

Содержание

1	Кратный интеграл Римана	2
1.1	Интеграл по брусу	2
1.2	Множества лебеговой меры ноль	5
1.3	Колебание функции. Обобщение теоремы Кантора	7
1.4	Критерий Лебега	8
1.5	Допустимые множества. Интеграл по множеству.	10
1.6	Мера Жордана	12
1.7	Свойства кратного интеграла	13
1.8	Теорема Фубини	15
1.9	Замена переменных в кратном интеграле	17
1.10	Цилиндрические и сферические координаты в \mathbb{R}^3	19
1.11	Примеры вычисления кратных интегралов	21
2	Несобственный кратный интеграл	25
3	Криволинейный интеграл	25
4	Поверхностный интеграл	25

Интегрирование функции многих переменных

1 Кратный интеграл Римана

1.1 Интеграл по брусу

Напомним, брусом Π или $\Pi_{a,b}$ в пространстве \mathbb{R}^n называют множество

$$\Pi_{a,b} := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\},$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ и $a_i \leq b_i \forall i = 1, \dots, n$.

Также можно определить открытый брус $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n\}$.

Определение 1.1.1 *Объёмом (мерой) бруса $\Pi_{a,b}$ называют*

$$|\Pi_{a,b}| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Также используют обозначения: $V(\Pi)$, $\mu(\Pi)$ и т.п.

Объёмом открытого бруса называют объём его замыкания.

Заметим, что в \mathbb{R}^1 брусом является отрезок, а его объёмом – его длина; в \mathbb{R}^2 – прямоугольник и его площадь.

Для $\lambda > 0$ можно рассматривать гомотетию бруса с центром в центре бруса и коэффициентом λ , т.е. каждая сторона бруса увеличивается в λ раз. Результат такой гомотетии будем обозначать $\lambda\Pi_{a,b}$.

Сформулируем основные свойства объёма бруса.

Лемма 1.1.1 (Свойства объёма бруса) *Для произвольного бруса Π выполнены свойства:*

1. *Неотрицательность:* $|\Pi| \geq 0$.

2. *Однородность:* $|\lambda\Pi| = \lambda^n |\Pi|$.

3. *Аддитивность:* если $\Pi = \bigcup_{i=1}^m \Pi_i$, где Π_i – бруссы, попарно не имеющие

общих внутренних точек, то $|\Pi| = \sum_{i=1}^m |\Pi_i|$.

4. *Полуаддитивность*: если $\Pi \subset \bigcup_{i=1}^m \Pi_i$, то $|\Pi| \leq \sum_{i=1}^m |\Pi_i|$.

5. Если $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$, то $|\Pi| = |\Pi_1| \cdot |\Pi_2|$.

Доказательство. Доказательство очевидно и предоставляется читателю. \square

Для построения интеграла по брусу нам потребуются стандартные (для интеграла Римана) определения.

Определение 1.1.2 Пусть τ_i – разбиение отрезка $[a_i, b_i]$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Будем говорить, что разбиения τ_i генерируют разбиение τ бруса Π , где $\tau = \tau_1 \times \tau_2 \times \dots \times \tau_n = \{x \in \Pi : x_i \in \tau_i, i = 1, \dots, n\}$.

При этом брус Π представляется в виде объединения брусьев (попарно не имеющих общих внутренних точек), полученных как декартово произведение всевозможных отрезков разбиения соответствующих отрезков $[a_i, b_i]$ для каждого $i = 1, \dots, n$.

Диаметром (мелкостью, рангом) разбиения τ называется наибольший диаметр элементов разбиения:

$$\lambda(\tau) := \max_j \text{diam } \Pi_j,$$

где $\text{diam } A := \sup_{x, y \in A} \rho(x, y)$ – диаметр множества A . Для бруса диаметр равен длине его диагонали.

Если для каждого элемента разбиения Π_j выбрана точка $\xi_j \in \Pi_j$, то говорят об оснащённом разбиении (τ, ξ) .

Определение 1.1.3 Пусть $f : \mathbb{R}^n \supset \Pi \rightarrow \mathbb{R}$, (τ, ξ) – оснащённое разбиение бруса Π . Интегральной суммой функции f по брусу Π для оснащённого разбиения (τ, ξ) будем называть

$$\sigma_f(\tau, \xi) := \sum_{i=1}^m f(\xi_i) |\Pi_i|,$$

где Π_i – брусья, элементы разбиения τ .

Определение 1.1.4 Число $I \in \mathbb{R}$ называется интегралом функции f по брусу Π , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\tau, \xi) : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow |\sigma_f(\tau, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Для интеграла используют обозначения:

$$\int_{\Pi} f dx, \quad \iint_{\Pi} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad \iiint_{\Pi} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3, \dots$$

Если интеграл существует, то функцию f называют интегрируемой (по Риману) по брусу Π и пишут $f \in R(\Pi)$.

Чтобы подчеркнуть многомерность интеграла, его часто называют кратным, в пространстве \mathbb{R}^2 – двойным, в \mathbb{R}^3 – тройным.

Теорема 1.1.1 (Необходимое условие интегрируемости) Если функция f интегрируема по брусу Π , то она ограничена на Π .

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству аналогичной теоремы для функции, интегрируемой на отрезке. \square

Далее, аналогично вводятся суммы и интегралы Дарбу, их свойства и критерии Дарбу и Римана интегрируемости. Сделаем это коротко.

Верхняя и нижняя суммы Дарбу:

$$S_\tau(f) := \sum_{i=1}^m M_i |\Pi_i|, \quad M_i = \sup_{\Pi_i} f(x);$$

$$s_\tau(f) := \sum_{i=1}^m m_i |\Pi_i|, \quad m_i = \inf_{\Pi_i} f(x);$$

Интегралы Дарбу (для ограниченной функции f):

$$I^* := \inf_{\tau} S_\tau(f), \quad I_* := \sup_{\tau} s_\tau(f).$$

Свойства сумм и интегралов Дарбу:

1. $s_\tau \leq \sigma(\tau, \xi) \leq S_\tau$;
2. $s_{\tau_1} \leq s_{\tau_2}$, $S_{\tau_1} \geq S_{\tau_2}$, где $\tau_1 \subset \tau_2$;
3. $s_{\tau_1} \leq I_* \leq I^* \leq S_{\tau_2}$;
4. $f \in R(\Pi) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$; (критерий Дарбу)
5. $f \in R(\Pi) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \tau : S_\tau - s_\tau < \varepsilon$; (критерий Римана)
6. $f \in R(\Pi) \Leftrightarrow f$ – ограничена на Π , $I_* = I^*$.

Доказательства этих свойств и критериев абсолютно такие же, как раньше.

1.2 Множества лебеговой меры ноль

Для формулировки и понимания критерия Лебега нам понадобится понятие множества лебеговой меры ноль. Само понятие меры Лебега будет определено значительно позже.

Определение 1.2.1 Множество $E \in \mathbb{R}^n$ называется множеством лебеговой (n -мерной) меры ноль, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдётся не более чем счётное покрытие множества E брусками Π_i , сумма объёмов которых меньше ε :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \{\Pi_i\}_{i=1}^{\infty} : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Pi_i, \sum_{i=1}^{\infty} |\Pi_i| < \varepsilon.$$

Пример 1.2.1 Одноточечное множество и конечное множество – это множества лебеговой меры ноль.

Лемма 1.2.1 (Свойства множеств лебеговой меры ноль) Выполнены свойства:

1. Точка, конечное и счетное множество – лебеговой меры ноль;
2. Объединение не более чем счётного набора множеств лебеговой меры ноль – лебеговой меры ноль;
3. Если $A \subset B$ и B – лебеговой меры ноль, то A – лебеговой меры ноль;
4. Если A имеет внутренние точки, то A – не является множеством лебеговой меры ноль;
5. Если $f \in C(\Pi)$, где $\Pi \in \mathbb{R}^{n-1}$ – брус, то её график $\Gamma_f = \{(x, f(x))\} \in \mathbb{R}^n$ – лебеговой меры ноль;
6. В определении множеств лебеговой меры ноль вместо замкнутых брусков можно брать открытые (это не изменит множество множеств лебеговой меры ноль);
7. Компакт K является лебеговой меры ноль \Leftrightarrow для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ конечное покрытие брусками $\{\Pi_i\}_{i=1}^m$ суммарным объёмом меньше ε .
8. Подпространство $\mathbb{R}^k: \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ ($k < n$), является множеством лебеговой меры ноль.

Доказательство. 1. Очевидно, точку можно покрыть бруском сколь угодно маленького объема. Остальное будет следовать из п.2

2. Пусть $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, E_k – множества лебеговой меры ноль. Тогда для $\varepsilon > 0$

найдутся покрытия брусками Π_{ki} : $\sum_{i=1}^{\infty} |\Pi_{ki}| < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Тогда объединение этих покрытий даст покрытие E : $E \subset \bigcup_{i,k \in \mathbb{N}} \Pi_{ki}$. При этом,

$$\sum_{i,k \in \mathbb{N}} |\Pi_{ki}| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

откуда следует требуемое.

3. Очевидно, так как любое покрытие B будет и покрытием A .

4. Если A имеет внутреннюю точку, то оно содержит некоторый шар, внутри которого можно взять брус объема $V > 0$. Тогда суммарный объем любого покрытия будет больше V .

5. Так как Π – компакт, то f – равномерно непрерывна на Π (теорема Кантора). То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \Pi, |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Построим τ – разбиение Π мелкостью $\lambda(\tau) < \delta$, пусть Π_i – элементы разбиения, $\xi_i \in \Pi_i$ – некоторое оснащение. Теперь для каждого ξ_i получим брус в \mathbb{R}^n вида $\Pi_i \times [f(\xi_i) - \varepsilon, f(\xi_i) + \varepsilon]$, содержащий график функции f над множеством Π_i . Тогда объединение $\bigcup_i (\Pi_i \times [f(\xi_i) - \varepsilon, f(\xi_i) + \varepsilon])$ покрывает

весь график функции f , причем его суммарный объем не превосходит $2\varepsilon|\Pi|$, откуда следует требуемое.

6. Если есть покрытие множества открытыми брусками, то переходя к их замыканиям, получим покрытие замкнутыми.

Обратно. Пусть есть покрытие замкнутыми брусками Π_i , $\sum_{i=1}^{\infty} |\Pi_i| < \varepsilon$.

Для каждого Π_i построим гомотетию с коэффициентом $\lambda > 1$. Получим покрытие открытыми брусками вида $\text{int}(\lambda \Pi_i)$ и $\sum_{i=1}^{\infty} |\text{int}(\lambda \Pi_i)| = \lambda^n \sum_{i=1}^{\infty} |\Pi_i| <$

$\lambda^n \varepsilon$, где λ^n – фиксированное число.

7. Следует из определения компакта и п. 6.

8. Подпространство \mathbb{R}^k можно покрыть счетной системой брусков, каждый из которых имеет лебегову меру ноль в \mathbb{R}^n (следует из п. 5). \square

Определение 1.2.2 ("Почти везде") Говорят, что некоторое свойство P выполнено почти везде (почти всюду) на множестве E , если оно выполнено на $E \setminus A$, где A – множество лебеговой меры ноль.

Например, функция $f(x) = 1/x$ непрерывна почти везде на \mathbb{R} . А функция Дирихле почти всюду равна 0.

1.3 Колебание функции. Обобщение теоремы Кантора

Понятие колебания функции на множестве было определено раньше. Напомним определение и заодно определим колебание в точке.

Определение 1.3.1 (Колебание функции на множестве и в точке)

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Колебанием функции f на множестве E называется

$$\omega_f(E) = \sup_{x, y \in E} |f(x) - f(y)|.$$

Колебанием функции f в точке $x_0 \in E$ называется

$$\omega_f(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(U_\delta(x_0) \cap E) = \inf_{\delta > 0} \omega_f(U_\delta(x_0) \cap E).$$

Последнее равенство верно, так как при сужении множества (окрестности точки x_0) значение колебания функции на нём уменьшается (нестрого), а значит предел при $\delta \rightarrow 0+$ будет существовать и равен инфимуму.

Пример 1.3.1 Для функции $f(x) = \operatorname{sign} x$: $\omega_f(0) = 2$.

Можно заметить, что $\omega_f(E) \geq \omega_f(x)$ для $\forall x \in E$.

С помощью понятия колебания функции в точке и на множестве можно формулировать условие непрерывности и равномерной непрерывности функции.

Лемма 1.3.1 (Критерий непрерывности Бэра) Функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\omega_f(x_0) = 0$.

Доказательство. Доказательство опирается на определения и предоставляется читателю. \square

Также можно сформулировать равносильное условие равномерной непрерывности функции f на множестве E :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E \Rightarrow \omega_f(U_\delta(x) \cap E) < \varepsilon.$$

Теорема Кантора о равномерной непрерывности на компакте будет звучать так:

$$f \in C(K), K - \text{компакт} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in K \quad \omega_f(U_\delta(x) \cap K) < \varepsilon.$$

Далее нам понадобится обобщение этой теоремы.

Теорема 1.3.1 (Обобщение т. Кантора о равномерной непрерывности)

Пусть $K \in \mathbb{R}^n$ – компакт, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$. Если $\forall x \in K : \omega_f(x) \leq \omega_0$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in K \quad \omega_f(U_\delta(x) \cap K) < \omega_0 + \varepsilon.$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы Кантора. \square

1.4 Критерий Лебега

Пусть $f : \mathbb{R}^n \supset \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ и E – множество точек разрыва функции f на бресе Π , то есть

$$E = \{x \in \Pi : \omega_f(x) > 0\}.$$

Введем для $\alpha > 0$ множества

$$E_\alpha = \{x \in \Pi : \omega_f(x) \geq \alpha\}.$$

Лемма 1.4.1 E_α – компакт.

Доказательство. Ограниченность очевидна, так как $E_\alpha \subset \Pi$. Докажем замкнутость. Пусть $x \in \Pi \setminus E_\alpha$, тогда $\omega_f(x) = \inf_{\delta > 0} \omega_f(U_\delta(x) \cap \Pi) < \alpha$ и найдется окрестность $U_\delta(x)$, в которой $\omega_f(U_\delta(x) \cap \Pi) < \alpha$. Тогда $U_\delta(x) \cap \Pi \subset \Pi \setminus E_\alpha$, то есть $\Pi \setminus E_\alpha$ – открыто, откуда E_α – замкнуто. \square

Замечание 1.4.1 Как связаны E_α и E :

$$E = \bigcup_{\alpha > 0} E_\alpha = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{1/k}.$$

Теорема 1.4.1 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману)

Пусть $f : \mathbb{R}^n \supset \Pi \rightarrow \mathbb{R}$, где Π – брус. Тогда для интегрируемости f по Риману на Π необходимо и достаточно, чтобы f была ограничена на Π и непрерывна почти всюду на Π .

Другими словами, функция интегрируема на бресе тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её точек разрыва имеет лебегову меру ноль.

Доказательство. 1) *Необходимость.* Ограниченность следует из интегрируемости.

Множество точек разрыва E представим так:

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{1/k}, \quad \text{где } E_{1/k} = \{x \in \Pi : \omega_f(x) \geq \frac{1}{k}\}.$$

Докажем, что каждое $E_{1/k}$ имеет лебегову меру ноль, откуда будет следовать требуемое.

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Так как f – интегрируема на Π , то для $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что для любого разбиения $\tau = \{\Pi_i\}$ бруса Π мелкостью $\lambda(\tau) < \delta$ выполнено

$$\sum_{i=1}^m \omega_f(\Pi_i) |\Pi_i| < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Теперь все точки множества $E_{1/k}$ разделим на две группы: в $E'_{1/k}$ попадут точки из $E_{1/k}$, попадающие внутрь брусьев разбиения τ ; в $E''_{1/k}$ лежат точки из $E_{1/k}$, попадающие на границу брусьев разбиения τ .

Заметим, что $E''_{1/k}$ – множество лебеговой меры ноль, т.к. оно является подмножеством конечного объединения границ брусьев.

Рассмотрим сумму по элементам разбиения Π_i , пересекающимся с $E'_{1/k}$:

$$\Sigma' := \sum_{i: \Pi_i \cap E'_{1/k} \neq \emptyset} \omega_f(\Pi_i) |\Pi_i|. \text{ Так как } \omega_f(\Pi_i) \geq \frac{1}{k}, \text{ то имеем}$$

$$\frac{1}{k} \sum_{i: \Pi_i \cap E'_{1/k} \neq \emptyset} |\Pi_i| \leq \Sigma' \leq \sum_{i=1}^m \omega_f(\Pi_i) |\Pi_i| < \frac{\varepsilon}{k},$$

откуда, умножив на k , получаем

$$\sum_{i: \Pi_i \cap E'_{1/k} \neq \emptyset} |\Pi_i| < \varepsilon.$$

То есть, множество $E'_{1/k}$ покрывается набором брусьев суммарным объемом меньше ε , следовательно, $E'_{1/k}$ имеет лебегову меру ноль. Тогда и $E_{1/k}$ – лебеговой меры ноль.

2) *Достаточность.* Пусть f ограничена на Π : $|f(x)| \leq C$ и множество точек разрыва E – лебеговой меры ноль. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество

$$E_\varepsilon = \{x \in \Pi : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}.$$

Множество E_ε – компакт и лебеговой меры ноль. Тогда существует конечное покрытие множества E_ε брусьями I_i :

$$E_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^m I_i, \quad \sum_{i=1}^m |I_i| < \varepsilon.$$

Набор брусьев $\{I_i\}$ генерирует разбиение $\{\Pi_i\}$ бруса Π . Рассмотрим сумму для этого разбиения и разобьем ее на две группы слагаемых:

$$\sum_{i=1}^p \omega_f(\Pi_i) |\Pi_i| = \Sigma' + \Sigma'',$$

где в Σ' вошли слагаемые для тех Π_i , которые содержатся в I_j , а в Σ'' – все остальные.

Оценим каждую сумму. Имеем для Σ' :

$$\Sigma' \leq 2C \sum_{i=1}^p |I_i| \leq 2C\varepsilon.$$

Для брусьев, соответствующих Σ'' заметим, что так как $\omega_f(x) < \varepsilon$, то измельчая разбиение можно добиться в соответствующих брусках $\omega_f(\Pi_i) < 2\varepsilon$ (см. обобщение теоремы Кантора). Тогда $\Sigma'' < 2\varepsilon|\Pi|$ и

$$\sum_{i=1}^p \omega_f(\Pi_i) |\Pi_i| < \varepsilon(2C + 2|\Pi|),$$

откуда следует интегрируемость функции f на бруске Π . □

1.5 Допустимые множества. Интеграл по множеству.

Теперь наша задача – определить интеграл по множеству, отличному от бруса. Сначала выделим класс “хороших” множеств.

Определение 1.5.1 Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ будем называть допустимым, если оно ограничено в \mathbb{R}^n и его граница ∂E лебеговой меры ноль (в \mathbb{R}^n).

Пример 1.5.1 Криволинейная трапеция в \mathbb{R}^2 , образованная графиком непрерывной на отрезке функции, является допустимым множеством.

Пример 1.5.2 Цилиндронд, образованный графиком непрерывной функции $f: \mathbb{R}^2 \supset \Pi \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. множество

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Pi, 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

является допустимым.

Лемма 1.5.1 (Операции с допустимыми множествами) Объединение и пересечение конечного числа допустимых множеств – допустимое множество; разность двух допустимых множеств – допустимое множество.

Доказательство. Справедливость леммы следует из свойств границы, а именно, для любых множеств A, B :

$$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B,$$

$$\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B,$$

$$\partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B.$$

□

Замечание 1.5.1 Для бесконечного количества допустимых множеств лемма не верна.

Для любого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ определим характеристическую функцию $\chi_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Заметим, что функция $\chi_E(x)$ имеет разрывы только на границе множества E . Значит, если E – допустимое множество, то χ_E непрерывна почти всюду на \mathbb{R}^n .

Пример 1.5.3 Функция Дирихле $d(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ равна 0 почти всюду на $[0, 1]$. Но при этом разрывна в каждой точке $[0, 1]$.

Пусть теперь $f : \mathbb{R}^n \subset E \rightarrow \mathbb{R}$. Доопределим функцию на всем \mathbb{R}^n с помощью функции

$$f_{\chi_E}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in E; \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Заметим, что если f была непрерывна на E , то f_{χ_E} может иметь разрывы только на ∂E , (на множестве лебеговой меры ноль), а значит, будет непрерывна почти везде. Если же f имела непустое множество точек разрыва, то переходя к f_{χ_E} это множество может изменить только на множество лебеговой меры ноль.

Определение 1.5.2 (Интеграл по множеству) Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, E – ограниченное множество. Интегралом функции f по множеству E называется

$$\int_E f(x)dx := \int_{\Pi \supset E} f_{\chi_E}(x)dx,$$

где Π – произвольный брус, содержащий E .

Если интеграл справа существует, то говорят, что f интегрируема по Риману на E и пишут $f \in R(E)$.

Данное определение требует пояснения, так как интеграл справа зависит от бруса Π .

Лемма 1.5.2 Пусть Π_1, Π_2 – два бруса, содержащие множество E . Тогда оба интеграла ниже существуют или не существуют одновременно, и если существуют, то

$$\int_{\Pi_1 \supset E} f_{\chi_E}(x)dx = \int_{\Pi_2 \supset E} f_{\chi_E}(x)dx.$$

Доказательство. Построим брус $\Pi = \Pi_1 \cap \Pi_2$, $E \subset \Pi$. Так как точки разрыва функции f_{χ_E} лежат в E или на ∂E , то все ее точки разрыва лежат в Π . Следовательно, по критерию Лебега, интегралы по брусам Π , Π_1 , Π_2 существуют или нет одновременно.

Если они существуют, то мы можем выбирать разбиения удобным образом. Выберем разбиения Π_1 и Π_2 такие, что они получаются продолжением разбиения Π . Так как вне Π функция равна нулю, то интегральные суммы по $\Pi_{1,2}$ будут совпадать с интегральной суммой для Π с таким же оснащением. Откуда следует равенство интегралов. \square

Далее легко получить критерий интегрируемости функции по допустимому множеству.

Теорема 1.5.1 (Критерий интегрируемости по допустимому множеству)

Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на допустимом множестве E тогда и только тогда, когда она ограничена и непрерывна почти везде на E .

Доказательство. Утверждение следует из критерия Лебега и того, что по сравнению с f у функции f_{χ_E} могут добавиться точки разрыва на ∂E , мера лебега которого ноль. \square

1.6 Мера Жордана

Пусть $E \in \mathbb{R}^n$ – произвольное ограниченное множество.

Определение 1.6.1 (Мера Жордана) *Мерой (Жордана) или объёмом ограниченного множества E назовём значение интеграла*

$$\mu(E) := \int_E 1 \cdot dx,$$

если он существует. В случае существования множество называется измеримым по Жордану.

Замечание 1.6.1 *Из определения интеграла и критерия интегрируемости следует, что указанный интеграл существует только для допустимого множества E . Таким образом, множества всех допустимых множеств и измеримых по Жордану совпадают.*

Замечание 1.6.2 *Мера Жордана бруса совпадает с его объёмом:*

$$\mu(\Pi) = |\Pi|.$$

Обсудим геометрический смысл меры Жордана. Пусть E – ограничено. Рассмотрим брус $\Pi \supset E$ и суммы Дарбу:

$s_{\chi_E}(\tau) = \sum_i |\Pi_i|$ – только по тем Π_i , которые лежат внутри E (см. Рис.);

$S_{\chi_E}(\tau) = \sum_i |\Pi_i|$ – только по тем Π_i , объединение которых покрывает E

(см. Рис.).

Тогда измеримость по Жордану равносильна (по критерию Римана) тому, что для $\forall \varepsilon > 0$ найдется разбиение τ , для которого $S_{\chi_E}(\tau) - s_{\chi_E}(\tau) < \varepsilon$, то есть мера “полосы”, содержащей границу ∂E (см. Рис.), будет сколь угодно маленькой.

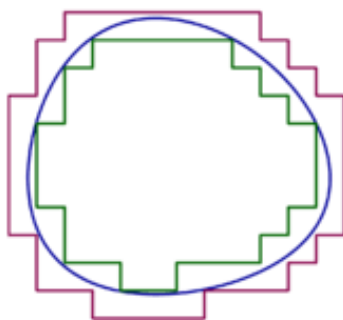


Рис. 1: Про меру Жордана. Площадь зеленого – нижние суммы Дарбу, красного – верхние

Заметим, также, что множество жордановой меры ноль – это множество, допускающее конечное покрытие брусками суммарного объема меньше наперед выбранного ε .

Любое множество лебеговой меры ноль будет и жордановой меры ноль. Но не наоборот.

Пример 1.6.1 Множество $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ – меры ноль по Лебегу, но неизмеримо по Жордану, т.к. $\partial A = [0, 1]$ имеет Жорданову меру 1.

1.7 Свойства кратного интеграла

Свойства кратного интеграла аналогичны свойствам одномерного интеграла.

1. *Интеграл по множеству меры ноль.* Пусть E – лебеговой меры ноль, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $f \in R(E)$ и $\int_E f dx = 0$.

2. *Интеграл от почти везде нулевой функции.* Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f = 0$ почти везде на ограниченном множестве E . Тогда $f \in R(E)$ и $\int_E f dx = 0$.

Следствие. Если $f = g$ почти везде на E , то интегралы $\int_E f dx$ и $\int_E g dx$ существуют или нет одновременно, и если существуют, то равны.

3. *Линейность.* Множество $R(E)$ функций, интегрируемых по Риману на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, является линейным пространством (относительно стандартных операций сложения функций и умножения на число). Интеграл $\int_E : R(E) \rightarrow \mathbb{R}$ является линейным функционалом на $R(E)$ (т.е. линейным оператором, возвращающим значения в \mathbb{R}).

4. *Аддитивность.* Пусть A и B – допустимые множества в \mathbb{R}^n , $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\exists \int_{A \cup B} f dx \Leftrightarrow \exists \int_A f dx \wedge \exists \int_B f dx.$$

Причём, если $\mu(A \cap B) = 0$, то

$$\int_{A \cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx.$$

5. *Интеграл модуля.* Если $f \in R(E)$, то $|f| \in R(E)$, и

$$\left| \int_E f dx \right| \leq \int_E |f| dx.$$

6. *Интегрирование неравенства.* Пусть $f, g \in R(E)$ и $f \leq g$ на E . Тогда

$$\int_E f dx \leq \int_E g dx.$$

В частности, если $f \geq 0$ на E , то $\int_E f dx \geq 0$.

Здесь можно предполагать выполнение исходных неравенств почти везде на E .

7. *Теорема о среднем.* Пусть $f, g \in R(E)$, E – допустимое, $m \leq f \leq M$, $g \geq 0$ на E . Тогда

$$m \int_E g dx \leq \int_E f g dx \leq M \int_E g dx.$$

В частности,

$$m\mu(E) \leq \int_E f dx \leq M\mu(E),$$

Следствие. Если при этом $m = \inf_E f$, $M = \sup_E f$, то

$$\exists \theta \in [m, M] : \int_E f dx = \theta \mu(E).$$

Если при этом $f \in C(E)$ и E – связное и допустимое, то

$$\exists \xi \in E : \int_E f dx = f(\xi) \mu(E).$$

8. Если $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, E – допустимое, $f \geq 0$ на E и $\int_E f dx = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E .

Замечание 1.7.1 Пусть E – допустимое. Введем на линейном пространстве $R(E)$ интегрируемых на E функций отношение эквивалентности:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ почти всюду на } E.$$

Тогда на полученном фактор-пространстве $\tilde{R}(E)$ определена норма

$$\|f\| = \int_E |f| dx.$$

1.8 Теорема Фубини

Как же вычислять кратный интеграл?

Теорема 1.8.1 (Фубини) Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ – брусья, функция $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ – интегрируема на $X \times Y$. Тогда следующие три интеграла существуют одновременно и равны:

$$\int_{X \times Y} f(x, y) dx dy = \int_X dx \int_Y f(x, y) dy = \int_Y dy \int_X f(x, y) dx.$$

Сначала расшифруем написанные интегралы. Здесь $x \in X$, $y \in Y$. Интеграл $\int_{X \times Y} f(x, y) dx dy$ – интеграл Римана функции f по брусу $X \times Y$.

Другие два интеграла называются повторными и означают:

$$\int_X dx \int_Y f(x, y) dy := \int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx = \int_X F(x) dx,$$

где $F(x) = \int_Y f(x, y) dy$. Если при некотором значении x $F(x)$ не существует, то полагают $F(x)$ равным любому числу, лежащему между соответствующими интегралами Дарбу:

$$I_*(x) = \sup_{\tau_Y} \sum_j \inf_{y \in Y_j} f(x, y) |Y_j| \leq F(x) \leq \inf_{\tau_Y} \sum_j \sup_{y \in Y_j} f(x, y) |Y_j| = I^*(x).$$

Докажем, в частности, что при этом $F \in R(X)$.

Аналогично относительно интеграла $\int_Y dy \int_X f(x, y) dx$.

Доказательство. Пусть τ – разбиение $X \times Y$, и τ_X , τ_Y – соответствующие ему разбиения брусков X и Y , а X_i , Y_j – соответствующие элементы этих разбиений. Тогда $X_i \times Y_j$ – элементы разбиения τ , и $|X_i \times Y_j| = |X_i| \cdot |Y_j|$.

Запишем цепочку неравенств (все суммы конечные, соответствуют разбиениям)

$$\begin{aligned} s_f(\tau) &= \\ &= \sum_{i,j} \inf_{(x,y) \in X_i \times Y_j} f(x, y) |X_i \times Y_j| \leq \sum_i \inf_{x \in X_i} \left(\sum_j \inf_{y \in Y_j} f(x, y) |Y_j| \right) |X_i| \leq \\ &\leq \sum_i \inf_{x \in X_i} I_*(x) |X_i| \leq \sum_i \inf_{x \in X_i} F(x) |X_i| = s_F(\tau_X) \leq \\ &\leq S_F(\tau_X) = \sum_i \sup_{x \in X_i} F(x) |X_i| \leq \sum_i \sup_{x \in X_i} I^*(x) |X_i| \leq \\ &\leq \sum_i \sup_{x \in X_i} \left(\sum_j \sup_{y \in Y_j} f(x, y) |Y_j| \right) |X_i| \leq \sum_{i,j} \sup_{(x,y) \in X_i \times Y_j} f(x, y) |X_i \times Y_j| = S_f(\tau). \end{aligned}$$

Так как $f \in R(X \times Y)$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau: S_f(\tau) - s_f(\tau) < \varepsilon$. Следовательно, и $\exists \tau_X: S_F(\tau_X) - s_F(\tau_X) < \varepsilon$, а значит, $F(x)$ интегрируема на X и её интеграл по X (повторный интеграл для f) равен двойному интегралу f по $X \times Y$.

Аналогично для второго повторного интеграла. \square

Теорема Фубини позволяет переходить от кратного интеграла по брусу к повторному интегралу по брусам меньшей размерности. Но как интегрировать по более сложным множествам.

Выделим класс “удобных” множеств.

Определение 1.8.1 (Элементарное множество) Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ будем называть элементарным по y , если

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

где D – измеримо по Жордану, $\varphi_{1,2} : D \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывны и ограничены на D .

Заметим, что элементарное множество измеримо по Жордану.

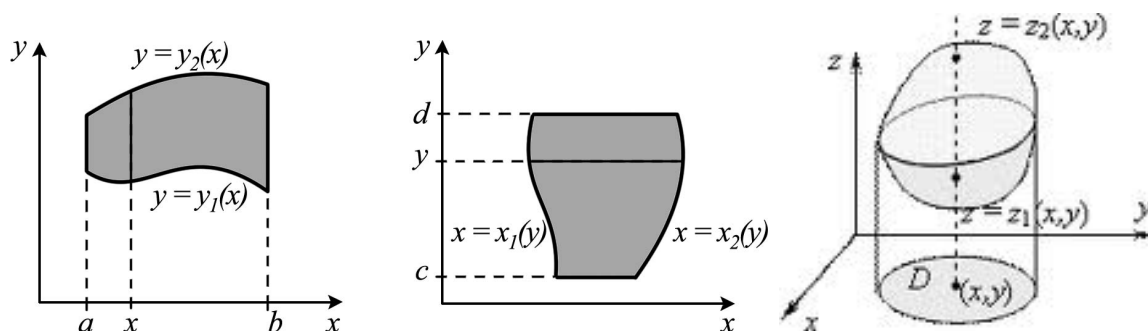


Рис. 2: Примеры элементарных множеств в \mathbb{R}^2 и в \mathbb{R}^3

Следствие 1.8.2 (Интегрирование по элементарному множеству)

Если E – элементарно по y , и $f \in R(E)$, то

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_D dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

1.9 Замена переменных в кратном интеграле

Сформулируем сразу основную теорему.

Теорема 1.9.1 (Замена переменной в кратном интеграле) Пусть множества $G_x, G_t \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченные и открытые, $f \in R(G_x)$, и $\varphi : G_t \rightarrow G_x = \varphi(G_t)$ – биективно и регулярно (т.е. $\varphi \in C^1(G_t)$), $\varphi^{-1} \in C^1(G_x)$). Тогда

$$\int_{G_x} f(x) dx = \int_{G_t} f(\varphi(t)) |\det \varphi'(t)| dt.$$

Доказательство. Строгое доказательство этой теоремы довольно трудоемко. Ограничимся геометрическими интерпретациями для случая \mathbb{R}^2 .

Пусть $\varphi = (x(u, v), y(u, v)) \in C^1(G_t)$, $G_x = \varphi(G_t)$, $f(x, y) \in R(G_x)$. τ – разбиение бруса $\Pi \supset G_t$ брусками Π_{ij} , где $|\Pi_{ij}| = \Delta u_i \Delta v_j$.

Рассмотрим один брус с вершинами в точках (u, v) , $(u + du, v)$, $(u + du, v + dv)$, $(u, v + dv)$. При отображении φ он перейдет в криволинейный четырехугольник с вершинами в точках $P_0 = \varphi(u, v)$, $P_1 = \varphi(u + du, v)$, $P_2 = \varphi(u + du, v + dv)$, $P_3 = \varphi(u, v + dv)$ (см. Рис.).

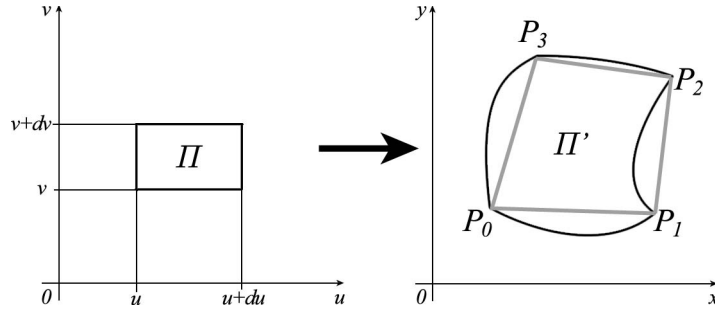


Рис. 3: Образ элементарного прямоугольника при замене переменных

Зададимся вопросом, как изменится площадь этого бруса, равная $du dv$? Обозначим $x_0 = x(u, v)$, $y_0 = y(u, v)$.

Запишем для каждой координаты вершин $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, как значения функций от u и v , формулу Тейлора до второго члена:

$$\begin{aligned} x_1 &= x(u + du, v) = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} du + \alpha_1, \\ y_1 &= y(u + du, v) = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} du + \beta_1, \\ x_2 &= x(u + du, v + dv) = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \alpha_2, \\ y_2 &= y(u + du, v + dv) = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \beta_2, \\ x_3 &= x(u, v + dv) = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \alpha_3, \\ y_3 &= y(u, v + dv) = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \beta_3, \end{aligned}$$

где все $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ есть $o(\sqrt{du^2 + dv^2})$ при $du \rightarrow 0$, $dv \rightarrow 0$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \vec{P_0 P_1} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \alpha_1, \frac{\partial y}{\partial u} du + \beta_1 \right), \\ \vec{P_2 P_3} &= \left(-\frac{\partial x}{\partial u} du - \alpha_2, -\frac{\partial y}{\partial u} du - \beta_2 \right). \end{aligned}$$

Получаем, что с точностью до $o\left(\sqrt{du^2 + dv^2}\right)$ $P_0\vec{P}_1 = P_2\vec{P}_3$. То есть, приближенно, образ бруса можно считать параллелограммом $P_0P_1P_2P_3$.

Площадь параллелограмма (здесь знак \approx означает равенство с точностью до $o\left(\sqrt{du^2 + dv^2}\right)$):

$$\begin{aligned}\mu(\Pi') \approx S_{P_0P_1P_2P_3} &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ \frac{\partial y}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| |dudv| = \\ &= |J(u, v)dudv| = |J(u, v)|\mu(\Pi).\end{aligned}$$

Можно доказать точное равенство:

$$\lim_{du, dv \rightarrow 0, 0} \frac{\mu(\Pi')}{dudv} = |J(u, v)|.$$

Далее, подставляя полученное выражение для площади в интегральную сумму, после предельного перехода, получим требуемое. \square

Замечание 1.9.1 Теорема о замене переменной в одномерном интеграле Римана является частным случаем приведённой теоремы:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ – монотонна. Модуля нет, но и в интеграле допускается $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$.

Замечание 1.9.2 Нарушение взаимной однозначности отображения или равенство якобиана нулю на множестве меры нуль (например, в отдельных точках или на линии) не влияют на справедливость формулы замены переменной, т.к. множество меры нуль всегда можно покрыть клеточным множеством сколь угодно малой меры, так что интегральная сумма для него будет стремиться к нулю и не повлияет на значение интеграла.

1.10 Цилиндрические и сферические координаты в \mathbb{R}^3

Цилиндрические координаты являются обобщением полярных координат. Точка задается полярными координатами (ρ, φ) проекции на плоскость XOY и координатой z по оси OZ . Формулы для перехода:

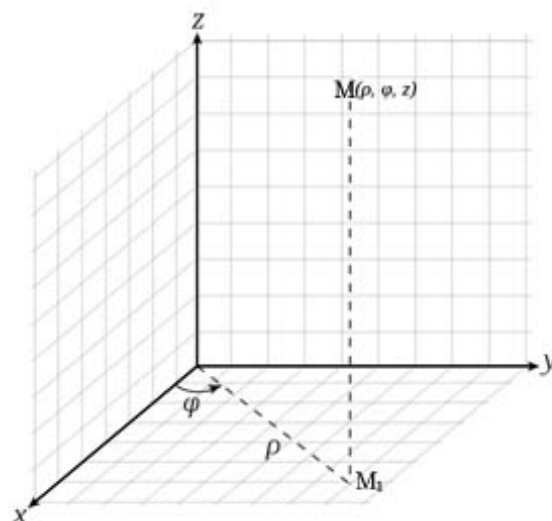


Рис. 4: Цилиндрические координаты

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Якобиан для цилиндрических координат такой же, как и для полярных:

$$J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

В сферических координатах точка M задается тройкой (r, φ, θ) , где r – расстояние от точки M до начала координат, $\varphi \in [0, 2\pi)$ – полярный угол проекции точки на плоскость XOY (иначе говоря, угол XOM_1 , где M_1 – проекция точки M), $\theta \in [0, \pi]$ – угол между радиус-вектором OM и положительным направлением оси OZ .

Формулы перехода и якобиан имеют вид:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad |J(r, \varphi, \theta)| = r^2 \sin \theta.$$

Якобиан обращается в ноль на оси OZ , т.е. на множестве меры ноль в \mathbb{R}^3 .

Замечание 1.10.1 Иногда в качестве угла θ используют угол θ_1 между радиус-вектором точки и плоскостью XOY , т.е. $\theta_1 = \pi/2 - \theta$ в наших

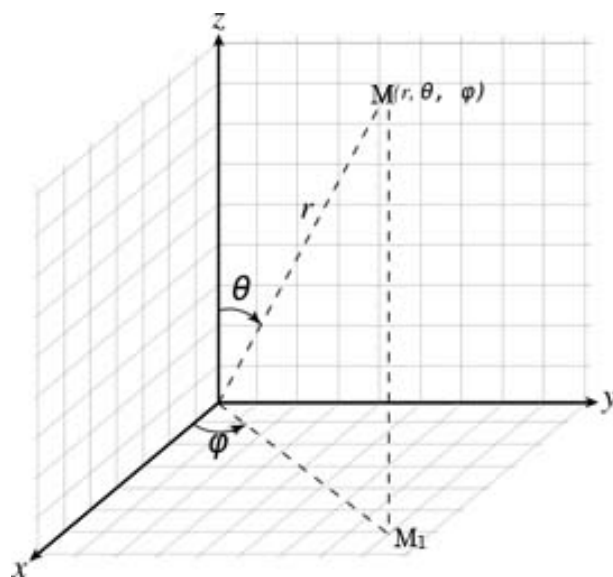


Рис. 5: Сферические координаты

обозначениях. Тогда формулы для перехода будут иметь вид

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta_1, \\ y = r \sin \varphi \cos \theta_1, \\ z = r \sin \theta_1. \end{cases} \quad \text{и} \quad J(r, \varphi, \theta_1) = -r^2 \cos \theta_1.$$

1.11 Примеры вычисления кратных интегралов

Пример 1.11.1 Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2). \quad \text{лемниската}$$

Перепишем уравнение кривой в полярных координатах:

$$r^4 = 2a^2 r^2 \cos 2\varphi \quad \text{или} \quad r = a\sqrt{2 \cos 2\varphi}.$$

Заметим, что кривая симметрична относительно координатных осей. Тогда будем искать площадь фигуры, лежащей в первой четверти (см. Рис.).

$$\frac{1}{4}S = \iint_D dx dy = \iint_{D'} r dr d\varphi = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2 \cos 2\varphi}} r dr = a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}.$$

Пример 1.11.2 Вычислить интеграл

$$\iint_G y^3 dx dy,$$

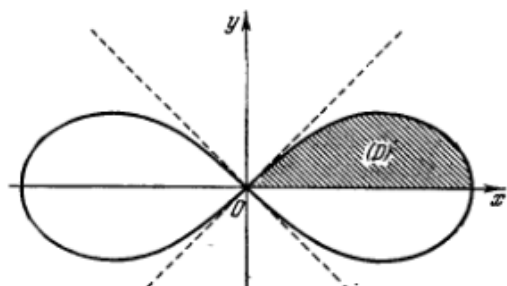


Рис. 6: Лемниската

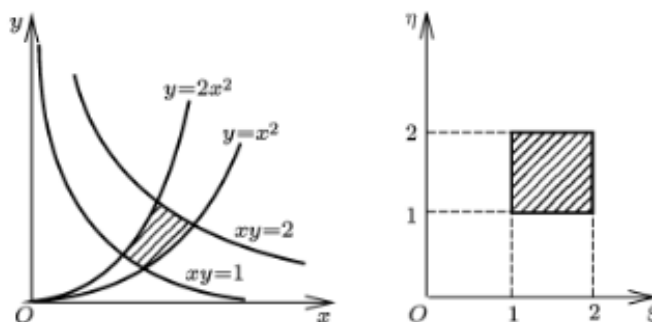


Рис. 7: G – ограничена двумя параболлами $y = x^2$, $y = 2x^2$ и двумя гиперболами $xy = 1$, $xy = 2$

G – ограничена двумя параболлами $y = x^2$, $y = 2x^2$ и двумя гиперболами $xy = 1$, $xy = 2$.

Введём новые переменные $u = y/x^2$, $v = xy$. Вычислим якобиан:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{3y}{x^2}, \quad |J| = \frac{x^2}{3y}.$$

Тогда

$$\iint_G y^3 dx dy = \iint_{G'} \frac{1}{3} x^2 y^2 du dv = \frac{1}{3} \iint_{G'} v^2 du dv = \frac{1}{3} \int_1^2 du \int_1^2 v^2 dv = \frac{7}{9}.$$

Пример 1.11.3 Интеграл Эйлера–Пуассона $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Пример 1.11.4 Вычислить двумя способами $I = \iiint_\Omega z dx dy dz$, где тело Ω ограничено конусом $R^2 z^2 = h^2(x^2 + y^2)$ и плоскостью $z = h$.

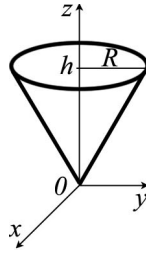


Рис. 8: Тело Ω ограниченное конусом и плоскостью

1-ый способ. Зададим тело таким образом:

$$(x, y) \in D : \quad x^2 + y^2 \leq R^2, \quad \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h.$$

Тогда

$$I = \iint_D dx dy \int_{\frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}}^h z dz = \frac{h^2}{2} \iint_D \left(1 - \frac{1}{R^2} (x^2 + y^2) \right) dx dy =$$

перейдем в полярные координаты

$$= \frac{h^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) dr = \frac{h^2}{2} 2\pi \frac{R^2}{4} = \frac{\pi h^2 R^2}{4}.$$

2-ой способ. Представим тело так:

$$0 \leq z \leq h, \quad (x, y) \in D(z) : x^2 + y^2 \leq \frac{R^2 z^2}{h^2}.$$

Тогда

$$I = \int_0^h z dz \iint_{D(z)} dx dy = \int_0^h z dz S_{D(z)} = \int_0^h \frac{R^2 z^3}{h^2} dz = \frac{\pi h^2 R^2}{4}.$$

3-ий способ. В цилиндрических координатах. Тело Ω в цилиндрических координатах задается неравенствами:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{Rz}{h}.$$

Тогда

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h z dz \int_0^{\frac{Rz}{h}} r dr = 2\pi \frac{1}{2} \int_0^h \frac{R^2 z^3}{h^2} dz = \frac{\pi h^2 R^2}{4}.$$

4-ый способ. В сферических координатах. Конус Ω в сферических координатах задается неравенствами

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \arctg \frac{R}{h}, \quad 0 \leq r \leq \frac{h}{\cos \theta}.$$

Тогда

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arctg \frac{R}{h}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{h}{\cos \theta}} r^3 dr = \dots = \frac{\pi h^2 R^2}{4}.$$

Пример 1.11.5 Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2 - z^2).$$

Желательно сделать рисунок тела, но глядя на данное уравнение это сделать затруднительно. Наличие выражения $x^2 + y^2 + z^2$ наводит на мысль о переходе в сферические координаты, в которых $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Подставим формулы перехода в сферические координаты в уравнение:

$$r^4 = a^2 r^2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \quad \text{или} \quad r^2 = -a^2 \cos 2\theta.$$

Видим, что r не зависит от φ , значит, тело является телом вращения (ось вращения - OZ). Рассмотрим сечение тела плоскостью XOZ (или любой другой, проходящей через ось OZ). Нарисуем кривую в плоскости XOZ , задаваемую уравнением $r = a\sqrt{-\cos 2\theta}$, где r - полярный радиус точки, θ - угол с осью OZ .

Область допустимых значений θ находится из условия $\cos 2\theta \leq 0$, что дает решения $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Нарисуем примерный график (См. Рис. слева). Тогда искомое тело получается вращением данной фигуры вокруг оси OZ (см. Рис. справа).

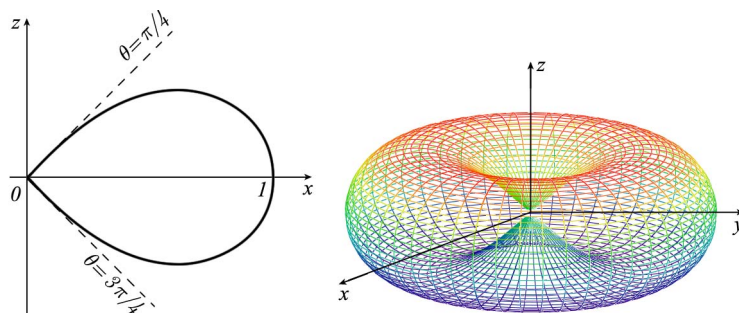


Рис. 9:

Для нахождения объема воспользуемся формулой для объёма, записанной в сферических координатах:

$$V_T = \iiint_T dx dy dz = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta =$$

теперь перейдем к повторному интегралу (порядок интегрирования обычно удобно выбирать именно такой, т.к. зависимости от φ нет, а кривая задается зависимостью r от θ)

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin \theta d\theta \int_0^{a\sqrt{-\cos 2\theta}} r^2 dr =$$

самый внешний интеграл (по φ) можно вычислить сразу (т.к. зависимости от φ нет)

$$\begin{aligned} &= 2\pi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin \theta d\theta \int_0^{a\sqrt{-\cos 2\theta}} r^2 dr = \frac{2\pi a^3}{3} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin \theta (-\cos 2\theta)^{3/2} d\theta = \\ &= -\frac{2\pi a^3}{3} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (1 - 2\cos^2 \theta)^{3/2} d(\cos \theta) = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\sqrt{2}/2} (1 - 2t^2)^{3/2} dt \end{aligned}$$

Не будем углубляться в вычисления и напомним ответ: $V_T \cong 1,745 a^3$.

2 Несобственный кратный интеграл

3 Криволинейный интеграл

4 Поверхностный интеграл