Работа 3.6.1
Спектральный анализ электрических сигналов

Шелихов Дмитрий
Группа Б01-305

18 октября 2024 г.

Цель работы: изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров; проверить справедливость соотношений неопределённостей; познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки.

В работе используются: генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье или цифровой USB-осциллограф, подключенный к персональному компьютеру.

Теоретическая справка

По теореме Фурье любая периодическая функция может быть представлена в виде ряда (конечного или бесконечного) гармонических функций с кратными частотами - ряда Фурье. Одно из представлений ряда Фурье для функции с периодом T имеет вид

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n cos(2\pi\nu_n t) + B_n sin(2\pi\nu_n t), \ (1)$$

,где ν_n = nν_0, $\nu_0 = \frac{1}{T}$, n = 1,2,... - частоты фурье-гармоник, A_n и B_n - коэффициенты разложения в ряд Фурье.

Коэффициенты находятся как:

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot cos(2\pi\nu_n t)dt, B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot sin(2\pi\nu_n t)dt. \ (2)$$

На практике удобнее использовать эквивалентную форму записи ряда Фурье в "представлении амплитуд и фаз":

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(2\pi\nu_n t + \varphi_n). \ (3)$$

, где $a_n = \sqrt{{A_n}^2 + {B_n}^2}$, а фаза определяется соотношением tg$\varphi_n = \frac{B_n}{A_n}$

Соотношения неопределённостей.

Между сигналом как функцией времени f(t) и его спектром как функции частоты a(ν) имеется взаимосвязь. Если у сигнала f(t) есть какое-то характеристическое время Δt (например период повторения, длительность импульса, время нарастания и т.д.), то в спектре a(ν) в том или ином виде наблюдается характерный масштаб $\Delta\nu \sim \frac{1}{\Delta t}$ (расстояние между пиками, ширина спектра, ширина пиков и т.д.)

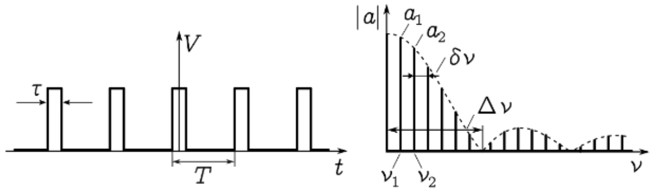


Рис. 1: Периодическая последовательность импульсов и её спектр

$$\Delta\nu \cdot \Delta t \sim 1 \text{ (4) - соотношение неопределённостей}$$

Для любого сигнала с периодом T в спектре обязательно будут наблюдаться гармоники на расстоянии $\delta\nu = 1/\text{T}$ друг от друга. В данном случае соотношение является точным и от формы сигнала не зависит.

Ход работы

1) По техническому описанию ознакомимся с устройством панели приборов: генератора сигналов произвольной формы и цифрового осциллографа/компьютерной программы, используемой для отображения сигналов с осциллографа. Изучим расположение основных кнопок и ручек настройки.
2) Подключим один из выходов генератора к одному из каналов осциллографа и включим приборы в сеть.

А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённостей

3) Следуя техническому описанию генератора, настроим генерацию прямоугольных импульсов. Параметры: $\nu_{\text{повт}} = 1$кГц (период $\text{T} = 1/\nu_{\text{повт}} = 1$мс), и длительность импульса $\tau = \text{T}/20 = 50$ мкс.
4) По техническому описанию получим устойчивую картину сигнала на экране осциллографа.
5) Следуя техническому описанию осциллографа, получим на его экране спектр (преобразование Фурье) сигнала.

Масштаб по горизонтальной оси установим меньше или порядка ожидаемой ширины спектра $\Delta\nu \approx 20$ кГц (ширину спектра оцениваем из соотношения неопределённсотей).

Масштаб по вертикальной оси подберём так, чтобы спектральные линии не выходили за пределы экрана (кроме, может быть, «нулевой» гармоники $\nu = 0$ Гц, — она отвечает за уровень постоянного смещения сигнала, и ее высота может оказаться значительно выше остальных).

Центр картины при предварительной настройке установите на 0 Гц, а затем после подбора масштабов сместите его так, чтобы спектр занимал весь экран начиная от левого края.

6) Пронаблюдаем, как изменяется спектр при изменении параметров сигнала.

Наблюдения: а) При увеличении $\nu_{\text{повт}}$ выросли амплитуды, ширина спектра не меняется.

б) При увеличении τ амплитуды гармоник вырастают, а ширина спектра уменьшается.

7) При фиксированных $\nu_{\text{повт}} = 1$кГц и $\tau = 50$мкс измерим амплитуды a_n и частоты ν_n 8 гармоник. Сравним значения с рассчитанными теоретически

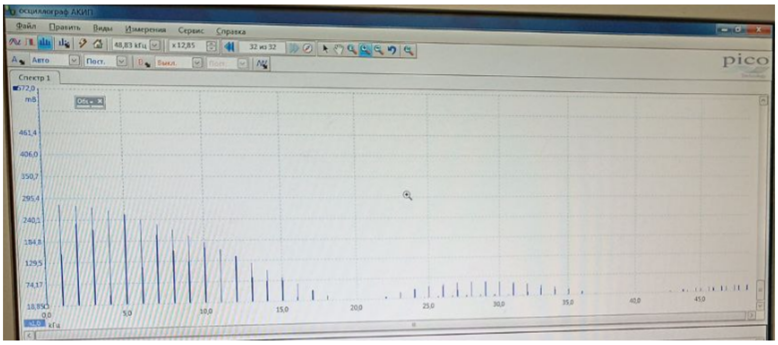


Рис. 2: $\nu_{\text{повт}} = 1$кГц, $\tau = 50$мкс

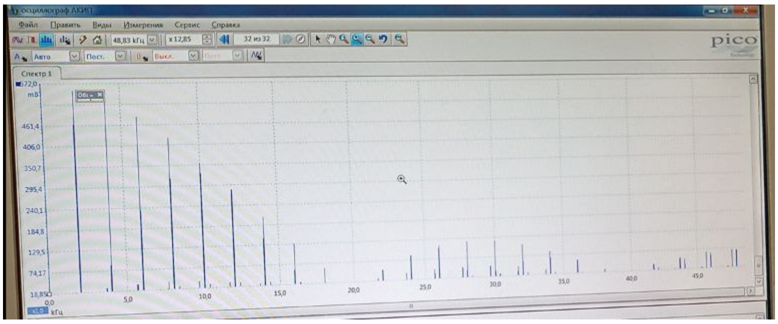


Рис. 3: $\nu_{\text{повт}} = 2$кГц, $\tau = 50$мкс

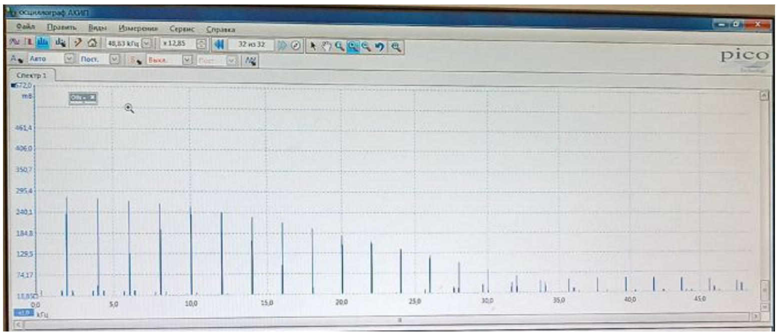


Рис. 4: $\nu_{\text{повт}} = 2$кГц, $\tau = 25$мкс

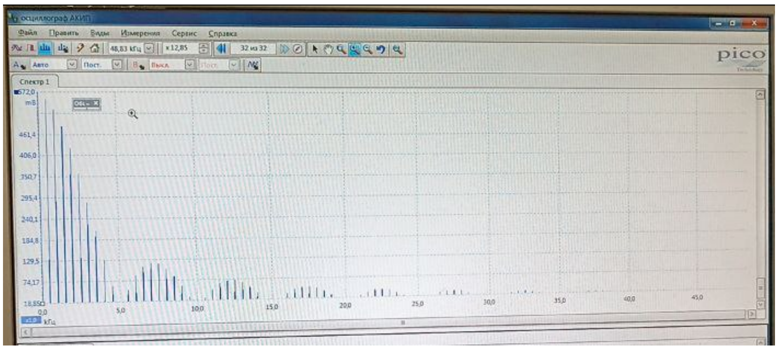


Рис. 5: $\nu_{\text{повт}} = 0.5$кГц, $\tau = 200$мкс

$$\nu_n = \frac{n}{T}, |a_n| = \frac{|sin\frac{\pi n \tau}{T}|}{\pi n} = \frac{\tau}{T}\frac{|sin\pi\nu_n\tau|}{\pi\nu_n\tau}$$

Результаты измерений занесём в таблицу:

n гармоники	1	2	3	4	5	6	7	8
$\nu_n^{эксп}$, кГц	1,014	2,031	3,007	4,024	5,041	6,017	6,994	8,011
$\nu_n^{теор}$, кГц	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lvert a_n^{эксп}\rvert$, мВ	279,1 ± 0,1	275,8 ± 0,1	270,9 ± 0,1	262,7 ± 0,1	252,9 ± 0,1	241,4 ± 0,1	226,7 ± 0,1	212,0 ± 0,1
$\lvert a_n/a_1\rvert^{эксп}$	1	0,988 ± 0,001	0,967 ± 0,001	0,939 ± 0,001	0,904 ± 0,001	0,862 ± 0,001	0,814 ± 0,001	0,760 ± 0,001
$\lvert a_n/a_1\rvert^{теор}$	1	0,988	0,971	0,941	0,906	0,865	0,812	0,760

8) Зафиксируем период повторения T прямоугольного сигнала. T = 1мс, $\nu_{повт}$ = 1кГц. Изменяя длительность импульса τ в диапазоне от τ = T/50 до τ = T/5, измерим полную ширину спектра сигнала $\Delta\nu$ - от центра спектра ($\nu = 0$) до гармоники с нулевой амплитудой $a_n \approx 0$.

τ, мкс	$\Delta\nu$, кГц	$\nu_{повт}$, кГц
30	27,8 ± 1.4	1
45	19,9 ± 1.0	
67,5	13,8 ± 0.7	
100	10.0 ± 0.5	
140	6,0 ± 0.3	
200	5,0 ± 0.1	

9) Зафиксируем длительность импульса прямоугольного сигнала τ = 100мкс. Изменяя период повторения T в диапазоне от 2τ до 50τ измерим расстояния $\delta\nu = \nu_{n+1}$ - ν_n между соседнимим гармониками спектра. Если спектральные компоненты окажутся расположены слишком близко друг к другу, измерим расстояние между (n + m)-й и m-й гармониками (для некоторых целых n и m) и найдем $\delta\nu = \frac{(\nu_{n+m} - \nu_n)}{m}$.

T, мкс	$\delta\nu_m$, кГц	$\delta\nu$, кГц	$\nu_{повт}$, кГц	m, шт
200	19,98 ± 0,02	4,995 ± 0,005	5,00	4
300	19,98 ± 0,02	3,330 ± 0,003	3,33	6
500	20,00 ± 0,02	2,000 ± 0,002	2,00	10
800	12,52 ± 0,02	1,252 ± 0,002	1,25	10
1100	9,10 ± 0,02	0,910 ± 0,002	0,91	10
1500	6,66 ± 0,02	0,666 ± 0,002	0,67	10
2000	5,06 ± 0,02	0,506 ± 0,002	0,50	10
2500	4,00 ± 0,02	0,400 ± 0,002	0,40	10
3000	3,34 ± 0,02	0,334 ± 0,002	0,33	10
3500	2,86 ± 0,02	0,286 ± 0,002	0,29	10
4000	2,50 ± 0,02	0,250 ± 0,002	0,25	10
4500	2,22 ± 0,02	0,222 ± 0,002	0,22	10
5000	2,00 ± 0,02	0,200 ± 0,002	0,20	10

10) Построим графики зависимостей $\Delta\nu(1\ \tau)$ и $\delta\nu(1/T)$. Проведем наилучшие прямые и определим их наклон.

График зависимости ширины спектра от обратного времени импульса $\Delta\nu(1/\tau)$:

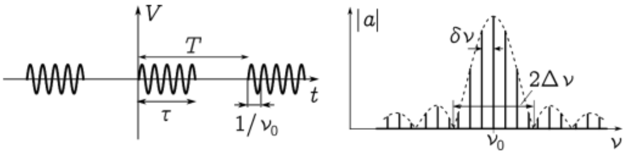
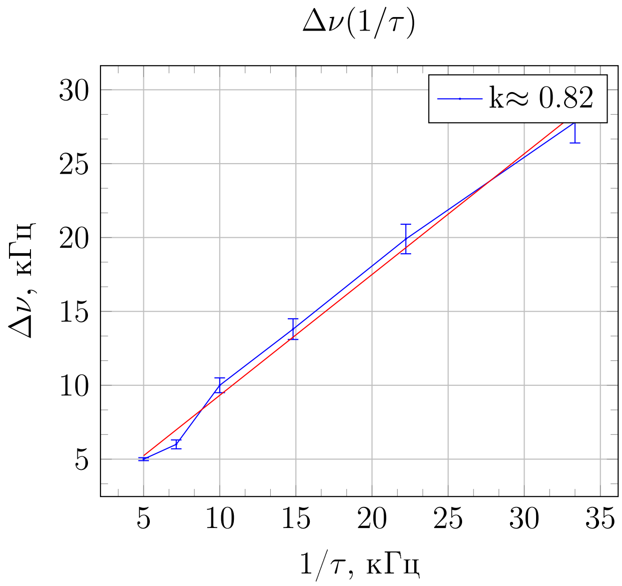
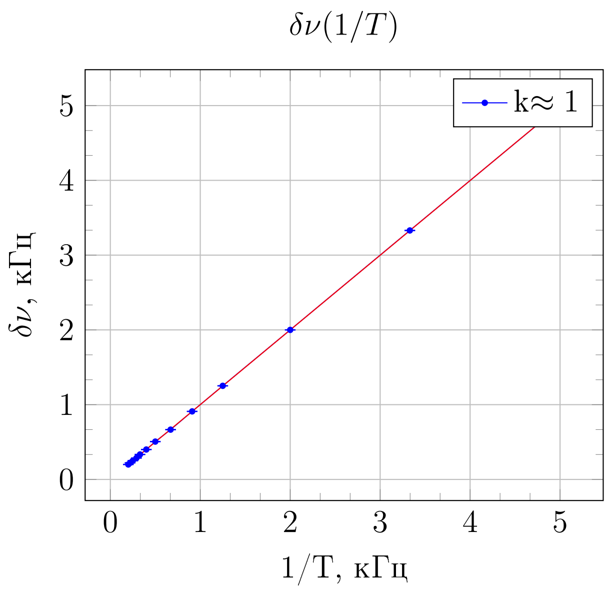


Рис. 6: Периодическая последовательность цугов и её спектр



Получили k ≈ 0.82 ± 0.05. По соотношению неопределённостей $k \approx \Delta\nu \cdot \tau \approx 1$. Таким образом соотношение соблюдается, поскольку получена величина по порядку совпадающая с единицей.

График $\delta\nu$(1/T) :



Таким образом получаем k = $\delta\nu$·T = 1,000 ± 0,004 ≈ 1. Убеждаемся в справедливости соотношение неопределённостей.

Б.Наблюдение спектра периодической последовательности цугов

11) Следуя техническому описанию генератора, установим его на режим подачи периодических импульсов синусоидальной формы ("цугов"). Установим несущую частоту ν_0 =

50кГц, период повторения T = 1мс ($\nu_{\text{повт}} = 1$кГц), число периодов синусоиды в одном импульсе N = 5 (что соответствует длительности имплульса $\tau = N/\nu_0 = 100$ мкс). Получим на экране осциллографа устойчивую картину сигнала.
12) Получим на экране осциллографа спектр сигнала. Центр картины установим на частоту ν_0. Масштаб по горизонтали (кГц/дел) подберем так, чтобы спектр помещался на экране.
13) Изменяя параметры сигнала T, ν_0 и N пронаблюдаем, как изменяется вид спектра. Сравним наблюдаемые спектры со спектрами прямоугольных импульсов.

Наблюдения: а) При изменении N число волн спектра равно 2N-1

б) При увеличении N амплитуда растет, ширина спектра уменьшается

в) При увеличении T амплитуда уменьшается, ширина спектра не меняется. Число гармоник увеличивается

г) При увеличении ν_0 амплитуда уменьшается, ширина спектра растет

14) При параметрах сигнала, соответствующих сохранённым в предыдущем пункте изображениям, измерим положение центра спектра, его ширину $\Delta\nu$ и расстояние между гармониками $\delta\nu$.

ν_0, кГц	$\nu_{\text{центр}}$, кГц	T, мс	$\delta\nu_m$, кГц	m, шт	N, шт	$\delta\nu$
50	50.02 ± 0.02	1	10.01 ± 0.02	20	5	1.00
70	70.00 ± 0.02	1	14.04 ± 0.02	28	5	1.00
50	49.94 ± 0.02	2	9.94 ± 0.02	40	5	0.50
50	50.00 ± 0.02	1	8.00 ± 0.02	16	6	1.00

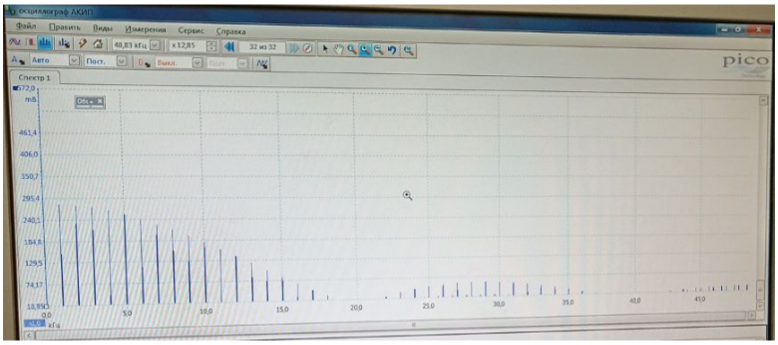


Рис. 7: ν_0 = 50кГц, T = 1мс, N = 5

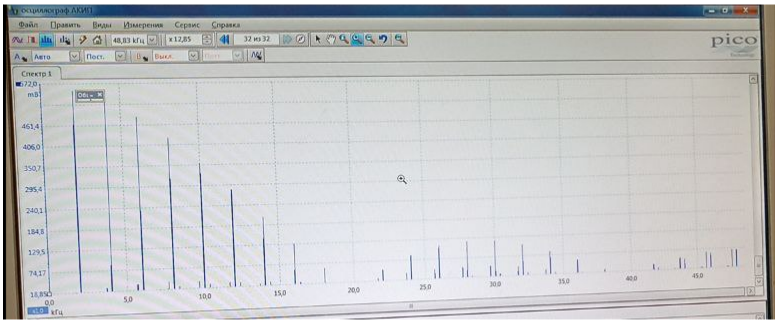


Рис. 8: ν_0 = 70кГц, T = 1мс, N = 5

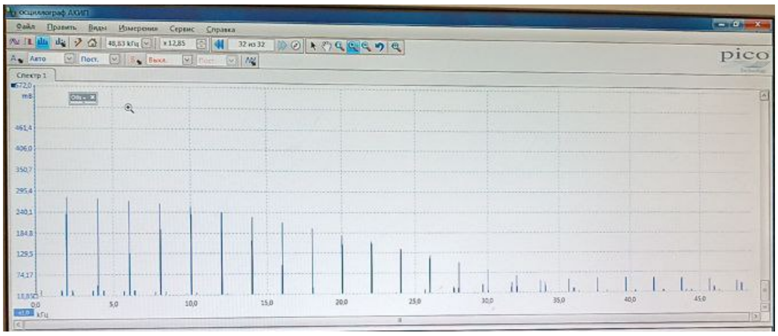


Рис. 9: ν_0 = 50кГц, T = 2мс, N = 5

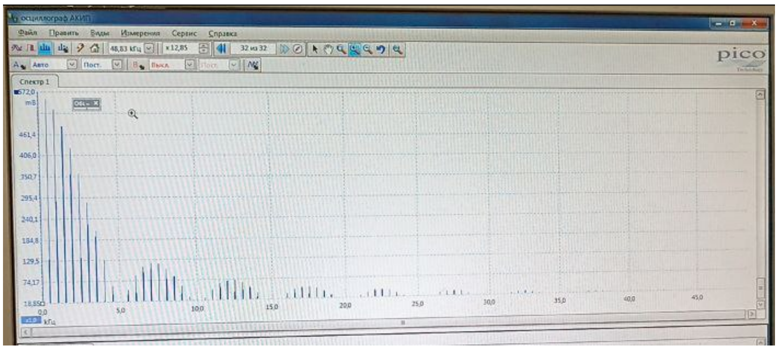


Рис. 10: ν_0 = 50кГц, T = 1мс, N = 6