

# Работа 3.7.1

## Скин-эффект в полом цилиндре

Шелихов Дмитрий  
Группа Б01-305

22 ноября 2024 г.

**Цель работы:** исследовать явление проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр.

**В работе используются:** генератор сигналов АКИП-3420, соленоид, намотанный на полый цилиндрический каркас, медный экран в виде полого цилиндра, измерительная катушка, амперметр, вольтметр, двухканальный осциллограф GOS-620, RLC-метр.

### Теоретические сведения

Считаем цилиндр достаточно длинным, так что в нем можно пренебречь краевыми эффектами. Тогда магнитное поле  $\vec{H}$  всюду направлено по оси системы Oz, а вихревое электрическое поле  $\vec{E}$  будет всюду перпендикулярно радиусу. (линии поля образуют соосные окружности)

Все величины считаем колеблющимися по гармоническому закону с некоторой частотой  $\omega$ , задаваемой частотой колебания тока в соленоиде. Тогда:

$$H_z = H(r)e^{i\omega t}, E_z = E(r)e^{i\omega t}$$

На границе цилиндра должны быть непрерывны касательные к поверхности компоненты как  $\vec{E}$ , так и  $\vec{H} \Rightarrow E(r)$  и  $H(r)$  непрерывны во всей исследуемой области.

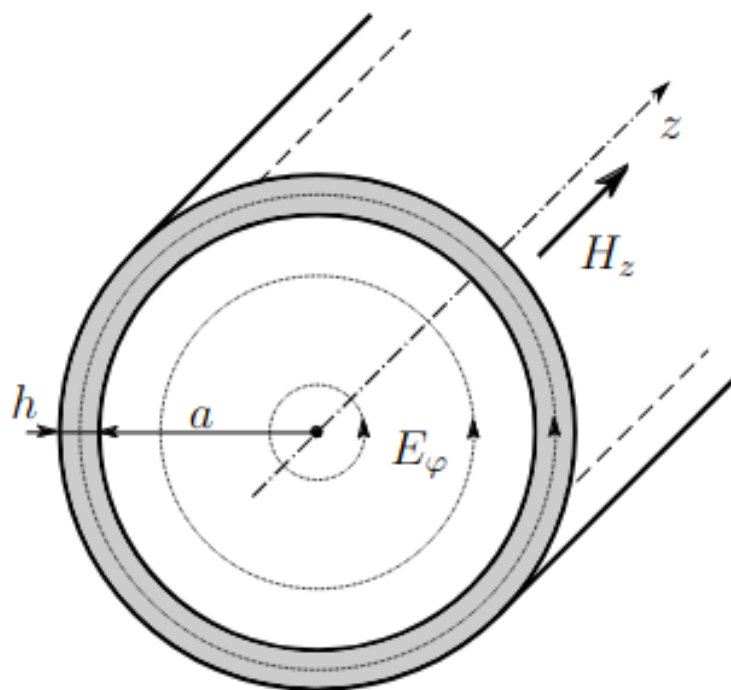
Пусть длинный полый цилиндр имеет радиус  $a$  и толщину стенки  $h \ll a$ . Последнее условие позволяет для описания поля внутри стенки ограничиться одномерным приближением. При этом для полного решения задачи необходимо вычислить и распределение поля внутри цилиндра.

Внутри цилиндра ток отсутствует  $\Rightarrow$  магнитное поле там является однородным  $H_z(r, t) = H_1 e^{i\omega t}$ , где  $H_1 = \text{const}$  - амплитуда поля на внутренней поверхности цилиндра. Для нахождения вихревого электрического поля воспользуемся законом электромагнитной индукции в интегральной форме:

$$E_\varphi \cdot 2\pi r = -\mu_0 \pi r^2 \cdot \frac{dH_z}{dt} \rightarrow E(r) = -\frac{1}{2} \mu_0 r \cdot i\omega H_1$$

Откуда получаем связь амплитуд колебаний электрического и магнитного полей на внутренней ( $r = a$ ) границе цилиндра:

$$E_1 = -\frac{1}{2} i\omega a \mu_0 H_1$$



[H]

Рис. 1: Электрическое и магнитное поле в тонкостенном цилиндре

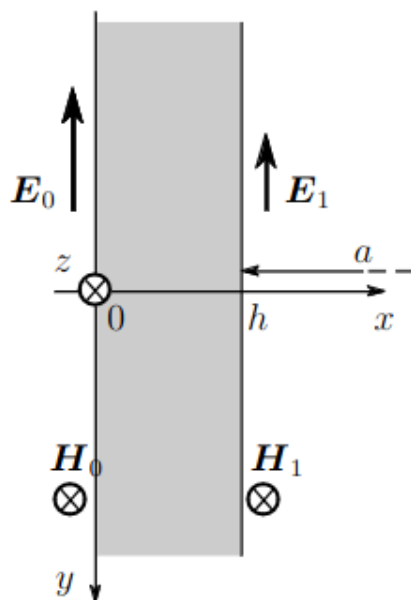


Рис. 2: Поле в стенке цилиндра

Поле внутри тонкой стенки цилиндра описывается уравнением скин-эффекта в плоском случае:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = i\omega\sigma\mu_0 H$$

Где для медного цилиндра  $\mu \approx 1$ .

Граничные условия:

$$H(0) = H_1, H(h) = H_1$$

Решением дифференциального уравнения скин-эффекта с учетом граничных условий при  $x = h$  является:

$$H_1 = \frac{H_0}{ch(\alpha h) + \frac{1}{2}\alpha a sh(\alpha h)}$$

где  $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{i\pi/4}$ ,  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}}$  - глубина скин-слоя.

Предельные случаи:

1) При малых частотах  $\delta \gg h$ , тогда  $|\alpha h| \ll 1$ , поэтому  $ch\alpha h \approx 1$ ,  $sh\alpha h \approx \alpha h$  и

$$H_1 \approx \frac{H_0}{1 + i\frac{ah}{\delta^2}}$$

Отношение модулей амплитуд:

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}}$$

При этом колебания  $H_1$  отстают по фазе от  $H_0$  на угол  $\psi$ :

$$tg(\psi) = \frac{ah}{\delta^2}$$

2) При достаточно больших частотах  $\delta \ll h$ . Тогда  $sh(\alpha h) \approx ch(\alpha h) \approx \frac{1}{2}e^{\alpha h}$ .

Отношение амплитуд:

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{4e^{-\alpha h}}{\alpha a} = \frac{2\sqrt{\delta}}{a} \cdot e^{-\frac{h}{\delta}} e^{-i(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta})}$$

Запаздывание поля внутри, чем поля снаружи на:

$$\psi = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}}$$

### Экспериментальная установка

Переменное магнитное поле создается с помощью соленоида, намотанного на цилиндрический каркас, который подключается к генератору сигналов. Внутри каркаса расположен медный экран в виде полого цилиндра.

1) Цифровым амперметром измеряется действующее значение переменного тока в цепи соленоида.

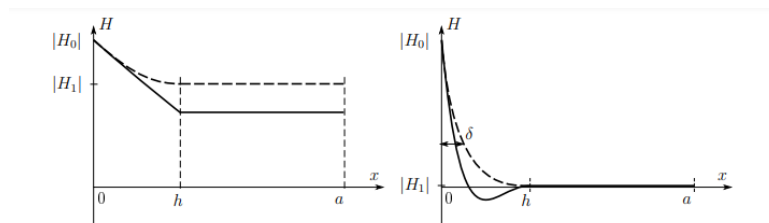


Рис. 3: Распределение амплитуды колебаний магнитного поля и его мгновенного значения при некотором  $t$  в зависимости от расстояния  $x$  до внешней стенки цилиндра. Слева - низкие частоты, справа - высокие частоты

2) Цифровым вольтметром измеряется действующее напряжение на измерительной катушке 4.

3) На канал Y осциллографа подается напряжение с измерительной катушки, а на X - напряжение резистора R, которое пропорционально току в соленоиде. С помощью осциллографа будем определять сдвиг фаз между напряжениями.

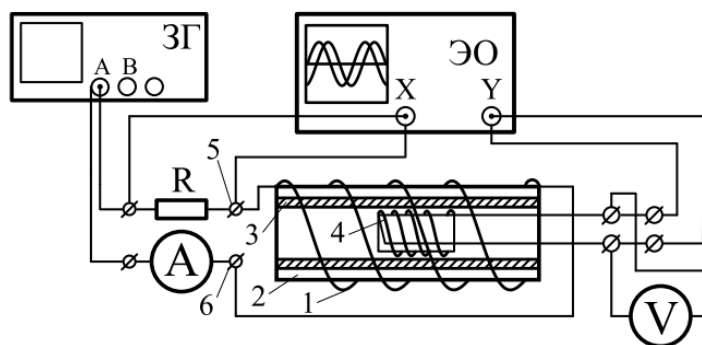


Рис. 4: Экспериментальная установка для изучения скин-эффекта

Для определения проводимости  $\sigma$  по изменению L катушки используем RLC-метр

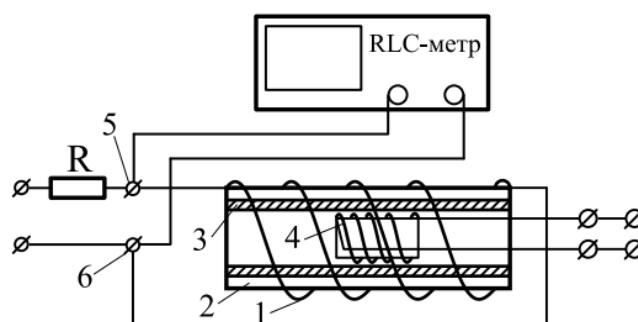


Рис. 5: Схема подключения RLC-метра

### Измерение отношения амплитуд магнитного поля внутри и вне экрана

С помощью вольтметра V измеряется действующее значение ЭДС индукции, которое возникает в измерительной катушке, находящейся в переменном магнитном поле.

$$U = -SN \frac{dB_1(t)}{dt} = -i\omega\mu_0 SN H_1 e^{i\omega t}$$

- комплексная амплитуда ЭДС индукции в измерительной катушке.

Вольтметр показывает действующее значение:

$$U = \frac{SN\omega}{\sqrt{2}}\mu_0|H_1|$$

Откуда:

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = const \cdot \frac{U}{\nu I}$$

Неизвестную константу измеряем при малых частотах  $\nu \rightarrow 0$ , когда  $\frac{|H_1|}{|H_0|} \rightarrow 1$ .

### **Определение проводимости материала экрана по фазовому сдвигу**

Для определения  $\sigma$  экрана будем использовать частотную зависимость фазового сдвига между магнитными полями внутри и вне экрана при низких и высоких частотах. //

Зависимость  $\text{tg}(\psi)$  от  $\nu$  линейна, причем аппроксимирующая прямая должна проходить через начало координат. В области больших частот  $\nu \gg 1/(\pi h^2 \sigma \mu_0)$  зависимость  $\psi(\sqrt{\nu} - \pi/4)$  аппроксимируется прямой, проходящей через начало координат. По наклону этих прямых можно вычислить проводимость материала экрана.

Заметим, что на входной канал У осциллографа подается сигнал с измерительной катушки, который пропорционален производной поля внутри экрана по времени, поэтому появляется дополнительный сдвиг по фазе на  $\pi/2$ . Поэтому измеренный по осциллографу сдвиг по фазе между двумя синусоидами будет на  $\pi/2$  больше фазового сдвига между магнитными полями вне и внутри экрана:

$$\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$$

### **Влияние скин-эффекта на индуктивность катушки**

Из-за скин эффекта индуктивность соленоида с медным цилиндрическим экраном внутри будет зависеть от частоты тока.

Рассмотрим магнитный поток через катушку как сумму двух магнитных потоков:

1) Пронизывающий область между катушкой и цилиндрическим экраном  $\Phi_{out}$  2) Пронизывающий область за экраном  $\Phi_{in}$

$$\Phi = \Phi_{in} + \Phi_{out} = H_0 S_0 + H_1 S_1 = LI$$

Индуктивность минимальна в случае, если  $\Phi_{in} = 0$  (поле есть только во внешней области). При этом  $L_{min} = \frac{\Phi_{out}}{I}$

Максимальная индуктивность катушки достигается при максимальном потоке поля во внутренней области (когда  $H_0 = H_1$ ):

$\Phi_{max} = \Phi_{out} + \Phi_{in_{max}} = H_0(S_0 + S_1) = L_{max}I_m$ , где поток через внешнюю область равен  $H_0 S_0 = L_{max}I_m$

Откуда получаем:

$$\frac{L_{max} - L}{L - L_{min}} = (\pi a h \mu_0 \sigma \nu)^2$$

Данная зависимость может быть аппроксимирована прямой, по углу наклона которой можно найти проводимость материала  $\sigma$ .

### **Ход работы**

1) Оценим частоту  $\nu_h$ , при которой толщина стенок экрана равна скинковой длине  $h = \delta$ . Для оценки примем проводимость меди  $\sigma \approx 5 \cdot 10^7$  Сименс/м и  $\mu \approx 1$ . Воспользуемся формулой:

$$\omega = 2\pi\nu_h = \frac{2}{\delta^2\sigma\mu_0}$$

$\delta$ , мм	$\sigma$ , Сименс/м	$\mu_0$ , Гн/м	$\mu$	$\nu_h$ , кГц
1.5	$5 \cdot 10^7$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	1	2.23

2) Соберем установку согласно рис.4 и настроим приборы. Установим начальную частоту сигнала генератора  $\approx 0.01\nu_h = 22.3$  Гц, а амплитуду выходного сигнала  $A \approx 7-8$  В.

3) В области низких частот (от  $\approx 0,01\nu_h$  до  $0,05\nu_h$ ) получим зависимость отношения  $\xi = \frac{U}{\nu I}$  от частоты  $\nu$ . Для этого измерим силу тока в цепи соленоида и напряжение на измерительной катушке для не менее 10 значений частоты  $\nu$  в выбранном диапазоне.

I, мА	U, В	$\nu$ , Гц
$454.4 \pm 0.1$	$0.140 \pm 0.001$	22.3
$451.5 \pm 0.1$	$0.194 \pm 0.001$	31.3
$447.3 \pm 0.1$	$0.245 \pm 0.001$	40.3
$442.3 \pm 0.1$	$0.292 \pm 0.001$	49.3
$436.2 \pm 0.1$	$0.335 \pm 0.001$	58.3
$430.3 \pm 0.1$	$0.375 \pm 0.001$	67.3
$424.2 \pm 0.1$	$0.411 \pm 0.001$	76.3
$418.0 \pm 0.1$	$0.444 \pm 0.001$	85.3
$412.0 \pm 0.1$	$0.473 \pm 0.001$	94.3
$406.1 \pm 0.1$	$0.499 \pm 0.001$	103.3
$400.0 \pm 0.1$	$0.522 \pm 0.001$	112.3

Величина  $\xi$  прямо пропорциональна коэффициенту ослабления магнитного поля внутри экрана относительно поля снаружи:

$$\xi = \xi_0 |H_1|/|H_0|$$

4) Исследуем зависимость величины  $\xi$  и фазового сдвига  $\psi$  от частоты  $\nu$  при низких частотах в диапазоне от  $0.05\nu_h$  до  $0.5\nu_h$ . Для этого получим статичную и удобную для измерения картинку на экране осциллографа и измерим разность фаз между напряжениями на резисторе и на катушке для не менее 15 значений частоты  $\nu$  в выбранном диапазоне, а также силу тока в цепи соленоида и напряжение на измерительной катушке. Проведем 5-7 измерений в диапазоне частот ( $0.05 \nu_h - 0.1 \nu_h$ ) и 8-10 измерений в диапазоне ( $0.1-0.5 \nu_h$ ).

$\nu$ , Гц	U, В	I, мА	$\Delta\varphi$ , рад
111.5	$0.519 \pm 0.001$	$399.3 \pm 0.1$	$1.10 \pm 0.05$
129.5	$0.558 \pm 0.001$	$388.9 \pm 0.1$	$1.13 \pm 0.05$
147.5	$0.590 \pm 0.001$	$379.8 \pm 0.1$	$1.11 \pm 0.06$
165.5	$0.614 \pm 0.001$	$371.8 \pm 0.1$	$1.11 \pm 0.07$
183.5	$0.634 \pm 0.001$	$364.7 \pm 0.1$	$1.12 \pm 0.08$
201.5	$0.650 \pm 0.001$	$358.7 \pm 0.1$	$1.20 \pm 0.04$
219.5	$0.662 \pm 0.001$	$353.3 \pm 0.1$	$1.23 \pm 0.05$
309.5	$0.696 \pm 0.001$	$333.8 \pm 0.1$	$1.37 \pm 0.07$
399.5	$0.706 \pm 0.001$	$322.5 \pm 0.1$	$1.38 \pm 0.09$
489.5	$0.706 \pm 0.001$	$314.1 \pm 0.1$	$1.35 \pm 0.11$
579.5	$0.700 \pm 0.001$	$306.8 \pm 0.1$	$1.46 \pm 0.05$
669.5	$0.691 \pm 0.001$	$300.0 \pm 0.1$	$1.49 \pm 0.06$
759.5	$0.680 \pm 0.001$	$293.3 \pm 0.1$	$1.52 \pm 0.07$
849.5	$0.668 \pm 0.001$	$286.6 \pm 0.1$	$1.47 \pm 0.08$
939.5	$0.654 \pm 0.001$	$279.9 \pm 0.1$	$1.51 \pm 0.09$
1029.5	$0.640 \pm 0.001$	$273.2 \pm 0.1$	$1.54 \pm 0.05$
1119.5	$0.625 \pm 0.001$	$266.4 \pm 0.1$	$1.54 \pm 0.05$

5) Повторим измерения пункта 4 при высоких частотах в диапазоне  $(0.5\nu_h - 15 \nu_h)$  15-20 точек

$\nu$ , Гц	U, В	I, мА	$\frac{\Delta\varphi}{2}$ , рад
1119.5	$0.625 \pm 0.001$	$266.4 \pm 0.1$	$1.54 \pm 0.05$
3219.5	$0.342 \pm 0.001$	$148.0 \pm 0.1$	$1.67 \pm 0.08$
5319.5	$0.212 \pm 0.001$	$95.9 \pm 0.1$	$1.84 \pm 0.05$
7419.5	$0.146 \pm 0.001$	$69.6 \pm 0.1$	$1.94 \pm 0.07$
9519.5	$0.103 \pm 0.001$	$53.7 \pm 0.1$	$1.82 \pm 0.08$
11619.5	$0.080 \pm 0.001$	$42.5 \pm 0.1$	$2.24 \pm 0.13$
13719.5	$0.021 \pm 0.001$	$34.7 \pm 0.1$	$2.27 \pm 0.15$
15819.5	$0.051 \pm 0.001$	$28.6 \pm 0.1$	$2.36 \pm 0.17$
17919.5	$0.042 \pm 0.001$	$23.6 \pm 0.1$	$2.56 \pm 0.11$
20019.5	$0.035 \pm 0.001$	$19.4 \pm 0.1$	$2.51 \pm 0.11$
22119.5	$0.031 \pm 0.001$	$15.7 \pm 0.1$	$2.73 \pm 0.13$
24219.5	$0.027 \pm 0.001$	$12.4 \pm 0.1$	$2.83 \pm 0.15$
26319.5	$0.024 \pm 0.001$	$9.5 \pm 0.1$	$2.81 \pm 0.16$
28419.5	$0.021 \pm 0.001$	$6.8 \pm 0.1$	$2.96 \pm 0.18$
30519.5	$0.017 \pm 0.001$	$4.2 \pm 0.1$	?
32619.5	$0.014 \pm 0.001$	$2.5 \pm 0.1$	?
34719.5	$0.012 \pm 0.001$	$2.6 \pm 0.1$	?

6) Исследуем зависимость индуктивности катушки L от частоты  $\nu$ . Для этого соберем схему, изображенную на рис.5 и измерим с помощью RLC-метра индуктивность катушки при различных частотах:

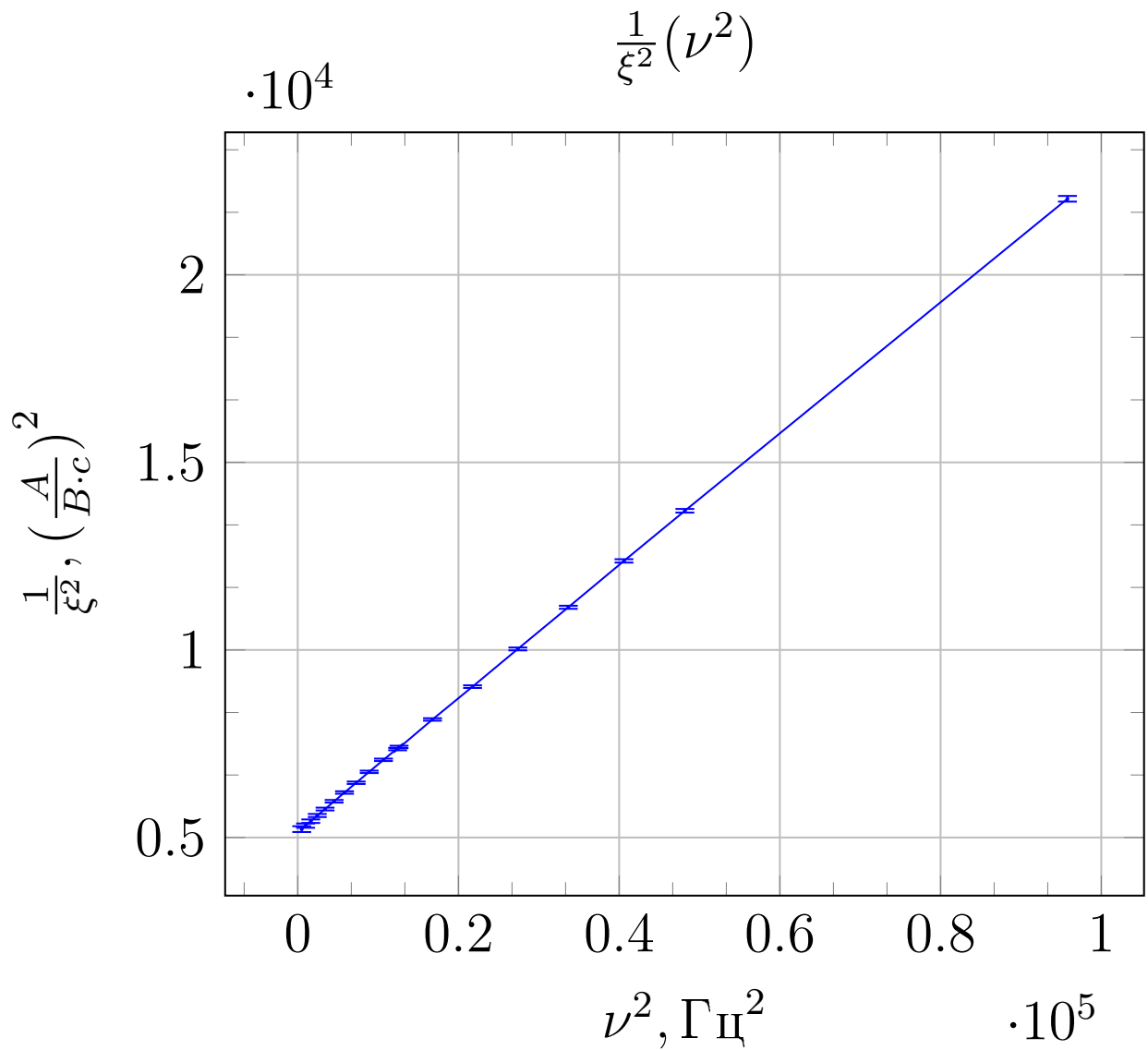
$\nu$ , Гц	L, мГн	R, Ом
40	10.10	19.2
150	7.24	22.3
250	5.35	24.4
300	4.78	25.0
400	4.08	25.8
500	3.69	26.3
600	3.46	26.5
800	3.21	26.9
1500	2.97	27.4
2000	2.92	27.8
2500	2.90	28.2
3000	2.89	28.6
4000	2.89	29.8
6000	2.90	32.7
7500	2.92	35.5
12000	3.05	46.9
15000	3.22	58.4
16200	3.31	64.1
20000	3.70	91.1
25000	4.73	175.6

### Обработка результатов

7) По результатам измерений пунктов 3 и 4 (в области низких частот  $\nu \approx 0.2\nu_h$ ) построим график в координатах  $1/\xi^2 = f(\nu^2)$ . Экстраполируем зависимость к точке  $\nu = 0$ , соответствующей  $|H_1|/|H_0| = 1$ , определим  $\xi_0$ . По угловому коэффициенту зависимости рассчитаем проводимость меди  $\sigma$ , используя:

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{ah}{\delta^2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}}$$





Убеждаемся, что зависимость линейная. Наклон графика  $k = 0.18 \pm 0.01$ . Пересечение с Оу:  $(0, 5152 \pm 50)$

$$\sigma = \frac{\xi_0 \sqrt{k}}{ah\mu_0\pi}$$

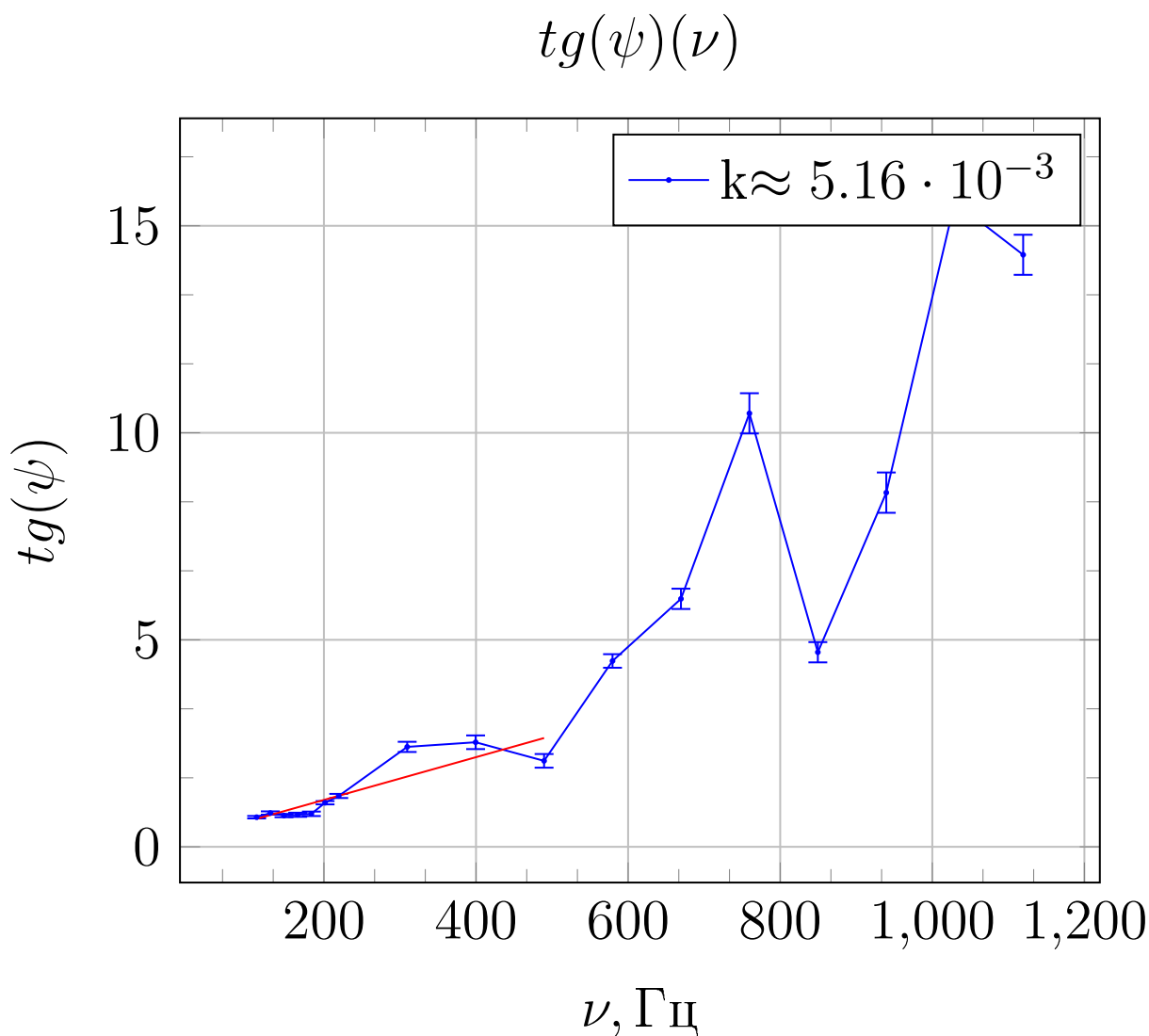
$\xi_0$ , В*с/мА	a, мм	h, мм	$\sigma$ , $\cdot 10^7$ Сименс/м
$13.93 \pm 0.07$	22.5	1.5	$4.44 \pm 0.15$

8) Построим график зависимости фазового сдвига, измеренного в пункте 4,  $\text{tg}\psi = f(\nu)$  от частоты. Учтем дополнительный сдвиг фаз  $\pi/2$  по формуле:

$$\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$$

Аппроксимируем прямой линейный участок графика и по её наклону определим коэффициент проводимости  $\sigma$  по формуле:

$$\text{tg}(\varphi - \frac{\pi}{2}) = ah\pi\sigma\mu_0 \cdot \nu$$



Наклон аппроксимирующей прямой  $k = (5.2 \pm 1.1) \cdot 10^{-3} \text{ с}$

$$\sigma = \frac{k}{ah\pi\mu_0}$$

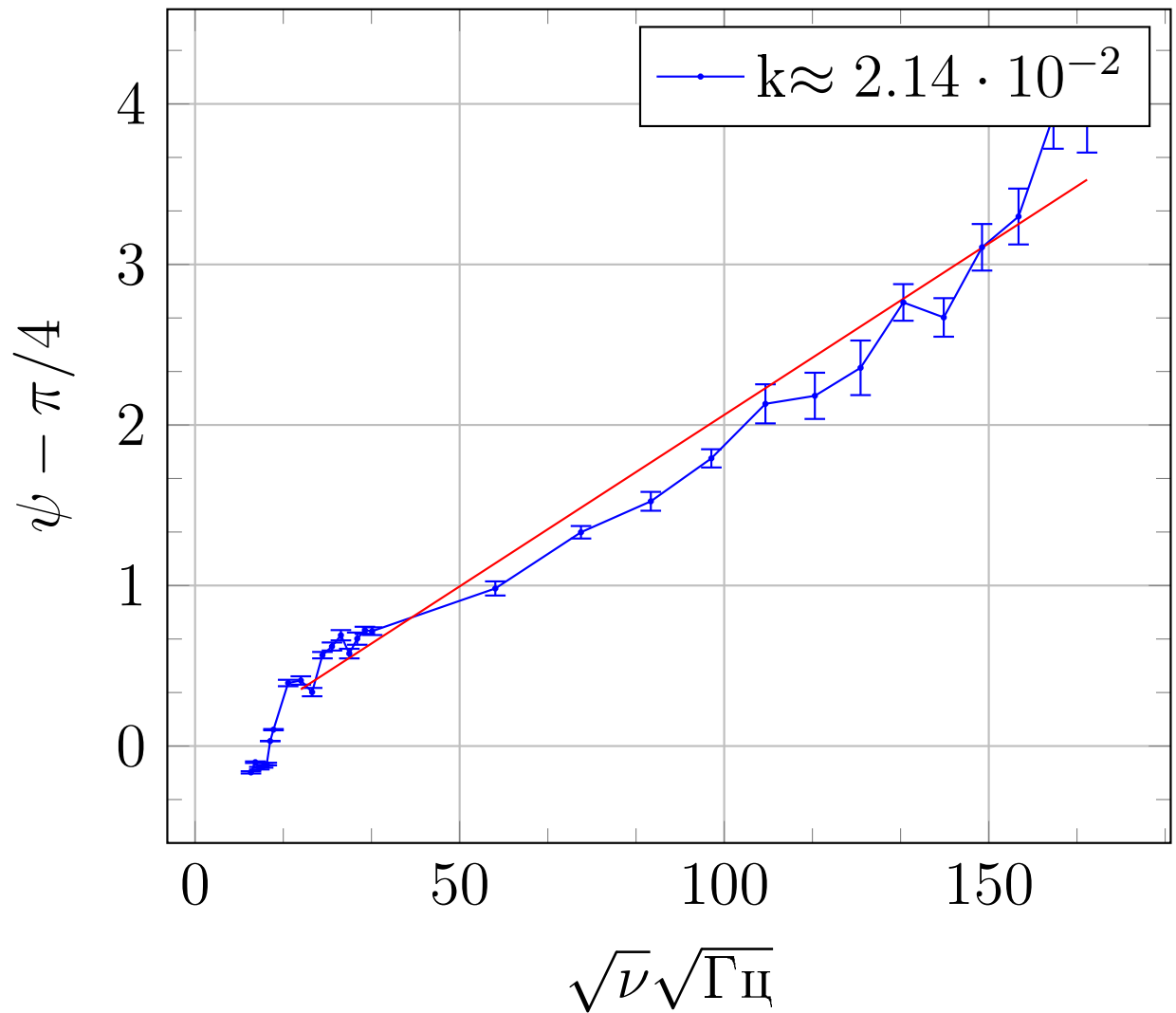
Откуда найдём  $\sigma$ :

$k \cdot 10^{-3}, \text{ с}$	$\sigma \cdot 10^7, \text{ Сименс/м}$
$5.2 \pm 1.1$	$3.9 \pm 0.8$

9) Построим график частотной зависимости фазового сдвига, измеренной в пунтках 4 и 5  $\psi - \pi/4 = f(\sqrt{\nu})$ . Проведем прямую, проходящую через начало координат, которая будет касаться экспериментальной кривой при больших частотах (линейный участок графика при  $\nu \gg \nu_h$ ). По наклону этой прямой вычислим значение проводимости  $\sigma$  материала экрана с помощью:

$$\psi - \frac{\pi}{4} = h\sqrt{\pi\sigma\mu_0\nu}$$

$$\psi - \pi/4(\sqrt{\nu})$$

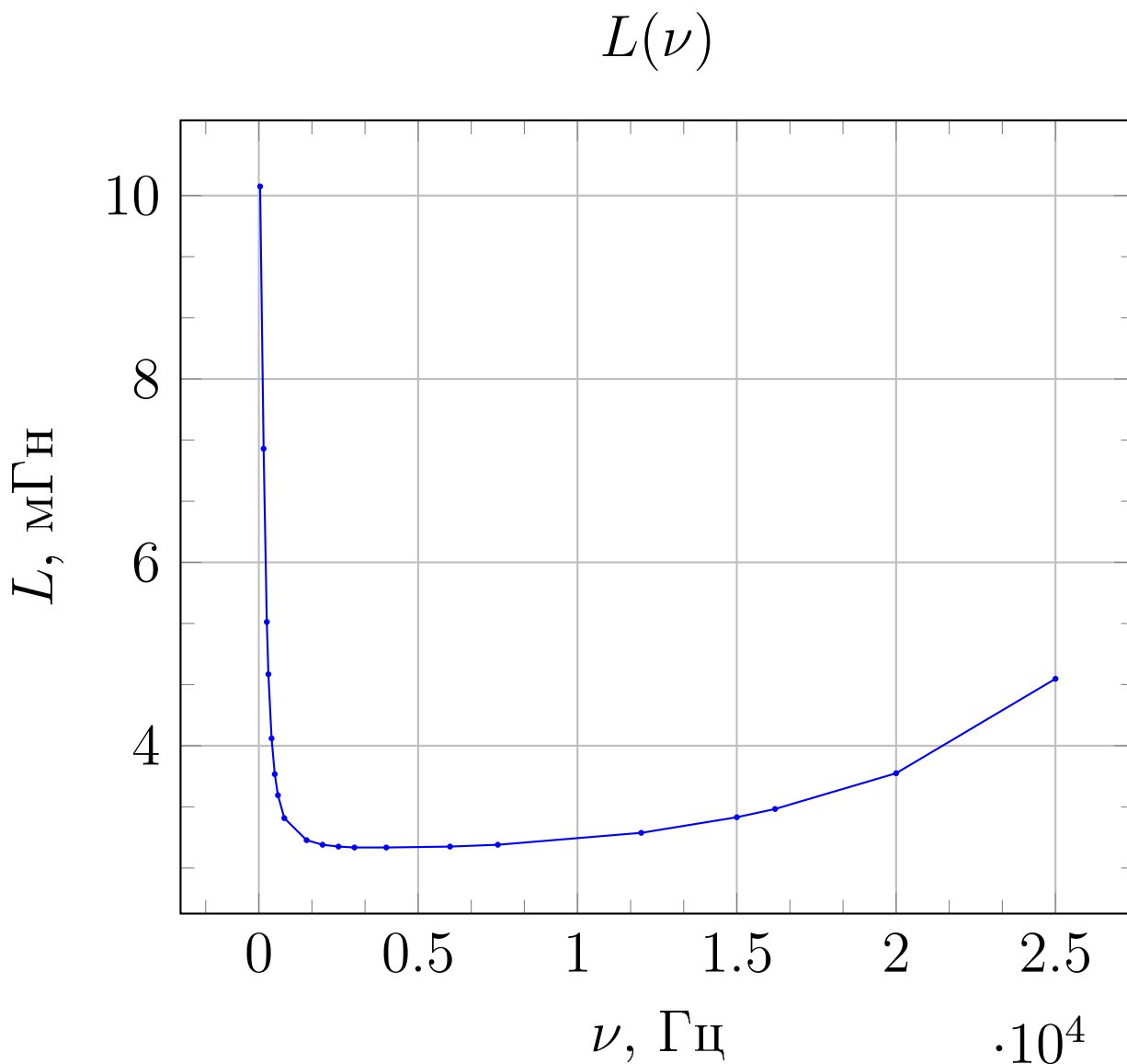


Откуда находим наклон аппроксимирующей графика:  $k = (2.14 \pm 0.08) \cdot 10^{-2} \sqrt{c}$

$$k = h\sqrt{\pi\sigma\mu_0}$$

$k, 10^{-2}\sqrt{c}$	$\sigma \cdot 10^7$ Сименс/м
$2.14 \pm 0.08$	$5.2 \pm 0.4$

10) Построим график зависимости индуктивности катушки от частоты  $L(\nu)$ . Определим максимальное и минимальное значение индуктивности

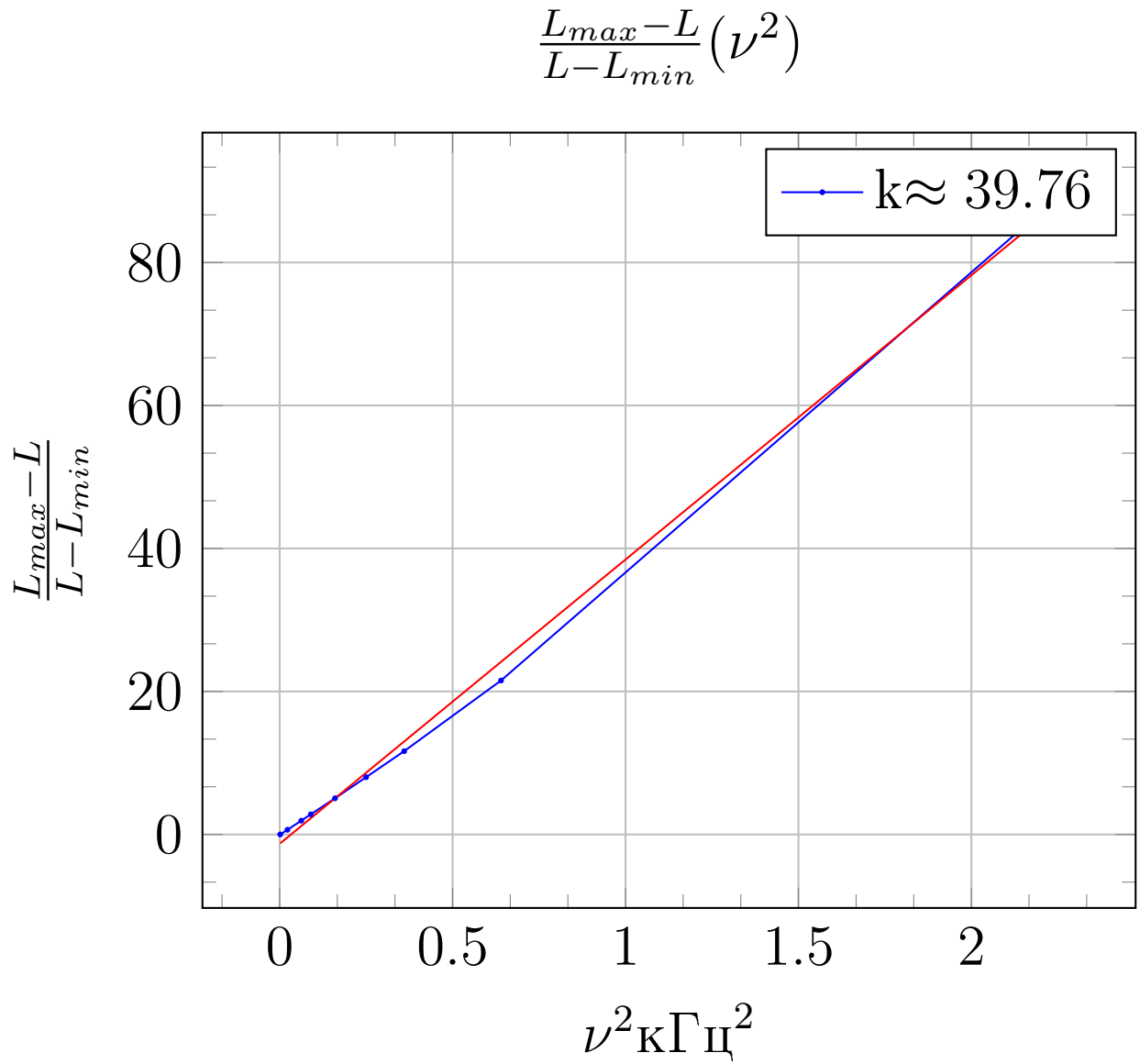


Откуда находим:

$L_{max}, \text{ мГн}$	$L_{min}, \text{ мГн}$
10.10	2.89

Построим график зависимости  $\frac{L_{max}-L}{L-L_{min}}$  от  $\nu^2$  и аппроксимируем его прямой, проходящей через начало координат. По углу наклона прямой определим проводимость материала по формуле:

$$\frac{L_{max}-L}{L-L_{min}} = (\pi a h \mu_0 \sigma \nu)^2$$



Откуда находим  $k = (39.8 \pm 1.4) \text{ кГЦ}^{-2}$  и из формулы:

$$k = (\pi a \hbar \mu_0 \sigma)^2$$

Получаем :

$k, \text{ кГЦ}^{-2}$	$\sigma \cdot 10^7, \text{ Сименс/м}$
$39.8 \pm 1.4$	$4.73 \pm 0.09$

11) Итого, мы измерили  $\sigma$  4 способами. Внесем все полученные значения в таблицу и сравним с табличным:

$\sigma \cdot 10^7, \text{ Сименс/м}$				
1	2	3	4	табл
$4.44 \pm 0.15$	$3.9 \pm 0.8$	$5.2 \pm 0.4$	$4.73 \pm 0.09$	5

Таким образом значение из способа 4 наиболее близко к табличному, однако способы 1 и 3 обладают меньшей погрешностью.

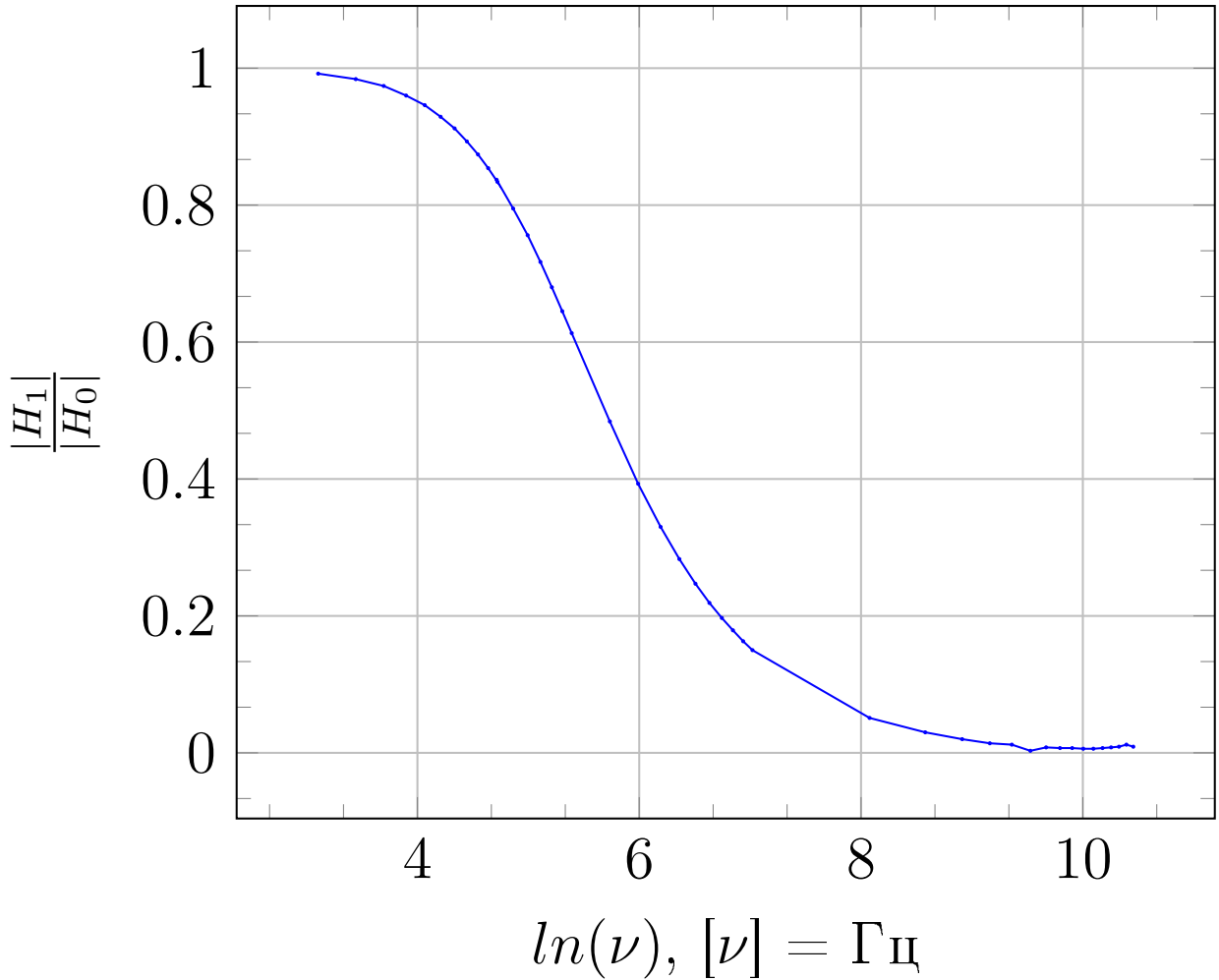
12) Используя полученные в пункте 3 значение коэффициента  $\xi_0$  рассчитаем экспериментальные значения коэффициентов ослабления поля  $|H_1|/|H_0|$  для измерений пунктов 3,4 и 5. Используя максимальный и минимальный коэффициенты проводимости  $\sigma$ , полученные в расчётах, рассчитаем теоретическую зависимость по формуле:

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{1}{chA \cos A + ishA \sin A + 1/2a(A + Ai)(shA \cos A + ichA \cos A)}$$

, где  $A = \sqrt{\pi \nu \sigma \mu_0}$

Изобразим на графике теоретические и экспериментальные результаты для зависимости  $|H_1|/|H_0|\nu$  в логарифмическом масштабе по оси абсцисс.

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} (\ln(\nu))$$



### Вывод

Результаты измерения проводимости  $\sigma$  4 способами:

$\sigma \cdot 10^7$ , Сименс/м				
отнош.амплитуд	разность фаз (низкие $\nu$ )	разность фаз (высокие $\nu$ )	индукт.	табл
$4.44 \pm 0.15$	$3.9 \pm 0.8$	$5.2 \pm 0.4$	$4.73 \pm 0.09$	5