Московский Авиационный Институт

(Национальный исследовательский университет)

Лабораторная работа №3

по курсу: «численные методы»

Выполнил: Коростелев Д.В.

Группа: М8О-308Б-18

Номер по списку: 10

г. Москва 2021

Скриншоты заданий

```
7 ( 1 10) построить интерполяционные многочлены по таблице
    x=   3.00   4.00   5.00   6.00
    y=  22.00  25.00  23.00  20.00
    мн. Лагранжа  - для x=   3.00   4.00   5.00 (кроме последнего узла)
    мн. Ньютона   - для x=   4.00   5.00   6.00    (кроме первого узла)
    канонический  - для x=   3.00   4.00   5.00   6.00  (по всем узлам)
    вычислить значение каждого из них в точке  x* =  4.50

8 ( 1 10)  аппроксимировать таблицу методом наименьших квадратов
     многочленами степени 1 и 2 , найти невязки для них
       x=     -1.00     1.00     2.00     4.00
       y=      0.00    -2.00    -5.00   -16.00

9  1/10 интерполяция таблицы кубическими сплайнами (c-spline).
        Вычислить значение сплайна в середине каждого отрезка,
        нарисовать график
     x=       0.0       1.0       2.0       3.0
     y=         4         6         8         6

10 ( 1 10) вычислить интеграл на отрезке от  -2 до   2 от функции
     f(x)= (   5*x +  2 )/( x*x +  1)
     *)по формуле трапеций с шагами h1= 1.00 , h2= 0.50 и h3= 0.25000
       сделать уточнение по формуле Рунге
     *)по формуле Симпсона с шагами h1= 1.00 и  h2= 0.50
       сделать уточнение по формуле Рунге-Ромберга
```

Условие:

```
7 ( 1 10) построить интерполяционные многочлены по таблице
    x=   3.00   4.00   5.00   6.00
    y=  22.00  25.00  23.00  20.00
    мн. Лагранжа   - для x=    3.00    4.00    5.00 (кроме последнего узла)
    мн. Ньютона    - для x=    4.00    5.00    6.00    (кроме первого узла)
    канонический   - для x=    3.00    4.00    5.00    6.00  (по всем узлам)
    вычислить значение каждого из них в точке  x* =  4.50
```

Теория:

Многочлен Лагранжа.

Интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид суммы:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} \qquad (6.1)$$

Многочлен Ньютона.

Пример. По заданной таблице построить интерполяционный многочлен Ньютона и вычислить его значение при x=0,5.

x	0	1	2	3
y	-5	-6	3	28

Вычислим и занесём в таблицу разделённые разности 1,2 и 3 порядков.

$f_1(x_1,x_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-6)-(-5)}{1-0} = -1$. $f_1(x_2,x_3) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{(3)-(-6)}{2-1} = 9$.

$f_1(x_3,x_4) = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{(28)-(3)}{3-2} = 25$. $f_2(x_1,x_2,x_3) = \frac{f_1(x_2,x_3) - f_1(x_1,x_2)}{x_3 - x_1} = \frac{(9)-(-1)}{2-0} = 5$.

$f_2(x_2,x_3,x_4) = \frac{f_1(x_3,x_4) - f_1(x_2,x_3)}{x_4 - x_2} = \frac{(25)-(9)}{3-1} = 8$.

$f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{f_2(x_2,x_3,x_4) - f_2(x_1,x_2,x_3)}{x_4 - x_1} = \frac{(8)-(5)}{3-0} = 1$

Выделим верхнюю часть таблицы.

N	x	y	f_1	f_2	f_3
1	0	**-5**			
			$\frac{(-6)-(-5)}{1-0} = \mathbf{-1}$		
2	1	-6		$\frac{(9)-(-1)}{2-0} = \mathbf{5}$	
			$\frac{(3)-(-6)}{2-1} = 9$		$\frac{(8)-(5)}{3-0} = \mathbf{1}$
3	2	3		$\frac{(25)-(9)}{3-1} = 8$	
			$\frac{(28)-(3)}{3-2} = 25$		
4	3	28			

Общая формула для *n* узлов интерполяции:

$N_{n-1}(x) = f(x_1) + f_1(x_1,x_2)*(x - x_1) + f_2(x_1,x_2,x_3)*(x - x_1)*(x - x_2) +$ (6.2)
$f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)*(x - x_1)*(x - x_2)*(x - x_3) + \ldots + f_{n-1}(x_1,..,x_n)*(x - x_1)*\ldots*(x - x_{n-1})$.

Т.е. $N_3(x) = (\mathbf{-5}) + (\mathbf{-1})\cdot(x-0) + (\mathbf{5})\cdot(x-0)(x-1) + (\mathbf{1})\cdot(x-0)(x-1)(x-2)$.

Теперь можно вычислить $N_3(0,5) = -6,375$.

Преимущество такого способа заключается в возможности уточнения (6.2) при добавлении нового узла всего лишь прибавлением ещё одного слагаемого: $N_4(x) = N_3(x) + \boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}\cdot(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)$.

Канонический многочлен.

Пусть заданы n точек $M_i(x_i; y_i)$ на плоскости $X0Y$. Попытаемся построить многочлен $y=P_{n-1}(x)$ степени $n-1$, который проходил бы точно через все заданные n точек. Так как

$$P_{n-1}(x) = p_1 \cdot x^{n-1} + p_2 \cdot x^{n-2} + p_3 \cdot x^{n-3} + \ldots + p_{n-1} \cdot x + p_n \quad , \tag{6.3}$$

то неизвестными являются коэффициенты $p_1, p_2, \ldots p_n$, которых n штук. Для их нахождения нужно составить n уравнений, для этого в нашем распоряжении координаты n точек $M_i(x_i;y_i)$. Поскольку многочлен $P_{n-1}(x)$ должен проходить через все эти точки, то значение многочлена в каждой точке x_i должно совпадать со значением табличной функции y_i , т.е.

$$P_{n-1}(x_i) = y_i \quad . \tag{6.4}$$

Перепишем уравнение (6.2) для каждой из n точек:

$$\begin{cases} p_1 \cdot x_1^{n-1} + p_2 \cdot x_1^{n-2} + p_3 \cdot x_1^{n-3} + \ldots + p_{n-1} \cdot x_1 + p_n = y_1 \\ p_1 \cdot x_2^{n-1} + p_2 \cdot x_2^{n-2} + p_3 \cdot x_2^{n-3} + \ldots + p_{n-1} \cdot x_2 + p_n = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ p_1 \cdot x_n^{n-1} + p_2 \cdot x_n^{n-2} + p_3 \cdot x_n^{n-3} + \ldots + p_{n-1} \cdot x_n + p_n = y_n \end{cases} \tag{6.5}$$

Получилась ничто иное, как линейная система, состоящая из n уравнений с n неизвестными: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Решается она, например, методом Гаусса, и после вычисления неизвестных $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, можно записать (6.1), подставив туда вместо символов $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ только что вычисленные их числовые значения. Интерполяционный многочлен $P_{n-1}(x)$ составлен. Его можно использовать для вычисления значений функции (и её производных) между узлами интерполяции. По способу его нахождения его называют *каноническим*. Известны и другие методы вычисления интерполяционного многочлена (многочлены Ньютона, Лагранжа, Чебышева…). Построенные по одинаковой таблице разными способами интерполяционные многочлены совпадают.

Решение:

7(1-10) Построить интерполяционной многочлен по таблице для x : 3 4 5 и вычислить значение в точке

y : 22 25 23 $x^* = 4,5$ (многочлен Лагранжа)

Запишем интерполяционной многочлен $L_2(x)$

$$L_2(x) = 22\frac{1\cdot(x-4)(x-5)}{1\cdot(3-4)(3-5)} + 25\cdot\frac{(x-3)(x-5)}{(4-3)(4-5)} + 23\frac{(x-3)(x-4)}{(5-3)(5-4)}$$

$L_2(x^*) = L(4,5) = 24,625$ Ответ: 24,625

Построить многочлен Ньютона по таблице:

X	4	5	6
y	25	23	20

вычислить значение в точке $x^* = 4,5$

Вычислим и занесем в таблицу разности 1 и 2 порядков

$f_1(x,x_2) = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{23-25}{5-4} = -2$ $\quad f_1(x_2 x_3) = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = \frac{20-23}{6-5} = -3$

$$f_2(x,x_2,x_3) = \frac{f_1(x_2 x_3) - f_1(x,x_2)}{x_3-x_1} = \frac{-3-(-2)}{6-4} = -\frac{1}{2}$$

N	x	y	f_1	f_2
1	4	25	-2	$-\frac{1}{2}$
2	5	23	-3	
3	6	20		

$N_2(x) = f(x_1) + f(x,x_2)\cdot(x-x_1) + f_2(x,x_2 x_3)(x-x_1)(x-x_2)$

$N_2(4,5) = 25 + (-2)\cdot(4,5-4) + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(4,5-4)\cdot(4,5-5) = 1.625$

Ответ: ~~Ответ~~

$N_2(x) = 25 + (-2)(x-4) + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-4)(x-5)$ $\quad N_2(4,5) = 1,625$

Канонический многочлен для:

x	3	4	5	6
y	22	25	23	20

и вычислить его значение в точке $x^* = 4,5$

Будем искать функцию $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Запишем ур-я системы:

$$\begin{cases} a(3)^3 + b(3)^2 + c\cdot 3 + d = 22 \\ a(4)^3 + b(4)^2 + c\cdot 4 + d = 25 \\ a(5)^3 + b(5)^2 + c\cdot 5 + d = 23 \\ a(6)^3 + b(6)^2 + c\cdot 6 + d = 20 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 27a + 9b + 3c + d = 22 \\ 64a + 16b + 4c + d = 25 \\ 125a + 25b + 5c + d = 23 \\ 216a + 36b + 6c + d = 20 \end{cases}$$

$a = \frac{2}{3}$ $b = -\frac{21}{2}$ $c = \frac{311}{6}$ $d = -57$, тогда

$P_3(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{21}{2}x^2 + \frac{311}{6}x - 57$

$P_3(4,5) = 24,375$

Ответ:

$$L_2(x) = 22\frac{(x-4)(x-5)}{(3-4)(3-5)} + 25\frac{(x-3)(x-5)}{(4-3)(4-5)} + 23\frac{(x-3)(x-4)}{(5-3)(5-4)}$$

$$L_2(4.5) = 24.625$$

$$N_2(x) = 25 + (-2)(x-4) + (-0.5)(x-4)(x-5)$$

$$N_2(4.5) = 1.625$$

$$P_3(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{21}{2}x^2 + \frac{311}{6}x - 57$$

$$P_3(4.5) = 24.375$$

Аппроксимация методом наименьших квадратов

Условие:

```
8 ( 1 10)  аппроксимировать таблицу методом наименьших квадратов
     многочленами степени 1 и 2 , найти невязки для них
       x=      -1.00    1.00    2.00    4.00
       y=       0.00   -2.00   -5.00  -16.00
```

Теория:

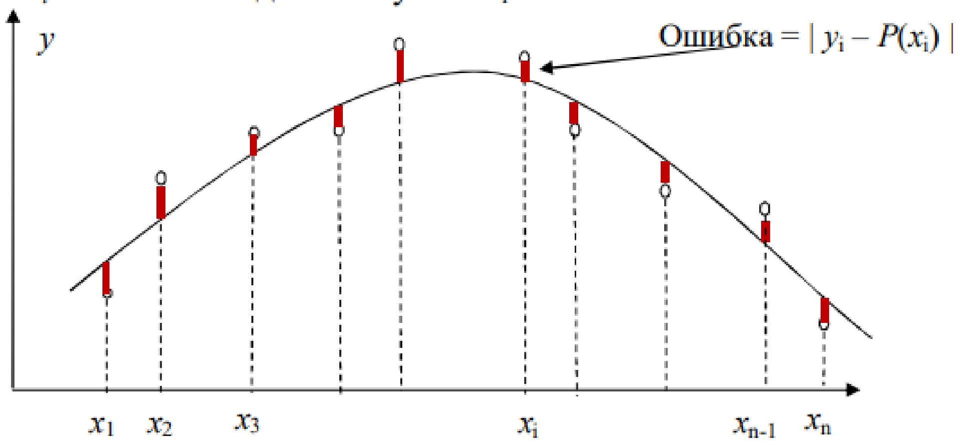
7.1. Квадратичная аппроксимация

Пусть имеется некоторая табличная функция с n узлами:

x_1	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n
y_1	y_2	y_3	…	y_{n-1}	y_n

(7.1-1)

Представляющая собой n точек на плоскости $x0y$. Нарисуем параболу, которая должна хорошо аппроксимировать таблицу. Но парабола $P(x)=a \cdot x^2+b \cdot x+c$ вряд ли пройдёт через все узлы. Т.е. для каждого $x=x_i$ значения табличной функции y_i и значения многочлена $P(x_i)$ будут различаться на величину ошибки $d_i = y_i - P(x_i)$. Чтобы при суммировании отрицательные d_i не сократились с положительными d_i возведём в квадрат все ошибки d_i и сложим их для всех узлов x_i .



Получим выражение

$$\sum_{i=1}^{n}(\, y_i - P(x_i)\,)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\, y_i - a \cdot x_i^2 - b \cdot x_i - c\,)^2 = \psi(a,b,c) \qquad (7.1.2)$$

Для разных парабол (для разных значений a,b,c) значение функционала невязки $\psi(a,b,c)$ будет разным. Попробуем найти такие три числа a,b,c, для которых значение невязки $\psi(a,b,c)$ было бы минимально.

Поскольку ищется минимум функции трёх переменных, все частные производные должны приравняться нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial b} = 0 \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial c} = 0 \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\grave{o}} 2(y_i - a\cdot x_i^2 - bx_i - c)(x_i^2) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{\grave{o}} 2(y_i - a\cdot x_i^2 - bx_i - c)(x_i) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{\grave{o}} 2(y_i - a\cdot x_i^2 - bx_i - c) = 0 \end{cases} \qquad (7.1.3)$$

После преобразования получаем систему из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными a,b,c:

$$\begin{cases} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4)\cdot a + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3)\cdot b + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)\cdot c = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^2 y_i) \\ (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3)\cdot a + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)\cdot b + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)\cdot c = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i y_i) \\ (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)\cdot a + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)\cdot b + n\cdot c = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (7.1.4)$$

Решив эту систему (например, методом Гаусса), найдём числовые значения $\boldsymbol{a,b,c}$, те самые, для которых квадратическая невязка (7.1.2) будет принимать минимальное значение. Полученный таким образом многочлен $P(x)=\boldsymbol{a}\cdot x^2+\boldsymbol{b}\cdot x+\boldsymbol{c}$ является для табличной функции (7.1.1) оптимальным в смысле минимизации невязки (7.1.2) среди всех многочленов второй степени.

7.2. Линейная аппроксимация

Аппроксимировать табличную функцию (7.1.1) линейной функцией $P(x) = b\cdot x+c$ проще. В функции $P(x)$ отсутствует коэффициент при x^2, т.е. a=0, и невязка $\psi(b,c)$ зависит только от b и c :

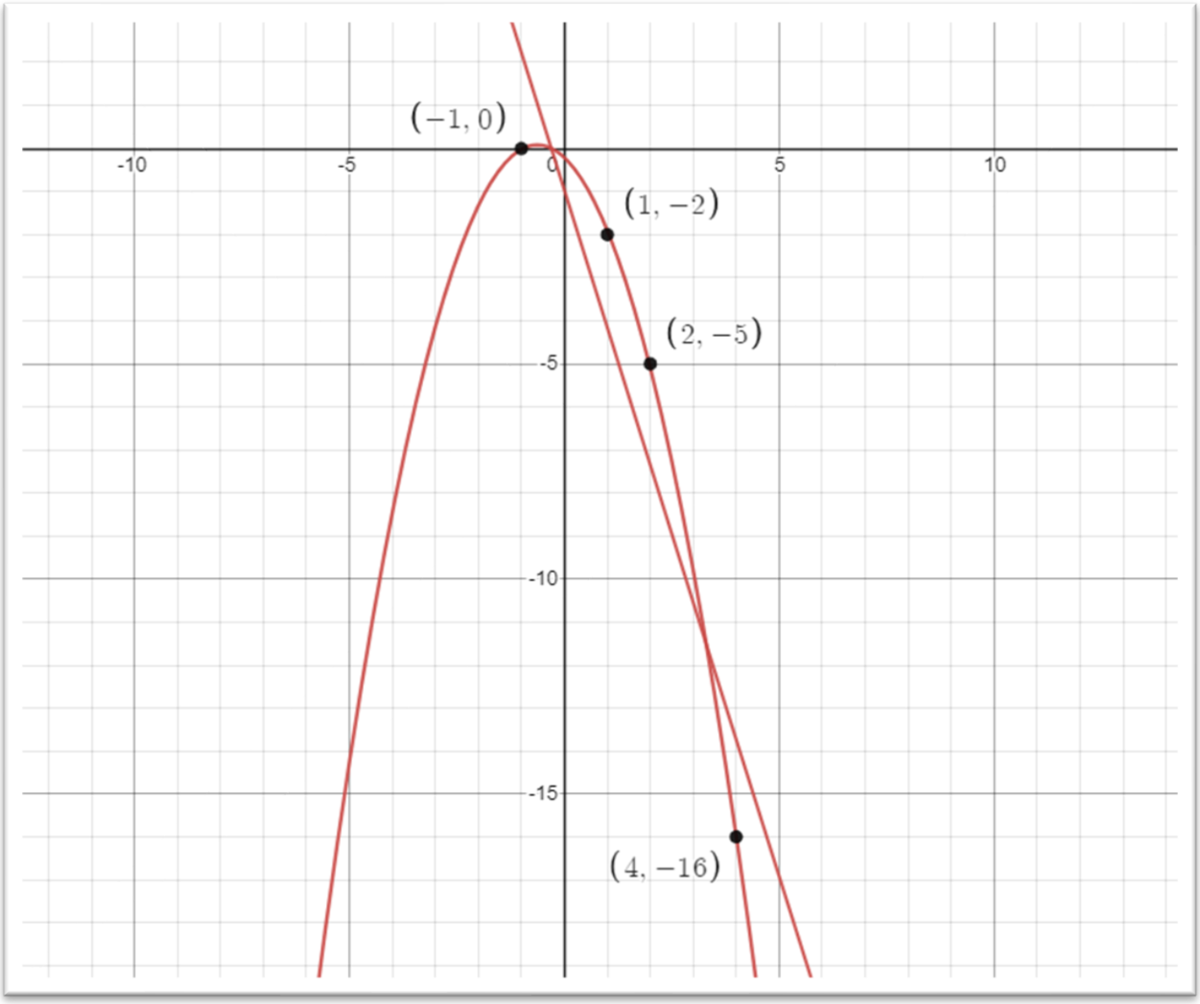
$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - P(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - b\cdot x_i - c)^2 = \psi(b,c)\ . \qquad (7.2.1)$$

В системе (7.1.3) и (7.1.4) будут отсутствовать первый столбец и первая строка , и она примет вид

$$\begin{cases} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)\cdot b + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)\cdot c = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i y_i) \\ (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)\cdot b + n\cdot c = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (7.2.2)$$

Решив эту систему, найдём числовые значения $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$, те самые, для которых квадратическая невязка (7.2.1) будет принимать минимальное значение. Полученный таким образом многочлен $P(x)=\boldsymbol{b}\cdot x+\boldsymbol{c}$ является для табличной функции (7.1.1) оптимальным в смысле минимизации невязки (7.2.2) среди всех линейных многочленов.

Решение и ответ:



8 (1 10) апроксимировать таблицу

x	-1	1	2	4
y	0	-2	-5	-16

многочленами 1и 2ой степени

$n=4$

апроксимируем $P_1(x)=bx+c$

$\sum x_i = -1+1+2+4=6 \quad \sum x_i^2=(-1)^2+(1)^2+2^2+4^2=22$

$\sum y_i = 0-2-5-16=-23 \quad \sum x_i y_i = -1\cdot 0+1\cdot(-2)+2(-5)+4(-16)=-76$

Подставим коэффициенты:

$$\begin{cases} 22b+6c=-76 \\ 6b+4c=-23 \end{cases} \to \quad b=-\frac{83}{26} \quad c=-\frac{25}{26}$$

Итоговый многочлен $P_1(x)=-\frac{83}{26}\cdot x-\frac{25}{26}=$

$=-3.192307692x-0.9615384615$

апроксимируем $P_2(x)=ax^2+bx+c$

$\sum x_i=6 \quad \sum x_i^2=22 \quad \sum x_i^3=(-1)^3+1^3+2^3+4^3=72$

$\sum y_i=-23 \quad \sum(x_i y_i)=-76$

$\sum x_i^4=(-1)^4+1^4+2^4+4^4=274$

$\sum(x_i^2 y_i)=(-1)^2\cdot 0+1^2\cdot(-2)+2^2(-5)+4^2(-16)=-278$

$$\begin{cases} 274a+72b+22c=-278 \\ 72a+22b+6c=-76 \\ 22a+6b+4c=-23 \end{cases} \to \quad a=-\frac{3}{4} \quad b=-\frac{49}{52} \quad c=-\frac{11}{52}$$

$P_2(x)=-\frac{3}{4}x^2+\left(-\frac{49}{52}\right)x-\frac{11}{52}=$

$=-0.75x^2-0.9423076923x-0.2115384615$

Найдем невязки $P_1(x)$ и $P_2(x)$ с начальной таблицей:

для $P_1(x)$: $\Psi_1(b,c) = (P_1(-1)-0)^2 + (P_1(1)+2)^2 + (P_1(2)+5)^2 + (P_1(4)+16)^2 = 20{,}2692307692308$

для $P_2(x)$: $\Psi_2(a,b,c) = (P_2(-1)-0)^2 + (P_2(1)+2)^2 + (P_2(2)+5)^2 + (P_2(4)+16)^2 = 0.019230769$

Ответ:

$P_1(x) = -3.192307692x - 0{,}9615384615$

$P_2(x) = -0{,}75x^2 - 0{,}9423076923x - 0{,}2115384615$

$\Psi_1(P_1) = 20{,}2692307692308$

$\Psi_2(P_2) = 0{,}019230769.$

Интерполяция таблицы кубическими сплайнами

Условие:

```
9  1/10 интерполяция таблицы кубическими сплайнами (c-spline).
        Вычислить значение сплайна в середине каждого отрезка,
        нарисовать график
      x=        0.0       1.0       2.0       3.0
      y=          4         6         8         6
```

Теория:

8. Интерполяция сплайнами

8.1. c-spline

Рассмотрим ситуацию, когда табличная функция задана точно и значений в этой таблице много. В этом случае полезнее всего использовать аппроксимацию сплайнами. Строится непрерывная функция $S(x)$, проходящая (как и интерполяционный многочлен) точно через все узлы, которая не только гладкая сама, но существует и является гладкой первая производная от неё. Её называют кубическим сплайном дефекта 1 (c-spline).

Пусть имеется таблица из n точек (x_i ; y_i):

x_1	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n
y_1	y_2	y_3	…	y_{n-1}	y_n

(8.1)

На каждом отрезке [x_{i-1} ; x_i] будем искать (вычислять его коэффициенты) свой кубический многочлен:

$$S_i(x) = a_i \cdot x^3 + b_i \cdot x^2 + c_i \cdot x + d_i \ , \qquad (8.2)$$

Причём $S_i(x_i) = y_i$, $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$ для i=2,3,4,…,n . (8.3)

Для внутренних узлов (для i=2,3,…,n-1)

$$S``_i(x_i\text{-}0) = S``_{i+1}(x_i+0) \quad , \quad S`_i(x_i\text{-}0) = S`_{i+1}(x_i+0) \ . \qquad (8.4)$$

Для двух граничных узлов (i=1 и i=n)

$$S``_2(x_1) = S``_n(x_n) = 0 \quad . \qquad (8.5)$$

Пусть известны значения вторых производных сплайна во внутренних точках ($S``_i(x_i) = m_i$ ). Т.к. сплайн $S_i(x)$ на отрезке [ $x_{i-1}$ ; $x_i$ ] длиной $h_i = x_i - x_{i-1}$ является кубическим многочленом, то $S``_i(x)$ - линейный многочлен

$$S``_i(x) = m_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + m_{i-1} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}$$

Дважды проинтегрируем его и, учитывая (8.3), получим

$$S_i(x) = m_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + m_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + \left(y_i - m_i \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} + \left(y_{i-1} - m_{i-1} \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x_i - x}{h_i} . \qquad (8.6)$$

Значения вторых производных сплайна во внутренних точках $m_i = S``_i(x_i\text{-}0) = S``_{i+1}(x_i+0)$ найдём, используя условие $S`_i(x_i\text{-}0) = S`_{i+1}(x_i+0)$ для составления и решения СЛАУ с трёхдиагональной матрицей

$$\left\{ \frac{h_i}{6} m_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} m_i + \frac{h_{i+1}}{6} m_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right. , \ m_1 = m_n = 0 \qquad (8.7)$$

$$i = 2, 3, 4, \ldots, n\text{-}1 \ .$$

Обозначив правые части в (8.7) за Y_i :

$$Y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \ ,$$

воспользуемся формулами метода прогонки. Вычислим прогоночные коэффициенты P_i и Q_i :

$P_2=Q_2=0$, для $i=2,3,4,\ldots,n-1$:

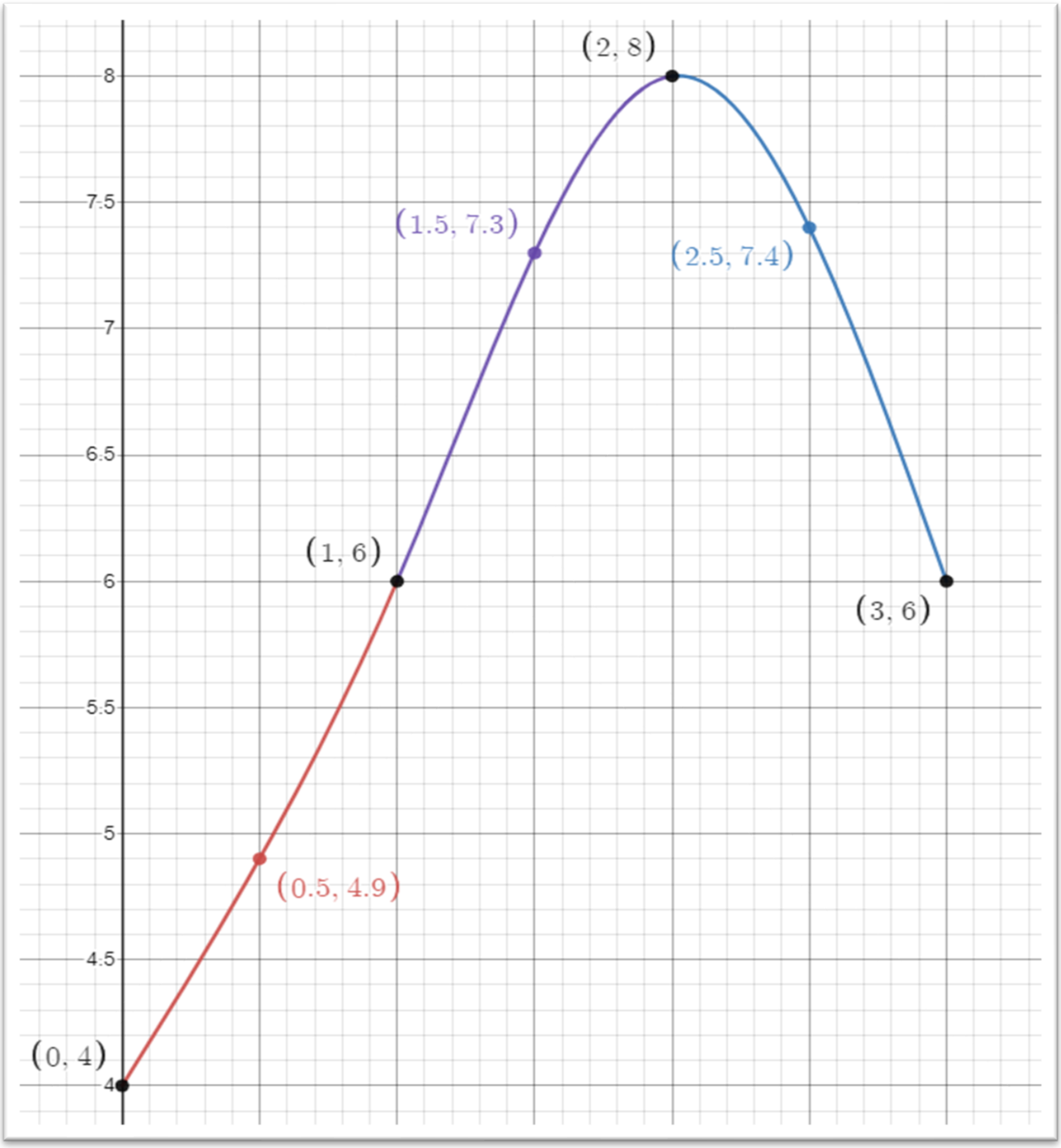
$$P_{i+1}=-\frac{h_{i+1}}{2\cdot(h_i+h_{i+1})+P_i\cdot h_i} \quad ; \quad Q_{i+1}=\frac{6\cdot Y_i-h_i\cdot Q_i}{2\cdot(h_i+h_{i+1})+P_i\cdot h_i} \qquad (8.8)$$

Затем вычисляются все m_i . $m_n=0$. Для $i=n, n-1$, … , 2 :

$$m_{i-1}=P_i\cdot m_i+Q_i \quad . \qquad (8.9)$$

Итак, на каждом отрезке [x_{i-1} ; x_i] табличной функции x-y мы имеем свою кубическую параболу (8.6). Если нужно вычислить $y(x_0)$, то нужно найти тот отрезок [x_{i-1} ; x_i] , который содержит x_0 и вычислить $S_i(x_0)$. Если нужна производная $y`(x_0)$, то вычисляют $S`_i(x_0)$.

Решение



9 1-10

Интерполяция таблицы кубическими сплайнами. Вычислить значение сплайна в середине каждого отрезка, нарисовать график

x	0	1	2	3
y	4	6	8	6
h	–	1	1	1

Вычислим длины отрезков $h_2 = x_2 - x_1 = 1 - 0 = 1$

$h_3 = x_3 - x_2 = 2 - 1 = 1$ $h_4 = x_4 - x_3 = 3 - 2 = 1$

$$\begin{cases} \frac{h_2}{6} m_1 + \frac{h_2 + h_3}{3} m_2 + \frac{h_3}{6} m_3 = \frac{y_3 - y_2}{h_3} - \frac{y_2 - y_1}{h_2} \\ \frac{h_3}{6} m_2 + \frac{h_3 + h_4}{3} m_3 + \frac{h_4}{6} m_4 = \frac{y_4 - y_3}{h_4} - \frac{y_3 - y_2}{h_3} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \frac{1}{6} m_1 + \frac{2}{3} m_2 + \frac{1}{6} m_3 = 2 - 2 \\ \frac{1}{6} m_2 + \frac{2}{3} m_3 + \frac{1}{6} m_4 = -2 - 2 \end{cases} \xrightarrow[m_4 = 0]{m_1 = 0} \begin{cases} \frac{2}{3} m_2 + \frac{1}{6} m_3 = 0 \\ \frac{1}{6} m_2 + \frac{2}{3} m_3 = -4 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} m_2 = \frac{8}{5} = 1.6 \\ m_3 = -\frac{32}{5} = -6.4 \end{cases}$$

$$S_2(x) = 1.6 \cdot \frac{(x-0)^3}{6 \cdot 1} + 0 \cdot \frac{(1-x)^3}{6 \cdot 1} + \left(6 - 1.6 \cdot \frac{1^2}{6}\right) \frac{x - 0}{1} + \left(4 - 0 \cdot \frac{1^2}{6}\right) \cdot \frac{1 - x}{1} = \frac{1.6\, x^3}{6} + \frac{86}{15} x + 4(1 - x) =$$

$$= \frac{1.6}{6} x^3 + \frac{26}{15} x + 4$$

$$S_3(x) = -6.4 \cdot \frac{(x-1)^3}{6} + 1.6 \frac{(2-x)^3}{6} + \left(8 + 6.4 \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{x - 1}{1} + \left(6 - 1.6 \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{2 - x}{1} = -\frac{16}{15}(x-1)^3 + \frac{4}{15}(2-x)^3 + \frac{136}{15}(x-1) + \frac{86}{15}(2-x)$$

$$S_4(x) = 0\cdot\left(\frac{(x-2)^2}{6}\right) + (-6.4)\left(\frac{(3-x)^3}{6}\right) + \left(6 - 0\cdot\frac{1^2}{6}\right)\cdot\frac{x-2}{1} +$$

$$+\left(8 + 6.4\cdot\frac{1}{6}\right)\frac{3-x}{1} = -\frac{16}{15}(3-x)^3 + 6(x-2) + \frac{136}{15}(3-x)$$

Вычислим точки в серединах сегментов

$S_2(0{,}5) = 4.9 \quad S_3(1{,}5) = 7{,}3 \quad S_4(2{,}5) = 7{,}4$

Ответ:

$$S_2(0.5) = 4.9, S_3(1.5) = 7.3, S_4(2.5) = 7.4$$

Дифференцирование и интегрирование

Условие:

```
10 ( 1 10) вычислить интеграл на отрезке от  -2 до   2 от функции
      f(x)= (   5*x +  2 )/( x*x +  1)
      *)по формуле трапеций с шагами h1= 1.00 , h2= 0.50 и h3= 0.25000
        сделать уточнение по формуле Рунге
      *)по формуле Симпсона с шагами h1= 1.00 и  h2= 0.50
        сделать уточнение по формуле Рунге-Ромберга
```

Теория:

9. Численное дифференцирование

Пусть задана табличная функция $\{x_i; y_i\ , i=1,\ldots,n\}$:

$x=$	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$y=$	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Т.е. заданы n точек $M_i(x_i;y_i)$ на плоскости $X0Y$, характеризующие значения некоторой неизвестной функции $f(x)$. Требуется найти $f`(x_0)$, $f``(x_0), \ldots$ для $x_0 \in [x_1;x_n]$. Для этого построим интерполяционный многочлен $y=P(x)$ и от него вычислим первую производную, вторую производную и т.д. в точке $x=x_0$. Вычисление канонического интерполяционного многочлена легко программируется, ещё проще программируется вычисление производной от многочлена с известными коэффициентами. Часто строят многочлен не по всем узлам, а только по тем, что ближе к x_0.

Встречаются ситуации, когда необходимо уметь вычислять производные по нескольким соседним точкам. В этих случаях пригодятся следующие формулы, полученные с помощью разложения в ряд Тейлора или дифференцирования интерполяционного многочлена Лагранжа:

$$y`(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + O(h)\ , \tag{9.1}$$

$$y`(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + O(h), \tag{9.2}$$

$$y`(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + O(h^2)\ , \tag{9.3}$$

$$y`(x) = \frac{-3y(x) + 4y(x+h) - y(x+2h)}{2h} + O(h^2), \tag{9.4}$$

$$y`(x) = \frac{y(x-2h) - 4y(x-h) + 3y(x)}{2h} + O(h^2), \tag{9.5}$$

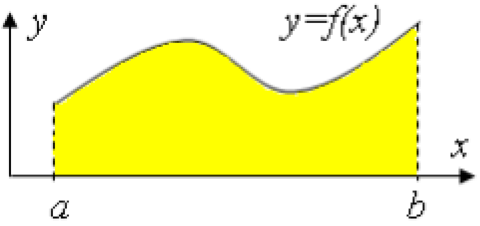
$$y`(x) = \frac{-2y(x-h) - 3y(x) + 6y(x+h) - y(x+2h)}{6h} + O(h^3) \tag{9.6}$$

$$y``(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + O(h^2), \tag{9.7}$$

$$y``(x) = \frac{-y(x-3h) + 4y(x-2h) - 5y(x-h) + 2y(x)}{h^2} + O(h^2), \tag{9.8}$$

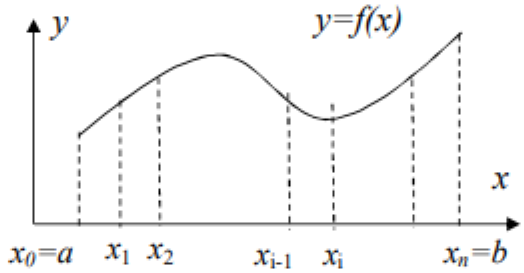
$$y``(x) = \frac{-2y(x) + 5y(x+h) - 4y(x+2h) + y(x+3h)}{h^2} + O(h^2). \tag{9.9}$$

10. Численное интегрирование



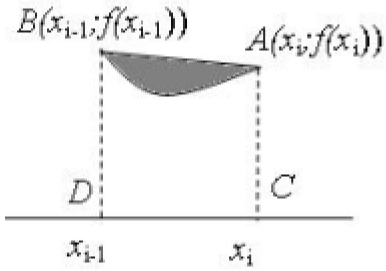
Пусть функция $f(x)$ кусочно непрерывна на отрезке $[a;b]$ и ограничена на нём. Тогда существует интеграл $\int_a^b f(x)dx$, который численно равен площади S криволинейной трапеции (площади фигуры, ограниченной линией $y=f(x)$, осью OX, прямыми $x=a$ и $x=b$).

10.1.Формула трапеций



Разобьём отрезок $[a;b]$ на n одинаковых по длине отрезков. Тогда площадь всей криволинейной трапеции будет равна сумме площадей S_i маленьких криволинейных трапеций.

Рассмотрим отдельно маленькую криволинейную трапецию.



Соединим прямой две точки $B(x_{i-1};f(x_{i-1}))$ и $A(x_i;f(x_i))$, получим прямоугольную трапецию $ABDC$, площадь которой равна T_i . Вычислим T_i как произведение высоты h и полусуммы оснований $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$:

$$h=(x_i - x_{i-1})=\frac{b-a}{n}\ ,\quad T_i=\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\cdot(x_i-x_{i-1})=\frac{h}{2}(f(x_{i-1})+f(x_i))\ .$$

Ошибка замены S_i на T_i составляет площадь заштрихованного сегмента. Чем меньше шаг h (чем больше n), тем меньше эта ошибка.

Просуммируем все T_i . Правое основание $f(x_i)$ в T_i является левым основанием для соседней трапеции T_{i+1} , а левое основание $f(x_{i-1})$ является правым для другой соседней трапеции T_{i-1} . Так почти все $f(x_i)$ будут присутствовать сумме дважды. Исключение составляют $f(a)$ и $f(b)$, они будут входить в сумму единожды:

$$T_n=\frac{h}{2}\left(f(a)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right)+O(h^2)\quad . \qquad (10.1.1)$$

Выражение (10.1-1) называют *формулой трапеций* для вычисления значения определённого интеграла. Слагаемое $O(h^2)$ означает, что порядок точности формулы равен двум, ошибка (отличие T_n от точного значения интеграла) уменьшается с уменьшением шага h разбиения отрезка пропорционально квадрату шага. Есть более точные представления этой ошибки, связанные с максимальным значением модуля второй производной от подынтегральной функции. Для многих функций вычисление их второй производной и поиск её максимума, если и возможен, то проблематичен.

На практике иногда поступают так. Для некоторого n вычисляют T_n, затем вычисляют T_{2n} и сравнивают T_n и T_{2n}. Если они почти одинаковы

$$|T_n - T_{2n}| < \varepsilon \quad , \qquad (10.1.2)$$

то вычисления прекращаются и T_{2n} объявляется значением интеграла, вычисленным с точностью ε ($\varepsilon>0$). А если они ещё сильно отличаются друг от друга, то n удваивается и опять производится сравнение (10.1.2). В конце концов, для какого-то большого n условие (10.1.2) выполнится.

Для оценки погрешности уточнения результатов вычислений также применяют метод Рунге–Ромберга (см. главу 11).

10.2.Формула Симпсона

Рассмотрим не пары соседних узлов, а тройки узлов (по два отрезка). По трём точкам строится парабола. Она интегрируется и суммируются все такие короткие интегралы. Получится *формула Симпсона*:

$$S= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\cdot \sum_{i=1,3,5..}^{n-1} f(x_i) + 2\cdot \sum_{i=2,4,6..}^{n-2} f(x_i) + f(b) \right) + O(h^4). \qquad (10.2.1)$$

Формула имеет четвёртый порядок точности, что гораздо лучше формулы трапеций. В первой сумме (которая учетверяется) присутствуют только значения подынтегральной функции в узлах с нечётными номерами, а во второй сумме – с чётными. При программировании следует учесть, что в первой сумме на одно слагаемое больше.

Так как метод рассматривает пары отрезков (тройки узлов), то n в формуле Симпсона должно быть чётным.

11. Формулы Рунге и Рунге–Ромберга

Рассмотрим ситуацию, когда у Вас есть несколько результатов расчётов по одной и той же формуле, но с разными шагами. И возникла необходимость иметь более точный результат, чем самый точный из имеющихся уже расчётов. Предположим, что новый более точный расчёт не возможен или слишком дорог. Как уточнить результаты имеющихся расчётов?

Пусть z_1 и z_2 - расчёты, сделанные по одной и той же формуле соответственно с шагами h_1 и h_2. Пусть известен p (порядок точности формулы). Обозначим $R=h_2/h_1$. Тогда уточнённое значение найдём по формуле $z_{pp} = z_1 + \frac{z_1 - z_2}{R^p - 1} + O(h^{p+1})$. (11.1)

Это формула Рунге–Ромберга. Порядок точности её $p+1$.

Если уточняемых q расчётов более двух, то составим два детерминанта:

$$D_1 = \begin{vmatrix} z_1 & h_1^p & h_1^{p+1} & \dots & h_1^{p+q-2} \\ z_2 & h_2^p & h_2^{p+1} & \dots & h_2^{p+q-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_q & h_q^p & h_q^{p+1} & \dots & h_q^{p+q-2} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & h_1^p & h_1^{p+1} & \dots & h_1^{p+q-2} \\ 1 & h_2^p & h_2^{p+1} & \dots & h_2^{p+q-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & h_q^p & h_q^{p+1} & \dots & h_q^{p+q-2} \end{vmatrix} \quad (11.2)$$

Результатом первого расчёта с шагом h_1 явилось вычисление z_1. Результатом второго расчёта с шагом h_2 явилось вычисление z_2 . В последнем расчёте с шагом h_q вычислили z_q .Детерминанты отличаются друг от друга только первым столбцом. Разделив их друг на друга, получим формулу Рунге:

$$z_p = D_1 / D_2 + O(h^{p+1}) \quad (11.3)$$

Эта формула тоже увеличивает на единицу порядок точности уточнённого значения.

Решение:

Код программы:

Trapezii.java

```
package third;

public abstract class Trapezii {
    abstract double f(double x);
    abstract double getA();
    abstract double getB();
    abstract double getStep();
    void exec(){
        int intervalCount = -1 + (int)((getB() -getA())/getStep());
        //создаем таблицу с x и y
        double[][] table = new double[intervalCount][2];

        //считаем промежуточные значения функции на интервале с заданным
шагом
        double currentX = getA()+getStep();
        for(int i = 0;i<intervalCount;++i){
            table[i][0] = currentX;
            table[i][1] = f(currentX);
            currentX += getStep();
        }
        //выводим шаг и таблицу
        printSettings();
        printTable(table);
        //находим ответ по формуле
        double sum = 0;
        for (double[] value : table) {
            sum += value[1];
        }
        double res = 0.5f*getStep() * (f(getA()) + 2 * sum + f(getB()));
        printRes(intervalCount+1, res);
        System.out.println();
```

```
    }
    void printSettings(){
        System.out.println("Шаг: " + getStep());
    }
    void printTable(double[][] table){
        System.out.printf("i: %d, x: %.9f, y: %.9f\n",0 , getA(),
f(getA()));
        for(int i = 0;i<table.length;++i){
            System.out.printf("i: %d, x: %.9f, y: %.9f\n",i+1, table[i][0],
table[i][1]);
        }
        System.out.printf("i: %d, x: %.9f, y: %.9f\n",table.length+1 ,
getB(), f(getB()));
    }
    void printRes(int n, double res){
        System.out.print("T_"+n + ": " + res);
        System.out.println();
    }
}
```

__Simpson.java__

```
package third;

public abstract class Simpson {
    abstract double f(double x);
    abstract double getA();
    abstract double getB();
    abstract double getStep();
    void exec(){
        int intervalCount = -1 + (int)((getB() -getA())/getStep());
        //создаем таблицу с x и y
        double[][] table = new double[intervalCount][2];
        //считаем промежуточные значения функции на интервале с заданным
шагом
        double currentX = getA()+getStep();
        for(int i = 0;i<intervalCount;++i){
            table[i][0] = currentX;
            table[i][1] = f(currentX);
            currentX += getStep();
        }
        //выводим шаг и таблицу
        printSettings();
        printTable(table);
        //находим ответ по формуле
        double sum1 = 0;
        for(int i = 0 ;i<table.length;i+=2){
            sum1 += table[i][1];
        }
        double sum2 = 0;
        for(int i = 1 ;i<table.length;i+=2){
            sum2 += table[i][1];
        }
        double res = (1.0f/3.0f)*getStep() * (f(getA()) + 4 * sum1 + 2 *
sum2 + f(getB()));
        printRes(intervalCount+1, res);
        System.out.println();
    }
    void printSettings(){
        System.out.println("Шаг: " + getStep());
    }
    void printTable(double[][] table){
```

```
        System.out.printf("i: %d, x: %.9f, y: %.9f\n",0 , getA(), 
f(getA()));
        for(int i = 0;i<table.length;++i){
            System.out.printf("i: %d, x: %.9f, y: %.9f\n",i+1, table[i][0], 
table[i][1]);
        }
        System.out.printf("i: %d, x: %.9f, y: %.9f\n",table.length+1 , 
getB(), f(getB()));
    }
    void printRes(int n, double res){
        System.out.print("T_"+n + ": " + res);
        System.out.println();
    }
}
```

Main.java

```
package third;

import second.SimpleNuton;

public class Main {
    public static void main(String[] args){

        Trapezii task1 = new Trapezii() {
            @Override
            double f(double x) { return (5*x + 2)/(x*x + 1); }
            @Override
            double getA() { return -2; }
            @Override
            double getB() { return 2; }
            @Override
            double getStep() { return 1.0f; }
        };
        task1.exec();

        Trapezii task2 = new Trapezii() {
            @Override
            double f(double x) { return (5*x + 2)/(x*x + 1); }
            @Override
            double getA() { return -2; }
            @Override
            double getB() { return 2; }
            @Override
            double getStep() { return 0.5f; }
        };
        task2.exec();

        Trapezii task3 = new Trapezii() {
            @Override
            double f(double x) { return (5*x + 2)/(x*x + 1); }
            @Override
            double getA() { return -2; }
            @Override
            double getB() { return 2; }
            @Override
            double getStep() { return 0.25f; }
        };
        task3.exec();

        Simpson task4 = new Simpson() {
            @Override
```

```
            double f(double x) { return (5*x + 2)/(x*x + 1); }
            @Override
            double getA() { return -2; }
            @Override
            double getB() { return 2; }
            @Override
            double getStep() { return 1.0f; }
        };
        task4.exec();

        Simpson task5 = new Simpson() {
            @Override
            double f(double x) { return (5*x + 2)/(x*x + 1); }
            @Override
            double getA() { return -2; }
            @Override
            double getB() { return 2;}
            @Override
            double getStep() { return 0.5f; }
        };
        task5.exec();
    }
}
```

Результат работы:

Метод трапеций:

```
Шаг: 1.0
i: 0, x: -2,000000000, y: -1,600000000
i: 1, x: -1,000000000, y: -1,500000000
i: 2, x: 0,000000000, y: 2,000000000
i: 3, x: 1,000000000, y: 3,500000000
i: 4, x: 2,000000000, y: 2,400000000
T_4: 4.4

Шаг: 0.5
i: 0, x: -2,000000000, y: -1,600000000
i: 1, x: -1,500000000, y: -1,692307692
i: 2, x: -1,000000000, y: -1,500000000
i: 3, x: -0,500000000, y: -0,400000000
i: 4, x: 0,000000000, y: 2,000000000
i: 5, x: 0,500000000, y: 3,600000000
i: 6, x: 1,000000000, y: 3,500000000
i: 7, x: 1,500000000, y: 2,923076923
i: 8, x: 2,000000000, y: 2,400000000
T_8: 4.415384615384616

Шаг: 0.25
i: 0, x: -2,000000000, y: -1,600000000
i: 1, x: -1,750000000, y: -1,661538462
i: 2, x: -1,500000000, y: -1,692307692
i: 3, x: -1,250000000, y: -1,658536585
i: 4, x: -1,000000000, y: -1,500000000
i: 5, x: -0,750000000, y: -1,120000000
```

```
i: 6, x: -0,500000000, y: -0,400000000
i: 7, x: -0,250000000, y: 0,705882353
i: 8, x: 0,000000000, y: 2,000000000
i: 9, x: 0,250000000, y: 3,058823529
i: 10, x: 0,500000000, y: 3,600000000
i: 11, x: 0,750000000, y: 3,680000000
i: 12, x: 1,000000000, y: 3,500000000
i: 13, x: 1,250000000, y: 3,219512195
i: 14, x: 1,500000000, y: 2,923076923
i: 15, x: 1,750000000, y: 2,646153846
i: 16, x: 2,000000000, y: 2,400000000
T_16: 4.425266526873414
```

Формула Симпсона:

```
Шаг: 1.0
i: 0, x: -2,000000000, y: -1,600000000
i: 1, x: -1,000000000, y: -1,500000000
i: 2, x: 0,000000000, y: 2,000000000
i: 3, x: 1,000000000, y: 3,500000000
i: 4, x: 2,000000000, y: 2,400000000
T_4: 4.2666667938232425

Шаг: 0.5
i: 0, x: -2,000000000, y: -1,600000000
i: 1, x: -1,500000000, y: -1,692307692
i: 2, x: -1,000000000, y: -1,500000000
i: 3, x: -0,500000000, y: -0,400000000
i: 4, x: 0,000000000, y: 2,000000000
i: 5, x: 0,500000000, y: 3,600000000
i: 6, x: 1,000000000, y: 3,500000000
i: 7, x: 1,500000000, y: 2,923076923
i: 8, x: 2,000000000, y: 2,400000000
T_8: 4.420512952254368
```

Уточнение решений:

Выполним уточнение по формуле Рунге:

Имеем при расчёта по формуле трапеции с шагами: $h_1 = 1.0$ $h_2 = 0.5$ $h_3 = 0.25$ с результатами: $z_1 = 4.4$ $z_2 = 4.41538461538$ $z_3 = 4.4252665268$

Найдем матрицы и их определители D_1 и D_2:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 4.4 & 1.0^2 & 1.0^3 \\ 4.41538461538 & 0.5^2 & 0.5^3 \\ 4.4252665268 & 0.25^2 & 0.25^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4.4, & 1, & 1 \\ 4.41538461, & 0.25, & 0.125 \\ 4.42526652, & 0.0625, & 0.015625 \end{pmatrix}; \det D_1 = -0.363374625$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,25 & 0,125 \\ 1 & 0,0625 & 0,015625 \end{pmatrix}; \det D_2 = -0,08203125$$

$z_p = 4,429709714$ Погрешность: $+1.114914 \cdot 10^{-3}$

Выполним уточнение по формуле Рунге-Ромберга:

$z_1 = 4.266666793$ $z_2 = 4.4205128522$ $h_1 = 1$ $h_2 = 0.5$

$R = \frac{h_2}{h_1} = \frac{0.5}{1} = 0.5$ $p = 4$

$$z_{pp} = z_1 + \frac{z_1 - z_2}{R^p - 1} + O(h) \qquad z_{pp} = 4.266666793 + \frac{4.266666793 - 4.4205129522}{0.5^4 - 1} = 4,430769363$$

Погрешность: $+2.174482 \cdot 10^{-3}$