hw2 - task 1

Ирина Гавенко

Задача №1.1
Среднее значение таргета на объекте $(\bar{X})$:
$E_1 = \frac{1}{n}\sum(\bar{x} - x_k)^2$
Если же таргет для случйаного объекта: $(\hat{X})$
Введем случайную величину ξ.
Тогда:
$E\xi = \frac{1}{n}\sum x_k = \bar{x}$
$E_2 = E\frac{1}{n}\sum(\xi - x_k)^2 = \frac{1}{n}\sum(E\xi^2 - 2x_k E\xi + x_k^2) = \frac{1}{n}(n \cdot E(\xi^2) - 2\sum x_k E\xi + \sum(E\xi)^2) =$
$= E_1 + (E\xi^2 - (E\xi)^2) = E_1 + D\xi^2 \geq E_1$
Итог: $E_1 \leq E2$
Получаем, что первый способ $(\bar{X})$ приводит к меньшей ошибке.
Задача №1.2
Задача №1.3
Плотность равномерного нормального распределения:
$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\sum|^{1/2}} \cdot e^{-1/2(x-\mu)^T \sum^{-1}(x-\mu)}$
Рассмотрим его энтропию:
$H(f) = -\int \cdots \int f(x) \ln f(x) dx =$
$= \int \cdots \int f(x)(\frac{1}{2}(x-\mu)^T \sum^{-1}(x-\mu) + \ln(2\pi)^{n/2}|\sum|^{1/2}))dx =$
$= \frac{1}{2} \cdot E(\sum_{i,j}(x_i - \mu_i)(\sum^{-1})_{i,j}(x_j - \mu_j)) + \frac{1}{2}\ln((2\pi)^n|\sum|) \rightarrow$
Займемся только первым слагаемым:
$\sum_{i,j}(E((x_i - \mu_j)^2)(\sum^{-1})_{i,j}) = \sum_i \sum_j (\sum)_{i,j}(\sum^{-1})_{i,j} = \frac{1}{2}\sum_i(\sum\sum^{-1})_{i,j} = \frac{1}{2}\sum_i(E)_{i,j} = \frac{n}{2}$
Возвращаемся и объединяем результаты:
$\rightarrow \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\ln((2\pi)^n|\sum|) = \frac{1}{2}\ln((2\pi \cdot e)^n|\sum|)$