> *restart*

> *with*(LinearAlgebra) : with(ArrayTools) : *with*(*plots*) : *with*(*CurveFitting*) :

Реализация кубического сплайна

> $Cubic\_Spline := \mathbf{proc}(X, f)$
$\mathbf{local}\ i, n, m\_fun, h, a, b, c, d, S, L, A, fs, Y;$
$n := numelems(X);$
$Y := [seq(f(X[i]), i = 1..11)];$
$h := [0,\ seq(X[i] - X[i-1], i = 2..n, 1)];$
$m\_fun := ((\mathrm{i}, \mathrm{j}) \to \mathbf{if}\ \mathrm{i} = 1\ \mathbf{and}\ \mathrm{j} = 1\ \mathbf{or}\ \mathrm{i} = \mathrm{n}\ \mathbf{and}\ \mathrm{j} = \mathrm{n}\ \mathbf{then}\ 1$
$\mathbf{elif}\ i = 1\ \mathbf{and}\ j = 2\ \mathbf{or}\ i = n\ \mathbf{and}\ j = n - 1\ \ \mathbf{then}\ 0$
$\mathbf{elif}\ \mathrm{i} = \mathrm{j}\ \mathbf{then}\ 2 \cdot (h[i] + h[i+1])$
$\mathbf{elif}\ \mathrm{i} - \mathrm{j} = 1\ \mathbf{then}\ h[i]$
$\mathbf{elif}\ i - j = -1\ \mathbf{then}\ h[i+1]$
$\mathbf{else}\ 0$
$\mathbf{end\ if});$
$$S := \left((i, x) \to a[i] + b[i] \cdot (x - X[i]) + \frac{c[i]}{2}(x - X[i])^2 + \frac{d[i]}{6}(x - X[i])^3\right);$$
$L := [\ ];$
$\mathrm{A} := \mathrm{Matrix}(\mathrm{n}, \mathrm{m\_fun});$
$$fs := Vector\left(\left[0, seq\left(6 \cdot \left(\frac{(Y[i+1] - Y[i])}{h[i+1]} - \frac{(Y[i] - Y[i-1])}{h[i]}\right), i = 2..n-1\right), 0\right]\right);$$
$c := LinearSolve(A, fs);$

$a := (0, seq(Y[i], i = 2..n));$
$$b := \left(0,\ seq\left(\frac{(Y[i] - Y[i-1])}{h[i]} + \frac{c[i] \cdot h[i]}{3} + \frac{c[i-1] \cdot h[i]}{6}, i = 2..n\right)\right);$$
$$d := \left(0,\ seq\left(\frac{(c[i] - c[i-1])}{h[i]}, i = 2..n\right)\right);$$
$\mathbf{for}\ i\ \mathbf{from}\ 2\ \mathbf{to}\ n\ \mathbf{do}$
$\quad \mathbf{if}\ i = n\ \mathbf{then}\ L := [op(L), X[i-1] \le x \le X[i]]\ \mathbf{else}\ L := [op(L), X[i-1] \le x < X[i]]\ \mathbf{end\ if};$
$\quad L := [op(L),\ \ S(i, x)];$
$\mathbf{end\ do};$
$\mathbf{return}\ x \to piecewise(seq(L));$
$\mathbf{end\ proc}:$

Реализация B-сплайна

> $B\_Spline := \mathbf{proc}(xs, f)\ \mathbf{local}\ e, n, X, B0, B1, B2, \mathrm{lambda}, res;$
$e := 10^{-9};$
$n := numelems(xs) + 1;$
$X := [xs[1] - 2 \cdot e, xs[1] - e, op(xs), xs[-1] + e,\ xs[-1] + 2 \cdot e];$
$B0 := (i, x) \to piecewise(X[i] \le x < X[i+1], 1, 0);$

$B1 := (i, x) \to \frac{x - X[i]}{X[i+1] - X[i]} \cdot B0(i, x) + \frac{X[i+2] - x}{X[i+2] - X[i+1]} \cdot B0(i+1, x);$

$B2 := (i, x) \to \frac{x - X[i]}{X[i+2] - X[i]} \cdot B1(i, x) + \frac{X[i+3] - x}{X[i+3] - X[i+1]} \cdot B1(i+1, x);$

$\text{lambda} := j \to \text{piecewise}\Big($

$j = 1,\ f(X[1])\ ,$

$1 < j < n,\ \frac{1}{2}\left(-f(X[j+1\ ]) + 4 \cdot f\left(\frac{X[j+1] + X[j+2]}{2}\right) - f(X[j+2])\right),$

$j = n,\ f(X[n+1])$

$\Big);$

$res := x \to sum(\text{lambda}(i) \cdot B2(i, x), i = 1..n);$

return res;

end proc:

> $Maple\_Cubic\_Spline :=$ **proc**(X, f)
local i;
local $Y := [seq(f(X[i]), i = 1..11)];$
return $x \to Spline(X, Y, x, degree = 3);$
end proc:

> $Maple\_B\_Spline :=$ **proc**(X, f)
local i;
local $e := 10^{-9}$;
local $Y := [f(X[1]), f(X[1]), seq(f(X[i]), i = 1..11), f(X[11]), f(X[11])];$
return $x \to BSplineCurve(\ [X[1] - 2 \cdot e, X[1] - e, op(X), X[11] + e, X[11] + 2 \cdot e]\ , Y, x, order = 3);$
end proc:

> $f := x \to x^4$

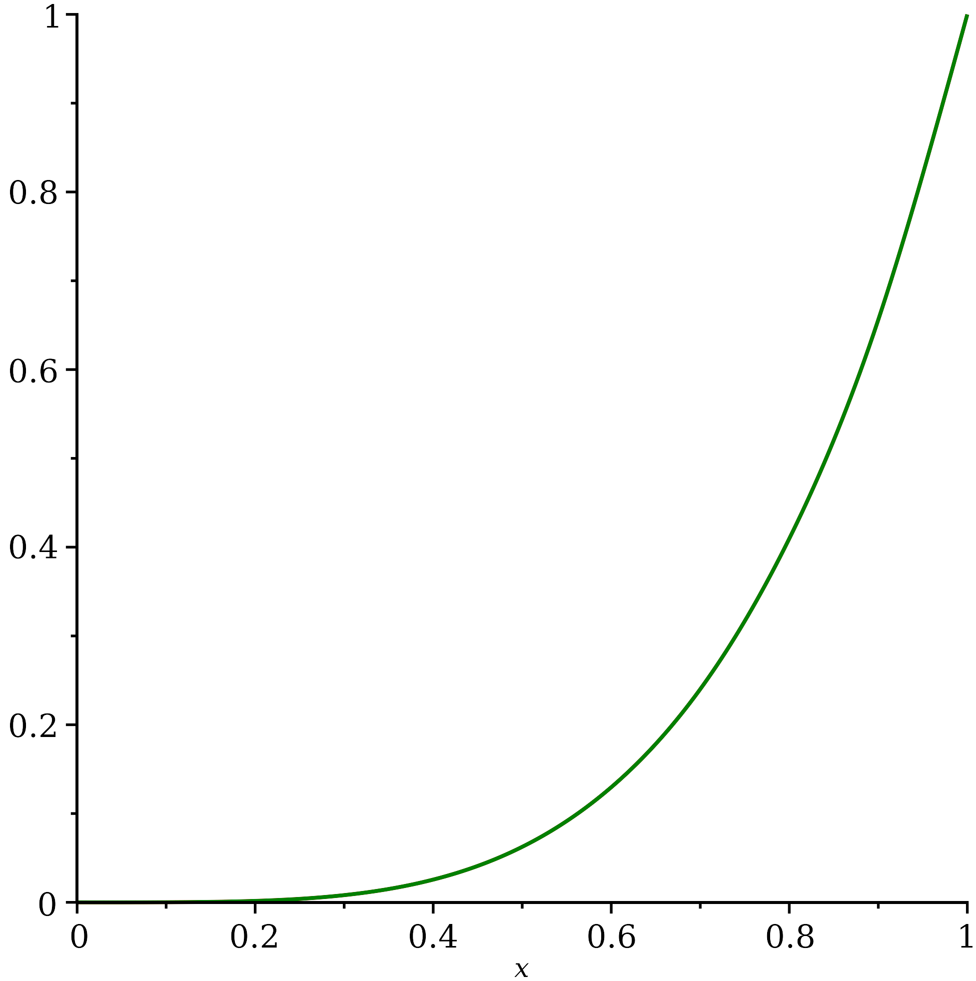
$$f := x \mapsto x^4 \qquad (1)$$

> $X := [0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0]$

$$X := [0., 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0] \qquad (2)$$

Построим аппроксимацию функции
$f(x) = x^4$ кубическими сплайнами : своим и стандартным из Maple

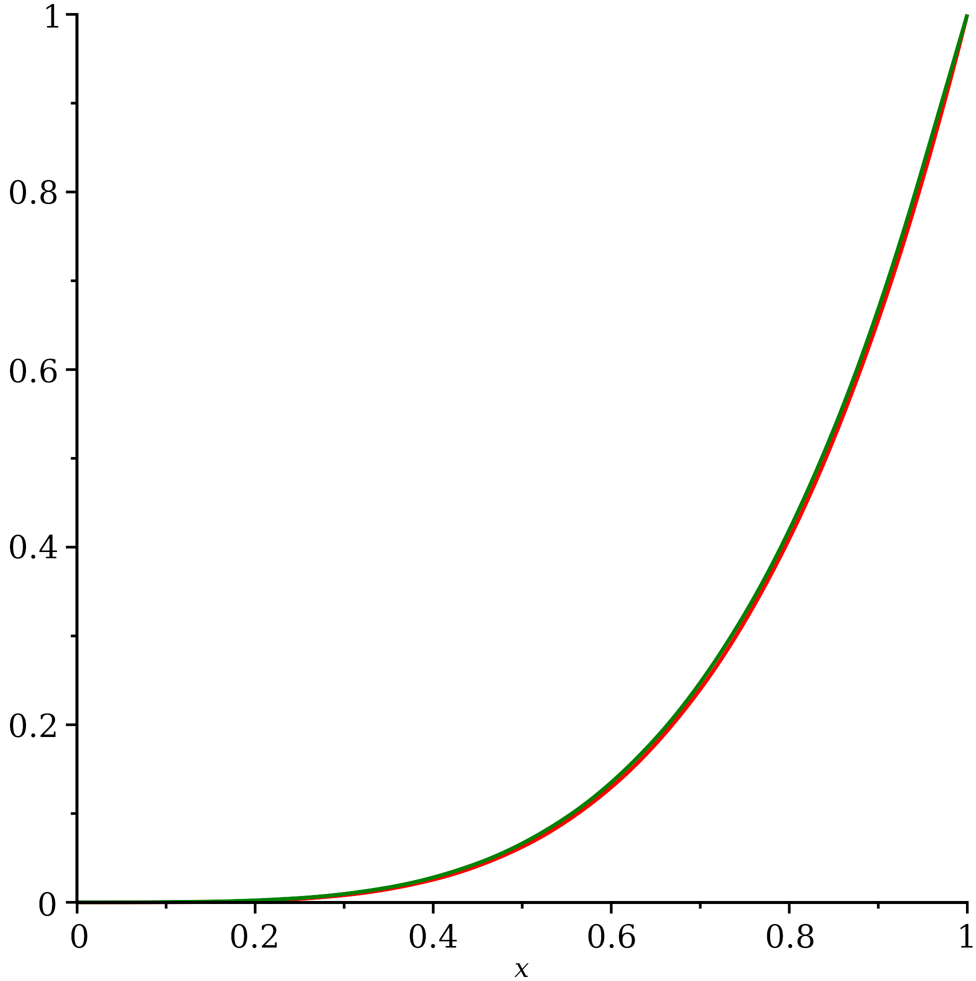
> $plot([Cubic\_Spline(X, f)(x), Maple\_Cubic\_Spline(X, f)(x)], x = 0..1, color = ["Red", "Green"])$



Визуально графики получились очень похожими.

Теперь воспользуемся своими B-сплайнами и встроенными.

> $plot([B\_Spline(X, f)(x), Maple\_B\_Spline(X, f)(x)], x = 0..1, color = ["Red", "Green"])$



Здесь же видно на глаз, что графики расходятся.

Теперь посчитаем максимальную ошибку каждой аппроксимации

> $error\_Cubic\_Spline := \max([seq(\text{abs}(Cubic\_Spline(X, f)(x) - f(x)), x = 0..1, 0.01)])$

$$error\_Cubic\_Spline := 0.00586382253191997 \quad (3)$$

> $error\_Maple\_Cubic\_Spline := \max([seq(\text{abs}(Maple\_Cubic\_Spline(X, f)(x) - f(x)), x = 0..1, 0.01)])$

$$error\_Maple\_Cubic\_Spline := 0.00586382253191975 \quad (4)$$

> $error\_B\_Spline := \max([seq(\text{abs}(B\_Spline(X, f)(x) - f(x)), x = 0..1, 0.01)])$

$$error\_B\_Spline := 0.0002049601 \quad (5)$$

Для встроенного В-сплайна не получилось посчитать ошибку:(

Наблюдение

Кубические сплайны показали одинаковую максимальную погрешность, а В-сплайн показал наиболее точный результат, оценивая встроенный В-сплайн визуально, предполагаю, что он наименее точный в данном случае.

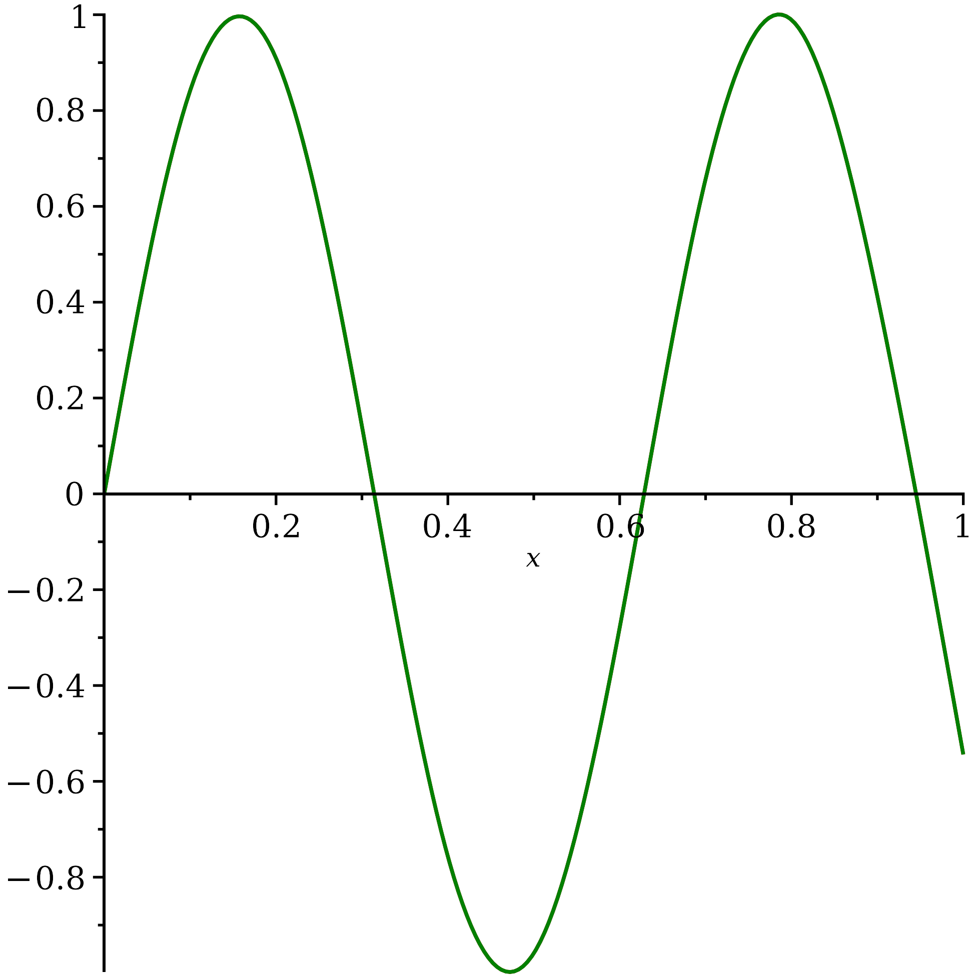
Повторим для другой функции

> $f := x \rightarrow \sin(10\,x)$

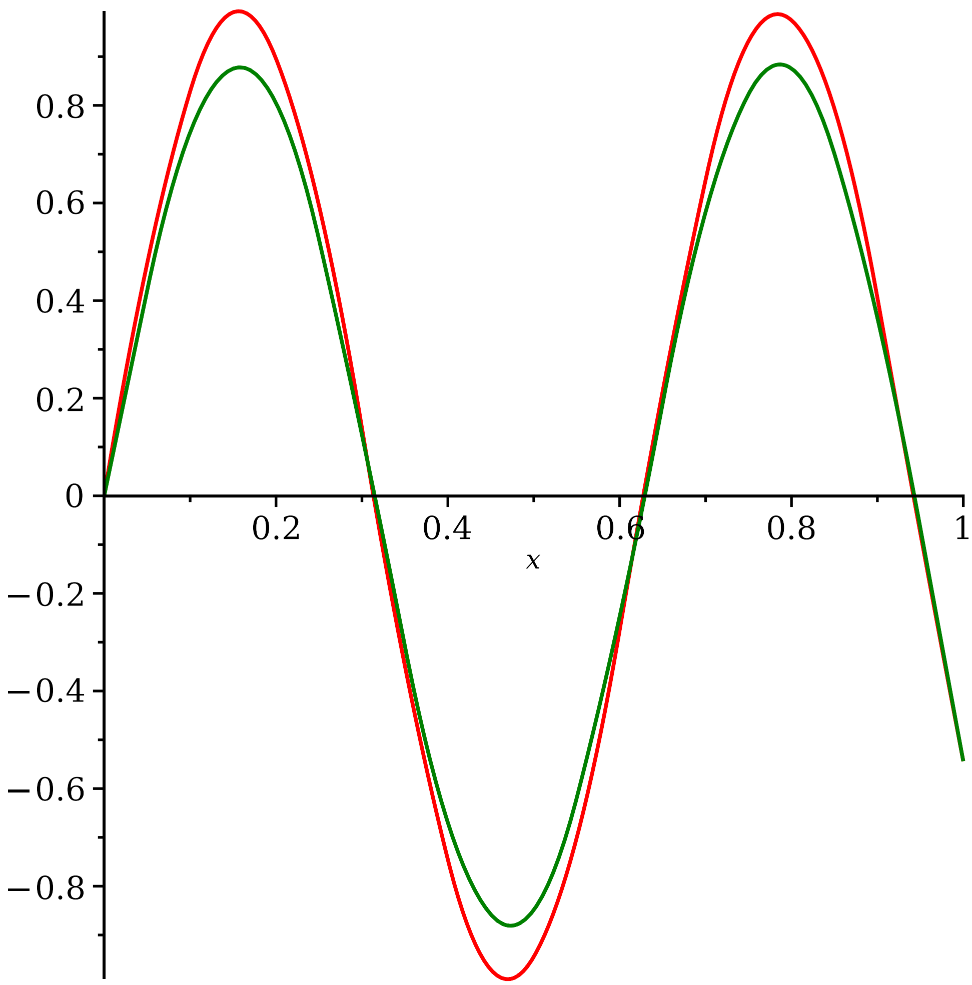
(6)

$$f := x \mapsto \sin(10 \cdot x) \quad \textbf{(6)}$$

> $plot([Cubic\_Spline(X, f)(x), Maple\_Cubic\_Spline(X, f)(x)], x = 0..1, color = ["Red", "Green"])$



> $plot([B\_Spline(X, f)(x), Maple\_B\_Spline(X, f)(x)], x = 0..1, color = ["Red", "Green"])$



> $error\_Cubic\_Spline := \max([seq(\mathrm{abs}(Cubic\_Spline(X, f)(x) - f(x)), x = 0..1, 0.01)])$

$$error\_Cubic\_Spline := 0.0289563391141861 \quad \textbf{(7)}$$

> $error\_Maple\_Cubic\_Spline := \max([seq(\mathrm{abs}(Maple\_Cubic\_Spline(X, f)(x) - f(x)), x = 0..1, 0.01)])$

$$error\_Maple\_Cubic\_Spline := 0.0289563390990514 \quad \textbf{(8)}$$

> $error\_B\_Spline := \max([seq(\mathrm{abs}(B\_Spline(X, f)(x) - f(x)), x = 0..1, 0.01)])$

$$error\_B\_Spline := 0.0154298791 \quad \textbf{(9)}$$

Для данной функции ситуация повторяется, кубические сплайны показывают очень близкий результат, B-сплайн окащывается самым точным, а встроенный B-сплайн наименее точный.