучшие прямые и определим их наклон.

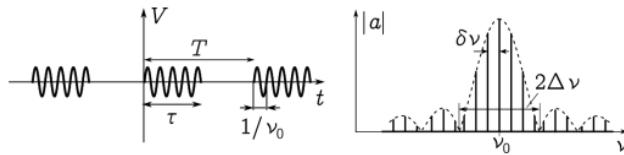
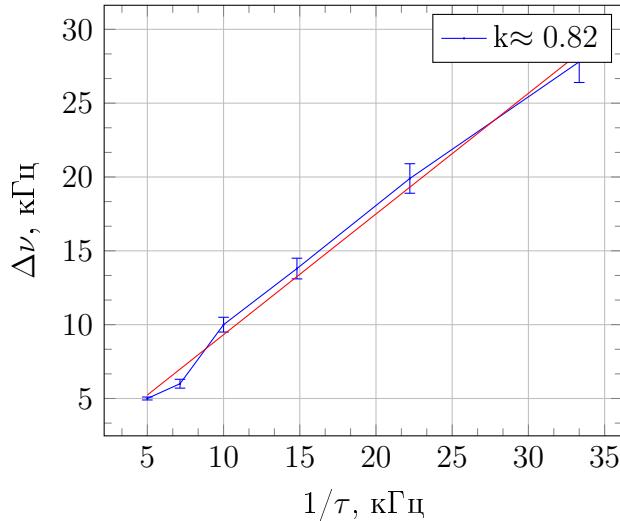


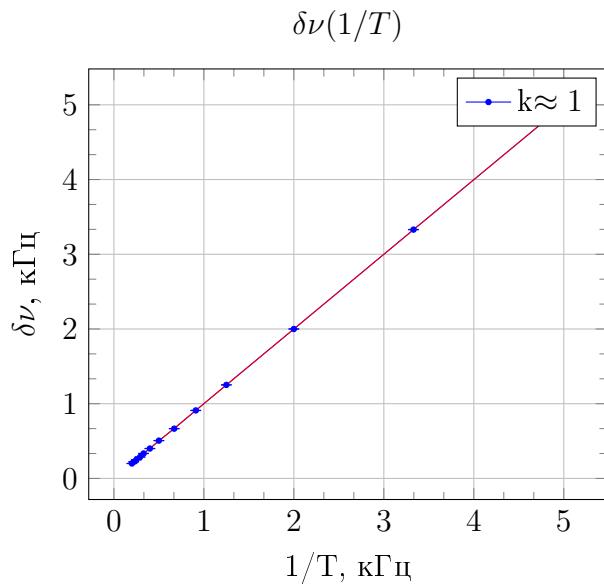
Рис. 6: Периодическая последовательность цугов и её спектр

График зависимости ширины спектра от обратного времени импульса $\Delta\nu(1/\tau)$:



Получили $k \approx 0.82 \pm 0.05$. По соотношению неопределённостей $k \approx \Delta\nu \cdot \tau \approx 1$. Таким образом соотношение соблюдается, поскольку получена величина по порядку совпадающая с единицей.

График $\delta\nu(1/T)$:



Таким образом получаем $k = \delta\nu \cdot T = 1,000 \pm 0,004 \approx 1$. Убеждаемся в справедливости соотношение неопределённостей.

Б.Наблюдение спектра периодической последовательности цугов

11) Следуя техническому описанию генератора, установим его на режим подачи перио-

дических импульсов синусоидальной формы ("пугов"). Установим несущую частоту $\nu_0 = 50\text{кГц}$, период повторения $T = 1\text{мс}$ ($\nu_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$), число периодов синусоиды в одном импульсе $N = 5$ (что соответствует длительности импульса $\tau = N/\nu_0 = 100\text{ мкс}$). Получим на экране осциллографа устойчивую картину сигнала.

12) Получим на экране осциллографа спектр сигнала. Центр картины установим на частоту ν_0 . Масштаб по горизонтали (кГц/дел) подберем так, чтобы спектр помещался на экране.

13) Изменяя параметры сигнала T , ν_0 и N проанализируем, как изменяется вид спектра. Сравним наблюдаемые спектры со спектрами прямоугольных импульсов.

Наблюдения: а) При изменении N число волн спектра равно $2N-1$

б) При увеличении N амплитуда растет, ширина спектра уменьшается

в) При увеличении T амплитуда уменьшается, ширина спектра не меняется. Число гармоник увеличивается

г) При увеличении ν_0 амплитуда уменьшается, ширина спектра растет

14) При параметрах сигнала, соответствующих сохранённым в предыдущем пункте изображениям, измерим положение центра спектра, его ширину $\Delta\nu$ и расстояние между гармониками $\delta\nu$.

ν_0 , кГц	$\nu_{\text{центр}}$, кГц	T , мс	$\delta\nu_m$, кГц	m, шт	N, шт	$\delta\nu$
50	50.02 ± 0.02	1	10.01 ± 0.02	20	5	1.00
70	70.00 ± 0.02	1	14.04 ± 0.02	28	5	1.00
50	49.94 ± 0.02	2	9.94 ± 0.02	40	5	0.50
50	50.00 ± 0.02	1	8.00 ± 0.02	16	6	1.00

В каждом случае величина $T \cdot \delta\nu = 1$. Таким образом соотношение неопределённостей выполняется.

Г. Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

19) Следуя техническому описанию генератора, установим на генераторе режим модулированного по амплитуде синусоидального сигнала. Установим параметры: несущая частота $\nu_0 = 50\text{кГц}$, частота модуляции $\nu_{\text{мод}} = 2\text{кГц}$, глубина модуляции 50% ($m = 0.5$). Получим на экране осциллографа устойчивую картину сигнала.

20) С помощью осциллографа (в режиме курсорных измерений) измерим максимальную A_{max} и минимальную A_{min} амплитуды сигнала. Проверим справедливость равенства $m = \frac{A_{\text{max}} - A_{\text{min}}}{A_{\text{max}} + A_{\text{min}}}$

$2A_{\text{max}}$, В	A_{max} , В	$2A_{\text{min}}$, В	A_{min} , В	m	$\frac{A_{\text{max}} - A_{\text{min}}}{A_{\text{max}} + A_{\text{min}}}$
2.47 ± 0.02	1.24 ± 0.01	0.8315 ± 0.0003	0.4158 ± 0.0002	0.5	0.496 ± 0.008

В пределах погрешности экспериментально полученная глубина модуляции совпадает с выставленной.

21) Получим на экране спектр сигнала. С помощью осциллографа измерим частоты центральной и боковой гармоник.

$\nu_{\text{бок}}$, кГц	$\nu_{\text{бок1}}$, кГц	$\nu_{\text{бок2}}$, кГц
49.99 ± 0.01	48	52

Изменяя несущую частоту ν_0 и частоту модуляции $\nu_{\text{мод}}$ видим, что :

а) При увеличении $\nu_{\text{мод}}$ расстояние между центральной и боковой гармоникой увеличивается. Амплитуды не меняются, центр спектра неподвижен.

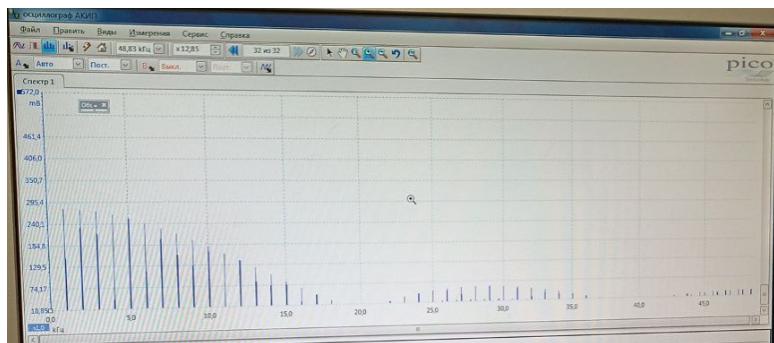


Рис. 7: $\nu_0 = 50\text{кГц}$, $T = 1\text{мс}$, $N = 5$

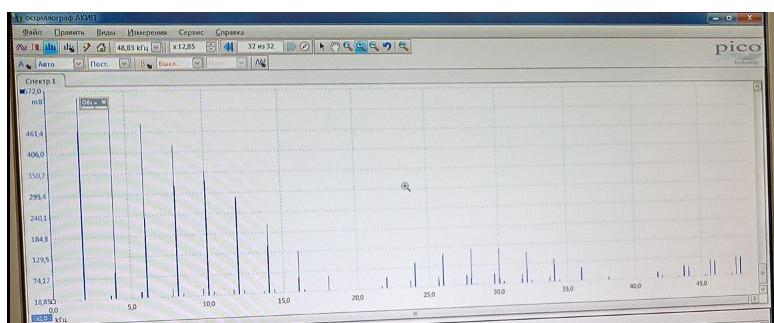


Рис. 8: $\nu_0 = 70\text{кГц}$, $T = 1\text{мс}$, $N = 5$

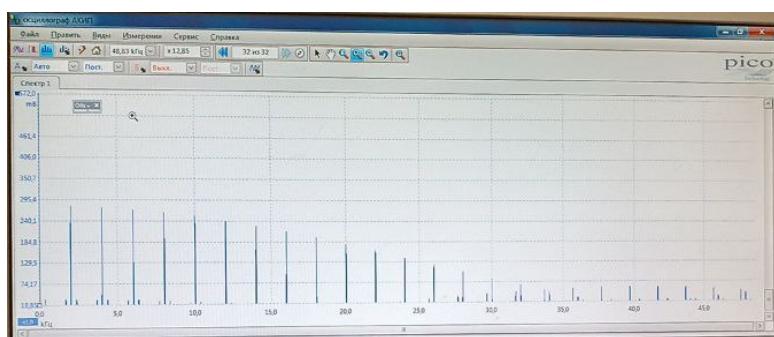


Рис. 9: $\nu_0 = 50\text{кГц}$, $T = 2\text{мс}$, $N = 5$

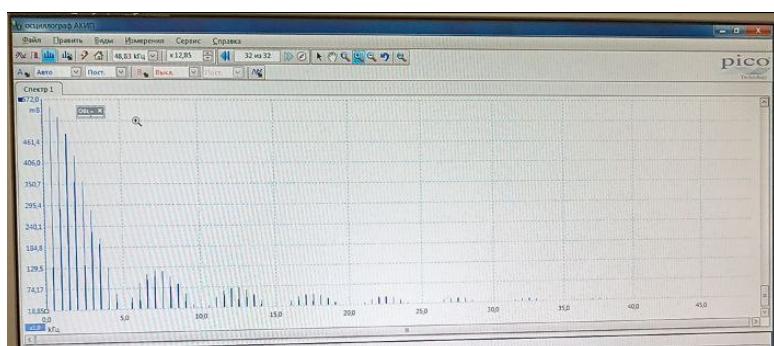


Рис. 10: $\nu_0 = 50\text{кГц}$, $T = 1\text{мс}$, $N = 6$

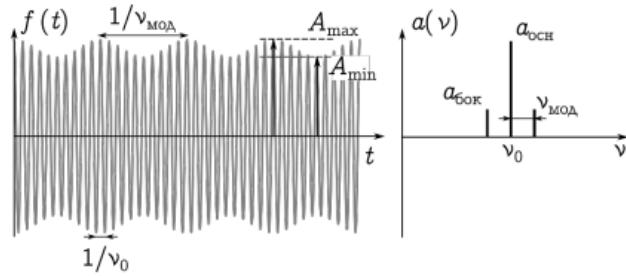


Рис. 11: Гармонический амплитудно-модулированный сигнал и его спектр

- б) При увеличении ν_0 центр спектра смещается вправо, амплитуды не изменяются.
 22) Изменяя на генераторе глубину модуляции m в диапазоне от 10% до 100%, измерим отношение амплитуд боковой и основной спектральных линий $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$.

$a_{\text{осн}}, \text{ мВ}$	$m, \%$	$a_{\text{бок}}, \text{ мВ}$	$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}} \cdot 100, \%$
582.0 ± 0.1	10	29.57 ± 0.01	5.08 ± 0.03
	20	59.14 ± 0.02	10.16 ± 0.06
	40	115.8 ± 0.04	19.90 ± 0.10
	50	144.1 ± 0.05	24.76 ± 0.12
	70	202.6 ± 0.07	34.81 ± 0.18
	80	229.0 ± 0.08	39.35 ± 0.20
	100	289.4 ± 0.10	49.73 ± 0.25

- 23) Построим график $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}$ от m и проверим, совпадает ли результат с теоретическим.

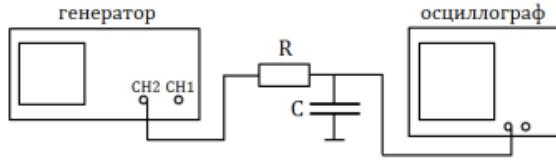
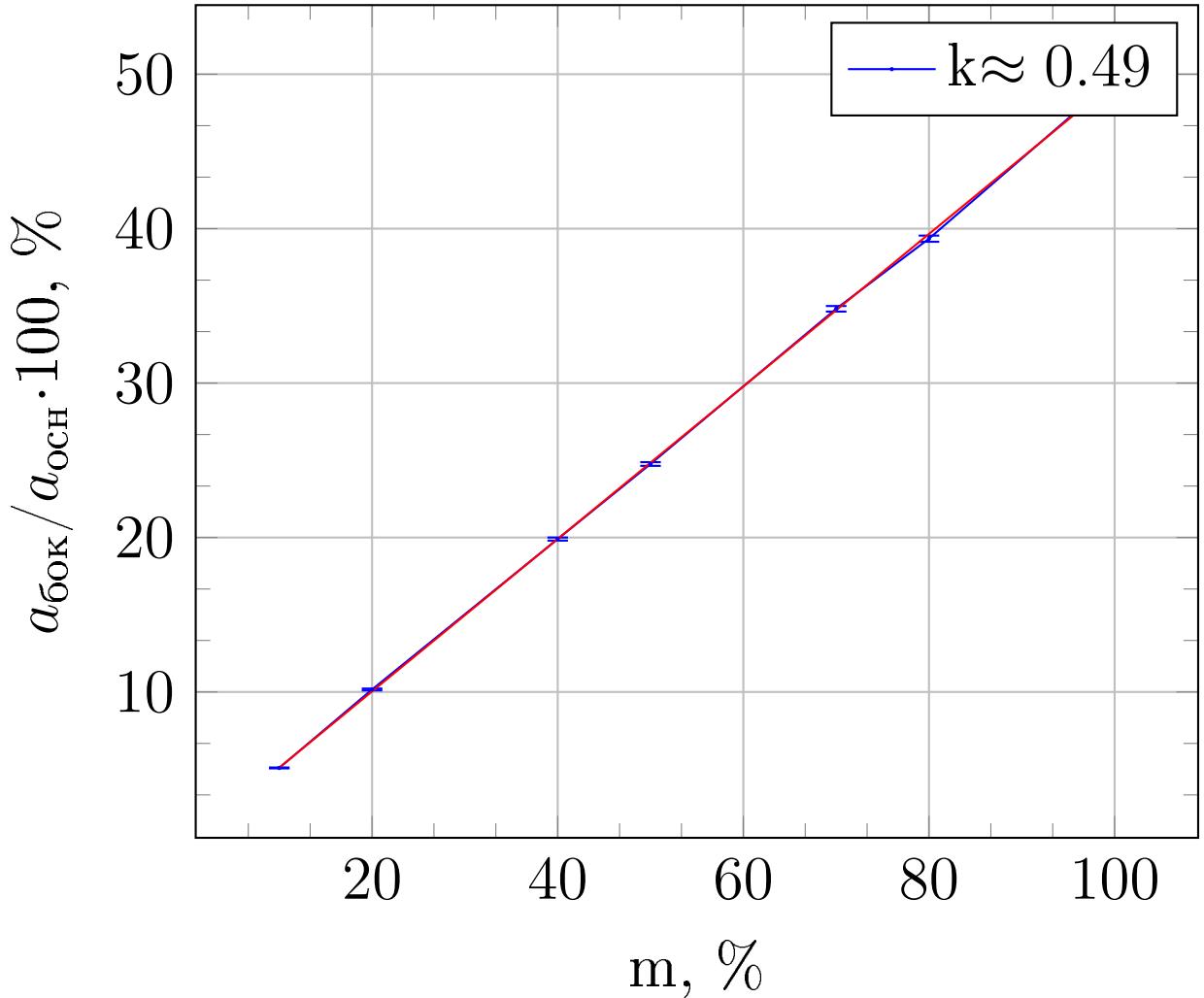


Рис. 12: Схема экспериментальной установки для изучения фильтрации сигналов

$$a_{\text{бок}} / a_{\text{осн}} \cdot (\text{m})$$



Таким образом, получаем наклон графика $k \approx 0.49 \pm 0.01$. Из теории следует, что для амплитудно-модулированного гармонического сигнала $a_{\text{бок}} = \frac{ma_0}{2}$. Получили совпадение угла наклона графика в пределах погрешности.

E. Изучение фильтрации сигналов

26) Для RC-цепочки с известными сопротивлением и ёмкостью рассчитаем характерное время $\tau_{RC} = RC$ и соответствующую частоту $\nu_{RC} = 1/\tau_{RC}$:

R, кОм	C, пФ	τ_{RC} , мкс	ν_{RC} , кГц
3	1000	3	333

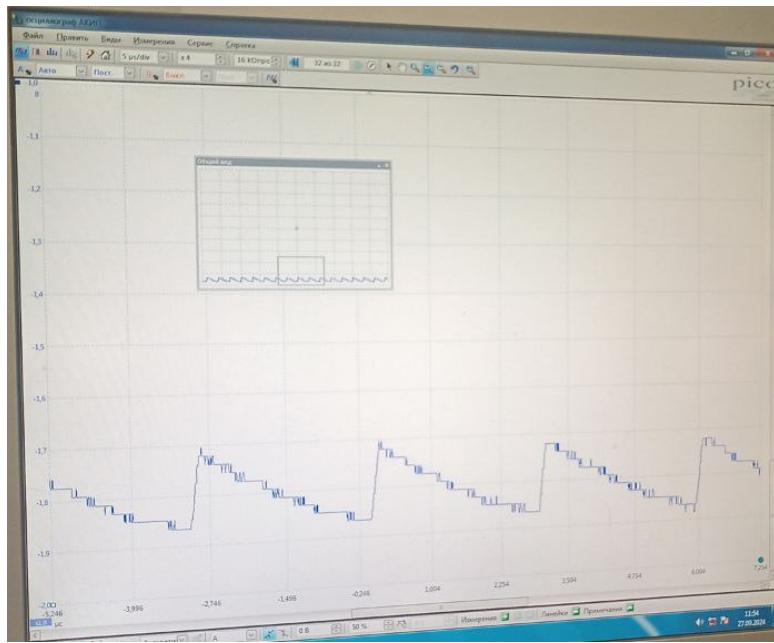


Рис. 13: сигнал $T = 3\text{мкс}$

Соберем схему согласно рис.4. Подадим на вход RC-цепочки последовательность прямоугольных импульсов с периодом повторения $T \sim \tau_{RC}$ и длительностью $\tau \sim T/20$.

27) Пронаблюдаем форму сигнала и его спектр на выходе RC-цепочки("фильтрованный сигнал") при различных значениях периода T :

28)

29)

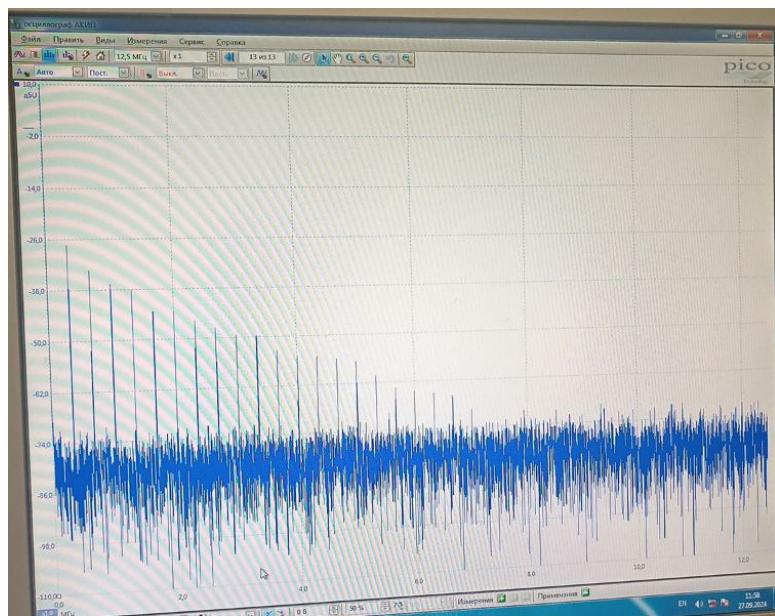


Рис. 14: спектр $T = 3\text{мкс}$

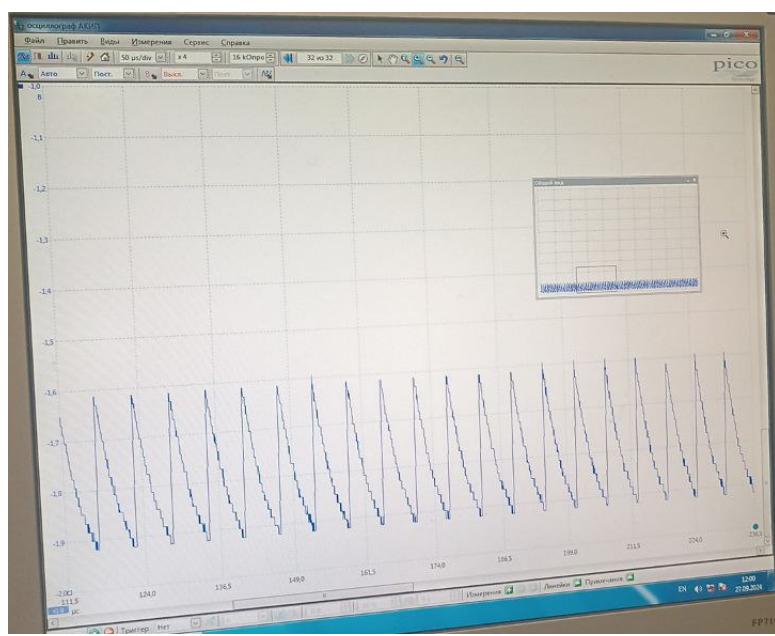


Рис. 15: сигнал $T = 6\text{мкс}$

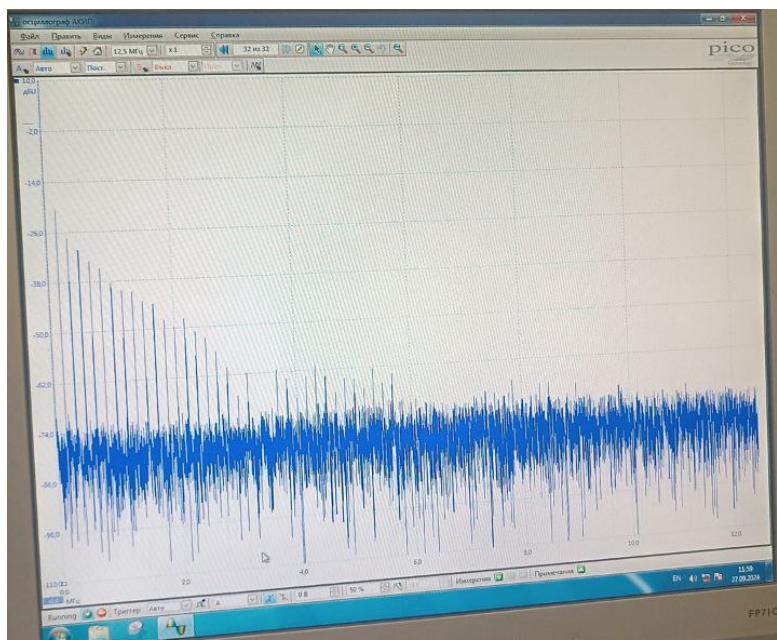


Рис. 16: спектр $T = 6\text{мкс}$

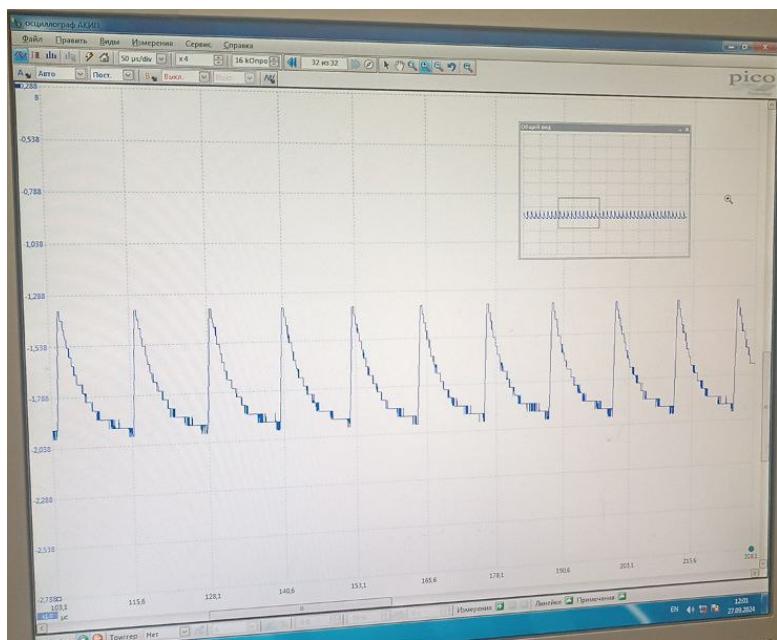


Рис. 17: сигнал $T = 12\text{мкс}$

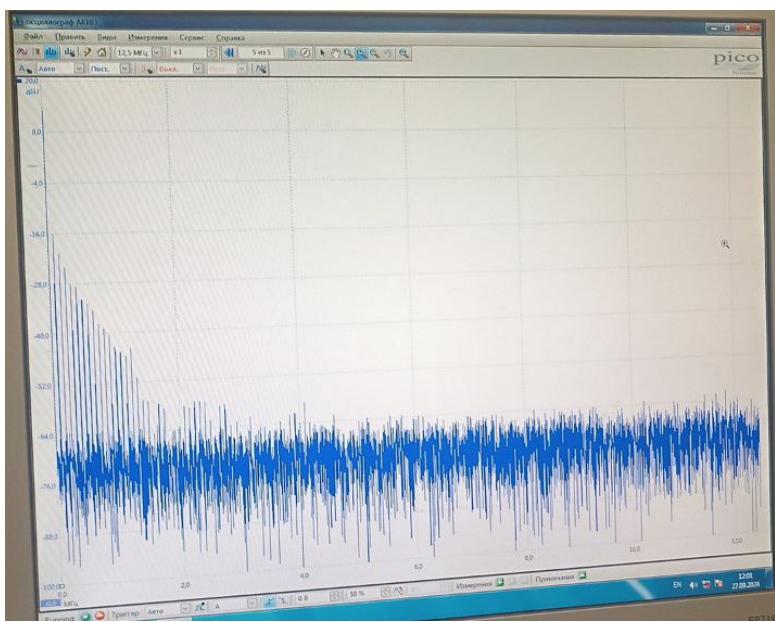


Рис. 18: спектр $T = 12\text{мкс}$