Вычислительная практика

Построение трассы КА. Решение уравнений Кеплера. Исследование возмущенного орбитального движения в несферичном гравитационном поле Земли.

Задание на вычислительную практику заключается в:

1) Построении трассы КА (нахождении последовательных пар широты и долготы подспутниковой точки) для заданных начальных условий
2) Исследование возмущенного движения КА в несферичном гравитационном поле Земли с оценкой полученных значений регрессии долготы восходящего узла орбиты и аргумента перицентра по аналитическим соотношениям
3) Разработка приложения с удобным интерфейсом для проведения расчетов по п.1 и 2 с возможностью сохранять результаты и считывать их с построением трассы по насчитанным значениям.

П.1

Формализуем алгоритм построения трассы следующим образом. Положение КА в инерциальной системе координат определяется соотношением (1).

$$\begin{cases} x_a = r_a \cdot (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) \\ y_a = r_a \cdot (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) \\ z_a = r_a \cdot \sin u \sin i \end{cases} \qquad (1)$$

где: $u = \vartheta + \omega$ – аргумент широты орбиты;

$\vartheta = 2 \cdot arctg\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot tg\left(\frac{E}{2}\right)\right)$ - истинная аномалия КА на орбите;

$r_a = a \cdot (1 - e\cos E) = \frac{a\cdot(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}$ – модуль радиус-вектора КА в ИСК.

При этом значение эксцентрической аномалии E, которая отвечает средней аномалии M. Находим методом приближений из уравнения Кеплера.
а) задать начальное значение эксцентрической аномалии $E_0 = M(t)$;
б) рассчитать новое значение эксцентрической аномалии согласно уравнению Кеплера по формуле

$$E_{i+1} = M + e\sin E_i$$

где i – номер итерации.
В случае выполнения условия

$$|E_{i+1} - E_i| \le \varepsilon$$

где ε – некоторое наперед заданное малое положительное число (ε=0,001град), решение полагается найденным и $E = E_{i+1}$. Конец алгоритма.

Если это условие не выполняется, то переходим к пункту в).

в) $E_i = E_{i+1}$. Алгоритм повторяется с пункта б).

Изменение средней аномалии во времени характеризуется следующим соотношением:

$$M(t) = M_0 + n \cdot t$$

Где: $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ – среднее движение, μ – гравитационный параметр Земли (398600.4415).

П.2

Определим матрицу перехода от инерциальной СК J2000 (в которой соотношениями (1) определен вектор положения КА) к гринвичской вращающейся системе координат.

Введем в рассмотрение набор констант:

Наименование	**Значение**
A	-19089.451590
B	8640184.812866
C	0.093104
D	-6.2e-6
JD0	2451545
JDD	36525
DS2R	7.272205216643039903848712e-5

Поставим в соответствие текущему времени, для которого справедливо положение КА вычисленное по соотношениям (1), Юлианскую дату JD.

Тогда, определим гринвичский угол по соотношениям (2).

$$t = \frac{JD - JD0}{JDD}$$

$$f = 86400 + fmod(\text{JD}, 1.0)$$

$$\alpha = \text{DS2R} \cdot \big((A + (B + (C + D \cdot t) \cdot t) \cdot t) + f\big) \qquad (2)$$

$$\alpha = fmod(\alpha, 2\pi)$$

$$\text{Если } \alpha < 0, \alpha = \alpha + 2\pi$$

где:

fmod(a,b) – остаток от деления a на b.

Матрица перехода от J2000 в гринвичскую СК будет определяться из соотношения:

$$M_{\text{гр}}^{j2k} = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

П.3

Построение трассы на основании соотношений из П.1 и П.2 можно формализовать следующим образом:

Широта и долгота подспутниковой точки приближенно могут быть получены с использованием соотношений:

$$\begin{cases} \varphi = asin\left(\frac{r_{z_{\text{ГрСК}}}}{|\bar{r}_{\text{ГрСК}}|}\right) \\ \lambda = atan2(r_{y_{\text{ГрСК}}}, r_{x_{\text{ГрСК}}}) \end{cases}, \text{ где } \bar{r}_{\text{ГрСК}} = \begin{bmatrix} r_{x_{\text{ГрСК}}} \\ r_{y_{\text{ГрСК}}} \\ r_{z_{\text{ГрСК}}} \end{bmatrix} = M^T \bar{r}_{j2000} \qquad (3)$$

$$\operatorname{atan2}(y,x) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{if } x > 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0, \\ +\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0, \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0. \end{cases}$$

Где

$$\bar{r}_{\text{ГрСК}} = M_{\text{гр}}^{j2k} \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix}$$

П.4 Моделирование возмущенного орбитального движения КА, представленного в виде дифференциальных уравнений

В инерциальной геоцентрической системе координат уравнения орбитального движения КА, учитывающие влияние возмущающих ускорений от несферичности гравитационного поля Земли, выглядят следующим образом:

$$\ddot{\bar{r}}_{j2000} = -\frac{\mu}{|\bar{r}_{j2000}|^3}\bar{r}_{j2000} + \bar{a}_{grav} \qquad (4)$$

где: $\bar{g}_{grav}$ – изменение ускорения за счёт влияния несферичности гравитационного поля; $\mu_{\text{км}}$ = 398600.4415 – гравитационный параметр Земли.

$\bar{r}_{j2000}$ – радиус-вектор КА.

Рассмотрим влияние на орбитальное движение КА только второй зональной гармоники из разложения в ряд по сферическим функциям геопотенциала Земли.

Возмущающее ускорение в гринвичской вращающейся системе координат определяется из соотношения:

$$\bar{a}_{J2} = -1.5J_2\left(\frac{\mu}{|\bar{r}|^2}\right)\left(\frac{R_{\oplus}}{|\bar{r}|}\right)\begin{bmatrix}\left(1-5\left(\frac{z}{|\bar{r}|}\right)^2\right)\frac{x}{|\bar{r}|}\\ \left(1-5\left(\frac{z}{|\bar{r}|}\right)^2\right)\frac{y}{|\bar{r}|}\\ \left(3-5\left(\frac{z}{|\bar{r}|}\right)^2\right)\frac{z}{|\bar{r}|}\end{bmatrix} \qquad (5)$$

Где $R_{\oplus} = 6.378137 \cdot 10^6$ [м] - средний радиус Земли,

$\mu = 3.986004418 \cdot 10^{14}$ – гравитационная постоянная Земли,

$J_2 = 1.08262668355 \cdot 10^{-3}$ – коэффициент второй зональной гармоники,

$\bar{r} = M_{\text{гр}}^{j2k}\bar{r}_{j2000} = \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ – радиус-вектор КА в гринвичской СК, в метрах (в уравнении (4) интегрирование ведется в километрах, поэтому при расчете $\bar{r}$ вектор $\bar{r}_{j2000}$ нужно перевести в метры).

После того, как получены значения вектора $\bar{a}_{J2}$ его значения требуется перевести в км/с^2 (изначально значения в м/с^2) и перевести в инерциальную СК для последующей подстановки в уравнение (4) согласно следующему выражению:

$$\bar{a}_{grav} = M_{\text{гр}}^{j2k^T}\bar{a}_{J2}$$

Интегрирование уравнения (4) требуется провести на интервале суток полета КА.

Аналитические соотношения для определения регрессии параметров орбиты за счет влияния второй зональной гармоники выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta\Omega = -3\pi J_2 \left(\frac{R_\oplus}{p}\right)^2 \cos i \\ \Delta\omega = \frac{3}{2}\pi J_2 \left(\frac{R_\oplus}{p}\right)^2 (5\,cos^{\,2} i - 1) \end{cases} \quad (6)$$

Где фокальный параметр:

$$p = \left(\frac{c_1}{|\bar{c}|}\right)^2 \Big/ \mu$$

Введем в рассмотрение так называемый векторный интеграл площадей, получаемый после интегрирования уравнения (4) из соотношения:

$$\bar{\mathrm{c}} = \bar{r} \times \bar{V} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{c}_2 \\ \mathrm{c}_3 \end{bmatrix}$$

Тогда определим долготу восходящего узла орбиты по следующим формулам:

$$\Omega = \begin{cases} \widetilde{\Omega} & \text{когда } c_1 \geq 0, c_2 \leq 0 \\ \pi - \widetilde{\Omega} & \text{когда } c_1 \geq 0, c_2 > 0 \\ \pi + \widetilde{\Omega} & \text{когда } c_1 < 0, c_2 \geq 0 \\ 2\pi - \widetilde{\Omega} & \text{когда } c_1 < 0, c_2 < 0 \end{cases}$$

Где:

$$\widetilde{\Omega} = \mathrm{atan}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$$

Для определения аргумента перицентра введем в рассмотрение интеграл Лапласа:

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

С компонентами:

$$\begin{cases} f_1 = -\mu \dfrac{x}{|\bar{r}|} + c_3 V_y - c_2 V_z \\ f_2 = -\mu \dfrac{y}{|\bar{r}|} + c_1 V_z - c_3 V_x \\ f_3 = -\mu \dfrac{z}{|\bar{r}|} + c_2 V_x - c_1 V_y \end{cases}$$

Тогда, для не нулевого наклонения аргумент перицентра можно найти из соотношения:

$$\cos(\omega) = \frac{f_1 \cos\Omega + f_2 \sin\Omega}{|\bar{f}|}$$

Для случая нулевого наклонения орбиты:

$$\sin\omega = \frac{f_3}{|\bar{f}|}$$

Наклонение орбиты можно определить из следующих соотношений:

$$\tilde{\imath} = \operatorname{acos}\left(\frac{c_3}{|\bar{c}|}\right)$$

$$i = \begin{cases} i, \text{когда } c_3 > 0 \\ \pi - i, \ \text{ когда } c_3 < 0 \end{cases}$$

В результате численного интегрирования уравнений (4) на интервале времени:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

Где величина большой полуоси определяется из соотношения:

$$a = \frac{\mu}{\left(\dfrac{2\mu}{|\bar{r}|} - |\bar{V}|^2\right)}$$

Изменение Ω и ω должно соответствовать получаемым в соотношении (6) значениям. Кроме того, требуется также построить трассу КА уже с учетом возмущений.

Исходные данные для решения уравнений Кеплера

Вариант	a, км	e	i, град	**Ω**, град	ω, град	M, град
1	10 000	0,1	10	5	0	0
2	12 000	0,1	20	10	0	15
3	15 000	0,2	30	15	0	30
4	17 500	0,3	45	20	0	45
5	20 000	0,4	60	25	0	60

Исходные данные для численного моделирования орбитального движения

№	эпоха, ДМВ	r_x, км	r_y, км	r_z, км	V_x, км/с	V_y, км/с	V_z, км/с
1	22.05.2019 20:41:16.000	-1195.712	-829.495	-6818.185	1.954065	7.195319	-1.222097
2	22.07.2019 09:24:07.000	4832.953301	990.052321	-4966.121101	1.118306	7.034793	2.490784
3	04.06.2019 13:26:13.000	-14849.674121	-6184.115762	5525.320326	2.914687	-0.917413	-4.746170
4	19.11.2019 14:00:00.000	-421.823286	12959.554335	-12207.956450	-2.508083	-0.440931	4.824007
5	17.04.2019 02:12:47.000	7905.147056	1087.902585	-570.191185	-0.587815	6.103754	3.496244