Задача №7 из ТР (вариант 1)

В пр-ве V^3 геометрических векторов со обычным скалярным произведением, векторы базиса $e = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ заданы координатами в канон. базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$

(1) Найти матрицу Грама G_e скалярного произведения в этом базисе. Выписать формулу для длины вектора через его

Координаты в базисе ~~e~~ f.

$$f = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$$

$$f_1 = e\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ f_2 = e\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ f_3 = e\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$e = \langle i, j, k \rangle$ - ортонормированный базис в V^3

$$G_f = T^T_{e\to f} \cdot G_e \cdot T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$u = f \cdot X_f = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3}.$$

② Ортогонализуем базис f с помощью процесса ~~ортогонализа~~ ортогонализации Грама – Шмидта, используя базис f,

$h_1 = f_1 = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (f_2, h_1) = (f_2, f_1) = 1$

$(h_1, h_1) = (f_1, f_1) = 3 \qquad \|h_1\| = \sqrt{3}$

$$h_2 = f_2 - \frac{(f_2, h_1)}{(h_1, h_1)} \cdot h_1 = f_2 - \frac{1}{3} \cdot f_1 =$$

$$= \frac{1}{3} f\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$(h_2, h_2) = \frac{1}{3^2}(-1, 3, 0)\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}(0, 14, -5)\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = \frac{14 \cdot 3}{9} = \frac{14}{3}$$

$$\|h_2\| = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

$(f_3, h_1) = (f_3, f_1) = 2$

$$(f_3, h_2) = \frac{1}{3}(0, 0, 1)\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}(2, -1, 2)\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = \frac{-5}{3}$$

$$h_3 = f_3 - \frac{(f_3, h_1)}{(h_1, h_1)} \cdot h_1 - \frac{(f_3, h_2)}{(h_2, h_2)} \cdot h_2 =$$

$$= f_3 - \frac{11}{14} f_1 + \frac{5}{14} f_2 = \frac{1}{14} f\begin{pmatrix}-11\\5\\14\end{pmatrix}$$

$$(h_3, h_3) = \frac{1}{14^2}(-11, 5, 14)\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-11\\5\\14\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{14^2}(0\,0\,1)\begin{pmatrix}-11\\5\\14\end{pmatrix} = \frac{14}{14^2} = \frac{1}{14}$$

$$\|h_3\| = \sqrt{\frac{1}{14}}$$

$\langle h_1, h_2, h_3 \rangle$ – ортогональный базис.

Нормируем $\langle h_1, h_2, h_3 \rangle$

$$g_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$g_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{14}} f\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{42}} f\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$g_3 = \frac{h_3}{\|h_3\|} = \frac{\sqrt{14}}{14} f\begin{pmatrix}-11\\5\\14\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} f\begin{pmatrix}-11\\5\\14\end{pmatrix}$$

$g = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ – ортонормированный базис.

③ $g_i = e \cdot T_{e \to f} \cdot X_f$, где $i \in \overline{1,3}$

$$g_1 = e\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\-1 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= e \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$g_2 = e\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\-1 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = e\,\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}$$

$$g_3 = e\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot e\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$(g_1, g_1) = \frac{1+1+1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = 1$$

$$(g_2, g_2) = \frac{25+16+1}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{42}} = \frac{42}{42} = 1$$

$$(g_3, g_3) = \frac{1+4+9}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{14}{14} = 1$$

$$(g_1, g_2) = \frac{5-4-1}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{3}} = 0$$

$$(g_1, g_3) = \frac{-1-2+3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} = 0$$

$$(g_2, g_3) = \frac{-5+8-3}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{14}} = 0$$

$$G_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) Проверим, что базис ортонормированный

$$G_g = T_{e \to g}^T \cdot G_e \cdot T_{e \to g}$$

$$T_{e \to g} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{42} & -11/\sqrt{19} \\ & 3/\sqrt{42} & 5/\sqrt{19} \\ 0 & 0 & 14/\sqrt{19} \end{pmatrix}$$

$$G_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T^T_{f\to g} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{42} & 3/\sqrt{42} & 0 \\ -11/\sqrt{14} & 5/\sqrt{14} & \frac{14}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

$$G_g = T^T_{f\to g} \cdot G_f \cdot T_{f\to g} = \frac{1}{\sqrt{42}^2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{14} & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -11\sqrt{3} & 5\sqrt{3} & 14\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{14} & -1 & -11\sqrt{3} \\ 0 & 3 & 5\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 14\sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{42} \cdot \begin{pmatrix} 3\sqrt{14} & \sqrt{14} & 2\sqrt{14} \\ 0 & 14 & -5 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{14} & -1 & -11\sqrt{3} \\ 0 & 3 & 5\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 14\sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{42} \cdot \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$