

Лекция 12: Ранг матрицы

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

В данной лекции изучается важная числовая характеристика матрицы — ее ранг. Сначала будут введены три ранга матрицы: по строкам, по столбцам и по минорам. Затем будет доказано, что все три ранга совпадают. Из доказательства этого фундаментального результата, известного как теорема о ранге матрицы, будет вытекать алгоритм нахождения ранга. Кроме того, как мы увидим, теорема о ранге позволит обосновать некоторые из сформулированных ранее алгоритмов и доказать упоминавшееся в лекции 8 утверждение о невырожденности матрицы перехода от одного базиса к другому. После этого мы докажем теорему о ранге произведения матриц. Понятие ранга матрицы часто возникает и играет важную роль в линейной алгебре и ее приложениях. В частности, оно оказывается очень полезным при исследовании систем линейных уравнений. Одним из проявлений этого является критерий совместности системы линейных уравнений, который формулируется на языке рангов основной и расширенной матриц системы. Этот результат будет доказан в конце лекции. Еще одному применению понятия ранга матрицы при анализе систем линейных уравнений будет посвящена следующая лекция.

Определение

Рассмотрим произвольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Векторы, компонентами которых являются элементы строк матрицы A , т. е. векторы

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, \mathbf{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}),$$

называются *векторами-строками* матрицы A . Аналогично, векторы, компонентами которых являются элементы столбцов матрицы A , т. е. векторы

$$\mathbf{a}^1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), \mathbf{a}^2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, \mathbf{a}^n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}),$$

называются *векторами-столбцами* матрицы A .

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ принадлежат пространству \mathbb{R}_n , а векторы $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n$ — пространству \mathbb{R}_m .

В следующем определении используется понятие минора матрицы, которое было введено в лекции 5.

Определение

Рангом матрицы A по строкам называется размерность подпространства, порожденного векторами-строками этой матрицы, а *рангом матрицы A по столбцам* — размерность подпространства, порожденного векторами-столбцами этой матрицы. Ранг матрицы A по строкам обозначается через $r_s(A)$, а ранг A по столбцам — через $r_c(A)$.

Рангом матрицы по минорам называется наибольший из порядков тех миноров этой матрицы, которые не равны нулю. Ранг матрицы A по минорам обозначается через $r_m(A)$.

Большая часть данной лекции будет посвящена доказательству следующего фундаментального результата.

Теорема 1 (теорема о ранге матрицы)

Пусть A — произвольная матрица. Ранг матрицы A по строкам равен ее рангу по столбцам и равен ее рангу по минорам.

Прежде чем переходить к непосредственному доказательству этого утверждения, мы докажем ряд лемм.

Лемма 1

Умножение строки на ненулевое число и прибавление одной строки к другой не меняют ранга матрицы по строкам.

Доказательство. Пусть A — произвольная матрица, а B — матрица, полученная из A с помощью одного из двух элементарных преобразований, указанных в формулировке леммы. Обозначим векторы-строки матрицы A через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, а векторы-строки матрицы B — через $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$. Положим $V_A = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \rangle$ и $V_B = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m \rangle$. Требуется доказать, что $\dim V_A = \dim V_B$. Покажем, что на самом деле верно даже более сильное равенство $V_A = V_B$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: B получена из A умножением i -й строки матрицы A на ненулевое число t . В этом случае $\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_j$ для всех $j = 1, 2, \dots, m, j \neq i$ и $\mathbf{b}_i = t\mathbf{a}_i$. Ясно, что каждый из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ лежит в V_A , и потому $V_B \subseteq V_A$. С другой стороны, каждый из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ лежит в V_B (для всех векторов, кроме \mathbf{a}_i , это очевидно, а для \mathbf{a}_i вытекает из того, что $\mathbf{a}_i = \frac{1}{t} \cdot \mathbf{b}_i$). Следовательно, $V_A \subseteq V_B$, и потому $V_A = V_B$.

Случай 2: B получена из A прибавлением j -й строки матрицы A к ее i -й строке. В этом случае $\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k$ для всех $k = 1, 2, \dots, m, k \neq i$ и $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j$. Как и в предыдущем случае, ясно, что каждый из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ лежит в V_A , и потому $V_B \subseteq V_A$. Остается справедливым и обратное утверждение: каждый из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ лежит в V_B (для всех векторов, кроме \mathbf{a}_i , это очевидно, а для \mathbf{a}_i вытекает из того, что $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j$). Следовательно, $V_A \subseteq V_B$, и потому $V_A = V_B$. □

Лемма 2

Умножение строки на ненулевое число и прибавление одной строки к другой не меняют ее ранга по минорам.

Доказательство. Вновь предположим, что A — произвольная матрица, а B — матрица, полученная из A с помощью одного из двух элементарных преобразований, указанных в формулировке леммы. Пусть M — произвольный минор матрицы A . Матрицу, определителем которой является минор M , будем обозначать через A_M . Если матрица A_M расположена в строках с номерами i_1, i_2, \dots, i_k и столбцах с номерами j_1, j_2, \dots, j_k матрицы A , то определитель матрицы, расположенной в строках и столбцах матрицы B с теми же номерами, обозначим через M' . Ясно, что M' — минор матрицы B , и порядки миноров M и M' совпадают. Рассмотрим те же два случая, что и в доказательстве леммы 1.

Случай 1: B получена из A умножением i -й строки матрицы A на ненулевое число t . Пусть M — произвольный минор матрицы A . Если матрица A_M не содержит элементов i -й строки матрицы A , то $M' = M$. В противном случае предположение 1 из лекции 5 влечет, что $M' = tM$. Учитывая, что $t \neq 0$, получаем, что $M = 0$ тогда и только тогда, когда $M' = 0$. Следовательно, максимальные порядки ненулевых миноров в матрицах A и B совпадают, т. е. $r_m(A) = r_m(B)$.

Случай 2: B получена из A прибавлением j -й строки матрицы A к ее i -й строке. Пусть M — ненулевой минор k -го порядка матрицы A . Покажем, что в матрице B тоже есть ненулевой минор k -го порядка. Если матрица A_M не содержит элементов i -й и j -й строк матрицы A , то $M' = M \neq 0$. Если A_M содержит элементы как i -й, так и j -й строки матрицы A , то в силу предложения 6 из лекции 5 вновь получаем, что $M' = M \neq 0$. Предположим, наконец, что A_M содержит элементы i -й строки матрицы A , но не содержит элементов ее j -й строки. Если $M' \neq 0$, то нужный нам факт установлен. Пусть теперь $M' = 0$. Будем для простоты предполагать, что матрица A_M расположена в первых k строках и первых k столбцах матрицы A , $i = 1$ и $j = k + 1$ (в общем случае доказательство вполне аналогично).

Элементарные преобразования матрицы и ее ранг по минорам (3)

Используя предложение 5 из лекции 5, мы получаем, что

$$\begin{aligned} M' &= \begin{vmatrix} a_{11} + a_{k+11} & a_{12} + a_{k+12} & \dots & a_{1k} + a_{k+1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{k+11} & a_{k+12} & \dots & a_{k+1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = \\ &= M + \begin{vmatrix} a_{k+11} & a_{k+12} & \dots & a_{k+1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Обозначим последний из определителей, возникших в этой цепочке равенств, через D . Поскольку $M + D = M' = 0$, имеем

$$D = \begin{vmatrix} a_{k+11} & a_{k+12} & \dots & a_{k+1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = -M \neq 0. \quad (1)$$

Элементарные преобразования матрицы и ее ранг по минорам (4)

В матрице, определитель которой мы обозначили через D , поменяем местами сначала первую строку и вторую, затем вторую строку и третью, ..., наконец, $(k-1)$ -ую строку и k -тую. В результате, сделав $k-1$ перестановку строк, мы получим минор k -го порядка матрицы B (матрица, определителем которой он является, расположена в первых k столбцах и в строках со второй по $(k+1)$ -ую матрицы B). Обозначим этот минор через D' . Предложение 3 из лекции 5 и равенство (1) влекут, что $D' = (-1)^{k-1}D = (-1)^k M \neq 0$.

Итак, если матрица A содержит ненулевой минор k -го порядка, то тем же свойством обладает и матрица B . Следовательно, максимальный порядок ненулевого минора матрицы B не может быть меньше, чем максимальный порядок ненулевого минора матрицы A . Иными словами, $r_m(A) \leq r_m(B)$. Матрица A может быть получена из матрицы B последовательным выполнением трех операций: умножением j -й строки матрицы B на -1 , прибавлением j -й строки полученной матрицы к ее i -й строке и повторным умножением j -й строки полученной после этого матрицы на -1 . Первая и третья из этих операций, как было установлено при разборе случая 1, не меняют ранга матрицы по минорам, а вторая, как мы только что убедились, может разве лишь увеличить его. Следовательно, $r_m(B) \leq r_m(A)$ и потому $r_m(A) = r_m(B)$. □

Лемма 3

Ранг ступенчатой матрицы по строкам равен числу ее ненулевых строк.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — ступенчатая матрица, число ненулевых строк которой равно k . Очевидно, что любой набор из более чем k векторов-строк матрицы A (если он существует, т. е. если A содержит более k строк) содержит нулевой вектор и потому линейно зависим (см. лемму 4 в лекции 7). Следовательно, $r_s(A) \leq k$. Для завершения доказательства достаточно установить, что первые k векторов-строк матрицы A линейно независимы. Для простоты обозначений будем считать, что матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk} \neq 0$ (в общем случае доказательство аналогично).

Ранг ступенчатой матрицы по строкам (2)

Обозначим первые k векторов-строк матрицы A через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.
Предположим, что

$$t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0} \quad (3)$$

для некоторых чисел t_1, t_2, \dots, t_k . Приравнявая первые, вторые, \dots , k -тые компоненты этого векторного равенства, мы получим следующую однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} t_1 a_{11} & = 0, \\ t_1 a_{12} + t_2 a_{22} & = 0, \\ t_1 a_{13} + t_2 a_{23} + t_3 a_{33} & = 0, \\ \dots & \dots \\ t_1 a_{11} + t_2 a_{2k} + t_3 a_{3k} + \dots + t_k a_{kk} & = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Из первого уравнения этой системы и того, что $a_{11} \neq 0$, вытекает, что $t_1 = 0$. Подставляя это значение t_1 во второе уравнение системы (4), получаем, что $t_2 a_{22} = 0$. Поскольку $a_{22} \neq 0$, отсюда вытекает, что $t_2 = 0$. Аналогичным образом из третьего уравнения системы (4) выводится, что $t_3 = 0$, \dots , из k -го уравнения этой системы — что $t_k = 0$. Итак, из равенства (3) вытекает, что $t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0$. Следовательно, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы. \square

Лемма 4

Ранг ступенчатой матрицы по минорам равен числу ее ненулевых строк.

Доказательство. Вновь предположим, что $A = (a_{ij})$ — ступенчатая матрица, число ненулевых строк которой равно k . Очевидно, что любой минор более чем k -го порядка матрицы A (если он существует, т. е. если A содержит более k строк и более k столбцов) является определителем матрицы, которая содержит нулевую строку, и потому равен 0 (см. предложение 2 из лекции 5). Следовательно, $r_m(A) \leq k$. Для завершения доказательства достаточно установить, что матрица A имеет ненулевой минор порядка k . Для упрощения рассуждений будем считать, что матрица A имеет вид (2), где $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk} \neq 0$ (в общем случае доказательство аналогично). Матрица, расположенная в первых k строках и первых k столбцах матрицы A , является верхнетреугольной, и все элементы на ее главной диагонали отличны от 0. Определитель этой матрицы, являющийся минором k -го порядка матрицы A , отличен от 0 (см. предложение 11 из лекции 5). □

Предложение 9 из лекции 5 с очевидностью влечет следующее утверждение.

Лемма 5

При транспонировании матрицы ее ранг по минорам не меняется. □

Лемма 6

Любую матрицу можно привести к ступенчатому виду, используя только умножение строки на ненулевое число и прибавление одной строки к другой.

Доказательство. Как мы видели в лекции 4 (см. там комментарий 2 к доказательству теоремы 1), любую матрицу можно привести к ступенчатому виду, используя два преобразования, указанных в формулировке леммы, и перестановку строк местами. Но переставить местами i -тую и j -тую строки можно, выполнив последовательно следующие шесть преобразований: прибавить j -тую строку к i -й; умножить j -тую строку на -1 ; прибавить i -тую строку к j -й; умножить j -тую строку на -1 ; прибавить j -тую строку к i -й; умножить j -тую строку на -1 . □

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы о ранге матрицы. Пусть A — произвольная матрица, а B — ступенчатая матрица, полученная при приведении матрицы A к ступенчатому виду с помощью умножения строки на ненулевое число и прибавления одной строки к другой (см. лемму 6). Тогда $r_s(A) = r_s(B) = r_m(B) = r_m(A)$ (первое из этих равенств вытекает из леммы 1, второе — из лемм 3 и 4, а третье — из леммы 2). Таким образом, ранг A по строкам равен рангу A по минорам. Очевидно, что $r_c(A) = r_s(A^\top)$. Используя только что доказанное совпадение рангов произвольной матрицы по строкам и по минорам и лемму 5, имеем $r_c(A) = r_s(A^\top) = r_m(A^\top) = r_m(A)$. Таким образом, ранг A по столбцам равен рангу A по минорам (а значит, и рангу A по строкам). □

Теорема о ранге матрицы позволяет ввести следующее

Определение

Рангом матрицы называется число, равное любому из трех ее вышеопределенных рангов. Ранг матрицы A мы будем обозначать через $r(A)$.

Алгоритм нахождения ранга матрицы. Некоторые ранее сформулированные алгоритмы (1)

Из лемм 1 и 3 вытекает следующий

Алгоритм нахождения ранга матрицы

Приведем данную матрицу к ступенчатому виду. Число ненулевых строк в полученной матрице равно рангу исходной матрицы.

В лекции 7 был приведен без обоснования алгоритм определения линейной зависимости или независимости системы векторов из пространства \mathbb{R}_n . Напомним, в чем он состоит. Запишем данные векторы в матрицу по строкам и начнем приводить эту матрицу к ступенчатому виду. Если в процессе элементарных преобразований возникнет хотя бы одна нулевая строка, система линейно зависима. Если мы доведем матрицу до ступенчатого вида и нулевые строки в процессе преобразований не возникнут, система линейно независима. Теперь мы в состоянии обосновать этот алгоритм. При приведении матрицы к ступенчатому виду мы заменяем каждую строку матрицы на нетривиальную линейную комбинацию ее строк. Поэтому возникновение нулевой строки означает, что векторы-строки исходной матрицы линейно зависимы. Если же нулевых строк не возникло, то в силу лемм 1 и 3 размерность пространства, порожденного векторами-строками исходной матрицы равна числу этих строк, а значит эти векторы-строки линейно независимы.

Некоторые ранее сформулированные алгоритмы (2)

В лекции 9 был приведен без обоснования алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства пространства \mathbb{R}_n , порожденного данным набором векторов. Напомним, в чем он состоит. Запишем данные векторы в матрицу по строкам и приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом нашего подпространства, а число этих строк равно его размерности. Теперь мы в состоянии обосновать этот алгоритм. В самом деле, в силу алгоритма нахождения ранга матрицы число ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы равно рангу исходной матрицы по строкам, т. е. размерности пространства, порожденного ее векторами-строками. Далее, как проверено в процессе доказательства леммы 3, справедливо следующее

Замечание 1

Ненулевые векторы-строки ступенчатой матрицы линейно независимы. ☐

Следовательно, ненулевые векторы-строки полученной нами ступенчатой матрицы линейно независимы и их число равно размерности пространства, порожденного этими векторами-строками. В силу замечания 8 из лекции 8 эти векторы-строки образуют базис порожденного ими пространства.

В лекции 8 было введено понятие матрицы перехода от одного базиса к другому и утверждалось без доказательства, что определитель этой матрицы не равен 0. Теперь мы легко можем доказать этот факт. В самом деле, матрица перехода от одного базиса к другому — это квадратная матрица, порядок которой равен размерности рассматриваемого пространства. Обозначим это число через n . Векторами-столбцами этой матрицы являются координаты векторов нового базиса в старом. Следовательно, векторы-столбцы матрицы перехода линейно независимы, и потому ранг матрицы перехода по столбцам равен n . В силу теоремы о ранге ее ранг по минорам также равен n . Поскольку единственным минором n -го порядка квадратной матрицы порядка n является определитель этой матрицы, мы получаем, что определитель матрицы перехода не равен 0.

Нашей следующей целью является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2

Ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $k \times \ell$, а $B = (b_{ij})$ — матрица размера $\ell \times m$. Положим $C = AB$. По определению произведения матриц, первый столбец матрицы C имеет вид

[illegible]

Таким образом, первый столбец матрицы C является линейной комбинацией столбцов матрицы A . Аналогичное утверждение можно получить и для любого другого столбца матрицы C . Итак, все столбцы матрицы C являются линейными комбинациями столбцов матрицы A . Следовательно, подпространство, порожденное векторами-столбцами матрицы C , содержится в подпространстве, порожденном векторами-столбцами матрицы A . Размерность первого подпространства не превосходит поэтому размерности второго. Это означает, что ранг по столбцам матрицы C не превосходит ранга по столбцам матрицы A , т. е. $r(C) \leq r(A)$.

Рассуждая аналогично, легко убедиться в том, что строки матрицы C являются линейными комбинациями строк матрицы B . Отсюда вытекает неравенство $r(C) \leq r(B)$. □

В некоторых случаях ранг произведения матриц оказывается равным рангу одного из сомножителей. Укажем один из таких случаев.

Следствие 1

Если A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка и $|A| \neq 0$, то ранг матрицы AB равен рангу матрицы B .

Доказательство. Положим $C = AB$. По теореме 2 $r(C) \leq r(B)$. В силу критерия обратимости матрицы существует матрица A^{-1} . Равенство $C = AB$ умножим слева на A^{-1} . Получим

$$A^{-1}C = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = EB = B,$$

т. е. $B = A^{-1}C$. Применяя теорему 2 к последнему равенству получаем неравенство $r(B) \leq r(C)$. Следовательно, $r(B) = r(C)$. □

Теорема Кронекера–Капелли (1)

В оставшейся части лекции мы продемонстрируем, как понятие ранга матрицы возникает при исследовании систем линейных уравнений.

Следующее утверждение называется *критерием совместности системы линейных уравнений* или *теоремой Кронекера–Капелли*.

Теорема 3

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы.

Доказательство. Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений

[illegible]

Обозначим ее основную матрицу через A , а расширенную — через B . Векторы-столбцы матрицы A будем обозначать через $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n$, а столбец свободных членов — через \mathbf{b} . Пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы A , условимся обозначать через V_A , а пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы B , — через V_B .

Теорема Кронекера–Капелли (2)

Заметим, что система (5) может быть записана в виде векторного равенства $x_1 \mathbf{a}^1 + x_2 \mathbf{a}^2 + \dots + x_n \mathbf{a}^n = \mathbf{b}$. Следовательно, система (5) совместна в том и только в том случае, когда вектор \mathbf{b} является линейной комбинацией векторов-столбцов матрицы A , т. е. когда $\mathbf{b} \in V_A$.

Пусть система (5) совместна. Тогда вектор \mathbf{b} принадлежит пространству V_A . Это значит, что векторы-столбцы матрицы B принадлежат V_A , и поэтому $V_B \subseteq V_A$. Но столбцы матрицы A являются столбцами матрицы B . Отсюда следует, что $V_A \subseteq V_B$. Следовательно, $V_A = V_B$. Но тогда и $\dim V_A = \dim V_B$, т. е. ранг по столбцам матрицы A равен рангу по столбцам матрицы B . В силу теоремы о ранге матрицы, ранги матриц A и B равны.

Предположим теперь, что ранги матриц A и B равны. Положим $r = r(A) = r(B)$. Базис пространства V_A состоит из r векторов. Для удобства обозначений будем считать что он состоит из первых r векторов-столбцов матрицы A , т. е. из векторов $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^r$. Эти векторы принадлежат и пространству V_B . Размерность пространства V_B равна r . Следовательно, векторы $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^r$ образуют базис пространства V_B . Вектор \mathbf{b} принадлежит V_B и потому является линейной комбинацией базисных векторов. Итак, вектор \mathbf{b} является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^r$, а значит и линейной комбинацией всей системы векторов-столбцов матрицы A . Следовательно, система (5) совместна.



Отметим, что теорему Кронекера–Капелли легко вывести уже из метода Гаусса. В самом деле, как мы видели в лекции 4, *система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда при приведении ее расширенной матрицы к ступенчатому виду не возникает строки, в которой все элементы, кроме последнего, равны 0, а последний элемент отличен от 0*. Это, очевидно, равносильно тому, что *при приведении к ступенчатому виду основной и расширенной матриц системы получатся матрицы с одинаковым числом ненулевых строк*. С учетом алгоритма нахождения ранга матрицы, это, в свою очередь, равносильно тому, что *ранги основной и расширенной матриц системы равны*.

Таким образом, теорема Кронекера–Капелли не дает ничего нового по сравнению с методом Гаусса для анализа той или иной конкретной системы. Но она чрезвычайно полезна с теоретической точки зрения, так как используется в доказательствах целого ряда важных утверждений.