Задача №6 из ТР (вариант 1)

1) Док-ть, что мн-во $M = \{\alpha + \beta \cdot ch\,t + \gamma \cdot sh\,t + \delta \cdot e^t\}$, заданных на области $D = (-\infty, \infty)$ образует линейное пространство

$M = \{\alpha + \beta \cdot ch\,t + \gamma \cdot sh\,t + \delta \cdot e^t\} = L[1, ch\,t, sh\,t, e^t] \subset C(-\infty, \infty)$. $\Rightarrow M$ - линейная оболочка $1, ch\,t, sh\,t, e^t \in C(-\infty, \infty) \Rightarrow$
$\Rightarrow M$ - линейное подпространство пространства непрерывных функций, определённых на $(-\infty, \infty) \Rightarrow M$ - линейное пространство.

2) Найти размерность и базис M

$M = L[1, ch\,t, sh\,t, e^t] \Rightarrow 1, ch\,t, sh\,t, e^t$ - полная система в M, но $e^t = ch\,t + sh\,t$, т.е. $e^t \in L[ch\,t, sh\,t] \Rightarrow 1, ch\,t, sh\,t, e^t$ - линейно зависимая система в M

Рассмотрим систему $1, \operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t$ и докажем, что она линейно независима

Пусть $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot \operatorname{ch} t + \gamma \cdot \operatorname{sh} t = 0$

Подставим
$$\begin{matrix} t=0 \\ t=1 \\ t=-1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta = 0; \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot \left(\frac{e^2+1}{2e}\right) + \gamma \cdot \left(\frac{e^2-1}{2e}\right) = 0; \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot \left(\frac{e^2+1}{2e}\right) + \gamma \cdot \left(\frac{1-e^2}{2e}\right) = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta; \\ \beta \cdot \left(\frac{(e-1)^2}{2e}\right) + \gamma \cdot \left(\frac{e^2-1}{2e}\right) = 0; \\ \beta \cdot \left(\frac{(e-1)^2}{2e}\right) + \gamma \cdot \left(\frac{1-e^2}{2e}\right) = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta; \\ \frac{(e-1)}{2e} \cdot \left(\beta \cdot (e-1) + \gamma \cdot (e+1)\right) = 0; \\ \frac{e-1}{2e} \cdot \left(\beta(e-1) - \gamma(e+1)\right) = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta; \\ \beta \cdot (e-1) + \gamma \cdot (e+1) = 0; \\ \beta(e-1) - \gamma \cdot (e+1) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta = \frac{-\gamma \cdot (e+1)}{e-1} \\ \beta = \frac{\gamma \cdot (e+1)}{e-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$\cancel{\alpha = -\beta}$

$\cancel{\Rightarrow \beta = 1}$

Задача №6 из ТР (вариант 1)

(Продолжение)

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta; \\ \beta = \dfrac{\gamma\cdot(e+1)}{(e-1)} \\ \dfrac{\gamma(e+1)}{(e-1)} = \dfrac{-\gamma\cdot(e+1)}{(e-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta = \dfrac{\gamma\cdot(e+1)}{(e-1)} \\ \gamma = -\gamma \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta = \dfrac{\gamma\cdot(e+1)}{(e-1)} \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1, ch\,t, sh\,t$ – линейно независимая система векторов

б)

$1 \in M\ (\alpha = 1,\ \beta = \gamma = \delta = 0)$

$ch\,t \in M\ (\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = \delta = 0)$

$sh\,t \in M\ (\alpha = \beta = 0,\ \gamma = 1,\ \delta = 0)$

1) $1, ch\,t, sh\,t$ – линейно независимая система векторов.

2) $\alpha + \beta\cdot ch\,t + \gamma\cdot sh\,t + \delta\cdot e^t =$

$= \alpha + \beta\cdot ch\,t + \gamma\cdot sh\,t + \delta\cdot(ch\,t + sh\,t) =$

$= \alpha + ch\,t(\beta + \delta) + sh\,t\cdot(\gamma\cdot\delta) \in L[1, ch\,t, sh\,t] \Rightarrow$

$\Rightarrow 1, ch\,t, sh\,t$ – полная система в M.

$\left.\begin{array}{l} 0) \\ 1) \\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \langle 1, \operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t \rangle$ - базис $M \Rightarrow \dim M = 3.$