

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛАНЧЕСТЕРА КАК ОСНОВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

Сухов Н.А., оператор 4 научной роты ФГАУ «Военный инновационный технополис «ЭРА».

Аннотация

В статье рассматриваются особенности математической модели Ланчестера, которая является основополагающей при моделировании боевых действий. В ходе многовариантного тестирования посредством различных входных данных выявлены закономерности влияния начальной численности боевых систем на исход противоборства, определено стратегическое значение эффективности действий каждой стороны на результаты противоборства. Кроме этого практическим способом решена задача достижения положительного исхода боя минимальной начальной численностью личного состава. Сделаны выводы о том, что особо важное значение на результаты противостояния двух противоборствующих сторон оказывают скорость и количество прибытия пополнений личного состава. На основе проанализированных данных предложено решение задачи определения нужной численности БС через определённый промежуток времени с применением программного управляющего воздействия.

Ключевые слова: *Фредерик Ланчестер, боевая система, модель боевых действий, дифференциальные уравнения, вариант развития событий, скорость уменьшения личного состава, темп потерь в ходе боя, скорость прибытия подкреплений, нейтральный исход противоборства, программное управляющее воздействие.*

С давних времен вооружённые конфликты различных масштабов происходят в разнообразных географических условиях нашей планеты. В каждом отдельном случае противоборствующая сторона имела свои причины для осуществления военных действий и прилагала все усилия для достижения положительного исхода каждого сражения и войны в целом. Основополагающую попытку применить математику для описания вооружённой борьбы и её прогнозирования

предпринял английский священник и математик Фредерик Ланчестер во время первой мировой войны, так как на тот момент эта задача была особенно актуальна.

Законы Ланчестера представляют собой математические формулы для расчёта относительных сил противодействующих боевых систем (далее – БС). Эти формулы представляют собой модель, основанную на системе дифференциальных уравнений для описания динамической численности сил БС как функции от времени. Сюда входят как линейные, так и квадратичные законы. Главной характеристикой для определения победителя является численность БС: $x_1(k) \geq 0$ (союзная БС), $x_2(k) \geq 0$ (БС противника), которая зависит от следующих факторов:

- a_i ($i = 1, 2$) – скорость уменьшения состава из-за причин, не связанных с боевыми действиями;
- β_i ($i = 1, 2$) – темп потерь в ходе боевых действий или эффективность противоположной БС;
- γ_i ($i = 1, 2$) – скорость поступления подкреплений.

Отсюда образуется система уравнений:

$$\begin{cases} x_1(k+1) - x_1(k) = -a_1 x_1(k) - \beta_2 x_2(k) + \gamma_1(k) \\ x_2(k+1) - x_2(k) = -a_2 x_2(k) - \beta_1 x_1(k) + \gamma_2(k) \end{cases}'$$

где k – дискретные периоды времени.

Если в какой-то момент времени одна из численностей БС обращается в нуль, то данная армия считается потерпевшей поражение.

Из уравнений Ланчестера получаем рекуррентные формулы:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -a_1 x_1(k) - \beta_2 x_2(k) + \gamma_1(k) + x_1(k) \\ x_2(k+1) = -a_2 x_2(k) - \beta_1 x_1(k) + \gamma_2(k) + x_2(k) \end{cases}$$

Далее приступаем к тестированию математической модели.

В первом варианте развития событий допускается моделирование боевых действий на промежутке времени $t=1, \dots, 20$. Эффективности действий обеих БС одинаковы ($\beta_1=\beta_2$). Темпы небоевых потерь одинаковы ($a_1=a_2$). Начальная численность союзной БС в 2,5 раза больше БС противника. Однако скорость прибытия пополнения у БС противника в 3 раза больше, чем у союзной БС. Полученные результаты отображены в виде графика на рисунке 1. На этом и следующих рисунках голубым цветом выделена союзная БС, а красным – БС противника.

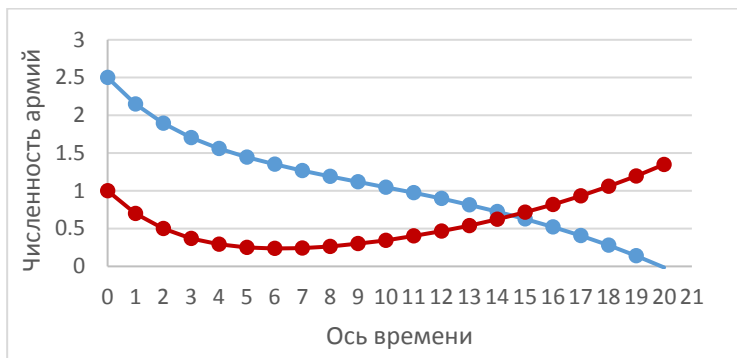


Рисунок 1. Исход боевых действий первого варианта развития событий.

Таким образом, БС противника, не смотря на критическое положение при $t=6$ (её численность в этот момент времени наименьшее значение и составляет всего 18 процентов от численности союзных БС), в конечном итоге одерживает победу при $t=20$.

Во втором варианте развития событий входные данные остаются аналогичными, за исключением начальной численности союзной БС: теперь она не в 2,5, а в 3 раза больше.

Полученные результаты отображены в виде графика на рисунке 2.

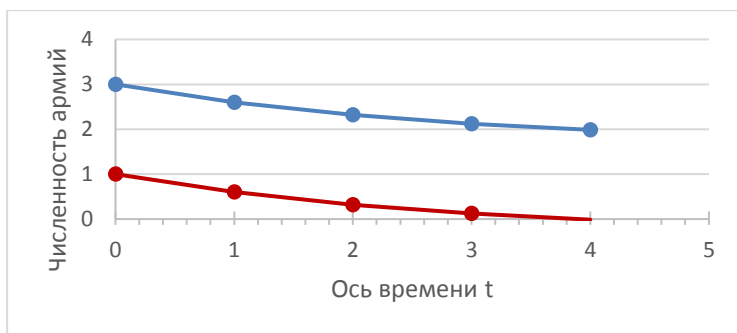


Рисунок 2. Исход боевых действий второго варианта развития событий.

В этом случае БС противника терпит поражение при $t=4$.

С помощью вышеописанной модели можно прогнозировать исход боя при минимальных ресурсах личного состава. В третьем варианте развития событий стоит задача определить с точностью до 0,01 наименьшее значение численности союзной БС для того, чтобы одержать победу. Все исходные данные аналогичны данным первого варианта. Эту задачу можно решить двумя способами: решением уравнения или, в нашем случае самый простой, – метод подстановки значения в формулу для отображения на графике. В соответствии с решениями задач первого и второго варианта определён диапазон от 2,5 до 3 раз в разнице численного состава БС. Полученные результаты отображены в виде графика на рисунке 3.

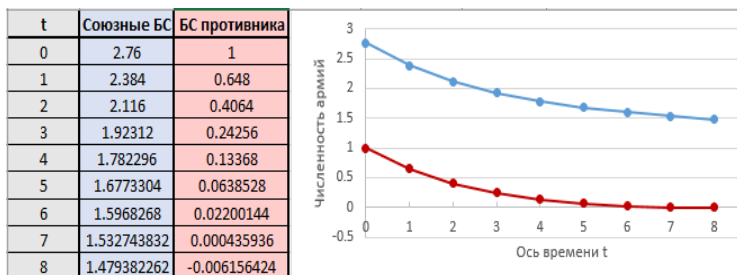


Рисунок 3. Исход боевых действий третьего варианта развития событий.

Таким образом, союзной БС необходимо иметь численный перевес хотя бы в 2,76 раза для того, чтобы одержать победу.

Четвёртый вариант развития событий имеет следующие входные параметры: в данной ситуации подкрепления не поступают, небоевые потери отсутствуют. Союзная БС имеет численный перевес на 20% больше при одинаковой эффективности обеих сторон. Полученные результаты отображены в виде графика на рисунке 4.

Таким образом, при заданных условиях превышение численности союзной БС на 20% обеспечивает ей победу при $t=12$.

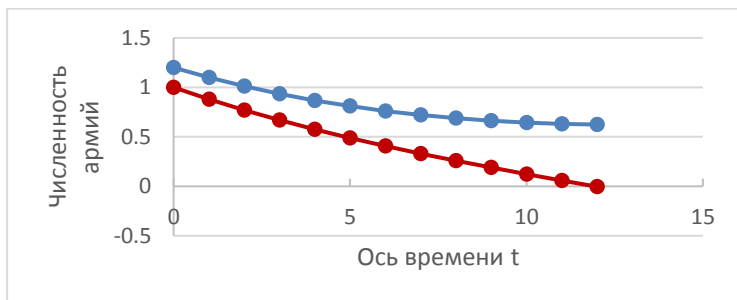


Рисунок 4. Исход боевых действий четвертого варианта развития событий.

В пятом варианте исходные данные будут такие же, как и в четвертом, за исключением увеличения численности БС противника также на 20%. Полученные результаты отображены в виде графика на рисунке 5.

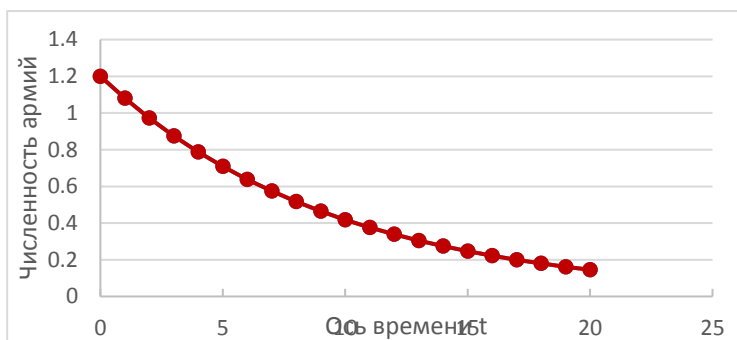


Рисунок 5. Исход боевых действий пятого варианта развития событий.

Таким образом, при увеличении численности БС противника на 20% наступает «ничья», которая наблюдается на каждом промежутке времени, и графики обеих БС «накладываются» друг на друга вследствие идентичного набора исходных данных.

В шестом варианте развития событий стоит задача определения наименьшего значения коэффициента боевых действий БС противника для достижения «ничьи». При этом, численность союзной БС на 20% больше БС противника.

Методом практического перебора значения коэффициента в формуле, отображающейся на графике, был определён коэффициент 1,444. Полученные результаты отображены в виде графика на рисунке 6.

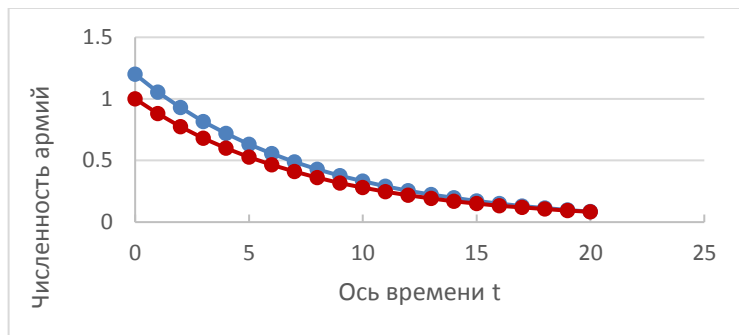


Рисунок 6. Исход боевых действий шестого варианта развития событий.

Проанализировав пятый и шестой вариант развития событий можно сделать вывод о том, что к нейтральному исходу боевых действий приводит как увеличение численности БС в 1,2 раза, так и увеличение коэффициента эффективности в 1,444 раза. Поэтому для достижения «ничьи» должно выполняться следующее условие:

$$(x_1(0))^2 * \beta_1 = (x_2(0))^2 * \beta_2$$

Данная формула в литературе называется квадратичным законом боевых действий. Отсюда следует тот факт, что численное преимущество имеет первоочередное значение, так как его увеличение пропорционально квадрату.

В качестве седьмого варианта развития событий предлагается определить динамику системы противоборствующих сторон со следующими показателями: численность союзной БС в 1,5 раза больше БС противника, эффективность действий противника в 3 раза выше, коэффициент небоевых потерь у союзной БС составляет 0,1, а у БС противника – 0,08. Численности поступающих подкреплений у союзной БС составляет 0,3, а у БС противника – 0,1 при t=40. Полученные результаты отображены в виде графика на рисунке 7.

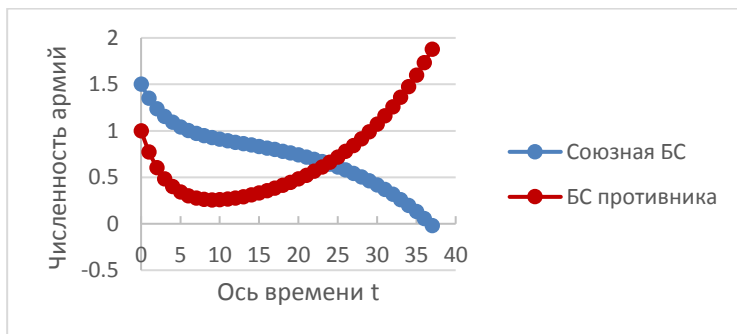


Рисунок 7. Исход боевых действий седьмого варианта развития событий.

Несмотря на то, что начальная численность союзной БС в 1,5 раза больше и эффективность её действий в 3 раза выше, при $t=37$ она принимает поражение. Это связано с тем, что скорость прибытия пополнений в 3 раза меньше, чем у БС противника. Для сравнения рассмотрим восьмой вариант развития событий с аналогичными исходными данным, изменив разницу в прибытии пополнений с 3 до 2,8 раз. Полученные результаты отображены на рисунке 8.

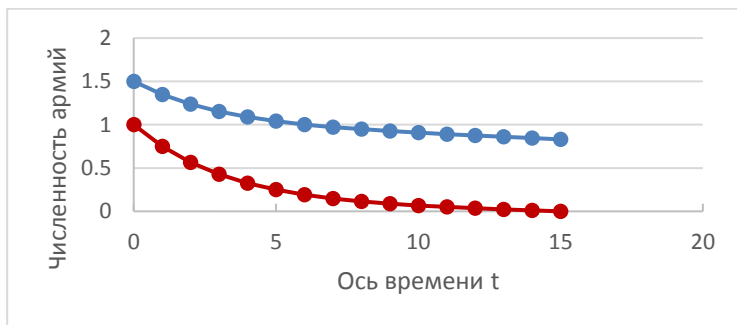


Рисунок 8. Исход боевых действий восьмого варианта развития событий.

Таким образом, при восьмом варианте развития событий БС противника потерпит поражение $t=15$. Такая огромная разница в исходах 7 и 8 варианта боевых действий связана с уменьшением прибытия пополнений БС противника в 0,93 раза. Анализируя полученные данные, можно с уверенностью сделать

вывод о том, что количество и скорость прибывающих пополнений имеет важное стратегическое значение для достижения положительного исхода боевых действий.

Исходя из вышесказанного актуальной становится задача достижения нужной численности БС через определённый момент времени. Одним из вариантов решения обозначенной задачи является построение оптимального программного управляющего воздействия, которое соответствует направляемым БС подкреплениям. Ещё один вывод можно сделать о том, что в чистом виде математическая модель Ланчестера способна решать задачи прогнозирования боевых действий, однако для необходимой точности предсказаний необходимо значительно усложнить и изменить эту модель, введя необходимые коэффициенты соответствия эмерджентных свойств боевой системы в целом и каждой её составляющей. Другим вариантом решения задачи прогнозирования боевых действий может являться использование стохастической математической модели на основе теории непрерывных Марковских процессов и теории вероятности в целом.

Литература

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. // Физматлит. 2001. С. 175-179.
2. Тараканов К. В. Математика и вооружённая борьба // Воениздат., 1974. 29.
3. Глушков И. Н. Выбор математической схемы при построении модели боевых действий // Программные продукты и системы. 2010. №1. С. 1-9.