Производная

Функции. Производная. Экстремумы функции. Выпуклость функции. Правила дифференцирования. Правила дифференцирования сложной функции. Chain-rule.

Даниил Корбут
Специалист по Анализу Данных

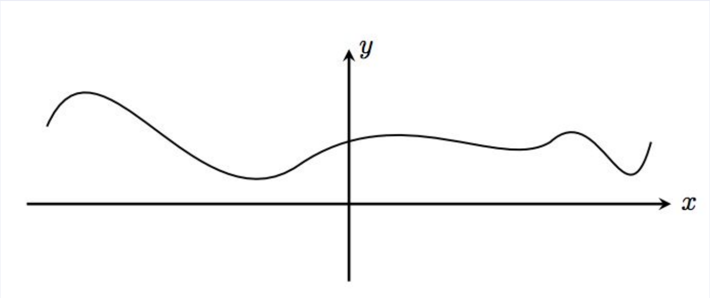
Даниил Корбут
DL Researcher
Insilico Medicine, Inc

Окончил бакалавриат ФИВТ МФТИ (Анализ данных) в 2018г
Учусь на 2-м курсе магистратуры ФИВТ МФТИ
Работал в Statsbot и Яндекс. Алиса.
Сейчас в Insilico Medicine, Inc, занимаюсь генерацией активных молекул и исследованиями старения с помощью DL.

НЕТОЛОГИЯ

Функции и их свойства

Функция - это некоторое соответствие x -> f(x), причём для каждого x определено единственное значение f(x).



D(f) - область определения функции
E(f) - область значений функции

Будем работать только с функциями, у которых D(f) и E(f) - подмножество R.

НЕТОЛОГИЯ

Функции и их свойства

Каковы область определения и область значений следующих функций?

1) **$f(x) = 1 / (x-1)$**
2) **$f(x) = 2^x$**

Функции и их свойства

Каковы область определения и область значений следующих функций?

1) $f(x) = 1 / (x-1)$
2) $f(x) = 2^x$

1) $D(f) = R \setminus \{1\}$, $E(f) = R \setminus \{0\}$
2) $D(f) = R$, $E(f) = (0, +\infty)$

НЕТОЛОГИЯ

Функции и их свойства

Представление о функции, её свойствах и поведении можно получить, построив ее график. Функции бывают непрерывными и разрывными.

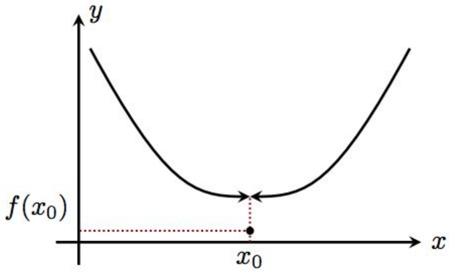


Рис. 2: Функция с устранимым разрывом

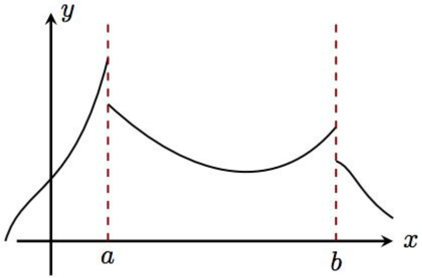


Рис. 3: Функция с разрывами в точках a и b.

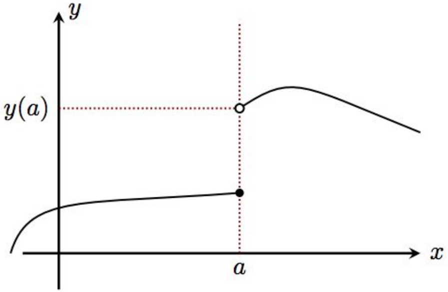


Рис. 4: Функция с разрывом типа «скачок».

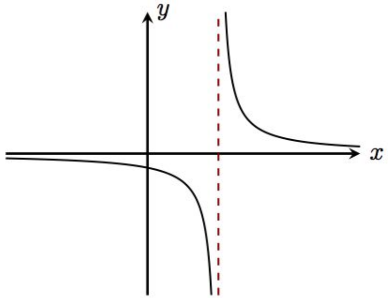


Рис. 5: Функция с бесконечным разрывом.

www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Предел функции

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Функция не определена в x=0, но её значение может быть вычислено в точках сколь угодно близких к ней

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$f(x)$	2.593..	2.704..	2.716..	2.718..	...

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Не у всех функций есть конечный предел

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

Функция неограниченно растёт при приближении к x = 0

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$1/x$	10	100	1000	10000	...

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty.$$

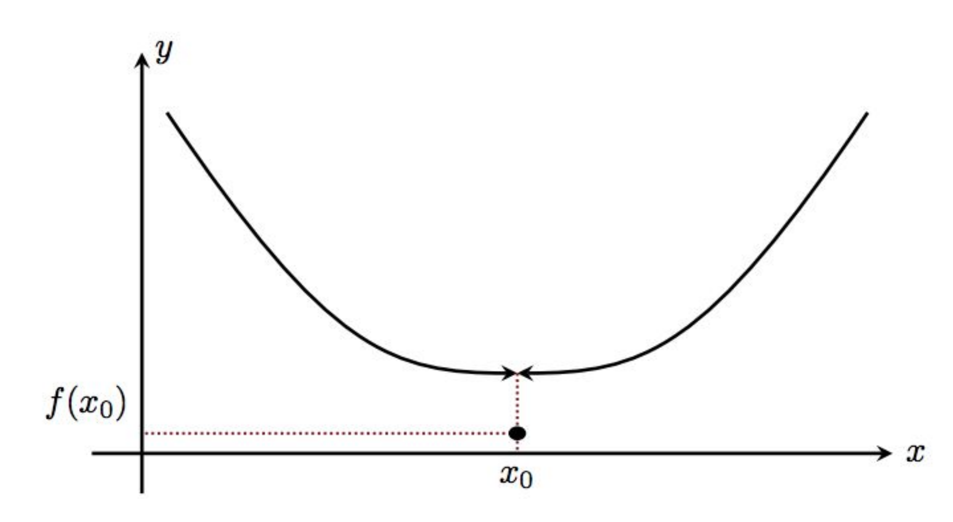
Предел функции

Понятие предела тесно связано с **понятием непрерывности** функции в точке.

Функция **непрерывна** в точке а, если:

!

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x) = f(a).$$



С помощью **понятия предела** определяется другое полезное понятие — **понятие производной**.

НЕТОЛОГИЯ

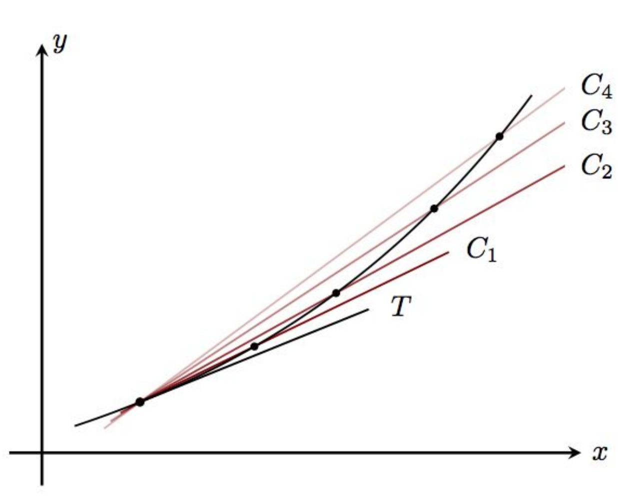
Производная функции

Производная - мгновенная скорость роста функции в заданной точке.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=k.$$

Давайте посмотрим на линейную функцию y=kx+b

Как понять скорость роста для произвольной функции? **Предел!**



$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Гладкие функции - функции, производная которых непрерывна.

www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Производная сложной функции

Пусть имеются 2 функции f(x) и h(x), и область значений f(x) принадлежит области определения h(x). Тогда, h(f(x)) - применение одной функции к результату другой, называется **сложной функцией**.

Пример: f(x) = x+1, h(x) = ln(x), g(x) = h(f(x)) = ln(x+1)

$$df = f'(x_0)dx, \qquad dx = \Delta x.$$

Дифференциал - линейная часть приращения функции

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Отсюда можно записать производную функцию через дифференциал

$$\frac{dg(h(x))}{dx} = \frac{dg(h(x))}{dh(x)} \frac{dh(x)}{dx} = \frac{dg(h)}{dh} \frac{dh(x)}{dx}$$

НЕТОЛОГИЯ

Производная сложной функции (пример)

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u(x)' \cdot v(x) - v(x)' \cdot u(x)}{v^2(x)}$$

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u(x)' \cdot v(x) + v(x)' \cdot u(x)$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

f(x) = sin(ln(x)+5x)

f'(x) = cos(ln(x)+5x) * (ln(x)+5x)'

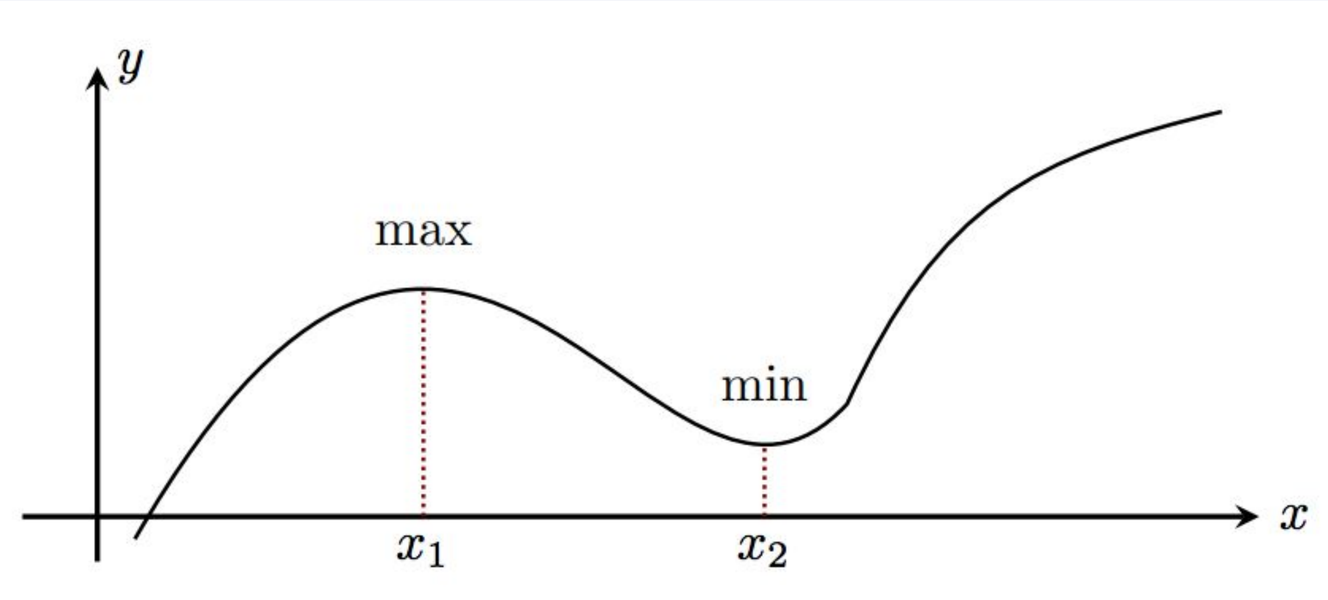
f'(x) = cos(ln(x)+5x) * (1/x + 5)

НЕТОЛОГИЯ

Экстремум функции

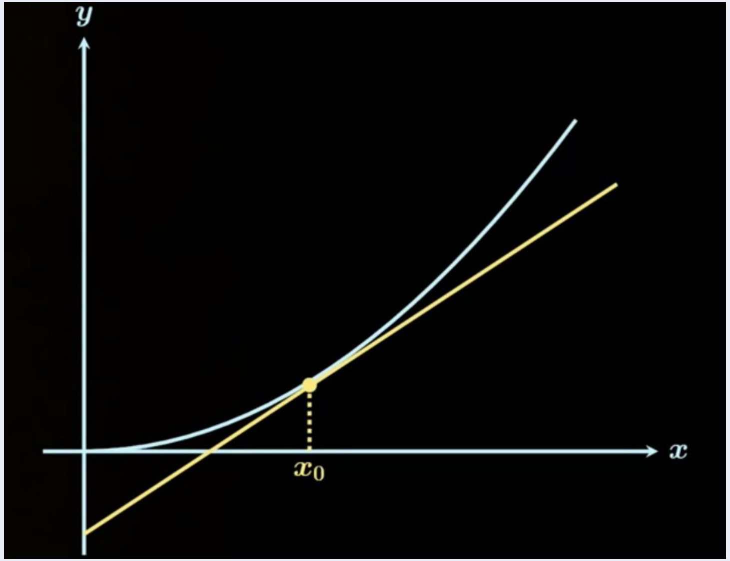
!

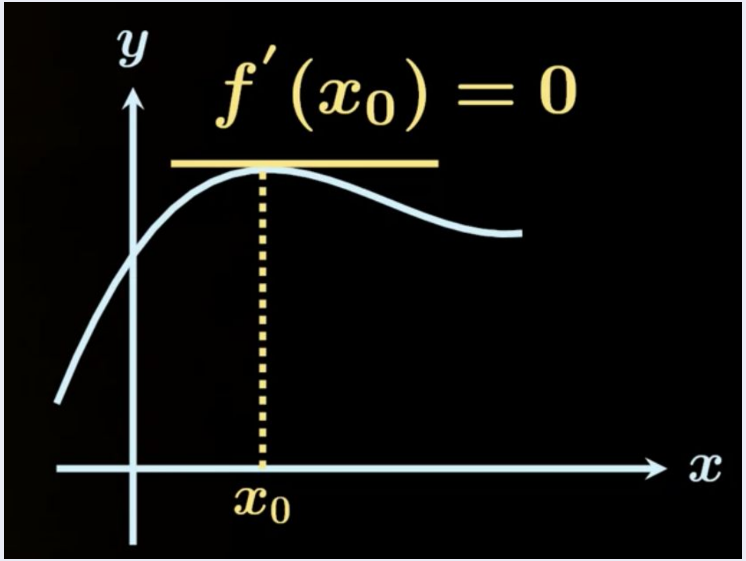
Точка x0 - называется **локальным минимумом** функции f(x), если существует такая окрестность U(x0), для которой f(x) > f(x0), x из U(x0). Аналогично для максимума.
В случае глобального минимума U(x0) = D(f).



НЕТОЛОГИЯ

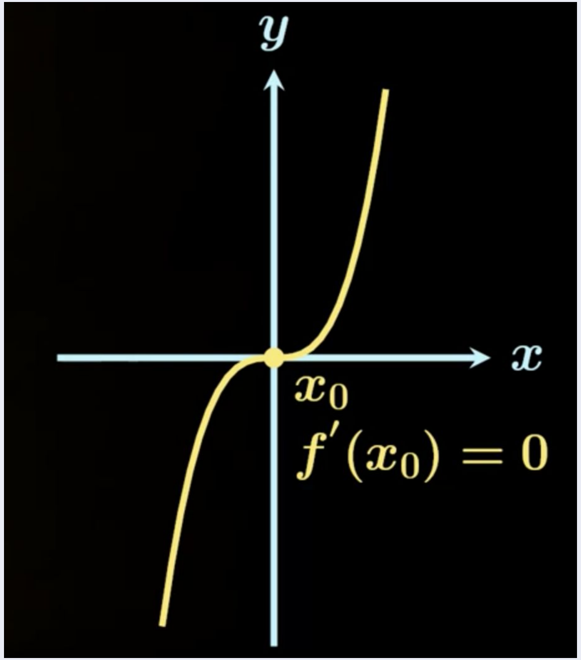
Экстремум функции и производная

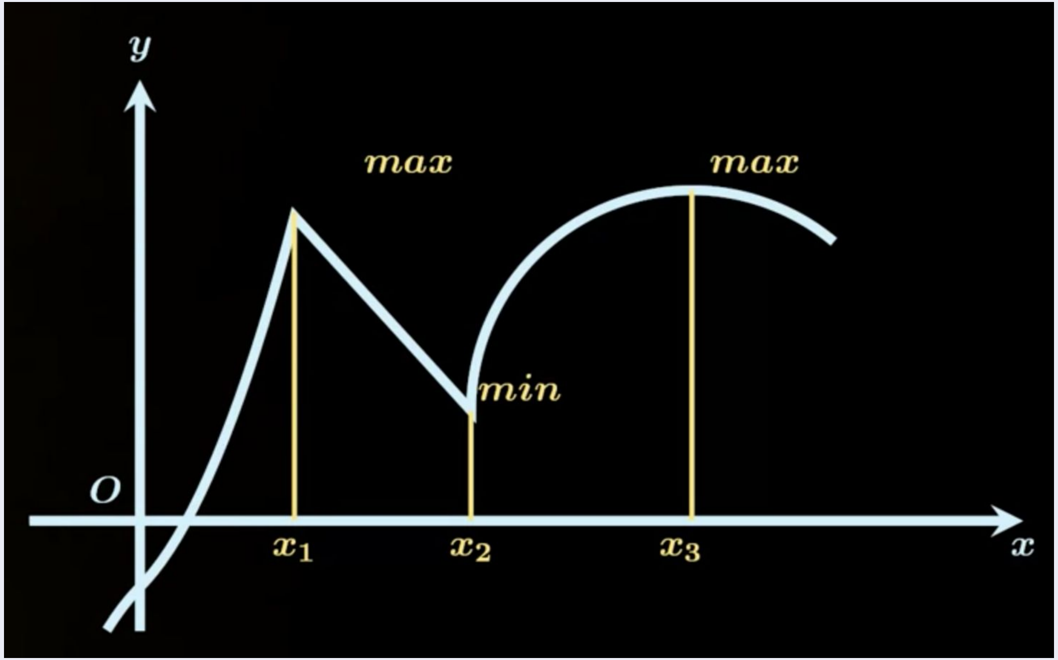




В точках локальных экстремумов производная (если она определена (!), пример дальше) обязана равняться нулю.
Это **необходимое** условие.

Экстремум функции и производная





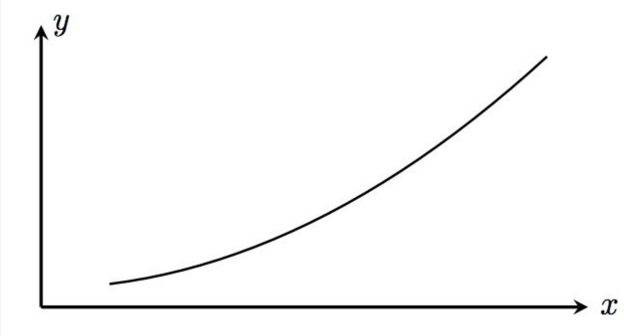
Однако равенство нулю производной **не является достаточным** условием локального экстремума. Также производная может быть вовсе не определена в точках локальных экстремумов.

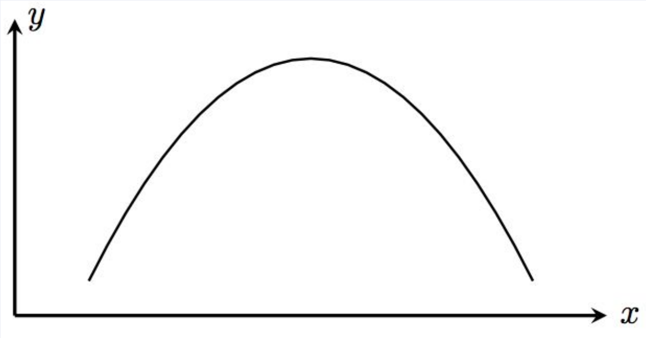
НЕТОЛОГИЯ

Выпуклость функции и вторая производная

Как влияет знак производной на характер поведения функции?

1. $f'(x) \geq 0$ — функция возрастает,
2. $f'(x) > 0$ — функция строго возрастает,
3. $f'(x) \leq 0$ — функция убывает,
4. $f'(x) < 0$ — функция строго убывает.





НЕТОЛОГИЯ

Выпуклость функции и вторая производная

Давайте спустимся на уровень ниже: какому свойству функции соответствует монотонная производная?

1. $f''(x) \geq 0$ — функция $f(x)$ выпукла,
2. $f''(x) > 0$ — функция $f(x)$ строго выпукла,
3. $f''(x) \leq 0$ — функция $f(x)$ вогнута,
4. $f''(x) < 0$ — функция $f(x)$ строго вогнута.

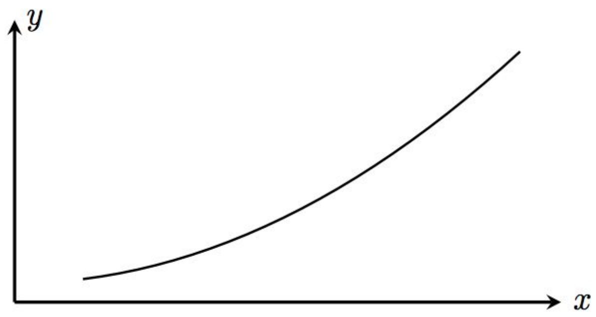


Рис. 11: Выпуклая функция

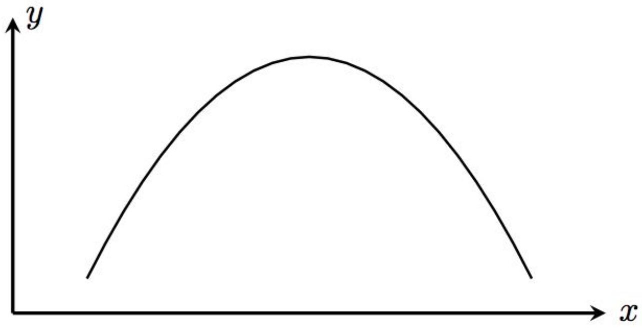


Рис. 12: Вогнутая функция

НЕТОЛОГИЯ

Выпуклость функции и вторая производная

Помните **необходимое** условие локального экстремума?

!

Наложив некоторые условия на вторую производную, можно сделать их **достаточными**!

Достаточное условие экстремума Пусть выполнено необходимое условие экстремума, то есть в некоторой точке x_0 значение $f'(x_0) = 0$. Если в таком случае

1. $f''(x) > 0$ — функция будет строго выпукла и реализуется строгий минимум.
2. $f''(x) < 0$ — функция будет строго вогнута и реализуется строгий максимум.

НЕТОЛОГИЯ

Выпуклость функции и вторая производная

Посмотрим на графики выпуклой и вогнутой функций и проведём прямые, пересекающие их.

Что можно сказать о положении графика относительно прямой?

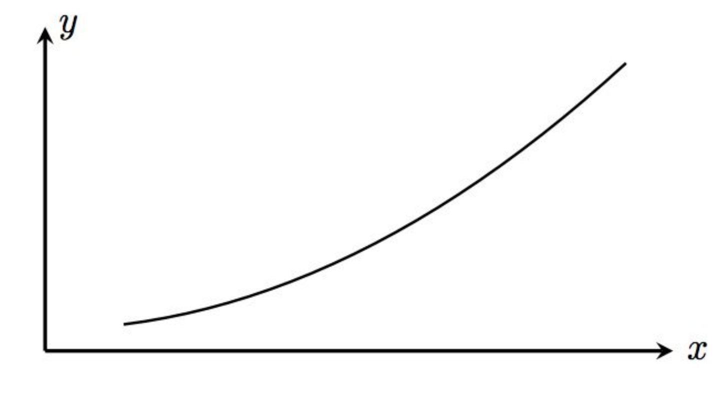


Рис. 11: Выпуклая функция

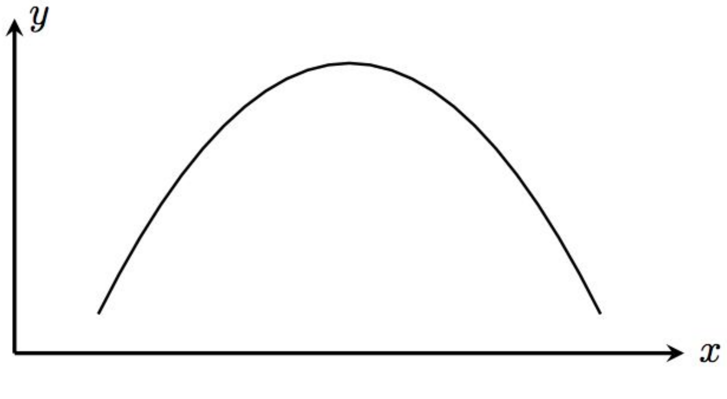


Рис. 12: Вогнутая функция

НЕТОЛОГИЯ

Выпуклость функции и вторая производная

Отсюда возникает более общее определение выпуклости/вогнутости функции.

Вещественнозначная функция, определённая на некотором интервале, **выпукла,** если для любых двух значений аргумента x, y и для любого числа $t \in [0, 1]$ выполняется:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

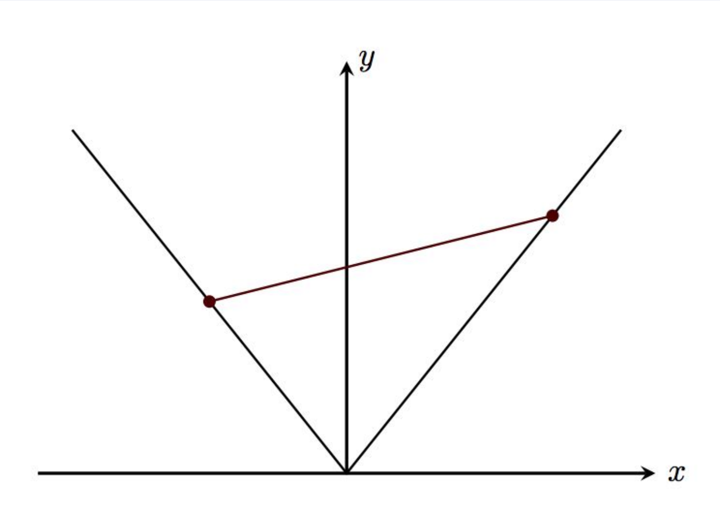
То есть, если соединить две точки на графике отрезком, он окажется выше графика функции f(x).

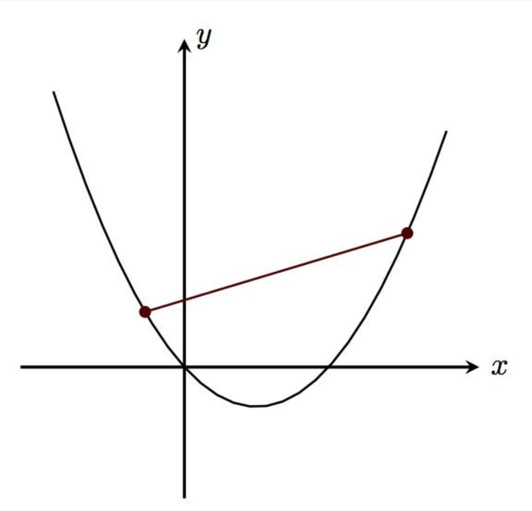
www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Выпуклость функции и вторая производная

Почему это определение более общее?

Оно подходит и для функций, производная которых не определена в некоторых точках.





Спасибо за внимание!