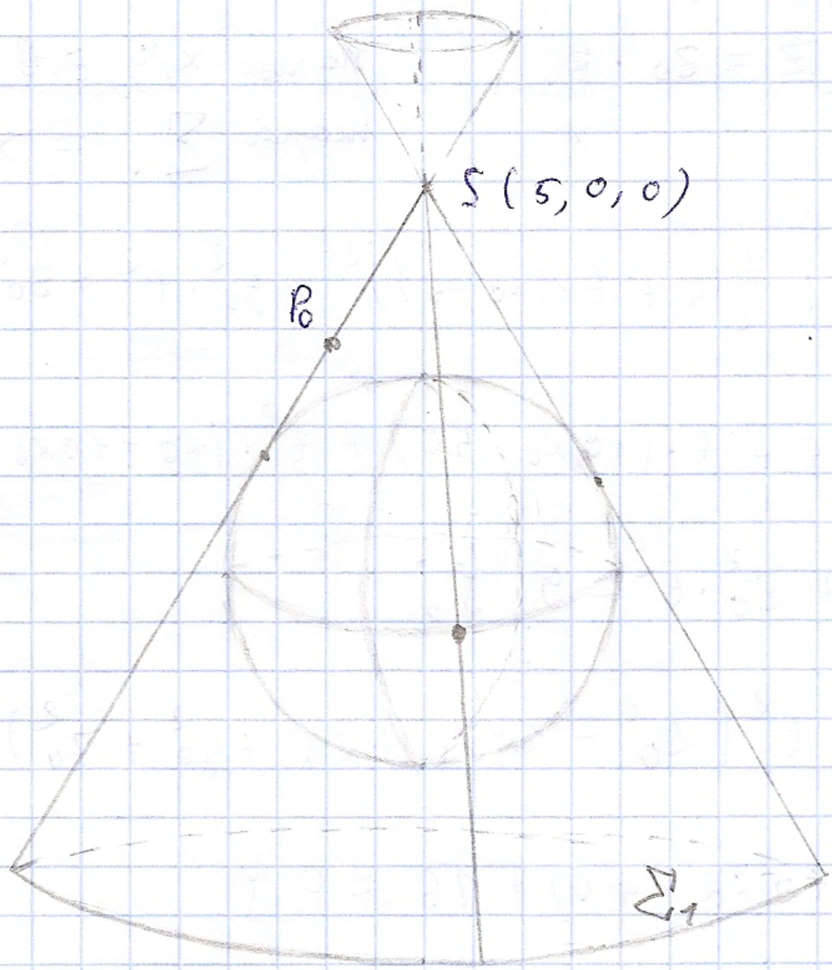
Задача №9 из ТР (варианта 1)

Дана точка S и дана сфера Σ:

$S = (5, 0, 0)$ $\qquad \Sigma = \{x^2+y^2+z^2=9\}$

Найти уравнение конической поверхности Σ_1, вершина которой находится в т. S, а образующие ~~сферы~~ касаются сферы Σ.



Отметим произвольную т. $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ на образующей, которая касается сферы Σ. Тогда, ур-ние образующей (L):

$$L: \left\{ \frac{x-5}{x_0-5} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0} \right\}$$

Пусть $\frac{x-5}{x_0-5} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0} = t$, тогда

$$L: \begin{cases} x = t\cdot(x_0-5)+5 \\ y = y_0 \cdot t \\ z = z_0 \cdot t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Подставим координаты x, y, z в ур-ние шара Σ. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Sigma: \{(5+t\cdot(x_0-5))^2 + y_0^2\cdot t^2 + z_0^2 \cdot t^2 = 9\};$$

$$\Sigma: \{25 + t\cdot(10x_0-50) + t^2\cdot(x_0-10x_0+25) + $$
$$+ y_0^2\cdot t^2 + z_0^2\cdot t^2 = 9\};$$

$$\Sigma: \{t^2(x_0^2 - 10x_0 + 25 + y_0^2 + z_0^2) +$$
$$+ t\cdot(10x_0-50) + 16 = 0\}.$$

Условие касания образующих сферы Σ: $D = 0. \Rightarrow$

$$\Rightarrow D = (10x_0 - 50)^2 - 4 \cdot 16 \cdot (x_0^2 - 10x_0 + 25 + y_0^2 + z_0^2) =$$

$$= 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100x_0^2 - 1000x_0 + 2500 - 64x_0^2 + 640x_0 -$$

$$- 1600 - 64y_0^2 - 64z_0^2 = 0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36x_0^2 - 360x_0 + 900 - 64y_0^2 - 64z_0^2 = 0;$$

$$36 \cdot (x_0 - 5)^2 - 64y_0^2 - 64z_0^2 = 0 \quad | : 64$$

$$\frac{9 \cdot (x_0 - 5)^2}{16} - y_0^2 - z_0^2 = 0 \quad | : 9$$

$$\frac{(x_0 - 5)^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} - \frac{z_0^2}{9} = 0. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ каноническое ур-ние конической поверхности

Σ_1 имеет вид:

$$\boxed{\left\{ \frac{(x_0 - 5)^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} - \frac{z_0^2}{9} = 0 \right\}}$$