Задача №3 из ТР (вариант 1)

$A \in L(V^3, V^3)$

A — отражение относительно пл-ти $p: x+y+z=0$.

$e = \langle \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \rangle$.

1. Выберем в пр-ве V^3 подходящий базис $f = \langle \bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3 \rangle$.

Возьмём $\bar{f}^1 \perp p$.

$\bar{f}^1 = e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\bar{f}^2, \bar{f}^3 \perp \bar{f}^1$, т.е. $(\bar{f}^1, \bar{f}^2) = 0$;

$(\bar{f}^3, \bar{f}^1) = 0$.

$\bar{f}^2 \nparallel \bar{f}^3 \Rightarrow$ их координаты не пропорциональны.

$$\bar{f}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3$ – тройка некомпланарных векторов в $V^3 \Rightarrow f = \langle \bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3 \rangle$ – базис V^3.

$$A_{f^1} = -\bar{f}^1 = f \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{f^2} = \bar{f}^2 = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{f^3} = \bar{f}^3 = f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$; f – собственный базис

2. Найдём A_e:

$$A_e = T^{-1}_{f \to e} \cdot A_f \cdot T_{f \to e} = T_{e \to f} \cdot A_f \cdot T^{-1}_{e \to f}$$

$$T_{e \to f} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(T_{e\to f}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1+1+1) = 3.$$

$$T^{-1}_{e\to f} = \frac{1}{\det(T_{e\to f})} \cdot \hat{T}_{e\to f} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

3. Найти образы точек;

1) $M_1 = (1,0,0)$, $A: M_1 \to M_1'$

$$\overline{OM_1} = e\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{OM_1'} = A\overline{OM_1} = e \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= e \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = e\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Точка $M_1 = (1,0,0)$ переходит в точку с координатами $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

2) Точка $M_2 = (-1, 2, 1)$, $A: M_2 \to M_2'$

$$\overline{OM_2'} = A \cdot \overline{OM_2} = e \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= e \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Точка $M_2 = (-1, 2, 1)$ переходит в точку M_2 с координатами $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.