Дискретные случайные величины

Определение вероятности. Свойства вероятности. Дискретное вероятностное пространство. Примеры распределений: бернуллиевское, биномиальное, пуассоновское. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Математическое ожидание, дисперсия и моменты старших порядков. Независимость событий и случайных величин.

Даниил Корбут
Специалист по Анализу Данных

НЕТОЛОГИЯ

Даниил Корбут
DL Researcher
Insilico Medicine, Inc

Окончил бакалавриат ФИВТ МФТИ (Анализ данных) в 2018г
Учусь на 2-м курсе магистратуры ФИВТ МФТИ
Работал в Statsbot и Яндекс. Алиса.
Сейчас в Insilico Medicine, Inc, занимаюсь генерацией активных молекул и исследованиями старения с помощью DL.

Определение вероятности

Основным понятием теории вероятностей является понятие **случайного события**.

Случайным событием называется событие, которое при осуществлении некоторых условий может произойти или не произойти.

Событие называется **достоверным**, если в результате испытания оно обязательно происходит.

Невозможным называется событие, которое в результате испытания произойти не может.

Случайные события образуют **полную группу**, если при каждом испытании может появиться любое из них и не может появиться какое-либо иное событие, несовместное с ними.

Рассмотрим **полную группу** равновозможных несовместных случайных событий. Такие события будем называть **исходами или элементарными событиями**. Исход называется благоприятствующим появлению события А, если появление этого исхода влечет за собой появление события А.

Свойства вероятности

Пример: В урне находится 8 пронумерованных шаров (1..8). Шары с цифрами 1, 2, 3 красные, остальные – черные. Появление шара с цифрой 1 (или цифрой 2 или цифрой 3) есть событие, **благоприятствующее** появлению красного шара. Появление шара с цифрой 4 (или цифрой 5, 6, 7, 8) есть событие, **благоприятствующее** появлению черного шара.

Вероятностью события **A** называют отношение числа **m** благоприятствующих этому событию исходов к общему числу **n** всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

!

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Свойство 1: Вероятность достоверного события равна единице
Свойство 2: Вероятность невозможного события равна нулю.
Свойство 3: Вероятность случайного события есть положительное число от 0 до 1.

Дискретное вероятностное пространство

Дискретное вероятностное пространство - пара из некоторого (не более, чем счетного) множества Ω и функции $p:\Omega \to \mathbb{R}+$ (Ω называется множеством элементарных исходов), $\omega \in \Omega$ — элементарным исходом, такая, что $\sum\limits_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$

p - **дискретная вероятностная мера, или дискретная плотность вероятности**.

Множество $A \subset \Omega$ называется **событием**.

$p(A) = \sum\limits_{a\in A} p(a)$, вероятность события равна сумме вероятностей входящих в него элементарных исходов.

$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) \equiv \mathbb{P}^X((-\infty, x])$. **функция распределения** случайной величины.

Т.е. такая функция $F(x)$ значение которой в точке x равно вероятности события $\{X \leqslant x\}$ то есть события, состоящего только из тех элементарных исходов, для которых $X(\omega) \leqslant x$.

Дискретное вероятностное пространство (примеры)

Пример №1 (Игральная кость)
Множество исходов Ω={1,2,3,4,5,6}. p(i)=16.
A={1,2,3} : p(A)=1/6+1/6+1/6=3/6=1/2. Вероятность выпадения одного из трех чисел из множества A равна одной второй.
B={2,4} : p(B)=1/6+1/6=2/6=1/3. Числа 2 или 4 выпадут с вероятностью одна треть.

Пример №2 (Бесконечное вероятностное пространство)
Пусть задано множество следующих элементарных исходов: выпадение орла на i-ом подбрасывании честной монеты в первый раз.
Тогда вероятность исхода с номером i равна: $p(A_i) = \frac{1}{2^i}$

Вероятности этих событий образовывают убывающую геометрическую прогрессию с знаменателем прогрессии равным ½.

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(A_i) = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Так как сумма всех элементарных исходов равна 1, то это множество является вероятностным пространством.

https://neerc.ifmo.ru/wiki

Примеры распределений

Случайная величина — переменная, значения которой представляют собой исходы какого-нибудь случайного феномена или эксперимента.
Простыми словами: это численное выражение результата случайного события.

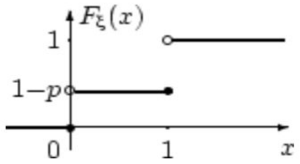
$$y = X(\omega)$$

Случайная величина **X** имеет **распределение Бернулли**, если она принимает всего два значения: 1 и 0 с вероятностями p и q=1−p соответственно.

$$\mathbb{P}(X = 1) = p,$$
$$\mathbb{P}(X = 0) = q.$$

Принято говорить, что событие $\{X = 1\}$ соответствует «успеху», а $\{X = 0\}$ «неудаче». Эти названия условные, и в зависимости от конкретной задачи могут быть заменены на противоположные.

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1 - p, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



https://math.wikia.org/ru/wiki/

Примеры распределений

Случайная величина ξ имеет **биномиальное распределение** (англ. *binomial distribution*) с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0, 1)$ и пишут: $\xi \in \mathbb{B}_{n,p}$ если ξ принимает значения $k = 0, 1, \ldots, n$ с вероятностями $P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

Случайная величина с таким распределением имеет смысл числа успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p.

Таблица распределения ξ имеет вид

ξ	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$	n
P	$(1-p)^n$	$n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$	$\ldots$	$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$	$\ldots$	p^n

НЕТОЛОГИЯ

https://math.wikia.org/ru/wiki/

Примеры распределений

Дискретная случайная величина имеет *распределение Пуассона* с параметром λ, если:

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Распределение Пуассона моделирует случайную величину, равную числу событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга.

Параметр λ часто называется интенсивностью, а функция p(k), введённая выше, действительно является функцией вероятности, что следует из разложения экспоненты в ряд Тейлора

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

Условная вероятность

! **Условная вероятность** — вероятность одного события при условии, что другое событие уже произошло.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - фиксированное вероятностное пространство. Пусть $A, B \in \mathcal{F}$ суть два случайных события, причём $\mathbb{P}(B) > 0$. Тогда условной вероятностью события A при условии события B называется

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$$

Если A, B - несовместимые события, т.е. $A \cap B = \varnothing$ и $\mathbb{P}(A) > 0,\ \mathbb{P}(B) > 0$, то

$$\mathbb{P}(A \mid B) = 0$$

и

$$\mathbb{P}(B \mid A) = 0.$$

https://math.wikia.org/ru/wiki/

Формула полной вероятности

Формула полной вероятности позволяет вычислить вероятность интересующего события через условные вероятности этого события в предположении неких гипотез, а также вероятностей этих гипотез.

Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, и полная группа событий $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, таких что $\mathbb{P}(B_n) > 0 \; \forall n$. Пусть $A \in \mathcal{F}$ суть интересующее нас событие. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \mid B_n)\mathbb{P}(B_n).$$

НЕТОЛОГИЯ

https://math.wikia.org/ru/wiki/

Пример на полную группу событий

Полной группой событий называется система случайных событий такая, что в результате произведенного случайного эксперимента непременно произойдет одно из них.

Пример: предположим, проводится подбрасывание монеты. В результате этого эксперимента обязательно произойдет одно из следующих событий:

- A: монета упадет орлом;
- B: монета упадет решкой;
- C: монета упадет на ребро;
- D: монета зависнет в воздухе.
- E: монету притырит подкидывающий
- F: монета превратится в динозавра
- G: монета станет летающей тарелкой
- H: монета так и не приземлится на землю

Таким образом, система $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ является полной группой событий.

https://math.wikia.org/ru/wiki/

Формула Байеса

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)}$$

!

Доказательство получается из формулы условной вероятности

$$P(AB) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)}$$

НЕТОЛОГИЯ

https://math.wikia.org/ru/wiki/

Математическое ожидание дискретной с.в.

Математическое ожидание — понятие среднего значения случайной величины в теории вероятностей. $\mathbb{E}X$ μ

Пусть X - дискретная случайная величина: $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$

Тогда её математическое ожидание: $\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i.$!

Пример: пусть случайная величина имеет дискретное равномерное распределение:

$\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}, \; i = 1, \ldots, n.$ $\mathbb{E}X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Для независимых:

$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y.$

$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y,$

$0 \leq \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y;$

НЕТОЛОГИЯ

https://math.wikia.org/ru/wiki/

Дисперсия случайной величины

Дисперсия случайной величины — мера разброса данной случайной величины, т.е. её отклонения от математического ожидания.

$$\mathrm{D}\,X = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right] \qquad \mathrm{D}\,X = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}X)^2$$

!

1. Дисперсия любой случайной величины неотрицательна
2. Если дисперсия случайной величины конечна, то конечно и её математическое ожидание
3. Если случайная величина равна константе, то её дисперсия равна нулю

Для независимых X1, … , Xn

$$\mathrm{D}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathrm{D}\,X_1 + \cdots + \mathrm{D}\,X_n$$

$$\mathrm{D}[aX] = a^2\,\mathrm{D}\,X;$$
$$\mathrm{D}[-X] = \mathrm{D}\,X;$$
$$\mathrm{D}[X + b] = \mathrm{D}[X].$$

https://math.wikia.org/ru/wiki/

Моменты старших порядков

Момент случайной величины — числовая характеристика распределения данной случайной величины.

Если дана случайная величина **X**, определённая на некотором вероятностном пространстве, то, если математическое ожидание в правой части этого равенства определено:

$$\nu_k = \mathbb{E}\left[X^k\right]$$

k-ый начальный момент с.в. X

$$\mu_k = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^k\right]$$

k-ый центральный момент с.в. X

$$\nu_k = \sum_x x^k p(x)$$

https://math.wikia.org/ru/wiki/

Независимость событий и случайных величин

Два случайных события называются **независимыми**, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого. Аналогично, **две случайные величины** называют **независимыми**, если значение одной из них не влияет на вероятность значений другой.

Определение 1. Два события $A, B \in \mathcal{F}$ независимы, если

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Пусть брошены три уравновешенные монеты. Определим события следующим образом:

- A_1: монеты 1 и 2 упали одной и той же стороной;
- A_2: монеты 2 и 3 упали одной и той же стороной;
- A_3: монеты 1 и 3 упали одной и той же стороной;

Попарная независимость

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j), \ \forall i \neq j.$$

Независимость в совокупности

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_N}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_N}).$$

https://math.wikia.org/ru/wiki/

Независимость событий и случайных величин

Две случайные величины X,Y **независимы** тогда и только тогда, когда:

- Для любых $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B);$$

Пусть случайные величины X,Y дискретны.
Тогда они **независимы** тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i) \cdot \mathbb{P}(Y = j)$$

Спасибо за внимание!

НЕТОЛОГИЯ