

# Лекция 9

## Определитель линейного оператора

#### Содержание лекции:

В настоящей лекции мы обобщим идею тензорного произведения пространств, обсуждаемую в предыдущих лекциях. Мы определим тензорное произведение линейных операторов и распространим его на случай линейных отображений произвольных тензорных произведений пространств. Основным для нас результатом будет является введение определителя линейного оператора и доказательство его мультипликативного свойства.

#### Ключевые слова:

Тензорное произведение операторов, матрица тензорного произведения, тензорная степень оператора, внешняя степень пространства, определитель набора векторов, внешняя степень оператора, определитель линейного оператора, мультипликативное свойство опеределителя.

#### Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы: mathdep.ifmo.ru/geolin

### ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

## 9.1 Тензорная степень оператора

 $Nota\ bene$  Пусть  $X(\Bbbk)$  и  $Y(\Bbbk)$  - линейные пространства над одним полем  $\Bbbk$  и

$$\dim_{\mathbb{K}} X = n$$
,  $\dim_{\mathbb{K}} Y = m$ .

Пусть также  $\varphi \in \operatorname{End}_{\Bbbk}(X)$  и  $\psi \in \operatorname{End}_{\Bbbk}(Y)$  - эндоморфизмы соответствующих пространств  $X(\Bbbk)$  и  $Y(\Bbbk)$ .

**Тензорным произведением** операторов  $\varphi$  и  $\psi$  называется отображение  $\chi$ , задаваемое равенством

$$\chi(x \otimes y) = (\varphi \otimes \psi)(x \otimes y) = \varphi(x) \otimes \psi(y)$$

**Лемма 9.1.** Отображение  $\chi$  - линейный оператор на  $X \otimes Y$ .

С одной стороны имеем:

$$\chi(x\otimes(y_1+y_2))=\chi(x\otimes y_1+x\otimes y_2),$$

С другой стороны:

$$\chi(x \otimes (y_1 + y_2)) = \varphi(x) \otimes \psi(y_1 + y_2) = \varphi(x) \otimes \psi(y_1) + \varphi(x) \otimes \psi(y_2),$$

и тогда

$$\chi(x \otimes y_1 + x \otimes y_2) = \chi(x \otimes y_1) + \chi(x \otimes y_2).$$

**Nota bene** Пусть  $\{e_i\}_{i=1}^n$  - базис X и  $\{f_j\}_{j=1}^m$  - базис Y, тогда базис  $X\otimes Y$  будут составлять элементы  $\{e_i\otimes f_j\}$ . Если  $A_{\varphi}$  и  $B_{\psi}$  - матрицы  $\varphi$  и  $\psi$  в соответствующих базисах, то матрица  $C_{\chi}$  оператора  $\varphi\otimes\psi$  будет иметь вид:

$$C = \begin{pmatrix} a_1^1 B_{\psi} & a_2^1 B_{\psi} & \dots & a_n^1 B_{\psi} \\ a_1^2 B_{\psi} & a_2^2 B_{\psi} & \dots & a_n^2 B_{\psi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n B_{\psi} & a_2^n B_{\psi} & \dots & a_n^n B_{\psi} \end{pmatrix}.$$

Nota bene Введем следующее обозначение:

$$T_p(X) = \bigotimes_{i=1}^p X = X \otimes X \otimes \ldots \otimes X.$$

**Тензорной степенью** оператора  $\varphi$  называется отображение:

$$\varphi^{\otimes m}: T_p(X) \to T_p(X), \quad \varphi^{\otimes m} = \varphi \otimes \varphi \otimes \ldots \otimes \varphi,$$

определяемое на разложимых элементах  $T_p(X)$ , следующим образом:

$$\varphi^{\otimes n}(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_p) = \varphi x_1 \otimes \varphi x_2 \otimes \ldots \otimes \varphi x_p.$$

### ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

## 9.2 Внешняя степень оператора

Векторное пространство  $\Lambda_p(X)$  с кососимметрическим p-линейным отображением

$$X \times X \times \ldots \times X \to \Lambda_p$$
,  $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \to x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$ ,

называется p-ой внешней степенью пространства X, если векторы

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}, \quad 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n,$$

образуют базис пространства  $\Lambda_p(X)$ .

Nota bene Очевидно, имеет место

$$\dim_{\mathbb{k}} \Lambda_p(X) = C_n^p.$$

Определителем набора векторов  $\{x_i\}_{i=1}^n$  называется величина  $\det[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , определяемая в некотором базисе  $\{e_j\}_{j=1}^n$  пространства X равенством:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n = \det[x_1, x_2, \ldots, x_n] \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

**Лемма 9.2.** Два введенных определения det эквивалентны:

$$\det \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \det [x_1, x_2, \dots, x_n].$$

По определению, имеем:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n = \left(\xi_1^{i_1} e_{i_1}\right) \wedge \left(\xi_2^{i_2} e_{i_2}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\xi_n^{i_n} e_{i_n}\right) =$$

$$= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \ldots \xi_n^{\sigma(n)} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

Внешней степенью оператора  $\varphi \in \operatorname{End}(X)$  называется отображение

$$\varphi^{\wedge p}: \Lambda_n(X) \to \Lambda_n(X), \quad \varphi^{\wedge p} = \varphi \wedge \varphi \wedge \ldots \wedge \varphi,$$

определяемое на разложимых элементах  $\Lambda_p(X)$ , следующим образом:

$$\varphi^{\wedge p}(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p) = \varphi x_1 \wedge \varphi x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$$

Определителем линейного оператора  $\varphi$  называется величина  $\det(\varphi)$ , которая определяется следующим равенством:

$$\varphi^{\wedge n}(e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n) = \det(\varphi) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

### ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

**Лемма 9.3.** Определитель линейного оператора в заданном базисе совпадает c определителем его матрицы в этом базисе:

$$\det(\varphi) = \det A_{\varphi}, \quad A_{\varphi} = \|a_k^i\|.$$

Из определения  $\det(\varphi)$  следует

$$\varphi e_1 \wedge \varphi e_2 \wedge \ldots \wedge \varphi e_n = \det(\varphi) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n,$$

и тогда

$$\varphi e_1 \wedge \varphi e_2 \wedge \ldots \wedge \varphi e_n = \left(a_1^{i_1} e_{i_1}\right) \wedge \left(a_2^{i_2} e_{i_2}\right) \wedge \ldots \wedge \left(a_n^{i_n} e_{i_n}\right) =$$

$$= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \alpha_1^{\sigma(1)} \alpha_2^{\sigma(2)} \ldots \alpha_n^{\sigma(n)} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

Откуда получаем  $\det(\varphi) = \det A_{\varphi}^T = \det A_{\varphi}$ .

**Лемма 9.4.** Для любого  $z \in \Lambda_n(X)$  имеет место  $\varphi^{\wedge n}z = \det(\varphi) \cdot z$ .

$$\varphi^{\wedge n} (e_1 \wedge e_2 \dots \wedge e_n) = \varphi e_1 \wedge \varphi e_2 \dots \wedge \varphi e_n =$$

$$= \det [\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n] \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n =$$

$$= \det (\varphi) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n,$$

но  $z = \alpha \cdot e_1 \wedge e_2 \dots \wedge e_n, \ \alpha \in \mathbb{k}$  и теорема доказана.

**Nota bene** Определитель  $\det(\varphi)$  линейного оператора  $\varphi$  не зависит от базиса.

Теорема 9.1. Умножение определителей подчиняется правилу:

$$\det (\varphi \circ \psi) = \det (\varphi) \det (\psi).$$

По определению имеем:

$$\det (\varphi \psi) \cdot e_1 \wedge e_2 \dots \wedge e_n = (\varphi \psi)^{\wedge n} (e_1 \wedge e_2 \dots \wedge e_n) =$$

$$= (\varphi \psi) e_1 \wedge (\varphi \psi) e_2 \dots \wedge (\varphi \psi) e_n = \varphi (\psi e_1) \wedge \varphi (\psi e_2) \dots \wedge \varphi (\psi e_n) =$$

$$= \det(\varphi) \cdot (\psi e_1) \wedge (\psi e_2) \dots \wedge (\psi e_n) = \det(\varphi) \cdot \psi^{\wedge n} (e_1 \wedge e_2 \dots \wedge e_n) =$$

$$= \det(\varphi) \cdot \det(\psi) \cdot e_1 \wedge e_2 \dots \wedge e_n.$$