Задачи для защиты лабораторной работы №1

Плюхин Дмитрий группа P3117

Март 2016

1 Задача 4

Задание
Упорядочить функции по возрастанию скорости роста

$$\log_5 n \quad n^{0.3} \quad \sqrt{n} \quad n\log_2 n \quad n(\log_2 n)^3 \quad n^3 \quad 4^n$$

Решение
Известно, что экспонента растет быстрее, чем любой полином, а любой полином растет быстрее, чем любой логарифм поэтому из предложенных функций наибольшая скорость роста у 4^n.
Перед ней будут идти полиномы $n^{0.3}, \sqrt{n}, n^3$, сравним их скорости роста, для этого запишем $\sqrt{n}$ как $n^{0.5}$. Становится видно, что n^3 растет быстрее, чем $n^{0.5}$, а, в свою очередь, $n^{0.5}$ - быстрее чем $n^{0.3}$, что следует из порядка возрастания их степеней.
Наконец, сравним скорости роста логарифмов $\log_5 n, n\log_2 n, n(log_2 n)^3$.
Приведем $\log_5 n$ к основанию 2: $\log_5 n = \frac{1}{\log_2 5}\log_2 n$, где $\frac{1}{\log_2 5}$ - константа, не влияющая на скорость роста. Поскольку все логарифмы кроме $\frac{1}{\log_2 5}\log_2 n$ домножаются на полином первой степени, у логарфма $\log_5 n$ наименьшая скорость роста. Относительно двух оставшихся, $n\log_2 n, n(\log_2 n)^3$, второй растет быстрее, поскольку возводится в большую степень.
Учтем, что $n(\log_2 n)^3$ и $n\log_2 n$ растут быстрее полиномов $n^{0,3}$ и $\sqrt{n}$, поскольку включают в себя полином высшей степени. Таким образом, имеем последовательность:

$$\log_5 n \quad n^{0.3} \quad \sqrt{n} \quad n\log_2 n \quad n(\log_2 n)^3 \quad n^3 \quad 4^n$$

2 Задача 5

Задание
Отметить все верные утверждения:

- $100n\log_2 n = \Theta(n + (log_2 n)^2)$
- $2^n = \Theta(2^{n+1})$
- $\frac{n^2}{\log_3 n} = O(n(\log_2 n)^2)$
- $n! = \Omega(2^n)$
- $nlog_2 n = \Theta(n)$
- $n! = O(2^n)$
- $\frac{n^2}{\log_4 n} = \Theta(n(log_3 n)^2)$

Решение
Согласно первому утверждению, отношение $\frac{n+(\log_2 n)^2}{100n\log_2 n}$ должно быть ограничено сверху и снизу некоторыми константами, оно представляет собой сумму $\frac{1}{100\log_2 n}+\frac{\log_2 n}{100n}$, которая не ограничена снизу, так как логарифм асимптотически растет медленнее полинома, значит, первое утверждение не верно.
Рассмотрим второе утверждение. Оно верно, поскольку
$\Theta(2^{n+1})=\Theta(2\times 2^n)=\Theta(2^n)$, и функция не может расти быстрее или медленнее самой себя.
Рассмотрим третье утверждение. Оно неверно, поскольку выражение $\frac{n}{\log_3 n(\log_2 n)^2}=\frac{n}{\ln(3)(\ln(2))^2(\ln(n))^3}$ не ограничено сверху какой-либо константой, потому что полином растет быстрее логарифма.
Четвертое утверждение верно, поскольку:
$n!=\prod_{i=1}^n i\geq\prod_{i=1}^n 2\Rightarrow n!=\Omega(2^n)$
Пятое утверждение не верно, поскольку, очевидно, функция $nlog_2n$ отличается от n не на константу.
Шестое утверждение не верно, поскольку, аналогично рассуждениям для четвертого:
$n!=\prod_{i=1}^n i\geq\prod_{i=1}^n 2\Rightarrow n!=\Omega(2^n)$
Последнее утверждение аналогично третьему с разницей лишь в основаниях логарифмов. Это различие может быть сведено к различию в константах, которые не влияют на скорость роста функций
Так, имеем всего 2 верных утверждения:

- $2^n=\Theta(2^{n+1})$
- $n!=\Omega(2^n)$

3 Задача 6

Задание
Доказать, что

$$\log(n!)=\Omega(nlogn)$$

Решение

$$\log(n!)=\log(\prod_{i=1}^n i)=\sum_{i=1}^n logi=\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} logi+\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} logi\geq\frac{n}{2}\log\frac{n}{2}\Rightarrow\log(n!)=\Omega(nlogn)$$

Что и требовалось доказать