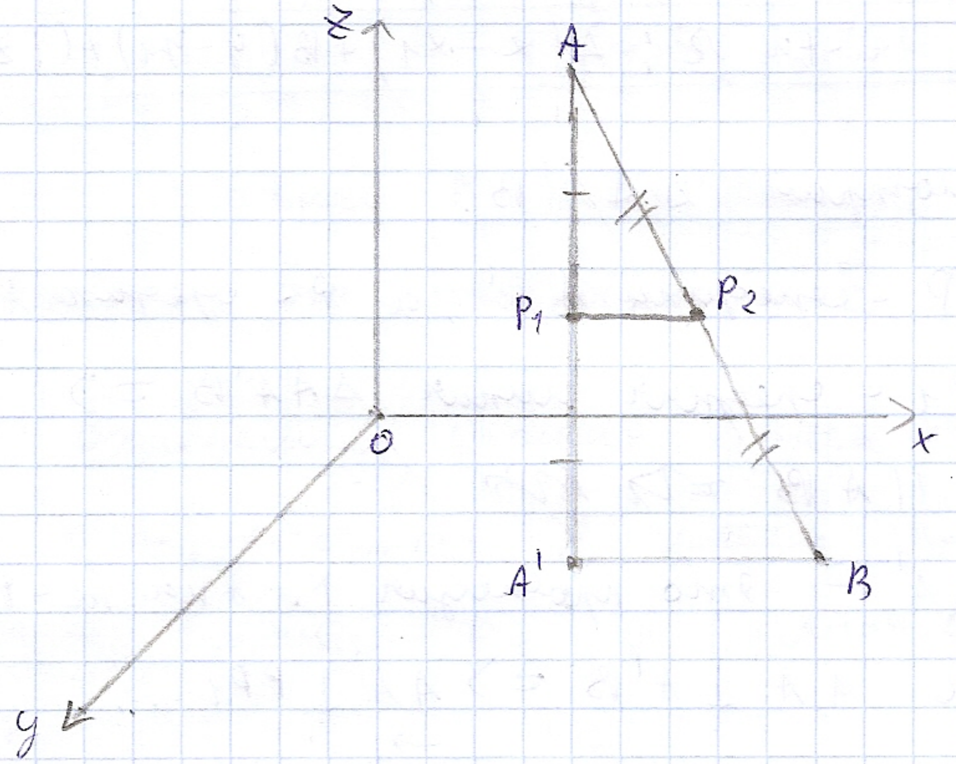
Задача №6 из ТР (вариант 1)

Дана точка A и дано геометрическое место точек M:

$A = (3; -5; 7)$ $M = \{ P \in \Omega \mid P$ является серединой некоторого отрезка AB, конец B которого лежит в координатной плоскости Oxy }.

Найти уравнение ГМТ M.



1) Отметим проекцию точки A на пл-ть Oxy, тогда проекция A' будет иметь координаты $(3; -5; 0) \Rightarrow \vec{AA'} = \{0; 0; -7\}$.

Отметим также произвольную т. $B \in Oxy \Rightarrow$
$\Rightarrow B = (x_0; y_0; 0)$,

2) Отметим точки P и P_1, котрые являются серединами отрезков AA' и AB соответственно

Тогда точка P ~~имеет~~ $= \left(\frac{3+3}{2}; \frac{-5-5}{2}; \frac{7+0}{2}\right) =$

$= \left(3; -5; \frac{7}{2}\right)$, а точка $P_1 = \left(\frac{x-3}{2}; \frac{y-5}{2}; \frac{7}{2}\right)$

Точки P и $P_1 \in \Omega$ по условию.

$\boxed{\text{ур-ние пл-ти } \Omega: A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.}$

3) Рассмотрим $\triangle AA'B$.

т.к. P — середина AA', а P_1 — середина $A'B$, то PP_1 — средняя линия $\triangle AA'B \Rightarrow$

$\Rightarrow PP_1 \parallel A'B$ ~~$\Leftrightarrow A'B$~~

т.к. т. A' — это проекция т. A на пл-ть Oxy, то $AA' \perp A'B \Rightarrow AA' \perp PP_1$.

т.к. P и $P_1 \in \Omega$, то $\vec{AA'}$ — нормаль к плоскости $\Omega \Rightarrow \vec{AA'} = \vec{n} = (A; B; C) =$

$= (0; 0; -7)$.

Подставим т. P_1 в ур-ние пл-ти Ω:

$A\left(x - \frac{x-3}{2}\right) + B\cdot\left(y - \frac{y-5}{2}\right) + C\left(z - \frac{7}{2}\right) = 0)$

$0\cdot\left(x - \frac{x-3}{2}\right) + 0\cdot\left(y - \frac{y-5}{2}\right) + -7\cdot\left(z - \frac{7}{2}\right) = 0;$

$-7\left(z - \frac{7}{2}\right) = 0;$

$7z = \frac{49}{2};$

$\boxed{z = \frac{7}{2}.}$ – уравнение ГМТ М.