Содержание

1 Неопределенный интеграл

1.1 Понятие первообразной, неопределённого интеграла и вопросы их существования

Ранее была изучена операция дифференцирования, сопоставляющая функции ее производную. В этом разделе будет изучаться обратная задача, в которой производная известна, а функцию нужно найти.

Замечание 1.1.1 *Ниже под обозначением $\langle a, b\rangle$ будет пониматься произвольный промежуток: отрезок, интервал или полуинтервал.*

Определение 1.1.1 *Первообразной функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется функция $F(x)$ такая, что для всех $x \in \langle a, b\rangle$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.*

Пример 1.1.1 *Функция $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$ будет первообразной для функции $f(x) = x^2$ при $x \in (-\infty, +\infty)$, но эта первообразная не единственна. Так, функции $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 5$ или $F_3(x) = \frac{x^3}{3} - \pi^e$ также будут ее первообразными.*

Пример 1.1.2 *Функция $F(x) = \operatorname{arctg} x$ является первообразной для функции $\frac{1}{1+x^2}$ при всех $x \in \mathbb{R}$, так как $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.*

Пример 1.1.3 *Функция $F(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$ является первообразной для функции $\frac{1}{1+x^2}$ как при $x > 0$, так и при $x < 0$.*

Вопрос об описании всех первообразных данной функции решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 1.1.1 *Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Для того, чтобы $\Phi(x)$ также была первообразной для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$F(x) - \Phi(x) \equiv C, \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Psi(x) = F(x) - \Phi(x)$, где $F(x)$ и $\Phi(x)$ – первообразные для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда $\forall x \in \langle a, b\rangle$

$$\Psi'(x) = (F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Согласно теореме Лагранжа, для любых $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ таких, что $x_1 < x_2$,

$$\Psi(x_2) - \Psi(x_1) = \Psi'(\xi)(x_2 - x_1) = 0, \ \xi \in (x_1, x_2).$$

Значит, $\Psi(x) \equiv C$.
Достаточность. Пусть на $\langle a, b\rangle$ выполнено условие $F(x) - \Phi(x) = C$. Тогда на этом промежутке $\Phi(x) = F(x) + C$, а следовательно

$$\Phi'(x) = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x).$$

То есть $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. □

Определение 1.1.2 *Неопределённым интегралом функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется множество всех её первообразных на этом промежутке. Неопределенный интеграл обозначается следующим образом:*

$$\int f(x)dx,$$

где

- $\int$ *- знак неопределенного интеграла;*
- $f(x)$ *- подынтегральная функция;*
- $f(x)dx$ *- подынтегральное выражение;*
- x *- переменная интегрирования.*

Следствие 1.1.2 *Если $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, то неопределенный интеграл функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ равен*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что для краткости информацию о том, что рассматривается промежуток $\langle a, b\rangle$, часто опускают. Например, вместо

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ c_2, & x > 0 \end{cases}$$

пишут

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

подразумевая, что C – кусочно-постоянная.

Замечание 1.1.2 *Если dx трактовать, как дифференциал, то ниже приведенные формулы интегрирования по частям и замены переменной становятся совершенно «механическими».*

Замечание 1.1.3 *Полезно отметить, что не каждая функция имеет первообразную. Так как производная дифференцируемой функции не может иметь разрывов первого рода, то любая функция, имеющая на $\langle a, b\rangle$ разрыв первого рода, не имеет на $\langle a, b\rangle$ первообразной.*

Позже, при изучении определенного интеграла Римана будет показано, что каждая непрерывная на $\langle a, b\rangle$ функция имеет на этом множестве первообразную.

Замечание 1.1.4 *Первообразные существуют не только у непрерывных функций. Производная дифференцируемой функции может иметь разрывы второго рода. Например,*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

Детали остаются читателю.

Для практических целей часто полезно следующее определение.

Определение 1.1.3 *Функция $F(x)$ называется обобщенной первообразной функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, если $F(x) \in C\langle a, b\rangle$ и $F'(x) = f(x)$ всюду на $\langle a, b\rangle$, кроме не более чем конечного числа точек.*

Пример 1.1.4 *Легко проверить, что обобщенной первообразной функции $y = \operatorname{sign} x$ на $\mathbb{R}$ является функция $y = |x|$.*

1.2 Таблица неопределённых интегралов

Ниже приведена таблица интегралов, часто используемых на практике.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1 \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a \neq 0 \text{ («длинный логарифм»)}$$
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \text{ («высокий логарифм»)}$$

Доказательство. В качестве примера приведено доказательство для формулы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a \neq 0.$$

Для доказательства достаточно показать, что производная правой части равна подынтегральной функции.

$$\left(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

□

Важно отметить, что каждая из формул, написанных выше, рассматривается на тех промежутках вещественной оси, на которых определена соответствующая подынтегральная функция. Если таких промежутков несколько, то произвольные постоянные в правой части, вообще говоря, различны.

1.3 Свойства неопределенного интеграла

Теорема 1.3.1 (Интеграл и производная) *Пусть существует $\int f(x)dx$ на $\langle a, b\rangle$, тогда на $\langle a, b\rangle$:*

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

Доказательство. 1. Так как $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

2. Доказывается аналогично и предлагается в качестве упражнения. □

Прямо из определения легко получается и следующая важная лемма:

Лемма 1.3.1 *Если $F(x)$ дифференцируема на $\langle a, b\rangle$, то $\int dF(x) = F(x) + C$.*

Следующая теорема широко применяется на практике.

Теорема 1.3.2 (Линейность неопределенного интеграла) *Пусть на $\langle a, b\rangle$ существуют неопределенные интегралы $\int f(x)dx$ и $\int g(x)dx$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$. Тогда*

$$\int(\alpha f+\beta g)dx=\alpha\int fdx+\beta\int gdx.$$

Доказательство. По предыдущему свойству,

$$\left(\alpha\int fdx+\beta\int gdx\right)'=\alpha f(x)+\beta g(x),$$

то есть $\alpha\int fdx+\beta\int gdx$ – первообразная для $\alpha f+\beta g$ на $\langle a, b\rangle$, а значит равенство установлено. □

Пример 1.3.1 *Вычислить интеграл*

$$\int\frac{x^2+\sqrt[3]{x^2}+5}{x}dx.$$

По свойству линейности,

$$\int\frac{x^2+\sqrt[3]{x^2}+5}{x}dx=\int xdx+\int x^{-1/3}dx+5\int\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x^{2/3}+5\ln|x|+C.$$

Пример 1.3.2 *Вычислить интеграл*

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$$

Так как $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, то

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C.$$

Теорема 1.3.3 (Формула замены переменной) *Пусть на $\langle a, b\rangle$ существует неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, $\varphi(t):\langle\alpha,\beta\rangle\to\langle a, b\rangle$, дифференцируема на $\langle\alpha,\beta\rangle$, тогда*

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, тогда, согласно теореме о производной сложной функции, $F(\varphi(t))$ – первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $\langle\alpha,\beta\rangle$, откуда и следует равенство. □

Пример 1.3.3 *Вычислить интеграл*

$$\int xe^{x^2}dx.$$

Пусть $x^2 = t$*, тогда* $d(x^2) = dt$ *или* $2xdx = dt$*, а значит*

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Пример 1.3.4 *Вычисление предыдущего интеграла можно оформить и иначе, если* dx *трактовать, как дифференциал.*

$$\int xe^{x^2}dx = \int e^{x^2} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Данный способ оформления называется занесением под знак дифференциала.

Теорема 1.3.4 (Формула интегрирования по частям) *Пусть* u, v *дифференцируемы на* $\langle a, b\rangle$ *и на* $\langle a, b\rangle$ *существует неопределенный интеграл* $\int vdu$*, тогда на* $\langle a, b\rangle$

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Доказательство. Действительно, если рассмотреть дифференциал от правой части равенства, то получим

$$d\left(uv - \int vdu\right) = d(uv) - d\left(\int vdu\right) = d(uv) - vdu = udv,$$

так как $d(uv) = udv + vdu$. Отсюда следует требуемое. $\square$

Пример 1.3.5 *Вычислить интеграл*

$$\int x\sin xdx.$$

Пусть $u = x$*, тогда* $du = dx$*,* $dv = \sin xdx$ *и* $v = -\cos x$*. Значит,*

$$\int x\sin xdx = \left|\begin{array}{c} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin xdx \\ v = -\cos x \end{array}\right| = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Пример 1.3.6 *Вычислить интеграл*

$$\int (x^2+2x)e^x dx.$$

Проинтегрируем по частям, получим

$$\int (x^2+2x)e^x dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2+2x \\ du = (2x+2)dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right| = (x^2+2x)e^x - \int (2x+2)e^x dx.$$

В результате степень многочлена перед экспонентой уменьшилась. Проинтегрируем по частям снова,

$$\int (2x+2)e^x = \left| \begin{array}{c} u = 2x+2 \\ du = 2dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right| = (2x+2)e^x - 2\int e^x dx = (2x+2)e^x - e^x + C.$$

Окончательно,

$$\int (x^2+2x)e^x dx = (x^2+2x)e^x - (2x+2)e^x + e^x + C.$$

Замечание 1.3.1 *Формулу интегрирования по частям удобно применять для интегралов вида*

$$\int P_n(x)a^{\alpha x}dx,\ \int P_n(x)\sin(\alpha x)dx,\ \int P_n(x)\cos(\alpha x)dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Пример 1.3.7 *Вычислить интеграл*

$$\int e^x \sin x dx.$$

Проинтегрируем по частям, получим

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{c} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

еще раз проинтегрируем по частям, получим

$$\int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

В итоге,

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

откуда

$$\int e^x \sin x dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C.$$

Интегралы такого типа, как рассмотрен выше, называются самосводящимися.

1.4 Интегрирование рациональных дробей

1.5 Некоторые сведения из теории многочленов

В дальнейшем, под многочленом (полиномом) $P_n(x)$ степени $n \geq 1$ будет подразумеваться функция

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Под многочленом нулевой степени будет подразумеваться константа.

Определение 1.5.1 *Рациональной дробью называется дробь* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, *где* $P_n(x)$ *– многочлен степени* n, $Q_m(x)$ *– многочлен степени* m.

Определение 1.5.2 *Рациональная дробь называется правильной, если* $n < m$, *иначе она называется неправильной.*

Лемма 1.5.1 *Пусть* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *– неправильная дробь. Тогда существует единственное представление*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)},$$

где $R_{n-m}(x)$ *– многочлен степени* $(n-m)$, $T_k(x)$ *– многочлен степени* k, *причем* $k < m$.

В теории многочленов доказывается следующая теорема.

Теорема 1.5.1 *Пусть $P_n(x)$ – многочлен n-й степени, у которого коэффициент при старшей степени равен единице. Тогда он может быть разложен на множители следующим образом*

$$P_n(x) = (x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_p)^{k_p}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+b_mx+c_m)^{l_m},$$

где

$$k_p,\ l_m\in\mathbb{N},\ D=b_m^2-4c_m<0,\ k_1+k_2+\ldots+k_p+2\cdot(l_1+\ldots+l_m)=n.$$

Замечание 1.5.1 *Условия $b_i^2-4c_i<0$ означают, что квадратные трехчлены $x^2+b_ix+c_i$ не имеют вещественных корней. В этом случае они имеют два комплексно-сопряженных корня $\alpha\pm\beta i$.*

1.6 Разложение рациональной дроби на простейшие

Определение 1.6.1 *Простейшими дробями называют дроби вида*

$$\frac{A}{(x-a)^k},\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

где $k\in\mathbb{N}$.

Оказывается, любая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму простейших. Этой теореме предпошлем две леммы.

Лемма 1.6.1 *Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь и $Q_m(x)=(x-a)^k\cdot\widetilde{Q}(x)$, где $\widetilde{Q}(a)\neq 0$. Существует число $A\in\mathbb{R}$ и многочлен $\widetilde{P}(x)$, такие что*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{\widetilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot\widetilde{Q}(x)},$$

причем это представление единственно.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}-\frac{A}{(x-a)^k}=\frac{P_n(x)}{(x-a)^k\cdot\widetilde{Q}(x)}-\frac{A}{(x-a)^k}=\frac{P_n(x)-A\cdot\widetilde{Q}(x)}{(x-a)^k\cdot\widetilde{Q}(x)}$$

и выберем число A так, чтобы число a было корнем числителя.

$$P_n(a)-A\cdot\widetilde{Q}(a)=0\Rightarrow A=\frac{P_n(a)}{\widetilde{Q}(a)},$$

где последнее равенство корректно, так как по условию $\widetilde{Q}(a) \neq 0$. При данном A в числителе стоит многочлен $P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)$ с корнем a, значит его можно разложить на множители $(x-a) \cdot \widetilde{P}(x)$, а тогда

$$\frac{P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)}{(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)} = \frac{(x-a) \cdot \widetilde{P}(x)}{(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)} = \frac{\widetilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)}.$$

Существование разложения доказано.
Докажем единственность такого разложения. От противного, пусть существует два разложения

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}_1(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}_2(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)}.$$

Домножив на $(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)$, имеем

$$A_1 \cdot \widetilde{Q}(x) + \widetilde{P}_1(x) \cdot (x-a) = A_2 \cdot \widetilde{Q}(x) + \widetilde{P}_2(x) \cdot (x-a),$$

причем это равенство верно при всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть $x = a$, тогда равенство превращается в

$$A_1 \cdot \widetilde{Q}(a) = A_2 \cdot \widetilde{Q}(a),$$

и так как $\widetilde{Q}(a) \neq 0$ то $A_1 = A_2$. Но тогда коэффициенты многочлена $\widetilde{P} = P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)$ тоже вычисляются однозначно. Противоречие. $\square$

Лемма 1.6.2 *Пусть* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *– правильная рациональная дробь и* $Q_m(x) = (x^2+px+q)^k \cdot \widetilde{Q}(x)$, $p^2 - 4q < 0$, $\alpha \pm \beta i$ *– комплексно-сопряженные корни квадратного трехчлена* x^2+px+q, *причем* $\widetilde{Q}(\alpha \pm \beta i) \neq 0$. *Существуют единственные числа* $A, B \in \mathbb{R}$ *и многочлен* $\widetilde{P}(x)$ *такие, что*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)},$$

причем это представление единственно.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = \frac{P_n(x) - (Ax+B) \cdot \widetilde{Q}(x)}{(x^2+px+q)^k \cdot \widetilde{Q}(x)}$$

Выберем числа A, B так, чтобы число $\alpha + \beta i$ было корнем числителя, то есть чтобы

$$P_n(\alpha+\beta i) - (A(\alpha+\beta i) + B) \cdot \widetilde{Q}(\alpha+\beta i) = 0.$$

Так как значение многочлена в комплексной точке дает комплексное число, то

$$P_n(\alpha+\beta i) = P_1 + iP_2,$$
$$\widetilde{Q}(\alpha+\beta i) = \widetilde{Q}_1 + i\widetilde{Q}_2,$$

где $P_1, P_2, \widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2 \in \mathbb{R}$ и $\widetilde{Q}_1^2 + \widetilde{Q}_2^2 \neq 0$, так как по условию $\widetilde{Q}(\alpha+\beta i) \neq 0$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$P_1 + iP_2 - (A\alpha + iA\beta + B)\cdot(\widetilde{Q}_1 + i\widetilde{Q}_2) = 0.$$

Отделив вещественную и мнимую части, получим

$$(P_1 - A(\alpha\widetilde{Q}_1 - \beta\widetilde{Q}_2) - B\widetilde{Q}_1) + i(P_2 - A(\alpha\widetilde{Q}_2 + \beta\widetilde{Q}_1) - B\widetilde{Q}_2) = 0 + 0\cdot i$$

Таким образом,

$$\begin{cases} P_1 - A(\alpha\widetilde{Q}_1 - \beta\widetilde{Q}_2) - B\widetilde{Q}_1 = 0 \\ P_2 - A(\alpha\widetilde{Q}_2 + \beta\widetilde{Q}_1) - B\widetilde{Q}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(\alpha\widetilde{Q}_1 - \beta\widetilde{Q}_2) + B\widetilde{Q}_1 = P_1 \\ A(\alpha\widetilde{Q}_2 + \beta\widetilde{Q}_1) + B\widetilde{Q}_2 = P_2 \end{cases}$$

Вычислим определитель данной системы:

$$\Delta = (\alpha\widetilde{Q}_1 - \beta\widetilde{Q}_2)\widetilde{Q}_2 - \widetilde{Q}_1(\alpha\widetilde{Q}_2 + \beta\widetilde{Q}_1) = -\beta(\widetilde{Q}_1^2 + \widetilde{Q}_2^2) \neq 0.$$

Значит из системы единственным образом могут быть найдены числа A и B такие, что $\alpha + \beta i$ - корень числителя. Если $\alpha + \beta i$ корень многочлена с вещественными коэффициентами, то $\alpha - \beta i$ – тоже его корень, значит при найденных A и B числитель $P_n(x) - (Ax+B)\cdot\widetilde{Q}(x)$ может быть разложен на множители

$$P_n(x) - (Ax+B)\cdot\widetilde{Q}(x) = (x^2+px+q)\cdot\widetilde{P}(x),$$

причем

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = \frac{(x^2+px+q)\cdot\widetilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^k\cdot\widetilde{Q}(x)} = \frac{\widetilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\cdot\widetilde{Q}(x)}.$$

Тем самым, существование разложения доказано.
Единственность доказывается аналогично доказательству предыдущей леммы и остается в качестве упражнения. □
Две данные леммы позволяют доказать теорему, которая и является основной целью данного параграфа.

Теорема 1.6.1 *Любая рациональная дробь может быть представлена единственным образом в виде*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} +$$

$$+\frac{A_{s1}}{(x-a_s)^{k_s}} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{x^2+p_1x+q_1} +$$

$$+\frac{B_{t1}X + C_{t1}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}} + \ldots + \frac{B_{tl_t}X + C_{tl_t}}{x^2+p_tx+q_t},$$

где $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}, R_{n-m}(x)$ – многочлен степени $(n-m)$ и знаменатель исходной дроби имеет разложение

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_s)^{k_s} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_tx+q_t)^{l_t}.$$

Доказательство. Пусть в рациональной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ степень $n > m$, тогда по лемме 1.5.1 ее можно представить в виде суммы многочлена $R_{n-m}(x)$ и правильной дроби $\frac{T_k(x)}{Q_m(x)}$, где $k < m$. Таким образом достаточно рассмотреть случай правильной и несократимой дроби $\frac{T_k(x)}{Q_m(x)}$. По лемме 1.6.1 дробь можно представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{\widetilde{P}^{(11)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1} \cdot \widetilde{Q}^{(1)}(x)},$$

где $\widetilde{Q}^{(1)}(x) = (x-a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_s)^{k_s} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$. Далее по лемме 1.6.1 также можно найти число A_{12} и многочлен $\widetilde{P}^{(12)}(x)$ такие, что

$$\frac{\widetilde{P}^{(11)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1} \cdot \widetilde{Q}^{(1)}(x)} = \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \frac{\widetilde{P}^{(12)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-2} \cdot \widetilde{Q}^{(1)}(x)}.$$

Продолжая аналогичные рассуждения получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} + \frac{\widetilde{P}^{(1k_1)}(x)}{\widetilde{Q}^{(1)}(x)}.$$

Аналогично, для всех вещественных корней знаменателя a_i кратности k_i, $i = 1...s$, получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{21}}{(x-a_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{A_{2k_1}}{(x-a_2)} + \ldots +$$

$$\frac{A_{s1}}{(x-a_s)^{k_s}} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)} + \frac{\widetilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\widetilde{Q}^{(s)}(x)},$$

где $\widetilde{Q}^{(s)}(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}$, при этом дробь $\frac{\widetilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\widetilde{Q}^{(s)}(x)}$ – правильная. Далее используем лемму 1.6.2, получим

$$\frac{\widetilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\widetilde{Q}^{(s)}(x)} = \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \frac{\hat{P}^{(11)}(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1 - 1} \cdot \hat{Q}^{(1)}(x)},$$

где $\hat{Q}^{(1)}(x) = (x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}$. Продолжая рассуждения таким же образом получим, что каждой t паре комплексно-сопряженных корней знаменателя кратности l_t, будут соответствовать l_t простейших дробей третьего и четвертого типа, и окончательно:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{21}}{(x-a_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{A_{2k_1}}{(x-a_2)} + \ldots +$$
$$\frac{A_{s1}}{(x-a_s)^{sk_s}} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)} +$$
$$\frac{B_{21}x + C_{21}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2}} + \ldots + \frac{B_{2l_2}x + C_{2l_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)} + \ldots + \frac{B_{t1}x + C_{t1}}{(x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}} + \ldots + \frac{B_{tl_t}x + C_{tl_t}}{x^2 + p_tx + q_t}.$$

□

1.7 Интегрирование простейших дробей

В данном пункте в общем виде показывается, как можно вычислить интеграл от простейших рациональных дробей. Для начала рассмотрим интеграл

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx, \ \ k \geq 1.$$

1. При $k = 1$ имеем

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

2. При $k > 1$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C.$$

Теперь покажем, как вычисляются интегралы

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}dx, \ \ k \geq 1, \ \ p^2 - 4q < 0.$$

3. Пусть $k = 1$. Дополним знаменатель до полного квадрата,

$$x^2 + px + q = x^2 + 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}.$$

Так как выражение
$$\frac{4q-p^2}{4}>0,$$
то его можно обозначить, как a^2. Кроме того, положим $t=x+\frac{p}{2}$, тогда $dt=dx$ и
$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+a^2}dt=\int\frac{At+(B-\frac{Ap}{2})}{t^2+a^2}dt=$$
$$A\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{A}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}=$$
$$=\frac{A}{2}\ln|t^2+a^2|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=$$
$$=\frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}}+C.$$
4. Пусть $k>1$. Используя обозначения, введенные в пункте 3, получим
$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=A\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$
Сначала рассмотрим первый интеграл:
$$\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\frac{(t^2+a^2)^{1-k}}{1-k}+C.$$
Теперь рассмотрим второй интеграл, обозначив его I_k:
$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2}{(t^2+a^2)^k}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=$$
$$\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=\frac{1}{a^2}I_{k-1}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt.$$
Последний интеграл вычислим по частям
$$\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=\left|\begin{array}{c}u=t\\ du=dt\\ dv=\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}\\ v=\frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\end{array}\right|=$$
$$=\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

Тем самым,

$$I_k = \frac{1}{a^2}\left(I_{k-1}\left(1+\frac{1}{2(1-k)}\right) - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Таким образом, получена рекуррентная формула, выражающая I_k через I_{k-1}. Так как

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

то схема вычисления интеграла полностью изложена.

Следствие 1.7.1 *Интеграл от рациональной дроби может быть выражен через элементарные функции.*

1.8 Метод Остроградского

Вычисление интеграла от последнего типа дроби – задача трудоемкая. Полезно пользоваться следующей формулой (в случае, когда дробь под интегралом – правильная):

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx.$$

В этой формуле $Q_2(x)$ – многочлен, имеющий те же корни, что и $Q(x)$, но первой кратности. Многочлен $Q_1(x)$ – это частое от деления $Q(x)$ на $Q_2(x)$. Все написанные дроби являются правильными.
Доказательство. Остается в качестве упражнения $\square$

1.9 Интегрирование иррациональностей

Пусть $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ – рациональная функция относительно каждой из переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.
1. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right)dx,$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{Q}$. Подстановка

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

m – общий знаменатель $p_1, p_2, ..., p_n$.
2. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \ a \neq 0.$$

Функция под интегралом с помощью алгебраических преобразований приводится к виду:

$$R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)=\frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+R_2(x),$$

где $R_1(x), R_2(x)$ – рациональные дроби. С интегралом от рациональной дроби все ясно. Как вычислить интеграл от первой дроби?

Разложив дробь на простейшие, придем к дробям (и интегралам) трех типов. Первый тип:

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Этот интеграл может быть вычислен, как

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где коэффициенты ищутся после дифференцирования методом неопределенных коэффициентов.

Второй тип:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Этот интеграл сводится к интегралу предыдущего типа подстановкой $t=(x-a)^{-1}$.

Третий тип:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Если $ax^2+bx+c=\alpha(x^2+px+q)$, то приходим к интегралу

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^{k+1/2}}dx=E\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{k+1/2}}dx+F\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{k+1/2}}.$$

Второй интеграл вычисляется, используя подстановку Абеля:

$$t=\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'.$$

Иначе

$$x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$$

и коэффициенты подбираются так, чтобы в квадратных трехчленах исчезли члены, содержащие t. Приходим к интегралу

$$\int\frac{P_{k-1}(x)}{(x^2+a)^k\sqrt{sx^2+r}}dx.$$

Раскладывая дробь на простейшие, имеем либо

$$\int \frac{x}{(x^2+a)^k\sqrt{sx^2+r}}dx,$$

либо

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)^k\sqrt{sx^2+r}}.$$

Последний интеграл снова вычисляется подстановкой Абеля

$$t = \left(\sqrt{sx^2+r}\right)'.$$

3. Дифференциальный бином

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx,$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

Если $p \in \mathbb{Z}$, то $x = t^N$, N – общий знаменатель m, n.

Если $(m+1)/n \in \mathbb{Z}$, то $ax^n + b = t^s$, s – знаменатель p.

Если $(m+1)/n + p \in \mathbb{Z}$, то $a + bx^{-n} = t^s$, s – знаменатель p.

В других случаях интеграл в элементарных функциях не выражается (см. ниже про “Неберущиеся интегралы”.)

1.10 Интегралы от тригонометрических функций

В этом разделе будут рассмотрены интегралы от некоторых классов тригонометрических функций.

Покажем, что интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

всегда сводятся к интегралам от рациональных функций подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Для этого обратимся к формулам выражение синуса и косинуса через тангенс половинного угла, а тем самым представим их через t:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

А также
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$
Таким образом исходный интеграл будет выражен через рациональные функции:
$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

1.11 "Неберущиеся" интегралы

Позже мы докажем, что непрерывная функция всегда имеет первообразную. Но эта первообразная не всегда выражается через элементарные функции.

Ниже приведены некоторые интегралы, не выражающиеся элементарными функциями:

1. $\int \frac{\sin x}{x}dx$;
2. $\int \frac{\cos x}{x}dx$;
3. $\int \frac{e^x}{x}dx$;
4. $\int e^{\pm x^2}dx$;
5. $\int \sin x^2 dx$;
6. $\int \cos x^2 dx$;
7. $\int \frac{dx}{\ln x}$;
8. $\int \sqrt{1-\alpha^2\sin^2 x}dx$;
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2 x}}$.

2 Понятие интеграла Римана

2.1 Интегральные суммы и интеграл

Определение 2.1.1 *Говорят, что на отрезке $[a, b]$ введено разбиение τ, если введена система точек x_i, $i \in \{0, 1, ..., n\}$, удовлетворяющая условию*
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Замечание 2.1.1 *Обычно вводят следующие обозначения:*
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta_i = [x_{i-1}, x_i], \quad i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Определение 2.1.2 *Величина $\lambda(\tau) = \max\limits_{i\in\{1,2,...,n\}} \Delta x_i$ называется мелкостью (рангом) разбиения (дробления).*

Определение 2.1.3 *Говорят, что на отрезке $[a, b]$ введено разбиение (или оснащенное разбиение) (τ, ξ), если на нем введено разбиение τ и выбрана система точек ξ_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ таким образом, что $\xi_i \in \Delta_i$.*

Определение 2.1.4 *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$ и введено разбиение (τ, ξ). Величина*

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, отвечающей разбиению (τ, ξ).

Определение 2.1.5 *Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Говорят, что число I является интегралом Римана от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta :\ \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta,\ \forall \xi \Rightarrow |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon.$$

При этом пишут

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Замечание 2.1.2 *Проще, но с некоторыми оговорками, последнее определение можно переписать в виде*

$$I = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma_\tau(f, \xi).$$

Замечание 2.1.3 *Понятие предела интегральных сумм, вообще говоря, не является частным случаем понятия предела функции, так как интегральная сумма является функцией разбиения, а не его мелкости. В дальнейшем мы часто будем писать $\lambda(\tau) \to 0$, оставляя детальную расшифровку читателю.*

Замечание 2.1.4 *Аналогично определению предела функции по Гейне, сформулируем равносильное определение интеграла с помощью последовательностей:*
Число I называется интегралом Римана функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, если для любой последовательности оснащенных разбиений (t_n, ξ_n) отрезка $[a, b]$ такой, что мелкость разбиений $\lambda(\tau_n) \to 0$ при $n \to +\infty$ выполнено $\sigma_{\tau_n}(f, \xi_n) \to I$ при $n \to +\infty$.

Определение 2.1.6 *Функция $f(x)$, для которой существует интеграл Римана по отрезку $[a, b]$ называется интегрируемой по Риману на этом отрезке (или просто интегрируемой) и обозначается $f \in R[a, b]$.*

Пример 2.1.1 *Легко показать, что постоянная функция $y = C$ интегрируема по любому отрезку $[a, b]$, причем*

$$\int\limits_a^b C dx = C(b-a).$$

Действительно, вводя произвольное разбиение (τ, ξ) отрезка $[a, b]$,

$$\sigma_\tau(y, \xi) = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = C(b-a),$$

откуда и следует требуемое.

Пример 2.1.2 *Не всякая функция интегрируема. Оказывается, что функция Дирихле*

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не интегрируема ни на каком отрезке. Для примера будем рассматривать отрезок $[0, 1]$ и пусть τ – разбиение этого отрезка.
Выберем в каждом отрезке Δ_i точку $\xi_i \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$\sigma_\tau(d, \xi) = \sum_{i=1}^{n} d(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1.$$

Теперь выберем в каждом отрезке Δ_i точку $\xi_i \in \mathbb{I}$. Тогда

$$\sigma_\tau(d, \xi) = \sum_{i=1}^{n} d(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\Delta x_i = 0.$$

Тем самым, при стремлении $\lambda(\tau) \to 0$, предел зависит от выбора средних точек ξ, что противоречит определению интеграла.

Для дальнейшего изложения удобно немного расширить определение интеграла Римана.

Определение 2.1.7 *По определению полагают*

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0,$$

$$\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx,\ a < b.$$

2.2 Суммы Дарбу и их свойства. Необходимое условие интегрируемости

Для изучения вопросов существования интеграла Римана, полезно рассмотреть две «крайние интегральные суммы», которые, на самом деле, интегральными являются не всегда.

Определение 2.2.1 *Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и τ – некоторое разбиение этого отрезка. Величины*

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x),$$

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x\in\Delta_i} f(x)$$

называют верхней и нижней суммами Дарбу для функции $f(x)$, отвечающими разбиению τ, соответственно.

Замечание 2.2.1 *Из определения верхней и нижней сумм Дарбу очевидно неравенство*

$$s_\tau(f) \le \sigma_\tau(f, \xi) \le S_\tau(f)$$

для любых оснащенных разбиений (τ, ξ) отрезка $[a, b]$.

Лемма 2.2.1 *Ограниченность f сверху (снизу) равносильна конечности верхней суммы $S_\tau(f)$ (нижней суммы $s_\tau(f)$).*

Доказательство. Очевидно. □

Замечание 2.2.2 *Если $f \in C[a, b]$, то, согласно теореме Вейерштрасса, $m_i = \min\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, $M_i = \max\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, а потому нижняя и верхняя суммы Дарбу для непрерывной функции являются ее наименьшей и наибольшими интегральными суммами, соответственно.*

В общем случае последнe замечание, конечно, не выполняется, но справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.2.2 *Справедливы равенства*

$$S_\tau(f) = \sup_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi), \quad s_\tau(f) = \inf_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. То, что $S_\tau(f) \geq \sigma_\tau(f,\xi)$ уже отмечено в замечании 2.2.1. Пусть f ограничена сверху на $[a,b]$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, по определению супремума,

$$\exists \xi_i \in \Delta_i : M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_i), \quad i = 1...n.$$

Домножим каждое неравенство на Δx_i и сложим по i, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \varepsilon < \sigma_\tau(f,\xi),$$

что и означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется набор точек ξ такой, что

$$S_\tau(f) - \varepsilon < \sigma_\tau(f,\xi),$$

и $S_\tau(f) \geq \sigma_\tau(f,\xi)$. Тем самым проверено, что

$$S_\tau(f) = \sup_{\xi} \sigma_\tau(f,\xi).$$

Если же f не ограничена сверху на $[a,b]$, то f не ограничена хотя бы на одном Δ_i. Пусть, для определенности, на Δ_1. Тогда существует последовательность ξ_1^n, что $f(\xi_1^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Пусть $\xi_i \in \Delta_i$, $i \geq 2$. Тогда

$$\sup_{\xi} \sigma_\tau(f,\xi) \geq \lim_{n\to+\infty} \left(f(\xi^n)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right) = +\infty = S_\tau(f)$$

□

Определение 2.2.2 *Пусть на отрезке $[a,b]$ введены разбиения τ_1 и τ_2. Говорят, что разбиение τ_1 является измельчением разбиения τ_2, если $\tau_2 \subset \tau_1$.*

Лемма 2.2.3 *Пусть $\tau_2 \subset \tau_1$, тогда*

$$S_{\tau_2}(f) \geq S_{\tau_1}(f), \quad s_{\tau_1}(f) \geq s_{\tau_2}(f),$$

то есть при измельчении разбиения верхние суммы Дарбу не увеличиваются, а нижние – не уменьшаются.

Доказательство. Достаточно доказать лемму для случая, когда измельчение τ_1 получается из τ_2 добавлением одной точки $\hat{x} \in (x_{k-1}, x_k)$. Тогда

$$S_{\tau_2}(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1,\ i\neq k}^{n} M_i \Delta x_i + M_k \Delta x_k.$$

Пусть

$$M_k^{'} = \sup_{x\in[x_{k-1},\hat{x}]} f(x), \quad M_k^{''} = \sup_{x\in[\hat{x},x_k]} f(x),$$

тогда

$$M_k \geq M_k^{'}, \quad M_k \geq M_k^{''}$$

и

$$M_k \Delta x_k = M_k(\hat{x} - x_{k-1}) + M_k(x_k - \hat{x}) \geq M_k^{'}(\hat{x} - x_{k-1}) + M_k^{''}(x_k - \hat{x}),$$

откуда

$$S_{\tau_2}(f) \geq \sum_{i=1,\ i\neq k}^{n} M_i \Delta x_i + M_k^{'}(\hat{x} - x_{k-1}) + M_k^{''}(x_k - \hat{x}) = S_{\tau_1}(f).$$

Второе неравенство доказывается аналогично. □

Лемма 2.2.4 *Пусть τ_1 и τ_2 – разбиения отрезка $[a, b]$, тогда*

$$s_{\tau_1}(f) \leq S_{\tau_2}(f),$$

то есть любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу.

Доказательство. Разбиение $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ является разбиением отрезка $[a, b]$, причем $\tau_1 \subset \tau$, $\tau_2 \subset \tau$. По лемме 2.2.3 и замечанию 2.2.1,

$$s_{\tau_1}(f) \leq s_{\tau}(f) \leq S_{\tau}(f) \leq S_{\tau_2}(f),$$

что и доказывается утверждение. □

Определение 2.2.3 *Пусть функция задана и ограничена на $[a, b]$. Величины*

$$I^*(f) = \inf_{\tau} S_{\tau}(f), \quad I_*(f) = \sup_{\tau} s_{\tau}(f)$$

называются верхним и нижним интегралами Дарбу соответственно.

Замечание 2.2.3 *Для любых разбиений τ_1 и τ_2 отрезка $[a,b]$ выполнено неравенство*
$$s_{\tau_1}(f) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S_{\tau_2}(f).$$

Теорема 2.2.1 (Необходимое условие интегрируемости) *Пусть $f \in R[a,b]$, тогда f ограничена на $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть f, например, не ограничена сверху. Тогда $S_\tau(f) = +\infty$ для любого разбиения τ. Поэтому для любого числа I и разбиения τ, найдется такое оснащенное разбиение (τ, ξ), что

$$\sigma_\tau(f, \xi) > I + 1.$$

Значит, никакое число I пределом интегральных сумм не является. □

2.3 Критерии Дарбу и Римана интегрируемости функции

Теорема 2.3.1 (Критерии интегрируемости) *Пусть f задана на $[a,b]$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $f \in R[a,b]$;
2. *Критерий Дарбу:*
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \tau\ \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon;$$
3. *Критерий Римана:*
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \tau :\ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon;$$
4. $$I_* = I^* \quad (= I).$$

Доказательство.

- Докажем $1 \Rightarrow 2$. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда
$$\exists\ \delta > 0 :\ \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta\ \forall \xi \quad \Rightarrow \quad |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{3},$$
откуда
$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Переходя в правой части неравенства к супремуму по ξ, а в левой части к инфимуму, получается

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \le s_\tau(f) \le S_\tau(f) \le I + \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

- Переход $2 \Rightarrow 3$ очевиден.

- Докажем $3 \Rightarrow 4$. Пусть $\varepsilon > 0$ и разбиение τ такое, что $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$. Заметим, что тогда f ограничена. Так как (из определения и свойств интегралов Дарбу)

$$s_\tau \le I_* \le I^* \le S_\tau,$$

то $0 \le I^* - I_* < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $I_* = I^*$.

- И, наконец, докажем $4 \Rightarrow 1$. Пусть $I^* = I_* = I$. Тогда для $\varepsilon > 0$

$$I_* = \sup_\tau s_\tau \quad \Rightarrow \quad \exists \tau_1 : \ s_{\tau_1} > I_* - \varepsilon/4,$$

$$I^* = \inf_\tau S_\tau \quad \Rightarrow \quad \exists \tau_2 : \ S_{\tau_2} < I^* + \varepsilon/4.$$

Пусть теперь τ – произвольное разбиение мелкости $\lambda(\tau) < \delta$ (значение δ выберем позже). Дополним его точками разбиений τ_1 и τ_2 и рассмотрим разбиение $\widetilde{\tau} = \tau \cup \tau_1 \cup \tau_2$.

Пусть k – число точек в разбиении $\tau_1 \cup \tau_2$, $M = \sup_{[a,b]} f$, $m = \inf_{[a,b]} f$. Будем считать, что $m < M$ (иначе $f = \text{const} \in R[a,b]$).

Оценим наибольшее отклонение нижней суммы Дарбу разбиения τ по сравнению с его измельчением $\widetilde{\tau}$. Так как к τ добавились k точек, то значение слагаемых суммы s_τ могло измениться на k отрезках разбиения. На каждом таком отрезке слагаемое $m_i \Delta x_i$ увеличилось не более, чем на $\delta(M_i - m_i) \le \delta(M - m)$. Значит, вся сумма s_τ могла вырасти не больше, чем на $\delta k(M - m)$:

$$s_{\widetilde{\tau}} - s_\tau \le k\delta(M - m).$$

Аналогично, верхняя сумма S_τ при добавлении точек $\tau_1 \cup \tau_2$ может уменьшиться не более, чем на такую же величину:

$$S_\tau - S_{\widetilde{\tau}} \le k\delta(M - m).$$

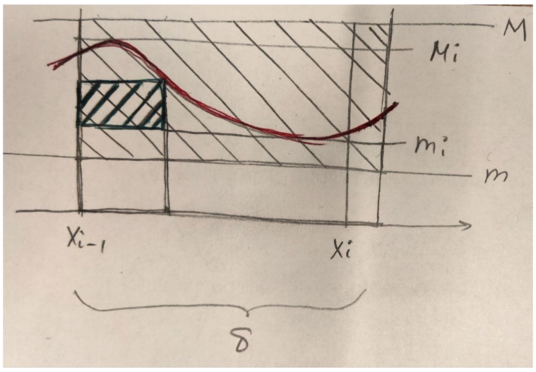

Рис. 1: Изменение нижней суммы s_τ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ при добавлении одной точки. Зеленая штриховка – реальное изменение, серая штриховка – максимально возможное изменение (с запасом)

Таким образом, имеем

$$s_\tau \geq s_{\widetilde{\tau}} - k\delta(M-m) \geq s_{\tau_1} - k\delta(M-m) > I - k\delta(M-m) - \varepsilon/4,$$

$$S_\tau \leq S_{\widetilde{\tau}} + k\delta(M-m) \leq S_{\tau_2} + k\delta(M-m) < I + k\delta(M-m) + \varepsilon/4,$$

откуда

$$S_\tau - s_\tau < 2k\delta(M-m) + \varepsilon/2.$$

Теперь понятно, как надо выбирать δ. Возьмем

$$\delta = \min\left\{\lambda(\tau_1), \lambda(\tau_2), \frac{\varepsilon}{4k(M-m)}\right\}.$$

Тогда для любого τ мелкостью меньше δ имеем $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.

Осталось заметить, что из неравенств

$$s_\tau \leq \sigma_\tau(\xi) \leq S_\tau, \quad s_\tau \leq I_* = I = I^* \leq S_\tau$$

следует для любого оснащения ξ: $|\sigma_\tau(\xi) - I| < S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, что и означает $f \in R[a,b]$.

□

Определение 2.3.1 *Пусть функция $f(x)$ задана на множестве E. Колебанием функции на этом множестве называется величина*

$$\omega(f, E) = \sup_{x,y \in E} |f(x) - f(y)|.$$

Из определений верхней и нижней граней легко получить, что

$$\omega(f, E) = \sup_{x \in E} f(x) - \inf_{x \in E} f(x).$$

Замечание 2.3.1 *В критериях Дарбу и Римана разность $S_\tau - s_\tau$ можно заменять на*

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i,$$

где $\omega_i(f) = M_i - m_i$ – колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

2.4 Свойства интегрируемых функций

Ниже приведены основные свойства интегрируемых функций, используемые в дальнейшем.

Теорема 2.4.1 (Свойства интегрируемых функций) *Пусть $f(x), g(x) \in R[a,b]$, тогда*

1. $\alpha f(x) + \beta g(x) \in R[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $f(x)g(x) \in R[a,b]$.
3. $|f(x)| \in R[a,b]$.
4. *Если* $|f(x)| \geq C > 0$ *на* $[a,b]$, *то* $\frac{1}{f(x)} \in R[a,b]$.
5. *Пусть* $[c,d] \subset [a,b]$, *тогда* $f(x) \in R[c,d]$.

Доказательство. 1. Так как

$$|\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(y) - \beta g(y)| \leq |\alpha||f(x) - f(y)| + |\beta||g(x) - g(y)| \leq$$

$$\leq |\alpha|\omega(f, E) + |\beta|\omega(g, E),$$

то, переходя к супремуму в левой части получается, что

$$\omega(\alpha f + \beta g, E) \leq |\alpha|\omega(f, E) + |\beta|\omega(g, E).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R[a,b]$, то по следствию 2.3.1

$$\exists \delta_1 : \ \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}.$$

Аналогично, так как $g \in R[a,b]$, то по следствию 2.3.1

$$\exists \delta_2 : \ \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega(g, \Delta_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)}$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда для любого τ такого, что $\lambda(\tau) < \delta$ выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(\alpha f + \beta g)\Delta x_i \leq |\alpha| \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i + |\beta| \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i \leq$$
$$\leq \frac{|\alpha|\varepsilon}{2(|\alpha|+1)} + \frac{|\beta|\varepsilon}{2(|\beta|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, по критерию Дарбу, $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$.
2. Так как $f, g \in R[a,b]$, то по необходимому условию они ограничены на $[a,b]$, то есть

$$\exists C: \ |f(x)| < C, \ |g(x)| < C, \ \forall x \in [a,b].$$

Кроме того, так как

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq$$
$$\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \leq C(\omega_i(f) + \omega_i(g)),$$

то, переходя к супремуму в левой части неравенства, получим, что

$$\omega_i(fg) \leq C(\omega_i(f) + \omega_i(g)).$$

Дальнейшие обоснования проводятся так же, как в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.
3. Так как

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| \leq \omega_i(f),$$

то, переходя к супремуму в левой части неравенства, получается, что

$$\omega_i(|f|) \leq \omega_i(f).$$

Дальнейшие обоснования проводятся так же, как в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.
4. Так как

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| = \left|\frac{f(x) - f(y)}{f(x)f(y)}\right| \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{C^2} \leq \frac{\omega_i(f)}{C^2},$$

то, переходя к супремуму в левой части неравенства, получается, что

$$\omega_i\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{\omega_i(f)}{C^2}.$$

Дальнейшие обоснования проводятся так же, как в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.

5. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R[a, b]$, то, согласно теореме Дарбу,

$$\exists \delta : \ \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon.$$

Пусть τ' – произвольное разбиение отрезка $[c, d]$ такое, что $\lambda(\tau') < \delta$. Дополним его до разбиения τ отрезка $[a, b]$ так, чтобы $\lambda(\tau) < \delta$, введя разбиения отрезков $[a, c]$ и $[d, b]$, но не добавляя новых точек в отрезок $[c, d]$. Тогда

$$\sum_{[c,d]} \omega_i(f)\Delta x_i \leq \sum_{[a,b]} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon,$$

так как все слагаемые, входящие в левую сумму, входят и в правую, и $\omega_i(f) \geq 0$. Тем самым показано, что $f \in R[c, d]$. □

Для дальнейшего изложения потребуется еще одно важное свойство интегрируемых функций, которое сформулировано ниже.

Теорема 2.4.2 *Пусть* $f(x) \in R[a, c]$, $f(x) \in R[c, b]$, *тогда* $f(x) \in R[a, b]$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как функция $f \in R[a, c]$, то по критерию Римана

$$\exists \tau_1 : \ \sum_{[a,c]} \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $f \in R[c, b]$, то по критерию Римана

$$\exists \tau_2 : \ \sum_{[c,b]} \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Разбиение $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ является разбиением отрезка $[a, b]$, причем

$$\sum_{[a,b]} \omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{[c,b]} \omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, по критерию Римана, $f \in R[a, b]$. □

2.5 Классы интегрируемых функций

Теорема 2.5.1 (Интегрируемость непрерывной функции)
Непрерывная на отрезке $[a, b]$ *функция интегрируема на нем, т.е.*

$$(f \in C[a, b]) \Rightarrow (f \in R[a, b]).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нем по теореме Кантора, а значит

$$\exists\, \delta > 0 : \ \forall x_1, x_2 \in [a, b] : \ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Пусть τ – разбиение отрезка $[a, b]$, причем $\lambda(\tau) < \delta$, тогда

$$\omega_i(f) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Значит, по критерию Римана, $f \in R[a, b]$. $\square$

Теорема 2.5.2 (Конечное число точек разрыва) *Пусть f задана и ограничена на $[a, b]$. Пусть, кроме того, множество точек разрыва функции f конечно. Тогда $f \in R[a, b]$.*

Доказательство. Так как функция ограничена, то $|f| \leq C$. Тогда $\omega(f, [a, b]) \leq 2C$. Пусть $\varepsilon > 0$. Построим вокруг каждой точки разрыва интервал радиуса $\delta_1 = \varepsilon/(16Ck)$, где k – количество точек разрыва.

Дополнение к этому набору интервалов – это набор отрезков, на каждом из которых функция f непрерывна, а значит и равномерно непрерывна. Значит, так как число отрезков конечно, то существует δ_2, что если x', x'' из какого-то отрезка, причем $|x' - x''| < \delta_2$, то

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и τ – разбиение отрезка $[a, b]$ такое, что $\lambda(\tau) < \delta$.

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f) \Delta x_i = \sum{}' \omega_i(f) \Delta x_i + \sum{}'' \omega_i(f) \Delta x_i,$$

где первая сумма идет по отрезкам, не имеющим общих точек с построенными интервалами, а вторая – по всем остальным. Поэтому

$$\sum{}' \omega_i(f) \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сумма длин оставшихся частей меньше, чем

$$(\delta + 2\delta_1 + \delta)k \leq \frac{\varepsilon}{4C},$$

а значит
$$\sum{}''\omega_i(f)\Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{4C}2C = \frac{\varepsilon}{2}.$$
В итоге получаем требуемое. □

Теорема 2.5.3 (Об интегрируемости монотонной функции) *Заданная и монотонная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Интегрируемость постоянной функции уже известна. Пусть функция $f(x)$ не постоянна, не убывает и $\varepsilon > 0$. Тогда положив $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ и взяв разбиение τ отрезка $[a, b]$ такое, что $\lambda(\tau) < \delta$, выполняется
$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1})) = \varepsilon.$$
Значит, согласно критерию Римана, $f \in R[a, b]$. □

Замечание 2.5.1 *Монотонная функция может иметь счетное число точек разрыва. Например,*
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 1 - \frac{1}{2^n}, & \frac{1}{2^n} \le x < \frac{1}{2^{n-1}} \end{cases}.$$

2.6 Свойства интеграла Римана. Первая теорема о среднем.

Справедливо свойство линейности интеграла.

Теорема 2.6.1 (Линейность определенного интеграла) *Пусть $f, g \in R[a, b]$, тогда*
$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx + \beta\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. То, что $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ известно из теоремы 2.4.1. Пусть $I_f = \int_a^b f(x)dx$, $I_g = \int_a^b g(x)dx$. Тогда для разбиения (τ, ξ) имеем
$$\Big|\sigma_\tau(\alpha f + \beta g, \xi) - \alpha I_f - \beta I_g\Big| \le |\alpha|\Big|\sigma_\tau(f, \xi) - I_f\Big| + |\beta|\Big|\sigma_\tau(g, \xi) - I_g\Big|.$$
Пользуясь определением интеграла Римана для I_f и I_g и интегрируемостью функции $\alpha f + \beta g$, получаем требуемое. □

Теорема 2.6.2 (Аддитивность по промежутку интегрирования) *Пусть $f \in R[a,b]$, $c \in [a,b]$, тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Доказательство. Интегрируемость функции f на промежутках $[a,c]$ и $[c,b]$ известна из теоремы 2.4.1. Пусть τ – разбиение отрезка $[a,b]$, содержащее точку c. Тогда оно порождает разбиения τ_1 отрезка $[a,c]$ и τ_2 отрезка $[c,b]$, причем $\lambda(\tau_1) \leq \lambda(\tau)$ и $\lambda(\tau_2) \leq \lambda(\tau)$. Так как

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

и при $\lambda(\tau) \to 0$ одновременно $\lambda(\tau_1) \to 0$ и $\lambda(\tau_2) \to 0$, то получаем требуемое. $\square$

Следствие 2.6.3 *Пусть $f \in R(\min(a,b,c), \max(a,b,c))$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Доказательство моментально следует из предыдущей теоремы и соглашений о том, что

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0, \int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

$\square$

Следующее свойство интеграла часто называют его монотонностью.

Теорема 2.6.4 (Монотонность интеграла) *Пусть $a \leq b$, $f, g \in R[a,b]$, причем $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a,b]$, тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Для интегральных сумм справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\lambda(\tau) \to 0$, получается требуемое. $\square$

Следствие 2.6.5 *Пусть* $a \le b$, $f \in R[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, *тогда*

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Замечание 2.6.1 *В теореме о монотонности интеграла из строгого неравенства* $f(x) < g(x)$ *на* $[a,b]$ *следует строгое неравенство между интегралами:* $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$. *Доказательство этого факта значительно сложнее (попытайтесь!)*

Теорема 2.6.6 (Об отделимости от нуля) *Пусть* $a < b$, $f \in R[a,b]$, $f \ge 0$ *и существует точка* $x_0 \in [a,b]$ *такая, что* $f(x_0) > 0$, *причем* f *непрерывна в* x_0. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx > 0$$

Доказательство. Так как $f(x_0) > 0$ и f непрерывна в точке x_0, то существует окрестность $U(x_0)$, что при $x \in U(x_0)$ выполняется $f(x) > f(x_0)/2$. Тогда, в силу монотонности интеграла,

$$\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_{[a,b]\cap U(x_0)} f(x)dx > \frac{f(x_0)}{2} \int\limits_{[a,b]\cap U(x_0)} dx > 0.$$

□

Теорема 2.6.7 *Пусть* $f \in R[a,b]$, *тогда*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int\limits_a^b |f(x)|dx\right|.$$

Доказательство. Интегрируемость функции $|f|$ известна из теоремы 2.4.1. Так как

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \left|\sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i\right|,$$

то переходя к пределам получается требуемое. □

Теорема 2.6.8 (Первая теорема о среднем) *Пусть* $f, g \in R[a,b]$, $g(x)$ *не меняет знак на* $[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, *тогда*

$$\exists \mu \in [m, M] : \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Кроме того, если $f(x) \in C[a,b]$, *то*

$$\exists \xi \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $g(x) \geq 0$ на отрезке $[a,b]$, тогда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \ x \in [a,b]$$

и по теореме 2.6.4

$$m \int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то в качестве μ можно взять любое число из отрезка $[m, M]$, так как из неравенства выше следует, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Если же $\int\limits_a^b g(x)dx \neq 0$, то $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$ и, поделив на этот интеграл, получается неравенство

$$m \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Положив

$$\mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx},$$

получается требуемое.
Если предположить, что $f(x) \in C[a,b]$, то по теореме Больцано-Коши для каждого $\mu \in [m, M]$ существует $\xi \in [a,b]$, что $f(\xi) = \mu$, что доказывает вторую часть утверждения. $\square$

Замечание 2.6.2 *Можно доказать, что в в условиях теоремы в предположении, что $f \in C[a,b]$, $\exists\ \xi \in (a,b)$:*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Обязательно проделайте это!

2.7 Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства

Определение 2.7.1 *Пусть $f \in R[a,b]$ и $x \in [a,b]$. Функция*

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$$

называется интегралом с переменным верхним пределом.

Ниже будут рассмотрены стандартные свойства функции $\Phi(x)$: ее непрерывность и дифференцируемость.

Теорема 2.7.1 (О непрерывности $\Phi(x)$)

$$\Phi(x) \in C[a,b].$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a,b]$, $x_0 + \Delta x \in [a,b]$. Так как функция $f \in R[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, то есть

$$|f(x)| \le C,\ x \in [a,b].$$

Тогда

$$|\Phi(x_0+\Delta x) - \Phi(x_0)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)dx\right| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(x)|dx\right| \le$$

$$\leq C\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx\right| = C|\Delta x|.$$

Значит, при $\Delta x \to 0$ выполняется $\Phi(x_0+\Delta x) \to \Phi(x_0)$, что и означает непрерывность функции $\Phi(x)$ в точке x_0. Так как x_0 – произвольная точка отрезка $[a,b]$, то утверждение доказано. □

Теорема 2.7.2 (О производной $\Phi(x)$) *$\Phi(x)$ дифференцируема в точках непрерывности функции $f(x)$, причем*

$$(\Phi(x))'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $x_0+\Delta x \in [a,b]$.

$$\left|\frac{\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)dx - f(x_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x)-f(x_0))dx\right|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда (в силу непрерывности функции $f(x)$)

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in [a,b] : \ |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть $\Delta x < \delta$, тогда

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x)-f(x_0))dx\right| \leq \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(x)-f(x_0)|dx\right| < \varepsilon\left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx\right| = \varepsilon,$$

что и означает, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)}{\Delta x} = \Phi'(x_0) = f(x_0).$$

□

Следствие 2.7.3 *Всякая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную, причем любая ее первообразная имеет вид*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx + C = \Phi(x) + C.$$

2.8 Формула Ньютона-Лейбница

Ниже приведена основная формула интегрального исчисления.

Теорема 2.8.1 (Формула Ньютона-Лейбница) *Пусть* $f \in C[a,b]$ *и* $F(x)$ *– ее первообразная. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Согласно следствию 2.7.3, любая первообразная непрерывной функции имеет вид

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx + C.$$

Так как

$$F(a) = \int\limits_a^a f(x)dx + C = C,$$

то $C = F(a)$. Положив в равенстве

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx + F(a)$$

$x = b$, получается

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx + F(a) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

□

Формула Ньютона-Лейбница справедлива и при предположении наличия первообразной у интегрируемой функции, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 2.8.2 (Усиленная формула Ньютона-Лейбница) *Пусть* $f \in R[a,b]$ *и существует* $F(x)$ *– некоторая первообразная данной функции на* $[a,b]$, *тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Положим $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ – разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \left(F(x_k) - F(x_{k-1})\right).$$

Согласно теореме Лагранжа, существует $\xi_k^n \in (x_{k-1}, x_k)$, что

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k^n)(x_k - x_{k-1}),$$

а тогда

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)\Delta x_k$$

и мы получаем интегральную сумму для функции f по отрезку $[a, b]$ с оснащенным разбиением (τ, ξ). Так как $f \in R[a, b]$ и так как при $n \to +\infty$ выполняется $\lambda(\tau) \to 0$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

С другой стороны,

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)\Delta x_k,$$

а значит

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

□

Замечание 2.8.1 *Доказанная формула Ньютона-Лейбница справедлива для любой первообразной интегрируемой функции. Ясно, что значение интеграла не зависит от выбора этой первообразной, ведь если выбрана первообразная $F(x) + C$, то*

$$F(b) - F(a) = F(b) + C - F(a) - C.$$

Оказывается, формула Ньютона-Лейбница справедлива и для обобщенных первообразных.

Теорема 2.8.3 (Обобщение формулы Ньютона-Лейбница) *Пусть $f(x) \in R[a,b]$ и $F(x)$ – обобщенная первообразная функции $f(x)$ на $[a,b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$ – точки внутри (a,b), в которых нарушено условие $F'(x) = f(x)$. Добавим к ним $\alpha_0 = a$, $\alpha_k = b$. Так как интеграл – непрерывная функция по обоим пределам, то

$$\int\limits_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_p} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\alpha_{p-1}+\varepsilon}^{\alpha_p-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(F(\alpha_p - \varepsilon) - F(\alpha_{p-1} + \varepsilon)\right) =$$

$$= F(\alpha_p) - F(\alpha_{p-1}),$$

где последнее равенство справедливо ввиду того, что F – непрерывная функция. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{p=1}^{k} \int\limits_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_p} f(x)dx = \sum_{p=1}^{k} \left(F(\alpha_p) - F(\alpha_{p-1})\right) =$$

$$= F(\alpha_k) - F(\alpha_0) = F(b) - F(a)$$

□

Замечание 2.8.2 *Не каждая интегрируемая функция имеет первообразную, и не каждая функция, имеющая первообразную, интегрируема.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

дифференцируема, а значит имеет первообразную, но $f' \notin R[-1,1]$ (в силу неограниченности).

С другой стороны, функция $f(x) = \operatorname{sign} x \in R[-1,1]$, но не имеет первообразной на этом промежутке. Она имеет обобщенную первообразную.

Обязательно придумайте пример интегрируемой функции, не имеющей даже обобщенной первообразной.

Вывод: интегрируемость и наличие первообразной - вещи разные.

2.9 Формулы замены переменной и интегрирования по частям

Теорема 2.9.1 (Формула интегрирования по частям) *Пусть u, v дифференцируемы на $[a, b]$, причем $u', v' \in R[a, b]$, тогда*

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

Доказательство. Согласно теоремам о действиях с интегрируемыми функциями, $uv' \in R[a, b]$ и $u'v \in R[a, b]$. Кроме того, $(uv)' = u'v + uv' \in R[a, b]$, а значит, по усиленной формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int\limits_a^b u'v dx + \int\limits_a^b uv' dx = \int\limits_a^b (u'v + uv')\, dx = \int\limits_a^b (uv)' dx = uv\Big|_a^b.$$

$\square$

Пример 2.9.1 *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

Пусть

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

Ясно, что $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. Пусть $n > 1$, тогда

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(x) d(-\cos(x)) = (n-1) \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n),$$

откуда

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Ясно, что тогда

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & n = 2k \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

Теорема 2.9.2 (Первый вариант формулы замены переменной) *Пусть* $f(x) \in C[a,b]$, $x = \varphi(t) : [\alpha, \beta] \to [a,b]$, $\varphi(t)$ *дифференцируема и* $\varphi'(t) \in R[\alpha, \beta]$, *тогда*

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Ясно, что интеграл от правой функции определен, так как $f(\varphi(t)) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow f(\varphi(t)) \in R[\alpha, \beta]$. По свойствам интегрируемых функций, $f(\varphi(t))\varphi'(t) \in R[\alpha, \beta]$, причем $F(\varphi(t))$ – первообразная этой функции, если $F(x)$ – первообразная $f(x)$. Тогда

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

$\square$

Пример 2.9.2 *Вычислить интеграл* $(a > 0)$

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Ясно (из геометрических соображений), что ответ таков: $\frac{\pi}{4}a^2$. *Проверим это. Сделаем замену* $x = a \sin t$. *Тогда*

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int\limits_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 t dt = a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = \frac{\pi}{4}a^2.$$

Часто теорему о замене переменной дают и в более общей форме.

Теорема 2.9.3 (Второй вариант формулы замены переменной) *Пусть* $\varphi(t)$ *дифференцируема и строго монотонна на* $[\alpha, \beta]$, *а* $f \in R[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$. *Тогда*

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Ясно, что здесь от функции φ больше требований, а от f – меньше. Мы не будем сейчас доказывать эту теорему.

2.10 Интегралы от четной, нечетной и периодической функций

Теорема 2.10.1 *Пусть $f \in R[0, a]$ и является четной. Тогда*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Доказательство. Ясно, что $f \in R[-a, a]$, так как $f(-x) = f(x)$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

В первом интеграле можно сделать замену $t = -x$, $dt = -dx$, откуда

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt,$$

значит

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

□

Теорема 2.10.2 *Пусть $f \in R[0, a]$ и является нечетной. Тогда*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.10.1 и предлагается в качестве упражнения. □

Теорема 2.10.3 *Пусть $f \in R[0, T]$ и является периодической с периодом T, тогда*

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx, \;\; a \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.10.1 и предлагается в качестве упражнения. □

2.11 Формулы Валлиса и Стирлинга

Теорема 2.11.1 (Формула Валлиса)

$$\pi = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

Доказательство. Ясно, что при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется цепочка неравенств

$$\sin^{2n+1}(x) < \sin^{2n}(x) < \sin^{2n-1}(x).$$

Обозначив

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx,$$

получим

$$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1} \Leftrightarrow \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

или

$$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

Пусть

$$x_n = \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2,$$

тогда

$$\pi < x_n < \frac{2n+1}{2n}\pi,$$

откуда и получается требуемое. □

Докажем формулу Стирлинга в простейшем варианте. В дальнейшем она будет получена куда быстрее, проще, и точнее.

Теорема 2.11.2 (Простейшая формула Стирлинга)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}.$$

Покажем, что она убывает и ограничена снизу. Так как

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2},$$

то
$$\ln\frac{x_n}{x_{n+1}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1.$$
Из геометрических соображений легко получить неравенство, что
$$\frac{1}{n+1/2}<\int\limits_n^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$
Умножив все неравенство на $(n+1/2)$, получим
$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{(n+1/2)^2}{n(n+1)}.$$
Вычтем единицу, тогда получим
$$0<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<\frac{(n+1/2)^2}{n(n+1)}-1=\frac{1}{4n(n+1)},$$
Откуда
$$\frac{x_n}{x_{n+1}}>1,$$
а значит последовательность x_n убывает. Так как она ограничена снизу (например, нулем), то она, согласно теореме Вейерштрасса, имеет предел. Обозначим его A.

Подставим в неравенства $(n+1)$, $(n+2)$, ..., $(n+k)$ и сложим, тогда получим
$$0<\ln\frac{x_n}{x_{n+k}}<\frac{1}{4n(n+1)}+\frac{1}{4(n+1)(n+2)}+...+\frac{1}{4(n+k-1)(n+k)}=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right),$$
откуда
$$1<\frac{x_n}{x_{n+k}}<e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)}.$$
Пусть $k\to+\infty$, тогда
$$1<\frac{x_n}{A}<e^{1/(4n)}$$
и значит $A\neq 0$. В итоге,
$$A<x_n<Ae^{1/(4n)},$$
а значит $x_n=A(1+o(1))$. Осталось найти A. Согласно формуле Валлиса,
$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{((2n)!!)^2}{(2n)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}(n!!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}.$$

С другой стороны,

$$\frac{x_n^2}{x_{2n}} = \sqrt{2}\frac{(n!!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2\pi}.$$

Левая же часть стремится к A. Тем самым,

$$x_n = \sqrt{2\pi}(1 + o(1)),$$

что и доказывает формулу. □

Замечание 2.11.1 *Можно доказать, что*

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\theta/12n},\ 0 < \theta < 1.$$

3 Приложения определенного интеграла

В этом разделе мы обсудим некоторые приложения теории определенного интеграла Римана к различным геометрическим и физическим задачам.

3.1 Понятие площади и ее вычисление

Понятие площади некоторых геометрических фигур известно из школьного курса геометрии. Определение площади для более широкого класса множеств «совсем строго» даваться не будет.

Замечание 3.1.1 *Пусть* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. *Как обычно,*

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Определение 3.1.1 *Отображение* $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *называется движением, если*

$$|x - y| = |U(x) - U(y)|,$$

иными словами движение сохраняет расстояния.

Определение 3.1.2 *Функция множеств (функционал)* $S : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$, *заданная на некотором множестве «квадрируемых фигур» подмножеств плоскости, называется площадью, если*

1. $S(A) \geq 0$, $A \in \mathfrak{U}$.
2. *Если* $A, B \in \mathfrak{U}$, $A \cap B = \varnothing$, *то* $A \cup B \in \mathfrak{U}$ *и*

$$S(A \cup B) = S(A) + S(B).$$

3. *Площадь прямоугольника со сторонами a, b равна ab.*

4. *Если $A \in \mathfrak{U}$, U – движение, то $U(A) \in \mathfrak{U}$ и*
$$S(U(A)) = S(A).$$

Замечание 3.1.2 *Множество квадрируемых фигур мы не определяем. То, что некоторая фигура имеет площадь здесь и далее принимается на веру до обсуждений теории меры.*

Лемма 3.1.1 (Свойства площади) *Пусть $S : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ – площадь. Тогда:*

1. *Площадь монотонна, то есть если $A, B \in \mathfrak{U}$, $A \subset B$, то*
$$S(A) \leq S(B).$$

2. *Пусть $A \in \mathfrak{U}$ содержится в некотором отрезке. Тогда $S(A) = 0$.*

3. *Если множества $A, B \in \mathfrak{U}$ пересекаются по множеству нулевой площади, то*
$$S(A \cup B) = S(A) + S(B).$$

Доказательство. 1. $B = A \cup (B \setminus A)$, причем $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. Тогда, предполагая квадрируемость $(B \setminus A)$,
$$S(A \cup (B \setminus A)) = S(A) + S(B \setminus A) \geq S(A).$$

2. A можно поместить в прямоугольник площади меньше, чем любое наперед заданное $\varepsilon > 0$. Тогда
$$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq S(A) < \varepsilon \Rightarrow S(A) = 0.$$

3. Пусть $C = A \cap B$.
$$S(A) = S(A \setminus C) + S(C) = S(A \setminus B)$$
$$S(A \cup B) = S(A \setminus C) + S(B) = S(A) + S(B).$$

□

3.1.1 Площадь в декартовых координатах

Определение 3.1.3 *Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Множество*

$$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

называется подграфиком функции f. Если функция f непрерывна, то подграфик еще называют криволинейной трапецией.

Предположим, что $f \in R[a,b]$ и подграфик данной функции имеет площадь. Пусть τ – разбиение отрезка $[a,b]$. Геометрически очевидно, что

$$s_\tau \leq S(G_f) \leq S_\tau.$$

Поскольку $S(G_f)$ – число, не зависящее от τ, а $f \in R[a,b]$, то при $\lambda(\tau) \to 0$ выполняется $S_\tau - s_\tau \to 0$, значит при всех τ неравенству

$$s_\tau \leq S(G_f) \leq S_\tau$$

удовлетворяет только одно число

$$S(G_f) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Данная формула допускает некоторое обобщение.

Теорема 3.1.1 *Пусть $f, g \in R[a,b]$, $f \leq g$, тогда площадь фигуры $S(G_{f,g})$*

$$G_{f,g} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

вычисляется по формуле

$$S(G_{f,g}) = \int\limits_a^b (g-f)dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перенести фигуру выше оси абсцисс, добавив к f и g такую постоянную c, чтобы $f + c \geq 0$. Тогда

$$S(G_{f,g}) = S(G_{f+c,g+c}) = S(G_{g+c}) - S(G_{f+c}) =$$

$$= \int\limits_a^b (g+c)dx - \int\limits_a^b (f+c)dx = \int\limits_a^b (g-f)dx.$$

□

Пусть теперь функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

Тогда площадь подграфика находится как

$$S(G_f) = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$

В случае замкнутой кривой верна

Теорема 3.1.2 *Пусть фигура G ограничена замкнутой кривой, заданной параметрически $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Функции $x(t)$, $y(t)$ – непрерывно дифференцируемы. Тогда*

$$S(G) = \pm \int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt = \mp \int\limits_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt,$$

где знак перед интегралом определяется в зависимости от направления обхода кривой. Точнее, верхний знак соответствует обходу кривой по часовой стрелке.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим случай, когда G выпукла и граница обходится по часовой стрелке. Пусть $x \in [a, b]$ и $x(\alpha) = x(\beta) = a$, $x(\gamma) = b$. Тогда, пользуясь аддитивностью площади и предыдущей теоремой, получим

$$S(G) = \int\limits_\alpha^\gamma y(t)x'(t)dt - \int\limits_\beta^\gamma y(t)x'(t)dt = \int\limits_\alpha^\gamma y(t)x'(t)dt + \int\limits_\gamma^\beta y(t)x'(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$

Второй интеграл получим, меняя x и y ролями.

Если кривая имеет противоположную ориентацию, то изменятся знаки перед интегралами.

Если фигура G не выпуклая, то представим её как объединение выпуклых фигур и воспользуемся аддитивностью площади.

□

3.1.2 Площадь в полярных координатах

Выведем формулу для вычисления площади фигуры в полярных координатах.

Определение 3.1.4 *Пусть* $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi,\ f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R},\ f \geq 0$. *Множество*

$$\widetilde{G_f} = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 :\ \varphi \in [\alpha, \beta],\ 0 \leq r \leq f(\varphi)\}$$

называется подграфиком функции f *в полярных координатах. Если функция* f *непрерывна, то подграфик еще называется криволинейным сектором.*

Предположим, что $f \in R[\alpha, \beta]$ и подграфик данной функции в полярных координатах имеет площадь. Пусть $\tau = \{\varphi_k\}_{k=0}^n$ – разбиение $[\alpha, \beta]$, $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$,

$$m_i = \inf_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi),\ M_i = \sup_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi).$$

Воспользовавшись тем, что площадь сектора радиусом r и углом φ равна $\frac{1}{2}r^2\varphi$, составим суммы

$$s_\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2 \Delta\varphi_i,\ S_\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Геометрически очевидно, что

$$s_\tau \leq S(\widetilde{G_f}) \leq S_\tau.$$

Кроме того, s_τ и S_τ – суммы Дарбу функции $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$. Так как эта функция интегрируема, то при $\lambda(\tau) \to 0$ выполняется $S_\tau - s_\tau \to 0$, а значит

$$S(\widetilde{G_f}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2 d\varphi.$$

3.2 Понятие объема и его вычисление

Под словом тело всюду понимается подмножество пространства $\mathbb{R}^3$.

Определение 3.2.1 *Функция множеств (функционал)* $V : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$, *заданная на некотором множестве «кубируемых фигур» подмножеств пространства* $\mathbb{R}^3$, *называется объемом, если*

1. $V(A) \geq 0,\ A \in \mathfrak{U}$.

2. *Если* $A, B \in \mathfrak{U}$, $A \cap B = \varnothing$, *то* $A \cup B \in \mathfrak{U}$ *и*
$$V(A \cup B) = V(A) + V(B).$$

3. *Объем параллелепипеда со сторонами* a, b, c *равна* abc.

4. *Если* $A \in \mathfrak{U}$, U *– движение, то* $U(A) \in \mathfrak{U}$ *и*
$$V(U(A)) = V(A).$$

Замечание 3.2.1 *Множество кубируемых фигур мы не определяем. То, что некоторое тело имеет объем здесь и далее принимается на веру до обсуждений теории меры.*

Лемма 3.2.1 (Свойства объема) *Пусть* $V : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ *– объем. Тогда:*

1. *Объем монотонен, то есть если* $A, B \in \mathfrak{U}$, $A \subset B$, *то*
$$V(A) \leq V(B).$$

2. *Пусть* $A \in \mathfrak{U}$ *содержится в некотором прямоугольнике. Тогда* $V(A) = 0$.

3. *Если множества* $A, B \in \mathfrak{U}$ *пересекаются по множеству нулевого объема, то*
$$V(A \cup B) = V(A) + V(B).$$

Определение 3.2.2 (Сечение) *Пусть* T *– тело,* $x \in \mathbb{R}$. *Множество*
$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in T\}$$
называется сечением тела T *первой координатой* x.

3.2.1 Вычисление объемов

Далее будем полагать, что тело T удовлетворяет следующим условиям:

1. $\exists\, [a, b] : \ T(x) = \varnothing, \ x \notin [a, b]$.

2. $\forall x \in [a, b]$ фигура $T(x)$ квадрируема с площадью $S(x)$, причем $S(x) \in C[a, b]$.

3. $\forall \Delta \subset [a, b] \ \exists\, \xi^*_\Delta, \xi^{**}_\Delta : T(\xi^*_\Delta) \subset T(x) \subset T(\xi^{**}_\Delta) \ \forall x \in \Delta$.

Пусть T имеет объем и τ – разбиение $[a,b]$. Пусть

$$m_k = \min_{\Delta_k} S(x),\ \ M_k = \max_{\Delta_k} S(x),$$

тогда

$$S(T(\xi_k^*)) = m_k, \quad S(T(\xi_k^{**})) = M_k.$$

Пусть

$$q_k = \Delta_k \times T(\xi_k^*), \quad Q_k = \Delta_k \times T(\xi_k^{**}),$$

тогда

$$q_k \subset T_k \subset Q_k, \quad T_k = \{(x,y,z) \in T :\ x \in \Delta_k\}.$$

Но тогда

$$\bigcup_{k=1}^{n} q_k \subset T \subset \bigcup_{k=1}^{n} Q_k.$$

По усиленной монотонности объема,

$$V\left(\bigcup_{k=1}^{n} q_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(q_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = s_\tau,$$

$$V\left(\bigcup_{k=1}^{n} Q_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(Q_k) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = S_\tau.$$

По монотонности объема,

$$s_\tau \le V(T) \le S_\tau.$$

Так как s_τ и S_τ – суммы Дарбу $S(x)$, а последняя интегрируема, то

$$V(T) = \int\limits_a^b S(x)dx.$$

Определение 3.2.3 (Тело вращения) *Пусть $f \in C[a,b]$, причем $f \ge 0$. Множество*

$$T_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ y^2 + z^2 \le f^2(x)\}$$

называется телом вращения, полученным вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг Ox.

Ясно, что $S(x) = \pi f^2(x)$, все условия выполнены, а значит

$$V(T_f) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

3.3 Понятие длины и ее вычисление

Определение 3.3.1 *Путем в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *называется отображение* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, *все координатные функции которого непрерывны на* $[a, b]$.

Замечание 3.3.1 *Путь* γ *задается* n *непрерывными функциями* $x_i(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$, $i = 1...n$,

$$\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)).$$

Определение 3.3.2 *Точка* $\gamma(a)$ *называется началом пути, а точка* $\gamma(b)$ *концом пути.*

Определение 3.3.3 *Если* $\gamma(a) = \gamma(b)$, *то путь называется замкнутым.*

Определение 3.3.4 *Если равенство* $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ *возможно лишь при* $t_1 = t_2$ *или* $t_1, t_2 \in \{a, b\}$, *то путь называется простым (или несамопересекающимся).*

Определение 3.3.5 *Множество* $\gamma([a, b])$, *то есть образ отрезка* $[a, b]$, *называется носителем пути.*

Замечание 3.3.2 *Разные пути могут иметь равные носители. Например, верхняя полуокружность* $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$ *является носителем как пути* $\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}),\ t \in [-1, 1]$, *так и пути* $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, \pi]$.

Определение 3.3.6 *Говорят, что* $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *– путь гладкости* m, *если* $x_i(t) \in C^m[a, b]$, $i = 1...n$. *Если* $m = 1$, *то путь часто называют просто гладким.*

Определение 3.3.7 *Если отрезок* $[a, b]$ *можно разбить точками* $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ *так, что сужение пути* $\gamma(t)$ *на каждый отрезок* $[t_{i-1}, t_i]$ *– гладкий путь, то путь называется кусочно-гладким.*

Определение 3.3.8 *Два пути* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *и* $\widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ *называются эквивалентными, если существует строго возрастающая биекция* $u : [a, b] \to [\alpha, \beta]$, *что*

$$\gamma(t) = \widetilde{\gamma}(u(t)).$$

Замечание 3.3.3 *Можно показать, что в условиях определения функция* u *непрерывна.*

Лемма 3.3.1 *Введенное отношение – отношение эквивалентности.*

Доказательство. Очевидно. □

Определение 3.3.9 *Класс эквивалентных путей называют кривой и обозначают $\{\gamma\}$, а каждый представитель класса γ – параметризация кривой.*

Ясно, что носители эквивалентных кривых совпадают.

Определение 3.3.10 $\{\gamma^-\}$ *– кривая с противоположной ориентацией, если*

$$\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t),\ t \in [a, b]$$

Определение 3.3.11 *Кривая называется гладкой (m-гладкой, кусочно-гладкой), если у нее существует гладкая (m-гладкая, кусочно-гладкая) параметризация.*

3.3.1 Вычисление длины пути

Дадим определение длины пути. Определение должно удовлетворять нескольким естественным требованиям. Во-первых, длина пути должна быть аддитивной. Во-вторых, длина пути, соединяющего точки A и B, должна быть не меньше длины отрезка AB.
Для простоты и геометрической наглядности, пусть $\gamma(t) = (x(t), y(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ – путь, τ – разбиение отрезка $[a, b]$ точками $t_0, t_1, ..., t_n$.

Определение 3.3.12 *Множество отрезков, соединяющих точки $\gamma(t_k)$ и $\gamma(t_{k-1})$, называется ломаной, вписанной в путь γ, отвечающей разбиению τ. Эту ломаную будем обозначать s_τ.*

Длина отрезка, соединяющего точки $\gamma(t_k)$ и $\gamma(t_{k-1})$, вычисляется по теореме Пифагора и равна, очевидно,

$$\sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.$$

Тогда длина $|s_\tau|$ ломаной s_τ вычисляется по формуле

$$|s_\tau| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Определение 3.3.13 *Длиной пути γ называется величина*

$$l_\gamma = \sup_\tau |s_\tau|.$$

Определение 3.3.14 *Если $l_\gamma < +\infty$, то путь γ называется спрямляемым.*

Лемма 3.3.2 *Длины эквивалентных путей равны*

Доказательство. Пусть $\gamma(t) = \widetilde{\gamma}(u(t))$, $u(t) : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ – возрастающая биекция. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{k}$ – дробление $[a, b]$, тогда $\widetilde{t}_k = u(t_k)$ – дробление $[\alpha, \beta]$.

$$s_\gamma = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |\widetilde{\gamma}(\widetilde{t}_k) - \widetilde{\gamma}(\widetilde{t}_{k-1})| = s_{\widetilde{\gamma}} < l_{\widetilde{\gamma}}.$$

Значит, $l_\gamma \leq l_{\widetilde{\gamma}}$. Меняя их местами, придем к требуемому. □

Аналогично можно показать, что длины противоположных путей равны.

Определение 3.3.15 *Длиной кривой называют длину любой ее параметризации.*

Покажем, что путь аддитивен, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3.1 *Пусть $\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$, $\gamma^1(t) : [a, c] \to \mathbb{R}$, $\gamma^2(t) : [c, b] \to \mathbb{R}$. Путь $\gamma(t)$ спрямляем тогда и только тогда, когда спрямляемы пути $\gamma^1(t)$ и $\gamma^2(t)$, причем*

$$l_\gamma = l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть τ – разбиение $[a, b]$, содержащее точку c. Ясно, что $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 – разбиение $[a, c]$ и τ_2 – разбиение $[c, b]$. Тогда ломаная s_τ – объединение ломаных s_{τ_1} и s_{τ_2}, причем

$$|s_{\tau_1}| + |s_{\tau_2}| = |s_\tau| \leq l_\gamma.$$

Отсюда сразу следует, что каждый из путей γ^1 и γ^2 спрямляемы. Переходя в предыдущем неравенстве сначала к супремуму по τ_1, а потом по τ_2, получим

$$l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2} \leq l_\gamma.$$

Докажем достаточность и обратное неравенство. Пусть τ – разбиение отрезка $[a, b]$. Если оно не содержит точку c, то добавим ее, получив разбиение $\tau' = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 – разбиение $[a, c]$ и τ_2 – разбиение $[c, b]$. Пусть $c \in (t_{i-1}, t_i)$. Длина ломаной, отвечающей разбиению τ', могла только увеличиться, так как согласно неравенству треугольника,

$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \leq$$

$$\sqrt{(x(c) - x(t_{i-1}))^2 + (y(c) - y(t_{i-1}))^2} + \sqrt{(x(t_i) - x(c))^2 + (y(t_i) - y(c))^2}.$$

Значит,

$$|s_\tau| \leq |s_{\tau'}| = |s_{\tau_1}| + |s_{\tau_2}| \leq l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}$$

и, тем самым, кривая γ спрямляема. Переходя к супремуму в левой части неравенства по τ, получим

$$l_\gamma \le l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}.$$

Объединяя это неравенство и последнее в пункте необходимости, заключаем

$$l_\gamma = l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2},$$

и теорема полностью доказана. □

Замечание 3.3.4 *Пока что нигде не требовалась непрерывность отображения γ.*

Укажем важное достаточное условие спрямляемости кривой.

Теорема 3.3.2 *Пусть путь $\gamma \in C^1[a,b]$, тогда он спрямляем.*

Доказательство. Пусть τ – разбиение отрезка $[a,b]$,

$$|s_\tau| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

По теореме Лагранжа, найдутся точки $\xi_i, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ такие, что

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i, \ \ y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)\Delta t_i, \ \ \Delta t_i = t_i - t_{i-1},$$

откуда

$$|s_\tau| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)} \cdot \Delta t_i.$$

Пусть

$$M_x = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|, \ \ M_y = \max_{t\in[a,b]} |y'(t)|, m_x = \min_{t\in[a,b]} |x'(t)|, \ \ m_y = \min_{t\in[a,b]} |y'(t)|,$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \cdot \Delta t_i \le |s_\tau| \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \cdot \Delta t_i,$$

откуда

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \cdot (b-a) \le |s_\tau| \le \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \cdot (b-a).$$

Переходя к супремуму по τ, имеем

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \cdot (b-a) \le l_\gamma \le \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \cdot (b-a).$$

и правое неравенство дает возможность заключить, что путь спрямляем. □

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ – спрямляемая кривая. Тогда, согласно теореме, для $t \in [a,b]$ определена функция $l_\gamma(t)$, показывающая длину участка пути γ от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(t)$.

Теорема 3.3.3 *Пусть путь* $\gamma \in C^1[a,b]$, *тогда функция* $l_\gamma(t) \in C^1[a,b]$.

Доказательство. Пусть $\Delta t > 0$ и $t_0,\ t_0 + \Delta t \in [a,b]$. Согласно последнему неравенству предыдущей теоремы, сохраняя те же обозначения, на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ выполнено

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \cdot \Delta t \le l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_\gamma(t_0) \le \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \cdot \Delta t.$$

Деля на $\Delta t > 0$, получим

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \le \frac{l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_\gamma(t_0)}{\Delta t} \le \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Так как $M_x = \max\limits_{t \in [t_0, t_0 + \Delta t]} |x'(t)|$, и функция $x'(t)$ непрерывна, то

$$\lim_{\Delta t \to 0+0} M_x = x'(t_0).$$

Аналогично,

$$\lim_{\Delta t \to 0+0} m_x = x'(t_0), \lim_{\Delta t \to 0+0} M_y = y'(t_0), \lim_{\Delta t \to 0+0} m_y = y'(t_0).$$

Значит,

$$\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)} \le \lim_{\Delta t \to 0+0} \frac{l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_\gamma(t_0)}{\Delta t} \le \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}.$$

и $l'_{\gamma+}(t_0) = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}$. Аналогично рассматривается случай $\Delta t < 0$, а значит, в силу произвольности t_0,

$$l'_\gamma(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}.$$

Так как функции $x'(t)$ и $y'(t)$, согласно условию, непрерывны, то $l'_\gamma(t) \in C[a,b]$ и $l_\gamma(t) \in C^1[a,b]$. □

Следствие 3.3.4 *Пусть путь* $\gamma \in C^1[a,b]$, *тогда*

$$l_\gamma = \int\limits_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Доказательство. Так как $l'_\gamma(t) \in C[a,b]$ и $l_\gamma(a) = 0$, то по формуле Ньютона-Лейбница

$$l_\gamma(t) = l_\gamma(t) - l_\gamma(a) = \int\limits_a^t l'_\gamma(t) dt.$$

Так как $l_\gamma = l_\gamma(b)$, то

$$l_\gamma = l_\gamma(b) = \int\limits_a^b l'_\gamma(t)dt = \int\limits_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

$\square$

Все вышеизложенное относится не только к путям в $\mathbb{R}^2$, но и к путям в $\mathbb{R}^n$ для произвольных $n \in \mathbb{N}$, доказательства сохраняются.

4 Несобственный интеграл

4.1 Понятие несобственного интеграла

Определение 4.1.1 *Говорят, что функция f локально интегрируема на промежутке E, и пишут $f \in R_{loc}(E)$, если $f \in R[a,b]$ для любого $[a,b] \subset E$.*

Иными словами, локально интегрируемая функция интегрируема на любом отрезке, содержащемся в E.

Определение 4.1.2 *Пусть $f \in R_{loc}[a,b)$. Тогда символ*

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

называется несобственным интегралом от функции f по множеству $[a,b)$.

Определение 4.1.3 *Пусть $\omega \in [a,b)$. Тогда предел*

$$\lim_{\omega \to b-} \int\limits_a^\omega f(x)dx,$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется значением несобственного интеграла.

Определение 4.1.4 *Пусть $\omega \in [a,b)$. Если предел*

$$\lim_{\omega \to b-} \int\limits_a^\omega f(x)dx$$

существует в $\mathbb{R}$, то несобственный интеграл называется сходящимся. Иначе – расходящимся.

Пример 4.1.1 *Легко понять, что интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится, когда $\alpha > 1$, *и расходится иначе. Более точно,*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Аналогично,

$$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится, когда $\alpha < 1$, *и расходится иначе. Более точно,*

$$\int\limits_0^{1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

4.2 Свойства несобственного интеграла

Свойства несобственного интеграла во многом аналогичны свойствам классического интеграла Римана.

Теорема 4.2.1 (О линейности несобственного интеграла) *Пусть* $f, g \in R_{loc}[a, b)$. *Если существуют в* $\bar{\mathbb{R}}$ $\int\limits_a^b f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)dx$, *то*

$$\int\limits_a^b (f+g)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx,$$

если соответствующая операция определена в $\bar{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \to b-$ в равенстве

$$\int\limits_a^\omega (f+g)dx = \int\limits_a^\omega f(x)dx + \int\limits_a^\omega g(x)dx.$$

$\square$

Замечание 4.2.1 *Из теоремы следует, что сумма двух сходящихся интегралов сходится. Верно и такое утверждение. Если* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится, а* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *расходится, то* $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx$ *тоже расходится. При этом если оба интеграла расходятся, то сумма может как сходиться, так и расходиться (Приведите соответствующие примеры).*

Теорема 4.2.2 (Монотонность несобственного интеграла) *Пусть* $f, g \in R_{loc}[a,b)$, $f(x) \le g(x)$ *на* $[a,b)$ *и существуют в* $\bar{\mathbb{R}}$ *оба интеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)dx$*. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \to b-$ в неравенстве

$$\int\limits_a^\omega f(x)dx \le \int\limits_a^\omega g(x)dx.$$

□

Теорема 4.2.3 (Об аддитивности по промежутку) *Пусть* $f \in R_{loc}[a,b)$*. Тогда для любого* $c \in (a,b)$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

причем интегралы

$$\int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad \int\limits_c^b f(x)dx$$

существуют в $\bar{\mathbb{R}}$ *или нет одновременно.*

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \to b-$ в равенстве

$$\int\limits_a^\omega f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^\omega f(x)dx.$$

□

Замечание 4.2.2 *Из теоремы следует, что при любом $c \in (a,b)$ сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ равносильна сходимости интеграла $\int\limits_c^b f(x)dx$. Последний интеграл часто называют* ***хвостом*** *или* ***остатком*** *первого интеграла.*

Теорема 4.2.4 (Формула интегрирования по частям) *Пусть u, v дифференцируемы на $[a,b)$ и $u', v' \in R_{loc}[a,b)$. Тогда*

$$\int\limits_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vu'dx,$$

причем последнее равенство справедливо тогда и только тогда, когда существует хотя бы два предела из трех.

Здесь используется короткая запись:

$$uv\Big|_a^b = \lim_{\omega\to b-0} uv\Big|_a^\omega = \lim_{\omega\to b-0} u(\omega)v(\omega) - u(a)v(a).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \to b-$ в равенстве

$$\int\limits_a^w uv'dx = uv\Big|_a^w - \int\limits_a^w vu'dx.$$

$\square$

Теорема 4.2.5 (Формула замены переменной) *Пусть $x = \varphi(t) : [\alpha,\beta) \to [a,b)$ дифференцируема на $[\alpha,\beta)$, причем $\varphi'(t) \in R_{loc}[\alpha,\beta)$, $f \in C[a,b)$ и существует $\varphi(\beta-) \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда*

$$I_1 = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)dx = I_2,$$

причем если существует один интеграл (в $\overline{\mathbb{R}}$), то существует и другой.

Доказательство. 1) Пусть существует $I_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Для $\omega \in (\alpha,\beta)$, пользуясь формулой замены переменной для определенного (собственного) интеграла, имеем

$$I_1 = \lim_{\omega\to\beta-} \int\limits_\alpha^\omega f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \lim_{\omega\to\beta-} \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(\omega)} f(x)dx = I_2.$$

2) Пусть теперь существует $I_1 \in \overline{\mathbb{R}}$. Докажем существование интеграла I_2.

Если $\varphi(\beta-) \in \mathbb{R}$, то интеграл существует, как собственный. Равенство же справедливо из доказанного первого пункта.

Пусть теперь $\varphi(\beta-) = b$. Возьмем произвольную последовательность $x_n \in [a, b)$, причем $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$. Будем считать, что $x_n \in [\varphi(\alpha), b)$. Тогда, по теореме Больцано–Коши, найдутся точки $\gamma_n \in [\alpha, \beta)$ такие, что $\varphi(\gamma_n) = x_n$.

Покажем, что $\gamma_n \to \beta-$. От противного, пусть выполнено отрицание определения предела:

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall n_0 \, \exists n \geq n_0 : \ \gamma_n \in [\alpha, \beta - \varepsilon].$$

Тогда для указанных ε и n имеем $\varphi(\gamma_n) \leq \max\limits_{[\alpha,\gamma]} \varphi = b' < b$, что противоречит тому, что $\varphi(\gamma_n) = x_n \to b - 0$.

Значит $\gamma_n \to \beta-$ и

$$I_2 = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{x_n} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\alpha}^{\gamma_n} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = I_1.$$

$\square$

4.3 Признаки сходимости интегралов от функций, сохраняющих знак

В этом пункте будем считать, что рассматриваемые функции не меняют знак. Всюду мы будем пользоваться следующей теоремой.

Теорема 4.3.1 *Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $f \geq 0$. Тогда функция*

$$F(\omega) = \int\limits_a^{\omega} f(x)dx, \ \omega \in [a, b)$$

не убывает, а сходимость интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

равносильна ограниченности функции $F(\omega)$.

Доказательство. Ясно, что если $a \le \omega_1 \le \omega_2 < b$, то, так как

$$\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx \ge 0,$$

то

$$\int\limits_{a}^{\omega_2} f(x)dx = \int\limits_{a}^{\omega_1} f(x)dx + \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx \ge \int\limits_{a}^{\omega_1} f(x)dx,$$

откуда $F(\omega_2) \ge F(\omega_1)$, а значит $F(\omega)$ не убывает. Тогда сходимость несобственного интеграла, то есть существование конечного предела, по теореме Вейерштрасса равносильна ограниченности $F(\omega)$. $\square$

Теорема 4.3.2 (Признаки сравнения) *Пусть $f, g \in R_{loc}[a, b)$ и $0 \le f(x) \le g(x)$ при $x \in [a, b)$. Тогда*

1. *Если сходится $\int\limits_a^b g(x)dx$, то сходится и $\int\limits_a^b f(x)dx$.*
2. *Если расходится $\int\limits_a^b f(x)dx$, то расходится и $\int\limits_a^b g(x)dx$.*
3. *Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-$, то интегралы*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \text{ и } \int\limits_a^b g(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Согласно предыдущей теореме,

$$F(\omega) = \int\limits_a^{\omega} f(x)dx$$

не убывает с ростом ω. По свойствам интеграла Римана, а также используя теорему Вейерштрасса, при каждом $\omega \in [a, b)$,

$$F(\omega) = \int\limits_a^{\omega} f(x)dx \le \int\limits_a^{\omega} g(x)dx \le \sup_{\omega \in [a,b)} \int\limits_a^{\omega} g(x)dx = \int\limits_a^{b} g(x)dx < +\infty,$$

где последнее неравенство справедливо, исходя из условия (несобственный интеграл сходится). Но тогда $F(\omega)$ ограничена, а значит, по предыдущей теореме, интеграл сходится.
2. Второй пункт легко доказываться от противного. Если предположить, что интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, то, по только что доказанному первому пункту, сходится и $\int\limits_a^b f(x)dx$,что противоречит условию.

3. Согласно определению, $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-$ означает, что существует $\alpha(x)$, что

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \quad \lim_{x\to b-} \alpha(x) = 1.$$

Тогда существует $\Delta > a$, что при $x \in [\Delta, b)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} \leq \alpha(x) \leq \frac{3}{2},$$

откуда, при $x \in [\Delta, b)$

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x).$$

Кроме того, сходимость интегралов

$$\int\limits_a^b f(x)dx, \int\limits_a^b g(x)dx$$

равносильна сходимости интегралов

$$\int\limits_\Delta^b f(x)dx, \int\limits_\Delta^b g(x)dx.$$

Для последних же рассуждения проводятся с использованием пунктов 1 и 2 данной теоремы, опираясь на неравенство

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x).$$

Скажем, если сходится интеграл от $g(x)$, то, используя правое неравенство, сходится и интеграл от $f(x)$. Если же расходится интеграл от f, то, опять же, по правому неравенству, расходится и интеграл от g. Аналогичные рассуждения относительно левого неравенства завершают доказательство. □

Пример 4.3.1 *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^7}}dx.$$

Ясно, что у этого интеграла особенность на верхнем пределе – это $+\infty$. Для исследования интеграла на сходимость вовсе не обязательно его вычислять. Заметим, что функция под интегралом положительна и упростим подынтегральную функцию при $x \to +\infty$:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^7}} = \frac{x}{x^{7/3}\sqrt[3]{1/x^7+1}} \sim \frac{x}{x^{7/3}} = \frac{1}{x^{4/3}},\ x \to +\infty.$$

Так как интеграл

$$\int^{+\infty} \frac{dx}{x^{4/3}}$$

сходится, то, по 3 пункту теоремы сравнения, сходится и исходный интеграл.

Пример 4.3.2 *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

На первый взгляд может показаться, что у данного интеграла две особенности: в точках 0 и $+\infty$, но это не так. В окрестности нуля функция ограничена и интеграл может рассматриваться, как собственный. Значит, осталось выяснить поведение интеграла на $+\infty$. Перепишем интеграл в виде

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \int\limits_0^{1} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

и исследуем на сходимость второй. Функция под интегралом неотрицательна, можно пользоваться сформулированными теоремами. Так как

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2},$$

а интеграл от последней функции по $[1, +\infty)$ сходится, то сходится и исходный интеграл.

Замечание 4.3.1 *Отметим важный момент: из сходимости интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *не следует, что* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *даже в случае, когда* $f \geq 0$ *и* $f \in C[0, +\infty)$.

Пусть

$$E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(k - \frac{1}{k^2(k+1)}, k + \frac{1}{k^2(k+1)}\right).$$

положим $f(x) = 0$ *при* $x \in [0, +\infty)$, $x \notin E$. *Кроме того, пусть*

$$f(k) = k,\ f\left(k \pm \frac{1}{k^2(k+1)}\right) = 0$$

и f *линейна на*

$$\left(k - \frac{1}{k^2(k+1)}, k\right) \ \text{и}\ \left(k, k + \frac{1}{k^2(k+1)}\right).$$

Ясно, что такая функция непрерывна и неотрицательна на $x \in [0, +\infty)$. *Кроме того, если* $N \in \mathbb{N}$, *то*

$$\int\limits_0^{N+1/2} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{k-\frac{1}{k^2(k+1)}}^{k-\frac{1}{k^2(k+1)}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$$

Из последнего следует (ввиду монотонности интеграла от неотрицательной функции), что сходится и $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$. *В то же время, очевидно,* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *не выполнено. Кроме того,* $f(x)$ *оказывается не ограниченной.*

4.4 Критерий Коши

Так как несобственный интеграл – это предел, то, как обычно, справедлив так называемый критерий Коши сходимости интеграла.

Теорема 4.4.1 (Критерий Коши) *Пусть* $f \in R_{loc}[a,b)$. *Для сходимости интеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta \in (a,b):\ \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow \left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим

$$F(\omega) = \int\limits_a^{\omega} f(x)dx.$$

Согласно определению, сходимость интеграла равносильна существованию предела функции $F(\omega)$ при $\omega \to b - 0$. Согласно критерию Коши существования предела функции это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta \in (a,b):\ \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow |F(\delta_2) - F(\delta_1)| < \varepsilon.$$

Последнее же неравенство, в силу свойств интеграла, переписывается, как

$$|F(\delta_2) - F(\delta_1)| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon,$$

откуда и следует требуемое. □

4.5 Абсолютная и условная сходимости интеграла

Если функция не сохраняет знак вблизи особой точки, то выделяют дополнительный тип сходимости.

Определение 4.5.1 *Пусть* $f \in R_{loc}[a,b)$. *Говорят, что несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится абсолютно, если сходится интеграл* $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Как связаны абсолютная сходимость и сходимость интеграла?

Теорема 4.5.1 *Пусть* $f \in R_{loc}[a, b)$. *Если интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как интеграл сходится асбсолютно, то, согласно критерию Коши,

$$\exists \Delta : \ \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow \left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon.$$

Но согласно свойствам интеграла,

$$\left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| \leq \left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon,$$

а значит, по критерию Коши, интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится. □

Замечание 4.5.1 *При исследовании интеграла на абсолютную сходимость можно пользоваться доказанными ранее признаками сходимости интегралов от знакопостоянных функций.*

Определение 4.5.2 *Пусть* $f \in R_{loc}[a, b)$. *Если интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится, но абсолютной сходимости нет (то есть он не сходится абсолютно), то говорят, что интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится условно (или неабсолютно).*

Пример 4.5.1 *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Так как

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2},$$

а последний интеграл сходится, то исходный интеграл сходится абсолютно, а значит и просто сходится.

Пример 4.5.2 *Часто оказывается, что интеграл сходится лишь условно. Исследуем на сходимость интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Во-первых, он сходится. Интегрируя по частям ($dv = \sin x dx$), получим

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\cos 1 - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Последний интеграл, как мы только что показали, сходится.

Покажем, что абсолютной сходимости нет. Воспользуемся критерием Коши (его отрицанием):

$$\exists\ \varepsilon > 0 : \ \forall \Delta \in (a, b)\ \exists \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) : \left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) dx \right| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta_1 = \pi n$, $\delta_2 = 2\pi n$, $\delta_i \to +\infty$, тогда

$$\int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{1}{2\pi n} \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x| dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi}.$$

Последнее равенство показывает, что абсолютной сходимости у интеграла нет. Значит, исходный интеграл сходится, но лишь условно.

Замечание 4.5.2 *Расходимость последнего интеграла можно установить и следующим образом. Ясно, что*

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x},$$

причем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx,$$

где последний интеграл сходится (доказывается интегрированием по частям), а первый, очевидно, расходится. Значит и исходный интеграл расходится.

На практике часто бывает полезна ещё такая теорема.

Теорема 4.5.2 *Пусть* $f, g, h \in R_{loc}[a, b)$, *причем*

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

Если интеграл $\int\limits_a^b h(x)dx$ *сходится абсолютно, то интегралы* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *ведут себя одинаково (одновременно либо расходятся, либо сходятся абсолютно, либо условно).*

Доказательство. Пусть интеграл от g сходится абсолютно. Тогда, так как $|f| \leq |g| + |h|$, абсолютно сходится и интеграл от f. Наоборот, если сходится абсолютно интеграл от f, то, так как $g = f - h$ и $|g| \leq |f| + |h|$, абсолютно сходится и интеграл от g.

Пусть интеграл от g сходится условно. Тогда интеграл от f сходится. Если бы он сходился абсолютно, то по пред. пункту, абсолютно бы сходился и интеграл от g. Значит, он сходится условно. Аналогично разбираются и остальные случаи. $\square$

4.6 Признак Абеля–Дирихле

Рассмотрим признак, позволяющий устанавливать сходимость интеграла от произведения двух функций.

Теорема 4.6.1 (Признак Абеля-Дирихле) *Пусть* $f \in C[a, b)$, $g \in C^1[a, b)$. *Тогда для сходимости интеграла* $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ *достаточно, чтобы выполнялась любая из двух пар условий:*

1. *Функция* $F(\omega) = \int\limits_a^\omega f(x)dx$ *ограничена на* $[a, b)$.
2. $g(x) \to 0$ *при* $x \to b - 0$ *и* g *монотонна,*

или

1. *Интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится.*
2. $g(x)$ *ограничена на* $[a, b)$ *и монотонна.*

Формулировка теоремы с первой парой условий иногда называют признаком Дирихле, а со второй – признаком Абеля.

Доказательство. 1) Пусть $F(\omega) = \int\limits_a^\omega f(x)dx$ и выполнена первая пара условий. Воспользуемся критерием Коши. Рассмотрим

$$\left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)dF(x)\right| = \left|F(\delta_2)g(\delta_2)-F(\delta_1)g(\delta_1)-\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} F(x)g'(x)dx\right| \leq$$

применим неравенство треугольника для модуля и воспользуемся ограниченностью $F(\omega)$: $|F(\omega)| \leq C$:

$$\leq \left|F(\delta_2)g(\delta_2)\right| + \left|F(\delta_1)g(\delta_1)\right| + \left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} F(x)g'(x)dx\right| \leq$$

оценим модуль интеграла интегралом от модуля

$$\leq C\Big(|g(\delta_1)| + |g(\delta_2)|\Big) + C\left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |g'(x)|dx\right|$$

заметим, что в силу монотонности $g(x)$ $g'(x)$ одного знака, а значит $\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |g'(x)|dx = \pm(g(\delta_2)-g(\delta_1))$. Воспользуемся неравенством треугольника еще раз и получим

$$\left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)g(x)dx\right| \leq 2C\Big(|g(\delta_1)| + |g(\delta_2)|\Big).$$

Так как $g(x) \to 0$ при $x \to b-$, то по любому $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что $\forall x \in \dot{U}_\delta^-(b)$ $|g(x)| < \varepsilon/4C$, и

$$\left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)g(x)dx\right| < \varepsilon,$$

что и означает сходимость интеграла.

2) Так как g монотонна и ограничена, то $\exists \lim\limits_{x\to b-} g(x) = A$. Введем функцию $h(x) = g(x) - A$, $h(x) \to 0$ при $x \to b-$ и $h(x)$ монотонна. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)h(x)dx + A\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Первый интеграл сходится по п.1), а второй по условию. Следовательно, исходный интеграл сходится. □

Замечание 4.6.1 *Можно ослабить условия на функции f и g в первой строке Теоремы, оставив только $f \in R_{loc}[a,b)$. Доказательство будет сложнее (требуется преобразование Абеля и вторая теорема о среднем).*

Пример 4.6.1 *Исследовать на абсолютную и условную сходимости*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что если $\alpha > 1$, то интеграл сходится абсолютно, ведь

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha},$$

а интеграл от последней функции по промежутку $[1, +\infty)$ при $\alpha > 1$ сходится.

Если $\alpha \leq 0$, то интеграл расходится, так как

$$\left| \int\limits_{2\pi n}^{\pi/4+2\pi n} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| \geq (2\pi n)^{-\alpha} \int\limits_{2\pi n}^{\pi/4+2\pi n} \sin x dx = (1 - \sqrt{2}/2)(2\pi n)^{-\alpha},$$

где последняя величина не стремится к нулю с ростом n.

Если $\alpha \in (0, 1]$, то интеграл сходится по признаку Абеля–Дирихле, так как

$$|F(\omega)| = \left| \int\limits_1^\omega \sin x dx \right| = |\cos\omega - \cos 1| \leq 2$$

и $1/x^\alpha$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. С другой стороны,

$$\left| \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \right| \geq \frac{1}{(2\pi n)^\alpha} \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x| dx = \frac{n}{(2\pi n)^\alpha} 2 = C \cdot n^{1-\alpha},$$

где последнее выражение к нулю не стремится. Значит, абсолютной сходимости нет и интеграл при $\alpha \in (0, 1]$ сходится условно.

Пример 4.6.2 *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Найдем асимптотику подынтегральной функции вблизи особой точки.

$$\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^3}{3!} + o\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^3.$$

Тогда

$$\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{x} - \frac{\frac{\sin^3 x}{x^2}}{3!} + o\left(\frac{\sin^3 x}{x^2}\right).$$

Ясно, что интеграл от функции $\frac{\frac{\sin^3 x}{x^2}}{3!} + o\left(\frac{\sin^3 x}{x^2}\right) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ *сходится абсолютно. Значит, достаточно исследовать интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Как известно, он сходится условно. Значит, исходный интеграл сходится условно.

Пример 4.6.3 *Отказаться от условия монотонности в признаке Абеля-Дирихле нельзя.*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx.$$

Если (неверно) использовать признак, то

$$|F(\omega)| = \left|\int\limits_1^{\omega} \sin x dx\right| \leq 2,$$

а $(\sqrt{x} - \sin x)^{-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, *но не монотонно. Откуда можно сделать неверный вывод, что интеграл сходится (условно).*

В то же время,

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sin x}{1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sin x\left(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Интеграл же от $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x}$ *расходится, так как интеграл от первой функции сходится, а от второй расходится (по доказанному ранее).*

4.7 Интегралы с несколькими особенностями

До сих пор особенность у нас была лишь на одном конце промежутка интегрирования. Обобщим.

Определение 4.7.1 *Пусть* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *и* $f \in R_{loc}(a,b)$. *Тогда полагают*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\omega_1 \to a+0} \int\limits_{\omega_1}^c f(x)dx + \lim_{\omega_2 \to b-0} \int\limits_c^{\omega_2} f(x)dx,$$

если оба предела существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ *и не равны бесконечностям разных знаков. При этом интеграл называется сходящимся, если, как и ранее, его значение принадлежит* $\mathbb{R}$ *(то есть оба интеграла справа сходятся).*

Замечание 4.7.1 *Ясно, что определение не зависит от выбора точки* c.

Пусть теперь $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и f задана на (a,b) за исключением не более чем конечного числа точек.

Определение 4.7.2 *Точка* $c \in (a,b)$ *называется особой точкой функции* f, *если*

$$\forall A, B: \ a < A < c < B < b \Rightarrow f \notin R[A,B].$$

Точка a *называется особой, если либо* $a = -\infty$, *либо* $f \notin R[a,B]$ *для любых* $a < B < b$. *Аналогично определяется особая точка* b.

Пусть число особых точек конечно и $c_1 < ... < c_{n-1}$ – особые точки внутри (a,b). Добавим $c_0 = a$ и $c_n = b$. Можно показать, что $f \in R_{loc}(c_{i-1}, c_i)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx,$$

и интеграл слева называется сходящимся, если все интегралы справа сходятся.

4.8 Интеграл в смысле главного значения

Определение 4.8.1 (Особенность в конченой точке) *Пусть* $-\infty < a < b < +\infty$, $c \in (a,b)$ *– единственная особая точка. Предел*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right),$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, *называется главным значением интеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$. *Если значение предела принадлежит* $\mathbb{R}$, *то говорят, что интеграл сходится в смысле главного значения. Обозначают*

$$v.p. \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Замечание 4.8.1 *Если интеграл сходится, то он сходится и в смысле главного значения, но не наоборот.*

Пример 4.8.1 *Рассмотрим* $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$. *Ясно, что в классическом смысле он расходится, но*

$$v.p. \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int\limits_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\ln \varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln \varepsilon) = 0.$$

Определение 4.8.2 (Особенность в бесконечной точке) *Пусть* $f \in R_{loc}(\mathbb{R})$. *Интегралом в смысле главного значения по* $\mathbb{R}$ *называется предел*

$$\lim_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx,$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$. *Если значение предела принадлежит* $\mathbb{R}$, *то говорят, что интеграл сходится в смысле главного значения. Обозначают*

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Замечание 4.8.2 *Если интеграл сходится, то он сходится и в смысле главного значения, но не наоборот.*

Пример 4.8.2 *Рассмотрим* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx$. *Ясно, что в классическом смысле он расходится, но*

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} xdx = 0.$$

В случае нескольких особенностей можно поступать по-разному. Останавливаться на этом не будем.

4.9 Интеграл Эйлера-Пуассона, неравенста Гельдера и Минковского

Вычислим так называемый интеграл Эйлера-Пуассона.

Теорема 4.9.1

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Доказательство. Легко проверить, что при $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$e^x \geq 1 + x.$$

Тогда

$$(1 - x^2) \leq e^{-x^2} = (e^{x^2})^{-1} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Будем рассматривать первое неравенство при $x \in [-1, 1]$, а последнее при $x \in \mathbb{R}$, тогда при $k \in \mathbb{N}$

$$(1 - x^2)^k \leq e^{-kx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^k},$$

а значит

$$\int\limits_{-1}^{1}(1 - x^2)^k dx \leq \int\limits_{-1}^{1} e^{-kx^2}dx \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2}dx \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^k}.$$

Сделаем в первом интеграле замену $x = \sin t$, а в последнем $x = \operatorname{tg} t$. Тогда придем к неравенству

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2k+1} t dt \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2}dx \leq \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2k-2} t dt,$$

откуда, в силу четности косинуса,

$$2\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^{2k+1} t dt \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2}dx \leq 2\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^{2k-2} t dt.$$

Так как, как было вычислено ранее (и в чем легко убедиться),

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^n x dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & n = 2k \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n = 2k-1 \end{cases},$$

то приходим к цепочке неравенств

$$2\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2}dx \leq 2\frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}\frac{\pi}{2}.$$

Сделаем в интеграле замену $t=\sqrt{k}x$ и придем к неравенству

$$2\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt \leq \pi\frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}$$

или

$$2\sqrt{k}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt \leq \pi\sqrt{k}\frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}.$$

По формуле Валлиса,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}.$$

Тогда

$$2\sqrt{k}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{2\sqrt{k}}{(2k+1)}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sqrt{\pi}$$

и

$$\pi\sqrt{k}\frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} = \pi\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}}\frac{2k}{2k-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sqrt{\pi}.$$

Теперь требуемое получается согласно теореме о сжатой переменной. $\square$

Теперь докажем неравенства Гельдера и Минковского в интегральной форме.

Теорема 4.9.2 (Неравенство Гельдера для определенных интегралов) *Пусть* $f,g\in R[a,b]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$, *тогда*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int\limits_a^b |f|^p dx\right)^{1/p}\left(\int\limits_a^b |g|^q dx\right)^{1/q}.$$

Доказательство. Пусть (τ,ξ) – оснащенное разбиение $[a,b]$ и $a_k = f(\xi_k)(\Delta x_k)^{1/p}$, $b_k=g(\xi_k)(\Delta x_k)^{1/q}$. Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)g(\xi_k)\Delta x_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|^p\Delta x_k\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |g(\xi_k)|^q\Delta x_k\right)^{1/q}.$$

Переходя к пределу, получим требуемое. $\square$

Теорема 4.9.3 *Пусть $f, g \in R[a, b]$, $p \geq 1$. Тогда*

$$\left(\int\limits_a^b |f+g|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int\limits_a^b |f|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^b |g|^p dx\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Предлагается в качестве упражнения. □

Замечание 4.9.1 *Неравенства Гельдера и Минковского будут верны и для несобственных интегралов при условии $f, g \in R_{loc}[a, b)$ и сходимости интегралов.*

5 Числовые ряды

5.1 Понятие ряда и его суммы

Важным примером применения теории пределов числовой последовательности является понятие числового ряда.

Определение 5.1.1 *Пусть дана последовательность a_n. Символ*

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется числовым рядом, последовательность a_n – общим членом ряда.

Определение 5.1.2 *Последовательность S_k: сумма первых k членов ряда*

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

называется частичной суммой ряда, а её предел, если он существует в $\bar{\mathbb{R}}$, называется суммой ряда:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k.$$

Если последовательность S_k сходится, то ряд называется сходящимся, иначе – расходящимся. Разность $R_k = S - S_k$ называется остатком ряда.

Пример 5.1.1 *1. $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ сходится и его сумма равна 0.*

2. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ – *геометрическая прогрессия. Сходится, если* $|q| < 1$, *и его сумма равна* $\frac{1}{1-q}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. *Рассмотрим частичную сумму*

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1,$$

следовательно, ряд сходится, и его сумма равна 1.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ *расходится, т.к. последовательность частичных сумм состоит из чередующихся* 0 *и* -1.

Замечание 5.1.1 *Изменение, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.*

Лемма. Ряд сходится тогда и только тогда, когда его остаток стремится к нулю.

► Запишем для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_k + R_k.$$

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$ равносильно тому, что $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = 0$. ◄

Теорема 5.1.1 (Критерий Коши сходимости ряда) *Для того, чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* ε *можно было найти номер* k_0 *такой, что для всех* $k \geq k_0$ *и для всех* $p \in \mathbb{N}$ *выполнялось неравенство* $\left|\sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Доказательство следует из критерия Коши для частичных сумм. □

Пример 5.1.2 *Гармонический ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Запишем

$$S_{2k} - S_{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k}\cdot k = \frac{1}{2}.$$

Это означает, что критерий Коши не выполняется и ряд расходится.

Теорема 5.1.2 (Необходимое условие сходимости ряда) *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $a_n \to 0$.

► Запишем $a_n = S_n - S_{n-1}$. Так как $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$, то $a_n \to S - S = 0$. ◄

Замечание 5.1.2 *Условие* $a_n \to 0$ *не является достаточным для сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Но если* $a_n \not\to 0$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Лемма 5.1.1 (Линейность суммирования) *Пусть сходятся ряды с общими членами* a_k *и* b_k. *Тогда при любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *сходится ряд с общим членом* $\alpha a_k + \beta b_k$, *причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим $S^A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n^A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S^B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $S_n^B = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha S_n^A + \beta S^B \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha S^A + \beta S^B,$$

что и доказывает утверждение. □

Лемма 5.1.2 (Монотонность суммирования) *Пусть* $a_k \leq b_k$ *и ряды с общими членами* a_k *и* b_k *сходятся в* $\overline{\mathbb{R}}$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим $S^A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n^A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S^B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $S_n^B = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Тогда, согласно условию,

$$S_n^A \leq S_n^B \;\Rightarrow\; \lim_{n \to +\infty} S_n^A \leq \lim_{n \to +\infty} S_n^B \;\Rightarrow\; S^A \leq S^B.$$

□

5.2 Признаки сходимости рядов с положительными членами

5.2.1 Признаки сравнения

Доказательство признаков сравнения опирается на следующую лемму.

Лемма 5.2.1 *Пусть $a_k \geq 0$. Тогда последовательность $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ не убывает и*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n.$$

Тем самым, сходимость ряда равносильна ограниченности последовательности его частичных сумм

Доказательство. Так как $a_k \geq 0$, то

$$S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n.$$

Тем самым, вопрос о наличии предела S_n сводится к вопросу ограниченности S_n (теорема Вейерштрасса). $\square$

Теорема 5.2.1 (Признаки сравнения) *Пусть $a_k, b_k \geq 0$. Тогда:*

1. *Если $0 \leq a_k \leq b_k$ и ряд с общим членом b_k сходится, то сходится и ряд с общим членом a_k.*

2. *Если $0 \leq a_k \leq b_k$ и ряд с общим членом a_k расходится, то расходится и ряд с общим членом b_k.*

3. *Если $a_k \sim b_k$ при $k \to +\infty$, то ряды с общими членами a_k и b_k сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Обозначим $S_n^A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S^B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $S_n^B = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.
1. Ясно, что в условиях теоремы

$$S_n^A \leq S_n^B \leq S^B < +\infty.$$

В силу ограниченности последовательности S_n^A, согласно доказанной лемме заключаем, что S_n^A имеет конечный предел.

2. От противного, если сходится ряд с общим членом b_k, то, по только что доказанному, сходится и ряд с общим членом a_k. Это противоречит условию.

3. Так как $a_k \sim b_k$, то $a_k = \alpha_k b_k$, где $\alpha_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$. Тогда

$$\exists k_0 : \ \forall k > k_0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}b_k \le a_k \le \frac{3}{2}b_k.$$

Дальнейшие рассуждения стандартны и остаются в качестве упражнения. □

Пример 5.2.1 *Исследовать на сходимость ряд Дирихле при* $\alpha < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Как мы уже знаем, при $\alpha = 1$ *ряд Дирихле – гармоническимй ряд, а значит он расходится. Так как при* $\alpha < 1$ *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n},$$

то, согласно признакам сравнения, при $\alpha < 1$ *ряд Дирихле расходится.*

Интересно задаться вопросом: нет ли какого-то "пограничного" ряда, с которым можно сравнить любой другой? Например, сходящегося (или расходящегося) медленнее любого другого сходящегося (расходящегося) ряда. Оказывается, что такого ряда нет. А именно, можно доказать следующие утверждения.

Лемма 5.2.2 *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, *где* $a_k > 0$ *и* $a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. *Тогда*

1. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то существует последовательность* b_k*:* $b_k > 0$, $b_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, *такая, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *расходится.*

2. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то существует последовательность* $b_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$, *что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

Доказательство. 1) Положим $b_k = \frac{1}{\sqrt{S_k}+\sqrt{S_{k-1}}}$, где $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$. Тогда (при $k \ge 2$)

$$a_k b_k = \frac{a_k}{\sqrt{S_k}+\sqrt{S_{k-1}}} = \frac{S_k - S_{k-1}}{\sqrt{S_k}+\sqrt{S_{k-1}}} = \sqrt{S_k} - \sqrt{S_{k-1}}.$$

Ясно, что ряд с таким общим членом расходится.

2) Возьмем $b_k = \frac{1}{\sqrt{R_{k-1}}} = 1/\sqrt{\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n}$, тогда

$$a_k b_k = \frac{a_k}{\sqrt{R_{k-1}}} = \frac{R_{k-1} - R_k}{\sqrt{R_{k-1}}} = \frac{(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k})(\sqrt{R_{k-1}} + \sqrt{R_k})}{\sqrt{R_{k-1}}} \leq$$

$$\leq 2(\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k}).$$

Ряд с общим членом $\sqrt{R_{k-1}} - \sqrt{R_k}$ сходится, а значит, согласно признаку сравнения, сходится и ряд $\sum\limits^{\infty} a_k b_k$. □

5.2.2 Радикальный признак Коши

Теорема 5.2.2 (Радикальный признак Коши) *Пусть $a_n \geq 0$ и*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0, +\infty].$$

Тогда

1. *Если $\ell > 1$, то ряд с общим членом a_n расходится.*
2. *Если $\ell < 1$, то ряд с общим членом a_n сходится.*

Доказательство. 1. Так как $\ell > 1$, то, начиная с некоторого n_0, выполняется

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1.$$

Отсюда следует, что a_n не стремится к нулю, а значит не выполнено необходимое условие сходимости, и ряд расходится.

2. Если $\ell < 1$, то выберем $\varepsilon = (1 - \ell)/2$. По свойству верхнего предела,

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{\ell+1}{2} < 1.$$

Из этого неравенства получаем, что при $n > n_0$ выполняется

$$a_n < \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^k$ сходится, то, по признаку сравнения, сходится и ряд

$$R_{n_0} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n,$$

а значит сходится и исходный ряд. □

Замечание 5.2.1 *В случае, когда $\ell = 1$ признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Для рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

признак Коши дает $\ell = 1$, но первый ряд расходится, а второй – сходится.

Замечание 5.2.2 *Как было показано в теореме, если признак Коши дает $\ell > 1$, это означает, что общий член не стремится к нулю. Если известно, что*

$$1 < \ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

то $a_n \to +\infty$.

Замечание 5.2.3 *Признак остается верным, если вместо предела взять верхний предел.*

5.2.3 Признак Даламбера

Теорема 5.2.3 (Признак Даламбера) *Пусть $a_n > 0$ и*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$$

Тогда

1. *Если $\ell > 1$, то ряд с общим членом a_n расходится.*
2. *Если $\ell < 1$, то ряд с общим членом a_n сходится.*

Доказательство. 1. Так как $\ell > 1$, то, начиная с некоторого номера n_0, $a_{n+1} > a_n$, а значит $a_n \geq a_{n_0+1} > 0$, то есть a_n не стремится к нулю. Это противоречит необходимому условию.

2. Если $\ell < 1$, то выберем $\varepsilon = (1-\ell)/2$. Согласно свойству предела, найдется n_0, что при $n > n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{\ell+1}{2} = q,$$

откуда $a_{n+1} < qa_n$. По индукции, при $n > n_0$ имеем $a_n \leq q^{n-n_0-1}a_{n_0+1}$. Отсюда, согласно признаку сравнения,

$$R_{n_0} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$$

сходится (больший ряд – геометрическая прогрессия, причем $|q| < 1$). Значит, сходится и исходный ряд. □

Замечание 5.2.4 *В случае, когда $\ell = 1$, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Для рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

признак Даламбера дает $\ell = 1$, но первый ряд расходится, а второй – сходится.

Замечание 5.2.5 *Как было показано в теореме, если признак Даламбера дает $\ell > 1$, это означает, что общий член ряда стремится к бесконечности.*

Замечание 5.2.6 *Признаки Коши и Даламбера – завуалированные признаки сравнения с геометрической прогрессией.*

5.2.4 Признак Куммера

Для создания произвольного числа признаков разной тонкости полезна следующая теорема.

Теорема 5.2.4 (Признак Куммера) *Пусть $a_n > 0$, $b_n > 0$ и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} \quad \text{расходится.}$$

Пусть

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} \left(b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \right),$$

тогда

1. *Если $\ell > 0$, то ряд с общим членом a_n сходится.*
2. *Если $\ell < 0$, то ряд с общим членом a_n расходится.*

Доказательство. 1. Так как $\ell > 0$, то существует n_0, что при $n > n_0$

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} > \frac{\ell}{2} > 0 \Rightarrow a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} > \frac{\ell}{2} a_{n+1} > 0.$$

В частности, $a_n b_n > a_{n+1} b_{n+1}$, а значит последовательность $a_n b_n$ убывает при $n > n_0$ и ограничена снизу, значит имеет предел. Но тогда

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=n_0+1}^{k} (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}) =$$

$$= \lim_{k\to+\infty}(a_{n_0+1}b_{n_0+1} - a_{k+1}b_{k+1}) < +\infty.$$

Значит, сходится и $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_{n+1}$, но тогда сходится и ряд с общим членом a_n.

2. Пусть $\ell < 0$. Тогда существует n_0, что при $n > n_0$

$$b_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} < 0 \Rightarrow b_n a_n - b_{n+1}a_{n+1} < 0.$$

Отсюда получаем, что $b_{n+1}a_{n+1} > b_n a_n$ и последовательность $b_n a_n$ монотонно возрастает при $n > n_0$. Значит,

$$a_n b_n \geq a_{n_0+1}b_{n_0+1} \;\Rightarrow\; a_n \geq \frac{a_{n_0+1}b_{n_0+1}}{b_n}$$

и ряд $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ расходится. □

Замечание 5.2.7 *Можно заметить, что расходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$$

использовалась только при доказательстве достаточности.

Замечание 5.2.8 *Если положить $b_n = 1$, то получится признак Даламбера.*

5.2.5 Признак Раабе

Теорема 5.2.5 (Признак Раабе) *Пусть $a_n > 0$ и*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \ell.$$

Тогда

1. *Если $\ell > 1$, то ряд с общим членом a_n сходится.*
2. *Если $\ell < 1$, то ряд с общим членом a_n расходится.*

Доказательство. Для доказательства в признаке Куммера достаточно положить $b_n = n$. Детали остаются в качестве упражнения. □

Теорема 5.2.6 (Признак Бертрана) *Пусть* $a_n > 0$ *и*

$$\lim_{n\to+\infty} \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = \ell.$$

Тогда

1. *Если* $\ell > 1$, *то ряд с общим членом* a_n *сходится.*
2. *Если* $\ell < 1$, *то ряд с общим членом* a_n *расходится.*

Доказательство. Сначала покажем, что ряд с общим членом $\frac{1}{n \ln n}$ расходится. Это следует из того, что, согласно теореме Лагранжа,

$$\ln\ln(n+2) - \ln\ln(n+1) = \frac{1}{\xi \ln \xi} \leq \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}, \quad \xi \in (n+1, n+2)$$

и того, что ряд с общим членом $\ln\ln(n+2) - \ln\ln(n+1)$ расходится, так как

$$\sum_{n=1}^{k} (\ln\ln(n+2) - \ln\ln(n+1)) = \ln\ln(k+2) - \ln\ln 2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty.$$

Положим в признаке Куммера $b_n = n \ln n$. Получим

$$n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) =$$

$$= \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) + (n+1)\ln n - (n+1)\ln(n+1) =$$
$$= \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) - (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Теперь признак Бертрана следует из того, что

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

□

5.2.6 Признак Гаусса

Теорема 5.2.7 (Признак Гаусса) *Пусть*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\gamma}} \right), \quad \gamma > 0.$$

Тогда:

1. *Если $\lambda > 1$, то ряд с общим членом a_n сходится.*
2. *Если $\lambda < 1$, то ряд с общим членом a_n расходится.*
3. *Если $\lambda = 1$ и $\mu > 1$, то ряд с общим членом a_n сходится.*
4. *Если $\lambda = 1$ и $\mu \le 1$, то ряд с общим членом a_n расходится.*

Доказательство. Доказательство опирается на ранее доказанные признаки. Первые два пункта – это признак Даламбера. Третий и четвертый пункты в случае, когда $\mu \neq 1$ – это признак Раабе. Случай $\lambda = 1$, $\mu = 1$ доказывается по признаку Бертрана. $\square$

Замечание 5.2.9 *В формулировке признака Гаусса нельзя $O\left(\frac{1}{n^{1+\gamma}}\right)$ заменить на $o\left(\frac{1}{n}\right)$.*

5.2.7 Интегральный признак Коши и асимптотика сумм

Теорема 5.2.8 (Интегральный признак Коши) *Пусть $f(x)$ монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.*

Доказательство. Пусть, скажем, f не возрастает. Тогда если $f(x_0) < 0$, то, в силу монотонности, $f(x) \le f(x_0) < 0$ при $x > x_0$, а значит $f(k)$ не стремится к 0 при $k \to +\infty$, то есть ряд с общим членом $f(k)$ расходится.

Кроме того,

$$\int\limits_{x_0}^{A} f(x)dx \le f(x_0)(A - x_0) \xrightarrow[A\to+\infty]{} -\infty,$$

а значит расходится и интеграл. В итоге, $f(x) \ge 0$. В этом случае (вспоминая, что f не возрастает) очевидно следующее неравенство

$$f(k+1) \le \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \le f(k),$$

которое влечет неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \le \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Учитывая, что функция $F(\omega) = \int\limits_1^{\omega} f(x)dx$ не убывает, для существования предела $\lim\limits_{\omega\to+\infty} F(\omega)$ достаточно (и, конечно же, необходимо) существование предела $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n+1)$ (докажите это!). Тогда утверждение теоремы легко получить предельным переходом при $n \to +\infty$. □

Пример 5.2.2 *Теперь исследование ряда с общим членом* $\frac{1}{n\ln n}$, $n \geq 2$, *не представляет труда. Согласно интегральному признаку, достаточно рассмотреть сходимость интеграла*

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}.$$

Так как интеграл, очевидно, расходится, то расходится и исследуемый ряд.

Идея, ипользованная при доказательстве интегрального признака Коши, часто помогает в исследовании асимптотики различных сумм. Докажем следующую лемму.

Лемма 5.2.3 *Пусть* $f(x) \geq 0$ *не возрастает на* $[1, +\infty)$. *Тогда последовательность*

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int\limits_1^{n+1} f(x)dx$$

имеет предел.

Доказательство. Докажем, что A_n не убывает. Действительно,

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int\limits_{n+1}^{n+2} f(x)dx \geq 0.$$

Покажем, что A_n ограничена сверху. Для этого сделаем следующее преобразование:

$$A_n = f(1) - f(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int\limits_1^{n+1} f(x)dx.$$

Так как

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k+1),$$

то, по доказанному в доказательстве интегрального признака Коши,

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \leq 0,$$

откуда

$$A_n \leq f(1) - f(n+1) \leq f(1).$$

Согласно теореме Вейерштрасса, A_n имеет предел. □

Замечание 5.2.10 *Применительно к поиску асимптотик, последняя лемма может быть использована следующим образом. Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$, *тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int\limits_1^{n+1} f(x)dx = A + \alpha_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int\limits_1^{n+1} f(x)dx + A + \alpha_n,$$

где $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Особо интересны случаи, когда ряд, стоящий слева, расходится. Тогда (при* $n \to +\infty$*)*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \int\limits_1^{n+1} f(x)dx.$$

Пример 5.2.3 *Рассмотрим гармонический ряд и найдем его асимптотику. Ясно, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x} + A + \alpha_n = \ln(n+1) + A + \alpha_n.$$

Тем самым,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n+1) \sim \ln n.$$

Определение 5.2.1 *Постоянная* A *в равенстве*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x} + A + \alpha_n = \ln(n+1) + A + \alpha_n.$$

называется постоянной Эйлера и часто обозначается γ.

Замечание 5.2.11 *Полезно отметить, что написанное равенство дает способ вычисления постоянной Эйлера с любой точностью. Так как*

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

то

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right).$$

Замечание 5.2.12 *Для сходящихся рядов похожие рассуждения позволяют оценить скорость стремления остатка ряда к нулю. Пусть $f \geq 0$ и не возрастает на $[1, +\infty)$. Тогда*

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int\limits_{n}^{\infty} f(x)dx.$$

Например,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \sim \frac{1}{(a-1)k^{a-1}}, \quad a > 1.$$

5.3 Знакопеременные ряды

Аналогично рассмотренному в интегралах, рассмотрим ряды с произвольными членами и новые типы сходимости, которые в этом случае возникают.

Определение 5.3.1 *Говорят, что ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, если сходится ряд с общим членом $|a_k|$.*

Как и ранее, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.3.1 *Если ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем n_0 такой, что

$$\forall n > n_0, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

Но тогда и

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon,$$

откуда, согласно критерию Коши делаем вывод, что ряд с общим членом a_k сходится. $\square$

Замечание 5.3.1 *При исследовании ряда на абсолютную сходимость можно пользоваться изученными ранее признаками.*

Определение 5.3.2 *Если ряд с общим членом a_k сходится, но абсолютной сходимости нет, то говорят, что ряд с общим членом a_k сходится условно (или неабсолютно).*

Для исследования знакопеременных рядов на сходимость используют признаки Абеля–Дирихле, аналогичные соответствующим интегральным признакам. Для доказательства нам потребуется аналог формулы интегрирования по частям.

Лемма 5.3.1 (Преобразование Абеля) *Пусть $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}).$$

Доказательство. Пусть $A_0 = 0$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{i=1}^{n} A_i b_i - \sum_{i=1}^{n} A_{i-1} b_i =$$

$$= A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i b_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_i b_{i+1} = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}).$$

$\square$

Теорема 5.3.2 (Признак Абеля-Дирихле) *Пусть даны последовательности a_k, b_k, причем b_k монотонна. Тогда для сходимости ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

достаточно выполнения любой из двух пар условий: либо

1. *Частичные суммы $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ограничены в совокупности, то есть $|A_n| \le C$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

2. *Последовательность* b_k *стремится к нулю, то есть* $b_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$,

либо

1. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

2. *Последовательность* b_k *ограничена, то есть* $|b_k| \le C$.

Доказательство. 1. Воспользуемся преобразованием Абеля. В обозначениях теоремы,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Так как $|A_n| \le C$, в силу второго условия $A_n b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Тогда сходимость рассматриваемого ряда равносильна сходимости ряда с общим членом $A_k(b_k - b_{k+1})$. Покажем, что такой ряд сходится абсолютно. Это следует из теоремы сравнения и следующих выкладок:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(b_k - b_{k+1})| \le C \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| = C \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| =$$

$$= C \lim_{n\to+\infty} |b_1 - b_{n+1}| = C|b_1|.$$

Итого, рассматриваемый ряд сходится.

2. Так как b_k монотонна и ограничена, то она имеет предел b. Рассмотрим последовательность $c_k = b_k - b$. Тогда для пары последовательностей a_k и c_k справедливы условия первого пункта, а значит сходится ряд с общим членом $a_k c_k$. Между тем,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k - b \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Итого, средний ряд сходится, так как сходятся два других ряда. $\square$

Пример 5.3.1 *Неабсолютно сходящиеся ряды существуют. Рассмотрим*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Легко проверить, что абсолютной сходимости нет (ряд получается гармоническим). В то же время,

$$|A_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \right| \le 1, \quad \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0, \text{ причем монотонно,}$$

а значит выполнена первая пара условий признака Абеля-Дирихле, и ряд сходится (условно).

Давайте найдем сумму этого ряда.

Лемма 5.3.2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

Доказательство.

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - H_n =$$

$$= \ln(2n) + \gamma + \alpha_{2n} - \ln n - \gamma - \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2.$$

$\square$

Пример 5.3.2 *Исследовать на абсолютную и условную сходимости ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^a}.$$

Ясно, что при $a \le 0$ ряд расходится так как его общий член не стремится к нулю.

Если $a > 1$, то

$$\left|\frac{\sin k}{k^a}\right| \le \frac{1}{k^a}$$

и, согласно признакам сравнения, исследуемый ряд сходится абсолютно.

Пусть теперь $a \in (0, 1]$. Сначала установим, что ряд сходится. Действительно,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{1}{2} \frac{\cos\frac{1}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}},$$

а значит $|A_n| \le \frac{1}{|\sin\frac{1}{2}|}$ и, так как $\frac{1}{k^a}$ монотонно стремится к нулю, то ряд сходится. Абсолютной сходимости нет, так как

$$\left|\frac{\sin k}{k^a}\right| \ge \frac{\sin^2 k}{k^a} = \frac{1 - \cos 2k}{2k^a} = \frac{1}{2k^a} - \frac{\cos 2k}{2k^a},$$

и ряд с общим членом $\frac{1}{2k^a}$ расходится, а с общим членом $\frac{\cos 2k}{2k^a}$ сходится (что доказывается аналогично только что проделанному).

Часто бывает полезна следующая теорема.

Теорема 5.3.3 (О сумме с абсолютно сходящимся рядом) *Пусть* $a_k = b_k + c_k$ *и ряд с общим членом* c_k *сходится абсолютно. Тогда ряды с общими членами* a_k *и* b_k *ведут себя одинаково (либо одновременно сходятся условно, либо абсолютно, либо расходятся).*

Доказательство. Доказательство остается в качестве упражнения. □

Пример 5.3.3 *Условия монотонности в признаке Абеля-Дирихле важно. Рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{\sin k + \sqrt{k}}.$$

Рассмотрим цепочку преобразований

$$\frac{\sin k}{\sin k + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin k \left(1 + \frac{\sin k}{\sqrt{k}}\right)^{-1} = \frac{\sin k}{\sqrt{k}} \left(1 - \frac{\sin k}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin k}{\sqrt{k}} - \frac{\sin^2 k}{k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right).$$

Ясно, что ряд с общим членом $k^{-3/2}$ *сходится, а значит ряд с общим членом* $O(k^{-3/2})$ *сходится абсолютно. Ряд с общим членом* $\frac{\sin k}{\sqrt{k}}$ *сходится (по доказанному ранее), а ряд с общим членом* $\frac{\sin^2 k}{k}$ *расходится. Значит, исходный ряд расходится.*

Приведем еще один признак.

Теорема 5.3.4 (Признак Лейбница) *Пусть рассматривается ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k,$$

где $a_k \geq 0$ *и* a_k *монотонно стремится к нулю. Тогда ряд сходится.*

Доказательство.

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2},$$

так как все слагаемые положительны (в силу невозрастания a_n) и, тем самым, S_{2n} не убывает. Кроме того,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

откуда S_{2n} ограничена сверху. Значит, $S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$. Но тогда

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S,$$

так как общий член стремится к нулю. Тогда можно утверждать, что ряд сходится. $\square$

Определение 5.3.3 *Ряд, фигурирующий в условии теоремы, часто называют рядом лейбницевского типа или рядом Лейбница.*

Замечание 5.3.2 *Как показано в доказательстве теоремы,*

$$0 \le S_{2n} \le a_1.$$

Это значит, что $0 \le S \le a_1$.

Лемма 5.3.3 (Об остатке ряда лейбницевского типа) *Пусть рассматривается ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k,$$

где $a_k \ge 0$ *и* a_k *монотонно стремится к нулю. Тогда*

$$|R_n| \le a_{n+1}, \quad R_n (-1)^n a_{n+1} \ge 0.$$

Иными словами, модуль остатка ряда лейбницевского типа не превосходит модуля первого отброшенного члена. Кроме того, остаток совпадает по знаку со знаком первого отброшенного члена.
Доказательство. Для доказательства достаточно применить к остатку ряда сформулированное выше замечание. $\square$

5.4 Группировки и перестановки рядов. Теорема Римана

Оказывается, над сходящимися рядами далеко не всегда можно проводить привычные нам операции.

Пример 5.4.1 *Рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + ...,$$

сумма которого вычислена выше и равна $\ln 2$*. Переставим его члены местами и рассмотрим следующий ряд*

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + ...$$

Рассмотрим частичную сумму нового ряда с номером $3n$:

$$\widetilde{S}_{3n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2n},$$

где

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln 2$, *то* $\widetilde{S}_{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln 2}{2}$. *Легко понять, что* $\widetilde{S}_{3n+1}$ *и* $\widetilde{S}_{3n+2}$ *тоже сходятся к* $\frac{\ln 2}{2}$, *а значит можно утверждать, что*

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \ldots = \frac{\ln 2}{2}.$$

Итого, перестановка членов исходного ряда поменяла сумму.

Итак, наша цель – ответить на вопросы: какие свойства суммирования (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность и проч.) и в каких случаях переносятся на ряды. Начнем с ассоциативности.

Определение 5.4.1 *Пусть дан ряд с общим членом a_k и $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ – возрастающая последовательность номеров. Положим $n_0 = 0$ и*

$$A_j = \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k.$$

Тогда ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j$$

называется группировкой исходного ряда.

Отметим, что группировка ряда сохраняет исходный порядок членов ряда, но меняет общий член ряда.

Замечание 5.4.1 *Мы знаем на примере ряда с общим членом $a_k = (-1)^k$, что группировка ряда может сходиться даже в том случае, когда ряд расходится:*

$$(-1+1) + (-1+1) + \ldots + (-1+1) + \ldots = 0.$$

Ответим на вопрос, как связаны сходимость ряда и сходимость его группировок.

Теорема 5.4.1 (О группировках ряда) *1. Пусть ряд с общим членом a_k имеет сумму $S \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда и любая его группировка имеет сумму S, то есть*

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j = S.$$

2. Пусть группировка $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j$ ряда с общим членом a_k имеет сумму $S \in \overline{\mathbb{R}}$, причем $a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ и каждая группа содержит не более $L \in \mathbb{N}$ членов. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

3. Пусть группировка $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j$ ряда с общим членом a_k имеет сумму $S \in \overline{\mathbb{R}}$, а все члены внутри каждой группы имеют один и тот же знак. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Доказательство. 1. Пусть $\widetilde{S}_p$ – частичная сумма группировки:

$$\widetilde{S}_p = \sum_{j=0}^{p} A_j = \sum_{k=1}^{n_p} a_k = S_{n_p},$$

то есть является подпоследовательностью последовательности $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Следовательно,

$$\lim_{p\to+\infty} \widetilde{S}_p = \lim_{p\to+\infty} S_{n_p} = \lim_{n\to+\infty} S_n = S.$$

2. Рассмотрим случай $S \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, то существует k_0, что при $k > k_0$ выполняется

$$|a_k| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

Так как перестановка имеет сумму S, то существует j_0 такой, что при $j > j_0$ выполняется

$$|\widetilde{S}_j - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $n > \max(k_0, n_{j_0+1})$. Тогда существует t, что $n_t < n \le n_{t+1}$, причем $n_t \ge n_{j_0+1}$. Но тогда

$$|S_n - S| \le |S_n - \widetilde{S}_t| + |\widetilde{S}_t - S| = \left|\sum_{k=n_t+1}^{n} a_k\right| + |\widetilde{S}_t - S| < \frac{\varepsilon}{2L} L + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Случаи $S = \pm\infty$ ответственный студент разберет самостоятельно.

3. Рассмотрим случай $S \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как перестановка имеет сумму S, то найдется j_0 такой, что при $j > j_0$ выполняется

$$|\widetilde{S}_j - S| < \varepsilon.$$

Пусть $n > n_{j_0+1}$. Тогда найдется t, что $n_t < n \le n_{t+1}$, причем $n_t \ge n_{j_0+1}$. Если все члены группы A_t неотрицательны, то

$$\widetilde{S}_t \le S_n \le \widetilde{S}_{t+1},$$

а если неположительны, то

$$\widetilde{S}_{t+1} \le S_n \le \widetilde{S}_t.$$

В любом из двух описанных случаев,

$$|S_n - S| \le \max(|\widetilde{S}_t - S|, |\widetilde{S}_{t+1} - S|) < \varepsilon.$$

Не забудьте случаи $S = \pm\infty$. □

Теперь выясним основное отличие абсолютно сходящихся рядов от условно сходящихся.

Теорема 5.4.2 (Характерное свойство абсолютной сходимости) *Ряд с общим членом a_k сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся ряды с общими членами*

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k, & a_k \ge 0 \\ 0, & a_k < 0 \end{cases}, \quad \text{и} \quad a_k^- = \begin{cases} 0, & a_k \ge 0 \\ -a_k, & a_k < 0 \end{cases},$$

причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S_n^\pm = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^\pm$ и

$$S_n^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} S^{|\cdot|}.$$

Тогда $S_n^{\pm} \le S_n^{|\cdot|} \le S^{|\cdot|}$, откуда (в силу возрастания $S_n^{\pm}$) $S_n^{\pm} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S^{\pm}$. Кроме того, $S_n = S_n^+ - S_n^-$, откуда, переходя к пределу при $n \to +\infty$, $S = S^+ - S^-$
Докажем достаточность. Пусть $S_n^{\pm} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\pm} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S^{\pm}$. Тогда

$$S_n^{|\cdot|} = S_n^+ + S_n^- \xrightarrow[n\to+\infty]{} S^+ + S^- < \infty,$$

а значит ряд с общим членом a_k сходится абсолютно. Тогда он сходится, причем

$$S_n = S_n^+ - S_n^-$$

и, переходя к пределу, получаем требуемое равенство для сумм. □

Следствие 5.4.3 *Если ряд с общим членом a_k сходится условно, то $S^{\pm} = +\infty$.*

Теперь решим вопрос о перестановке абсолютно сходящегося ряда.

Определение 5.4.2 *Биекция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется перестановкой множества натуральных чисел.*

Определение 5.4.3 *Пусть дан ряд с общим членом a_k и перестановка натуральных чисел φ. Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$$

называется перестановкой исходного ряда.

Теорема 5.4.4 (О перестановке абсолютно сходящегося ряда)
Пусть ряд с общим членом a_k сходится абсолютно. Тогда любая его перестановка сходится абсолютно, причем к той же сумме.

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.
1. Пусть все $a_k \ge 0$. Тогда

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \le \sum_{k=1}^{p} a_k = S_p \le S, \quad p = \max_{k\in\{1,2,\ldots,n\}} \varphi(k).$$

Значит, перестановка сходится, причем $\widetilde{S} \le S$. Наоборот, так как $\widetilde{S} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$, то ряд с общим членом a_k – его перестановка ($a_k = a_{\varphi^{-1}(\varphi(k))}$), а

значит, по доказанному, $S \le \widetilde{S}$, откуда $S = \widetilde{S}$.
2. Пусть теперь $a_k \in \mathbb{R}$. Пусть a_k^+ и a_k^- – подпоследовательности a_k, состоящие только из неотрицательных и отрицательных членов, соответсвенно. Ряды, с общими членами a_k^+ и a_k^- сходятся абсолютно, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\varphi(k)})^+ - \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\varphi(k)})^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}.$$

□

Оказывается, для условно сходящихся рядов такая теорема уже не имеет места, а имеет место теорема Римана.

Теорема 5.4.5 (Теорема Римана) *Пусть ряд с общим членом a_k сходится условно. Тогда какое бы не взять $S \in \overline{\mathbb{R}}$, существует перестановка натуральных чисел φ, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = S.$$

Кроме того, существует такая перестановка исходного ряда, которая не имеет суммы в $\overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Пусть a_k^+ и a_k^- – подпоследовательности a_k, состоящие только из неотрицательных и отрицательных членов, соответсвенно, причем оба ряда расходятся (к $+\infty$ и $-\infty$, соотвественно). Пусть $S \in \mathbb{R}$, $S \ge 0$, $a_0^+ = a_0^- = 0$. Пусть p_1 – наименьшее натуральное число, что

$$\sum_{k=0}^{p_1-1} a_k^+ \le S < \sum_{k=0}^{p_1} a_k^+.$$

Пусть теперь q_1 – наименьшее натуральное число, что

$$\sum_{k=0}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_1} a_k^- < S \le \sum_{k=0}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_1-1} a_k^-.$$

Пусть построены числа $p_1, ..., p_{l-1}$ и $q_1, ..., q_{l-1}$. Найдем наименьшее число p_l, что

$$\sum_{k=0}^{p_l-1} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_{l-1}} a_k^- \le S < \sum_{k=0}^{p_l} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_{l-1}} a_k^-.$$

Теперь найдем наименьшее число q_l, что

$$\sum_{k=0}^{p_l} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_l} a_k^- < S \le \sum_{k=0}^{p_l} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_l-1} a_k^-.$$

Все построения возможны в виду расходимости обоих рядов (из их членов можно набрать сколь угодно большую положительную и сколь угодно маленькую отрицательную суммы).

Рассмотрим ряд

$$A_1^+ + A_1^- + A_2^+ + A_2^- + \ldots + A_l^+ + A_l^- + \ldots,$$

где ($p_0 = q_0 = 0$)

$$A_i^+ = \sum_{k=p_{i-1}+1}^{p_i} a_k^+, \quad A_i^- = \sum_{k=q_{i-1}+1}^{q_i} a_k^+,$$

причем если $\widetilde{S}_n$ – его частичная сумма, то

$$a_{q_l}^- < \widetilde{S}_{2n} - S < 0,$$

а

$$0 < \widetilde{S}_{2n+1} - S < a_{p_{l+1}}^+.$$

Так как общий член ряда, в силу сходимости, стремится к нулю, то доказано, что

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{S}_n = S.$$

Так как все члены в каждой группе одного знака, то перестановка рассматриваемого ряда сходится к S. Остальные случаи остаются в качестве упражнения. □

5.5 Произведение рядов

Понятно, что

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_k b_j,$$

и для конечных m, n последнее выражение не зависит ни от порядка суммирования, ни от способа перемножения. У рядов сразу возникают вопросы: будет ли сходиться полученный ряд? В каком порядке можно складывать?

Определение 5.5.1 *Пусть даны ряды с общими членами a_k и b_k, (φ, ψ) – биекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^2$. Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$$

называется произведением рядов с общими членами a_k и b_k.

Итак, произведение рядов – это ряд с произвольным порядком слагаемых вида $a_i b_j$.

Теорема 5.5.1 (Коши о произведении рядов) *Пусть ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = A$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = B$ *сходятся абсолютно. Тогда их произведение абсолютно сходится к* AB.

Доказательство. Пусть (φ, ψ) – биекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^2$. Тогда

$$\widetilde{S}_n^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{n} \left|a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}\right| \le \sum_{k=1}^{p} |a_k| \sum_{k=1}^{t} |b_k| \le A^{|\cdot|} B^{|\cdot|},$$

$$p = \max_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} \varphi(k), \ t = \max_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} \psi(k),$$

$$A^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad B^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|.$$

В итоге, ряд с общим членом $a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$ сходится абсолютно. Значит, его сумма не зависит от перестановки. Тогда просуммируем «по квадратам».

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j \xrightarrow[n \to +\infty]{} AB.$$

$\square$

Часто используется так называемое произведение по Коши (особенно – в степенных рядах).

Определение 5.5.2 *Ряд с общим членом* c_k, *где*

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k+1-j},$$

называется произведением по Коши рядов с общими членами a_k *и* b_j.

Замечание 5.5.1 *Часто произведение нумеруют с нуля. Тогда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

Пример 5.5.1 *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$$

сходится по признаку Лейбница. А что с его квадратом по Коши?

$$c_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{\sqrt{j}}\frac{(-1)^{k-j}}{\sqrt{k+1-j}}=(-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{j(k+1-j)}}.$$

Тогда

$$|c_k|=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{j(k+1-j)}}\geq\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k}}=1.$$

Итого, нарушено необходимое условие сходимости ряда.

Теорема 5.5.2 (Теорема Мертенса) *Если два ряда сходятся, причем хотя бы один из них – абсолютно, то их произведение по Коши тоже сходится, причем к произведению сумм.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Введем привычные обозначения

$$S_n^A=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad S^A=\sum_{k=1}^{\infty}a_k,\quad S_n^{|A|}=\sum_{k=1}^{n}|a_k|,\quad S^{|A|}=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|,$$

$$S_n^B=\sum_{k=1}^{n}b_k,\quad S^B=\sum_{k=1}^{\infty}b_k.$$

Рассмотрим произведение по Коши – ряд с общим членом

$$c_k=\sum_{j=1}^{k}a_jb_{k-j+1}.$$

Ясно, что

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}a_jb_{k-j+1}=a_1S_n^B+a_2S_{n-1}^B+\ldots+a_nS_1^B.$$

Так как $S^B=S_n^B+R_n^B$, то, подставляя $S_n^B=S^B-R_n^B$, получим

$$S_n^C=S_n^AS^B-\alpha_n,$$

где
$$\alpha_n = a_1 R_n^B + a_2 R_{n-1}^B + \ldots + a_n R_1^B.$$
Для доказательства утверждения достаточно показать, что $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как ряд с общим членом b_k сходится, то
$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \Rightarrow \ |R_n^B| < \varepsilon.$$
Пусть $n > n_0$, тогда
$$|\alpha_n| = \left|\sum_{j=1}^{n} R_j^B a_{n-j+1}\right| \le \left|\sum_{j=1}^{n_0} R_j^B a_{n-j+1}\right| + \left|\sum_{j=n_0+1}^{n} R_j^B a_{n-j+1}\right|.$$
Для второй суммы справедлива оценка:
$$\left|\sum_{j=n_0+1}^{n} R_j^B a_{n-j+1}\right| < \varepsilon \sum_{j=n_0+1}^{n} |a_{n-j+1}| \le \varepsilon S^{|A|}.$$
Рассмотрим первую сумму. Так как $R_n^B \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, то $|R_n^B| \le M$. Тогда
$$\left|\sum_{j=1}^{n_0} R_j^B a_{n-j+1}\right| \le M \sum_{j=1}^{n_0} |a_{n-j+1}| = M \sum_{j=n-n_0+1}^{n} |a_j| =$$
$$= M(R_{n-n_0}^{|A|} - R_n^{|A|}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
в силу абсолютной сходимости ряда с общим членом a_k. Итого,
$$\lim_{n\to+\infty} S_n^C = \lim_{n\to+\infty} \left(S_n^A S^B - \alpha_n\right) = S^A S^B.$$
□

В заключение данного пункта, приведем следующий интересный пример.

Пример 5.5.2 *Произведение по Коши двух расходящихся рядов может быть даже абсолютно сходящимся. Рассмотрим ряды с общими членами*
$$a_k = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 2^{k-2}, & k > 1 \end{cases}, \quad b_k = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ -1, & k > 1 \end{cases}$$
Рассмотрим произведение по Коши. $c_1 = 1$, *а при* $k > 1$
$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b^{k-j+1} = -1 - \sum_{j=2}^{k-1} 2^{j-2} + 2^{k-2} = -1 - \frac{1-2^{k-2}}{1-2} + 2^{k-2} = 0.$$
Итого, построенный ряд сходится абсолютно к сумме 1.

6 Функциональные последовательности и ряды

6.1 Поточечная сходимость функциональных последовательностей и рядов

До этого нами рассматривались числовые ряды – частный случай так называемых функциональных рядов.

Определение 6.1.1 *Последовательность $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$ называется функциональной последовательностью.*

Определение 6.1.2 *Пусть дана функциональная последовательность $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$. Символ*

$$f_1(x) + f_2(x) + ... + f_k(x) + ... = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

называется функциональным рядом. Последовательность $f_k(x)$ называется общим членом функционального ряда.

Естественно, интересно дать определение предела функциональной последовательности (сходящегося функционального ряда).

Определение 6.1.3 *Говорят, что функциональная последовательность $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$ сходится поточечно на множестве $D \subset X$, если*

$$\forall x \in D \ \Rightarrow \ \exists \lim_{n \to +\infty} f_k(x).$$

Замечание 6.1.1 *Ясно, что на множестве поточечной сходимости D возникает функция*

$$f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x), \quad x \in D.$$

Эта функция называется пределом функциональной последовательности (или поточечным пределом) $f_k(x)$ на множестве D

Пример 6.1.1 *Рассмотрим последовательность $f_n(x) = x^n$. Какой у нее поточечный предел? Ясно, что*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Определение 6.1.4 *Пусть рассматривается функциональный ряд с общим членом $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$. Функция*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

называется n-ой частичной суммой функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

Определение 6.1.5 *Говорят, что функциональный ряд с общим членом $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$ сходится в точке $x_0 \in X$, если сходится соответствующий числовой ряд с общим членом $f_k(x_0)$, то есть ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0).$$

Замечание 6.1.2 *В терминах частичных сумм сходимость функционального ряда в точке x_0 означает существование конечного предела*

$$S(x_0) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x_0).$$

Определение 6.1.6 *Пусть рассматривается ряд с общим членом $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$. Множество D, определяемое, как*

$$D = \{x \in X : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ сходится}\},$$

называется множеством сходимости функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. На множестве D определена функция $S(x)$ – сумма функционального ряда.

Определив предел функциональной последовательности (сумму функционального ряда), в анализе естественным образом возникают вопросы о свойстве предельной функции (суммы): будет ли она непрерывна, дифференцируема, интегрируема?

Пример 6.1.2 *Рассмотрим $f_n(x) = x^n$ – последовательность непрерывных функций. Данная последовательность сходится при $x \in [0, 1]$, но к разрывной функции*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Пример 6.1.3 *Рассмотрим* $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ *и* $x \in \mathbb{R}$. *Данная последовательность сходится к* $f(x) = 0$ *но*

$$f_n'(x) = \cos nx$$

не сходится к нулю.

Пример 6.1.4 *Рассмотрим*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+\frac{1}{n}}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Опять же, все функции интегрируемы на $[0,1]$, *однако, предельная функция*

$$f(x) \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

не интегрируема на $[0,1]$.

6.2 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Введем новый тип сходимости.

Определение 6.2.1 *Говорят, что последовательнось* $f_n(x) : X \to \mathbb{R}$ *сходится к функции* $f(x)$ *на множестве* $D \subset X$ *равномерно, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0\ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in D.$$

Обозначают это так:

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\overset{D}{\rightrightarrows}} f(x)$$

Полезно сравнить это определение с ранее введенным определением (поточечной) сходимости.

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{D} f(x)\ \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0\ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Видно, что определение отличается тем, что в случае поточечной сходимости найденный номер n_0, вообще говоря, зависит о x, чего нет в равномерной сходимости: там номер одинаков сразу для всех x.

Замечание 6.2.1 *Из сказанного ясно, что если $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на D, то она сходится на D и поточечно. Тем самым предельную функцию имеет смысл искать, как поточечный предел, а затем уже проводить исследование на равномерную сходимость.*

Пример 6.2.1 *Знакомая нам последовательность*

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n},\ D = \mathbb{R},$$

сходится на множестве D равномерно (к нулю). Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \ \Rightarrow\ n > \frac{1}{\varepsilon},\ n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right].$$

Пример 6.2.2 *В то же время, последовательность $f_n(x) = x^n$ не сходится равномерно на $[0,1]$. Напишем отрицание того факта, что последовательность сходится равномерно.*

$$\exists \varepsilon_0 > 0 :\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0\ \exists x_n \in D : \Rightarrow |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0,$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Выберем $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, тогда $f(x_n) = 0$. В то же время,

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} = \varepsilon_0 \neq 0.$$

Итак, из поточечной сходимости равномерная, вообще говоря, не вытекает.

Определение 6.2.2 *Говорят, что функциональный ряд с общим членом $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$ сходится равномерно на $D \subset X$, если последовательность $S_n(x)$ его частичных сумм равномерно сходится на D к сумме $S(x)$.*

Замечание 6.2.2 *На языке $\varepsilon - n$ последнее утверждение может быть записано так:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0\ \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon\ \forall x \in D.$$

Последнее неравенство может быть переписано, как

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Величина $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$, *как и ранее, называется* n*-ым остатком функционального ряда. Итого, равномерная сходимость ряда на* D *равносильна тому, что*

$$R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\overset{D}{\rightrightarrows}} .$$

6.3 Равномерная норма

Определение 6.3.1 *Пусть* $f : X \to \mathbb{R}$. *Величина*

$$\|f\|_X = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

называется равномерной нормой функции f *на множестве* X.

Отметим свойства введенного объекта.

Лемма 6.3.1 *Пусть* $f, g : X \to \mathbb{R}$. *Равномерная норма обладает следующими свойствами.*

1. *Положительная определенность нормы:* $\|f\|_X \geq 0$, *причем* $\|f\|_X = 0 \;\Leftrightarrow\; f \equiv 0$.
2. *Положительная однородность нормы:* $\|\lambda f\|_X = |\lambda| \|f\|_X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. *Неравенство треугольника:* $\|f+g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$.

Доказательство. В доказательстве нуждается только третье свойство. Оно следует из того, что

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_X + \|g\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Осталось перейти в левой части к супремуму. $\square$

Теперь отметим несколько технических утверждений.

Лемма 6.3.2 *Пусть* $f, g : X \to \mathbb{R}$. *Тогда* $\|fg\|_X \leq \|f\|_X \|g\|_X$.

Доказательство. Ясно, что

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\|_X \|g\|_X \; \forall x \in X.$$

Осталось перейти в левой части к супремуму. $\square$

Теорема 6.3.1 (Связь равномерной сходимости и сходимости по норме) *Пусть* $f_k(x), f(x) : X \to \mathbb{R}$, $D \subset X$. *Тогда*

$$f_k(x) \underset{k\to+\infty}{\overset{D}{\rightrightarrows}} f(x) \;\Leftrightarrow\; \|f_k - f\|_D \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Доказательство. Доказательство следует из того, что неравенства

$$|f_k(x) - f(x)| \le \varepsilon \quad \forall x \in D$$

и

$$\|f_k - f\|_D \le \varepsilon$$

равносильны. □

Доказанная теорема, по сути, дает способ исследования функциональной последовательности $f_k(x)$ на равномерную сходимость: сначала можно найти поточечный предел $f(x)$, а затем исследовать разность $\|f_k - f\|$ на стремление к нулю.

Пример 6.3.1 *Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность*

$$f_k(x) = x\sqrt{k}e^{-kx^2}$$

на множествах $D_1 = [0, +\infty)$ и $D_2 = [\delta, +\infty)$, $\delta > 0$.

Поточечный предел равен, очевидно, нулю, а потому

$$|f_k(x) - f(x)| = f_k(x) = x\sqrt{k}e^{-kx^2}.$$

Исследуем эту функцию на наибольшее значение. Воспользуемся производной:

$$f_k'(x) = \sqrt{k}e^{-kx^2}(1 - 2kx^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{\sqrt{2k}}.$$

Понятно, что найденная точка – точка локального максимума, которая при всех k принадлежит множеству D_1. Тогда

$$\|f_k - f\|_{D_1} = f_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$$

и условие теоремы не выполняется, а значит равномерной сходимости нет.

Для второго множества ситуация другая. При достаточно больших k найденная точка не принадлежит множеству D_2, а значит

$$\|f_k - f\|_{D_2} = \delta\sqrt{k}e^{-k\delta^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Итого, на множестве D_2 равномерная сходимость есть.

Лемма 6.3.3 (Дополнительные свойства равномерной сходимости) *Справедливы следующие свойства равномерной сходимости (везде сходимость при $n \to +\infty$):*

1. *Пусть* $f_n(x), f(x) : X \to \mathbb{R}$ *и* $D_0 \subset D \subset X$. *Если* $f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f$, *то* $f_n(x) \overset{D_0}{\rightrightarrows} f$.
2. *Пусть* $f_n(x), f(x) : X \to \mathbb{R}$ *и* $D_0 \subset D \subset X$. *Если* $f_n(x)$ *не сходится к* $f(x)$ *равномерно на* D_0, *то* $f_n(x)$ *не сходится к* $f(x)$ *равномерно на* D.
3. *Пусть* $f_n(x), f(x), g_n(x), g(x) : X \to \mathbb{R}$, $D \subset X$. *Если* $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$ *и* $g_n \overset{D}{\rightrightarrows} g(x)$, *то*
$$\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} \alpha f(x) + \beta g(x).$$
4. *Пусть* $f_n(x), f(x), g(x) : X \to \mathbb{R}$, $D \subset X$. *Если* $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$ *и* g *ограничена на* D, *то*
$$f_k(x)g(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)g(x).$$

Доказательство. Ясно, что какого-то пояснения требуют только 3 и 4 свойства. Докажем третье. Используя неравенство треугольника и положительную однородность нормы, получим

$$\|\alpha f_k + \beta g_k - \alpha f - \beta g\|_D \leq |\alpha|\|f_k - f\|_D + |\beta|\|g_k - g\|_D \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Докажем четвертое свойство. Оно следует из свойства нормы:

$$\|f_k g - fg\|_D = \|(f_k - f)g\|_D \leq \|f_k - f\|_D \|g\|_D \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

□

6.4 Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 6.4.1 (Критерий Коши равномерной сходимости ф.п.) *Для того чтобы функциональная последовательность* $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$ *сходилась равномерно на* $D \subset X$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon\ \forall x \in D.$$

Иначе,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \|f_{n+p} - f_n\|_D \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n > n_0 \ \Rightarrow \|f_n - f\|_D \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$, тогда $n + p > n_0$ и

$$\|f_{n+p} - f_n\|_D \leq \|f_{n+p} - f\|_D + \|f - f_n\|_D \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажем достаточность. Написанное условие гарантирует, что при каждом $x \in D$ числовая последовательность фундаментальна, значит сходится. Пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ при $x \in D$. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию, найдем n_0, что при $n > n_0$ и $p \in \mathbb{N}$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \ \forall x \in D.$$

Устремив $p \to +\infty$, получим

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \ \forall x \in D,$$

откуда и следует требуемое. □

Так как равномерная сходимость ряда – суть равномерная сходимость последовательности его частичных сумм, то справедлива следующая теорема.

Теорема 6.4.2 (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)
Пусть $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $D \subset X$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon \ \forall x \in D.$$

Иначе,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k\right\|_D \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Доказательство следует из предыдущей теоремы, так как равномерная сходимость ряда – суть равномерная сходимость последовательности его частичных сумм. □

Следствие 6.4.3 (Необходимое условие равномерной сходимости ряда)
Пусть $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $D \subset X$ то

$$f_k(x) \underset{k\to+\infty}{\overset{D}{\rightrightarrows}} 0.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно положить в критерии Коши $p = 1$. $\square$

Пример 6.4.1 *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ *сходится неравномерно на* $(0, 1)$ *так как, как было показано ранее, нет равномерной сходимости общего члена* $f_k(x) = x^k$ *к нулю на* $(0, 1)$.

6.5 Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 6.5.1 (Признак Вейерштрасса) *Пусть* $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$, $D \subset X$. *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_D$$

сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится равномерно (и абсолютно) на* D.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_D$ сходится, то

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_D < \varepsilon.$$

В то же время, при $x \in D$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_D < \varepsilon.$$

Используя критерий Коши заключаем, что ряд сходится равномерно и абсолютно. $\square$

Замечание 6.5.1 *Из доказательства видно, что равномерно сходящимся оказывается не только ряд с общим членом* $f_k(x)$, *но и ряд с общим членом* $|f_k(x)|$, *то есть ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|.$$

Следствие 6.5.2 *Пусть $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$ и $D \subset X$. Пусть, кроме того, на множестве D выполняется неравенство $|f_k(x)| \leq a_k$ и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{сходится.}$$

Тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ сходятся абсолютно и равномерно.

Замечание 6.5.2 *Существуют ряды, которые сходятся абсолютно, но неравномерно и равномерно, но неабсолютно. Примером абсолютно, но неравномерно сходящегося ряда служит ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k, \quad x \in (0,1).$$

Примером равномерно, но неабсолютно сходящегося ряда, служит, например, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Понятно, что числовой ряд, если он сходится, сходится равномерно на любом множестве $D \subset \mathbb{R}$. Более того, существуют абсолютно и равномерно сходящиеся ряды, для которых ряд из модулей не сходится равномерно (то есть те, для которых не применим признак Вейерштрасса). Позже мы приведем примеры таких рядов.

Теорема 6.5.3 (Признак Абеля-Дирихле) *Пусть $f_k(x), g_k(x) : X \to \mathbb{R}$, а последовательность $g_k(x)$ монотонна при любом $x \in D \subset X$. Тогда для равномерной сходимости ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$$

на D достаточно выполнения любой из двух пар условий: либо

1. *Частичные суммы $A_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ равномерно ограничены на D, то есть*

$$\exists C : \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq C \ \forall x \in D \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. *$g_k(x)$ равномерно стремится к нулю на D.*

либо

1. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится равномерно на* D

2. *Последовательность* $g_k(x)$ *равномерно ограничена на* D*, то есть*

$$\exists C: \ |g_k(x)| \leq C \ \forall x \in D \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши и преобразованием Абеля:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)g_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} f_k(x)g_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)g_k(x)\right| =$$

$$= \left| A_{n+p}(x)g_{n+p}(x) + \sum_{k=1}^{n+p-1} A_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) - \right.$$

$$\left. - A_n(x)g_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \right| =$$

$$= \left| A_{n+p}(x)g_{n+p}(x) - A_n(x)g_n(x) + \sum_{k=n}^{n+p-1} A_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \right| =$$

$$= \left| A_{n+p}(x)g_{n+p}(x) - A_n(x)g_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \right|.$$

В силу равномерной ограниченности $A_n(x)$ и монотонности $g_k(x)$, приходим к оценке

$$\leq C\left(|g_{n+p}(x)| + |g_{n+1}(x)| + |g_{n+1}(x) - g_{n+p}(x)|\right) \leq 4C\max(|g_{n+1}(x)|, |g_{n+p}(x)|).$$

1. В силу равномерной сходимости, найдем номер n_0, что при $n > n_0$ выполняется

$$|g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4C}.$$

Тогда рассматриваемый модуль не превосходит ε, что и завершает доказательство.

2. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на D, то

$$S(x) - S_n(x) = R_n(x) \rightrightarrows 0.$$

Так как

$$A_k(x) = S(x) - R_k(x), \quad k \in \{n, n+1, ..., n+p\},$$

то

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)g_k(x)\right| =$$

$$= \left|-R_{n+p}(x)g_{n+p}(x) + R_n(x)g_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} R_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x))\right| \leq$$

$$\leq |R_{n+p}(x)||g_{n+p}(x)| + |R_n(x)||g_{n+1}(x)| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |R_k(x)||g_k(x) - g_{k+1}(x)|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу того, что $R_n(x) \rightrightarrows 0$,

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \Rightarrow |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4C} \ \forall x \in D,$$

а значит

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)g_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4C}\left(|g_{n+p}(x)| + |g_{n+1}(x)| + |g_{n+1}(x) - g_{n+p}(x)|\right) \leq \varepsilon,$$

что и завершает доказательство. □

Пример 6.5.1 *Исследуем на равномерную сходимость ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}, \ x \in D \subset \mathbb{R}.$$

Воспользуемся признаком Абеля-Дирихле. Для этого вспомним, что

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \begin{cases} \frac{\sin\frac{x}{2} + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x \neq 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что написанная сумма не является равномерно ограниченной на любом множестве, содержащем хотя бы одну из точек множества $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $[a,b] \subset (2\pi k, 2\pi(k+1))$. Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = \left|\frac{\sin\frac{x}{2} + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{2}{2|\sin\frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\min(|\sin\frac{a}{2}|, |\sin\frac{b}{2}|)}$$

и ряд сходится на произвольных множествах такого типа (признак Дирихле). В то же время, равномерной сходимости на $(2\pi t, 2\pi(t+1))$ нет, так как

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\cos\left(2\pi t + \frac{1}{2n}\right)k}{k}\right| \geq \frac{n\cos 1}{2n} = \cos 1,$$

что не стремится к нулю.

Замечание 6.5.3 *Аналогичные рассуждения могут быть применены к ряду*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \ x \in D \subset \mathbb{R}.$$

Результаты аналогичны.

На практике (для доказательства отсутствия равномерной сходимости) бывает полезна следующая лемма.

Лемма 6.5.1 *Пусть* $f_k(x) \in C[a,b]$*. Если* $f_k(x) \overset{(a,b)}{\rightrightarrows} f(x)$*, то*

$$f_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши,

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in (a,b).$$

Пусть $x_n \in (a,b)$, $x_n \to b$. Перейдем к пределу в неравенстве и, пользуясь непрерывностью $f_k(x)$, получим

$$|f_{n+p}(b) - f_n(b)| \leq \varepsilon.$$

Аналогично с точкой a. Значит, при $x \in [a,b]$ выполняется

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,$$

что, согласно критерию Коши, влечет равномерную сходимость последовательности $f_k(x)$. □

Аналогичная лемма справедлива и для рядов.

Лемма 6.5.2 *Пусть* $f_k(x) \in C[a,b]$*. Если на* (a,b) *ряд с общим членом* $f_k(x)$ *сходится равномерно, то он сходится равномерно и на* $[a,b]$*.*

Пример 6.5.2 *Для ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$$

условия непрерывности выполнены, но при $x = 2\pi t$ *получаем расходящийся ряд с общим членом* $\frac{1}{k}$*. Значит, на интервалах с концами* $2\pi t$ *равномерной сходимости, конечно, нет.*

6.6 Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 6.6.1 (О перестановке пределов) *Пусть $f(x), f_k(x) : D \to \mathbb{R}$, причем*

1. $f_k(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$.
2. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует предел*

$$\lim_{x \to x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R},$$

где x_0 – предельная для D.

Тогда пределы $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существуют (в $\mathbb{R}$) и совпадают, то есть

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{k \to +\infty} f_k(x) = \lim_{k \to +\infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши,

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in D.$$

Перейдя к пределу при $x \to x_0$, получим

$$|a_{n+p} - a_n| \leq \varepsilon,$$

что влечет фундаментальность и, как следствие, сходимость последовательности a_n. Пусть ее предел равен A. Осталось показать, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу равномерной сходимости на D,

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall x \in D.$$

В силу сходимости последовательности a_n,

$$\exists k_0 : \ \forall k > k_0 \ \Rightarrow |a_k - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $m = 1 + \max(k_0, n_0)$, тогда одновременно

$$|a_m - A| < \varepsilon \ \text{ и } \ |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in D.$$

Согласно определению предела функции,

$$\exists \overset{o}{U}_\delta(x_0): \ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap D \ \Rightarrow |f_m(x) - a_m| < \varepsilon.$$

Значит, при $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap D$, имеем

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m| + |a_m - A| < \varepsilon.$$

□

Аналогичный результат справедлив и для рядов.

Теорема 6.6.2 (Почленный переход к пределу) *Пусть $f_k(x): D \to \mathbb{R}$, причем*

1. *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ равномерно сходится на D.*
2. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует предел*

$$\lim_{x \to x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R},$$

где x_0 – предельная для D.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится к сумме A, причем $\lim\limits_{x \to x_0} S(x) = A$, то есть

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм ряда. □

Из этих теорем легко получить и выводы о непрерывности предельной функции (или суммы ряда).

Теорема 6.6.3 (О непрерывности предельной функции) *Пусть $f_k(x), f(x): D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, причем*

1. *$f_k(x) \rightrightarrows [k \to +\infty] Df$ на D.*
2. *$f_k(x)$ непрерывны в x_0.*

Тогда f непрерывна в x_0. В частности, если $f_k(x)$ непрерывны на D, то и $f(x)$ непрерывна на D.

Доказательство. Если x_0 – изолированная точка, то доказывать нечего (любая функция непрерывна в изолированной точке своей области определения). Если x_0 – предельная, то выполнены условия теоремы, где $a_k = f_k(x_0)$. Поэтому,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x_0) = f(x_0).$$

□

Теорема 6.6.4 (О непрерывности суммы ряда) *Пусть $f_k(x) : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, причем*

1. *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ равномерно сходится на D.*

2. *$f_k(x)$ непрерывны в x_0.*

Тогда сумма ряда непрерывна в x_0. В частности, если $f_k(x)$ непрерывны на D, то и сумма ряда непрерывна на D.

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм. □

Замечание 6.6.1 *Из равномерной непрерывности функций на D следует и равномерная непрерывность предельной функции (суммы).*

Пример 6.6.1 *Поточечной сходимости для непрерывности предельной функции недостаточно. Значит, недостаточно и для перестановки пределов.*

$$\lim_{x \to 1-0} \lim_{n \to +\infty} x^n = 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to 1-0} x^n = 1.$$

Условие равномерной сходимости не является необходимым.

$$f_k(x) = x\sqrt{k}e^{-kx^2} \xrightarrow[k \to +\infty]{[0,+\infty)} 0,$$

но сходимость, как было показано в примере ранее, неравномерна.

Иногда удается установить равномерную сходимость из непрерывности предельной функции.

Теорема 6.6.5 (Теорема Дини для последовательностей) *Пусть $f_k(x), f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$, причем $f_k(x), f(x) \in C[a, b]$. Кроме того, пусть $f_k(x)$ не убывает (не возрастает) по k на $[a, b]$ и*

$$f_k(x) \overset{[a,b]}{\to} f(x).$$

Тогда

$$f_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x).$$

Доказательство. Пусть, например, $f_k(x)$ не убывает. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда найдем номер n_x, что
$$0 \leq f(x) - f_{n_x}(x) < \varepsilon.$$
Это же неравенство остается в силе и в некоторой окрестности $U(x)$ точки x в силу непрерывности рассматриваемых функций. Из покрытия отрезка такими окрестностями выделим конечное покрытие $U(x_1), U(x_2), ..., U(x_k)$ и выберем $n_0 = \max(n_{x_1}, n_{x_2}, ..., n_{x_k})$. Тогда при $n > n_0$
$$0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon \ \forall x \in [a, b],$$
что и означает равномерную сходимость. □

Теорема 6.6.6 (Теорема Дини для рядов) *Пусть* $f_k(x) \in C[a, b]$ *и* $f_k(x) \geq 0$. *Если сумма ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$, *то ряд к своей сумме сходится на* $[a, b]$ *равномерно.*

Доказательство. Достаточно применить теорему Дини для последовательностей к последовательности частичных сумм. □

Теорема 6.6.7 (Интегрирование ф.п.) *Пусть* $f_k(x), f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) \in R[a, b]$ *и при* $k \to +\infty$
$$f_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x).$$
Тогда $f \in R[a, b]$ *и*
$$\int\limits_a^x f_k(t)dt \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Доказательство. 1) Сначала докажем, что предельная функция $f(x)$ интегрируема. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда
$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in [a, b].$$
Пусть $n > n_0$, тогда
$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')| \leq$$
$$\leq 2\varepsilon + \omega(f_n, E) \ \Rightarrow \omega(f, E) \leq 2\varepsilon + \omega(f_n, E),$$
что дает интегрируемость f.

2) Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу равномерной сходимости,

$$\exists k_0: \ \forall k > k_0 \ \Rightarrow \ |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \ \forall x \in [a,b].$$

Пусть $k > k_0$, тогда

$$\left| \int\limits_a^x f_k(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt \right| \leq \int\limits_a^x |f_k(t) - f(t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a) \leq \varepsilon,$$

причем последняя оценка справедлива при всех $x \in [a,b]$. Это и доказывает равномерную сходимость. $\square$

Аналогичная теорема справедлива и для рядов.

Теорема 6.6.8 (О почленном интегрировании ряда) *Пусть* $f_k(x)$: $[a,b] \to \mathbb{R}$, *причем* $f_k(x) \in R[a,b]$. *Если ряд с общим членом* $f_k(x)$ *сходится равномерно к функции* $S(x)$ *на* $[a,b]$, *то* $S(x) \in R[a,b]$, *причем*

$$\int\limits_a^x \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^x f_k(t)dt, \quad \forall x \in [a,b].$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к частичным суммам рассматриваемого ряда. $\square$

Осталось решить вопрос о дифференцируемости предельной функции. В простейшем случае он решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 6.6.9 (О дифференцируемости предельной функции) *Пусть* $f_k(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$, *причем* $f_k(x) \in C^1[a,b]$. *Если*

1. *Существует* $x_0 \in [a,b]$, *что последовательность* $f_k(x_0)$ *сходится.*
2. $f'_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$ *при* $k \to +\infty$.

то

1. $f_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ *при* $k \to +\infty$.
2. $f'(x) = g(x)$ *на* $[a,b]$ *и, в частности,* $f(x) \in C^1[a,b]$.

Доказательство. По предыдущей теореме,

$$\lim_{k \to +\infty} \int\limits_{x_0}^x f'_k(t)dt = \int\limits_{x_0}^x g(t)dt,$$

причем последняя сходимость равномерна по $x \in [a, b]$. В то же время,

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_k'(x)dx = \lim_{k\to+\infty} (f_k(x) - f_k(x_0)) = \int\limits_{x_0}^{x} g(x)dx.$$

Так как существует предел $C = \lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x_0)$, то

$$f(x) = \lim_{k\to+\infty} f(x) = C + \int\limits_{x_0}^{x} g(x)dx,$$

где последняя сходимость равномерна на $[a, b]$. Используя теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом, получим

$$f'(x) = g(x),\ \forall x \in [a, b].$$

Тем самым теорема доказана. □

На самом деле справедлива и более общая теорема.

Теорема 6.6.10 (О дифференцируемости предельной функции*)
Пусть $f_k(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$, причем $f_k(x)$ дифференцируемы на $[a, b]$. Если

1. *Существует $x_0 \in [a, b]$, что $f_k(x_0)$ сходится.*
2. $f_k'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$.

то

1. $f_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.
2. $f'(x) = g(x)$ *на* $[a, b]$.

Доказательство. Без доказательства. □

7 Степенные ряды

7.1 Общие свойства степенных рядов

Определение 7.1.1 *Степенным рядом называется функциональный ряд вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k,$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ и a_k – числовая последовательность.

Замечание 7.1.1 *Ясно, что множество сходимости любого степенного ряда не пусто, так как при* $x = x_0$ *сумма равна* $a_0 \in \mathbb{R}$

Замечание 7.1.2 *Линейной заменой* $t = x - x_0$ *произвольный степенной ряд сводится к ряду вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

Не нарушая общности, в дальнейшем мы будем рассматривать именно такие ряды (при $x_0 = 0$*).*

Естественно возникает следующий набор вопросов:

1. Каково множество сходимости степенного ряда?

2. Каковы свойства суммы степенного ряда?

3. Можно ли данную функцию представить степенным рядом?

Начнем с ответа на первый вопрос.

Теорема 7.1.1 (1 теорема Абеля) *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

1. *Если существует* x_1*, что ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \quad \text{сходится,}$$

то исходный ряд сходится абсолютно при всех x *таких, что* $|x| < |x_1|$.

2. *Если существует* x_1*, что ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \quad \text{расходится,}$$

то исходный ряд расходится при всех x *таких, что* $|x| > |x_1|$.

Доказательство. 1. Ясно, что имеет смысл рассматривать случай $x_1 \neq 0$ (иначе множество x таких, что $|x| < |x_1|$ пусто). Пусть $|x| < |x_1|$, тогда

$$\left|a_k x^k\right| = \left|a_k x_1^k\right| \left|\frac{x}{x_1}\right|^k.$$

Так как ряд с общим членом $a_k x_1^k$ сходится, то $|a_k x_1^k| \le C$, а значит

$$\left|a_k x_1^k\right| \left|\frac{x}{x_1}\right|^k \le C \left|\frac{x}{x_1}\right|^k.$$

Заметим, что $0 \le \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, а значит ряд с общим членом $C\left|\frac{x}{x_1}\right|^k$ сходится как геометрическая прогрессия. Отсюда, согласно признаку сравнения, сходится, причем абсолютно, исходный ряд.
2. Второй пункт легко доказывается от противного. Если бы при x таком, что $|x| > |x_1|$ ряд сходился, то по только что доказанному он бы сходился и при $x = x_1$, что противоречит условию $\square$
Из этой теоремы сразу вытекает вид множества сходимости степенного ряда.

Следствие 7.1.2 *Пусть дан степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Тогда существует $R \in [0, +\infty]$, что при $x \in (-R, R)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \in (-\infty, -R); (R; +\infty)$ ряд расходится. При этом при $R = 0$ множество сходимости состоит из одной точки $\{0\}$, а при $R = +\infty$ множество сходимости совпадает с $\mathbb{R}$.*

Определение 7.1.2 *Число R из предыдущего следствия называется радиусом сходимости, а множество $(-R, R)$ интервалом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.*

Замечание 7.1.3 *При $x = \pm R$ ситуация может быть разной. Например, ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

имеет радиус сходимости $R = 1$ и сходится лишь при $x \in (-1, 1)$.

В то же время ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

тоже имеет радиус сходимости, равный 1, но сходится при $x \in [-1, 1]$, причем абсолютно.

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

опять же имеет радиус сходимости $R = 1$, но сходится абсолютно при $x \in (-1, 1)$, при $x = -1$ сходится условно, а при $x = 1$ расходится. Может *также возникнуть ситуация, когда в обеих точках $x = \pm R$ ряд сходится условно.*

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда удобно пользоваться признаками Даламбера, радикальным признаком Коши, признаком Раабе и проч. С теоретической же точки зрения оказывается важной следующая теорема.

Теорема 7.1.3 (Теорема Коши-Адамара) *Пусть дан степенной ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$. *Тогда*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Доказательство. Воспользуемся радикальным признаком Коши. Найдем

$$l = \overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Если $l < 1$, то ряд сходится, причем абсолютно. Если $l > 1$, то ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Это равносильно неравенствам

$$|x| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}} \text{ и } |x| > \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

соответсвенно. Это и доказывает теорему. □

Для того чтобы ответить на вопросы о свойствах суммы степенного ряда, решим вопрос о равномерной сходимости степенного ряда.

Теорема 7.1.4 (О равномерной сх-ти степенного ряда) *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *и пусть* $R > 0$ *– его радиус сходимости. Тогда для любого* $r \in (0, R)$ *рассматриваемый ряд сходится равномерно на* $[-r, r]$.

Доказательство. Для общего члена ряда при $x \in [-r, r]$ справедлива оценка

$$\left|a_k x^k\right| \le |a_k r^k|.$$

Но, так как $r \in (0, R)$, то ряд с общим членом $a_k r^k$ сходится абсолютно. Значит, утверждение теоремы следует из признака Вейерштрасса. □

Замечание 7.1.4 *Последнюю теорему можно сформулировать и иначе: степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости. Доказательство остается практически без изменений.*

Отсюда сразу получается следующее следствие.

Теорема 7.1.5 (О непрерывности суммы степенного ряда) *Пусть дан степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *и* $R > 0$ *– его радиус сходимости. Тогда сумма ряда непрерывна на интервале сходимости* $(-R, R)$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in (-R, R)$ и $\delta = \min\left(\frac{R-x_0}{2}, \frac{x_0+R}{2}\right)$. Тогда $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (-R, R)$ и, по предыдущей теореме, на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ряд сходится равномерно. Так как члены ряда непрерывны на этом отрезке, то, по свойству равномерно сходящихся рядов, сумма ряда тоже непрерывна на этом отрезке. В частности, она непрерывна при $x = x_0$. В силу произвольности x_0 теорема доказана. $\square$

Вопрос о непрерывности суммы ряда при $x = \pm R$ решает следующая теорема.

Теорема 7.1.6 (2 теорема Абеля) *Пусть дан степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *и* R *– его радиус сходимости. Если сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k R^k$*, то исходный ряд сходится равномерно на* $[0, R]$.

Доказательство. Преобразуем общий член ряда следующим образом:

$$a_k x^k = a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k.$$

Так как ряд с общим членом $a_k R^k$ сходится, причем равномерно на $[0, R]$, а последовательность $\left(\frac{x}{R}\right)^k$ монотонна и равномерно ограничена, то по признаку Абеля-Дирихле данный ряд сходится равномерно на $[0, R]$. $\square$

Следствие 7.1.7 *В рамках условий предыдущей теоремы, сумма степенного ряда непрерывна на* $(-R, R]$.

Замечание 7.1.5 *Ясно, что аналогичная теорема справедлива и для случая* $x = -R$.

Теперь обратимся к вопросу интегрирования степенных рядов.

Теорема 7.1.8 (Об интегрировании степенных рядов) *Пусть дан степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *и* $R > 0$ *– его радиус сходимости. Пусть* $[a, b] \subset (-R, R)$*, тогда*

$$\int\limits_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int\limits_a^b x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Если ряд сходится при $x = R$ ($x = -R$), то b может равняться R (a может равняться $-R$).

Доказательство. Данная теорема – прямое следствие теоремы об интегрировании равномерно сходящегося ряда. □

Перед тем как решить вопрос о дифференцировании ряда, докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 7.1.1 *Радиусы сходимости рядов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

совпадают.

Доказательство. Докажем, например, что радиусы сходимости первого и второго рядов совпадают. Так как $1 \leq \sqrt[k]{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$, то по $\varepsilon > 0$ найдется k_0, что $\forall k > k_0$ выполняется

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \sqrt[k]{k|a_k|} < (1+\varepsilon)\sqrt[k]{|a_k|}.$$

Переходя к верхнему пределу, получим

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \varlimsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k|a_k|} \leq (1+\varepsilon) \varlimsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

В силу произвольности ε,

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \varlimsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k|a_k|},$$

а значит, по теореме Коши-Адамара, радиусы сходимости одинаковы. Аналогично доказывается, что радиус сходимости третьего ряда такой же. □

Теорема 7.1.9 (О дифференцировании степенных рядов) *Пусть дан степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $R > 0$ – его радиус сходимости, а $S(x)$ – его сумма. Тогда $S(x) \in C^{\infty}(-R, R)$, причем*

$$S^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)(k-2)...(k-m+1) a_k x^{k-m}, \quad m \geq 1.$$

Доказательство. Как было доказано в предыдущей лемме, ряд, полученный формальным дифференцированием, то есть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$$

имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный. Пусть $x_0 \in (-R, R)$. Тогда, выбрав $\delta = \frac{1}{2}\min(R - x_0, x_0 + R)$ получим, что

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \in (-R, R),$$

а значит ряд из производных сходится на этом отрезке равномерно. Так как исходный ряд сходится (хотя бы в точке $x_0 \in (-R, R)$), то по теореме о дифференцировании функционального ряда заключаем, что

$$S'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^k.$$

Так как x_0 – произвольная точка из интервала сходимости, то доказано, что $S(x)$ дифференцируема на $(-R, R)$ и

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k.$$

Из теоремы о непрерывности суммы степенного ряда заключаем, что $S(x) \in C^1(-R, R)$. Дальнейшее доказательство проводится по индукции. □

Замечание 7.1.6 *Ясно, что при рассмотрении степенного ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

все полученные результаты остаются справедливы, но на интервале сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$, где R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Результаты про концы интервала сходимости (2 теорема Абеля и проч.) тоже остаются справедливыми.

В заключение, докажем теорему единственности.

Теорема 7.1.10 (О единственности разложения в степенной ряд) *Пусть при $x \in (-R, R)$ справедливо разложение*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Тогда

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

то есть написанный ряд является рядом Тейлора.

Доказательство. Согласно предыдущей теореме,

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)...(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m}.$$

Подставив $x = x_0$, получаем, что

$$f^{(m)}(x_0) = m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot 1 \cdot a_m,$$

откуда

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}.$$

□

7.2 Остаточные члены формулы Тейлора

Напомним определение многочлена Тейлора.

Определение 7.2.1 *Многочлен*

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора для функции f порядка n в точке x_0.

Естественно, важным является информация об остатке, то есть о величине

$$r_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0),$$

которая характеризует точность приближения рассматриваемой функции построенным многочленом. Получим интегральную формул остаточного члена.

Теорема 7.2.1 (Интегральная форма остаточного члена ф. Тейлора) *Пусть $f(x)$ на отрезке с концами x_0 и x непрерывно дифференцируема $(n+1)$ раз. Тогда*

$$r_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница и проинтегрируем по частям. Тогда,

$$f(x) - f(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int\limits_{x_0}^{x} f'(t)(x-t)'dt =$$

$$= f'(x_0)(x-x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt = f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} f''(t)\left((x-t)^2\right)' dt.$$

Продолжая этот процесс, приходим к тому, что

$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

$\square$

Получим некоторые важные следствия.

Следствие 7.2.2 (Остаточный член в форме Лагранжа) *В рамках условий предыдущей теоремы,*

$$r_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ расположена между x и x_0.

Доказательство. Так как $(x-t)^n$ сохраняет знак на отрезке с концами x_0 и x, то по теореме о среднем

$$r_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

$\square$

Следствие 7.2.3 (Остаточный член в форме Коши) *В рамках условий предыдущей теоремы,*

$$r_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0),$$

где ξ расположена между x и x_0.

Доказательство. По теореме о среднем,

$$r_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

$\square$

7.3 Ряды Тейлора и Маклорена

Определение 7.3.1 *Пусть функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема в точке x_0. Тогда ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

называется рядом Тейлора в точке x_0, порожденным функцией f.

Определение 7.3.2 *Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора называется рядом Маклорена.*

Замечание 7.3.1 *Заметим, что ряд Тейлора всегда сходится к породившей его функции хотя бы в одной точке – в точке x_0.*

Пример 7.3.1 *Оказывается, что бывают функции, ряды Тейлора которых сходятся к их значениям лишь в одной точке. Рассмотрим функцию*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}.$$

Легко проверить, что ряд Маклорена, построенный по функции f, состоит только из нулей, а значит сходится к значению функции только при $x = 0$ (хотя сам по себе сходится при всех возможных x).

Почему возникает ситуация как в последнем примере? Ясно, что так как

$$f(x) = P_n(x, x_0) + r_n(x, x_0),$$

то то, что при некотором $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} P_n(x, x_0)$$

равносильно тому, что $r_n(x, x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.3.1 *Для того чтобы ряд Тейлора, построенный по функции $f(x)$, сходился к этой функции в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы*

$$r_n(x, x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

В последнем примере остаток стремится к нулю только при $x = 0$, поэтому и сходимость наблюдается лишь в одной точке. Глубинные причины такой ситуации становятся понятными лишь при рассмотрении функции комплексного переменного.

Теорема 7.3.2 (Достаточное условие сходимости ряда Тейлора) *Пусть функция f бесконечно дифференцируема на отрезке с концами x_0 и x. Если на этом отрезке производные функции равномерно ограничены, то есть*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup 0,$$

то

$$r_n(x, x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Доказательство. Воспользуемся остаточным членом в формле Лагранжа. Согласно условию,

$$|r_n(x, x_0)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \leq M\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

так как факториал растет быстрее показательной функции. По предыдущей теореме, ряд Тейлора сходится в точке x к породившей его функции. □

7.4 Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора

Применим полученные знания для разложения основных элементарных функций. Раскладывать будем при $x_0 = 0$ (то есть в ряд Маклорена).

7.4.1 Ряд Маклорена для e^x

Ясно, что если $f(x) = e^x$, то

$$f^{(n)}(x) = e^x \text{ и, в частности, } f^{(n)}(0) = 1.$$

Тогда ряд Маклорена, построенный по функции f, имеет вид

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Пусть $x \in (-r, r)$. Тогда справедлива оценка:

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x < e^r,$$

а значит, согласно достаточному условию сходимости ряда Тейлора, он сходится к породившей его функции на любом промежутке вида $(-r, r)$, а значит, и на всем $\mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.4.2 Ряд Маклорена для a^x

Используя результат предыдущего пункта, соотношение $a^x = e^{x \ln a}$, а также единственность разложения в степенной ряд, легко получить, что

$$a^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^k a}{k!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.4.3 Ряд Маклорена для $\sin x$

Ясно, что так как $f(x) = \sin x$, то

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right) \quad \text{и, в частности,} \quad f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Тогда ряд Маклорена, построенный по функции f, имеет вид

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Ясно, что на отрезке с концами 0 и x справедлива оценка:

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)\right| \le 1,$$

а значит, согласно достаточному условию сходимости ряда Тейлора,

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.4.4 Ряд Маклорена для $\cos x$

Аналогично полученному в предыдущем пункте,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.4.5 Ряд Маклорена для $\ln(1+x)$

Ясно, что так как $f(x)=\ln(1+x)$, то

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\ \text{ и, в частности, }\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!.$$

Тогда ряд Маклорена, построенный по функции f, имеет вид

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

Написанный ряд сходится лишь при $x\in(-1,1]$, поэтому только при этих значениях ряд и имеет смысл исследовать на сходимость к породившей его функции. Используем остаток в интегральной форме. Пусть $x\in(-1,1)$, тогда

$$r_n(x)=(-1)^n\int\limits_0^x\frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt=(-1)^nx^{n+1}\int\limits_0^1\frac{(1-z)^n}{(1+xz)^{n+1}}dz.$$

(сделали замену переменной $t=xz$, $dt=xdz$).

Заметим, что при $x\in(-1,1)$ и $z\in[0,1]$ выполнены неравенства

$$1+xz>1-z\quad\text{и}\quad 1+xz<1-|x|.$$

Тогда

$$|r_n(x)|<\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

а значит при $x\in(-1,1)$ построенный ряд сходится к значению породившей его функции. В то же время, при $x=1$ ряд сходится, а значит его сумма непрерывна на $[0,1]$ (2 теорема Абеля). Тогда

$$\ln 2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

и

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k},\quad x\in(-1,1].$$

7.4.6 Ряд Маклорена для $(1+x)^\alpha$

Ясно, что так как $f(x)=(1+x)^\alpha$, то

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n},\quad n\in\mathbb{N}.$$

В частности, при $x = 0$,

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как $f(0) = 1$, то ряд Маклорена, построенный по функции f, имеет вид

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + ... =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(k-1))}{k!}x^k.$$

Без дополнительных пояснений отметим случаи, когда написанный ряд сходится:

1. Если $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то ряд сходится при $x \in \mathbb{R}$.
2. Если $\alpha \notin \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, то ряд сходится абсолютно при $x \in [1, 1]$ и расходится при $x \notin [-1, 1]$.
3. Если $\alpha \in (-1, 0)$, то ряд сходится абсолютно при $x \in (-1, 1)$, условно при $x = 1$, иначе расходится.
4. Если $\alpha \le -1$, то ряд сходится абсолютно при $x \in (-1, 1)$, иначе расходится.

Теперь исследуем сходимость написанного ряда к породившей его функции. Для этого снова воспользуемся остаточным членом в интегральной форме:

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!} \int\limits_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}}dt =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!} \cdot x^{n+1} \int\limits_0^1 \frac{(1-z)^n}{(1+xz)^{n+1-\alpha}}dz.$$

Пусть $x \in (-1, 1)$, тогда, по доказанному в предыдущем пункте,

$$|r_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)^{1-\alpha}} \cdot \left|\alpha\left(\frac{\alpha}{1}-1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)...\left(\frac{\alpha}{n}-1\right)\right|.$$

При достаточно больших n будет выполнено

$$\left|\frac{\alpha}{n}-1\right| \le 1,$$

откуда
$$\left|\alpha\left(\frac{\alpha}{1}-1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{\alpha}{n}-1\right)\right|\le C,$$
где C не зависит от n. Тогда $r_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Итак,

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}x^k,\quad x\in(-1,1).$$

Вопрос о сходимости ряда к породившей его функции при $x=\pm1$ решается с использованием 2 теоремы Абеля и замечанием о сходимости написанного ряда, сделанным ранее.

7.4.7 Ряд Маклорена для $\operatorname{arctg} x$

Используя результат предыдущего пункта, а также единственность разложения в степенной ряд, получим

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k},\quad x\in(-1,1).$$

Пусть $x\in(-1,1)$, тогда написанный ряд можно интегрировать почленно по отрезку с концами 0 и x, а значит

$$\int\limits_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int\limits_0^x x^{2k}dx,$$

откуда
$$\operatorname{arctg} x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1},\quad x\in(-1,1).$$

Так как получившийся справа ряд сходится (условно) при $x=\pm1$, то, согласно следствию из второй теоремы Абеля,

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1},\quad x\in[-1,1].$$

8 Тригонометрические ряды Фурье

8.1 Ортогональные системы функций

Определение 8.1.1 *Пусть функции $\varphi_1, ..., \varphi_n, ... \in C[a,b]$. Говорят, что система функций $\varphi_1, ..., \varphi_n$ ортогональна на $[a,b]$, если*

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m.$$

Если, кроме того,

$$\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то система функций $\varphi_1, ..., \varphi_n$ называется ортонормированной.

Пример 8.1.1 *Тригонометрическая система*

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ ...,\ \sin nx,\ \cos nx,\ ...$$

является ортогональной на отрезке $[-\pi,\pi]$, а система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ ...,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ ...$$

ортонормирована на $[-\pi,\pi]$.

Пример 8.1.2 *Многочлены Лежандра*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\ n \in \mathbb{N}, \quad L_0(x) = 1,$$

образуют ортогональную систему на отрезке $[-1,1]$.

8.2 Ряд Фурье по ортогональной системе

Предположим, что

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Этот ряд называется тригонометрическим рядом Фурье.

Заметим, что

1. Если написанное равенство справедливо на $\mathbb{R}$, то f – периодическая функция с периодом 2π. В частности, она полностью определяется заданием ее на произвольном промежутке длины 2π.

2. Обратно, логично предположить, что имея 2π-периодическую функцию, ее можно разложить в ряд по тригонометрической системе функций. Это, конечно, не всегда так.

Следующую лемму сформулируем для любых ортогональных систем функций.

Лемма 8.2.1 *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x) = f(x)$ *сходится равномерно на* $[a,b]$, *то справедливо равенство:*

$$a_n = \frac{\int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{*}$$

Доказательство. Так как функции $\varphi_n(x)$ непрерывны на $[a,b]$, то они ограничены. И тогда из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)\varphi_n(x)$ на $[a,b]$ и

$$f(x)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)\varphi_n(x).$$

Воспользуемся теоремой об интегрировании равномерно сходящегося ряда и ортогональностью системы $\varphi_1, ..., \varphi_n, ...$ на $[a,b]$. Получим

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)\right)\varphi_n(x)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int\limits_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)dx = a_n \int\limits_a^b \varphi_n^2(x).$$

Так как функции $\varphi_n(x)$ не равны тождественно нулю и непрерывны, то интеграл в знаменателе не равен нулю. И требуемое равенство доказано. $\square$

Определение 8.2.1 *Числа a_n, вычисленные по формулам (*), называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ – рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Записывать это будем так:*

$$f(x) \;\sim\; \sum_{n=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x), \quad x\in[a,b].$$

Для тригонометрической системы функций (Пример 1) тригонометрический ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \;\sim\; \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx,$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

8.3 Лемма Римана

Будем говорить, что функция $f(x)\in R_{loc}(a,b)$ интегрируема с модулем или абсолютна интегрируема на (a,b), если несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится. В частности, f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, если сходится интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$.

Лемма 8.3.1 (Римана) *Пусть f абсолютно интегрируема на конечном ии бесконечном интервале (a,b). Тогда*

$$\lim_{w\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\sin wx dx=\lim_{w\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\cos wx dx=0.$$

Доказательство. 1) $f(x)\in R[a,b]$. Тогда $\forall\varepsilon>0$ найдется разбиение $\tau=\{x_i\}$ отрезка $[a,b]$, что разность сумм Дарбу $S_\tau-s_\tau<\varepsilon/2$, то есть,

$$S_\tau-s_\tau=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2},$$

где $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$.

Тогда на каждом отрезке разбиения выполняется неравенство

$$0\le f(x)-m_i\le M_i-m_i$$

и

$$\Big|\int\limits_a^b f(x)\sin wx dx\Big| = \Big|\sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin wx dx\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-m_i)\sin wx dx + \sum_{i=1}^n m_i \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \sin wx dx\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)-m_i|\cdot|\sin wx| dx + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|w|}|\cos wx_i - \cos wx_{i-1}| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i + \frac{2}{|w|}\sum_{i=1}^n |m_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2n}{|w|}\sup_{x\in[a,b]}|f(x)| < \varepsilon.$$

(последнее слагаемое $\to 0$ при $w\to\infty$, значит $< \varepsilon/2$).

2) Пусть теперь f абсолютно интегрируема на (a,b) (возможно неограниченном). Будем считать, что единственная особая точка интеграла – точка b. Тогда для $\forall ep > 0$ найдется $b' < b$ такое, что $f\in R[a,b']$, а $\int_{b'}^b |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}$. По п.1) найдется w_0 такое, что при $|w| > w_0$ выполнено

$$\Big|\int\limits_a^{b'} f(x)\sin wx dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, при $|w| > w_0$ имеем

$$\Big|\int\limits_a^b f(x)\sin wx dx\Big| = \Big|\int\limits_a^{b'} f(x)\sin wx dx + \int\limits_{b'}^b f(x)\sin wx dx\Big| \leq$$

$$\leq \Big|\int\limits_a^{b'} f(x)\sin wx dx\Big| + \Big|\int\limits_{b'}^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Аналогично доказывается, что $\int\limits_a^b f(x)\cos wx dx \longrightarrow 0$ при $w\to\infty$. □

Следствие 8.3.1 *Если f абсолютно интегрируема на $[-\pi,\pi]$, то ее коэффициенты тригонометрического ряда Фурье стремятся к 0 при $n\to\infty$, а также общий член ряда стремится к 0.*

8.4 Ядро Дирихле

Рассмотрим частичную сумму ряда Фурье и немного ее преобразуем:

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum k = 1^n \left(\cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t)\right) dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)dt$$

Здесь мы ввели обозначение

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku \quad \text{(ядро Дирихле)}.$$

Заметим, что

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \ldots + \cos nu = \frac{\sin(n+1/2)u}{2\sin(u/2)} \quad \text{при } u \neq 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Отметим простейшие свойства ядра Дирихле.

Лемма 8.4.1 *Ядро Дирихле обладает следующими свойствами:*

1. $D_n(u)$ – 2π*-периодическая функция.*
2. $D_n(u)$ – *четная функция.*
3. *Выполнено условие нормировки:*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)dx = 1.$$

Итак, для частичной суммы ряда Фурье оказывается справедливым следующее представление.

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)dt.$$

Лемма 8.4.2 *Пусть функция f является 2π-периодической на $\mathbb{R}$. Тогда*

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \left(f(x-t) + f(x+t)\right) D_n(t)dt.$$

Доказательство. Сделаем замену переменной $u = x-t$ и учтем, что, согласно условию и свойствам ядра Дирихле, подынтегральная функция является 2π-периодической, тогда

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)D_n(u)du = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)du.$$

Так как ядро Дирихле является четным, то

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \left(f(x-u) + f(x+u)\right) D_n(u)du,$$

что и доказывает лемму. □

8.5 Принцип локализации и условия Гёльдера

Используя представление частичной суммы ряда Фурье в виде интеграла, а также используя лемму Римана, можно сформулировать следующий основной принцип локализации.

Теорема 8.5.1 (Принцип локализации) *Пусть f, g – 2π-периодические на $\mathbb{R}$ и абсолютно интегрируемые на $(-\pi, \pi)$ функции. Если функции f и g совпадают в сколь угодно малой окрестности точки $x_0 \in (-\pi, \pi)$, то их тригонометрические ряды Фурье сходятся или расходятся в точке x_0 одновременно, причем если сходятся, то к одному и тому же значению.*

Доказательство. Воспользуемся представлением частичной суммы ряда Фурье в виде

$$T_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \left(f(x_0-t) + f(x_0+t)\right) D_n(t)dt.$$

Так как на $[\delta, \pi]$, $\delta > 0$ выполняется неравенство $\sin\frac{t}{2} > \sin\frac{\delta}{2}$, то на основании леммы Римана можно заключить, что

$$T_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} \left(f(x_0-t) + f(x_0+t)\right) D_n(t)dt + o(1).$$

В силу того, что при $t \in (-\delta, \delta)$ справедливо равенство $f(x_0+t) = g(x_0+t)$, то

$$\int_0^\delta \left(f(x_0-t) + f(x_0+t)\right) D_n(t)dt = \int_0^\delta \left(g(x_0-t) + g(x_0+t)\right) D_n(t)dt.$$

Из этого следует утверждение теоремы. □

Замечание 8.5.1 *Даже если оба ряда сходятся в точке x_0, их сумма вовсе не обязательно совпадает со значением в точке x_0 породивших их функций.*

Определение 8.5.1 (Условия Гёльдера) *Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x_0 условию Гёльдера, если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ и такие числа $\delta > 0$, $\alpha \in (0,1]$ и $C > 0$, что для всех $u \in (0, \delta)$ выполнены неравенства*

$$\Big| f(x_0+u) - f(x_0+0) \Big| \leq Cu^\alpha, \quad \Big| f(x_0-u) - f(x_0-0) \Big| \leq Cu^\alpha.$$

Расширим понятие односторонних производных:

$$f'_+(x_0) = \lim_{u \to 0+} \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{u \to 0+} \frac{f(x_0-u) - f(x_0+0)}{-u}.$$

Лемма 8.5.1 *Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечные односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, то она удовлетворяет в точке x_0 условию Гёльдера с показателем $\alpha = 1$.*

Доказательство. Из существования односторонних производных следует, что функции

$$\varphi(u) = \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u}, \quad \psi(u) = \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{-u}$$

имеют конечные пределы при $u \to 0+$ и, значит, ограничены на интервале $(0, \delta)$, то есть существует $C > 0$ такое, что

$$\left| \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u} \right| \leq C, \quad \left| \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{-u} \right| \leq C,$$

откуда и следуют условия Гёльдера при $\alpha = 1$. □

Следствие 8.5.2 *Дифференцируемая в точке функция удовлетворяет в этой точке условиям Гёльдера.*

Обратное утверждение неверно. Например, функция $f(x) = |x|^\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ удовлетворяет условиям Гёльдера в точке $x_0 = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

8.6 Сходимость ряда Фурье в точке

Теорема 8.6.1 (Дирихле) *Пусть $f(x)$ – 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция, удовлетворяющая в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ условию Гёльдера. Тогда в точке x_0 тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $\frac{1}{2}\left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right)$.*

Доказательство. Запишем частичную сумму ряда Фурье:

$$T_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(f(x_0-t)+f(x_0+t)\right) D_n(t)dt,$$

и

$$\int\limits_0^\pi D_n(t)dt = \frac{\pi}{2},$$

то

$$T_n(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(f(x_0-t)+f(x_0+t)\right) D_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right) D_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)+f(x_0+t)-f(x_0+0)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt.$$

Теперь воспользуемся леммой Римана. Для этого докажем, что функция $\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)+f(x_0+t)-f(x_0+0)}{\sin\frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируема на $(0,\pi)$. Рассмотрим

$$\int\limits_0^\pi \left|\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)+f(x_0+t)-f(x_0+0)}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\pi \left|\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt + \int\limits_0^\pi \left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt.$$

Для первого интеграла имеем при $t\to 0+$ (для второго аналогично):

$$\left|\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{\sin\frac{t}{2}}\right| \sim 2\left|\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}\right| \leq 2Ct^\alpha,$$

откуда следует, что

$$\left|f(x_0-t)-f(x_0-0)\right| \leq \frac{2C}{t^{1-\alpha}}, \quad 1-\alpha \in [0,1),$$

оба интеграла сходятся, выполнены условия леммы Римана и

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

$\square$

Замечание 8.6.1 *Если в условиях теоремы функция еще и непрерывна в точке x_0, то ее ряд Фурье сходится к $f(x_0)$.*

8.7 Некоторые примеры и приложения

8.7.1 Ряд из обратных квадратов

Пусть функция $f(x) = x^2$ задана на $[-\pi, \pi]$, а дальше периодически продолжена на $\mathbb{R}$. Ясно, что согласно доказанной теореме, ее ряд Фурье сходится к ней поточечно при $x \in \mathbb{R}$. Вычислим коэффициенты разложения.

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2.$$

Далее, пусть $k \geq 1$, тогда

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos kx dx,$$

где последнее равенство верно в силу четности подынтегральной функции. Интегрируя два раза по частям и учитывая, что $\cos \pi k = (-1)^k$, получим

$$a_k(f) = (-1)^k \frac{4}{k^2}, \quad k \geq 1.$$

Далее,

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx dx = 0,$$

так как подынтегральная функция нечетна, а промежуток интегрирования симметричен. Итого, на $[-\pi, \pi]$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx.$$

Пусть $x = \pi$, тогда

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2},$$

откуда

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

8.7.2 Бесконечное произведение для синуса

Рассмотрим функцию $\cos \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, заданную на $[-\pi, \pi]$ и периодически продолженную на $\mathbb{R}$. Ясно, что построенный по ней ряд Фурье сходится к значению данной функции во всех точках $x \in \mathbb{R}$.

Вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos \alpha x \cos kx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (\cos(\alpha - k)x + \cos(\alpha + k)x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\alpha - k)\pi}{\alpha - k} + \frac{\sin(\alpha + k)\pi}{\alpha + k} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi} \left(\frac{\sin \pi\alpha}{\alpha - k} + \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha + k} \right) = \frac{(-1)^k}{\pi} 2\alpha \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha^2 - k^2}.$$

Далее,

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \sin kx dx = 0,$$

так как подынтегральная функция нечетна, а промежуток симметричен. Тогда, на $(-\pi, \pi)$

$$\cos \alpha x = \frac{2\alpha}{\pi} \sin \pi\alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2} \cos kx \right).$$

Пусть $x = \pi$, тогда

$$\cos \pi\alpha = \frac{2\alpha}{\pi} \sin \pi\alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - k^2} \right)$$

и

$$\operatorname{ctg} \pi\alpha = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 - k^2} \right)$$

или

$$\operatorname{ctg}\pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2 - k^2}.$$

При $|\alpha| \le \alpha_0 < 1$ написанный ряд сходится равномерно, а значит его можно интегрировать почленно. Пусть $x \in (-1, 1)$, тогда

$$\int_0^x \left(\operatorname{ctg}\pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha}\right) d\alpha = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\alpha}{\alpha^2 - k^2} d\alpha,$$

откуда

$$\ln\left|\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}\right|\Bigg|_0^x = \sum_{k=1}^{\infty}\ln|\alpha^2 - k^2|\Big|_0^x$$

или

$$\ln\left|\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\ln\left|1 - \frac{x^2}{k^2}\right|.$$

Избавляясь от логарифмом, получаем, что

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right), \quad |x| < 1.$$

8.8 Ряды Фурье по произвольному промежутку длины $2l$

До сих пор мы рассматривали 2π-периодические функции, заданные на отрезке $[-\pi, \pi]$. Но что, если период у функции другой? Предположим, что функция f задана на промежутке $[-l, l]$ и периодически продолжена на $\mathbb{R}$. Легко понять, что если $x \in [-l, l]$, то

$$y = \frac{\pi}{l}x \in [-\pi, \pi].$$

Значит, функции f можно сопоставить ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{\pi k x}{l} + b_k\sin\frac{\pi k x}{l},$$

где

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}dx, \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Все сформулированные ранее результаты сохраняются с точностью до замены отрезка (или интервала) с концами $\pm\pi$ на отрезок (или интервал) с концами $\pm l$.