I. Свойства оценок

1.1 (Ж1). Доказать, что частота случайного события A является R-эффективной оценкой вероятности P(A) этого события.

1.2 (З3). Выборка порождена случайной величиной ε с плотностью

$$f(x,\alpha)=\begin{cases} e^{\alpha-x}, x\geq\alpha \\ 0, x<\alpha \end{cases}$$

Является ли экстремальная порядковая статистика $X_{(1)}$ состоятельной оценкой неизвестного параметра α?

1.3 (К5). Выборка порождена случайной величиной ξ, имеющей биномиальное распределение $Bi(20,p)$ с неизвестным параметром p. Для оценивания параметра $\theta=D\xi$, используется оценка $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}(20-\bar{X})}{20}$. Докажите, что данная оценка является асимптотически несмещенной оценкой $\theta=D\xi$.

1.4 (К1). Выборка порождена дискретной случайной величиной ξ. Известно, что $P\{\xi=k\}=\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}, a>0, k=0,1,2,\ldots.$ Используя критерий эффективности, построить эффективную оценку параметра a.

II. ММП и ММ

2.1 (Ж2). Выборка соответствует распределению с плотностью

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, x>0 \\ 0, x\leq 0 \end{cases}$$

Оценить параметр θ методом максимального правдоподобия.

2.2 (З1). Выборка соответствует распределению с плотностью

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{6\theta^4}x^3e^{-\frac{x}{\theta}}, x>0 \\ 0, x\leq 0 \end{cases}$$

Оценить параметр θ методом максимального правдоподобия.

2.3 (С4). Выборка порождена случайной величиной ξ с распределением $E(1/_\theta)$. Постройте оценку неизвестного параметра методом моментов. Докажите, что оценка является эффективной по Рао-Крамеру.

2.4 (С3). В игру встроены 3 дополнительных уровня, за прохождение которых игрок получает бонусные баллы. По правилам для прохождения уровня игрок может предпринять неограниченное число попыток. Каждый из уровней проходят только один раз. Вероятность пройти любой из этих уровней с очередной попытки есть некоторая (неизвестная) величина p, одинаковая для всех уровней. Найдите оценку максимального правдоподобия для параметра p, если известно, что первый уровень игрок прошел с 50й попытки, второй уровень – с 4-1 попытки, третий уровень – с 7-й попытки.

III. Доверительные интервалы

3.1 (Ж4). При определении прочности стержня на разрыв испытывались 5 образцов. В результате испытаний получены следующие значения усилия разрыва (в кг): 500, 540, 600, 560, 550. Построить доверительный интервал уровня надежности 0.9 для дисперсии прочности, если закон распределения прочности нормальный.

3.2 (З2). В случайной выборке из 316 семей Западного Мидленда выборочное среднее еженедельных доходов составило 25,85 долл., а среднеквадратическое отклонение еженедельных доходов – 12,7 долл. Для 351-й семьи из Йоркшира выборочное среднее составило 23,14 долл, а среднеквадратическое отклонение – 13,4 долл. Постройте доверительный интервал уровня доверия 0,95 для разности средних еженедельных доходов семей Западного Мидленда и Йоркшира.

3.3 (З5). При испытании 1040 элементов зарегистрировано 105 отказов. Построить асимптотический доверительный интервал уровня доверия 0.95 для неизвестной вероятности отказа элемента.

3.3 (С1). Выборочное среднее расстояния между двумя геодезическими пунктами, полученное по данным обработки 9 независимых измерений, составляет 3000 м. Значения ошибки дальномерного устройства подчинены нормального закону распределения и характеризуются среднеквадратическим отклонением 30 м. Построить доверительный интервал уровня доверия 0,9 для истинного расстояния между пунктами. Сколько измерений надо произвести, чтобы длина доверительного интервала составила 20м?

IV. Проверка гипотез

4.1 (Ж3). В соответствии с техническими условиями среднее время безотказной работы для приборов из большой партии должно составлять не менее 1000 ч. Выборочное среднее безотказной работы для случайно отобранных 25 приборов оказалось равным 970 ч, а выборочная дисперсия 256 ч^2. Можно ли считать на уровне значимости 0.01, что вся партия приборов не удовлетворяет техническим условиям? Предполагается, что наблюдения имеют гауссовское распределение.

4.2 (Ж5). Среди 200 случайным образом выбранных в Центральном ФО владельцев легковых автомобилей 106 имели иномарки. Среди 100 случайным образом выбранных автовладельцев Дальневосточного ФО оказалось 57 обладателей иномарок. Можно ли считать (на уровне значимости 0.05), что доля владельцев иномарок в Дальневосточном ФО выше, чем в Центральном ФО?

4.3 (З4). В случайно выборке, включающей 160 студентов, 117 человек сдали экзамен по теории вероятностей с первой попытки. По итогам предыдущего года доля таких студентов в этом вузе составляла 0.81. Можно ли считать (на уровне значимости 0.01), что успеваемость в этом году ниже?

4.4 (З5). Штамповочный пресс делает отверстия в металлических шайбах с нормативным размеров 4.00 мм и среднеквадратическим отклонением 0.20 мм. Выборочное среднее 25 случайным образом выбранных шайб оказалось равным 3.88 мм. Можно ли считать (на уровне значимости 0.05), что размер изготавливаемых шайб в среднем ниже нормативного размера? Предполагается, что наблюдения имеют гауссовское распределение.

4.5 (К4). Из большой партии резисторов одного типа и номинала случайным образом отобраны 36 штук. Выборочное среднее величины сопротивления при этом оказалось равным 9,3 кОм. Проверьте гипотезу о том, что выборка взята из партии с номинальным значением 10 кОм, если дисперсия значения сопротивления: а) известна и равна 4; б) неизвестна, а выборочная дисперсия равна 6,25. Распределение контролируемого признака нормальное. Уровень значимости считать равным 0.01.

4.6 (С2). Две партии стальной проволоки изготовлены в разные смены. По результатам испытаний на разрыв 10 образцов 1-й партии и 6 образцов 2-й партии получены выборочные значения средней прочности соответственно 234Н и 247Н. Можно ли считать, что средняя прочность проволоки 2-й партии выше, если среднеквадратичное отклонение прочности для обеих партий равно 10Н? Закон распределения прочности является нормальным. Уровень значимости считать равным 0.05.