Лекция 1. Первообразная и неопределённый интеграл.

Определение : Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором отрезке [a,b], если для всех из этого отрезка выполняется равенство:

$F'(x)= f(x)$.

Пример: $F(x)=-\cos(x)+C$; $f(x)=\sin(x)$;

Теорема. Если $F1(x)$ и $F2(x)$ какие-либо первообразные для функции $f(x)$ на отрезке [a,b], то выполняется соотношение:

$F1(x) – F2(x) = C$;

Доказательство.

Следствие.: Если F(x) первообразная для $f(x)$, то $(F(x)+C)$ тоже первообразная.

Определение. Совокупность всех первообразных, т.е. $(F(x)+C)$, для $f(x)$ на [a,b] называется неопределенным интегралом от $f(x)$ и обозначается: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, причем $F'(x) = f(x)$,

Теорема.Свойства неопределенного интеграла:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$;

2. $d \int f(x)dx = f(x)dx$;

3. $\int d\,F(x) = F(x) + C$;

4. $\int(f1(x)+ f2(x))dx = \int f1(x)dx + \int f2(x)dx$.

5. $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$, где k – постоянный множитель.

6. Формулы интегрирования не меняют свой вид при подстановке вместо независимой переменной x некоторой функции u(x), т.е. если $\int f(x)dx = F(x) + C$;

$\int f(u)du = F(u) + C$;

Доказательство.

Таблица неопределённых интегралов основных элементарных функций.

1. $x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (n = -1)$

3. $a^n dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \Rightarrow \int e^x dx = e^x + c$

$\int e^x dx = e^x + c$

4. $\int \cos x dx = \sin x + c$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + c$

10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$

$(\int \frac{dx}{x^2+1} = arctgx + c \quad при \ a = 1)$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(\frac{x}{a} \pm \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right) + c$

$\left(\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right)\right) + c \quad ,при \quad a = 1$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

13. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + c$

14. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + c$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$

Замена переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки).

Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$ – строго монотонная и непрерывно дифференцируемая на некотором интервале функции $\varphi(t)$. Если функция $f(x)$ интегрируема на соответствующем интервале изменений x, то имеет место равенство:

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$

Доказательство.

Определение: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a,b], то существует неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, а функция $f(x)$ в этом случае называется **интегрируемой**.

Интегрирование по частям.

Пусть *U(x) и V(x)* дифференцируемые функции на некотором интервале, причём известно, что $d(UV) = U \cdot dV + V \cdot dU$.

Теорема.

$\int U \cdot dV = UV - \int V \cdot dU$ **–** формула интегрирования по частям.

Доказательство.

Замечание: классы функций интегрируемых по частям.

I класс – это интегралы вида: $\int P_n(x) \cdot e^{ax}\, dx$; $\int P_n(x) \cdot \sin(a\cdot x)\, dx$; $\int P_n(x) \cdot \cos(a\cdot x)dx$ *, где* $P_n(x)$ – это многочлен первой степени, в этом случае $U = P_n(x)$;

II класс – это интегралы вида:1.$\int P_n(x) \cdot \ln(a\cdot x)\, dx$; 2.$\int P_n(x) \cdot \arcsin(x)\, dx$;

3.$\int P_n(x) \cdot \mathrm{arctg}(x)\, dx$, где в качестве 1.$U = \ln(a\cdot x)$; 2.$U = \arcsin(x)$; 3.$U = \mathrm{arctg}(x)$;

Примеры.

Лекция 2-3. Интегрирование рациональных функций.

Многчлены с вещественными коэффициентами.

Определение. Многочленом n-ой степени называется функция вида

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad (1)$$

где a_k постоянные коэффициенты вещественные или комплексные, *x- переменная ,* принимающая любые комплексные значения.

Теорема (Безу). Для того, чтобы многочлен $Q_n(x)$ имел комплексный корень x_0 , необходимо и достаточно, чтобы он делился на $(x-x_0)$.

Доказательство.

Основная теорема алгебры. Любой многочлен вида (1) имеет хотя бы один комплекс ный корень.

Теорема. Многочлен (1) с ненулевым старшим коэффициентом имеет n комплексных корней с учётом кратности, то есть

$Q_n(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_l)^{p_l}$, где $p_1 + p_2 + \dots + p_l = n$.

Доказательство.

Примеры.

Теорема.

Если $z_0 = \alpha + i\beta, (\beta \neq 0)$ -комплексный корень κ-й кратности многочлена с вещественны ми коэффициентами $Q_n(z)$, то $\bar{z}_0 = \alpha - i\beta$ есть тоже корень этого многочлена той же кратности и

$$Q_n(z) = [(z - \alpha)^2 + \beta^2]^k Q_{n-2k}(z),$$

где $Q_{n-2k}(z)$ вещественный многочлен степени $n - 2k$, не имеющий корнями z_0 $и$ $\bar{z}_0$.

Доказательство.

Примеры.

Теорема.

Многочлен с вещественными коэффициентами $Q_n(z)$ с ненулевым старшим коэффициен том $a_n \neq 0$ единственным образом представляется в виде произведения

$Q_n(z) = a_n \prod_{j=1}^{r} (z - c_j)^{\mu_j} \prod_{j=1}^{s} (z^2 + p_j z + q_j)^{\tau_j}$, (2)

где $z^2 + p_j z + q_j$ - действительные многочлены второй степени, имеющие комплексные корни $\alpha_j \pm i\beta_j$.

Доказательство.

Примеры.

Интегрирование рациональных функций

Определение. Дробь вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, (*)

где- $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ многочлены степеней n и m называется рациональной. Целая ра циональная функция, т.е. многочлен, интегрируется непосредственно. Интеграл от дробно-рациональной функции можно найти путем разложения на слагаемые, которые стандартным образом преобразуются к основным табличным интегралам.

Определение. Дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется правильной, если степень числителя m меньше степени знаменателя n. Дробь, у которой степень числителя больше или равна степени знаменателя, называется неправильной.

Теорема.

Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правиль ной дроби. Это делается посредством деления многочлена на многочлен в соответст вии с алгоритмом Евклида, подобно делению чисел.

Доказательство.

Примеры.

Теорема. Пусть знаменатель правильной рациональной дроби (*) разложен в произве дение $Q_n(z) = a_n \prod_{j=1}^{r}(z - c_j)^{\mu_j} \prod_{j=1}^{s}(z^2 + p_j z + q_j)^{\tau_j}$ неприводимых многочленов первой и второй степени. Тогда дробь единственным образом представляется в виде сум мы *простейших* дробей:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-c_1)^{\mu_1}} + \frac{A_{1,2}}{(x-c_1)^{\mu_1-1}} + \cdots + \frac{A_{1,\mu_1}}{(x-c_1)^{\mu_1}} + ..$$

....

$$+\frac{A_{r,1}}{(x-c_1)^{\mu_r}} + \frac{A_{r,2}}{(x-c_1)^{\mu_r-1}} + \cdots + \frac{A_{r,\mu_1}}{(x-c_1)^{\mu_r}} +$$

$$+\frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\tau_1}} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\tau_1-1}} + \cdots + \frac{B_{1,\tau_1} + C_{1,\tau_1}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \cdots$$

....

$$\frac{B_{s,1}x + C_{s,1}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{\tau_s}} + \frac{B_{s,2}x + C_{s,2}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{\tau_s-1}} + \cdots + \frac{B_{s,\tau_s} + C_{s,\tau_s}}{x^2 + p_s x + q_s}.$$

Доказательство.

Примеры.

Интегрирование простейших дробей.

Примеры.

Интегрирование произвольных рациональных дробей.

Примеры.

Лекция 4. Интегрирование тригонометрических функций.

Пусть $R(\sin x, \cos x)dx$ - дробно-рациональная функция от переменных sin$x$ и cos$x$.

Найти $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

1. Дробь нечётная относительно sin$x$.

$R(-\sin x, \cos x)$=-$R(\sin x, \cos x)$

В этом случае делается замена переменной $t = \cos x$. Она приводит к интегралу от дроб

но-рациональной функции переменной t.

Примеры.
2. $R(\sin x, \cos x)$ - нечётная относительно cos$x$.
В этом случае делается замена переменной $t = \sin x$

3. $R(\sin x, \cos x)$ - дробь, чётная относительно $\sin x, \cos x$,
т.е. $R(-\sin x, -\cos x)$=$R(\sin x, \cos x)$.

В этом случае делается замена переменной $\operatorname{tg} x = t$.

Примеры.

4. Если у дроби отсутствует симметрия предыдущих типов, делается замена
$tg\frac{x}{2} = t$.

Примеры.

5. Функции вида $\int \sin kx \cos mx dx$, $\int \sin kx \sin mx dx$, $\int \cos kx \cos mx dx$.

Используем формулы:

sin kx cos mx = 1/2(sin(k+m)x+sin(k-m)x)
sin kx sin mx = 1/2(-cos(k+m)x+cos(k-m)x)
cos kx cos mx = 1/2(cos(k+m)x+cos(k-m)x).

Примеры.

6. Интегралы вида $\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x dx$.

Понижаем степень с формулами : $cos^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $sin^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Примеры.

Лекция 5. Интегрирование иррациональных функций.

Интегралы от рациональных функций двух переменных:

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}dx\ \ ), a \neq 0.$ Применяем метод выделения полного квадрата:

$$ax^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2a}=t\right) = |a|(\pm t^2 \pm k^2).$$

Как результат, получаем интеграл вида

$\int R(t, \sqrt{\pm t^2 \pm k^2})dx.$

Возможны варианты:

а) $\int R(t, \sqrt{\pm t^2 \pm k^2})dx$ = $\int R(t, \sqrt{t^2 \pm k^2})dx$ = $\int R(t, (t-k)\sqrt{\frac{t+k}{t-k}})dx$, после чего

заменой $\sqrt{\frac{t+k}{t-k}} = u$ всё сводится к интегралу от рациональной функции.

Примеры.

б) $\int R(t, \sqrt{\pm t^2 \pm k^2})dx$ = $\int R(t, \sqrt{t^2 + k^2})dx$. В этом случае можно сделать подстановку Эйлера $y = \sqrt{t^2+k^2} + t$ или тригонометрическую

t= k tg y или гиперболическую *t= k sh y* . После чего

всё сводится к интегралу от рациональной функции.

Примеры.

в) $\int R(t, \sqrt{\pm t^2 \pm k^2})dx$ = $\int R(t, \sqrt{k^2 - t^2})dx.$ В этом случае делаем замену

$t = k \sin y$, $t = k \cos y$.

Примеры.

Лекция 6-7. Определённый интеграл.

Понятие определенного интеграла.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $a < b$.Выполним следующие действия:

1) разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ на n частичных отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$;

2**)** в каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ выберем произвольную точку $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и вычислим значение функции в этой точку $f(z_i)$;

3**)** найдем произведения $f(z_i) \cdot \Delta x_i$, где Δx_i – длина частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

4) составим сумму $\sigma = f(z_1)\Delta x_1 + f(z_2)\Delta x_2 + \ldots + f(z_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$, которая называется *интегральной суммой функции y = f(x) на отрезке [a, b].*

Геометрически интегральная сумма σ равна сумме площадей прямоугольников, основаниями которых являются отрезки $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, а высоты равны $f(z_1), f(z_2), \ldots, f(z_n)$ соответственно . Обозначим через λ длину

наибольшего частичного отрезка $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$;

1) найдем предел интегральной суммы, когда $\lambda \to 0$.

*Определение***.** Если существует конечный предел интегральной суммы (1) и он не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек z_i в них, то этот предел называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$ (2) .

Таким образом, $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$.В этом случае функция $f(x)$ называется интегрируемой на $[a, b]$. Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ –

подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования; отрезок $[a, b]$ называется промежутком интегрирования.

Теорема.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство в конце лекции.

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$.*Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная сверху графиком функции y = f(x), снизу – осью Ox, слева и справа – прямыми x =a и x= b* .Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от неотрицательной функции $y = f(x)$ с геометрической точки зрения численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева и справа – отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, снизу – отрезком $[a, b]$ оси Ox.

Основные свойства определенного интеграла

Теорема. 1.Значение определенного интеграла не зависит отобозначения переменной интегрирования: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt = \ldots$2.Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0.$

3.Если $a > b$, то, по определению, полагаем $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$4.Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла: $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$

5.Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций: $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

6.Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7.(**теорема о среднем**). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка $\tilde{n} \in [a, b]$, такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$.

Доказательство.

Формула Ньютона–Лейбница

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная на этом отрезке, то справедлива следующая формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \ (3)$$

которая называется *формулой Ньютона–Лейбница*. Разность $F(b) - F(a)$ принято записывать следующим образом: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$,где символ $\Big|_a^b$ называется знаком двойной подстановки. Имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (4)$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^3 x^2 dx$.

Для подынтегральной функции $f(x) = x^2$ произвольная первообразная имеет вид $F(x) = \frac{x^3}{3} + \tilde{N}$. Для вычисления интеграла возьмем первообразную, имеющую наиболее простой вид: $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Тогда $\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}$.

Замена переменной в определенном интеграле

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда, если: 1) функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha, \beta]$; 2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ является отрезок $[a, b]$; 3) $\varphi(\alpha) = \grave{a}$, $\varphi(\beta) = b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt, \quad (5)$$

которая *называется формулой замены переменной в определенном интеграле.*

Доказательство.

На практике часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ используют подстановку $t = g(x)$. В этом случае нахождение новых пределов интегрирования по переменной t упрощается: $\alpha = g(a)$, $\beta = g(b)$.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

Введем переменную равенством $\sqrt{1+x} = t$. Определим x и dx. Возведя в квадрат $\sqrt{1+x} = t$, получим $1 + x = t^2$, откуда $x = t^2 - 1$, $dx = (t^2 - 1)'dt = 2tdt$. Находим новые пределы интегрирования: в формулу $\sqrt{1+x} = t$ подставим старые пределы $x = 3$ и $x = 8$. Получим: $\sqrt{1+3} = t$, откуда $t = 2$ и,следовательно, $\alpha = 2$; $\sqrt{1+8} = t$,откуда $t = 3$ и, следовательно, $\beta = 3$.Таким образом:

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)dt = 2\int_2^3 t^2 dt - 2\int_2^3 dt = 2 \cdot \frac{t^3}{3}\Big|_2^3 - 2t\Big|_2^3 =$$

$$= \frac{2}{3}\left(3^3 - 2^3\right) - 2(3-2) = \frac{2}{3} \cdot 19 - 2 = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Лекция 8.

Суммы Дарбу. Условия существования интеграла.

*Определение верхней и нижней сумм***.** Пусть *f(x)* —ограниченная на отрезке *[a, b]* функция и $\{x_k\}$— произвольное разбиение этого сегмента. Так как *f(x)* ограничена на сегменте *[a, b]*, то она ограничена и на любом частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$, а поэтому у функции *f(x)* существуют точная нижняя грань m_k и точная верхняя грань *Mk* на частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$. Итак, пусть

$$m_k = \inf_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x), \quad M_k = \sup_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x).$$

Определение 1. *Суммы*

$$S = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$$

и

$$s = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$$

будем называть соответственно верхней и нижней суммами функции *f(x)* для данного разбиения $\{x_k\}$ сегмента *[a, b]*.

Основные свойства верхних и нижних сумм.

Лемма. Пусть $\sigma(x_k, \xi_k)$ — интегральная сумма, отвечающая данному разбиению $\{x_k\}$. Тогда при любом выборе промежуточных точек ξ_k всегда справедливы неравенства $s \leqslant \sigma \leqslant S$, где s и S — соответственно нижняя и верхняя суммы, отвечающие тому же разбиению.

Доказательство.

Лемма. Пусть $\{x_k\}$ — произвольное фиксированное разбиение сегмента [a, b], ε — произвольное положительное число. Тогда можно выбрать промежуточные точки ξ_k так, чтобы интегральная сумма $\sigma(x_k, \xi_k)$ и верхняя сумма S удовлетворяли неравенству $0 \leqslant S - \sigma(x_k, \xi_k) < \varepsilon$. Промежуточные точки η_k можно выбрать и таким образом, чтобы для интегральной суммы $\sigma(x_k, \eta_k)$ и нижней суммы s выполнялись неравенства $0 \leqslant \sigma(x_k, \eta_k) - s < \varepsilon$.

Доказательство.

Следствие. Для любого фиксированного разбиения $\{x_k\}$ справедливы следующие соотношения

$$S = \sup_{\xi_k} \sigma(x_k, \xi_k), \quad s = \inf_{\eta_k} \sigma(x_k, \eta_k).$$

Лемма. При измельчении данного разбиения верхняя сумма может только уменьшиться, а нижняя сумма — только увеличиться.

Доказательство.

Лемма. Для двух произвольных и, вообще говоря, различных разбиений сегмента [a, b] нижняя сумма одного из этих разбиений не превосходит верхней суммы другого разбиения.

Доказательство.

Определение. *Верхним интегралом Дарбу* от функции f(x) называется число I*, равное точной нижней грани множества верхних сумм {S} данной функции f(x) для всевозможных разбиений сегмента [a, b]. Нижним интегралом Дарбу от функции f(x) называется число I_*, равное точной верхней грани множества нижних сумм {s} данной функции f(x) для всевозможных разбиений сегмента [a, b].

Лемма 5. Нижний интеграл Дарбу всегда не превосходит верхнего интеграла Дарбу, т. е. $I_* \leqslant I^*$.

Доказательство.

Лемма. Для разностей S—S' и s'—s выполняются следующие неравенства $S-S'\leqslant(M-m)ld,\ s'-s\leqslant(M-m)ld.$

Доказательство.

Определение. Число A называется пределом верхних сумм S при стремлении к нулю диаметра разбиений d, если для любого положительного числа ε можно указать положительное число δ такое, что при условии $d<\delta$ выполняется неравенство $|S-A|<\varepsilon$. Для обозначения указанного предела естественно употреблять символ $A=\lim\limits_{d\to 0} S$. Аналогично определяется предел B нижних сумм S при стремлении d к нулю.

Основная лемма Дарбу. Верхний интеграл Дарбу I^* является пределом верхних сумм S при стремлении диаметра d разбиений к нулю, т. е. $I^*=\lim\limits_{d\to 0} S$. Аналогично $I_*=\lim\limits_{d\to 0} s$.

Доказательство.

Необходимые и достаточные условия интегрируемости.

Теорема. Для того чтобы ограниченная на сегменте [a, b] функция f(x) была интегрируема на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $I_*=I^*$.

Доказательство.

Основная теорема. Для того чтобы ограниченная на сегменте [a, b] функция f(x) была интегрируемой на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось такое разбиение $\{x_k\}$сегмента [a, b], для которого $S-s<\varepsilon$.

Доказательство.

Теорема. Если функция *f(x)* непрерывна на *[a,b]*, то она интегрируема на *[a,b]*.

Доказательство.

Теорема. Монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Доказательство.

Лекция 9. Несобственные интегралы.

Пусть функция $f(x)$определена на полуинтервале [a,b), где b либо конечное либо равно ∞. Предположим, что она интегрируема на любом отрезке [a, t], где $a < t < b$. Если t=∞ или *f(x)* неограничена в окрестности точки b, то её интеграл Римана на [a,b) не существует. Тем не менее может оказаться, что существует предел $\lim_{t\to b}\int_a^t f(x)dx$, отличный от бесконечности. В этом случае данный предел называется *несобственным интегралом от f(x) на отрезке* [a,b] и пишут

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b}\int_a^t f(x)dx \qquad (1)$$

Говорят также, что интеграл сходится. Если предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл расходится.

Если выполнены условия начала предыдущего абзаца, то будем называть

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

интегралом от $f(x)$ с единственной особенностью в точке b. Аналогично определяется интеграл с единственной особенностью в точке a.

Теорема.

Пусть задан интеграл (2) с единственной особенностью в точке b. Для его сходимости необходимо и достаточно выолнения условия Коши:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, b_0 > 0:\; \left|\int_c^d f(x)dx\right| < \varepsilon \;, \quad \text{для любых } b_0 < c < d < b.$$

Доказательство.

Примеры.

Определение. Интеграл (2) сходится *абсолютно* , если сходится интеграл

$$\int_a^b |f(x)|dx\,. \qquad \textbf{(3)}$$

Теорема. Если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство.

Теорема. Пусть функции *f(x)* ≥ 0, $g(x) \geq 0$ на [a,b], интегралы $\int_a^b f(x)dx$ (4), $\int_a^b g(x)dx$ (5)

имеют единственную особенность в точке b и на промежутке [a,b) выполняются условия

$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Тогда из сходимости интеграла (5) следует сходимость интеграла (4), а из расходимости (4) следует расходимость (5).

Доказательство.

Примеры.

Теорема. Пусть интегралы (4) и (5) из предыдущей теоремы имеют единственную особенность в точке b , подинтегральные функции положительны и

$$\exists\, \lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = A > 0.$$

Тогда эти интегралы сходятся и расходятся одновременно.

Примеры.

Пример. Интеграл $\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится , но не сходится абсолютно.

Лекция 10. Приложения определённых интегралов.

1. Площадь фигуры.
а) в декартовых координатах:
Теорема. если фигура ограничена сверху кривой $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, снизу - кривой $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, слева и справа - отрезками прямых $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, то ее площадь равна
$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.
Доказательство.
Примеры.

б) в полярных координатах:
Теорема. Если область $\boldsymbol{D}$ - сектор, ограниченный лучами
$\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, то площадь сектора $\boldsymbol{D}$ равна $\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi$.
Доказательство.
Примеры.

2. Объём тела.
а). По площадям поперечных сечений.
Теорема. Пусть тело $\boldsymbol{V}$ расположено в пространстве между плоскостями $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, и для $\forall\, x \in [a, b]$ известна площадь его поперечного сечения ***S=S(x).*** Тогда объём тела равен

$$\int_a^b S(x) dx.$$

Доказательство.
Примеры.

б) Объём тела вращения.
Теорема. Если объём $\boldsymbol{V}$ получается в результате вращения кривой $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$ вокруг оси $\boldsymbol{Ox}$, то объём тела равен

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx \quad .$$

Доказательство.
Примеры.

3. Длина дуги кривой.

Теорема. Гладкая кривая $\boldsymbol{\Gamma}$, определяемая равенствами $\left\{ \begin{array}{c} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \\ z = \gamma(t), \ \ t \in [a, b] \end{array} \right\}$ (1)
спрямляема. Её длина дуги равна

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{[\alpha(\dot{t})]^2 + [\beta(\dot{t})]^2 + [\gamma(\dot{t})]^2 dt}.$$

Доказательство.
Следствие. Длина дуги плоской кривой $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$ равна

$$\int_a^b \sqrt{1+y(\dot{x})^2}\,dx.$$

Доказательство.

Примеры.

4. Площадь поверхности тела вращения.

Теорема. Если поверхность S получается в результате вращения кривой *y=f(x)*, $a\leq x \leq b$ вокруг оси $\boldsymbol{Ox}$, то площадь поверхности тела вращения равна

$$2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f(\dot{x})^2}\,dx.$$

Доказательство.

Примеры.

Лекция 11. Мера Жордана.

Все определения будут приведены для двумерных множеств на плоскости и для двумерной меры Жордана. Случай произвольного пространства R^n и n- мерной меры Жордана разбирается аналогично.

Фиксируем натуральное число N и две системы прямых на плоскости: $x = kh, y = lh$, $(k,l\in \boldsymbol{Z})$, $h=2^{-N}$, образующих на плоскости прямоугольную h-сетку, состоящую из квадратов со стороной h. При переходе от N k $N+1$ каждый квадрат h-сетки разрезается на 4 равных квадратика. Последние образуют уже $h=2^{-N-1}$ - сетку.

Пусть G - произвольное ограниченное множество на плоскости и для данного N определим два множества G_N *и* G^N. Первое из них G_N - есть объединение квадратиков сетки, целиком принадлежащих G, назовём G_N внутренней фигурой множества G,определяемой данной h-сеткой. Второе множество G^N назовём внешней фигурой множества G. Оно состоит из квадратиков, имеющих с G непустое пересечение.

Имеем $G_N \subseteq G \subseteq G^N$ и площади фигур удовлетворяют неравенству $|G_N| \leq |G^N|$, для любого N. Очевидно, что

$|G_1| \leq |G_2| \leq |G_3| \leq \cdots \leq |G| \leq \cdots \leq |G^3| \leq |G^2| \leq |G^1|$, следовательно $|G_N| \leq |G^M|$ для любых натуральных M *и* N.

Теорема. Существуют пределы $\lim_{N\to\infty}|G_N| = m_iG$ и $\lim_{N\to\infty}|G^N| = m_eG$, называемые внешней и внутренней мерой Жордана множества G , причём

$$m_iG \leq m_eG.$$

Доказательство.

Определение. Множество G называют измеримым по Жордану в двумерном смысле, если $m_iG = m_eG = mG$ и число mG называют *двумерной мерой Жордана множества* G.

Примеры.

Теорема. Множество плоскости G измеримо по Жордану если и только если мера его границы равняется нулю $m\Gamma = 0$.

Доказательство.

Примеры.

Теорема. Непрерывная кривая Г: $y = f(x), x \in [a, b]$ имеет двумерную меру нуль (mГ=0).
Доказательство.

Теорема. Пусть поверхность S задана в трёхмерном пространстве уравнением $z = f(x, y)$, где $(x, y) \in \bar{G}$ - ограниченной замкнутой области на плоскости. Тогда трёхмерная мера Жордана поверхности S равна нулю.

Доказательство.

Примеры.

Лекция 12.
Решение задач типового расчёта по темам: неопределённый интеграл, определённый интеграл, несобственный интеграл.

Лекция 13. Определение двойного интеграла. Свойства двойного интеграла.
Пусть $f(x, y)$ ограниченная функция , определенная в некоторой ограниченной, замкнутой области D плоскости Oxy. Разобьем D произвольным образом на n измеримых по Жордану областей $D_1, D_2, \dots, D_n$, не имеющих общих внутренних точек, в каждой области D_k возьмем произвольную точку $N_k(x_k, y_k)$, вычислим значение $f(N_k)$ и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, m(D_k) \qquad (1)$$

где $m(D_k)$ – площаль (двумерная мера Жордана) множества D_k. Данную сумму назовём интегральной суммой функции $f(x, y)$ для разбиения R множества $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$, и выбора внутренних точек $N_k \in D_k$.

Назовём диаметром множества D_k число $d(D_k) = sup_{N,M \in D_k} \rho(N, M)$- точную верхнюю грань расстояний между всеми парами точек D_k. Назовём диаметром разбиения R число $d(R) = \max_{1 \le k \le n} d_k$, где $d_k = d(D_k)$. .

Определение.

Если существует предел интегральной суммы (1) при $d(R) \to 0$, не зависящий от разбиения R множества D и выбора точек $N_k(x_k, y_k)$ в них, то он называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается $\iint_D f(x, y)dxdy$,

Таким образом

$$\lim_{d(R)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, m(D_k) = \iint_D f(x, y)dxdy$$

и $f(x, y)$ называется интегрируемой функцией на множестве D.

Геометрический смысл двойного интеграла – объём цилиндрического тела с основаниями D и графиком $z = f(x, y)$ над множеством D и образующей, параллельной оси Oz.

Рисунок.

Примеры.

Свойства двойного интеграла.

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на ограниченном, замкнутом, измеримом по Жордану множестве D , тогда *f(x,y)* интегрируема на *D*.

Доказательство.

Примеры.

Теорема. а) $\int_D \ 1dx = m(D)$.

б) $\int_D \left(\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x})\right) d\boldsymbol{x} = \alpha \int_D \ f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \ \beta \int_D \ g(x) d\boldsymbol{x}$.

в) если $f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$, то $\int_D \ f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \leq \int_D \ g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$.

г) $\int_D \ |f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} \geq \left|\int_D \ g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}\right|$.

Доказательство.

Примеры.

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на замыкании $\overline{D}$ ограниченного, измеримого по Жордану множества *D* с кусочно-гладкой границей , тогда *f(x,y)* интегрируема на *D*.

Доказательство.

Примеры.

Теорема (о среднем). Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на ограниченном, замкнутом, измеримом по Жордану множестве *D* ,которое является связным, тогда существует $\boldsymbol{x_0} \in D,$ такая что $\int_D \ f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x_0}) \cdot m(D)$.

Доказательство.

Примеры.

Лекция 14. Сведение двойного интеграла к повторным.

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна множестве *D*=$\{(x, y) \in R^2, a \leq x \leq b, \mu(x) \leq y \leq \varphi(x) \ \}$, тогда $\iint_D \ f(x, y) dxdy = \int_a^b (\int_{\mu(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy) dx$.

Доказательство.

Примеры.

Разбор задач типового расчёта.

Список литературы.

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. "Высшая математика. В 3 томах. Том 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. - - М.: Наука.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1988, 432 с.
3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1988, 432 с.
4. 2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 1. СПб.: Лань, 2016. – 608 с.
5. 3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 2. СПб.: Лань, 2016. – 800 с.
6. 4. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 444 с.
7. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 424 с.
8. Сборник задач по математике для втузов: [в 4 ч.] / Под ред. А. В. Ефимова; А. С. Поспелова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. Ч. 1. — 288 с.
9. Сборник задач по математике для втузов; под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. Ч. 2. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 432 с.