# Однородные и неоднородные СЛАУ.

## 1 Общие понятия (вспомним)

*Определение.* Совместная СЛАУ - СЛАУ имеющая хотя бы одно решение.

*Определение.* СЛАУ называются эквивалентными, если любое решение первой является решением второй, и наоборот.

*Определение.* СЛАУ 1 называется следствием из СЛАУ 2, если все решения СЛАУ 1 являются решениями СЛАУ 2 (но не обязательно наоборот).

*Определение.* Эквивалентные матрицы - матрицы, каждую из которой можно получить из любой другой элементарными преобразованиями.

## 2 Минор матрицы

*Определение.* Ранг системы строк (столбцов) матрицы - наибольшее число ЛНЗ строк (столбцов) системы.

*Лемма.* Ранг системы строк любой матрицы равен рангу ее системы столбцов и называется рангом матрицы.

*Лемма.* Ранг эквивалентных матриц равен.

*Лемма.* Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

*Теоремма о ранге матрицы.* Если матрица имеет минор порядка $r$, отличный от нуля, для которого все содержащие его миноры порядка $r+1$ равны нулю, то ранг этой матрицы равен $r$.

*Замечание.* Из теоремы следует, что ранг матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля ее миноров.

## 3 Общая теория линейных уравнений

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

*Определение.* Матрицей системы уравнений (1) называется матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

*Определение.* Расширенной матрицей системы уравнений (1) называется матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

*Определение.* Пусть ранг матрицы $A$ – $r \geq 1$, тогда главным минором системы называется любой, отличный от нуля минор ранга $r$.

*Определение.* Любой минор, полученный из главного минора системы, путем добавления столбца соответствующих свободных членов, называется характеристическим минором системы.

*Теоремма (Критерий Кронекера-Капелла).* Система уравнений (1) *совместна* тогда, и только тогда, когда ранг матрицы $A$ равен рангу расширенной матрицы $B$

*Замечание.* Для того, что бы система была совместной необходимо и достаточно, что бы существовал главный минор , для которого все характеристические миноры равны нулю или вообще не существуют (т.е. $r = m$).

*Замечание.* Совместная система линейных уравнений имеет единственное решение, если ранг матрицы $A = r$ равен числу неизвестных $n$, и бесконечно много решений, если $r < n$.

***Правило для решения системы линейных уравнений.***

1. Установить является ли система совместной – вычислить ранги матрицы системы $r$ и ранг расширенной матрицы $r'$, если $r = r'$ то система совместна. В случае совместности, найти один из главных миноров $\neq 0$ порядка $r$.

2. Взять $r$ уравнений, которые входят в выбранный главный минор, остальные уравнения не рассматривать. Объявить $r$ неизвестных, коэффициенты которых входят в главный минор объявить главные, остальные $n - r$ - свободными и перенести в правую часть.

3. Методом Гаусса или Крамера найти выражение главных через свободные. Полученные равенства называют общим решением СЛАУ.

4. Придав свободным неизвестным любые числовые значения получить значение для главных. Полученный набор значений для всех неизвестных называется частным решением СЛАУ.

*Замечание.* Любое частное решение можно получить из общего, подстановкой соответствующих значений свободных неизвестных.

## 4 Системы однородных линейных уравнений. Фундаментальные системы решений.

*Определение.* Линейное уравнение называется свободным, если его свободный член равен нулю.

*Определение.* Любая система однородных уравнений имеет нулевое решение ($\forall i \leq n : x_i = 0$).

*Лемма.* Однородная СЛАУ имеет ненулевое решение тогда, и только тогда, когда ранг $r$ матрицы системы меньше числа неизвестных $n$.

*Замечание.* Система однородных уравнений у которой число уравнений $m$ равно числу переменных $n$ тогда, и только тогда, когда определитель матрицы системы $\neq 0$.

*Замечание.* Если существует одно решение системы однородных уравнений, то их бесконечно много и они образуют набор, который может быть ЛНЗ/ЛЗ (решения получаются сложением, умножением на константу, умножением друг на друга).

*Определение.* Рассмотри систему однородных уравнений. Ее фундаментальной системой называется ЛНЗ система решений, через элементы которой (вектор значений неизвестных) выражается любое решение рассматриваемой системы однородных уравнений.

***Правило для построения фундаментальной системы решений.***

1. Найти общее решение системы уравнений.

2. Взять любой, отличный от нуля определитель $M$ порядка $n - r$.

3. Поочередно придать свободным неизвестным (их ровно $n - r$ штук) значения каждой строк определителя М.

4. Полученная система из частных решений будет фундаментальной.