

Работа 3.1.3

Измерение магнитного поля Земли

Шелихов Дмитрий
Группа Б01-305

2 октября 2024 г.

Цель работы: исследовать свойства постоянных неодимовых магнитов; измерить с их помощью горизонтальную и вертикальную составляющие индукции магнитного поля Земли и магнитное наклонение.

В работе используются: неодимовые магниты; тонкая нить для изготовления крутильного маятника; медная проволока; электронные весы; секундомер; измеритель магнитной индукции; штангенциркуль; брусок; линейка и штатив из немагнитных материалов; набор гирь и разновесов.

Теоретическая справка

$\vec{m} = I\vec{S}$ (1) - магнитный момент тонкого витка с током.

$\vec{B} = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}$ (2) - Магнитное поле точечного диполя.

$\vec{M} = [\vec{m} \times \vec{B}]$ (3) - Механический момент сил, действующий на точечный магнитный диполь \vec{m} .

$W = -(\vec{m} \cdot \vec{B})$ (4) - Потенциальная энергия, которой обладает диполь с постоянным \vec{m} .

$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B}$ (5) - Сила, действующая на магнитный диполь в неоднородном внешнем поле \vec{B} .

$$F_{12} = -\frac{6m_1m_2}{r^4} \quad (6.1)$$

- Сила, взаимодействия двух точечных диполей, когда их моменты направлены вдоль соединяющей их прямой.

$$F_{12} = \frac{3m_1m_2}{r^4} \quad (6.2)$$

- Сила, взаимодействия, если моменты направлены перпендикулярно соединяющей их прямой.

Экспериментальная установка

Используем неодимовые шарообразные магниты:

а) Вещество магнитожестко

б) Шары намагничены однородно

$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi R^3}$ (7) - магнитное поле внутри шара (однородно).

$\vec{m} = \vec{M}V$ (8), где \vec{M} - намагниченность материала магнита.

$\vec{B}_r = 4\pi \vec{M}$ (9) - остаточная индукция материала.

$B_p = B_0 = \frac{2}{3}B_r$ (10) - индукция на полюсах однородно намагниченного шара.

Определение магнитного момента магнитных шариков

Метод А.

Когда векторы двух магнитных моментов ориентированы вертикально:

$$\vec{m} = \sqrt{\frac{mgr_{max}^4}{6}} \quad (11)$$

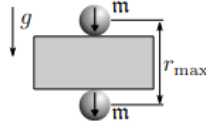


Рис. 1. Измерение магнитных моментов шариков

Метод Б.

Максимальная сила сцепления определится по весу магнитной цепочки, которую способен удержать самый верхний магнитный шарик.

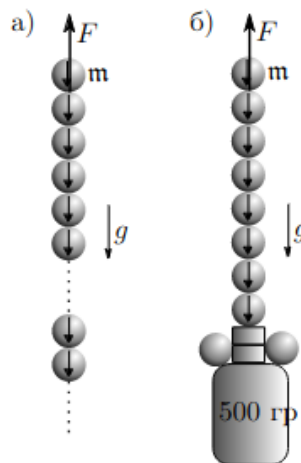


Рис. 2. Альтернативный метод измерения магнитных моментов шариков

Сила сцепления двух одинаковых шаров радиусами R с магнитными моментами \vec{m} равна

$$F_0 = \frac{6m^2}{(2R)^4} = \frac{3m^2}{8R^4} \quad (12)$$

Минимальный вес цепочки, при котором она оторвётся от верхнего шарика, равен:

$$F = F_0 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots\right) \approx 1,08F_0 \quad (13)$$

Измерение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли

Магнитное поле измеряем по периоду крутильных колебаний "магнитной стрелки" вокруг вертикальной оси. Стрелка стремится повернуться по горизонтальной составляющей магнитного поля Земли $\vec{B}_{||}$ в направлении Юг-Север.

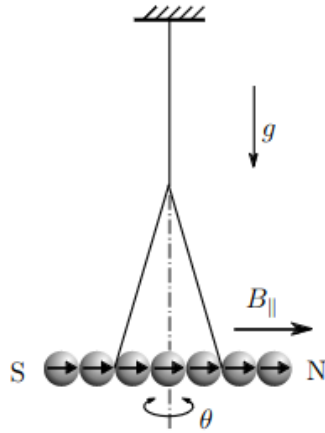


Рис. 3. Крутильный маятник во внешнем магнитном поле

$$M = -m_n B_{||} \sin \theta \quad (14) \text{ - возвращающий момент сил.}$$

$$J_n \ddot{\theta} + m_n B_{||} \theta = 0 \quad (15) \text{ - уравнение малых колебаний.}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_n}{m_n B_{||}}} \quad (16) \text{ - период малых колебаний.}$$

$$J_n \approx \frac{1}{12} m_n l_n^2 = \frac{1}{3} n^3 m R^2 \quad (17) \text{ - момент инерции магнитной стрелки.}$$

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m R^2}{3 m B_{||}}} \cdot n \quad (18) \text{ - период колебаний пропорционален числу шаров } n, \text{ составляющих "стрелку"}$$

Измерение вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли. Магнитное наклонение

Подвешиваем стрелку в одной точке. β - магнитное наклонение
С помощью доп. груза выравниваем стрелку по горизонтали.

$$M_n = m g r = n m B_{\perp} \quad (19) \text{ - момент силы тяжести, уравнивающего груза.}$$

Из равенства (19) определяем вертикальную составляющую индукции магнитного поля Земли.

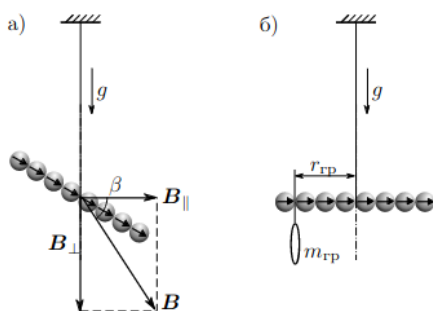


Рис. 4. Измерение вертикальной составляющей поля и магнитного наклона

Ход работы

I. Определение магнитного момента, намагниченности и остаточной магнитной индукции вещества магнитных шариков.

1) Измерим диаметр шариков и их массу.

М, г (76 шаров)	m, г	Δm , г
63,316	0,833	0,001

	d, мм
	5,496
	5,487
	5,492
$\langle d \rangle$, мм	5,492
Δd , мм	0,004
d, мм	$5,492 \pm 0,004$

2) С помощью магнитометра измерим индукцию поля B_p на полюсах шарика

N	B_p , мТл
1	357
2	319
3	275
4	305
5	346
6	265
7	368
8	367
9	357
10	354
11	400
12	393
$\langle B_p \rangle$, мТл	342
σ_{B_p} , мТл	41
B_p , мТл	342 ± 41

3) Определим максимальное расстояние r_{max} , на котором шарики удерживают друг друга в поле тяжести Земли.

N	r_{max} , мм
1	22,5
2	21,0
3	22,5
4	21,5
5	22,5
6	21,5
7	19,0
8	22,0
9	21,5
10	23,0
$\langle r_{max} \rangle$, мм	21,7
$\sigma_{r_{max}}$, мм	1,1
r_{max} , мм	$21,7 \pm 1,2$

4) Рассчитаем величину магнитного момента магнетика m по формуле (11). Оценим погрешность

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2}(\varepsilon_m + 4\varepsilon_{r_{max}})$$

m, г	g, $\frac{cm}{2}$	r_{max} ,	m, ед.СГС	Δm , ед.СГС
0,833	981,5	2,17	54,95	6,11

5-6) Используя дополнительные шарики, составим цепочку из 23 шариков и подсоединим цепочку к гире и разновесам так, чтобы общая масса системы составила ≈ 500 г. Подберём минимальный вес системы цепочки с гирей, при котором она отрывается от верхнего шарика. Оценить максимальную нагрузку таким методом получилось с точностью до 20 грамм.

$M_{нагр}$,	N, шт	$M_{цеп}$,	$M_{общ}$,	ΔM
539	23	19,16	558	20

7) Рассчитаем силу сцепления двух шаров и по ней определим магнитный момент шарика \vec{m} . Оценим погрешность результата по формуле

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_M + 4 \cdot \varepsilon_d)$$

M ,	g, $\frac{cm}{c^2}$	d, см	m, ед.СГС	ε_M	ε_d	Δm , ед.СГС
557,03	981,5	0,5492	87,61	0,036	$7,3 \cdot 10^{-4}$	3,13

8) Итого, мы получили два различных значения магнитных моментов:

Способ А	Способ Б
$m = (54,95 \pm 6,11)$ ед.СГС	$m = (87,61 \pm 3,13)$ ед.СГС

Исходя из полученных данных второй метод обладает меньшей погрешностью. По табличным данным для данного материала остаточная индукция $B_r = 12200$ Гаусс, что соответствует $m = 85$ ед.СГСЭ для шариков диаметром $d = 5,5$ мм. Исходя из этого, далее будем считать правильными данные, полученные в методе Б.

9) Рассчитаем величину намагниченности материала шариков M и остаточную индукцию магнитного поля B_r . Проведем сравнение с табличными значениями.

d, мм	V, мм ³	m, ед.СГС	M, ед.СГС	B_r , кГс	B_r , кГс
$5,492 \pm 0,004$	$86,734 \pm 0,190$	$87,61 \pm 3,13$	1010 ± 10	$12,7 \pm 0,1$	12,2-12,5

Видим, что полученные данные отличаются от табличных всего на 0.8 - 5%. Это подтверждает, что метод Б более точный, чем метод А. Незначительное расхождение с табличным значением может быть вызвано отличием магнитного момента \vec{m} самого верхнего шарика цепочки от среднего значения. Это различие может достигать 12%! Опыт следовало проводить меняя верхний шарик местами с другими шариками цепи, усредняя магнитный момент шарика сверху.

10) Рассчитаем индукцию B_p у полюсов шарика. Сравним расчётное значение B_p с измеренным.

B_p , мТл	B_p , мТл
342 ± 41	$84,7 \pm 0,7$

II. Определение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли

11) Соберём крутильный маятник из 12 магнитных шариков и подвесим его на немагнитном штативе. Используя Λ -образный подвес, установим "магнитную стрелку" в горизонтальное положение.

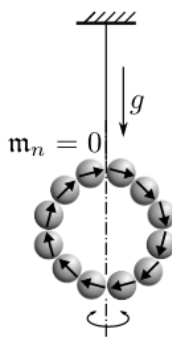


Рис. 5. Магнитная «стрелка», свёрнутая в кольцо

12-13) Возбудим крутильные колебания маятника вокруг вертикальной оси и определим их период. Оценим влияние упругости (модуля кручения) нити на период колебаний, возбудив крутильные колебания "стрелки свёрнутой в кольцо (магнитный момент такого кольцеобразного маятника равен 0). Исследуем зависимость периода T крутильных колебаний "стрелки" от количества магнитных шариков n , составляющих "стрелку".

Измерения проведем для значений $n = 3, 4, 5 \dots, 12$. Причем каждый раз перед измерением будем выставлять стрелку горизонтально.

n, шт	t, с	n, шт	T, с
12	18,47	5	3,69
	18,31	5	3,66
	17,94	5	3,59
	18,12	5	3,62
	18,28	5	3,66
T = (3,64 ± 0,04) с			
11	17,31	5	3,46
	17,06	5	3,41
	17,13	5	3,43
	17,09	5	3,42
	17,28	5	3,46
	16,87	5	3,37
T = (3,42 ± 0,03) с			
10	15,35	5	3,07
	15,31	5	3,06
	15,31	5	3,06
	15,29	5	3,05
	15,25	5	3,05
	15,59	5	3,12
	15,56	5	3,11
T = (3,08 ± 0,03) с			
9	14,03	5	2,81
	14,28	5	2,86
	13,97	5	2,79
	14,28	5	2,86
	14,38	5	2,88
	14,16	5	2,83
T = (2,84 ± 0,03) с			
8	12,81	5	2,56
	12,54	5	2,51
	12,62	5	2,52
	12,59	5	2,52
	12,87	5	2,57
	12,78	5	2,56
T = (2,54 ± 0,02) с			

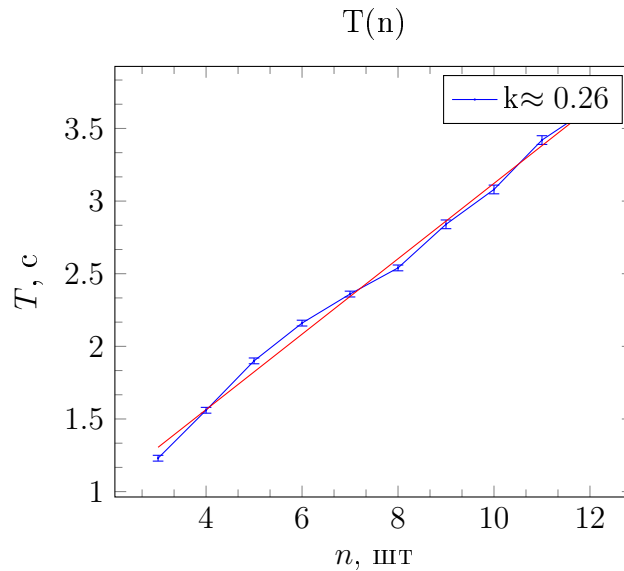
n, шт	t, с	n, шт	T, с
7	11,62	5	2,32
	11,81	5	2,36
	11,66	5	2,33
	11,90	5	2,38
	11,84	5	2,37
	11,87	5	2,37
T = (2,36 ± 0,02) с			
6	10,84	5	2,17
	10,94	5	2,19
	10,69	5	2,14
	10,84	5	2,17
	10,63	5	2,13
	10,75	5	2,15
	10,94	5	2,19
T = (2,16 ± 0,02) с			
5	9,50	5	1,90
	9,40	5	1,88
	9,47	5	1,89
	9,66	5	1,93
	9,47	5	1,89
	9,57	5	1,91
T = (1,90 ± 0,02) с			
4	7,69	5	1,54
	7,93	5	1,59
	7,78	5	1,56
	7,88	5	1,58
	7,69	5	1,54
	7,75	5	1,55
T = (1,56 ± 0,02) с			
3	6,13	5	1,23
	6,13	5	1,23
	6,07	5	1,21
	6,07	5	1,21
	6,31	5	1,26
	6,18	5	1,24
T = (1,23 ± 0,02) с			

	T, с
Кольцо из n = 12 шариков	61

$$k = \frac{4n^3mr^2\pi^2}{3T^2} \text{ Модуль кручения нити}$$

Откуда находим $k \approx 0,38$ дин·см. Однако при рассмотрении колебаний магнитной стрелки мы имеем дело с величинами порядка $B_{||} \cdot m \approx 12,14$ дин·см. Таким образом упругостью нити можно пренебречь.

14) Построим график экспериментальной зависимости $T(n)$.



Видим, что зависимость линейна. По значению углового коэффициента рассчитаем величину горизонтальной составляющей магнитного поля Земли.

$$k = 2\pi \sqrt{\frac{mR^2}{3|\vec{m}|B_{||}}}$$

m, г	R, см	$ \vec{m} $, ед.СГС	k, с	$B_{ }$, Гс
$0,833 \pm 0,001$	$0,2746 \pm 0,0002$	$87,61 \pm 3,13$	0,26	$0,140 \pm 0,005$

III. Определение вертикальной составляющей магнитного поля Земли.

15) Изготовим магнитную "стрелку" из $n = 10$ шариков и подвесим её за середину с помощью нити на штативе.

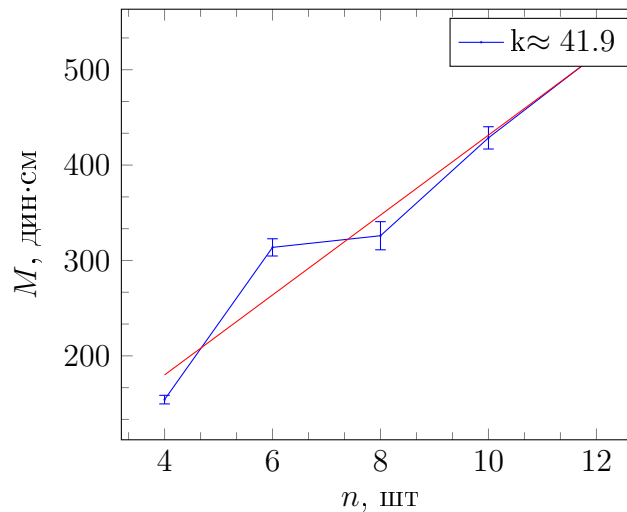
16) Определим механический момент сил, действующий со стороны магнитного поля Земли на горизонтально расположенную магнитную "стрелку". Для этого, с помощью одного или нескольких кусочков проволоки, уравновесим "стрелку" в горизонтальном положении.

17-18) С помощью весов определим массу уравнивающего груза m . Из условия равновесия рассчитаем механический момент сил M , действующих на горизонтальную стрелку со стороны поля Земли. Измерение момента сил проведем для четных значений $n = 4, 6, 8, 10, 12$.

$$M_n = mgr$$

n, шт	r, см	m, г	g, $\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$	M_n^i , дин·см	M_n , дин·см
12	2,746	0,194	981,5	522,87	$515,73 \pm 10,08$
	2,197	0,240		517,48	
	1,648	0,311		502,92	
	1,098	0,482		519,63	
10	1,648	0,257		415,60	$428,54 \pm 11,68$
	1,098	0,407		438,78	
	0,549	0,800		431,23	
8	1,648	0,190		307,25	$325,94 \pm 14,75$
	1,098	0,311		335,28	
	0,549	0,622		335,28	
6	1,098	0,284		306,17	$313,72 \pm 9,03$
	0,549	0,596		321,27	
4	0,549	0,286		154,11	$154,11 \pm 3,78$

19) Построим график экспериментальной зависимости $M(n)$.



Исходя из линейной аппроксимации $k \approx 41,9$ дин·см. По значению углового коэффициента k рассчитаем величину вертикальной составляющей B_{\perp} магнитного поля Земли. Оценим погрешность результата.

k, дин·см	m, ед.СГС	B_{\perp} , Гс
$41,9 \pm 0,8$	$87,61 \pm 3,13$	$0,48 \pm 0,03$

20) Используя результаты измерения B_{\parallel} и B_{\perp} , определим магнитное наклонение β и полную величину индукции магнитного поля Земли на широте Долгопрудного.

$$B = \sqrt{B_{\parallel}^2 + B_{\perp}^2}$$

$$\beta = \arctg \frac{B_{\perp}}{B_{\parallel}}$$

B_{\parallel} , Гс	B_{\perp} , Гс	$B_{\text{полн}}$, Гс	β
$0,140 \pm 0,005$	$0,48 \pm 0,03$	$0,50 \pm 0,03$	$74^{\circ} \pm 4^{\circ}$

21) Сравним полученные значения наклона β с расчётным, в предположении, что магнитное поле Земли есть поле однородно намагниченного вдоль оси вращения шара.

Оценим также полный магнитный момент \vec{m} .

Долгопрудный находится на широте $\theta = 55,9495^\circ$, а значит расчетное значения магнитного наклона можно вычислить так:

$$\arctg(\beta) = \frac{2\sin(\theta)}{\cos\theta} \approx 71^\circ$$

. В пределах погрешности полученное значение β ложится на расчетные данные.

$$m = \frac{B_0 R^3}{2} = (6,5 \pm 0,4) \cdot 10^{25} \text{ ед.СГС}$$

22) Сравним полученные данные магнитного поля Земли с табличными:

m , ед.СГС	$m_{\text{З табл}}$, ед.СГС	$B_{\text{полн}}$, Гс	$B_{\text{полн табл}}$, Гс
$(6,5 \pm 0,4) \cdot 10^{25}$	$7,7 \cdot 10^{25}$	$0,50 \pm 0,03$	0,59

Вывод

Измерены характеристики постоянных неодимовых магнитов в форме шара диаметром d
 $= (5,492 \pm 0,004) \text{ мм}$:

m , ед.СГС	B_p , кГс	M , ед.СГС	B_r , кГс
$87,61 \pm 3,13$	$3,42 \pm 4,10$	1010 ± 10	$12,7 \pm 0,1$

С их помощью измерены горизонтальная и вертикальная составляющие индукции магнитного поля Земли и магнитное наклонение в Долгопрудном:

$B_{ }$, Гс	B_{\perp} , Гс	$B_{\text{полн}}$, Гс	β
$0,140 \pm 0,005$	$0,48 \pm 0,03$	$0,50 \pm 0,03$	$74^\circ \pm 4^\circ$