Работа 3.7.1
Скин-эффект в полом цилиндре

Шелихов Дмитрий
Группа Б01-305

9 ноября 2024 г.

Цель работы: исследовать явление проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр.

В работе используются: генератор сигналов АКИП-3420, соленоид, намотанный на полый цилиндрический каркас, медный экран в виде полого цилиндра, измерительная катушка, амперметр, вольтметр, двухканальный осциллограф GOS-620, RLC-метр.

Теоретические сведения

Считаем цилиндр достаточно длинным, так что в нем можно пренебречь краевыми эффектами. Тогда магнитное поле $\vec{H}$ всюду направлено по оси системы Oz, а вихревое электрическое поле $\vec{E}$ будет всюду перпендикулярно радиусу. (линии поля образуют соосные окружности)

Все величины считаем колеблющимися по гармоническому закону с некоторой частотой ω, задаваемой частотой колебания тока в соленоиде. Тогда:

$$H_z = H(r)e^{i\omega t}, E_z = E(r)e^{i\omega t}$$

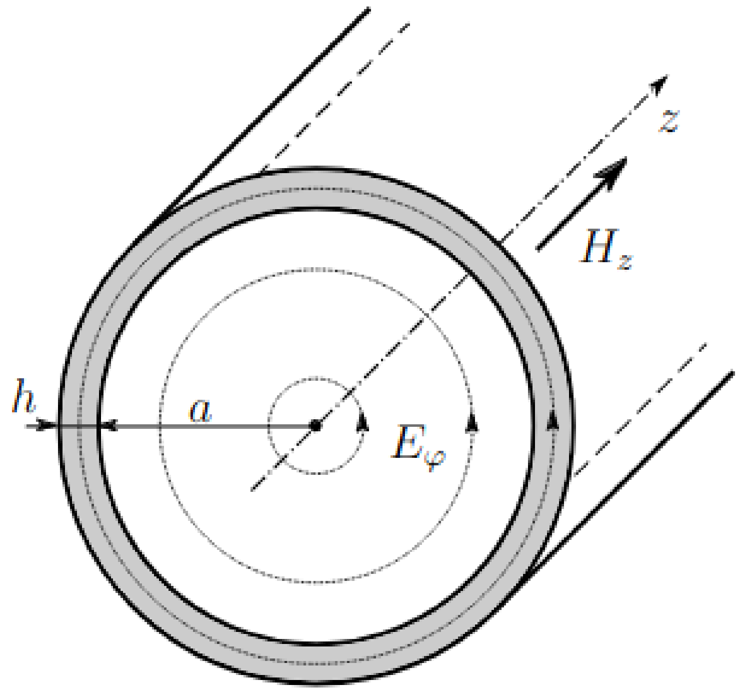
На границе цилиндра должны быть непрерывны касательные к поверхности компоненты как $\vec{E}$, так и $\vec{H}$ => E(r) и H(r) непрерывны во всей исследуемой области.
Пусть длинный полый цилиндр имеет радиус a и толщину стенки h « a. Последнее условие позволяет для описания поля внутри стенки ограничиться одномерным приближением. При этом для полного решения задачи необходимо вычислить и распределение поля внутри цилиндра.
Внутри цилиндра ток отсутсвует => магнитное поле там является однородным $H_z(r,t) = H_1 e^{i\omega t}$, где $H_1 = \text{const}$ - амплитуда поля на внутренней поверхности цилиндра. Для нахождения вихревого электрического поля воспользуемся законом электромагнитной индукции в интегральной форме:

$$E_\varphi \cdot 2\pi r = -\mu_0 \pi r^2 \cdot \frac{dH_z}{dt} \to E(r) = -\frac{1}{2}\mu_0 r \cdot i\omega H_1$$

.

Откуда получаем связь амплитуд колебаний электрического и магнитного полей на внутренней (r = a) границе цилиндра:

$$E_1 = -\frac{1}{2} i\omega a \mu_0 H_1$$



[H]

Рис. 1: Электрическое и магнитное поле в тонкостенном цилиндре

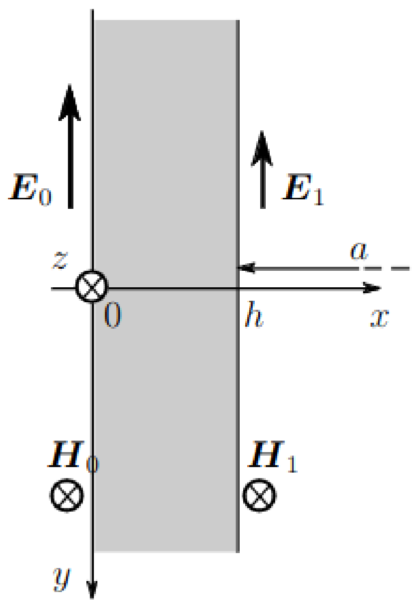


Рис. 2: Поле в стенке цилиндра

Поле внутри тонкой стенки цилиндра описывается уравнением скин-эффекта в плоском случае:

$$\frac{d^2H}{dx^2} = i\omega\sigma\mu_0 H$$

Где для медного цилиндра $\mu \approx 1$.

Граничные условия:

$$H(0) = H_1, H(h) = H_1$$

.

Решением дифференциального уравнения скин-эффекта с учетом граничных условий при x = h является:

$$H_1 = \frac{H_0}{ch(\alpha h) + \frac{1}{2}\alpha a sh(\alpha h)}$$

где $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\delta}e^{i\pi/4}$, $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}}$ - глубина скин-слоя.

Предельные случаи:

1) При малых частотах $\delta >> h$, тогда $|\alpha h|$ « 1, поэтому $ch\alpha h \approx 1$, $sh\alpha h \approx \alpha h$ и

$$H_1 \approx \frac{H_0}{1 + i\frac{ah}{\delta^2}}$$

Отношение модулей амплитуд:

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}}$$

При этом колебания H_1 отстают по фазе от H_0 на угол ψ:

$$tg(\psi) = \frac{ah}{\delta^2}$$

2) При достаточно больших частотах δ « h. Тогда $\mathrm{sh}(\alpha h) \approx \mathrm{ch}(\alpha h) \approx \frac{1}{2}e^{\alpha h}$.

Отношение амплитуд:

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{4e^{-\alpha h}}{\alpha a} = \frac{2\sqrt{\delta}}{a} \cdot e^{-\frac{h}{\delta}}e^{-i(\frac{\pi}{4}+\frac{h}{\delta})}$$

.

Запаздывание поля внутри, чем поля снаружи на:

$$\psi = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}}$$