Содержание

Интегрирование функции многих переменных

1 Кратный интеграл Римана

1.1 Интеграл по брусу

Напомним, брусом Π или $\Pi_{a,b}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ называют множество

$$\Pi_{a,b} := \{x \in \mathbb{R}^n : \ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \ i = 1, .., n\},$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$, $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n)$ и $a_i \leqslant b_i$ $\forall i = 1, ..., n$.

Также можно определить открытый брус $\{x \in \mathbb{R}^n : \ a_i < x_i < b_i, \ i = 1, .., n\}$.

Определение 1.1.1 *Объёмом (мерой) бруса $\Pi_{a,b}$ называют*

$$|\Pi_{a,b}| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Также используют обозначения: $V(\Pi)$, $\mu(\Pi)$ и т.п.

Объёмом открытого бруса называют объём его замыкания.

Заметим, что в $\mathbb{R}^1$ брусом является отрезок, а его объёмом – его длина; в $\mathbb{R}^2$ – прямоугольник и его площадь.

Для $\lambda > 0$ можно рассматривать гомотетию бруса с центром в центре бруса и коэффициентом λ, т.е. каждая сторона бруса увеличивается в λ раз. Результат такой гомотетии будем оболначать $\lambda\Pi_{a,b}$.

Сформулируем основные свойства объёма бруса.

Лемма 1.1.1 (Свойства объёма бруса) *Для произвольного бруса Π выполнены свойства:*

1. *Неотрицательность:* $|\Pi| \geqslant 0$.
2. *Однородность:* $|\lambda\Pi| = \lambda^n |\Pi|$.
3. *Аддитивность: если* $\Pi = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Pi_i$, *где* Π_i *– брусья, попарно не имеющие общих внутренних точек, то* $|\Pi| = \sum\limits_{i=1}^{m} |\Pi_i|$.

4. *Полуаддитивность: если* $\Pi \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Pi_i$, *то* $|\Pi| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} |\Pi_i|$.

5. *Если* $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$, *то* $|\Pi| = |\Pi_1| \cdot |\Pi_2|$.

Доказательство. Доказательство очевидно и предоставляется читателю. □

Для построения интеграла по брусу нам потребуются стандартные (для интеграла Римана) определения.

Определение 1.1.2 *Пусть* τ_i *– разбиение отрезка* $[a_i, b_i]$ *для каждого* $i = 1, .., n$. *Будем говорить, что разбиения* τ_i *генерируют разбиение* τ *бруса* Π, *где* $\tau = \tau_1 \times \tau_2 \times ... \times \tau_n = \{x \in \Pi : \ x_i \in \tau_i, \ i = 1, .., n\}$.

При этом брус Π *представляется в виде объединения брусьев (попарно не имеющих общих внутренних точек), полученных как декартово произведение всевозможных отрезков разбиения соответствующих отрезков* $[a_i, b_i]$ *для каждого* $i = 1, .., n$.

Диаметром (мелкостью, рангом) разбиения τ *называется наибольший диаметр элементов разбиения:*

$$\lambda(\tau) := \max_j \operatorname{diam} \Pi_j,$$

где $\operatorname{diam} A := \sup\limits_{x,y \in A} \rho(x, y)$ *– диаметр множества* A. *Для бруса диаметр равен длине его диагонали.*

Если для каждого элемента разбиения Π_j *выбрана точка* $\xi_j \in \Pi_j$, *то говорят об оснащенном разбиении* (τ, ξ).

Определение 1.1.3 *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \supset \Pi \to \mathbb{R}$, (τ, ξ) *– оснащенное разбиение бруса* Π. *Интегральной суммой функции* f *по брусу* Π *для оснащенного разбиения* (τ, ξ) *будем называть*

$$\sigma_f(\tau, \xi) := \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) |\Pi_i|,$$

где Π_i *– брусья, элементы разбиения* τ.

Определение 1.1.4 *Число* $I \in \mathbb{R}$ *называется интегралом функции* f *по брусу* Π, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall (\tau, \xi) : \ \lambda(\tau) < \delta \ \Rightarrow \ |\sigma_f(\tau, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Для интеграла используют отбозначения:

$$\int\limits_{\Pi} f dx, \quad \iint\limits_{\Pi} f(x_1, x_2) dx_2 dx_2, \quad \iiint\limits_{\Pi} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3, ...$$

Если интеграл существует, то функцию f называют интегрируемой (по Риману) по брусу Π и пишут $f \in R(\Pi)$.

Чтобы подчеркнуть многомерность интеграла, его часто называют кратным, в пространстве $\mathbb{R}^2$ – двойным, в $\mathbb{R}^3$ – тройным.

Теорема 1.1.1 (Необходимое условие интегрируемости) *Если функция f интегрируема по брусу Π, то она ограничена на Π.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству аналогичной теоремы для функции, интегрируемой на отрезке. □

Далее, аналогично вводятся суммы и интегралы Дарбу, их свойства и критерии Дарбу и Римана интегрируемости. Сделаем это коротко.

Верхняя и нижняя суммы Дарбу:

$$S_\tau(f) := \sum_{i=1}^{m} M_i |\Pi_i|, \quad M_i = \sup_{\Pi_i} f(x);$$

$$s_\tau(f) := \sum_{i=1}^{m} m_i |\Pi_i|, \quad m_i = \inf_{\Pi_i} f(x);$$

Интегралы Дарбу (для ограниченной функции f):

$$I^* := \inf_\tau S_\tau(f), \quad I_* := \sup_\tau s_\tau(f).$$

Свойства сумм и интегралов Дарбу:

1. $s_\tau \leqslant \sigma(\tau, \xi) \leqslant S_\tau$;

2. $s_{\tau_1} \leqslant s_{\tau_2}$, $S_{\tau_1} \geqslant S_{\tau_2}$, где $\tau_1 \subset \tau_2$;

3. $s_{\tau_1} \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_{\tau_2}$;

4. $f \in R(\Pi) \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \; S_\tau - s_\tau < \varepsilon$; (критерий Дарбу)

5. $f \in R(\Pi) \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \tau : S_\tau - s_\tau < \varepsilon$; (критерий Римана)

6. $f \in R(\Pi) \;\Leftrightarrow\; f$ – ограничена на Π, $I_* = I^*$.

Доказательства этих свойств и критериев абсолютно такие же, как раньше.

1.2 Множества лебеговой меры ноль

Для формулировки и понимания критерия Лебега нам понадобится понятие множества лебеговой меры ноль. Само понятие меры Лебега будет определено значительно позже.

Определение 1.2.1 *Множество $E \in \mathbb{R}^n$ называется множеством лебеговой (n-мерной) меры ноль, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдётся не более чем счётное покрытие множества E брусьями Π_i, сумма объёмов которых меньше ε:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \{\Pi_i\}_{i=1}^{\infty}: \; E \subset \bigcup_{u=1}^{\infty} \Pi_i, \; \sum_{i=1}^{\infty} |\Pi_i| < \varepsilon.$$

Пример 1.2.1 *Одноточечное множество и конечное множество – это множества лебеговой меры ноль.*

Лемма 1.2.1 (Свойства множеств лебеговой меры ноль) *Выполнены свойства:*

1. *Точка, конечное и счетное множество – лебеговой меры ноль;*
2. *Объединение не более чем счётного набора множеств лебеговой меры ноль – лебеговой меры ноль;*
3. *Если $A \subset B$ и B – лебеговой меры ноль, то A – лебеговой меры ноль;*
4. *Если A имеет внутренние точки, то A – не является множеством лебеговой меры ноль;*
5. *Если $f \in C(\Pi)$, где $\Pi \in \mathbb{R}^{n-1}$ – брус, то её график $\Gamma_f = \{(x, f(x))\} \in \mathbb{R}^n$ – лебеговой меры ноль;*
6. *В определении множеств лебеговой меры ноль вместо замкнутых брусьев можно брать открытые (это не изменит множество множеств лебеговой меры ноль);*
7. *Компакт K является лебеговой меры ноль $\Leftrightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ конечное покрытие брусьями $\{\Pi_i\}_{i=1}^{m}$ суммарным объёмом меньше ε.*
8. *Подпространство $\mathbb{R}^k$: $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ $(k < n)$, является множеством лебеговой меры ноль.*

Доказательство. 1. Очевидно, точку можно покрыть брусом сколь угодно маленького объема. Остальное будет следовать из п.2

2. Пусть $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, E_k – множества лебеговой меры ноль. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдутся покрытия брусьями Π_{ki}: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\Pi_{ki}| < \dfrac{\varepsilon}{2^k}$. Тогда объединение этих покрытий даст покрытие E: $E \subset \bigcup\limits_{i,k\in\mathbb{N}} \Pi_{ki}$. При этом,

$$\sum_{i,k\in\mathbb{N}} |\Pi_{ki}| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

откуда следует требуемое.
3. Очевидно, так как любое покрытие B будет и покрытием A.
4. Если A имеет внутреннюю точку, то оно содержит некоторый шар, внутри которого можно взять брус объема $V > 0$. Тогда суммарный объем любого покрытия будет больше V.
5. Так как Π – компакт, то f – равномерно непрерывна на Π (теорема Кантора). То есть

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x', x'' \in \Pi,\ |x' - x''| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Построим τ – разбиение Π мелкостью $\lambda(\tau) < \delta$, пусть Π_i – элементы разбиения, $\xi_i \in \Pi_i$ – некоторое оснащение. Теперь для каждого ξ_i получим брус в $\mathbb{R}^n$ вида $\Pi_i \times [f(\xi_i) - \varepsilon, f(\xi_i) + \varepsilon)]$, содержащий график функции f над множеством Π_i. Тогда объединение $\bigcup\limits_i (\Pi_i \times [f(\xi_i) - \varepsilon, f(\xi_i + \varepsilon)])$ покрывает весь график функции f, причем его суммарный объем не превосходит $2\varepsilon|\Pi|$, откуда следует требуемое.
6. Если есть покрытие множествами открытыми брусьями, то переходя к их замыканиям, получим покрытие замкнутыми.

Обратно. Пусть есть покрытие замкнутыми брусьями Π_i, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\Pi_i| < \varepsilon$. Для каждого Π_i построим гомотетию с коэффициентом $\lambda > 1$. Получим покрытие открытыми брусьями вида $\operatorname{int}(\lambda\Pi_i)$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\operatorname{int}(\lambda\Pi_i)| = \lambda^n \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\Pi_i| < \lambda^n\varepsilon$, где λ^n – фиксированное число.
7. Следует из определения компакта и п. 6.
8. Подпространство $\mathbb{R}^k$ можно покрыть счетной системой брусьев, каждый из которых имеет лебегову меру ноль в $\mathbb{R}^n$ (следует из п. 5). $\square$

Определение 1.2.2 ("Почти везде") *Говорят, что некоторое свойство P выполнено почти везде (почти всюду) на множестве E, если оно выполнено на $E \setminus A$, где A – множество лебеговой меры ноль.*

Например, функция $f(x) = 1/x$ непрерывна почти везде на $\mathbb{R}$. А функция Дирихле почти всюду равна 0.

1.3 Колебание функции. Обобщение теоремы Кантора

Понятие колебания функции на множестве было определено раньше. Напомним определение и заодно определим колебание в точке.

Определение 1.3.1 (Колебание функции на множестве и в точке) *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Колебанием функции f на множестве E называется*

$$\omega_f(E) = \sup_{x,y \in E} |f(x) - f(y)|.$$

Колебанием функции f в точке $x_0 \in E$ называется

$$\omega_f(x_0) = \lim_{\delta \to 0+} \omega_f(U_\delta(x_0) \cap E) = \inf_{\delta > 0} \omega_f(U_\delta(x_0) \cap E).$$

Последнее равенство верно, так как при сужении множества (окрестности точки x_0) значение колебания функции на нём уменьшается (нестрого), а значит предел при $\delta \to 0+$ будет существовать и равен инфимуму.

Пример 1.3.1 *Для функции $f(x) = \operatorname{sign} x$: $\omega_f(0) = 2$.*

Можно заметить, что $\omega_f(E) \geqslant \omega_f(x)$ для $\forall x \in E$.

С помощью понятия колебания функции в точке и на множестве можно формулировать условие непрерывности и равномерной непрерывности функции.

Лемма 1.3.1 (Критерий непрерывности Бэра) *Функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\omega_f(x_0) = 0$.*

Доказательство. Доказательство опирается на определения и предоставляется читателю. □

Также можно сформулировать равносильное условие равномерной непрерывности функции f на множестве E:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E \quad \Rightarrow\ \omega_f(U_\delta(x) \cap E) < \varepsilon.$$

Теорема Кантора о равномерной непрерывности на компакте будет звучать так:

$$f \in C(K), K \text{ – компакт} \quad \Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in K \quad \omega_f(U_\delta(x) \cap K) < \varepsilon.$$

Далее нам понадобится обобщение этой теоремы.

Теорема 1.3.1 (Обобщение т. Кантора о равномерной непрерывности) *Пусть* $K \in \mathbb{R}^n$ *– компакт,* $f : K \to \mathbb{R}$*. Если* $\forall x \in K$: $\omega_f(x) \leqslant \omega_0$, *то*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ \ \forall x \in K \ \ \omega_f(U_\delta(x) \cap K) < \omega_0 + \varepsilon.$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы Кантора. □

1.4 Критерий Лебега

Пусть $f : \mathbb{R}^n \supset \Pi \to \mathbb{R}$ и E – множество точек разрыва функции f на брусе Π, то есть

$$E = \{x \in \Pi : \ \omega_f(x) > 0\}.$$

Введем для $\alpha > 0$ множества

$$E_\alpha = \{x \in \Pi : \ \omega_f(x) \geqslant \alpha\}.$$

Лемма 1.4.1 E_α *– компакт.*

Доказательство. Ограниченность очевидна, так как $E_\alpha \subset \Pi$. Докажем замкнутость. Пусть $x \in \Pi \setminus E_\alpha$, тогда $\omega_f(x) = \inf\limits_{\delta>0} \omega_f(U_\delta(x) \cap \Pi) < \alpha$ и найдется окрестность $U_\delta(x)$, в которой $\omega_f(U_\delta(x) \cap \Pi) < \alpha$. Тогда $U_\delta(x) \cap \Pi \subset \Pi \setminus E_\alpha$, то есть $\Pi \setminus E_\alpha$ – открыто, откуда E_α – замкнуто. □

Замечание 1.4.1 *Как связаны* E_α *и* E*:*

$$E = \bigcup_{\alpha>0} E_\alpha = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{1/k}.$$

Теорема 1.4.1 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману) *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \supset \Pi \to \mathbb{R}$*, где* Π *– брус. Тогда для интегрируемости* f *по Риману на* Π *необходимо и достаточно, чтобы* f *была ограничена на* Π *и непрерывна почти всюду на* Π*.*

Другими словами, функция интегрируема на брусе тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её точек разрыва имеет лебегову меру ноль.

Доказательство. *1) Необходимость.* Ограниченность следует из интегрируемости.

Множество точек разрыва E представим так:

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{1/k}, \qquad \text{где } E_{1/k} = \{x \in \Pi : \ \omega_f(x) \geqslant \frac{1}{k}\}.$$

Докажем, что каждое $E_{1/k}$ имеет лебегову меру ноль, откуда будет следовать требуемое.

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Так как f – интегрируема на Π, то для $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, что для любого разбиения $\tau = \{\Pi_i\}$ бруса Π мелкостью $\lambda(\tau) < \delta$ выполнено

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_f(\Pi_i)|\Pi_i| < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Теперь все точки множества $E_{1/k}$ разделим на две группы: в $E'_{1/k}$ попадут точки из $E_{1/k}$, попадающие внутрь брусьев разбиения τ; в $E''_{1/k}$ лежат точки из $E_{1/k}$, попадающие на границу брусьев разбиения τ.

Заметим, что $E''_{1/k}$ – множество лебеговой меры ноль, т.к. оно является подмножеством конечного объединения границ брусьев.

Рассмотрим сумму по элементам разбиения Π_i, пересекающимся с $E'_{1/k}$: $\Sigma' := \sum\limits_{i:\Pi_i \cap E'_{1/k} \neq \emptyset} \omega_f(\Pi_i)|\Pi_i|$. Так как $\omega_f(\Pi_i) \geqslant \dfrac{1}{k}$, то имеем

$$\frac{1}{k} \sum_{i:\Pi_i \cap E'_{1/k} \neq \emptyset} |\Pi_i| \leqslant \Sigma' \leqslant \sum_{i=1}^{m} \omega_f(\Pi_i)|\Pi_i| < \frac{\varepsilon}{k},$$

откуда, умножив на k, получаем

$$\sum_{i:\Pi_i \cap E'_{1/k} \neq \emptyset} |\Pi_i| < \varepsilon.$$

То есть, множество $E'_{1/k}$ покрывается набором брусьев суммарным объемом меньше ε, сделовательно, $E'_{1/k}$ имеет лебегову меру ноль. Тогда и $E_{1/k}$ – лебеговой меры ноль.

2) Достаточность. Пусть f ограничена на Π: $|f(x)| \leqslant C$ и множество точек разрыва E – лебеговой меры ноль. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество

$$E_\varepsilon = \{x \in \Pi : \ \omega_f(x) \geqslant \varepsilon\}.$$

Множество E_ε – компакт и лебеговой меры ноль. Тогда существует конечное покрытие множества E_ε брусьями I_i:

$$E_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_i, \quad \sum_{i=1}^{m} |I_i| < \varepsilon.$$

Набор брусьев $\{I_i\}$ генерирует разбиение $\{\Pi_i\}$ бруса Π. Рассмотрим сумму для этого разбиения и разобьем ее на две группы слагаемых:

$$\sum_{i=1}^{p} \omega_f(\Pi_i)|\Pi_i| = \Sigma' + \Sigma'',$$

где в Σ' вошли слагаемые для тех Π_i, которые содержатся в I_j, а в Σ'' – все остальные.

Оценим каждую сумму. Имеем для Σ':

$$\Sigma' \leqslant 2C \sum_{i=1}^{p} |I_i| \leqslant 2C\varepsilon.$$

Для брусьев, соответствующих Σ'' заметим, что так как $\omega_f(x) < \varepsilon$, то измельчая разбиение можно добиться в соответствующих брусьях $\omega_f(\Pi_i) < 2\varepsilon$ (см. обобщение теоремы Кантора). Тогда $\Sigma'' < 2\varepsilon|\Pi|$ и

$$\sum_{i=1}^{p} \omega_f(\Pi_i)|\Pi_i| < \varepsilon(2C + 2|\Pi|),$$

откуда следует интегрируемость функции f на брусе Π. □

1.5 Допустимые множества. Интеграл по множеству.

Теперь наша задача – определить интеграл по множеству, отличному от бруса. Сначала выделим класс "хороших" множеств.

Определение 1.5.1 *Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ будем называть допустимым, если оно ограничено в $\mathbb{R}^n$ и его граница ∂E лебеговой меры ноль (в $\mathbb{R}^n$).*

Пример 1.5.1 *Криволинейная трапеция в $\mathbb{R}^2$, образованная графиком непрерывной на отрезке функции, является допустимым множеством.*

Пример 1.5.2 *Цилиндроид, образованный графиком непрерывной функции $f : \mathbb{R}^2 \supset \Pi \to \mathbb{R}$, т.е. множество*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in \Pi, 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\},$$

является допустимым.

Лемма 1.5.1 (Операции с допустимыми множествами) *Объединение и пересечение конечного числа допустимых множеств – допустимое множество; разность двух допустимых множеств – допустимое множество.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из свойств границы, а именно, для любых множеств A, B:

$$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B,$$
$$\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B,$$
$$\partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B.$$

□

Замечание 1.5.1 *Для бесконечного количества допустимых множеств лемма не верна.*

Для любого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ определим характеристическую функцию $\chi_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Заметим, что функция $\chi_E(x)$ имеет разрывы только на границе множества E. Значит, если E – допустимое множество, то χ_E непрерывна почти всюду на $\mathbb{R}^n$.

Пример 1.5.3 *Функция Дирихле $d(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ равна 0 почти всюду на $[0,1]$. Но при этом разрывна в каждой точке $[0,1]$.*

Пусть теперь $f : \mathbb{R}^n \subset E \to \mathbb{R}$. Доопределим функцию на всем $\mathbb{R}^n$ с помощью функции

$$f_{\chi_E}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in E; \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Заметим, что если f была непрерывна на E, то f_{χ_E} может иметь разрывы только на ∂E, (на множестве лебеговой меры ноль), а значит, будет непрерывна почти везде. Если же f имела непустое множество точек разрыва, то переходя к f_{χ_E} это множество может изменить только на множество лебеговой меры ноль.

Определение 1.5.2 (Интеграл по множеству) *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, E – ограниченное множество. Интегралом функции f по множеству E называется*

$$\int\limits_E f(x)dx := \int\limits_{\Pi \supset E} f_{\chi_E}(x)dx,$$

где Π – произвольный брус, содержащий E.

Если интеграл справа существует, то говорят, что f интегрируема по Риману на E и пишут $f \in R(E)$.

Данное определение требует пояснения, так как интеграл справа зависит от бруса Π.

Лемма 1.5.2 *Пусть Π_1, Π_2 – два бруса, содержащие множество E. Тогда оба интеграла ниже существуют или не существуют одновременно, и если существуют, то*

$$\int\limits_{\Pi_1 \supset E} f_{\chi_E}(x)dx = \int\limits_{\Pi_2 \supset E} f_{\chi_E}(x)dx.$$

Доказательство. Построим брус $\Pi = \Pi_1 \cap \Pi_2$, $E \subset \Pi$. Так как точки разрыва функции f_{χ_E} лежат в E или на ∂E, то все ее точки разыва лежат в Π. Следовательно, по критерию Лебега, интегралы по брусьям Π, Π_1, Π_2 существуют или нет одновременно.

Если они существуют, то мы можем выбирать разбиения удобным образом. Выберем разбиения Π_1 и Π_2 такие, что они получаются продолжением разбиения Π. Так как вне Π функция равна нулю, то интегральные суммы по $\Pi_{1,2}$ будут совпадать с интегральной суммой для Π с таким же оснащением. Откуда следует равенство интегралов. □

Далее легко получить критерий интегрируемости функции по допустимому множеству.

Теорема 1.5.1 (Критерий интегрируемости по допустимому множеству) *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ интегрируема на допустимом множестве E тогда и только тогда, когда она ограничена и непрерывна почти везде на E.*

Доказательство. Утверждение следует из критерия Лебега и того, что по сравнению с f у функции f_{χ_E} могут добавиться точки разрыва на ∂E, мера лебега которого ноль. □

1.6 Мера Жордана

Пусть $E \in \mathbb{R}^n$ – произвольное ограниченное множество.

Определение 1.6.1 (Мера Жордана) *Мерой (Жордана) или объёмом ограниченного множества E назовём значение интеграла*

$$\mu(E) := \int\limits_E 1 \cdot dx,$$

если он существует. В случае существования множество называется измеримым по Жордану.

Замечание 1.6.1 *Из определения интеграла и критерия интегрируемости следует, что указанный интеграл существует только для допустимого множества E. Таким образом, множества всех допустимых множеств и измеримых по Жордану совпадают.*

Замечание 1.6.2 *Мера Жордана бруса совпадает с его объёмом:*

$$\mu(\Pi) = |\Pi|.$$

Обсудим геометрический смысл меры Жордана. Пусть E – ограничено. Рассмотрим брус $\Pi \supset E$ и суммы Дарбу:

$s_{\chi_E}(\tau) = \sum\limits_i |\Pi_i|$ – только по тем Π_i, которые лежат внутри E (см. Рис.);

$S_{\chi_E}(\tau) = \sum\limits_i |\Pi_i|$ – только по тем Π_i, объединение которых покрывает E (см. Рис.).

Тогда измеримость по Жордану равносильна (по критерию Римана) тому, что для $\forall \varepsilon > 0$ найдется разбиение τ, для которого $S_{\chi_E}(\tau) - s_{\chi_E}(\tau) < \varepsilon$, то есть мера "полосы", содержащей границу ∂E (см. Рис.), будет сколь угодно маленькой.

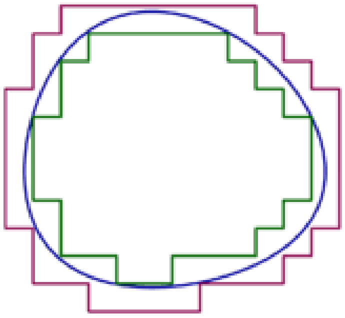


Рис. 1: Про меру Жордана. Площадь зеленого – нижние суммы Дарбу, красного – верхние

Заметим, также, что множество жордановой меры ноль – это множество, допускающее конечное покрытие брусьями суммарного объема меньше наперёд выбранного ε.

Любое множество лебеговой меры ноль будет и жордановой меры ноль. Но не наоборот.

Пример 1.6.1 *Множество $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ – меры ноль по Лебегу, но неизмеримо по Жордану, т.к. $\partial A = [0, 1]$ имеет Жорданову меру 1.*

1.7 Свойства кратного интеграла

Свойства кратного интеграла аналогичны свойствам одномерного интеграла.

1. *Линейность.* Множество $R(E)$ функций, интегрируемых по Риману на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, является линейным пространством (относительно стандартных операций сложения функций и умножения на число). Интеграл $\int\limits_E : R(E) \to \mathbb{R}$ является линейным функционалом на $R(E)$ (т.е. линейным оператором, возвращающим значения в $\mathbb{R}$).

2. *Аддитивность.* Пусть A и B – допустимые множества в $\mathbb{R}^n$, $f : A \cup B \to \mathbb{R}$. Тогда
$$\exists \int\limits_{A\cup B} f dx \Leftrightarrow \exists \int\limits_{A} f dx \wedge \exists \int\limits_{B} f dx.$$
Причём, если $\mu(A \cap B) = 0$, то
$$\int\limits_{A\cup B} f dx = \int\limits_{A} f dx + \int\limits_{B} f dx.$$

3. *Интеграл модуля.* Если $f \in R(E)$, то $|f| \in R(E)$, и
$$\Big|\int\limits_{E} f dx\Big| \leqslant \int\limits_{E} |f| dx.$$

4. *Интегрирование неравенства.* Пусть $f, g \in R(E)$ и $f \leqslant g$ на E. Тогда
$$\int\limits_{E} f dx \leqslant \int\limits_{E} g dx.$$
В частности, если $f \geqslant 0$ на E, то $\int\limits_{E} f dx \geqslant 0$.

Здесь можно предполагать выполнение исходных неравенств почти везде на E.

5. *Теорема о среднем.* Пусть $f, g \in R(E)$, E – допустимое, $m \leqslant f \leqslant M$, $g \geqslant 0$ на E. Тогда
$$m \int\limits_{E} g dx \leqslant \int\limits_{E} f g dx \leqslant M \int\limits_{E} g dx.$$
В частности,
$$m\mu(E) \leqslant \int\limits_{E} f dx \leqslant M\mu(E),$$
Следствие. Если при этом $m = \inf\limits_{E} f$, $M = \sup\limits_{E} f$, то
$$\exists \theta \in [m, M] : \quad \int\limits_{E} f dx = \theta\mu(E).$$

Если при этом $f \in C(E)$ и E – связное и допустимое, то

$$\exists \xi \in E : \int\limits_E f dx = f(\xi)\mu(E).$$

6. *Интеграл по множеству меры ноль.* Пусть E – жордановой меры ноль, f – ограничена на E. Тогда $f \in R(E)$ и $\int\limits_E f dx = 0$.

   Если здесь взять множество E лебеговой меры ноль, то функция уже может не быть интегрируемой на E. См. пример ниже.

7. *Интеграл от почти везде нулевой функции.* Пусть $f \in R(E)$, $f = 0$ почти везде на ограниченном множестве E. Тогда $\int\limits_E f dx = 0$.

   Следствие. Если $f, g \in R(E)$, $f = g$ почти везде на E, то интегралы $\int\limits_E f dx = \int\limits_E g dx$.

8. Если E – допустимое, $f \geqslant 0$ на E и $\int\limits_E f dx = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E.

Замечание 1.7.1 *Пусть E – допустимое. Введем на линейном пространстве $R(E)$ интегрируемых на E функций отношение эквивалентности:*

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; f = g \text{ почти всюду на } E.$$

Тогда на полученном фактор-пространстве $\tilde{R}(E)$ определена норма

$$\|f\| = \int\limits_E |f| dx.$$

Пример 1.7.1 *Пусть $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $f(x) = 1$. Заметим, что E – лебеговой меры ноль (как счетное). Доопределяя функцию нулем на $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$, получим функцию Дирихле, которая не интегрируема на $[0,1]$.*

1.8 Теорема Фубини

Как же вычислять кратный интеграл?

Теорема 1.8.1 (Фубини) *Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ – брусья, функция $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – интегрируема на $X \times Y$. Тогда следующие три интеграла существуют одновременно и равны:*

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)dxdy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)dy = \int\limits_Y dy \int\limits_X f(x,y)dx.$$

Сначала расшифруем написанные интегралы. Здесь $x \in X$, $y \in Y$. Интеграл $\int\limits_{X\times Y} f(x,y)dxdy$ – интеграл Римана функции f по брусу $X \times Y$.

Другие два интеграла называются повторными и означают:

$$\int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)dy := \int\limits_X \Big(\int\limits_Y f(x,y)dy\Big)dx = \int\limits_X F(x)dx,$$

где $F(x) = \int\limits_Y f(x,y)dy$. Если при некотором значении x $F(x)$ не существует, то полагают $F(x)$ равным любому числу, лежащему между соответствующими интегралами Дарбу:

$$I_*(x) = \sup_{\tau_Y} \sum_j \inf_{y\in Y_j} f(x,y)|Y_j| \leqslant F(x) \leqslant \inf_{\tau_Y} \sum_j \sup_{y\in Y_j} f(x,y)|Y_j| = I^*(x).$$

Докажем, в частности, что при этом $F \in R(X)$.

Аналогично относительно интеграла $\int\limits_Y dy \int\limits_X f(x,y)dx$.

Доказательство. Пусть τ – разбиение $X \times Y$, и τ_X, τ_Y – соответствующие ему разбиения брусьев X и Y, а X_i, Y_j – соответствующие элементы этих разбиений. Тогда $X_i \times Y_j$ – элементы разбиения τ, и $|X_i \times Y_j| = |X_i| \cdot |Y_j|$.

Запишем цепочку неравенств (все суммы конечные, соответствуют разбиениям)

$$\begin{aligned} s_f(\tau) &= \\ &= \sum_{i,j} \inf_{(x,y)\in X_i\times Y_j} f(x,y)|X_i \times Y_j| \leqslant \sum_i \inf_{x\in X_i} \Big(\sum_j \inf_{y\in Y_j} f(x,y)|Y_j|\Big)|X_i| \leqslant \\ &\leqslant \sum_i \inf_{x\in X_i} I_*(x)|X_i| \leqslant \sum_i \inf_{x\in X_i} F(x)|X_i| = s_F(\tau_X) \leqslant \\ &\leqslant S_F(\tau_X) = \sum_i \sup_{x\in X_i} F(x)|X_i| \leqslant \sum_i \sup_{x\in X_i} I^*(x)|X_i| \leqslant \\ &\leqslant \sum_i \sup_{x\in X_i} \Big(\sum_j \sup_{y\in Y_j} f(x,y)|Y_j|\Big)|X_i| \leqslant \sum_{i,j} \sup_{(x,y)\in X_i\times Y_j} f(x,y)|X_i \times Y_j| = S_f(\tau). \end{aligned}$$

Так как $f \in R(X \times Y)$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau$: $S_f(\tau) - s_f(\tau) < \varepsilon$. Следовательно, и $\exists \tau_X$: $S_F(\tau_X) - s_F(\tau_X) < \varepsilon$, а значит, $F(x)$ интегрируема на X и её интеграл по X (повторный интеграл для f) равен двойному интегралу f по $X \times Y$.

Аналогично для второго повторного интеграла. □

Теорема Фубини позволяет переходить от кратного интеграла по брусу к повторному интегралу по брусьям меньшей размерности. Но как интегрировать по более сложным множествам.

Выделим класс "удобных" множеств.

Определение 1.8.1 (Элементарное множество) *Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ будем называть элементарным по y, если*

$$E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in D \subset \mathbb{R}^{n-1},\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\big\},$$

где D – измеримо по Жордану, $\varphi_{1,2} : D \to \mathbb{R}$ – непрерывны и ограничены на D.

Заметим, что элементарное множество измеримо по Жордану.

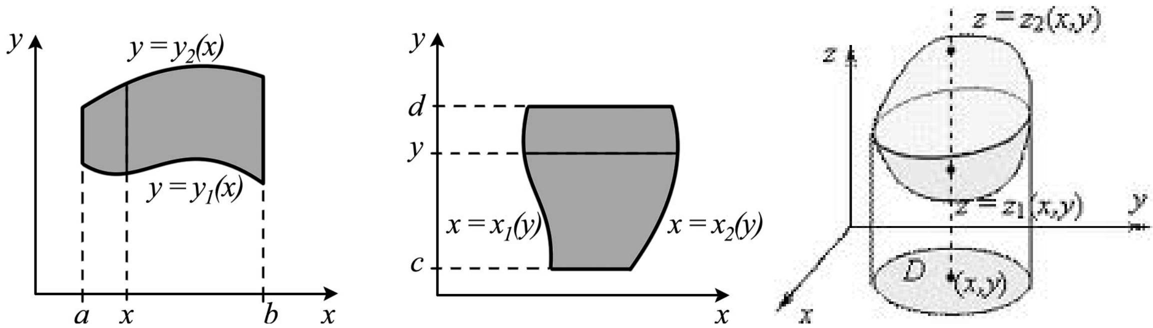


Рис. 2: Примеры элементарных множеств в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}^3$

Следствие 1.8.2 (Интегрирование по элементарному множеству) *Если E – элементарно по y, и $f \in R(E)$, то*

$$\int\limits_E f(x, y)dxdy = \int\limits_D dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

Следствием теоремы Фубини является знаменитый принцип Кавальери.

Теорема 1.8.3 (Принцип Кавальери) *Пусть $A, B \in \mathbb{R}^3$ – два тела, измеримые по Жордану, $A_c := \{(x, y, z) \in A :\ z = c\}$, $B_c := \{(x, y, z) \in B : z = c\}$ – сечения тел плоскостью $z = c$. Если при любом $c \in \mathbb{R}$ множества A_c и B_c измеримы (в $\mathbb{R}^2$) и имеют одинаковую площадь (меру Жордана в $\mathbb{R}^2$), то объемы тел A и B равны.*

1.9 Замена переменных в кратном интеграле

Сформулируем сразу основную теорему.

Теорема 1.9.1 (Замена переменной в кратном интеграле) *Пусть множества $G_x, G_t \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченные и открытые, $f \in R(G_x)$, и $\varphi : G_t \to G_x$ – биективно и регулярно, (т.е. $\varphi \in C^1(G_t)$, $\varphi^{-1} \in C^1(G_x)$). Тогда*

$$\int\limits_{G_x} f(x)dx = \int\limits_{G_t} f(\varphi(t))\,|\det \varphi'(t)|dt.$$

Доказательство. Строгое доказательство этой теоремы довольно трудоемко. Ограничимся геометрическими интерпретациями для случая $\mathbb{R}^2$.

Пусть $\varphi = (x(u,v), y(u,v) \in C^1(G_t)$, $G_x = \varphi(G_t)$, $f(x,y) \in R(G_x)$. τ – разбиение бруса $\Pi \supset G_t$ брусьями Π_{ij}, где $|\Pi_{ij}| = \Delta u_i \Delta v_j$.

Рассмотрим один брус с вершинами в точках (u,v), $(u+du,v)$, $(u+du, v+dv)$, $(u, v+dv)$. При отображении φ он перейдёт в криволинейный четырехугольник с вершинами в точках $P_0 = \varphi(u,v)$, $P_1 = \varphi(u+du, v)$, $P_2 = \varphi(u+du, v+dv)$, $P_3 = \varphi(u, v+dv)$ (см. Рис.).

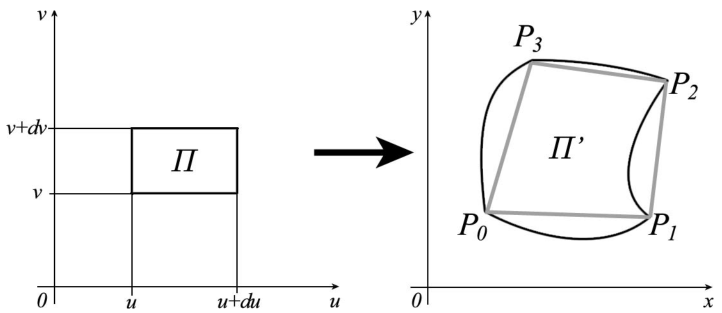


Рис. 3: Образ элементарного прямоугольника при замене переменных

Зададимся вопросом, как изменится площадь этого бруса, равная $dudv$?

Обозначим $x_0 = x(u,v)$, $y_0 = y(u,v)$.

Запишем для каждой координаты вершин $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$, как значения функций от u и v, формулу Тейлора до второго члена:

$$x_1 = x(u+du, v) = x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}du + \alpha_1,$$
$$y_1 = y(u+du, v) = y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}du + \beta_1,$$
$$x_2 = x(u+du, v+dv) = x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \alpha_2,$$
$$y_2 = y(u+du, v+dv) = y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \beta_2,$$
$$x_3 = x(u, v+dv) = x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \alpha_3,$$
$$y_3 = y(u, v+dv) = y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \beta_3,$$

где все $\alpha_1, \alpha_2, \alpha 3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ есть $o\left(\sqrt{du^2+dv^2}\right)$ при $du \to 0$, $dv \to 0$.

Тогда:

$$P_0\vec{P}_1 = (\frac{\partial x}{\partial u}du + \alpha_1,\ \frac{\partial y}{\partial u}du + \beta_1),$$
$$P_2\vec{P}_3 = (-\frac{\partial x}{\partial u}du - \alpha_2,\ -\frac{\partial y}{\partial u}du - \beta_2).$$

Получаем, что с точностью до $o\left(\sqrt{du^2+dv^2}\right)$ $P_0\vec{P}_1 = P_2\vec{P}_3$. То есть, приближенно, образ бруса можно считать параллелограммом $P_0P_1P_2P_3$.

Площадь параллелограмма (здесь знак $\approx$ означает равенство с точностью до $o\left(\sqrt{du^2+dv^2}\right)$):

$$\mu(\Pi') \approx S_{P_0P_1P_2P_3} = \left| \det \begin{pmatrix} x'_u du & x'_v dv \\ y'_u du & y'_v dv \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \right| |dudv| =$$
$$= |J(u,v)dudv| = |J(u,v)|\mu(\Pi).$$

Можно доказать точное равенство:

$$\lim_{du,dv \to 0,0} \frac{\mu(\Pi')}{dudv} = |J(u,v)|.$$

Далее, подставляя полученное выражение для площади в интегральную сумму, после предельного перехода, получим требуемое. □

Замечание 1.9.1 *Теорема о замене переменной в одномерном интеграле Римана является частным случаем приведённой теоремы:*

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где $\varphi : [\alpha, \beta] \to [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$ *– монотонна. Модуля нет, но и в интеграле допускается* $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$.

Замечание 1.9.2 *Нарушение взаимной однозначности отображения или равенство якобиана нулю на множестве меры нуль (например, в отдельных точках или на линии) не влияют на справедливость формулы замены переменной, т.к. множество меры нуль всегда можно покрыть клеточным множеством сколь угодно малой меры, так что интегральная сумма для него будет стремиться к нулю и не повлияет на значение интеграла.*

1.10 Цилиндрические и сферические координаты в $\mathbb{R}^3$

Цилиндрические координаты являются обобщением полярных координат. Точка задается полярными координатами (ρ, φ) проекции на плоскость XOY и координатой z по оси OZ. Формулы для перехода:

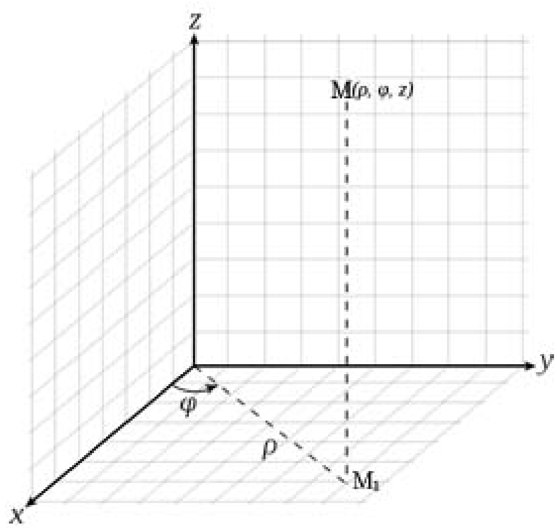


Рис. 4: Цилиндрические координаты

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Якобиан для цилиндрических координат такой же, как и для полярных:

$$J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

В сферических координатах точка M задается тройкой (r, φ, θ) , где r – расстояние от точки M до начала координат, $\varphi \in [0, 2\pi)$ – полярный угол проекции точки на плоскость XOY (иначе говоря, угол XOM_1 , где M_1 – проекция точки M), $\theta \in [0, \pi]$ – угол между радиус-вектором OM и положительным направление оси OZ.

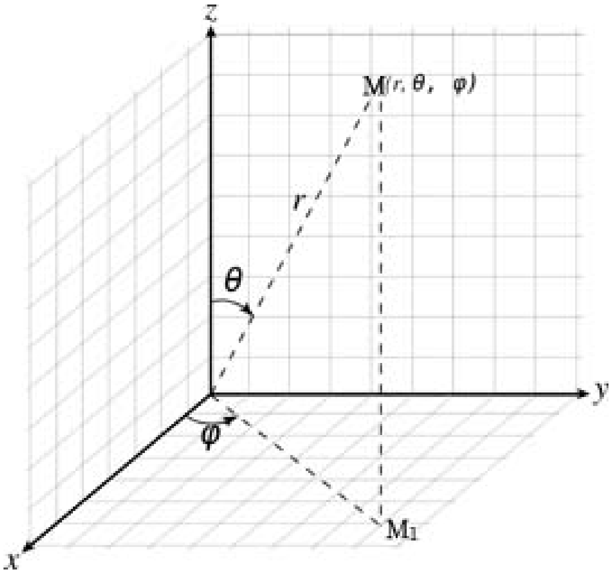


Рис. 5: Сферические координаты

Формулы перехода и якобиан имеют вид:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \qquad |J(r, \varphi, \theta)| = r^2\sin\theta.$$

Якобиан обращается в ноль на оси OZ, т.е. на множестве меры ноль в $\mathbb{R}^3$.

Замечание 1.10.1 *Иногда в качестве угла θ используют угол θ_1 между радиус-вектором точки и плоскостью XOY, т.е. $\theta_1 = \pi/2 - \theta$ в наших обозначениях. Тогда формулы для перехода будут иметь вид*

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta_1, \\ y = r\sin\varphi\cos\theta_1, \\ z = r\sin\theta_1. \end{cases} \qquad \text{и} \quad J(r, \varphi, \theta_1) = -r^2\cos\theta_1.$$

1.11 Примеры вычисления кратных интегралов

Пример 1.11.1 *Найти площадь фигуры, ограниченной кривой*

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2). \quad \textit{лемниската}$$

Перепишем уравнение кривой в полярных координатах:

$$r^4 = 2a^2r^2\cos 2\varphi \quad \text{или} \quad r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

Заметим, что кривая симметрична относительно координатных осей. Тогда будем искать площадь фигуры, лежащей в первой четверти (см. Рис.).

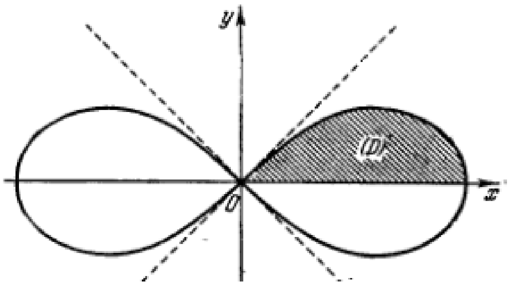


Рис. 6: Лемниската

$$\frac{1}{4}S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D'} rdrd\varphi = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} rdr = a^2\int\limits_0^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}.$$

Пример 1.11.2 *Вычислить интеграл*

$$\iint\limits_G y^3 dxdy,$$

G – ограничена двумя параболами $y = x^2$, $y = 2x^2$ и двумя гиперболами $xy = 1$, $xy = 2$.

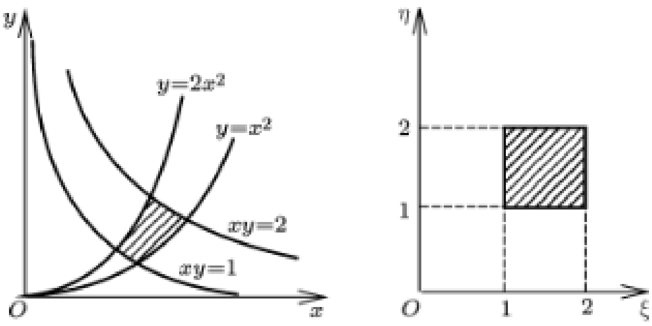


Рис. 7: G – ограничена двумя параболами $y = x^2$, $y = 2x^2$ и двумя гиперболами $xy = 1$, $xy = 2$

Введём новые переменные $u = y/x^2$, $v = xy$. Вычислим якобиан:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{2y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{3y}{x^2}, \quad |J| = \frac{x^2}{3y}.$$

Тогда

$$\iint\limits_G y^3 dxdy = \iint\limits_{G'} \frac{1}{3}x^2y^2 dudv = \frac{1}{3}\iint\limits_{G'} v^2 dudv = \frac{1}{3}\int\limits_1^2 du \int\limits_1^2 v^2 dv = \frac{7}{9}.$$

Пример 1.11.3 *Вычислить несколькими способами* $I = \iiint\limits_\Omega z dxdydz$*, где тело* Ω *ограничено конусом* $R^2z^2 = h^2(x^2+y^2)$ *и плоскостью* $z = h$.

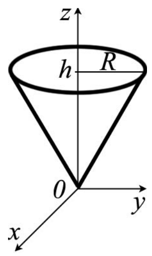


Рис. 8: Тело Ω ограниченное конусом и плоскостью

1-ый способ. Зададим тело таким образом:

$$(x,y) \in D: \quad x^2+y^2 \leqslant R^2, \quad \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant h.$$

Тогда

$$I = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} zdz = \frac{h^2}{2}\iint\limits_D \left(1 - \frac{1}{R^2}\left(x^2+y^2\right)\right) dxdy =$$

перейдем в полярные координаты

$$= \frac{h^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr = \frac{h^2}{2} 2\pi \frac{R^2}{4} = \frac{\pi h^2 R^2}{4}.$$

2-ой способ. Представим тело так:

$$0 \leqslant z \leqslant h,\ (x,y) \in D(z): x^2+y^2 \leqslant \frac{R^2z^2}{h^2}.$$

Тогда

$$I = \int\limits_0^h zdz \iint\limits_{D(z)} dxdy = \int\limits_0^h z S_{D(z)} dz = \int\limits_0^h \frac{R^2z^3}{h^2} dz = \frac{\pi h^2 R^2}{4}.$$

3-ий способ. В цилиндрических координатах. Тело Ω в цилиндрических координатах задается неравенствами:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{Rz}{h}.$$

Тогда

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h z dz \int\limits_0^{\frac{Rz}{h}} r dr = 2\pi \frac{1}{2} \int\limits_0^h \frac{R^2 z^3}{h^2} dz = \frac{\pi h^2 R^2}{4}.$$

4-ый способ. В сферических координатах. Конус Ω в сферических координатах задается неравенствами

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \operatorname{arctg} \frac{R}{h}, \quad 0 \leqslant r \leqslant \frac{h}{\cos\theta}.$$

Тогда

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\operatorname{arctg} \frac{R}{h}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int\limits_0^{\frac{h}{\cos\theta}} r^3 dr = \cdots = \frac{\pi h^2 R^2}{4}.$$

Пример 1.11.4 *Найти объем тела, ограниченного поверхностью*

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^2 \left(x^2 + y^2 - z^2\right).$$

Желательно сделать рисунок тела, но глядя на данное уравнение это сделать затруднительно. Наличие выражения $x^2+y^2+z^2$ наводит на мысль о переходе в сферические координаты, в которых $x^2+y^2+z^2 = r^2$. Подставим формулы перехода в сферические координаты в уравнение:

$$r^4 = a^2 r^2 \left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) \quad \text{или} \quad r^2 = -a^2 \cos 2\theta.$$

Видим, что r не зависит от φ, значит, тело является телом вращения (ось вращения – OZ). Рассмотрим сечение тела плоскостью XOZ (или любой другой, проходящей через ось OZ). Нарисуем кривую в плоскости XOZ, задаваемую уравнением $r = a\sqrt{-\cos 2\theta}$, где r - полярный радиус точки, θ - угол с осью OZ.

Область допустимых значений θ находится из условия $\cos 2\theta \leqslant 0$, что дает решения $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Нарисуем примерный график (См. Рис. слева). Тогда искомое тело получается вращением данной фигуры вокруг оси OZ (см. Рис. справа).

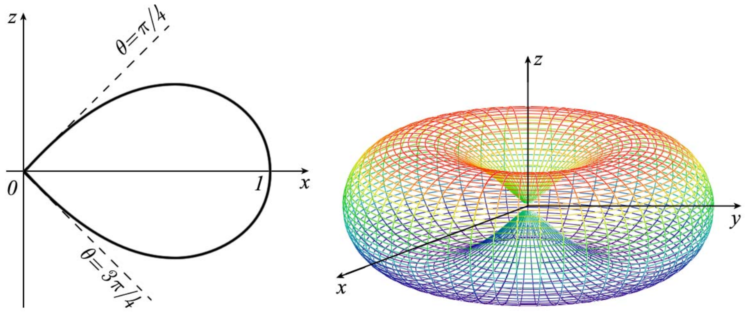


Рис. 9:

Для нахождения объема воспользуемся формулой для объёма, записанной в сферических координатах:

$$V_T = \iiint\limits_T dxdydz = \iiint\limits_\Omega r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta =$$

теперь перейдем к повторному интегралу (порядок интегрирования обычно удобно выбирать именно такой, т.к. зависимости от φ *нет, а кривая задается зависимостью* r *от* θ*)*

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{-\cos 2\theta}} r^2 dr =$$

самый внешний интеграл (по φ*) можно вычислить сразу (т.к. зависимости от* φ *нет)*

$$= 2\pi \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{-\cos 2\theta}} r^2 dr = \frac{2\pi a^3}{3} \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta \left(-\cos 2\theta\right)^{3/2} d\theta =$$

$$= -\frac{2\pi a^3}{3} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(1 - 2\cos^2\theta\right)^{3/2} d\left(\cos\theta\right) = \frac{4\pi a^3}{3} \int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \left(1 - 2t^2\right)^{3/2} dt$$

Не будем углубляться в вычисления и напишем ответ: $V_T \cong 1,745\, a^3$.

2 Несобственный кратный интеграл

Будем рассматривать пространство $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$.

Определение 2.0.1 *Последовательность измеримых по Жордану множеств $\{E_k\}$ называется исчерпанием множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если $E_k \subset E_{k+1}$ при $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = E$.*

Например, замкнутые круги $B_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 4 - \dfrac{1}{k}\}$ исчерпывают открытый круг $B_2(0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 4\}$.

Теорема 2.0.1 (о непрерывности меры Жордана и интеграла) *Пусть $\{E_k\}$ – исчерпание измеримого по Жордану множества E. Тогда:*

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \mu E_k = \mu E$;

2. *если $f \in R(E)$, то $f\Big|_{E_k} \in R(E_k)$ для $\forall k \in \mathbb{N}$ и*

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx = \int\limits_{E} f(x)dx.$$

Доказательство. 1. Так как $E_k \subset E_{k+1}$, то $\mu E_k \leqslant \mu E_{k+1}$ и последовательность μE_k возрастает. Но она ограничена сверху: $\mu E_k \leqslant \mu E$. Следовательно, предел существует и $\lim\limits_{k\to\infty} \mu E_k \leqslant \mu E$. Докажем обратное неравенство.

Так как E измеримо по Жордану, то $\mu(\partial E) = 0$, то есть для выбранного $\varepsilon > 0$ его границу ∂E можно покрыть конечным набором открытых брусьев суммарным объемом меньше ε. Обозначим Δ – объединение этих брусьев, а $\tilde{E} = E \cup \Delta$ – открыто и

$$\mu(\bar{E}) \leqslant \mu(\tilde{E}) \leqslant \mu E + \mu\Delta < \mu E + \varepsilon.$$

Для каждого E_k проделаем аналогичную процедуру – покроем границу ∂E_k открытыми брусьями суммарным объемом меньше $\varepsilon/2^k$ и $E_k \subset \tilde{E}_k = E_k \cup \Delta_k$:

$$\mu(\tilde{E}_k) \leqslant \mu E_k + \mu\Delta_k < \mu E_k + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Открытые множества Δ, $\tilde{E}_k$ образуют покрытие компакта $\bar{E}$. Пусть Δ, $\tilde{E}_1$,...,$\tilde{E}_k$ – его конечное подпокрытие. Тогда Δ, Δ_1,...,Δ_k, E_k – тоже является покрытием $\bar{E}$ и, следовательно,

$$\mu E \leqslant \mu\bar{E} \leqslant \mu E_k + \mu\Delta + \mu\Delta_1 + ... + \mu\Delta_k < \mu E_k + 2\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\mu E \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} \mu E_k$.

2. Интегрируемость следует из критерия Лебега.

Докажем сходимость интеграла:

$$\Big|\int\limits_E f dx - \int\limits_{E_k} f dx\Big| = \Big|\int\limits_{E\setminus E_k} f dx\Big| \leqslant \int\limits_{E\setminus E_k} |f| dx \leqslant$$

(так как $f \in R(E)$, то $|f| \leqslant C$)

$$\leqslant C\mu(E \setminus E_k) = C(\mu E - \mu E_k) \to 0.$$

□

Теперь можно дать определение несобственного интеграла.

Определение 2.0.2 *Пусть $\{E_k\}$ – исчерпания множества E, $f \in R(E_k)$. Тогда несобственным интегралом функции f по множеству E называется предел:*

$$\int\limits_E f dx := \lim_{k\to\infty} \int\limits_{E_k} f dx.$$

Если этот предел существует в $\mathbb{R}$ и не зависит от выбора исчерпания $\{E_k\}$, то говорят, что несобственный интеграл сходится; иначе – расходится.

Замечание 2.0.1 *Так как обозначение несобственного интеграла такое же, как для (собственного) интеграла Римана, то требуется заметить, что в случае $f \in R(E)$ и E – измеримо, несобственный интеграл равен соответствующему собственному. Это сразу следует из теоремы о непрерывности меры и интеграла.*

Данное определение крайне неудобно для вычисления несобственного интеграла или установления его сходимости, так как для этого требуется проверка всех возможных исчерпаний. Ситуацию улучшит следующая теорема.

Теорема 2.0.2 (о сходимости интеграла) *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$ и для некоторого исчерпания $\{E_k\}$ множества E существует в $\mathbb{R}$ предел $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{E_k} f dx = A$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_E f dx$ сходится и равен A.*

Доказательство. Пусть $\{F_m\}$ – другое исчерпание E и $f \in R(F_m)$. Отметим, что так как $f \geqslant 0$ и $F_m \subset F_{m+1}$, то предел $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{F_m} f dx$ существует в $\bar{\mathbb{R}}$ (как предел возрастающей последовательности), обозначим его B.

Множества $G_{mk} = F_m \cap E_k$ – при $k \in \mathbb{N}$ образуют исчерпание F_m, тогда по теореме о непрерывности интеграла:

$$\int\limits_{F_m} f dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{G_{mk}} f dx \leqslant \lim_{k\to\infty} \int\limits_{E_k} f dx = \int\limits_{E} f dx = A,$$

откуда получаем $B \leqslant A$.

Аналогично, поменяв E_k и F_m местами, получим $A \leqslant B$. Следовательно, $B = A$. □

Пример 2.0.1 *Вычислим* $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$

Будем исчерпывать плоскость кругами $B_n(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant n^2\}$. *Тогда*

$$\iint\limits_{B_n(0,0)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^n e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-n^2}) \to \pi.$$

Из приведенного примера легко получается известный нам ранее интеграл Эйлера–Пуассона.

Пример 2.0.2 (Интеграл Эйлера–Пуассона) *В предыдущем примере будем исчерпывать плоскость квадратами* $F_n = [-n, n] \times [-n, n]$. *Тогда*

$$\iint\limits_{F_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int\limits_{-n}^{n} dx \int\limits_{-n}^{n} e^{-(x^2+y^2)} dy = \Big(\int\limits_{-n}^{n} e^{-t^2} dt\Big)^2 \to \pi,$$

откуда $I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$

Замечание 2.0.2 *Сравним данное выше определение кратного несобственного интеграла со старым определением несобственного интеграла функции* f *по полуинтервалу* $[a, b) \subset \mathbb{R}$*:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{w\to b-0} \int\limits_a^w f(x)dx.$$

Существование этого предела влечет существование предела для любых исчерпаний полуинтервала $[a, b)$ *промежутками. Но что б, если рассматривать исчерпания другими (более сложными) множествами? Оказывается, для знакопеременных функций в* $\mathbb{R}$ *старое и новое определения несобственного интеграла не равносильны.*

Пример ниже иллюстрирует ситуацию, когда несобственный интеграл зависит от выбранного исчерпания.

Пример 2.0.3 *Рассмотрим функцию* $f(x) = \dfrac{(-1)^{[x]}}{[x]+1}$: $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$. *Для несобственного интеграла в смысле старого определения имеем:*

$$\int\limits_0^\infty \frac{(-1)^{[x]}}{[x]+1}dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2,$$

где равенство ряду верно в силу сходимости интеграла (в смысле старого определения в $\mathbb{R}^1$*). В то же время, так как ряд* $\sum\limits_{k=1}^\infty \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ *сходится лишь условно, то по теореме Римана перестановкой его членов можно получить любую наперёд выбранную сумму. Пусть* S_{φ_k} *– частичные суммы перестановки* φ_k*, сходящиеся к* S*. Построим исчерпание множества* $[0, +\infty)$*, взяв за множество* $E_k = \bigcup\limits_{m \in \varphi_k} [m, m+1)$*. Тогда предел интегралов по множествам* E_k *равен* S*, то есть зависит от исчерпания. А значит, несобственный интеграл в смысле нового определения не существует.*

3 Криволинейный интеграл

Напомним некоторые сведения, известные нам из второго семестра.

Путем в $\mathbb{R}^n$ называется непрерывное отображение γ: $\mathbb{R} \supset [a, b] \to \mathbb{R}^n$. $\gamma([a, b])$ – носитель пути.

Два пути $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ и $\widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ называются эквивалентными, если существует строго возрастающая непрерывная биекция $\varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$, что $\gamma(t) = \widetilde{\gamma}(\varphi(t))$.

Кривой называют класс эквивалентных путей, а каждого представителя класса – параметризацией кривой.

Определение 3.0.1 *Кривую будем называть гладкой, если существует ее параметризация* $\gamma(t) \in C^1[a, b]$ *и* $\gamma'(t) \neq 0$ *для* $t \in (a, b)$.

Условие $\gamma'(t) \neq 0$ гарантирует наличие в каждой точке гладкой кривой касательного вектора, а значит, и касательной прямой.

Кривую (путь) называют простой, если она не имеет точек самопересечения, т.е. отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ – инъекция.

Кривую (путь) называют замкнутой, если $\gamma(a) = \gamma(b)$. Кривую (путь) называют простой замкнутой, если $\gamma(a) = \gamma(b)$ – единственная точка самопересечения.

Длиной пути называют супремум длин ломаных, вписанных в путь (т.е. ломаных, вершины которых содержатся в носителе пути). Если этот супремум конечен, то путь называют спрямляемым. Было доказано, что длины эквивалентных путей равны, и, следовательно, длина кривой не зависит от выбора её параметризации. Кривая, имеющая конечную длину, называется спрямляемой. Было доказано, что гладкая кривая спрямляема.

Пусть путь $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^1[a, b]$ задается непрерывно дифференцируемыми функциями $x_1 = x_1(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$. Введём функцию $l_\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$, равную длине части пути γ от точки a до точки t. Было доказано, что $l'_\gamma(t) = \sqrt{(x'_1(t))^2 + ... + (x'_n(t))^2}$ и длина всего пути

$$l_\gamma = \int\limits_a^b \sqrt{(x'_1(t))^2 + ... + (x'_n(t))^2} dt.$$

Определение 3.0.2 *Будем называть кривую кусочно-гладкой, если её можно разбить на конечное число гладких кривых. То есть, для некоторой параметризации $\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ функции $x_i(t) \in C[a, b]$ и существует разбиение $\{t_i\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что на каждом $[t_{i-1}, t_i]$: $x_i \in C^1[t_{i-1}, t_i]$.*

3.1 Криволинейный интеграл 1-го рода

Пусть L – кривая в $\mathbb{R}^n$, имеющая параметризацию $\gamma = (x_1(t), ..., x_n(t))$, $t \in [a, b]$.

Пусть во всех точках кривой L определена функция $f(x) : \gamma([a, b]) \to \mathbb{R}$.

Пусть τ – разбиение отрезка $[a, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Соответствующие точки на кривой обозначим $M_i = (x_1(t_i), ..., x_n(t_i))$.

Длину i-ой дуги кривой обозначим $\Delta l_i = l(\smile M_{i-1}M_i)$, где $M_i = \gamma(t_i)$, и назовем мелкостью (или рангом) разбиения τ число $\lambda(\tau) = \max\limits_i \Delta l_i$.

Оснастим разбиение τ точками $\{\xi_i\}$: $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Получим оснащение разбиения кривой точками $\gamma(\xi_i)$. Составим интегральную сумму

$$\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\gamma(\xi_i))\Delta l_i.$$

Определение 3.1.1 *Криволинейным интегралом 1-го рода (КИ-1) функции f по кривой L называется число $I \in \mathbb{R}$ такое, что*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \ \forall \xi \quad \Rightarrow \quad |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$I = \int\limits_L f(x)dl, \quad I = \oint\limits_L f(x)dl.$$

Второе применяют для интеграла по замкнутой кривой (контуру).

Существование КИ-1 зависит от свойств кривой и функции. Так, ниже будет понятно, что если функция непрерывна (или кусочно-непрерывна) на кусочно-гладкой кривой, то КИ-1 существует.

Методы вычисления КИ-1 связаны со способами задания кривой. Рассмотрим несколько случаев.

1. Кусочно-гладкая кривая L задана натуральной (естественной) параметризацией, т.е. $\gamma = \gamma(s)$, где $s \in [0, \ell]$ – длина дуги кривой от начала до точки s (ℓ – длина всей кривой). Функция $f \in C(L)$.

   Тогда КИ-1 существует и

   $$\int\limits_L f(x)dl = \int\limits_0^\ell f(x_1(s), ..., x_n(s))ds,$$

   так как приращение длины кривой в интегральной сумме $\Delta l_i = \Delta s_i$.

2. Произвольная параметризация кусочно-гладкой кривой L: $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)$, $t \in [a, b]$, функция $f \in C(L)$.

   Пусть возрастающая биекция $u : [a, b] \to [0, \ell]$ переводит в натуральную параметризацию $s = u(t)$, $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(s)$. Тогда

   $$I = \int\limits_0^\ell f(\tilde{\gamma}(s))ds = \int\limits_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt.$$

   Заметим, что $\|\gamma'(t)\|dt = ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$.

   Следствие. КИ-1 не зависит от способа параметризации кривой.

3. Кривая L в $\mathbb{R}^2$ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = y(x)$, $x \in [a, b]$. Тогда

   $$\int\limits_L f(x, y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

Свойства КИ-1:

1. КИ-1 не зависит от ориентации кривой, т.е.

$$\int\limits_L f(x)dl = \int\limits_{L^-} f(x)dl;$$

2. Линейность

$$\int\limits_L (af(x)+bg(x))\,dl = a\int\limits_L f(x)dl + b\int\limits_L g(x)dl;$$

3. $\int\limits_L dl = \ell.$

4. Аддитивность

$$L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i, \quad L_i \cap L_j = \emptyset \Rightarrow \int\limits_L f(x)dl = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{L_i} f(x)dl.$$

Доказательство этих свойств сразу следует из определения или из сведения КИ-1 к одномерному интегралу Римана.

Физический смысл КИ-1. Если на кривой задана линейная плотность в каждой точке функцией $\rho = \rho(x)$, то масса кривой равна КИ-1 от плотности:

$$m = \int\limits_L \rho(x)dl.$$

3.2 Криволинейный интеграл 2-го рода

Пусть L – кривая в $\mathbb{R}^n$ и отображение $f = (f_1, ..., f_n)\colon L \to \mathbb{R}^n$. Рассмотрим одну координатную функцию $f_1\colon L \to \mathbb{R}$ и соответствующую ей координатную ось OX_1.

Пусть кривая L задана параметризацией $\gamma = (x_1, ..., x_n)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, (τ, ξ) – оснащенное разбиение отрезка $[a,b]$, $\tau\colon a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Составим интегральную сумму

$$\sigma(f_1, \tau, \xi) = \sum_{i=1}^{m} f_1(\gamma(\xi_i))\Delta x_i, \quad \text{где } \Delta x_i = x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}).$$

Аналогично можно определить интегральные суммы для функций f_2, ... , f_n. При этом Δx_i будут означать приращения соответствующей координаты.

Определение 3.2.1 *Число $I \in \mathbb{R}$ называется криволинейным интегралом 2-го рода (КИ-2) функции $f_1(x)$ по кривой L, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \ \forall \xi \quad \Rightarrow \quad |\sigma(f_1, \tau, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Обозначение: $I = \int\limits_L f_1(x) dx_1.$

Полным криволинейным интегралом отображения f по кривой L называется сумма:

$$\int\limits_L f dr := \int\limits_L f_1(x) dx_1 + \ldots + \int\limits_L f_n(x) dx_n.$$

Выражение $f dr$ (часто пишут $\vec{f}\vec{dr}$) – скалярное произведение вектора $f = (f_1, \ldots, f_n)$ и вектора приращения $dr = (dx_1, \ldots, dx_n)$. Часто используют обозначение:

$$\int\limits_L f_1(x) dx_1 + f_2(x) dx_2 + \ldots + f_n(x) dx_n.$$

Сформулируем условия для существования КИ-2 и способ его вычисления для простоты в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 3.2.1 (Существование и вычисление КИ-2) *Пусть L – кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$ задана параметризацией $\gamma = (x(t), y(t))\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1(x,y), f_2(x,y)) \in C(L)$. Тогда КИ-2 существует и*

$$\int\limits_L f_1(x,y) dx + f_2(x,y) dy = \int\limits_a^b \Big(f_1(x(t), y(t)) x'(t) + f_2(x(t), y(t)) y' \Big) dt.$$

Доказательство.

$\square$

Свойства КИ-2

1. КИ второго рода при смене ориентации кривой меняет знак:

$$\int\limits_L f dr = -\int\limits_{L^-} f dr;$$

2. Линейность

$$\int\limits_L (af + bg)\, dr = a \int\limits_L f dr + b \int\limits_L g dr;$$

3. Аддитивность
$$L=\bigcup_{i=1}^{n} L_i, \quad \bigcap L_i=\emptyset \Rightarrow \int\limits_L f dr=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{L_i} f dr.$$

4. Связь с КИ-1. Пусть в каждой точке кривой вектор $d\vec{r}=(dx_1,...,dx_n)$ образует с осями координат углы $\alpha_1,...,\alpha_n$. Тогда $\cos\alpha_1,...,\cos\alpha_n$ – направляющие косинусы вектора $d\vec{r}$. Тогда $dx_i=\cos\alpha_i dl$ и
$$\int\limits_L f dr=\int\limits_L (f_1(x)\cos\alpha_1+...+f_n\cos\alpha_n)dl.$$

5. Пусть область $D\subset\mathbb{R}^2$ разбита на две области: $D=D_1\cup D_2$, $\mu(D_1\cap D_2)=0$. Векторное поле $f(x,y)$ определено в $\bar{D}$. Тогда КИ-2 по границе ∂D равен сумме КИ-2 по границам ∂D_1 и ∂D_2:
$$\oint\limits_{\partial D} f dr=\oint\limits_{\partial D_1} f dr+\oint\limits_{\partial D_2} f dr,$$
где направления обхода всех границ совпадают.

Физический смысл КИ-2. КИ-2 равен работе силового поля $\vec{F}(P,Q,R)$ по перемещению материальной точки (единичного заряда) вдоль кривой.

Пример 3.2.1 *Вычислить*
$$I=\int\limits_L (x-y^2)dx+2xydy,$$
если кривая L соединяет точки $O(0,0)$ и $A(1,1)$ тремя способами: а) по отрезку OA; б) по дуге параболы $y=x^2$; в) по ломаной OBA, где $B(1,0)$.

а)$OA:\quad y=x,\quad dy=dx,\quad x\in[0,1]$.
$$I=\int\limits_0^1\left(x-x^2+2x^2\right)dx=\int\limits_0^1\left(x+x^2\right)dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$$

б) $y=x^2,\quad dy=2xdx$.
$$I=\int\limits_0^1\left(x-x^4+2x^3\cdot 2x\right)dx=\int\limits_0^1\left(x+3x^4\right)dx=\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{11}{10}.$$

в) $OB : y = 0, \quad dy = 0, x \in [0,1]$, $BA : x = 1, dx = 0, y \in [0,1]$.

$$I = \left\{ \int\limits_{OB} + \int\limits_{BA} \right\} (x - y^2)dx + 2xydy = \int\limits_0^1 xdx + \int\limits_0^1 2ydy = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

3.3 Формула Грина

Будем рассматривать на плоскости $\mathbb{R}^2$ простую замкнутую ориентированную кривую (контур) L, т.е. замкнутую кусочно-гладкую кривую без самопересечений. Согласно теореме Жордана (из курса топологии), L делит плоскость $\mathbb{R}^2$ на два множества – ограниченное (внутреннее) и неограниченное (внешнее). Назовем множеством D – ограниченное множество с границей L.

Определим на L **положительное направление обхода** – это такое направление, при движении в котором область D расположена слева (в каждой точке контура).

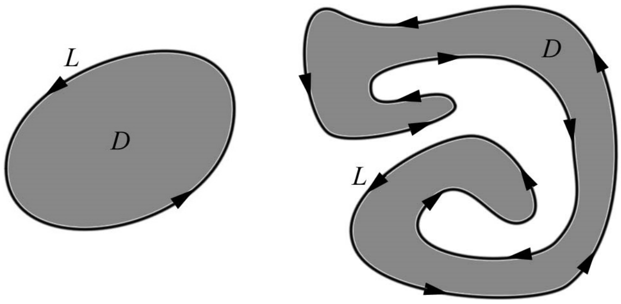


Рис. 10: Положительное направление обхода

Множество называется **односвязным**, если для любого простого контура, лежащего в нём, в нём также содержится множество, ограниченное этим контуром.

Простой контур является границей односвязного множества.

Теорема 3.3.1 (Формула Грина) *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – односвязное открытое ограниченное множество, граница которого ∂D – кусочно-гладкая простая замкнутая кривая, ориентированная положительно. Функции $P, Q \in C^1(\bar{D})$. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Доказательство. Проведем доказательство в несколько этапов, усложняя множество D.

1) Пусть D – элементарно относительно x и y:

$D = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\, y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\} = \{(x,y) : c \leqslant y \leqslant d,\, x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\}$,

где функции $y_{1,2}(x)$ и $x_{1,2}(y)$ – кусочно непрерывно дифференцируемы.

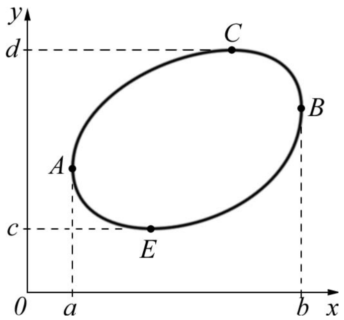


Рис. 11: Пример множества D, элементарного по x и y (к доказательству формулы Грина)

Рассмотрим

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b \left(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b P(x, y_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x, y_1(x))dx = \int\limits_{ACB} P(x,y)dx - \int\limits_{AEB} P(x,y)dx =$$

$$- \oint\limits_{\partial D} P(x,y)dx.$$

Аналогично,

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int\limits_c^d Q(x_2(y), y)dy - \int\limits_c^d Q(x_1(y), y)dy =$$

$$= \int\limits_{EBC} Q(x,y)dy - \int\limits_{EAC} Q(x,y)dy = \oint\limits_L Q(x,y)dy.$$

Вычитая полученные равенства, получим требуемое.

2) Пусть D можно разбить на конечное число множеств, элементарных по и y.

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i, \quad \mu\left(\bigcap_{i=1}^n D_i\right) = 0.$$

Тогда

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \sum_{i=1}^{n} \oint\limits_{\partial D_i} Pdx + Qdy,$$

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \oint\limits_{\partial D_i} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

то формула Грина верна и в этом случае.

3) Для произвольной области D строгое доказательство довольно трудоемко. Ограничимся пояснением. Нужно приближать интеграл по кривой интегралами по вписанным ломаным (с точностью ε). При этом двойные интегралы будут вычисляться по многоугольникам, которые представимы в виде объединения конечного числа элементарных множеств (например, треугольников). $\square$

Оказывается, формула Грина верна и для многосвязного множества, т.е. множества, ограниченного конечным числом простых кусочно-гладких контуров, один из которых содержит внутри себя все остальные.

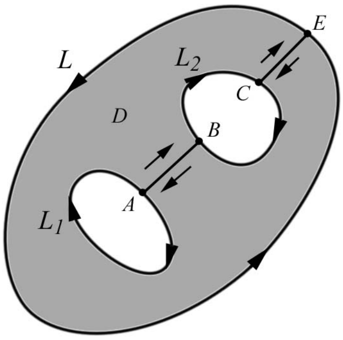


Рис. 12: Пример многосвязного множества

Теорема 3.3.2 (Формула Грина для многосвязного множества)
Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – многосвязное открытое ограниченное множество, граница которого $\partial D = L_0 \cup L_1 \cup ... \cup L_n$, где все L_i – кусочно-гладкие простые замкнутые кривые, ориентированные положительно (относительно D), причем $L_1, ..., L_n$ содержатся во внутренности L. Функции $P, Q \in C^1(\bar{D})$. Тогда

$$\oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Доказательство. Пусть граница ∂D области D состоит из положительно ориентированных контуров L, L_1, L_2 (см. рис.).

Сделаем область односвязной, добавив разрезы AB и CE (см. рис.)

Двойной интеграл при этом не изменится (т.к. разрезы имеют меру нуль). Тогда, по доказанной теорем для односвязной области

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{EFECBAHABCE} Pdx + Qdy =$$

$$= \left\{\int\limits_L + \int\limits_{EC} + \int\limits_{L_2} + \int\limits_{BA} + \int\limits_{L_1} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{CE}\right\} Pdx + Qdy =$$

$$= \left\{\oint\limits_L + \oint\limits_{L_1} + \oint\limits_{L_2}\right\} Pdx + Qdy,$$

все контуры ориентированы положительно. □

Пример 3.3.1 *Вычислить* $\oint_L (2xy - y)\,dx + x^2 dy$*, где* L *– эллипс* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Имеем

$$P(x,y) = 2xy - y, \quad Q(x,y) = x^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - (2x - 1) = 1.$$

Тогда по формуле Грина:

$$\oint\limits_L (2xy - y)\,dx + x^2 dy = \iint\limits_D dxdy = S_D = \pi ab,$$

где область D *– внутренняя часть эллипса.*

В общем случае, площадь плоской фигуры D можно вычислить с помощью криволинейного интеграла:

$$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx,$$

где L – граница фигуры D, проходимая в положительном направлении.

Заметим, что формула Грина позволяет обосновать геометрический смысл якобиана (с помощью криволинейного интеграла). Покажем это.

Пусть функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ непрерывно дифференцируемы, имеют непрерывные смешанные производные второго порядка и отображают $G' \to G$ взаимно однозначно.

Получим соотношение между площадями областей G и G', ограниченными контурами Γ и Γ'.

Имеем по формуле Грина

$$S_G = \iint\limits_G dxdy = \oint\limits_\Gamma xdy.$$

Пусть контур Γ' задается параметрически: $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Контур Γ имеет тогда параметрические уравнения $x = x(u(t), v(t))$, $y = y(u(t), v(t))$. Тогда для площади имеем (знак зависит от ориентации контура Γ'):

$$S_G = \oint\limits_\Gamma xdy = \int\limits_a^b x(u(t), v(t)) \left(\frac{\partial y}{\partial u}u' + \frac{\partial y}{\partial v}v'\right) dt =$$

$$= \pm \oint\limits_{\Gamma'} x(u, v) \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \pm \oint\limits_{\Gamma'} x\frac{\partial y}{\partial u}du + x\frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Еще раз применим формулу Грина, где $P = x\dfrac{\partial y}{\partial u}$, $Q = x\dfrac{\partial y}{\partial v}$. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + x\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + x\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = J(u, v).$$

Тогда

$$S_G = \pm \iint\limits_{G'} J(u, v)dudv = \iint\limits_{G'} |J(u, v)|dudv.$$

Модуль якобиана можно писать исходя из положительности двойного интеграла, как площади. Мы получили $dxdy = |J(u, v)|dudv$.

Замечание 3.3.1 *Отсюда получаем один смысл знака якобиана. Если якобиан положительный, то ориентация контура при таком отображении сохраняется. При отрицательном якобиане направление контура при отображении меняется на противоположное.*

3.4 Независимость КИ-2 от пути интегрирования

Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^n$ задана векторная функция $\vec{F}(x)$. Будем говорить, что КИ второго рода

$$\int\limits_L \vec{F}d\vec{r}$$

не зависит от пути интегрирования, если

$$\int\limits_{L_1} \vec{F}d\vec{r} = \int\limits_{L_2} \vec{F}d\vec{r},$$

где L_1 и L_2 - две произвольные кусочно-гладкие кривые, лежащие в G и соединяющие точки $A \in G$ и $B \in G$.

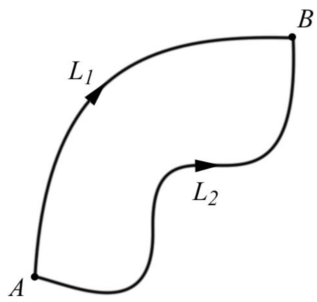


Рис. 13:

Значение такого интеграла зависит только от начальной и конечной точек пути интегрирования. Его часто обозначают

$$\int\limits_{AB} \vec{F}d\vec{r} \quad \text{или} \quad \int\limits_A^B \vec{F}d\vec{r}.$$

Выясним, при каких условиях КИ-2 не зависит от пути интегрирования. Будем рассматривать пространство $\mathbb{R}^2$.

Теорема 3.4.1 *Пусть в односвязной области $G \subset \mathbb{R}^2$ задано непрерывное веторное поле $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$. Тогда следующие три утверждения равносильны:*

1. $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$ *для любого простого контура L, лежащего в G;*

2. $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ *по дуге* $AB \in G$ *не зависит от пути интегрирования;*

3. $\exists u = u(x, y): \quad du = Pdx + Qdy.$

☐ Доказательство проведем по круговой схеме: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

Докажем, что $1 \Rightarrow 2$. Т.е. если для любого контура $L \in G$ $\oint\limits_{L} Pdx+Qdy = 0$, то $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования.

Пусть точки $A \in G$ и $B \in G$. Соединим их двумя разными непрерывными кривыми L_1 и L_2, лежащими в G.

Если эти кривые не имеют точек пересечения (кроме A и B), то кривая $L = L_1 \cup L_2$ есть замкнутая кривая и для нее выполняется

$$0 = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \int\limits_{L_1} Pdx + Qdy - \int\limits_{L_2} Pdx + Qdy.$$

Следовательно, $\int\limits_{L_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{L_2} Pdx + Qdy$, что и означает независимость от пути интегрирования.

Если кривые L_1 и L_2 пересекаются, например, в точке C, то для путей между точками A и C КИ не зависит от пути интегрирования и, аналогично, для путей от точки C до точки B.

Докажем следствие $2 \Rightarrow 3$.

Зафиксируем точку $A(x_0, y_0) \in G$, а точку $B(\tilde{x}, \tilde{y}) \in G$ будем считать переменной. Рассмотрим функцию

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int\limits_{A(x_0,y_0)}^{B(\tilde{x},\tilde{y})} Pdx + Qdy.$$

По условию 2) этот интеграл не зависит от пути интегрирования, а, значит, зависит только от точки $B(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Покажем, что u – искомая функция.

Зададим приращение по переменной x:

$$u(\tilde{x} + \Delta x, \tilde{y}) = \int\limits_{A(x_0,y_0)}^{C(\tilde{x}+\Delta x,\tilde{y})} Pdx + Qdy.$$

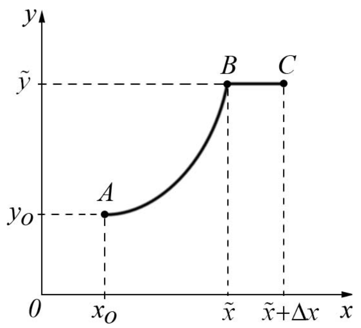


Рис. 14:

Тогда частное приращение функции по x:

$$\Delta_x u = u\left(\tilde{x}+\Delta x, \tilde{y}\right) - u\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) = \int\limits_{BC} Pdx + Qdy.$$

Так как этот интеграл также не зависит от пути интегрирования, то вычислим его по отрезку BC, для которого $y = \tilde{y}$, $dy = 0$, $x \in [\tilde{x}, \tilde{x}+\Delta x]$. Получим

$$\Delta_x u = \int\limits_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+\Delta x} P\left(x, \tilde{y}\right) dx = P\left(\xi, \tilde{y}\right) \Delta x,$$

где $\xi \in [\tilde{x}, \tilde{x}+\Delta x]$.

Тогда для частной производной функции $u(x, y)$ получим

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} P\left(\xi, \tilde{y}\right) = P\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right).$$

Аналогично, получим

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right),$$

т.е.

$$du = P\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) dx + Q\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) dy.$$

И последнее. Докажем следствие $3 \Rightarrow 1$.

Пусть $Pdx + Qdy = du$. Это означает, что $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Зададим контур L параметрически:

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a \leqslant t \leqslant b, \quad x(a) = x(b),\ y(a) = y(b).$$

Тогда

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dy}{dt}\right) dt = \int\limits_a^b \frac{du}{dt} dt = u\left(x(t), y(t)\right)\big|_a^b =$$

$$= u\left(x(a), y(a)\right) - u\left(x(b), y(b)\right) = 0. \quad \blacksquare$$

Замечание 3.4.1 *Векторное поле $\vec{F} = (P, Q)$ такое, что $du = Pdx + Qdy$ или, что то же самое, $\vec{F} = \operatorname{grad} u$ называется* ***потенциальным полем****, а функция u – его* ***потенциалом****.*

Замечание 3.4.2 *Утверждение теоремы верно и в $\mathbb{R}^3$.*

Следствия

1. Для потенциального поля в односвязной области его потенциал выражается КИ-2 с переменным верхним пределом, который не зависит от пути интегрирования:

$$u\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) = \int\limits_{A(x_0, y_0)}^{B(\tilde{x}, \tilde{y})} Pdx + Qdy.$$

2. Если $du = Pdx + Qdy$ в односвязной области G и $A, B \in G$, то

$$\int\limits_A^B Pdx + Qdy = u(B) - u(A).$$

(Аналог формулы Ньютона-Лейбница.)

Теорема 3.4.2 (Необходимое и достаточное условие потенциального поля в *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$. Функции $P(x, y), Q(x, y) \in C^1(G)$. Условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ является необходимым и, если G односвязно, достаточным для того, чтобы поле (P, Q) было потенциальным в G.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $du = Pdx + Qdy$. Тогда

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Продифференцируем еще раз:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

но так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Достаточность. Пусть $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Рассмотрим интеграл по любому замкнутому контуру ∂D в G и применим формулу Грина:

$$\oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Осталось воспользоваться теоремой о равносильности этого условия потенциальности поля (P, Q). $\square$

Пример. Найти функцию $u(x, y)$, если $du = 2(xy^3 + 1)dx + 3x^2y^2dy$.

Проверим существование такой функции:

$$\frac{\partial \left(2(xy^3+1)\right)}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial \left(3x^2y^2\right)}{\partial x}.$$

Тогда искомая функция находится с помощью криволинейного интеграла (с точностью до константы C):

$$u\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) = C + \int\limits_{A(x_0,y_0)}^{B(\tilde{x},\tilde{y})} 2(xy^3+1)dx + 3x^2y^2dy.$$

В качестве точки (x_0, y_0) возьмем точку $(0, 0)$. Так как данный интеграл не зависит от пути интегрирования, то в качестве пути выберем наиболее удобный, т.е. по отрезкам, параллельным осям координат:

$$u\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) = \int\limits_{A(0,0)}^{C(\tilde{x},0)} 2(xy^3+1)dx + 3x^2y^2dy + \int\limits_{C(\tilde{x},0)}^{B(\tilde{x},\tilde{y})} 2(xy^3+1)dx + 3x^2y^2dy.$$

На отрезке AC: $y = 0$, $dy = 0$, $x \in [0, \tilde{x}]$.

На отрезке CB: $x = \tilde{x}$, $dx = 0$, $y \in [0, \tilde{y}]$.

Тогда

$$u\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) = \int\limits_0^{\tilde{x}} 2dx + \int\limits_0^{\tilde{y}} 3\tilde{x}^2 y^2 dy = 2\tilde{x} + \tilde{x}^2\tilde{y}^3.$$

Окончательно, запишем $u(x, y) = 2x + x^2y^3 + C$.

Замечание 3.4.3 *Для неодносвязной области криволинейный интеграл даже для потенциального поля зависит от пути интегрирования.*

Пример. Рассмотрим векторное поле с координатами

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Это поле непрерывно дифференцируемо и в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ выполнено $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Рассмотрим интеграл $\oint Pdx+Qdy$ по любому контуру, обходящему один раз начало координат в положительном направлении. Все такие интегралы равны. Вычислим этот интеграл по окружности $x^2 + y^2 = R^2$:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi}{R^2} d\varphi = 2\pi.$$

Тогда интеграл по любой кривой, соединяющей точки A и B и не проходящей через начало координат равен

$$\int\limits_A^B \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 2\pi n,$$

где $n \in \mathbb{Z}$ – число обходов контура вокруг начала координат.

4 Поверхностный интеграл

4.1 Основные сведения о поверхностях в $\mathbb{R}^3$

Поверхностью будем называть отображение $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, где D – компакт.

Способы задания поверхности:

1. Явный: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$;
2. Неявный: $F(x, y, z) = 0$;
3. Параметрический: $\vec{r} = \vec{r}(x(u, v), y(u, v), x(u, v)) = \vec{r}(u, v)$.

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in D.$$

Поверхность будем называть ***гладкой***, если (в зависимости от способа задания)

1. $z(x, y)$ непрерывно дифференцируема;
2. F – непрерывно дифференцируема и $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ одновременно не обращаются в ноль;
3. $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ – непрерывно дифференцируемы и ранг матрицы Якоби
$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} = 2.$$

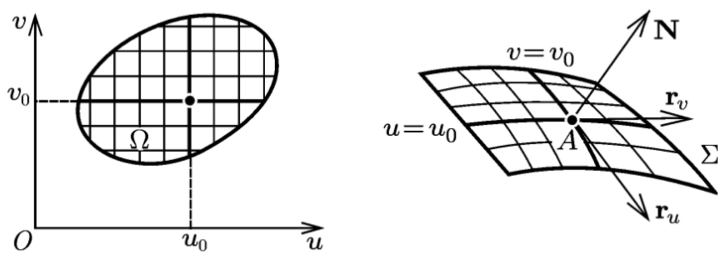
Поверхность будем называть ***простой***, если соответствующее отображение взаимно-однозначно.

Например, полусфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ является простой поверхностью, а вся сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ – не является простой.

Далее будем рассматривать только поверхности, которые можно разбить на конечное число простых гладких поверхностей. Такие поверхности будем называть *кусочно-гладкими*.

Криволинейные координаты на поверхности

Пусть при отображении $(u, v) \to \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ точка (u_0, v_0) переходит в точку A поверхности Σ. Рассмотрим координатные линии $u = u_0$, $v = v_0$. Их образы $\vec{r}(u_0, v)$, $\vec{r}(u, v_0)$ являются кривыми, лежащими на поверхности Σ и называются координатными кривыми (линиями) на поверхности Σ. Координаты (u_0, v_0) называются криволинейными координатами точки A.



Пример. Зададим сферу $x = \cos\varphi\sin\theta$, $y = \sin\varphi\sin\theta$, $z = \cos\theta$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Тогда координатными линиями на сфере будут известные из географии параллели ($\theta = const$) и меридианы ($\varphi = const$).

Ранее мы определяли вектор нормали к поверхности в данной точке как вектор, ортогональный в этой точке любой гладкой кривой на поверхности, проходящей через эту точку. Получим теперь формулу для нахождения вектора нормали.

Рассмотрим векторы $\vec{r}\,'_u$ и $\vec{r}\,'_v$ в точке $A(u_0, v_0)$. Они являются касательными векторами к координатным кривым в точке A. Заметим, что эти векторы не могут быть нулевыми, так как иначе ранг соответствующей матрицы Якоби не будет равен двум (она будет содержать нулевой столбец).

Лемма 4.1.1 *В любой точке простой гладкой поверхности Σ, заданной уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ вектор $\vec{N} = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v$ отличен от нуля, и при смене параметризации направление вектора $\vec{N}$ либо не меняется, либо меняется на противоположное.*

Доказательство. Пусть $\vec{r} = (x, y, z)$. Распишем вектор $\vec{N}$:

$$\vec{N} = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Определители второго порядка, стоящие справа, являются минорами 2-го порядка матрицы Якоби, а значит они не могут обращаться в ноль одновременно. Следовательно, $\vec{N} \neq 0$.

Пусть отображение $(u_1, v_1) \to (u, v)$ взаимно однозначно и регулярно. Рассмотрим две параметризации одной поверхности Σ: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ и $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u_1, v_1) = \vec{r}(u(u_1, v_1), v(u_1, v_1))$. Введем вектор $\vec{N}_1$:

$$\vec{N}_1 = \vec{r}\,'_{u_1} \times \vec{r}\,'_{v_1} = \left(\vec{r}\,'_u \frac{\partial u}{\partial u_1} + \vec{r}\,'_v \frac{\partial v}{\partial u_1}\right) \times \left(\vec{r}\,'_u \frac{\partial u}{\partial v_1} + \vec{r}\,'_v \frac{\partial v}{\partial v_1}\right) =$$

по свойству дистрибутивности векторного произведения

$$= (\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v) \times \left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}\right) = \vec{N}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u_1} & \dfrac{\partial u}{\partial v_1} \\ \dfrac{\partial v}{\partial u_1} & \dfrac{\partial v}{\partial v_1} \end{vmatrix} = \vec{N} \cdot J(u_1, v_1).$$

Отсюда следует, что $\vec{N} \parallel \vec{N}_1$. $\square$

Из доказательства леммы 1 мы видим, что знак якобиана определяет направление нормали. А именно, при положительном якобиане нормаль к поверхности не меняет своего направления, а при отрицательном – меняет на противоположное.

Лемма 4.1.2 *Вектор* $\vec{N} = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v$ *в данной точке ортогонален ко всем гладким кривым, лежащим на поверхности и проходящим через эту точку.*

Доказательство. Зададим кривую: $u = u(t)$, $v = v(t)$. Тогда векторное уравнение кривой $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$.

Касательный вектор в точке A, соответствующей $t = t_0$

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{r}'_u u'(t_0) + \vec{r}'_v v'(t_0)$$

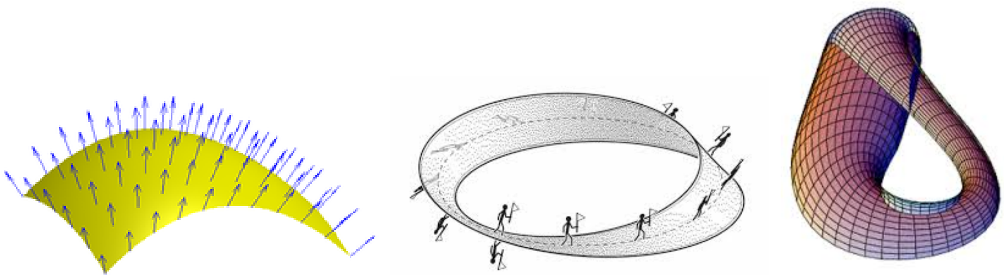
является линейной комбинацией векторов $\vec{r}\,'_u$ и $\vec{r}\,'_v$, а значит ортогонален их векторному произведению и вектору $\vec{N}$. □

Векторы $\pm\vec{N} = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v$ являются векторами нормали к поверхности Σ в точке A.

Следствие. Все касательные к гладким кривым, лежащим на поверхности и проходящим через данную точку в данной точке лежат в одной плоскости, ортогональной вектору $\vec{N}$.

Эта плоскость называется касательной плоскостью к поверхности в данной точке.

Кусочно гладкая поверхность называется ***ориентируемой*** (или ***двусторонней***), если на ней существует непрерывное поле единичных нормалей.



Простая поверхность всегда ориентируема.

Примеры неориентируемых (односторонних) поверхностей: лист Мёбиуса, бутылка Клейна (на рисунке: в середине и справа).

Площадь поверхности

Пусть простая гладкая поверхность Σ задана параметрически $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, D – компакт. Рассмотрим дифференциал

$$d\vec{r} = \vec{r}\,'_u du + \vec{r}\,'_v dv$$

и его квадрат

$$(d\vec{r})^2 = (\vec{r}\,'_u)^2 du^2 + 2(\vec{r}\,'_u \vec{r}\,'_v) du dv + (\vec{r}\,'_v)^2 dv^2.$$

Последнее выражение называется *первой квадратичной формой* поверхности. Введем обозначения:

$$E(u,v) = (\vec{r}'_u)^2, \quad F(u,v) = (\vec{r}'_u \vec{r}'_v), \quad G(u,v) = (\vec{r}'_v)^2.$$

Рассмотрим линии $u = u_0$, $u = u_0 + du$, $v = v_0$, $v = v_0 + dv$, образующие на поверхности элемент $d\Sigma$. Его площадь приближенно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}'_u du$, $\vec{r}'_v dv$:

$$dS = S_{d\Sigma} = |\vec{r}'_u du \times \vec{r}'_v dv| = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Отсюда получаем формулу для нахождения площади поверхности:

$$S_\Sigma = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Заметим, что выражение для площади поверхности не зависит от способа параметризации поверхности. Это можно доказать (аналогично доказательству Леммы 3) взяв вторую параметризацию и получив двойной интеграл в новых координатах и якобиан перехода.

Если поверхность задана явно: $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$, то формула для площади будет иметь вид:

$$S_\Sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2} dx dy.$$

Пример. Вычислим площадь поверхности тора.

Пусть тор получен вращением вокруг оси OZ окружности $x = R + r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$. Тогда его можно задать уравнениями

$$\vec{r}(\varphi,\theta): \begin{cases} x = (R + r\cdot\cos\varphi)\cos\theta, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi; \\ y = (R + r\cdot\cos\varphi)\sin\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi; \\ z = r\cdot\sin\varphi. \end{cases}$$

Производные:

$$\vec{r}'_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\cos\theta \\ -r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{r}'_\theta = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\varphi)\sin\theta \\ (R + r\cos\varphi)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты первой квадратичной формы:

$$E = (\vec{r}'_\varphi)^2 = r, \quad G = (\vec{r}'_\theta)^2 = (R + r\cdot\cos\varphi)^2, \quad F = \vec{r}'_\varphi \cdot \vec{r}'_\theta = 0.$$

Площадь:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} (R + r\cos\varphi) r d\varphi = 4\pi^2 rR.$$

4.2 Поверхностный интеграл первого рода (ПИ-1)

Пусть задана гладкая поверхность $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, во всех точках которой определена непрерывная функция $f(x, y, z)$. Пусть $\Sigma = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Sigma_i$ – разбиение поверхности. Мелкостью разбиения назовем наибольший диаметрэлементов разбиения. Точки $M_i \in \Sigma_i$ – оснащение разбиения. Построим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i) S_{\Sigma_i}.$$

Если при мелкости разбиения, стремящейся к нулю, эта интегральная сумма имеет конечный предел (независимо от способа разбиения и оснащения), то он называется поверхностным интегралом первого рода и обозначается

$$\iint\limits_\Sigma f(x, y, z) d\sigma.$$

Сведение к двойному интегралу

Для параметрически заданной поверхности:

$$\iint\limits_\Sigma f(x, y, z) d\sigma = \iint\limits_D f(\vec{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dudv = \iint\limits_D f(\vec{r}(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Для явно заданной поверхности $z = z(x, y)$:

$$\iint\limits_\Sigma f(x, y, z) d\sigma = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2} dxdy.$$

Аналогично для поверхностей, заданных уравнениями $y = y(x, z)$ и $x = x(y, z)$.

Свойства поверхностного интеграла первого рода:

1. Линейность;

2. Адитивность по поверхности;

3. Независимость от стороны поверхности;

4. Вычисление площади: $\iint\limits_{\Sigma} d\sigma = S_\Sigma$;

5. Физический смысл: вычисление массы поверхности $m = \iint\limits_{\Sigma} \rho(x,y,z)d\sigma$, где $\rho(x,y,z)$ – поверхностная плотность.

Пример. Вычислить площадь сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Способ 1. Найдём площадь половины сферы, заданной функцией $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$d\sigma = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}S = \iint\limits_{\Sigma} d\sigma = \iint\limits_{D} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

где D – круг радиуса R (проекция сферы на плоскость OXY). Переходя в полярные координаты, получим

$$\frac{1}{2}S = \iint\limits_{D} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy = R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}} = 2\pi R^2.$$

Тогда площадь всей сферы $S=4\pi R^2$.

Способ 2. Зададим сферу параметрически

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta, \\ R\sin\varphi\sin\theta, \\ R\cos\theta, \end{pmatrix} \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Тогда

$$\vec{r}'_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\theta, \\ R\cos\varphi\sin\theta, \\ 0, \end{pmatrix} \quad \vec{r}'_\theta = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta, \\ R\sin\varphi\sin\theta, \\ R\cos\theta, \end{pmatrix}$$

$$E = \vec{r}_{\varphi}'^{\,2} = R^2 \sin^2\theta, \quad G = \vec{r}_{\theta}'^{\,2} = R^2, \quad F = \vec{r}_{\varphi}'\vec{r}_{\theta}' = 0, \quad \sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin\theta.$$

$$S = R^2 \iint\limits_D \sin\theta d\varphi d\theta =$$

где D – прямоугольник $0 \leqslant \varphi < 2\pi, \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

$$= R^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi R^2.$$

Вместо вычисления величин E, F, G можно вычислять

$$d\sigma = |\vec{r}_{\varphi}' \times \vec{r}_{\theta}'| d\varphi d\theta = \ldots = R^2 \sin\theta d\varphi d\theta.$$

4.3 Поверхностный интеграл второго рода (ПИ-2)

Пусть Σ – ориентированная поверхность, т.е. указана одна из ее сторон, соответствуюшая полю нормалей.

Пусть на поверхности Σ задано непрерывное векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$.

Построим разбиение $\Sigma = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Sigma_i$. Точки $M_i \in \Sigma_i$. $\vec{n}$ – вектор нормали в точке M_i.

Спроецируем Σ_i на координатные плоскости.

Пусть $\Delta\sigma_i$ – площадь проекции Σ_i на плоскость XOY, взятая с определенным знаком, а именно:

1. если угол между нормалью $\vec{n}$ и положительным направлением оси OZ острый, то плюс;

2. если угол между нормалью $\vec{n}$ и положительным направлением оси OZ тупой, то минус.

Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} R(M_i)\Delta\sigma_i.$$

Если при мелкости (т.е. наибольшем диаметре разбиения), стремящейся к нулю, эта интегральная сумма имеет конечный предел (независимо от способа разбиения и выборки), то он называется поверхностным интегралом второго рода и обозначается

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy.$$

Аналогично определяются поверхностные интегралы

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz \quad \text{и} \quad \iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdz.$$

Сумма этих трех интегралов также называется поверхностным интегралом второго рода и обозначается

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

или короче

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

Связь поверхностных интегралов I и II родов:

Пусть нормаль к поверхности $\vec{n}\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Тогда для элементов $\Delta\sigma_i$ можно записать:

$$\Delta\sigma_i = \cos\alpha d\sigma = dydz,$$
$$\Delta\sigma_i = \cos\beta d\sigma = dxdz,$$
$$\Delta\sigma_i = \cos\gamma d\sigma = dxdy.$$

Тогда

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} F_n d\sigma.$$

Свойства поверхностного интеграла второго рода:

1. Линейность;
2. Адитивность по поверхности;
3. При смене стороны поверхности меняет знак;
4. Аддитивность поверхностного интеграла по границе тела при разбиении тела;

5. Физический смысл: если $\vec{F}(P, Q, R)$ – поле скоростей течения жидкости, то $\iint\limits_{\Sigma} F_n d\sigma$ есть ***поток*** векторного поля $\vec{F}$ через поверхность Σ, т.е. объем жидкости, проходящий через поверхность Σ в единицу времени.

Для вычисления поверхностного интеграла второго рода его сводят к двойному интегралу по проекции поверхности на соответствующую координатную плоскость. Например, если D – взаимно-однозначная проекция поверхности Σ на плоскость XOY, и поверхность Σ задана уравнением $z = z(x, y), (x, y) \in D$, то

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \pm \iint\limits_{D} R\left(x, y, z(x, y)\right) dxdy,$$

где знак совпадает со знаком $\cos(\vec{n}, OZ)$ угла между нормалью к поверхности и положительным направлением оси OZ. Обратите внимание, что в этой формуле слева стоит поверхностный интеграл, а справа – двойной.

Если поверхность задана параметрически $\Sigma : \vec{r} = \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, то поверхностный интеграл второго рода также можно свести к двойному по переменным u, v (здесь $\vec{N}$ – вектор нормали к поверхности):

$$I = \iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{N}_0 d\sigma =$$

учитываем $d\sigma = |\vec{N}|dudv = |\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|dudv$

$$= \iint\limits_{D} \vec{F} \cdot \vec{N} dudv = \iint\limits_{D} \vec{F} \cdot (\vec{r}_u' \times \vec{r}_v')\, dudv = \iint\limits_{D} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} dudv.$$

4.4 Теорема Остроградского–Гаусса

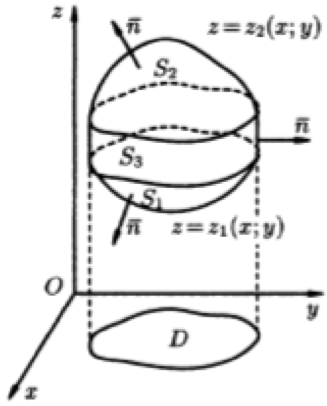
Теорема 4.4.1 (Остроградского–Гаусса) *Пусть тело $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (односвязное множество), его граница $\partial\Omega$ – кусочно гладкая замкнутая поверхность. Функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – непрерывно дифференцируемы в $\bar{\Omega}$. Тогда*

$$\iint\limits_{\partial\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности $\partial\Omega$.

□ Пусть тело Ω является элементарным по переменой z:

$$\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)\}.$$



Граница $\partial\Omega$ этого тела состоит из трех частей:

- S_1: поверхность $z = z_1(x, y)$, нормаль образует тупой угол с осью OZ (направлена вниз), при переходе к двойному интегралу ставим знак "−";
- S_2: поверхность $z = z_2(x, y)$, нормаль образует острый угол с осью OZ (направлена вверх), знак "+";
- S_3: цилиндрическая поверхность, направляющая которой параллельна оси OZ, нормаль ортогональна оси OZ, поверхностный интеграл равен нулю.

Рассмотрим

$$\iint\limits_{\partial\Omega} R dxdy = + \iint\limits_{D} R\left(x, y, z_2(x, y)\right) dxdy - \iint\limits_{D} R\left(x, y, z_1(x, y)\right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dxdy = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz.$$

Аналогично, для тела Ω, элементарного относительно переменных x и y:

$$\iint\limits_{\partial\Omega} P dydz = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz,$$

$$\iint\limits_{\partial\Omega} Q dxdz = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz.$$

Складывая эти три равенства, получим требуемое.

Если тело Ω не является элементарным по всем трем переменным, но его можно разбить на конечное число таких тел, то пользуясь аддитивностью поверхностного и тройного интеграла, теорема также доказана. ■

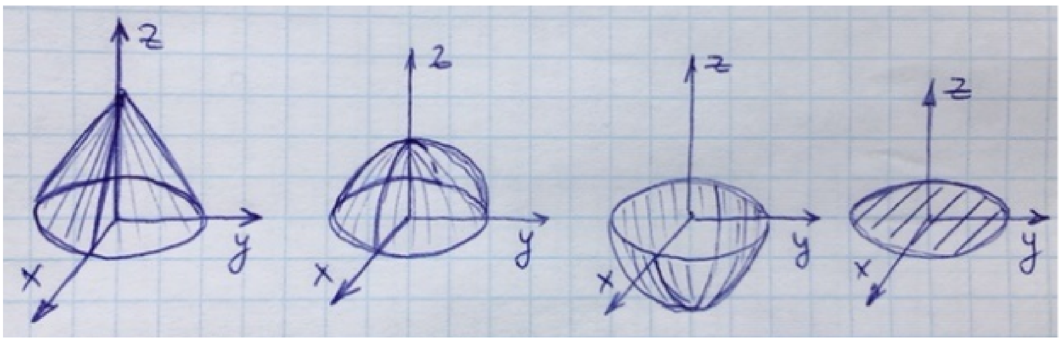
4.5 Теорема Стокса

Пусть незамкнутая ориентированная поверхность Σ ограничена кусочно-гладким контуром $\partial\Sigma$, т.е. контур $\partial\Sigma$ является границей поверхности Σ. В этом случае также говорят, что поверхность Σ натянута на контур $\partial\Sigma$.

Будем говорить, что направление обхода контура $\partial\Sigma$ согласовано с выбранной стороной поверхности Σ, если двигаясь по контуру $\partial\Sigma$ так, что нормаль к поверхности расположена от ног к голове, выбранная сторона остается слева.

Пример. На окружность $x^2+y^2=1$, $z=0$ натянуты, например, (см. рисунок)

- конус $x^2+y^2=(1-z)^2$, $z\geqslant 0$;
- верхняя полусфера $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geqslant 0$;
- нижняя полусфера $x^2+y^2+z^2=1$, $z\leqslant 0$;
- круг $x^2+y^2\leqslant 1$, $z=0$.

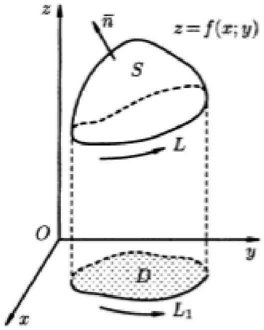


Теорема 4.5.1 (Стокса) *Пусть кусочно гладкая поверхность Σ ограничена контуром $\partial\Sigma$. Векторное поле $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ – непрерывно дифференцируемо на $\Sigma\cup\partial\Sigma$. Тогда циркуляция поля $\vec{F}$ по контуру $\partial\Sigma$ равна потоку его ротора через поверхность Σ, причём направление контура согласовано со стороной поверхности.*

$$C_{\partial\Sigma}\left(\vec{F}\right)=\Pi_{\Sigma}\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right).$$

Другая формулировка теоремы Стокса:

$$\oint\limits_{\partial\Sigma} Pdx+Qdy+Rdz = \iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$



Доказательство. Пусть поверхность Σ задана функцией $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$. Рассмотрим криволинейный интеграл (направление обхода контура согласовано с верхней стороной поверхности)

$$\oint\limits_{\partial\Sigma} P(x,y,z)dx = \oint\limits_{\partial D} P\left(x,y,z(x,y)\right)dx =$$

Обозначим $\tilde{P}(y) = P\left(x, y, z(x, y)\right)$ и применим формулу Грина

$$= -\iint\limits_{D}\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}dxdy = -\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy = -\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy.$$

Выразим теперь $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ через направляющие косинусы нормали. Вектор нормали имеет координаты $\left(-\dfrac{\partial z}{\partial x}, -\dfrac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$ (для верхней стороны), которые пропорциональны направляющим косинусам $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. То есть $-\dfrac{\partial z}{\partial y} : 1 = \cos\beta : \cos\gamma$, откуда

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Учтём ещё, что $dxdy = \cos\gamma d\sigma$ и $dxdz = \cos\beta d\sigma$. Тогда

$$\oint\limits_{\partial\Sigma} Pdx = -\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)dxdy = \iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}dxdz - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy.$$

Аналогично, получаем формулы

$$\oint\limits_{\partial\Sigma} Qdy = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz,$$

$$\oint\limits_{\partial\Sigma} Rdz = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dxdz.$$

Складывая, получаем требуемое. □

Следствие. Условие $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$, равносильное трём равенствам

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы в односвязной области Ω выражение $Pdx + Qdy + Rz$ являлось полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y, z)$. Это равносильно тому, что криволинейный интеграл $\displaystyle\int Pdx+Qdy+Rdz$ не зависит от пути интегрирования, $\displaystyle\oint Pdx+Qdy+Rdz = 0$ по любому замкнутому контуру в Ω и поле $\vec{F}(P, Q, R)$ является потенциальным в Ω.

4.6 Дифференциальные характеристики скалярного и векторного полей

Введём векторный дифференциальный оператор, обозначаемый символом "набла"(оператор Гамильтона):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Он приобретает определённый смысл в комбинации со скалярным или векторным полем. Символическое умножение вектора ∇ на скаляр или вектор производится по обычным правилам умножения векторов (умножение на число, скалярное и векторное произведения). При этом произведение $\dfrac{\partial}{\partial x}$ на функцию означает взятие частной производной по x этой функции.

Действие оператора набла для скалярного поля $U(x, y, z)$ и векторного поля $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$:

1. $\nabla U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} U$ (градиент);

2. $\nabla \cdot \vec{a} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{a}$ (дивергенция);

3. $\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \vec{a}$ (ротор).

Свойства дивергенции и ротора:

1. $\operatorname{div} \vec{C} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{C} = 0$ (дивергенция и ротор постоянного поля равны нулю);
2. $\operatorname{div}(C\vec{a}) = C \operatorname{div} \vec{a}$, $\operatorname{rot}(C\vec{a}) = C \operatorname{rot} \vec{a}$;
3. $\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}$, $\operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{b}$;
4. $\operatorname{div}(f\vec{a}) = f \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} f$;
5. $\operatorname{rot}(f\vec{a}) = f \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{grad} f \times \vec{a}$.

Векторное поле $\vec{A}$ называется потенциальным, если оно является градиентом некоторого скалярного поля U: $\vec{A} = \operatorname{grad} U$. При этом U называется потенциалом поля $\vec{A}$. Условием потенциальности поля $\vec{A}$ является $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$.

Векторное поле $\vec{A}$ называется соленоидальным (или трубчатым), если оно является ротором некоторого поля $\vec{B}$: $\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}$. При этом поле $\vec{B}$ называется векторным потенциалом поля $\vec{A}$.

Теорема 4.6.1 (Критерий соленоидальности поля) *В односвязной области необходимым и достаточным условием соленоидальности поля $\vec{A}$ является* $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}$, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$. Тогда

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{div} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = 0.$$

Достаточность. Пусть $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Найдем вектор $\vec{B}$: $\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}$. Положим $B_z \equiv 0$. Тогда

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial B_x}{\partial z}\vec{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Получаем систему уравнений

$$A_x = -\frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad A_y = \frac{\partial B_x}{\partial z}, \quad A_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}.$$

Из первого уравнения находим

$$B_y = -\int\limits_{z_0}^{z} A_x(x,y,z)dz + \varphi(x,y),$$

где $\varphi(x,y)$ – произвольная функция из второго:

$$B_x = \int\limits_{z_0}^{z} A_y(x,y,z)dz + \psi(x,y),$$

ψ – произвольная. Положим $\psi(x,y) \equiv 0$. Тогда

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_x}{\partial x}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial B_x}{\partial y} = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_y}{\partial y}dz;$$

$$A_z(x,y,z) = -\int\limits_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

учтём, что $\operatorname{div} \vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z} = 0$

$$= \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_z}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A_z(x,y,z) - A_z(x,y,z_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что функция $\varphi(x,y)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A_z(x,y,z_0),$$

где z_0 – некоторая фиксированная точка. Следовательно, такая функция $\varphi(x,y)$ существует, а значит, существует и векторный потенциал $\vec{B}$. $\square$

Теорема 4.6.2 (Гельмгольца) *Произвольное непрерывное векторное поле $\vec{A}$ всегда представимо в виде суммы потенциального и соленоидального полей, т.е. $\exists\ \vec{B}$ – потенциальное, $\vec{C}$ – соленоидалное такие, что $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$.*

Доказательство. Покажем, почему это верно. Пусть $\vec{B}$ – потенциально и $\vec{B} = \operatorname{grad} u$. Тогда вектор $\vec{C}$ должен удовлетворять равенству

$$\vec{C} = \vec{A} - \operatorname{grad} u.$$

Для соленоидальности $\vec{C}$ должно выполняться $\operatorname{div} \vec{C} = 0$, т.е.

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \operatorname{div} \vec{A}.$$

Выражение

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$$

называется оператором Лапласа функции u.

Известно, что уравнение

$$\Delta u = a$$

всегда имеет решение (при любой правой части). Следовательно, существует решение уравнения $\Delta u = \operatorname{div} \vec{A}$. □

Обратная задача векторного анализа заключается в нахождении векторного поля $\vec{A}$ по известным его дивергенции $\operatorname{div} \vec{A} = u$ и ротору $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}$. Необходимым условием разрешимости этой задачи является соленоидальность поля $\vec{B}$.

4.7 Интегральные характеристики векторного поля

Циркуляция поля $\vec{F}$ по кривой L:

$$C = \int\limits_L \vec{F} d\vec{r} = \int\limits_L F_\tau dl = \int\limits_L P dx + Q dy + R dz,$$

где τ – касательный вектор. Физический смысл циркуляции – это работа по перемещению единичного заряда по кривой L.

Поток через поверхность Σ:

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} F_n d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} P dydz + Q dxdz + R dxdy,$$

где $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности.

4.8 Механический смысл дивергенции и ротора

Ранее дивергенция и ротор поля были определены математически с применением набла-оператора:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что таким образом определенные, обе характеристики зависят от выбора системы координат. Используем доказанные теоремы Стокса и Гаусса–Остроградского, чтобы дать дивергенции и ротору содержательные определения, как характеристик поля, не зависящих от выбора координатной системы (инвариантные определения).

Пусть $\vec{A}$ – непрерывно-дифференцируемое векторное поле. Возьмём точку M_0 и шар B_R радиуса R с центром в этой точке. Тогда

$$\Pi_{\partial B_R}\left(\vec{A}\right) = \iiint\limits_{B_R} \operatorname{div}\vec{A}dxdydz =$$

по теореме о среднем $\exists M \in B_R$:

$$= \operatorname{div}\vec{A}(M)\mu(B_R).$$

Теперь устремим $R\to 0$. Получим

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{R\to 0}\frac{\Pi_{\partial B_R}\left(\vec{A}\right)}{\mu(B_R)}.$$

Поток $\Pi_{\partial B_R}\left(\vec{A}\right)$ есть мощность источников, находящихся внутри шара B_R. Получаем, что дивергенция векторного поля в каждой точке есть плотность источников (или стоков) поля.

Эта формула определяет дивергенцию независимо от выбора системы координат и при этом выявляет ее механический смысл: дивергенция равна потоку поля из точечного источника, то есть мощности источника.

Рассматривая стационарное течение несжимаемой жидкости, говорят, что поток через замкнутую поверхность равен суммарной мощности (производительности) источников, заключённых внутри поверхности.

Дадим инвариантное определение ротора по аналогии с определением дивергенции.

Возьмём точку M_0 и произвольный вектор $\vec{n}$. Пусть Σ_R – круг радиуса R с центром в точке M_0 лежащий в плоскости с нормалью $\vec{n}$. Тогда по теореме о среднем $\exists M \in \Sigma_R$:

$$C_{\partial\Sigma_R}\left(\vec{A}\right) = \operatorname{rot}_n \vec{A}(M)\mu\left(\Sigma_R\right).$$

Переходя к пределу при $R \to 0$ получим

$$\operatorname{rot}_n \vec{A} = \lim_{R\to 0} \frac{C_{\partial\Sigma_R}\left(\vec{A}\right)}{\mu\left(\Sigma_R\right)}.$$

Отсюда следует, что проекция ротора на любой вектор $\vec{n}$ не зависит от системы координат, а значит и сам ротор не зависит от системы координат.

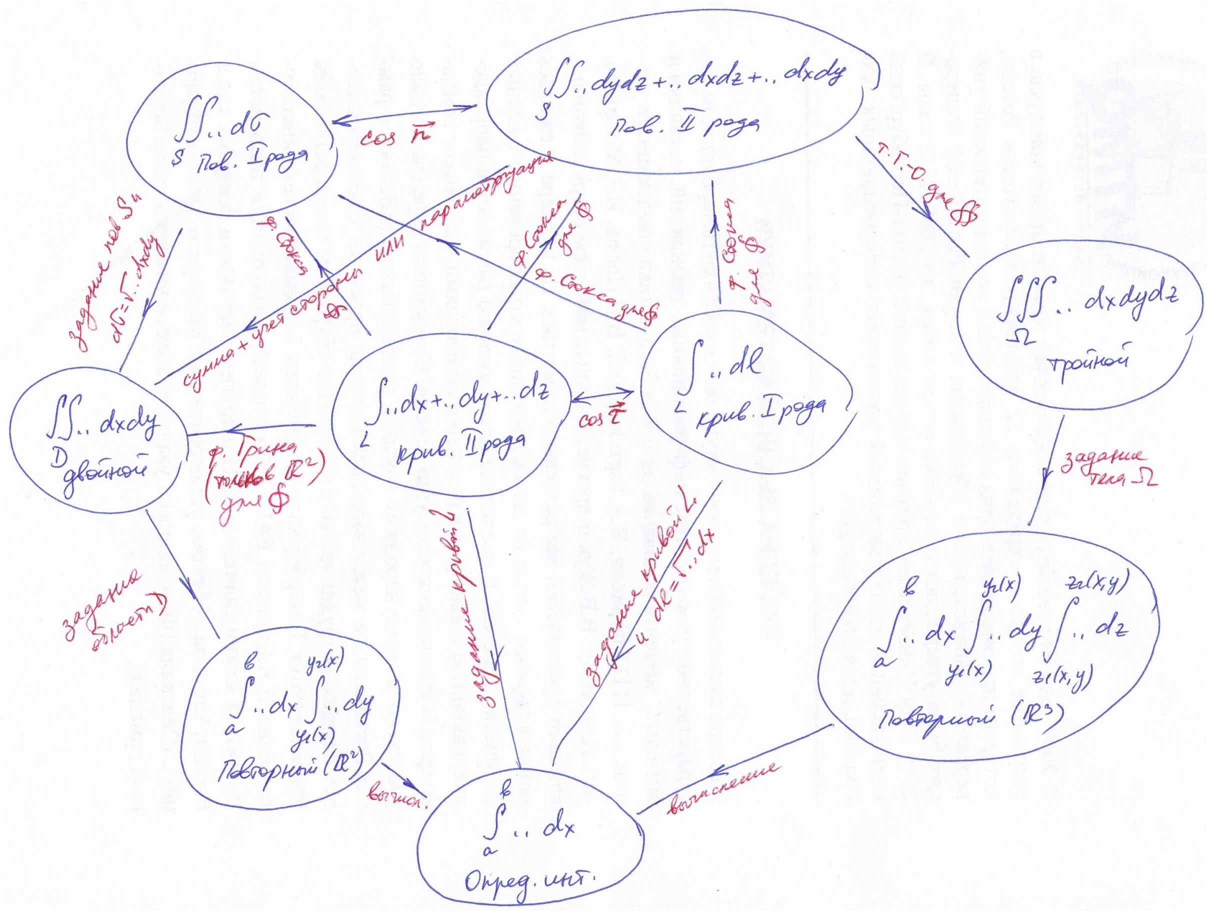
Полученную формулу часто принимают в качестве определения ротора.

Физический смысл ротора для поля скоростей – это удвоенная угловая скорость вращения частиц:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = 2\vec{\omega}.$$

4.9 Обзор почти всех интегралов курса

Следующая схема иллюстрирует связи между различными типами интегралов.


пов. I рода
cos n
пов. II рода
тройной
задание тела Ω
Повторный (R³)
вычисление
Опред. инт.
вычисл.
Повторный (R²)
двойной
крив. II рода
cos τ
крив. I рода
задание кривой L
ф. Стокса для ∮