Задача №5 из ТР (вариант 1)

1. Доказать, что множество M образует подпространство в пространстве $R^{m \times n}$ всех матриц данного размера.

$$M = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

1б) Найдём общий вид элементов $X \in M$

Пусть $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ f & g \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ f & g \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \Rightarrow \begin{pmatrix} a+f & b+g \\ 0 & 0 \\ 2a+2f & 2b+2g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+f=0 \\ b+g=0 \\ 2a+2f=0 \\ 2b+2g=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f=-a \\ g=-b \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}.$$

$$M = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} \right\}$$

1а) Докажем, что M – линейное подпространство $R^{3 \times 2}$

Проверим, замкнутость М относительно линейных операций.

1) $X, Y \in M$, т. е. $X = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \\ -a_2 & -b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X + Y = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \\ -a_1-a_2 & -b_1-b_2 \end{pmatrix} \in M$, т. е.

М замкнуто относительно сложения.

2) $X \in M$, т. е. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda \cdot X = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b \\ \lambda \cdot c & \lambda \cdot d \\ -\lambda \cdot a & -\lambda \cdot b \end{pmatrix} \in M$, т. е.

М замкнуто относительно умножения на число.

$\left.\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ М – линейное подпространство $\mathbb{R}^{3 \times 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ М – линейное пространство.

2. Найти размерность и построить базис М.

$$M = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} \right\}$$

0) $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$.

$a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=0$; $a=0$ $c=0$, $b=1$ $d=0$; $a=0$ $c=1$, $b=0$ $d=0$; $a=0$ $c=0$, $b=0$ $d=1$.

2) $\forall X \in M$ $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} +$

$+ c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \cdot E_1 + b \cdot E_2 + c \cdot E_3 \cdot d \cdot E_4$,

т. е. $X \in L[E_1, E_2, E_3, E_4]$, $M = L[E_1, E_2, E_3, E_4] \Rightarrow$

$\Rightarrow E_1, E_2, E_3, E_4$ – полная система векторов в M.

1) Пусть $\alpha \cdot E_1 + \beta \cdot E_2 + \gamma \cdot E_3 + \varphi \cdot E_4 = \bar{0}$

$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1, E_2, E_3, E_4$ – линейно

независимая система векторов в M.

$$\left.\begin{array}{l} 0) \\ 1) \\ 2) \end{array}\right] \Rightarrow e\langle E_1, E_2, E_3, E_4\rangle \text{ — базис } M \Rightarrow \dim M = 4.$$

3. Проверить, что матрица $B \in M$ и разложить её по базису M

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M,$$ т.к. B имеет нужный вид ($a = -1$, $b = -1$, $c = 3$, $d = 1$).

$$B = -1 \cdot E_1 + (-1) \cdot E_2 + 3 \cdot E_3 + 1 \cdot E_4 =$$

$$= e \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$