α

Лекция 1

Линейная зависимость векторов

Содержание лекции:
В данной лекции мы введем и обсудим аксиомы линейного пространства. Главным объектом нашего исследования будут линейные комбинации векторов, рассмотрение которых приводит к понятиям линейной зависимости или независимости набора векторов, а также полноты заданного набора. Эти понятия затем лягут в основу определения одного из главных понятий линейной алгебры - размерности линейного пространства.

Ключевые слова:
Аксомы линейного пространства, набор векторов, набор коэффициентов, тривиальный набор, линейная комбинация векторов, линейнозависимый набор, линейнонезависимый набор, полный набор.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

1.1 Аксиомы линейного пространства

> **Линейным пространством** $X(\Bbbk)$ над полем $\Bbbk$ называется абелева группа X, снабженная алгебраической структурой $\Bbbk$-модуля:

Nota bene В связи с тем, что линейные пространства играют ключевую роль во многих практических задачах, перечислим явно аксиомы согласования в этой алгебраической структуре. Положим далее, что $x, y, z, \dots$ - элементы группы X, а $\alpha, \beta, \dots$ - элементы поля $\Bbbk$.

1. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in X, \quad \alpha, \beta \in K;$
2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in X, \quad \alpha \in K;$
3. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x = \beta(\alpha x), \quad \forall x \in X, \quad \alpha, \beta \in K;$
4. $\exists 1 \in K : 1 \cdot x = x, \quad \forall x \in X;$

Nota bene Элементы линейного пространства X принято называть *векторами.*

Пример 1.1.

1. $X = \left\{ x = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)^T, \xi^i \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \right\}$ - линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$;
2. $\mathcal{P}_n = \{p \in \Bbbk[t] : \deg p \le n, n \in \mathbb{N}\}$ - линейное пространство над $\mathbb{R}$;
3. $\mathcal{M}(m, n, \Bbbk) = \{A \in \Bbbk^m_n : \quad a_{i,j} \in \Bbbk\}$ - линейное пространство $m \times n$ матриц.

Лемма 1.1. *Имеет место:* $\quad 0 \cdot x = 0_X.$

▶

$$0 \cdot x = 0_X \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot x + y = y \quad \forall y \in X(\Bbbk).$$
$$0 \cdot x + y = 0 \cdot x + 0_X + y = 0 \cdot x + x + (-x) + y = 0 \cdot x + 1 \cdot x + (-x) + y =$$
$$= (0 + 1) \cdot x + (-x) + y = 1 \cdot x + (-x) + y = x + (-x) + y = 0_X + y = y.$$

◀

Лемма 1.2. *Имеет место:* $\quad (-1) \cdot x = -x.$

▶

$$-1 \cdot x = -1 \cdot x + 0_X = -1 \cdot x + x + (-x) = (-1 + 1)x + (-x) =$$
$$= 0 \cdot x + (-x) = 0_X + (-x) = -x.$$

◀

Лемма 1.3. *Имеет место:* $\forall \alpha \in \Bbbk, \quad \alpha \cdot 0_X = 0_X.$

►

$$\alpha \cdot 0_X = 0_X \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot 0_X + y = y \quad \forall y \in X.$$

$$y = 0_X + y = x + (-x) + y = 1 \cdot x + (-x) + y = (\alpha + (-\alpha) + 1) \cdot x + (-x) + y =$$
$$\alpha x + (-\alpha)x + 1 \cdot x + (-x) + y = \alpha x + (-1)\alpha x + x + (-x) + y = \alpha(x + (-1)x) + 0_X + y =$$
$$= \alpha \cdot (x + (-x)) + y = \alpha \cdot 0_X + y.$$

◄

1.2 Линейная зависимость векторов

Набором $\{x_i\}_{i\in I}$ элементов некоторого множества M будем называть конечную и упорядоченную совокупность его элементов с учетом их кратностей.

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n \in X(\Bbbk)$ - набор векторов линейного пространства $X(K)$, и $\{\alpha^j\}_{j=1}^n \in \Bbbk$ - набор коэффициентов из поля $\Bbbk$. Конструкция вида

$$v = x_1\alpha^1 + x_2\alpha^2 + \ldots + x_n\alpha^n$$

называется **линейной комбинацией** векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ с коэффициентами $\{\alpha^j\}_{j=1}^n$.

Тривиальным набором коэффициентов договоримся называть набор, все элементы которого равны нулю.

Набор векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется **линейнозависимым** (ЛЗ), если существует *нетривиальный* набор коэффициентов $\{\alpha^j\}_{j=1}^n$, такой что

$$x_1\alpha^1 + x_2\alpha^2 + \ldots + x_n\alpha^n = 0.$$

Набор векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется **линейнонезависимым** (ЛНЗ), если

$$x_1\alpha^1 + x_2\alpha^2 + \ldots + x_n\alpha^n = 0.$$

имеет место только тогда, когда набор $\{\alpha^j\}_{j=1}^n$ *тривиальный*.

Пример 1.2. Пусть $X = \mathbb{R}^n = \left\{x = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^T, \xi^i \in \mathbb{R}\right\}$, тогда

$$x_1\alpha^1 + x_2\alpha^2 + \ldots + x_n\alpha^n = 0.$$

записывается в виде

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_1^n \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \xi_2^1 \\ \xi_2^2 \\ \vdots \\ \xi_2^n \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} \xi_n^1 \\ \xi_n^2 \\ \vdots \\ \xi_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

или в форме системы

$$\begin{cases} \xi_1^1\alpha^1 + \xi_2^1\alpha^2 + \ldots + \xi_n^1\alpha^n = 0, \\ \xi_1^2\alpha^1 + \xi_2^2\alpha^2 + \ldots + \xi_n^2\alpha^n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \xi_1^n\alpha^1 + \xi_2^n\alpha^2 + \ldots + \xi_n^n\alpha^n = 0. \end{cases}$$

Отсюда нетрудно получить, что система векторов:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

является линейнонезависимой, что следует из

$$\begin{cases} 1 \cdot \alpha^1 + 0 \cdot \alpha^2 + \ldots + 0 \cdot \alpha^n = 0, \\ 0 \cdot \alpha^1 + 1 \cdot \alpha^2 + \ldots + 0 \cdot \alpha^n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 0 \cdot \alpha^1 + 0 \cdot \alpha^2 + \ldots + 1 \cdot \alpha^n = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha^1 = 0, \\ \alpha^2 = 0, \\ \vdots \\ \alpha^n = 0. \end{cases}$$

Пример 1.3. Пусть $X = \mathcal{P}_n$, рассмотрим набор $\{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n\}$ и линейную комбинацию

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 t^1 + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n = 0(t).$$

В точке $t = 0$ рассмотрим производные до n-го порядка включительно:

$$\begin{aligned} 0 &: \quad \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \ldots + \alpha_n \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = 0. \\ 1 &: \quad 0 + \alpha_1 \cdot 1 + 2\alpha_2 \cdot 0 + \ldots + n\alpha_n \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0. \\ &\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \mathrm{n} &: \quad n(n-1)(n-2)\ldots \cdot 2 \cdot 1\alpha_n \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что набор $\{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n\}$ линейнонезависимый.

Пример 1.4. Положим $X = \mathcal{M}(m, n, \Bbbk)$ и рассмотрим набор $\{e_{ij}\}$ матриц, у каждой из которых единственный ненулевой элемент имеет индексы (i, j) ($e_{i,j}$ называют матричной единицей). Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha^{ij} e_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^{ij} = 0.$$

Лемма 1.4. *Любой набор, содержащий нулевой вектор, является ЛЗ.*

Лемма 1.5. *Набор, содержащий ЛЗ поднабор, является ЛЗ.*

Лемма 1.6. *Любой поднабор ЛНЗ набора также является ЛНЗ.*

Лемма 1.7. *Система векторов линейнозависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов набора выражается линейной комбинацией остальных.*

$$\{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in 1\ldots n: \quad x_k = \sum_{i=1, i\neq k}^n x_i \beta^i.$$

►

$\Rightarrow$ Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ - линейнозависимый набор, тогда

$$\exists k \in 1\ldots n: \quad \sum_{i=1}^n \alpha^i x_i = 0, \quad \alpha^k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_k = -\sum_{i=1, i\neq k}^n x_i \frac{\alpha^i}{\alpha^k}.$$

$\Leftarrow$ Пусть набор $\{x_i\}_{i=1}^n$ такой, что

$$\exists k \in 1\ldots n: \quad x_k = \sum_{i=1, i\neq k}^n x_i \beta^i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1, i\neq k}^n x_i \beta^i - 1 \cdot x_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ}.$$

◄

1.3 Полный набор

> Набор векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется **полным** в линейном пространстве $X(\Bbbk)$, если выполняется следующее условие:
>
> $$\forall x \in X \quad \exists\, \alpha^1 \ldots \alpha^n \in \Bbbk: \quad x = \sum_{i=1}^n x_i \alpha^i.$$

Пример 1.5. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, тогда введенный выше набор $\{e_i\}_{i=1}^n$ является полным:

$$x = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xi^1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xi^2 + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \xi^n = \sum_{i=1}^n x_i \xi^i.$$

Пример 1.6. Пусть $X = \mathcal{P}_n$, тогда набор $\{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n\}$ является полным:

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k.$$

Пример 1.7. Пусть $X = \mathcal{M}(m, n, \mathbb{k})$, тогда набор $\{e_{ij}\}$ является полным:

$$A = \alpha^{11} e_{11} + \alpha^{12} e_{12} + \ldots + \alpha^{mn} e_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha^{ij} e_{ij}.$$

Лекция 2

Базис и размерность

Содержание лекции:
Предметом нашего интереса в настоящей лекции будет обсуждение связи между линейной независимостью и полнотой заданного набора векторов. Рассмотрение приведет нас к понятию базиса, а также важным соотношениям между числами векторов в различных наборах, что в свою очередь позволит доказать важнейшее утверждение о независимости числа векторов от выбора базиса и ввести понятие размерности линейного пространства. Оставшуюся часть мы посвятим обсуждению координат векторов в выбранном базисе.

Ключевые слова:
Конечномерное линейное пространство, замещение векторов в полном наборе, базис, процедура прореживания, размерность линейного пространства, координаты вектора в базисе, единственность координат, координаты линейной комбинации.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

2.1 Линейная независимость и полнота

Линейное пространство $X = X(\Bbbk)$ называется **конечномерным**, если в нем существует конечный и полный набор векторов.

Nota bene Далее под $X(\Bbbk)$ будем понимать именно конечномерное пространство.

Лемма 2.1. *Если набор $\{y_i\}_{i=1}^n$ - полный в $X(\Bbbk)$, тогда линейнозависим набор*

$$\{y_1, y_2, \dots, y_n; x\} \quad \forall x \in X(\Bbbk),$$

▶
Так как набор $\{y_i\}_{i=1}^n$ - полный, то

$$\forall x \in X \quad \exists \left\{\alpha^i\right\}_{i=1}^n : \quad x = \sum_{i=1}^n y_i \alpha^i.$$

Но тогда из критерия линейной зависимости следует, что $\{y_1, y_2, \dots, y_n; x\}$ - ЛЗ.
◀

Лемма 2.2. *Пусть $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ - полный набор в $X(\Bbbk)$, тогда*

$$\forall x \in X \quad x \neq 0_X \quad \exists\, k \in 1 \dots n : \quad \{y_1, y_2, \dots, \cancel{y}_k, \dots y_n; x\} \text{ - полный набор.}$$

▶
Из линейной зависимости набора $\{y_1, y_2, \dots, y_n; x\}$ следует

$$\exists \left\{\alpha^i\right\}_{i=1}^n : \quad x = \sum_{i=1}^n y_i \alpha^i = \sum_{i=1, i\neq k}^n y_i \alpha^i + y_k \alpha^k \quad \Rightarrow \quad y_k = \left(x - \sum_{i=1, i\neq k}^n y_i \alpha^i\right) \frac{1}{\alpha^k}$$

Тогда для любого $z \in X$ будем иметь

$$\exists \left\{\beta^i\right\}_{i=1}^n : \quad z = \sum_{i=1}^n y_i \beta^i = \sum_{i=1, i\neq k}^n y_i \beta^i + y_k \beta^k = \sum_{i=1, i\neq k}^n y_i \beta^i + \left(x - \sum_{i=1, i\neq k}^n y_i \alpha^i\right) \frac{\beta^k}{\alpha^k}.$$

И лемма доказана.
◀

Будем называть **процедурой замещения** векторов в полном наборе следующую:

$$\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \to \{y_1, y_2, \dots, \cancel{y}_k, \dots y_n; x\}$$

Лемма 2.3. *Число векторов ЛНЗ набора в конечномерном пространстве не превосходит числа векторов полного набора:*

$$\begin{cases} \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \text{ - ЛНЗ набор,} \\ \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \text{ - полный набор} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad n \geq m.$$

►
От противного, пусть $m > n$. Воспользуемся последовательно процедурой замещения векторов в полном наборе $\{y_i\}_{i=1}^n$ векторами набора $\{x_j\}_{j=1}^m$. Будем иметь:

1. $\{y_1, \ldots, y_n\} \quad \to \quad \{y_1, \ldots, \cancel{y_k}, \ldots; x_1\}$;
2. $\{y_1, \ldots; x_1\} \quad \to \quad \{y_1, \ldots, \cancel{y_k}, \ldots, \cancel{y_l}, \ldots, y_n; x_1, x_2\}$;

   $\ldots \quad \ldots \quad \ldots$

n. $\{y_q; \ldots, x_{n-1}\} \quad \to \quad \{\cancel{y_1}, \ldots, \cancel{y_n}; x_1, \ldots, x_n\}$;

Построенный набор $\{x_j\}_{j=1}^n$ является полным и значит

$$\forall z \in X \quad \exists \left\{\alpha^j\right\}_{j=1}^n : \quad z = \sum_{j=1}^n x_j \alpha^j \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = \sum_{j=1}^n x_j \alpha^j \quad \Rightarrow \quad \text{ЛЗ!}$$

Таким образом, пришли к противоречию, так как набор $\{x_j\}_{j=1}^m$ - ЛНЗ.
◄

2.2 Базис линейного пространства

‖ **Базисом** в линейном пространстве $X(\mathbb{k})$ называется полный ЛНЗ набор.

Пример 2.1. Набор

1. $\{e_i\}_{i=1}^n$ образует базис в $\mathbb{R}^n$;
2. $\{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n\}$ образует базис в $\mathcal{P}_n$
3. $\{e_{ij}\}_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$ - образует базис в $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{k})$.

Лемма 2.4. *В любом конечномерном пространстве существует базис.*
►
Пусть $X(\mathbb{k})$ - конечномерное линейное пространство, тогда в нем существует полный набор векторов $\{y_i\}_{i=1}^m$. Если данный набор линейнонезависимый, то лемма доказана, если нет, тогда воспользуемся *процедурой прореживания*:

1. $\{y_1\}$ - ЛНЗ;

2. $\{y_1, y_2\}$ – ЛЗ $\quad \Rightarrow \quad \{y_1, \cancel{y_2}\}$,
   $\{y_1, y_2\}$ – ЛНЗ $\quad \Rightarrow \quad \{y_1, y_2\}$;

3. $\{y_1, \ldots, y_3\}$ – ЛЗ $\quad \Rightarrow \quad \{y_1, \ldots, \cancel{y_3}\}$,
   $\{y_1, \ldots, y_3\}$ – ЛНЗ $\quad \Rightarrow \quad \{y_1, \ldots, y_3\}$;

   $\ldots \quad \ldots \quad \ldots$

m. $\{y_1, \ldots, y_m\}$ – ЛЗ $\quad \Rightarrow \quad \{y_1, \ldots, \cancel{y_m}\}$,
   $\{y_1, \ldots, y_m\}$ – ЛНЗ $\quad \Rightarrow \quad \{y_1, \ldots, y_m\}$;

После процедуры прореживания оставшиеся векторы набора все еще образуют полную систему (так как выбрасывались только линейнозависимые векторы) и линейнонезависимы, а значит образуют базис.
◀

Лемма 2.5. *В конечномерном линейном пространстве любой ЛНЗ набор может быть дополнен до базиса.*
▶
Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис $X(\Bbbk)$ и $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ - имеющийся ЛНЗ набор. Воспользуемся процедурой прореживания:

1. $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, e_1\}$ – ЛЗ $\quad \Rightarrow \quad \{x_1, x_2, \ldots, x_m, \cancel{e_1}\}$,
   $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, e_1\}$ – ЛНЗ $\quad \Rightarrow \quad \{x_1, x_2, \ldots, x_m, e_1\}$;

2. $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, e_2\}$ – ЛЗ $\quad \Rightarrow \quad \{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, \cancel{e_2}\}$,
   $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, e_2\}$ – ЛНЗ $\quad \Rightarrow \quad \{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, e_2\}$;

   $\ldots \quad \ldots \quad \ldots$

n. $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, e_n\}$ – ЛЗ $\quad \Rightarrow \quad \{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, \cancel{e_n}\}$,
   $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, e_n\}$ – ЛНЗ $\quad \Rightarrow \quad \{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, e_n\}$.

После процедуры остается полный ЛНЗ набор (базис), содержащий векторы набора $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.
◀

Nota bene Число векторов любого ЛНЗ набора в конечномерном пространстве не превосходит числа базисных векторов этого пространства.

Теорема 2.1. *Количество векторов в двух разных базисах конечномерного линейного пространства одинаково.*
▶
Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^m$ пара базисов в в линейном пространстве $X(\Bbbk)$. Тогда из того, что $\{e_i\}_{i=1}^n$ - полный набор, а $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^m$ - ЛНЗ, следует что $m \leq n$. С другой стороны $\{e_i\}_{i=1}^n$ - ЛНЗ, а $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^m$ - полный набор, и тогда $n \leq m$. Значит $m = n$.
◀

Размерностью линейного пространства $X(\Bbbk)$ называется мощность его базиса.

Пример 2.2. Важные частные случаи:

1. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$;
2. $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_n = n + 1$;
3. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$;
4. $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(m, n, \mathbb{R}) = n \cdot m$;
5. $\dim_{\mathbb{R}} C[a, b] = \infty$.

Nota bene Если $\{x_i\}_{i=1}^m$ - ЛНЗ в $X(\Bbbk)$, то $m \leq \dim_{\Bbbk} X$.

Nota bene Чтобы ЛНЗ набор $\{x_i\}_{i=1}^k$ был базисом в $X(\Bbbk)$ необходимо и достаточно выполнение условия $k = \dim_{\Bbbk} X$.

Nota bene Базис в конечномерном линейном пространстве - это ЛНЗ набор *максимального размера.*

2.3 Координаты вектора в базисе

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис линейного пространства $X(\Bbbk)$. Тогда

$$\exists \left\{\xi^i \in \Bbbk\right\}_{i=1}^n : \quad x = \sum_{i=1}^n e_i \xi^i \quad \forall x \in X.$$

Набор чисел $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ называется **координатами** вектора x в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Лемма 2.6. *Координаты любого вектора из $X(\Bbbk)$ в заданном базисе определяются единственным образом.*

▶
Пусть $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ и $\left\{\tilde{\xi}^i\right\}_{i=1}^n$ два набора координат вектора x в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$. Тогда:

$$x = e_1\xi^1 + e_2\xi^2 + \ldots + e_n\xi^n,$$
$$x = e_1\tilde{\xi}^1 + e_2\tilde{\xi}^2 + \ldots + e_n\tilde{\xi}^n.$$

Вычитая второе разложение из первого, будем иметь:

$$e_1\left(\xi^1 - \tilde{\xi}\right) + e_2\left(\xi^2 - \tilde{\xi}^2\right) + \ldots + e_n\left(\xi^n - \tilde{\xi}^n\right) = 0$$

В силу ЛНЗ векторов базиса равенство нулю полученной линейной комбинации имеет место только когда $\xi^i = \tilde{\xi}^i$.
◀

Лемма 2.7. *Координаты в базисе* $\{e_k\}_{k=1}^n$ *линейной комбинации векторов* $\{x_i\}_{i=1}^m$ *равны линейным комбинациям соответствующих координат данных векторов. Именно если*

$$x_i = \sum_{k=1}^n e_k \xi_i^k, \quad y = \sum_{i=1}^m x_i \alpha^i,$$

тогда

$$y = \sum_{j=1}^n e_j \eta^j, \quad \Rightarrow \quad \eta^k = \sum_{i=1}^m \xi_i^k \alpha^i.$$

►

$$y = \sum_{i=1}^m x_i \alpha^i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n e_k \xi_i^k \right) \alpha^i = \sum_{k=1}^n e_k \left(\sum_{i=1}^m \alpha^i \xi_i^k \right) = \sum_{k=1}^n e_k \eta^k.$$

Использование леммы о единственности набора координат вектора в заданном базисе завершает доказательство.

◄

γ

Лекция 3

Изоморфизм линейных пространств.

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы обсудим важную концепцию изоморфизма линейных пространств. Изоморфные пространства как алгебраические структуры неотличимы. Мы покажем, что исследование структуры этих пространств можно без потери общности ограничить только некоторыми представителями, а именно координатными пространствами.

Ключевые слова:
Биекция, линейность, изоморфизм, изоморфные пространства, изоморфизм и линейная зависимость, классы изоморфных пространств.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

3.1 Определение изоморфизма

Пусть $X(K)$ и $Y(K)$ - линейные пространства над одним и тем же полем K.

Nota bene Напомним что отображение $\varphi : X \to Y$ между *множествами* X и Y называется **биекцией**, если существует отображение $\psi : Y \to X$, такое что

$$\forall x \in X \quad \psi(\varphi(x)) = x, \quad \forall y \in Y \quad \varphi(\psi(y)) = y,$$

то есть

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X, \quad \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y .$$

Лемма 3.1. *Биекция является взаимно-однозначным отображением.*

> Отображение $\varphi : X \to Y$ линейного пространства $X(K)$ в линейное пространство $Y(K)$ называется **линейным**, если
>
> $$\forall x_1, x_2 \in X \quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2),$$
> $$\forall x \in X, \quad \forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x).$$

Лемма 3.2. *Если $\varphi : X(K) \to Y(K)$ - линейно, тогда*

$$\varphi(0_X) = 0_Y$$

►
Действительно, из свойства линейности и аксиом линейного пространства, имеем:

$$\varphi(0_X) = \varphi(0 \cdot x) = 0 \cdot \varphi(x) = 0_Y.$$

◄

> Отображение $\varphi : X \to Y$ линейного пространства $X(K)$ в линейное пространство $Y(K)$ называется **изоморфизмом**, если φ биективно и линейно.

Лемма 3.3. *Пусть $X(K)$ - линейное пространство и $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис $X(K)$, тогда отображение*

$$\varphi : \quad X(K) \to K^n,$$

сопоставляющее каждому вектору $x \in X(K)$ набор его координат в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ является изоморфизмом.

Лемма 3.4. *Отображение φ^{-1}, обратное изоморфизму φ является изоморфизмом.*
►
По определению, φ^{-1} является биекцией. Таким образом, необходимо доказать только линейность. Пусть $y_1, y_2 \in Y$, тогда

$$\varphi^{-1}(y_1), \varphi^{-1}(y_2) \in X.$$

Из линейности φ следует

$$\varphi\left(\varphi^{-1}(y_1)+\varphi^{-1}(y_2)\right)=\varphi\left(\varphi^{-1}(y_1)\right)+\varphi\left(\varphi^{-1}(y_2)\right)=y_1+y_2.$$

Применим к обеим частям φ^{-1} и получим

$$\varphi^{-1}(y_1+y_2)=\varphi^{-1}(y_1)+\varphi^{-1}(y_2).$$

Пусть теперь $y\in Y$, тогда

$$\varphi\left(\alpha\varphi^{-1}(y)\right)=\alpha\varphi\left(\varphi^{-1}(y)\right)=\alpha y\quad\Rightarrow\quad\varphi^{-1}(\alpha y)=\alpha\varphi^{-1}(y).$$

◀

3.2 Изоморфизм и линейная зависимость

Лемма 3.5. *При изоморфизме линейно-зависимый набор векторов отображается в линейно зависимый набор.*

▶

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ - линейно зависимый набор в X, тогда существует нетривиальный набор коэффициентов $\{\alpha^i\}_{i=1}^n$, такой что

$$\sum_{i=1}^n x_i\alpha^i=0_X.$$

Пусть $\varphi:X\to Y$ - изоморфизм, тогда

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i\alpha^i\right)=\sum_{i=1}^n\varphi(x_i)\alpha^i=\sum_{i=1}^n y_i\alpha^i=0_Y,\quad y_i=\varphi(x_i).$$

Так как набор $\{\alpha^i\}_{i=1}^n$ нетривиален, то набор $\{y_i\}_{i=1}^n$ - линейно зависимый.

◀

Лемма 3.6. *При изоморфизме линейнонезависимый набор векторов отображается в линейнонезависимый набор.*

▶

От противного. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ - линейнонезависимы набор, а $\{\varphi(x_i)\}_{i=1}^n$ - линейнозависимый. Но тогда

$$\left\{\varphi^{-1}\left(\varphi(x_i)\right)\right\}_{i=1}^n$$

- линейнозависимый набор. Противоречие.

◀

Лемма 3.7. *При изоморфизме $\varphi : X \to Y$ базис пространства X отображается в базис пространства Y.*

►

Для доказательства нам достаточно показать, что из полноты набора $\{e_j\}_{j=1}^n$ следует полнота набора $\{\varphi(e_j)\}_{j=1}^n$. Действительно для любого $y \in Y$ имеет место

$$\exists \left\{\alpha^i\right\}_{i=1}^n : \quad \varphi^{-1}(y) = \sum_{i=1}^n e_i \alpha^i \quad \Rightarrow \quad y = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)\alpha^i,$$

что и требовалось доказать.

◄

3.3 Изоморфные пространства

Линейные пространства $X(K)$ и $Y(K)$ называются **изоморфными**, если существует изоморфизм $\varphi : X \to Y$.

Nota bene Тот факт, что пространство $X(K)$ изоморфно пространству $Y(K)$ будем обозначать $X \simeq Y$.

Лемма 3.8. *Изоморфность линейных пространств - отношение эквивалентности.*

►

Докажем необходимые свойства:

1. рефлексивность $(X \simeq X)$:
   тождественное отображение $\mathrm{id}_X : X \to X$ является изоморфизмом;

2. симметричность $(X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X)$
   было доказано, что обратное отображение также изоморфизм;

3. транзитивность $(X \simeq Y, \quad Y \simeq Z \quad \Rightarrow \quad X \simeq Z)$ пусть $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to Z$ соответствующие изоморфизмы, тогда $\psi \circ \varphi$ - изморфизм и $X \simeq Z$.

◄

Nota bene Полученное отношение эквивалентности порождает классы эквивалентности изоморфных пространств.

Лемма 3.9. *Чтобы пространства $X(K)$ и $Y(K)$ были изоморфны необходимо и достаточно чтобы их размерности совпадали:*

$$X(K) \simeq Y(K) \quad \Leftrightarrow \quad \dim_K X = \dim_K Y.$$

►

$\Rightarrow$ Пусть $X(K) \simeq Y(K)$, тогда образом базиса пространства X будет некоторый базис пространства Y. В силу биективности изоморфизма, количества векторов в

соответствующих наборах будут совпадать.
$\Leftarrow$ Если $\dim_K X = \dim_K Y$, тогда $X \simeq K^n$ и $Y \simeq K^n$. В силу симметричности и транзитивности мы получим $X \simeq Y$.
◄

Nota bene Таким образом, каждый класс эквивалентности изоморфных пространств содержит линейные пространства одинаковой размерности. Типичными представителями данных классов являются "арифметические" пространства столбцов:

$$[n=1] \leftrightarrow K^1, \quad [n=2] \leftrightarrow K^2, \quad \dots, \quad [n=m] \leftrightarrow K^m$$

Nota bene Выберем базис в каждом из пространств X и Y:

$$\{e_j\}_{j=1}^n \in X, \quad \{f_j\}_{j=1}^n \in Y, \quad e_j \leftrightarrow f_j \quad \forall j.$$

Изоморфизм между X и Y устанавливается следующим соответствием:

$$x = \sum_{i=1}^n e_i \alpha^i \quad \leftrightarrow \quad y = \sum_{i=1}^n f_i \alpha^i.$$

δ

Лекция 4

Линейные подпространства

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы поговорим о подструктурах линейного пространства - линейных подпространстранствах. Чаще всего приходится иметь дело именно с ними. Подпространства и линейные многообразия играют важную роль в геометрических приложениях линейной алгебры, а также, как будет указано, в теории систем линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова:
Линейное подпространство, линейная оболочка, линейное многообразие, размерность линейного многообразия.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

4.1 Подпространства

Подмножество $L \subset X$ линейного пространства $X(K)$ называется **линейным подпространством пространства** $X(K)$, если оно само является линейным простанством над полем K относительно операций, определенных в X.

Теорема 4.1. *(Критерий линейного подпространства) Для того, чтобы непустое подмножество L линейного пространства $X(K)$ являлось подпространством, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. $\forall x_1, x_2 \in L \quad x_1 + x_2 \in L$;
2. $\forall \alpha \in K, \quad \forall x \in L \quad \alpha x \in L$.

►
$\Rightarrow$ Пусть L - подпространство линейного пространства $X(K)$, тогда условия (1) и (2) содержатся в его определении.
$\Leftarrow$ Пусть выполняются условия (1) и (2), тогда L - подпространство линейного пространства $X(K)$. Действительно, данное утверждение следует из того, что $X(K)$ само является линейным пространством, а L является его подмножеством, замкнутым относительно операций, индуцированных из $X(K)$.
◄

Пример 4.1. Примеры подпространств:

1. Само X и $\{0\}$ - примеры тривиальных (несобственных) подпространств;
2. Прямая и плоскость, содержащие начало координат - подпространства E_3;
3. Множество симметричных 2×2 матриц - подпространство $\mathbb{C}_2^2$;
4. Множество четных полиномов - подпространство $\mathcal{P}_n$;

Лемма 4.1. *Пусть L - подпространство $X(K)$, тогда*

$$\dim L \leq \dim X.$$

►
Так как L является подмножеством $X(K)$, то любой набор элементов L также содержится и в X. Лемму доказывает выбор базиса L в качестве такого набора.
◄

Лемма 4.2. *Имеет место:*

$$L = X \quad \Leftrightarrow \quad \dim L = \dim X.$$

▶
$\Rightarrow$ Утверждение очевидно.
$\Leftarrow$ Было показано, что для любых двух линейных пространств имеется критерий

$$\dim_K X = \dim_K L \quad \Leftrightarrow \quad X \simeq L,$$

и так как $L \subseteq X$, то отсюда следует, что $L = X$.
◀

Лемма 4.3. *Любой базис подпространства L может быть дополнен до базиса всего пространства $X(K)$.*
▶
Пусть $\{f_i\}_{i=1}^k$ базис L. Применим процедуру прореживания к системе

$$\{f_1, f_2, \ldots, f_k; e_1, e_2, \ldots, e_n\},$$

где $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис X. В результате получим новый базис пространства X, содержащий в качестве поднабора $\{f_i\}_{i=1}^k$.
◀

Лемма 4.4. *Из произвольного базиса пространства X, вообще говоря, нельзя выбрать базис его подпространства L.*
▶
Лемму доказывает контрпример:

$$X = \mathcal{L}\{e_1, e_2\} \quad L = \mathcal{L}\{e_1 + e_2\}.$$

◀

4.2 Линейная оболочка

> **Линейной оболочкой** системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называется множество $\mathcal{L}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ всех линейных комбинаций этих векторов:
>
> $$\mathcal{L} = \left\{ x \in X : \quad x = \sum_{i=1}^k \alpha^i x_i \right\}.$$

Лемма 4.5. *Линейная оболочка векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ - подпространство X:*

$$\forall y, y_1, y_2 \in \mathcal{L}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}, \quad \forall \lambda \in K \quad \Rightarrow \quad y_1 + y_2 \in \mathcal{L}, \quad \lambda y \in \mathcal{L}.$$

▶
Так как $y, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$, то

$$y = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha^i, \quad y_1 = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha_1^i, \quad y_2 = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha_2^i,$$

и осталось только проверить существование соответствующих линейных комбинаций:

$$y_1 + y_2 = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha_1^i + \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha_2^i = \sum_{i=1}^{k} x_i \left(\alpha_1^i + \alpha_2^i\right) \in \mathcal{L},$$
$$y\lambda = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha^i \cdot \lambda = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha^i \lambda \in \mathcal{L}.$$

◀

Лемма 4.6. *(минимальность) Линейная оболочка векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ является наименьшим подпространством X, содержащим эти векторы.*
▶
Всякое линейное пространство, содержащее векторы $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ также должно содержать и все их линейные комбинации, а значит - линейная оболочка $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ - наименьшее из таких подпространств.
◀

Линейная оболочка векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ называется **подпространством, натянутым на данные векторы**.

4.3 Линейное многообразие

Линейным многообразием M, параллельным подпространству L линейного пространства $X(K)$ называется множество

$$M = \{y \in X : \quad y = x_0 + x, \quad x_0 \in X, \quad x \in L\}.$$

Nota bene Линейное подпространство L называется также *несущим подпространством* для многообразия M.

Теорема 4.2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

$$(1) \quad x_0 + L = y_0 + L \quad \Leftrightarrow \quad (2) \quad y_0 \in x_0 + L \quad \Leftrightarrow \quad (3) \quad y_0 - x_0 \in L.$$

►
На протяжении всего доказательства положим $z, z' \in L$.
Импликация (1) ⇒ (2):

$$x_0 + L = y_0 + L \quad \Rightarrow \quad x_0 + z = y_0 + z' \quad \Rightarrow \quad y_0 = x_0 + (z - z') \in x_0 + L.$$

Импликация (2) ⇒ (3):

$$y_0 \in x_0 + L \quad \Rightarrow \quad y_0 = x_0 + z \quad \Rightarrow \quad y_0 - x_0 = z \in L.$$

Импликация (3) ⇒ (1):

$$y_0 - x_0 \in L \quad \Rightarrow \quad y_0 = x_0 + z.$$

Пусть $x \in x_0 + L$, тогда $x = x_0 + z'$, $z' \in L$ и

$$x = x_0 + z' = y_0 + (z' - z) \quad \Rightarrow \quad x_0 + L \subseteq y_0 + L.$$

аналогично для $y \in y_0 + L$.
◄

Nota bene Многообразие M порождается любым своим представителем.

Nota bene Для того, чтобы линейное многообразие M было подпространством необходимо и достаточно, чтобы $x_0 \in L$, то есть, чтобы $M \equiv L$.

Лемма 4.7. *Несущее подпространство линейного многообразия определяется единственным образом:*

$$\forall x_0, y_0 \in X, \quad \forall L, L' \subset X, \quad x_0 + L = y_0 + L' \quad \Rightarrow \quad L = L'$$

►
Из предыдущей теоремы следует:

$$\begin{aligned} x_0 + L = y_0 + L' \quad &\Rightarrow \quad x_0 + L = x_0 + L' \quad \Rightarrow \\ \forall x \in L \quad \exists\, y \in L' : \quad x_0 + x = x_0 + y \quad &\Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad L \subseteq L', \\ \forall y \in L' \quad \exists\, x \in L : \quad x_0 + x = x_0 + y \quad &\Rightarrow \quad y = x \quad \Rightarrow \quad L' \subseteq L. \end{aligned}$$

◄

Определяют **размерность многобразия** M, параллельного подпространству L

$$\dim M = \dim L.$$

Многообразие M, параллельное L называется:

- **прямой**, если $\dim L = 1$;
- **плоскостью**, если $\dim L = 2$;
- **k-мерной плоскостью**, если $\dim L = k$;
- **гиперплоскостью** $\dim L = \dim X - 1$.

η

Лекция 5

Сумма и пересечение подпространств

Содержание лекции:
Настоящая лекция посвящена обсуждению операций с подпространствами. Рассматриваемые здесь понятия имеют непосредственное приложение в геометрии. Формулируемое условие единственности разложения произвольного вектора имеет прямое отношение к описанию геометрических объектов и исследованию их свойств. Мы начнем с общих понятий суммы и пересечения линейных подпространств.

Ключевые слова:
Пересечение подпространств, сумма подпротранств, прямая сумма подпространств, компоненты вектора, проекция вектора, дополнение пространства, коразмерность пространства.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

5.1 Сумма и пересечение подпространств

Nota bene Пусть $X(\Bbbk)$ - линейное пространство над некоторым полем $\Bbbk$ и L_1, $L_2 \subset X(\Bbbk)$ - два его собственных подпространства.

Множество L' называется **пересечением подпространств** L_1 и L_2, если

$$L' = \{x \in X : x \in L_1 \wedge x \in L_2\}.$$

Nota bene Тот факт, что множество L' является пересечением подпространств L_1 и L_2 обозначают следующим образом:

$$L' = L_1 \cap L_2.$$

Лемма 5.1. *Множество L' - подпространство $X(\Bbbk)$.*

►

Докажем замкнутость множества L' относительно линейных операций, индуцированных из $X(\Bbbk)$. Действительно,

$$x, x_1, x_2 \in L' \quad \Rightarrow \quad x, x_1, x_2 \in L_1 \cap L_2 \quad \Rightarrow \quad x, x_1, x_2 \in L_1, \quad x, x_1, x_2 \in L_2.$$

Так как L_1 и L_2 - подпространство, то сразу получаем:

$$x_1 + x_2 \in L_1, \quad x_1 + x_2 \in L_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \in L_1 \cap L_2 = L',$$
$$x\lambda \in L_1, \quad x\lambda \in L_2 \quad \Rightarrow \quad x\lambda \in L'.$$

◄

Множество L'' называется **суммой подпространств** L_1 и L_2, если

$$L'' = \{x \in X : x = x_1 + x_2,\ x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2\}.$$

Nota bene Тот факт, что множество L' является суммой подпространств L_1 и L_2 обозначают следующим образом:

$$L'' = L_1 + L_2.$$

Лемма 5.2. *Множество $L'' \equiv L_1 + L_2$ - подпространство X.*

►

Пусть $x, y \in L''$, тогда

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2, \quad x_1, y_1 \in L_1, \quad x_2, y_2 \in L_2,$$
$$x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \quad \Rightarrow \quad x + y \in L'',$$
$$x\lambda = (x_1 + x_2)\lambda = x_1\lambda + x_2\lambda \quad \Rightarrow \quad x\lambda \in L''.$$

◄

Nota bene Определение суммы подпространств, определенное выше не эквивалентно теоретико-множественному объединению L_1 и L_2.

5.2 Теорема о размерностях

Теорема 5.1. *(Грассман) Пусть L_1 и L_2 - подпространства X, тогда*

$$\dim_{\Bbbk} L_1 + \dim_{\Bbbk} L_2 = \dim_{\Bbbk}(L_1 + L_2) + \dim_{\Bbbk}(L_1 \cap L_2)$$

►

Утверждение теоремы эквивалентно следующему. Пусть

$$\begin{gathered}\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \text{ - базис } L_1 \cap L_2,\\ \{e_1, e_2, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_k\} \text{ - базис } L_1,\\ \{e_1, e_2, \ldots, e_m, g_1, \ldots, g_l\} \text{ - базис } L_2,\end{gathered}$$

тогда

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l\} \text{ - базис } L_1 + L_2.$$

Для доказательства достаточно показать, что $\{e_1, \ldots, f_1, \ldots, g_1 \ldots\}$ - ПН и ЛНЗ в $L_1 + L_2$. Действительно, для любого $x \in L_1 + L_2$ имеем:

$$\begin{gathered}x = x_1 + x_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} e_i \alpha_1^i + \sum_{j=1}^{k} f_j \beta_1^j\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} e_i \alpha_2^i + \sum_{s=1}^{l} g_s \beta_2^s\right) =\\ = \sum_{i=1}^{m} e_i \left(\alpha_1^i + \alpha_2^i\right) + \sum_{j=1}^{k} f_j \beta_1^j + \sum_{s=1}^{l} g_s \beta_2^s,\end{gathered}$$

что доказывает полноту набора. Для доказательства линейной независимости рассмотрим линейную комбинацию:

$$\begin{gathered}e_1\alpha^1 + \ldots + e_m\alpha^m + f_1\beta^1 + \ldots + f_k\beta^k + g_1\gamma^1 + \ldots + g_l\gamma^l = 0,\\ e_1\alpha^1 + \ldots + e_m\alpha^m + f_1\beta^1 + \ldots + f_k\beta^k = -g_1\gamma^1 - \ldots - g_l\gamma^l \equiv z,\end{gathered}$$

где $z \in L_1 \cap L_2$ и значит:

$$z = e_1\delta^1 + \ldots + e_m\delta^m.$$

Из определения $z = -g_1\gamma^1 - \ldots - g_l\gamma^l$ следует

$$g_1\gamma^1 + \ldots + g_l\gamma^l + e_1\delta^1 + \ldots + e_m\delta^m = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^1 = \ldots = \gamma^l = \delta^1 = \ldots = \delta^m = 0,$$

откуда имеем $z = 0$ и

$$e_1\alpha^1 + \ldots + e_m\alpha^m + f_1\beta^1 + \ldots + f_k\beta^k = z = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^1 = \cdots = \alpha^m = \beta^1 = \ldots = \beta^k = 0.$$

◄

Nota bene Понятие суммы и пересечения подпространств распространяется на произвольное конечное их число, именно:

$$\begin{gathered}L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_{\Bbbk} = \{x \in X : \quad x \in L_i, \quad i = 1 \ldots k\},\\ L_1 + L_2 + \ldots + L_{\Bbbk} = \{x \in X : \quad x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \quad x_i \in L_i\}.\end{gathered}$$

То, что это линейные подпространства $X(\Bbbk)$ доказываются аналогично.

5.3 Прямая сумма подпространств. Проекция

Прямой суммой подпространств L_1 и L_2 называется их сумма $\tilde{L}$:

$$\forall x \in \tilde{L} \quad x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in L_1, \quad x_2 \in L_2,$$

когда такое разложение *единственно*.

Nota bene Тот факт, что $\tilde{L}$ является прямой суммой L_1 и L_2 обозначают следующим образом:

$$\tilde{L} = L_1 \dot{+} L_2.$$

Теорема 5.2. *(критерий прямой суммы)*

$$L_1 + L_2 = L_1 \dot{+} L_2 \quad \Leftrightarrow \quad L_1 \cap L_2 = \{0_X\}.$$

▶

$\Rightarrow$ Докажем от противного. Пусть

$$L = L_1 \dot{+} L_2, \quad L_1 \cap L_2 \neq \{0\} \quad \Rightarrow \quad \exists z \in L_1 \cap L_2, \quad z \neq 0,$$
$$x = x_1 + x_2 = x_1 + x_2 + z - z = (x_1 + z) + (x_2 - z).$$

$\Leftarrow$ Докажем от противного. Пусть

$$L_1 \cap L_2 = \{0_X\}, \quad L = L_1 + L_2, \text{ - непрямая сумма}$$
$$x = x_1 + x_2, \quad x = y_1 + y_2 \quad \Rightarrow \quad 0_X = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2),$$
$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = z \neq 0_X, \quad z \in L_1 \cap L_2.$$

◀

Теорема 5.3. *Линейное пространство $X(\Bbbk)$ является прямой суммой своих подпространств L_1 и L_2 тогда и только тогда, когда эти подпространства дизъюнктны, а сумма их размерностей совпадает с размерностью $X(\Bbbk)$:*

$$X = L_1 \dot{+} L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L_1 \cap L_2 = \{0_X\}, \\ \dim_{\Bbbk} L_1 + \dim_{\Bbbk} L_2 = \dim_{\Bbbk} X \end{cases}$$

▶

$\Rightarrow$ Первая часть следует из признака прямой суммы. Вторая - из того что

$$X = L_1 + L_2, \quad \dim_{\Bbbk}(L_1 \cap L_2) = 0_X$$

$\Leftarrow$ Имеем $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$ и значит

$$\dim_{\Bbbk} L_1 + \dim_{\Bbbk} L_2 = \dim_{\Bbbk}(L_1 + L_2) + 0,$$
$$\dim_{\Bbbk} L_1 + \dim_{\Bbbk} L_2 = \dim_{\Bbbk} X,$$
$$\Rightarrow \quad \dim_{\Bbbk} X = \dim_{\Bbbk}(L_1 + L_2).$$

Кроме того,

$$\begin{cases} \dim_{\Bbbk} X = \dim_{\Bbbk}(L_1 + L_2), \\ L_1 + L_2 \subset X \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X = L_1 + L_2 \quad \Leftrightarrow \quad X = L_1 \dot{+} L_2.$$

◀

> Подпространство $L = \dot{+} \sum_{i=1}^{k} L_i$ называется **прямой суммой подпространств** $L_1, L_2, \dots, L_k$, если единственно разложение
>
> $$\forall x \in L \quad x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \quad x_j \in L_j.$$

Лемма 5.3.

$$\sum_{i=1}^{k} L_i = \dot{+} \sum_{i=1}^{k} L_i \quad \Rightarrow \quad L_i \cap L_{j \neq i} = \{0_X\}.$$

▶

Используем нисходящую индукцию. Пусть

$$\sum_{i=1}^{k} L_i = \tilde{L}_{\Bbbk} + L_{\Bbbk}, \quad \tilde{L}_{\Bbbk} = \sum_{i=1}^{k-1} L_i,$$

тогда в силу критерия прямой суммы для двух подпространств будем иметь

$$\tilde{L}_{\Bbbk} + L_{\Bbbk} = \tilde{L}_{\Bbbk} \dot{+} L_{\Bbbk} \quad \Rightarrow \quad \tilde{L}_{\Bbbk} \cap L_{\Bbbk} = \{0_X\}.$$

Таким образом, мы получим

$$L_{\Bbbk} \cap L_{\Bbbk} = \{0_X\}, \quad i = 1 \ldots k - 1.$$

Для подпространства $\tilde{L}_{\Bbbk}$ доказательство повторяется.

◀

Теорема 5.4. *Имеет место следующий критерий разложения линейного пространства $X(\Bbbk)$ в прямую сумму подпространств $L_1, L_2, \dots, L_k$:*

$$X = \dot{+} \sum_{i=1}^{k} L_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L_i \cap L_{j \neq i} = \{0\}, \\ \dim_{\Bbbk} X = \sum_{i=1}^{k} \dim_{\Bbbk} L_i. \end{cases}$$

▶

$\Rightarrow$ следует из предыдущей леммы и теоремы о размерностях.

$\Leftarrow$ используем нисходящую индукцию.

◀

5.4 Проекция вектора на подпространство

Пусть $X = L_1 \dot{+} L_2$, тогда

- x_1, x_2 называются **компонентами** x в L_1 и L_2;
- $x_1 = \mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} x$ называется **проекцией** x на L_1 параллельно L_2;
- $x_2 = \mathcal{P}_{L_2}^{||L_1} x$ называется **проекцией** x на L_2 параллельно L_1;
- $\mathcal{P}_{L_1}^{||L_2}$ называется **проектором на подпространство** L_1;
- $\mathcal{P}_{L_2}^{||L_1}$ называется **проектором на подпространство** L_2;
- L_1 называется **дополнением** L_2 до X;
- L_2 называется **дополнением** L_1 до X;

Nota bene Дополнение к заданному подпространству определяется не единственным образом.

Пример 5.1. Контрпример:

$$L_1 = \mathcal{L}\left\{e_1, e_2\right\}, \quad L_2 = \mathcal{L}\left\{e_3 + \alpha e_1 + \beta e_2\right\}, \quad X = L_1 \dot{+} L_2 \quad \forall \alpha, \beta \in \Bbbk.$$

Лемма 5.4. *Размерность дополнения подпространства не зависит от конкретного выбора этого дополнения.*

►

Доказательство следует из определения дополнения и теоремы о размерностях.

◄

Размерность дополнения подпространства L называется его **коразмерностью**:

$$\dim_{\Bbbk} X = n, \quad \dim_{\Bbbk} L = k, \quad \operatorname{codim}_{\Bbbk} L = n - k.$$

Лекция 6

Линейные формы

Содержание лекции:
В данной лекции мы начнем изучать свойства линейных отображений и разовьем методы, которыми будем активно пользоваться для системного их исследования в дальнейшем. Ближайшим предметом рассмотрения будет линейная форма - скалярная функция векторного аргумента.

Ключевые слова:
Линейная форма, ядро линейной формы, равенство линейных форм, нуль-форма, сумма форм, произведение формы на число, коэффициенты формы в базисе, сопряженные базисы, естественный изоморфизм.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

6.1 Основные определения

Линейной формой f на пространстве $X(\Bbbk)$ называется отображение

$$f : X(\Bbbk) \to \Bbbk,$$

обладающее свойством линейности:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad f(x)\alpha = f(x)\alpha, \quad \forall x, x_1, x_2 \in X(\Bbbk), \quad \forall \alpha \in \Bbbk.$$

Nota bene Для линейных форм приняты следующие обозначения:

$$f(x), \quad (f, x) \quad x \in X(\Bbbk). \tag{6.1}$$

Пример 6.1. Примеры линейных форм:

1. $X = E_3 : \quad (f, \vec{x}) = \text{Пр}_{\vec{l}}^{\perp} \vec{x};$
2. $X = \mathbb{R}^n : \quad (f, x) = \xi^k, \quad x = \sum_{k=1}^n e_k \xi^k;$
3. $X = \mathcal{P}_n : \quad (f, x) = \int_a^b f(t)x(t)dt, \quad f(t) \in \mathcal{P}_n;$
4. $X = \mathbb{R}_n^n : \quad (f, x) = \sum_{i=1}^n x_{ii} = \operatorname{tr} x.$

Ядром линейной формы f называется множество

$$\ker f = \{x \in X(\Bbbk) : \quad f(x) = 0\}.$$

Лемма 6.1. *Ядро* $\ker f$ *- линейное подпространство в* $X(\Bbbk)$.

▶

Достаточно проверить замкнутость $\ker f$ относительно операций в $X(\Bbbk)$. Пусть

$$\forall\, x, x_1, x_2 \in \ker f, \quad \forall \alpha \in \Bbbk$$

тогда прямой проверкой можно убедиться в том, что

$$x_1 + x_2 \in \ker f, \quad \alpha x \in \ker f.$$

◀

Nota bene Имеет место следующее неравенство (будет доказано позже):

$$\operatorname{codim}_{\Bbbk} \ker f \leq 1.$$

Nota bene Всякое уравнение вида

$$f(x) = \alpha, \quad \alpha \in \Bbbk,$$

задает линейное многообразие M с несущим пространством $\ker f$.

$$M = x_0 + \ker f, \quad f(x_0) = \alpha.$$

6.2 Пространство линейных форм

Говорят, что линейные формы f и g **равны** ($f = g$), если

$$(f, x) = (g, x) \quad \forall x \in X(\Bbbk).$$

Линейная форма θ называется **нулевой** (нуль-формой), если

$$(\theta, x) = 0 \quad \forall x \in X(\Bbbk).$$

Суммой линейных форм f и g называется отображение $h = f + g$:

$$(h, x) = (f, x) + (g, x) \quad \forall x \in X(\Bbbk).$$

Лемма 6.2. *Отображение h - линейная форма над $X(\Bbbk)$.*
►

Покажем, что

$$h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2), \quad h(\alpha x) = \alpha h(x) \quad \forall x, x_1, x_2 \in X(\Bbbk).$$

Действительно, первое свойство следует из:

$$(h, x_1 + x_2) = (f, x_1 + x_2) + (g, x_1 + x_2) =$$
$$= (f, x_1) + (f, x_2) + (g, x_1) + (g, x_2) = (h, x_1) + (h, x_2).$$

Второе свойство доказывается аналогично

$$(h, x\alpha) = (f, x\alpha) + (g, x\alpha) = (f, x)\alpha + (g, x)\alpha = (h, x)\alpha.$$

◄

Произведением линейной формы f на число $\alpha \in \Bbbk$ называется отображение $v = \alpha f$, такое что:

$$(v, x) = \alpha(f, x).$$

Лемма 6.3. *Отображение v - линейная форма над $X(\Bbbk)$.*
►
Покажем, что

$$v(x_1 + x_2) = v(x_1) + v(x_2), \quad v(x\beta) = v(x)\beta \quad \forall x, x_1, x_2 \in X(\Bbbk).$$

Аналогично доказательству выше имеем:

$$(v, x_1 + x_2) = \alpha(f, x_1 + x_2) = \alpha(f, x_1) + \alpha(f, x_2) = (v, x_1) + (v, x_2),$$
$$(v, x\beta) = \alpha(f, x)\beta = \alpha(f, x)\beta = (v, x)\beta.$$

◄

Теорема 6.1. *Множество линейных форм на $X(\Bbbk)$ может быть наделено структурой линейного пространства.*

▶

Доказывается прямой проверкой аксиом линейного пространства.

◀

> **Сопряженным пространством** к линейному пространству $X(\Bbbk)$ называется пространство $X^*(\Bbbk)$ линейных форм на $X(\Bbbk)$.

6.3 Сопряженное пространство

> **Коэффициентами линейной формы** в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ линейного пространства $X(\Bbbk)$ называются ее значения на базисных векторах:
>
> $$(f, e_i) = \varphi_i, \quad f \leftrightarrow (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$$

Теорема 6.2. *Задание линейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных векторах, то есть заданию ее коэффициентов.*

▶

$\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Пусть в выбранном базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ линейного пространства X линейная форма задана набором коэффициентов $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, тогда

$$(f, x) = \left(f, \sum_{j=1}^n e_j \xi^j\right) = \sum_{j=1}^n \left(f, e_j \xi^j\right) = \sum_{j=1}^n (f, e_j)\, \xi^j = \sum_{j=1}^n \varphi_j \xi^j, \quad \forall x \in X.$$

◀

Теорема 6.3. *(о базисе X^*) Множество линейных форм $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n : X(\Bbbk) \to \Bbbk$, действующих на $X(\Bbbk)$ с базисом $\{e_j\}_{j=1}^n$ как*

$$(f^k, x) = \xi^k, \quad x = \sum_{j=1}^n e_j \xi^j.$$

образует базис пространства $X^*(\Bbbk)$.

▶

Покажем, что $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ образуют полный и линейнонезависимый набор.

1. Полнота:

$$(f, x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j \xi^j = \sum_{j=1}^n \varphi_j \left(f^j, x\right) \quad \forall x \in X \quad \Leftrightarrow \quad f = \sum_{j=1}^n \varphi_j f^j.$$

2. Линейная независимость:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f^j = \theta \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f^j, e_k\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = 0 \quad \forall k.$$

◀

Nota bene Заметим, что в обозначениях теоремы мы получаем

$$(f^k, e_j) = \delta^k_j = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 1, & k = j. \end{cases}$$

> Базисы $\{e_j\}_{j=1}^n$, $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ пространств X и X^* соответственно называются **сопряженными**, если они обладают свойством:
>
> $$\left(f^k, e_j\right) = \delta^k_j.$$

Лемма 6.4. *Для каждого базиса $\{e_j\}_{j=1}^n$ линейного пространства $X(\Bbbk)$ может быть построен сопряженный ему базис пространства $X^*(\Bbbk)$ и наоборот.*

6.4 Изоморфизм пространств X и X^*

Nota bene Размерности пространств $X(\Bbbk)$ и $X^*(\Bbbk)$ одинаковы, а значит данные пространства изоморфны:

$$\dim_\Bbbk X = \dim_\Bbbk X^* \quad \Leftrightarrow \quad X(\Bbbk) \simeq X^*(\Bbbk).$$

Nota bene Аналогично пространству $X^*(\Bbbk)$ сопряженному $X(\Bbbk)$ можно ввести пространство $X^{**}(\Bbbk)$ сопряженное пространству $X^*(\Bbbk)$ - второе сопряженное пространство - множество линейных форм на $X^*(\Bbbk)$:

$$\hat{x} : X^* \to \Bbbk, \quad \hat{x}(f) = (\hat{x}, f) \in \Bbbk,$$
$$\hat{x}(f + g) = \hat{x}(f) + \hat{x}(g), \quad \hat{x}(\alpha f) = (\hat{x}\alpha)(f).$$

> Изоморфизм двух линейных пространств называется **естественным изоморфизмом**, если он устанавливается без применения понятия базиса.

Лемма 6.5. *Изоморфизм между $X(\Bbbk)$ и $X^{**}(\Bbbk)$ - естественный.*

▶

Искомый изоморфизм устанавливается отношением:

$$\hat{x} \leftrightarrow x : \quad (\hat{x}, f) = (f, x), \quad \forall f \in X^*(\Bbbk).$$

◀

Nota bene Таким образом на $X^{**}(\Bbbk)$ *естественным образом* индуцируется структура линейного пространства:

$$(\hat{x} + \hat{y}, f) = (\hat{x}, f) + (\hat{y}, f), \quad (\alpha\hat{x}, f) = \alpha(\hat{x}, f).$$

Лекция 7

Преобразование базиса

Содержание лекции:

В настоящей лекции мы обсудим замену базиса в линейном пространстве и связанные с этой заменой преобразования координант. Как будет видно, имеются лишь две возможности - ковариантный закон, когда величины преобразуются также как и базисные векторы при переходе, и контравариантный закон - закон противоположный ковариантному. Любой разумный закон движения сопровождается квариантным или контравариантными преобравзованиями наблюдаемых величин.

Ключевые слова:
Матрица перехода, невырожденность матрицы перехода, ковариантные величины, контравариантные величины.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

7.1 Матрица перехода

Nota bene Пусть $X(\Bbbk)$ - линейное пространство и $\{e_j\}_{j=1}^n$, $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ - базисы $X(\Bbbk)$:

$$\forall x \in X(\Bbbk), \quad x = \sum_{j=1}^n e_j \xi^j, \quad x = \sum_{k=1}^n \tilde{e}_k \tilde{\xi}^k.$$

В силу того, что оба набора $\{e_j\}_{j=1}^n$ и $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ являются базисами, каждый из векторов одного набора единственным образом выражается через векторы другого набора:

$$\tilde{e}_k = \sum_{j=1}^n e_j \tau_k^j.$$

> Набор коэффициентов $\|\tau_k^j\| = T$ образует матрицу, которая называется **матрицей перехода** от старого базиса $\{e_j\}_{j=1}^n$ к новому базису $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$.

Nota bene Вводя обозначения $E = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ и $\tilde{E} = [\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n]$ получаем:

$$\tilde{E} = E \cdot T.$$

Лемма 7.1. *Матрица перехода невырождена:*

$$\det T \neq 0.$$

►
Набор векторов $\{e_j\}_{j=1}^n$ - ЛНЗ, а значит $\det T \neq 0$.
◄

Nota bene Существует обратная матрица $T^{-1} = S = \|\sigma_i^l\|$, такая что

$$\tilde{E} \cdot T^{-1} = E \quad \text{или} \quad E = \tilde{E} \cdot S.$$

Теорема 7.1. *Пусть $\{f^i\}_{i=1}$ и $\left\{\tilde{f}^l\right\}_{l=1}$ - базисы $X^*(\Bbbk)$, сопряженные соответственно базисам $\{e_j\}_{j=1}^n$ и $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$, тогда*

$$\tilde{f}^l = \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i.$$

►
По определению сопряженных базисов, Имеем

$$\left(\tilde{f}^l, \tilde{e}_k\right) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^l f^i, \sum_{j=1}^n e_j \tau_k^j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i^l \left(f^i, e_j\right) \tau_k^j =$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i^l \delta_j^i \tau_k^j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^l \tau_k^i = \delta_k^l \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}^l = \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i.$$

◄

Nota bene Вводя соответствующие обозначения, получаем:

$$F = \left(f^1, f^2, \ldots, f^n\right)^T \quad \tilde{F} = \left(\tilde{f}^1, \tilde{f}^2, \ldots, \tilde{f}^n\right)^T \quad \tilde{F} = S \cdot F.$$

7.2 Замена координат при замене базиса

Теорема 7.2. *(о замене координат в $X(\Bbbk)$) Преобразование координат вектора X при переходе от базиса $\{e_j\}_{j=1}^n$ к $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ имеет вид:*

$$\tilde{\xi}^k = \sum_{j=1}^n \sigma_j^k \xi^j, \quad \text{или} \quad \left(\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2, \ldots, \tilde{\xi}^n\right)^T = S \cdot \left(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n\right)^T.$$

►

Прямой проверкой убеждаемся, что

$$\tilde{\xi}^k = \left(\tilde{f}^k, x\right) = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^k f^i, \sum_{j=1}^n e_j \xi^j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^k \left(f^i, e_j\right) \xi^j =$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^k \delta_j^i \xi^j = \sum_{j=1}^n \sigma_j^k \xi^j.$$

◄

Теорема 7.3. *(о замене координат в $X^*(\Bbbk)$) Преобразование координат формы в $X^*(\Bbbk)$ при переходе от базиса $\{f^i\}_{i=1}^n$ к $\left\{\tilde{f}^l\right\}_{l=1}^n$ имеет вид:*

$$\tilde{\eta}_l = \sum_{i=1}^n \eta_i \tau_l^i, \quad \text{или} \quad \left(\tilde{\eta}^1, \tilde{\eta}^2, \ldots, \tilde{\eta}^n\right) = \left(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n\right) \cdot T.$$

►

$$\tilde{\eta}_l = (y, \tilde{e}_l) = \left(\sum_{i=1}^n \eta_i f^i, \sum_{j=1}^n e_j \tau_l^j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \left(f^i, e_j\right) \tau_l^j =$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i \delta_j^i \tau_l^j = \sum_{i=1}^n \eta_i \tau_l^i.$$

◄

Величины, преобразующиеся при переходе к новому базису так же, как базисные векторы (то есть, с использованием матрицы T), называются **ковариантными** величинами и снабжаются нижними индексами (ковекторы).

Величины, преобразующиеся при переходе к новому базису по обратному закону (то есть, с использованием матрицы S), называются **контравариантными** величинами и снабжаются верхними индексами (векторы).

Лекция 8

Системы линейных уравнений

Содержание лекции:

Системы линейных алгебраических уравнений имеют важное прикладное значение в самых различных предметных областях. В настоящей лекции мы построим геометрическую теорию таких систем, научимся опеределять наличие у них решений и их количество. Также мы обсудим наиболее удобное представление данных решений и обсудим структуры на их множестве.

Ключевые слова:
Классификация систем линейных уравнений, геометрическое исследование систем, метод Гаусса, система Крамера, теорема Крамера, однородные системы, теорема Кронеккера-Капелли, альтернатива Фредгольма, фундаментальная система решений, неоднородные системы, общее решение.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

8.1 Основные определения

Система следующего вида

$$\begin{cases} \alpha_1^1\xi^1 + \alpha_2^1\xi^2 + \ldots + \alpha_n^1\xi^n = \beta^1, \\ \alpha_1^2\xi^1 + \alpha_2^2\xi^2 + \ldots + \alpha_n^2\xi^n = \beta^2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \alpha_1^m\xi^1 + \alpha_2^m\xi^2 + \ldots + \alpha_n^m\xi^n = \beta^m. \end{cases}$$

называется **линейной алгебраической системой** из m уравнений и n неизвестных. Набор $\{\alpha_k^i\}_{k=1...n}^{i=1..m}$ называется **коэффициентами системы**, $\{\beta^i\}_{i=1}^m$ **- свободными членами**, $\left\{\xi^k\right\}_{k=1}^n$ **- неизвестными**:

$$\alpha_k^i, \beta^i, \xi^k \in \Bbbk \subset \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

Решением системы называется такой набор $\left\{\xi^k\right\}_{k=1}^n$, при подстановке которого в систему его уравнения превращаются в верные равенства.

Система называется **совместной**, если она имеет решение, в противном случае она называется **несовместной**.

Система называется **определенной**, если она совместна и имеет единственное решение, в противном случае она называется **неопределенной**.

Если все свободные члены системы равны нулю, то система называется **однородной**, в противном случае она называется **неоднородной**.

Альтернативные формы записи

1. Матричная форма: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \ldots & \alpha_n^m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}.$$

2. Векторная форма: $\sum_{i=1}^n a_i\xi^i = b$

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^m \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \vdots \\ \alpha_2^m \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad a_n = \begin{pmatrix} \alpha_n^1 \\ \alpha_n^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^m \end{pmatrix},$$

при этом $\{a_i\}_{i=1}^n, b \in \Bbbk^m$.

Nota bene Из векторной формы следует следующая интерпретация решения системы уравнений: нахождение коэффициентов $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ линейной комбинации векторов из набора $\{a_i\}_{i=1}^n$, соответствующих вектору b.
В дальнейшем будем использовать векторную форму:

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n = b \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n a_i\xi^i = b, \tag{8.1}$$

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n a_i\xi^i = 0. \tag{8.2}$$

8.2 Система Крамера

Система (8.1) называется **системой Крамера**, если $m = n$ и набор векторов $\{a_i\}_{i=1}^n$ - ЛНЗ.

Теорема 8.1. *Система Крамера совместна и определена.*
▶
Из того, что $m = n$ имеем $\{a_i\}_{i=1}^n, b \in \Bbbk^m = \Bbbk^n$ и

$$\dim_{\Bbbk} \mathcal{L}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = n = \dim_{\Bbbk} \Bbbk^n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \simeq \Bbbk^n,$$

$$\{a_i\}_{i=1}^n \text{ - ЛНЗ} \quad \Rightarrow \quad \text{базис } \Bbbk^n \quad \Rightarrow \quad \forall b \in \Bbbk^n\ \exists!\ \left\{\xi^k\right\}_{k=1}^n : \quad b = \sum_{k=1}^n \xi^k a_k,$$

◀

Пусть теперь $m \neq n$ и $\dim_{\Bbbk} \mathcal{L}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = r \leq m = \dim_{\Bbbk} \Bbbk^m$, тогда

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\} \text{ - ЛНЗ} \quad \Rightarrow \quad \text{базис } \mathcal{L}.$$

Коэффициенты $\{\xi^{i_k}\}_{k=1}^r$ называются **базисными** или **главными** неизвестными системы:

$$\xi^{i_1} = \xi^1, \quad \xi^{i_2} = \xi^2, \quad \ldots \quad \xi^{i_r} = \xi^r.$$

Оставшиеся неизвестные называются **свободными** или **параметрическими**:

$$\xi^{i_{r+1}} = \xi^{r+1}, \quad \xi^{i_{r+2}} = \xi^{r+2}, \quad \ldots \quad \xi^{i_n} = \xi^n$$

В новых обозначениях систему (8.1) можно записать в виде:

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_r\xi^r = b - a_{r+1}\xi^{r+1} - a_{r+2}\xi^{r+2} - \ldots - a_n\xi^n. \tag{8.3}$$

Теорема 8.2. *(Кронекера-Капелли) Чтобы система (8.3) была совместна необходимо и достаточно выполнение условия $b \in \mathcal{L}$. При этом, если $r = n$, то система определена а в противном случае $r < n$ неопределена.*

►

⇒ Пусть 8.3 - совместна, тогда $b \in \mathcal{L}$ и

$$b = a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_r\xi^r.$$

⇐ Пусть $b \in \mathcal{L}$, тогда существует набор $\{\xi^i\}_{i=1}^r$ такой что

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_r\xi^r = b.$$

При этом, если $r = n$, тогда $\{a_i\}_{i=1}^n$ - ЛНЗ набор и базис в $\mathcal{L}$, а значит разложение вектора b по этому набору единственно. Если $r < n$, то единственно разложение для

$$b' = b - a_{r+1}\xi^{r+1} - a_{r+2}\xi^{r+2} - \ldots - a_n\xi^n,$$

что дает неоднозначность в разложении b.

◄

Следствия теоремы Кронекера-Капелли

Однородная система

1. всегда совместна (всегда существует тривиальное решение):

2. имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $r < n$;

3. является неопределенной тогда и только тогда, когда $m < n$.

Nota bene Линейная оболочка $\mathcal{L}$ является подпространством $\Bbbk^m$.

Теорема 8.3. *(Альтернатива Фредгольма) Пусть $m = n$, тогда*

1. *или (8.2) имеет единственное тривиальное решение, а (8.1) совместна и определена при любом b;*

2. *или существуют нетривиальные решения (8.2) и система совместна не при любых b.*

►

Из того, что $m = n$ следует $\Bbbk^m = \Bbbk^n$.

1. Из единственности решения следует $\xi^1 = \xi^2 = \ldots = \xi^n = 0$ и линейная независимость набора $\{a_i\}_{i=1}^n$. Тогда при $m = n$ система (8.1) является системой Крамера.

2. Из существования нетривиальных решений следует $\dim_{\Bbbk} \mathcal{L} = r < n = \dim_{\Bbbk} \Bbbk^m$ и существуют $\Bbbk^m \ni b \not\in \mathcal{L}$, такие что система (8.1) несовместна.

◄

Фундаментальная система решений

Обозначим через S множество решений системы (8.2).

Теорема 8.4. *Множество решений S однородной системы (8.2) является линейным подпространством $\Bbbk^n$:*

$$x_1, x_2 \in S \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \in S, \\ x\lambda \in S. \end{cases}$$

►
Имеем:

$$x_1 \in S \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_1^i = 0, \quad x_2 \in S \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_2^i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\xi_2^i + \xi_2^i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_1^i + \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_2^i = 0 + 0 = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i \lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i \cdot \lambda = 0 \cdot \lambda = 0.$$

◄

Теорема 8.5. *Подпространство $S(\Bbbk)$ изоморфно пространству $\Bbbk^{n-r}$:*

$$\dim_{\Bbbk} S = n - r.$$

►
Изоморфизм пространств $S(\Bbbk)$ и $\Bbbk^{n-r}$ устанавливается отображением:

$$\Bbbk^{n-r} \ni \left(\xi^{r+1}, \xi^{r+2}, \ldots, \xi^n\right)^T \quad \leftrightarrow \quad \left(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^r; \xi^{r+1}, \ldots, \xi^n\right)^T \in S(\Bbbk).$$

Действительно, вектор

$$-a_{r+1}\xi^{r+1} - a_{r+2}\xi^{r+2} - \ldots - a_n \xi^n$$

имеет единственное разложение по системе векторов $\{a_i\}_{i=1}^r$ и значит предложенное отображение является биекцией. Кроме того, полагая

$$y_1 = \sum_{i=r+1}^{n} a_i \eta_1^i \quad \leftrightarrow \quad x_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_1^i,$$
$$y_2 = \sum_{i=r+1}^{n} a_i \eta_2^i \quad \leftrightarrow \quad x_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_2^i,$$

будем иметь

$$y_1 + y_2 = \sum_{i=r+1}^{n} a_i \left(\eta_1^i + \eta_2^i\right) \quad \leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\xi_1^i + \xi_2^i\right),$$
$$y\lambda = \sum_{i=r+1}^{n} \eta^i a_i \cdot \lambda \quad \leftrightarrow \quad x\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i \lambda,$$

◄

Фундаментальной системой решений (ФСР) линейной однородной системы уравнений называется любая система из $n-r$ линейнонезависимых решений этой системы, то есть базис пространтва решений однородной системы:

$$\begin{array}{ccc} y_1=(1,0,0,\dots,0)^T, & \leftrightarrow & x_1=(\xi_1^1,\xi_1^2,\dots,\xi_1^r;1,0,0,\dots,0)^T, \\ y_2=(0,1,0,\dots,0)^T, & \leftrightarrow & x_2=(\xi_2^1,\xi_2^2,\dots,\xi_2^r;0,1,0,\dots,0)^T, \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{n-r}=(0,0,0,\dots,1)^T, & \leftrightarrow & x_{n-r}=(\xi_{n-r}^1,\xi_{n-r}^2,\dots,\xi_{n-r}^r;0,0,0,\dots,1)^T. \end{array}$$

Nota bene Построенная выше ФСР называется нормальной ФСР.

Теорема 8.6. *Любое решение однородной системы (8.2) может быть выражено следующим образом:*

$$x! = x_1C_1+x_2C_2+\ldots+x_{n-r}C_{n-r}=\sum_{i=1}^{n-r}x_iC_i.$$

►
Очевидно.
◄

Решение системы (8.2) выражающееся приведенной выше формулой называется **общим решением однородной системы**.

8.3 Неоднородная система

Рассмотрим случай, когда система (8.1) совместна, то есть:

$$b\in\mathcal{L},\quad \dim_{\Bbbk}\mathcal{L}=r<n.$$

Пусть $\tilde{S}$ - множество решений системы (8.1), а $S(\Bbbk)$ множество решений соответствующей ей однородной системы (8.2).

Теорема 8.7. *Пусть $z'\in\tilde{S}$ частное (фиксированное) решение, тогда*

$$z=z'+x,\quad \forall z\in\tilde{S},\quad \forall x\in S(\Bbbk).$$

►
С одной стороны:

$$z'=\left\{\zeta^1,\zeta^2,\dots,\zeta^n\right\},\quad x=\left\{\xi^1,\xi^2,\dots,\xi^n\right\},$$
$$z=z'+x=\left\{\zeta^1+\xi^1,\zeta^2+\xi^2,\dots,\zeta^n+\xi^n\right\}:$$
$$\sum_{i=1}^n a_i\left(\zeta^i+\xi^i\right)=\sum_{i=1}^n a_i\zeta^i+\sum_{i=1}^n a_i\xi^i=b+0=b.$$

С другой стороны:

$$x = z - z' \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\tilde{\zeta}^i - \zeta^i \right) = 0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i,$$

и значит $x \in S(\Bbbk)$. ◄

Теорема 8.8. *Любое решение $z \in \tilde{S}$ может быть представлено в виде:*

$$z = z' + \sum_{i=1}^{n} x_i C_i, \quad \{x_j\}_{j=1}^{n} \text{ - ФСР } (8.2).$$

►

Очевидно.

◄

> Приведенный выше вид решения неоднородной системы (8.1) называется ее **общим решением**.

Nota bene Таким образом, общее решение неоднородной системы представляет собой сумму ее частного решения неоднородной и общего решения соответствующей ей однородной системы.

Nota bene Множество решений $\tilde{S}$ имеет структуру линейного многообразия, параллельного линейному пространству $S(\Bbbk)$.