Московский Авиационный Институт

Кафедра 806

Отчет по курсовой работе по курсу

«Численные методы»

Студент: М8О-308Б-18 Коростелев Д.В.

Преподаватель:

Условие:

```
308/10  Решить начально-краевую задачу для ДифУрЧаП параболического типа.
     Использовать схему: явную.
     В диф.уравнении аппроксимировать y'x  вторым порядком точности


        y'  = 5.7* y''    -  3.3* y' -  1.80* y  + (x + 1 )/(t +   1 )  ;
         t           xx            x

        -5 <= x <=  -1 ; hx= 0.80000; ht=  0.02500; T_end=  0.10000

         -  2.00* Y (t, -5 ) =        26.00000000 + t / (  2 )

         -    Y (t, -1 ) =        13.00000000 + t*t/( -2 ) +    1.000 *t  ;

       y(0,x)=  -3 +  10 * sin(     1.57079633 * x )
```

Теория:

14. Решение уравнения теплопроводности. Метод сеток

Рассмотрим решение дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с начально-краевыми условиями:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\alpha_1\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\alpha_2\frac{\partial y}{\partial x}+\alpha_3 y+f(t,x),\quad a\le x\le b,\quad 0\le\ t\le T,\ \alpha_1>0 \qquad (14.1)$$

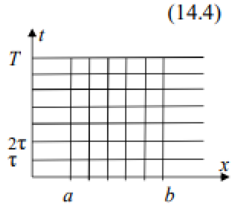
для $x=a$ $\quad \varphi_1\frac{\partial y}{\partial x}+\varphi_2 y=f_1(t)$, $\qquad$ (14.2)

для $x=b$ $\quad \varphi_4\frac{\partial y}{\partial x}+\varphi_5 y=f_2(t)$, $\qquad$ (14.3)

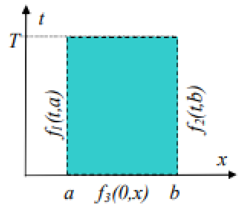
для $t=0$ $\quad y(0,x) \quad =f_3(x)$. $\qquad$ (14.4)

(14.4)

Накроем область сеткой с шагом по x равным h и с шагом по t равным τ. Тогда $x_0=a$, $x_1=a+h$, …, $x_N=b$, $N=(b-a)/N$, $t_0=0$, $t_1=\tau$, $t_2=2\cdot\tau$, $t_M=T=M\cdot\tau$, $\quad M=T/\tau$.



Геометрически область представляет собой «стакан», с трёх сторон которого заданы начальные условия (14.4), слева и справа заданы краевые условия (14.2) и (14.3), а на верхней кромке (при $t=T$) значения функции $y(t,x)$ не известны. Их вычисление и является целью рассматриваемых алгоритмов. Коэффициенты α_i уравнения и φ_i в краевых условиях представляют собой константы (могут быть и равны 0).



Тогда $y(t_k, x_i)=y_i^k$. Назовём её сеточной функцией. Рассмотрим несколько способов решения этой задачи.

14.1. Явная схема

Для замены производных конечно-разностными соотношениями воспользуемся формулами главы 9.

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{y_i^{k+1}-y_i^k}{\tau}+O(\tau^1),\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{y_{i+1}^k-2y_i^k+y_{i-1}^k}{h^2}+O(h^2),\ \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{y_{i+1}^k-y_{i-1}^k}{2h}+O(h^2) \quad (14.5)$$

Подставим формулы (14.5) в (14.1) и выразим y_i^{k+1} на новом $k+1$ слое:

$$y_i^{k+1}=\left(\frac{\alpha_1\tau}{h^2}-\frac{\alpha_2\tau}{2h}\right)y_i^{k-1}+\left(\tau\alpha_3+1-\frac{2\alpha_1\tau}{h^2}\right)y_i^k+\left(\frac{\alpha_1\tau}{h^2}+\frac{\alpha_2\tau}{2h}\right)y_{i+1}^k+$$

$$+\tau\cdot f(x_i;t_k)+O(\tau+h^2). \qquad (14.6)$$

Весь нулевой слой (при t=0) вычисляем, используя (14.4) : $y_i^0 = f_3(x_i)$, i=0,1,2,…N. Затем по формуле (14.6) вычисляем y_i^1 для внутренних точек i=1,2,3,…,N-1. Для вычисления y_0^1 и y_N^1 в граничных точках x=a и x=b воспользуемся формулами главы 9 первого порядка точности:

$$y`(a) = \frac{y(a+h) - y(a)}{h} + O(h); \quad y`(b) = \frac{y(b) - y(b-h)}{h} + O(h).$$

Получим $$y_0^1 = \frac{hf_1(t_1) - \varphi_1 y_1^1}{h\varphi_2 - \varphi_1} + O(h); \quad y_N^1 = \frac{hf_2(t_1) + \varphi_4 y_{N-1}^1}{h\varphi_5 + \varphi_4} + O(h) \qquad (14.7)$$

Или второго порядка точности:

$$y`(a) = \frac{-3y(a) + 4y(a+h) - y(a+2h)}{2h} + O(h^2) = \frac{1}{2h}\left(-3y_0^1 + 4y_1^1 - y_2^1\right)$$

$$y`(b) = \frac{y(b-2h) - 4y(b-h) + 3y(b)}{2h} + O(h^2) = \frac{1}{2h}\left(y_{N-2}^1 - 4y_{N-1}^1 + 3y_N^1\right) \qquad (14.8)$$

Использование формул (14.7) существенно ухудшит точность, поэтому использовать их не будем.

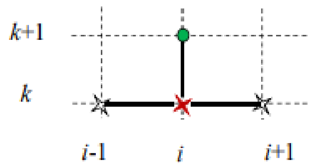
Подставляя (14.8) в (14.2) и (14.3), получим y_0^1 и y_N^1 :

$$y_0^1 = \frac{2hf_1(t_1) - 4\varphi_1 y_1^1 + \varphi_1 y_2^1}{2h\varphi_2 - 3\varphi_1} + O(h^2), \qquad (14.9)$$

$$y_N^1 = \frac{2hf_2(t_1) + 4\varphi_4 y_{N-1}^1 - \varphi_4 y_{N-2}^1}{2h\varphi_5 + 3\varphi_4} + O(h^2) \qquad (14.10)$$

В результате весь первый слой (для t=1) будет вычислен. Аналогично при полностью известном первом слое вычисляем второй (при t_2=2τ) слой y_i^2, i=1,…N-1 : сначала по (14.6) во внутренних точках, затем по (14.9) и (14.10) – в крайних. И так вплоть до t_M=T.

Приведём графическое изображение явной конечно-разностной схемы:



Программируется явная схема двумя вложенными циклами: по t и по x. Используются два массива размерности N+1 каждый – для хранения значений функции y на старом слое k и вычисляемых на новом k+1 слое.

Преимущество алгоритма в простоте. Недостаток его в плохой (*условной*) сходимости. Чтобы получить достоверный результат на последнем слое t=T , τ (шаг по t) должен быть очень мал ($\tau < h^2/(2\alpha_l)$). Поэтому для получения результатов вычисления с хорошей точностью, надо уменьшать не только шаг по x, но и многократно шаг по t. Это может существенно увеличить время расчёта.

Решение:

Main.java

```
package coursework;

public class Main {
    public static void main(String[] args){
        Evaluation task = new Evaluation() {
            @Override
            double a() { return -5.0;}
            @Override
            double b() { return -1; }
            @Override
            double T() { return 0.1; }
            @Override
            double alf1() {return 5.7;}
            @Override
            double alf2() {return -3.3;}
```

```
            @Override
            double alf3() {return -1.8;}
            @Override
            double hx() {return 0.8;}
            @Override
            double ht() {return 0.025;}
            @Override
            double f1(double t) {return 26.0 + (t/2.0);}
            @Override
            double f2(double t) {return 13.0 + t*t/(-2.0) + t;}
            @Override
            double f3(double x) {return -3.0 + 10.0*Math.sin(1.57079633 *
x);}
            @Override
            double phi1() {return 0;}
            @Override
            double phi2() {return -2.0; }
            @Override
            double phi4() { return 0;}
            @Override
            double phi5() { return -1.0;}
            @Override
            double f(double t, double x) {return (x+1.0)/(t + 1.0);}
        };
        task.eval();
    }
}
```

Evaluation.java

```
package coursework;

import java.util.Arrays;

abstract public class Evaluation {
    abstract double a();
    abstract double b();
    abstract double T();
    abstract double alf1();
    abstract double alf2();
    abstract double alf3();
    abstract double hx();
    abstract double ht();
    abstract double f1(double t);
    abstract double f2(double t);
    abstract double f3(double x);
    abstract double phi1();
    abstract double phi2();
    abstract double phi4();
    abstract double phi5();
    abstract double f(double t, double x);
    private double k1 = ( (alf1() * ht()/(hx()*hx())) - (alf2() *
ht()/(2.0*hx())));
    private double k2 = (ht()*alf3() + 1.0 - (2.0*alf1()*ht()/(hx()*hx())));
    private double k3 = ((alf1()*ht()/(hx()*hx())) +
(alf2()*ht()/(2.0*hx())));
    void eval(){
        printSettings();
        System.out.println();
        int N = (int)((b()-a())/hx());
        double[] newY = new double[N+1];
        double[] oldY = new double[N+1];
```

```
        System.out.println("X:");
        //вычисляем нулевой слой
        for(int i = 0;i<=N ;++i){
            double x = a() + i*hx();
            oldY[i] = f3(x);
            printX(i,x);
        }
        System.out.println();
        System.out.println("Y:");
        printY(0, oldY);
        int k = 1;

        //вычисляем остальные слои
        for(double tk = 0; tk <T(); tk+=ht()) {
            //вычисляем k-ый слой
            for(int i = 1;i<N;++i){
                double xi = a() + i*hx();
                newY[i] = k1 * oldY[i-1] + k2 * oldY[i] + k3 * oldY[i+1] +
ht() * f(tk,xi);
            }
            //вычисляем первое и последнее значение слоя
            double t = tk + ht();
            newY[0] = (2.0*hx()*f1(t) - 4.0*phi1() * newY[1] + phi1() *
newY[2])/
                    (2.0*hx()*phi2() - 3.0*phi1());
            newY[newY.length-1] = (2.0*hx()*f2(t) +
4.0*phi4()*newY[newY.length-2] - phi4() * newY[newY.length-3])/
                    (2.0*hx()*phi5() + 3.0*phi4());
            printY(k, newY);
            ++k;
            oldY = newY.clone();
        }
    }
    void printX(int i, double x){
        System.out.printf("x[%d]: %.9f; ", i,x);
        System.out.println();
    }
    void printY(int i, double[] Y){
        for(int j = 0;j<Y.length;++j){
            System.out.printf("y[%d][%d]: %.9f; ", i,j,Y[j]);
        }
        System.out.println();
    }
    void printSettings(){
        System.out.println("Решение:\n");
        System.out.printf("%.9f <= x <= %.9f\n0 <= t <= %.9f\n", a(),b(),
T());
        System.out.printf("Шаг по x (hx): %.9f, шаг по t (ht): %.9f\n",
hx(), ht());
        System.out.printf("y[k+1][i] = (%.9f) * y[k][i-1] + (%.9f) * y[k][i]
+ (%.9f) * y[k][i+1] + ht * f(x[i], t[k])\n",
                k1,k2,k3);
        System.out.printf("y[k][0] = (%.9f) * f1(t[k]) + (%.9f) * y[k][1] +
(%.9f) * y[k][2]\n",
                2.0*hx() / (2.0*hx()*phi2() - 3.0*phi1()), -
4.0*phi1()/(2.0*hx()*phi2() - 3.0*phi1()),
                phi1() / (2.0*hx()*phi2() - 3.0*phi1()));
        System.out.printf("y[k][N] = (%.9f) * f2(t[k]) + (%.9f) * y[k][N-1]
+ (%.9f) * y[k][N-2]\n",
                2.0*hx() / (2.0*hx()*phi5() + 3.0*phi4()), 4.0*phi4()/
(2.0*hx()*phi5() + 3.0*phi4()),
                - phi4()/ (2.0*hx()*phi5() + 3.0*phi4()));
```

```
    }
}
```

Вывод консоли

```
Решение:

-5,000000000 <= x <= -1,000000000
0 <= t <= 0,100000000
Шаг по x (hx): 0,800000000, шаг по t (ht): 0,025000000
y[k+1][i] = (0,274218750) * y[k][i-1] + (0,509687500) * y[k][i] +
(0,171093750) * y[k][i+1] + ht * f(x[i], t[k])
y[k][0] = (-0,500000000) * f1(t[k]) + (0,000000000) * y[k][1] + (-
0,000000000) * y[k][2]
y[k][N] = (-1,000000000) * f2(t[k]) + (-0,000000000) * y[k][N-1] +
(0,000000000) * y[k][N-2]

X:
x[0]: -5,000000000;
x[1]: -4,200000000;
x[2]: -3,400000000;
x[3]: -2,600000000;
x[4]: -1,800000000;
x[5]: -1,000000000;

Y:
y[0][0]: -13,000000000; y[0][1]: -6,090170072; y[0][2]: 5,090169880;
y[0][3]: 5,090169993; y[0][4]: -6,090169889; y[0][5]: -13,000000000;
y[1][0]: -13,006250000; y[1][1]: -5,878031056; y[1][2]: 1,735253408;
y[1][3]: 2,908226035; y[1][4]: -3,952482163; y[1][5]: -13,024687500;
y[2][0]: -13,012500000; y[2][1]: -6,343674338; y[2][2]: -0,288386644;
y[2][3]: 1,242856093; y[2][4]: -3,464995466; y[2][5]: -13,048750000;
y[3][0]: -13,018750000; y[3][1]: -6,927094627; y[3][2]: -1,731039463;
y[3][3]: -0,076547116; y[3][4]: -3,676857622; y[3][5]: -13,072187500;
y[4][0]: -13,025000000; y[4][1]: -7,471227532; y[4][2]: -2,850739093;
y[4][3]: -1,179995247; y[4][4]: -4,150213255; y[4][5]: -13,095000000;
```

Дано дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial y}{\partial x} + \alpha_3 y + f(t, x), \quad a \le x \le b$$

$0 \le t \le T$, $\alpha_1 > 0$ для $x = a$ $\varphi_1 \frac{\partial y}{\partial x} + \varphi_2 y = f_1(t)$

для $x = b$ $\varphi_4 \frac{\partial y}{\partial x} + \varphi_5 y = f_2(t)$. для $t = 0$ $y(0, x) = f_3(x)$

Используем явную схему, тогда значения $y_i^0 = f_3(x_i)$,

а $$y_i^{k+1} = \left(\frac{\alpha_1 \tau}{h^2} - \frac{\alpha_2 \tau}{2 \cdot h}\right) y_{i-1}^k + \left(\tau \alpha_3 + 1 - \frac{2\alpha_1 \tau}{h^2}\right) y_i^k + \left(\frac{\alpha_1 \tau}{h^2} + \frac{\alpha_2 \tau}{2 \cdot h}\right) y_{i+1}^k + \tau \cdot f(x_i\ t_k).$$

$$y_0^k = \frac{2 \cdot h \cdot f_1(t_k) - 4\varphi_1 \cdot y_1^k + \varphi_1 \cdot y_2^k}{2h \cdot \varphi_2 - 3\varphi_1}$$

$$y_N^k = \frac{2h\, f_2(t_k) + 4\varphi_4 \cdot y_{N-1}^k - \varphi_4 \cdot y_{N-2}^k}{2h\varphi_5 - 3\varphi_4}$$

Получим итоговые формулы:

$y_i^0 = -3 + 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x_i\right)$; $y_0^k = -0{,}5 \cdot \left(26 + \frac{t}{2}\right)$; $y_N^k = -1 \cdot \left(13 + \frac{t^2}{(-2)} + t\right)$

$$y_i^{k+1} = 0.274218750 \cdot y_{i-1}^k + 0{,}50968750 \cdot y_i^k + 0{,}171093750\, y_{i+1}^k + 0.025 \cdot \frac{(x_i + 1)}{(t_k + 1)}$$

$x_i = -5 + i \cdot 0{,}8$ $t_k = k \cdot 0.025$

Ответ:

Таблица X

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-5,00000	-4,20000	-3,40000	-2,60000	-1,80000	-1,00000

Таблица Y_{ij}

i\j	0	1	2	3	4	5
0	-13,000000000	-6,090170072	5,090169880	5,090169993	-6,090169889	-13,000000000
1	-13,006250000	-5,878031056	1,735253408	2,908226035	-3,952482163	-13,024687500
2	-13,012500000	-6,343674338	-0,288386644	1,242856093	-3,464995466	-13,048750000
3	-13,018750000	-6,927094627	-1,731039463	-0,076547116	-3,676857622	-13,072187500
4	-13,025000000	-7,471227532	-2,850739093	-1,179995247	-4,150213255	-13,095000000