МЕТОДИКА РАСЧЁТА НЕОБХОДИМОГО КОЛИЧЕСТВА ПОДКРЕПЛЕНИЙ В СЛУЧАЕ ИХ НЕСАМОСТОЯТЕЛЬНОГО ФОРМИРОВАНИЯ ОБЕИМИ ПРОТИВОБОРСТВУЮЩИМИ СТОРОНАМИ В ДИСКРЕТНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Сухов Н.А., оператор 4 научной роты ФГАУ «Военный инновационный технополис «ЭРА».

Аннотация

В статье рассматривается способ расчёта оптимального количества вновь прибывающих пополнений личного состава для каждой противоборствующей стороны в случае, когда подкрепления формируются третьей стороной, заинтересованной в победе одной из армий. В ходе расчётов алгебраическим методом и методом исключения неизвестного Гаусса были найдены значения обратных матриц, которые являются одними из элементов итоговой формулы по определению оптимального управления. Методом скелетного разложения рассчитаны псевдообратные матрицы. Испытан способ определения таких матриц через нахождение значений собственных векторов, однако в данном случае полученные результаты не давали точных ответов, а лишь бесконечное количество коллинеарных векторов. На основе заранее определённых исходных данных, в том числе и в виде различных коэффициентов, был смоделирован бой, в котором посредством оптимального управления система противоборствующих сторон была успешно переведена из исходного состояния в заданное.

Ключевые слова: *модель динамики средних, боевая система, транспонированная матрица, обратная матрица, псевдообратная матрица, заданный период, временной промежуток, оптимальное управление, метод исключения неизвестного Гаусса, детерминант, определитель матрицы, динамика численности.*

На всём протяжении своего развития человечество испытывает межгосударственные конфликты интересов, которые зачастую перерастают в вооружённые действия между странами.

Современная война имеет характеристику информационной и высокотехнологичной, поэтому экономически выгодные для великих держав военные столкновения носят локальный характер. Бывают ситуации, когда одна большая страна с мощной экономикой оказывает поддержку сразу двум противоборствующим сторонам для достижения личной выгоды. В таких условиях крайне важно иметь точное представление о необходимом количестве отправляемых подкреплений для каждой стороны, сохраняя минимальные затраты для достижения целевого состояния через конкретный промежуток времени. Точно рассчитав заранее необходимое количество средств, можно оценить экономическую выгоду и точно спрогнозировать исход общевойскового боя между двумя противоборствующими сторонами.

Для моделирования боевых действий широкое распространение получил метод динамики средних на основе дифференциальных уравнений Ланчестера. Было выяснено, что для достижения положительного результата противоборства важнейшую роль играет скорость и численность поступающих пополнений для каждой стороны. Имея необходимые данные по каждой конфликтующей стороне, а именно: коэффициент боевых и небоевых потерь, количество личного состава, можно рассчитать необходимое количество поступающих подкреплений для каждой армии. Расчёт необходимого количества подкреплений будем рассматривать как оптимальное управляющее воздействие, а модель боевых действий – как линейную дискретную систему.

Для расчётов математических вычислений будем использовать рекуррентную форму методов динамики средних, которая отображена ниже:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -a_1 x_1(k) - \beta_2 x_2(k) + \gamma_1(k) + x_1(k) \\ x_2(k+1) = -a_2 x_2(k) - \beta_1 x_1(k) + \gamma_2(k) + x_2(k) \end{cases}, \text{ где:}$$

- $a_{1,2}$ – коэфициент потерь, не связанных с боевыми действиями;
- $\beta_{1,2}$ – коэффициент эффективности действий армии;
- $\gamma_{1,2}$ – количество поступающих подкреплений;
- ($k = 0, 1, .., N$ - 1).

Так как поступление подкреплений рассматривается как управляющее воздействие, то $y_1(k)=u(k)$. Допустим, третья сторона высылает подкрепления одной из противоборствующих сторон в 2 раза интенсивнее, чем другой, тогда $y_2(k)=0{,}5u(k)$. Следует отметить, что индекс переменных $i=1$ характеризует данные, относящиеся к армии синих (союзная БС), а индекс переменных $j=2$ характеризует данные, относящиеся к армии красных (БС противника). Обозначим следующие характеристики для прогнозного моделирования боевых действий: $\alpha_1=0{,}1$; $\alpha_2=0{,}05$; $\beta_1=0{,}2$; $\beta_2=0{,}3$. Иными словами, количество небоевых потерь у союзной БС в два раза больше, чем у БС противника, а также эффективность боевых действий у армии синих в полтора раза ниже, чем у армии красных. В начальный момент времени численность союзной БС составляет 5000, а у БС противника – 6000 человек.

Основная задача заключается в необходимости расчёта оптимального количества прибывающих пополнений для каждой противоборствующей стороны таким образом, чтобы к конечному моменту времени $k=N=10$ численность армии «синих» составляла 1000, а армия «красных» – 2000 человек.

На основе вышеперечисленных исходных данных система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0{,}9x_1(k) - 0{,}3x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = -0{,}2x_1(k) + 0{,}95x_2(k) + 0{,}5u(k) \end{cases}$$
$$(k = 0, 1, .., N - 1).$$

Для решения поставленной задачи запишем систему уравнений в матричном виде. Тогда:

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k), \text{ где}$$

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}95 \end{bmatrix},\ B_{2x1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix},\ x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix},\ u(k) \in \mathrm{R}$$

Оптимальное управление $u^0(k)$ в данном случае при $0 \le k \le 9$ определяется по формуле:

$$u^0(k) = S^T(k)*D^+(k)*c(k).$$

Матрица S^T является транспонированной матрицей S. Принцип такого преобразования заключается в следующем: все строки исходной матрицы являются столбцами для транспонированной. Схема вышеописанного выглядит следующим образом:

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} => A^T{}_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Например, если:

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,3 \\ -0,2 & 0,95 \end{bmatrix}, \text{ то } A^T{}_{2x2} = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,2 \\ -0,3 & 0,95 \end{bmatrix}$$

Матрица S находится по формуле:

$$S(k) = A^{N-k-1} * B.$$

Иными словами, матрица S является произведением матрицы A в степени разницы общего количество промежутков времени и текущего момента, увеличенного на одну единицу, и матрицы B.

Вектор $c(k)$ определяется по формуле:

$$c(k) = x_1 - A^{N-k} * x(k).$$

Иными словами, для определения значений вектора $c(k)$, необходимо из вектора целевого состояния x_1, вычесть произведение вектора текущего состояния на матрицу A в степени разности порядкового номера текущего момента и общего количества временных промежутков. Матрица целевого состояния x_1 выглядит следующим образом:

$$x(10) = x_1 = \begin{bmatrix} 1 * 10\text{^}3 \\ 2 * 10\text{^}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(10) \\ x_2(10) \end{bmatrix}.$$

Матрица начального состояния исходя из обозначенных данных в формулировке поставленной задачи выглядит следующим образом:

$$x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} 5 * 10\text{^}3 \\ 6 * 10\text{^}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}.$$

Матрица D^+ является псевдообратной по отношению к матрице D, которая вычисляется по формуле:

$$D(k) = \sum_{i=k}^{9} S(i) * S^T(i).$$

Размер матрицы A составляет nxn, а размер матрицы B – nxm. Так как m=1 < n=2, то значения обратной и псевдообратной матриц A должны быть одинаковыми на при каждом *i=k,* как то: *k=0,..,N-n*. Кроме того, при этих же значениях итераций результат произведения обратной или псевдообратной матриц на вектор *c(k)* будет одинаковым на каждом шаге такой итерации. Иными словами, математическая формула выглядит следующим образом:

$$D(k)^{-1}*c(k)= D(k)^{+}*c(k)=const, \text{ при } k=0,..,N-n.$$

Вышеперечисленные условия должны быть соблюдены и будут использоваться в качестве проверки корректности производимых вычислений. Теперь приступим к практической части выполнения поставленной задачи. Все вычисления и графики будут строиться в программном продукте “Excel” компании “Microsoft”.

Первым делом приступим к вычислению вектора *S(k)* и транспонированного ему вектора $S(k)^T$ для каждого момента времени.

Для вычисления элементов матрицы *S(1)* необходимо выполнить следующее:

s_{11}=a^0$_{11}$*b$_{11}$+ a^0$_{12}$*b$_{21}$=1*1+0*0,5=1;
s_{21}=a^0$_{21}$*b$_{11}$+ a^0$_{22}$*b$_{21}$=0*1+1*0,5=0,5.

Аналогичным образом вычисляются все векторы *S(k),* ход вычислений которых представлен на рисунке 1.

Следующим шагом необходимо найти произведение векторов *S(k)* и $S(k)^T$. Например, произведение $S(9)*S(9)^T$ вычисляется так:

$$(S(9)*S(9)^T)_{11}=s_{11}*s^T{}_{11}=1*1=1;$$
$$(S(9)*S(9)^T)_{12}=s_{11}*s^T{}_{12}=1*0,5=0,5;$$
$$(S(9)*S(9)^T)_{21}=s_{21}*s^T{}_{11}=0,5*1=0,5;$$
$$(S(9)*S(9)^T)_{22}=s_{21}*s^T{}_{12}=0,5*0,5=0,25.$$

Остальные произведения векторов находятся аналогичным способом. Затем необходимо найти сумму произведений для каждой итерации, в результате чего будет найдена матрица *D(k)*. Например, произведение $S(9)*S(9)^{\mathrm{T}}$ и значение матрицы *D(9)* будут одинаковы.

A^9		*	B	=	S	$S^T(0)$ =	0.625964	-0.52297
1.879888	-2.50785		1		0.625964			
-1.6719	2.297863		0.5		-0.52297			
A^8		*	B	=	S	$S^T(1)$ =	0.55066	-0.43456
1.615502	-2.12968		1		0.55066			
-1.41979	1.970449		0.5		-0.43456			
A^7		*	B	=	S	$S^T(2)$ =	0.494036	-0.35343
1.394705	-1.80134		1		0.494036			
-1.20089	1.694928		0.5		-0.35343			
A^6		*	B	=	S	$S^T(3)$ =	0.456988	-0.27582
1.213461	-1.51295		1		0.456988			
-1.00863	1.465619		0.5		-0.27582			
A^5		*	B	=	S	$S^T(4)$ =	0.442002	-0.19729
1.069433	-1.25486		1		0.442002			
-0.83657	1.278576		0.5		-0.19729			
A^4		*	B	=	S	$S^T(5)$ =	0.453731	-0.11215
0.96225	-1.01704		1		0.453731			
-0.67803	1.131756		0.5		-0.11215			
A^3		*	B	=	S	$S^T(6)$ =	0.499875	-0.01281
0.894	-0.78825		1		0.499875			
-0.5255	1.025375		0.5		-0.01281			
A^2		*	B	=	S	$S^T(7)$ =	0.5925	0.11125
0.87	-0.555		1		0.5925			
-0.37	0.9625		0.5		0.11125			
A^1		*	B	=	S	$S^T(8)$ =	0.75	0.275
0.9	-0.3		1		0.75			
-0.2	0.95		0.5		0.275			
A^0		*	B	=	S	$S^T(9)$ =	1	0.5
1	0		1		1			
0	1		0.5		0.5			

Рисунок 1. Вычисление векторов S и S^T.

Следует отметить, что значения других матриц *D(k)*, будут получены следующим образом:

$D(k\text{-}1)= D(k)+(S(k\text{-}1)*S(k\text{-}1)^T).$

Например, $D(8)= D(9)+(S(8)*S(8)^T)=$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5625 & 0{,}20625 \\ 0{,}20625 & 0{,}075625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5625 & 0{,}70625 \\ 0{,}70625 & 0{,}325625 \end{bmatrix}.$$

Полный ход вычислений представлен на рисунке 2.

D0		s(0)*sT(0)	
3.7126355	-0.2396339	0.391830	-0.327359
-0.2396339	1.0529951	-0.327359	0.273495

D1		s(1)*sT(1)	
3.3208051	0.0877250	0.303227	-0.239297
0.0877250	0.7794996	-0.239297	0.188846

D2		s(2)*sT(2)	
3.0175781	0.3270223	0.244071	-0.174606
0.3270223	0.5906537	-0.174606	0.124912

D3		s(3)*sT(3)	
2.7735070	0.5016285	0.208838	-0.126047
0.5016285	0.4657421	-0.126047	0.076078

D4		s(4)*sT(4)	
2.5646692	0.6276757	0.195366	-0.087201
0.6276757	0.3896643	-0.087201	0.038922

D5		s(5)*sT(5)	
2.3693033	0.7148764	0.205872	-0.050885
0.7148764	0.3507426	-0.050885	0.012577

D6		s(6)*sT(6)	
2.1634313	0.7657610	0.249875	-0.006405
0.7657610	0.3381657	-0.006405	0.000164

D7		s(7)*sT(7)	
1.9135563	0.7721656	0.351056	0.065916
0.7721656	0.3380016	0.065916	0.012377

D8		s(8)*sT(8)	
1.5625000	0.7062500	0.562500	0.206250
0.7062500	0.3256250	0.206250	0.075625

D9		s(9)*sT(9)	
1.000	0.500	1	0.5
0.500	0.250	0.5	0.25

Рисунок 2. Вычисление произведения векторов S и S^T, матрицы $D(k)$.

Далее необходимо найти обратную матрицу $D^{-1}(k)$ для промежутков $k=0,..,N-n$. Для этого существует 2 основных метода: алгебраический способ и исключение неизвестного Гаусса. Для взаимопроверки будем использовать два метода одновременно.

Для нахождения обратной матрицы алгебраическим способом необходимо найти определитель матрицы, транспонировать исходную матрицу, на основе которой вычислить миноры и получить союзную матрицу. Вышеописанная формула имеет следующий вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * \bar{A}, \text{ где}$$

- $|A|$ – определитель матрицы;
- $\bar{A}$ – матрица, союзная А;
- A^{-1} – матрица, обратная А.

Определитель матрицы размерности 2x2 вычисляется так:

$|A|=a_{11}*a_{22}-a_{12}*a_{21}$. Например: $D(8)= \begin{bmatrix} 1{,}5625 & 0{,}70625 \\ 0{,}70625 & 0{,}325625 \end{bmatrix}$. Тогда:

$|D(8)|$ = 1,5625 * 0,325625 - 0,70625 * 0,70625 =
= 0,5087890625 – 0,4987890625 = 0,01.

Минор матрицы размерности 2x2 находится из её транспонированного представления по схеме:

Минор $d(8)_{11}$= $\begin{matrix} 1{,}5625 & 0{,}70625 \\ 0{,}70625 & 0{,}325625 \end{matrix}$ = $d^T(8)_{22}$ = 0,325625;

Минор $d(8)_{12}$= $\begin{matrix} 1{,}5625 & 0{,}70625 \\ 0{,}70625 & 0{,}325625 \end{matrix}$ = $d^T(8)_{21}$ = 0,70625;

Минор $d(8)_{21}$= $\begin{matrix} 1{,}5625 & 0{,}70625 \\ 0{,}70625 & 0{,}325625 \end{matrix}$ = $d^T(8)_{12}$ = 0,70625;

Минор $d(8)_{22}$= $\begin{matrix} 1{,}5625 & 0{,}70625 \\ 0{,}70625 & 0{,}325625 \end{matrix}$ = $d^T(8)_{11}$ = 1,5625.

Элементы союзной матрицы $\bar{A}$ размерности 2x2 вычисляются следующим образом:

$\bar{a}_{11}$= (-1)^(1+1) * минор $\bar{a}_{11}$;
$\bar{a}_{12}$ = (-1)^(1+2) * минор $\bar{a}_{12}$;
$\bar{a}_{21}$ = (-1)^(2+1) * минор $\bar{a}_{21}$;
$\bar{a}_{22}$ = (-1)^(2+2) * минор $\bar{a}_{22}$;

Например, союзная матрица *Đ(8)* вычисляется таким образом:

$\text{đ}_{11}=1*0{,}325625=0{,}325625;$
$\text{đ}_{12}=-1*0{,}70625=-0{,}70625;$
$\text{đ}_{21}=-1*0{,}70625=-0{,}70625;$
$\text{đ}_{22}=1*1{,}5625=1{,}5625.$

$$\text{Đ}(8) = \begin{bmatrix} 0{,}325625 & -0{,}70625 \\ -0{,}70625 & 1{,}5625 \end{bmatrix}.$$

Теперь приступим к вычислению элементов самой обратной матрицы $D(8)^{-1}$:

$d(8)^{-1}_{11} = 1 / 0{,}011102 * 0{,}325625 = 32{,}5625;$
$d(8)^{-1}_{12} = 1 / 0{,}011102 * (-0{,}70625) = -70{,}625;$
$d(8)^{-1}_{21} = 1 / 0{,}011102 * (-0{,}70625) = -70{,}625;$
$d(8)^{-1}_{22} = 1 / 0{,}011102 * 1{,}5625 = 156{,}25;$

$$D(8)^{-1} = \begin{bmatrix} 32{,}5625 & -70{,}625 \\ -70{,}625 & 156{,}25 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным способом вычисляются матрица для каждого временного промежутка $k=0,..,N-n$. Далее рассмотрим метод исключения неизвестного Гаусса. Как и для предыдущего способа вычисления необходимо выполнить проверку матрицы на вырожденность. Если определитель равен нулю, то обратной матрицы не существует, так как она является вырожденной, иначе можно приступать к вычислениям, которые будем производить опять же на примере значений матрицы *D(8)*.

К исходной матрице необходимо приписать справа единичную так, как показано на рисунке 3.

A=	1.5625	0.70625	<-Искомая матрица	
	0.70625	0.325625		
AE=	1.5625	0.70625	1	0
	0.70625	0.325625	0	1

Рисунок 3. Исходный вид матрицы для применения метода исключения неизвестного Гаусса.

Затем, с помощью элементарных преобразований необходимо получить нули и единицы в левой части. Для этого разделим строку 1 на значение $A_{11}=1,5625$. Получим матрицу вида:

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0,452 \\ 0,70625 & 0,325625 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0,64 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right]$$

Далее сложим значения первой строки, умноженной на противоположное значение элемента матрицы A_{21}*: (-0,70625)* со значениями второй строки:

$a_{21} = 1 * (-0,70625) + 0,70625 = 0;$
$a_{22} = 0,452 * (-0,70625) + 0,325625 = 0,0064;$
$a_{23} = 0,64 * (-0,70625) + 0 = -0,452;$
$a_{24} = 0 * (-0,70625) + 1 = 1.$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0,452 \\ 0 & 0,0064 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0,64 & 0 \\ -0,452 & 1 \end{matrix}\right]$$

Затем разделим вторую строку на значение элемента $A_{22} = 0,0064$:

$a_{21} = 0 / 0,0064 = 0;$
$a_{22} = 0,0064 / 0,0064 = 1;$
$a_{23} = -0,452 / 0,0064 = -70,625;$
$a_{24} = 1 / 0,0064 = 156,25.$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0,452 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0,64 & 0 \\ -70,625 & 156,25 \end{matrix}\right]$$

Далее сложим значения второй строки, умноженной на противоположное значение элемента матрицы A_{12}: (-0,452) со значениями первой строки:

$a_{11} = 0 * (-0,452) + 1 = 1;$
$a_{12} = 1 * (-0,452) + 0,452= 0;$
$a_{13} = -70,625 * (-0,452) + 0,64 = 32,5625;$
$a_{14} = 156,25 * (-0,452) + 0 = -70,625.$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 32,5625 & -70,625 \\ -70,625 & 156,25 \end{matrix}\right]$$

На основе вышеперечисленного, обратная матрица $D(8)^{-1}$ имеет следующий вид:

$$D(8)^{-1} = \begin{bmatrix} 32,5625 & -70,625 \\ -70,625 & 156,25 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, два разных метода демонстрируют одинаковые результаты. Для повышения точности результатов рекомендуется использовать эти методы одновременно.

Следующим крайне важным этапом является нахождение псведообратной матрицы. В рамках данной статьи будет рассмотрено два способа её нахождения: посредством собственных чисел и векторов матрицы, другой способ – методом скелетного разложения.

Рассмотрим метод скелетного разложения, который начинается с определения линейно независимых строк матрицы, так как только они могут участвовать в дальнейших преобразованиях. Для этого необходимо привести матрицу к верхнему треугольному виду посредством элементарных преобразований над матрицами. Если в ходе вычислений все значения какой-либо строки будут нулями, то такая строка исключается из процесса дальнейших вычислений. Рассмотрим вышеизложенный алгоритм на примере матриц $D(8)$ и $D(9)$.

Если обозначить исходную матрицу переменной А, то матрица, содержащая только линейно независимые строки будет обозначаться переменной С. Для определения такой матрицы из $D(9)= \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,25 \end{bmatrix}$ выполним следующее: элемент $d_{11} = 1$, поэтому делить первую строку на этот элемент нет необходимости. По вышеописанному методу исключения неизвестного Гаусса прибавим первую строку, умноженную на обратное значение элемента $d_{21} = 0,5$ ко второй строке:

$$\left.\begin{array}{c} d_{21} = 1 * (-0,5) + 0,5 = 0; \\ d_{22} = 0,5 * (-0,5) + 0,25 = 0. \end{array}\right| \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, вторая строка линейно зависима, поэтому матрица С является вектором [1 0,5]. Формула вычисления псевдообратной матрицы выглядит следующим образом:

$$A^{+} = C^{+} * B^{+},\ где\ C^{+} = C^{T} * (C * C^{T})^{-1};\ B^{+} = (B^{T} * B)^{-1} * B^{T}.$$

Произведение $(C * C^T)^{-1} = ([1 \quad 0{,}5] * \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix})^{-1} =$
$= (1 + 0{,}25)^{-1} = (1{,}25)^{-1} = 0{,}8.$

$C^+ = C^T * (C * C^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} * 0{,}8 = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}.$

Далее вычислим матрицу B по формуле:

$$B = A * C^+.$$

$$\text{Тогда } B = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Произведение $(B^T * B)^{-1} = ([1 \quad 0{,}5] * \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix})^{-1} =$
$= (1 + 0{,}25)^{-1} = (1{,}25)^{-1} = 0{,}8.$

$B^+ = (B^T * B)^{-1} * B^T = 0{,}8 * [1 \quad 0{,}5] = [0{,}8 \quad 0{,}4].$

Теперь вычислим матрицу $D(9)^+$:

$D(9)^+ = C^+ * B^+ = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} * [0{,}8 \quad 0{,}4] = \begin{bmatrix} 0{,}64 & 0{,}32 \\ 0{,}32 & 0{,}16 \end{bmatrix}.$

Затем приступим к аналогичным действиям с матрицей $D(8) = \begin{bmatrix} 1{,}5625 & 0{,}70625 \\ 0{,}70625 & 0{,}325625 \end{bmatrix}$. Определим количество линейно независимых строк, для чего разделим первую строку на значение элемента $d_{11} = 1{,}5625$. Получим матрицу $\begin{bmatrix} 1 & 0{,}452 \\ 0{,}70625 & 0{,}325625 \end{bmatrix}$. Теперь умножим первую строку на обратное значение элемента $d_{21} = 0{,}70625$ и прибавим её ко второй строке. Получим: $\begin{bmatrix} 1 & 0{,}452 \\ 0 & 0{,}0064 \end{bmatrix}$. Как видно, не все значения второй строки превратились в нули, поэтому все строки $D(8)$ являются линейно независимыми. Это значит, что матрица C имеет следующий вид:

$$C = \begin{bmatrix} 1{,}5625 & 0{,}70625 \\ 0{,}70625 & 0{,}325625 \end{bmatrix}.$$

Теперь найдём произведение $C * C^T$:

$C * C^T = \begin{bmatrix} 1{,}5625 & 0{,}70625 \\ 0{,}70625 & 0{,}325625 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1{,}5625 & 0{,}70625 \\ 0{,}70625 & 0{,}325625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}9401953125 & 1{,}33348828125 \\ 1{,}33348828125 & 0{,}604820703125 \end{bmatrix}$.

Далее по вышеописанным методам найдём из полученной матрицы обратную, которая выглядит следующим образом:

$(C * C^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 6048{,}20703122381 & -13334{,}8828124422 \\ -13334{,}8828124422 & 29401{,}9531248727 \end{bmatrix}$.

После этого вычислим $C^+ = C^T * (C * C^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 32{,}5625 & -70{,}625 \\ -70{,}625 & 156{,}25 \end{bmatrix}$.

Далее вычислим матрицу B по формуле:

$$B = A * C^+ = \begin{bmatrix} 1{,}5625 & 0{,}70625 \\ 0{,}70625 & 0{,}325625 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 32{,}5625 & -70{,}625 \\ -70{,}625 & 156{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Так как матрица B является единичной, то её псевдообратная форма имеет аналогичное значение, иными словами, в данном случае $B = B^+$.

Теперь найдём значение $D(8)^+$:

$$D(8)^+ = C^+ * B^+ = \begin{bmatrix} 32{,}5625 & -70{,}625 \\ -70{,}625 & 156{,}25 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32{,}5625 & -70{,}625 \\ -70{,}625 & 156{,}25 \end{bmatrix}.$$

Как можно убедиться, действительно, если A_{nxn} и количество линейно независимых строки или ранг матрицы равны n, то $D(k)^+ = D(k)^{-1}$, как, например, $D(8)^+ = D(8)^{-1}$.

Далее к рассмотрению предлагается метод определения псевдообратной матрицы посредством вычисления её собственных значений и векторов по следующей формуле:

$D(k)^+ = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} * v_i * v_i^T$, где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0$ – собственные числа $D(k)$, а $v_1, v_2, \ldots, v_r$ – собственные векторы.

Рассмотрим на примере *D(9)* вычисление её псевдообратного представления. Для начала необходимо разобраться со смысловой нагрузкой понятия собственного вектора и числа матрицы. Собственным вектором матрицы является такой вектор, который при умножении на эту матрицу не теряет своего исходного значения согласно виду:

$$A*\bar{u} = \lambda*\bar{u}, \text{ где}$$

- λ – собственное значение матрицы;
- $\bar{u}$ – собственный вектор матрицы.

Приведём пример: $A = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Тогда $A*\bar{u} = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 * \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

В нашем случае $D(9) = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,25 \end{bmatrix}$.

Тогда $A*\bar{u} = \lambda*\bar{u}$ => $\begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,25 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ => => $\begin{bmatrix} x & 0,5y \\ 0,5x & 0,25y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$.

Теперь из полученной матрицы составим систему уравнений и выполним преобразования:

$$\begin{cases} x + 0,5y = \lambda x \\ 0,5x + 0,25y = \lambda y \end{cases} => \begin{cases} x + 0,5y - \lambda x = 0 \\ 0,5x + 0,25y - \lambda y = 0 \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} (1-\lambda)x + 0,5y = 0 \\ 0,5x + (0,25 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Итоговая система уравнений позволяет нам составить матрицу и вычислить значение λ при нулевом значении определителя этой матрицы, решив уравнение:

$$\begin{bmatrix} (1-\lambda) & 0,5 \\ 0,5 & (0,25 - \lambda) \end{bmatrix}.$$

После умножения значений диагоналей имеем уравнение:

$$(1-\lambda) * (0,25-\lambda) - 0,25 = 0.$$

Проведя преобразования, получим квадратное уравнение вида $ax^2+вx+c=0$:

$$\lambda^2\text{-}1{,}25\,\lambda = 0.$$

Для решения уравнения найдем дискриминант:

$D = b^2 - 4*a*c = 1{,}5625 - 4*1*0 = 1{,}5625.$

Теперь вычислим собственные значения:

$\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{1.25-1.25}{2} = 0;$

$\lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{1.25+1.25}{2} = 1{,}25.$

Так как по условию формулы нахождения псевдообратной матрицы нас интересуют только собственные значения, которые больше нуля, то в данном случае нас интересует только одно собственное значение: *1,25*.

Далее найдём собственные векторы, для этого подставим полученное значение в сформулированную ранее систему уравнений:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + 0{,}5y = 0 \\ 0{,}5x + (0{,}25 - \lambda)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-1{,}25)x + 0{,}5y = 0 \\ 0{,}5x + (0{,}25 - 1{,}25)y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -0{,}25x + 0{,}5y = 0 \\ 0{,}5x - y = 0 \end{cases}.$$

Решив систему уравнений, получим значение $x = 2*y$.

Это означает, что мы получили бесконечно много собственных векторов $\bar{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, которые будут коллинеарными друг для друга. Как правило, значение x берут минимально целое, поэтому при значении $x=1$, $y=0{,}5$. Итоговый вид собственного вектора выглядит следующим образом:

$$v = \sqrt{\lambda^{-1}} * \bar{u} = \sqrt{0{,}8} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Подставим полученные значения в итоговую формулу:

$$D(9)^+ = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} * v_i * v_i^T = 0{,}8 * \sqrt{0{,}8} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} * \sqrt{0{,}8} *$$
$$* \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}64 & 0{,}32 \\ 0{,}32 & 0{,}16 \end{bmatrix}.$$

Значения обоих методов имеют одинаковый результат, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим пример вычисления псевдообратной матрицы $D(8)^+$.

Исходная матрица $D(8) = \begin{bmatrix} 1{,}5625 & 0{,}70625 \\ 0{,}70625 & 0{,}325625 \end{bmatrix}$.

После преобразований системы уравнений из данной матрицы получим матрицу вида: $\begin{bmatrix} 1{,}5625-\lambda & 0{,}70625 \\ 0{,}70625 & 0{,}325625-\lambda \end{bmatrix}$. Далее сформируем вида $ax^2+вx+c=0$ и решим его:

$$\lambda^2 - 1{,}888125 * \lambda + 0{,}01 = 0.$$
$$D = (-1{,}888125)^2 + 4 * 1 * 0{,}01 = 3{,}525016015625;$$
$$\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = 0{,}0053112;$$
$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = 1{,}8828138.$$

Далее найдём собственные векторы, для этого подставим значение λ_2 в сформулированную ранее систему уравнений:

$$\begin{cases} 1{,}55718880034863 + 0{,}70625y = 0 \\ 0{,}70625x + 0{,}320313800348633y = 0 \end{cases};$$
$$x = -0{,}453541664210454*y.$$

Если взять значение x=1, то y= -2,20486909783877.

Тогда $v_2 = \sqrt{0{,}00531119965136662} * \begin{bmatrix} 1 \\ -2{,}20486909783877 \end{bmatrix}$.

Далее найдём вектор от λ_1:

$$\begin{cases} -0{,}320313800348633 + 0{,}70625y = 0 \\ 0{,}70625x - 1{,}55718880034863y = 0 \end{cases};$$
$$x = 2{,}20486909783877000*y.$$

Если взять значение x=1, то y= 0,453541664210454.

Тогда $v_1 = \sqrt{1{,}88281380034863} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}453541664210454 \end{bmatrix}$.

Далее вычислим произведение для первой итерации:

$$\lambda_1^{-1} * v_1 * v_1^T = 0{,}531119965136666 * 0{,}728779778216071*$$
$$* \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}453541664210454 \end{bmatrix} * 0{,}728779778216071 *$$

$$* \begin{bmatrix} 1 & 0{,}453541664210454 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}282088417366773 & 0{,}12793885026702 \\ 0{,}12793885026702 & 0{,}0580255990672762 \end{bmatrix}.$$

Далее вычислим произведение для второй итерации:

$$\lambda_2^{-1} * v_2 * v_2^T = 188{,}281380034865 * 13{,}72115662384024 * \\ * \begin{bmatrix} 1 \\ -2{,}20486909783877 \end{bmatrix} * 0{,}728779778216071 * \\ * \begin{bmatrix} 1 & -2{,}20486909783877 \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} 35449{,}8780678332 & -78162{,}340673918 \\ -78162{,}340673918 & 172337{,}729566668 \end{bmatrix}.$$

Далее вычислим $D(8)^+$:

$$D(8)^+ = \begin{bmatrix} 0{,}282088417366773 & 0{,}12793885026702 \\ 0{,}12793885026702 & 0{,}0580255990672762 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 35449{,}8780678332 & -78162{,}340673918 \\ -78162{,}340673918 & 172337{,}729566668 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 35450{,}1601562506 & -78162{,}2127350677 \\ -78162{,}2127350677 & 172337{,}7875922670 \end{bmatrix}.$$

Как можно убедиться, полученные результаты не совпадают с предыдущими. Это связано с тем, что в ходе вычислений мы получаем бесконечно много собственных векторов матрицы, коллинеарных друг другу. Не всегда, если брать для дальнейших вычислений значение по $x=1$, можно прийти к требуемому результату. На основе вышеописанного формулируются выводы о том, что определение псевдообратной матрицы через её собственные числа и вектора не подходит для решения задачи построения оптимального управления.

Таким образом, после выполнения вышеописанных алгоритмов формируется обратная и псевдообратная матрица для каждой итерации $k=0,..,N\text{-}n$, как показано на рисунке 4. Следует отметить, что некоторые значения, отображённые на рисунке являются округлёнными, однако итоговые результаты содержат в себе полное значение каждой промежуточной переменной для повышения точности построения оптимального управления.

(D0)+	
0.273366	0.062211
0.062211	0.963830

(D0)-1	
0.273366	0.062211
0.062211	0.963830

(D1)+	
0.302030	-0.033990
-0.033990	1.286700

(D1)-1	
0.302	-0.034
-0.034	1.287

(D2)+	
0.352545	-0.195191
-0.195191	1.801109

(D2)-1	
0.353	-0.195
-0.195	1.801

(D3)+	
0.447783	-0.482285
-0.482285	2.666557

(D3)-1	
0.448	-0.482
-0.482	2.667

(D4)+	
0.643665	-1.036824
-1.036824	4.236438

(D4)-1	
0.644	-1.037
-1.037	4.236

(D5)+	
1.096182	-2.234217
-2.234217	7.404827

(D5)-1	
1.096	-2.234
-2.234	7.405

(D6)+	
2.328830	-5.273530
-5.273530	14.89880

(D6)-1	
2.329	-5.274
-5.274	14.899

(D7)+	
6.687108	-15.27672
-15.27672	37.85828

(D7)-1	
6.687	-15.277
-15.277	37.858

(D8)+	
32.562500	-70.62500
-70.62500	156.2500

(D8)-1	
32.5625	-70.625
-70.625	156.25

(D9)+	
0.64	0.32
0.32	0.16

Рисунок 4. Значения обратной и псевдообратной матрицы для каждой итерации $k=0,..,N-n$.

Для дальнейшей работы необходимо определить вектор $c(k)$. Последовательность действий заключатся в том, чтобы из вектора целевого состояния x_1, вычесть произведение вектора текущего состояния на матрицу A в степени разности порядкового номера текущего момента и общего количества временных промежутков по следующей формуле:

$$c(k) = x_1 - A^{N-k} * x(k).$$

Вычисления $c(k)$ представлены на рисунке 5.

x1	–	A^10		•	x(0)	=	c(0)
1000		2.193469	-2.94642		5000		7711.193
2000		-1.96428	2.68454		6000		-4285.828
x1	–	A^9		•	x(1)	=	c(1)
1000		1.879888	-2.50785		5762.022		5794.479
2000		-1.6719	2.297863		6231.011		-2684.489
x1	–	A^8		•	x(2)	=	c(2)
1000		1.615502	-2.12968		5917.108		4362.436
2000		-1.41979	1.970449		6067.352		-1554.366
x1	–	A^7		•	x(3)	=	c(3)
1000		1.394705	-1.80134		5705.283		3275.513
2000		-1.20089	1.694928		5680.608		-776.791
x1	–	A^6		•	x(4)	=	c(4)
1000		1.213461	-1.51295		5279.097		2430.760
2000		-1.00863	1.465619		5179.784		-266.927
x1	–	A^5		•	x(5)	=	c(5)
1000		1.069433	-1.25486		4731.442		1752.645
2000		-0.83657	1.278576		4632.070		35.747
x1	–	A^4		•	x(6)	=	c(6)
1000		0.96225	-1.01704		4113.614		1187.778
2000		-0.67803	1.131756		4076.647		175.363
x1	–	A^3		•	x(7)	=	c(7)
1000		0.894	-0.78825		3446.484		704.286
2000		-0.5255	1.025375		3533.704		187.755
x1	–	A^2		•	x(8)	=	c(8)
1000		0.87	-0.555		2726.542		298.531
2000		-0.37	0.9625		3010.131		111.569
x1	–	A^1		•	x(9)	=	c(9)
1000		0.9	-0.3		1927.813		15.808
2000		-0.2	0.95		2502.799		7.904

Рисунок 5. Вычисления вектора *c(k)*.

Дальнейшие действия заключаются в проверке произведения значений обратной или псевдообратной матрицы *D(k)* на вектор *c(k)*, которое изображено на рисунке 6. Как было отмечено выше на каждом моменте времени, равном $k=0,..,N\text{-}n$, это произведение должно иметь одинаковый результат.

Этот фактор является одним из ключевых для проверки корректности результатов промежуточных вычислений, которые будут влиять на адекватность прогнозирования посредством оптимального управления прибывающих пополнений личного состава для каждой противоборствующей стороны.

c(0)	$D^{+}(0) * c(0)$
7711.193	1841.352
-4285.828	-3651.088
c(1)	$D^{+}(1) * c(1)$
5794.479	1841.352
-2684.489	-3651.088
c(2)	$D^{+}(2) * c(2)$
4362.436	1841.352
-1554.366	-3651.088
c(3)	$D^{+}(3) * c(3)$
3275.513	1841.352
-776.791	-3651.088
c(4)	$D^{+}(4) * c(4)$
2430.760	1841.352
-266.927	-3651.088
c(5)	$D^{+}(5) * c(5)$
1752.645	1841.352
35.747	-3651.088
c(6)	$D^{+}(6) * c(6)$
1187.778	1841.352
175.363	-3651.088
c(7)	$D^{+}(7) * c(7)$
704.286	1841.352
187.755	-3651.088
c(8)	$D^{+}(8) * c(8)$
298.531	1841.352
111.569	-3651.088
c(9)	$D^{+}(9) * c(9)$
15.808	12.646
7.904	6.323

Рисунок 6. Вычисления произведения значений обратной или псевдообратной матрицы *D(k)* на вектор *c(k).*

Убедившись в корректности найденных компонентов, можно перейти к вычислению непосредственно самого оптимального управления и численности для каждого момента времени по следующей формуле:

$$x_1(k+1) = (-a_1 + 1) * x_1(k) - B_2 x_2(k) + C_1 * u(k)$$
$$x_2(k+1) = -B_1 x_1(k) + (-a_2 + 1) * x_2(k) + C_2 * u(k)$$

Все коэффициенты вводятся как исходные данные согласно таблице, представленной на рисунке 7.

Переменн	Значение	Описание
a1	0.1	Коэффициент небоевых потерь союзной БС
a2	0.05	Коэффициент небоевых потерь БС противника
B1	0.2	Коэффициент эффективности союзной БС
B2	0.3	Коэффициент эффективности БС противника
C1	1	Коэффициент пополнений союзной БС
C2	0.5	Коэффициент пополнений БС противника
x[0]1	5000	Начальная численность союзной БС
x[0]2	6000	Начальная численность БС противника
x[1]1	1000	Конечная численность союзной БС
x[1]2	2000	Конечная численность БС противника

Рисунок 7. Исходные данные для ввода.

На основе введённых данных были получены результаты, которые представлены на рисунке 8.

Итоговые результаты					
Момент времени k	Оптимальное управление $u^0(k,x)$	Численности каждой из армий		Численность пополнений	
		$x_1^0(k)$	$x_2^0(k)$	$y_1(k)$	$y_2(k)$
0	3062	5000	6000	3062	1531
1	2601	5762	6231	2600	1300
2	2200	5917	6067	2200	1100
3	1849	5705	5680	1848	924
4	1534	5279	5179	1534	767
5	1245	4731	4632	1244	622
6	967	4113	4076	967	483
7	685	3446	3533	684	342
8	377	2726	3010	376	188
9	16	1927	2502	15	7
10	-	1000	2000	-	-

Рисунок 8. Итоговые результаты.

Исходя из результатов можно убедиться в том, что оптимальное управление справляется с поставленной задачей, а именно переводит текущее состояние противоборствующих сторон в целевое через определённые промежутки времени. На рисунке 9 представлен график, демонстрирующий динамику численности каждой армии. Следует отметить точность, с которой оптимальное управление работает, демонстрируя отсутствие помех, которые являют собой разницу между заданным целевым состоянием и фактическим.

Рисунок 9. Динамика численности БС.

Как можно заметить, сам график имеет плавную линию, без резких скачков и искажений, что является ещё одним подтверждением правильно спрогнозированного количества вновь прибывающих подкреплений для каждой стороны.

На рисунке 10 изображен график изменения значений самого оптимального управления.

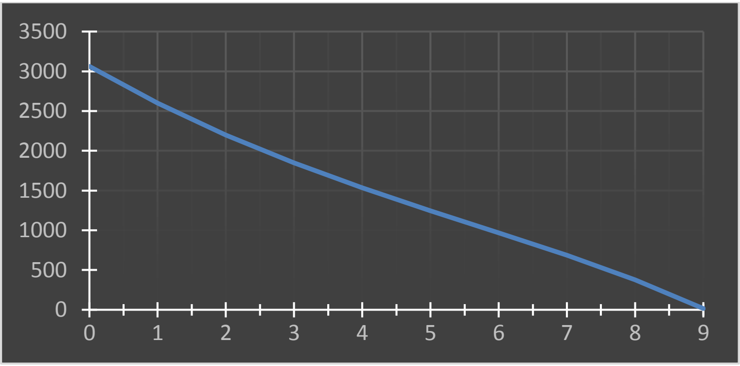

Рисунок 10. Динамика значений оптимального управления.

На рисунке 11 изображена динамика численности поступающих пополнений для каждой противоборствующей стороны.

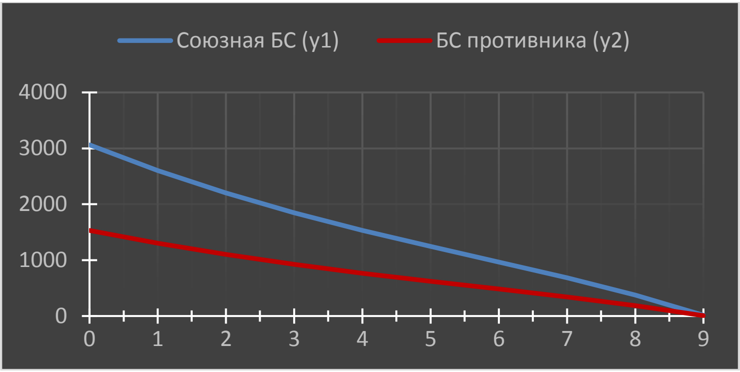

Рисунок 11. Динамика численности пополнений каждой противоборствующей стороны.

Особое внимание необходимо уделить плавности графикам в начале и в конце заданных временных промежутков. Анализ тенденции численности пополнений армии синих при интервалах значений от t=5 до t=9 имеет схожую разницу в значениях прибывающих подкреплений, которая приблизительно составляет 300 бойцов, постепенно стремясь к нулю.

Для проверки достоверности полученных результатов оптимального управления смоделируем аналогичную ситуацию и спрогнозируем исход противостояния, когда обе армии не получают пополнений. Исходные данные представлены на рисунке 12.

Перемен	Значение	Описание
a1	0.1	Коэффициент небоевых потерь союзной БС
a2	0.05	Коэффициент небоевых потерь БС противника
B1	0.2	Коэффициент эффективности союзной БС
B2	0.3	Коэффициент эффективности БС противника
x(0)1	5000	Начальная численность союзной БС
x(0)2	6000	Начальная численность БС противника

Рисунок 12. Исходные данные для проверки достоверности.

На рисунке 13 изображена динамика численности пополнений для случая, когда подкрепления для каждой противоборствующей стороны не поступают.

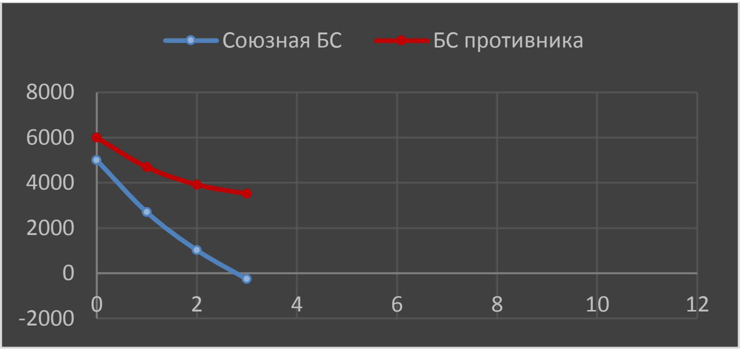

Рисунок 13. Динамика численности пополнений каждой противоборствующей стороны.

Проанализировав график, можно сделать выводы о том, что армия синих проиграла сражение при моменте времени, равном 3. Это свидетельствует о том, что крайне важно получать подкрепления для каждой противоборствующей стороны, используя при этом минимально необходимое количество личного состава для достижения цели, поставленной командованием через заданный период. Адекватная оценка необходимого количества пополнений имеет крайне важное стратегическое значение, так как, грамотно просчитав заранее необходимое количественное значение личного состава, в процессе противоборства можно компенсировать ослабленную боевую эффективность численным превосходством. Ведь вопрос прибытия новобранцев в том числе зависит от проблем логистики и на доставку личного состава в пункт дислокации требуется драгоценное время, которое зачастую играет решающую роль на исход конкретного противоборства.

Таким образом, рассмотренная выше методика расчёта оптимального количества необходимых пополнений личного состава справляется с поставленной задачей и предоставляет в зависимости от текущего и целевого состояния системы адекватные результаты. На основе их анализа руководящий состав третьей стороны может планировать требуемое количество ресурсов для выгодного исхода противостояния двух противоборствующих сторон.

Литература

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. // Физматлит. 2001. С. 175-179.

2. Сазанова Л.А. Дискретный вариант модели Ланчестера // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики. Материалы 7-й научно-практической internet-конференции. – 2016. – С. 38-39.

3. Глушков И.Н. Выбор математической схемы при построении модели боевых действий // Программные продукты и системы. 2010. №1. С. 1-9.

4. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. 400 с.

5. Мир математики [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.mathworld.ru/.