Задача № 4 из ТР (вариант 1)

$$M = \{ p(t) \in P_3 \mid p(-1) = p(1) \} \subset P_3$$

1. Доказать, что множество M - это линейное подпространство P_3

1б) Найдём общий вид элементов $p(t) \in M$.

$p(t)$: $\deg p(t) \le 3$, $p(-1) = p(1)$

$\deg p(t) \le 3 \Rightarrow p(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$

т.к. $p(-1) = p(1)$, то $a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d =$
$= a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d \Rightarrow -a + b - c + d =$
$= a + b + c + d \Rightarrow -2a = 2c \Rightarrow c = -a. \Rightarrow$

$\Rightarrow p(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 - a \cdot t + d \Rightarrow$
$\Rightarrow M = \{ p(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 - a \cdot t + d \}$.

1а) Докажем, что M - линейное подпространство P_3.

1) $p_1(t), p_2(t) \in M$, т.е.

$$\begin{cases} p_1(t) = a_1 \cdot t^3 + b_1 \cdot t^2 - a_1 \cdot t + d_1 \\ p_2(t) = a_2 \cdot t^3 + b_2 \cdot t^2 - a_2 \cdot t + d_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow p_1(t) + p_2(t) = (a_1+a_2)\cdot t^3 + (b_1+b_2)\cdot t^2 -$

$-(a_1+a_2)\cdot t + (d_1+d_2) \in M$, т. е.

M замкнуто относительно сложения

2) $p(t) \in M$, т. е. $p(t) = a\cdot t^3 + b\cdot t^2 - a\cdot t + d$,

$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\cdot p(t) = \lambda\cdot a\cdot t^3 + \lambda\cdot b\cdot t^2 - \lambda\cdot a\cdot t + \lambda\cdot d \in M$,

т. е. M замкнуто относительно умножения

на число.

$\left.\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow M$ - линейное подпространство $P_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow M$ - линейное пространство.

2.) Найти размерность и какой-либо базис

подпространства M.

$M = \{ p(t) = a\cdot t^3 + b\cdot t^2 - a\cdot t + d \}$

а) $p_1(t) = t^3 - t \in M$ $(a=1, b=0, d=0)$

$p_2(t) = t^2 \in M$ $(a=0, b=1, d=0)$

$p_3(t) = 1 \in M$ $(a=0, b=0, d=1)$

2) $M = L[p_1, p_2, p_3]$, $\forall p(t) \in M$

$p(t) = a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + d \cdot p_3 \Rightarrow p_1, p_2, p_3$ – это полная система в M

1) $M \subset P_3$, в P_3 $e = \langle t^3, t^2, t, 1 \rangle$ – естественный базис.

Найдём координаты многочленов p_1, p_2, p_3 в базисе e.

$$p_1(t) = t^3 - t = (t^3, t^2, t, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_2(t) = t^2 = (t^3, t^2, t, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_3(t) = 1 = (t^3, t^2, t, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Составим матрицу A, записав координаты p_1, p_2, p_3 в базисе e в её строки, и найдём её ранг.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad rkA = 3 \Rightarrow \text{строки } A_1, A_2, A_3$$

линейно независимы $\Rightarrow$

$\Rightarrow p_1(t) = e \cdot A_1^T = t^3 - t$, $p_2(t) = e \cdot A_2^T = t^2$,

$p_3(t) = e \cdot A_3^T = 1$ – линейно независимая система.

$\left.\begin{array}{l} 0) \\ 1) \\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ – базис $M \Rightarrow \dim M = 3$

3. Дополнить базис подпространства M до базиса P_3.

$\dim P_3 = 4$.

Нужно добавить к системе p_1, p_2, p_3 один вектор (многочлен) $q_1 \in P_3$, выбрав его так, чтобы система p_1, p_2, p_3, q_1 была линейно независимой.

Построим матрицу B, добавив 1-ну строку к матрице A такую, чтобы $\operatorname{rk} B = 4$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rk} B = 5 \Rightarrow B_1 = A_1,\ B_2 = A_2,\ B_3 = A_3,$$

B_4 – линейно независимы

$\Rightarrow p_1 = e \cdot A_1^T = e \cdot B_1^T$, $p_2 = e \cdot A_2^T = e \cdot B_2^T$,

$p_3 = e A_3^T = e B_3^T$, $q_1 = e \cdot B_4^T$ – линейно независимая система векторов P_3.

0) $p_1(t) = e\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = t^3 - t \in P_3$

$p_2(t) = e \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = t^2 \in P_3$

$p_3(t) = e \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 1 \in P_3$

$q_1(t) = e\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = t \in P_3$

1) p_1, p_2, p_3, q_1 – линейно независимая система векторов P_3

2) $\dim P_3 = 4$

$$\left.\begin{matrix}0)\\1)\\2)\end{matrix}\right] \Rightarrow \langle p_1, p_2, p_3, q_1 \rangle \text{ – базис } P_3.$$