(5) Найти $\ker A$, $\operatorname{def} A$, $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{rk} A$

$\det A_e = 0 \Rightarrow \nexists A_e^{-1}$

$\ker A = \{ u = e X_e \mid A_e X_e = \bar{0} \}$

$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rk} A_e = 1$.

$\operatorname{def} A = \dim(\ker A_e) = n - \operatorname{rk} A_e = 3 - 1 = 2$

x_1 – главная неизвестная

x_2, x_3 – свободные неизвестные.

$\{ x_1 = 0.$

$\text{ФСР} = \langle \Gamma^1, \Gamma^2 \rangle$; $\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Базис $\ker A = \langle e\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle u, v \rangle$,

тогда $\ker A = L[u, v] = \{ c_1 \cdot u + c_2 \cdot v,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и $c_1^2 + c_2^2 \neq 0 \} = \{ c_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и $c_1^2 + c_2^2 \neq 0 \}$

$= \{ \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix};\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и $c_1^2 + c_2^2 \neq 0 \}.$

$\operatorname{rk} A = \dim(\operatorname{Im} A) = \operatorname{rk} A_e = 1$

Базис $\operatorname{Im} A = \langle e A^1 \rangle = \langle e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle x + u + v \rangle.$

$\operatorname{Im} A = L[x + u + v] = \{ c \cdot (x + u + v),\ c \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ \begin{pmatrix} c & c \\ c & c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \}$

(6) Найти все собственные вектора $\mathcal{A}$.

1. $\det(A_e - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{A^3 \downarrow}{=} -\lambda \cdot (1-\lambda) \cdot (-\lambda) =$

$= \lambda^2 (1 - \lambda) \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda = 1 & S_{\lambda=1} = 1 \\ \lambda = 0 & S_{\lambda=0} = 2 \end{array} \right.$

2.1. $\lambda = 1 \Rightarrow \exists e X_e = \begin{cases} X_e \neq \bar{0}; \\ (A_e - \lambda E) \cdot X_e = \bar{0}. \end{cases}$

$$A_e - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xRightarrow[-1 \cdot A_2]{-1 \cdot A_1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ -1 & \end{pmatrix} \qquad rk(A_e - E) = 2$$

x_2, x_3 – главные неизв.

x_1 – свободная неизв.

$$\begin{cases} x_2 = x_1; \\ x_3 = x_1. \end{cases}$$

$$K_{\lambda=1} = \dim V_{\lambda=1} = n - rk(A_e - E) = 3 - 2 = 1$$

$ФСР = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $ФСР = \langle f^1 \rangle$, $f^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$V_{\lambda=1} = e \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} = e \cdot c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \neq 0, c \in \mathbb{R}$.

2.2. $\lambda = 0 \Rightarrow \exists e X_e = \begin{cases} X_e \neq 0 \\ (A_e - \lambda E) \cdot X_e = 0 \end{cases}$

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rk A_e = 1$$

x_1 – главная неизв. $\qquad \{ x_1 = 0.$

x_2, x_3 – свободные неизв.

$k_{\lambda=0} = \dim(\mathcal{V}_{\lambda=0}) = n - \mathrm{rk}\, A_e = 3 - 1 = 2,$

ФСР $= \langle r^1, r^2 \rangle$; $r^1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $r^2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

ФСР $= \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathcal{V}_{\lambda=0} = e\begin{pmatrix}0\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, $=$

$= c_1 \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & c_1\\c_1 & c_2\end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.