MatAnLab1(term 3)

Балакин Дмитрий M3235

22 октября 2023 г.

Аналитическая часть

$$f(x,y) = x^2y^2\ln(4x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\left(2x\ln(4x^2+y^2) + \frac{8x\cdot x^2}{4x^2+y^2}\right) = 2xy^2\left(\ln(4x^2+y^2) + \frac{4x^2}{4x^2+y^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\left(2y\ln(4x^2+y^2) + \frac{2y\cdot y^2}{4x^2+y^2}\right) = 2x^2y\left(\ln(4x^2+y^2) + \frac{y^2}{4x^2+y^2}\right) = 0$$

$\cancel{A_1(0,1) \quad A_3(0,-1)}$

$\cancel{A_2\left(\frac{1}{2},0\right) \quad A_4\left(-\frac{1}{2},0\right)}$

$$A_1\left(\frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{2}}, \frac{e^{-1/4}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$A_2\left(\frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{2}}, \frac{-e^{-1/4}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$A_3\left(\frac{-e^{-1/4}}{2\sqrt{2}}, \frac{e^{-1/4}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$A_4\left(\frac{-e^{-1/4}}{2\sqrt{2}}, \frac{-e^{-1/4}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$B = \{(0,t) \mid t \neq 0\}$$

$$C = \{(t,0) \mid t \neq 0\}$$

$\cancel{V = (0,0)}$

$$\ln(4x^2+y^2) = -\frac{4x^2}{4x^2+y^2}$$

$$\frac{4x^2}{4x^2+y^2} = \frac{y^2}{4x^2+y^2}$$

$$4x^2 = y^2$$

$$y = \pm 2x$$

$$\ln(8x^2) = -\frac{4x^2}{8x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$8x^2 = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$x^2 = \frac{e^{-1/2}}{8}$$

$$x = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}\,e^{1/4}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{e}}$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{e}}$$

$\cancel{A_{1,2,3,4} \Rightarrow x^2 =}$

=

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2\left(\ln(4x^2+y^2) + \frac{x\cdot 8x}{4x^2+y^2} + \frac{\overset{12}{\cancel{8}}x^2(4x^2+y^2) - 8x\cdot 4x^3}{(4x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= 2y^2\left(\ln(4x^2+y^2) + \frac{8x^2}{4x^2+y^2} + \frac{\overset{16x^4+12x^2y^2}{\cancel{8x^2y^2}}}{(4x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2\left(\ln(4x^2+y^2) + \frac{2y^2}{4x^2+y^2} + \frac{3y^2(4x^2+y^2) - y^3\cdot 2y}{(4x^2+y^2)^2}\right) =$$

$$= 2x^2\left(\ln(4x^2+y^2) + \frac{2y^2}{4x^2+y^2} + \frac{y^4+12x^2y^2}{(4x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2x\left(2y\ln(4x^2+y^2) + \frac{2y\cdot y^2}{4x^2+y^2} + \frac{8x^2y(4x^2+y^2) - 2y\cdot 8x^2y^2}{(4x^2+y^2)^2}\right) =$$

$$= 2x\left(2y\ln(4x^2+y^2) + \frac{2y^3}{4x^2+y^2} + \frac{32x^4y}{(4x^2+y^2)^2}\right) =$$

$$= 4xy\left(\ln(4x^2+y^2) + \frac{y^2}{4x^2+y^2} + \frac{16x^4}{(4x^2+y^2)^2}\right)$$

$$d^2 f = 2y^2\left(\ln(4x^2+y^2) + \frac{8x^2}{4x^2+y^2} + \frac{16x^4+12x^2y^2}{(4x^2+y^2)^2}\right)dx^2$$

$$+\,2x^2\left(\ln(4x^2+y^2) + \frac{2y^2}{4x^2+y^2} + \frac{y^4+12x^2y^2}{(4x^2+y^2)^2}\right)dy^2 +$$

$$+\,2\cdot 4xy\left(\ln(4x^2+y^2) + \frac{y^2}{4x^2+y^2} + \frac{16x^4}{(4x^2+y^2)^2}\right)dx\,dy = a(x,y)dx^2 + b(x,y)dy^2 + 2c(x,y)dx\,dy$$

$$f(x,y) = f(|x|,|y|)$$

Заметим, что ~~$f(x,y)=f(-x,y)=f(x,-y)=f(-x$~~

$\Rightarrow$ Для точек A_1, A_2, A_3, A_4 будет ~~аналогичная~~ одна и та же матрица Гессе.

$$|x_0| = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{2}}, \quad |y_0| = \frac{e^{-1/4}}{\sqrt{2}}$$

$$a(|x_0|,|y_0|) = 2\frac{e^{-1/2}}{2}\left(\ln\left(4\cdot\frac{e^{-1/2}}{8} + \frac{e^{-1/2}}{2}\right) + \frac{8\cdot\frac{e^{-1/2}}{8}}{4\cdot\frac{e^{-1/2}}{8} + \frac{e^{-1/2}}{2}} + \frac{16\cdot\frac{e^{-1}}{64} + 12\frac{e^{-1/2}}{8}\cdot\frac{e^{-1/2}}{2}}{\left(4\cdot\frac{e^{-1/2}}{8} + \frac{e^{-1/2}}{2}\right)^2}\right)$$

$$= e^{-1/2}\left(\ln(e^{-1/2}) + \frac{e^{-1/2}}{e^{-1/2}} + \frac{\frac{e^{-1}}{4} + \frac{3e^{-1}}{4}}{e^{-1}}\right) =$$

$$= e^{-1/2}\left(-\frac{1}{2} + 1 + 1\right) = \frac{3e^{-1/2}}{2}$$

$$b(|x_0|,|y_0|) = 2\frac{e^{-1/2}}{8}\left(-\frac{1}{2} + \frac{2\cdot\frac{e^{-1/2}}{2}}{e^{-1/2}} + \frac{\frac{e^{-1}}{4} + \frac{3e^{-1}}{4}}{e^{-1}}\right) =$$

$$= \frac{3e^{-1/2}}{8}$$

$$f(x_0, y_0) = 4 \cdot \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{-1/4}}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{16 \frac{e^{-1}}{64}}{e^{-1}} \right) =$$

$$= \frac{e^{-1/2}}{4}$$

=> Матрица Гессе для A_1, A_2, A_3, A_4: $\begin{pmatrix} \frac{3e^{-1/2}}{2} & \frac{e^{-1/2}}{4} \\ \frac{e^{-1/2}}{4} & \frac{3e^{-1/2}}{8} \end{pmatrix}$

$=> \Delta_1 = \frac{3e^{-1/2}}{2} > 0, \ \Delta_2 = \frac{9e^{-1}}{16} - \frac{e^{-1}}{16} = \frac{8e^{-1}}{16} = \frac{e^{-1}}{2} > 0$

=> A_1, A_2, A_3, A_4 – точки экстремума.

Для точек из мн. B матрица Гессе: $\begin{pmatrix} 2t^2\ln(t^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

для C: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2t^2\ln(4t^2) \end{pmatrix}$ т.к. их определители (Δ_2)

$= 0$ => неопр. кв. форма.

~~ΔB: $\exists \Delta y \in (0,1) \Rightarrow f(0, \Delta y) \le 0$~~

~~$\exists \Delta y \in (1, +\infty) \Rightarrow f(0, \Delta y) \ge 0$~~

$\Delta B: f(\Delta x, t+\Delta y) - f(0, t) = \Delta x^2 (t+\Delta y)^2 \ln(4\Delta x^2 + (t+\Delta y)^2) -$

$- 0$ ~~$\Delta x^2 \ln(4\Delta x^2 + (t+\Delta y)^2)$~~

~~т.к. $\Delta x^2 (t+\Delta y)^2 > 0$~~

$\Delta x^2 (t+\Delta y)^2 \ln(4\Delta x^2 + (t+\Delta y)^2)$ $\wedge 0$ т.к. $\Delta x^2 (t+\Delta y)^2 > 0$

$\ln(4\Delta x^2 + (t+\Delta y)^2) \wedge 0$

$4\Delta x^2 + (t+\Delta y)^2 \wedge 1$

$4\Delta x^2 + (t+\Delta y)^2 \wedge 1$

Если $t \in (-\infty;-1)\cup(1;+\infty) \Rightarrow 4\Delta x^2+(t+\Delta y)^2 \geq 1$

$\Rightarrow \Delta x^2(t+\Delta y)^2 \ln(4\Delta x^2+(t+\Delta y)^2) \geq 0 \Rightarrow$ выполн. усл.
экстремума.

Если $t \in (-1;0)\cup(0;1) \Rightarrow 4\Delta x^2+(t+\Delta y) \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta x^2(t+\Delta y)^2 \ln(4\Delta x^2+(t+\Delta y)^2) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ выполн. усл. экстремума.

Если $t = \pm 1$

$\Delta x = 0,\ \Delta y_1 = |\Delta y|,\ \Delta y_2 = -|\Delta y| \Rightarrow$

$\Rightarrow (\underset{-1}{1}+\Delta y_1)^2 \underset{\leq}{\geq} 1,\ (\underset{-1}{1}+\Delta y_2) \underset{\geq}{\leq} 1 \Rightarrow$ знак меняется

$\Rightarrow B_1 = \{(0,t) \mid t \in (-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)\}$ –

– точки экстремума.

Аналогично для $C \Rightarrow C_1 = \{(t,0) \mid t \in (-\infty;-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2};0)\cup(0;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};+\infty)\}$

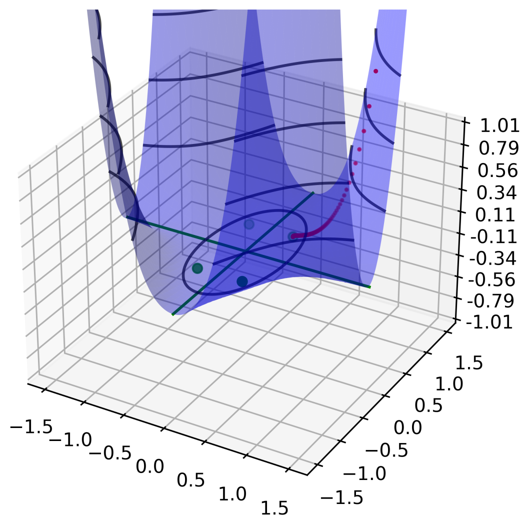
$\Rightarrow$ Точками экстремума являются A_1, A_2, A_3, A_4, точки из мн. B_1 и C_1.

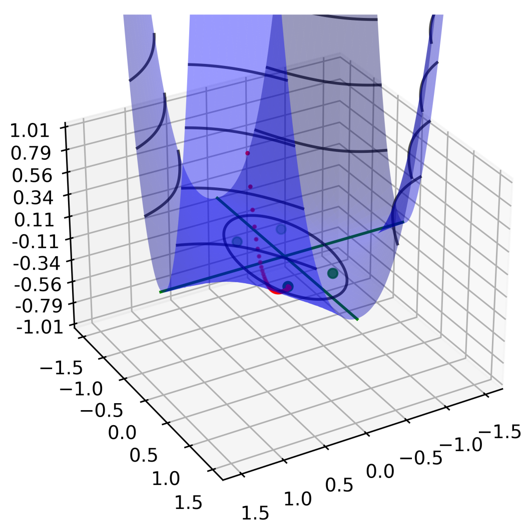
Численный метод

Результат работы программы

```
критерий останова: ||(Δxk,Δyk)|| < 1e-07
количество итераций: 3528
время работы программы(в милисекундах): 2453
полученная точка и значение функции в этой точке: (x, y) = (0.2753370520325687, 0.5507452845333277)  f(x, y) = -0.011496232281831819
точка экстремума и значение в ней: (x, y) = (0.2753476574515919, 0.5506953149031838)  f(x, y) = -0.011496232536607573
погрешность вычисления: 2.5477575431309685e-10

Process finished with exit code 0
```





На графиках красным цветом обозначена полученная последовательность точек, зеленым цветом обозначены точки экстремума, темно синим обозначены линии уровня, а сам график функции обозначен голубым цветом.
параметр a равен 0.01

критерий останова: $\|(\Delta x_k, \Delta y_k)\| < 0.0000001$, такой критерий был выбран так как при стремлении к экстремуму $\Delta x_k, \Delta y_k \to 0$
количество итераций: 3528
время работы программы(в милисекундах): 2643
полученная точка и значение функции в этой точке: (x, y) = (0.2753370520325687, 0.5507452845333277), f(x, y) = -0.011496232281831819
точка экстремума и значение в ней: (x, y) = (0.2753476574515919, 0.5506953149031838), f(x, y) = -0.011496232536607573
погрешность вычисления: 2.5477575431309685e-10