

Теория вероятности, ИДЗ-3

Алексеев Дмитрий Денисович, БПИ-236

10 декабря 2024 г.

Вариант 1

ВАРИАНТ 1.

ЗАДАЧА 5. Случайная величина (ξ, η) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (μ_1, μ_2) и ковариационной матрицей:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 & \text{cov}(\xi, \eta) \\ \text{cov}(\eta, \xi) & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}.$$

Найти: $P\{\xi - \eta > a\}$. $(\mu_1, \mu_2) = (0; 2)$; $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1,5 \\ -1,5 & 3 \end{pmatrix}$; $a = -1$.

ЗАДАЧА 6.

В условиях предыдущей задачи найти условную вероятность

$P(\xi > -1 | \eta = 1)$.

Рис. 1: Условия задач

Задача 5

В данной задаче воспользуемся утверждением о том, что линейная комбинация нормально распределённых случайных величин тоже распределена нормально.

$$E(\xi - \eta) = 0 - 2 = -2$$

$$D(\xi - \eta) = D(\xi) + D(\eta) - 2\text{cov}(\xi, \eta) = 3 + 3 - 2 \cdot (-1,5) = 9$$

То есть наша линейная комбинация будет распределена следующим образом: $\xi - \eta \sim N(-2; 9)$

$$P(\xi - \eta > -1) = \Phi\left(\frac{\infty+2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1}{3}\right) = 0,5 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right) = 0,5 - 0,1293 = 0,3703$$

Ответ: 0.3703

Задача 6

В этой задаче воспользуемся следующими формулами:

Условное распределение СВ ξ_1 при условии $\xi_2 = y$ согласно теореме о нормальной корреляции 11.1 является гауссовским с параметрами

$$E(\xi_1 | \xi_2 = y) = E\xi_1 + \frac{\text{cov}(\xi_1, \xi_2)}{D\xi_2}(y - E\xi_2), \quad D(\xi_1 | \xi_2 = y) = D\xi_1 - \frac{(\text{cov}(\xi_1, \xi_2))^2}{D\xi_2}.$$

Для начала найдём мат. ожидание:

$$E(\xi | \eta = 1) = 0 + \frac{-1,5}{3} \cdot (1 - 2) = 0,5$$

Теперь находим дисперсию:

$$D(\xi|\eta = 1) = 3 - \frac{(-1.5)^2}{3} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$N(0.5, \frac{9}{4})$$

$$P(\xi > -1|\eta = 1) = \Phi(\frac{\infty - 0.5}{\sqrt{\frac{9}{4}}}) - \Phi(\frac{-1 - 0.5}{\sqrt{\frac{9}{4}}}) = 0.5 + \Phi(1) = 0.5 + 0.3413 = 0.8413$$

Ответ: 0.8413