АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ОКРАСКИ РАСПЫЛЕНИЕМ И ОСНОВНЫЕ АСПЕКТЫ ЕГО РЕАЛИЗАЦИИ

Мифтахов Р.Р., магистр, оператор 4 научной роты ФГАУ «Военный инновационный технополис «ЭРА», г. Анапа, Российская Федерация, e-mail: rrmiftahov@mail.ru тел.: 89274277863,

Юденич А.А., магистр, оператор 4 научной роты ФГАУ «Военный инновационный технополис «ЭРА», г. Анапа, Российская Федерация, e-mail: aayudenich@mail.ru тел.: 89793872155,

Ермаков В.Э., магистр, оператор 5 научной роты ФГАУ «Военный инновационный технополис «ЭРА», г. Анапа, Российская Федерация, e-mail: veermakov@yandex.ru, тел.: 89066201286.

Аннотация

В статье рассмотрен процесс распыления краски с математической точки зрения, а также теоретические основы, необходимые для построения модели. На основе результатов анализа разработана математическая модель, позволяющая описать процесс окраски с необходимой точностью. Представлены основные аспекты программной реализации, позволяющие создать алгоритм моделирования процесса окраски и реализовать его.

Ключевые слова: окраска распылением; математическая модель; моделирование процессов, алгоритм;

Процесс распыления жидкостей представляет довольно сложное явление, которое зависит от множества факторов. В общем смысле, это явление распада струи и дробления капель жидкости на выходе струи из распылителя под действием внешних и внутренних сил [1].

Существует множество видов распыления краски, такие как пневматическое, безвоздушное, электростатическое и другие, но в данной главе будут рассматриваться общие принципы, характерные для большинства видов распыления, позволяющие построить математическую модель достаточной точности.

Частицы жидкости, вылетающие из сопла распылителя, образуют поток маленьких капель, который называется факел распыления (рис. 1).

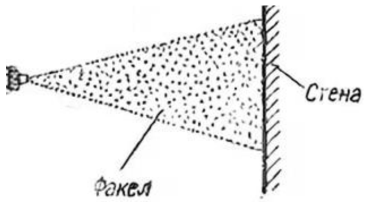
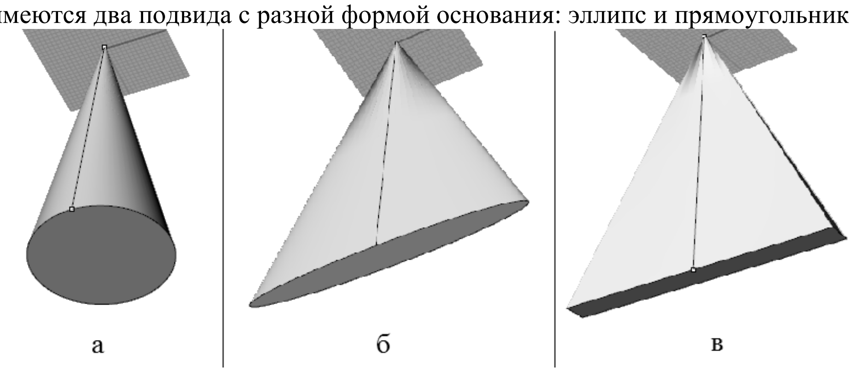


Рисунок 1 – Факел распыления

Факел распыления у разных форсунок может принимать различные геометрические формы. Наиболее часто использующиеся формы факела распыления – это полный конус и плоская струя. Для плоского факела, в свою очередь, имеются два подвида с разной формой основания: эллипс и прямоугольник (рис. 2).



а б в

Рисунок 2 – Формы факела распыления (а – конус; б – плоскость с основанием в форме эллипса; в – плоскость с прямоугольным основанием)

Представленные виды факелов имеют один общий параметр – это высота (H). Остальные параметры несколько отличаются (рис. 3).

Для конусного факела задается радиус основания (R) или же угол распыления (α).

Для плоского факела задаются два значения – это длина и ширина, что для эллипса соответствует размерам большой и малой полуосей (a и b), или же могут быть заданы два угла (α и β).

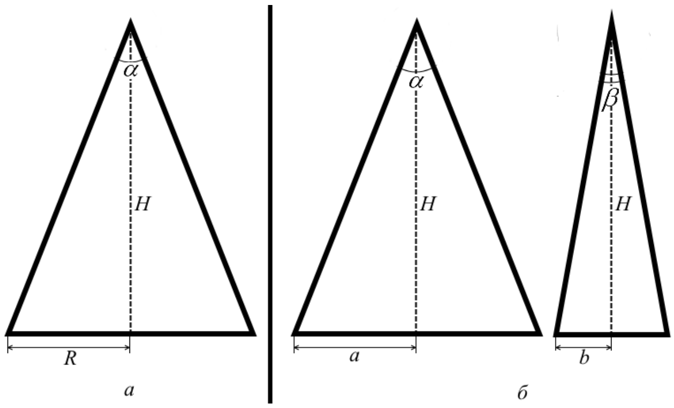


Рисунок 3 – Параметры факелов распыления (а – конусный факел;
б – плоский факел в двух проекциях).

Описанные параметры будут необходимы в дальнейшем для вычисления площади основания при различной высоте факела.

Процесс распыления является непрерывным с момента начала до его завершения. При практической реализации данный процесс рассматривается как итеративный. Траектория движения распылителя разбивается в соответствии со значением шага, которое устанавливается пользователем. Значение шага напрямую влияет на точность результата и скорость его вычисления.

Параметры, с помощью которых можно построить модель для данного процесса следующие:

– скорость перемещения распылителя [мм/с];

– скорость расхода краски [мм^3/с].

Зная длину шага для итеративного процесса распыления, можно вычислить время распыления на конкретной итерации.

$$t_{расп.} = \frac{l_{перем.}}{\upsilon_{перем.}}[c] \tag{1}$$

где $l_{перем}$ – длина шага перемещения, мм; $\upsilon_{перем}$ – скорость перемещения, мм/с.

Рассчитав время распыления, можно вычислить объем распыленной краски на текущем шаге по следующей формуле:

$$V_{расп.} = \upsilon_{расх.} \cdot t_{расп.}[мм^3] \tag{2}$$

где $\upsilon_{расх}$ – скорость расхода краски, мм^3/с.

Для определения толщины покрытия остаётся вычислить только одну величину – площадь основания факела. Эта величина напрямую зависит от высоты факела на уровне рассматриваемой точки окрашивания.

Высота конусного и плоского факела распыления в произвольной точке окрашивания будет равняться скалярному произведению нормированного вектора направления распыления и вектора между точкой окрашивания и точкой распыления.

$$H = \overline{OA} \cdot \overline{N} \tag{3}$$

где $\overline{OA}$ – вектор из точки распыления *O* в точку окрашивания *A*; $\overline{N}$ – вектор направления распыления.

Радиус основания конусного факела будет равняться произведению найденной высоты на тангенс половинного угла распыления. Вычислив радиус можно определить площадь:

$$R = H \cdot tg\frac{\alpha}{2} \tag{4}$$

$$S_{осн.ок.} = \pi \cdot R^2 \Rightarrow S_{осн.ок.} = \pi \cdot ((\overline{OA} \cdot \overline{N}) \cdot tg\alpha)^2 \tag{5}$$

где $S_{осн.ок.}$ – площадь основания конусного факела, м^2.

Выражение (5) справедливо для конусного факела. Для плоского факела производится вычисление длины и ширины (или же большой и малой полуосей эллипса):

$$a = H \cdot tg\frac{\alpha}{2} \tag{6}$$

$$b = H \cdot tg\frac{\beta}{2} \tag{7}$$

где *a, b* – длина и ширина (большая и малая полуоси), м.

$$S_{осн.пр.} = a \cdot b \Rightarrow S_{осн.пр.} = (\overline{OA} \cdot \overline{N})^2 \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2} \tag{8}$$

где $S_{осн.пр.}$ – площадь прямоугольного основания плоского факела, м^2.

$$S_{осн.эл.} = \pi \cdot a \cdot b \Rightarrow S_{осн.эл.} = \pi \cdot (\overline{OA} \cdot \overline{N})^2 \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2} \tag{9}$$

где $S_{осн.эл.}$ – площадь эллипсного основания плоского факела, м^2.

Зная объем распыленной краски из (2) и площадь, на которую данный объем попадет из (5), (8) или (9), можно вычислить толщину покрытия:

$$h_{покр.} = \frac{V_{расп}}{S_{осн}} \qquad (10)$$

где $h_{покр}$ – толщина покрытия, мм (рис. 4).

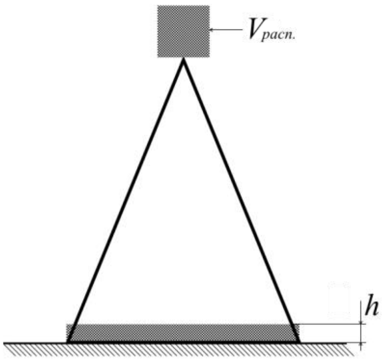


Рисунок 4 – Толщина покрытия

Для возможности компьютерной реализации процесса окраски, как уже было сказано выше, используется итеративный подход. Данный подход подразумевает разбиение процесса на отдельные итерации (шаги). В случае окраски, происходит разбиение всей траектории в соответствии с установленной пользователем величиной под названием «длина шага». Для каждой точки полученной траектории выполняется моделирование распыления. В итоге получается окрашенная модель со значениями толщины покрытия в точках модели. Весь процесс симуляции происходит с момента запуска пользователем моделирования и до его окончания или же до пользовательской остановки.

После запуска моделирования, в первую очередь, происходит преобразование пользовательских входных данных в данные со структурой, наиболее подходящей для данной задачи. Новая структура данных представляет собой треугольники, содержащие координаты вершин и значение толщины покрытия для каждой вершины. При формировании обеспечивается единственность существования каждой вершины. Это является одним из важных условий, поскольку дублирующиеся вершины будут искажать результат. После завершения инициализации начинается непосредственно процесс моделирования покраски. На вход симулятору последовательно передаются точки траектории и направления распыления в каждой точке.

Алгоритм, использующийся для моделирования распыления краски из произвольной точки в произвольном направлении, основывается на методике под названием «трассировка лучей» или же «*ray tracing*».

Трассировка лучей – один из методов геометрической оптики, исследование оптических систем путём отслеживания взаимодействия отдельных лучей с поверхностями. В узком смысле – технология построения изображения трёхмерных моделей в компьютерных программах, при которых отслеживается обратная траектория распространения луча (от экрана к источнику). Трассировка лучей в компьютерных играх – это решение для создания реалистичного освещения (рис. 5), отражений и теней, обеспечивающее более высокий уровень реализма по сравнению с традиционными способами рендеринга [2].

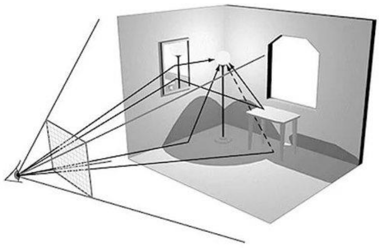


Рисунок 5 – Трассировка лучей для моделирования освещения

Трассировка, как было сказано в определении выше, в компьютерной графике используется для моделирования освещения методом формирования лучей из статической точки освещения. Данный способ было решено использовать для моделирования окраски, только в таком случае статический источник освещения представляет собой распылительную форсунку, которая, может перемещаться, а формируемые лучи – поток распыленной краски.

Трассировка была выбрана в качестве метода моделирования, поскольку она довольно точно описывает движение частиц краски, тем самым позволяя определять препятствия перед распыляющейся краской, которыми могут являться, например, ручки на дверях автомобиля (рис. 6).

Для реализации данного метода, в первую очередь, необходимо сформировать лучи. Луч, в некотором смысле, представляет собой вектор из точки распыления, проходящий через точку основания факела распыления. Из этого следует, что для получения лучей, необходимо сформировать некоторым случайным образом точки в основании факела. Зная эти точки, можно вычислить лучи, проходящие из точки распыления через полученные случайные точки в основании [3].

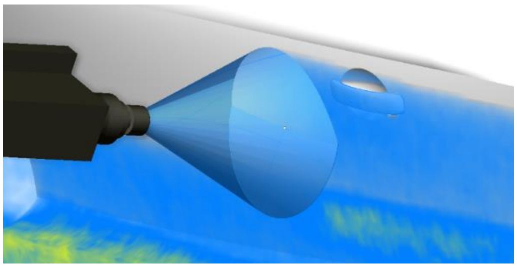


Рисунок 6 – Моделирование окраски двери автомобиля

В ходе моделирования основные вычислительные ресурсы расходуются на осуществление пересечений между лучами и треугольниками. В связи с этим, данный процесс должен быть реализован наиболее оптимально, поскольку от этого зависит быстродействие всей программы.

Пересечение луча и треугольника представляет собой пересечение прямой и плоскости, результатом которого является точка в трёхмерном пространстве. Для нахождения точки пересечения введем некоторые обозначения. Пусть луч представлен в виде:

$$P(t) = O + t \cdot R, \tag{11}$$

где O – точка, из которой исходит луч, R – нормированный вектор направления, t – параметр.

Плоскость задана следующим уравнением:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0, \tag{12}$$

где A, B, C, D – коэффициенты плоскости.

Точка пересечения луча и плоскости одновременно принадлежит обоим элементам. Это означает, что, подставив координаты такой точки в (12) равенство должно быть истинным. А в уравнении (11), при подстановке P, не известным окажется расстояние от точки O до точки P, т.е. параметр t.

После подстановки P в (12) уравнение примет следующий вид:

$$A \cdot P_x + B \cdot P_y + C \cdot P_z + D = 0, \tag{13}$$

$$A \cdot (O + t \cdot R_x) + B \cdot (O + t \cdot R_y) + C \cdot (O + t \cdot R_z) + D = 0, \tag{14}$$

После раскрытия скобок и вынесения t окончательное уравнение окажется следующим:

$$t = -\frac{N \cdot O + D}{N \cdot R}, \tag{15}$$

где N – нормаль плоскости.

Зная параметр t, можно вычислить точку пересечения P и в дальнейшем проверить, принадлежит ли она лучу [4].

После нахождения точки пересечения остаётся определить принадлежность её треугольнику. На данную операцию уходит основное время всей процедуры пересечения луча и треугольника, поэтому здесь используется наиболее оптимальный вариант – это использование барицентрических координат для описания треугольников.

Барицентрические координаты – скалярные параметры, набор которых однозначно задаёт точку аффинного пространства (при условии, что в данном пространстве выбран некоторый точечный базис) [5].

Основная идея использования барицентрических координат заключается в том, что для каждого треугольника, предварительно, вычисляется его собственная система координат. Нахождение пересечения в таком случае потребует вычисления всего двух векторных произведений.

Пусть дан треугольник с точками P_1, P_2, P_3. Определим два вектора V_x и V_y, как разницу между двумя точками треугольниками и начальной точкой:

$$V_x = P_2 - P_1, \tag{16}$$

$$V_y = P_3 - P_1 \tag{17}$$

Два этих вектора и будут составлять базис системы координат треугольника. Произвольная точка в таком базисе задаётся следующим образом:

$$P = P_1 + u \cdot V_x + \upsilon \cdot V_y, \tag{18}$$

где u, υ – барицентрические координаты точки P [6].

Координаты u и υ вычисляются как отношение площадей треугольников (рис. 7):

$$u = \frac{S_{P_1P_2P}}{S_{P_1P_2P_3}}, \tag{19}$$

$$\upsilon = \frac{S_{P_1PP_3}}{S_{P_1P_2P_3}} \tag{20}$$

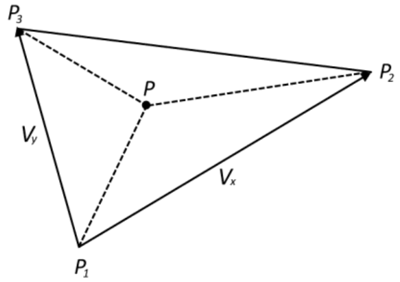


Рисунок 7 – Точка *P* и треугольник $P_1P_2P_3$

Поскольку отношение площадей двух треугольников с общим основанием равно отношению их высот, барицентрические координаты равны отношениям расстояний от точки Р до векторов Vx, Vy к соответствующим высотам треугольника [7].

Точка лежит внутри треугольника, если её барицентрические координаты u и υ удовлетворяют следующим условиям:

$$u \geq 0, \upsilon \geq 0, u + \upsilon \leq 1, \tag{21}$$

Как известно, векторное произведение векторов является площадью параллелограмма, образованного этими векторами [8]. Следовательно, площадь треугольника будет равняться половине площади параллелограмма. Учитывая выше сказанное, выражения (19) и (20) примут вид:

$$u = V_x \times P_1P, \tag{22}$$

$$\upsilon = P_1P \times V_y \tag{23}$$

Зная вектора V_x и V_y, точки треугольника P_1, P_2, P_3 и точку пересечения P можно вычислить барицентрические координаты u и υ. Вычислив эти координаты, остаётся только проверить истинность условий из (21) и тем самым узнать принадлежит точка треугольнику или нет.

Таким образом, в данной статье была представлена математическая модель, с помощью которой можно осуществить моделирование покраски. В упрощенном варианте был описан факел распыления с использованием математических выражений. Был рассмотрен и изучен процесс распыления, в результате чего были выведены формулы для нахождения объема распыленной краски, площади основания, на котором распределяется данный объем и, как следствие, толщины лакокрасочного покрытия в миллиметрах. Также были рассмотрены основные аспекты программной реализации, такие как трассировка лучей и пересечение луча с треугольником.

Представленная математическая модель может быть использована в любой программной среде и, практически, на любом стационарном компьютере, что делает данную модель доступной и простой в применении.

Литература

1. Пажи, Д.Г. Распыливающие устройства в химической промышленности / Д.Г. Пажи, А.А. Корягин, Э.А. Ламм. – М.: Химия, 1975. – 199 с.
2. Трассировка лучей // [Электронный ресурс]. – https://ru.wikipedia.org/wiki/Трассировка_лучей (дата обращения: 27.11.2019).
3. Random points in a circle // [Электронный ресурс]. – http://xdpixel.com/random-points-in-a-circle (дата обращения: 10.12.2019).
4. Ray-Triangle Intersection: Geometric Solution // [Электронный ресурс]. – https://www.scratchapixel.com/lessons/3d-basic-rendering/ray-tracing-rendering-a-triangle/ray-triangle-intersection-geometric-solution (дата обращения: 20.12.2019).
5. Барицентрические координаты // [Электронный ресурс]. – https://ru.wikipedia.org/wiki/Барицентрические_координаты (дата обращения: 20.12.2019).
6. Barycentric Coordinates // [Электронный ресурс]. – https://www.scratchapixel.com/lessons/3d-basic-rendering/ray-tracing-rendering-a-triangle/barycentric-coordinates (дата обращения: 24.12.2019).
7. А.Заславский, Д.Косов, М.Музафаров Траектории замечательных точек треугольника Понселе // Научно-популярный физико-математический журнал «Квант». – 2003. – №2. – С. 23.

8. Векторное произведение // [Электронный ресурс]. – https://ru.wikipedia.org/wiki/Векторное_произведение#Геометрическое _определение (дата обращения: 24.12.2019).