δ

Лекция 4

Произведения ПЛФ

Содержание лекции:

В лекции рассматривается операция проиведения двух ПЛФ и ее алгебраические свойства, вводится определение новой структуры - внешней алгебры ПЛФ. Широкое практическое приложения имеет алгебра антисимметричных форм, однако введенная операция произведения ПЛФ не сохраняет антисимметричность результата. В связи с этим вводится операция внешнего произведения антисимметричных форм, которая индуцирует новую алгебраическую структуру - алгебру Грассмана.

Ключевые слова:

Произведение ПЛФ, свойства произвденеия ПЛФ, внешняя алгебра форм, внешнее произвдение антисимметричных ПЛФ, свойства внешнего произведения, алгебра антисимметричных форм, алгебра Грассмана.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

`mathdep.ifmo.ru/geolin`

4.1 Произведение ПЛФ

Пусть $U \in \Omega_{q_1}^{p_1}(\Bbbk)$ и $V \in \Omega_{q_2}^{p_2}(\Bbbk)$. Отображение $W = U \cdot V$ называется **произведением** ПЛФ U на ПЛФ V, если

$$W\left(x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \ldots, x_{p_1+p_2}; y^1, y^2, \ldots, y^{q_1}, y^{q_1+1}, \ldots, y^{q_1+q_2}\right) =$$
$$U\left(x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}; y^1, y^2, \ldots, y^{q_1}\right) \cdot V\left(x_1, x_2, \ldots, x_{p_2}; y^1, y^2, \ldots, y^{q_2}\right)$$

Лемма 4.1. *Отображение W - ПЛФ, причем $W \in \Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}(\Bbbk)$.*

►

Очевидно. ◄

Свойства произведения ПЛФ

1. Некоммутативность: $U \cdot V \neq V \cdot U$:

$$W_1(x_1, x_2) = \left(f^1 \cdot f^2\right)(x_1, x_2) = f^1(x_1) f^2(x_2),$$
$$W_2(x_1, x_2) = \left(f^2 \cdot f^1\right)(x_1, x_2) = f^2(x_1) f^1(x_2).$$

2. Ассоциативность: $U \cdot (V \cdot W) = (U \cdot V) \cdot W = U \cdot V \cdot W$;

3. Дистрибутивность по сумме: $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$;

4. Нуль-форма: $U \cdot \Theta_{\Omega_{q_2}^{p_2}} = \Theta_{\Omega_{q_1}^{p_1}} \cdot V = \Theta_{\Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}}$;

5. Дистрибутивность по произведению: $(\alpha \cdot U) \cdot V = U \cdot (\alpha \cdot V)$;

6. Пусть $U \in \Omega_0^p$, тогда набор

$$^{s_1, s_2, \ldots, s_p}W = f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \ldots \cdot f^{s_p},$$

образует базис в Ω_0^p, если $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ образует базис в X^*.

►

Для произвольного набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^p$ имеем:

$$^{s_1, s_2, \ldots, s_p}W(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \ldots \xi_p^{s_p} =$$
$$f^{s_1}(x_1) \cdot f^{s_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot f^{s_p}(x_p) = \left(f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \ldots \cdot f^{s_p}\right)(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

◄

Nota bene Пусть $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ - базис X^* и $\{\hat{x}_j\}_{j=1}^n$ - дуальный базис X^{**}, тогда базис $\Omega_q^p(\Bbbk)$ образуют ПЛФ вида

$$^{s_1, s_2, \ldots, s_p}_{t_1, t_2, \ldots, t_q}W = f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \ldots \cdot f^{s_p} \cdot \hat{x}_{t_1} \cdot \hat{x}_{t_2} \cdot \ldots \cdot \hat{x}_{t_q}.$$

7. Пусть $U \in \Omega^p$ и $V \in \Omega^q$, тогда

$$\begin{gathered}\operatorname{Sym}(U \cdot V) = \operatorname{Sym}(\operatorname{Sym} U \cdot V) = \operatorname{Sym}(U \cdot \operatorname{Sym} V),\\ \operatorname{Asym}(U \cdot V) = \operatorname{Asym}(\operatorname{Asym} U \cdot V) = \operatorname{Asym}(U \cdot \operatorname{Asym} V).\end{gathered}$$

►
Докажем данное свойство для операции Asym:

$$\begin{gathered}\operatorname{Asym}(\operatorname{Asym} U \cdot V) = \\ \operatorname{Asym}\left[\frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} U\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) \cdot V\left(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}\right)\right] = \\ \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \operatorname{Asym}\left[U\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) \cdot V\left(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}\right)\right].\end{gathered}$$

В силу антисимметричности формы имеем

$$\begin{gathered}\operatorname{Asym}\left[U\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) \cdot V\left(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}\right)\right] = \\ = (-1)^{[\sigma]} \operatorname{Asym}\left[U\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) \cdot V\left(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}\right)\right],\end{gathered}$$

и тогда получаем

$$\frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma} \operatorname{Asym}\left[U\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) \cdot V\left(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}\right)\right] = \operatorname{Asym}(U \cdot V).$$

◄

4.2 Внешнее произведение ПЛФ

Внешним произведением ПЛФ $U \in \Lambda^p$ на ПЛФ $V \in \Lambda^r$ называется отображение

$$U \wedge V = \frac{(p+r)!}{p! \cdot r!} \operatorname{Asym}(U \cdot V).$$

Лемма 4.2. *Отображение $U \wedge V$ - антисимметричная ПЛФ, причем*

$$U \wedge V \in \Lambda^{p+r}.$$

►
Очевидно. ◄

Nota bene Имеет место следующее свойство:

$$p + r > n = \dim X \quad \Rightarrow \quad U \wedge V = \Theta.$$

Свойства внешнего произведения

1. Антикоммутативность:
$$U \wedge V = (-1)^{pr} V \wedge U$$

   ►

   Имеет место:
$$\left(U \wedge V\right)\left(x_1, \dots x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+r}\right) =$$
$$\frac{(p+r)!}{p! \cdot r!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} U\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right) \cdot V\left(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+r)}\right)$$

   Хотим получить:
$$(\sigma(1), \dots, \sigma(p), \sigma(p+1), \dots, \sigma(p+r)) \to (\sigma(p+1), \dots, \sigma(p+r), \sigma(1), \dots, \sigma(p))$$

   для этого необходимо
$$p + p + p + \ldots + p = p \cdot r$$

   транспозиций. И значит
$$\left(U \wedge V\right)\left(x_1, \dots x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+r}\right) = (-1)^{p \cdot r}\left(V \wedge U\right)\left(x_1, \dots x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+r}\right).$$

   ◄

2. Вынесение скаляра:
$$\left(\alpha U\right) \wedge V = U \wedge \left(\alpha V\right) = \alpha\left(U \wedge V\right).$$

   ►
   Очевидно. ◄

3. Ассоциативность:
$$U \wedge \left(V \wedge W\right) = \left(U \wedge V\right) \wedge W = U \wedge V \wedge W = \frac{(p+r+s)!}{p! \cdot r! \cdot s!} \operatorname{Asym}\left(U \cdot V \cdot W\right).$$

   ►

   По определению:
$$\left(U \wedge V\right) \wedge W = \left(\frac{(p+r)!}{p! \cdot r!} \operatorname{Asym}\left(U \cdot V\right)\right) \wedge W =$$
$$\frac{((p+r)+s)!}{(p+r)! \cdot s!} \operatorname{Asym}\left(\frac{(p+r)!}{p! \cdot r!} \operatorname{Asym}\left(\left(U \cdot V\right) \cdot W\right)\right) =$$
$$\frac{(p+r+s)!}{p! \cdot r! \cdot s!} \operatorname{Asym}\left(\operatorname{Asym}\left(U \cdot V\right) \cdot W\right) = \frac{(p+r+s)!}{p! \cdot r! \cdot s!} \operatorname{Asym}\left(U \cdot V \cdot W\right).$$

   ◄

4. Дистрибутивность:
$$U \wedge (V + W) = U \wedge V + U \wedge W.$$

   ►

   Следует из дистрибутивности умножения и линейности Asym. ◄

5. Нуль-форма:
$$U \wedge \Theta = \Theta \wedge V = \Theta.$$

6. Пусть $\{f^i\}_{i=1}^n$ базис X^*, тогда
$${}^{i_1,i_2,\ldots,i_p}F = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \ldots \wedge f^{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$$

   ►

   Из определения следует:
$$
\begin{gathered}
{}^{i_1,i_2,\ldots,i_p}F = p! \operatorname{Asym}\left({}^{i_1,i_2,\ldots,i_p}W\right) = p! \operatorname{Asym}\left(f^{i_1} \cdot f^{i_2} \cdot \ldots \cdot f^{i_p}\right) = \\
p! \operatorname{Asym}\left(\operatorname{Asym}\left(f^{i_1} \cdot f^{i_2}\right) \cdot \ldots \cdot f^{i_p}\right) = \frac{p!}{2!} \operatorname{Asym}\left(f^{i_1} \wedge f^{i_2} \cdot \ldots \cdot f^{i_p}\right) = \\
\frac{p!}{2!} \operatorname{Asym}\left(\operatorname{Asym}\left(f^{i_1} \wedge f^{i_2} \cdot f^{i_3}\right) \cdot \ldots \cdot f^{i_p}\right) = \\
\frac{p!}{3!} \operatorname{Asym}\left(f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge f^{i_3} \cdot \ldots \cdot f^{i_p}\right) = \ldots = \\
\operatorname{Asym}\left(f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \ldots \wedge f^{i_p}\right) = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \ldots \wedge f^{i_p}.
\end{gathered}
$$

   ◄