MatAnLab1(term 4)

Балакин Дмитрий M3235

7 апреля 2024 г.

Аналитическая часть

МАТАН Лаб-1

Вар-1

1.1.

Проверим измеримость $\{f \geq a\}$, $a \in R$

т.к. $E=[0; 3]$, то будем проверять $a \in (0; \pi]$

т.к. очев $\forall x \in E \setminus \{0\}: f(x) \in (0; 3]$, $f(0)=\pi$

~~тогда~~ $\Rightarrow$ при $a \in (0,8; 3]$ $\{f \geq a\} = [1; 3] \cup \{0\}$

при $a \in (0; 0,8]$

1) если $a = 0,\dots0\overline{t}$, то

- если $t=9$, то т.к. нет такого x, что $f(x) = 0,\dots09$, то $\{f \geq a\} = [0,\dots001, 3] \cup \{0\}$

  на 1 ноль ~~[illegible]~~ меньше чем в a

- если $t \in \{5, 6, 7, 8\}$, $\Rightarrow \{f \geq a\} = [0,\dots0\overline{t+1}, 3] \cup \{0\}$ столько же 0 как в a

- если $t \in \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \{f \geq a\} = [a; 3] \cup \{0\}$

2) если $a = 0,\dots0\overline{t}\,\overline{t_0}\dots\overline{t_i}$, то

- если $t \in \{8, 9\}$, $\Rightarrow \{f \geq a\} = [0,0\dots0\overline{1}; 3] \cup \{0\}$ 0 меньше на 1 чем в a

- если $t \in \{4, 5, 6, 7\} \Rightarrow \{f \geq a\} = [0,0\dots0\overline{t+2}; 3] \cup \{0\}$

- если $t \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow \{f \geq a\} = [0,0\dots0\overline{t+1}; 3] \cup \{0\}$

  нулей как в a

видно что во всех случаях мн-во измеримо

$\Rightarrow f$ - измерима.

§ 1.2

$$f_n = \begin{cases} \pi, & i = 0 \\ f(x), & \text{если } x = 0{,}\overbrace{0\ldots0}^{\le n \text{ нулей}} t_0 \ldots t_i \ldots \\ 1, & x \in [1, 2), \quad > n \text{ нулей} \\ 2, & x \in [2; 3), \quad > n \text{ нулей} \\ 3, & x = 3 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

очев $\forall n$ $f(x) = f_n(x)$, если $x \in [1, 3] \cup \{0\}$

если $x \in (0; 1)$, то $f_n \le f$ т.к. если $f_n(x) \neq f(x) \Rightarrow f_n(x) = 0$

При $n \to \infty$ мера $M = \{x : f_n(x) \neq f(x)\} \to 0$

т.к. все самые $\le n$ нулей становятся ~~[1, 2]~~ k нулей, где $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ при $x \in (0; 1)$ $f_n \to f$, тогда $f_n \to f$ на E

Также $\forall_n$ $f_n \le f_{n+1}$ $\Rightarrow$ f_n - возрастает

1.3.

$\int f d\lambda = \sup\left\{ \int g\, d\lambda : 0 \le g \le f \right\}$, $\int\limits_E g\, d\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \lambda E_i$,

, $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$

По т. Леви $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_E f_n\, d\mu = \int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_{[0,1)} f\, d\mu +$

$+ \int\limits_{[1;2)} f\, d\mu + \int\limits_{[2;3]} f\, d\mu = \int\limits_{[0;1)} f\, d\mu + 1 + 2$ т.к. f - простая на $[1; 2)$ и $(2; 3)$

$\int\limits_{[0;1)} f\, d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{[0;1)} f_n\, d\mu$ по т. Леви т.к. очев f_n измеримо (док-во аналогично f)

$$\int_{[0,1)} f_n \, d\mu = \int_{(0,1)} f_n \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{40}{100^i}$$

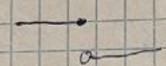
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} 40 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{100^i} = 40 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1 - 1/100} = \frac{40}{99}$$

$$\Rightarrow \int_E g \, d\mu = \frac{40}{99} + 1 + 2 = \frac{337}{99}$$

1.4.

$F(x) = 3x - [-2x]$

$F(x)$ - возраст т.к. $3x$ и $-[-2x]$ возраст

$-[-2x]$ имеет вид  $\Rightarrow$

$F(x)$ - непрерывна слева т.к. $3x$ тоже непрерывна слева. задает мера

$\Rightarrow$ F - ~~мера~~ Лебега-Стилтьеса.

1.5.

Пусть $\mu_F =: \varphi$, $\int_E f \, d\varphi = \int_{[0,1)} f \, d\varphi + \int_{[1,2)} f \, d\varphi + \int_{[2;5)} f \, d\varphi =$

$$= \int_{\{5\}} f \, d\varphi = \pi(F(0+) - F(0)) + \underbrace{\int_{(0,1)} f \, d\varphi}_{M} + (F(2) - F(1)) +$$

$$+ 2(F(5) - F(2)) + 3(F(5+0) - F(5)) = \pi + M + 5 + 10 + 5 =$$

$$\int\limits_{(0;1)} f\,d\ell = \int\limits_{(0;\frac{1}{10})} f\,d\ell + \int\limits_{[\frac{1}{10};1)} f\,d\ell = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{(0;\frac{1}{10})} f\,d\ell + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[\frac{1}{10};1)} f\,d\ell =$$

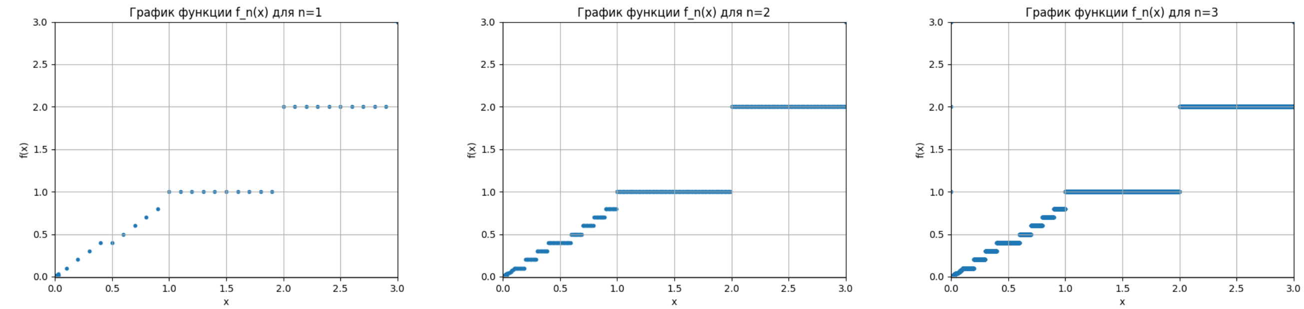
$$= \sum_{i=2} \frac{120}{100^i} + \frac{3}{100} \cdot 36 + \frac{4}{10}\left(F(0{,}6) - F(0{,}5)\right) = \frac{120}{9900} + \frac{8}{5}$$

$$= \pi + 18 + \frac{12}{990} + \frac{8}{5} = \cancel{\pi + 18 + 1}\ \pi + 19 + \frac{101}{165} \approx 22{,}75531386$$

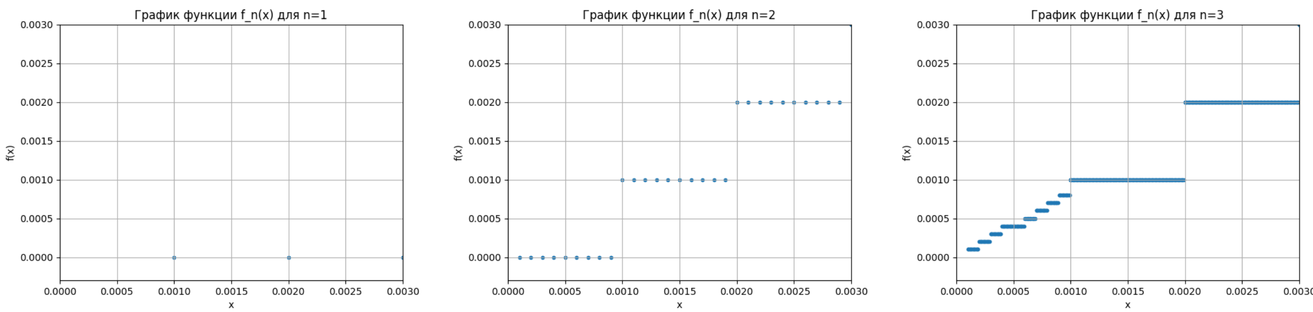
Численный метод

Результат работы программы

Графики f_n



Графики f_n, но приближенные к 0, т оесть к наиболее интересным значениям



Вывод программы

```
интеграл Лебега для  n=1: 3.00000000000000000000, разница с точным результатом: 0.40404040404040397760, time=0.0
интеграл Лебега для  n=3: 3.40399999999999991473, разница с точным результатом: 0.00004040404040406287, time=0.0
интеграл Лебега для  n=5: 3.40404039999999996624, разница с точным результатом: 0.00000000404040401136, time=0.0
интеграл Лебега для  n=7: 3.40404040403999985642, разница с точным результатом: 0.00000000000040412118, time=0.0
интеграл Лебега для  n=10: 3.40404040404040397760, разница с точным результатом: 0.00000000000000000000, time=0.0
интеграл Лебега для  n=100: 3.40404040404040397760, разница с точным результатом: 0.00000000000000000000, time=0.0

интеграл Лебега-Стильтеса для  n=1: 22.74159265358979453708, разница с точным результатом: 0.01212121212121175517, time=0.0
интеграл Лебега-Стильтеса для  n=3: 22.75359265358979499183, разница с точным результатом: 0.00012121212121130043, time=0.0
интеграл Лебега-Стильтеса для  n=5: 22.75371385358979381408, разница с точным результатом: 0.00000001212121247818, time=0.0
интеграл Лебега-Стильтеса для  n=7: 22.75371386570979481689, разница с точным результатом: 0.00000000000121147536, time=0.0
интеграл Лебега-Стильтеса для  n=10: 22.75371386571100629226, разница с точным результатом: 0.00000000000000000000, time=0.0
интеграл Лебега-Стильтеса для  n=100: 22.75371386571100629226, разница с точным результатом: 0.00000000000000000000, time=0.0

total time=1536.7989540100098
```

Вывод:

В данной лабораторной работе я, для очень необычной функции, построил последовательность простых функций, посчитал интегралы Лебега и Лебега-Стилтьеса, а так же посчитал их численными методами, из чего получил вывод, что при возвратающем значении n сисленные значения сходятся к полученным аналитически.