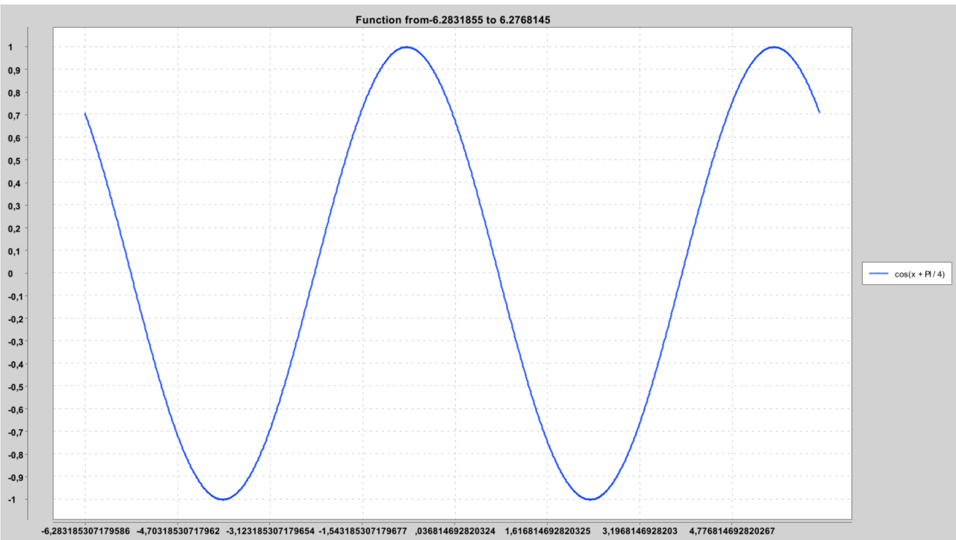
MathLab2 variant 108

Балакин Дмитрий M3135

Исходная функция

$$f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4}), \quad a = -0.05$$



Аналитическая часть

Заметим, что $\sin(x)' = \cos(x)$, а $\cos(x)' = -\sin(x)$, Это значит, что $\cos(x)^{(n)} = \begin{cases} \cos(x) & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -\sin(x) & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -\cos(x) & n \equiv 2 \pmod 4 \\ \sin(x) & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$, а значит $f(x)^{(n)} = \begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{4}) & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -\sin(x + \frac{\pi}{4}) & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -\cos(x + \frac{\pi}{4}) & n \equiv 2 \pmod 4 \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$.

Многочленом Тейлора для данной функции будет

$$P_n(x) = \cos(\frac{\pi}{4}) - \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{1!}x - \frac{\cos(\frac{\pi}{4})}{2!}x^2 + \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f(0)^{(n)}}{n!}x^n$$

А значит

$$\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{4}) - \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{1!}x - \frac{\cos(\frac{\pi}{4})}{2!}x^2 + \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{3!}x^3 + \cdots + p_n(x)$$

Мы знаем, что $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(x)\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(x)\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})(\cos(x) - \sin(x))$ так как $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$ (в дальнейшем нам это равенство еще пригодится). Можем заменить $\sin(x)$ и $\cos(x)$ на их разложения по формуле тейлора, которую мы итак знаем:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + r_n(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + R_n(x)$$

Значит $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) - \dfrac{\sin(\frac{\pi}{4})}{1!}x - \frac{\cos(\frac{\pi}{4})}{2!}x^2 + \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{3!}x^3 + \dots + \cos(\frac{\pi}{4})(R_n(x) + r_n(x))$ то есть мы получаем исходный многочлен Тейлора через многочлены Тейлора для $\sin(x)$ и $\cos(x)$. Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа это $p_n(x) = \frac{f(\xi)^{(n)}}{(n+1)!}x^{n+1}$, а значит $|p_n(x)| \leq |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}|$ так как $|f(x)^{(n)}| \leq 1$, ведь $|f(x)^{(n)}|$ либо $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \leq 1$, либо $\sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq 1$. Значит $|p_n(a)| \leq \frac{0.05^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{10^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$ и $|p_2| < \Delta_1 = \frac{1}{10^3}$, $|p_3| < \Delta_2 = \frac{1}{10^6}$, а значит $n_1 = 1, n_2 = 3$.

Численный метод

Язак: Java 18.0.2 (библиотека XChart).
Данная программа выводит графики функции, ее многочлены в форме Лагранжа от 1 до n_2 порядка (на отрезке [BEGIN, END] с шагом STEP, по умолчанию это $[-2\pi, 2\pi]$, 0.01), сохраняет их и проверяет, что требуемая точность вычислений достигнута.

Функции:

1. saveChart(XYChart chart, String name): сохраняет chart как name.png.
2. List<XYChart> makeTaylorPolynomialGraphics(double begin, double end, double step, int beginOrder, int endOrder): возвращает List<XYChar> - графиков функции в форме тейлора начиная с порядка beginOrder, заканчивая порядком endOrder на отрезке [begin, end] с шагом step.
3. makeFunctionGraphic(double begin, double end, double step) : возвращает XYChart - график функции на отрезке [begin, end] с шагом step.
4. function(double x) : возвращает double - значение функции в точке x.
5. functionDerivative(double x, int order) : вщзвращает double - значение производной функции порядка order в точке x.
6. taylorPolynomial(double x, int order) : возвращает double - значение полинома Тейлора порядка order функции в точке x.
7. fact(int n) : вщзвращает long - факториал числа n, принадлежащего множеству натуральных чисел в объединении с 0.
8. positivePower(double x, int n) : возвращает double - x^n, где n принадлежит множеству натуральных чисел в объединении с 0.

График функции и ее полиномов тейлора порядков от 1 до n_2