Задача № 4 из ТР (вариант 1)

1. Найдём собственное значение, используя матрицу Ae:

$$\det(Ae-\lambda E)=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\begin{vmatrix}1-3\lambda & -2 & -2\\ -2 & 1-3\lambda & -2\\ -2 & -2 & 1-3\lambda\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left((1-3\lambda)^3-8-8-3\cdot(4-12\lambda)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-9\lambda+27\lambda^2-27\lambda^3-16-12+36\lambda\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-27\lambda^3+27\lambda^2+27\lambda-27\right)=$$

$= \frac{27}{3} \cdot (-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1) = -9(\lambda+1)(\lambda-1)^2$

$[\lambda = -1 \quad S_{\lambda=-1} = 1 \; ; \; \lambda = 1 \quad S_{\lambda=1} = 2 \,]$

2. Найдём собственные векторы, используя A_e;

1) $\lambda = 1 \Rightarrow \exists e X_e = \begin{cases} X_e \neq 0; \\ (A_e - \lambda E) \cdot X_e = 0. \end{cases}$

$$A_e = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \overset{-\frac{3}{2} \cdot A_1}{\Rightarrow}$$

$$\overset{-\frac{3}{2} \cdot A_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

x_1 - главная неизвестная

x_2, x_3 - свободные неизвестные

$\{ x_1 = -x_2 - x_3 ; \quad rk A_e = 1.$

$K_{\lambda=1} = \dim V_{\lambda=1} = n - rk A_e = 3 - 1 = 2.$

$ФСР = \langle \Gamma^1, \Gamma^2 \rangle \; ; \; \Gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \Gamma^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

$ФСР = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_{\lambda=1} = e \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ и } c_1^2 + c_2^2 \neq 0$

2) $\lambda = -1 \Rightarrow \exists\, e \cdot X_e = \begin{cases} X_e \neq 0; \\ (A_e - \lambda E) \cdot X_e = 0. \end{cases}$

$$A_e = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xRightarrow[\frac{1}{2}\cdot A_1 + A_3]{\frac{1}{2}\cdot A_1 + A_2} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \{A_2 + A_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\frac{3}{2}\cdot A_1}$$

$$\xRightarrow{\frac{3}{2}\cdot A_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xRightarrow{A_2 + A_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\frac{1}{2}\cdot A_1}$$

$$\xRightarrow{\frac{1}{2}\cdot A_1} \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \right)$$

x_1, x_2 - главные неизвестные

x_3 - свободная неизвестная.

$\begin{cases} x_1 = x_3; \\ x_2 = x_3. \end{cases}$ $\quad rk\, A_e = 2.$

$K_{\lambda=-1} = \dim V_{\lambda=-1} = n - rk\, A_e = 3 - 2 = 1$

ФСР $= \langle r^1 \rangle$, $r^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

ФСР $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

$V_{\lambda=-1} = e \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

3\. 1) $v_{\lambda=-1}$ – это любой ненулевой вектор $\perp P$, т. е. любой параллельный вектору нормали.

Аналитически мы получили вектор $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, что совпадает с вектором нормали к пл-ти P. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ он подходит

2) $v_{\lambda=1}$ – это любой ненулевой вектор $\in P$.

Аналитически мы получили вектора $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, и они подходят, т.к. это направляющие вектора, которые отражаются сами в себя.

Таким образом, собственные вектора, полученные аналитически, соответствуют геометрическому действию оператора.