Теория вероятности, ИДЗ-2

Алексеев Дмитрий Денисович, БПИ-236

16 ноября 2024 г.

Вариант 1

Задача 4

$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

$y = arctg(x)$

$f(y) - ?$

1) Найдём функцию распределения исходной величины

$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\,arctgt|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}(arctgx - (-\frac{\pi}{2})) = \frac{1}{\pi}(arctgx + \frac{\pi}{2}) = \frac{arctgx}{\pi} + \frac{1}{2}$

2) Функция распределения величины y

$F(y) = P(Y < y) = P(X < tgy) = F_x(tgy) = \frac{arctg(tgy)}{\pi} + \frac{1}{2} = \frac{y}{\pi} + \frac{1}{2}$

3)Находим плотность через производную функции распределения величины y

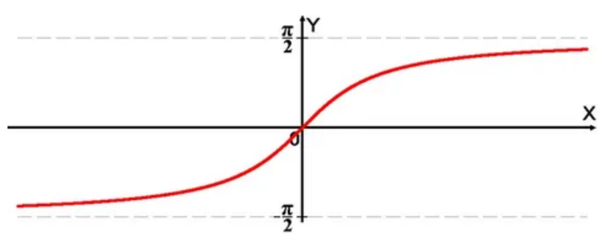

Рис. 1: График arctg

$f(y) = F'(y) = \frac{1}{\pi}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & y \le -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ 0, & y \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Задача 3

а) $\int\limits_{-2}^{-1} c\,dx + \int\limits_{3}^{4} 4c\,dx = 1$

$cx|_{-2}^{-1} + 4cx|_{3}^{4} = 1$
-c - (-2c) + 16c - 12c = 1 => c = 0.2

б) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$x \leq -2$
$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

$-2 < x < -1$
$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{2} 0\,dt + \int\limits_{-2}^{x} \frac{1}{5}\,dt = 0 + \frac{t}{5}\Big|_{-2}^{x} = \frac{x+2}{5}$

$-1 < x < 3$
$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{2} 0\,dt + \int\limits_{-2}^{-1} \frac{1}{5}\,dt + \int\limits_{-1}^{x} 0\,dt = \frac{1}{5}$

$3 < x < 4$
$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{2} 0\,dt + \int\limits_{-2}^{-1} \frac{1}{5}\,dt + \int\limits_{-1}^{3} 0\,dt + \int\limits_{3}^{x} \frac{4}{5}\,dt = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}t\Big|_{3}^{x} = \frac{1}{5} + \frac{4x}{5} - \frac{12}{5} = \frac{4x-11}{5}$

$x \geq 4$
$F(x) = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ \frac{x+2}{5}, & -2 < x < -1 \\ \frac{1}{5}, & -1 < x < 3 \\ \frac{4x-11}{5}, & 3 < x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

в)

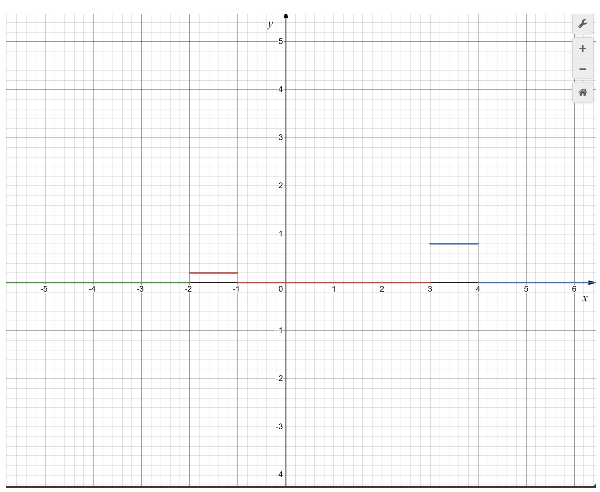

Рис. 2: График функции плотности распределения СВ

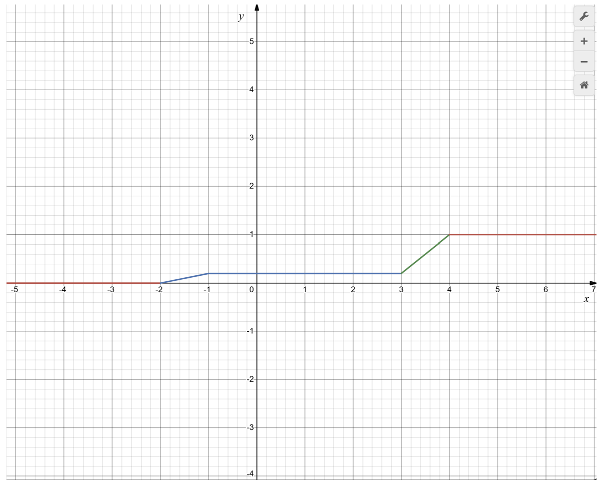

Рис. 3: График функции распределения СВ

г) $E(3-2\xi)(4+3\xi) = E(12-8\xi+9\xi-6\xi^2) = E(12+\xi-6\xi^2) = 12+E(\xi)-6E(\xi^2) = = 12 + 2.5 + 6 \cdot \frac{31}{3} = -47.5$

$E(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int\limits_{-2}^{-1} x \cdot \frac{1}{5}\,dx + \int\limits_{3}^{4} x \cdot \frac{4}{5}\,dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{4}{5} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{3}^{4} = \frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{2} - 2) + \frac{4}{5} \cdot (8 - \frac{9}{2}) = \frac{1}{5} \cdot (-\frac{3}{2}) + \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{2} = -0.3 + 2.8 = 2.5$

$E(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int\limits_{-2}^{-1} x^2 \cdot \frac{1}{5}\,dx + \int\limits_{3}^{4} x^2 \cdot \frac{4}{5}\,dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{4}{5} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{3}^{4} = -\frac{1}{15} + \frac{8}{15} + \frac{4 \cdot 64}{15} - \frac{4 \cdot 27}{15} = \frac{256-108+8-1}{15} = \frac{155}{15} = \frac{31}{3}$

д) $D(5-3\xi) = 9D(\xi) = 9(E(\xi^2) - E^2(\xi)) = 9(\frac{31}{3} - 6.25) = 36.75$

е) $P(-0.5 < \xi < 5) = \int\limits_{-0.5}^{5} f(x)\,dx =$ (от -0.5 до 3 будет 0, и от 4 до бесконечности будет ноль) $= \int\limits_{3}^{4} f(x)\,dx = \int\limits_{3}^{4} \frac{4}{5}\,dx = \frac{4}{5} \cdot x\Big|_{3}^{4} = \frac{16}{5} - \frac{12}{5} = \frac{4}{5}$