β

Лекция 2

Пространство полилинейных форм

Содержание лекции:
В лекции рассматриваются отображения, обладающие свойством полилинейности - линейности по каждому аргументу. Мы покажем, что на множестве таких обьектов может быть введена структура линейного пространства и методы исследования этого пространства являются обобщением изученных нами ранее методов для векторного и сопряженных пространств. Координаты полилинейного отображения формируют один из важнейщих обьектов геометрии - тензор.

Ключевые слова:
Полилинейная форма (ПЛФ), тип ПЛФ, валентность ПЛФ, линейное пространство ПЛФ, тензор ПЛФ, базис пространства ПЛФ, размерность пространства ПЛФ.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

2.1 Полилинейные формы

Nota bene Соглашение о "немом" суммировании:

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j \xi^j \equiv \varphi_j \xi^j.$$

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_p \in X(\Bbbk)$ и $y^1, y^2, \ldots, y^q \in X^*(\Bbbk)$.

Полилинейной формой (ПЛФ) U называется отображение от p векторных аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_p$ и q аргументов-форм $y^1, y^2, \ldots, y^q$, принимающее значения из некоторого линейного пространства $W = W(\Bbbk)$:

$$U: \quad X \times X \times \ldots \times X \times X^* \times X^* \times \ldots \times X^* \to W$$

и линейная по каждому аргументу

$$U(x_1, \ldots, \alpha x_i' + \beta x_i'', \ldots, x_p; y^1, y^2, \ldots, y^q) \equiv$$
$$\alpha U(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_p; y^1, y^2, \ldots, y^q) + \beta U(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_p; y^1, y^2, \ldots, y^q).$$

Nota bene Здесь и далее будет подробно рассмотрен случай так называемой *полилинейной функции*, значения которой лежат в поле $\Bbbk$, то есть впредь мы будем считать, что $W(\Bbbk) = \Bbbk$.

Nota bene Говорят, что ПЛФ, заданная на p векторах пространства X и q векторах пространства X^* имеет валентность (p, q).

Пример 2.1.

1. $X^*: \quad (f, x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad (1, 0)$ - линейная форма над X;
2. $X^{**}: \quad (\hat{x}, y) = \hat{x}(y) \quad \Rightarrow \quad (0, 1)$ - линейная форма над X^*;
3. $E_3: \quad U(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \quad \Rightarrow \quad (2, 0)$ - скалярное произведение;
4. $E_3: \quad U(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \quad \Rightarrow \quad (3, 0)$ - смешанное произведение;

Полилинейные формы U и V валентности (p, q) называются **равными**, если

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_p; y^1, y^2, \ldots, y^q) = V(x_1, x_2, \ldots, x_p; y^1, y^2, \ldots, y^q),$$

для любых наборов аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_p; \in X$ и $y^1, y^2, \ldots, y^q \in X^*$.

Нуль-формой Θ валентности (p, q) называется такая ПЛФ, что

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p; y^1, y^2, \ldots, y^q) = 0,$$

для любых наборов аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_p; \in X$ и $y^1, y^2, \ldots, y^q \in X^*$.

Пусть далее $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис X, $\{f^j\}_{j=1}^n$ - базис X^*.

Пусть U и V - ПЛФ валентности (p,q). Отображение $W = U + V$ называется **суммой ПЛФ** U и V если

$$W(x_1, x_2, \dots, x_p; y^1, y^2, \dots, y^q) =$$
$$U(x_1, x_2, \dots, x_p; y^1, y^2, \dots, y^q) + V(x_1, x_2, \dots, x_p; y^1, y^2, \dots, y^q),$$

для любых наборов аргументов $x_1, x_2, \dots, x_p; \in X$ и $y^1, y^2, \dots, y^q \in X^*$.

Отображение λU называется **произведением ПЛФ** U на элемент $\lambda \in K$, если

$$(\lambda U)(x_1, x_2, \dots, x_p; y^1, y^2, \dots, y^q) = \lambda \cdot U(x_1, x_2, \dots, x_p; y^1, y^2, \dots, y^q)$$

для любых наборов аргументов $x_1, x_2, \dots, x_p; \in X$ и $y^1, y^2, \dots, y^q \in X^*$.

Теорема 2.1. *Множество всех ПЛФ валентности (p,q) образует линейной пространство Ω_q^p над полем K.*

►

Проверка аксиом линейного пространства.

◄

2.2 Тензор ПЛФ

Тензором ПЛФ W валентности (p,q) называется набор из n^{p+q} чисел

$$\omega_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{j_1, j_2, \dots, j_q} = W\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}\right),$$
$$i_1, i_2, \dots, i_p = 1, \dots, n, \quad j_1, j_2, \dots, j_q = 1, \dots, n.$$

Nota bene Говорят, что тензор $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{j_1, j_2, \dots, j_q}$ имеет ранг (p,q).

Nota bene Для краткости записи часто используют мультииндекс:

$$\omega_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{j_1, j_2, \dots, j_q} \equiv \omega_{\vec{i}}^{\vec{j}}.$$

Пример 2.2. Пусть $W(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ -скалярное произведение и

$$x_1 = \sum_{i=1}^{3} \xi_1^i e_i, \quad x_2 = \sum_{j=1}^{3} \xi_2^j e_j,$$

тогда

$$W(x_1, x_2) = (e_i.e_j)\, \xi_1^i \xi_2^j = g_{ij} \xi_1^i \xi_2^j,$$

где g_{ij} - метрический тензор, которому соответствует матрица (Грама):

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Лемма 2.1. *Задание ПЛФ эквивалентно заданию ее тензора в паре базисов пространств X и X^*.*

▶

$\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Имеет место:

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_p; y^1, y^2, \ldots, y^q) =$$
$$W\left(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \xi_2^{i_2} e_{i_2}, \ldots, \xi_p^{i_p} e_{i_p}; \eta_{j_1}^1 f^{j_1}, \eta_{j_2}^2 f^{j_2}, \ldots, \eta_{j_q}^q f^{j_q},\right) =$$
$$\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\ldots\xi_p^{i_p}\eta_{j_1}^1\eta_{j_2}^2\ldots\eta_{j_q}^q W\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \ldots, f^{j_q}\right) =$$
$$\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\ldots\xi_p^{i_p}\eta_{j_1}^1\eta_{j_2}^2\ldots\eta_{j_q}^q \omega_{i_1,i_2,\ldots,i_p}^{j_1,j_2,\ldots,j_q}.$$

◀

Nota bene Рассмотрим в Ω_q^p набор ПЛФ $\left\{{}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}_{t_1,t_2,\ldots,t_q}W\right\}$, обладающий в паре базисов пространств X и X^* свойством

$${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}_{t_1,t_2,\ldots,t_q}W(x_1, x_2, \ldots, x_p; y^1, y^2, \ldots, y^q) = \xi_1^{s_1}\xi_2^{s_2}\ldots\xi_p^{s_p}\eta_{t_1}^1\eta_{t_2}^2\ldots\eta_{t_q}^q$$

то есть

$${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}_{t_1,t_2,\ldots,t_q}w_{i_1,i_2,\ldots,i_p}^{j_1,j_2,\ldots,j_q} = \delta_{i_1}^{s_1}\delta_{i_2}^{s_2}\ldots\delta_{i_p}^{s_p}\delta_{t_1}^{j_1}\delta_{t_2}^{j_2}\ldots\delta_{t_q}^{j_q}.$$

2.3 Базис $\Omega_q^p(\mathbb{k})$

Теорема 2.2. *Набор $\left\{{}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}_{t_1,t_2,\ldots,t_q}W\right\}$ образует базис в пространстве Ω_q^p.*

▶

ПН: для произвольной $U \in \Omega_q^p$ имеем

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_p; y^1, y^2, \ldots, y^q) = \xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\ldots\xi_p^{i_p}\eta_{j_1}^1\eta_{j_2}^2\ldots\eta_{j_q}^q u_{i_1,i_2,\ldots,i_p}^{j_1,j_2,\ldots,j_q} =$$
$${}^{i_1,i_2,\ldots,i_p}_{j_1,j_2,\ldots,j_q}W\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; y^1, y^2, \ldots, y^q\right) u_{i_1,i_2,\ldots,i_p}^{j_1,j_2,\ldots,j_q}.$$

ЛНЗ: рассмотрим линейную комбинацию

$${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}_{t_1,t_2,\ldots,t_q}W\alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p}^{t_1,t_2,\ldots,t_q} = \Theta,$$

и вычислим ее левую часть на поднаборах сопряженных базисов:

$${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}_{t_1,t_2,\ldots,t_q}W\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}; f^{j_1}, f^{j_2}, \ldots, f^{j_q}\right)\alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p}^{t_1,t_2,\ldots,t_q} =$$
$$\delta_{i_1}^{s_1}\delta_{i_2}^{s_2}\ldots\delta_{i_p}^{s_p}\delta_{t_1}^{j_1}\delta_{t_2}^{j_2}\ldots\delta_{t_q}^{j_q}\alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p}^{t_1,t_2,\ldots,t_q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\vec{s}}^{\vec{t}} = 0$$

◀

Nota bene Размерность пространства ПЛФ валентности (p, q) равна

$$\dim\Omega_q^p = n^{p+q}, \quad \dim X = \dim X^* = n.$$