



# Лекция 8

## Тензорная алгебра

### Содержание лекции:

Данная лекция завершает знакомство с основными операциями полилинейной алгебры и посвящена построению алгебраических структур, которые индуцируются рассматриваемыми операциями. Здесь мы обсудим пространство тензоров над выбранным линейным пространством и обобщим наши представления о полилинейных отображениях и их свойствах.

### Ключевые слова:

Тензор, пространство тензоров, координаты тензора, тензорное произведение, транспонирование тензора, свертка тензора, симметризация и антисимметризация тензора, внешняя прямая сумма, алгебра, градуировка алгебры.

### Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

### Ссылка на ресурсы:

[mathdep.ifmo.ru/geolin](http://mathdep.ifmo.ru/geolin)

## 8.1 Операции с тензорами

Пространством тензоров типа  $(p, q)$  над  $X(\mathbb{k})$  называется пространство

$$T_q^p(\mathbb{k}) = X^* \otimes X^* \dots \otimes X^* \otimes X \otimes X \otimes \dots \otimes X.$$

**Пример 8.1.**

1.  $T_0^0(\mathbb{k}) \simeq \mathbb{k}$ ,  $T_0^1 \simeq X^*$ ,  $T_1^0 \simeq X$ ;
2.  $T_0^p(\mathbb{k}) \simeq \text{Hom}(X, \dots, X; \mathbb{k}) \simeq \Omega_0^p$ ;
3.  $T_1^p(\mathbb{k}) \simeq \text{Hom}(X, \dots, X; X) \simeq \text{Hom}(X, \dots, X, X^*; \mathbb{k}) \simeq \Omega_1^p$ ;

**Nota bene** Элементами пространства  $T_q^p$  являются тензоры:

$$\alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^p \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_q,$$

где  $\alpha^1, \dots, \alpha^p \in X^*$  и  $x_1, \dots, x_q \in X$ .

**Nota bene** С тензорами определены следующие операции:

1. Произведение тензоров:

$$\begin{aligned} & (\alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^{p_1} \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_{q_1}) \otimes (\beta^1 \otimes \dots \otimes \beta^{p_2} \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_{q_2}) \\ &= \alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^{p_1} \otimes \beta^1 \otimes \dots \otimes \beta^{p_2} \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_{q_1} \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_{q_2}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$v \in T_{q_1}^{p_1}(\mathbb{k}), \quad w \in T_{q_2}^{p_2}(\mathbb{k}) \quad \Rightarrow \quad v \otimes w \in T_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}(\mathbb{k}).$$

2. Транспонирование  $t_{ij}$  по паре нижних индексов  $(i, j)$ :

$$t_{ij} : \quad \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_j \otimes \dots \mapsto \dots \otimes x_j \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots$$

Аналогично для пары верхних индексов  $t^{ij}$ :

$$t^{ij} : \quad \dots \otimes \alpha^i \otimes \dots \otimes \alpha^j \otimes \dots \mapsto \dots \otimes \alpha^j \otimes \dots \otimes \alpha^i \otimes \dots$$

Таким образом:

$$t^{ij}, t_{ij} : \quad T_q^p(\mathbb{k}) \rightarrow T_q^p(\mathbb{k}).$$

3. Свертка тензора  $c_j^i$  по индексам  $i$  и  $j$ :

$$c_j^i : \quad \dots \otimes \alpha^i \otimes \dots \otimes x_j \otimes \dots \mapsto \alpha^i(x_j) \cdot \dots \otimes \dots \otimes \dots$$

Таким образом

$$c_j^i : \quad T_q^p(\mathbb{k}) \rightarrow T_{q-1}^{p-1}(\mathbb{k}).$$

4. Симметризация и антисимметризация тензора:

$$\begin{aligned} \text{Sym} : \quad x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p &\mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(p)}, \\ \text{Alt} : \quad x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p &\mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(p)}, \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\text{Sym} : T_0^p(\mathbb{k}) \rightarrow \Sigma^p(\mathbb{k}), \quad \text{Alt} : T_0^p(\mathbb{k}) \rightarrow \Lambda^p(\mathbb{k}).$$

**Nota bene** Пусть  $\{e_i\}_{i=1}^n$  - базис  $X(\mathbb{k})$  и  $\{f^j\}_{j=1}^n$  - дуальный базис  $X^*(\mathbb{k})$ , тогда базисом пространства  $T_q^p(\mathbb{k})$  будет набор

$$f^{s_1} \otimes f^{s_2} \otimes \dots \otimes f^{s_p} \otimes e_{t_1} \otimes e_{t_2} \otimes \dots \otimes e_{t_q},$$

и каждый элемент  $w \in T_q^p(\mathbb{k})$  единственным образом может быть представлен в виде:

$$w = w_{s_1, s_2, \dots, s_p}^{t_1, t_2, \dots, t_q} \cdot f^{s_1} \otimes f^{s_2} \otimes \dots \otimes f^{s_p} \otimes e_{t_1} \otimes e_{t_2} \otimes \dots \otimes e_{t_q}.$$

|| Набор скаляров  $w_{s_1, s_2, \dots, s_p}^{t_1, t_2, \dots, t_q}$  называется **координатами тензора**  $w$  в паре дуальных базисов  $\{e_i\}_{i=1}^n$ ,  $\{f^j\}_{j=1}^n$  пространств  $X(\mathbb{k})$  и  $X^*(\mathbb{k})$  соответственно.

**Лемма 8.1.** При переходе от базиса  $\{e_i\}_{i=1}^n$  к новому базису  $\{\tilde{e}_m\}_{m=1}^n$ , координаты тензора преобразуются в соответствии со следующим правилом:

$$\tilde{w}_{s_1, s_2, \dots, s_p}^{t_1, t_2, \dots, t_q} = \tau_{s_1}^{i_1} \dots \tau_{s_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{t_1} \dots \sigma_{j_q}^{t_q} w_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{j_1, j_2, \dots, j_q}.$$

Здесь  $T = \|\tau_s^i\|$  и  $S = \|\sigma_j^t\|$  - матрицы прямого и обратного перехода соответственно.

►

Справедливость утверждения следует из билинейности тензорного произведения.

◄

## 8.2 Определение тензорной алгебры

|| Внешней прямой суммой пространств  $X_1, X_2, \dots, X_p$  называется линейное пространство  $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_p$ , составленное из всех последовательностей вида

$$(x_1, x_2, \dots, x_p), \quad x_i \in X_i,$$

с покомпонентным сложением и умножением на скаляры из  $\mathbb{k}$ :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_p) + (y_1, y_2, \dots, y_p) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_p + y_p), \\ \alpha(x_1, x_2, \dots, x_p) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_p) \end{aligned}$$

**Пример 8.2.** Следующие пространства образуются как внешние прямые суммы:

- Пространство многочленов  $\mathcal{P}^n[x]$  степени не выше  $n$ :

$$\mathcal{P}^n[x] = \mathcal{P}_0[x] \oplus \mathcal{P}_1[x] \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_n[x],$$

где  $\mathcal{P}_k[x]$  - пространство многочленов степени  $k$ .

- Пространство тензоров  $T$  конечного типа:

$$T = T_0^0 \oplus T_0^1 \oplus T_1^1 \oplus \dots \oplus T_q^p.$$

*Nota bene* Прямая сумма может быть распространена на бесконечное число слагаемых, но могут рассматриваться при этом только *финитные последовательности*.

**Пример 8.3.** Примеры пространств - бесконечных прямых сумм:

- Пространство всех многочленов  $\mathcal{P}[x]$ :

$$\mathcal{P}[x] = \mathcal{P}_0[x] \oplus \mathcal{P}_1[x] \oplus \dots$$

- Пространство тензоров всех типов  $\mathcal{T}$ :

$$\mathcal{T}(\mathbb{k}) = T_0^0(\mathbb{k}) \oplus T_0^1(\mathbb{k}) \oplus T_1^1(\mathbb{k}) \oplus \dots$$

|| Линейное пространство  $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbb{k})$  называется **алгеброй** над полем  $\mathbb{k}$ , если на  $\mathbb{A}$  определена операция, индуцирующая на нем структуру кольца с согласованным умножением на элементы поля  $\mathbb{k}$ .

**Пример 8.4.**

- Множество  $\mathbb{C}$  комплексных чисел образует алгебру над  $\mathbb{R}$ ;
- Множество  $\mathbb{k}^4$  кватернионов образует алгебру как над  $\mathbb{R}$ , так и над  $\mathbb{C}$ ;
- Пространство  $\mathcal{P}[x]$  вместе со стандартной операцией умножения многочленов является алгеброй, называемой *алгеброй многочленов*;
- Пространство  $\mathcal{T}(\mathbb{k})$  вместе с операцией тензорного умножения образует алгебру, называемую *тензорной алгеброй*.

Говорят, что в алгебре  $\mathbb{A}$  задана **градуировка**, если при

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 \oplus \mathbb{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{A}_i \oplus \dots$$

имеет место следующее свойство относительно умножения в алгебре:

$$\mathbb{A}_i \cdot \mathbb{A}_j \subseteq \mathbb{A}_{i+j}.$$

Алгебры, обладающие данным свойством называются **градуированными**.

---

**Пример 8.5.** Примеры градуированных алгебр:

- $(\mathcal{P}[x], +, \cdot)$  - алгебра многочленов;
  - $(\mathcal{T}(\mathbb{K}), \oplus, \otimes)$  - алгебра тензоров;
  - $(\Sigma, \oplus, \vee)$  - алгебра симметричных тензоров;
  - $(\Lambda, \oplus, \wedge)$  - алгебра антисимметричных тензоров (алгебра Грассмана);
-