Задача №1 из ТР (вариант 1)

$A = (1, 5)$, $B = (-3, 2)$, $C = (9, -7)$, $D = (4, 5)$

1) Доказать, что ABCD — выпуклый четырёхугольник.

$\vec{AC} = (8, -12)$ $\quad \vec{BD} = (7, 3)$

$AC = \left\{ \frac{x-1}{-8} = \frac{y-5}{-12} \right\} \Rightarrow AC = \{3x + 2y - 13 = 0\}$

$BD = \left\{ \frac{x+3}{-7} = \frac{y-2}{-3} \right\} \Rightarrow BD = \{-3x + 7y - 23 = 0\}$

$\cancel{\begin{cases} 3x + 2y = 13; \\ 3x - 7y = -23. \end{cases}}$

$\cancel{\det A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = 21 + 6 = 27}$

$\begin{cases} 3x + 2y = 13; \\ -3x + 7y = 23. \end{cases}$

$\det A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = 21 + 6 = 27$

$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 23 & 7 \end{pmatrix} = 91 - 46 = 45$

$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -3 & 23 \end{pmatrix} = 69 + 39 = 108$

$\begin{cases} x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{45}{27} \\ y = \frac{108}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow O = \left(\frac{5}{3}, 4\right)$

$\vec{AO} = \left(\frac{2}{3}; -1\right)$

$\vec{BO} = \left(\frac{14}{3}; 2\right)$

$\vec{AO} = \alpha \cdot \vec{AC}$

$\left(\frac{2}{3}; -1\right) = \alpha \cdot (8; -12)$

$\left(\frac{2}{3}; -1\right) = \alpha \cdot \left(\frac{24}{3}; -12\right)$

$\alpha = \frac{1}{12}$

$\vec{BO} = \beta \cdot \vec{BD}$

$\left(\frac{14}{3}; 2\right) = \beta \cdot (7; 3)$

$\left(\frac{14}{3}; 2\right) = \beta \cdot \left(\frac{21}{3}; 3\right)$

$\beta = \frac{2}{3}$

Т.к. α и $\beta \in (0, 1)$, то ABCD – выпуклый четырёхугольник

2) Определить, можно ли в четырёхугольник ABCD вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности

1. $\vec{AB} = (-4; -3)$, $\vec{AD} = (3; 0)$

$\cancel{\vec{BC} =}$

$\vec{CB} = (-12; -9)$, $\vec{CD} = (-5; -12)$

$\cancel{\vec{CD} =}$

$|\vec{AB}| =$

$|\vec{AB}| +$

$|\vec{AD}| +$

Т.к. $|\vec{A}$

в чет

окружнос

2. Пл

радиусом

S_{ABCD}

$p =$

$r =$

S_{ABD}

S_{BCD}

ACO

$=$

BCD –

...рёхугольник

..., то

...диус r

$|\vec{AB}| = 5$, $|\vec{AD}| = 3$, $|\vec{CB}| = 15$, $|\vec{CD}| = 13$

$|\vec{AB}| + |\vec{CD}| = 5 + 13 = 18.$

$|\vec{AD}| + |\vec{CB}| = 15 + 3 = 18.$

Т.к. $|\vec{AB}| + |\vec{CD}| = |\vec{AD}| + |\vec{CB}|$, то в четырёхугольник ABCD можно вписать окружность

2. Площадь четыр-ника связана с радиусом вписанной в него окружности формулой:

$S_{ABCD} = p \cdot r$, где p – полупериметр

$$p = \frac{18 + 18}{2} = 18.$$

$$r = \frac{S_{ABCD}}{2} = \frac{S_{ABD} + S_{BCD}}{2}$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot \sin\angle BAD$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{BC}| \cdot |\vec{CD}| \cdot \sin\angle BCD$$

$$\cos(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{|(\vec{AB}, \vec{AD})|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|} = \frac{|-4 \cdot 3 + 0|}{5 \cdot 3} =$$

$$= \frac{12}{15} = \frac{4}{5}. \Rightarrow \sin\angle BAD = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}.$$

$$\cos(\vec{CB}, \vec{CD}) = \frac{|(\vec{CB}, \vec{CD})|}{|\vec{CB}| \cdot |\vec{CD}|} = \frac{|12 \cdot 5 + 12 \cdot 7|}{15 \cdot 13} =$$

$$= \frac{12^4 \cdot 14}{515 \cdot 13} = \frac{56}{65}. \Rightarrow \sin\angle BCD = \sqrt{1 - \frac{3136}{4225}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1089}{4225}} = \frac{33}{65}.$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{2}$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 13 \cdot \frac{33}{65} = \frac{99}{2}$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{9}{2} + \frac{99}{2} = 54.$$

$$r = \frac{S_{ABCD}}{2} = \frac{54}{2} = \boxed{27.}$$

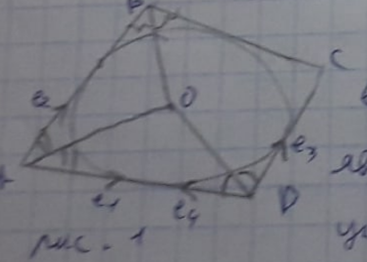

рис. 1

Центр окружности вписанной в четырёхугольник является т. пересеч. бис-с всех углов четырёх-ника.

Обозначим единичные вектора e_1, e_2, e_3 и e_4 так, как показано на рис. 1, то

т. к. $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, то $\vec{e_1} = \left(\frac{3}{3}; 0\right) = (1; 0)$

$\vec{e_2} = \left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$

$\vec{e_1} + \vec{e_2} = \left(\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}\right) \sim (1; -3)$

$\cancel{\vec{AO} = \left\{\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{5}\right\}}$

$\vec{AO} = \left\{\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-3}\right\} \Rightarrow \vec{AO} = \{-3x - y + \overset{8}{\cancel{4}} = 0\}$

$\cancel{\vec{e_3} = \{\}}$

$\vec{e_3} = \left\{\left(\frac{-5}{13}; \frac{-12}{13}\right)\right\}, \quad \vec{e_4} = \left\{\left(0; \frac{3}{3}\right)\right\} = \{(0; 1)\}$

$\vec{e_3} + \vec{e_4} = \left\{\left(\frac{5}{13}; \frac{1}{13}\right)\right\} \sim \{(5; 1)$

$\vec{DO} = \left\{x - 5 = y - 1\right\} \Rightarrow \vec{DO} =$

$\vec{e_3} = \left(\frac{5}{13}; \frac{-12}{13}\right), \quad \vec{e_4} = \left(0; \frac{3}{3}\right) = (0, 1)$

$\vec{e_3} + \vec{e_4} = \left(\frac{5}{13}; \frac{1}{13}\right) \sim (5; 1)$

$\vec{DO} = \left\{\frac{x-4}{5} = \frac{y-5}{1}\right\} \Rightarrow \vec{DO} = \{x - 5y + 21 = 0\}$

$$\begin{cases} x - 5y = -21; \\ -3x - y = -8. \end{cases}$$

$\det A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 15 = -16$

$\Delta_1 = \begin{pmatrix} -21 & -5 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} = 21 - 40 = -19$

$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} = -8 - 63 = -71$

$$\begin{cases} x = \frac{-19}{-16} \\ y = \frac{-71}{-16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1\frac{3}{16} \\ y = 4\frac{7}{16} \end{cases} \Rightarrow \text{т. } O = \left(1\frac{3}{16}; 4\frac{7}{16}\right), \text{ где}$$

O – центр вписанной окр.

3) Определить, можно ли около четырёхугольника $ABCD$ описать окружность, если

Четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность, если сумма его противоположных углов равна $180°$. $\Rightarrow$ Сумма косинусов противоположных углов должна равняться 0.

$\cos\angle BAD = \cancel{\frac{3}{4}}\ \frac{4}{5}$;

$\cos\angle BCD = \frac{56}{65}$.

$$\cos\angle BAD + \cos\angle BCD = \frac{4}{5} + \frac{56}{65} = \frac{52+56}{65} =$$

$$= \frac{108}{65} \neq 0$$ $\Rightarrow$ Невозможно около четырёхугольника описать окр.