

Лабораторная работа № 9 по курсу дискретного анализа: алгоритмы на графах

Выполнил студент группы М8О-208Б-18 МАИ *Коростелев Дмитрий Васильевич*.

Задание

Вариант №8

Разработать программу на языке C или C++, реализующую указанный алгоритм согласно заданию:

Задан неориентированный двудольный граф, состоящий из n вершин и m ребер. Вершины пронумерованы целыми числами от 1 до n . Необходимо найти максимальное паросочетание в графе алгоритмом Куна. Для обеспечения однозначности ответа списки смежности графа следует предварительно отсортировать. Граф не содержит петель и кратных ребер.

Формат входных данных

В первой строке заданы $1 \leq n \leq 110000$ и $1 \leq m \leq 40000$. В следующих m строках записаны ребра. Каждая строка содержит пару чисел – номера вершин, соединенных ребром.

Формат результата

В первой строке следует вывести число ребер в найденном паросочетании. В следующих строках нужно вывести сами ребра, по одному в строке. Каждое ребро представляется парой чисел – номерами соответствующих вершин. Строки должны быть отсортированы по минимальному номеру вершины на ребре. Пары чисел в одной строке также должны быть отсортированы.

Метод решения

Требуется реализовать алгоритм Куна для нахождения максимального паросочетания в двудольном графе, при чем разбиение на доли в графе не задано.

Для начала требуется найти разбиение графа на доли для однозначности ответа, даже несмотря на то, что в теории алгоритм Куна может работать на графах с незадаанным разбиением. Сам двудольный граф хранится посредством массива списков. Разбиение графа будем находить следующим образом – запустим поиск в ширину и будем смотреть получающиеся пути в ходе обхода этого графа, по пути будем окрашивать вершины в разные цвета, то есть если зашли в вершину на нечетном шаге – она относится к левой доле, если на четном – к правой. Таким образом за линейную сложность от количества

вершин получим разбиение графа.

Далее применим алгоритм Куна, который основан на теореме Бержа - паросочетание является максимальным тогда и только тогда, когда не существует увеличивающих относительно него цепей.

Увеличивающаяся цепь - чередующуюся цепь, у которой начальная и конечная вершины не принадлежат паросочетанию.

Чередующаяся цепь - цепь, в которой рёбра поочередно принадлежат не принадлежат паросочетанию

Цепь – простой путь в графе, который не содержит повторяющихся вершин или ребер

Алгоритм Куна – применение теоремы Бержа. Изначально зададим пустое паросочетание. Далее пытаемся найти увеличивающуюся цепь в графе, если таковая имеется выполняем чередование паросочетания вдоль этой цепи. Повторяем процесс, пока не найдем максимальную цепь.

Искать увеличивающуюся цепь будем с помощью обхода в глубину следующим образом – если все вершины из текущей уже были посещены, то найдена максимальная цепь, иначе переходим в следующую вершину и формируем увеличивающуюся цепь.

Этот обход запускаем от всех вершин левой доли, так как в графе могут быть несвязанные пути и от другой вершины может быть найдена большая цепь. Итоговая сложность: $O(n * m)$ n - кол-во вершин в первой доле, m - всего вершин.

По итогу получаем массив в котором заданы итоговые паросочетания

Отладка и проверка программы.

№	Название ошибки	Причина возникновения ошибки
1-4	Неправильный ответ	Ошибка в выводе ответа
5-7	Ошибка выполнения	Зацикливание алгоритма
8-15	Неправильный ответ	Ошибки в алгоритме деления на доли

Вывод

Реализовали алгоритм Куна и алгоритм деления двудольного графа на доли по заданным ребрам. Хочется отметить, что каждая задача на графах требует специального подхода к ее решению и представления данных. Например, для сильно нагруженных графов удобно будет использовать для хранения матрицу смежности, в тоже время для слабо нагруженных – список ребер и т.п. Также применение различных алгоритмов следует грамотно ранжировать между каждой задачей.