



Лекция 5

Основы теории определителей

Содержание лекции:

В лекции кратко рассматривается общая теория определителя как полилинейной формы, а также как формы объема в линейном (аффинном) пространстве. Доказывается ряд свойств определителя набора векторов, которые используются при вычислении определителей. Вводятся основные понятия, необходимые в теории рангов.

Ключевые слова:

определитель как антисимметричная ПЛФ, определитель набора векторов, свойства определителей, дополнительный минор элемента, алгебраическое дополнение, минор матрицы, теорема Лапласа.

Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

mathdep.ifmo.ru/geolin

5.1 Определитель как ПЛФ

Детерминантом набора векторов $\{x_k\}_{k=1}^n$, называется число:

$$\det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = {}^{1,2,\dots,n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где ${}^{1,2,\dots,n} F \in \Lambda^n$ - базисная форма Λ^n .

Лемма 5.1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис X , тогда если $x_k = \sum_{j=1}^n \xi_k^j e_j$, то

$$\det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \xi_n^{\sigma(n)}.$$



Прямой проверкой убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} &= {}^{1,2,\dots,n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= n! \text{Asym}({}^{1,2,\dots,n} W)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= n! \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} ({}^{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)} W)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} ({}^{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)} W)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \xi_n^{\sigma(n)} \end{aligned}$$



5.2 Определитель как форма объема

Параллелепипедом (k -мерным) T , построенным на векторах набора $\{x_j\}_{j=1}^k$ называется множество всех их линейных комбинаций с коэффициентами $\alpha_j \in [0, 1]$:

$$T = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha^j x_j, \quad x_j \in X, \quad \alpha^j \in [0, 1] \right\}$$

Формой объема в n -мерном пространстве X называется отображение $w^{(n)}$

$$w^{(n)}(T) = w^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

обладающее следующими свойствами:

1. $w^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$
2. $w^{(n)}$ - линейна по каждому своему аргументу;
3. $w^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \{x_j\}_{j=1}^n$ - ЛЗ.

Лемма 5.2. Форма объема $w^{(n)}$ - антисимметричная ПЛФ из Λ^n .



Из свойств (1) и (2) следует полилинейность, а из свойства (3) - антисимметричность.



5.3 Свойства определителя

1. Линейность определителя (определитель - ПЛФ):

$$\det \{x_1, \dots, \alpha x'_k + \beta x''_k, \dots, x_n\} = \\ \alpha \det \{x_1, \dots, x'_k, \dots, x_n\} + \beta \det \{x_1, \dots, x''_k, \dots, x_n\}.$$

2. Антисимметричность (определитель - антисимметричная ПЛФ):

$$\det \{x_1, \dots, x_s, \dots, x_t, \dots, x_n\} = -\det \{x_1, \dots, x_t, \dots, x_s, \dots, x_n\}$$

Определитель матрицы C меняет знак при транспозиции любых двух ее столбцов или строк.

3. Критерий линейной зависимости:

$$\{x_k\}_{k=1}^n - \text{ЛЗ} \Leftrightarrow \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = 0.$$

4. Определитель набора не изменится, если в любому вектору набора добавить линейную комбинацию других векторов набора:

$$\det \left\{ x_1, \dots, x_k + \sum_{i \neq k}^n \alpha^i x_i, \dots, x_n \right\} = \\ \det \{x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\} + \det \left\{ x_1, \dots, \sum_{i \neq k}^n \alpha^i x_i, \dots, x_n \right\} = \\ \det \{x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\}.$$

5. Пусть

$$C = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \dots & \xi_n^n \end{pmatrix}.$$

Введем определение:

$$\det C = \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

тогда имеет место:

$$\det C^T = \det C, \quad C^T = \|\xi_k^i\|^T = \|\xi_i^k\|.$$



По определению имеем:

$$\det C^T = \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \xi_n^{\sigma(n)} = \sum_{\sigma'} (-1)^{[\sigma']} \xi_{\sigma'(1)}^1 \xi_{\sigma'(2)}^2 \dots \xi_{\sigma'(n)}^n = \det C.$$

Всякое свойство определителя, доказанное для столбцов, справедливо и для строк и наоборот.



6. Разложение определителя по элементам строки (или столбца матрицы):

$$\begin{aligned} \det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} &= f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n (x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= f^1 \wedge \dots \wedge f^j \wedge \dots \wedge f^n (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = \\ &= f^1 \wedge \dots \wedge f^j \wedge \dots \wedge f^n \left(x_1, \dots, \sum_{m=1}^n \xi_j^m e_m, \dots, x_n \right) = \\ &= \sum_{m=1}^n \xi_j^m f^1 \wedge \dots \wedge f^j \wedge \dots \wedge f^n (x_1, \dots, e_m, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{m=1}^n \xi_j^m (-1)^{|m-j|} f^1 \wedge \dots \wedge f^m(e_m) \wedge \dots \wedge f^n (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{m=1}^n \xi_j^m (-1)^{|m-j|} \det \{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\}. \end{aligned}$$

5.4 Минор и алгебраическое дополнение

Минором M_j^k , дополнительным к элементу ξ_j^k называется определитель матрицы C' , полученной из исходной матрицы $C = \|\xi_j^k\|$ вычеркиванием k -ой строки и j -го столбца:

$$M_j^k = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_k^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^j & \vdots & \xi_k^j & \vdots & \xi_n^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_k^n & \dots & \xi_n^n \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_j^k элемента ξ_j^k называется число

$$A_j^k = (-1)^{k+j} M_j^k.$$

Теорема 5.1. *Имеет место следующая рекуррентная формула:*

$$\det C = \sum_{j=1}^n \xi_j^k A_j^k = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} \xi_j^k M_j^k,$$

$$\det C = \sum_{k=1}^n \xi_j^k A_j^k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \xi_j^k M_j^k.$$

Пример 5.1. Важные частные случаи:

1. определитель диагональной матрицы:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

2. определитель треугольной матрицы:

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11} t_{22} \dots t_{nn}.$$

Минором порядка r **матрицы** C называется определитель $L_{j_1, j_2, \dots, j_r}^{i_1, i_2, \dots, i_r}$ матрицы, полученной из исходной **взятием** элементов, стоящих на пересечении строк с номерами i_1, i_2, \dots, i_r и столбцов с номерами j_1, j_2, \dots, j_r , причем $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r$ и $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_r$

Минором $M_{j_1, j_2, \dots, j_r}^{i_1, i_2, \dots, i_r}$ **дополнительным к минору** $L_{j_1, j_2, \dots, j_r}^{i_1, i_2, \dots, i_r}$ называется определитель матрицы, полученной из исходной **вычеркиванием** строк с номерами i_1, i_2, \dots, i_r и столбцов с номерами j_1, j_2, \dots, j_r .

Теорема 5.2. (Теорема Лапласа) *Определитель матрицы C может быть вычислен следующим образом:*

$$\det C = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_r} (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_r+j_1+j_2+\dots+j_r} L_{j_1, j_2, \dots, j_r}^{i_1, i_2, \dots, i_r} M_{j_1, j_2, \dots, j_r}^{i_1, i_2, \dots, i_r},$$

$$\det C = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r} (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_r+j_1+j_2+\dots+j_r} L_{j_1, j_2, \dots, j_r}^{i_1, i_2, \dots, i_r} M_{j_1, j_2, \dots, j_r}^{i_1, i_2, \dots, i_r},$$

Пример 5.2. Определитель блочной матрицы:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = A_{11} A_{22} \dots A_{nn}.$$