# Матричные разложения и их применения в машинном обучении

Гарницкий Марк

# Сингулярные числа и векторы

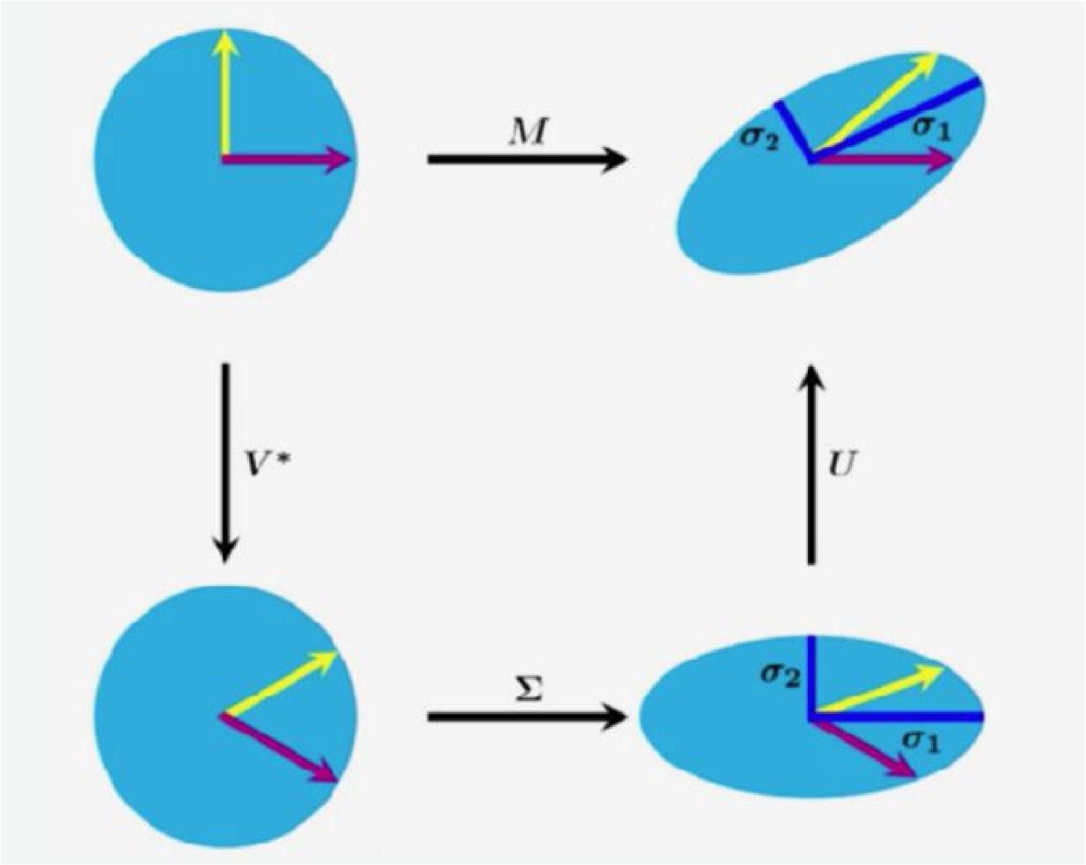
Неотрицательное вещественное число $\sigma$ называется **сингулярным числом** матрицы $M$ тогда и только тогда, когда существуют два вектора единичной длины $u \in K^m$ и $v \in K^n$ такие, что:

$$Mv = \sigma u, \text{ и } M^* u = \sigma v.$$

Такие векторы $u$ и $v$ называются, соответственно, **левым сингулярным вектором** и **правым сингулярным вектором**, соответствующим сингулярному числу $\sigma$.

# Сингулярное разложение

$$M = U\Sigma V^*$$

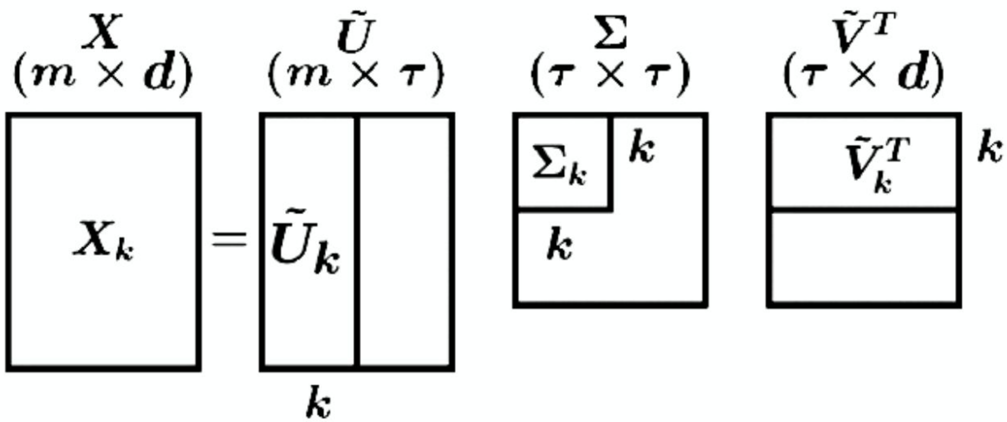


# Приближение матрицы с помощью SVD

$$\underset{l \times d}{X} \approx \underset{l \times k}{U} \cdot \underset{k \times d}{V^T}$$

$$\|X - U \cdot V^T\| \to \min$$

$$X = \tilde{U} \Sigma \tilde{V}^T$$



Преимущество SVD:

- лучшее низкоранговое приближение с точки зрения средне-квадратичного отклонения

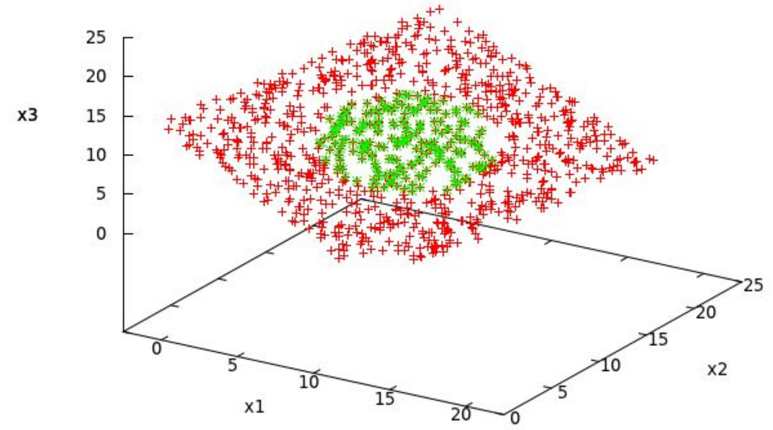
Недостаток:

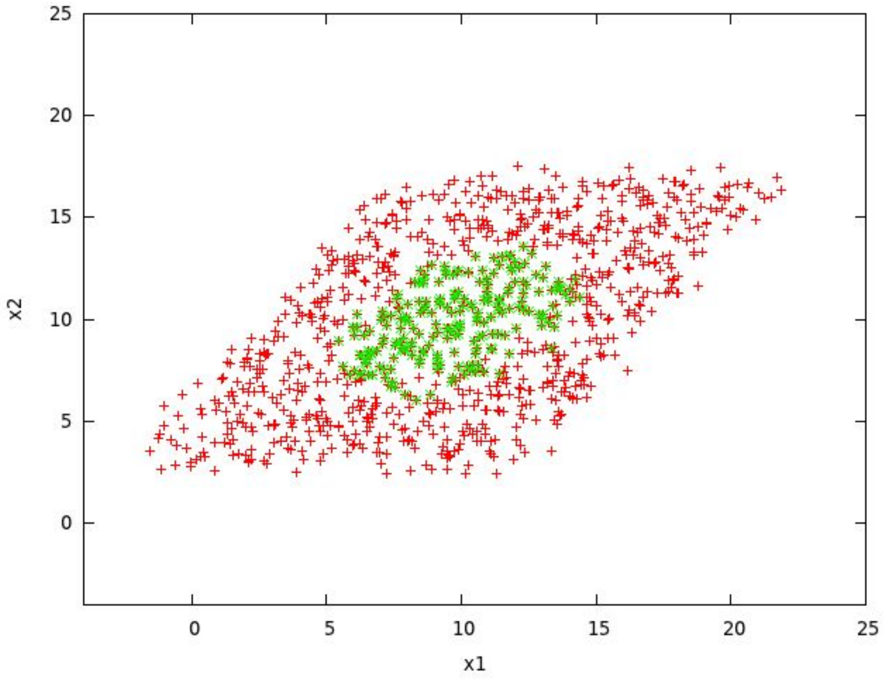
- сложность вычислений

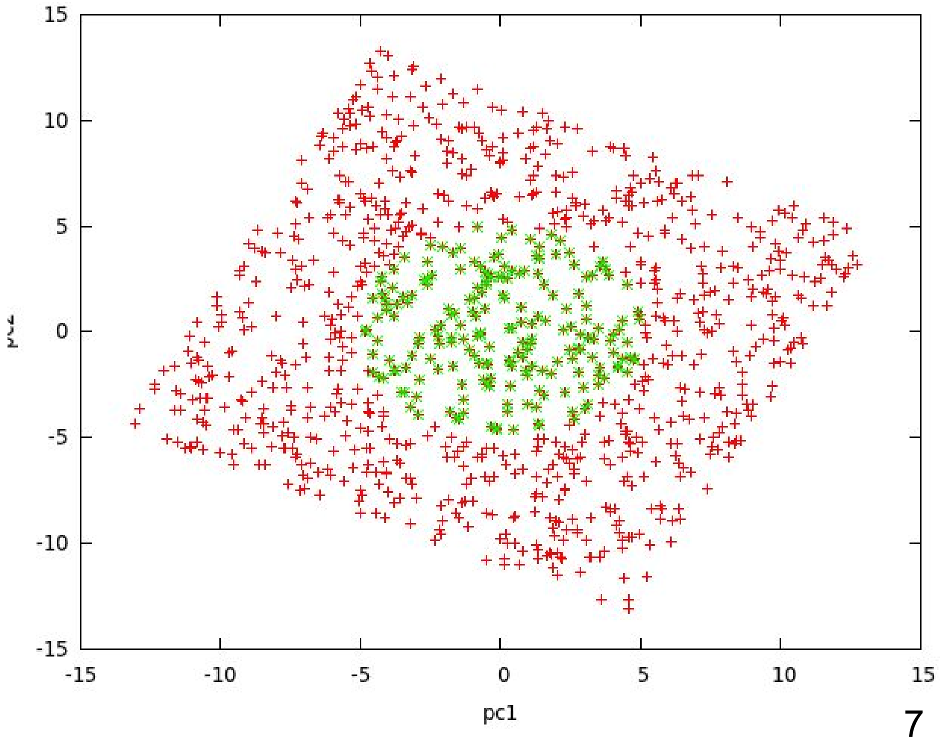
Примеры использования SVD в машинном обучении:

- удаление шумов с изображения
- рекомендательные системы

# Алгоритм уменьшения размерности PCA

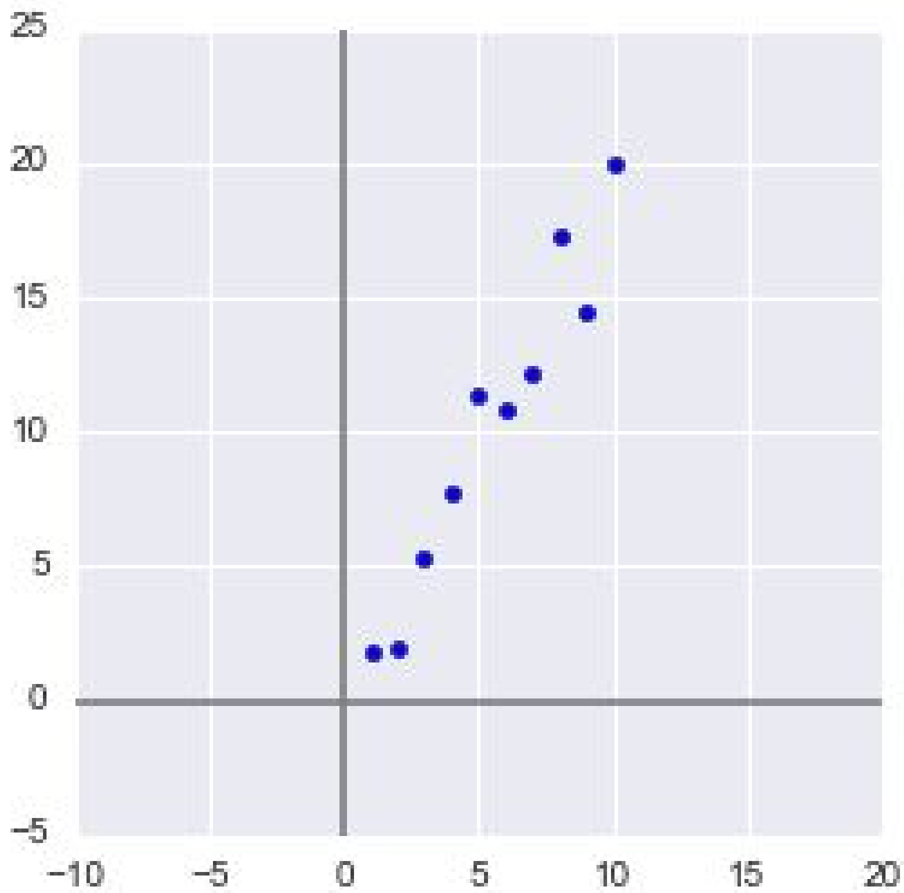


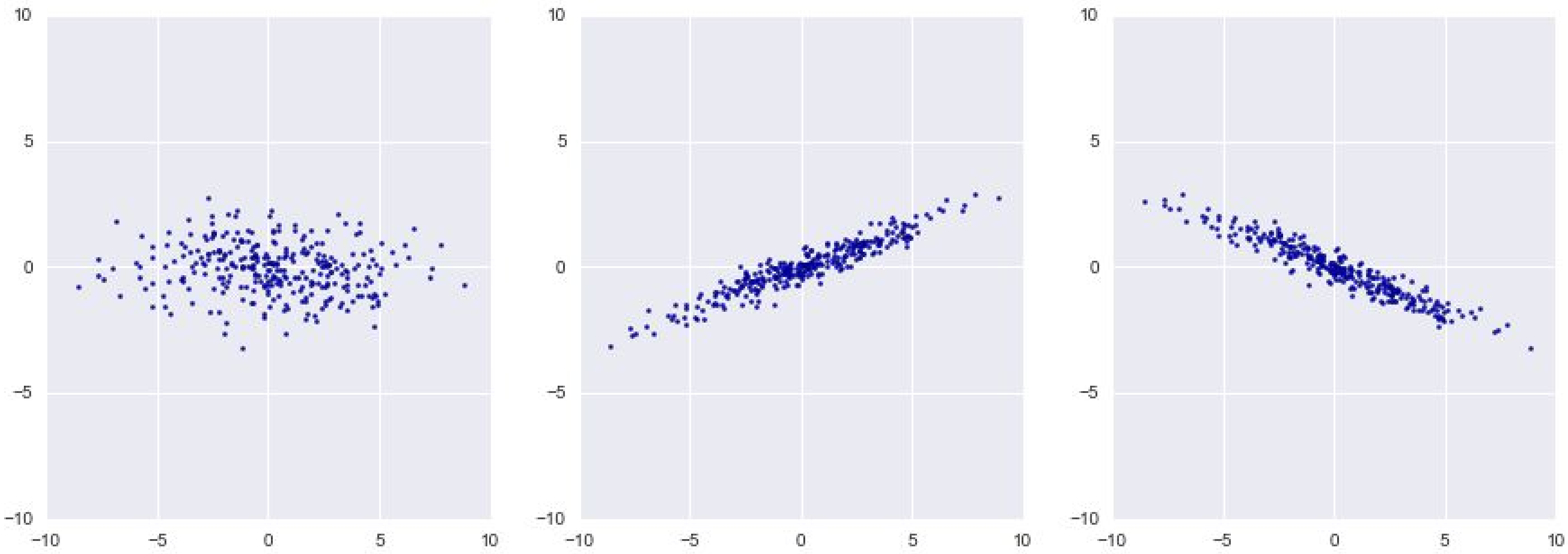



# Рассмотрим простую выборку с размерностью 2

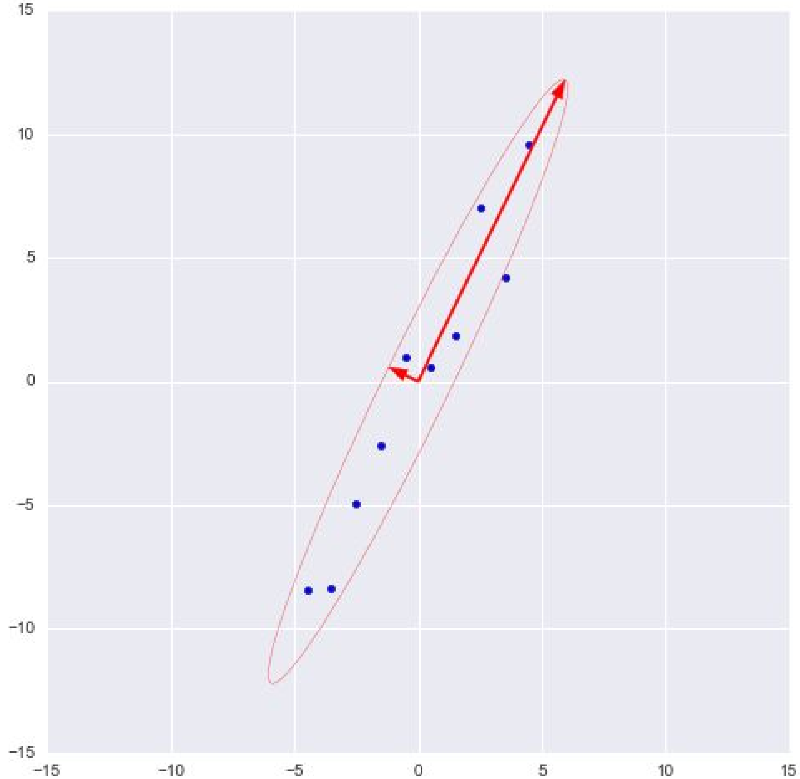
y = 2x + np.random.randn(10)*2



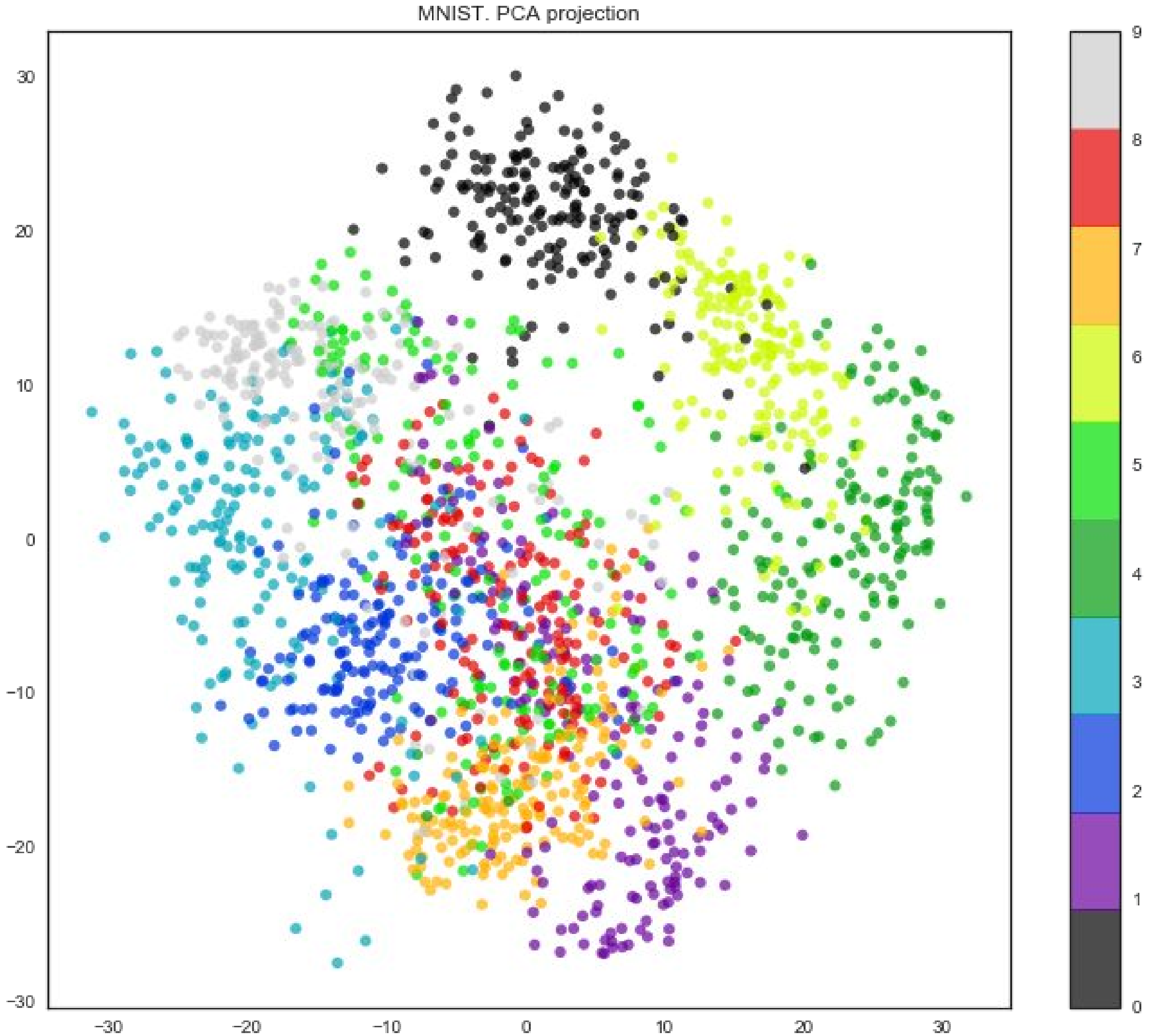
# Для описания формы случайного вектора необходима ковариационная матрица



# Направление максимальной дисперсии у проекции всегда совпадает с собственным вектором, имеющим максимальное собственное значение, равное величине этой дисперсии



# Пример работы PCA: MNIST



# Сколько компонент оставить?