Задача №7 из ТР (вариант 1)

Даны векторы:

$\vec{a} = \vec{OA} = (1, 1, 2) = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} =$

$= e \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{b} = \vec{OB} = (2, -1, 2) = 2\cdot\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = e\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{c} = \vec{OC} = (-1, 3, 1) = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} = e\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$

$\vec{d} = \vec{OD} = (3, 4, 7) = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} = e\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$

где $e = \langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$

Лучи OA, OB, OC являются рёбрами трёхгранного угла T.

1) Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно независимы.

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ линейно независимы $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — некомпланарны $\Leftrightarrow$ смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c} \neq 0$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix}A_1 + A_3\\ -2A_1 + A_2\end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & 4 & 3\end{vmatrix} \overset{A_1\downarrow}{=} \begin{vmatrix}-3 & -2\\ 4 & 3\end{vmatrix} =$$

$= -9 + 8 = -1 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — некомпланарны $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — линейно независимы

2) Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (возникающую при этом систему уравнений решить с помощью обратной матрицы).

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - некомпланарны => d можно представить в виде линейной комбинации $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

$$e\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} = x \cdot e\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + y \cdot e\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + z \cdot e\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} =$$

$$= e\left(x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\right).$$

$$\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}x+2y-z\\x-y+3z\\2x+2y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x+2y-z=3.\\x-y+3z=4.\\2x+2y+z=7.\end{cases}$$ СЛАУ.

Матрица системы $A = \begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&3\\2&2&1\end{pmatrix}$

Столбец неизвестных $x = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

Столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$

Матричная запись СЛАУ $AX = B$.

$$\det A = \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \text{ и } \exists!\, X =$$

$$= A^{-1}B.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{ij})^T = -1 \cdot \begin{pmatrix}-7 & 5 & 4\\ -4 & 3 & 2\\ 5 & -4 & -3\end{pmatrix}^T = -\begin{pmatrix}-7 & -4 & 5\\ 5 & 3 & -4\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}7 & 4 & -5\\ -5 & -3 & 4\\ -4 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix}7 & 4 & -5\\ -5 & -3 & 4\\ -4 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{cases} 2 + 2\cdot 1 + 1 = 3. \\ 2 - 1 + 3\cdot 1 = 4. \\ 2\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1 = 7. \end{cases}$$

$$\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

3) Определить, лежит ли точка D внутри Г, вне Г, на одной из границ Г (на какой?)

$$d = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

1. если D лежит внутри $T \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0. \end{cases}$

2. если D лежит вне $T \Leftrightarrow$ хотя бы одно из чисел x, y, z меньше нуля.

3. если D лежит на грани $T \Leftrightarrow$ хотя бы одно из чисел x, y, z равно нулю, а два других числа больше нуля.

$$\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\begin{cases} x = 2 > 0 \\ y = 1 > 0 \\ z = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow D \text{ лежит внутри } T.$$

4) Определить, при каких значениях действительного параметра λ вектор $\vec{d} + \lambda\vec{a}$, отложенный от точки O, лежит внутри трёхгранного угла T.

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + \lambda\vec{a} = \vec{a}\cdot(x+\lambda) + \vec{b}\cdot y + \vec{c}\cdot z.$$

лежит внутри $T \Leftrightarrow \begin{cases} x+\lambda > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases}$

т.к. $y = 1 > 0$ и $z = 1 > 0$, то $\vec{d} + \lambda\vec{a}$ лежит внутри трёхгранного угла T, если $x + \lambda > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2+\lambda>0 \Rightarrow \lambda>-2 \Rightarrow \vec{d}+\lambda\vec{a}$ лежит внутри трёхгранного угла T при $\lambda \in (-2; +\infty)$.