Задача № 2 из ТР (вариант 1)

I. $\begin{cases} x_1 + x_2 + (\lambda - 1)x_3 = 1; \\ x_1 + (\lambda - 1)x_2 + x_3 = \lambda; \\ (\lambda - 1)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2; \end{cases}$

1) $D = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 & \lambda \\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda^2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \{A_1 \Leftrightarrow A_2\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda-1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda^2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -A_1 + A_2 \\ (1-\lambda)A_1 + A_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda-1 & 1 & \lambda \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda(2-\lambda) & 2-\lambda & \lambda \end{array}\right) \Leftrightarrow \{-\lambda A_2 + A_3\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda-1 & 1 & \lambda \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda+1)\cdot(\lambda-2) & \lambda^2 \end{array}\right).$

2 a) Если $\lambda = -1$

$D = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$rk(A) = 2 \neq rk(A|B) = 3 \Rightarrow$ СЛАУ несовместна $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ нет решений

2 б) $\lambda = 2$

$$D = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$rk(A) = 1 \neq rk(A|B) = 2 \Rightarrow$ СЛАУ несовместна $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нет решений

2 в) Если $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 2$

$$D = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda-1 & 1 & \lambda \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-2) & \lambda^2 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$rk(A) = 3 = rk(A|B) = 3 = n \Rightarrow$ СЛАУ совместна и определенна

$$\Leftrightarrow \left\{ -\frac{1}{\lambda-2} \cdot A_2 \right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda-1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1-\lambda}{2-\lambda} \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-2) & \lambda^2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1-\lambda)\cdot A_2 + A_1 \\ \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda-2)} \cdot A_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda & \frac{1}{2-\lambda} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1-\lambda}{2-\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda^2}{(\lambda+1)(\lambda-2)} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_3 + A_2 \\ -\lambda \cdot A_3 + A_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda^3+\lambda+1}{(\lambda-2)(\lambda+1)} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{2\lambda^2-1}{(\lambda-2)(\lambda+1)} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{\lambda^2}{(\lambda+1)(\lambda-2)} \end{array}\right)$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda^3+\lambda+1}{(\lambda-2)(\lambda+1)} \\ \dfrac{2\lambda^2-1}{(\lambda-2)(\lambda+1)} \\ \dfrac{\lambda^2}{(\lambda+1)(\lambda-2)} \end{pmatrix}$$

II. СЛАУ $AX = B$ допускает решение с помощью обратной матрицы:

$$A^{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} A \in R^{n\times n} \\ \det A \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \in R^{n\times n} \\ rk(A) = n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 2а)\ rk(A) \neq rk(A|B) = n \\ 2б)\ rk(A) \neq rk(A|B) \neq n \\ 2в)\ rk(A) = rk(A|B) = n \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $\lambda \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$ допуск. решение с помощью обратной матрицы.