Лекция 3

Симметричные и антисимметричные ПЛФ

Содержание лекции:
В приложениях как правило важную роль играют полилинейные отображения, которые обладают полной симметричностью или антисимметричностью по всем своим аргументам. Одно из важнейших применений данных обьектов - теория дифференциальных форм в геометии и анализе. В настоящей лекции мы исследуем свойства симметричных и антисимметричных ПЛФ, а также укажем методы их "изготовления" из произвольной формы.

Ключевые слова:
Симметричные и антисимметричные формы. Достаточное условие антисимметричности ПЛФ. Операции симметризации и антисимметризации. Свойства операций Sym и Asym. Базис пространства антисимметричных ПЛФ.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

Симметричные и антисимметричные ПЛФ

В данной лекции мы будем рассматривать подмножества простанства $\Omega_0^p(\Bbbk)$.

> Полилинейная форма $U \in \Omega_0^p(\Bbbk)$ называется **симметричной**, если ее значения не зависят от порядка следования аргументов, то есть
>
> $$U(x_1, x_2, \ldots, x_p) = U(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}), \quad \sigma \in S_n.$$

Лемма 3.1. *Множество всех симметричных ПЛФ валентности $(p, 0)$ образует подпространство $\Sigma^p(\Bbbk)$ пространства $\Omega_0^p(\Bbbk)$.*

Лемма 3.2. *Тензор симметричной ПЛФ симметричен по своим индексам:*

$$U \in \Sigma^p(\Bbbk) \quad \Leftrightarrow \quad U \leftrightarrow u_{\vec{i}_p} = u_{i_1, i_2, \ldots, i_p},$$
$$u_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = u_{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_p)}, \quad \sigma \in S_n.$$

> Полилинейная форма $V \in \Omega_0^p(\Bbbk)$ называется **антисимметричной**, если она меняет знак при транспозиции любых двух ее аргументов или
>
> $$V(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (-1)^{[\sigma]} V(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}), \quad \sigma \in S_n.$$

Лемма 3.3. *Множество всех антисимметричных ПЛФ валентности $(p, 0)$ образует подпространство $\Lambda^p(\Bbbk)$ пространства $\Omega_0^P(\Bbbk)$.*

Лемма 3.4. *Тензор антисимметричной ПЛФ антисимметричен по своим индексам:*

$$V \in \Lambda^p(\Bbbk) \quad \Leftrightarrow \quad V \leftrightarrow v_{\vec{i}_p} = u_{i_1, i_2, \ldots, i_p},$$
$$v_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = (-1)^{[\sigma]} v_{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_p)}, \quad \sigma \in S_n.$$

Теорема 3.1. *Для того, чтобы ПЛФ была антисимметричной необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в ноль при совпадении любых двух ее аргументов:*

$$V \in \Lambda^p(\Bbbk) \quad \Leftrightarrow \quad V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0.$$

►

$\Rightarrow$ Пусть $X \in \Lambda^p(\Bbbk)$, тогда

$$V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = -V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$$
$$\Leftrightarrow \quad V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0.$$

$\Rightarrow$ Пусть $V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0$, и $x_i = x_i' + x_i''$ тогда

$$V(x_1, \ldots, x_i' + x_i'', \ldots, x_i' + x_i'', \ldots, x_p) = 0,$$
$$V(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_i', \ldots, x_p) + V(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_i'', \ldots, x_p) +$$
$$V(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_i', \ldots, x_p) + V(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_i'', \ldots, x_p) = 0,$$
$$V(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_i', \ldots, x_p) = -V(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_i'', \ldots, x_p).$$

◄

Nota bene Значение антисимметричной формы на ЛЗ наборе векторов равно нулю.

Nota bene При $p > n = \dim_{\Bbbk} X$ пространство $\Lambda^p(\Bbbk)$ тривиально (содержит только нуль-форму):

$$\Lambda^p(\Bbbk) = \{\Theta\}\,.$$

Симметризация и антисимметризация

Nota bene Для дальнейшего изложения наложим некоторые ограничения на поле $\Bbbk$. Именно, будем считать, что характеристика поля $\Bbbk$ равна нулю, то есть $\Bbbk$ содержит поле рациональных чисел в качестве подполя.

Теорема 3.2. *Пусть $W \in \Omega_0^p(\Bbbk)$, тогда*

$$U(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma} W\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right).$$

- симметричная ПЛФ из $\Sigma^p(\Bbbk)$.

►

Пусть $\chi \in S_n$ - произвольная перестановка тогда

$$U(x_{\chi(1)}, x_{\chi(2)}, \dots, x_{\chi(p)}) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma} W(x_{\sigma\circ\chi(1)}, x_{\sigma\circ\chi(2)}, \dots, x_{\sigma\circ\chi(p)}) =$$

$$= \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\varphi\circ\chi^{-1}} W(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \dots, x_{\varphi(p)}) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\varphi} W(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \dots, x_{\varphi(p)}) = U(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

◄

> Операция изготовления симметричной ПЛФ U из произвольной ПЛФ W называется **операцией симметризации** формы W. Для нее пишут
>
> $$U = \operatorname{Sym} W$$

Nota bene Нормировочный множитель $1/p!$ необходим для того, чтобы

$$\operatorname{Sym} U = U, \quad U \in \Sigma^p.$$

Теорема 3.3. *Пусть $W \in \Omega_0^p$, тогда*

$$V(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]}\, W\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right)$$

- антисимметричная ПЛФ из $\Lambda^p(\Bbbk)$.

►

Пусть $\chi \in S_n$ - произвольная перестановка тогда

$$V(x_{\chi(1)}, x_{\chi(2)}, \ldots, x_{\chi(p)}) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \cdot W(x_{\sigma\circ\chi(1)}, x_{\sigma\circ\chi(2)}, \ldots, x_{\sigma\circ\chi(p)}) =$$

$$= \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\varphi\circ\chi^{-1}} (-1)^{[\varphi\circ\chi^{-1}]} \cdot W(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots, x_{\varphi(p)}) =$$

$$= (-1)^{[\chi^{-1}]} \cdot \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\varphi} (-1)^{[\varphi]} W(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots, x_{\varphi(p)}) = (-1)^{[\chi]} \cdot V(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

◄

Операция изготовления антисимметричной ПЛФ V из произвольной ПЛФ W называется **операцией антисимметризации** формы W. Для нее пишут

$$V = \operatorname{Asym} W$$

Свойства операций Sym и Asym

1. Линейность:

$$\operatorname{Sym}(U+V) = \operatorname{Sym} U + \operatorname{Sym} V, \quad \operatorname{Sym}(\alpha U) = \alpha \operatorname{Sym}(U),$$
$$\operatorname{Asym}(U+V) = \operatorname{Asym} U + \operatorname{Asym} V, \quad \operatorname{Asym}(\alpha U) = \alpha \operatorname{Asym}(U)$$

2. Композиция:

$$\operatorname{Sym}\operatorname{Sym} = \operatorname{Sym}, \quad \operatorname{Sym}\operatorname{Asym} = 0,$$
$$\operatorname{Asym}\operatorname{Asym} = \operatorname{Asym}, \quad \operatorname{Asym}\operatorname{Sym} = 0.$$

Базис пространства $\Lambda^p(\Bbbk)$

$$\operatorname{Asym} W(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} W\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right)$$

Nota bene Пространство $\Lambda^p(K)$ является подпространством $\Omega_0^p(\Bbbk)$, базис которого формирует набор ПЛФ $\{{}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\}$ такие что

$${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = \xi_1^{s_1}\xi_2^{s_2}\ldots\xi_p^{s_p}.$$

Построим систему антисимметричных ПЛФ $\{{}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\}$, следующим образом:

$${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F = p! \operatorname{Asym}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\right).$$

Лемма 3.5. *ПЛФ ${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F$ обладают свойством антисимметричности по индексам $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$:*

$${}^{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_j,\ldots,s_p}F = -{}^{s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_i,\ldots,s_p}F.$$

►

Убедимся прямой проверкой:

$$
\begin{gathered}
{}^{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_j,\ldots,s_p}F\left(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_j,\ldots,x_p\right)= \\
{}^{s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_i,\ldots,s_p}F\left(x_1,\ldots,x_j,\ldots x_i,\ldots,x_p\right)= \\
=-{}^{s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_i,\ldots,s_p}F\left(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_j,\ldots,x_p\right).
\end{gathered}
$$

◄

Следствия

1. ${}^{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_i,\ldots,s_p}F=\Theta$;
2. ${}^{\sigma(s_1),\sigma(s_2),\ldots,\sigma(s_p)}F=(-1)^{[\sigma]}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)$.

Теорема 3.4. *Следующий набор образует базис в пространстве $\Lambda^p(K)$:*

$$
\left\{{}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F:\quad 1\le s_1<s_2<\ldots<s_p\le n\right\}
$$

Nota bene Далее для краткости записи введем следующее обозначение:

$$
\vec{s}=\left\{(s_1,s_2,\ldots s_p):\quad 1\le s_1<\ldots<s_p\le n\right\}.
$$

►

ПН: рассмотрим произвольную форму $U\in\Lambda^p\subset\Omega^p$:

$$
U={}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\cdot u_{s_1,s_2,\ldots,s_p},
$$

тогда

$$
\begin{gathered}
\operatorname{Asym}U=U=u_{s_1,s_2,\ldots,s_p}\operatorname{Asym}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\right)=\frac{1}{p!}\cdot\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)u_{s_1,s_2,\ldots,s_p}= \\
\frac{1}{p!}\cdot\sum_{\vec{s}}\sum_{\sigma}\left({}^{\sigma(s_1),\sigma(s_2),\ldots,\sigma(s_p)}F\right)u_{\sigma(s_1),\sigma(s_2),\ldots,\sigma(s_p)}= \\
\frac{1}{p!}\cdot\sum_{\vec{s}}\sum_{\sigma}(-1)^{[\sigma]}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)(-1)^{[\sigma]}u_{s_1,s_2,\ldots,s_p}= \\
\frac{1}{p!}\cdot p!\cdot\sum_{\vec{s}}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)u_{s_1,s_2,\ldots,s_p}=\sum_{1\le s_1<\ldots<s_p\le n}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)u_{s_1,s_2,\ldots,s_p}.
\end{gathered}
$$

ЛНЗ: рассмотрим линейную комбинацию:

$$
\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)\alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p}=\Theta.
$$

и вычислим значение правой части на векторах базиса $\{e_k\}_{k=1}^n$:

$$\begin{gathered}\left({}^{s_1,s_2,\dots,s_p}F\right)\left(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_p}\right)\alpha_{s_1,s_2,\dots,s_p}=\\ \alpha_{s_1,s_2,\dots,s_p}\cdot p!\cdot\operatorname{Asym}\left({}^{s_1,s_2,\dots,s_p}W\right)\left(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_p}\right)=\\ \alpha_{s_1,s_2,\dots,s_p}\cdot p!\cdot\frac{1}{p!}\cdot\sum_\sigma(-1)^{[\sigma]}\left({}^{s_1,s_2,\dots,s_p}W\right)\left(e_{\sigma(i_1)},e_{\sigma(i_2)},\dots,e_{\sigma(i_p)}\right)=\\ \alpha_{s_1,s_2,\dots,s_p}\cdot\sum_\sigma(-1)^{[\sigma]}\delta^{s_1}_{\sigma(i_1)}\delta^{s_2}_{\sigma(i_2)}\dots\delta^{s_p}_{\sigma(i_p)}=0\\ \Leftrightarrow\quad\alpha_{s_1,s_2,\dots,s_p}=0\quad\forall\left(s_1,s_2,\dots,s_p\right).\end{gathered}$$

◄

Nota bene Из теоремы о базисе пространства Λ^p следует, что

$$\dim_{\Bbbk}\Lambda^p=C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Частые случаи

1. $p=0:\quad\Lambda^0\equiv\Bbbk,\quad\dim_{\Bbbk}\Lambda^0=1$
2. $p=1:\quad\Lambda^1=X^*,\quad\dim_{\Bbbk}\Lambda^1=n;$

... $\quad\dots\quad\dots\quad\dots$

3. $p=n:\quad\Lambda^n,\quad\dim_{\Bbbk}\Lambda^n=1.$

Nota bene Базис пространства Λ^n состоит из одного элемента $\{{}^{1,2,\dots,n}F\}$

Лемма 3.6. *Для любого $V\in\Lambda^n$ имеет место:*

$$V=\alpha\left({}^{1,2,\dots,n}F\right),\quad\alpha\in\Bbbk.$$

►

$$\begin{gathered}\left({}^{1,2,\dots,n}F\right)\left(x_1,x_2,\dots,x_p\right)=p!\cdot\operatorname{Asym}\left({}^{1,2,\dots,n}W\right)\left(x_1,x_2,\dots,x_p\right)=\\ p!\cdot\frac{1}{p!}\cdot\sum_\sigma(-1)^{[\sigma]}\left({}^{1,2,\dots,n}W\right)\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(n)}\right)=\\ \sum_\sigma(-1)^{[\sigma]}\xi^1_{\sigma(1)}\xi^2_{\sigma(2)}\dots\xi^n_{\sigma(n)}\equiv\det\|\xi^i_j\|.\end{gathered}$$

◄