θ

Лекция 7

Тензорное произведение пространств

Содержание лекции:
В данной лекции обсуждаются билинейные отображения и структуры, которые ими индуцируются. Здесь мы подробно рассмотрим тензорное произведение двух пространств и обсудим как связанные с ним определения связаны с тем, что обсуждалось ранее. Также мы изучим свойства операции тензорного произведения и обсудим наиболее важные следствия этих свойств.

Ключевые слова:
Билинейное отображение, тензорное произведение двух пространств, базис тензорного произведения, координаты тензора, разложимые элементы, основной принцип тензорной алгебры.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

7.1 Определение тензорного произведения

Nota bene Пусть X, Y, Z - линейные пространства над полем $\Bbbk$, причем

$$\dim_{\Bbbk} X = n, \quad \dim_{\Bbbk} Y = m,$$

и пусть дано билинейное отображение $b : X \times Y \to Z$:

$$\begin{gathered} b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y), \\ b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2), \\ b(\alpha x, y) = \alpha b(x, y) = b(x, \alpha y), \end{gathered}$$

для любых $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$, $\alpha \in \Bbbk$.

Nota bene Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис X, $\{f_j\}_{j=1}^m$ - базис Y, $x \in X$ и $y \in Y$, тогда

$$x = \sum_{i=1}^n e_i \xi^i, \quad y = \sum_{j=1}^m f_j \eta^j,$$

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b(e_i, f_j) \xi^i \eta^j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij} \xi^i \eta^j \in Z.$$

Лемма 7.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *набор $\{b(e_i, f_j)\}$ является базисом в Z;*
2. *для любого $z \in Z$ единственно разложение*

$$z = \sum_{i=1}^n b(e_i, y_i), \quad y_i \in Y.$$

3. *для любого $z \in Z$ единственно разложение*

$$z = \sum_{j=1}^m b(x_j, f_j), \quad x_j \in X.$$

►
Доказательство (1) $\Leftrightarrow$ (2)

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \zeta^{ij} b(e_i, f_j) = \sum_{i=1}^n b\left(e_i, \sum_{j=1}^m \zeta^{ij} f_j\right) = \sum_{i=1}^n b\left(e_i, y_i\right).$$

Доказательство (1) $\Leftrightarrow$ (3) проводится аналогично. ◄

Тензорным произведением линейных пространств X и Y называется линейное пространство $T = X \otimes Y$ вместе с билинейным отображением

$$\otimes : \quad X \times Y \to T,$$

так что если $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис X и $\{f_j\}_{j=1}^m$ - базис Y, то $\{e_i \otimes f_j\}$ - базис T.

Nota bene Имеет место равенство:

$$\dim_{\Bbbk} T = \dim_{\Bbbk} X \cdot \dim_{\Bbbk} Y.$$

Nota bene Пусть $z \in T$, тогда единственно разложение

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (e_i \otimes f_j) \zeta^{ij},$$

и набор ζ^{ij} называется *координатами* элемента z в базисе $\{e_i \otimes f_j\}$.

> Элемент $z \in T$ называется **разложимым**, если
>
> $$\exists\, x \in X, y \in Y : \quad z = x \otimes y.$$

Nota bene Не все элементы T являются разложимыми:

$$z = e_1 \otimes f_2 + e_2 \otimes f_1.$$

7.2 Основная теорема тензорной алгебры

Лемма 7.2. *Для произвольного билинейного отображения* $b : X \times Y \to Z$ *существует единственное линейное отображение* $\tilde{b} : X \otimes Y \to Z$*, такое что:*

$$\forall x, \in X, \quad y \in Y \quad b(x, y) = \tilde{b}(x \otimes y).$$

▶
Искомое отображение $\tilde{b}$ задается на базисных векторах пространства $X \otimes Y$ при помощи формулы:

$$\tilde{b}(e_i \otimes f_j) = b(e_i, f_j),$$

и по линейности может быть доопределено на всех элементах $X \otimes Y$.
◀

Nota bene Утверждение леммы эквивалентно коммутативности диаграммы:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[rr] \arrow[dr, "b"'] & & X \otimes Y \arrow[dl, "\tilde{b}"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Лемма 7.3. *С точностью до изоморфизма тензорное произведение единственно:*

$$T_1 = X \otimes_1 Y, \quad T_2 = X \otimes_2 Y \quad \Rightarrow \quad T_1 \simeq T_2.$$

▶
Искомый изоморфизм $\psi : T_1 \to T_2$ определяется следующим образом:

$$\psi(e_i \otimes_1 f_j) = e_i \otimes_2 f_j,$$

и по линейности доопределяется на всех элементах T_1.
◀

Лемма 7.4. *Операция $\otimes$ имеет следующие свойства:*

$$X \otimes Y \simeq Y \otimes X,$$
$$X \otimes (Y \otimes Z) \simeq (X \otimes Y) \otimes Z.$$

Nota bene Тензорное произведение произвольного числа линейных пространств $X_1, X_2, \ldots, X_p$ можно определить индукцией по p, полагая, что отображение

$$b : \quad X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_p \to Z,$$

является p-линейным.

Теорема 7.1. *(Основной принцип тензорной алгебры) Для любого p-линейного отображения $b : X_1 \times \ldots \times X_p \to Z$ существует единственное линейное отображение $\tilde{b} : X_1 \otimes \ldots \otimes X_p \to Z$, такое что следующая диаграмма является коммутативной:*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \ldots \times X_p \arrow[rr] \arrow[dr, "b"'] & & X_1 \otimes \ldots \otimes X_p \arrow[dl, "\tilde{b}"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

7.3 Изоморфизмы тензорных произведений

Пример 7.1. Для любых $\alpha \in X^*$ и $y \in Y$, определим билинейное отображение:

$$\alpha \otimes y : \quad X \to Y, \quad (\alpha \otimes y)(x) = \alpha(x)y, \quad \forall x \in X.$$

Тем самым мы получим билинейное отображение

$$\otimes : \quad X^* \times Y \to \mathrm{Hom}(X; Y),$$

где $\mathrm{Hom}(X; Y)$ - множество линейных отображений из пространства X в пространство Y. Имеет место изоморфизм:

$$\mathrm{Hom}(X; Y) \simeq X^* \otimes Y.$$

Пример 7.2. Для любых $\alpha \in X^*$ и $\beta \in Y^*$ определим билинейное отображение

$$\alpha \otimes \beta : \quad X \times Y \to \Bbbk, \quad (\alpha \otimes \beta)(x, y) = \alpha(x)\beta(y).$$

Получим билинейное отображение

$$\otimes : \quad X^* \times Y^* \to \mathrm{Hom}(X, Y; \Bbbk).$$

Кроме того, имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(X, Y; \Bbbk) \simeq X^* \otimes Y^*.$$

Nota bene В силу основного принципа имеет место следующий изоморфизм:

$$\mathrm{Hom}(X \otimes Y; Z) \simeq \mathrm{Hom}(X, Y; Z),$$

переводящий линейное отображение $\tilde{b} : X \otimes Y \to Z$ в билинейное отображение $b : X \times Y \to Z$. В частности, при $Z = \mathbb{k}$ можно получить

$$(X \otimes Y)^* \simeq \mathrm{Hom}(X, Y; \mathbb{k}).$$

Пример 7.3. Последнее замечание может быть обобщено на случай произвольного числа пространств, что дает

$$\mathrm{Hom}(X_1 \otimes \ldots \otimes X_p; Z) \simeq \mathrm{Hom}(X_1, \ldots, X_p; Z),$$

и при $Z = \mathbb{k}$ можно получить

$$(X_1 \otimes \ldots \otimes X_p)^* \simeq \mathrm{Hom}(X_1, \ldots, X_p; \mathbb{k}).$$
